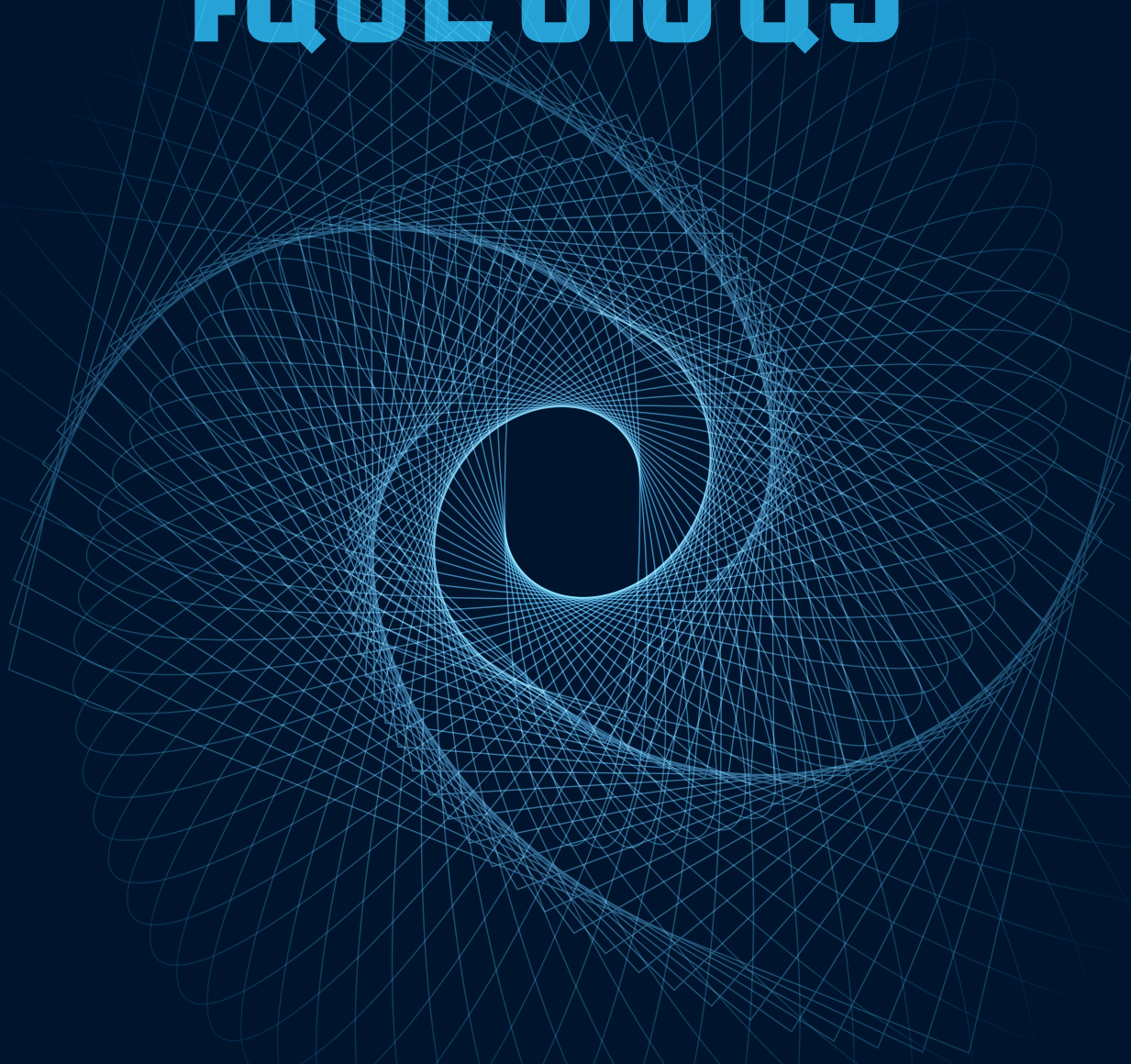


ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՆԱԽԱԼՍԱՐԱՆ

Կարեն Ավետիսյան

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ԴԱՍԸՆԹԱՅ



ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԿԱՐԵՆ ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ
ԴԱՍԸՆԹԱՑ

Դասագիրք

ԵՐԵՎԱՆ

ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ

2026

ՀՏԴ 517(075.8)
ԳՄԴ 22.161g73
Ա 791

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ գիտական խորհուրդը:*

Խմբագիր՝ ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի դեկան,
ֆիզմաթ գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ

Ա. Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Գրախոսներ՝ ֆիզմաթ գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Մ.Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ֆիզմաթ գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ս.Ա. ԵՊԻՍԿՈՊՈՍՅԱՆ

ֆիզմաթ գիտ. թեկնածու, դոցենտ Գ.Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Ավետիսյան Կարեն
Ա 791 Մաթեմատիկական անալիզի դասընթաց: Դասագիրք / Կ. Ավետիսյան.- Եր.:
ԵՊՀ հրատ., 2026.- 544 էջ:

Դասագիրքն ընդգրկում է «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկայի ամբողջական դասընթացը, որը համապատասխանում է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի ակտուարական և ֆինանսական մաթեմատիկա մասնագիտության ծրագրին: Ներկայացված նյութը «Մաթեմատիկական անալիզ-1,-2,-3» առարկայի երեք կիսամյակների դասախոսությունների մշակված տարբերակն է նշված մասնագիտության բակալավրիատի 1-ին ու 2-րդ կուրսի ուսանողների համար: Դասագիրքը նախատեսված է առաջին հերթին տնտեսագիտական թեքումով և մաթեմատիկայի խորացված ծրագրով մասնագիտությունների ուսանողների համար, բայց նաև օգտակար կլինի ֆիզիկամաթեմատիկական, բնագիտական և տեխնիկական մասնագիտությունների ուսանողների համար:

ՀՏԴ 517(075.8)
ԳՄԴ 22.161g73

ISBN 978-5-8084-2759-4
<https://doi.org/10.46991/YSUPH/9785808427594>

© ԵՊՀ հրատ., 2026
© Ավետիսյան Կ., 2026

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Նեղինակի կողմից	11
Գլուխ 1 Ներածություն	13
1.1 Բազմություններ, գործողություններ դրանց հետ	15
1.2 Թվային բազմություններ	20
1.3 Ֆունկցիայի գաղափարը, ընդհանուր հատկություններ	24
1.4 Թվային բազմության եզրեր, ճշգրիտ եզրեր	30
1.5 Նաշվելի և անհաշվելի բազմություններ	34
Գլուխ 2 Նաջորդականությունների տեսություն	37
2.1 Նաջորդականության սահման	37
2.2 Անվերջ փոքրեր և անվերջ մեծեր	42
2.3 Անվերջ փոքրերի հատկությունները	45
2.4 Զուգամետ հաջորդականությունների հատկությունները	47
2.5 Մոնոտոն հաջորդականությունների սահմանը	55
2.6 e թիվը որպես հաջորդականության սահման	58
2.7 Ենթահաջորդականություններ, մասնակի սահմաններ	60
2.8 Կուրակման (սահմանային) կետեր, վերին և ստորին սահմաններ	65
2.9 Ֆունդամենտալ հաջորդականություններ: Զուգամիտության Կոշու սկզբունքը	67
Գլուխ 3 Ֆունկցիայի սահմանը և անընդհատությունը	71
3.1 Ֆունկցիայի սահմանը	71
3.2 Ֆունկցիայի միակողմանի սահմաններ	76
3.3 Գործողություններ ֆունկցիայի սահմանի հետ	79

3.4	Զուգամիպության Կոշու սկզբունքը	82
3.5	Անընդհար ֆունկցիաներ, պարզագույն հարկություններ	85
3.6	Մոնոտոն ֆունկցիաների սահմանները	89
3.7	Բարդ ֆունկցիայի անընդհարությունը	92
3.8	Նակադարձ ֆունկցիայի անընդհարությունը	93
3.9	Տարրական ֆունկցիաների անընդհարությունը	97
3.10	Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների անընդհարությունը և առաջին նշանավոր սահմանը	102
3.11	Այլ նշանավոր սահմաններ և հերևանքներ	105
3.12	Ֆունկցիայի սահմանի Գնդեսագիտական մեկ կիրառում: Պարզ, բարդ և անընդհար Գոկոսների բանաձևերը	111
3.13	Ֆունկցիայի խզումները, խզումների դասակարգումը	114
3.14	Մոնոտոն ֆունկցիայի խզումները	118
3.15	Անընդհար ֆունկցիաների հարկությունները փակ հարվածում: Բոլցանո-Կոշու թեորեմները	119
3.16	Անընդհար ֆունկցիայի նշանի պահպանման հարկությունը	123
3.17	Վայերշտրասի թեորեմները	125
3.18	Ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհարությունը	128

Գլուխ 4 Ֆունկցիայի աձանցյալ և դիֆերենցիալ:

Դիֆերենցելի ֆունկցիաներ 131

4.1	Ֆունկցիայի աձանցյալ	131
4.2	Աձանցյալի երկրաչափական իմաստը	137
4.3	Ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը և դիֆերենցիալը	139
4.4	Դիֆերենցման կանոնները	142
4.5	Բարդ ֆունկցիայի աձանցյալը	143
4.6	Նակադարձ ֆունկցիայի աձանցյալը	145
4.7	Բարձր կարգի աձանցյալներ և դիֆերենցիալներ	146
4.8	Դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական թեորեմները: Ֆերմայի թեորեմը	148
4.9	Ռոլլի թեորեմը	151
4.10	Լագրանժի թեորեմը վերջավոր աձերի մասին	152

4.11	Կոշու թետրեմը վերջավոր աճերի մասին	154
4.12	Լուսնի Կանոնը	155
4.13	Թեյլորի բանաձևը:	
	Թեյլորի բանաձևը բազմանդամի համար	158
4.14	Թեյլորի բանաձևը ֆունկցիաների համար	159
4.15	Տարրական ֆունկցիաների Թեյլորի բանաձևերը	162
4.16	Ֆունկցիայի հեքսագոնումը մոնոտոնության և էքսպրեմումների միջոցով:	
	Ֆունկցիայի մոնոտոնության պայմանները	165
4.17	Լոկալ էքսպրեմումի անհրաժեշտ պայմանը	166
4.18	Լոկալ էքսպրեմումի բավարար պայմանները	168
4.19	Ուռուցիկ և գոգավոր ֆունկցիաներ	172
4.20	Ուռուցիկ ֆունկցիաների բնութագրումն ածանցյալների միջոցով	176
4.21	Շրջման կետ	181
4.22	Ֆունկցիայի ասիմպտոտները	183
4.23	Ֆունկցիայի հեքսագոնման և գրաֆիկի կառուցման սխեման	186
4.24	Նշանավոր անհավասարություններ գումարների համար	189
	4.24 ա. Յենսենի անհավասարությունը	189
	4.24 բ. Յունգի անհավասարությունը	190
	4.24 գ. Նյուդերի անհավասարությունը	191
	4.24 դ. Մինկովսկու անհավասարությունը	192
4.25	Ածանցյալի որոշ Կոշի-Կոնյուսկի և Կոշի-Կոնյուսկի անհավասարություններ	194
	4.25 ա. Ածանցյալի և լոգարիթմական ածանցյալի Կոշի-Կոնյուսկի անհավասարությունները	194
	4.25 բ. Պահանջարկի գնառաձգականությունը	195

Գլուխ 5 Անորոշ և որոշյալ ինտեգրալներ 199

5.1	Նախնական ֆունկցիա և անորոշ ինտեգրալ	199
5.2	Անորոշ ինտեգրալի պարզագույն հատկությունները	202
5.3	Անորոշ ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինման եղանակը	203
5.4	Մասերով ինտեգրում և անորոշ ինտեգրալում	206
5.5	Մասերով ինտեգրման բանաձևի կիրառում բնորոշ մի ինտեգրալի նկարագրում	210

5.6	Ռացիոնալ և այլ ֆունկցիաների ինտեգրումը	211
5.7	Պարզագույն ռացիոնալ կոպորակների ինտեգրումը	212
5.8	Կանոնավոր և անկանոն ռացիոնալ կոպորակների ինտեգրումը	213
5.9	Իռացիոնալ և եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ինտեգրումը	217
5.10	Ռիմանի որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը	218
5.11	Ինտեգրելիության անհրաժեշտ պայմանը	222
5.12	Դարբուի գումարներ	224
5.13	Դարբուի գումարների հատկությունները	225
5.14	Ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը: Նիմնական թեորեմը	231
5.15	Ինտեգրելի ֆունկցիաների դասեր	235
5.16	Որոշյալ ինտեգրալի՝ հավասարություններով արտահայտվող հատկությունները	241
5.17	Որոշյալ ինտեգրալի՝ անհավասարություններով արտահայտվող հատկությունները	246
5.18	Միջին արժեքի թեորեմներ	251
5.19	Որոշյալ ինտեգրալը որպես վերին սահմանի ֆունկցիա	255
5.20	Նյուտոն-Լայբնիցի կամ ինտեգրալային հաշվի հիմնական բանաձևը	258
5.21	Փոփոխականի փոխարինում (տեղադրում) որոշյալ ինտեգրալում	259
5.22	Մասերով ինտեգրում որոշյալ ինտեգրալում	262
5.23	Բազմություններ, հարթ պատկերներ	264
5.24	Նարթ պատկերի մակերեսի գաղափարը, քառակուսելի բազմություններ	267
5.25	Որոշ կորագիծ պատկերների մակերեսների բանաձևեր	271
5.26	Խորանարդելի մարմիններ	273
5.27	Անընդհատ և ուղղելի կորեր: Կորի երկարությունը	275
5.28	Ինտեգրալի որոշ տնտեսագիտական կիրառություններ, Լորենցի կոր և Զինիի գործակից	280
5.29	Անիսկական ինտեգրալ (1-ին սեռի)	283
5.30	Զուգամիտության Կոշու սկզբունքն 1-ին սեռի անիսկական ինտեգրալների համար	286

5.31	Դրական ինքնագրալների բաղդապման թեորեմներ	287
5.32	Անիսկական ինքնագրալների բացարձակ և պայմանական զուգամիությունը	290
5.33	Անսահմանափակ ֆունկցիայի 2-րդ սեռի անիսկական ինքնագրալ	295
5.34	Նշանավոր անհավասարություններ ինքնագրալների համար	300
5.34 ա.	Նյուդերի անհավասարությունն ինքնագրալների համար	300
5.34 բ.	Մինկովսկու անհավասարությունն ինքնագրալների համար	302
5.34 գ.	Յենսենի անհավասարությունն ինքնագրալների համար	303

Գլուխ 6 Շարքերի տեսություն **305**

6.1	Թվային շարքեր և նրանց զուգամիությունը	305
6.2	Շարքերի պարզագույն հարկությունները	308
6.3	Շարքի զուգամիության Կոշու սկզբունքը	310
6.4	Դրական շարքեր: Դրական շարքերի բաղդապման թեորեմներ	313
6.5	Կոշու և Դալամբերի հայրանիշները	315
6.6	Կոշու ինքնագրալային հայրանիշը	319
6.7	Նշանափոխ շարքեր: Շարքի բացարձակ և պայմանական զուգամիությունը	322
6.8	Աբել-Դիրիխլեի և Լայբնիցի հայրանիշները	323
6.9	Շարքերի զուգորդական և տեղափոխական հարկություններ: Զուգամեք շարքի զուգորդական հարկությունը	326
6.10	Շարքերի տեղափոխական հարկությունը	328
6.11	Շարքերի արտադրյալը	329
6.12	Անվերջ արտադրյալներ	330
6.13	Ֆունկցիոնալ հաջորդականություններ և շարքեր: Կեյսային և հավասարաչափ զուգամիություն	332
6.14	Ֆունկցիոնալ հաջորդականության և շարքի հավասարաչափ զուգամիության Կոշու սկզբունքը	338
6.15	Շարքերի հավասարաչափ զուգամիության հայրանիշներ և հարկություններ: Շարքի հավասարաչափ զուգամիության Վայերշտրասի մաժորանտային հայրանիշը	340

6.16	Շարքի հավասարաչափ գուգամիություն	
	Աբել-Դիրիխլեի և Լայբնիցի հայրանիշները	341
6.17	Նավասարաչափ գուգամետր հաջորդականությունների և շարքերի հարկություններ	342
6.18	Աստիճանային շարքեր:	
	Աստիճանային շարքի գուգամիության փիրույթը	346
6.19	Թեյլորի շարքեր	351
6.20	Ֆուրիեի շարքեր	355

Գլուխ 7 Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաներ 373

7.1	Ֆունկցիաներ և բազմություններ $\mathbb{R}^n$ -ում	373
7.2	Կետերի հաջորդականության սահմանի գաղափարը	378
7.3	Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը	380
7.4	Կրկնապարիկ և հաջորդական սահմաններ	382
7.5	Անընդհատ ֆունկցիաներ	385
7.6	Որոշ կարևոր թեորեմներ անընդհատ ֆունկցիաների մասին	387
7.7	Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցիալ հաշիվ:	
	Մասնակի ածանցյալներ և դիֆերենցելիություն	388
7.8	Դիֆերենցելիության բավարար պայմանը	393
7.9	Բարդ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները, դիֆերենցման շղթայական կանոնը	395
7.10	Մասնակի ածանցյալ տվյալ ուղղությամբ	397
7.11	Բարձր կարգի մասնակի ածանցյալներ	406
7.12	Բարձր կարգի դիֆերենցիալներ	409
7.13	Թեյլորի բանաձևը	411
7.14	Անբացահայտ ֆունկցիաներ:	
	Մեկ հավասարումով որոշվող անբացահայտ ֆունկցիա	415
7.15	Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների լոկալ էքստրեմումներ:	
	Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը	420
7.16	Լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար	427
7.17	Շարք փոփոխականների ֆունկցիաների լոկալ էքստրեմումները	435

7.18	Ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումները և Լագրանժի մեթոդը: Խնդրի դրվածքը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար	439
7.19	Պայմանական էքստրեմումի խնդիրը երեք փոփոխականի ֆունկցիաների համար	455

Գլուխ 8 Ռ-իմանի ինպեգրալի հեքադա ընդհանրացումները՝

- **պարամետրից կախված ինպեգրալներ (ՊԿԻ),**
- **Սքիլոյեսի ինպեգրալ,**
- **կրկնակի ինպեգրալ** **463**

8.1	Պարամետրից կախված ինպեգրալների (ՊԿԻ) հավասարաչափ գուգամիությունը	463
8.2	Պարամետրից կախված ինպեգրալների հարկությունները	465
8.3	Պարամետրից կախված անիսկական ինպեգրալի (ՊԿԱԻ) հավասարաչափ գուգամիությունը	467
8.4	Պարամետրից կախված անիսկական ինպեգրալի (ՊԿԱԻ) հավասարաչափ գուգամիության հայրանիշներ	470
8.5	Պարամետրից կախված անիսկական ինպեգրալների (ՊԿԱԻ) անընդհարությունը, դիֆերենցիությունը, ինպեգրելիությունը և այլ հարկություններ	472
8.6	Նշանավոր անիսկական ինպեգրալներ: Դիրիխլեի ինպեգրալը	475
8.7	Պուասոնի (Պուասոն-Էյլերի) ինպեգրալը	477
8.8	Էյլերյան ինպեգրալներ: Էյլերի բերա ֆունկցիա	481
8.9	Էյլերի գամմա ֆունկցիա	483
8.9 ա.	Գամմա ֆունկցիայի վարքը	485
8.9 բ.	Բերա և գամմա ֆունկցիաների կապը	486
8.10	Գամմա և բերա ֆունկցիաների այլ հարկություններ	488
8.11	Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ	489
8.12	Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների դասեր	492
8.13	Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների հարկություններ	496
8.14	Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիայի Ժորդանի վերլուծությունը	499
8.15	Սքիլոյեսի (կամ Ռ-իման-Սքիլոյեսի) ինպեգրալը	501

8.16	Սրիլյայեսի ինտեգրալի հաշվման բանաձևեր	504
8.17	Սրիլյայեսի ինտեգրալի՝ անհավասարություններով արտահայտվող հատկություններ	509
8.18	Կրկնակի ինտեգրալ	511
8.19	Ինտեգրելի ֆունկցիաների դասեր և հատկություններ	515
8.20	Կրկնակի ինտեգրալի հաշվումը և Ֆուբինիի թեորեմը	520
8.21	Փոփոխականի փոխարինում կրկնակի ինտեգրալում և մակերեսի հաշվումը	527
ՆԱՎԵԼՎԱԾ-1.	Նշանավոր սահմանների ցանկ	530
ՆԱՎԵԼՎԱԾ-2.	Ածանցյալների աղյուսակներ	532
ՆԱՎԵԼՎԱԾ-3.	Թեյլորի բանաձևեր	533
ՆԱՎԵԼՎԱԾ-4.	Թեյլորի շարքեր	534
ՆԱՎԵԼՎԱԾ-5.	Ինտեգրալների աղյուսակ	535
ՆԱՎԵԼՎԱԾ-6.	Նշանավոր անիսկական ինտեգրալներ	536
ՆԱՎԵԼՎԱԾ-7.	Դասագրքում հիշարժեքավոր ակնանավոր մաթեմատիկոսների և այլ գիտնականների ցանկ	537
Summary		541
Գրականության ցանկ		542

Նեղինակի կողմից

«Մաթեմատիկական անալիզ» բուհական առարկայի վերաբերյալ օտար լեզուներով մեծաքանակ գրականություն կա, սակայն հայերենով դրանք բավականին սակավաթիվ են (տե՛ս գրականության ցանկը): Ներկա դասագիրքը փորձ է որոշ չափով լրացնելու առկա բացը: Սույն դասընթացի բովանդակությունը համապատասխանում է ԵՊՏ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի ակտուարական և ֆինանսական մաթեմատիկա մասնագիտության «Մաթեմատիկական անալիզ-1,-2,-3» առարկայի ծրագրին: Դասագրքի հիմք են ծառայել հեղինակի՝ երկար տարիներ կարդացած դասախոսությունները ԵՊՏ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի ակտուարական և ֆինանսական մաթեմատիկա մասնագիտության ուսանողներին:

Դասագրքի նպատակն է դյուրացնել «Մաթեմատիկական անալիզ» ավանդաբար բարդ առարկայի յուրացումը: Նաշվի առնելով առարկայի բարդությունը 1-2-րդ կուրսի ուսանողների համար՝ հեղինակը նպատակ էր դրել տարբեր միջոցներով հնարավորինս թեթևացնել առարկայի ուսումնասիրությունը և յուրացումը: Դրա համար նա պարզեցրել և հստակեցրել է շարադրանքը, բացատրությունները տեսանելի դարձնելու համար անհրաժեշտության դեպքում ներկայացրել է գծապատկերներ ու գրաֆիկներ: Նեղինակը ձգտել է պահպանել կենդանի դասախոսության մթնոլորտը: Տեքստում շրջանակների մեջ վերցված և ընդգծված բազմաթիվ բանաձևերի ու ձևակերպումների նպատակն է շեշտելու կարևորը, արտահայտելու բանավոր խոսքի անմիջականությունը: Դա փորձ է ընթերցողին կարծես լսարան տեղափոխել և փոխհապտուցել դասախոսի հետ անմիջական շփման բացակայությունը: Այդ ընթացքում առաջացող շարադրանքի թերությունները թերևս անխուսափելի են: Կարևոր հասկացություններին և թեորեմներին հաջորդում են լուծված օրինակներ, այդ թվում՝ փոփոխականության բնույթի: Այնուամենայնիվ, միայն սույն դասագրքում բերված օրինակները բավարար չեն առարկան խորությամբ յուրացնելու համար: Նեղինակն ընթերցողին խորհուրդ է տալիս զուգահեռ օգտվել մաթեմատիկական անալիզի որևէ խնդրագրքից, օրինակ՝ գրականության ցանկում տրված [8] և [9] աղբյուրներից:

Դասագիրքը պարունակում է դասական «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկայի հիմնական թեմաները, որոնցից են՝ հաջորդականության սահման, ֆունկցիայի սահման, անընդհատ և դիֆերենցելի ֆունկցիաներ, ֆունկցիաների հեքագոյություն ու գրաֆիկի կառուցում, Ռիմանի որոշյալ ինտեգրալ, անիսկական ինտեգրալներ, թվային և ֆունկցիոնալ շարքերի տեսություն, մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաներ, հարկապես դրանց էքստրեմումների տեսությունը, պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալներ, հարկապես Դիրիխլեի, Պուասոնի, Էյլերի նշանավոր ինտեգրալները, վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ, Ռիման-Ստիլտյեսի ինտեգրալ, կրկնակի ինտեգրալներ: Մաթեմատիկական անալիզի ընդհանուր դասընթացը, ինչպես հայրնի է , ծավալուն, բազմազան և ուսանողների համար դժվար յուրացվող առարկաներից է : Դասախոսությունների ժամաքանակի

սահմանափակության պարճառով դասախոսը մշտապես ծանր ընտրության առջև է՝ որ թեմաները խորությամբ մաքուրցել ուսանողին, իսկ որոնք կարելի է բաց թողնել կամ թռուցիկ ներկայացնել՝ ձգտելով փեղավորվել ժամաքանակի մեջ: Ներկա դասագիրքն առաջարկում է մանրամասն ու խիստ ապացույցներով և առանց ապացույցների թեմաների ու փոխադրումների ցանկ, որը, հեղինակի կարծիքով, համապատասխանում է փոփոխագիտական թեքումով և մաթեմատիկայի խորացված ծրագրով մասնագիտություններին: Այնուամենայնիվ, անհրաժեշտության դեպքում դասախոսը բերված որոշ ապացույցներ և անգամ առանձին թեմաներ կարող է չեղարկել՝ դասընթացը «բեռնաթափելու» նպատակով: Թեև դասագիրքը նախատեսված է առաջին հերթին մաթեմատիկայի խորացված ծրագրով մասնագիտությունների ուսանողների համար, այն օգտակար կլինի նաև ֆիզիկամաթեմատիկական, բնագիտական և տեխնիկական բոլոր մասնագիտությունների ուսանողներին: Սակայն ֆիզիկամաթեմատիկական մասնագիտությունների ուսանողներին պետք է զգուշացնեն՝ մի քանի կարևոր թեմաներ ներկայացված են խիստ հակիրճ և առանց ապացույցների, բացի այդ դասագրքում փեղ չեն գտել մաթեմատիկոսների ու ֆիզիկոսների համար այնքան կարևոր թեմաներ, ինչպիսիք են կորագիծ ինտեգրալներ, մակերևութային և եռակի (բազմակի) ինտեգրալներ: Իսկ ովքեր կհետաքրքրվեն ավելի խորը, բազմազան կամ ավելի նեղ ուղղության տեսական գիտելիքներով և կիրառություններով, կարող են դիմել դասագրքի վերջում բերված գրականությանը:

Ցանկանում եմ ուսանողներին հաջողությամբ յուրացնել այս բարդ առարկան, ինչը թույլ կտա անցնել ավելի մասնագիտական առարկաներին և կիրառություններին: Նշելով, որ շնորհակալությամբ կընդունի յուրաքանչյուր դիտողություն ու առաջարկ:

Շնորհակալություն եմ հայտնում պրոֆեսորներ Մ. Գրիգորյանին, Ս. Եպիսկոպոսյանին, դոցենտներ Գ. Միքայելյանին, Մ. Պողոսյանին, Ս. Զիլավյանին արժեքավոր դիտողությունների և առաջարկությունների համար, ինչպես նաև պրոֆեսորներ Ա. Սահակյանին և Վ. Աթաբեկյանին՝ աջակցության համար:

Կարեն Ավերիսյան,

Երևան, հունվար, 2026 թ.

Գլուխ 1

Ներածություն

Սկսենք որոշ նշանակումներից.

$\forall$ նշանակում է «ցանկացած, կամայական, յուրաքանչյուր կամ բոլոր»;

$\exists$ նշանակում է «գոյություն ունի»;

$\exists !$ նշանակում է «գոյություն ունի, ընդ որում՝ միակը»

(երբեմն $\forall$ և $\exists$ նշաններն անվանում են **քվանտորներ**);

s.t. նշանակում է «այնպիսին, որ» (such that);

$\square$ նշանակում է ապացույցի ավարտը;

$\implies$ նշանակում է , որ սլաքի ձախ կողմում գրված պայմանից հետևում է սլաքի աջ կողմի պայմանը;

$\iff$ համարժեքության նշանն է , այն ցույց է փալիս, որ ձախ և աջ կողմերում գրված պայմանները

համարժեք են այն իմաստով, որ մեկից հետևում է մյուսը;

$k = \overline{1, n}$ կամ $1 \leq k \leq n$ փեսքի գրառումները նշանակում են, որ k ինդեքսն ընդունում է **բոլոր ամբողջ** արժեքները 1-ից մինչև n , այսինքն՝ $k = 1, 2, \dots, n$: Նմանապես՝ $k = \overline{0, n}$ կամ $k = \overline{2, n+1}$ դեպքերում:

Մաթեմատիկական անալիզի ամբողջ դասընթացը բաղկացած է ճիշտ կամ սխալ **ասույթներից** և դրանց վերլուծությունից: Որպես օրինակներ բերենք դպրոցական դասընթացից հայտնի մի քանի պարզագույն ասույթներ՝ կամայական x, y (իրական) թվերի համար ձևակերպված.

$$(x = y) \implies (x^2 = y^2), \quad (1-1)$$

բայց հակադարձը սխալ է՝ $(x = y) \nleftarrow (x^2 = y^2), \quad (1-2)$

$$(x > 1) \implies (x^2 > 1), \quad (1-3)$$

բայց հակադարձը սխալ է՝ $(x > 1) \nleftarrow (x^2 > 1), \quad (1-4)$

$$(x > 1) \iff (x^3 > 1) : \quad (1-5)$$

Նկատենք, որ բերված բոլոր (1-1)-(1-5) ասույթները ճիշտ են, թեև բնույթով փարբերվում են իրարից: Օրինակ, (1-1)-ը ճիշտ միակողմանի ասույթ է. այն գործում է ձախից աջ, բայց ոչ աջից ձախ, ինչպես նշված է (1-2)-ում: Նույնը կարելի է ասել (1-3)-(1-4) ասույթների մասին: Այս իրավիճակին մաթեմատիկայում փարբեր ձևակերպումներ են փալիս: Մասնավորապես, (1-1)-(1-2)-ից կարելի է ասել, որ

$x = y$ պայմանը $x^2 = y^2$ պայմանի համար **բավարար** է, բայց ոչ **անհրաժեշտ**, կամ էլ

$x^2 = y^2$ պայմանը $x = y$ պայմանի համար **անհրաժեշտ** է, բայց ոչ **բավարար**, կամ էլ

$x = y$ պայմանը $x^2 = y^2$ պայմանից **ավելի ուժեղ** է, կամ էլ

$x^2 = y^2$ պայմանը $x = y$ պայմանից **ավելի թույլ** է:

Մինչդեռ (1-5) ասույթից փետնում ենք, որ $x > 1$ և $x^3 > 1$ պայմանները համարժեք են, այսինքն՝ մեկը բխում է մյուսից: Կարելի է ասել նաև, որ $x > 1$ պայմանը $x^3 > 1$ պայմանի համար **անհրաժեշտ և բավարար** է:

Բերված բնութագրումները կիրառվում են անգամ մաթեմատիկայից հեռու բնագավառներում: Ընթերցողը կարող է ձևակերպել (1-1)-(1-5)-ին նման ոչ մաթեմատիկական ասույթներ:

Ասույթները մաթեմատիկայում սովորաբար այլ կերպ են անվանում՝ **թեորեմ, լեմմա, պնդում, հավելություն, հայտանիշ**: Դրանք բոլորը հիմնավորելու կամ ապացուցելու կարիք ունեն: Բացի այդ, կան **աքսիոմներ, սահմանումներ**, որոնք ապացույցի կարիք չունեն:

Ներկայացնենք նաև **հունական այբուբենը**, որի փառերը լայնորեն օգտագործվում են ամբողջ դասագրքում.

A	α	ալֆա	I	ι	յոյրա	P	ρ	ռո
B	β	բեթա	K	κ	կապա	Σ	σ	սիգմա
Γ	γ	գամմա	Λ	λ	լամբդա = լամդա	T	τ	տաու
Δ	δ	դելտա	M	μ	մյու	Υ	ν	ուպսիլոն = իպսիլոն
E	ε	էպսիլոն	N	ν	նյու	Φ	φ	ֆի
Z	ζ	ձեթա	Ξ	ξ	քսի	X	χ	խի
H	η	էթա	O	o	օմիկրոն	Ψ	ψ	փսի
Θ	θ	թեթա	Π	π	պի	Ω	ω	օմեգա

1.1 Բազմություններ, գործողություններ դրանց հեպ

Այս գլխում կժանոթանանք բազմության և ֆունկցիայի ընդհանուր սահմանումներին ու հարկություններին: Մենք նպատակ չունենք մանրամասն և հիմնովին քննարկելու այս թեման, այլ միայն ներածական խոսքով կներկայացնենք այն, որպեսզի սկզբնական գաղափար կազմենք և կիրառենք հեպագայում:

Սկսենք բազմությունների տեսության որոշ հարցերից: Բազմության գաղափարը բավականին վերացական և անորոշ բնույթ ունի: Ընդունելի է բազմության հեպնյալ սահմանումը:

Սահմանում 1.1. *Ցանկացած բնույթի տարրերակվող օբյեկտների համախումբ (միավորում) կարելի է բազմություն անվանել: Այն օբյեկտները, որոնցից բաղկացած է բազմությունը, կոչվում են բազմության տարրեր կամ էլեմենտներ:*

Եթե X -ն ինչ-որ բազմություն է, և x -ը նրա ինչ-որ տարր է, ապա կգրենք $x \in X$ կամ $X \ni x$:

Բազմությունը և նրա տարրերը կարող են ամենապարբեր վերացական բնույթի լինել: Բայց ամեն դեպքում ըստ տարրերի քանակի բազմությունները բաժանվում են երկու խմբի՝ **վերջավոր և անվերջ**:

Օրինակ, բոլոր մարդկանց բազմությունը վերջավոր է, իսկ բոլոր մոլորակների բազմությունը՝ անվերջ:

Սահմանում 1.2. *Կասենք, որ երկու բազմություն հավասար են կամ համընկնում են, կգրենք $A = B$, եթե դրանք բաղկացած են միևնույն տարրերից:*

Իսկ եթե A բազմության ցանկացած տարր նաև B բազմության տարր է, ապա կգրենք

$$A \subset B \quad \text{կամ} \quad B \supset A$$

և կասենք, որ A -ն B -ի ենթաբազմություն է, կամ A բազմությունը ներդրված է (պարունակվում է) B -ի մեջ: Նաճախ ասում են նաև, որ A բազմությունը B -ից նեղ է, կամ B բազմությունը A -ից լայն է:

Կարճ սիմվոլներով բերված սահմանումը կարելի է գրել այսպես՝

$$(A \subset B) \iff (\forall x \in A \implies x \in B): \quad (1-6)$$

Օրինակ, եթե A -ն բոլոր եռանկյունների բազմությունն է, իսկ B -ն՝ բոլոր բազմանկյունների բազմությունը, ապա $A \subset B$: Կարճ՝ (1-6) տեսքի բնութագրումները շատ հարմար են, և լայնորեն կիրառելու ենք: Օրինակ, երկու բազմությունների հավասարությունը կարելի է լիովին բնութագրել բազմությունների ներդրման միջոցով.

$$(A = B) \iff (A \subset B \quad \text{և} \quad B \subset A): \quad (1-7)$$

Առհասարակ, բազմությունները սահմանելիս մենք օգտագործելու ենք հետևյալ գրելաձևը, որը նկարագրում է բազմության փարբերը.

$$A = \{x; x \in (P)\} :$$

Սա նշանակում է, որ A բազմությունը կազմված է այն x փարբերից, որոնք օժտված են ինչ-որ (P) հատկությամբ:

Սահմանում 1.3. Այն բազմությունը, որը չի պարունակում ոչ մի փարբեր կոչվում է **դատարկ** և նշանակվում $\emptyset$ սիմվոլով:

Դատարկ բազմությունը ներդրված է ցանկացած A բազմության մեջ. $\emptyset \subset A$:

Նիշենք դպրոցական դասընթացից ծանոթ մի քանի գործողություններ բազմությունների հետ՝ բազմությունների միավորում, հատում, փարբերություն:

Սահմանում 1.4. Կամայական A և B բազմությունների համար սահմանենք

բազմությունների միավորում՝

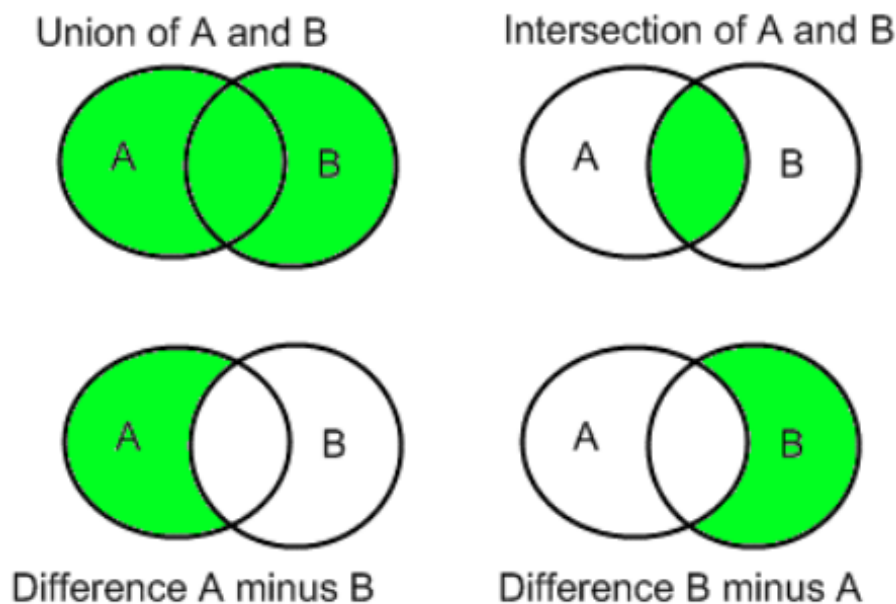
$$A \cup B \stackrel{def}{=} \{x; x \in A \text{ կամ } x \in B\},$$

բազմությունների հատում՝

$$A \cap B \stackrel{def}{=} \{x; x \in A \text{ և } x \in B\},$$

բազմությունների փարբերություն՝

$$A \setminus B \stackrel{def}{=} \{x; x \in A \text{ և } x \notin B\} :$$



Գծազիր 1.1. Երկու բազմությունների միավորումը, հատումը և փարբերությունները

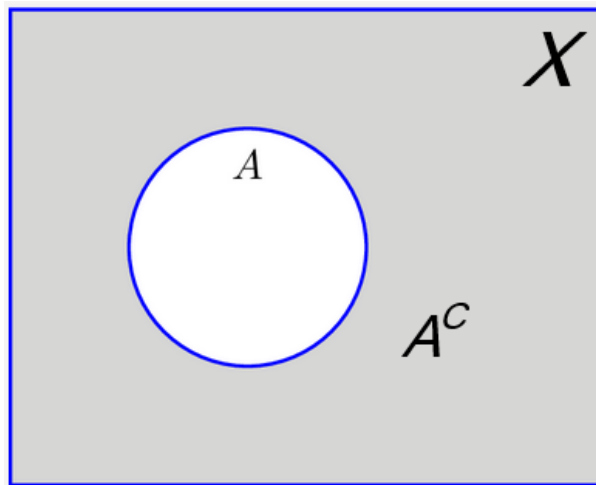
Բազմությունների փարբերությունը (կամ հանումը) կազմելիս մենք առաջին A բազմությունից հեռացնում ենք երկրորդ B բազմության փարբերը: Նեշտ է նկատել, որ $A \setminus B$ և $B \setminus A$ բազմությունները ոչ միայն փարբեր են, այլ նույնիսկ չեն հատվում, այսինքն՝ $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$:

Բազմությունների փարբերության միջոցով սահմանվում է ևս մեկ գործողություն՝ բազմության լրացումը:

Սահմանում 1.5. Դիցուք A բազմությունը ներդրված է X բազմության մեջ. $A \subset X$: Այդ դեպքում $X \setminus A$ բազմությունը կոչվում է A **բազմության լրացում** X -ի մեջ և սովորաբար նշանակվում է A^C կամ A_X^C -ով.

$$A^C \stackrel{def}{=} X \setminus A :$$

Այլ կերպ ասած՝ A -ի լրացումն (X -ի մեջ) A -ից դուրս ընկած բազմությունն է՝ նախօրոք ընտրված X լայն բազմության մեջ:



Պծագիր 1.2. A բազմության A^C լրացումն X բազմության մեջ

Նշված գործողությունները կարելի է իրականացնել նաև ավելի մեծ թվով բազմությունների հետ: Եթե կամայական n հար բազմություն ունենք՝ $A_1, A_2, \dots, A_n$, ապա նրանց միավորումը և հատումը սահմանվում և նշանակվում են հետևյալ կերպ՝

$$\bigcup_{k=1}^n A_k \stackrel{def}{=} A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \quad \bigcap_{k=1}^n A_k \stackrel{def}{=} A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n :$$

Անգամ եթե անվերջ թվով բազմություն ունենք՝ $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots$, ապա դրանց միավորումը և հատումը սահմանում ենք նույն կերպ՝

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \stackrel{def}{=} A_1 \cup A_2 \cup \dots, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \stackrel{def}{=} A_1 \cap A_2 \cap \dots :$$

Բազմությունների հիմնական գործողություններով կարելի է կազմել բանաձևեր, որոնք նմանություն ունեն թվաբանական բանաձևերի հետ: Բերենք մի քանի օգտակար բանաձևեր կամայական A, B, C բազմությունների համար.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad (1-8)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (1-9)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C), \quad (1-10)$$

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C) : \quad (1-11)$$

Այս բանաձևերը նման են բաշխական կանոններին թվերի համար:

Բանաձևերի մեկ այլ օգտակար խումբ են այդպես կոչված **Դե Մորգանի բանաձևերը**: Ներկայացնենք այդ բանաձևերը պարզագույն դեպքում:

Եթե $A, B \subset X$, ապա

$$\boxed{X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)} \quad \text{և} \quad \boxed{X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)} : \quad (1-12)$$

Նույն բանաձևերը լրացման փերմիներով ավելի պարզ փեսք ունեն

$$\boxed{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c} \quad \text{և} \quad \boxed{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c} : \quad (1-13)$$

Դե Մորգանի (1-12) և (1-13) բանաձևերը փարածվում են մեծ թվով բազմությունների դեպքի վրա՝ անգամ անվերջ թվով $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots$ բազմությունների դեպքում:

Եթե բոլոր A_k բազմությունները պարունակվում են X լայն բազմության մեջ՝ $A_k \subset X, k = 1, 2, \dots$, ապա

$$\boxed{X \setminus \left(\bigcup_k A_k \right) = \bigcap_k (X \setminus A_k)} \quad \text{և} \quad \boxed{X \setminus \left(\bigcap_k A_k \right) = \bigcup_k (X \setminus A_k)}, \quad (1-14)$$

կամ նույնը լրացման փերմիներով՝

$$\boxed{\left(\bigcup_k A_k \right)^c = \bigcap_k A_k^c} \quad \text{և} \quad \boxed{\left(\bigcap_k A_k \right)^c = \bigcup_k A_k^c} : \quad (1-15)$$

Ինչ վերաբերում է (1-8)-(1-15) բանաձևերի հիմնավորմանը, դրանք բոլորն ապացուցվում են միաբեռնակ՝ հերքելով (1-7)-ին և ստուգելով երկու փոխհակադարձ ներդրում:

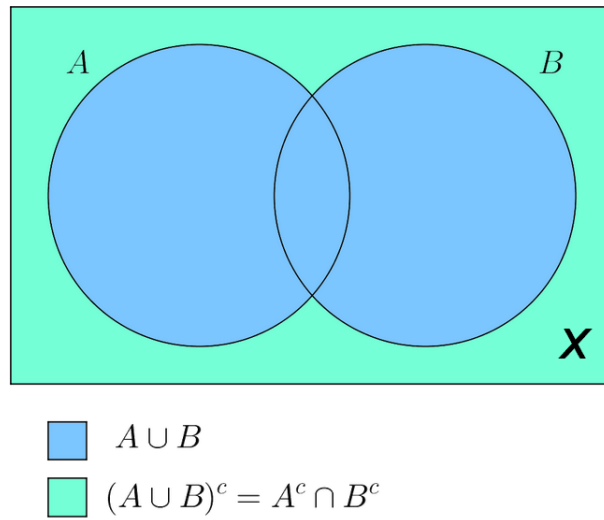
Ցուցադրելու համար ապացուցենք Դե Մորգանի (1-12) և (1-13) բանաձևերից առաջինը՝

$$\boxed{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c} :$$

Ապացույց. Նախ ստուգենք ձախից աջ ներդրումը, այսինքն՝

$$\boxed{(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c}, \quad A, B \subset X : \quad (1-16)$$

Գծապարկերի միջոցով կարելի է հաստատել Դե Մորգանի բանաձևը, սակայն խիստ հիմնավորում այն համարվել չի կարող: Խիստ ապացույցի համար վերցնենք (1-16) ներդրման ձախ կողմի բազմության կամայական փարը



Գծագիր 1.3. Դե Մորգանի (1-12) և (1-13) առաջին բանաձևին համապատասխանող գծապատկերը

և ցույց տանք, որ այդ տարրը կապականի նաև (1-16)-ի աջ կողմի բազմությանը: Ընթացքում կօգտվենք համակարգի նշանից, որը նշանակում է $\neg$ -ն՝ պայմանը, և կամ համախմբի նշանից, որը նշանակում է $\wedge$ -կամ պայմանը: Այսպիսով,

$$\forall x \in (A \cup B)^c \implies x \notin A \cup B \implies \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \implies \begin{cases} x \in A^c \\ x \in B^c \end{cases} \implies x \in A^c \cap B^c,$$

ինչն ապացուցեց (1-16) ներդրումը: Նակադարձ ներդրումը՝

$$\boxed{A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c}, \quad A, B \subset X, \quad (1-17)$$

կապացուցվի, եթե բերված քայլերը կատարենք հակառակ ուղղությամբ: □

1.2 Թվային բազմություններ

Թվարկենք դպրոցից հայրնի մի քանի նշանավոր թվային բազմություններ:

Սահմանում 1.6. $1, 2, 3, \dots$ (n այլև) թվերը կոչվում են **բնական**, և $\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, \dots\}$ անվերջ բազմությունը՝ **բնական թվերի բազմություն**: Բնական թվերը կարելի է սահմանել մի փոքր այլ եղանակով. **բնական** են կոչվում հերկյալ թվերը՝

$$1 \in \mathbb{N}, \quad 1+1 = 2 \in \mathbb{N}, \quad 2+1 = 3 \in \mathbb{N}, \quad 3+1 = 4 \in \mathbb{N}, \quad \dots, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n+1 \in \mathbb{N}, \quad \text{և այլն:}$$

Սահմանման այս եղանակն ավելի խիստ կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$\left(X \subset \mathbb{N}, \quad 1 \in X, \quad x \in X \implies x+1 \in X \right) \iff \left(X = \mathbb{N} \right): \quad (1-18)$$

Վերաձևակերպելով բնական թվերի սահմանումը և (1-18) պայմանը՝ հանգում ենք այսպես կոչված **մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքին**, այն է .

Որպեսզի ապացուցվի որևէ (A) կամ (A_n) պնդում բոլոր բնական $n \in \mathbb{N}$ թվերի (պարամետրերի) համար, բավական է ապացուցել հերկյալ երկու պնդումները՝

- 1) (A_n) պնդումը ճիշտ է $n = 1$ -ի համար, այսինքն (A_1) պնդումը ճիշտ է ;
- 2) Եթե ենթադրենք, որ (A_n) պնդումը ճիշտ է որևէ $n = k \in \mathbb{N}$ թվի համար, ապա այդ պնդումը ճիշտ կլինի նաև հաջորդ $n = k + 1$ թվի համար: Կարճ գրում ենք $(A_k) \implies (A_{k+1})$:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը փաստորեն համընկնում է (1-18) պայմանի հետ:

Օրինակ 1.1. Ընթերցողին առաջարկում ենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ինքնուրույն ապացուցել **Նյուտոնի բինոմի բանաձևը** յուրաքանչյուր բնական $n \in \mathbb{N}$ ցուցչի համար՝

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots + x^n, \quad n \in \mathbb{N}: \quad (1-19)$$

Այստեղ մասնակցող գործակիցները կոչվում են **Նյուտոնի բինոմիական գործակիցներ** և կարող են դարձնել ձևերով ներկայացվել և նշանակվել՝

$$C_n^k = \binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq k \leq n:$$

Այժմ սահմանենք ավելի լայն թվային բազմություններ:

Սահմանում 1.7. *Բնական թվերը, դրանց հակադիրները և զրոն անվանում են **ամբողջ թվեր**, իսկ ստացված բազմությունը՝ **ամբողջ թվերի բազմություն** և նշանակում են $\mathbb{Z}$ -ով:*

$$\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad \text{կամ} \quad \mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) \cup \{0\} :$$

Սահմանում 1.8. ***Ռացիոնալ** են կոչվում այն թվերը, որոնք ներկայացվում են ինչ-որ երկու ամբողջ թվերի հարաբերության տեսքով: **Ռացիոնալ թվերի բազմությունը** նշանակվում է $\mathbb{Q}$ -ով:*

$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x ; \exists m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \quad \text{s.t.} \quad x = \frac{m}{n} \right\} :$$

Ռացիոնալ թվերը կարելի է լիարժեք բնութագրել նաև անվերջ փասնորդական կոփորակների միջոցով: **Ռացիոնալ** են կոչվում այն թվերը, որոնք ներկայացվում են պարբերական անվերջ փասնորդական կոփորակների տեսքով: Օրինակ՝

$$\frac{2}{5} = 0,4 = 0,4000\dots = 0,4(0), \quad \frac{-1}{3} = -0,3333\dots = -0,(3), \quad \frac{13}{99} = 0,(13) :$$

Սահմանում 1.9. *Ոչ ռացիոնալ թվերը կոչվում են **իրացիոնալ**: **Իրացիոնալ թվերի բազմությունը** սովորաբար նշանակվում է $\mathbb{I}$ -ով:*

Իրացիոնալ թվերը կարելի է լիարժեք բնութագրել նաև անվերջ փասնորդական կոփորակների միջոցով, ըստ որի **իրացիոնալ** են կոչվում այն թվերը, որոնք ներկայացվում են ոչ պարբերական անվերջ փասնորդական կոփորակների տեսքով: Օրինակ՝

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\dots, \quad \sqrt{3} = 1.732050807568877\dots,$$

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795\dots, \quad e = 2.7182818284590452353602874713527\dots :$$

Սահմանում 1.10. ***Ռացիոնալ կամ իրացիոնալ թվերը կոչվում են **իրական**: **Իրական թվերի բազմությունը** նշանակվում է $\mathbb{R}$ -ով: Այլ կերպ ասած՝***

$$\mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \quad \text{կամ} \quad \mathbb{R} = (-\infty, +\infty):$$

Վերջին ներկայացումը կապված է իրական թվերի երկրաչափական պարկերի հետ՝ որպես կոորդինատային (իրական) առանցքի կետեր:

Դիտողություն 1.1. *Պետք է նշել, որ իրացիոնալ և ուրեմն իրական թվերի բերված սահմանումները մաթեմատիկական տեսանկյունից թերի են և խստացման կարիք ունեն: Բայց մենք չենք խորանա այդ հարցերի մեջ, որովհետև մեր դասընթացի մաս չեն կազմում: Ներառա՞նք ընթերցողին իրական թվերի սահմանման փարբեր մոտեցումներ կարող է գտնել առաջարկվող գրականության մեջ:*

Բոլոր սահմանված թվային բազմություններն առնչվում են իրար ներդրումներով՝

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad \text{և} \quad \mathbb{I} \subset \mathbb{R} :$$

Այսպիսով, իրական թվերի $\mathbb{R}$ բազմությունն ամենալայնն է այսպեղ սահմանված թվային բազմությունների մեջ: Մաթեմատիկայում գոյություն ունեն ավելի լայն թվային բազմություններ, բայց հեքագայում մենք միշտ սահմանափակվելու ենք իրական թվերով:

Բերենք իրական թվերի $\mathbb{R}$ բազմության այլ ենթաբազմությունների օրինակներ՝ միջակայքեր, որոնք լինում են բաց, փակ կամ կիսաբաց (կիսափակ), ինչպես նաև՝ առանձին կետեր, դադարկ բազմություն և այլն.

$$(a, b), \quad [a, b], \quad [a, b), \quad (a, b], \quad (a, +\infty), \quad (-\infty, b], \quad \{a\}, \quad \emptyset :$$

Նաճախ այս բազմությունները հարմար է լինում ներկայացնել անհավասարությունների տեսքով, օրինակ՝

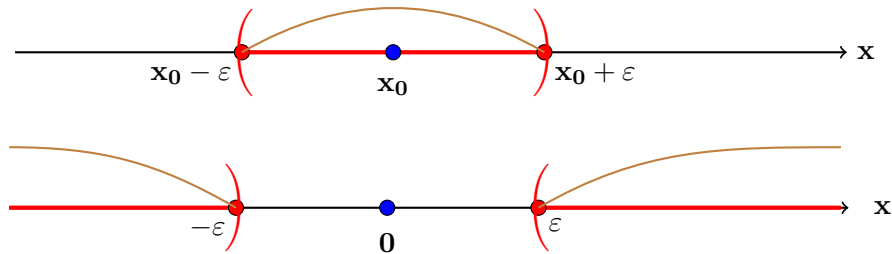
$$|x| < a \quad (a > 0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-a, a) \quad \text{անվանում են } 0 \text{ կետի } a\text{-շրջակայք;}$$

$$|x| \geq a \quad (a > 0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-a, a)^c ;$$

$$|x - x_0| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad \text{անվանում են } x_0 \text{ կետի } \varepsilon\text{-շրջակայք;}$$

$$|x| > \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \quad \text{անվանում են անվերջի } \varepsilon\text{-շրջակայք;}$$

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \quad (\mathbb{R}_+)^c = (-\infty, 0), \quad \text{և այլն:}$$



Գծագիր 1.4. x_0 կետի ε -շրջակայքը՝ $|x - x_0| < \varepsilon$, և անվերջի ε -շրջակայքը՝ $|x| > \varepsilon$

Նիշենք նշանավոր **եռանկյան անհավասարությունը** և դրա հեքևանքները, որոնք տեղի ունեն բոլոր իրական թվերի համար,

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (1-20)$$

$$|x \pm y| \geq \big| |x| - |y| \big|, \quad x, y \in \mathbb{R} : \quad (1-21)$$

Կարելի է սրանք տարածել ցանկացած վերջավոր թվով գումարելիների համար.

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|, \quad \text{կամ կարճ՝} \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad x_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1, n}),$$

որոնց հիմնավորումը կարելի է իրականացնել մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքով (մեթոդով):

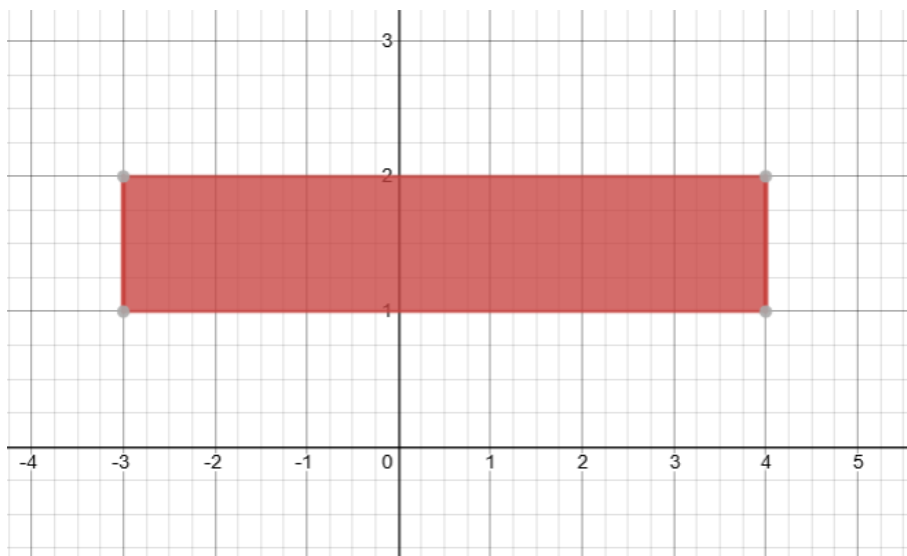
Մենք արդեն զիպենք բազմությունների հետ մի քանի գործողությունների մասին՝ միավորում, հափում, փաթեթություն: Այժմ սահմանենք ևս մի քանի գործողություն թվային բազմությունների հետ,

Սահմանում 1.11.

$$\begin{aligned} X + Y &\stackrel{\text{def}}{=} \{x + y; x \in X, y \in Y\} && \text{կոչվում է } X\text{-ի և } Y\text{-ի հանրահաշվական գումար,} \\ X \cdot Y &\stackrel{\text{def}}{=} \{xy; x \in X, y \in Y\} && \text{կոչվում է } X\text{-ի և } Y\text{-ի հանրահաշվական արտադրյալ,} \\ X \times Y &\stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y); x \in X, y \in Y\} && \text{կոչվում է } X\text{-ի և } Y\text{-ի դեկարտյան արտադրյալ:} \end{aligned}$$

Օրինակ, դիցուք $X = [-3, 4]$, $Y = [1, 2]$: Այդ դեպքում $X + Y = [-2, 6]$, $X \cdot Y = [-6, 8]$:

Դեկարտյան արտադրյալը բաղկացած է բոլոր հնարավոր (x, y) կարգավորված զույգերից, որտեղ x -ն առաջին բազմությունից է, իսկ y -ը՝ երկրորդ: Բոլոր այդ (x, y) զույգերը երկրաչափորեն կազմում են ինչ-որ հարթ պարկեր կոորդինատային հարթության վրա: Տվյալ օրինակում սրանում ենք $X = [-3, 4]$ և $Y = [1, 2]$ կողմերով փակ ուղղանկյուն:



Գծագիր 1.5. Երկու միջակայքերի դեկարտյան արտադրյալ՝ $[-3, 4] \times [1, 2]$

Բազմությունը դեկարտյան արտադրյալի մեջ կարող է մասնակցել ինքն իր հետ, կգրենք՝ $X \times X \stackrel{\text{նշ.}}{=} X^2$: Մասնավորապես, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ներկայացնում է ամբողջ կոորդինատային հարթությունը:

Դեկարտյան արտադրյալ կարելի է սահմանել երեք և ավելի բազմություններով.

$$X \times Y \times Z \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z); x \in X, y \in Y, z \in Z\}:$$

Օրինակ, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ներկայացնում է ամբողջ եռաչափ փարածությունը, որը բաղկացած է (x, y, z) եռյակներից (կետերից):

1.3 Ֆունկցիայի գաղափարը, ընդհանուր հասկացություններ

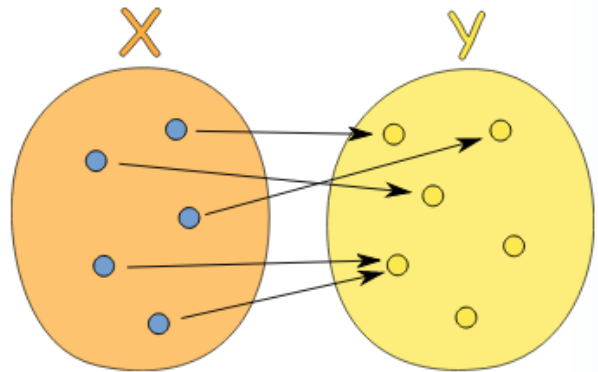
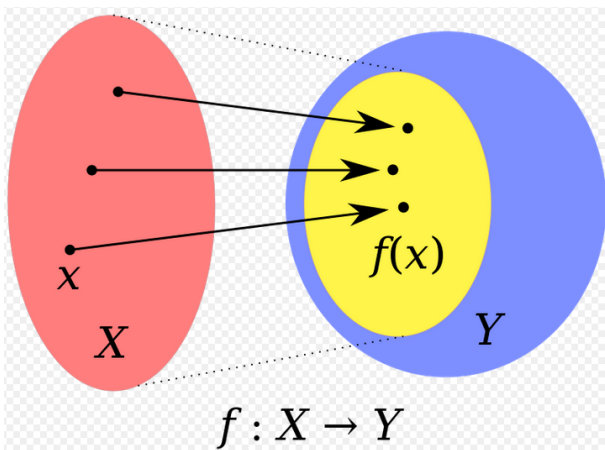
Ֆունկցիայի կամ արտապարկերման գաղափարը բավականին ընդհանրական է : Լայն իմաստով ֆունկցիան կարելի է սահմանել հետևյալ կերպ:

Սահմանում 1.12. *Ֆունկցիան* *համապատասխանություն է երկու բազմությունների միջև:*

Ավելի սրույգ՝ փրված որևէ X և Y բազմությունների համար սահմանված է f -ով նշանակված հետևյալ օրենքը (կանոնը). յուրաքանչյուր $x \in X$ փարդին (արգումենտին) f օրենքի համաձայն համապատասխանության մեջ է դրվում $y \in Y$ փարդը (արժեքը): Միմյուրներով գրում են՝

$$f : X \mapsto Y \quad \text{կամ} \quad X \xrightarrow{f} Y \quad \text{և} \quad \boxed{\forall x \in X \quad \exists y \in Y \quad \text{s.t.} \quad y = f(x)} :$$

Այս դեպքում X բազմությունը կոչվում է f ֆունկցիայի **որոշման փիրույթ**, իսկ Y բազմությունը՝ f ֆունկցիայի **արժեքների փիրույթ** (արժեքների բազմություն):



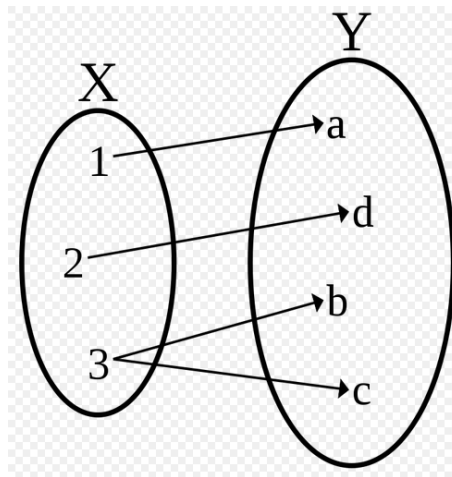
Գծագիր 1.6. Ընդհանուր ֆունկցիայի (արտապարկերման) գծապարկերները

Սահմանում 1.13. f ֆունկցիան կոչվում է **միարժեք**, եթե յուրաքանչյուր $x \in X$ արգումենտին f օրենքի համաձայն համապատասխանության մեջ է դրվում միակ $y \in Y$ արժեքը: Միմյուրներով գրում են՝

$$\forall x \in X \quad \exists ! y \in Y \quad \text{s.t.} \quad y = f(x) :$$

Ոչ միարժեք ֆունկցիաները կոչվում են **բազմարժեք**:

Ընթերցողը հեշտությամբ կարող է կողմնորոշվել. եթե **գծագիր 1.6**-ում պարկերված են միարժեք ֆունկցիաների գծապարկերները, ապա **գծագիր 1.7**-ում բազմարժեք (երկարժեք) ֆունկցիայի գծապարկերն է :



Գծագիր 1.7. Բազմարժեք ֆունկցիայի գծապարկերը

Արդեն նշել էինք՝ $x \in X$ փարրը որոշման փիրույթից անվանում են **արգումենտ**, հաճախ նաև՝ **անկախ փոփոխական**, իսկ $y \in Y$ փարրը արժեքների փիրույթից կոչվում է **արժեք** կամ **կախյալ փոփոխական**:

Եթե $x_0 \in X$ և $y_0 \in Y$ փարրերն իրար համապատասխանում են, այսինքն՝ $y_0 = f(x_0)$, ապա y_0 -ն անվանում են նաև x_0 -ի **պատկեր**, իսկ x_0 -ն անվանում են y_0 -ի **նախապատկեր**: Նույն անվանումներն օգտագործում են նաև A և B բազմությունների համար, եթե $B = f(A)$, կամ $A \xrightarrow{f} B$:

Ներագայում բազմարժեք ֆունկցիաները որպես կանոն չենք դիտարկելու, ավելին՝ բազմարժեք ֆունկցիաներն ընդհանրապես ֆունկցիա չենք համարի:

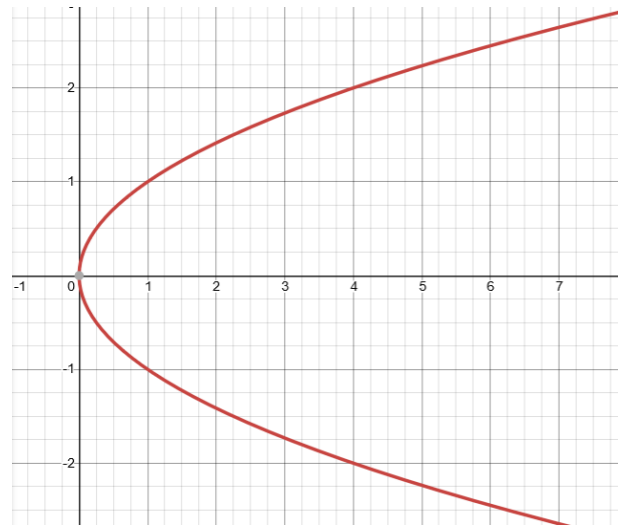
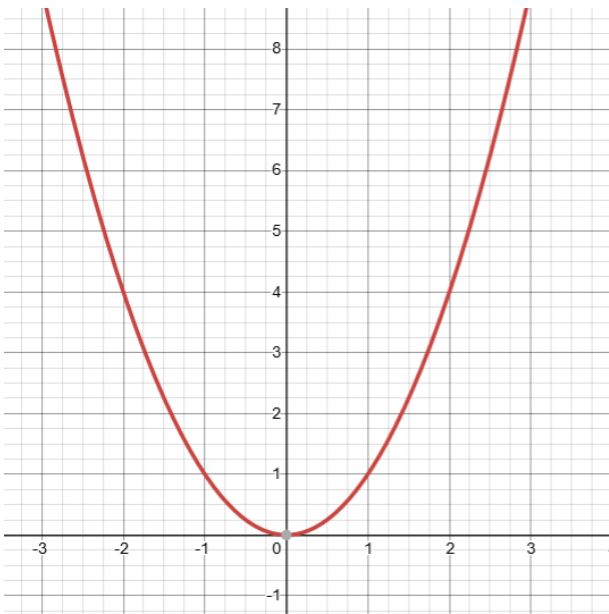
Պայմանավորվենք՝ ֆունկցիա ասելով՝ մենք հերագայում նկարի կունենանք միայն միարժեք ֆունկցիաները:

Եթե այնուամենայնիվ բազմարժեք ֆունկցիա մեզ հանդիպի, դա հարուկ կնշենք:

Բացի գծապարկերներից՝ **թվային** ֆունկցիաները պատկերելու համար ամենահարմար եղանակը **ֆունկցիայի գրաֆիկն** է, այսինքն՝ (x, y) բոլոր հնարավոր թվագույգերի բազմությունը կոորդինատային հարթության վրա: Օրինակ, $y = x^2$ բանաձևով փրված ֆունկցիան միարժեք է, իսկ $y^2 = x$ բանաձևը ներկայացնում է բազմարժեք (երկարժեք) ֆունկցիա: Նրանց գրաֆիկները (որոնց կորերը կոչվում են պարաբոլներ) ուղղակի ցուցադրում են ֆունկցիաների միարժեքության կամ բազմարժեքության հարկությունները (փեն **գծագիր 1.8**):

Ենթադրենք՝ $f : X \rightarrow Y$ ֆունկցիան արտապատկերում է X բազմությունը (որոշման փիրույթը) Y բազմության (արժեքների փիրույթի) վրա: Փոխենք արտապատկերման ուղղությունը և արտապատկերենք Y բազմությունը X բազմության վրա: Կսրանանք այդպես կոչված f -ի **հակադարձ ֆունկցիան**, որը նշանակվում է $f^{-1} : Y \rightarrow X$ սիմվոլով: Նակադարձ ֆունկցիայի f^{-1} նշանակումը պերք չէ շփոթել $1/f$ բոլորովին այլ ֆունկցիայի հեր:

Նակադարձ ֆունկցիան սրանալու համար երբեմն բավական է լինում $y = f(x)$ թվային ֆունկցիայի



Գծագիր 1.8. Միարժեք $y = x^2 : (-\infty, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ և բազմարժեք

$y^2 = x : [0, +\infty) \mapsto (-\infty, +\infty)$ թվային ֆունկցիաների գրաֆիկները

հավասարումը լուծել x -ի նկատմամբ, եթե դա հնարավոր է: Օրինակ, $y = f(x) = x^2 : [0, 3] \mapsto [0, 9]$ ֆունկցիայի հակադարձը $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} : [0, 9] \mapsto [0, 3]$ ֆունկցիան է :

Քանի որ հարմար է ֆունկցիայի անկախ փոփոխականը նշանակել x -ով, հաճախ հակադարձ ֆունկցիայում x -ի և y -ի տեղերը փոխում են և գրում $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x} : [0, 9] \mapsto [0, 3]$: Իհարկե այս տեղափոխությունը չի փոխում հակադարձ ֆունկցիան, բայց թույլ է տալիս երկու փոխհակադարձ ֆունկցիաները պարկերել նույն կոորդինատային հարթության մեջ, ինչպես կարելի է տեսնել **գծագիր 1.9**-ում:

Փոխհակադարձ ֆունկցիաների գրաֆիկները միշտ համաչափ են $y = x$ ուղղի նկատմամբ:

Նկատենք, որ վերջին օրինակում $և' f$ -ը, $և' նրա$ հակադարձը f^{-1} իսկապես ֆունկցիաներ են, այսինքն՝ միարժեք են: Հաճախ պարահում է , որ ֆունկցիայի հակադարձը բազմարժեք ֆունկցիա է , այսինքն՝ առհասարակ ֆունկցիա չէ , ինչպես պայմանավորվեցինք ասել: Այդ դեպքում կասենք, որ ֆունկցիան հակադարձ չունի, օրինակ, երբ բերված վերջին ֆունկցիայում ընտրենք ավելի լայն որոշման տիրույթ՝

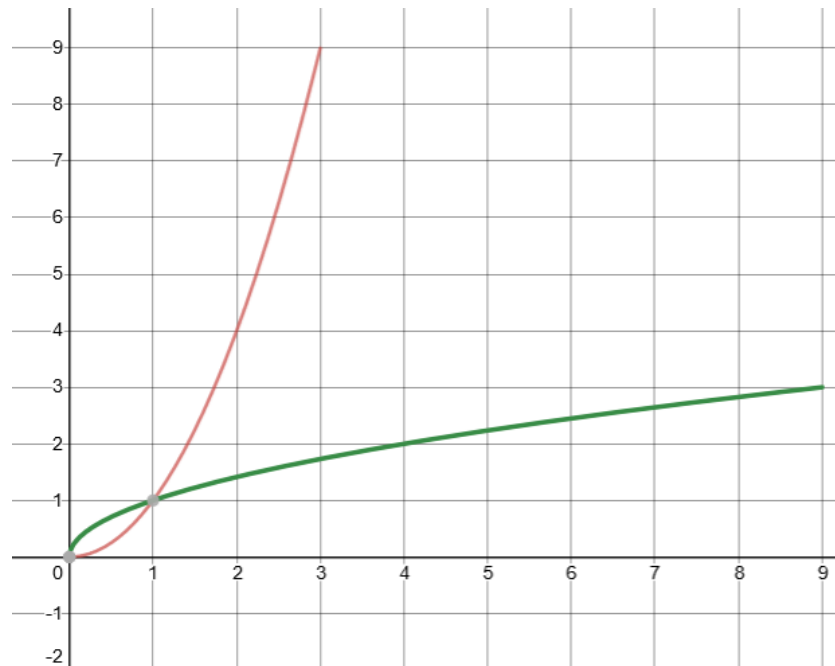
$$y = g(x) = x^2 : [-3, 3] \mapsto [0, 9] :$$

Այդ դեպքում, եթե ձևականորեն գրենք նրա հակադարձը, կստանանք բազմարժեք (երկարժեք) ֆունկցիա՝

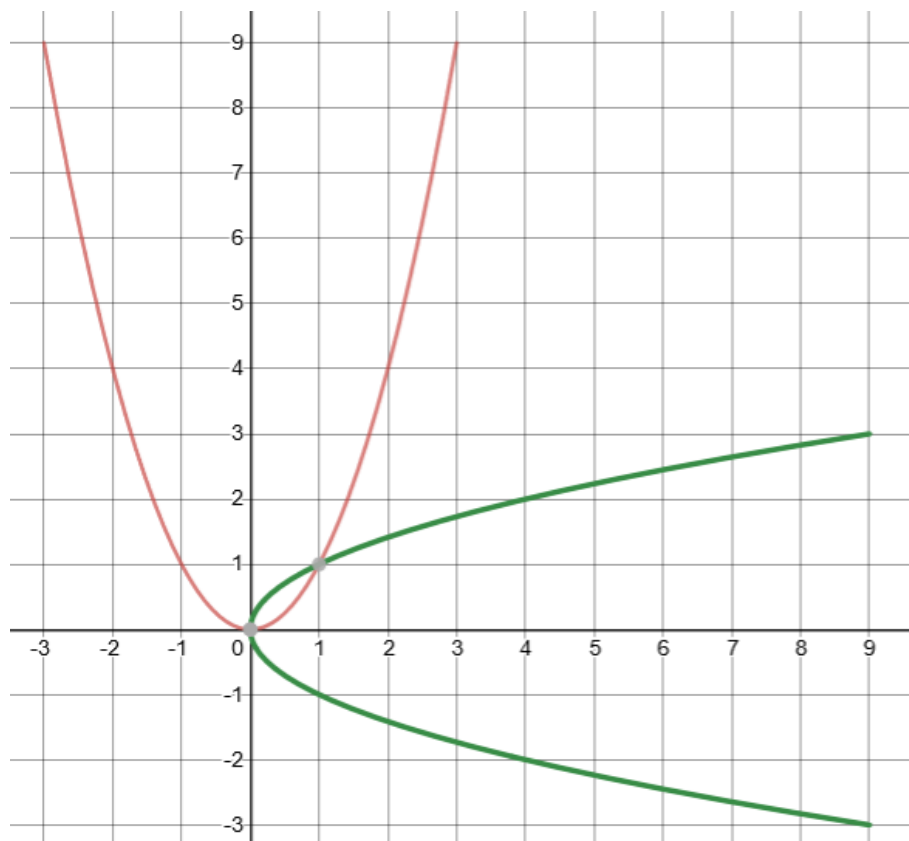
$$x = g^{-1}(y) = \pm\sqrt{y} : [0, 9] \mapsto [-3, 3] ,$$

որը, ինչպես պայմանավորվեցինք, ֆունկցիա չենք համարի, այլ կասենք, որ g ֆունկցիան հակադարձ չունի:

Դրանց գրաֆիկները, այնուամենայնիվ, պարկերել կարելի է :



Գծագիր 1.9. Երկու փոխհակադարձ ֆունկցիաների գրաֆիկներ



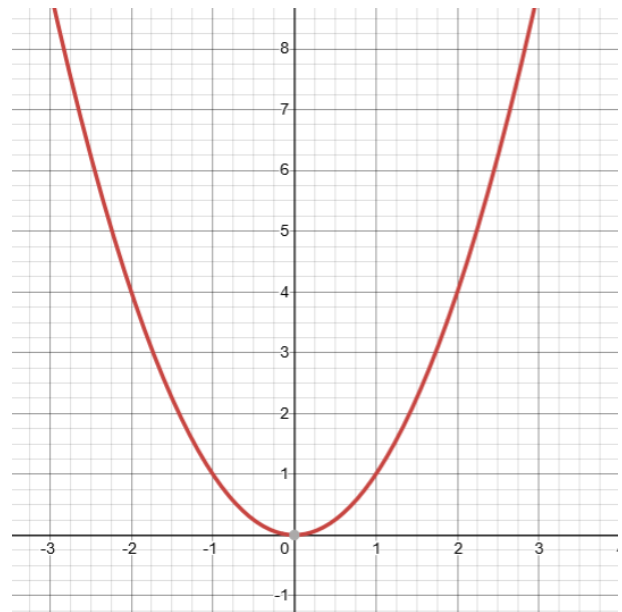
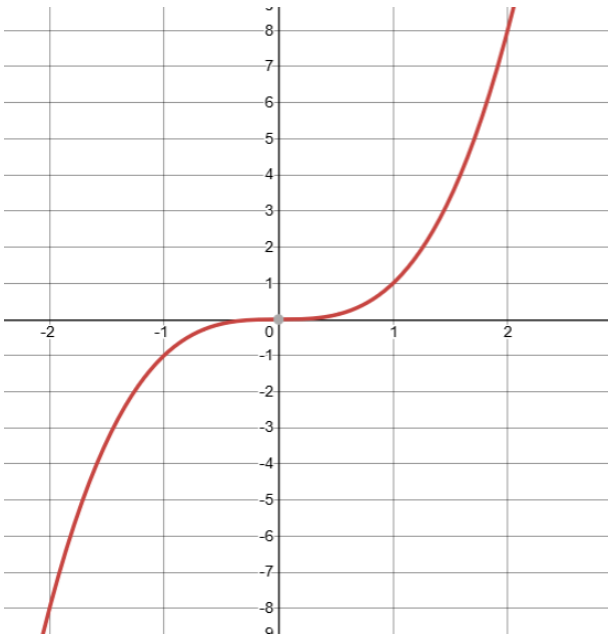
Գծագիր 1.10. Ֆունկցիայի և նրա երկարժեք հակադարձի գրաֆիկները

Սահմանում 1.14. Դիցուք $f : X \mapsto Y$ ֆունկցիան x -ի հարթեք արդյունքներում է X բազմությունը (ամբողջ) Y բազմության վրա: Այդ դեպքում f ֆունկցիան անվանում են **փոխհարթեք** (կամ **բիեկտիվ**,

բիեկցիա), եթե յուրաքանչյուր $y \in Y$ արժեքին համապատասխանում է միակ $x \in X$ արարող որոշման փիրույթից: Կարելի է ասել նաև այլ համարժեք սահմանում. f ֆունկցիան կոչվում է **փոխմիարժեք**, եթե արարքեր $x_1, x_2 \in X$ արարքերին որոշման փիրույթից համապատասխանում են արարքեր y_1, y_2 արժեքներ: Միմյուրյանը պայմանները կարելի է գրել այսպես՝

$$\begin{aligned} \left(\forall y \in Y \quad \exists ! x \in X \quad \text{s.t.} \quad y = f(x) \right) &\iff \\ \iff \left(\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \right) : \end{aligned} \quad (1-22)$$

Փոխմիարժեք ֆունկցիաներն ունեն բավականին հարմար կառուցվածք այն իմաստով, որ յուրաքանչյուր $x \in X$ արգումենտին համապատասխանում է մեկ և միայն մեկ $y \in Y$ արժեք, և նաև հակադարձը՝ յուրաքանչյուր $y \in Y$ արժեքին համապատասխանում է մեկ և միայն մեկ $x \in X$ արգումենտ: Սա հաշվի առնելով՝ փոխմիարժեք ֆունկցիաները հաճախ անվանում են նաև **մեկը մեկի արտապարկերումներ**: Թվային ֆունկցիաների մեջ որպես փոխմիարժեք ֆունկցիայի օրինակ կարելի է բերել $y = x^3 : (-\infty, +\infty) \mapsto (-\infty, +\infty)$ խորանարդային ֆունկցիան, իսկ $y = x^2 : (-\infty, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ քառակուսային ֆունկցիան միարժեք է, բայց ոչ փոխմիարժեք: Այս հատկությունները հեշտությամբ նկարվում են ֆունկցիաների գրաֆիկներով:



Գծագիր 1.11. Փոխմիարժեք $y = x^3$ և ոչ փոխմիարժեք $y = x^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկները

Փոխմիարժեք ֆունկցիայի սահմանման միջոցով անմիջապես կարելի է ստանալ այլ բնութագրումներ և հատկություններ, որոնցից բերենք երեքը:

Պնդում 1. Փոխմիարժեք ֆունկցիան միշտ ունի հակադարձ ֆունկցիա, որը նույնպես փոխմիարժեք է :

Պնդում 2. Որպեսզի $f : X \mapsto Y$ ֆունկցիան լինի փոխմիարժեք, անհրաժեշտ և բավարար է, որ f -ը լինի հակադարձելի (այսինքն՝ ունենա հակադարձ f^{-1} ֆունկցիա), և f, f^{-1} երկու ֆունկցիաներն էլ լինեն միարժեք իրենց որոշման փրոյեկցիաներում:

Պնդում 3. Փոխմիարժեք ֆունկցիաների համադրույթը ևս փոխմիարժեք է :

Բոլոր երեք պնդումները հիմնավորվում են անմիջականորեն փոխմիարժեք ֆունկցիայի սահմանումից և (1-22) պայմաններից:

Մասնավորապես, Պնդում 3-ն ապացուցելու համար բավական է ներկայացնել երկու փոխմիարժեք ֆունկցիաներ և դրանցից կազմել համադրույթը: Այսպես,

$$\begin{aligned} y = f(x), \quad f : X &\mapsto Y \quad \text{կամ} \quad X \xrightarrow{f} Y, \quad \text{և} \\ x = g(t), \quad g : T &\mapsto X \quad \text{կամ} \quad T \xrightarrow{g} X, \end{aligned}$$

փոխմիարժեք ֆունկցիաներ են, որոնցից կարելի է կազմել համադրույթ հետևյալ կերպ՝

$$y = f(g(t)) = (f \circ g)(t) \stackrel{\text{նշ.}}{=} h(t), \quad T \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y, \quad \text{կամ} \quad h : T \mapsto Y :$$

Քանի որ f -ը, և g -ն փոխմիարժեք են, ապա, համաձայն (1-22) պայմաններից երկրորդի,

$$\left(\forall t_1, t_2 \in T, t_1 \neq t_2 \implies g(t_1) \neq g(t_2) \right) \implies \left(f(g(t_1)) \neq f(g(t_2)) \right) \quad \text{կամ} \quad \left(h(t_1) \neq h(t_2) \right),$$

այսինքն՝ $h(t)$ ֆունկցիան փոխմիարժեք է :

□

1.4 Թվային բազմության եզրեր, ճշգրիտ եզրեր

Շարունակենք իրական առանցքի վրա գտնվող թվային բազմությունների հետազոտումը:

Սահմանում 1.15. Կասենք, որ $X \subset \mathbb{R}$ բազմությունը **սահմանափակ է վերևից**, եթե

$$\exists b \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad \forall x \in X \quad x \leq b : \quad (1-23)$$

Այս դեպքում b թիվը կոչվում է X բազմության **վերին եզր**:

Սահմանում 1.16. Կասենք, որ $X \subset \mathbb{R}$ բազմությունը **սահմանափակ է ներքևից**, եթե

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad \forall x \in X \quad x \geq a : \quad (1-24)$$

Այս դեպքում a թիվը կոչվում է X բազմության **ստորին եզր**:

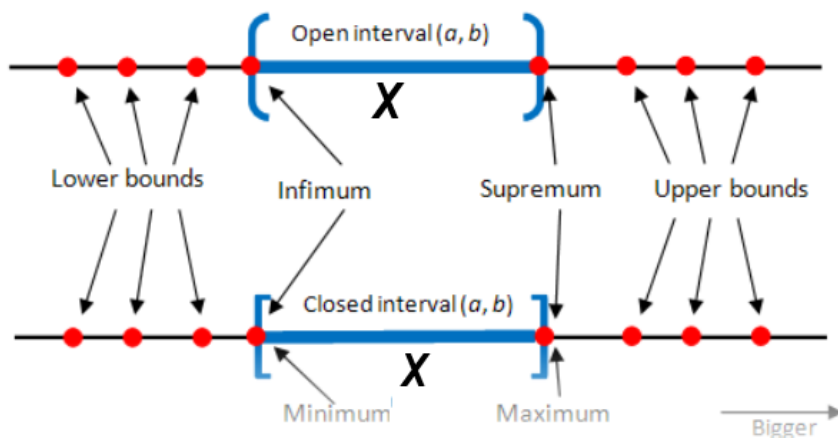
Պարզ է, որ եթե X բազմությունը ունի վերին կամ ստորին եզր ունի, ապա կգտնվեն անվերջ քանակով այդպիսի եզրեր:

Սահմանում 1.17. Կասենք, որ $X \subset \mathbb{R}$ բազմությունը **սահմանափակ է**, եթե

$$\exists c > 0 \quad s.t. \quad \forall x \in X \quad |x| \leq c : \quad (1-25)$$

Վերջին պայմանը կարելի է արտագրել երկկողմանի անհավասարության տեսքով. $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$:

Ստացվեց, որ սահմանափակ են այն բազմությունները, որոնք սահմանափակ են և՛ վերևից, և՛ ներքևից, ընդ որում՝ վերին և ստորին եզրերը հարմարության համար ընտրված են հակադիր՝ c և $-c$, ինչը պարզադիր չէ:



Գծազիր 1.12. Բազմության վերին և ստորին եզրեր, ճշգրիտ եզրեր

Սահմանում 1.18. Ոչ սահմանափակ բազմությունները կոչվում են **անսահմանափակ**: Ավելի սրույճ՝ (1-25) պայմանից ելնելով՝ անսահմանափակ բազմությունները սահմանվում են հետևյալ պայմանով՝

$$\forall c > 0 \quad \exists x_0 \in X \quad \text{s.t.} \quad |x_0| > c : \quad (1-26)$$

Որպես անսահմանափակ բազմությունների օրինակներ կարելի է բերել հիմնարար թվային $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$ բազմությունները կամ որևէ ճառագայթ թվային առանցքի վրա: Կարևոր է չժողթել անսահմանափակ և անվերջ բազմությունները, ինչպես նաև սահմանափակ և վերջավոր բազմությունները:

Սահմանում 1.19. $b \in \mathbb{R}$ թիվը կոչվում է $X \subset \mathbb{R}$ բազմության **մաքսիմալ սրարը** կամ **մաքսիմում**. կգրենք $\boxed{b = \max X}$, եթե

$$b \in X \quad \text{և} \quad \forall x \in X \quad x \leq b : \quad (1-27)$$

Սահմանում 1.20. $a \in \mathbb{R}$ թիվը կոչվում է $X \subset \mathbb{R}$ բազմության **մինիմալ սրարը** կամ **մինիմում**. կգրենք $\boxed{a = \min X}$, եթե

$$a \in X \quad \text{և} \quad \forall x \in X \quad x \geq a : \quad (1-28)$$

Պնդում 1.1. Եթե որևէ բազմության մաքսիմումը կամ մինիմումը գոյություն ունի, ապա այն միակն է :

Ապացույց. Ապացուցենք մաքսիմումի համար: Ենթադրենք որևէ X բազմություն ունի երկու մաքսիմում՝ $\exists b = \max X$ և $\exists b' = \max X$: Ըստ սահմանման՝ $b, b' \in X$ և

$$\forall x \in X \quad \begin{cases} x \leq b \\ x \leq b', \end{cases} \quad \text{մասնավորապես՝} \quad \begin{cases} b' \leq b \\ b \leq b' \end{cases} \quad \implies \quad b = b' :$$

Այսպիսով, բազմությունը երկու փարբեր մաքսիմումներ ունենալ չի կարող: Մինիմումի համար ապացույցը նույնն է : □

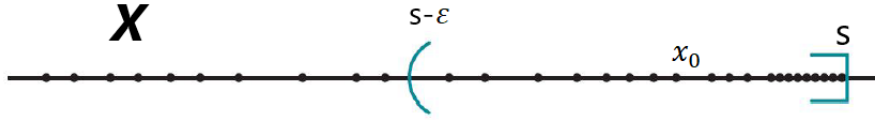
Սահմանում 1.21. $s \in \mathbb{R}$ թիվը կոչվում է $X \subset \mathbb{R}$ բազմության **ճշգրիտ վերին եզր** կամ **սուպրեմում**. կգրենք $\boxed{s = \sup X}$, եթե

$$\begin{aligned} (u) \quad & \forall x \in X \quad x \leq s, \\ (p) \quad & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 = x_0(\varepsilon) \in X \quad \text{s.t.} \quad x_0 > s - \varepsilon : \end{aligned} \quad (1-29)$$

Քննարկենք բերված (1-29ա) և (1-29բ) պայմանները: Առաջին՝ (1-29ա) պայմանը նշանակում է, որ s թիվը X բազմության վերին եզր է, ավելի սրույճ՝ X -ի վերին եզրերից մեկն է: Երկրորդ՝ (1-29բ) պայմանի մեջ փորձ է արված s վերին եզրը փոքրացնել $\varepsilon > 0$ կամայական դրական թվով, և ո՞րն է արդյունքը: Փոքրացրած $s - \varepsilon$ թիվն այլևս X -ի վերին եզր չէ, քանի որ գտնվել է $s - \varepsilon$ -ը գերազանցող ինչ-որ $x_0 \in X$ փարը (ε -ից կախված):

Սա նշանակում է , որ s թիվն առկա վերին եզրերից փոքրագույնն է : Այսպիսով, կարելի է ձևակերպել սուպրեմումի կարճ սահմանումը՝

X բազմության **սուպրեմումը** X -ի վերին եզրերից փոքրագույնն է :



Գծագիր 1.13. Սուպրեմումը վերին եզրերից փոքրագույնն է

Օրինակ, $\sup(6, 8) = 8 \neq \max(6, 8)$, $\sup(6, 8] = \max(6, 8] = 8$: Ներառյալ է , որ այս օրինակներում 8 թիվը սուպրեմում է անկախ այն հանգամանքից՝ արդյո՞ք բազմությանը պատկանում է , թե ոչ: Վերջին դեպքում, երբ $8 \in (6, 8]$, 8 թիվը, լինելով սուպրեմում, նաև մաքսիմումն է : Այսպեսից պարզ է դառնում, որ սուպրեմումի գաղափարը գալիս է փոխարինելու մաքսիմումին, երբ այդ մաքսիմումը գոյություն չունի:

Սահմանում 1.22. $i \in \mathbb{R}$ թիվը կոչվում է $X \subset \mathbb{R}$ բազմության **նիսի** **ստորին եզր** կամ **ինֆիմում**. կգրենք $i = \inf X$, եթե

$$\begin{aligned} (u) \quad & \forall x \in X \quad x \geq i, \\ (p) \quad & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 = x_0(\varepsilon) \in X \quad s.t. \quad x_0 < i + \varepsilon : \end{aligned} \tag{1-30}$$

Ինչպես սուպրեմումի դեպքում էր, քննարկենք (1-30ա) և (1-30բ) պայմանները և կրկենք վերլուծությունը:

Առաջին (1-30ա) պայմանը նշանակում է , որ i թիվը X բազմության ստորին եզր է , ավելի ստույգ՝ X -ի ստորին եզրերից մեկն է : Երկրորդ (1-30բ) պայմանի մեջ փորձ է արված i ստորին եզրը մեծացնել $\varepsilon > 0$ կամայական դրական թվով, և ո՞րն է արդյունքը: Մեծացրած $i + \varepsilon$ թիվն այլևս X -ի ստորին եզր չէ , քանի որ գրավել է $i + \varepsilon$ -ը գերազանցող ինչ-որ $x_0 \in X$ փարր (ε -ից կախված): Սա նշանակում է , որ i թիվն առկա ստորին եզրերից մեծագույնն է : Այսպիսով, կարելի է ձևակերպել ինֆիմումի կարճ սահմանումը՝

X բազմության **ինֆիմումը** X -ի ստորին եզրերից մեծագույնն է :



Գծագիր 1.14. Ինֆիմումը ստորին եզրերից մեծագույնն է

Օրինակ, $\inf(6, 8) = 6 \neq \min(6, 8)$, $\inf[6, 8) = \min[6, 8) = 6$: Նեպաքրքիր է, որ այս օրինակներում 6 թիվն ինֆիմում է անկախ այն հանգամանքից՝ րվյալ բազմությանը պարկանում է, թե ոչ: Վերջին դեպքում, երբ $6 \in [6, 8)$, 6 թիվը, լինելով ինֆիմում, նաև մինիմումն է : Այսպեղից պարզ է դառնում, որ ինֆիմումի գաղափարը գալիս է փոխարինելու մինիմումին, երբ այդ մինիմումը գոյություն չունի:

Թեորեմ 1.1. (Ճշգրիտ եզրերի գոյության մասին)

Դիցուք $X \subset \mathbb{R}$ բազմությունը դատարկ չէ. $X \neq \emptyset$:

ա) Եթե X -ը սահմանափակ է վերևից, ապա նրա սուպրեմումը գոյություն ունի և միակն է՝ $\exists ! \sup X$:

բ) Եթե X -ը սահմանափակ է ներքևից, ապա նրա ինֆիմումը գոյություն ունի և միակն է՝ $\exists ! \inf X$:

Ապացույց. Գոյության ապացույցը մեր դասընթացի մաս չէ, և այն չենք ներկայացնի: Միակությունը հեքնում է անմիջապես Պնդում 1.1-ից, քանի որ և՛ սուպրեմումը, և՛ ինֆիմումը որոշակի բազմության մինիմում և մաքսիմում են համապատասխանաբար: $\square$

Անսահմանափակ բազմություններին նույնպես վերագրում են սուպրեմում և ինֆիմում հեքնյալ իմաստով.

Եթե X բազմությունը անսահմանափակ է վերևից, ապա կհամարենք, որ $\sup X = +\infty$:

Եթե X բազմությունը անսահմանափակ է ներքևից, ապա կհամարենք, որ $\inf X = -\infty$:

Այս երկու դեպքերում կասենք, որ սուպրեմումը և ինֆիմումը **գոյություն չունեն**:

Այժմ կապացուցենք մի նշանավոր պնդում, որը կարծես ակնհայտ է, սակայն ներկայացնում է ճշգրիտ եզրերի գոյության մասին թեորեմի (Թեորեմ 1.1-ի) մի օգտակար կիրառություն: Այն կոչվում է **Արքիմեդի սկզբունք**, որի միայն մասնավոր դեպքը կձևակերպենք ու կապացուցենք: Բացի այդ, պնդումը կապացուցենք հակառակ ենթադրության մեթոդով, որը հեքազայում բավականին հաճախ ենք կիրառելու:

Պնդում 1.2. (Արքիմեդի սկզբունքը) Յանկացած իրական թվից ավելի մեծ բնական թիվ գոյություն ունի, այսինքն՝

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad n > a :$$

Ապացույց. Այս ձևակերպումը փաստորեն համընկնում է բնական թվերի $\mathbb{N}$ բազմության անսահմանափակության պայմանի հեք: Ապացուցելու համար ենթադրենք հակառակը, այն է՝ բնական թվերի $\mathbb{N}$ բազմությունը սահմանափակ է վերևից, այսինքն՝

$$\exists b > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq b :$$

Այժմ մեր նպատակն է հանգել որևէ հակասության: Թեորեմ 1.1-ի համաձայն՝ բնական թվերի $\mathbb{N}$ բազմությունն ունի վերջավոր սուպրեմում. $\exists 1! \sup \mathbb{N} \stackrel{\text{նշ.}}{=} s < +\infty$: Ըստ սուպրեմումի սահմանման՝

$$(a) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq s,$$

$$(p) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad n_0 > s - \varepsilon :$$

Մասնավորապես, վերցնենք $\varepsilon = 1$, և այդ դեպքում՝

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad n_0 > s - 1 \quad \implies \quad \boxed{s < n_0 + 1 \leq s} \quad \implies \quad \boxed{s < s} :$$

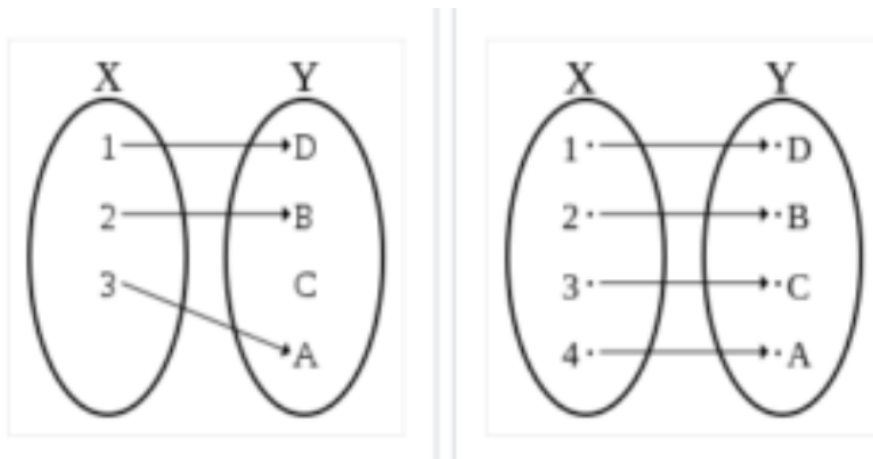
Սրացված հակասությունն ավարտում է ապացույցը: □

1.5 Հաշվելի և անհաշվելի բազմություններ

Մենք արդեն սահմանել էինք վերջավոր և անվերջ բազմությունները, այսինքն՝ դասակարգել էինք բազմություններն ըստ դրանց պարունակած փարբերի քանակի: Երբ համեմատվում է երկու *վերջավոր* բազմություն, միշտ կարելի է հաշվել դրանց փարբերի քանակները և արձանգրել՝ որ բազմությունն ունի ավելի շատ փարբ: Ծանոթանանք համեմատման մեկ այլ ֆունկցիոնալ եղանակի հետ:

Երկու վերջավոր բազմություն ունի հավասար թվով փարբեր այն և միայն այն դեպքում, երբ դրանց միջև կարելի է հաստատել որևէ փոխմիարժեք համապատասխանություն:

Եթե վերջավոր բազմությունների միջև գծապարկերով փորձենք կառուցել փոխմիարժեք ֆունկցիա, ապա այդ բազմությունների փարբերի քանակները հեշտությամբ համեմատվում են:



Գծագիր 1.15. Ոչ փոխմիարժեք և փոխմիարժեք արտապարկերումներ (ֆունկցիաներ)

Այսպես աջ գծապարկերում տեսնում ենք փոխմիարժեք համապատասխանություն (մեկը մեկի ֆունկցիա) և եզրակացնում, որ X և Y բազմություններն ունեն նույն քանակով փարբեր: Մինչդեռ ձախ գծապարկերում

X և Y բազմությունների միջև փոխմիարժեք համապարասխանություն կառուցել անհնար է, և ուրեմն՝ X և Y բազմություններն ունեն անհավասար քանակով փարրեր:

Սահմանում 1.23. Երկու կամայական X և Y բազմություններ կոչվում են **համարժեք**, եթե դրանց միջև կարելի է հաստատել որևէ փոխմիարժեք համապարասխանություն: Կգրենք $\boxed{X \sim Y}$:

Այսպիսով, **գծագիր** 1.15-ի ձախ գծապարկերում X և Y բազմությունները համարժեք չեն. $X \not\sim Y$, իսկ աջ գծապարկերում X և Y -ը համարժեք են. $X \sim Y$: Վերջավոր բազմությունների դեպքում համարժեքությունը համընկնում է հավասար քանակով փարրեր ունենալու հետ:

Այսպես ամենահեղափոխական և օգտակարն այն է, որ համարժեք բազմությունների գաղափարը փարածվում է անվերջ բազմությունների դեպքի վրա: Երբ համեմատում ենք երկու *անվերջ* բազմություն և փորձում հասկանալ, թե դրանցից որն է ավելի շար փարր պարունակում, անմիջական եղանակները պիտանի չեն, և սրիպված դիմում ենք նկարագրված ֆունկցիոնալ եղանակին:

Օրինակ 1.2. $\boxed{\mathbb{R} \sim (0, +\infty)}$, այսինքն՝ ամբողջ թվային (իրական) $\mathbb{R}$ առանցքը և $(0, +\infty)$ կիսաառանցքը համարժեք են, քանի որ կարելի է գտնել փոխմիարժեք ֆունկցիա, որն արտասպարկերում է այդ բազմություններից մեկը մյուսի վրա, օրինակ՝

$$y = 2^x : \mathbb{R} \mapsto (0, +\infty), \quad \text{կամ} \quad y = \lg x : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R} :$$

Օրինակ 1.3. Մեկ այլ օրինակ՝ $\boxed{[0, 3] \sim [0, 9]}$ համարժեք են, քանի որ կարելի է գտնել փոխմիարժեք (այսպես գծային) ֆունկցիա՝

$$\exists y = 3x : [0, 3] \mapsto [0, 9] :$$

Ներաբրքիր է, որ երկու դեպքում էլ համարժեքության հետ միասին ունենք ներդրումներ՝ $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ և $[0, 3] \subset [0, 9]$:

Օրինակ 1.4. Բնական և ամբողջ թվերի բազմությունները համարժեք են՝ $\boxed{\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}}$:

Նիմնավորելու համար պետք է կառուցենք կամ գտնենք ինչ-որ փոխմիարժեք $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$ ֆունկցիա: Այդ նպատակով դասավորենք բազմությունների փարրերը որոշակի կարգով և համապարասխանենք նեցնենք փարրերը.

$\mathbb{Z}$	0,	− 1,	1,	− 2,	2,	− 3,	3,	
$\mathbb{N}$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	 :

Առաջին տողում ներկայացված ամբողջ թվերը համապարասխանեցնենք երկրորդ տողում ներկայացված բնական թվերի հետ: Կարանանք մեկը մեկի (կամ փոխմիարժեք) $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$ ֆունկցիա: Այս

կառույցը միանգամայն բավարար է, բայց ցանկության դեպքում կարելի է կառուցած ֆունկցիան ավելի բացահայտ տեսքի բերել՝

$$f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}, \quad f(n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 2n + 1, & \text{եթե } n = 0, 1, 2, \dots, \\ 2|n|, & \text{եթե } n = -1, -2, -3, \dots : \end{cases}$$

Օրինակ 1.5. Բնթուրային ապացույցեք, որ $\boxed{\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}_+}$ և $\boxed{\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}}$:

Ամփոփենք. բազմությունների համարժեքությունը լավ միջոց է անվերջ բազմությունները համեմատելիս:

Սահմանում 1.24. X բազմությունը կոչվում է **հաշվելի**, եթե այն համարժեք է բնական թվերի $\mathbb{N}$ բազմությանը՝ $\boxed{X \sim \mathbb{N}}$, այլ կերպ ասած՝ գոյություն ունի փոխմիարժեք $f : X \mapsto \mathbb{N}$ ֆունկցիա:

Փաստորեն, կարելի է ասել, որ հաշվելի են այն բազմությունները, որոնց փարրերը կարելի է համարակալել:

Օրինակներ 1.4 և 1.5-ից եզրակացնում ենք, որ

$\boxed{\text{ամբողջ թվերի } \mathbb{Z} \text{ և ռացիոնալ թվերի } \mathbb{Q} \text{ բազմությունները հաշվելի են:}}$

Առանց խիստ ապացույցի ձևակերպենք հաշվելի բազմությունների մի քանի հատկություններ:

Պնդում 1.3. (**Հաշվելի բազմությունների հատկություններ**)

- 1) Հաշվելի բազմության ցանկացած անվերջ ենթաբազմություն հաշվելի է :
- 2) Հաշվելի բազմությունների ցանկացած (վերջավոր կամ հաշվելի) միավորում հաշվելի է :
- 3) Ցանկացած անվերջ բազմություն պարունակում է հաշվելի ենթաբազմություն:

Վերջապես, կան անվերջ բազմություններ, որոնք հաշվելի չեն, այդպես կոչված՝ **անհաշվելի** կամ **ավելի քան հաշվելի** բազմություններ: Դրանց փարրերը համարակալել այլևս անհնար է : Օրինակ, անհաշվելի են բոլոր միջակայքերը՝ (a, b) , $a < b$, որոնց մեծությունը կամ ծայրակետերը որևէ դերակապարում այս հարցում չունեն: Անհաշվելի են նաև $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ բազմությունները և այլն:

Գլուխ 2

Հաջորդականությունների տեսություն

2.1 Հաջորդականության սահման

Սահմանում 2.1. Եթե յուրաքանչյուր $n \in \mathbb{N}$ բնական թվին համապատասխանեցվում է ինչ-որ $x_n \in \mathbb{R}$ իրական թիվ, ապա համարակալված թվերի սրացված (կարգավորված) բազմությունը՝

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\} \stackrel{\text{նշ}}{=} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\},$$

կոչվում է **թվային հաջորդականություն** կամ պարզապես **հաջորդականություն**:

Եթե ձևակերպենք ֆունկցիոնալ տերմիններով, կարելի է ասել, որ հաջորդականությունը բնական արգումենտի ֆունկցիա է. գրում էինք $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ կամ $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $x = x(n)$:

x_n թվերը կոչվում են հաջորդականության փարբեր կամ անդամներ: Հաջորդականությունները կարելի է ներմուծել փարբեր եղանակներով՝ նկարագրողական կամ բանաձևային:

Օրինակ 2.1. ա) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$, նույնը բանաձևով՝ $x_n = (-1)^n$;

բ) $0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots$, նույնը բանաձևով՝ $y_n = 1 + (-1)^n$;

գ) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, նույնը բանաձևով՝ $z_n = \frac{1}{n}$:

Նախորդ դասախոսություններում սահմանել և քննարկել էինք կամայական թվային բազմությունների եզրերը, ճշգրիտ եզրերը, սահմանափակության հատկությունները: Այդ ամենը կարելի է սահմանել նաև հաջորդականությունների համար: Կարճ կրկնենք կարևոր սահմանումները հաջորդականությունների համար:

Սահմանում 2.2. Կասենք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը **սահմանափակ է վերևից**, եթե

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq M: \quad (2-1)$$

Այս դեպքում M թիվը կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության **վերին եզր**:

Սահմանում 2.3. Կասենք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը **սահմանափակ է ներքևից**, եթե

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq m : \quad (2-2)$$

Այս դեպքում m թիվը կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության **ստորին եզր**:

Սահմանում 2.4. Կասենք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը **սահմանափակ է**, եթե

$$\exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M : \quad (2-3)$$

Վերջին պայմանը՝ $|x_n| \leq M \iff -M \leq x_n \leq M$, նշանակում է, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը և՛ վերևից, և՛ ներքևից սահմանափակ է M և $-M$ հակադիր եզրերով:

Սահմանում 2.5. $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է **անսահմանափակ**, եթե

$$\forall M > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |x_{n_0}| > M : \quad (2-4)$$

Օրինակ 2.2. $x_n = (-1)^n$, $y_n = \frac{1}{n}$, $z_n = \cos n!$ հաջորդականությունները սահմանափակ են, իսկ $a_n = (-1)^n n$, $b_n = n!$ հաջորդականությունները՝ անսահմանափակ:

Սահմանում 2.6. $s \in \mathbb{R}$ թիվը կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության **ճշգրիտ վերին եզր** կամ **սուպրեմում**. կգրենք՝ $\boxed{s = \sup\{x_n\}}$, կամ $\boxed{s = \sup_n x_n}$, եթե

$$(u) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq s, \quad (2-5)$$

$$(p) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad x_{n_0} > s - \varepsilon :$$

Առաջին՝ (2-5ա) պայմանը նշանակում է, որ s թիվը $\{x_n\}$ հաջորդականության վերին եզր է, ավելի սուրյգ՝ վերին եզրերից մեկն է: Երկրորդ՝ (2-5բ) պայմանի մեջ ցույց է տրված, որ $\varepsilon > 0$ կամայական դրական թվով փոքրացրած $s - \varepsilon$ թիվն այլևս $\{x_n\}$ -ի վերին եզր չէ: Այլ կերպ ասած՝ s թիվը վերին եզրերից փոքրագույնն է:

$\{x_n\}$ հաջորդականության **սուպրեմումը** $\{x_n\}$ -ի վերին եզրերից փոքրագույնն է:

Սահմանում 2.7. $m \in \mathbb{R}$ թիվը կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության **ճշգրիտ ստորին եզր** կամ **ինֆիմում**. կգրենք՝ $\boxed{m = \inf\{x_n\}}$, կամ $\boxed{m = \inf_n x_n}$, եթե

$$(u) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq m, \quad (2-6)$$

$$(p) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad x_{n_0} < m + \varepsilon :$$

Առաջին՝ (2-6ա) պայմանը նշանակում է, որ m թիվը $\{x_n\}$ հաջորդականության ստորին եզրերից մեկն է : Երկրորդ՝ (2-6բ) պայմանը նշանակում է, որ m թիվը ստորին եզրերից մեծագույնն է :

$\{x_n\}$ հաջորդականության **ինֆիմումը** $\{x_n\}$ ստորին եզրերից մեծագույնն է :

Սուպրեմումը մաքսիմումի գաղափարի ընդհանրացումն է, իսկ ինֆիմումը՝ մինիմումի:

Անցնենք հաջորդականության սահմանի գաղափարին: Սկսենք պարզագույն օրինակներից:

Օրինակ 2.3.

$$\boxed{x_n = \frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \text{այսինքն՝} \quad \{x_n\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots \right\}$$

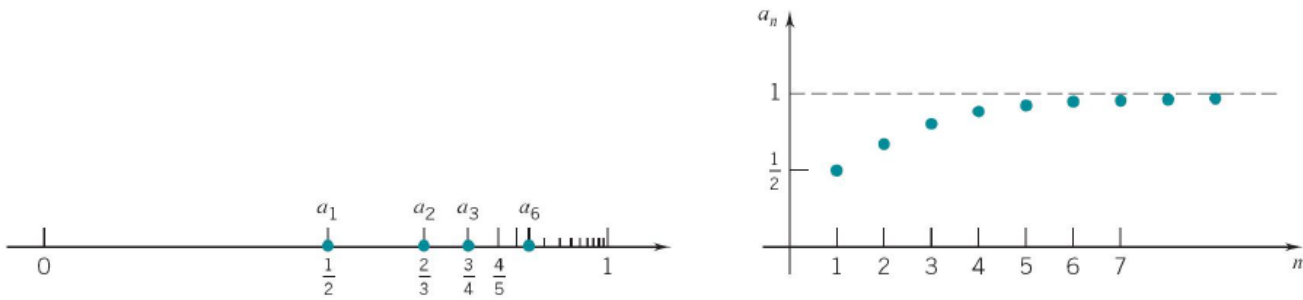


Գծագիր 2.1. $x_n = \frac{1}{n}$ հաջորդականության անդամների կուտակումը $x = 0$ կետի շուրջը

Պարկերելով հաջորդականության անդամները թվային առանցքի վրա՝ նկատում ենք, որ $x_n = \frac{1}{n}$ անդամները նվազելով մոտենում են (կամ ձգտում) $x = 0$ սկզբնակետին, որը քիչ հեռու կանխանենք հաջորդականության սահման: Ընդ որում, $x_n = \frac{1}{n}$ անդամների և $x = 0$ սահմանի միջև հեռավորությունը, որը ևս հավասար է $\frac{1}{n}$, մեծ n -երի համար որքան ասես փոքր արժեքներ է ընդունում. ասում են՝ ձգտում է զրոյի, և գրում են $\boxed{\frac{1}{n} \rightarrow 0}$: Այս երևույթը տվյալ օրինակում հարակ էրկում է գծագրով և հաջորդականության անդամների վարքով, այնուամենայնիվ ընդհանուր դեպքում պարզունակ երևույթ չէ և պահանջում է խիստ սահմանում:

Օրինակ 2.4. $\boxed{a_n = \frac{n}{n+1}}$, այսինքն՝ $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}, \dots \right\}$:

Դարձյալ նկատում ենք, որ $a_n = \frac{n}{n+1}$ անդամները այս անգամ աճելով մոտենում են (կամ ձգտում) $x = 1$ կետին (սահմանին): Հաջորդականության անդամների այս վարքը կարելի է պարկերել ինչպես թվային (արացիսների) առանցքի վրա, այնպես էլ կոորդինատային հարթության (կամ օրդինատների առանցքի) վրա: **Գծագիր 2.2**-ում երկու եղանակն էլ պարկերված է: Նեշտ է տեսնել, որ մեծ n -երի համար $a_n = \frac{n}{n+1}$ անդամների և $x = 1$ սահմանի միջև հեռավորությունը որքան ասես փոքր արժեքներ է ընդունում. կգրենք՝ $\boxed{a_n = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1}$, կամ $\boxed{a_n - 1 \rightarrow 0}$:



Գծագիր 2.2. $a_n = \frac{n}{n+1}$ հաջորդականության անդամների ձգվումը $x = 1$ կետին

Այժմ մեր խնդիրն է խիստ սահմանել հաջորդականության սահմանի գաղափարն ընդհանուր դեպքում:

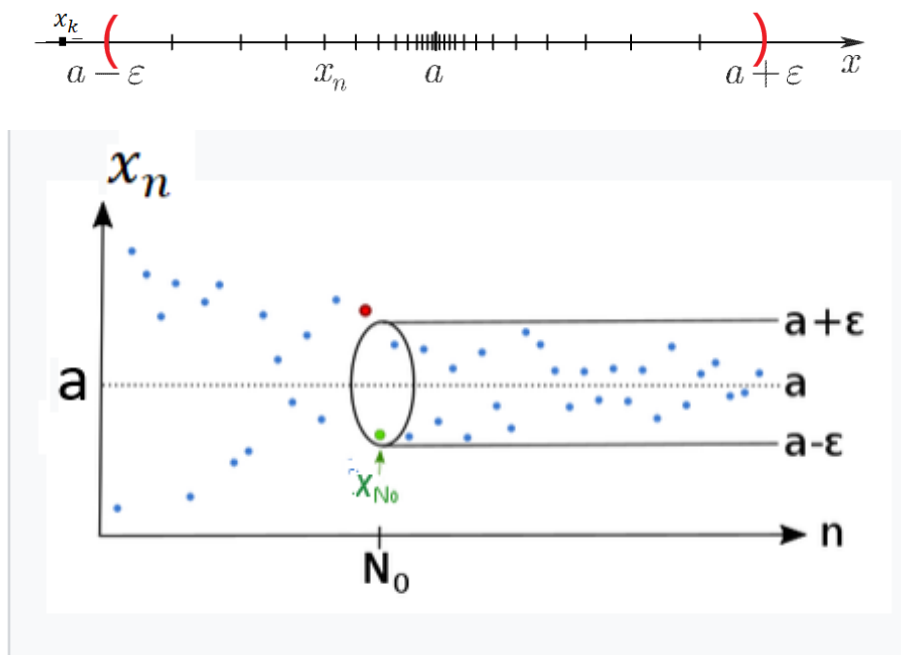
Սահմանում 2.8. Կասենք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը **զուգամեր** է, իսկ $a \in \mathbb{R}$ թիվը $\{x_n\}$ **հաջորդականության սահմանն** է, եթե տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon, \quad (2-7)$$

այսինքն՝ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այդ ε -ից կախված որևէ N_0 բնական թիվ (համար), որից սկսած՝ բոլոր n -երի համար տեղի ունի $|x_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Երկու հավասարապես կիրառվող գրելաձև կա՝ $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ կամ $x_n \rightarrow a, \text{ երբ } n \rightarrow \infty$:

Բացի այդ, հաճախ ասում են, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը **ձգվում** կամ **զուգամիչում** է a թվին, ինչը համարժեք ձևակերպում է :



Գծագիր 2.3. Հաջորդականության սահմանի երկրաչափական պատկերումը

Ներագայում մեզ շար են հանդիպելու (2-7) փեսքի պայմաններ. դրանց կանվանենք **ε -լեզվով ձևակերպված պայմաններ**: Փորձենք ավելի լավ հասկանալ (2-7) պայմանը: Մոդուլով անհավասարությունը (2-7) պայմանում արտագրենք բացված փեսքով.

$$|x_n - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \iff x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \forall n > N_0,$$

այսինքն՝ ցանկացած $\varepsilon > 0$ համար, այդ թվում՝ որքան կամենանք փոքր $\varepsilon > 0$ համար՝ բոլոր x_n անդամները, սկսած որևէ N_0 համարից, հայտնվում են a կետի ε -շրջակայքում: Որքան էլ սեղմենք a կետի ε -շրջակայքը, միևնույնն է, բոլոր x_n անդամները, սկսած որևէ N_0 -ից, հայտնվում են այդ նեղ ε -շրջակայքում: Այս կերպ x_n անդամները կուրակվում են a կետի շուրջը: Իսկ a կետի ε -շրջակայքից դուրս կարող են գտնվել միայն վերջավոր թվով x_n անդամներ: Սա է սահմանի երկրաչափական իմաստը, ինչը փեսանելի է **գծագիր 2.3**-ում:

Օրինակ 2.5. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, այսինքն՝ $\{x_n\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$:

Նեշտ է նկատել, որ հաջորդականության անդամները կուրակվում են զրոյի շուրջը կամ ավելի ստույգ՝ ձգտում են զրոյի: Այնուամենայնիվ, մենք պարտավոր ենք խիստ ստույգել սահման ունենալու կամ զուգամիտության փաստը՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ կամ $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$, հեղուկով սահմանմանը: Ձևականորեն գրենք սահմանի (2-7) պայմանը փոխալ հաջորդականության համար և ստույգենք այն.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon : \quad (2-8)$$

Պարզեցնենք (2-8)-ի վերջին անհավասարությունը.

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} :$$

Արդյո՞ք այս անհավասարությունը փեսքի ունի սկսած որևէ N_0 համարից: Պարաստիսան է՝ այո, դա գրեթե սկնհայտ է: Բավական է կիրառել Արթիմեդի սկզբունքը, որի համաձայն՝ ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon > 0$ դրական թիվը, ստացված $\frac{1}{\varepsilon}$ իրական թվից ավելի մեծ ինչ-որ $N_0 \in \mathbb{N}$ բնական թիվ գոյություն ունի. $\exists N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$: Սկսած N_0 -ից՝ հաջորդող բնական թվերը ($\forall n > N_0$) առավել ևս մեծ կլինեն $\frac{1}{\varepsilon}$ -ից. $n > N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$: Սա էլ նշանակում է, որ (2-8) պայմանը հաստատվեց, և խկապես x_n հաջորդականությունը զուգամիտում է զրոյին: Այնուամենայնիվ, ցանկալի է $N_0 \in \mathbb{N}$ ստասարկող և ε -ից կախված բնական թիվը բացահայտ որոշել: Կարելի է $N_0 \in \mathbb{N}$ համարն ընտրել տարբեր եղանակներով: Օրինակ, կարելի է օգտագործել այդպես կոչված ամբողջ մաս $[x]$ ֆունկցիան, այսինքն՝ $x \in \mathbb{R}$ **իրական թիվը** **զգերազանցող մեծագույն ամբողջ թիվը**: Զանի որ $[x] \leq x < [x] + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, մեր դեպքում կարող ենք ընտրել

$$N_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil, \quad \text{կամ} \quad N_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1, \quad \text{կամ} \quad N_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 22, \quad \text{և այլն:}$$

Իսկապես, $N_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ ընտրության դեպքում ստանում ենք

$$\forall n > N_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \implies n > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \implies n > \frac{1}{\varepsilon} \implies (2-8),$$

ինչը հաստատում է (2-8) պայմանը և ավարտում ստուգումը:

Օրինակ 2.6. Ցանկացած q , $0 < |q| < 1$, պարամետրի համար ցույց տանք, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$:

Ի դեպ, նշենք, որ փոփոխականն այսպես n ցուցիչն է, և ուրեմն մենք գործ ունենք (նվազող) ցուցչային ֆունկցիայի հետ: Տվյալ սահմանը ստուգելու համար դարձյալ ձևականորեն գրենք սահմանի (2-7) պայմանը և գրենք N_0 սպասարկող համարը.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad |q^n - 0| < \varepsilon : \quad (2-9)$$

Պարզեցնենք (2-9)-ի վերջին անհավասարությունը. փաստորեն լուծենք անհավասարությունն n -ի նկատմամբ, իսկ դրա համար պետք է լուծարիթմել.

$$|q^n - 0| < \varepsilon \iff |q|^n < \varepsilon \iff n \lg |q| < \lg \varepsilon \iff \boxed{n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}} : \quad (2-10)$$

Ինչպես նախորդ՝ Օրինակ 2.5-ում, դիմենք Արքիմեդի սկզբունքին, որի համաձայն՝ ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon > 0$ դրական թիվը (բավական է դիտարկել $0 < \varepsilon < 1$ դեպքը), գոյություն ունի $n \in \mathbb{N}$ բնական թիվ այնպիսին, որ (2-10) անհավասարությունը ճիշտ է: Ավելի կոնկրետ՝ կարելի է վերցնել N_0 սպասարկող համարն ամբողջ մասի միջոցով հետևյալ կերպ՝

$$\forall n > N_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \right\rceil \implies n > \left\lceil \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \right\rceil \implies n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \implies (2-9) - (2-10) :$$

Այսպիսով, N_0 -ի նման ընտրությամբ ստացանք, որ սկսած N_0 -ից՝ բոլոր բնական n -երի համար տեղի ունի (2-9) պայմանը: Սրանով $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0}$ սահմանի փաստն ապացուցվեց:

2.2 Անվերջ փոքրեր և անվերջ մեծեր

Սահմանում 2.9. Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը հավասար է զրոյի, ապա տվյալ հաջորդականությունը կոչվում է **անվերջ փոքր**:

Ընդունված երկու գրելաձևին՝ $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0}$ և $\boxed{x_n \rightarrow 0, \text{ երբ } n \rightarrow \infty}$, ավելացնենք ևս մեկը՝ $\boxed{x_n = o(1), \text{ երբ } n \rightarrow \infty}$: Կարդում ենք՝ $\{x_n\}$ հաջորդականությունն «**o-փոքր մեկ**» է: Այս վերջինն առայժմ ընդունենք որպես զուր նշանակում, որի իմաստը կբացահայտենք հետագայում:

Անվերջ փոքրերը մեզ արդեն հանդիպել են Օրինակներ 2.3, 2.5, 2.6-ում:

Ներկայումս միայն սահմանումներին՝ նկատում ենք, որ զուգամետ հաջորդականությունները կարելի է ար-
տահայտել անվերջ փոքրերի միջոցով հետևյալ կերպ՝

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0 \iff \boxed{x_n = a + \alpha_n}, \text{ որպես } \alpha_n \stackrel{\text{մ.2.}}{=} x_n - a = o(1) : \quad (2-11)$$

Սահմանում 2.10. Կասենք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունն **անվերջ մեծ** է, կգրենք $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty}$ կամ
 $\boxed{x_n \rightarrow \infty, \text{ երբ } n \rightarrow \infty}$, եթե նրա սահմանն անվերջ է, այսինքն՝

$$\forall E > 0 \quad \exists N_0 = N_0(E) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad |x_n| > E : \quad (2-12)$$

Օրինակ 2.7. Յանկուսած q ($|q| > 1$) պարամետրի համար ցույց տանք, որ $x_n = q^n$ հաջորդակա-
նությունն անվերջ մեծ է, այսինքն՝ $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty}$:

Այսպես գործ ունենք (սաճող) ցուցային ֆունկցիայի հետ: Տվյալ սահմանը ստուգելու համար ձևա-
կանորեն գրենք անվերջ մեծի (2-12) պայմանը և գրենք N_0 սպասարկող համարը:

$$\forall E > 0 \quad \exists N_0 = N_0(E) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad |q^n| > E : \quad (2-13)$$

Պարզեցնենք (2-13)-ի վերջին անհավասարությունը. փաստորեն լուծենք անհավասարությունն n -ի
նկատմամբ լոգարիթմելու միջոցով.

$$|q|^n > E \iff n \lg |q| > \lg E \iff \boxed{n > \frac{\lg E}{\lg |q|}} : \quad (2-14)$$

Ըստ Արքիմեդի սկզբունքի՝ ինչպիսին էլ լինի $E > 0$ դրական թիվը (բավական է դիտարկել $E > 1$
դեպքը), գոյություն ունի $n \in \mathbb{N}$ բնական թիվ այնպիսին, որ (2-14) անհավասարությունը ճիշտ է: Ավելի
կոնկրետ՝ կարելի է վերցնել N_0 սպասարկող համարն ամբողջ մասի միջոցով հետևյալ կերպ՝

$$\forall n > N_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \frac{\lg E}{\lg |q|} \right\rceil \implies n > \left\lceil \frac{\lg E}{\lg |q|} \right\rceil \implies n > \frac{\lg E}{\lg |q|} \implies (2-13) - (2-14) :$$

Այսպիսով, N_0 -ի նման ընտրությամբ ստացանք, որ սկսած N_0 -ից՝ բոլոր բնական n -երի համար տեղի
ունի (2-13) պայմանը: Սրանով $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty}$ սահմանի փաստն ապացուցվեց:

Անվերջ մեծ հաջորդականությունների հարույժ դեպքեր կան, երբ դրանք ձգվում են $+\infty$ կամ $-\infty$ -ին:

Սահմանում 2.11. Կասենք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունն **անվերջ մեծ** է և ձգվում է $+\infty$ -ին. կգրենք
 $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty}$ կամ $\boxed{x_n \rightarrow +\infty, \text{ երբ } n \rightarrow \infty}$, եթե

$$\forall E > 0 \quad \exists N_0 = N_0(E) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad x_n > E : \quad (2-15)$$

Սահմանում 2.12. Կասենք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունն **անվերջ մեծ է** և **ձգրում է** $-\infty$ -ին. կգրենք

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty} \quad \text{կամ} \quad \boxed{x_n \rightarrow -\infty, \quad \text{երբ} \quad n \rightarrow \infty}, \quad \text{եթե}$$

$$\forall E > 0 \quad \exists N_0 = N_0(E) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad x_n < -E : \quad (2-16)$$

Օրինակ 2.8. Բոլոր բերված հաջորդականություններն անվերջ մեծ են, թեև իրարից տարբերվում են վարքով.

$$\begin{aligned} 2^n &\rightarrow +\infty, & n^3 &\rightarrow +\infty, & -2^n &\rightarrow -\infty, & -n^3 &\rightarrow -\infty, \\ (-1)^n n^2 &\rightarrow \infty, & (-1)^n n^2 &\not\rightarrow +\infty, & (-1)^n n^2 &\not\rightarrow -\infty : \end{aligned}$$

Անվերջ փոքր և անվերջ մեծ հաջորդականություններն իհարկե շատ տարբեր են, սակայն սերտորեն կապված են միմյանց:

Պնդում 2.1. Դիցուք $\{\alpha_n\}$ -ն ինչ-որ $\{x_n\}$ հաջորդականության հակադարձն է, այսինքն՝ $\boxed{\alpha_n = \frac{1}{x_n}}$, $n \in \mathbb{N}$: Այդ դեպքում $\{x_n\}$ -ն անվերջ մեծ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\{\alpha_n\}$ -ն անվերջ փոքր է,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0} :$$

Ապացույց. Քանի որ գործ ունենք անհրաժեշտ և բավարար պայմանի հետ, ապացույցը բաղկացած կլինի երկու մասից՝ ձախից աջ (անհրաժեշտություն) և աջից ձախ (բավարարություն):

$\Rightarrow$ Ենթադրենք՝ $\{x_n\}$ -ն անվերջ մեծ է. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$: Ապացուցենք, որ $\{\alpha_n\}$ -ն անվերջ փոքր է:

Վերցնենք $\forall \varepsilon > 0$ և նշանակենք $\boxed{E \triangleq \frac{1}{\varepsilon} > 0}$: Անվերջ մեծի սահմանման համաձայն՝ տվյալ E -ի համար

$$E = \frac{1}{\varepsilon}\text{-ի համար} \quad \exists N_0 = N_0(E) = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad |x_n| > E \implies \frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{E} \implies |\alpha_n| < \varepsilon :$$

Ստացվեց, որ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad |\alpha_n| < \varepsilon, \quad \text{այսինքն} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 :$$

$\Leftarrow$ Նակադարձը, ենթադրենք՝ $\{\alpha_n\}$ -ն անվերջ փոքր է. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$: Պետք է ցույց տալ, որ $\{x_n\}$ -ն անվերջ մեծ է: Ապացույցն իրականացվում է նույն քայլերով, և մանրամասները թողնենք ընթերցողին: $\square$

Սահմանում 2.13. Ոչ զուգամեծ հաջորդականությունները կոչվում են **տարաամեր**: Այդ թվում՝ տարաամեր են համարվում բոլոր անվերջ մեծերը:

Տարամետր հաջորդականությունները ոչ պակաս հետաքրքրություն են ներկայացնում, քան զուգամետր հաջորդականությունները:

Տարամետր հաջորդականությունները բաժանվում են երկու խմբի, այսինքն՝ լինում են երկու տեսակի.

- 1) անվերջ մեծեր, $x_n \rightarrow \infty$, օրինակ՝ $x_n = \sqrt{n}$;
- 2) հաջորդականություններ, որոնք առհասարակ սահման չունեն՝ ոչ վերջավոր սահման, ոչ անվերջ.
 $x_n \not\rightarrow a$, $x_n \not\rightarrow \infty$, օրինակ՝ $x_n = (-1)^n$:

Ի դեպ, այն փաստը, որ ավյալ հաջորդականությունը $a \in \mathbb{R}$ թվին չի ձգպում, կարելի ձևակերպել ε -լեզվով, ինչը սպուգումների ժամանակ հարմար է ,

$$x_n \not\rightarrow a \iff \exists \varepsilon > 0 \quad s.t. \quad \forall N_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n > N_0 \quad s.t. \quad |x_n - a| \geq \varepsilon :$$

Ընթերցողը հեշտությամբ կնկարի, որ զուգամիտության (2-7) պայմանի համեմատ սիմվոլները (քվանտորները) շրջվում են: Սա օրինաչափություն է որևէ պայմանի ժխտումը կազմելիս:

Անվերջ մեծերը չի կարելի նույնացնել անսահմանափակ հաջորդականությունների հետ: Դրանց վարքը կարող է շատ տարբեր լինել:

Պնդում 2.2. *Անվերջ մեծ հաջորդականությունն անսահմանափակ է: Նակադարձը սխալ է: Կարճ՝*

$$\left(x_n \rightarrow \infty \right) \begin{matrix} \implies \\ \not\Leftarrow \end{matrix} \left(x_n\text{-ն անսահմանափակ է} \right) :$$

Ապացույց. Ձախից աջ պնդումն ակնհայտ է ըստ սահմանումների: Որպեսզի ցույց տրվի, որ աջից ձախ պնդումը տեղի չունի, բավական է բերել հաջորդականության մեկ օրինակ (այդպես կոչված՝ **հակաօրինակ**), որը, լինելով անսահմանափակ, անվերջ մեծ չի լինի.

$$\{x_n\} = \{1, \quad 0, \quad 2, \quad 0, \quad 3, \quad 0, \quad 4, \quad 0, \quad 5, \quad 0, \quad \dots\dots\} :$$

Վերջինիս խիստ սպուգումը սահմանումների հիման վրա թողնենք ընթերցողին: □

2.3 Անվերջ փոքրերի հատկությունները

Այս բաժնում անվերջ փոքրերի մի քանի հատկություններ կապացուցենք: Թերևս ամենապարզունակ հատկությունն է սահմանումից անմիջապես բխող $x_n \rightarrow 0 \iff |x_n| \rightarrow 0$ պնդումը:

Թեորեմ 2.1. *Երկու անվերջ փոքրերի գումարը կամ տարբերությունն անվերջ փոքր է, այսինքն՝*

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = 0 \right) :$$

Ապացույց. Ներկայացնենք x_n և y_n անվերջ փոքրերի սահմանումներն ε -լեզվով.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_1 \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2-17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_2 \quad |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} : \quad (2-18)$$

Կամայական ε թիվը այսպեղ փոխարինեցինք նույնպես կամայական $\varepsilon/2$ թիվով՝ միայն փոխանակական նկատարումներից ելնելով: Վերցնենք $N_0 \stackrel{def}{=} \max\{N_1, N_2\}$ և պահանջենք, որ $n > N_0$: Այդ դեպքում փոքրի կունենան և՛ (2-17), և՛ (2-18) պայմանները: Կիրառելով եռանկյան անհավասարությունը՝ ստանում ենք

$$|x_n \pm y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{երբեք } \forall n > N_0 :$$

Անվերջ փոքրի սահմանման համաձայն՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = 0$: □

Ներկայացնենք 2.1. Վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի գումարն անվերջ փոքր է :

Ապացույց. Ենթադրենք՝ փրկված է $m \in \mathbb{N}$ հար անվերջ փոքրեր: Կրկնում ենք նույն ապացույցը՝ կիրառելով

$$|x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + \dots + x_n^{(m)}| \leq |x_n^{(1)}| + |x_n^{(2)}| + \dots + |x_n^{(m)}|$$

եռանկյան անհավասարությունը: Ցանկացողները կարող են նաև կիրառել ապացույցի մեկ այլ եղանակ՝ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: □

Դիփուդություն 2.1. Օրինաչափ հարց է առաջանում, ի՞նչ կլինի, երբ գումարենք անվերջ թվով անվերջ փոքրեր: Կարելի՞ է պնդել, որ այդ գումարը ևս կլինի անվերջ փոքր, ինչպես Ներկայացնենք 2.1-ում: Պատասխանը բացասական է. անսահմանափակ թվով անվերջ փոքրերի գումարը պարզապես չէ լինի անվերջ փոքր, օրինակ,

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} :$$

Տվյալ y_n հաջորդականությունը կազմված է n հար գումարելիներից, որոնցից յուրաքանչյուրն առանձին վերցրած անվերջ փոքր է : Սակայն y_n -ը վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի գումար չէ, քանի որ n -ի աճման հետ միասին աճում է գումարելիների քանակը: Գրենք y_n -ի սահմանը՝ գնահատելով y_n -ը ներքևից.

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq n \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} :$$

Վերջին հաջորդականությունն անվերջ մեծ է և ըստ սահմանման՝

$$\forall E > 0 \quad \exists N_0 = N_0(E) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_0 \quad y_n \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} > E,$$

ինչը ցույց է տալիս, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$: Այս օրինակը վկայում է, որ անսահմանափակ թվով անվերջ փոքրերի գումարն անգամ կարող է լինել անվերջ մեծ:

Թեորեմ 2.2. Եթե երկու հաջորդականություններից մեկն անվերջ փոքր է, իսկ մյուսը՝ սահմանափակ, ապա նրանց արտադրյալն անվերջ փոքր է:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \{x_n\}\text{-ը սահմանափակ է} \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n x_n = 0 \right):$$

Ապացույց. Ներկայացնենք x_n սահմանափակ հաջորդականության և α_n անվերջ փոքրի սահմանումները.

$$\{x_n\}\text{-ը սահմանափակ է} \iff \exists M > 0 \quad s.t. \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_0 \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}:$$

Այդ դեպքում

$$|\alpha_n x_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon \quad \text{բոլոր} \quad \forall n > N_0 \quad \text{համար} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n x_n = 0,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: □

Կարելի է ձևակերպել Թեորեմ 2.2-ից մի փոքր ավելի թույլ պնդում, որի ապացույցը թողնենք ընթերցողին որպես ինքնուրույն աշխատանք:

Ներևանք 2.2. Երկու (կամ վերջավոր թվով) անվերջ փոքրերի արտադրյալն անվերջ փոքր է:

2.4 Զուգամեք հաջորդականությունների հատկությունները

Այս բաժնում անվերջ փոքրերից կանցնենք կամայական զուգամեք հաջորդականությունների հատկություններին:

Թեորեմ 2.3. Զուգամեք հաջորդականության սահմանը միակն է:

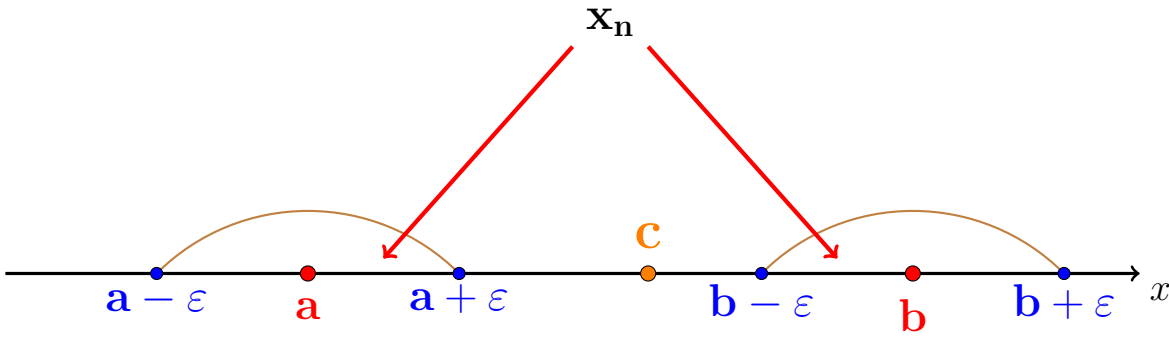
Ապացույց. Ենթադրենք հակառակը՝ զուգամեք x_n հաջորդականությունն ունի երկու փարբեր սահմաններ՝ $\exists \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{!}{=} a}$ և $\exists \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{!}{=} b}$, $a \neq b$: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $a < b$: Ֆիքսենք որևէ թիվ a -ի և b -ի միջև՝ $a < c < b$: Սահմանի սահմանումը թույլ է փալիս վերցնել a և b սահմանների կամայականորեն փոքր ε -շրջակայքեր: Վերցնենք այնքան փոքր $\varepsilon > 0$, որ $a + \varepsilon < c < b - \varepsilon$: Այդ դեպքում

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_1 \quad x_n < a + \varepsilon < c,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \implies \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_2 \quad x_n > b - \varepsilon > c:$$

Վերցնելով $N_0 \stackrel{def}{=} \max\{N_1, N_2\}$ և $n > N_0$ ստանում ենք, որ նույն n -երի համար $x_n < c$ և $x_n > c$:

Այս հակասությունն ավարտում է ապացույցը: □



Պատկեր 2.4. Չուգամեր հաջորդականության երկու փարբեր սահմանների անհնարինությունը

Թեորեմ 2.4. Չուգամեր հաջորդականությունը սահմանափակ է: Նակադարձ պնդումը սխալ է:

$$\begin{aligned} (x_n\text{-ը Չուգամեր է}) &\implies (x_n\text{-ը սահմանափակ է}) \\ &\nleftarrow \end{aligned}$$

Ապացույց. Դիցուք $\{x_n\}$ հաջորդականությունը Չուգամիքում է ինչ-որ a վերջավոր թվին.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \forall \varepsilon > 0, \text{ թեկուզ } \varepsilon = 1\text{-ի համար } \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n > N_0 \quad |x_n - a| < 1,$$

$$\text{կամ } \boxed{a - 1 < x_n < a + 1} :$$

Այսպես $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանափակությունը a վերինից, a ներքինից փեսանելի է, այնուամենայնիվ պետք է գտնենք բացահայտ վերին և ստորին եզրեր ամբողջ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության համար: Սահմանենք հետևյալ դրական թիվը $M \stackrel{\text{def}}{=} \max \{|a - 1|, |a + 1|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N_0}|\}$: Նեշտ փեսանել, որ $|x_n| \leq M$ բոլոր $\forall n \in \mathbb{N}$ համար, այսինքն՝ x_n հաջորդականությունը սահմանափակ է:

Նակադարձը, եթե x_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա պարտադիր Չուգամեր չէ, օրինակ, $x_n = (-1)^n$ հաջորդականությունը սահմանափակ և փարամեր է: $\square$

Թեորեմ 2.5. Երկու Չուգամեր հաջորդականությունների գումարը Չուգամեր է, որի սահմանը ստացվում է հետևյալ կանոնից.

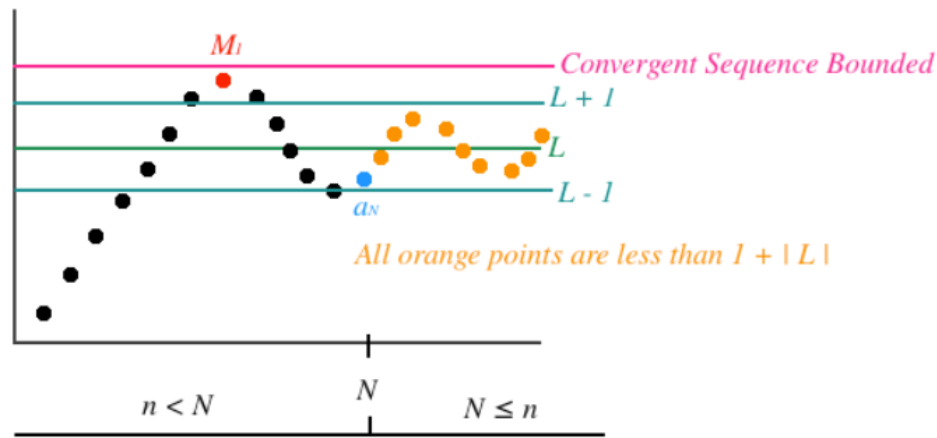
$$x_n \rightarrow a \text{ և } y_n \rightarrow b \text{ (երբ } n \rightarrow \infty) \implies x_n + y_n \rightarrow a + b,$$

կարճ՝ «գումարի սահմանը հավասար է սահմանների գումարին»:

Նույն պնդումն ավելի հարմար բանաձևային տեսքով՝

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n},$$

ենթադրելով, որ մասնակից x_n և y_n հաջորդականությունները Չուգամեր են:



Գծագիր 2.5. Զուգամեք հաջորդականության սահմանափակությունը

Ապացույց. Նիշենք, որ յուրաքանչյուր զուգամեք հաջորդականություն կարելի է ներկայացնել իր սահմանի և ինչ-որ անվերջ փոքրի գումարի փոխքով.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \boxed{x_n = a + \alpha_n}, \text{ որպեսզի } \alpha_n \stackrel{\text{նշ.}}{=} x_n - a = o(1): \quad (2-19)$$

Ունենք երկու զուգամեք հաջորդականություն.

$$\boxed{x_n = a + \alpha_n}, \quad \boxed{y_n = b + \beta_n}, \quad \text{որպեսզի } \alpha_n \rightarrow 0, \quad \beta_n \rightarrow 0, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty, \quad (2-20)$$

α_n և β_n հաջորդականություններն ինչ-որ անվերջ փոքրեր են: Գումարենք՝

$$x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n = a + b + \gamma_n, \quad \text{որպեսզի նշանակել ենք } \gamma_n \stackrel{\text{նշ.}}{=} \alpha_n + \beta_n \rightarrow 0,$$

քանի որ երկու անվերջ փոքրերի գումարն անվերջ փոքր է : Դարձյալ շնորհիվ (2-19)-ի եզրակացնում ենք, որ $x_n + y_n \rightarrow a + b$, ինչն ավարտում է ապացույցը: $\square$

Ճիշտ նույն եղանակով կարելի է ապացուցել բանաձևը փարբերության համար:

Թեորեմ 2.6. Երկու զուգամեք հաջորդականությունների փարբերությունը զուգամեք է, որի սահմանը ստացվում է հետևյալ կանոնից.

$$x_n \rightarrow a \text{ և } y_n \rightarrow b \quad (\text{երբ } n \rightarrow \infty) \implies x_n - y_n \rightarrow a - b :$$

Նույն պնդումն ավելի հարմար բանաձևային փոխքով՝

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n},$$

ենթադրելով, որ մասնակից x_n և y_n հաջորդականությունները զուգամեք են:

Պարզվում է՝ նման բանաձև տեղի ունի նաև հաջորդականությունների արտադրյալի համար:

Թեորեմ 2.7. *Երկու զուգամեկ հաջորդականությունների արտադրյալը զուգամեկ է, որի սահմանը ստացվում է հետևյալ կանոնից.*

$$x_n \rightarrow a \quad \text{և} \quad y_n \rightarrow b \quad (\text{երբ } n \rightarrow \infty) \quad \implies \quad x_n y_n \rightarrow a b,$$

կարճ՝ «արտադրյալի սահմանը հավասար է սահմանների արտադրյալին»:

Նույն պնդումը բանաձևային տեսքով՝

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n},$$

ենթադրելով, որ մասնակից x_n և y_n հաջորդականությունները զուգամեկ են:

Ապացույց. Օգտվենք զուգամեկ հաջորդականության (2-19)-(2-20) ներկայացումից, բայց այս անգամ բազմապարկենք.

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = a b + a \beta_n + b \alpha_n + \alpha_n \beta_n = a b + \gamma_n,$$

որտեղ նշանակել ենք $\gamma_n \stackrel{\text{նշ.}}{=} a \beta_n + b \alpha_n + \alpha_n \beta_n \rightarrow 0$, որպես անվերջ փոքրերի գումար: Դարձյալ շնորհիվ (2-19)-ի եզրակացնում ենք, որ $x_n y_n \rightarrow a b$, ինչն ավարտում է ապացույցը: $\square$

Բնական հարց է առաջանում. արդյո՞ք նման բանաձև տեղի ունի նաև հաջորդականությունների հարաբերության դեպքում: Պարասխանն է՝ այո, բայց որոշ վերապահումներով: Նախ ապացուցենք նախապարարական մի լեմմա:

Լեմմա 2.1. *Դիցուք $\{y_n\}$ հաջորդականությունը զուգամեկ է, բայց անվերջ փոքր չէ. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$: Այդ դեպքում $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է (թեկուզ ինչ-որ N_0 համարից սկսած):*

Ապացույց. Քրենք սահմանի սահմանումն ε -լեզվով, բայց վերցնենք ε -ի կոնկրետ արժեք.

$$0 < \varepsilon = \frac{|b|}{2} \text{-ի համար} \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad |y_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2} :$$

Ձևափոխենք և ճշտենք վերջին անհավասարությունը՝ կիրառելով եռանկյան անհավասարությունը.

$$\begin{aligned} |y_n - b| < \frac{|b|}{2} &\implies |b| - |y_n| \leq |y_n - b| < \frac{|b|}{2} \implies |y_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} \implies \\ &\implies \boxed{\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}} \quad \forall n > N_0 : \end{aligned}$$

Այսպիսով, $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է առնվազն $N_0 + 1$ համարից սկսած: $\square$

Թեորեմ 2.8. Երկու հաջորդականությունների հարաբերության սահմանը կարելի է հաշվել հետևյալ կանոնով.

$$x_n \rightarrow a \text{ և } y_n \rightarrow b \neq 0 \quad (երբ } n \rightarrow \infty) \implies \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b},$$

կարճ՝ «հարաբերության սահմանը հավասար է սահմանների հարաբերությանը»:

Նույն պնդումը բանաձևային տեսքով՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n},$$

ենթադրելով, որ մասնակից x_n և y_n հաջորդականությունները զուգամեծ են և $y_n \neq 0$:

Ապացույց. Բավական է ցույց տալ, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right) = 0$:

Նկատենք, որ նախորդ լեմմայի համաձայն առնվազն՝ ինչ-որ $N_0 \in \mathbb{N}$ համարից սկսած հայտարարում գտնվող $y_n \neq 0$ արժեքները զրո չեն, ավելին՝ $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է :

Օգտվենք զուգամեծ հաջորդականության (2-19)-(2-20) ներկայացումից և տեղադրենք մեզ անհրաժեշտ սահմանի մեջ.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = \frac{b(a + \alpha_n) - a(b + \beta_n)}{by_n} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{by_n} = \frac{1}{y_n} \left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n \right) = \frac{1}{y_n} \gamma_n \rightarrow 0 :$$

Այսպես, նշանակել ենք $\gamma_n \stackrel{\text{նշ.}}{=} \alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n \rightarrow 0$, որն անվերջ փոքր է որպես անվերջ փոքրերի գումար: Իսկ $\frac{1}{y_n} \gamma_n \rightarrow 0$ անվերջ փոքր է որպես անվերջ փոքրի և սահմանափակ հաջորդականության արտադրյալ (տես անվերջ փոքրերի հարկությունները): $\square$

Ամփոփելով Թեորեմներ 2.5-2.8-ում ապացուցված բանաձևերը՝ եզրակացնում ենք, որ եթե ունենք երկու զուգամեծ x_n և y_n հաջորդականություններ, ապա դրանց սահմանների հետ կարելի է կատարել թվաբանական գործողություններ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad (\text{եթե լրացուցիչ } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0) :$$

Նման բանաձևեր, իհարկե, կարելի է գրել վերջավոր թվով հաջորդականությունների համար:

Այժմ անցնենք հաջորդականությունների այնպիսի հարկություններին, որոնք արտահայտվում են անհավասարություններով:

Թեորեմ 2.9. (Սահմանային անցում անհավասարությունում)

$$\left(\exists a \stackrel{\text{նշ}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad x_n \geq c \quad (\text{կամ } x_n > c) \quad \forall n > N_0 \right) \implies \left(a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq c \right) : \quad (2-21)$$

Այսինքն, եթե զուգամեկ հաջորդականության անդամները փոքր չեն (մեծ, մեծ կամ հավասար) ինչ-որ c հասարարունից թեկուզ ինչ-որ N_0 համարից սկսած, ապա հաջորդականության սահմանը նույնպես փոքր չէ այդ c հասարարունից:

Ապացույց. Մենք պետք է ցույց փանք, որ $a \geq c$: Ենթադրենք հակառակը՝ $a < c$: Գրենք սահմանի սահմանումն ε -լեզվով.

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon :$$

Մասնավորապես, $\varepsilon = c - a > 0$ թվի համար՝

$$|x_n - a| < c - a \quad \forall n > N_1 \implies x_n - a < c - a \implies x_n < c \quad \forall n > N_1 :$$

Սրանք հակասություն թերեմի պայմանի հետ:

□

Դիպողություն 2.2. Թեև Թեորեմ 2.9-ի հասկացությունը բավականին պարզ է, այն ունի մի նրբություն՝ կապված անհավասարությունում հավասարության նշանի հետ: Կարելի է մտածել, որ (2-21) պնդումը ճիշտ կմնա առանց հավասարության նշանի, այսինքն՝

$$\left(\exists a \stackrel{\text{նշ}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad x_n > c \quad \forall n > N_0 \right) \implies \left(a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n > c \right) : \quad (2-22)$$

Իրականում (2-22) պնդումը ճիշտ չէ: Դրանում կարելի է համոզվել պարզունակ օրինակներով՝

$$\frac{1}{n} > 0 \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 > 0 :$$

Այսպիսով, հավասարության նշանը (2-21)-ի վերջին անհավասարության մեջ հանել չի կարելի:

Թեորեմ 2.9-ում իհարկե կարելի է անհավասարության նշանները շրջել:

Թեորեմ 2.10. (Սահմանային անցում անհավասարությունում)

$$\left(\exists a \stackrel{\text{նշ}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad x_n \leq c \quad (\text{կամ } x_n < c) \quad \forall n > N_0 \right) \implies \left(a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq c \right) : \quad (2-23)$$

Այսինքն, եթե զուգամեկ հաջորդականության անդամները մեծ չեն (փոքր, փոքր կամ հավասար) ինչ-որ c հասարարունից թեկուզ ինչ-որ N_0 համարից սկսած, ապա հաջորդականության սահմանը նույնպես մեծ չէ այդ c հասարարունից:

Տեղի ունի նաև ավելի ընդհանուր պնդում, թեև այն բխում է նախորդից:

Թեորեմ 2.11. (Մահմանային անցում անհավասարությունում)

$$\left(x_n, y_n \text{ զուգամեծ են, } x_n \leq y_n \text{ (կամ } x_n < y_n) \quad \forall n > N_0 \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right): \quad (2-24)$$

Այլ կերպ ասած՝ անհավասարության մեջ կարելի է անցնել սահմանի: Դարձյալ՝ հավասարության նշանը (2-24)-ի վերջին անհավասարության մեջ պարտադիր է:

Ապացույց. Պայմանով տրված անհավասարությունն արտագրենք այնպես, որ կիրառենք Թեորեմ 2.9 կամ 2.10-ը.

$$y_n - x_n \geq 0 \quad \forall n > N_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) \geq 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0:$$

Վերջում կիրառեցինք նաև Թեորեմ 2.6-ը: □

Նաջորդ թեորեմը նույնպես կապված է անհավասարությունների (գնահատականների) հետ և փարօրինակ անվանումներ է կրում՝ ոստիկանների մասին թեորեմ կամ սենդվիչի կանոն (Two Policemen Theorem, Sandwich Rule կամ Squeeze Lemma):

Թեորեմ 2.12. (ոստիկանների մասին) Դիցուք x_n և y_n հաջորդականությունները զուգամիտում են միևնույն a թվին. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$: Բացի այդ, երրորդ z_n հաջորդականությունը բավարարում է երկկողմանի գնահատականը՝ $x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall n > N_0$, թեկուզ ինչ-որ N_0 համարից սկսած: Այդ դեպքում $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$:

Ապացույց. Գրենք սահմանի սահմանումն ε -լեզվով.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_2 \quad |y_n - a| < \varepsilon: \end{aligned}$$

Մոդուլով անհավասարություններն արտագրենք բացված տեսքով.

$$\begin{aligned} a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad \forall n > N_1, \\ a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \quad \forall n > N_2: \end{aligned}$$

Վերցնենք $N \stackrel{\text{def}}{=} \max\{N_0, N_1, N_2\}$ և $\forall n > N$, ինչից հետո կարող ենք օգտվել առկա բոլոր գնահատականներից.

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \quad \forall n > N \implies a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \implies |z_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N,$$

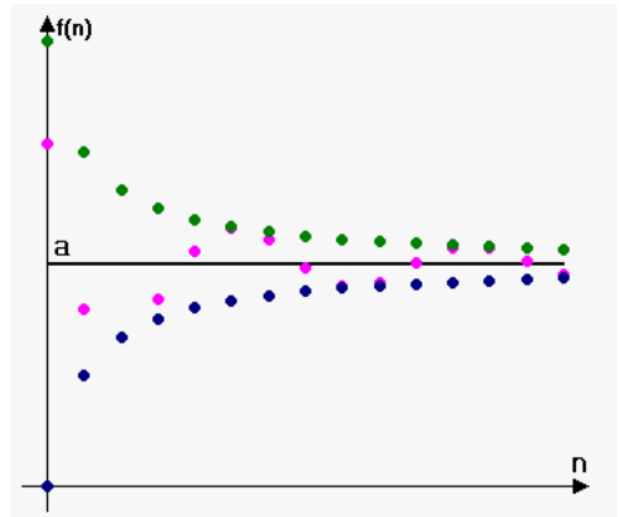
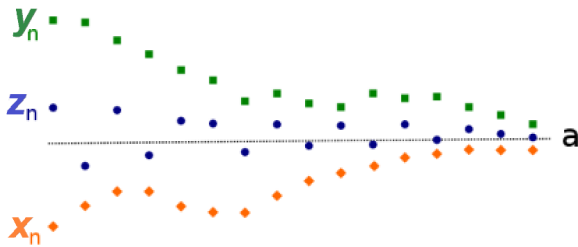
սա էլ նշանակում է, որ z_n հաջորդականությունը զուգամեծ է՝ $z_n \rightarrow a$ (երբ $n \rightarrow \infty$): □

$$x_n \leq z_n \leq y_n$$



երբ $n \rightarrow \infty$

$a \quad a \quad a$



Գծագիր 2.6. Ոստիկանների կանոնի պատկերումը

Ոստիկանների կանոնում կարելի է դիտարկել այն հատուկ դեպքերը, երբ մասնակից հաջորդականություններից մեկն անվերջ մեծ է :

Ներևանք 2.3. ա) Եթե $x_n \geq y_n \rightarrow +\infty$, ապա $x_n \rightarrow +\infty$:

բ) Եթե $x_n \leq y_n \rightarrow -\infty$, ապա $x_n \rightarrow -\infty$:

Ապացուցելու համար բավական է օգտվել անվերջ մեծի ($+\infty$ -ի կամ $-\infty$ -ի) սահմանումից:

Թեորեմներ 2.5, 2.6, 2.7, 2.8-ում բացահայտված է , ի՞նչ են ներկայացնում կամայական երկու զուգամեր հաջորդականությունների գումարը, փարբերությունը, արտադրյալը, հարաբերությունը: Բնական է հաջորդ հարցը դնել. ի՞նչ կլինի, եթե երկու հաջորդականություններից մեկը վերցվի զուգամեր, իսկ երկրորդը՝ փարամեր:

Ներևանք 2.4. Մեկ զուգամեր և մեկ փարամեր հաջորդականությունների գումարը (կամ փարբերությունը) միշտ փարամեր է :

Ապացույց. Դիցուք x_n հաջորդականությունը զուգամեր է , $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, իսկ y_n հաջորդականությունը՝ փարամեր. $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$:

Ենթադրենք հակառակը՝ $x_n + y_n \stackrel{նշ.}{=} z_n$ զուգամեր է: Այդ դեպքում $y_n = z_n - x_n$ հաջորդականությունը զուգամեր է որպես երկու զուգամեր հաջորդականությունների փարբերություն: Սա հակասում է պայմանով փրված y_n -ի փարամիությունը: Հակասությունն ավարտում է ապացույցը: $\square$

Առաջադրանք ընթերցողին. Ի՞նչ կարելի է պնդել **ա)** զուգամեր և փարամեր հաջորդականությունների արտադրյալի և հարաբերության մասին; **բ)** երկու փարամեր հաջորդականությունների գումարի, փարբերության, արտադրյալի և հարաբերության մասին:

2.5 Մոնոտոն հաջորդականությունների սահմանը

Սահմանում 2.14. $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է՝

(մոնոտոն) աճող,	գրում են՝ $x_n \nearrow$,	եթե $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N};$
(մոնոտոն) նվազող,	գրում են՝ $x_n \searrow$,	եթե $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N};$
խիստ աճող,	գրում են՝ $x_n \nearrow$,	եթե $x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \mathbb{N};$
խիստ նվազող,	գրում են՝ $x_n \searrow$,	եթե $x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} :$

Աճող կամ նվազող հաջորդականությունը կոչվում է **մոնոտոն**:

Նշյալ է փեսնել, որ մոնոտոն հաջորդականությունները սահմանափակ են առնվազն մեկ կողմից. աճող հաջորդականությունները՝ ներքևից, իսկ նվազող հաջորդականությունները՝ վերևից:

Օրինակ 2.9. $x_n = n^2$, $y_n = \frac{1}{n^2}$, $z_n = 1 - \frac{1}{n}$ բոլոր հաջորդականությունները խիստ մոնոտոն են, ընդ որում $x_n \nearrow$, $y_n \searrow$, $z_n \nearrow$: Բացի այդ, x_n -ը փարամեր է (անվերջ մեծ), իսկ y_n և z_n -ը՝ զուգամեր:

Մոնոտոն հաջորդականությունների զուգամիության հարցն ունի առանձնահատկություններ, որոնք փեղի չունեն ընդհանուր հաջորդականությունների դեպքում:

Թեորեմ 2.13. (Մոնոտոն հաջորդականության սահմանի մասին)

ա) Եթե մոնոտոն աճող $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից, ապա $\{x_n\}$ -ը զուգամեր է, ընդ որում՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_n x_n$:

բ) Եթե մոնոտոն նվազող $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է ներքևից, ապա $\{x_n\}$ -ը զուգամեր է, ընդ որում՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_n x_n$:

գ) Միասնական ձևակերպում. $\boxed{\text{Սահմանափակ մոնոտոն հաջորդականությունը զուգամեր է :}}$

Ապացույց. ա) Դիցուք x_n հաջորդականությունը մոնոտոն աճող է և սահմանափակ վերևից.

$x_n \nearrow$, $\exists M \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$: Փաստորեն x_n -ը սահմանափակ է և՛ վերևից, և՛ ներքևից՝
 $x_1 \leq x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

Սուպրեմումի գոյության թեորեմի համաձայն՝ $\exists \sup_n x_n \stackrel{\text{նշ.}}{=} s$: Պետք է ցույց փանք, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$:
 Գրենք սուպրեմումի սահմանումը.

$$x_n \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{և} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad x_{n_0} > s - \varepsilon:$$

Մյուս կողմից, x_n -ը մոնոտոն աճող է, և կարող ենք միացնել պայմանները.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad s - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_{n_0+1} \leq x_{n_0+2} \leq \dots \leq s < s + \varepsilon$$

$$\text{կամ} \quad s - \varepsilon < x_n < s + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \quad \text{կամ} \quad |x_n - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0:$$

Ըստ սահմանման՝ սա նշանակում է, որ x_n -ը զուգամեք է, և $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$:

Երկրորդ՝ բ) պնդումն ապացուցվում է նույն կերպ՝ օգտվելով ինֆիմումի սահմանումից: Մանրամասները թողնենք ընթերցողին: Իսկ երրորդ՝ գ) պնդումը ներառում է ա)-ն և բ)-ն: $\square$

Որպես հետևանք ստացվում է մոնոտոն հաջորդականության զուգամիպության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը:

Թեորեմ 2.14. Որպեսզի մոնոտոն $\{x_n\}$ հաջորդականությունը զուգամեք լինի, անհրաժեշտ և բավարար է, որ $\{x_n\}$ -ը լինի սահմանափակ:

Նույն պնդումը կարելի է այսպես ձևակերպել. եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն է, ապա

$$\left(\{x_n\}\text{-ը զուգամեք է} \right) \iff \left(\{x_n\}\text{-ը սահմանափակ է} \right):$$

Նշենք, որ հաջորդականության զուգամիպությունից միշտ հետևում է սահմանափակությունը՝ անկախ այն փաստից՝ հաջորդականությունը մոնոտոն է, թե ոչ: Իսկ այն, որ մոնոտոն հաջորդականությունների համար սահմանափակությունից հետևում է զուգամիպությունը, ապացուցված է Թեորեմ 2.13-ում:

Թեորեմ 2.14-ը կարելի է վերաձևակերպել ժխտման տերմիններով:

Թեորեմ 2.15. Որպեսզի մոնոտոն $\{x_n\}$ հաջորդականությունը տարամեք լինի, անհրաժեշտ և բավարար է, որ $\{x_n\}$ -ը լինի անսահմանափակ:

Նույն պնդումը կարելի է այսպես ձևակերպել. եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն է, ապա

$$\left(\{x_n\}\text{-ն անվերջ մեծ է} \right) \iff \left(\{x_n\}\text{-ն անսահմանափակ է} \right):$$

Ապացույց. Թերորեն անմիջապես բխում է Թերորեն 2.14-ից: Միակ նորույթն այն է, որ անսահմանափակ մոնոտոն հաջորդականությունը ոչ միայն փարամետր է, այլև պարտադիր անվերջ մեծ:

Իսկապես, ենթադրենք $x_n \nearrow$ հաջորդականությունը մոնոտոն աճող է և անսահմանափակ վերևից: Վերևից անսահմանափակությունը նշանակում է, որ

$$\forall E > 0 \quad \exists n_0 = n_0(E) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad x_{n_0} > E :$$

Մյուս կողմից, քանի որ x_n -ը մոնոտոն աճող է,

$$\forall E > 0 \quad \exists n_0 = n_0(E) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad x_n \geq x_{n_0} > E \quad \forall n \geq n_0 ,$$

ինչը նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$:

Նմանապես, եթե x_n հաջորդականությունը մոնոտոն նվազող է և անսահմանափակ ներքևից, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$: □

Ապացուցեցինք, որ սահմանափակ մոնոտոն հաջորդականությունը զուգամետր է : Այնուամենայնիվ, հակադարձ պնդումը սխալ է այն իմաստով, որ զուգամետր հաջորդականությունը պարտավոր չէ լինի մոնոտոն: Օրինակ, $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ հաջորդականությունը զուգամետր է (անվերջ փոքր), սակայն մոնոտոն չէ :

Լեմմա 2.2. (Ներդրված միջակայքերի մասին)

Դիցուք տրված է սեղմվող ներդրված միջակայքերի (հատվածների) անվերջ հաջորդականություն՝ $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, այսինքն՝

$$\boxed{[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \text{և} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0} :$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի միակ $c \in \mathbb{R}$ կետը, որը պարկանում է բոլոր $[a_n, b_n]$ միջակայքերին.

$$\exists ! c \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad c \in [a_n, b_n] \quad \forall n = 1, 2, \dots, \quad \text{կամ համարժեքորեն՝} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c :$$

Ապացույց. Նախ նշենք, որ $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ պայմանը հանգեցնում է մոնոտոնության՝ $a_n \nearrow$ և $b_n \searrow$: Բացի այդ, a_n, b_n հաջորդականությունները սահմանափակ են, քանի որ

$$[a_n, b_n] \subset [a_1, b_1], \quad a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n = 1, 2, \dots :$$

Թերորեն 2.13-ի համաձայն՝ սահմանափակ մոնոտոն հաջորդականությունը զուգամետր է, ուրեմն՝ a_n, b_n հաջորդականությունները զուգամետր են: Ներկաբար նրանց սահմանների հետ կարելի է թվաբանական գործողություններ կատարել, և ըստ լեմմայի պայմանի՝

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \stackrel{12.}{=} c :$$

a_n, b_n հաջորդականությունների մոնոտոնության շնորհիվ՝ $a_n \nearrow c$ և $b_n \searrow c$, ուստի $a_n \leq c \leq b_n$ $\forall n = 1, 2, \dots$: Որոնելի c կետը գտնվեց: Մնում է ցույց տալ այդպիսի c կետի միակությունը:

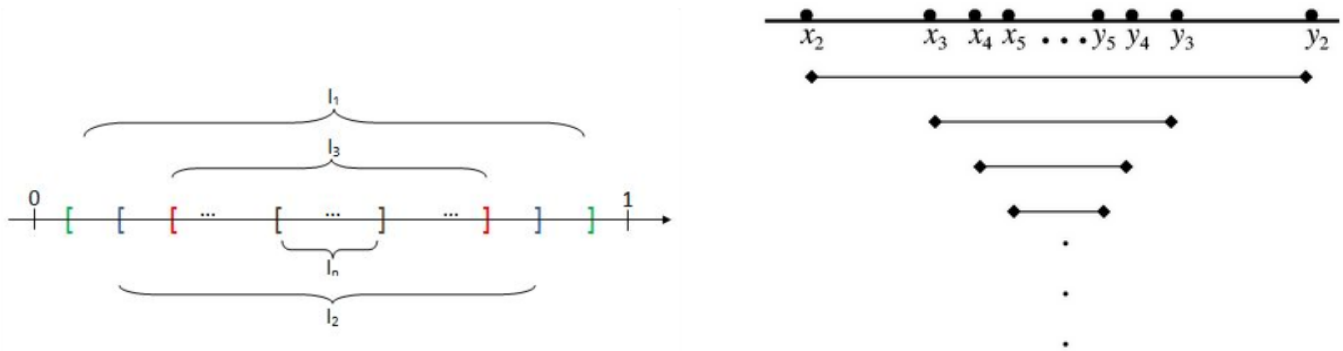
Ենթադրենք՝ գոյություն ունի ևս մեկ $d \neq c$ կետ, որը $d \in [a_n, b_n]$ $\forall n = 1, 2, \dots$: Որոշակիության համար թող $c < d$: Այդ դեպքում

$$a_n \leq c < d \leq b_n \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad \implies \quad b_n - a_n \geq d - c > 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots :$$

Վերջին անհավասարության մեջ անցնենք սահմանի՝ ձգտեցնելով $n \rightarrow \infty$.

$$\implies \quad 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \geq d - c > 0 \quad \implies \quad 0 \geq d - c > 0 :$$

Ստացանք հակասություն, ինչից եզրակացնում ենք, որ $c = d$: □



Գծագիր 2.7. Ներդրված միջակայքերի լեմմայի պատկերումը

Դիպողություն 2.3. *Լեմմայում կարևոր էր, որ դիտարկվող ներդրված միջակայքերը փակ հատվածներ էին: Բաց կամ կիսաբաց միջակայքերի համար լեմման սխալ է: Որպես հակաօրինակ՝ կարելի է վերցնել $\left(0, \frac{1}{n}\right]$, $n = 1, 2, \dots$ կիսաբաց ներդրված միջակայքերը:*

2.6 e թիվը որպես հաջորդականության սահման

Այս բաժնում կքննարկենք Թեորեմ 2.13-ի կարևոր կիրառում, կոնկրետ մի հաջորդականություն: Ներմուծենք

$$x_n \triangleq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N} :$$

Ներաբերքի է, որ այս աստիճանի հիմքը ձգտում է 1-ի, իսկ աստիճանացույցը՝ $+\infty$ -ի: Նման հաջորդականությունները կոչվում են անորոշություններ $\boxed{1^\infty}$ տեսակի: Հնարավոր չէ առանց լուրջ հեղափոխման անմիջապես պարզել՝ զուգամեր, թե փարամեր է հաջորդականությունը:

Սկզբում ցույց փանք, որ x_n հաջորդականությունը մոնոտոն աճող է՝ $x_n \nearrow$:

Նիշենք Նյուտոնի բինոմական բանաձևը՝

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{n!}x^n, \quad (2-25)$$

ըստ որի՝ x_n հաջորդականությունը ներկայացնենք գումարի փեսքով.

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{n!} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) : \end{aligned} \quad (2-26)$$

Նույն կերպ կարելի է ներկայացնել հաջորդականության հաջորդ x_{n+1} անդամը.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) : \end{aligned}$$

Այս փեսքով ներկայացված x_n և x_{n+1} անդամները համեմատել ավելի հեշտ է : Կհամեմատենք համապատասխան k -րդ գումարելիները ($1 \leq k \leq n$).

$$\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right),$$

քանի որ $1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}$ ($1 \leq i \leq n-1$): Ներկայացնենք, $\boxed{x_n < x_{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ և $x_n \nearrow$ խիստ աճող է :

Այժմ ցույց փանք, որ x_n հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից:

Օգտվենք (2-26) ներկայացումից, $n! \geq 2^{n-1}$ գնահատականից, այնուհետև երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևից.

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 2 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 : \end{aligned}$$

Այսպիսով, $x_1 = 2 \leq x_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$: Թեորեմ 2.13-ի համաձայն՝ x_n հաջորդականությունը զուգամետ է՝

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$: Այլ հարց է, թե ինչին է հավասար սահմանը: Պարզվում է, որ սահմանը նշանավոր իռացիոնալ թիվ է, որը նշանակվում է e փառով և մոտավոր հավասար է

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}, \quad \boxed{x_n \nearrow e}, \quad e \in \mathbb{I}, \quad e \approx 2,7182818284 :$$

Այս սահմանը կարելի է համարել e թվի սահմանում:

2.7 Ենթահաջորդականություններ, մասնակի սահմաններ

Դիցուք $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ որևէ հաջորդականություն է.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\} : \quad (2-27)$$

Կամայական եղանակով ընտրենք անվերջ քանակով անդամներ, օրինակ,

$$\{x_3, x_6, x_{22}, \dots, x_{101}, \dots, x_m, \dots, x_N, \dots\} : \quad (2-28)$$

Միակ պահանջն այսպեղ այն է, որ ընտրված անդամների համարները՝ $3, 6, 22, \dots, 101, \dots, m, \dots, N$ և այլն, աճման կարգով լինեն: Ստացանք նոր (2-28) հաջորդականություն, որի անդամներն ընտրված են սկզբնական (2-27) հաջորդականությունից: Վերահամարակալենք (2-28) հաջորդականության անդամները, օգտագործելով բնական թվերի ամբողջ շարքը՝ սկսած 1-ից.

$$\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+2}}, \dots\} \stackrel{\text{նշ.}}{=} \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \quad (2-29)$$

Ընդհանուր դեպքում ընտրված համարներն ընտրվում են կամայականորեն, բայց միշտ աճման կարգով.

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < n_{k+1} < n_{k+2} < \dots, \quad \text{այսինքն՝} \quad n_k \nearrow \infty \quad (\text{երբ } k \rightarrow \infty) :$$

Այս կարգով ընտրված $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (2-29) հաջորդականությունը կոչվում է սկզբնական $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (2-27) հաջորդականության **ենթահաջորդականություն**. Կգրենք՝ $\boxed{\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}}$:

Ենթահամարների $n_k \nearrow$ աճման պահանջից բխում է $\boxed{n_k \geq k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ պայմանը:

Ծայրահեղ դեպքը, երբ $\boxed{n_k = k}$, $k \in \mathbb{N}$, թույլատրվում է և նշանակում, որ ենթահաջորդականությունը համընկնում է սկզբնական հաջորդականության հետ. $\boxed{\{x_n\} \subset \{x_n\}}$:

Պնդում 2.3. *Ջուզամներ հաջորդականության ցանկացած ենթահաջորդականություն նույնպես զուգամիտում է նույն սահմանին, այսինքն՝*

$$\left(x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty) \right) \implies \left(\forall \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \quad x_{n_k} \rightarrow a \quad (k \rightarrow \infty) \right) :$$

Ապացույց. Ապացույցը հիմնված է բացառապես սահմանումների վրա: Գրենք զուգամիտության սահմանումը ε -լեզվով.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon : \quad (2-30)$$

Վերցնենք կամայական ենթահաջորդականություն $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ և ցույց տանք, որ այն նույնպես ձգքում է a թվին: Վերցնենք $k > N_0$: Քանի որ $n_k \geq k$, ապա, համաձայն (2-30)-ի,

$$k > N_0 \implies n_k \geq k > N_0 \implies |x_{n_k} - a| < \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: □

Պնդում 2.3-ը ճիշտ է նաև $a = \infty$ համար, այսինքն՝ երբ $\{x_n\}$ -ն անվերջ մեծ է : Ապացույցը գրեթե չի փոխվում:

Պնդում 2.4. *Անվերջ մեծ հաջորդականության ցանկացած ենթահաջորդականություն նույնպես անվերջ մեծ է և ձգվում է նույն սահմանին, այսինքն՝*

$$\left(x_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \right) \implies \left(\forall \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \quad x_{n_k} \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty) \right) :$$

Պնդումը ճիշտ է, եթե ավելի մասնավոր դեպք վերցնենք, երբ x_n -ը ձգվում է $+\infty$ -ին կամ $-\infty$ -ին:

Պնդումներ 2.3-ը և 2.4-ը կարելի է ձևակերպել Ժիսարման փերմիներով՝ հետևյալ կերպ:

Պնդում 2.5. *Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականության ինչ-որ երկու ենթահաջորդականություններ տարբեր սահմաններ ունեն, ապա $\{x_n\}$ -ը տարամետ է, առհասարակ սահման չունի (ոչ վերջավոր, ոչ անվերջ).*

$$\left(\begin{array}{l} \exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \quad \text{s.t.} \quad x_{n_k} \rightarrow a \quad (k \rightarrow \infty) \\ \exists \{x_{m_k}\} \subset \{x_n\} \quad \text{s.t.} \quad x_{m_k} \rightarrow b \neq a \quad (k \rightarrow \infty) \end{array} \right) \implies \left(\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) :$$

Սահմանում 2.15. $\{x_n\}$ հաջորդականության որևէ ենթահաջորդականության սահմանը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է $\{x_n\}$ -ի **մասնակի սահման**:

Նախորդ պնդումներում մենք քննարկում էինք հենց մասնակի սահմանների հարցը:

Ձևակերպենք Պնդումներ 2.3-2.5-ը այս նոր հասկացության միջոցով:

Պնդում 2.6. *Զուգամետ $\{x_n\}$ հաջորդականության բոլոր մասնակի սահմանները հավասար են իրար և հավասար են $\{x_n\}$ -ի սահմանին:*

Պնդում 2.7. *Անվերջ մեծ հաջորդականության բոլոր մասնակի սահմաններն անվերջ են:*

Պնդում 2.8. *Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունն ունի գոնե երկու տարբեր մասնակի սահմաններ, ապա $\{x_n\}$ -ը տարամետ է, առհասարակ սահման չունի (ոչ վերջավոր, ոչ անվերջ):*

Զուգամետ կամ անվերջ մեծ հաջորդականությունների մասնակի սահմանների հարցը սպառնիչ պարասխան ստացավ: Տարամետ (բայց ոչ անվերջ մեծ) հաջորդականությունների մասնակի սահմանների հարցը դեռևս անորոշ է : Դիտարկենք պարզագույն և ծանոթ մի օրինակ, $x_n = (-1)^n$: Արդեն պարզել էինք, որ այս

հաջորդականությունը փարամետր է և առհասարակ սահման չունի: Իսկ ունի՞ արդյոք մասնակի սահմաններ: Պարասխանն է՝ այո, և մասնակի սահմանները դժվար չէ գտնել: Կառուցենք հարմար և զուգամետր ենթահաջորդականություններ.

$$\exists x_{2k} = 1 \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{և} \quad \exists x_{2k+1} = -1 \rightarrow -1 \quad (k \rightarrow \infty) :$$

Մասնակի սահմանները երկուսն են՝ ± 1 , և այլ մասնակի սահմաններ չկան:

Այսպիսով, այս օրինակում փարամետր հաջորդականությունը մասնակի սահման ունի: Արդյոք սա օրինաչափություն է, և այլ փարամետր հաջորդականություններ մասնակի սահմաններ նույնպես կունենան: Այս հարցի հերազդությունը սկսենք անսահմանափակ հաջորդականությունների հատուկ դեպքից:

Պնդում 2.9. *Յանկացած անսահմանափակ հաջորդականություն պարունակում է գոնե մեկ անվերջ մեծ ենթահաջորդականություն (այսինքն՝ գոնե մեկ անվերջ մասնակի սահման ունի):*

Ապացույց. Դիցուք $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունն անսահմանափակ է: Ըստ սահմանման՝

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad |x_{n_1}| > 1 :$$

Վերջավոր թվով $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ անդամները դեն նետելուց հետո ստացված $\{x_n\}_{n=n_1+1}^{\infty}$ հաջորդականությունը դարձյալ անսահմանափակ է: Ըստ սահմանման՝

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad n_2 > n_1 \quad s.t. \quad |x_{n_2}| > 2 :$$

Նետո դեն նետենք վերջավոր թվով $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots, x_{n_2}$ անդամները: Ստացված $\{x_n\}_{n=n_2+1}^{\infty}$ հաջորդականությունը դարձյալ անսահմանափակ է: Ըստ սահմանման՝

$$\exists n_3 \in \mathbb{N}, \quad n_3 > n_2 \quad s.t. \quad |x_{n_3}| > 3 :$$

Այս գործընթացը կարող ենք անվերջ շարունակել, որի արդյունքում կստանանք՝

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \in \mathbb{N}, \quad n_k \nearrow \quad s.t. \quad & |x_{n_k}| > k, \\ & |x_{n_{k+1}}| > k+1 > k, \\ & |x_{n_{k+2}}| > k+2 > k \quad \text{և այլն:} \end{aligned}$$

Առաջացավ $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ ենթահաջորդականություն այնպիսին, որ $|x_{n_k}| \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow \infty)$ կամ $x_{n_k} \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty)$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: $\square$

Նաջորդ լեմման բաժնի հիմնական արդյունքն է, այն պարասխանում է սահմանափակ հաջորդականությունների մասնակի սահմանների մասին հարցին:

Լեմմա 2.3. (Բոլցանո-Վայեշտրասի լեմմա)

Ցանկացած սահմանափակ հաջորդականություն պարունակում է գոնե մեկ զուգամեր ենթահաջորդականություն (այսինքն՝ գոնե մեկ վերջավոր մասնակի սահման ունի):

Ապացույց. Դիցուք $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է a և b սպորին և վերին եզրերով.

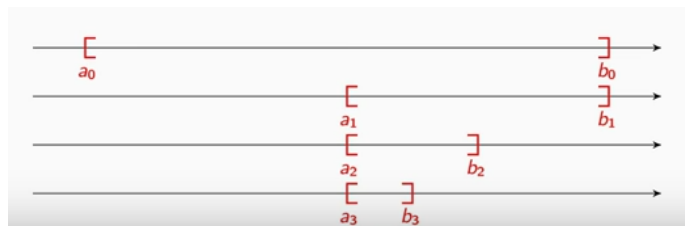
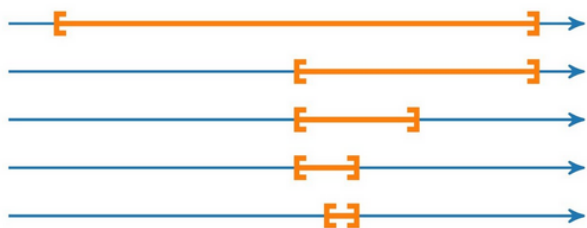
$$a \leq x_n \leq b, \quad n \in \mathbb{N} :$$

Մեր նպատակն է գտնել $\{x_n\}$ -ի ենթահաջորդականություն և ցույց տալ, որ այն զուգամեր է:

Կառուցենք ենթահաջորդականությունը՝ հաջորդաբար կիսելով $[a, b]$ հատվածը: Վերցնենք $[a, b]$ հատվածի $\frac{a+b}{2}$ միջնակետը, ինչի հետևանքով կառաջանան երկու նոր հատվածներ՝

$$[a, b] = \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \cup \left[\frac{a+b}{2}, b \right] :$$

Սրացված երկու հատվածներից ընտրենք այն, որը պարունակում է անվերջ թվով x_n անդամներ: Եթե երկու հատվածներն էլ պարունակեն անվերջ թվով x_n անդամներ, ապա կընտրենք դրանցից որևէ մեկը: Ընտրված հատվածը (ձախը կամ աջը) նշանակենք $[a_1, b_1]$ -ով. $[a_1, b_1] \subset [a, b]$:



Գծագիր 2.8. Զուգամեր ենթահաջորդականության կառուցումը

Այնուհետև նույն գործողությունը կատարենք $[a_1, b_1]$ հատվածի հետ, այսինքն՝ կիսենք $\frac{a_1+b_1}{2}$ միջնակետով և ընտրենք երկու կեսերից այն մեկը, որը պարունակում է անվերջ թվով x_n անդամներ, և նշանակենք այն $[a_2, b_2]$ -ով: Գործընթացն անվերջ շարունակենք և կստանանք ներդրված հատվածների հաջորդականություն.

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}] \supset \cdots ,$$

որոնք սեղմվող են, նրանց երկարությունները ձգպում են զրոյի.

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0, \quad \text{երբ} \quad k \rightarrow \infty :$$

Այս պայմանները թույլ են տալիս կիրառել ներդրված միջակայքերի մասին լեմման (Լեմմա 2.2), ըստ որի՝

$$\exists 1! c \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad c \in [a_k, b_k] \quad \forall k = 1, 2, \dots, \quad \text{և} \quad \boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = c} : \quad (2-31)$$

Նիշենք այս արդյունքը և անցնենք որոնելի զուգամեր ենթահաջորդականության կառուցմանը:

Ընտրենք ենթահաջորդականության առաջին անդամը $[a_1, b_1]$ հաջորդականության միանգամայն կամայականորեն և նշանակենք $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$: Երկրորդ անդամը դարձյալ ընտրենք կամայականորեն $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$, բայց այնպես, որ $n_2 > n_1$: Այդպես միշտ կարելի է վարվել, քանի որ $[a_2, b_2]$ հաջորդականություն է անվերջ թվով x_n անդամներ: Այնուհետև ընտրում ենք $x_{n_3} \in [a_3, b_3]$, $n_3 > n_2$ և այլն. $\exists x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $n_k > n_{k-1}$, ցանկացած $\forall k \in \mathbb{N}$ համար, քանի որ $[a_k, b_k]$ հաջորդականություն է անվերջ թվով x_n անդամներ:

Մնում է ցույց տալ, որ կառուցված $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ ենթահաջորդականությունը զուգամեր է:

Նամաձայն ենթահաջորդականության ընտրության սկզբունքի և (2-31) պայմանի՝

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{ընդ որում} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = c :$$

Ոստիկանների կանոնի շնորհիվ՝

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: □

Ցանկության դեպքում կարելի է միավորել Բոլցանո-Վայերշտրասի Լեմմա 2.3-ը և Պնդում 2.9-ը և արդյունքում մի քանի համարժեք ձևակերպում ստանալ: Պետք է հիշել, որ հաջորդականություն ասելով միշտ նկատի ունենք անվերջ հաջորդականություն:

Լեմմա 2.4. (Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմա)

ա) Ցանկացած հաջորդականություն պարունակում է գոնե մեկ ենթահաջորդականություն, որը ձգքում է կան վերջավոր թվի, կան անվերջի:

բ) Ցանկացած հաջորդականություն ունի գոնե մեկ մասնակի սահման (վերջավոր կամ անվերջ):

Նախորդ բաժնում Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի այլ համարժեք ձևակերպումներ կներկայացնենք:

2.8 Կուրակման (սահմանային) կետեր, վերին և ստորին սահմաններ

Սահմանում 2.16. $c \in \mathbb{R}$ կետը կոչվում է $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության **կուրակման** (կամ **սահմանային**) **կետ**, եթե c կետի ցանկացած ε -շրջակայք անվերջ թվով x_n անդամներ է պարունակում:

Կուրակման կետի գաղափարը նույն կերպ սահմանվում է ոչ միայն հաջորդականությունների, այլև կամայական $E \subset \mathbb{R}$ բազմությունների համար: Բացի այդ, կարելի է թույլատրել $c = \infty, \pm\infty$ դեպքերը:

Սակայն հաջորդականությունների համար կուրակման կետը կարելի է նույնացնել մեզ արդեն հայտնի մասնակի սահմանների հետ:

Պնդում 2.10. $c \in \mathbb{R}$ կետը $\{x_n\}$ հաջորդականության համար կուրակման (կամ սահմանային) կետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $c \in \mathbb{R}$ կետը $\{x_n\}$ հաջորդականության մասնակի սահման է:

Այս պնդման ապացույցը թողնենք ընթերցողին որպես վարժություն: Ապացույցը հիմնված է բացառապես կուրակման կետի և մասնակի սահմանի սահմանումների վրա:

Օրինակ 2.10. Դիտարկենք՝ $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$:

Նեշտ է նկատել, որ հաջորդականությունն ունի միայն երկու մասնակի սահման, որոնք ստացվում են, երբ ընտրում են զույգ կամ կենդ համարները.

$$x_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1 \quad (\text{երբ } k \rightarrow \infty), \quad x_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \rightarrow -1 \quad (\text{երբ } k \rightarrow \infty):$$

Այսպիսով, հաջորդականությունն ունի միայն երկու կուրակման կետ ($=$ մասնակի սահմաններ)՝ ± 1 :

Այժմ կարելի է մի քանի փաթեթավորված ձևակերպել Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմման կուրակման կետի արտահայտությունը:

Լեմմա 2.5. (Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմա)

ա) Ցանկացած սահմանափակ հաջորդականություն պարունակում է գոնե մեկ վերջավոր կուրակման կետ:

բ) Ցանկացած հաջորդականություն ունի գոնե մեկ կուրակման կետ (վերջավոր կամ անվերջ):

Սահմանում 2.17. Տվյալ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության մասնակի սահմաններից մեծագույնը և փոքրագույնը կոչվում են, համապատասխանաբար, $\{x_n\}$ -ի **վերին և ստորին սահմաններ** և նշանակվում՝

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{և} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n:$$

Օրինակ 2.11. $\boxed{x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}} :$

Հաջորդականության բոլոր մասնակի սահմաններն արդեն գրել էինք՝ ± 1 : Ներկայացրե՛ք

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \quad \text{և} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1 :$$

Այնուամենայնիվ, Սահմանում 2.17-ը մի բաց ունի: Դեռևս պարզ չէ, կամայական հաջորդականության մասնակի սահմանները մեծագույն և փոքրագույն ունե՞ն, թե ոչ: Այդ հարցին պատասխանում է հաջորդ թեորեմը:

Թեորեմ 2.16. Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա նրա մասնակի սահմանների բազմությունն ունի մեծագույն և փոքրագույն, այսինքն՝ գոյություն ունեն վերին և ստորին սահմանները:

$$\exists \boxed{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n} \quad \text{և} \quad \exists \boxed{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n} :$$

Ապացույց. Դիցուք $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է և $m \leq x_n \leq M$, $n \in \mathbb{N}$:

A -ով նշանակենք $\{x_n\}$ -ի մասնակի սահմանների բազմությունը:

Մեր նպատակն է ապացուցել, որ գոյություն ունի $\exists \boxed{\max A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n} :$

Նախ և առաջ նկատենք, որ A բազմությունը դադարի չէ՝ $A \neq \emptyset$, քանի որ, ըստ Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի, $\{x_n\}$ -ը գոնե մեկ վերջավոր մասնակի սահման ունի: Ավելին, A բազմությունը $\{x_n\}$ -ի նման սահմանափակ է: Համաձայն սուպրեմումի գոյության մասին թեորեմի՝ $\exists \boxed{\sup A \stackrel{2.2}{=} b} :$

Մեզ մնում է ցույց տալ, որ $\boxed{b \in A}$, այդ դեպքում $\sup A = \max A = b$, և ապացույցը կավարտվի:

Իսկապես, ենթադրենք հակառակը՝ $\boxed{b \notin A}$: Սա նշանակում է, որ b թիվը $\{x_n\}$ -ի մասնակի սահման (կուրակման կետ) չէ: Ըստ կուրակման կետի սահմանման՝ գոյություն ունի b կետի այնպիսի շրջակայք՝ $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, որ պարունակի միայն վերջավոր թվով x_n անդամներ: Ուստի այդ $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ շրջակայքը չի պարունակում $\{x_n\}$ -ի որևէ մասնակի սահման, այսինքն՝ A -ի ոչ մի կետ:

$$\boxed{(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap A = \emptyset} : \quad (2-32)$$

Սակայն, մյուս կողմից, $\sup A = b$ սուպրեմումի սահմանումը ենթադրում է հետևյալ պայմանը՝

$$\exists a \in A \quad \text{s.t.} \quad a \in (b - \varepsilon, b] :$$

Ստացվեց հակասություն (2-32)-ի հետ, և ուրեմն՝ $b \in A$:

Նմանապես ապացուցում ենք, որ $\exists \boxed{\min A = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n} :$ □

Դիտողություն 2.4. Այն դեպքում, երբ $\{x_n\}$ հաջորդականությունն անսահմանափակ է վերևից, կարացվի, որ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty,$$

իսկ երբ $\{x_n\}$ -ն անսահմանափակ է ներքևից, ապա

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = -\infty :$$

Թեորեմ 2.17. Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա այն զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ հավասար են նրա վերին և ստորին սահմանները.

$$\left(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \iff \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \right) :$$

Ապացույց. Նախորդ Թեորեմ 2.16-ն ապահովում է վերին և ստորին սահմանների գոյությունը: Իսկ համարժեքությունը բխում է Պնդում 2.3, 2.6-ից: $\square$

Դիտողություն 2.5. Թեորեմ 2.17-ը կարելի է ձևակերպել նաև անվերջ մեծերի համար:

2.9 Ֆունդամենտալ հաջորդականություններ:

Զուգամիպության Կոշու սկզբունքը

Այս բաժնում կձանոթանանք ֆունդամենտալ հաջորդականության նոր գաղափարի հետ, որը զուգամիպության նման սահմանվում է ε -լեզվով և զուգամետ հաջորդականությունների հետ անմիջական կապ ունի:

Սահմանում 2.18. $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է **ֆունդամենտալ** (կամ երբեմն **Կոշու հաջորդականություն**), եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall m, n > N_0 \quad |x_m - x_n| < \varepsilon, \quad (2-33)$$

կամ նույնը մի փոքր այլ կերպ՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_0, \quad \forall p = 1, 2, 3, \dots, \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon : \quad (2-34)$$

Ինչպես տեսնում ենք, (2-33)-(2-34) պայմանները շատ նման են սահմանի (կամ զուգամիպության) սահմանմանը: Տարբերությունն այն է, որ սահմանի սահմանման մեջ x_n անդամները համեմատվում են a

սահմանի հետ, այն է՝ $|x_n - a| < \varepsilon$, իսկ ֆունդամենտալության (2-33)-(2-34) պայմանի մեջ համեմատում են իրար հետ քարքեր x_n անդամներ, այն է՝ $|x_m - x_n| < \varepsilon$:

Նկատենք, որ (2-33) և (2-34) պայմանները լիովին համարժեք են, ընդամենը m ($m > N_0$) ինդեքսը համարել ենք n -ից մեծ ($m > n$) և նշանակել $\boxed{m = n + p}$:

Նաջորդ հիմնարար սկզբունքը ֆունդամենտալության և զուգամիտության գաղափարների միջև կապ է հաստատում: Պարզվում է՝ այդ երկու հասկացությունները համարժեք են:

Թեորեմ 2.18. *Որպեսզի հաջորդականությունը զուգամիտ լինի անհրաժեշտ և բավարար է, որ այն լինի ֆունդամենտալ, այսինքն՝*

$$\left(\{x_n\}\text{-ը զուգամիտ է} \right) \iff \left(\{x_n\}\text{-ը ֆունդամենտալ է} \right) :$$

Ապացույց. $\boxed{\implies}$ (Անհրաժեշտություն) Դիցուք $\{x_n\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է ինչ-որ $a \in \mathbb{R}$ վերջավոր թվին: Գրենք զուգամիտության սահմանումը երկու քարքեր անդամների համար.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \begin{aligned} \forall n > N_0 \quad |x_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ \forall m > N_0 \quad |x_m - a| &< \frac{\varepsilon}{2} : \end{aligned}$$

Կիրառելով եռանկյան անհավասարությունը՝ այսպետից կստանանք՝

$$|x_m - x_n| = |x_m - a + a - x_n| \leq |x_m - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall m, n > N_0,$$

այսինքն՝ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է :

$\boxed{\impliedby}$ (Բավարարություն) Դիցուք $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է :

Նախ և առաջ ցույց տանք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է : Գրենք ֆունդամենտալության սահմանումը մասնավորապես $\varepsilon = 1$ -ի համար.

$$\varepsilon = 1\text{-ի համար} \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall m, n > N_0 \quad |x_m - x_n| < 1 :$$

Ֆիքսենք որևէ $m = N_0 + 1$,

$$\implies |x_{N_0+1} - x_n| < 1 \quad \forall n > N_0 \implies \boxed{x_{N_0+1} - 1 < x_n < x_{N_0+1} + 1} \quad \forall n > N_0 :$$

Ստացանք, որ $\{x_n\}_{n=N_0+1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ուստի $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ևս սահմանափակ է :

Շարունակենք ապացույցը և կիրառենք Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմման, ըստ որի՝ սահմանափակ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն.

$$\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \quad s.t. \quad \exists \boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \stackrel{!}{=} c} : \quad (2-35)$$

Ցույց տանք, որ c թիվը ոչ միայն $\{x_{n_k}\}$ ենթահաջորդականության, այլ նաև ամբողջ $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանն է : Գրենք (2-35) սահմանը ε -լեզվով.

$$c = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall k > N \quad \boxed{|x_{n_k} - c| < \frac{\varepsilon}{2}} : \quad (2-36)$$

Գրենք նաև ֆունդամենտալության սահմանումը.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall m, n > N_0 \quad |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} :$$

Վերցնելով $k > N_0$ ՝ կստանանք

$$n_k \geq k > N_0 \implies \boxed{|x_{n_k} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}} \quad \forall k, n > N_0 : \quad (2-37)$$

Այնուհետև վերցնենք $k, n > N_0$ և $k > N$, ինչը (2-36) և (2-37)-ի շնորհիվ թույլ կտա գնահատել

$$|x_n - c| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - c| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > N_0 ,$$

այսինքն՝ $\boxed{c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n} :$ □

Օրինակ 2.12. $\boxed{x_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n}$, որտեղ q -ն ($0 < |q| < 1$) ֆիքսած պարամետր է :

Ցույց տանք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է : Մտուգենք (2-34) պայմանը.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_0, \quad \forall p = 1, 2, 3, \dots, \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon :$$

Կազմենք $|x_{n+p} - x_n|$ տարբերությունը և գնահատենք վերևից՝ օգտվելով եռանկյան անհավասարությունից և երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևից.

$$|x_{n+p} - x_n| = |q^{n+1} + q^{n+2} + \dots + q^{n+p}| \leq |q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \dots + |q|^{n+p} = |q|^{n+1} \frac{1 - |q|^p}{1 - |q|} < |q|^{n+1} \frac{1}{1 - |q|} :$$

Քանի որ ավելի վաղ մեզ հայտնի էր, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^{n+1} = 0$, ապա գնահատականը կարելի է շարունակել

$$\exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_0, \quad \forall p = 1, 2, 3, \dots, \quad |x_{n+p} - x_n| < |q|^{n+1} \frac{1}{1 - |q|} < \varepsilon :$$

Սա նշանակում է, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, իսկ համաձայն Կոշու սկզբունքի (Թեորեմ 2.18)՝ $\{x_n\}$ -ը նաև զուգամետ է :

Օրինակ 2.13. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} :$

Յույց տանք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ չէ : Այդ նպատակով (2-33)-ի կամ (2-34)-ի հիման վրա ε -լեզվով ձևակերպենք ոչ ֆունդամենտալության պայմանը (ֆունդամենտալության ժխտումը).

$$\{x_n\}\text{-ը ֆունդամենտալ չէ} \stackrel{def}{\iff} \exists \varepsilon > 0 \quad s.t. \quad \forall N_0 \in \mathbb{N} \quad \exists m, n > N_0 \quad s.t. \quad |x_m - x_n| \geq \varepsilon \quad (2-38)$$

կամ

$$\{x_n\}\text{-ը ֆունդամենտալ չէ} \stackrel{def}{\iff} \exists \varepsilon > 0 \quad s.t. \quad \forall N_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n > N_0, \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad |x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon : \quad (2-39)$$

Ստուգենք (2-39) պայմանը $\{x_n\}$ հաջորդականության համար: Կազմենք $|x_{n+p} - x_n|$ տարբերությունը և գնահատենք ներքևից.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p} :$$

Քանի որ $p \in \mathbb{N}$ բնական թվի ընտրությունը մենք ենք կատարում, ապա ընտրենք $\boxed{p = n} :$ Այդ դեպքում

$$|x_{2n} - x_n| \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \stackrel{!}{\geq} \varepsilon ,$$

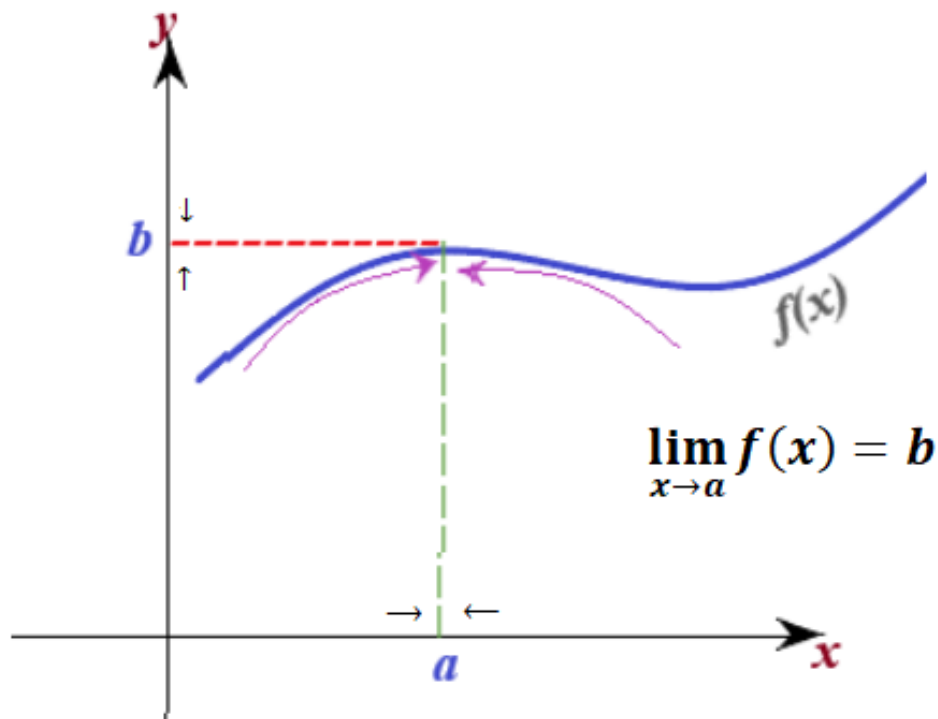
որտեղ որպես ε կարելի է վերցնել $\varepsilon = \frac{1}{2}$ կամ $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} :$ Մա նշանակում է, որ (2-39) պայմանը տեղի ունի, և ուրեմն $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ չէ, իսկ համաձայն Կոշու սկզբունքի (Թեորեմ 2.18)՝ $\{x_n\}$ -ը նաև տարամետ է :

Գլուխ 3

Ֆունկցիայի սահմանը և անընդհատությունը

3.1 Ֆունկցիայի սահմանը

Նաջորդականությունը, ինչպես հայրնի է , բնական արգումենտի ֆունկցիա է : Նաջորդականության նման կամայական ֆունկցիան նույնպես կարող է սահմաններ ունենալ, որոնք շար ավելի ընդհանուր բնույթ ունեն : Եթե x_n հաջորդականության սահմանը դիտարկվում է միայն անվերջում, երբ $n \rightarrow \infty$, ապա կամայական $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանը կարող է դիտարկվել որոշման տիրույթի յուրաքանչյուր կետում կամ որոշման տիրույթի ծայրակետերում : Ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը փորձենք պատկերացնել գրաֆիկական եղանակով :



Գծագիր 3.1. Ֆունկցիայի սահմանի նախնական պատկերումը

Գծագիր 3.1-ում կարելի է տեսնել, որ երբ x փոփոխականը մոտենում կամ ձգվում է a կետին, համապատասխան $y = f(x)$ արժեքները ձգվում են b -ին: Իհարկե, սա նախնական նկարագրություն է և ճշգրիտ չէ: Ֆունկցիայի սահմանի ճշգրիտ սահմանումը կարելի է տալ մի քանի եղանակներով: 19-րդ դարի գերմանացի մաթեմատիկոս Նայմեն առաջարկել է ֆունկցիայի սահմանը սահմանել այնպես, որ այն բերվի հաջորդականության սահմանին:

Սահմանում 3.1. (Ֆունկցիայի սահմանն ըստ Նայմենի)

Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանն $a \in \mathbb{R}$ կետում հավասար է $b \in \mathbb{R}$ թվին,

կգրենք $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ կամ $f(x) \rightarrow b$, երբ $x \rightarrow a$, եթե

$$\left[\begin{array}{l} \forall x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty), \\ x_n \neq a \end{array} \right] \implies f(x_n) \rightarrow b \quad (n \rightarrow \infty) : \quad (3-1)$$

Այլ կերպ ասած՝ a կետին ձգվող բոլոր x_n ($x_n \neq a$) հաջորդականությունների համար համապատասխան $f(x_n)$ արժեքներից կազմված հաջորդականությունները պետք է ձգվեն միևնույն b թվին:

Նկատենք, որ a կետում ֆունկցիայի $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ սահմանի առկայությունը և ֆունկցիայի հնարավոր արժեքն a կետում (ասենք $f(a) = b$ կամ $f(a) = c$) նույնը չեն և բոլորովին փարբեր պայմաններ են: Ֆունկցիան a կետում կարող է $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ սահման ունենալ, սակայն a կետում նույնիսկ որոշված չլինել, այլ որոշված լինել միայն a կետի շրջակայքում:

19-րդ դարի ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Կոշին առաջարկել է ֆունկցիայի սահմանը սահմանել ε -լեզվով կամ շրջակայքերի միջոցով:

Սահմանում 3.2. (Ֆունկցիայի սահմանն ըստ Կոշու)

Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանն $a \in \mathbb{R}$ կետում հավասար է $b \in \mathbb{R}$ թվին,

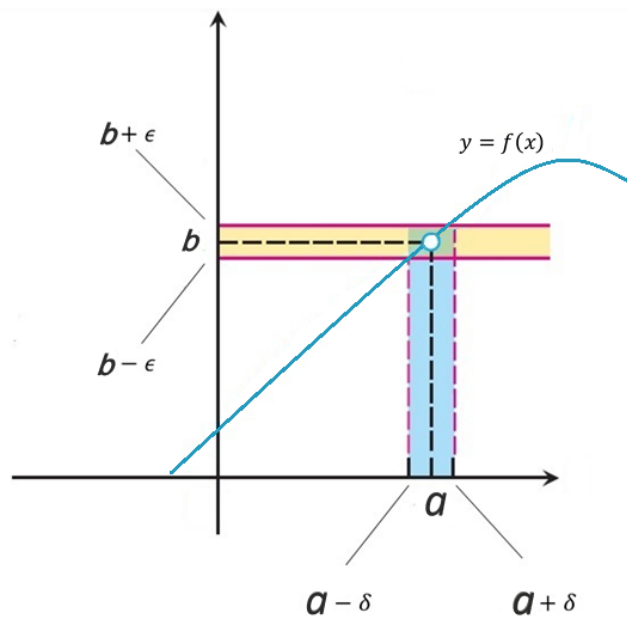
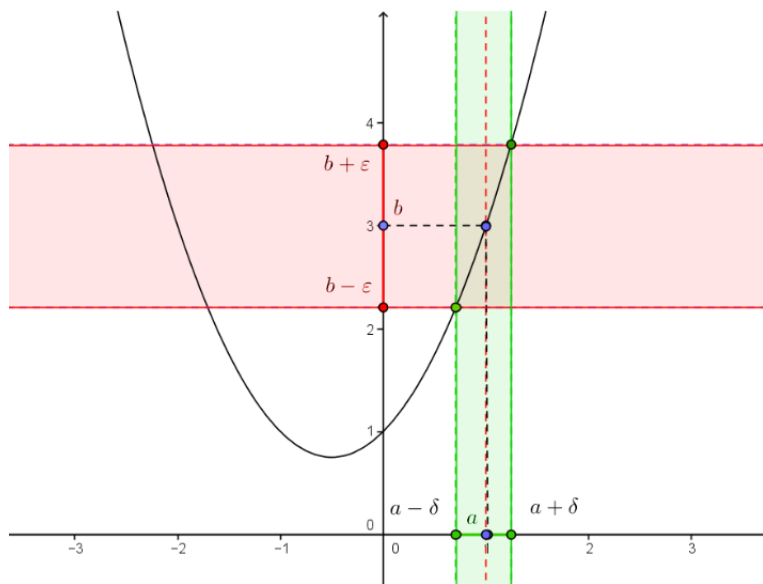
կգրենք $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ կամ $f(x) \rightarrow b$, երբ $x \rightarrow a$, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon : \quad (3-2)$$

Կոշու (3-2) ձևակերպումը նշանակում է, որ $(a - \delta, a + \delta)$ շրջակայքում գտնվող բոլոր x -երի համար (բացի $x = a$ կենտրոնից) համապատասխան $f(x)$ արժեքները գտնվում են b -ի ε -շրջակայքում, այսինքն՝ $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$: Սա տեղի ունի ցանկացած $\forall \varepsilon > 0$ համար, որից կախված՝ գտնվում է $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

Կոշու (3-2) տեսքի պայմանները կանվանենք ε - δ -լեզվով ներկայացված:

Քանի որ բերեցինք ֆունկցիայի սահմանի երկու փարբեր սահմանումներ, ստիպված ենք ապացուցել երկու սահմանումների համարժեքությունը:



Գծագիր 3.2. Ֆունկցիայի սահմանի պատկերումը շրջակայքերով

Թեորեմ 3.1. Ֆունկցիայի սահմանի՝ Նայնեի և Կոշու սահմանումները համարժեք են.

$$\left(\text{Նայնեի Սահմանում 3.1} \right) \iff \left(\text{Կոշու Սահմանում 3.2} \right) :$$

Ապացույց. $\implies$ Դիցուք $\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b}$ Նայնեի իմաստով, այսինքն՝ րեղի ունի (3-1) սահմանումը:

Մեր նպատակն է սրանալ Կոշու (3-2) սահմանումը: Ենթադրենք հակառակը՝ (3-2) պայմանը խախտվում է: Այս փաստը, այսինքն՝ (3-2)-ի ժխտումն ε - δ -լեզվով հեփկյալ րեսքն է ընդունում.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_0, 0 < |x_0 - a| < \delta \quad \text{s.t.} \quad |f(x_0) - b| \geq \varepsilon : \quad (3-3)$$

Քանի որ δ -ն կամայական է, վերցնենք կոնկրետ $\delta_n = \frac{1}{n} \searrow 0$,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall \delta_n = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \exists x_n, 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{s.t.} \quad |f(x_n) - b| \geq \varepsilon :$$

Ոսփիկանների կանոնի շնորհիվ՝ սրանում ենք $x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$: Իսկ մյուս կողմից՝ $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ինչը նշանակում է, որ $f(x_n) \not\rightarrow b \quad (n \rightarrow \infty)$: Սրացանք հակասություն Նայնեի (3.1) սահմանման հեփ:

$\impliedby$ Դիցուք $\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b}$ Կոշու իմաստով, այսինքն՝ րեղի ունի (3-2) պայմանը.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon : \quad (3-4)$$

Մեր նպատակն է սրանալ Նայնեի (3-1) պայմանը: Վերցնենք կամայական $\boxed{x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)}$, $x_n \neq a$, հաջորդականություն և ցույց րանք, որ $\boxed{f(x_n) \rightarrow b \quad (n \rightarrow \infty)}$:

Գրենք $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) զուգամիություն ձևակերպումը ոչ թե ε -ի, այլ գրնված $\delta = \delta(\varepsilon)$ -ի համար.

$$\exists N_0 = N_0(\delta) = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_0 \quad 0 < |x_n - a| < \delta :$$

Ներկայացնենք (3-4) պայմանից ստանում ենք, որ

$$\implies |f(x_n) - b| < \varepsilon \quad \forall n > N_0(\varepsilon),$$

ինչը նշանակում է, որ $f(x_n) \rightarrow b$ (երբ $n \rightarrow \infty$), այսինքն՝ փոքի ունի Նայնեի (3-1) սահմանումը: $\square$

Այսուհետ ֆունկցիայի սահմանը դիֆարկելիս մենք իրավասու ենք կիրառել Նայնեի և Կոշու սահմանումներից ցանկացածը՝ ըստ մեր հայեցողության: Նայնեի սահմանումը, մասնավորապես, թույլ է տալիս հաջորդականությունների վերաբերյալ սրացած բոլոր պնդումները փոխարինել ֆունկցիայի սահմանի վրա: Այդ առումով առաջին հերթին նկատենք, որ հաջորդականության սահմանի միակությունը հանգում է ֆունկցիայի սահմանի միակությանը:

Ներկայացնենք 3.1. Եթե ֆունկցիան փոխադրվում է սահման ունի, ապա այն միակն է՝ $\exists ! \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b :$

Հաջորդիվ կներկայացնենք ֆունկցիայի սահմանի՝ Նայնեի սահմանումից բխող այլ հետևանքներ:

Նայնեի և Կոշու սահմանումները թույլ են տալիս անմիջապես ստանալ ֆունկցիայի սահմանի մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 3.1. $f(x) = C = const$, $\exists \lim_{x \rightarrow a} C = C \quad \forall a \in \mathbb{R} :$

Օրինակ 3.2. $f(x) = x$, $\exists \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \forall a \in \mathbb{R} :$

Օրինակ 3.3. $f(x) = x^2$, $\exists \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9 :$

Ապացուցենք այս սահմանը Կոշու ε - δ -ձևակերպման միջոցով, այսինքն ստուգենք հետևյալ պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad s.t. \quad \forall x, 0 < |x - 3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \varepsilon : \quad (3-5)$$

Նախ վերցնենք և ֆիքսենք կամայական $\forall \varepsilon > 0$: Մեր նպատակն է գտնել ε -ից կախված $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ այնպիսի թիվ, որը կսպասարկի (3-5) պայմանը: Որպեսզի ստանանք (3-5)-ի վերջին անհավասարությունը, վերցնենք δ -ն բավականաչափ փոքր, օրինակ՝ $\delta < 1$, այսինքն՝ $2 < x < 4$, և հետո գնահատենք՝

$$|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3| < \delta(4 + 3) = 7\delta \leq \varepsilon : \quad (3-6)$$

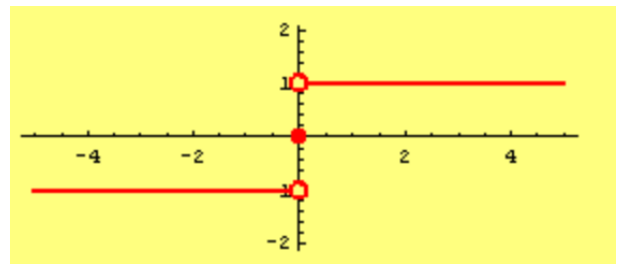
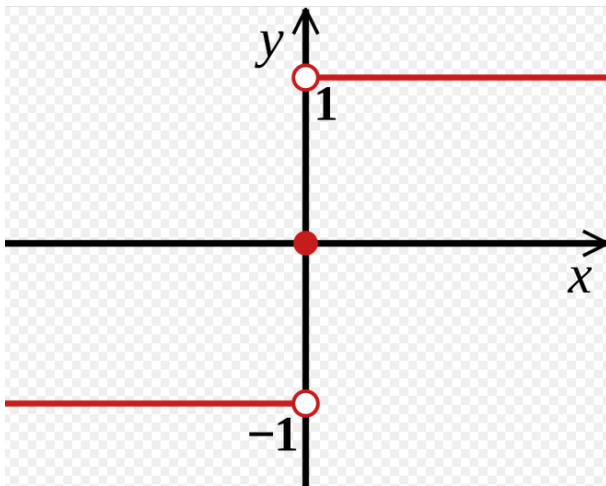
Այստեղ (3-6)-ի վերջին անհավասարությունն ապահովելու համար բավական է ընտրել $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$ կամ $\delta < \frac{\varepsilon}{7}$ որևէ այլ արժեք. այսպիսով, օրինակ՝ $\delta \stackrel{def}{=} \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{7} \right\}$ ընտրությունը լիովին ապահովում է (3-5) պայմանը (տե՛ս զծագիր 3.3):



Գծագիր 3.3. $x = 3$ կետի δ -ընթակայքը, $|x - 3| < \delta$

Օրինակ 3.4. Սահմաններ նոր ֆունկցիա, այդպես կոչված՝ **սիգնում ֆունկցիան**.

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{եթե } x > 0, \\ 0, & \text{եթե } x = 0, \\ -1, & \text{եթե } x < 0 : \end{cases} \quad (3-7)$$



Գծագիր 3.4. Սիգնում ֆունկցիայի գրաֆիկը

Քանի որ դրական և բացասական կիսաառանցքների վրա սիգնում ֆունկցիան հաստատուն է, որոշման տիրույթի միակ հետաքրքիր կետն է $x = 0$ սկզբնակետը: Նենց այդ կետում փորձենք գրել

$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x = b$ ենթադրյալ սահմանը:

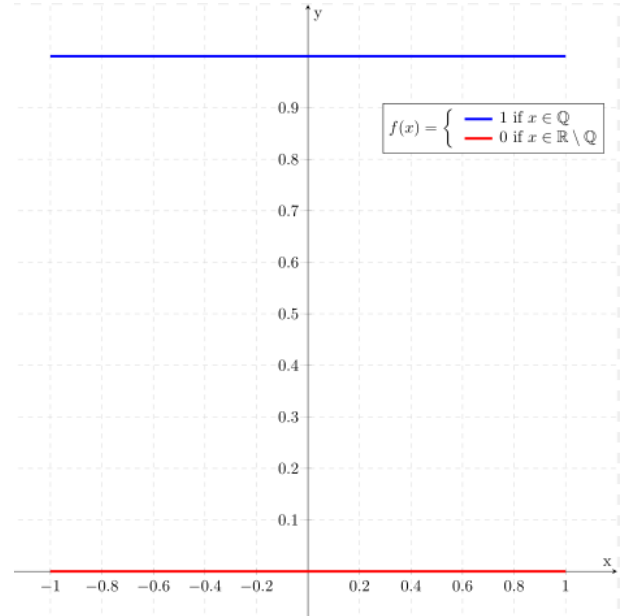
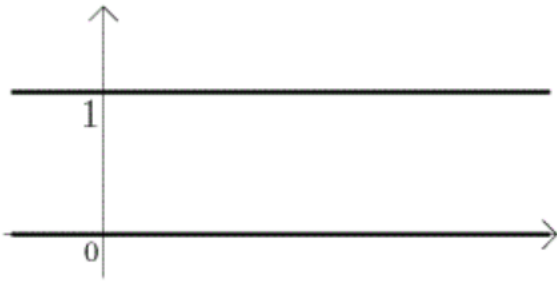
Կիրառենք Նայենի (3-1) սահմանումը: Վերցնենք երկու տեսակի հաջորդականություններ.

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad x_n > 0, & \implies \operatorname{sgn} x_n = 1 \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty), \\ x'_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad x'_n < 0, & \implies \operatorname{sgn} x'_n = -1 \rightarrow -1 \quad (n \rightarrow \infty) : \end{aligned} \quad (3-8)$$

Նայենի (3-1) սահմանումը պահանջում էր, որ **բոլոր** $x_n \rightarrow 0$ հաջորդականությունների համար $f(x_n)$ -ը պետք է ձգրի միևնույն b սահմանին՝ $f(x_n) \rightarrow b$: Սիգնում ֆունկցիայի (3-8) դեպքում այդ պահանջը խախտվեց, քանի որ ստացվեցին 1 և -1 արարքեր (մասնակի) սահմաններ: Սա նշանակում է, որ $x = 0$ կետում սիգնում ֆունկցիան սահման չունի՝ $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$:

Օրինակ 3.5. Սահմանենք էլ ալեկի փարօրինակ մի ֆունկցիա՝ **Դիրիխլեի ֆունկցիան**.

$$\mathcal{D}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{եթե } x \in \mathbb{Q} \quad (x \text{ ռացիոնալ է}), \\ 0, & \text{եթե } x \in \mathbb{I} \quad (x \text{ իռացիոնալ է}) : \end{cases} \quad (3-9)$$



Գծագիր 3.5. Դիրիխլեի ֆունկցիայի (թերի) գրաֆիկը

Յույց փանք, որ յուրաքանչյուր $a \in \mathbb{R}$ կետում Դիրիխլեի ֆունկցիան սահման չունի՝ $\nexists \lim_{x \rightarrow a} \mathcal{D}(x) :$

Կիրառենք Նայնեի (3-1) սահմանումը: Վերցնենք երկու տեսակի հաջորդականություններ՝

$$\begin{aligned} \exists x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty), \quad x_n \in \mathbb{Q}, & \implies \mathcal{D}(x_n) = 1 \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty), \\ \exists x'_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty), \quad x'_n \in \mathbb{I}, & \implies \mathcal{D}(x'_n) = 0 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) : \end{aligned} \quad (3-10)$$

Այսպես օգտվեցինք այն փաստից, որ ցանկացած միջակայքում անվերջ թվով ռացիոնալ և իռացիոնալ կետեր կան: Զանի որ փարքեր $x_n \rightarrow a$ հաջորդականությունների համար սրացանք, որ $\mathcal{D}(x_n)$ -ը զուգամիտեց փարքեր 1 և 0 սահմաններին, համոզվեցինք, որ Նայնեի (3-1) սահմանումը խախտվեց:

Սա նշանակում է, որ $x = a$ կետում Դիրիխլեի ֆունկցիան սահման չունի. $\nexists \lim_{x \rightarrow a} \mathcal{D}(x) :$

Ներառքքիր է, որ Դիրիխլեի ֆունկցիան սահման չունի իր որոշման տիրույթի ոչ մի կետում:

3.2 Ֆունկցիայի միակողմանի սահմաններ

Շարունակենք ֆունկցիայի սահմանի տեսության հետազոտումը: Այդպես կոչված միակողմանի սահմանները դարձյալ կսահմանենք Նայնեի և Կոշու փարքերակներով:

Սահմանում 3.3. (Ֆունկցիայի միակողմանի սահմաններն ըստ Նայմեի)

Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան սահմանն $a \in \mathbb{R}$ կերպում հավասար է $b \in \mathbb{R}$ թվին,

կգրենք $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$, կամ $f(x) \rightarrow b$, երբ $x \rightarrow a+0$, կամ $f(a+0) = b$, եթե

$$\left[\begin{array}{l} \forall x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty), \\ x_n > a \end{array} \right] \implies f(x_n) \rightarrow b \quad (n \rightarrow \infty) : \quad (3-11)$$

Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի ձախակողմյան սահմանն $a \in \mathbb{R}$ կերպում հավասար է $b \in \mathbb{R}$ թվին,

կգրենք $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$, կամ $f(x) \rightarrow b$, երբ $x \rightarrow a-0$, կամ $f(a-0) = b$, եթե

$$\left[\begin{array}{l} \forall x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty), \\ x_n < a \end{array} \right] \implies f(x_n) \rightarrow b \quad (n \rightarrow \infty) : \quad (3-12)$$

Այլ կերպ ասած՝ a կերին աջից (կամ ձախից) ձգտող բոլոր x_n ($x_n \neq a$) հաջորդականությունների համար համապատասխան $f(x_n)$ արժեքներից կազմված հաջորդականությունները ձգտում են միևնույն b թվին:

Սահմանում 3.4. (Ֆունկցիայի միակողմանի սահմանն ըստ Կոշու)

Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան սահմանն $a \in \mathbb{R}$ կերպում հավասար է $b \in \mathbb{R}$ թվին,

կգրենք $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$, կամ $f(x) \rightarrow b$, երբ $x \rightarrow a+0$, կամ $f(a+0) = b$, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x, a < x < a + \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon : \quad (3-13)$$

Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի ձախակողմյան սահմանն $a \in \mathbb{R}$ կերպում հավասար է $b \in \mathbb{R}$ թվին,

կգրենք $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$, կամ $f(x) \rightarrow b$, երբ $x \rightarrow a-0$, կամ $f(a-0) = b$, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x, a - \delta < x < a \implies |f(x) - b| < \varepsilon : \quad (3-14)$$

Ինչպես ընդհանուր սահմանի դեպքում, այժմ միակողմանի սահմանների դեպքում ևս ֆունկցիայի միակողմանի սահմանի երկու տարբեր սահմանումները համարժեք են: Ապացույցն իրականացվում է նույն կերպ:

Թեորեմ 3.2. Ֆունկցիայի միակողմանի սահմանի Նայմեի և Կոշու սահմանումները համարժեք են.

$$\left(\text{Նայմեի Սահմանում 3.3} \right) \iff \left(\text{Կոշու Սահմանում 3.4} \right) :$$

Թեորեմ 3.3. Ֆունկցիայի սահմանն a կետում գոյություն ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ a կետում ֆունկցիայի միակողմանի սահմանները գոյություն ունեն և հավասար են.

$$\left(\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \right) \iff \left(\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \right) :$$

Ապացույց. Նամոզվում ենք անմիջապես սահմանումներից: Օրինակ, կարելի է համեմատել Կոշու ձևակերպումները: Եթե համեմատենք a կետի շրջակայքերը (3-2), (3-13), (3-14) պայմանների մեջ, ապա (3-2)-ի մեջ երկկողմանի (թեև անկենտրոն) δ -շրջակայք է՝ $0 < |x - a| < \delta$, իսկ (3-13), (3-14) պայմանների մեջ աջակողմյան և ձախակողմյան δ -շրջակայքեր են՝ $a < x < a + \delta$ և $a - \delta < x < a$, որոնք, միասին վերցրած, համընկնում են $0 < |x - a| < \delta$ շրջակայքի հետ: $\square$

Օրինակ 3.6. Վերադառնանք (3-59) սիգնում ֆունկցիային և քննարկենք միակողմանի սահմանների հարցը $x = 0$ սկզբնակետում: Փաստորեն, արդեն ցույց էինք տվել (3-8)-ի մեջ, որ

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = 1}, \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1},$$

ինչը, Թեորեմ 3.3-ի համաձայն, հաստատում է ևս մեկ անգամ, որ $\boxed{\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x}$:

Ֆունկցիայի սահմանը կարելի է դիտարկել ոչ միայն վերջավոր $a \in \mathbb{R}$ կետում, այլև անվերջում՝ ∞ -ում կամ $\pm\infty$ -ում : Այդ դեպքում ֆունկցիայի սահմանը կնմանվի հաջորդականության սահմանին: Բացի այդ, b սահմանը ևս կարող է անվերջ լինել՝ ∞ կամ $\pm\infty$: Ֆունկցիայի սահմանի այսպիսի շար հատուկ դեպքեր են առաջանում, որոնցից մի քանիսի (Կոշու) սահմանումները բերենք ստորև:

Սահմանում 3.5.

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x, |x| > \delta, \implies |f(x) - b| < \varepsilon \right), \\ \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x, x > \delta, \implies |f(x) - b| < \varepsilon \right), \\ \boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \left(\forall E > 0 \quad \exists \delta = \delta(E) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x, 0 < |x - a| < \delta, \implies |f(x)| > E \right), \\ \boxed{\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \left(\forall E > 0 \quad \exists \delta = \delta(E) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x, a - \delta < x < a, \implies f(x) < -E \right), \\ \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \left(\forall E > 0 \quad \exists \delta = \delta(E) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x, x < -\delta, \implies f(x) > E \right), \text{ և այլն:} \end{aligned}$$

Շար օգտակար կլինի, եթե ուսանողը՝ վարժվելու համար, ինքնուրույն կազմի որևէ կետում ինչ-որ սահման և գրի դրա ε - δ -ձևակերպումը և հետո բերի դրան համապատասխանող ֆունկցիայի օրինակ իր գրաֆիկով:

3.3 Գործողություններ ֆունկցիայի սահմանի հետ

Նիշենք, որ հաջորդականությունների սահմանների հետ կարելի է կապարել չորս թվաբանական գործողություններ, եթե մասնակից հաջորդականությունները զուգամեր են: Նույն հափկություններով օժտված է ֆունկցիայի սահմանը:

Թեորեմ 3.4. *Դիցուք գոյություն ունեն $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ սահմանները ($a = \infty$ սահմանային կերպը թույլատրվում է): Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ բանաձևերը՝*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad (3-15)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad (3-16)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{եթե լրացուցիչ} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0: \quad (3-17)$$

Ապացույց. Բանաձևերը սրացվում են հաջորդականությունների սահմանների համար նույն բանաձևերից և ֆունկցիայի սահմանի Նայնեի սահմանումից: $\square$

Որպես այս բանաձևերի մի կիրառում և հետևանք նկատենք, որ ճիշտ է նաև աստիճանի հետ կապված բանաձև.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot x = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \lim_{x \rightarrow a} x = a \cdot a = a^2:$$

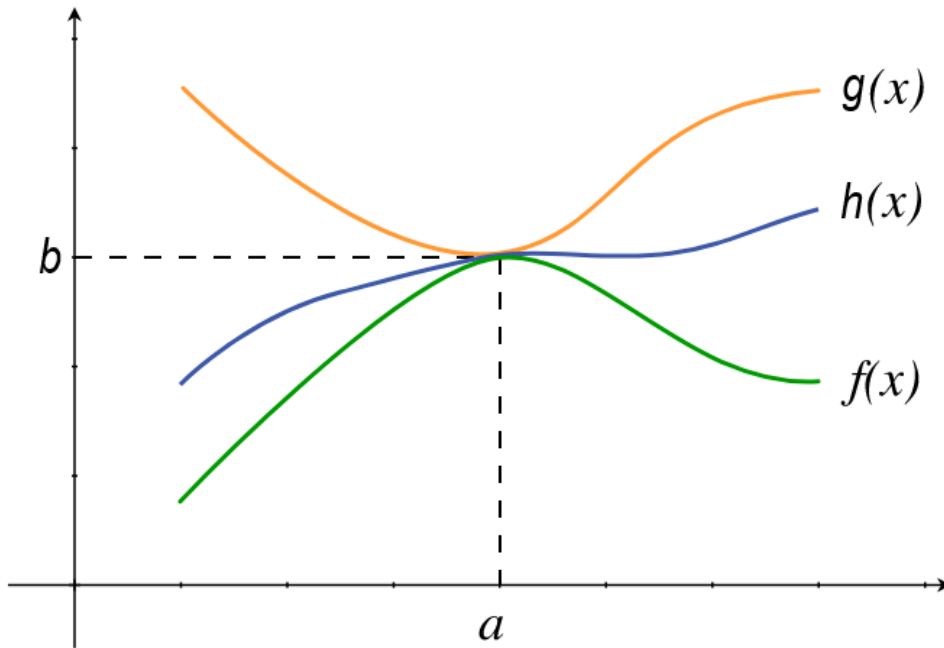
Նմանապես ապացուցվում է բանաձևը կամայական ամբողջ ցուցիչով,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} x^m = \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right)^m = a^m}, \quad m \in \mathbb{N}: \quad (3-18)$$

Ֆունկցիայի սահմանի Նայնեի սահմանման կարևոր կիրառում է նաև ֆունկցիայի սահմանի այն հափկությունները, որոնք արտահայտվում են անհավասարությունների միջոցով: Մասնավորապես, անհավասարությունում կարելի է անցում կապարել ֆունկցիայի սահմանին: Նափկությունների այդ շարքից ձևակերպենք ոստիկանների կանոնը:

Թեորեմ 3.5. (ոստիկանների մասին) *Դիցուք a կերպում $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները ձգարում են նույն սահմանին՝ $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$: Բացի այդ, երրորդ $h(x)$ ֆունկցիան բավարարում է երկկողմանի զնահաստակունը՝*

$$\boxed{f(x) \leq h(x) \leq g(x)} \quad a \text{ կերպի որևէ շրջակայքում.} \quad 0 < |x - a| < \delta:$$



Գծագիր 3.6. Ոստիկանների կանոնի գրաֆիկական պատկերումը

Այդ դեպքում $\exists \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$:

Ինչպես հաջորդականությունների դեպքում էր, ֆունկցիայի դեպքում ևս կիրառելու ենք հայտնի փոքր՝ անվերջ փոքր և անվերջ մեծ ֆունկցիաներ այս կամ այն կերպում: Մասնավորապես, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ դեպքում գրելու ենք նաև $f(x) = o(1)$, երբ $x \rightarrow a$:

Ֆունկցիայի սահմանի սահմանումից անմիջապես հետևում է , որ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - b) = 0 \iff f(x) = b + \alpha(x), \text{ որտեղ } \alpha(x) = o(1), \text{ երբ } x \rightarrow a : \quad (3-19)$$

Սահմանում 3.6. $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են **համարժեք** a **կերպում**, եթե $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$:

Այս դեպքում կգրենք $f(x) \sim g(x)$, երբ $x \rightarrow a$:

Օրինակ 3.7. $f(x) = 3x^2 - 4x^3$, $g(x) = 3x^2 + 2x^6$ ֆունկցիաները համարժեք են $x = 0$ կերպում $f(x) \sim g(x)$, երբ $x \rightarrow 0$: Իսկապես,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 4x^3}{3x^2 + 2x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 4x}{3 + 2x^4} = 1 :$$

Իսկ մեկ այլ $x \neq 0$ կերպում ֆունկցիաները բնականաբար պարզապես չեն համարժեք լինել:

Սահմանում 3.7. Կասենք, որ a կերպով $f(x)$ ֆունկցիան ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան $g(x)$ -ն, եթե $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$: Այս դեպքում գրելու ենք $f(x) = o(g(x))$, երբ $x \rightarrow a$, և կարդալու ենք՝ « f -ը հավասար է o -փոքր g » :

Ներաբրթիր է, որ $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները կարող են անվերջ փոքր չլինել: Այն մասնավոր դեպքում, երբ $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաներն անվերջ փոքր են, կասենք նաև, որ $f(x)$ ֆունկցիան **ավելի արագ է ձգվում զրոյի, քան $g(x)$ ֆունկցիան**:

Օրինակ 3.8. $f(x) = 3x^2 - 4x^3$ ֆունկցիան ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան $g(x) = 3x + 2x^6$ ֆունկցիան $x = 0$ կերպով, այսինքն՝ $f(x) = o(g(x))$, երբ $x \rightarrow 0$: Իսկապես,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 4x^3}{3x + 2x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 4x^2}{3 + 2x^5} = 0 :$$

Բնականաբար, մեկ այլ կերպով իրավիճակը նույնը չի լինի:

Նշենք, որ $f(x) = o(g(x))$ գրելաձևը կոչվում է o -փոքր գրելաձև և այն կարելի է արքագրել մի փոքր այլ կերպ.

$$f(x) = o(g(x)), \quad \text{երբ } x \rightarrow a, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = o(1), \quad \text{երբ } x \rightarrow a, \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

կամ

$$o(g(x)) = g(x) \cdot o(1), \quad \text{երբ } x \rightarrow a :$$

Մի քանի պարզ բանաձևեր նշենք, երբ $x \rightarrow a$, որոնք արքահայտվում են o -փոքր գրելաձևով (այդպես կոչված՝ **ասիմպտոտական բանաձևեր**).

$$\begin{aligned} o(f) \pm o(f) &= o(f), & o(Cf) &= o(f) \quad (C = \text{const}), \\ o(f) \cdot o(g) &= o(fg), & (o(f))^n &= o(f^n) \quad (n \in \mathbb{N}), \\ o(o(f)) &= o(f), & o(f + o(f)) &= o(f) : \end{aligned}$$

Այս բանաձևերի ստուգումը թողնում ենք ընթերցողին:

Օրինակ 3.9. Նամարժեքությունը և o -փոքր գրելաձևը կարելի է կիրառել նաև հաջորդականությունների համար: Մենք արդեն լավ գիտենք, որ երկու անվերջ փոքրների գումարը դարձյալ անվերջ փոքր է, ինչպես նաև նույն նշանով երկու անվերջ մեծերի գումարը դարձյալ անվերջ մեծ է : Ներաբրթիր և օգրակար է դիտարկել **դասերի կարգերի** երկու անվերջ մեծերի (փոքրների) գումարը:

Դիցուք տրված երկու անվերջ մեծերից մեկը մյուսից ավելի բարձր կարգ ունի.

$x_n, y_n \rightarrow \infty, \quad y_n = o(x_n)$, երբ $n \rightarrow \infty$, այսինքն՝ x_n -ն ավելի արագ է ձգվում անվերջի, քան y_n -ը:

Այդ դեպքում նրանց գումարը համարժեք է ավելի բարձր կարգի x_n անվերջ մեծին, այսինքն՝

$$x_n + y_n \sim x_n, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty :$$

Դիցուք տրված երկու անվերջ փոքրերից մեկը մյուսից ավելի բարձր կարգ ունի.

$x_n, y_n \rightarrow 0, \quad y_n = o(x_n)$, երբ $n \rightarrow \infty$, այսինքն՝ y_n -ն ավելի արագ է ձգվում զրոյի, քան x_n -ը:

Այդ դեպքում նրանց գումարը համարժեք է ավելի ցածր կարգի x_n անվերջ փոքրին, այսինքն՝

$$x_n + y_n \sim x_n, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty :$$

Նկատենք, որ երկու պնդումներում էլ համարժեքությունը կազմելիս փաստորեն ընտրում ենք ավելի մեծ x_n հաջորդականությունը՝ $x_n > y_n$: Երկու պնդումների հիմնավորումը չափազանց կարճ և անմիջական է.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y_n}{x_n} \right) = 1 + 0 = 1, \quad \text{կամ նույնը՝} \quad x_n + y_n = x_n \left(1 + \frac{y_n}{x_n} \right) \sim x_n :$$

Որպես մասնավոր օրինակներ բերենք հայրենի տարրական ֆունկցիաներով ներկայացված հաջորդականություններ.

$$\begin{aligned} & \boxed{\ln n + n^\alpha \sim n^\alpha}, \quad \boxed{n^\alpha + 2^n \sim 2^n}, \quad \boxed{2^n + n! \sim n!}, \\ & \boxed{\frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\ln n}}, \quad \boxed{\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{2^n} \sim \frac{1}{n^\alpha}}, \quad \boxed{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n!} \sim \frac{1}{2^n}}, \quad \alpha > 0 : \end{aligned}$$

Նշենք, որ բերված պնդումներում և օրինակներում հաջորդականությունները կարելի է փոխարինել նմանօրինակ անվերջ մեծ և անվերջ փոքր ֆունկցիաներով:

3.4 Զուգամիպության Կոշու սկզբունքը

Սահմանենք ֆունկցիայի համար մի գաղափար, որը շատ նման է և համապատասխանում է հաջորդականության ֆունդամենտալությանը:

Սահմանում 3.8. Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է **Կոշու պայմանը** $a \in \mathbb{R}$ **կետում**, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \begin{aligned} & 0 < |x' - a| < \delta, \\ & 0 < |x'' - a| < \delta, \end{aligned} \quad \implies \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon :$$

(3-20)

Նաջորդականությունների դեպքում հիշում ենք, որ ֆունդամենտալությունը համարժեք է զուգամիությունը:
Ֆունկցիաների դեպքում մենք քննում ենք նույն երևույթը:

Թեորեմ 3.6. Որպեսզի փոխալ a կերպում ֆունկցիան սահման ունենա, անհրաժեշտ և բավարար է, որ նույն կերպում ֆունկցիան բավարարի Կոշու պայմանը:

Ապացույց. $\Rightarrow$ Ենթադրենք՝ $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$: Գրենք սահմանի սահմանումը երկու փարբեր կետերի համար.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad s.t. \quad \forall x, x', \quad & 0 < |x - a| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ & 0 < |x' - a| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} : \end{aligned}$$

Մրա հիման վրա կարող ենք գնահատել՝ օգտվելով եռանկյան անհավասարությունից.

$$|f(x) - f(x')| = |f(x) - b + b - f(x')| \leq |f(x) - b| + |b - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon :$$

Սրացանք Կոշու (3-20) պայմանը, ինչը և պահանջվում էր:

$\Leftarrow$ Դիցուք a կերպում $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է Կոշու (3-20) պայմանը: Մեր նպատակն է ապացուցել, որ a կերպում $f(x)$ ֆունկցիան սահման ունի: Դրա համար կօգտվենք սահմանի Նայնեի սահմանումից:

Վերցնենք $\forall x_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty), \ x_n \neq a$: Այս զուգամիության շնորհիվ Կոշու (3-20) պայմանից δ -ի համար գրենք

$$\begin{aligned} \exists N_0 = N_0(\delta) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_0 \quad & \Rightarrow \quad 0 < |x_n - a| < \delta, \\ \forall m > N_0 \quad & \Rightarrow \quad 0 < |x_m - a| < \delta : \end{aligned}$$

Կոշու (3-20) պայմանն այսպետից բերում է

$$|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon \quad \forall m, n > N_0$$

գնահատականին: Սա նշանակում է, որ $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, ուրեմն՝ նաև զուգամեր է՝ հաջորդականությունների համար զուգամիության Կոշու սկզբունքի շնորհիվ.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad \forall x_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty), \ x_n \neq a : \quad (3-21)$$

Ցույց քանք, որ բոլոր $\forall x_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty), \ x_n \neq a$ հաջորդականությունների համար կսքանանք միևնույն $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ սահմանը: Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունեն երկու փարբեր մասնակի սահմաններ՝

$$\exists x'_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty), \ x'_n \neq a \quad s.t. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = b',$$

$$\exists x_n'' \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty), \quad x_n'' \neq a \quad s.t. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n'') = b'' \neq b' :$$

Կազմենք նոր հաջորդականություն՝ միավորելով x_n' և x_n'' հաջորդականությունները հետևյալ կերպ՝

$$\{x_n\} = \{x_1', x_1'', x_2', x_2'', \dots, x_n', x_n'', \dots\} :$$

Պարզ է, որ $x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty), \quad x_n \neq a :$

Մի կողմից՝ ըստ (3-21)-ի՝ $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, իսկ մյուս կողմից՝

$$\{f(x_n)\} = \{f(x_1'), f(x_1''), f(x_2'), f(x_2''), \dots, f(x_n'), f(x_n''), \dots\}$$

հաջորդականությունը երկու փաթեթեր b' և $b'' \neq b'$ մասնակի սահմաններ ունի, այսինքն՝ $\{f(x_n)\}$ -ը փարամետ է : Սա հակասում է ֆունկցիայի սահմանի Նայնեի սահմանմանը: □

3.5 Անընդհատ ֆունկցիաներ, պարզագույն հարկություններ

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $a \in \mathbb{R}$ կետի որևէ շրջակայքում:

Սահմանում 3.9. $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **անընդհատ** $x = a$ **կետում**, եթե $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանը և արժեքն a կետում հավասար են, այսինքն՝ $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$:

Իմաստ ունի բացել այս սահմանումը և ներկայացնել այն Նայմենի և Կոշու ձևակերպումներով:

$$f(x) \text{ ֆունկցիան անընդհատ է } x = a \text{ կետում} \iff \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff$$

$$\iff \left[\forall x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty) \implies f(x_n) \rightarrow f(a) \quad (n \rightarrow \infty) \right] \quad (3-22)$$

$$\iff \left[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \right] : \quad (3-23)$$

Ուշադրություն դարձնենք, որ ի փարբերություն կամայական սահմանի, այսպեղ (3-22)-(3-23)-ում $f(x)$ ֆունկցիան պարփաղիր որոշված է $x = a$ կետում, ուստի $x_n = a$, $x = a$ կետը ներառված է :

Սահմանում 3.10. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ չէ $x = a$ կետում, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **խզվող** $x = a$ **կետում**, իսկ $x = a$ կետը՝ **f -ի խզման կետ**:

Օրինակ 3.10. Դիտարկենք $f(x) = x^m$ ($m \in \mathbb{N}$) աստիճանային ֆունկցիան իր $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ որոշման տիրույթում: Յուրաքանչյուր $a \in \mathbb{R}$ կետում ֆունկցիան անընդհատ է, քանի որ

$$\lim_{x \rightarrow a} x^m = \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right)^m = a^m :$$

Այսպեղ օգտագործեցինք ֆունկցիայի սահմանի հարկությունները:

Օրինակ 3.11. Աստիճանային $f(x) = x^m$ ($m \in \mathbb{N}$) ֆունկցիաների անընդհատությունը հանգեցնում է աստիճանային ֆունկցիաներից կազմված այլ ֆունկցիաների անընդհատությանը:

Մասնավորապես, ցանկացած **բազմանդամ**

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

և ցանկացած **ռացիոնալ ֆունկցիա** (այսինքն՝ բազմանդամների հարաբերություն) անընդհատ է իր որոշման տիրույթի յուրաքանչյուր կետում: Դարձյալ օգտագործում ենք ֆունկցիայի սահմանի հարկությունները՝ կապված թվաբանական գործողությունների հետ:

Օրինակ 3.12. Մենք արդեն քննարկել ենք սիգնում ֆունկցիան և ցույց ենք տվել, որ $x = 0$ սկզբնակետում սիգնում ֆունկցիան սահման չունի։ $\boxed{\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x}$: Սա նշանակում է, որ $x = 0$ սկզբնակետում սիգնում ֆունկցիան անընդհատ չէ, այսինքն՝ խզվող է։ Այլ խզման կետ սիգնում ֆունկցիան չունի։

Օրինակ 3.13. Դիրիխլեի $\mathcal{D}(x)$ ֆունկցիան մենք ևս քննարկել և ցույց էինք տվել, որ այն սահման չունի և ոչ մի $a \in \mathbb{R}$ կետում։ $\boxed{\nexists \lim_{x \rightarrow a} \mathcal{D}(x)}$: Սա նշանակում է, որ Դիրիխլեի ֆունկցիան խզվող է յուրաքանչյուր $a \in \mathbb{R}$ կետում։

Միակողմանի սահմանները կիրառելու արդյունքում առաջանում է միակողմանի անընդհատության երևույթը։

Սահմանում 3.11. $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **անընդհատ** $x = a$ **կետում աջից**, եթե $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան սահմանը և արժեքն a կետում հավասար են, այսինքն՝ $\boxed{\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)}$, կամ նույնը կարճ՝ $\boxed{f(a+0) = f(a)}$:

$f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **անընդհատ** $x = a$ **կետում ձախից**, եթե $f(x)$ ֆունկցիայի ձախակողմյան սահմանը և արժեքն a կետում հավասար են, այսինքն՝ $\boxed{\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)}$, կամ նույնը կարճ՝ $\boxed{f(a-0) = f(a)}$:

Թեորեմ 3.7. Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ լինի a կետում, անհրաժեշտ և բավարար է, որ $f(x)$ ֆունկցիան a կետում անընդհատ լինի և՛ աջից, և՛ ձախից։

Ապացույց. Եթե թեորեմի պնդումը ձևակերպենք սահմանների լեզվով, կստացվի՝

$$\boxed{f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)} \iff \boxed{f(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)}, \text{ կամ նույնը } \boxed{f(a) = f(a+0) = f(a-0)} :$$

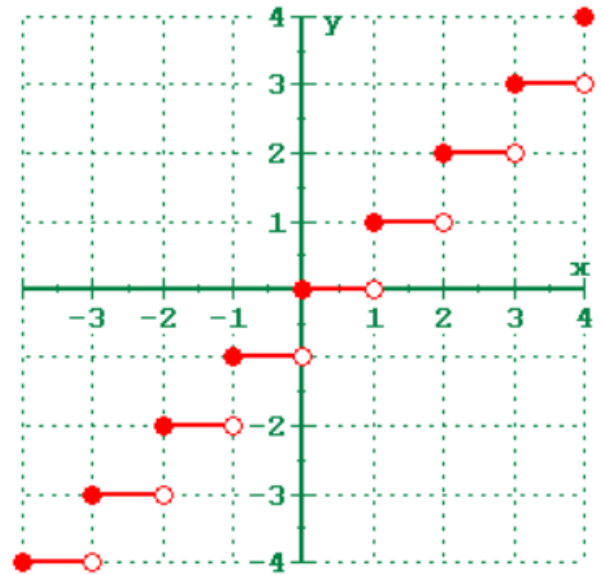
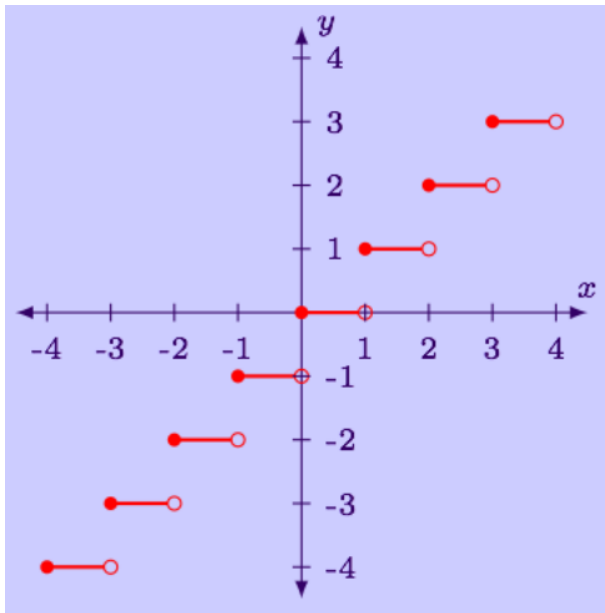
Այս համարժեքությունը մենք արդեն ապացուցել էինք միակողմանի սահմանները քննարկելիս (տե՛ս Թեորեմ 3.3): $\square$

Օրինակ 3.14. Դիտարկենք **ամբողջ մաս** $\boxed{f(x) = [x]}$ ֆունկցիան։ Նշենք, որ $[x]$ ամբողջ մասը $x \in \mathbb{R}$ իրական թիվը չգերազանցող մեծագույն ամբողջ թիվն է։ Նաշվի առնելով, որ $\boxed{[x] \leq x < [x] + 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, դժվար չէ կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը (տե՛ս **զժազիր** 3.7)։

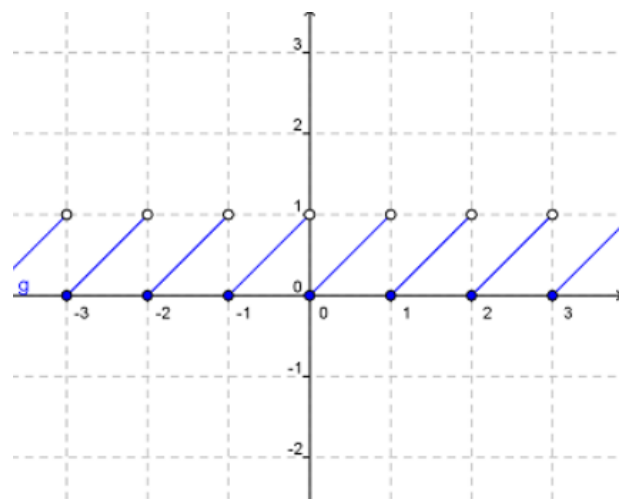
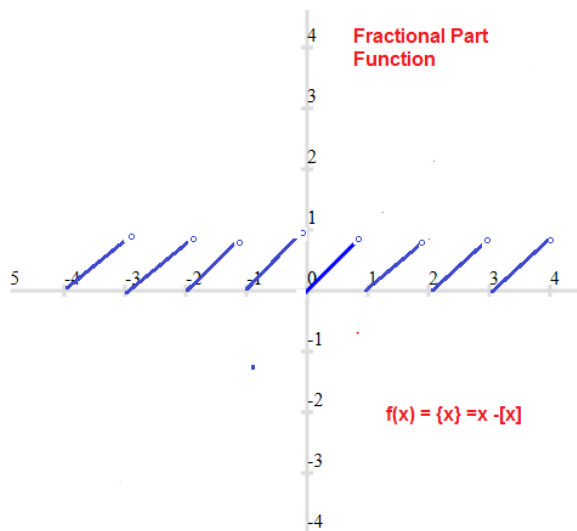
Ցանկացած երկու հաջորդական ամբողջ թվերի միջև ֆունկցիան հաստատուն է և ուրեմն՝ անընդհատ։ Քննարկենք ամբողջ կետերում ֆունկցիայի անընդհատության հարցը։ Վերցնենք $x = m \in \mathbb{Z}$ կանայական ամբողջ կետը և հաշվենք միակողմանի սահմանները տվյալ կետում։

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow m-0} [x] &= m - 1, & \text{քանի որ } m - 1 < x < m, \\ \lim_{x \rightarrow m+0} [x] &= m = [m], & \text{քանի որ } m < x < m + 1 : \end{aligned}$$

Վերջին $[m + 0] = [m]$ սահմանը ցույց է տալիս, որ $m \in \mathbb{Z}$ կերպում ամբողջ մաս ֆունկցիան անընդհար է աջից, իսկ $[m - 0] = m - 1 \neq [m]$ սահմանը ցույց է տալիս, որ m կերպում ամբողջ մաս ֆունկցիան խզվող է ձախից: Թեորեմ 3.7-ի համաձայն՝ ամբողջ մաս ֆունկցիան խզվող է յուրաքանչյուր $m \in \mathbb{Z}$ կերպում, միաժամանակ անընդհար է աջից ամբողջ $\mathbb{R}$ որոշման տիրույթում:



Գծագիր 3.7. $y = [x]$ ամբողջ մաս ֆունկցիայի գրաֆիկը



Գծագիր 3.8. $y = \{x\}$ կոտորակային մաս ֆունկցիայի գրաֆիկը

Օրինակ 3.15. Սահմանենք կոտորակային մաս ֆունկցիան՝

$$f(x) = \{x\} \stackrel{\text{def}}{=} x - [x] :$$

Կառուցենք ֆունկցիայի գրաֆիկը (տես գծագիր 3.8):

Ինչպես նախորդ օրինակում, միակողմանի սահմանների հաշվարկը ցույց է տալիս, որ կոորդինատային մաս ֆունկցիան խզվող է ամբողջ կետերում, բայց անընդհատ է աջից ամենուրեք:

Սահմանում 3.12. $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **անընդհատ** $X \subset \mathbb{R}$ **բազմության մեջ**, եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է X բազմության յուրաքանչյուր կետում: Այդ դեպքում կգրենք $f(x) \in C(X)$:

$C(X)$ -ը կոչվում է X բազմության մեջ **անընդհատ ֆունկցիաների դաս**:

Մասնավորապես, $f(x) \in C[a, b]$ պայմանը նշանակում է, որ f ֆունկցիան անընդհատ է (a, b) բաց միջակայքում, $x = a$ ծայրակետում անընդհատ է աջից, իսկ $x = b$ ծայրակետում անընդհատ է ձախից:

Նաջորդ թեորեմը պնդում է, որ թվաբանական գործողությունները պահպանում են անընդհատությունը:

Թեորեմ 3.8. Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են a կետի շրջակայքում՝ նույն բազմության վրա: Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են a կետում, ապա

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

ֆունկցիաները նույնպես անընդհատ են a կետում: Վերջին կոորդինատի դեպքում պահանջվում է լրացուցիչ պայման՝ $g(a) \neq 0$:

Ապացույց. Նայենք ε , որ ֆունկցիաների սահմանների հետ կարելի է կապարել չորս թվաբանական գործողություններ: Ուրեմն մնում է կապարել սահմանային անցում յուրաքանչյուր ֆունկցիայում: $\square$

3.6 Մոնոտոն ֆունկցիաների սահմանները

Ինչպես հաջորդականությունների համար սահմանել էինք նրանց մոնոտոնությունը, սահմանափակությունը և այլ հատկություններ, այնպես էլ ֆունկցիաների համար սահմանները այդ հատկությունները:

Սահմանում 3.13. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $X \subset \mathbb{R}$ բազմության վրա:

X բազմության վրա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է՝

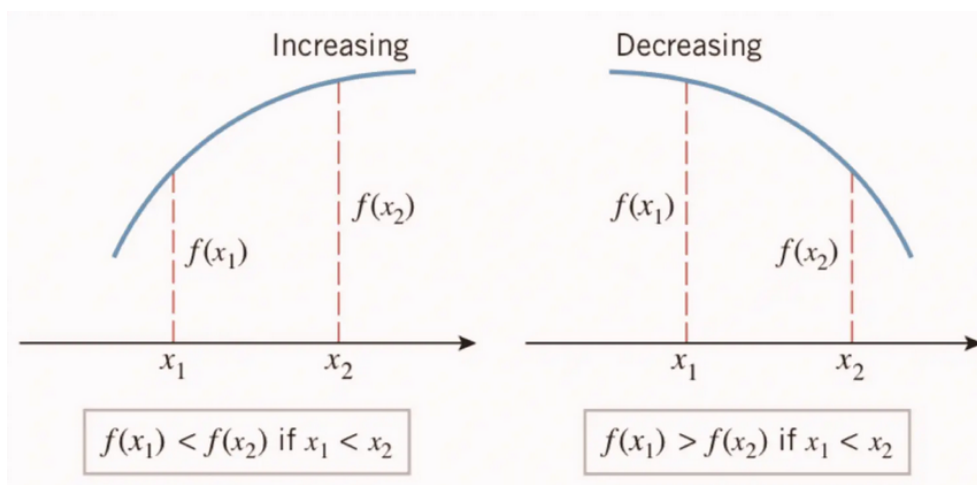
(մոնոտոն) աճող, գրում են $\boxed{f(x) \nearrow}$, եթե $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$;

(մոնոտոն) նվազող, գրում են $\boxed{f(x) \searrow}$, եթե $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$;

խիստ աճող, գրում են $\boxed{f(x) \nearrow}$, եթե $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$;

խիստ նվազող, գրում են $\boxed{f(x) \searrow}$, եթե $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$:

Աճող կամ նվազող ֆունկցիան կոչվում է **մոնոտոն** (տվյալ X բազմության մեջ):



Գծագիր 3.9. Խիստ աճող և խիստ նվազող ֆունկցիաների գրաֆիկներ

Սահմանում 3.14. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $X \subset \mathbb{R}$ բազմության վրա:

$f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **սահմանափակ** X բազմության վրա, եթե

$$\exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in X \implies |f(x)| \leq M : \quad (3-24)$$

$f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **անսահմանափակ** X բազմության վրա, եթե

$$\forall M > 0 \quad \exists x_0 = x_0(M) \in X \quad \text{s.t.} \quad |f(x_0)| > M : \quad (3-25)$$

Նույն եղանակով կարելի է սահմանել ֆունկցիայի սահմանափակությունը կամ անսահմանափակությունը վերևից կամ ներքևից:

Ընթերցողին խորհուրդ է փոխվում բերել մոնոտոն, ոչ մոնոտոն, սահմանափակ և անսահմանափակ ֆունկցիաների փարբեր օրինակներ:

Սահմանում 3.15. $M \in \mathbb{R}$ թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի **ճշգրիտ վերին եզր** կամ **սուպրեմում** X բազմության վրա. կգրենք $M = \sup_{x \in X} f(x)$, եթե

$$\begin{aligned} (u) \quad & \forall x \in X \quad f(x) \leq M, \\ (p) \quad & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 = x_0(\varepsilon) \in X \quad s.t. \quad f(x_0) > M - \varepsilon : \end{aligned} \quad (3-26)$$

Առաջին (3-26ա) պայմանը նշանակում է, որ M թիվը $f(x)$ ֆունկցիայի վերին եզրերից մեկն է: Երկրորդ (3-26բ) պայմանի մեջ ցույց է փոխված, որ $\varepsilon > 0$ կամայական դրական թվով փոքրացրած $M - \varepsilon$ թիվն այլևս f -ի վերին եզր չէ: Այլ կերպ ասած՝ M թիվն առկա վերին եզրերից փոքրագույնն է:

$f(x)$ ֆունկցիայի **սուպրեմումը** X **բազմության վրա** f -ի վերին եզրերից փոքրագույնն է:

Սահմանում 3.16. $m \in \mathbb{R}$ թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի **ճշգրիտ ստորին եզր** կամ **ինֆիմում** X բազմության վրա. կգրենք $m = \inf_{x \in X} f(x)$, եթե

$$\begin{aligned} (u) \quad & \forall x \in X \quad f(x) \geq m, \\ (p) \quad & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 = x_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad f(x_0) < m + \varepsilon : \end{aligned} \quad (3-27)$$

Առաջին (3-27ա) պայմանը նշանակում է, որ m թիվը $f(x)$ ֆունկցիայի ստորին եզրերից մեկն է: Երկրորդ (3-27բ) պայմանը նշանակում է, որ m թիվն առկա ստորին եզրերից մեծագույնն է:

$f(x)$ ֆունկցիայի **ինֆիմումը** X **բազմության վրա** f -ի ստորին եզրերից մեծագույնն է:

Սուպրեմումը մաքսիմումի գաղափարի ընդհանրացումն է, իսկ ինֆիմումը՝ մինիմումի:

Ուշադիր ընթերցողն իհարկե կնկարի, որ այսպեղ բերված բոլոր սահմանումները և գաղափարները կրկնում կամ շար մոտ են հաջորդականությունների համար ձևակերպված նույն գաղափարներին:

Թեորեմ 3.9. (Ֆունկցիայի ճշգրիտ եզրերի գոյության մասին)

ա) Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $X \subset \mathbb{R}$ բազմության վրա սահմանափակ է վերևից, ապա գոյություն ունի վերջավոր $\sup_{x \in X} f(x)$:

բ) Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $X \subset \mathbb{R}$ բազմության վրա սահմանափակ է ներքևից, ապա գոյություն ունի վերջավոր $\inf_{x \in X} f(x)$:

Անցնենք մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանների հարցին: Եթե մոնոտոն ֆունկցիան անընդհատ է, ապա մենք գիտենք, որ անընդհատության կետում սահմանը հավասար է ֆունկցիայի արժեքին նույն կետում: Մոնոտոն ֆունկցիան կարող է լինել խզվող, օրինակ՝ մեզ ծանոթ ամբողջ մաս խզվող $f(x) = [x]$ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է ամբողջ $\mathbb{R}$ թվային առանցքի վրա: Ի՞նչ կարելի է ասել այդ դեպքում մոնոտոն ֆունկցիայի (միակողմանի) սահմանների մասին: Այդ հարցին պարասխանում է հաջորդ թեորեմը, որտեղ դիտարկվում են մոնոտոն աճող ֆունկցիաներ: Ընթերցողին առաջարկում ենք ձևակերպել թեորեմը մոնոտոն նվազող ֆունկցիաների համար:

Թեորեմ 3.10. (Մոնոտոն աճող ֆունկցիայի միակողմանի սահմանների մասին)

Եթե $f(x) \nearrow$ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է $[a, b]$ հատվածում, ապա $\forall x_0 \in (a, b)$ կետում

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x),$$

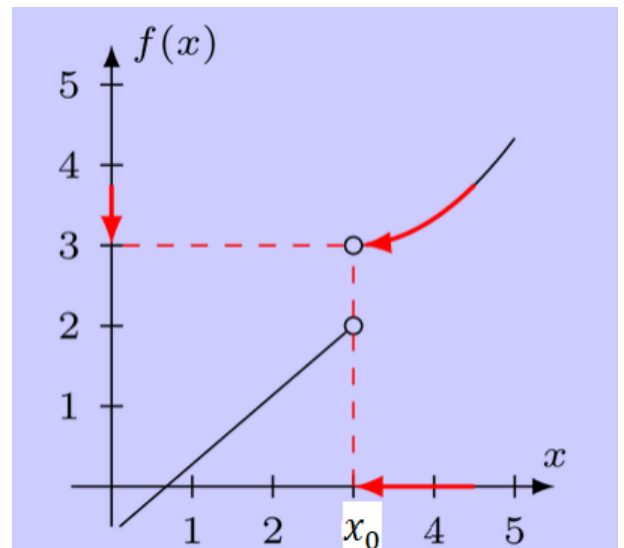
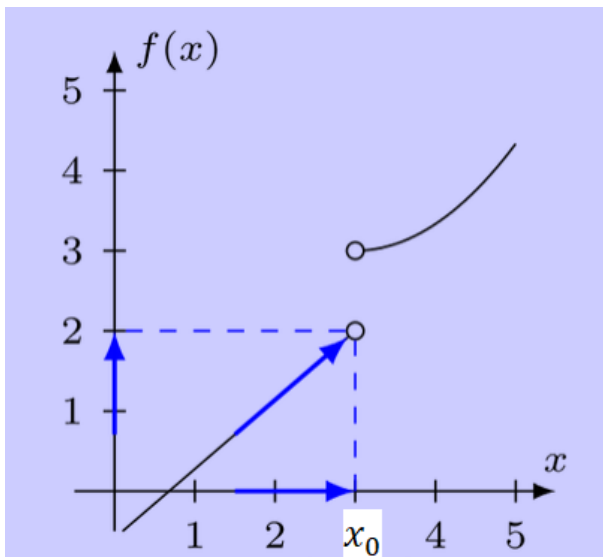
$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x),$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf_{x > a} f(x),$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \sup_{x < b} f(x) :$$

Այլ կերպ ասած՝ հատվածում մոնոտոն ֆունկցիայի բոլոր միակողմանի սահմանները գոյություն ունեն:

Ապացույց. Ապացուցենք պահանջվող չորս սահմաններից առաջինը: Մնացած երեք սահմաններն ապացուցվում են համանման եղանակով, և դրանք թողնում ենք ընթերցողին:



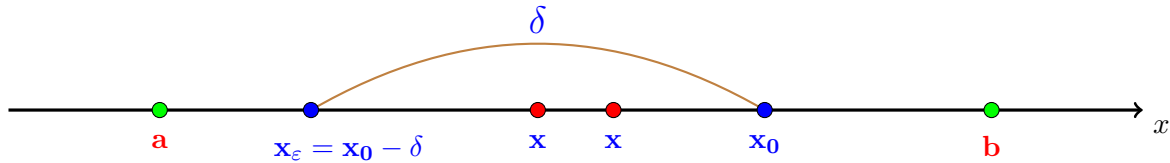
Գծագիր 3.10. Մոնոտոն աճող ֆունկցիայի միակողմանի սահմանները

Սահմաններ հետևյալ թվային բազմությունը՝ $A \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x); a < x < x_0\}$: Քանի որ $f(x) \nearrow$ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է՝ $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x < x_0$, ապա A բազմությունը սահմանափակ է վերևից: Թեորեմ 3.9-ի համաձայն՝ $\exists \sup A = \sup_{a < x < x_0} f(x) \stackrel{\text{նշ.}}{=} M$:

Մեր նպատակն է ցույց տալ, որ $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = M$: Դրա համար գրենք սուպրեմումի սահմանումը.

$$(u) \quad \forall x \in (a, x_0) \quad f(x) \leq M,$$

$$(p) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon, \quad a < x_\varepsilon < x_0 \quad s.t. \quad f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon :$$



Գծագիր 3.11. x_0 կետի ձախակողմյան δ -ըջակայքը

Նշանակենք $x_0 - x_\varepsilon \stackrel{\text{նշ.}}{=} \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \implies x_\varepsilon = x_0 - \delta$ և վերցնենք $\forall x, \quad x_\varepsilon = x_0 - \delta < x < x_0$:

Այդ դեպքում սուպրեմումի սահմանումը և f ֆունկցիայի մոնոտոն աճը միասին տալիս են

$$M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq M < M + \varepsilon \quad \forall x, \quad x_0 - \delta < x < x_0,$$

$$M - \varepsilon < f(x) < M + \varepsilon \quad \forall x, \quad x_0 - \delta < x < x_0,$$

$$|f(x) - M| < \varepsilon \quad \forall x, \quad x_0 - \delta < x < x_0, \implies \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = M = \sup_{x < x_0} f(x),$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: □

Ստորև Թեորեմ 3.12-ում կստանանք մոնոտոն ֆունկցիայի անընդհատությունը ապահովող մի պայման:

3.7 Բարդ ֆունկցիայի անընդհատությունը

Մենք արդեն գիտենք, որ չորս թվաբանական գործողությունները պահպանում են անընդհատությունը: Անընդհատության տեսակներից բնարկենք ևս մեկ մեզ հայտնի գործողություն՝ ֆունկցիաների համադրույթը կամ բարդ ֆունկցիան:

Թեորեմ 3.11. *Անընդհատ ֆունկցիաների համադրույթն անընդհատ է :*

Ապացույց. Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում՝ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, և որոշված է x_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում: Նշանակենք $y_0 = f(x_0)$: Երկրորդ $x = g(t)$ ֆունկցիան անընդհատ է t_0 կետում՝ $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = g(t_0)$, որոշված է t_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում և $x_0 = g(t_0)$:

Կազմենք բարդ ֆունկցիա, այսինքն՝ համադրությամբ.

$$\boxed{y = f(g(t)) \stackrel{\text{նշ.}}{=} h(t)}, \quad y_0 = h(t_0) = f(g(t_0)) = f(x_0) :$$

Մեր նպատակն է ապացուցել $h(t)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը t_0 կետում, այսինքն՝ $\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = h(t_0)}$:

Գրենք փոքրված անընդհատությունը ε - δ -լեզվով.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)} \iff \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x, |x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right),$$

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = g(t_0)} \implies \left(\delta_1\text{-ի համար} \quad \exists \delta = \delta(\delta_1) = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall t, |t - t_0| < \delta \implies |g(t) - g(t_0)| < \delta_1 \right. \\ \left. \text{կամ} \quad |x - x_0| < \delta_1 \right) :$$

Արդյունքում ստացանք

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall t, |t - t_0| < \delta \implies |f(g(t)) - f(g(t_0))| < \varepsilon$$

կամ $|h(t) - h(t_0)| < \varepsilon$, այսինքն՝ $\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = h(t_0)}$: □

Դիպողություն 3.1. *Բարդ ֆունկցիայի (կամ համադրության) ապացուցված անընդհատությունը բանաձևային տեսք ունի, որը, մի փոքր ձևափոխելով, կարանանք*

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t)) = f(g(t_0)) = f\left(\lim_{t \rightarrow t_0} g(t)\right)} :$$

Կարելի է եզրակացնել, որ սահմանի և անընդհատ ֆունկցիայի նշանների տեղերը կարելի է փոխել, այսինքն՝ այս կերպ սահմանային անցում կատարել:

3.8 Հակադարձ ֆունկցիայի անընդհատությունը

Մենք արդեն քննարկել ենք հակադարձ ֆունկցիայի օրինակներ և գոյության հարցը: Այժմ քննարկենք մոնոտոն և հակադարձ ֆունկցիաների անընդհատության հարցերը:

Թեորեմ 3.12. *(Մոնոտոն ֆունկցիայի անընդհատության հայտանիշ)*

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան աճող է $[a, b]$ հատվածում՝ $f(x) \nearrow$:

$f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածը արտապարկելու է $[f(a), f(b)]$ հատվածի վրա, այսինքն՝ $[f(a), f(b)]$ հատվածն f -ի արժեքների տիրույթն է, $f : [a, b] \mapsto [f(a), f(b)]$:

Այդ դեպքում $f(x) \in C[a, b]$:

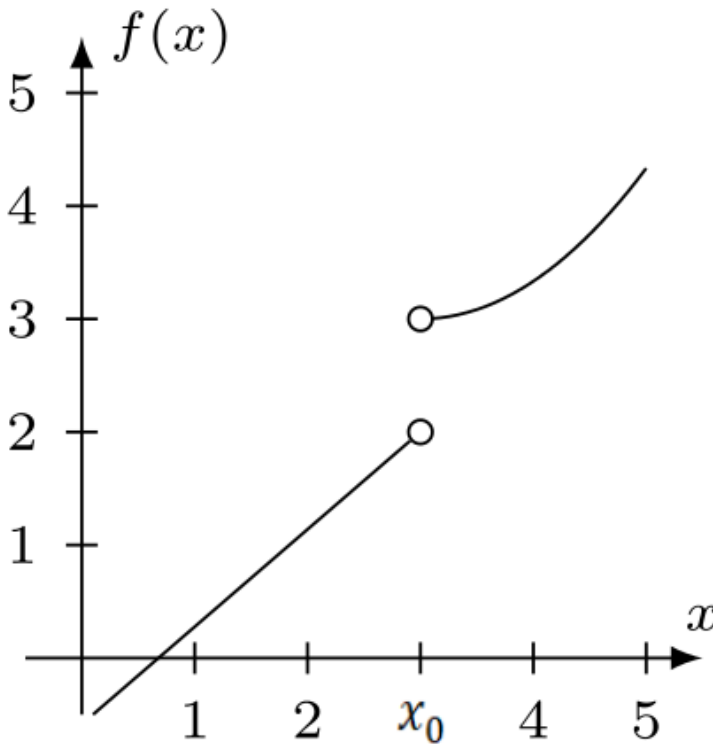
Ապացույց. Ֆիքսենք $\forall x_0 \in [a, b]$ կետ և ապացուցենք, որ $\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)}$:
 f ֆունկցիայի մոնոտոն աճման շնորհիվ

$$\forall x', x'', \quad s.t. \quad a \leq x' \leq x_0 \leq x'' \leq b \quad \implies \quad \boxed{f(x') \leq f(x_0) \leq f(x'')} : \quad (3-28)$$

Թեորեմ 3.10-ի համաձայն՝ մոնոտոն ֆունկցիան միակողմանի սահմաններ ունի ցանկացած կետում: Ներկայացնենք (3-28) կրկնակի անհավասարության մեջ կարող ենք սահմանային անցում կատարել, երբ $x' \rightarrow x_0 - 0$, և երբ $x'' \rightarrow x_0 + 0$: Աստիճան

$$\boxed{f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)} :$$

Մնում է ցույց տալ, որ $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$: Ենթադրելով հակառակը՝ $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$, ասանում ենք, որ $[f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)]$ հատվածը չի պարունակում f -ի արժեքների փիրություն:



Պատկեր 3.12. $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$ պարկերը

Իսկապես,

$$\forall x < x_0 \quad \implies \quad f(x) \nearrow f(x_0 - 0), \quad \text{երբ } x \rightarrow x_0 - 0, \quad \implies \quad \boxed{f(x) \leq f(x_0 - 0)} \quad \forall x < x_0,$$

$$\forall x > x_0 \quad \implies \quad f(x) \searrow f(x_0 + 0), \quad \text{երբ } x \rightarrow x_0 + 0, \quad \implies \quad \boxed{f(x) \geq f(x_0 + 0)} \quad \forall x > x_0 :$$

Սրացված հակասությունը հանգեցնում է $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ հավասարությանը և ավարտում ապացույցը: $\square$

Թեորեմ 3.13. (Նակադարձ ֆունկցիայի գոյության և անընդհատության մասին)

ա) Դիցուք $y = f(x) : [a, b] \mapsto Y$ ֆունկցիան խիստ աճող է $[a, b]$ հատվածում՝ $f(x) \nearrow (\text{խիստ})$:

Այդ դեպքում գոյություն ունի f -ի (միարժեք) հակադարձ ֆունկցիան, որը նույնպես խիստ աճող է

$$\exists x = f^{-1}(y) : Y \mapsto [a, b], \quad f^{-1} \nearrow (\text{խիստ}) :$$

բ) Դիցուք $y = f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան խիստ աճող է $[a, b]$ հատվածում և արտապարկերում է $[a, b]$ -ն ինչ-որ $[\alpha, \beta]$ հատվածի վրա (այսինքն՝ $[\alpha, \beta]$ հատվածն f -ի արժեքների տիրույթն է),

$$f(x) \in C[a, b], \quad f(x) \nearrow (\text{խիստ}), \quad \boxed{f : [a, b] \mapsto [\alpha, \beta]}, \quad \text{ընդ որում} \quad f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta :$$

Այդ դեպքում f -ի հակադարձ ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է և խիստ աճող.

$$\exists f^{-1}(y) : [\alpha, \beta] \mapsto [a, b], \quad f^{-1} \nearrow (\text{խիստ}), \quad f^{-1} \in C[\alpha, \beta] :$$

Ապացույց. ա) Նակադարձ ֆունկցիայի գոյությունը (և միարժեքությունը) հետևում է խիստ աճից, ինչը հանգեցնում է f ֆունկցիայի փոխմիարժեքությանը, այսինքն՝

$$\forall x \in [a, b] \quad \exists ! y \in [\alpha, \beta] \quad \text{s.t.} \quad y = f(x),$$

$$\forall y \in [\alpha, \beta] \quad \exists ! x \in [a, b] \quad \text{s.t.} \quad y = f(x) :$$

Վերցնենք $\forall y_1, y_2 \in [\alpha, \beta], y_1 < y_2$ և ցույց տանք, որ համապատասխան $x_1, x_2 \in [a, b]$ կետերը բավարարում են $x_1 < x_2$ անհավասարությունը: Իսկապես, հակառակ ենթադրությունը՝ $x_1 \geq x_2$, ըստ f -ի աճման պայմանի, կբերի $y_1 \geq y_2$ հակասության: Այսպիսով f^{-1} հակադարձ ֆունկցիան նույնպես խիստ աճող է՝ $f^{-1} \nearrow (\text{խիստ})$:

բ) Այժմ լրացուցիչ ենթադրենք, որ f -ն անընդհատ է՝ $f \in C[a, b]$ և $f : [a, b] \mapsto [\alpha, \beta]$:

Ըստ ա) կետի՝ հակադարձ ֆունկցիան խիստ աճող է և արտապարկերում է $[\alpha, \beta]$ հատվածը $[a, b]$ հատվածի վրա, որը նրա արժեքների տիրույթն է.

$$\exists f^{-1}(y) : [\alpha, \beta] \mapsto [a, b], \quad f^{-1} \nearrow (\text{խիստ}) :$$

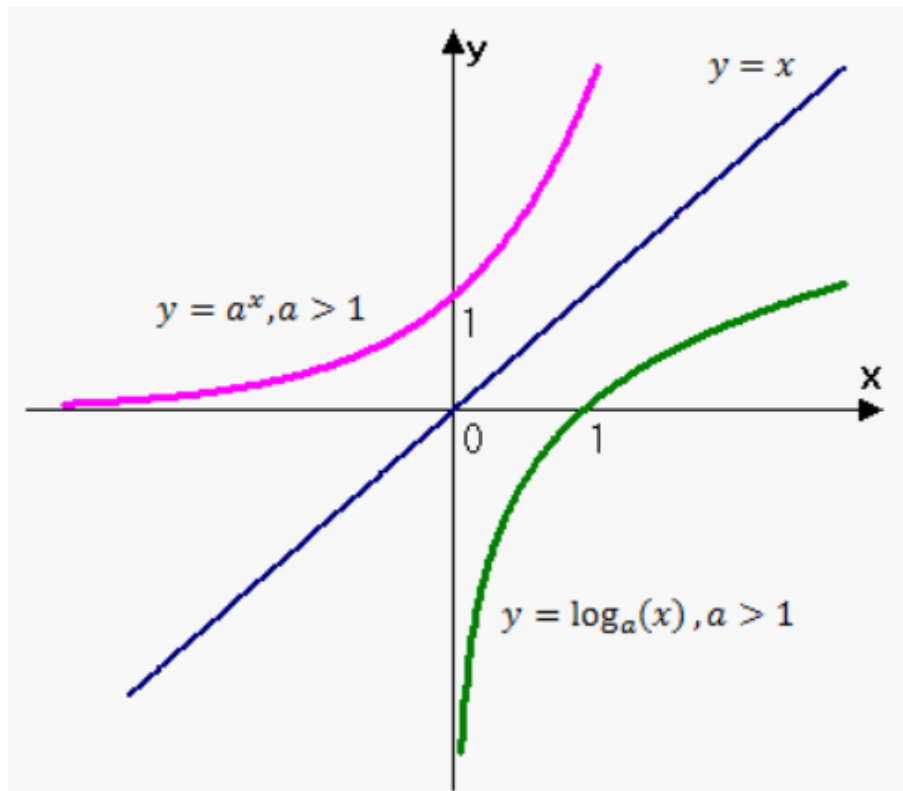
Թեորեմ 3.12-ի համաձայն՝ $f^{-1} \in C[\alpha, \beta]$:

□

Դիպողություն 3.2. Թեորեմներ 3.12-ը և 3.13-ը ձևակերպված են մոնոտոն աճող ֆունկցիաների համար, թեև այդ թեորեմները ճիշտ են նաև մոնոտոն նվազող ֆունկցիաների համար սկնհայտ ճշգրտմաներով: Ապացույցները կարարվում են նույն կերպ կամ f -ի փոխարեն դիտարկելով $-f$ ֆունկցիան:

Դիպողություն 3.3. Թեորեմ 3.13 բ)-ում այն ենթադրությունը, որ f -ի արժեքների տիրույթը հատված է իրականում ավելորդ է, քանի որ ֆունկցիայի անընդհատությունը դա ապահովում է: Անընդհատ

Ֆունկցիաների այդ հարկությունը (Բոլցանո-Կոշու 2-րդ թեորեմն է) մենք կապացուցենք ավելի ուշ (դեմս թեորեմ 3.17):



Գծագիր 3.13. Անընդհար և խիստ աճող փոխհակադարձ ֆունկցիաներ

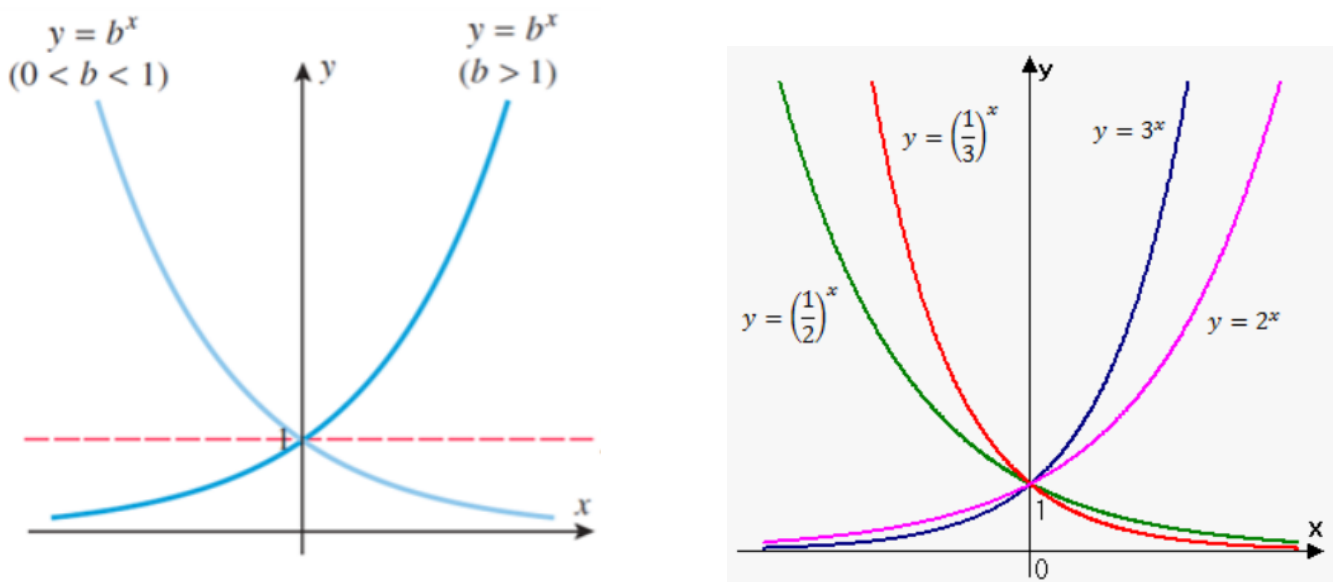
3.9 Տարրական ֆունկցիաների անընդհատությունը

Սահմանում 3.17. *Տարրական են կոչվում հետևյալ ֆունկցիաները.*

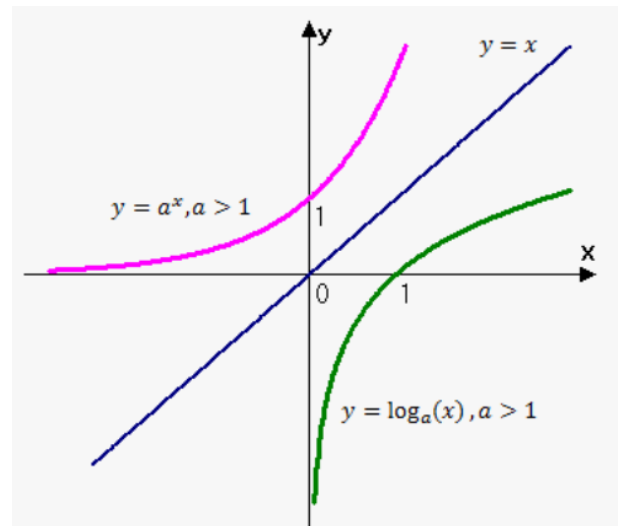
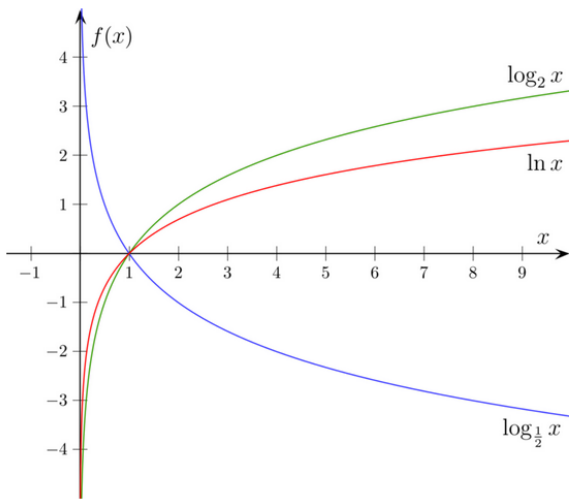
- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. <i>աստիճանային,</i> | $f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$ |
| 2. <i>ցուցային,</i> | $f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1),$ |
| 3. <i>լոգարիթմական,</i> | $f(x) = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1),$ |
| 4. <i>եռանկյունաչափական,</i> | $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x,$ |
| 5. <i>հակադարձ եռանկյունաչափական,</i> | $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x,$ |

ինչպես նաև բոլոր այն ֆունկցիաները, որոնք կազմված են թվարկված ֆունկցիաներից չորս թվաքանակյա գործողությունների և համադրույթի միջոցով, ընդ որում՝ այդ գործողությունները կիրառված են վերջավոր թվով անգամ և առանց սահմանային անցման:

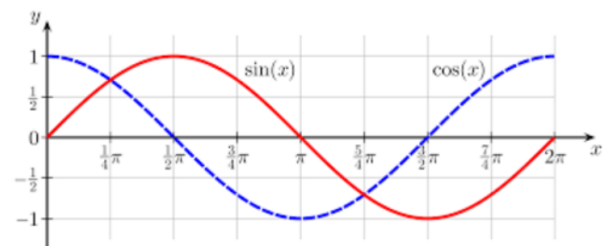
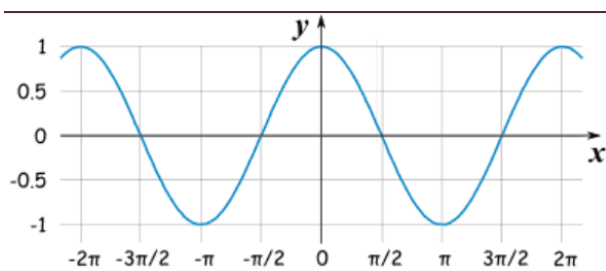
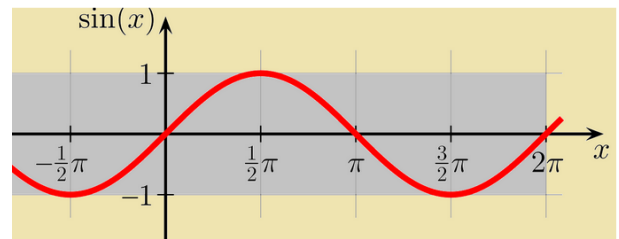
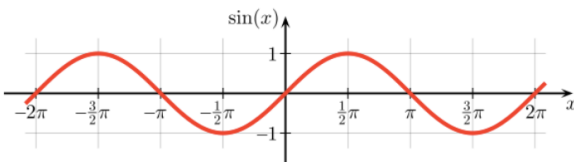
Ավագ դպրոցի դասընթացից ուսանողը ծանոթ է 1–5 հիմնական տարրական ֆունկցիաների սահմանումներին և հիմնական հատկություններին: Դրանք հիշելու և յուրացնելու, թերևս, լավագույն եղանակն է գրաֆիկական մոտեցումը: Հիմնական տարրական ֆունկցիաների գրաֆիկներն ինքնին կարևոր են, բայց նաև կիրառական իմաստով շատ օգտակար: Ստորև բերենք դրանց մի քանի գրաֆիկների նմուշներ:



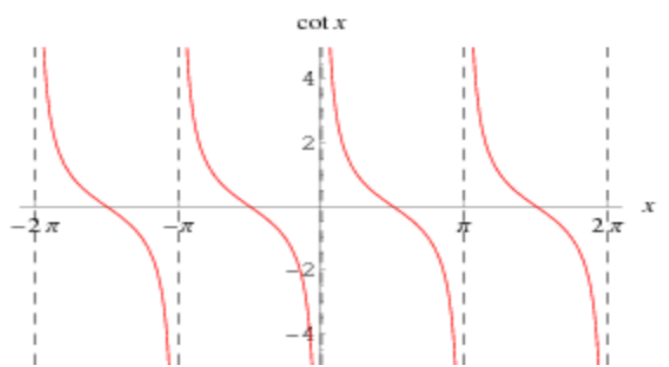
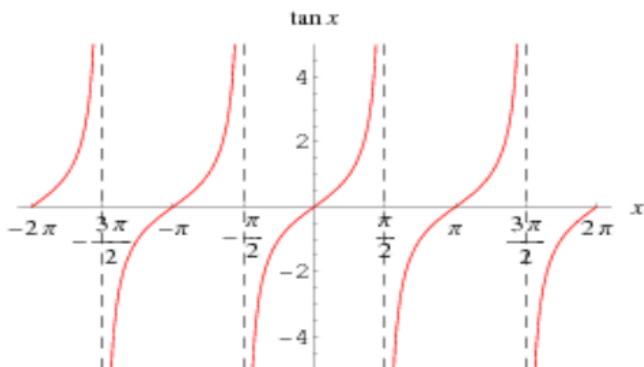
Գծագիր 3.14. Ծուցային ֆունկցիաների գրաֆիկներ



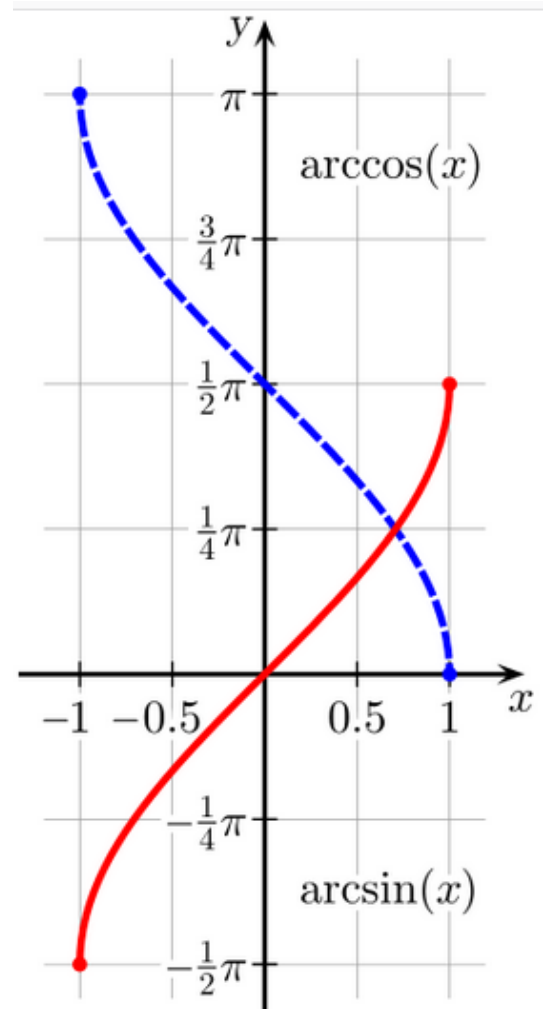
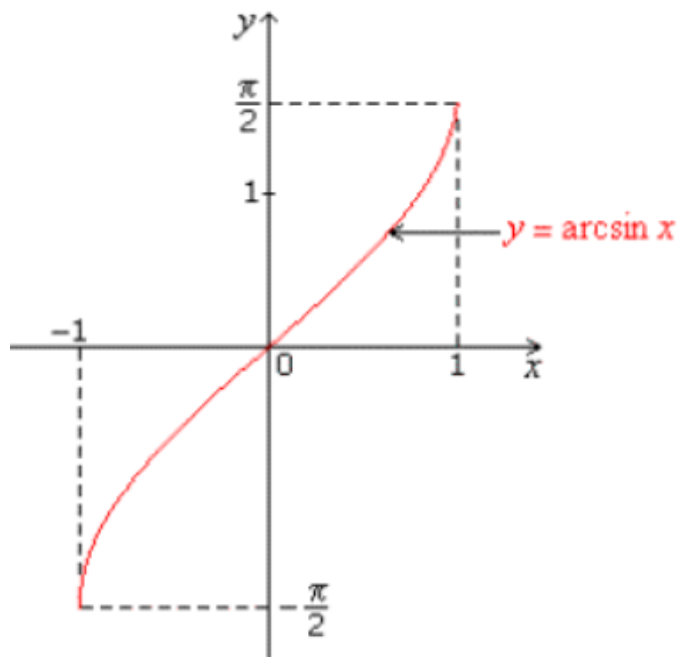
Գծագիր 3.15. Լոգարիթմական ֆունկցիաների գրաֆիկներ



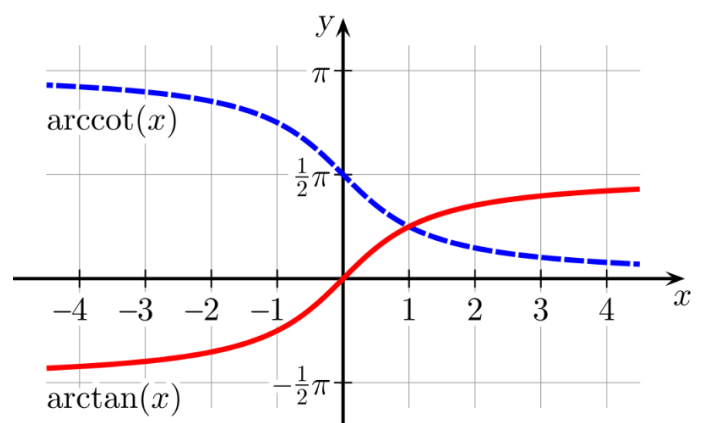
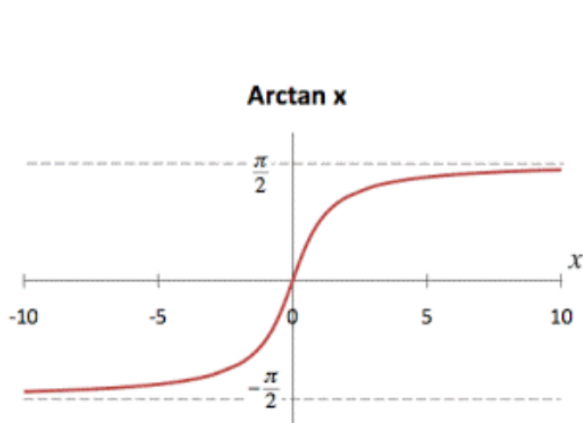
Գծագիր 3.16. Մինուս և կոսինուս ֆունկցիաների գրաֆիկները



Գծագիր 3.17. Տանգենս և կոտանգենս ֆունկցիաների գրաֆիկները



Գծագիր 3.18. Արկսինուս և արկկոսինուս ֆունկցիաների գրաֆիկները



Գծագիր 3.19. Արկտանգենս և արկկոտանգենս ֆունկցիաների գրաֆիկները

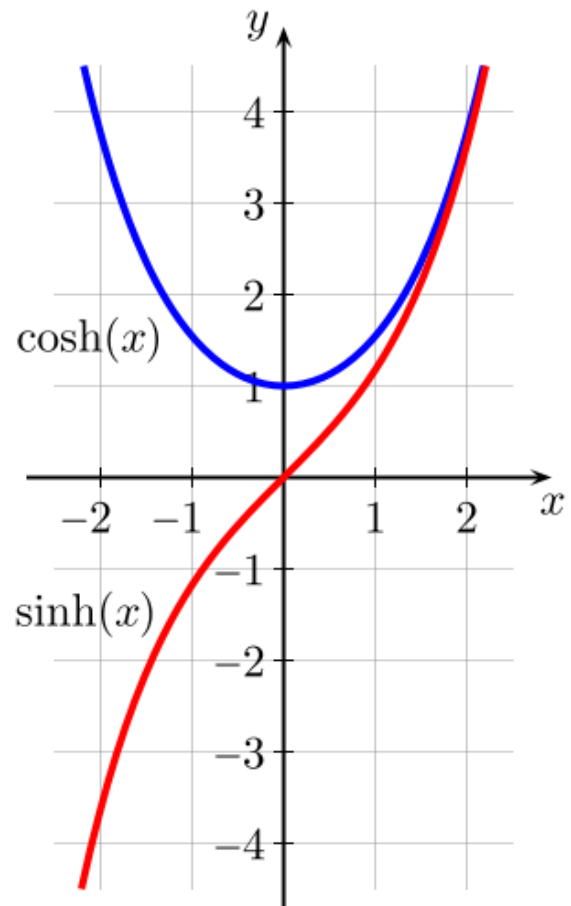
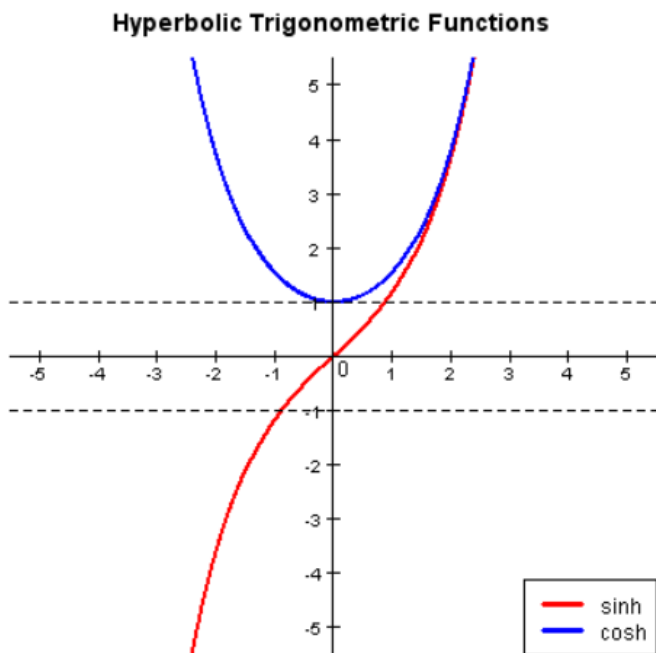
Նիմնական փարրական ֆունկցիաների ցուցակին ավելացնենք փարրական ֆունկցիաների ևս մեկ խումբ, այդպես կոչված՝ **հիպերբոլական ֆունկցիաները**՝ հիպերբոլական սինուս, հիպերբոլական կոսինուս, հիպերբոլական փանգենս, հիպերբոլական կոփանգենս ֆունկցիաները.

$$\operatorname{sh} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{ch} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{cth} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}:$$



Գծագիր 3.20. Նիպերբոլական սինուսի և հիպերբոլական կոսինուսի գրաֆիկները

Առաջին հերթին մեզ հետաքրքրում է փարրական ֆունկցիաների անընդհատության հարցը:

Թեորեմ 3.14. *Բոլոր փարրական ֆունկցիաներն անընդհատ են իրենց որոշման տիրույթներում:*

Այս թեորեմը կապացուցենք քայլ առ քայլ՝ երբեմն շեղվելով, ապացուցելով նաև հարակից արդյունքներ:

Սկսենք ցուցաբերել ֆունկցիայի անընդհատության հարցից: Սկզբում ապացուցենք հետևյալ մասնավոր սահմանը.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1} \quad (a > 1) : \quad (3-29)$$

Նաջորդականությունների տեսությունից մեզ հայտնի է (3-29)-ի էլ ավելի մասնավոր դեպքը՝ $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1}$, որը հեշտությամբ ապացուցվում է սահմանի սահմանման միջոցով:

Ապացուցելու համար (3-29) սահմանը նախ ենթադրենք $x > 0$, այսինքն՝ $x \rightarrow +0$: Կարարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $\boxed{t \equiv \frac{1}{x}}$ և նկատենք, որ $(x \rightarrow +0) \iff (t \rightarrow +\infty)$: Այդ դեպքում

$$\lim_{x \rightarrow +0} a^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} a^{1/t} :$$

Օգտվենք t -ի ամբողջ մասից և գնահատենք՝

$$[t] \leq t < [t] + 1 \quad ([t] \in \mathbb{N}) \quad \implies \quad \boxed{(t \rightarrow +\infty) \iff ([t] \rightarrow +\infty)} \quad \text{և} \quad \boxed{1 < a^{1/t} \leq a^{1/[t]}} :$$

Վերջին կրկնակի անհավասարության մեջ կարարենք սահմանային անցում՝ ձգտեցնելով $t \rightarrow +\infty$, և կիրառենք ոսփականների կանոնը: Քանի որ $\lim_{t \rightarrow +\infty} a^{1/[t]} = 1$ որպես հաջորդականության սահման, արդյունքում ստանում ենք

$$\lim_{x \rightarrow +0} a^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} a^{1/t} = 1 :$$

Ֆունկցիայի սահմանից հաջորդականության սահմանին անցնելու այս եղանակը հետագայում ևս կիրառելու ենք:

Այժմ ենթադրենք $x < 0$, այսինքն՝ $x \rightarrow -0$: Այդ դեպքում ավելի դեպքը բերվում է նախորդին, եթե կիրառենք $\boxed{y \equiv \frac{-1}{x}}$ փոխարինումը. $(x \rightarrow -0) \iff (y \rightarrow +\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow -0} a^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} a^{-1/y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^{1/y}} = 1 :$$

Աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանները միասին փալիս են (3-29) սահմանը:

Ավելին, $a > 1$ սահմանափակումը (3-29)-ում կարելի է հանել: Իսկապես, եթե $0 < a < 1$, ապա

$$\frac{1}{a} > 1 \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{1} = 1 :$$

Այսպիսով,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1} \quad (a > 0, \quad a \neq 1), \quad (3-30)$$

ինչը նշանակում է, որ ցուցային ֆունկցիան անընդհար է $x = 0$ կետում: Ցուցային ֆունկցիայի անընդհարությունը մնացած կետերում անմիջապես սրացվում է (3-30)-ից.

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x-x_0} a^{x_0} = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} :$$

Այսպիսով, ցուցային ֆունկցիան անընդհար է իր ամբողջ որոշման տիրույթում. $\boxed{a^x \in C(\mathbb{R})}$:

Լոգարիթմական ֆունկցիան՝ որպես ցուցային ֆունկցիայի հակադարձ, նույնպես անընդհար է իր որոշման տիրույթում. $\boxed{\log_a x \in C(0, +\infty)}$ ($a > 0, \quad a \neq 1$):

Մենք արդեն ապացուցել էինք $y = x^\alpha$ աստիճանային ֆունկցիայի անընդհարությունը, երբ ցուցիչն ամբողջ թիվ է՝ $\alpha = m \in \mathbb{Z}$: Այժմ, վերցնելով կամայական $\alpha \in \mathbb{R}$ ցուցիչ, ապացուցենք աստիճանային ֆունկցիայի անընդհարությունը: Բավական է դիտարկել $x_0 > 0$ կետերը: Այդ դեպքում պահանջվող անընդհարությունը բխում է ցուցային և լոգարիթմական ֆունկցիաների, ինչպես նաև բարդ ֆունկցիայի անընդհարությունից.

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0 \right) \implies \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \ln x = \alpha \ln x_0 \right) \implies \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x^\alpha = \ln x_0^\alpha \right) \implies \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \right) :$$

3.10 Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների անընդհարությունը և առաջին նշանավոր սահմանը

Սկսենք չափազանց օգտակար որոշ անհավասարություններից:

Լեմմա 3.1. *Ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները՝*

$$\boxed{\sin x < x < \operatorname{tg} x} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right), \quad (3-31)$$

$$\boxed{|\sin x| \leq |x|} \quad (x \in \mathbb{R}) : \quad (3-32)$$

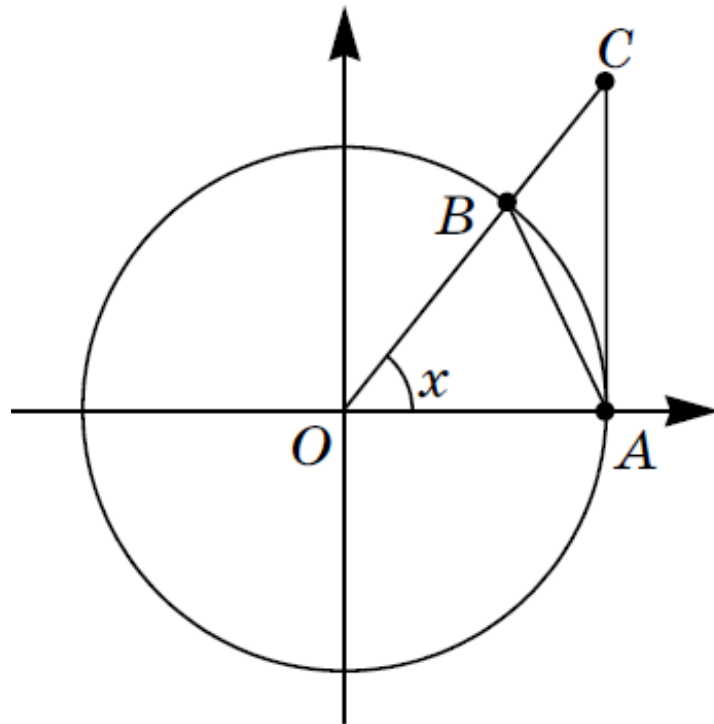
Ապացույց. Կիրառենք երկրաչափական մոտեցում և դիտարկենք $R > 0$ շառավղով շրջանագիծ: Վերցնենք կենտրոնային անկյուն x ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) ռադիան չափով, նշանակենք զազաթներն ինչպես **գծագիր** 3.21-ում:

Ըստ մեր կառուցածի $\triangle AOC$ -ն ուղղանկյուն եռանկյուն է: Նամենարենք երկու եռանկյունների և մեկ սեկտորի մակերեսները.

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{սեկվոր } AOB} < S_{\triangle AOC},$$

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{\pi R^2}{2\pi} x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x,$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right):$$



Գծագիր 3.21. $\sin x$, x , $\operatorname{tg} x$ արժեքների համեմատումը

Ապացուցված է (3-31) անհավասարությունը: Նաջորդը՝ եթե $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, ապա $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, և ըստ (3-31)-ի՝

$$\sin(-x) < -x \quad \implies \quad |\sin x| < |x| \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right) \quad \implies \quad |\sin x| \leq |x| \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ինչն ավարտեց ապացույցը: □

Այժմ հաջորդաբար ապացուցենք եռանկյունաչափական ֆունկցիաների անընդհատությունը: Սկսենք կոսինուս ֆունկցիայից, վերցնենք կամայական $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ կետ և այդ կետում ստուգենք անընդհատության սահմանումը ε - δ -լեզվով,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon :$$

Ստուգենք վերջին անհավասարությունը՝ կիրառելով եռանկյունաչափական բանաձևեր և (3-32) գնահատականը.

$$|\cos x - \cos x_0| = \left| 2 \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq \left| 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-x_0}{2} \right| = |x-x_0| < \delta = \varepsilon :$$

Այսպես վերջում մենք ինքներս ենք ընտրում $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon$ կամ $\delta \leq \varepsilon$, ինչը բավարար է բերված ε - δ -ձևակերպումը հաստատելու համար:

Այսպիսով, կոսինուս ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա՝ $\boxed{\cos x \in C(\mathbb{R})}$:

Սինուս ֆունկցիայի անընդհատությունը կարելի է ստուգել ճիշտ նույն եղանակով կամ արտահայտելով $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ և կիրառելով բարդ ֆունկցիայի անընդհատության մասին թեորեմը (Թեորեմ 3.11)՝ $\boxed{\sin x \in C(\mathbb{R})}$:

Մեկ այլ Թեորեմ 3.8-ի համաձայն՝ թվաբանական գործողությունները պահպանում են անընդհատությունը, ուրեմն $\boxed{\operatorname{tg} x \in C(D_1)}$ և $\boxed{\operatorname{ctg} x \in C(D_2)}$, որտեղ D_1 -ով և D_2 -ով նշանակել ենք համապատասխան ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

Նակադարձ ֆունկցիայի անընդհատության մասին թեորեմը (Թեորեմ 3.13) ապահովում է չորս հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների անընդհատությունը համապատասխան որոշման տիրույթներում.

$$\arcsin x \in C[-1, 1], \quad \arccos x \in C[-1, 1], \quad \operatorname{arctg} x \in C(\mathbb{R}), \quad \operatorname{arccotg} x \in C(\mathbb{R}) :$$

Սրանով փաստորեն ավարտեցինք Թեորեմ 3.14-ի ապացույցը: $\square$

Վերադառնանք Լեմմա 3.1-ի անհավասարություններին և որպես հետևանք դուրս բերենք լրացուցիչ անհավասարություններ:

Նեփևանք 3.2.

$$\boxed{\operatorname{arctg} x < x} \quad (x > 0), \quad (3-33)$$

$$\boxed{|\operatorname{arctg} x| \leq |x|} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (3-34)$$

$$\boxed{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad x \neq 0\right) : \quad (3-35)$$

Ապացույց. Արկտանգենս ֆունկցիայով (3-33)-(3-34) անհավասարություններն ամփոփապես հետևում են $x < \operatorname{tg} x$ անհավասարությունից, եթե նշանակենք $t = \operatorname{tg} x$ ($t \in \mathbb{R}$) և եթե օգտվենք $\operatorname{arctg} x$ ֆունկցիայի կենսությունից: Վերջին (3-35) անհավասարությունները բխում են (3-31)-ից, իսկապես՝

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(\text{եթե } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right) :$$

Եթե $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, ապա $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, և վերստին ստանում ենք նույն (3-35) անհավասարությունները: $\square$

Պնդում 3.1. (1-ին նշանավոր սահմանը)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 : \quad (3-36)$$

Ապացույց. Բավական է (3-35) անհավասարությունների մեջ սահմանային անցում կատարել, երբ $x \rightarrow 0$, օգտվել կոսինուսի անընդհատությունից՝ $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, և ուսրիկանների կանոնից.

$$\begin{array}{ccc} \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \\ \searrow \quad \downarrow \quad \swarrow & & \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad (\text{երբ } x \rightarrow 0)$$

□

3.11 Այլ նշանավոր սահմաններ և հեղանակներ

Նաջորդականությունների տեսությունից մեզ հայտնի է կարևոր

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (3-37)$$

սահմանը: Այժմ կապացուցենք նույնանման ֆունկցիոնալ սահման:

Պնդում 3.2. (2-րդ նշանավոր սահմանը)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e : \quad (3-38)$$

Ապացույց. Ապացույցը հիմնված է այն մոտեցման վրա, որ (3-38) ֆունկցիոնալ սահմանը հնարավոր է հանգեցնել հաջորդականության (3-37) սահմանին:

1-ին դեպք. $x > 0$, այսինքն՝ $x \rightarrow +\infty$: Քանի որ $[x] \leq x < [x] + 1$, կարող ենք ֆունկցիան գնահատել և՛ վերևից, և՛ ներքևից.

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1} : \quad (3-39)$$

Ակնհայտ է, որ $[x] \in \mathbb{N}$ և $(x \rightarrow +\infty) \iff ([x] \rightarrow +\infty)$: Երկկողմանի (3-39) անհավասարության ձախ և աջ կողմերում փաստորեն ունենք հաջորդականություններ ($[x] = n$ -ի նկատմամբ), որոնց սահմանը մեզ

հայրնի է. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$: Ձգրեցնելով $x \rightarrow +\infty$ ՝ կիրառենք ոսպիկանների կանոնը (3-39)-ում և կստանանք $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$:

2-րդ դեպք. $x < 0$, այսինքն՝ $x \rightarrow -\infty$: Նշանակենք $\boxed{t = -x}$, $(x \rightarrow -\infty) \iff (t \rightarrow +\infty)$ և օգտվենք նախորդ դեպքից.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = e : \end{aligned}$$

Միասին երկու դեպքերը քաղիս են (3-38) սահմաններից առաջինը:

(3-38) սահմաններից երկրորդը ստացվում է առաջինից $t = \frac{1}{x}$ փոխարինումով: □

Ապացուցված (3-36), (3-38) նշանավոր սահմանները հանգում են այլ՝ ոչ պակաս կարևոր սահմանների:

Պնդում 3.3. (Եվս մի քանի նշանավոր սահմաններ) Եթե $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ապա

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}}, \quad \text{մասնավորապես,} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}, \quad (3-40)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}, \quad \text{մասնավորապես,} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}, \quad (3-41)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha}, \quad (3-42)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}} : \quad (3-43)$$

Ապացույց. Օգտվելու ենք նախորդ (3-36), (3-38) սահմաններից և ֆունկցիայի սահմանի հափկություններից, մասնավորապես բարդ ֆունկցիայի անընդհանրությունից.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a} :$$

Երկրորդ (3-41) սահմանը հաշվելու համար փոփոխականի փոխարինում կատարենք և օգտվենք (3-40)-ից.

$$\boxed{t \stackrel{\text{նշ.}}{=} a^x - 1}, \quad \boxed{x = \log_a(1+t)}, \quad (x \rightarrow 0) \iff (t \rightarrow 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \ln a :$$

Նաջորդ (3-42) սահմանը հաշվելու համար օգտվենք (3-40), (3-41)-ից, ինչպես նաև $\boxed{b = e^{\ln b}}$ ($b > 0$)

հիմնական լոգարիթմական նույնությունից.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = 1 \cdot \alpha = \alpha :$$

Վերջին (3-43) սահմանը (3-36)-ի անմիջական հեղանգն է.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} :$$

□

Նիշենք բարձր կարգի անվերջ փոքրերի $o(f) = f \cdot o(1)$ բավականին օգտակար գրելաձևը և ներկայացնենք նշանավոր սահմաններն այդ կերպ:

Պնդում 3.4. (Նշանավոր սահմաններն ասիմպտոտիկական բանաձևերով)

Ճիշտ են հետևյալ ասիմպտոտիկական բանաձևերը՝

$$\sin x = x + o(x), \quad \text{երբ } x \rightarrow 0, \quad (3-44)$$

$$\ln(1+x) = x + o(x), \quad \text{երբ } x \rightarrow 0, \quad (3-45)$$

$$e^x = 1 + x + o(x), \quad \text{երբ } x \rightarrow 0, \quad (3-46)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), \quad \text{երբ } x \rightarrow 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3-47)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \text{երբ } x \rightarrow 0 : \quad (3-48)$$

Ասիմպտոտիկական բանաձևերը հիմնավորելու համար բավական է գրել համապատասխան նշանավոր սահմանը և օգտագործել o -փոքր գրելաձևը, օրինակ՝

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\sin x}{x} = 1 + o(1) \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x = x + x \cdot o(1) = x + o(x), \quad \text{երբ } x \rightarrow 0 :$$

Նիշենք մեկ այլ չափազանց օգտակար հասկացություն՝ ֆունկցիաների համարժեքությունը (տվյալ կետում).

$$\boxed{f(x) \sim g(x), \quad \text{երբ } x \rightarrow a,} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1} : \quad \text{Նշանավոր սահմանները կարելի է ներկայացնել նաև ֆունկցիաների համարժեքության տեսքով:}$$

Պնդում 3.5. (Նշանավոր սահմանները համարժեքության տեսքով)

Ճիշտ են համարժեքության հետևյալ բանաձևերը

$$\sin x \sim x, \quad \text{երբ } x \rightarrow 0, \quad (3-49)$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad \text{երբ } x \rightarrow 0, \quad (3-50)$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad \text{երբ } x \rightarrow 0, \quad (3-51)$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad \text{երբ } x \rightarrow 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3-52)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \text{երբ } x \rightarrow 0 : \quad (3-53)$$

Որպես անմիջական հետևանք կարելի է ևս մի քանի համարժեքության բանաձևեր ավելացնել.

$$\arcsin x \sim x, \quad \text{երբ } x \rightarrow 0, \quad (3-54)$$

$$\operatorname{tg} x \sim x, \quad \text{երբ } x \rightarrow 0, \quad (3-55)$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x, \quad \text{երբ } x \rightarrow 0, \quad (3-56)$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}, \quad \text{երբ } x \rightarrow 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad (3-57)$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad \text{երբ } x \rightarrow 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1 : \quad (3-58)$$

Բերված համարժեքությունները շատ օգտակար են սահմաններ հաշվելիս: Սահման հաշվելիս ամեն մի **արտադրիչ** կարելի է փոխարինել փոքր ֆունկցիայի համարժեքով: Բերենք պարզ օրինակ:

Օրինակ 3.16. *Նաշվենք հետևյալ սահմանը՝* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = ?$

Տարբեր եղանակներից ընտրենք այնպիսին, որը կիրառում է համարժեքության բանաձևերը.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^2/2}{x^3} = \frac{1}{2} :$$

Այսպես $\sin x$ արտադրիչը փոխարինեցինք x -ով, և $(1 - \cos x)$ արտադրիչը՝ $x^2/2$ -ով:

Բացարձակապես սխալ կլիներ, եթե համարժեքության բանաձևերով փոխարինեինք **գումարելին**, օրինակ՝

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &\stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &\stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \dots = \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &\stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \dots = \frac{1}{6} \end{aligned} \right\} \quad \text{Միսալ է}$$

Ամփոփենք միասնական աղյուսակով բոլոր նշանավոր սահմանները և նրանց համարժեք բանաձևերը:

Նաջորդականությունների նշանավոր սահմաններ

- | | | | |
|----|--|--|---|
| 1. | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a^m n}{n^p} = 0$ | $p, a > 0, \quad a \neq 1, \quad m \in \mathbb{R},$ |
| 2. | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b^n} = 0$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{b^n} = 0$ | $b > 1, \quad p \in \mathbb{R},$ |
| 3. | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!} = 0$ | | $b > 1,$ |
| 4. | $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ | $a > 0,$ |
| 5. | $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ | |
| 6. | $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ | | |

$$\log_b n \ll n^p \ll b^n \ll n! \ll n^n, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty, \quad b > 1, \quad p > 0 :$$

Այսպիսով $x_n \ll y_n$ առնչությունը նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$, այսինքն՝ $x_n = o(y_n)$, երբ $n \rightarrow \infty$:

Ֆունկցիաների նշանավոր սահմաններ

- | | | | |
|----|--|---|--|
| 1. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ | |
| 2. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ | $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$ | |
| 3. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$ | $a > 0, \quad a \neq 1,$ |
| 4. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ | $a > 0, \quad a \neq 1,$ |
| 5. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ | | $\alpha \in \mathbb{R},$ |
| 6. | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^m x}{x^p} = 0$ | $p, a > 0, \quad a \neq 1, \quad m \in \mathbb{R},$ |
| 7. | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{b^x} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{b^x} = 0$ | $b > 1, \quad p \in \mathbb{R},$ |
| 8. | $\lim_{x \rightarrow +0} x^p \ln x = 0$ | $\lim_{x \rightarrow +0} x^p \log_a^m x = 0$ | $p, a > 0, \quad a \neq 1, \quad m \in \mathbb{R} :$ |

Ասիմպտոտիկական բանաձևեր

1. $\sin x = x + o(x),$ երբ $x \rightarrow 0,$
2. $\ln(1+x) = x + o(x),$ երբ $x \rightarrow 0,$
3. $e^x = 1 + x + o(x),$ երբ $x \rightarrow 0,$
4. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x),$ երբ $x \rightarrow 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$
5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$ երբ $x \rightarrow 0 :$

Նամարժեքության բանաձևեր

1. $\sin x \sim x,$ երբ $x \rightarrow 0,$
2. $\ln(1+x) \sim x,$ երբ $x \rightarrow 0,$
3. $e^x - 1 \sim x,$ երբ $x \rightarrow 0,$
4. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x,$ երբ $x \rightarrow 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},$ երբ $x \rightarrow 0,$
6. $\arcsin x \sim x,$ երբ $x \rightarrow 0,$
7. $\operatorname{sh} x \sim x,$ երբ $x \rightarrow 0,$
8. $\operatorname{tg} x \sim x,$ երբ $x \rightarrow 0,$
9. $\operatorname{arctg} x \sim x,$ երբ $x \rightarrow 0,$
10. $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a},$ երբ $x \rightarrow 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$
11. $a^x - 1 \sim x \ln a,$ երբ $x \rightarrow 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1 :$

3.12 Ֆունկցիայի սահմանի փոփոխական մեկ կիրառում:

Պարզ, բարդ և անընդհատ փոփոխների բանաձևերը

Կարճ ներկայացնենք ֆունկցիայի սահմանի փոփոխական կիրառություններից մեկը:

Կարարենք հետևյալ նշանակումները.

$\boxed{P}$ սկզբնական գումարն է, դրամագլուխը, ներդրումը, վարկը կամ ավանդը, Principal (Present) Value:

Ենթադրենք P -ն սկզբնական գումարն է, որն ինչ-որ մեկը պարտավորվում է որոշակի փոփոխով ներդնել ինչ-որ գործի մեջ կամ որպես ավանդ դնել, անգլերենով՝ Principal Value;

$\boxed{r}$ փարեկան փոփոխադրույթն է (ոչ թե փոփոխ է, այլ փոփոխի մեկ հարյուրերորդ մասը, ինչն էլ հենց օգտագործվում է հաշվարկներում), $r = \frac{i\%}{100\%}$, $0 < r < 1$, անգլերենով՝ Interest Rate;

$\boxed{t}$ փարիների քանակը, որոնց ընթացքում սկզբնական գումարը ներդրվելու է, այսինքն փվյալ ֆինանսական գործողության ժամկետը;

(Ներդրումը կարող է իրականացվել փարիներ, բայց ամեն դեպքում փոփոխադրույթը փարեկան է հաշվարկվում:)

$\boxed{B = B(t)}$ t փարի անց սպասվելի (ակնկալվող, ապագա) արժեքը, բալանսը:

Սկզբնական գումարը կարող է ներդրվել, և փոփոխագումարները՝ հաշվարկվել մի քանի փարեր սկզբունքներով: Զննարկենք փոփոխագումարների հաշվարկի երեք հնարավոր սկզբունք: Առաջինը՝ **պարզ փոփոխների** սկզբունքը կամ սխեման: Այն է՝ փոփոխը, փոփոխադրույթը ֆիքսված է, և ամեն փարի հաշվարկը կատարվում է նույն փոփոխով սկզբնական նույն P գումարից: Տվյալ P դրամ սկզբնական գումարը (ավանդը կամ ներդրումը) t փարի անց կաճի և կկազմի

$$B = P + \underbrace{rP + rP + \dots + rP}_{t \text{ անգամ}} = P + trP = P(1 + rt) \quad \text{դրամ:}$$

Այսպիսով՝

Պարզ փոփոխների բանաձևը

Եթե P գումարն ավանդ է դրված պարզ փոփոխների սխեմայով՝

փարեկան r փոփոխադրույթով, ապա t փարի հետո սպասվելի արժեքը կկազմի

$$\boxed{B = B(t) = P(1 + rt)} :$$

Այժմ քննարկենք փոփոխի հաշվարկման երկրորդ՝ **բարդ փոփոխների** սխեման:

Նախորդ նշանակումները պահպանենք: Տարեկան r փոփոխադրույթը դարձյալ ֆիքսված է, սակայն փոխում ենք ներդրման սկզբունքը. ամեն հաջորդ ժամանակահատվածում փոփոխագումարը կուտակվում է սկզբնական գումարի վրա, ասում են՝ **բարդացում** է կատարվում:

Պարկերացնենք, մեր ներդրումից մեկ փարի անց մենք հեղ ենք ստանում մեր գումարը վաստակած փոկոսների հեղ միասին. $P_1 = P(1 + r) > P$ (ինչպես պարզ փոկոսների դեպքում էր): Եթե մենք ցանկանում ենք ավելին վաստակել, ապա ստացած P_1 գումարը կարող ենք էլի ներդնել նույն պայմաններով, նույն փարեկան փոկոսադրույքով: Բայց մի բան փոխվեց: Ներդրվող մեր նոր P_1 գումարը սկզբնական գումարից ավելի մեծ է՝ $P_1 > P$: Ներկաբար, նույն փոկոսով ներդնելով՝ աճը կլինի ավելի մեծ, քան պարզ փոկոսների դեպքում էր՝ $\Delta P_1 = P_1 r > P r$:

Ուրեմն 2-րդ փարվա ավարտին մեր սպասվելի գումարը կլինի $P_2 = P_1 (1 + r) = P (1 + r)^2 > P (1 + 2r)$: Սա է բարդ փոկոսների սխեման: Ինչպես փեսանք, այս բանաձևը ներդրողի համար ավելի շահավետ է, քան պարզ փոկոսների բանաձևը: Մենք մեր վաստակած P_1 գումարը դարձյալ ներդրեցինք նույն փոկոսով, փաստորեն վերահաշվարկ կատարեցինք, կամ բարդացում (կապիտալացում) կատարվեց, այսինքն՝ փոկոսագումարները մեր հաշվին փոխանցվեցին: Այսպիսի վերահաշվարկ կամ բարդացում կարելի է կատարել ոչ թե ամեն փարի, այլ ամեն կես փարին՝ փարվա ընթացքում 2 անգամ ($n = 2$): Դա ավելի շահավետ է ներդրողի համար, քան եթե վերահաշվարկ կատարեինք ամեն փարի: Ավելին՝ կարելի է վերահաշվարկ կատարել, օրինակ, ամեն ամիս, այլ կերպ ասած՝ բարդացումների հաճախականությունը փարվա ընթացքում հասցնել մինչև $n = 12$, չէ՞ որ սա ավելի շահավետ է ներդրողի համար:

Նշանակենք՝

n մեկ փարվա ընթացքում կատարվող բարդացումների հաճախականությունը, այսինքն՝ վերահաշվարկների քանակը, որոնք իրականացվում են հավասար ժամանակահատվածներում (փոխարկման ժամանակահատվածները հավասար են), օրինակ՝ $n = 12$, այսինքն՝ յուրաքանչյուր ամիս, կամ օրինակ՝ $n = 2$, այսինքն՝ յուրաքանչյուր կիսամյակ:

Բարդ փոկոսների բանաձևը

Եթե P գումարն ավանդ է դրված բարդ փոկոսների սխեմայով՝ փարեկան r փոկոսադրույքով, և վերահաշվարկ է կատարվում փարեկան n անգամ, ապա t փարի հեղո սպասվելի արժեքը կկազմի

$$B = B(t) = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} :$$

Իսկապես, եթե փարեկան փոփոխությունը հավասար է r , ապա փարվա մեջ մեկ փոփոխումն ժամանակահատվածի փոփոխությունը հավասար է r/n :

Առաջին փոփոխումից հետո նոր գումարը կկազմի $P_1 = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)$ դրամ:

Երկրորդ փոփոխումից հետո նոր գումարը կկազմի $P_2 = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^2$ դրամ:

n -րդ փոփոխումից հետո, այսինքն՝ մեկ փարի անց նոր գումարը կկազմի $P_n = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$ դրամ.

$$B(1) = P_n = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n :$$

Ներկաքար t փարի անց գումարը կկազմի

$$B(t) = P_{nt} = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} :$$

□

Այժմ քննարկենք 3-րդ սկզբունքը՝ **շարունակական բարդացումների** սխեման: Պարզ է, որքան հաճախ կատարվի գումարի վերհաշվարկ (բարդացում), որքան հաճախ մեր սրացած փոփոխությունը նորից ներդնենք, այնքան ավելի մեծ կլինի ներդրողի շահը: Տեսականորեն կարող ենք n -ը անվերջ մեծացնել՝ մնացած P, r, t պարամետրերը թողնելով անփոփոխ: Նկարագրված եղանակը, երբ փոփոխման ժամանակահատվածը անվերջ փոքր է, կոչվում է **անընդհատ (շարունակական) փոփոխություն**ի սխեմա: Արդյունքում այն կրա սպասվելի գումարի հերևյալ արժեքը՝

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{nt} = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = P \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} = P e^{rt} :$$

Անընդհատ փոփոխությունների բանաձևը

Եթե P գումարն ավանդ է դրված անընդհատ փոփոխությունի սխեմայով՝ փարեկան r փոփոխությունքով, ապա t փարի հետո սպասվելի արժեքը կկազմի

$$B = B(t) = P e^{rt} :$$

Սա ներդրողի համար ամենաշահավետ ներդրման բանաձևն է :

3.13 Ֆունկցիայի խզումները, խզումների դասակարգումը

Ինչպես արդեն գիտենք, ֆունկցիայի խզման կետերն են որոշման փիրույթի այն կետերը, որպես ֆունկցիան անընդհատ չէ : Երբեմն թույլատրում են, որ խզման կետը լինի որոշման փիրույթի եզրային կետ (ծայրակետ) :

Սահմանում 3.18. $f(x)$ ֆունկցիայի $x = a$ խզման կետը կոչվում է **1-ին կարգի (սեռի)**, եթե $x = a$ կետում գոյություն ունեն f -ի ձախակողմյան և աջակողմյան սահմանները՝

$$\exists f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \quad \text{և} \quad \exists f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) :$$

Նավելյալ նշենք, որ 1-ին կարգի խզման կետի դեպքում $|f(a+0) - f(a-0)|$ ոչ բացասական մեծությունը կոչվում է **ֆունկցիայի թռիչք** a խզման կետում :

Սահմանում 3.19. $f(x)$ ֆունկցիայի $x = a$ խզման կետը կոչվում է **2-րդ կարգի (սեռի)**, եթե $x = a$ կետում f -ի միակողմանի սահմաններից գոնե մեկը գոյություն չունի :

Օրինակ 3.17. Մենք արդեն պարզել էինք, որ

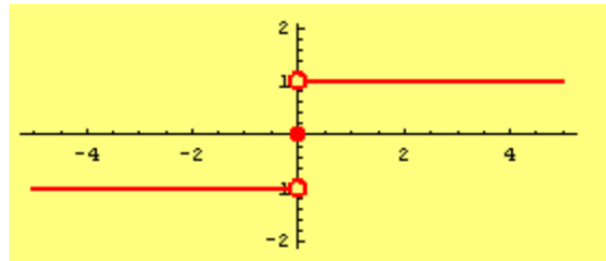
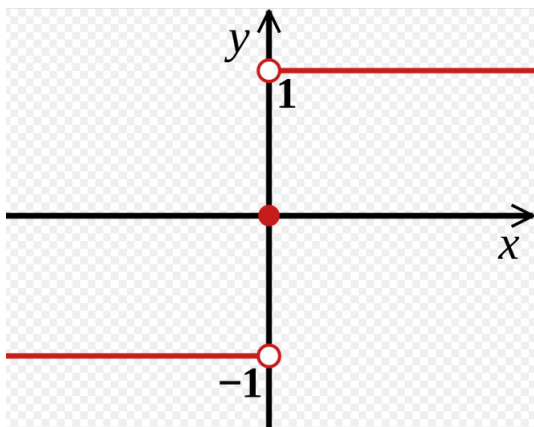
$$f(x) = \operatorname{sgn} x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{եթե } x > 0, \\ 0, & \text{եթե } x = 0, \\ -1, & \text{եթե } x < 0, \end{cases} \quad (3-59)$$

սիգնում ֆունկցիան խզվող է $x = 0$ կետում, քանի որ այդ կետում սահման չունի. $\boxed{\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x} :$

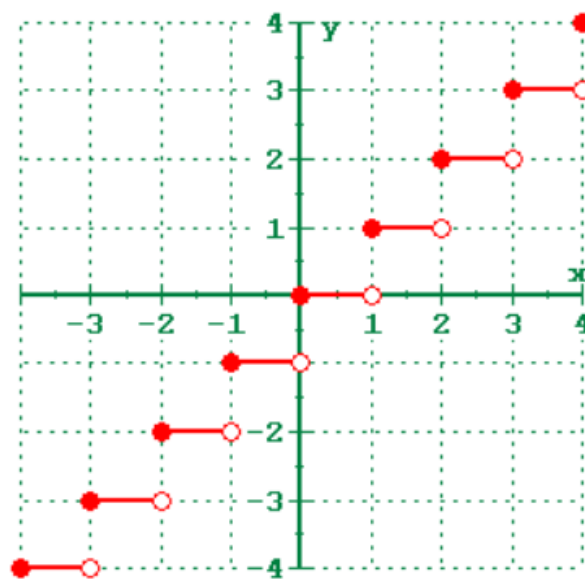
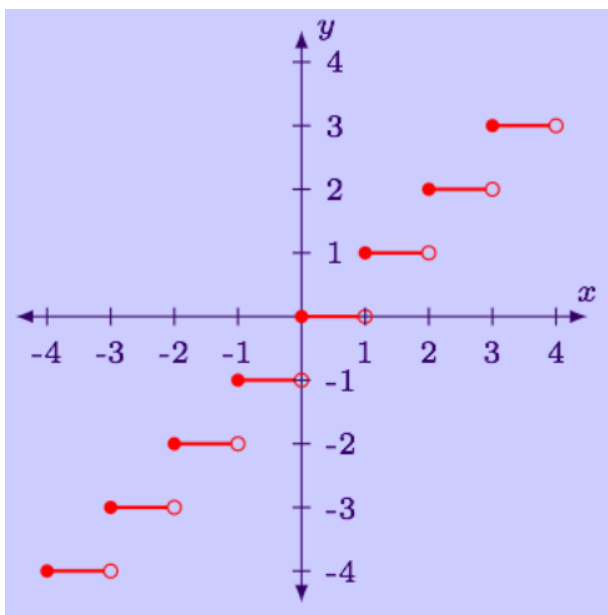
Բացի այդ, $x = 0$ կետում սիգնում ֆունկցիան միակողմանի սահմաններ ունի՝ $f(+0) = 1$, $f(-0) = -1$:

Սա նշանակում է, որ $x = 0$ կետը սիգնում ֆունկցիայի 1-ին կարգի խզման կետ է : Ֆունկցիայի թռիչքը $x = 0$ խզման կետում հավասար է $|f(+0) - f(-0)| = 2$:

Օրինակ 3.18. Մեզ ծանոթ **ամբողջ մաս** $\boxed{f(x) = [x]}$ ֆունկցիան նույնպես խզվող է և նրա խզման կետերն են բոլոր $x = m \in \mathbb{Z}$ ամբողջ կետերը : Միակողմանի սահմանները հեշտությամբ հաշվում ենք՝ $f(m+0) = m$, $f(m-0) = m-1$, **տես՝ զծագիր 3.23**, հերևաբար՝ բոլոր խզման կետերն 1-ին կարգի են, իսկ թռիչքը՝ $|f(m+0) - f(m-0)| = 1$:



Պատկեր 3.22. Միգնում ֆունկցիայի գրաֆիկը



Պատկեր 3.23. $f(x) = [x]$ ամբողջ մաս ֆունկցիայի գրաֆիկը

Օրինակ 3.19. Մեկ այլ խզվող

$$\mathcal{D}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{եթե } x \in \mathbb{Q} \text{ (} x \text{ ռացիոնալ է),} \\ 0, & \text{եթե } x \in \mathbb{I} \text{ (} x \text{ իռացիոնալ է),} \end{cases} \quad (3-60)$$

Դիրիխլեի ֆունկցիայի համար մենք ապացուցել էինք, որ յուրաքանչյուր $a \in \mathbb{R}$ կերպ այս ֆունկցիայի խզման կերպ է, քանի որ ֆունկցիան սահման չունի: Ավելին, Դիրիխլեի ֆունկցիան միակողմանի սահմաններ ևս չունի: Իսկապես, ցույց տանք, որ $\lim_{x \rightarrow a+0} \mathcal{D}(x)$: Ըստ ֆունկցիայի սահմանի Նայմեի սահմանմանը

$$\begin{aligned} \exists x_n \rightarrow a+0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad x_n \in \mathbb{Q}, & \implies \mathcal{D}(x_n) = 1 \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty), \\ \exists x'_n \rightarrow a+0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad x'_n \in \mathbb{I}, & \implies \mathcal{D}(x'_n) = 0 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty): \end{aligned} \quad (3-61)$$

Սրացանք, որ ֆունկցիան a կետում երկու տարբեր մասնակի աջակողմյան սահմաններ ունի:

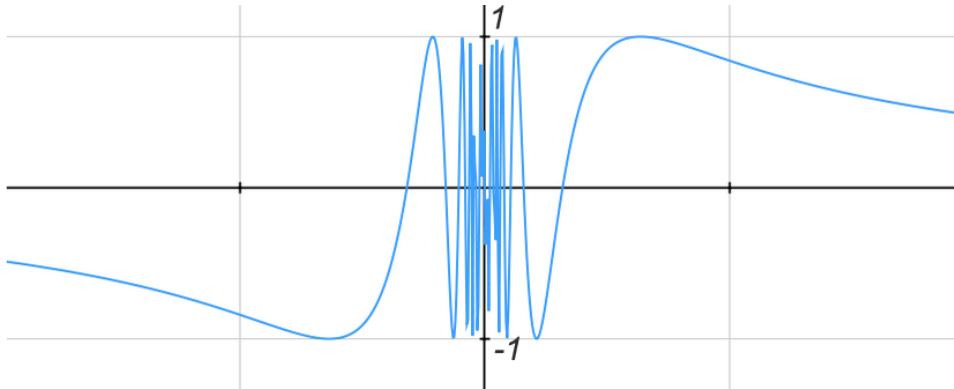
Նայենի սահմանումը խախտվեց, և $x = a$ կետում Դիրիխլեի ֆունկցիան աջակողմյան սահման չունի՝

$\nexists \lim_{x \rightarrow a+0} \mathcal{D}(x)$: Սա նշանակում է, որ բոլոր $a \in \mathbb{R}$ կետերը Դիրիխլեի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի խզման կետեր են:

Օրինակ 3.20. Սահմանենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{եթե } x \neq 0, \\ A, & \text{եթե } x = 0, \end{cases}$$

որտեղ $A \in \mathbb{R}$ աստիճանը կարելի է ընտրել կամայականորեն:



Գծազիր 3.24. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

Պարզ է, որ ֆունկցիան անընդհատ է ամենուրեք, բացի հնարավոր է $x = 0$ կետից. $f(x) \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$:

Ներածությունը $x = 0$ կետը և այդ նպատակով հաշվենք միակողմանի սահմաններից որևէ մեկը:

Վերցնենք մասնավոր հաջորդականություններ և հաշվենք մասնակի սահմաններ.

$$\exists x'_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi n} \rightarrow +0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \implies \quad f(x'_n) = \sin \frac{1}{x'_n} = \sin \pi n = 0 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\exists x''_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \rightarrow +0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \implies \quad f(x''_n) = \sin \frac{1}{x''_n} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) = 1 \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) :$$

Սրացվեց, որ ֆունկցիան $x = 0$ կետում երկու տարբեր մասնակի աջակողմյան սահմաններ ունի:

Ըստ Նայենի սահմանման՝ $x = 0$ կետում ֆունկցիան աջակողմյան սահման չունի.

$$\nexists \lim_{x \rightarrow +0} f(x) :$$

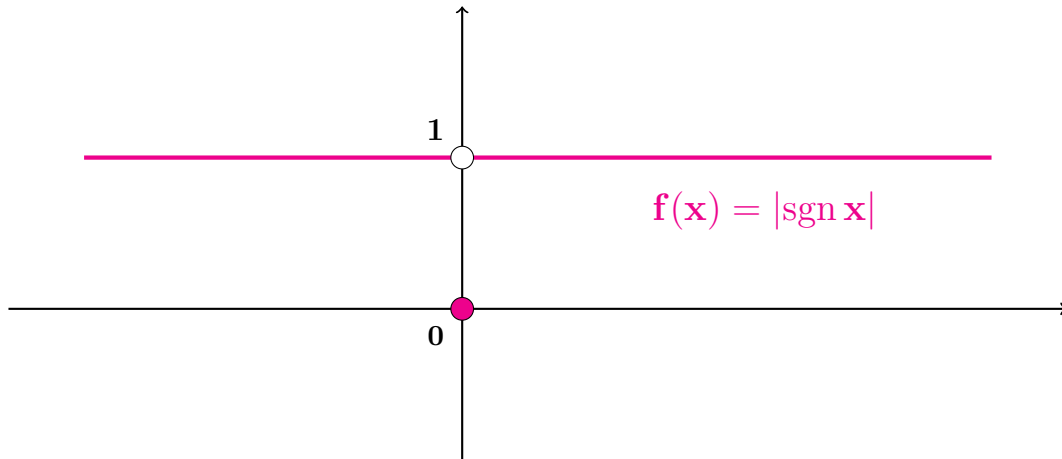
Սա նշանակում է, որ $x = 0$ կետը ֆունկցիայի 2-րդ կարգի խզման կետ է:

1-ին կարգի խզման կետերի մեջ հաջորդականորեն մի դեպք կա, որն արժանի է առանձին սահմանման:

Սահմանում 3.20. $f(x)$ ֆունկցիայի $x = a$ խզման կետը կոչվում է **վերացնելի**, եթե $x = a$ կետում գոյություն ունի f -ի սահմանը, այսինքն $\exists \boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)}$, կամ նույնը՝

$$\exists \boxed{f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)} :$$

Օրինակ 3.21. Դիտարկենք $f(x) \stackrel{def}{=} |\operatorname{sgn} x|$ ֆունկցիան:



Գծազիր 3.25. $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

Նշել է տեսնել, որ $x = 0$ կետում ֆունկցիան հավասար միակողմանի սահմաններ ունի.

$f(+0) = f(-0) = 1$, և միաժամանակ՝ $f(0) = 0 \neq 1$: Սա նշանակում է, որ $x = 0$ կետը արվյալ ֆունկցիայի 1-ին կարգի խզման կետ է, այն էլ՝ վերացնելի:

3.14 Մոնոտոն ֆունկցիայի խզումները

Թեորեմ 3.15. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն է $[a, b]$ հատվածում: Այդ դեպքում

ա) $f(x)$ ֆունկցիան կարող է միայն 1-ին կարգի խզումներ ունենալ:

բ) $f(x)$ ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը կան վերջավոր է, կան հաշվելի:

Ապացույց. ա) Մենք արդեն ապացուցել էինք, որ մոնոտոն ֆունկցիան հատվածում միակողմանի սահմաններ ունի յուրաքանչյուր կետում, այսինքն՝

$$\exists f(a+0), \quad \exists f(b-0), \quad \exists f(x_0-0), \quad \exists f(x_0+0) \quad \forall x_0 \in (a, b):$$

Սա էլ նշանակում է, որ եթե որևէ կետ f -ի խզման կետ է, ապա միայն 1-ին կարգի:

բ) Որոշակիության համար ենթադրենք, որ f -ն աճող է, $f(x) \nearrow$:

Եթե որևէ $x \in (a, b)$ ներքին կետ f -ի խզման կետ է, ապա

$$\exists f(x-0), \quad \exists f(x+0) \quad \text{և} \quad \boxed{f(x-0) < f(x+0)}:$$

Խզման x կետին համապատասխանեցնենք որևէ $r = r(x)$ ռացիոնալ թիվ՝

$$\exists r = r(x) \in \mathbb{Q} \quad \text{s.t.} \quad f(x-0) < r < f(x+0):$$

Նկատենք, որ փարբեր $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, խզման կետերին համապատասխանում են փարբեր $r_1 < r_2$ ($r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$) ռացիոնալ թվեր: Իսկապես, f -ի մոնոտոն աճն ապահովում է անհավասարություններ

$$\begin{aligned} \boxed{x_1 < x_2} &\implies \boxed{f(x_1+0) < f(x_2-0)} \implies \\ \implies \boxed{f(x_1-0) < r_1 < f(x_1+0) < f(x_2-0) < r_2 < f(x_2+0)} &\implies \boxed{r_1 < r_2}: \end{aligned}$$

Այսպիսով, f -ի խզման կետերի $X \subset [a, b]$ բազմությունը համարժեք է ռացիոնալ թվերի $\mathbb{Q}$ բազմության ինչ-որ $\mathbb{Q}' = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ ենթաբազմությանը, $\boxed{X \sim \mathbb{Q}' \subset \mathbb{Q}}$: Որպես $\mathbb{Q}$ հաշվելի բազմության ենթաբազմություն $\mathbb{Q}'$ -ը և ուրեմն X -ը կան վերջավոր է, կան հաշվելի: $\square$

3.15 Անընդհատ ֆունկցիաների հատկությունները փակ հատվածում:

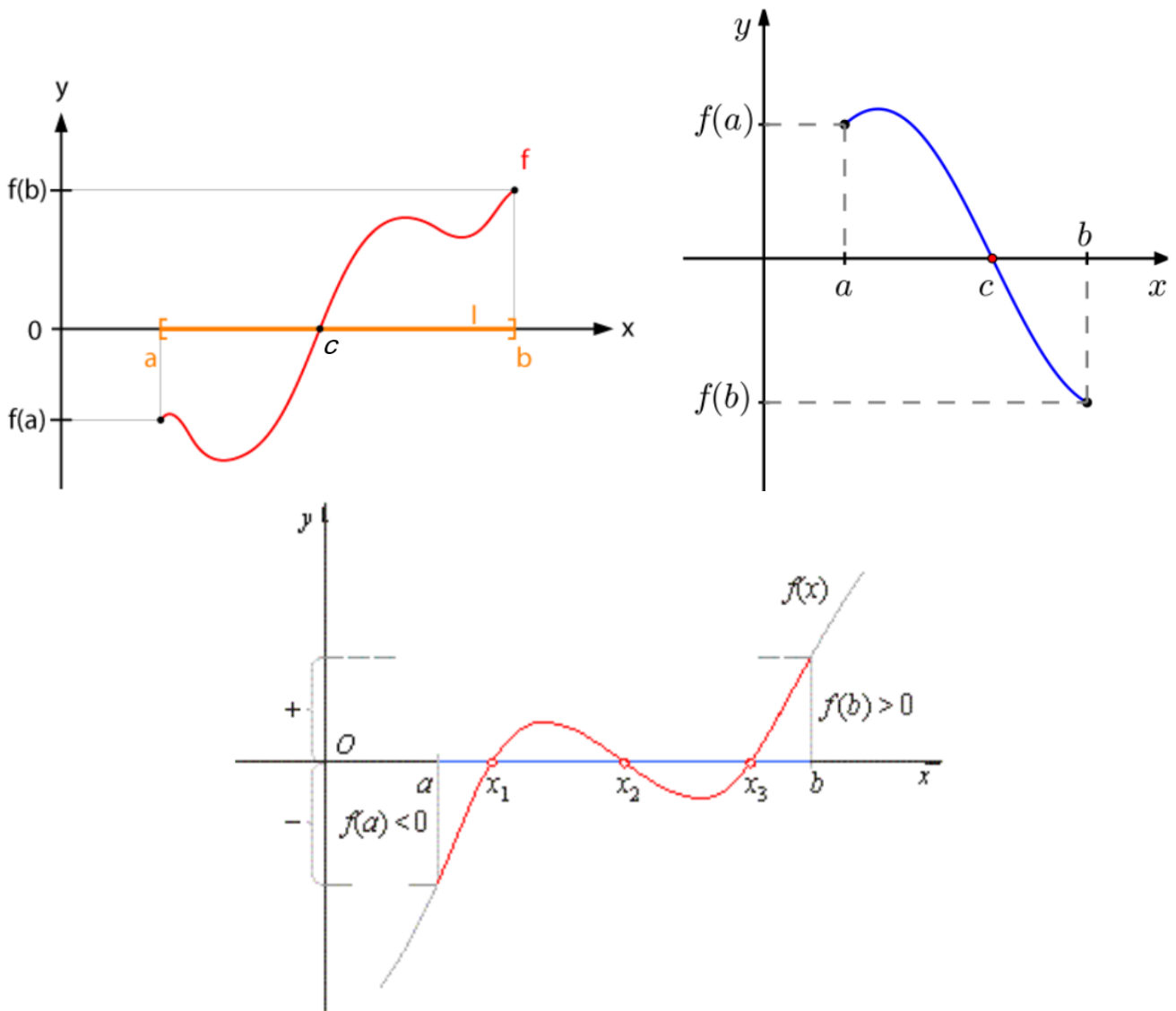
Բոլցանո-Կոշու թեորեմները

Թեորեմ 3.16. (Բոլցանո-Կոշու 1-ին թեորեմ անընդհատ ֆունկցիայի զրո արժեքն ընդունելու մասին)

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է փակ հատվածում՝ $f(x) \in C[a, b]$, և ծայրակետերում ընդունում է տարբեր նշանների արժեքներ, այսինքն՝ $f(a)f(b) < 0$:

Այդ դեպքում ֆունկցիան գոնե մեկ զրո ունի, այսինքն՝ $\exists c \in (a, b) \quad \text{s.t.} \quad f(c) = 0$:

Ապացույց. Նշենք, որ թեորեմն ունի հստակ երկրաչափական իմաստ, այն է՝ թեորեմի պայմաններում ֆունկցիայի գրաֆիկը գոնե մեկ կետում պետք է հատի արագիսների առանցքը:



Գծագիր 3.26. Բոլցանո-Կոշու 1-ին թեորեմի պարկերումը

Առանց խախտելու ընդհանրությունը կարելի է համարել, որ $f(a) < 0 < f(b)$: Ապացույցի նպատակն է հայտնաբերել ֆունկցիայի գոնե մեկ զրո, դրա համար $[a, b]$ հատվածը հաջորդաբար կկիսենք: Վերցնենք $[a, b]$ հատվածի $\frac{a+b}{2}$ միջնակետը:

Եթե $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, ապա որոնելի զրոն գտնված է, և ապացույցը կավարտվի:

Եթե $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, ապա առաջացած $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ և $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ հատվածներից այն մեկն ընտրենք (նշանակենք այն $[a_1, b_1]$ -ով), որի ծայրակետերում ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշանների արժեքներ:

Կստացվի $f(a_1) < 0 < f(b_1)$:

Այժմ կիսենք $[a_1, b_1]$ հատվածը $\frac{a_1+b_1}{2}$ միջնակետով և կրկին դատողությունները:

Եթե $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, ապա որոնելի զրոն գտնված է, և ապացույցը կավարտվի:

Եթե $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0$, ապա առաջացած $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ և $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ հատվածներից այն մեկն ընտրենք (նշանակենք այն $[a_2, b_2]$ -ով), որի ծայրակետերում ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշանների արժեքներ:

Կստացվի $f(a_2) < 0 < f(b_2)$: Շարունակելով գործընթացը՝ հնարավոր է երկու դեպք.

1-ին դեպք. Գործընթացի որևէ քայլում ընտրված $\frac{a_k+b_k}{2}$ միջնակետում ֆունկցիան կարող է զրո արժեքն ընդունել. $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) = 0$: Այդ դեպքում որոնելի զրոն գտնված է, և ապացույցը կավարտվի:

2-րդ դեպք. Հատվածները կիսելու ամբողջ գործընթացին ստացված բոլոր $\frac{a_k+b_k}{2}$ միջնակետերում ֆունկցիան զրո արժեքը չի ընդունում. $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$: Այդ դեպքում կառաջանա սեղմվող ներդրված միջակայքերի (անվերջ) հաջորդականություն՝ $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, ընդ որում՝

$$f(a_n) < 0 < f(b_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad a_n \nearrow, \quad b_n \searrow :$$

Ներդրված միջակայքերի մասին լեմմայի (Լեմմա 2.2) համաձայն՝

$$\exists ! c \in (a, b) \quad s.t. \quad a_n \nearrow c, \quad b_n \searrow c \quad (n \rightarrow \infty) :$$

Ցույց տանք, որ ստացված c կետը որոնելի զրոն է : Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է,

$$\begin{aligned} (a_n \nearrow c) &\implies (f(a_n) \rightarrow f(c)), \\ (b_n \searrow c) &\implies (f(b_n) \rightarrow f(c)), \end{aligned} \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty :$$

Սա թույլ է տալիս սահմանային անցում կատարել հետևյալ անհավասարության մեջ

$$\begin{aligned} f(a_n) &< 0 < f(b_n) \\ \downarrow & \quad \downarrow & \quad (\text{երբ } n \rightarrow \infty), \\ f(c) &\leq 0 \leq f(c) \end{aligned}$$

ինչը տալիս է $f(c) = 0$ և ավարտում ապացույցը: □

Թեորեմ 3.17. (Բոլցանո-Կոշու 2-րդ թեորեմ անընդհատ ֆ-ի միջանկյալ արժեքներն ընդունելու մասին)

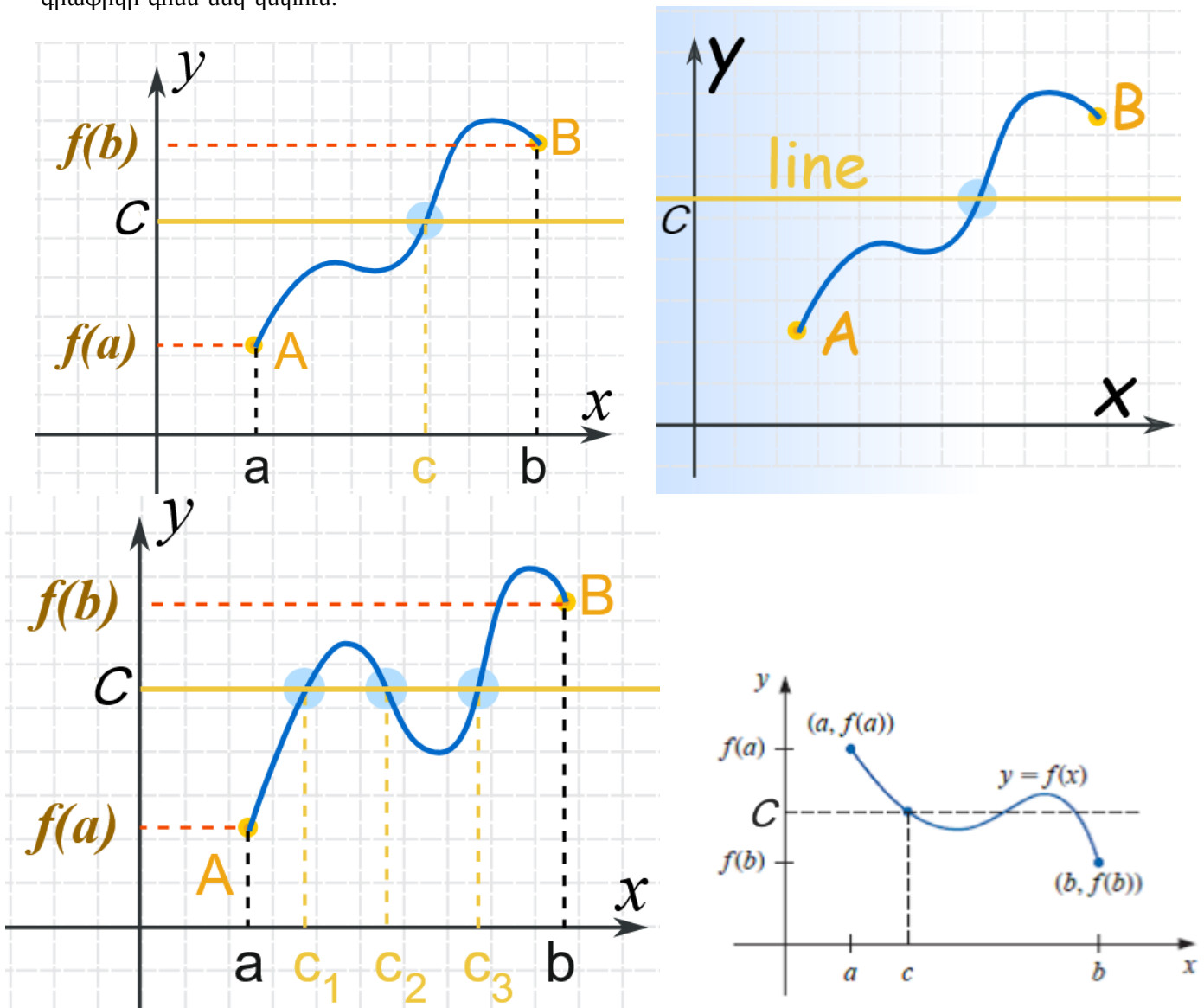
Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է փակ հատվածում՝ $f(x) \in C[a, b]$, և ծայրակերպում ընդունում է տարբեր արժեքներ:

$$f(a) \stackrel{\text{նշ.}}{=} A, \quad f(b) \stackrel{\text{նշ.}}{=} B, \quad A \neq B \quad (\text{ենթադրենք } A < B):$$

Այդ դեպքում ֆունկցիան ընդունում է A -ի և B -ի միջև իր բոլոր միջանկյալ արժեքները, այսինքն՝

$$\forall C \in (A, B) \quad \exists c \in (a, b) \quad \text{s.t.} \quad f(c) = C:$$

Ապացույց. Թեորեմն ունի հստակ երկրաչափական իմաստ, այն է՝ թեորեմի պայմաններում կամայական $\forall C \in (A, B)$ միջանկյալ արժեքի համար $y = C$ հորիզոնական ուղիղը պարպադիր կհատի ֆունկցիայի գրաֆիկը գոնե մեկ կետում:



Գծագիր 3.27. Բոլցանո-Կոշու 2-րդ թեորեմի պատկերումը

Ապացույցը կառուցված է այնպես, որ հանգենք նախորդ թեորեմին: Վերցնենք կամայական $\forall C (A < C < B)$ արժեք և սահմանենք $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - C$ օժանդակ ֆունկցիան: Պարզ է, որ $\varphi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է՝ $\varphi(x) \in C[a, b]$, և ծայրակետերում ընդունում է փարբեր նշանների արժեքներ.

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$

$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0 :$$

Ըստ նախորդ թեորեմի՝ $\varphi(x)$ ֆունկցիան գոնե մեկ գրո ունի.

$$\exists c \in (a, b) \quad \text{s.t.} \quad 0 = \varphi(c) = f(c) - C \quad \implies \quad f(c) = C,$$

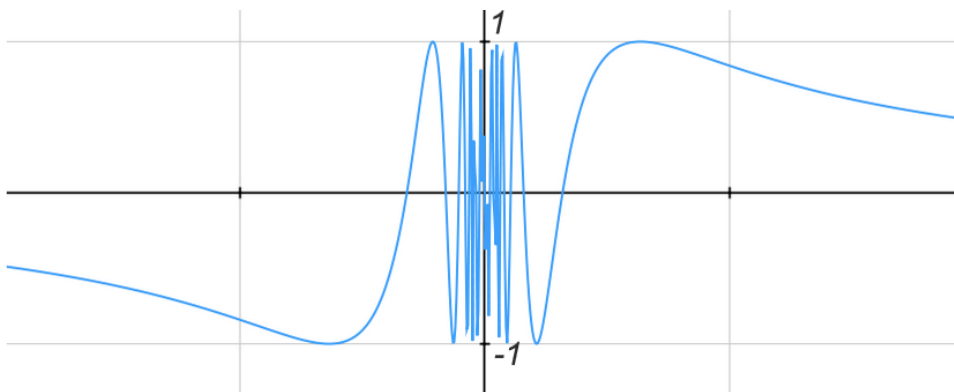
այսինքն՝ գտնվեց C արժեքի առնվազն մեկ նախապարկեր՝ c կետը: □

Դիպողություն 3.4. *Բոլցանո-Կոշու 2-րդ թեորեմը բացահայտում է անընդհատ ֆունկցիաների կարևոր-րազույն մի հատկություն. այն պնդում է, որ անընդհատ ֆունկցիան իր որևէ մեկ արժեքից մյուսին անցնելիս ընդունում է բոլոր միջանկյալ արժեքները:*

Այս հատկությամբ օժտված են ոչ միայն անընդհատ, այլև անգամ որոշ խզվող ֆունկցիաներ: Օրինակ, նախկինից մեզ ծանոթ հետևյալ խզվող ֆունկցիան՝

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{եթե } x \neq 0, \\ A, & \text{եթե } x = 0, \end{cases}$$

որտեղ $A \in \mathbb{R}$ հասարարունը կարելի է ընտրել կամայականորեն:



Գծազիր 3.28. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

Նշար է տեսնել, որ տվյալ ֆունկցիան թեև խզվող է $x = 0$ կետում, այնուամենայնիվ $[-1, 1]$ արժեքների միջակայքից ընդունում է բոլոր միջանկյալ արժեքները:

3.16 Անընդհատ ֆունկցիայի նշանի պահպանման հատկությունը

Պնդում 3.6. Դիցուք $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > B$: Այդ դեպքում a կետի բաղադրանքային փոքր (անկենտրոն) շրջակայքում f -ը ևս գերազանցում է B արժեքը, այսինքն՝

$$\exists \mathcal{U}(a) \stackrel{\text{def}}{=} (a - \delta, a + \delta) \quad \text{s.t.} \quad \boxed{f(x) > B} \quad \forall x \in \mathcal{U}(a), x \neq a :$$

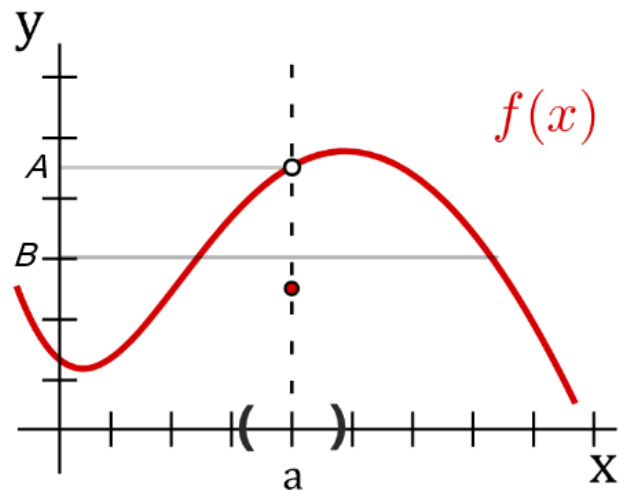
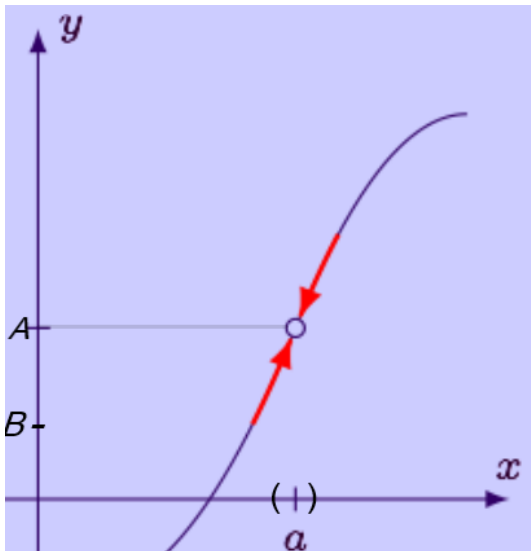
Ապացույց. Քանի որ $A > B$, կարելի է ընտրել այնքան փոքր $\varepsilon > 0$, որ $\boxed{A - \varepsilon > B}$: Սահմանի սահմանման համաձայն՝ տվյալ ε -ի համար

$$\exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x, \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \implies \quad |f(x) - A| < \varepsilon \quad \implies \quad B < A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

այսինքն՝

$$\forall x \in \mathcal{U}(a), x \neq a, \quad \implies \quad f(x) > B :$$

□



Քննարկ 3.29. Կերտում սահման ունեցող ֆունկցիայի հատկության պարկերումը

Դիտողություն 3.5. Պնդում 3.6-ը՝ կարճ և որոշ վերապահումով կարելի է ձևակերպել այսպես. «Եթե ֆունկցիայի սահմանը տվյալ a կետում մեծ է ինչ-որ B թվից, ապա ինքը՝ ֆունկցիան, նույնպես մեծ է B -ից a կետի փոքր շրջակայքում»: Նույնանման պնդում տեղի ունի, եթե ձևակերպման մեջ $A > B$ պայմանը փոխարինենք $A < B$ պայմանով, իսկ եզրակացության մեջ $f(x) > B$ պայմանը՝ $f(x) < B$ պայմանով: Այլ կերպ ասած՝ «եթե ֆունկցիայի սահմանը տվյալ a կետում փոքր է ինչ-որ B թվից, ապա ինքը՝ ֆունկցիան, նույնպես փոքր է B -ից a կետի փոքր շրջակայքում»:

Ձևակերպենք պնդման այն մասնավոր դեպքը, երբ $B = 0$:

Պնդում 3.7. Եթե տվյալ a կետում ֆունկցիայի սահմանը դրական է՝ $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0$, ապա a կետի բավականաչափ փոքր (անկենտրոն) շրջակայքում f -ը ևս դրական է, այսինքն՝

$$\exists \boxed{\mathcal{U}(a) \stackrel{def}{=} (a - \delta, a + \delta)} \quad s.t. \quad \boxed{f(x) > 0} \quad \forall x \in \mathcal{U}(a), x \neq a :$$

Դիպողություն 3.6. Այսպես ևս նույնանման պնդում տեղի ունի, եթե ձևակերպման մեջ $A > 0$ պայմանը փոխարինենք $A < 0$ պայմանով, իսկ եզրակացության մեջ $f(x) > 0$ պայմանը՝ $f(x) < 0$ պայմանով: Այլ կերպ ասած՝ «եթե ֆունկցիայի սահմանը տվյալ a կետում բացասական է, ապա ինքը՝ ֆունկցիան, նույնպես բացասական է a կետի փոքր շրջակայքում»:

Վերջապես, ֆունկցիայի սահմանի գոյությունը տվյալ կետում կարելի է փոխարինել ավելի խիստ պայմանով՝ ֆունկցիայի անընդհատությամբ տվյալ կետում:

Պնդում 3.8. Եթե տվյալ a կետում ֆունկցիան անընդհատ է և զրո չէ՝ $f(x) \neq 0$, ապա a կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում f -ը պահպանում է նույն նշանը, այսինքն՝

$$\begin{aligned} f(a) > 0 &\implies \exists \boxed{\mathcal{U}(a) \stackrel{def}{=} (a - \delta, a + \delta)} \quad s.t. \quad \boxed{f(x) > 0} \quad \forall x \in \mathcal{U}(a), \\ f(a) < 0 &\implies \exists \boxed{\mathcal{U}(a) \stackrel{def}{=} (a - \delta, a + \delta)} \quad s.t. \quad \boxed{f(x) < 0} \quad \forall x \in \mathcal{U}(a) : \end{aligned}$$

3.17 Վայերշտրասի թեորեմները

Թեորեմ 3.18. (*Վայերշտրասի 1-ին թեորեմ*)

Փակ հատվածում անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ է այդ հատվածում, այսինքն՝

$$\left(f(x) \in C[a, b] \right) \implies \left(\exists M > 0 \quad s.t. \quad \boxed{|f(x)| \leq M} \quad \forall x \in [a, b] \right) :$$

Ապացույց. Ենթադրենք հակառակը. $f(x)$ ֆունկցիան անսահմանափակ է $[a, b]$ -ում: Մեր նպատակն է հանգել որևէ հակասության: Գրենք անսահմանափակության սահմանումը՝

$$\forall M > 0 \quad \exists x = x(M) \in [a, b] \quad s.t. \quad |f(x)| > M,$$

մասնավորապես բնական թվերի համար

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a, b] \quad s.t. \quad \boxed{|f(x_n)| > n} : \quad (3-62)$$

Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն՝ $\{x_n\} \subset [a, b]$ սահմանափակ հաջորդականությունը պարունակում է զոնն մեկ զուգամետ ենթահաջորդականություն.

$$\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \quad s.t. \quad \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \stackrel{\text{նշ.}}{=} x_0 :$$

Քանի որ $[a, b]$ հատվածը փակ բազմություն է, այն պարունակում է իր բոլոր կուպակման կետերը, և ուրեմն՝ $x_0 \in [a, b]$: Ֆունկցիայի անընդհատությունը և (3-62) պայմանը n_k -երի համար փախի են

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0), \quad \text{երբ} \quad k \rightarrow \infty, \quad (3-63)$$

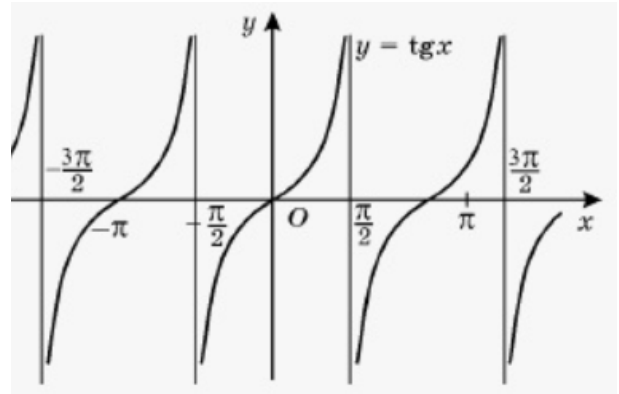
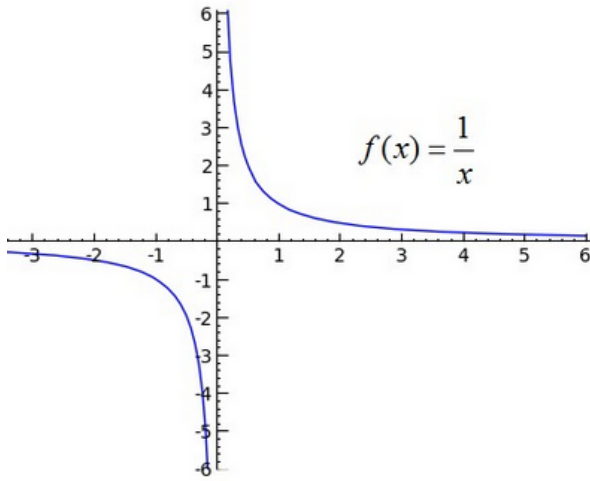
$$\boxed{|f(x_{n_k})| > n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N} : \quad (3-64)$$

Մի կողմից՝ (3-63) զուգամիտության փաստը հանգում է $\{f(x_{n_k})\}$ հաջորդականության սահմանափակությանը, իսկ մյուս կողմից՝ (3-64) պայմանը նշանակում է նույն հաջորդականության անսահմանափակությունը: Առկա հակասությունն ավարտում է ապացույցը: □

Դիպողություն 3.7. *Թեորեմը սխալ է բաց կամ կիսաբաց միջակայքերի համար: Օրինակ,*

$$\frac{1}{x} \in C(0, 1], \quad \text{tg } x \in C\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

ֆունկցիաները անընդհատ են նշված միջակայքերում, բայց միաժամանակ սահմանափակ չեն:



Գծագիր 3.30. Անսահմանափակ անընդհար ֆունկցիաներ

Վերհիշենք ֆունկցիայի սուպրեմումի և ինֆիմումի գաղափարները: Սուպրեմումը մաքսիմումի գաղափարի ընդհանրացումն է, իսկ ինֆիմումը՝ մինիմումի: Կարճ սահմանումները հետևյալն են.

$f(x)$ ֆունկցիայի **սուպրեմումը** X բազմության վրա f -ի վերին եզրերից փոքրագույնն է:

$f(x)$ ֆունկցիայի **ինֆիմումը** X բազմության վրա f -ի ստորին եզրերից մեծագույնն է:

Նույն սահմանումները բացված տեսքով հետևյալն են.

Սահմանում 3.21. $M \in \mathbb{R}$ թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի **ճշգրիտ վերին եզր** կամ **սուպրեմում** X բազմության վրա, գրում են $M = \sup_{x \in X} f(x)$, եթե

$$(u) \quad \forall x \in X \quad f(x) \leq M,$$

$$(p) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 = x_0(\varepsilon) \in X \quad \text{s.t.} \quad f(x_0) > M - \varepsilon:$$

(3-65)

Սահմանում 3.22. $m \in \mathbb{R}$ թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի **ճշգրիտ ստորին եզր** կամ **ինֆիմում** X բազմության վրա, գրում են $m = \inf_{x \in X} f(x)$, եթե

$$(u) \quad \forall x \in X \quad f(x) \geq m,$$

$$(p) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 = x_0(\varepsilon) \in X \quad \text{s.t.} \quad f(x_0) < m + \varepsilon:$$

(3-66)

Օրինակ 3.22. Դիտարկենք պարզունակ գծային ֆունկցիա տարբեր միջակայքերում.

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + 2, \quad X_1 = [3, 4], \quad X_2 = (3, 4), \quad X_3 = [3, 4), \quad X_4 = (3, 4],$$

և գրենք ֆունկցիայի սուպրեմումը և ինֆիմումը.

$$\sup_{x \in [3,4]} f(x) = \max_{x \in [3,4]} f(x) = f(4) = 6,$$

$$\inf_{x \in [3,4]} f(x) = \min_{x \in [3,4]} f(x) = f(3) = 5,$$

$$\sup_{x \in (3,4)} f(x) = 6,$$

$$\inf_{x \in (3,4)} f(x) = 5,$$

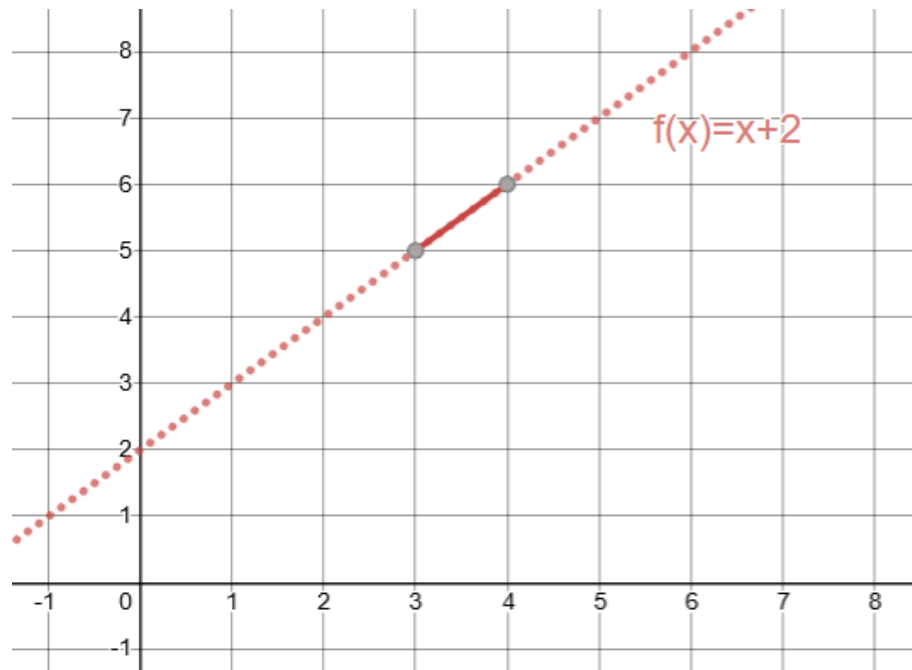
$$\sup_{x \in [3,4)} f(x) = 6,$$

$$\inf_{x \in [3,4)} f(x) = \min_{x \in [3,4)} f(x) = f(3) = 5,$$

$$\sup_{x \in (3,4]} f(x) = \max_{x \in (3,4]} f(x) = f(4) = 6,$$

$$\inf_{x \in (3,4]} f(x) = 5 :$$

Ինչպես տեսնում ենք, սուպրեմումի և ինֆիմումի արժեքները նույնն են, սակայն $X_1 = [3, 4]$ և $X_4 = (3, 4]$ միջակայքերի դեպքում գոյություն ունի որոշման տիրույթի կեր, որում ֆունկցիան ընդունում է իր սուպրեմումը՝ $f(4) = 6$, ինչի արդյունքում սուպրեմումը վերաժվում է մաքսիմումի: Նմանապես՝ $X_1 = [3, 4]$, $X_3 = [3, 4)$ միջակայքերի դեպքում գոյություն ունի որոշման տիրույթի կեր, որում ֆունկցիան ընդունում է իր ինֆիմումը՝ $f(3) = 5$: Արդյունքում ինֆիմումը վերաժվում է մինիմումի:



Գծագիր 3.31. Գծային ֆունկցիայի սուպրեմումը և ինֆիմումը միջակայքում

Այդ դեպքում կասենք, որ ֆունկցիան **հասնում** է իր սուպրեմումին կամ ինֆիմումին (այսինքն՝ ընդունում է դրանք ինչ-որ կերպով):

Այսպիսով, տվյալ ֆունկցիայի սուպրեմումը **հասանելի** է $X_1 = [3, 4]$ և $X_4 = (3, 4]$ միջակայքերում և **հասանելի չէ** $X_2 = (3, 4)$ և $X_3 = [3, 4)$ միջակայքերում:

Նմանապես՝ ֆունկցիայի ինֆիմումը **հասանելի** է $X_1 = [3, 4]$ և $X_3 = [3, 4)$ միջակայքերում և **հասանելի չէ** $X_2 = (3, 4)$ և $X_4 = (3, 4]$ միջակայքերում:

Թեորեմ 3.19. (Վայերշտրասի 2-րդ թեորեմ)

Փակ հատվածում անընդհատ ֆունկցիան հասնում է իր սուպրեմումին և ինֆիմումին, այսինքն՝

$$\left(f(x) \in C[a, b] \right) \implies \begin{aligned} &\exists x_0 \in [a, b] \quad s.t. \quad f(x_0) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x), \\ &\exists x_1 \in [a, b] \quad s.t. \quad f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x) : \end{aligned}$$

Ապացույց. Նախ և առաջ նշենք, որ Վայերշտրասի 1-ին թեորեմի համաձայն՝ $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $[a, b]$ հատվածում և ուրեմն վերջավոր սուպրեմում ու ինֆիմում ունի այդ հատվածում.

$$\exists \left[\sup_{x \in [a, b]} f(x) \stackrel{\text{նշ.}}{=} M \right], \quad \exists \left[\inf_{x \in [a, b]} f(x) \stackrel{\text{նշ.}}{=} m \right] :$$

Ապացուցենք սուպրեմումի դեպքը: Ենթադրենք հակառակը՝ սուպրեմումը հասանելի չէ, այսինքն՝

$$f(x) < M \quad \forall x \in [a, b] :$$

Ներմուծենք օժանդակ ֆունկցիա.

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M - f(x)}, \quad \varphi(x) \in C[a, b],$$

որը կոռեկտ է սահմանված, քանի որ հայտարարը զրո չէ՝ $M - f(x) > 0$: Քանի որ $\varphi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում, ըստ Վայերշտրասի 1-ին թեորեմի՝ այդ ֆունկցիան սահմանափակ է.

$$\exists \mu > 0 \quad s.t. \quad \varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq \mu \quad \iff \quad \frac{1}{\mu} \leq M - f(x) \quad \iff \quad \left[f(x) \leq M - \frac{1}{\mu} \right], \quad x \in [a, b] :$$

Սրացանք մի գնահատական, որը հակասում է սուպրեմումի սահմանմանը, ըստ որի՝

$$\exists x' \in [a, b] \quad s.t. \quad f(x') > M - \frac{1}{\mu} :$$

Նույն եղանակով ապացուցվում է ինֆիմումի դեպքը: □

3.18 Ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատությունը

Այս բաժնում կքննարկենք անընդհատության մի խիստ տեսակ, որը կոչվում է հավասարաչափ անընդհատություն:

Սահմանում 3.23. $f : E \mapsto \mathbb{R}$ ֆունկցիան կոչվում է **հավասարաչափ անընդհատ** E բազմության վրա, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad s.t. \quad \forall x', x'' \in E, \quad |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon : \quad (3-67)$$

Նախ նկատենք, որ հավասարաչափ անընդհատությունը վերաբերում է ոչ թե մեկ առանձին վերցրած կետին, այլ ինչ-որ բազմությանը, անգամ ամբողջ որոշման տիրույթին: Նավասարաչափ անընդհատությունը կարելի է բնութագրել հետևյալ կերպ. որպեսզի $x', x'' \in E$ կետերը $E \subset \mathbb{R}$ բազմության մեջ, եթե x', x'' կետերը իրար «մոտ» են, ապա իրար «մոտ» կլինեն նաև $f(x'), f(x'')$ արժեքները:

Նավասարաչափ անընդհատության (3-67) պայմանը E բազմության վրա շար ավելի ուժեղ է, քան սովորական $f(x) \in C(E)$ անընդհատությունը: Իսկապես, եթե (3-67) պայմանի մեջ ֆիքսենք որևէ $x_0 \in E$ կետ x' -ի փոխարեն, ապա կստանանք սովորական անընդհատություն x_0 կետում՝ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$: Նաև նկատենք, որ $\delta = \delta(\varepsilon)$ թիվը կախված է միայն ε -ից, բայց ոչ x_0 -ից, ինչպես սովորական անընդհատության դեպքում էր:

Օրինակ 3.23. Մենք արդեն գիտենք, որ $\boxed{f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin x \in C(\mathbb{R})}$ ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա: Ավելին, ցույց տանք, որ $\sin x$ ֆունկցիան նաև հավասարաչափ անընդհատ է $\mathbb{R}$ -ի վրա: Կազմենք $|f(x') - f(x'')|$ տարբերությունը և գնահատենք վերևից.

$$|\sin x' - \sin x''| = \left| 2 \sin \frac{x' - x''}{2} \cos \frac{x' + x''}{2} \right| \leq \left| 2 \sin \frac{x' - x''}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x' - x''}{2} \right| = |x' - x''| < \delta = \varepsilon :$$

Կարելի է ընտրել $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon$ կամ $\delta \leq \varepsilon$, ինչը բավարար է (3-67) պայմանը հաստատելու համար:

Այժմ ε - δ -լեզվով ձևակերպենք հավասարաչափ անընդհատության ժխտումը:

Սահմանում 3.24. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ չէ E բազմության վրա, եթե

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x', x'' \in E \quad \text{s.t.} \quad |x' - x''| < \delta \quad \text{և} \quad |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon : \quad (3-68)$$

Քանի որ հեղափոխություն են ներկայացնում միայն փոքր δ -ները, կարելի է դիտարկել միայն փոքր $\delta_n \searrow 0$ մեծությունները: Այդ դեպքում (3-68) պայմանը կարելի է ներկայացնել համարժեք տեսքով.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall \delta_n \searrow 0 \quad \exists x'_n, x''_n \in E \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{s.t.} \quad |x'_n - x''_n| < \delta_n \quad \text{և} \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon : \quad (3-69)$$

Նավասարաչափ անընդհատության ժխտման առավել հարմար համարժեք ձևակերպումը, թերևս, հետևյալն է.

$$(3-68) \iff (3-69) \iff \left(\begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0 \quad \text{և} \quad \exists x'_n, x''_n \in E \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{s.t.} \\ \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} |x'_n - x''_n| = 0} \quad \text{և} \quad \boxed{|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{array} \right) : \quad (3-70)$$

Օրինակ 3.24. Ընդհատ, որ $\boxed{f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x}}$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ չէ $E = (0, 1]$ բազմության վրա: Ընտրենք երկու հաջորդականություն՝

$$x'_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}, \quad x''_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n+1} :$$

Մի կողմից՝ $\boxed{|x'_n - x''_n| \rightarrow 0}$, երբ $n \rightarrow \infty$, իսկ մյուս կողմից՝

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = |n - (n+1)| = 1 \geq \varepsilon \quad (n = 1, 2, \dots) :$$

(3-70) պայմանը հաստատվեց, և ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ չէ $E = (0, 1]$ բազմության վրա:

Օրինակ 3.25. Ցույց տանք, որ $\boxed{f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin \frac{1}{x}}$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ չէ $E = (0, 1]$ բազմության վրա: Ընտրենք երկու հարմար հաջորդականություն՝

$$x'_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0, \quad x''_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) :$$

Մի կողմից՝ $\boxed{|x'_n - x''_n| \rightarrow 0}$, երբ $n \rightarrow \infty$, իսկ մյուս կողմից՝

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = \left| \sin \frac{1}{x'_n} - \sin \frac{1}{x''_n} \right| = \left| \sin \pi n - \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \right| = 1 \geq \varepsilon \quad (n = 1, 2, \dots) :$$

Դարձյալ (3-70) պայմանը հաստատվեց, և ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ չէ $E = (0, 1]$ բազմության վրա:

Թեորեմ 3.20. (Կանդորի թեորեմ)

$\boxed{\text{Փակ հատվածում անընդհատ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է այդ հատվածում:}}$

Ապացույց. Դիցուք $f(x) \in C[a, b]$: Ենթադրենք հակառակը՝ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ չէ $[a, b]$ հատվածում, այսինքն՝ տեղի ունի (3-70) պայմանը.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{և} \quad \exists x'_n, x''_n \in [a, b] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{s.t.}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} |x'_n - x''_n| = 0} \quad \text{և} \quad \boxed{|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon} \quad (n = 1, 2, \dots) :$$

Քանի որ $\{x'_n\} \subset [a, b]$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա ըստ Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի՝ այն պարունակում է զուգամեր ենթահաջորդականություն.

$$\exists \{x'_{n_k}\} \subset \{x'_n\} \quad \text{s.t.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} \stackrel{\text{նշ.}}{=} x_0 \in [a, b] :$$

Այդ դեպքում առաջացած $\{x''_{n_k}\}$ ենթահաջորդականությունը նույնպես կզուգամերի x_0 -ին, որովհետև

$$|x''_{n_k} - x_0| = |x''_{n_k} - x'_{n_k} + x'_{n_k} - x_0| \leq |x''_{n_k} - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - x_0| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) :$$

Ըստ ուսրիկանների կանոնի՝ $x''_{n_k} \rightarrow x_0 \quad (k \rightarrow \infty)$: Այնուհետև, f ֆունկցիայի անընդհատությունը թույլ է տալիս անցնել ֆունկցիային.

$$\begin{cases} x'_{n_k} \rightarrow x_0 \\ x''_{n_k} \rightarrow x_0 \end{cases} \quad (k \rightarrow \infty) \implies \begin{cases} f(x'_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \\ f(x''_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \end{cases} \quad (k \rightarrow \infty) \implies \lim_{k \rightarrow \infty} [f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})] = 0 :$$

Ստացանք հակասություն $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon \quad (n = 1, 2, \dots)$ պայմանի հետ: □

Գլուխ 4

Ֆունկցիայի ածանցյալ և դիֆերենցիալ:

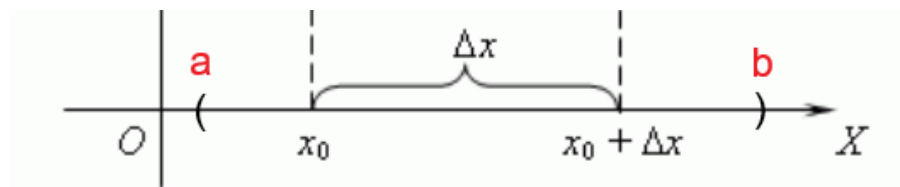
Դիֆերենցելի ֆունկցիաներ

4.1 Ֆունկցիայի ածանցյալ

Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է (a, b) միջակայքում և $x_0 \in (a, b)$ կամայական ֆիքսված կետ է:

Տեղաշարժենք x_0 կետը ոչ զրոյական $\Delta x \neq 0$ մեծությամբ այնպես, որ $x_0 + \Delta x \in (a, b)$:

$\Delta x \neq 0$ մեծությունը կանվանենք **արգումենտի աճ** x_0 **կետում** կամ **անկախ փոփոխականի աճ** x_0 **կետում**:



Գծագիր 4.1. Արգումենտի աճը x_0 կետում

Երբ արգումենտը սրանում է իր Δx աճը (դրական կամ բացասական), ֆունկցիան ևս աճ է սրանում`

$$\Delta f(x_0) = \Delta y \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \Delta f(x_0) \in \mathbb{R},$$

այն կանվանենք **ֆունկցիայի աճ** x_0 **կետում** (տես գծագիր 4.2):

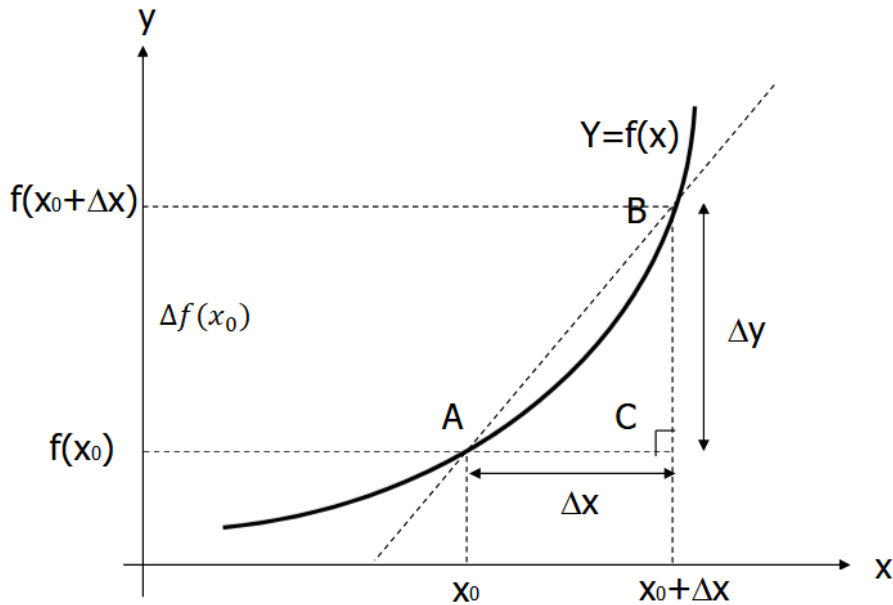
Ֆունկցիայի աճը հարմար միջոց է մասնավորապես ֆունկցիայի անընդհատությունը բնութագրելու համար:

Նշանակենք $x \stackrel{\text{նշ}}{=} x_0 + \Delta x$ և նկատենք, որ $\boxed{(\Delta x \rightarrow 0) \iff (x \rightarrow x_0)}$, ուստի

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0:$$

Սա նշանակում է, որ ֆունկցիայի անընդհատությունը կետում լիովին բնութագրվում է ավյալ կետում ֆունկցիայի աճի անվերջ փոքր լինելու պայմանով՝ $\Delta f(x_0) \rightarrow 0$, կամ $\Delta f(x_0) = o(1)$, երբ $\Delta x \rightarrow 0$:

Ֆունկցիայի աճը վճռական դեր է կատարում մեկ այլ գաղափարի՝ ֆունկցիայի ածանցյալի մեջ:



Գծագիր 4.2. Արգումենտի աճը և ֆունկցիայի աճը x_0 կետում

Քանի որ ֆունկցիաներով կարելի է նկարագրել մեր շուրջը տեսող գրեթե յուրաքանչյուր գործընթաց, կարևոր է հասկանալ այդ գործընթացի արագությունը:

Սկզբում դիտարկենք պարզագույն գծային ֆունկցիաներ՝ $y = g(x) = kx + b$: **Գծագիր 4.3**-ում չորս տարբեր գծային ֆունկցիաներ հավասար են $x = 2$ կետում: Մակայն այնուհետև ֆունկցիաները տարբեր աճերի պարճառով մեկը մյուսին գերազանցում է: Նեշտ է նկատել՝ որքան մեծ է ավյալ գծային ֆունկցիայի k անկյունային գործակիցը, այնքան մեծ է նրա աճը:

Երբ անկախ փոփոխականը սրանում է իր Δx աճը որևէ $x_0 \in \mathbb{R}$ կետում, ապա գծային ֆունկցիան նույն կետում կսրանա

$$\Delta g(x_0) = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = k(x_0 + \Delta x) + b - (kx_0 + b) = k\Delta x$$

աճը, որը կախված չէ x_0 կետից, այսինքն՝ նույնն է բոլոր x_0 կետերում:

Նասրատում $\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$ մեծությունը (այսինքն՝ գծային ֆունկցիայի **թեքությունը** կամ **անկյունային գործակիցը**) կոչվում է գծային ֆունկցիայի **փոփոխման արագություն** կամ **աճման արագություն**: Նենց այս մեծությունն է բնութագրում և չափում ֆունկցիայի աճը (փոփոխությունը): Այս սահմանումը և մոտեցումը գծային ֆունկցիաներից տարածում են առհասարակ բոլոր ֆունկցիաների վրա:



Գծագիր 4.3. Տարբեր գծային ֆունկցիաների փոփոխման արագությունը

$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ հարաբերությունը «միջին հաշվով» բնութագրում է ֆունկցիան, երբ անկախ փոփոխականը փոփոխվում է քանակությամբ x_0 կերպից մինչև $x_0 + \Delta x$:

Սահմանում 4.1. Ֆիքսած x_0 կերպի համար $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ հարաբերությունը կոչվում է $f(x)$ **ֆունկցիայի միջին արագություն** $(x_0, x_0 + \Delta x)$ **միջակայքում**:

Գծային ֆունկցիայի համար միջին արագությունը պարզապես (հաստատվում) արագությունն է : Կամայական ֆունկցիայի համար որքան փոքր լինի $(x_0, x_0 + \Delta x)$ միջակայքը, այսինքն՝ որքան փոքր լինի արգումենտի Δx աճը, այդքան միջին արագությունն ավելի լավ կբնութագրի ֆունկցիայի փոփոխությունը: Այդ պարզաբանումը միջին արագության մեջ ձգտեցնենք Δx աճը զրոյի և սահմանի գոյության դեպքում կստանանք մի մեծություն, որով չափվում է ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը քանակությամբ x_0 կերպում:

Սահմանում 4.2. Ներկայիս սահմանը (այն կարող է գոյություն ունենալ կամ չունենալ)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \stackrel{!}{=} f'(x_0) \quad (4-1)$$

կոչվում է $f(x)$ **ֆունկցիայի ածանցյալ** x_0 **կերպում** կամ էլ $f(x)$ **ֆունկցիայի փոփոխման արագություն** x_0 **կերպում**:

Ֆունկցիայի ածանցյալի համար հաճախ օգտագործում են մեկ այլ նշանակում՝ $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0}$,
ինչն առայժմ ընդունենք լոկ որպես նշանակում, թեև հետագայում սրան այլ մեկնաբանություն կկանք:

Գրենք մի քանի փարրական ֆունկցիաների ածանցյալները:

Օրինակ 4.1. $f(x) \stackrel{def}{=} C = const$, $f'(x) = ?$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} :$$

Օրինակ 4.2. $f(x) \stackrel{def}{=} a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $f'(x) = ?$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^{x_0} \ln a \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} :$$

Վերջում օգտվեցինք նշանակող սահմանից:

Օրինակ 4.3. $f(x) \stackrel{def}{=} \ln x$, $f'(x) = ?$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x_0 + \Delta x}{x_0}}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0}, \quad x_0 > 0 : \end{aligned}$$

Վերջում օգտվեցինք նշանակող սահմանից:

Օրինակ 4.4. $f(x) \stackrel{def}{=} \sin x$, $f'(x) = ?$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \lim_{x \rightarrow x_0} \cos \frac{x+x_0}{2} = \cos x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R} : \end{aligned}$$

Ինչպես ժամանակին սահմանել էինք միակողմանի սահմաններ (աջակողմյան և ձախակողմյան), այժմ էլ սահմանենք միակողմանի ածանցյալներ:

Սահմանում 4.3. Տերմյալ սահմանները

$$\begin{aligned} f'_+(x_0) &\stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \\ f'_-(x_0) &\stackrel{def}{=} \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

համապատասխանաբար կոչվում են $f(x)$ **ֆունկցիայի աջ (աջակողմյան) և ձախ (ձախակողմյան) ածանցյալներ** x_0 **կետում**:

Միակողմանի սահմանների հայտնի հարկություններից հետևում են նույն հարկությունները միակողմանի ածանցյալների համար:

Պնդում 4.1. *ա) Եթե $\exists f'(x_0)$, ապա $\exists f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ և $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$:*

բ) Եթե $\exists f'_+(x_0), f'_-(x_0)$, և $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, ապա $\exists f'(x_0)$ և $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$:

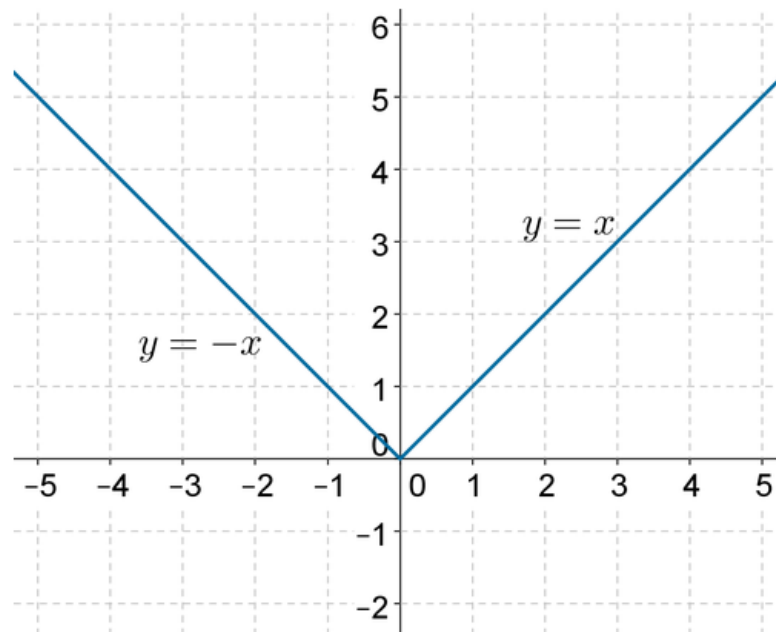
Օրինակ 4.5. Ներազուրենք $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} |x|$ ֆունկցիայի ածանցյալը $x = 0$ կետում՝ $f'(0) = ?$

Գրենք ֆունկցիայի միակողմանի ածանցյալներն $x = 0$ կետում.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x}{x} = -1 :$$

Զանի որ միակողմանի ածանցյալները հավասար չեն՝ $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, ապա Պնդում 4.1ա)-ի համաձայն՝ $f'(0)$ ածանցյալը գոյություն չունի՝ $\nexists f'(0)$:



Գծազիր 4.4. $f(x) = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

Որոշ հիմնական փարրական ֆունկցիաների (ցուցչային, լոգարիթմական, սինուս, կոսինուս) ածանցյալները մենք արդեն դուրս ենք բերել: Ստորև ներկայացնենք բոլոր հիմնական փարրական ֆունկցիաների ածանցյալների աղյուսակը: Ենթադրվում է, որ յուրաքանչյուր բանաձևում x փոփոխականը գրնվում է դիփարկվող ֆունկցիաների որոշման փիրոյթում, անգամ եթե դա բացահայտ նշված չէ:

Հիմնական փարրական ֆունկցիաների ածանցյալների աղյուսակը

$$\begin{array}{llll} (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} & (\alpha \in \mathbb{R}), & \text{մասնավորապես} & C' = 0, \\ (a^x)' = a^x \ln a & (a > 0, a \neq 1), & \text{մասնավորապես} & (e^x)' = e^x, \\ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} & (a > 0, a \neq 1, x > 0), & \text{մասնավորապես} & (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0), \end{array}$$

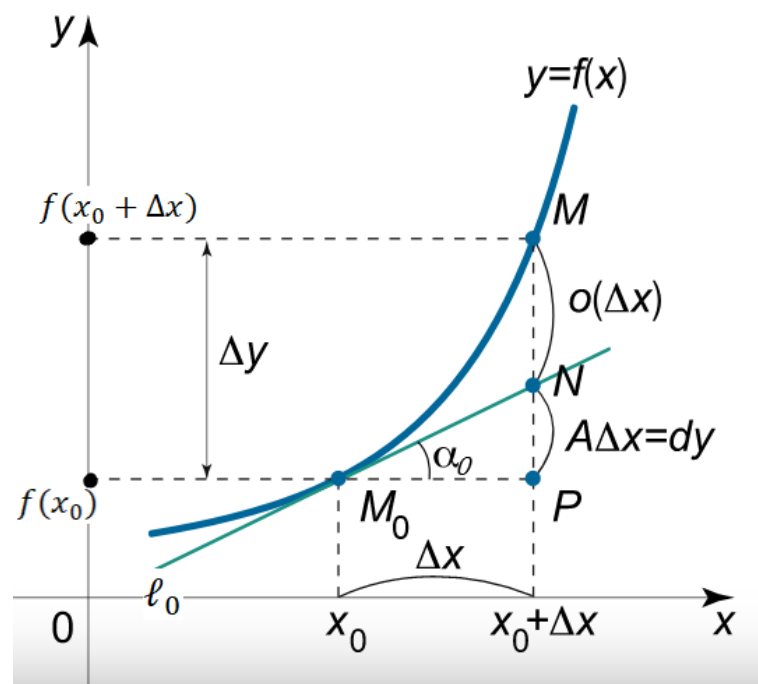
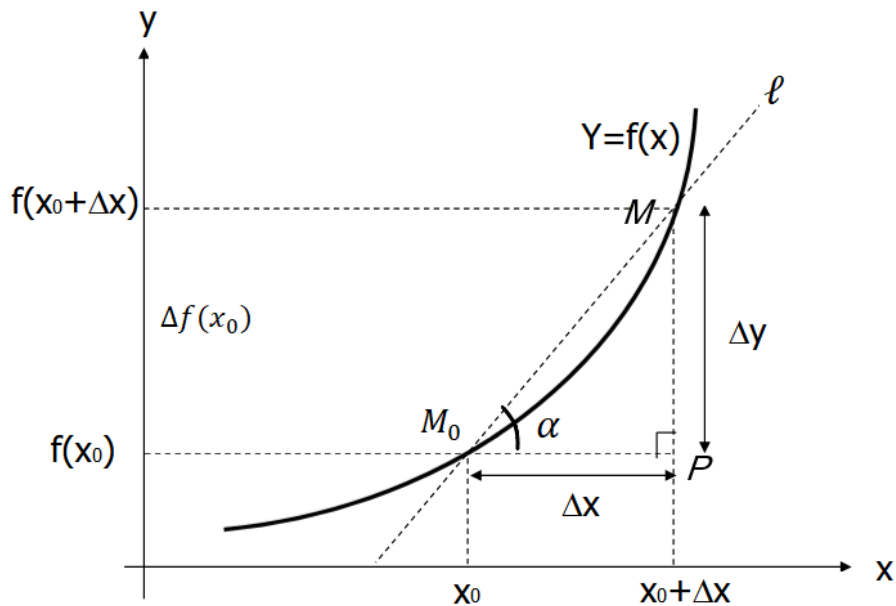
$$\begin{array}{ll} (\sin x)' = \cos x, & (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \\ (\cos x)' = -\sin x, & (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right), & (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \\ (\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} & (x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}), & (\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0), \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (-1 < x < 1), \\ (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & (-1 < x < 1), \\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} & (x \in \mathbb{R}), \\ (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2} & (x \in \mathbb{R}): \end{array}$$

4.2 Ածանցյալի երկրաչափական իմաստը

Ֆունկցիայի գրաֆիկով նրա ածանցյալը պարկերացնելու համար վերցնենք որևէ անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկ, ֆիքսած x_0 կետում նշենք արգումենտի և ֆունկցիայի աճերը, ընդունենք հետևյալ նշանակումները՝

$$y = f(x) \in C(a, b), \quad x_0, x_0 + \Delta x \in (a, b), \quad \Delta x \neq 0, \quad M_0(x_0, f(x_0)), \quad M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) :$$



Պձագիր 4.5. Կետում ածանցյալի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Տանենք $\ell \stackrel{\text{նշ.}}{=} (M_0M)$ ուղիղը, որը կանվանենք **հատող**: Ֆիքսած պահելով M_0 կետը գրաֆիկի վրա՝ M կետը կարող ենք տեղաշարժել և գրաֆիկի վրայով մոտեցնել M_0 -ին, այլ կերպ ասած՝ ձգտել $\Delta x \rightarrow 0$: Պարզ է, որ ℓ հատողը նույնպես փոփոխվելու է:

Սահմանում 4.4. Եթե գոյություն ունի $\ell = (M_0M)$ հատողի սահմանային (M_0N) դիրքը, երբ M կետը, մնալով գրաֆիկի վրա՝ $M \rightarrow M_0$, կամ նույնը՝ $\Delta x \rightarrow 0$, ապա այդ $\ell_0 \stackrel{\text{նշ.}}{=} (M_0N)$ սահմանային ուղիղը կոչվում է $f(x)$ **ֆունկցիայի շոշափող** x_0 (կամ M_0) **կետում**:

Պնդում 4.2. Եթե $\exists f'(x_0)$, ապա գոյություն ունի $f(x)$ ֆունկցիայի շոշափողը x_0 կետում, ընդ որում՝ այդ շոշափողի անկյունային գործակիցը հավասար է $f'(x_0)$ -ին:

Ապացույց. Ինչպես կառուցված է **գծագիր** 4.5-ում, $\ell = (M_0M)$ հատողի և Ox առանցքի (դրական ուղղության) կազմած սուր անկյունը նշանակենք α -ով (հատողի թեքման անկյունն է), այլ կերպ ասած՝ $\triangle M_0MP$ ուղղանկյուն եռանկյան մեջ $\angle M M_0 P \stackrel{\text{նշ.}}{=} \alpha = \alpha(\Delta x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ անկյունն է, որը կախված է M փոփոխական կետից, այսինքն՝ Δx -ից:

$\triangle M_0MP$ ուղղանկյուն եռանկյան մեջ գրենք α սուր անկյան փանգենսը.

$$\operatorname{tg} \alpha(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} :$$

Կարարենք սահմանային անցում, երբ $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) :$$

Քանի որ փանգենս ֆունկցիան անընդհար է, այսպեղից կարելի է եզրակացնել, որ

$$\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) \stackrel{\text{նշ.}}{=} \alpha_0 \quad \text{և} \quad \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha(\Delta x) = \operatorname{tg} \alpha_0 :$$

Սա նշանակում է, որ գոյություն ունի հատողի թեքման անկյան սահմանը, կամ նույնը՝ հատողի սահմանային դիրքը, երբ $\Delta x \rightarrow 0$, այսինքն՝ գոյություն ունի ℓ_0 շոշափողը, որի թեքման անկյունն α_0 -ն է, իսկ անկյունային գործակիցը՝ $k = \operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0)$: □

Որպես հետևանք նշենք, քանի որ շոշափողն անցնում է $M_0(x_0, f(x_0))$ կետով, և նրա անկյունային գործակիցը հավասար է $k = f'(x_0)$, ապա անմիջապես վերականգնվում է շոշափողի հավասարումը.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) :$$

4.3 Ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը և դիֆերենցիալը

Սահմանում 4.5. $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **դիֆերենցելի** x_0 **կետում**, եթե ֆունկցիայի աճը x_0 կետում հնարավոր է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \Delta x + o(\Delta x)}, \quad \text{երբ } \Delta x \rightarrow 0, \quad (4-2)$$

որտեղ $A = \text{const}$ ինչ-որ հաստատուն է (Δx -ից անկախ):

Նկատենք, որ (4-2) ներկայացման մեջ միակ փոփոխականը Δx -ն է, մնացածը հաստատուներ են:

(4-2) ներկայացման աջ կողմում $A \Delta x$ գումարելին հաճախ անվանում են **գլխավոր գծային անդամ**, իսկ վերջին $o(\Delta x)$ գումարելին՝ **մնացորդային անդամ**, որն անվերջ փոքր է՝ $\boxed{o(\Delta x) = \Delta x \cdot o(1)}$, անգամ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր, քան Δx -ը:

Ֆունկցիայի դիֆերենցելիության և (4-2) ներկայացման նշանակությունը երևում է հետևյալ պնդումից:

Պնդում 4.3. $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի ֆունկցիայի ածանցյալը նույն կետում՝ $\exists f'(x_0)$.

$$\left(f(x)\text{-ը դիֆերենցելի է } x_0 \text{ կետում} \right) \iff \left(\exists f'(x_0) \right):$$

Ապացույց. $\implies$ Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում, և ուրեմն ճիշտ է (4-2) ներկայացումը.

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \Delta x + o(\Delta x), \quad \text{երբ } \Delta x \rightarrow 0:$$

Բաժանենք Δx -ի և անցնենք սահմանի, երբ $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + o(1) \implies \exists f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A:$$

$\impliedby$ Դիցուք գոյություն ունի f -ի ածանցյալն x_0 կետում.

$$\begin{aligned} \exists f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} &\implies \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1) \implies \\ \implies \Delta f(x_0) &= f'(x_0) \Delta x + \Delta x o(1) = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x), \quad \text{երբ } \Delta x \rightarrow 0: \end{aligned}$$

(4-2) ներկայացումը սրացված է, և ուրեմն ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում: $\square$

Այսպիսով, ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը և ածանցյալի գոյությունը րվյալ կետում համարժեք պայմաններ են: Ապացույցի ընթացքում գրանք նաև A հաստատունի արժեքը՝ $\boxed{A = f'(x_0)}$:

Ներկայացում 4.1. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում, ապա $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է նույն կետում: Նակադարձ պնդումը սխալ է:

Ապացույց. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում, և ուրեմն ճիշտ է (4-2) ներկայացումը.

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \Delta x + o(\Delta x), \quad \text{երբ } \Delta x \rightarrow 0 :$$

Անցնենք սահմանի, երբ $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 :$$

Ստացանք, որ ֆունկցիայի աճն անվերջ փոքր է, ինչը նշանակում է, որ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում:

Նակադարձը. եթե ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, դա բավարար չէ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության համար: Որպես հակաօրինակ կարելի է բերել $f(x) = |x|$ ֆունկցիան, որն անընդհատ լինելով $x = 0$ կետում, ածանցյալ չունի նույն կետում: $\square$

Դիֆերենցելիության (4-2) ներկայացման մեջ մենք գրանք A հաստատումը՝ $A = f'(x_0)$ և կարող ենք այն փոխարինել (4-2)-ի մեջ.

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x), \quad \text{երբ } \Delta x \rightarrow 0 : \quad (4-3)$$

Երբեմն (4-3) ներկայացումն անվանում են **ֆունկցիայի աճման բանաձև**:

(4-3) ներկայացման աջ կողմի գլխավոր անդամը հապուկ նշանակություն ունի և հապուկ անուն է կրում:

Սահմանում 4.6. $df(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0) \Delta x$ ֆունկցիան կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալ x_0 կետում: Սովորաբար ընդունում են $dx = \Delta x$ նշանակումը (այն կոչվում է անկախ փոփոխականի կամ արգումենտի դիֆերենցիալ), և արդյունքում ֆունկցիայի դիֆերենցիալը ներկայացվում է

$$df(x_0) = f'(x_0) dx$$

տեսքով:

Դիտողություն 4.1. Եթե չֆիքսենք x_0 կետը, ապա դիֆերենցիալը որպես ֆունկցիա ներկայացվում է

$$df(x) = f'(x) dx \quad \text{կամ} \quad dy = f'(x) dx$$

տեսքով: Բայց պետք է հաշվի առնել, որ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը կախված է ոչ միայն x -ից, այլ նաև $dx = \Delta x$ արգումենտի աճից (արգումենտի դիֆերենցիալից): Ստացվեց, որ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը երկու փոփոխականի ֆունկցիա է, և դա շեշտելու համար կարելի է գրել

$$df = df(x, \Delta x) = f'(x) \Delta x :$$

Դիպոդություն 4.2. Նշենք, որ $dx = \Delta x$ նշանակումն արդարացված է նաև փաստացի: Եթե դիֆերենցիալի $df(x) \stackrel{\text{def}}{=} f'(x)\Delta x$ սահմանման մեջ տեղադրենք կոնկրետ $f(x) = x$ գծային ֆունկցիան, ապա կստանանք

$$dx = (x)' dx = \Delta x :$$

Դիպոդություն 4.3. Նաշվի առնելով ֆունկցիայի դիֆերենցիալի սահմանումը՝ $df(x_0) = f'(x_0) dx$, այժմ հասկանալի է դառնում ֆունկցիայի ածանցյալի երկրորդ նշանակումը՝ $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$: Այսպիսով, ածանցյալը կարելի է դիտարկել որպես ֆունկցիայի դիֆերենցիալի և անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալի հարաբերություն:

Ինչպես ածանցյալին, այնպես էլ ֆունկցիայի դիֆերենցիալին կարելի է երկրաչափական մեկնաբանություն տալ: **Գծագիր 4.5**-ում տեսանելի է x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը, այն է՝ ℓ_0 շոշափողի թեքման անկյան փանգենսը՝ $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0$: Նաշվի առնելով ֆունկցիայի դիֆերենցիալի սահմանումը՝

$$df(x_0) = f'(x_0) \Delta x = \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot \Delta x,$$

ստանում ենք **գծագիր 4.5**-ի $\triangle M_0PN$ ուղղանկյուն եռանկյունից, որ $df(x_0) = PN$:

Օգտակար է համեմատել ֆունկցիայի աճը և ֆունկցիայի դիֆերենցիալը x_0 կետում.

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x),$$

$$df(x_0) = f'(x_0) \Delta x :$$

4.4 Դիֆերենցման կանոնները

Նիշում ենք, որ թվաբանական գործողությունները պահպանում են ֆունկցիայի անընհատությունը: Նույնը կարելի է ասել ֆունկցիայի դիֆերենցելիության մասին: Ինչպես սահմանների հետ կարելի է կապարել թվաբանական գործողություններ, այնպես էլ ածանցյալի հետ՝ որոշակի կանոններով:

Թեորեմ 4.1. Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $x_0 \in \mathbb{R}$ կետի որևէ $\mathcal{U}(x_0)$ շրջակայքում և դիֆերենցելի են x_0 կետում, այսինքն՝ $\exists f'(x_0), g'(x_0)$: Այդ դեպքում $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ֆունկցիաները նույնպես դիֆերենցելի են x_0 կետում: Քանորդի դեպքում լրացուցիչ պետք է ենթադրել՝ $g(x_0) \neq 0$: Բացի այդ, x_0 կետում տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը՝

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (4-4)$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', \quad \text{մասնավորապես} \quad (C \cdot f)' = C \cdot f', \quad (4-5)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \quad \text{եթե լրացուցիչ} \quad g(x_0) \neq 0: \quad (4-6)$$

Ապացույց. Բոլոր բանաձևերն ապացուցվում են միաբեռնակ: Ապացուցենք (4-5) արտադրյալի դեպքը:

Նշանակենք $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \cdot g(x)$, վերցնենք արգումենտի Δx աճ և կազմենք F ֆունկցիայի աճը: Քանի որ

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x_0), \quad g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g(x_0),$$

ապա

$$\begin{aligned} \Delta F(x_0) &= F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0) = \\ &= [f(x_0) + \Delta f(x_0)] \cdot [g(x_0) + \Delta g(x_0)] - f(x_0) \cdot g(x_0) = \\ &= f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta g(x_0) + g(x_0) \cdot \Delta f(x_0) + \Delta f(x_0) \cdot \Delta g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0) = \\ &= f(x_0) \cdot \Delta g(x_0) + g(x_0) \cdot \Delta f(x_0) + \Delta f(x_0) \cdot \Delta g(x_0) : \\ \Rightarrow \quad \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} &= f(x_0) \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} + g(x_0) \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} + \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \Delta g(x_0) : \end{aligned}$$

Անցնենք սահմանի, երբ $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} + g(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta g(x_0) :$$

Նաշվի առնելով ածանցյալի սահմանումը և $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta g(x_0) = 0$ ստանում ենք

$$F'(x_0) = f(x_0) g'(x_0) + g(x_0) f'(x_0),$$

ինչը և պահանջվում էր: Մնացած բանաձևերն ապացուցվում են համանման եղանակով: □

Քանի որ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի սահմանման մեջ հիմնական մասնակիցը ֆունկցիայի ածանցյալն է՝

$\boxed{df(x) = f'(x) dx}$, ապա ապացուցված (4-4)-(4-6) բանաձևերը փարաժվում են դիֆերենցիալի վրա:

Ներկանք 4.2. Թեորեմ 4.1-ի պայմաններում տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը՝

$$d(f \pm g) = df \pm dg, \quad (4-7)$$

$$d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg, \quad (4-8)$$

$$\text{մասնավորապես՝} \quad dC = 0 \quad \text{և} \quad d(C \cdot f) = C \cdot df, \quad (4-9)$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}: \quad (4-10)$$

4.5 Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը

Ֆունկցիաների հաջորդ կարևոր գործողությունը համադրույթն է կամ բարդ ֆունկցիան: Նիշում ենք, որ համադրույթը պահպանում է ֆունկցիայի անընհատությունը, և համադրույթում կարելի է սահմանային անցում կատարել: Բնական հարց է առաջանում՝ արդյո՞ք համադրույթը պահպանում է նաև դիֆերենցելիությունը, և ինչպե՞ս ածանցել համադրույթը:

Թեորեմ 4.2. Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է x_0 կետի շրջակայքում և դիֆերենցելի է x_0 կետում, այսինքն $\exists f'(x_0)$, իսկ $x = g(t)$ ֆունկցիան որոշված է t_0 կետի ($x_0 = g(t_0)$) շրջակայքում և դիֆերենցելի է t_0 կետում, այսինքն՝ $\exists g'(t_0)$:

Այդ դեպքում $\boxed{y = F(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(t))}$ բարդ ֆունկցիան նույնպես դիֆերենցելի է t_0 կետում, և բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը հաշվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$\boxed{F'(t_0) = \frac{d}{dt} [f(g(t))]_{t=t_0} = f'(x_0) \cdot g'(t_0)}: \quad (4-11)$$

Ապացույց. Դիցուք t_0 կետում արգումենտը սրանում է Δt ած բավականաչափ փոքր՝ այնքան, որ $t_0 + \Delta t \in \mathcal{V}(t_0)$: Այդ դեպքում $x = g(t)$ ֆունկցիան կստանա $\boxed{\Delta x = g(t_0 + \Delta t) - g(t_0) = \Delta g(t_0)}$ ած, ինչն էլ իր հերթին կհանգեցնի $y = f(x)$ ֆունկցիայի որոշակի Δy աճին x_0 կետում: Գրենք $y = f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության ներկայացումը x_0 կետում (ֆունկցիայի աճի բանաձևը)

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x), \quad \text{երբ} \quad \Delta x \rightarrow 0: \quad (4-12)$$

Նկատենք, որ

$$\Delta F(t_0) = \Delta f(g(t_0)) = f(g(t_0 + \Delta t)) - f(g(t_0)) = f(g(t_0) + \Delta x) - f(g(t_0)) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y:$$

Բաժանենք (4-12) ներկայացումը Δt -ի վրա և հաշվի առնենք, որ $g(t)$ ֆունկցիան անընդհար է t_0 կետում.

$$\Delta x = g(t_0 + \Delta t) - g(t_0) \rightarrow 0, \quad \text{երբ } \Delta t \rightarrow 0,$$

ուսարի

$$\frac{\Delta F(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta f(g(t_0))}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta t}, \quad \text{երբ } (\Delta x \rightarrow 0) \iff (\Delta t \rightarrow 0),$$

$$\frac{\Delta F(t_0)}{\Delta t} = f'(x_0) \frac{\Delta g(t_0)}{\Delta t} + \frac{\Delta g(t_0)}{\Delta t} o(1), \quad \text{երբ } \Delta t \rightarrow 0 :$$

Վերջապես անցնենք սահմանի, երբ $\Delta t \rightarrow 0$.

$$F'(t_0) = f'(x_0) g'(t_0) + g'(t_0) \cdot 0 = f'(x_0) g'(t_0),$$

ինչն ավարտում է ապացույցը: □

Բարդ ֆունկցիայի ածանցման բանաձևի մի փոքր կիրառում ներկայացնենք: Ենթադրենք՝ $f(x) \neq 0$ որևէ միջակայքում և կազմենք $\ln |f(x)|$ բարդ ֆունկցիան:

Սահմանում 4.7. Եթե f -ը դիֆերենցելի է և $f(x) \neq 0$ որևէ միջակայքում, ապա

$$\left(\ln |f(x)| \right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ֆունկցիան կոչվում է $f(x)$ **ֆունկցիայի լոգարիթմական ածանցյալ**:

Նշենք, որ բարդ ֆունկցիան ածանցելուց բացի, կարելի է նրա դիֆերենցիալը գրել՝ օգտվելով (4-11) բանաձևից: Նույն նշանակումները կիրառենք.

$$dy(t) = dF(t) = F'(t) dt = f'(x) g'(t) dt = f'(x) dg(t) = f'(x) dx(t) : \quad (4-13)$$

Ինչպես տեսնում ենք, երբ x անկախ փոփոխականը վերածվում է կախյալ փոփոխականի, դիֆերենցիալը պահպանում է իր ձևը: Սա **դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխելիության հատկությունն է** :

4.6 Նակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալը

Նաջորդ հարցը հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալի գոյությունն է և հաշվելու բանաձևը:

Թեորեմ 4.3. Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան անընդհար է և խիստ մոնոտոն x_0 կետի որևէ $\mathcal{U}(x_0)$ շրջակայքում, նաև դիֆերենցելի է x_0 կետում, ընդ որում՝ $\exists \boxed{f'(x_0) \neq 0}$:

Այդ դեպքում $f^{-1}(y)$ հակադարձ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $y_0 = f(x_0)$ կետում և

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}} \quad \text{կամ նույնը՝} \quad \boxed{\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}} : \quad (4-14)$$

Ապացույց. Թեորեմի պայմաններում մեզ արդեն հայտնի է, որ հակադարձ ֆունկցիան գոյություն ունի և անընդհար է (նաև խիստ մոնոտոն) $y_0 = f(x_0)$ կետի որևէ $\mathcal{V}(y_0)$ շրջակայքում: Ապացուցենք հակադարձ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը y_0 կետում և գտնենք ածանցյալը:

Վերցնենք x_0 կետում արգումենտի $\Delta x \neq 0$ փոքր աճ: Այդ դեպքում $y = f(x)$ ֆունկցիան կստանա

$\boxed{\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$ աճ: Ֆունկցիաների անընդհարությունն ապահովում է

$$\boxed{(\Delta x \rightarrow 0) \iff (\Delta y \rightarrow 0)}$$

համարժեքությունը: Կազմենք ֆունկցիայի աճ, արգումենտի աճ հարաբերությունը և անցնենք սահմանի.

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

ինչը և ապահանջվում էր: □

Նակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևի միջոցով գտնենք որոշ հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալները:

Օրինակ 4.6. Գտնենք $\boxed{y = f(x) = \arctg x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը: Նայրնի են ֆունկցիայի հակադարձը, որոշման և արժեքների տիրույթները.

$$y = f(x) = \arctg x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x = f^{-1}(y) = \operatorname{tg} y : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto \mathbb{R} :$$

Ֆունկցիաների անընդհարությունը և խիստ մոնոտոնությունն առկա են և ուրեմն կարող ենք կիրառել (4-14) բանաձևը.

$$(\arctg x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R} :$$

Օրինակ 4.7. Փորձենք $y = f(x) = \arcsin x$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Նայյունի են ֆունկցիայի հսկողարձը, որոշման և արժեքների տիրույթները.

$$y = f(x) = \arcsin x, \quad x \in (-1, 1), \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x = f^{-1}(y) = \sin y : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto (-1, 1) :$$

Մենք հարուկ բացատրեցինք որոշման տիրույթի ± 1 ծայրակետերը և $\pm \frac{\pi}{2}$ արժեքները, քանի որ ծայրակետերում կարող ենք քննարկել միայն միակողմանի ածանցյալները, մինչդեռ (4-14) բանաձևը նախատեսված չէ ծայրակետերի համար: Ավելի ուշ կվերադառնանք $f'(\pm 1)$ ածանցյալների հարցին: Այժմ կիրառենք (4-14) բանաձևը, ինչպես նաև անհրաժեշտ եռանկյունաչափական բանաձևեր և հարկություններ.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1) :$$

4.7 Բարձր կարգի ածանցյալներ և դիֆերենցիալներ

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է ինչ-որ (a, b) միջակայքում: Դիտարկենք $f'(x)$ ածանցյալը որպես նոր ֆունկցիա (a, b) -ում: Նմարավոր է, որ $f'(x)$ ֆունկցիան նույնպես դիֆերենցելի լինի, և այդ դեպքում կարող ենք այն ածանցել.

$$(f'(x))' \stackrel{\text{նշ.}}{=} f''(x)$$

Ֆունկցիան կոչվում է $f(x)$ **ֆունկցիայի 2-րդ կարգի ածանցյալ** կամ պարզապես $f(x)$ -ի **2-րդ ածանցյալ**: Նմանապես՝ կարող ենք սահմանել 3-րդ, 4-րդ և ավելի բարձր կարգի ածանցյալներ.

$$\boxed{f^{(3)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f''(x))'}, \quad \boxed{f^{(4)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f^{(3)}(x))'}, \quad \dots \quad \dots, \quad \boxed{f^{(n)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f^{(n-1)}(x))'}, \quad n \in \mathbb{N} :$$

Այսպես է սահմանվում ցանկացած n -րդ կարգի ($n \in \mathbb{N}$) **ածանցյալ** պայմանով, որ այդ ածանցյալը գոյություն ունի: Բերենք որոշ տարրական ֆունկցիաների n -րդ կարգի ածանցյալի բանաձևեր, որոնք ստուգվում են անմիջականորեն.

$$\begin{aligned} (e^x)^{(n)} &= e^x, & (\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \\ (a^x)^{(n)} &= a^x (\ln a)^n \quad (a > 0, a \neq 1), & (\cos x)^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \\ (\ln x)^{(n)} &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}, & (x^\alpha)^{(n)} &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1) x^{\alpha-n} : \end{aligned}$$

Բերենք ֆունկցիաների արտադրյալի n -րդ կարգի ածանցյալի **Լայբնիցի բանաձևը**, որը կարելի է ապացուցել մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով.

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)}, \quad n \in \mathbb{N} :$$

Այսպես մասնակցում են Նյուտոնի բինոմական գործակիցները՝ $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n$:

Այժմ սահմանենք բարձր կարգի դիֆերենցիալները: Նշենք, որ 1-ին կարգի դիֆերենցիալը՝

$$df(x) = df(x, \Delta x) = f'(x) dx, \quad dx = \Delta x,$$

առհասարակ կախված է երկու փոփոխականից՝ x կերպից և արգումենտի $dx = \Delta x$ աճից (դիֆերենցիալից): Մենք ցանկանում ենք երկրորդ անգամ վերցնել դիֆերենցիալը: Դրա համար ստիպված ենք ֆիքսել արգումենտի $dx = \Delta x$ աճը (դիֆերենցիալը), ինչից հետո ստացված մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառենք դիֆերենցիալի սահմանումը.

$$d(df(x)) \stackrel{\text{նշ.}}{=} d^2 f(x)$$

կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալ կամ $f(x)$ -ի 2-րդ դիֆերենցիալ:

Նմանապես սահմանում ենք ավելի բարձր n -րդ կարգի դիֆերենցիալները.

$$d^3 f(x) \stackrel{\text{def}}{=} d(d^2 f(x)), \quad d^n f(x) \stackrel{\text{def}}{=} d(d^{n-1} f(x)), \quad n \in \mathbb{N} :$$

Դուրս բերենք բարձր կարգի դիֆերենցիալների համար ավելի հարմար բանաձևեր: Քանի որ պայմանավորվեցինք ֆիքսած պահել արգումենտի $dx = \Delta x$ աճը (դիֆերենցիալը), նրա ածանցյալը կամ դիֆերենցիալը զրո է.

$$(dx)' = 0, \quad d(dx) = 0 :$$

Ներկայացնենք դիֆերենցիալի սահմանման և հարկությունների համաձայն՝

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d[f'(x) dx] = dx \cdot d[f'(x)] = dx \cdot f''(x) dx = f''(x) dx^2 :$$

Գրելաձևի հետ կապված ևս մեկ պայմանավորվածություն ընդունենք. dx^2 նշանակում է $(dx)^2$, ցանկացած ցուցի համար ևս

$$dx^2 = (dx)^2, \quad dx^3 = (dx)^3, \quad \dots, \quad dx^n = (dx)^n :$$

Այսպիսով, 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի համար ապացուցեցինք $d^2 f(x) = f''(x) dx^2$ բանաձևը:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով նույն բանաձևն ապացուցում ենք n -րդ կարգի դիֆերենցիալի համար.

$$d^2 f(x) = f''(x) dx^2, \quad d^3 f(x) = f^{(3)}(x) dx^3, \quad \dots, \quad d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n, \quad n \in \mathbb{N} :$$

Այսպիսով էլ կարելի է բարձր կարգի ածանցյալներն արտահայտել նույն կարգի դիֆերենցիալի միջոցով.

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \quad n \in \mathbb{N} :$$

4.8 Դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական թեորեմները:

Ֆերմայի թեորեմը

Ֆունկցիաների վարքի հետազոտումը փարբեր առումներով մաթեմատիկական անալիզի հիմնական նպատակներից մեկն է: Ֆունկցիաների բազմաթիվ հատկություններ շարժառարար է նկարագրել ածանցյալի կամ դիֆերենցելիության փերմիներով: Նաջորդող մի քանի թեորեմներում ածանցյալի փերմիներով նկարագրվում են ֆունկցիաների կարևոր հատկություններ:

Վերիիշենք դարոցական դասընթացից ծանոթ ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի հասկացությունները:

Սահմանում 4.8. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է (a, b) միջակայքում:

ա) $x_0 \in (a, b)$ կերը կոչվում է $f(x)$ **ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի կեր**, կգրենք $\boxed{x_0 = x_{\max}}$, եթե գոյություն ունի x_0 կերի որևէ շրջակայք, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքն ընդունում է x_0 կերում, այսինքն՝

$$\exists \mathcal{U}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \text{s.t.} \quad \boxed{f(x_0) \geq f(x)} \quad \forall x \in \mathcal{U}(x_0) : \quad (4-15)$$

բ) $x_0 \in (a, b)$ կերը կոչվում է $f(x)$ **ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կեր**, կգրենք $\boxed{x_0 = x_{\min}}$, եթե գոյություն ունի x_0 կերի որևէ շրջակայք, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան իր փոքրագույն արժեքն ընդունում է x_0 կերում, այսինքն՝

$$\exists \mathcal{U}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \text{s.t.} \quad \boxed{f(x_0) \leq f(x)} \quad \forall x \in \mathcal{U}(x_0) : \quad (4-16)$$

գ) Ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի և մինիմումի կերերը մեկ միասնական փերմինով կոչում են **ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կերեր**:

Ֆունկցիայի $f(x_0)$ արժեքը լոկալ մաքսիմումի (մինիմումի) կերում կոչվում է **ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի արժեք (մինիմումի արժեք)** կամ պարզապես **ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմում (մինիմում)**, կամ էլ միասնական փերմինով՝ **ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմում**:

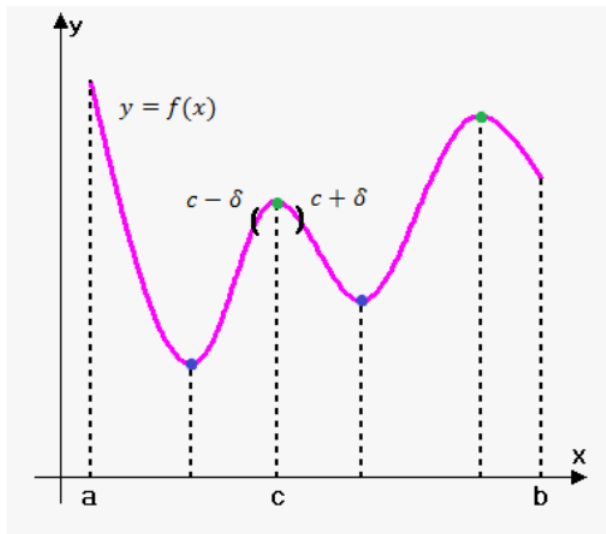
«Լոկալ» նշանակում է, որ երևույթը կրում է փեղային բնույթ: Երբ երկիմասարություն չկա, լոկալ բնութագրումը հաճախ բաց են թողնում և ասում պարզապես **մաքսիմումի (մինիմումի, էքստրեմումի) կեր**:

Եթե (4-15)-(4-16) պայմաններում անհավասարության ոչ խիստ նշանը փոխարինենք խիստ նշանով, ապա ստացված

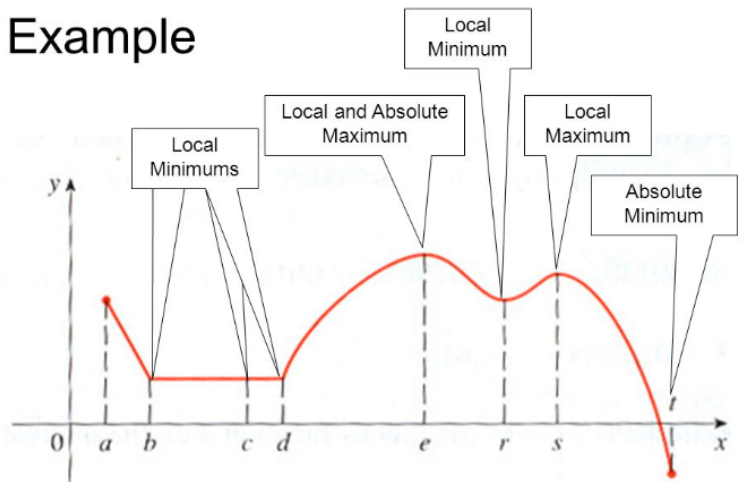
$$\exists \mathcal{U}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \text{s.t.} \quad \boxed{f(x_0) > f(x)} \quad \forall x \in \mathcal{U}(x_0), x \neq x_0, \quad (4-17)$$

$$\exists \mathcal{U}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \text{s.t.} \quad \boxed{f(x_0) < f(x)} \quad \forall x \in \mathcal{U}(x_0), x \neq x_0, \quad (4-18)$$

պայմանները բավարարող x_0 կետերը համապատասխանաբար կանվանենք $f(x)$ **ֆունկցիայի խիստ մաքսիմումի և մինիմումի կետեր**:



Example



Պատկեր 4.6. Ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետեր և էքստրեմումներ

Թեորեմ 4.4. (Ֆերմայի թեորեմ)

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է (a, b) միջակայքում և $c \in (a, b)$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է c կետում՝ $\exists f'(c)$, ապա $f'(c) = 0$:

Ապացույց. Ենթադրենք c կետը $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի կետ է՝ $x_{\max} = c$, այսինքն՝

$$\exists \mathcal{U}(c) \stackrel{\text{def}}{=} (c - \delta, c + \delta) \text{ շրջակայք } s.t. \quad \boxed{f(c) \geq f(x)} \quad \forall x \in \mathcal{U}(c) :$$

Գրենք c կետում $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան և ձախակողմյան ածանցյալների սահմանումը (դրանք հավասար են) և գնահատելով հասկանանք դրանց նշանը.

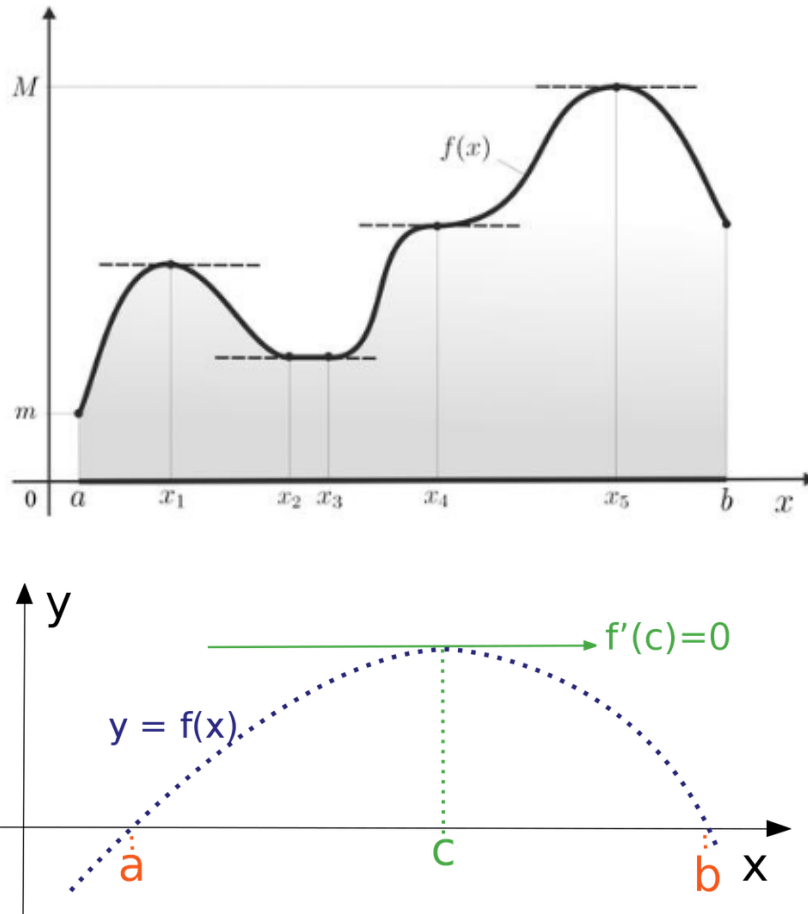
$$\begin{aligned} f'(c) = f'_+(c) &= \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0, & \text{քանի որ } x > c, \quad f(x) \leq f(c), \\ f'(c) = f'_-(c) &= \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, & \text{քանի որ } x < c, \quad f(x) \leq f(c) : \end{aligned}$$

Ներկայացնելով, $0 \leq f'(c) \leq 0$, ուրեմն $f'(c) = 0$:

Լոկալ մինիմումի դեպքն ապացուցվում է նույն եղանակով:

□

Դիպողություն 4.4. Ֆերմայի թեորեմն ունի երկրաչափական հստակ իմաստ, այն է՝ եթե ներքին էքստրեմումի կետում գոյություն ունի $f(x)$ ֆունկցիայի (գրաֆիկի) շոշափող, ապա այդ շոշափողը զուգահեռ է աքսիսների առանցքին:



Պատկեր 4.7. Ֆերմայի թեորեմի պատկերումը

Դիպողություն 4.5. Լոկալ էքստրեմումի կետերը սահմանելիս և հետազայում քննարկելիս դրանք միշտ համարելու ենք որոշման տիրույթի ներքին կետեր, այլ ոչ թե ծայրակետեր: Բերված սահմանումները և հաջորդող հատկությունները չեն վերաբերում որոշման տիրույթի ծայրակետերին: Ծայրակետերի խնդիրը քննարկման առանձին հարց է, որին կանոնադրաբար ավելի ուշ:

Դիպողություն 4.6. Ներառալում այն c կետը, որտեղ ֆունկցիայի ածանցյալը զրո է՝ $f'(c) = 0$, կանվանենք **ստացիոնար կետ**: Սա **կրիտիկական կետ** հատուկ դեպք է: Այս տերմինների միջոցով Ֆերմայի թեորեմը կարելի է ձևակերպել այսպես՝

Եթե ներքին էքստրեմումի կետում ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա այդ կետը ստացիոնար է:

4.9 Ռոլլի թեորեմը

Թեորեմ 4.5. (Ռոլլի թեորեմ)

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ փակ հատվածում և դիֆերենցելի է (a, b) բաց միջակայքում, իսկ ծայրակետերում հավասար արժեքներ է ընդունում: Այդ դեպքում գոյություն ունի ինչ-որ $c \in (a, b)$ միջանկյալ կետ, որտեղ $f'(c) = 0$:

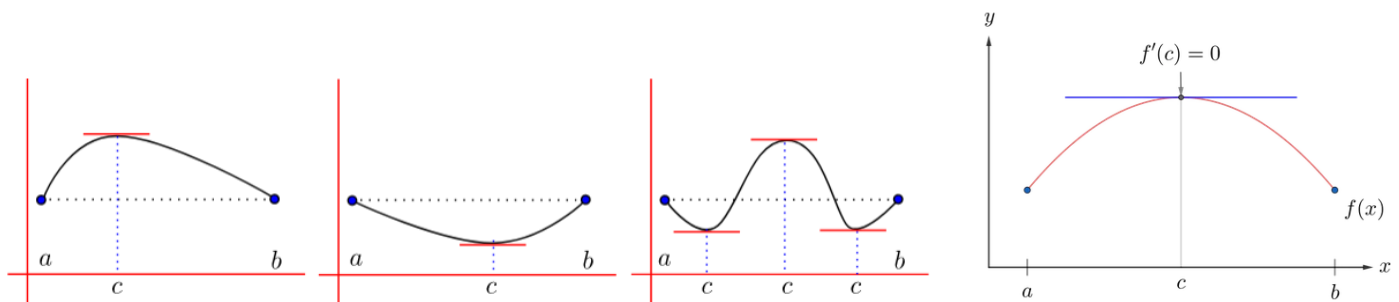
$$\left(\begin{array}{l} f(x) \in C[a, b], \\ f\text{-ը դիֆերենցելի է } (a, b)\text{-ում,} \\ f(a) = f(b) \end{array} \right) \implies \left(\exists c \in (a, b) \quad \text{s.t.} \quad f'(c) = 0 \right):$$

Ապացույց. Վայելիք պրասի 2-րդ թեորեմի համաձայն՝ f ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները $[a, b]$ -ում:

$$\exists \boxed{\max_{a \leq x \leq b} f(x) \stackrel{\text{նշ.}}{=} M}, \quad \exists \boxed{\min_{a \leq x \leq b} f(x) \stackrel{\text{նշ.}}{=} m}:$$

Եթե $\boxed{m = M}$, ապա ֆունկցիան հասարարուն է, և ուրեմն $f'(c) = 0 \quad \forall c \in (a, b)$:

Եթե $\boxed{m < M}$, ապա նկատենք, որ այն կետերը, որտեղ ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, գտնվում են կամ միջակայքի ներսում, կամ a և b ծայրակետերում: Նաշվի առնելով $f(a) = f(b)$ պայմանը՝ (a, b) միջակայքի ներսում գոյություն ունի գոնե մեկ ներքին էքստրեմումի (մաքսիմումի կամ մինիմումի) կետ (տես **գծագիր 4.8**). $\exists c \in (a, b) \quad \text{s.t.} \quad c = x_{\max}$ կամ $c = x_{\min}$: Ըստ Ֆերմայի թեորեմի՝ $f'(c) = 0$: □



Գծագիր 4.8. Ռոլլի թեորեմի պարկերումը

Դիտողություն 4.7. Ռոլլի թեորեմի երկրաչափական իմաստն այն է, որ եթե դիֆերենցելի ֆունկցիան ծայրակետերում հավասար արժեքներ է ընդունում, ապա առնվազն մեկ ներքին կետում տարված շոշափողը զուգահեռ է արագիսների առանցքին:

4.10 Լագրանժի թեորեմը վերջավոր աճերի մասին

Լագրանժն առաջարկեց Ռոլլի թեորեմում հանել ծայրակետերում հավասարության պայմանը և ստացավ շարժական օգտակար մի բանաձև:

Թեորեմ 4.6. (Լագրանժի թեորեմը վերջավոր աճերի կամ միջին արժեքի մասին)

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ փակ հատվածում և դիֆերենցելի է (a, b) բաց միջակայքում: Այդ դեպքում գոյություն ունի ինչ-որ $c \in (a, b)$ միջանկյալ կետ այնպիսին, որ

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

$$\left(\begin{array}{l} f(x) \in C[a, b], \\ f\text{-ը դիֆերենցելի է } (a, b)\text{-ում} \end{array} \right) \implies \left(\exists c \in (a, b) \quad s.t. \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \right):$$

Ապացույց. Ներմուծենք օժանդակ ֆունկցիա՝ $\varphi(x) \stackrel{def}{=} f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b]:$

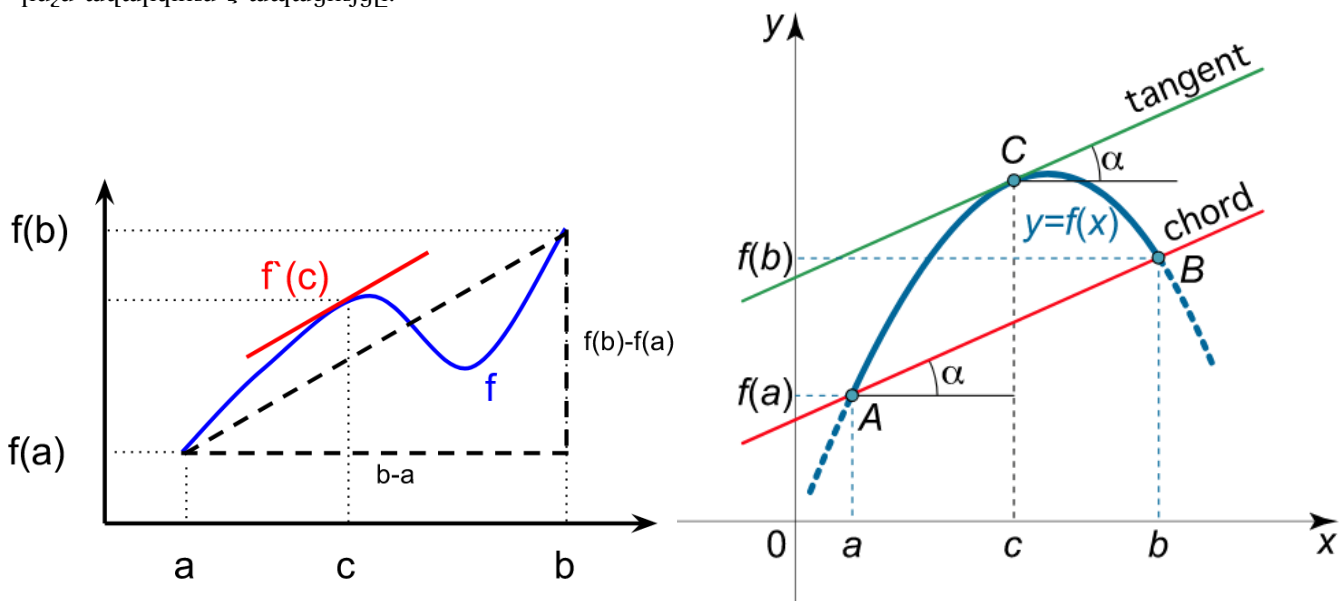
Պարզ է, որ ինչպես f -ը, $\varphi(x)$ ֆունկցիան ևս անընդհատ է $[a, b]$ փակ հատվածում և դիֆերենցելի է (a, b) բաց միջակայքում: Բացի այդ, φ -ն ծայրակետերում հավասար արժեքներ է ընդունում.

$$\varphi(a) = f(a), \quad \varphi(b) = f(b) \implies \boxed{\varphi(a) = \varphi(b)}:$$

Այսպիսով, $\varphi(x)$ ֆունկցիան բավարարում է Ռոլլի թեորեմի բոլոր պայմանները, ըստ որի՝

$$\exists c \in (a, b) \quad s.t. \quad 0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ինչն ավարտում է ապացույցը: □



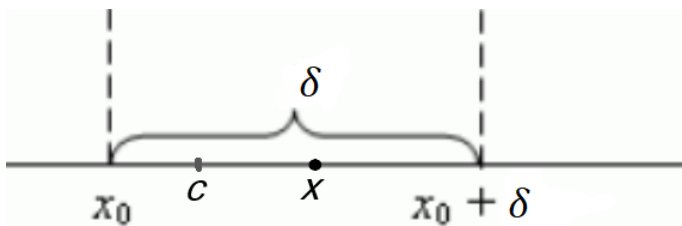
Գծազիր 4.9. Լագրանժի թեորեմի պարզեցումը

Դիպոդություն 4.8. *Լագրանժի թեորեմի երկրաչափական իմաստն այն է, որ թեորեմի պայմաններում միշտ կարելի է գտնել $c \in (a, b)$ ներքին միջանկյալ կետ, որում տարված շոշափողը զուգահեռ է գրաֆիկի $(a, f(a))$ և $(b, f(b))$ ծայրակետերը միացնող լարին: Լագրանժի բանաձևը հաստատում է այդ երկու ուղիղների անկյունային գործակիցների հավասարությունը:*

Ներևանք 4.3. *Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետի աջակողմյան (փակ) շրջակայքում՝ $f(x) \in C[x_0, x_0 + \delta]$ ($\delta > 0$), և դիֆերենցելի է այդ միջակայքի ներսում:*

Եթե գոյություն ունի ածանցյալի աջակողմյան սահմանը x_0 կետում՝ $\exists f'(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x)$ (թույլատրված է անգամ $= \infty$ դեպքը), ապա $\exists f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$, այսինքն՝ x_0 կետում աջակողմյան ածանցյալը և ածանցյալի աջակողմյան սահմանը հավասար են:

Ապացույց. Վերցնենք բավականաչափ նեղ հատված $[x_0, x] \subset [x_0, x_0 + \delta]$ կամայական x ($x_0 < x < x_0 + \delta$) կետի համար և այդ միջակայքում կիրառենք Լագրանժի թեորեմը.



$$\exists c \in (x_0, x) \quad \text{s.t.}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

Գծագիր 4.10. x_0 կետի աջակողմյան շրջակայք

Քանի որ գոյություն ունի ածանցյալի աջակողմյան սահմանը, կարող ենք անցնել սահմանի աջից և նկատենք, որ $x \rightarrow x_0 + 0 \implies c \rightarrow x_0 + 0$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(c) = \lim_{c \rightarrow x_0 + 0} f'(c) = f'(x_0 + 0),$$

այսինքն՝ $f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$: □

Նմանապես ձևակերպվում և ապացուցվում է ձախակողմյան դեպքը:

Ներևանք 4.4. *Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետի ձախակողմյան (փակ) շրջակայքում՝ $f(x) \in C[x_0 - \delta, x_0]$ ($\delta > 0$), և դիֆերենցելի է այդ միջակայքի ներսում:*

Եթե գոյություն ունի ածանցյալի ձախակողմյան սահմանը x_0 կետում՝ $\exists f'(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x)$ (թույլատրված է անգամ $= \infty$ դեպքը), ապա $\exists f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0)$, այսինքն՝ x_0 կետում ձախակողմյան ածանցյալը և ածանցյալի ձախակողմյան սահմանը հավասար են:

Ներկանք 4.5. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է (a, b) միջակայքում: Այդ դեպքում (a, b) -ում $f'(x)$ ածանցյալը չի կարող ունենալ 1-ին կարգի խզման կետեր (այլ միայն 2-րդ կարգի):

Ապացույց. Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է ,

$$\boxed{f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)} \quad \forall x_0 \in (a, b) :$$

Ենթադրենք հակառակը՝ $f'(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում 1-ին կարգի խզում ունի, ուրեմն միակողմանի սահմաններ ունի. $\exists f'(x_0 + 0), \quad \exists f'(x_0 - 0)$: Ըստ պայմանի և նախորդ Ներկանքներ 4.3-4.4-ի՝

$$\begin{aligned} f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0), \\ f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0) \end{aligned} \implies f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0) :$$

Սրացվեց, որ $f'(x)$ ֆունկցիան անընդհար է x_0 կետում, ինչը հակասում է ենթադրությանը:

Այսպիսով, $f'(x)$ ֆունկցիան կան անընդհար է , կան 2-րդ կարգի խզումներ ունի: □

4.11 Կոշու թեորեմը վերջավոր աճերի մասին

Լագրանժի թեորեմը կարելի է ընդհանրացնել այնպես, որ բանաձևում մասնակցեն երկու ֆունկցիաներ:

Թեորեմ 4.7. (Կոշու թեորեմը վերջավոր աճերի մասին)

Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաներն անընդհար են $[a, b]$ փակ հատվածում և դիֆերենցելի են (a, b) բաց միջակայքում, ընդ որում՝ g -ի ածանցյալը զրոներ չունի: Այդ դեպքում գոյություն ունի ինչ-որ $c \in (a, b)$ միջանկյալ կետ այնպիսին, որ
$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}} .$$

$$\left(\begin{aligned} &f(x), g(x) \in C[a, b], \\ &f(x), g(x)\text{-ն դիֆերենցելի են } (a, b)\text{-ում,} \\ &g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \end{aligned} \right) \implies \left(\exists c \in (a, b) \quad s.t. \quad \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}} \right) : \quad (4-19)$$

Ապացույց. Նախ և առաջ նկարենք, որ ապացուցվող (4-19) բանաձևում հայտարարները զրո չեն: Իսկապես, ենթադրենք հակառակը՝ $g(b) = g(a)$: Այդ դեպքում $g(x)$ ֆունկցիայի նկարմամբ կիրառենք Ռոլի թեորեմը $[a, b]$ հատվածում.

$$\exists c_0 \in (a, b) \quad s.t. \quad g'(c_0) = 0 ,$$

ինչը հակասում է թեորեմի պայմաններին: Այսպիսով, ապացուցվող (4-19) բանաձևը կոռեկտ է : Այն ապացուցելու համար ներմուծենք օժանդակ ֆունկցիա՝

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)), \quad x \in [a, b] :$$

Պարզ է, որ $\varphi(x)$ ֆունկցիան ևս անընդհատ է $[a, b]$ փակ հատվածում և դիֆերենցելի է (a, b) բաց միջակայքում: Բացի այդ, φ -ն ծայրակետերում հավասար արժեքներ է ընդունում.

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= f(a) \\ \varphi(b) &= f(b) \end{aligned} \implies \boxed{\varphi(a) = \varphi(b)} :$$

Այսպիսով, $\varphi(x)$ ֆունկցիան բավարարում է Ռոլի թեորեմի բոլոր պայմանները, ըստ որի՝

$$\exists c \in (a, b) \quad \text{s.t.} \quad 0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) \implies \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

ինչն ավարտում է ապացույցը: □

4.12 Լոպիտալի կանոնը

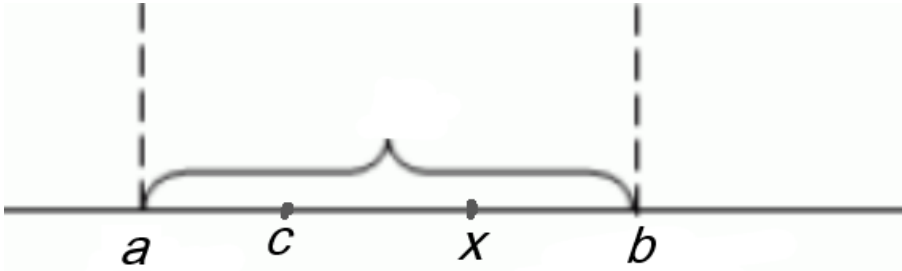
Նաճախ են հանդիպում $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ տեսքի սահմաններ, որտեղ համարիչում և հայտարարում գտնվող ֆունկցիաներն անվերջ փոքր են a կետում՝ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$: Այսպիսի կոտորակները կանվանենք **$\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշություններ** a կետում: Նաջորդ թեորեմը մեզ տալիս է մի կանոն, որով շատ դեպքերում հնարավոր է հաշվել $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշության սահմանը: Առաջին անգամ նշված կանոնը հայտնաբերել է Յոհան Բեռնուլի, իսկ հրապարակել՝ Գ. Լոպիտալը: Կարճ ձևակերպմամբ՝ Բեռնուլի-Լոպիտալի կանոնը պնդում է, որ որոշակի պայմանների դեպքում **երկու ֆունկցիաների հարաբերության սահմանը հավասար է այդ ֆունկցիաների ածանցյալների հարաբերության սահմանին**:

Թեորեմ 4.8. (*Լոպիտալի կանոնը $\frac{0}{0}$ անորոշությունը բացելու համար*)

$$\left(\begin{aligned} &f(x), g(x) \text{-ն դիֆերենցելի են } (a, b) \text{-ում,} \\ &g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b), \\ &\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \\ &\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{\text{նշ.}}{=} K \quad (K = \infty \text{ դեպքը թույլատրվում է}) \end{aligned} \right) \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K} :$$

Ապացույց. Նշենք, որ բոլոր հիշարակված սահմաններն աջակողմյան են: Տարածենք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները $x = a$ կետի վրա՝ սահմանելով $f(a) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, $g(a) \stackrel{\text{def}}{=} 0$: Այդ դեպքում $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները կդառնան անընդհատ $[a, b]$ հատվածում՝ $f(x), g(x) \in C[a, b]$: Սա հնարավորություն է տալիս կամայական $[a, x] \subset [a, b]$ հատվածում կիրառել Կոշու թեորեմը վերջավոր աճերի մասին.

$$\exists c = c(x) \in (a, x) \quad s.t. \quad \boxed{\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}} \implies \boxed{\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}} : \quad (4-20)$$



Գծազիր 4.11. a կետի աջակողմյան շրջակայք

Նկատենք, որ (4-20) բանաձևում $g(x)$ հայտարարը զրո լինել չի կարող: Իսկապես, եթե որևէ $x \in (a, b)$ կետում $g(x) = 0$, ապա $[a, x]$ հատվածում կարող ենք կիրառել Ռոլի թեորեմը.

$$\begin{aligned} g(a) = 0 \\ g(x) = 0 \end{aligned} \implies \boxed{g(a) = g(x)} \implies \exists c_0 \in (a, x) \quad s.t. \quad g'(c_0) = 0,$$

ինչը հակասում է թեորեմի պայմաններին:

Այժմ սահմանային անցում կատարենք (4-20)-ում, երբ $x \rightarrow a$, ինչից բխում է $c \rightarrow a$ և

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K,$$

քանի որ վերջին սահմանը գոյություն ունի ըստ պայմանի: Նշենք, որ $\lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ սահմանը $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$ սահմանի մասնակի սահման է՝ բնականաբար սահմանի նույն արժեքով: $\square$

Դիտողություն 4.9. Աջակողմյան սահմանի փոխարեն Թեորեմ 4.8-ում նույն հաջողությամբ կարելի է դիտարկել ձախակողմյան կամ սովորական երկկողմյան սահմաններ: Բացի այդ, a կետը կարող է անվերջ լինել: Յույց տանք այդ դեպքը:

Թեորեմ 4.9. (Լոպիտալի կանոնը $\frac{0}{0}$ անորոշությունը բացելու համար)

$$\left(\begin{array}{l} f(x), g(x) \text{-ն դիֆերենցելի են } [b, +\infty) \text{-ում,} \\ g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [b, +\infty), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \\ \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{\text{նշ.}}{=} K \quad (K = \infty \text{ դեպքը թույլատրվում է}) \end{array} \right) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K} :$$

Ապացույց. Ապացույցը հանգում է նախորդ թեորեմին: Կարարենք փոփոխականի փոխարինում՝

$t = \frac{1}{x} \rightarrow +0$, երբ $x \rightarrow +\infty$: Այդ դեպքում կիրառենք Թեորեմ 4.8-ի Լոպիտալի կանոնը և բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\frac{d}{dt} f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{d}{dt} g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \left(\frac{1}{t}\right)'}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \left(\frac{1}{t}\right)'} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K :$$

□

Լոպիտալի կանոնը կիրառելի է ոչ միայն $\frac{0}{0}$ տեսքի, այլ նաև $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշությունների համար:

Ձևակերպենք առանց ապացույցի կանոնի այդ դեպքը:

Թեորեմ 4.10. (Լոպիտալի կանոնը $\frac{\infty}{\infty}$ անորոշությունը բացելու համար)

$$\left(\begin{array}{l} f(x), g(x) \text{-ն դիֆերենցելի են } (a, b] \text{-ում,} \\ g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b], \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty, \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{\text{նշ.}}{=} K \quad (K = \infty \text{ դեպքը թույլատրվում է}) \end{array} \right) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K} :$$

4.13 Թեյլորի բանաձևը:

Թեյլորի բանաձևը բազմանդամի համար

Դիցուք տրված է n -րդ աստիճանի կամայական բազմանդամ՝

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k, \quad a_n \neq 0, \quad \deg P = n :$$

Գրենք P բազմանդամի ածանցյալները $x = 0$ կետում.

$$\begin{aligned} P(0) &= a_0, & a_0 &= P(0), \\ P'(0) &= a_1, & a_1 &= P'(0), \\ P''(0) &= 2 \cdot a_2, & a_2 &= \frac{P''(0)}{2!}, \\ P^{(3)}(0) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3, & a_3 &= \frac{P^{(3)}(0)}{3!}, \\ &\dots\dots & &\dots\dots \\ P^{(n)}(0) &= n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot a_n, & a_n &= \frac{P^{(n)}(0)}{n!} : \end{aligned}$$

Գործակիցներն արտահայտվեցին P բազմանդամի ածանցյալներով $x = 0$ կետում: Տեղադրենք դրանք P բազմանդամի մեջ.

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k : \quad (4-21)$$

Այսպես պայմանավորվենք, որ $k = 0$ կարգի ածանցյալը հենց ինքը՝ ֆունկցիան է՝ $P^{(0)}(x) = P(x)$:

Ցանկության դեպքում P բազմանդամը կարելի է վերլուծել ոչ թե x -ի աստիճաններով, այլ $(x - x_0)$ -ի աստիճաններով, որպեսզի $x_0 \in \mathbb{R}$ կետը կամայական է և ֆիքսած: Այդ նպատակով փոփոխականի փոխարինում կատարենք՝ $t \stackrel{\text{նշ.}}{=} x - x_0$ և սահմանենք նոր բազմանդամ՝ t -ից կախված.

$$Q(t) \stackrel{\text{def}}{=} P(x) = P(t + x_0) : \quad (4-22)$$

Վերլուծենք Q բազմանդամը $t = 0$ կետում՝ համաձայն (4-21) բանաձևի.

$$\begin{aligned} P(x) &= P(t + x_0) = Q(t) = Q(0) + \frac{Q'(0)}{1!}t + \frac{Q''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{Q^{(n)}(0)}{n!}t^n = \\ &= P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \end{aligned}$$

որպեսզի P և Q բազմանդամների ածանցյալներն արտահայտվում են մեկը մյուսով ըստ (4-22)-ի.

$$Q^{(k)}(t) = P^{(k)}(t + x_0), \quad Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(x_0), \quad k = \overline{0, n} :$$

Այսպիսով, եզրակացնենք, որ ցանկացած $P(x)$ բազմանդամ ցանկացած $x_0 \in \mathbb{R}$ կետի շրջակայքում կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots + A_n(x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4-23)$$

որպեսզի գործակիցները՝ $A_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = \overline{0, n} :$ (4-24)

Իսկ եթե $P(x)$ բազմանդամն արդեն ներկայացված է (4-23) տեսքով, ապա նրա A_k գործակիցները կարելի է արտահայտել (4-24) բանաձևերով (դա ստանում ենք P -ն ածանցելով):

4.14 Թեյլորի բանաձևը ֆունկցիաների համար

Նախքան կամայական ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևին անցնելը մեզ հարկավոր են մի քանի սահմանումներ և արդյունքներ:

Սահմանում 4.9. Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան **անընդհատ դիֆերենցելի է** կամ **ոդորկ** $X \subset \mathbb{R}$ **բազմության մեջ**, կգրենք $\boxed{f(x) \in C^1(X)}$, եթե f -ը դիֆերենցելի է X բազմության մեջ, և ավելին՝ նրա ածանցյալն **անընդհատ է**՝ $f'(x) \in C(X)$:

C^1 -ը կանվանենք **ոդորկ ֆունկցիաների դաս**:

Սահմանում 4.10. Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան **2 անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է** $X \subset \mathbb{R}$ **բազմության մեջ**, կգրենք $\boxed{f(x) \in C^2(X)}$, եթե f -ը 2 անգամ դիֆերենցելի է X բազմության մեջ, այսինքն՝ $\exists f''(x)$, և ավելին՝ $f''(x) \in C(X)$:

Սահմանում 4.11. Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան n **անգամ** ($n \in \mathbb{N}$) **անընդհատ դիֆերենցելի է** $X \subset \mathbb{R}$ **բազմության մեջ**, կգրենք $\boxed{f(x) \in C^n(X)}$, եթե $\exists f^{(n)}(x) \in C(X)$:

Սահմանում 4.12. Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան **անվերջ դիֆերենցելի է** $X \subset \mathbb{R}$ **բազմության մեջ**, կգրենք $\boxed{f(x) \in C^\infty(X)}$, եթե գոյություն ունի f -ի ցանկացած կարգի ածանցյալ՝ $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists f^{(n)}(x)$:

Ինչպես ապացուցել էինք, դիֆերենցելիությունն ավելի ուժեղ հատկություն է, քան անընդհատությունը, այլ կերպ ասած՝ դիֆերենցելիությունից հետևում է անընդհատությունը, իսկ հակադարձը՝ ոչ: Ներկայումս հենց նոր սահմանված տարբեր դասերի միջև կարելի է հաստատել ներդրումներ.

$$C^\infty(X) \subset C^n(X) \subset \dots \subset C^3(X) \subset C^2(X) \subset C^1(X) \subset C(X) :$$

Լեմմա 4.1. Դիցուք $g(x)$ ֆունկցիան որոշված է $x_0 \in \mathbb{R}$ կետի որևէ $\mathcal{U}(x_0)$ շրջակայքում: Նաև

$$g(x) \in C^{n-1}(\mathcal{U}(x_0)), \quad \exists g^{(n)}(x_0), \quad g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) = 0 :$$

Այդ դեպքում $\boxed{g(x) = o((x - x_0)^n)}$, երբ $x \rightarrow x_0$:

Ապացույց. Կազմենք պահանջվող սահմանը և նկարենք, որ այն $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշություն է : Նաշվենք այդ սահմանը՝ $n - 1$ անգամ կիրառելով Լոպիտալի կանոնը.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g''(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} :$$

Եթե լրացուցիչ հայտնի լիներ $g(x)$ ֆունկցիայի n -րդ կարգի ածանցյալի գոյությունը x_0 կետի շրջակայքում, ապա $g(x) \in C^n(\mathcal{U}(x_0))$, ապա այստեղ հնարավոր կլիներ ևս մեկ անգամ կիրառել Լոպիտալի կանոնը և ավարտել ապացույցը: Այժմ լեմմայի պայմաններում ապացույցը շարունակելու համար օգտվենք n -րդ կարգի ածանցյալի սահմանումից.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{n!} g^{(n)}(x_0) = 0 :$$

Ներկայարար՝

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = o(1) \quad \implies \quad g(x) = o((x - x_0)^n), \quad \text{երբ } x \rightarrow x_0,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: □

Այժմ վերադառնանք Թեյլորի բանաձևի խնդրին: Դիտարկենք $x_0 \in \mathbb{R}$ կետի $\mathcal{U}(x_0)$ շրջակայքում $n - 1$ անգամ ($n \in \mathbb{N}$) անընդհար դիֆերենցելի է որևէ ֆունկցիա՝ $\boxed{f(x) \in C^{n-1}(\mathcal{U}(x_0))}$, և բացի այդ՝ $\exists f^{(n)}(x_0)$:

Կազմենք մի բազմանդամ f -ով որոշվող հարուկ գործակիցներով.

$$\boxed{P_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n} : \quad (4-25)$$

Ինչպես նշել էինք (4-23)-(4-24) բանաձևերում, սովորաբար $P_n(x)$ բազմանդամի գործակիցներն արտահայտվում են (4-24) բանաձևերով հենց իր ածանցյալների միջոցով.

$$\begin{aligned} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} & \implies f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = \overline{0, n}), \\ \left[f(x) - P_n(x) \right]_{x=x_0}^{(k)} &= 0 \quad (k = \overline{0, n}) : \end{aligned}$$

Լեմմա 4.1-ի համաձայն՝ $f - P_n$ ֆունկցիան բարձր կարգի անվերջ փոքր է.

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{կամ} \quad \boxed{f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)}, \quad \text{երբ } x \rightarrow x_0,$$

այսպիսով էլ ստանում ենք **Թեյլորի ընդհանուր բանաձևը ֆունկցիաների համար.**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + r_n(x), \quad x \in \mathcal{U}(x_0), \quad (4-26)$$

որպես $r_n(x)$ -ով նշանակված է այդպես կոչված **մնացորդային** (կամ **լրացուցիչ**) **անդամը**: Տվյալ դեպքում մնացորդային անդամը հանդես է գալիս որպես բարձր կարգի անվերջ փոքր.

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad \text{երբ } x \rightarrow x_0 : \quad (4-27)$$

Ասում են, որ (4-27) մնացորդային անդամը ներկայացված է **Պեանոյի տեսքով**, իսկ

$$a_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = \overline{0, n},$$

թվերը կանվանենք **Թեյլորի գործակիցներ**: Թեյլորի (4-26)-(4-27) բանաձևը մասնավոր $n = 1$ դեպքում համընկնում է դիֆերենցելիության սահմանման ներկայացման հետ:

Եթե նշանակենք $x - x_0 \stackrel{\text{նշ.}}{=} \Delta x$, ապա Թեյլորի (4-26) բանաձևը կարելի է ներկայացնել փարբեր ձևերով.

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} \Delta x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n + o(\Delta x^n), \quad \text{երբ } \Delta x \rightarrow 0 :$$

Այսպես հաշվի առնենք գրելաձևը՝ այն, որ արգումենտի աճման ասփիճաններ են մասնակցում՝

$$\Delta x^2 = (\Delta x)^2, \quad \Delta x^3 = (\Delta x)^3, \quad \dots, \quad \Delta x^n = (\Delta x)^n :$$

Կարելի է Թեյլորի բանաձևը ներկայացնել բարձր կարգի դիֆերենցիալների միջոցով.

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + \frac{1}{3!} d^3 f(x_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0) + o(\Delta x^n), \quad \Delta x \rightarrow 0 :$$

Ֆիքսած x_0 կետը Թեյլորի բանաձևերում հաճախ հարմար է վերցնել $x_0 = 0$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x), \quad x \in \mathcal{U}(0), \quad (4-28)$$

որպես $r_n(x)$ մնացորդային անդամը $r_n(x) = o(x^n)$, երբ $x \rightarrow 0$:

Ընդունված է Թեյլորի (4-28) բանաձևը $x_0 = 0$ կետում անվանել **Մաքլորենի բանաձև**:

Մնացորդային $r_n(x)$ անդամը առհասարակ կարելի է ներկայացնել մի քանի փարբեր եղանակներով:

Թերևս ամենահարմարը **մնացորդային անդամի Լագրանժի տեսքն** է, որի ապացույցը բաց կթողնենք.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (4-29)$$

որպես c -ն x -ի և x_0 -ի միջև գտնվող ինչ-որ կետ է, այսինքն՝ $x_0 < c < x$ կամ $x < c < x_0$:

4.15 Տարրական ֆունկցիաների Թեյլորի բանաձևերը

Անցնենք Թեյլորի բանաձևի օրինակներին և կիրառություններին: Տարրական ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը գրելու համար հարկավոր է հաշվել ֆունկցիայի n -րդ կարգի ածանցյալը: Օրինակ, հաշվենք $x = 0$ կետում մի քանի ֆունկցիաների ածանցյալներ.

$$\begin{aligned} (e^x)^{(n)} &= e^x, & (e^x)^{(n)} \Big|_{x=0} &= 1, \\ (\sin x)^{(n)} &= \sin \left(x + \frac{\pi n}{2} \right), & (\sin x)^{(n)} \Big|_{x=0} &= \sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & \text{երբ } n = 2k, \\ (-1)^{k+1}, & \text{երբ } n = 2k-1, \end{cases} \\ (\cos x)^{(n)} &= \cos \left(x + \frac{\pi n}{2} \right), & (\cos x)^{(n)} \Big|_{x=0} &= \cos \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^k, & \text{երբ } n = 2k, \\ 0, & \text{երբ } n = 2k-1, \end{cases} \\ (\ln(1+x))^{(n)} &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, & (\ln(1+x))^{(n)} \Big|_{x=0} &= (-1)^{n-1} (n-1)! \end{aligned}$$

և այլն: Սրանցից արժեքները թույլ են տալիս հաշվել Թեյլորի գործակիցները և կազմել Թեյլորի բանաձևը տվյալ ֆունկցիայի համար: Ստորև բերված են կարևորագույն տարրական ֆունկցիաների Թեյլոր-Մաքլորենի բանաձևերը $x = 0$ կետում և Պեանոյի տեսքով մնացորդային անդամներով.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), & x \rightarrow 0, \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + o(x^n), & x \rightarrow 0, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}), & x \rightarrow 0, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), & x \rightarrow 0, \\ \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}), & x \rightarrow 0, \\ \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), & x \rightarrow 0, \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \rightarrow 0 : \end{aligned}$$

Վերջին ներկայացման մեջ (որը կոչվում է **Նյուտոնի բինոմական վերլուծություն**) օգտվել ենք գործակիցների

բավականին հարմար մի նշանակումից՝

$$\binom{\alpha}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \binom{\alpha}{0} \stackrel{\text{def}}{=} 1 :$$

Մասնավոր դեպքում, երբ α -ն բնական թիվ է, այս գործակիցները հանգում են **Նյուտոնի դասական բինոմական գործակիցներին**՝

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq k \leq n,$$

իսկ Թեյլորի բանաձևում մնացորդային անդամը վերանում է, և արդյունքում սրանում ենք Նյուտոնի բինոմի հայտնի բանաձևը՝

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k, \quad n \in \mathbb{N} :$$

Թեյլոր-Մաքլորենի բանաձևերը հայտնի ասիմպտոտական բանաձևերի ընդհանրացում են և շարք արդյունավետ են սահմաններ հաշվելիս:

Այժմ քննարկենք մնացորդային անդամի դերը: Գրենք Թեյլոր-Մաքլորենի ընդհանուր բանաձևը մնացորդային անդամի Լագրանժի տեսքով.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x), \quad x \in \mathcal{U}(0), \quad (4-30)$$

որտեղ

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \exists \theta \in (0, 1) : \quad (4-31)$$

Այստեղ $c = \theta x$ միջանկյալ կետը ներկայացված է θ պարամետրի միջոցով, ինչը բավականին հարմար է:

Ֆիքսենք առայժմ $x \in \mathcal{U}(0)$, $x \neq 0$, կետը և ենթադրենք $f(t)$ ֆունկցիան և նրա բոլոր կարգի ածանցյալները սահմանափակ են սկզբնական կետի շրջակայքում.

$$\exists M = \text{const} > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f^{(k)}(t)| \leq M, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \forall t, |t| \leq |x|,$$

կամ նույնը՝

$$\exists M = \text{const} > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f^{(k)}(\theta x)| \leq M, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \forall \theta \in (0, 1) : \quad (4-32)$$

Այս պայմանը թույլ է տալիս գնահատել (4-31) մնացորդը.

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty \quad (x\text{-ը ֆիքսված է}) :$$

Սրացանք, որ մնացորդն անվերջ փոքր է՝ $r_n(x) \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$: Մեծ n -եր ընտրելով՝ կարող ենք $r_n(x)$ մնացորդը դարձնել որքան կամենանք փոքր: Ուստի փարրական ֆունկցիաների արժեքները կարող ենք հաշվել ցանկացած ճշտությամբ (ցանկացած փոքր սխալանքով): Այսպիսով, Թեյլորի բանաձևը հարմար է, մասնավորապես՝ մոտավոր հաշվարկներ կատարելու համար:

Օրինակ 4.8. Նաշվենք e իռացիոնալ թիվը 10^{-3} ճշտությամբ:

Որևէ ֆիքսած $x > 0$ կերի համար գրենք Թեյլոր-Մաքլորենի բանաձևն էքսպոնենցիալ ֆունկցիայի համար Լագրանժի տեսքով մնացորդով.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \exists \theta \in (0, 1) :$$

Քանի որ մեզ հետաքրքրում է e թիվը, վերցնենք $x = 1$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1 :$$

Գնահատենք մնացորդը.

$$|r_n(1)| = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} :$$

Ըստ պահանջի սխալանքը չպետք է գերազանցի 10^{-3} , հետևաբար ընտրենք $\boxed{n=6}$, և մնացորդը հենց այդպիսին կլինի.

$$r_6(1) < \frac{3}{7!} = \frac{3}{5040} = \frac{1}{1680} < \frac{1}{1000} :$$

Այսպիսով՝

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2,71805555 \dots \approx 2,718 :$$

Սա e թվի մոտավոր արժեքն է 10^{-3} ճշտությամբ: Յանկացողները կարող են համեմատել e թվի ակնյի ճշգրիտ արժեքի հետ՝ $e = 2.718281828459045 \dots$:

4.16 Ֆունկցիայի հերազդությունը մոնոտոնության և էքստրեմումների միջոցով:

Ֆունկցիայի մոնոտոնության պայմանները

Ֆունկցիայի մոնոտոնության և էքստրեմումների հեր կապված անհրաժեշտ սահմանումները փրված էին նախորդ դասախոսություններում:

Թեորեմ 4.11. (*Ֆունկցիայի մոնոտոնության հայտանիշ*)

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է (a, b) միջակայքում: Այդ դեպքում՝

- | | | |
|---|--------|---------------------------------------|
| 1) $f(x) \nearrow (a, b)$ -ում | $\iff$ | $f'(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$ |
| 2) $f(x) \searrow (a, b)$ -ում | $\iff$ | $f'(x) \leq 0, \quad x \in (a, b),$ |
| 3) $f(x) \equiv \text{const}$ (a, b) -ում | $\iff$ | $f'(x) \equiv 0, \quad x \in (a, b),$ |
| 4) $f(x) \nearrow$ (սիստ) (a, b) -ում | $\iff$ | $f'(x) > 0, \quad x \in (a, b),$ |
| 5) $f(x) \searrow$ (սիստ) (a, b) -ում | $\iff$ | $f'(x) < 0, \quad x \in (a, b) :$ |

Ապացույց. Բոլոր հինգ պնդումներն ապացուցվում են միապեսակ: Կապացուցենք միայն առաջինը:

$\implies$ Դիցուք f ֆունկցիան աճող է (a, b) միջակայքում: Ֆիքսենք կամայական $x_0 \in (a, b)$ կետ և ցույց փանք, որ $f'(x_0) \geq 0$: Վերցնենք $\Delta x > 0$ դրական աճ և կազմենք աջակողմյան ածանցյալը.

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0, \quad \text{քանի որ} \quad f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0) :$$

$\impliedby$ Դիցուք $f'(x) \geq 0, \quad x \in (a, b)$: Ցույց փանք, որ f ֆունկցիան աճող է (a, b) միջակայքում: Վերցնենք կամայական $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ հատված ($a < x_1 < x_2 < b$) և կիրառենք այդ հատվածում Լագրանժի թեորեմը.

$$\exists c \in (x_1, x_2) \quad \text{s.t.} \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0 :$$

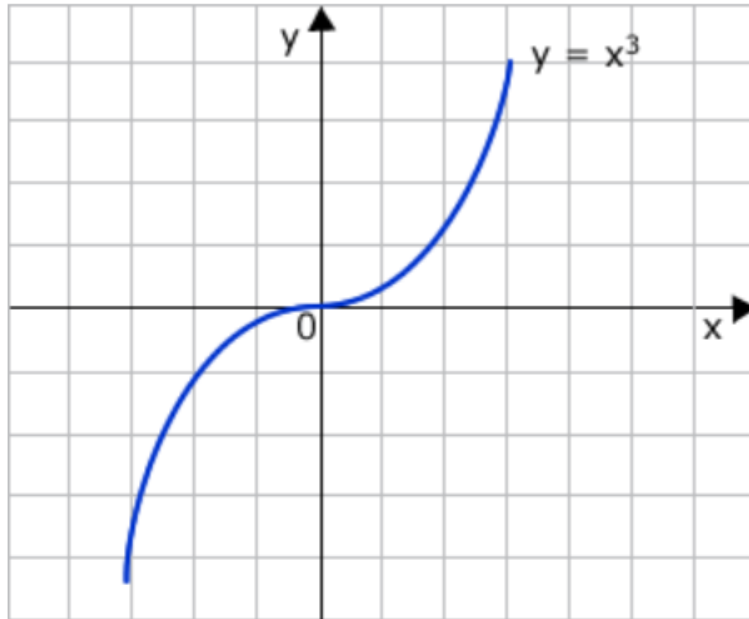
Ներկայացնելով $f(x_2) \geq f(x_1) \implies f(x) \nearrow (a, b)$ -ում: □

Ներառված 4.6. Եթե (a, b) միջակայքում երկու ֆունկցիաների ածանցյալները հավասար են, ապա այդ ֆունկցիաները հավասար են հաստատուն գումարելիի ճշգրտությամբ, այսինքն՝

$$\left(f'(x) = g'(x), \quad x \in (a, b) \right) \implies \left(\exists C = \text{const} \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad f(x) = g(x) + C, \quad x \in (a, b) \right) :$$

Ապացույց. Բավական է դիտարկել նոր ֆունկցիա $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - g(x)$ և կիրառել նրա նկարմամբ Թեորեմ 4.11-ի 3)-րդ պնդումը: □

Դիպողություն 4.10. Թեորեմ 4.11-ի 1), 2), 3)-րդ պնդումներում անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ են, իսկ 4), 5)-րդ պնդումներում՝ միակողմանի: Յույց տանք, մասնավորապես, որ 4)-րդ պնդման հակադարձը սխալ է, այսինքն՝ ֆունկցիայի խիստ աճման պայմանից դեռևս չի հետևում, որ նրա ածանցյալը դրական է միջակայքում: Որպես հակաօրինակ կարելի է բերել հայրնի $f(x) = x^3$ (խիստ) խորանարդային ֆունկցիան, որը խիստ աճող է ամբողջ թվային առանցքի վրա, սակայն $f'(0) = 0$:



Գծագիր 4.12. Խիստ աճող ֆունկցիայի այնպիսի օրինակ, որ $f'(x_0) = 0$

4.17 Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը

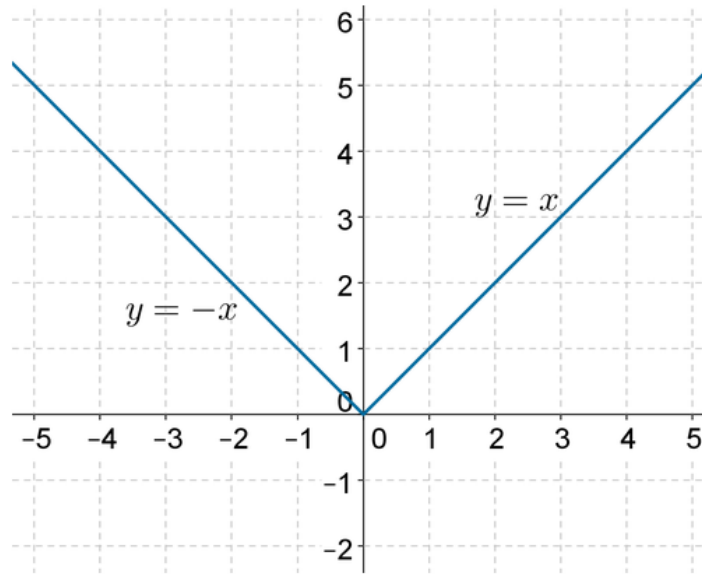
Ֆունկցիայի էքստրեմումների սահմանումները քրված են նախորդ դասախոսություններում: Ֆունկցիայի հետադարձ կարևոր փարրերից է՝ կարողանալ հայտնաբերել և բնութագրել էքստրեմումի կետերը: Սկսենք էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանից, մի թեորեմից, որը շատ մոտ է Ֆերմայի թեորեմին:

Թեորեմ 4.12. (Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է (a, b) միջակայքում և $x_0 \in (a, b)$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Այդ դեպքում x_0 կետում f -ի ածանցյալը կան հավասար է զրոյի, կան գոյություն չունի.

$$\begin{cases} \text{կամ } f'(x_0) = 0, \\ \text{կամ } \nexists f'(x_0) : \end{cases} \quad (4-33)$$

Ապացույց. Նախ ցույց տանք, որ էքստրեմումի կետում ֆունկցիան կարող է ածանցյալ չունենալ: Այդպիսի ֆունկցիայի պարզագույն օրինակը $f(x) = |x|$ ֆունկցիան է, որի համար $x_{\min} = 0$, սակայն $\nexists f'(0)$:



Պատկեր 4.13. $f(x) = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

Մյուս կողմից, եթե լուրջ էքստրեմումի կետում ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա Ֆերմայի թեորեմի համաձայն՝ այդ կետում ածանցյալը գրո է: Սա ամբողջությամբ ավարտում է թեորեմի ապացույցը: $\square$

Դիտողություն 4.11. Ինչպես հայտնի է դպրոցական դասընթացից, (4-33) պայմանը բավարարող $x_0 \in (a, b)$ կետը կոչվում է **կրիտիկական**: Ուստի Թեորեմ 4.12-ը կարելի է ձևակերպել այդ տերմինով՝

$$\left(x_0 \in (a, b) \text{ կերև } f\text{-ի լոկալ էքստրեմումի կետ է} \right) \implies \left(x_0\text{-ն } f\text{-ի կրիտիկական կետ է} \right): \quad (4-34)$$

Նաև հարձակվենք պնդումն այստեղ և Թեորեմ 4.12-ում սխալ է: Դարձյալ որպես հակաօրինակ կարելի է բերել $f(x) = x^3$ խորանարդային ֆունկցիան, որի համար $x = 0$ կետը կրիտիկական է, քանի որ $f'(0) = 0$, սակայն այդ կետը լոկալ էքստրեմումի կետ չէ:

Որպես կրիտիկական կետի մասնավոր դեպք սահմանում են հետևյալը:

Սահմանում 4.13. Եթե $x_0 \in (a, b)$ կետում ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է զրոյի՝ $f'(x_0) = 0$, ապա այդ կետը կոչվում է **f -ի ստացիոնար կետ**:

4.18 Լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանները

Ֆունկցիայի էքստրեմումները գրենելու խնդրում մի քանի բավարար պայմաններ կարելի է նշել:

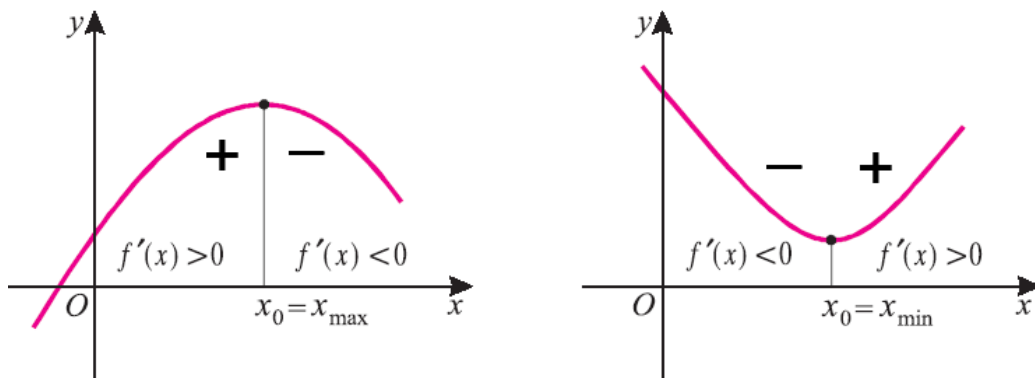
Թեորեմ 4.13. (Լոկալ էքստրեմումի 1-ին բավարար պայմանը)

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետի ինչ-որ $U(x_0)$ շրջակայքում և $f'(x_0) = 0$ (այսինքն՝ x_0 -ն f -ի ստացիոնար կամ կրիտիկական կետ է):

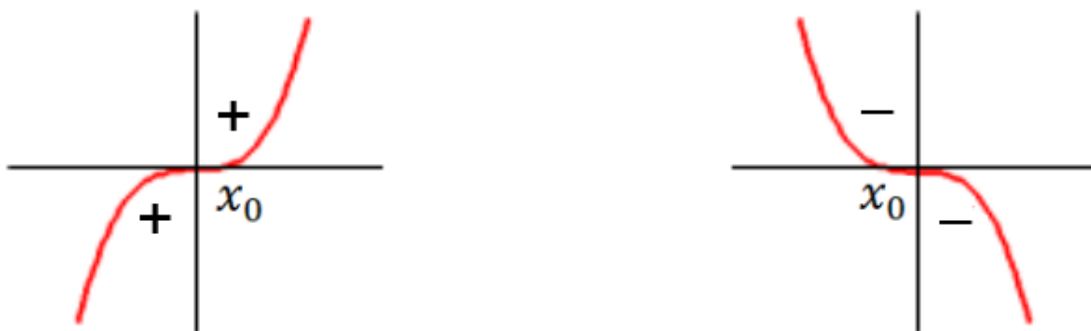
ա) Եթե x_0 կետով անցնելիս $f'(x)$ ածանցյալը փոխում է իր նշանը, ապա x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան լոկալ խիստ էքստրեմում ունի: Ընդ որում, եթե նշանը փոխում է $(+)$ -ից $(-)$, ապա կստացվի $x_0 = x_{\max}$, իսկ եթե նշանը փոխում է $(-)$ -ից $(+)$, ապա կստացվի $x_0 = x_{\min}$:

բ) Եթե x_0 կետով անցնելիս $f'(x)$ ածանցյալը չի փոխում է իր նշանը, ապա x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան լոկալ էքստրեմում չունի:

Ապացույց. Թեորեմում նկարագրված է չորս հնարավոր դեպք, որոնք պարկերված են **գծագրեր** 4.14-ում և 4.15-ում: Ապացուցենք չորս դեպքերից միայն առաջինը, քանի որ մյուսներն ապացուցվում են նույն կերպ:

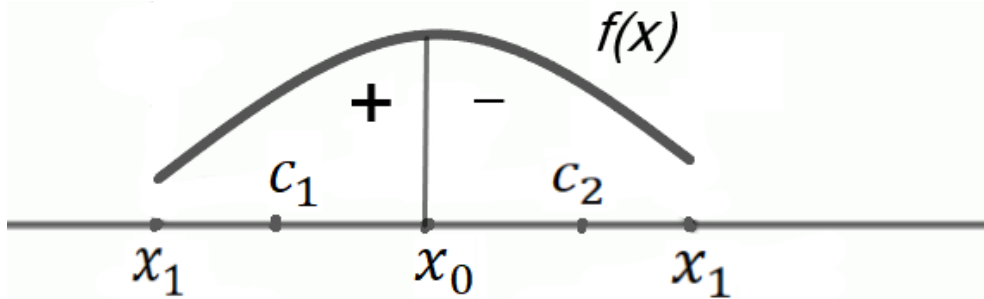


Գծագիր 4.14. Լոկալ էքստրեմումի կետեր



Գծագիր 4.15. Ստացիոնար ոչ էքստրեմումի կետեր

Դիցուք x_0 սրացիոնար կետով անցնելիս $f(x)$ ֆունկցիան փոխում է իր նշանը $(+)$ -ից $(-)$: Ապացուցենք, որ այդ դեպքում x_0 -ն մաքսիմումի կետ է՝ $x_0 = x_{\max}$: Ներկայացնում ենք x_0 -ի բավականաչափ փոքր շրջակայքում վերցնենք կամայական $x_1 \in \mathcal{U}(x_0)$, $x_1 \neq x_0$, կետ և ցույց տանք, որ $f(x_0) > f(x_1)$:



Գծագիր 4.16. x_0 կետի շրջակայքը

Իսկապես, կիրառենք Լագրանժի թեորեմը $[x_1, x_0]$ կամ $[x_0, x_1]$ հատվածում.

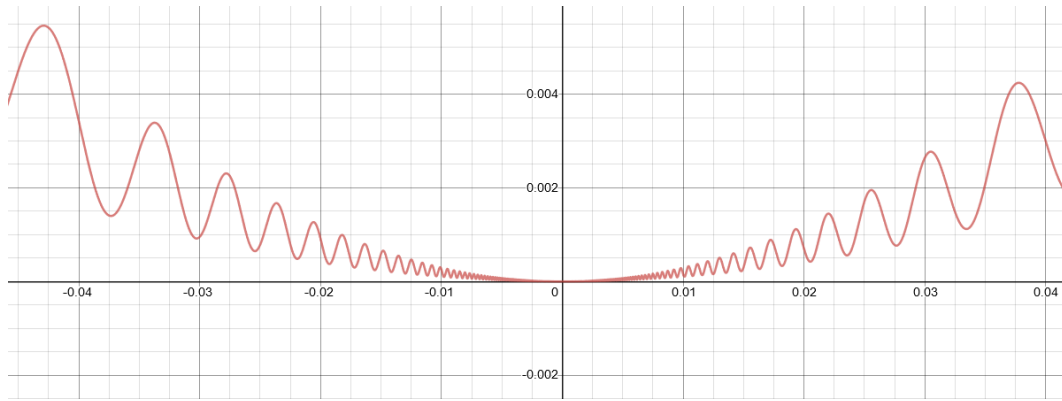
$$\begin{aligned} \exists c_1 \in (x_1, x_0) \quad s.t. \quad & f(x_0) - f(x_1) = f'(c_1)(x_0 - x_1) > 0, \\ \text{կամ } \exists c_2 \in (x_0, x_1) \quad s.t. \quad & f(x_0) - f(x_1) = f'(c_2)(x_0 - x_1) > 0, \end{aligned}$$

անկախ այն հանգամանքից՝ x_1 -ը գտնվում է x_0 -ի աջ, թե ձախ կողմում: Այսպիսով, $f(x_0) > f(x_1)$ պայմանը նշանակում է, որ x_0 -ն խիստ մաքսիմումի կետ է: $\square$

Դիտողություն 4.12. Թեորեմ 4.13ա)-ի պնդումը և **գծագիր 4.14**-ը կարող են սխալ տպավորություն ստեղծել, որ բոլոր մաքսիմումի և մինիմումի կետերը հանգում են այս դեպքին և **գծագիր 4.14**-ում պատկերվածին: Այո, սա, թերևս, ամենաարարածված դեպքն է, սակայն կան այլ տեսակի էքստրեմումի կետեր: Նույն հարցը կարելի է այսպես ձևակերպել. արդյո՞ք ճիշդ է Թեորեմ 4.13ա)-ի հակադարձ պնդումը, այսինքն՝ կարելի՞ է պնդել, որ էքստրեմումի կետից աջ և ձախ ընկած փոքր միջակայքերում ֆունկցիան մոնոտոն է: Ճիշդ պատասխանն է՝ ոչ, օրինակ.

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

Ֆունկցիան սկզբնականում խիստ մինիմում ունի՝ $x_{\min} = 0$, սակայն այդ կետի միակողմանի շրջակայքերում մոնոտոն չէ (ստուգեք ինքնուրույն): **Գծագիր 4.17**-ում ներկայացված է ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկը:



Գծագիր 4.17. Էքստրեմումի կեր, որի միակողմանի շրջակայքում ֆունկցիան մոնոտոն չէ

Թեորեմ 4.14. (Լոկալ էքստրեմումի 2-րդ բավարար պայմանը)

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան կրկնակի դիֆերենցելի է x_0 կետի ինչ-որ $\mathcal{U}(x_0)$ շրջակայքում՝ $\exists f''(x_0)$ և $\boxed{f'(x_0) = 0}$ (այսինքն՝ x_0 -ն f -ի ստացիոնար կամ կրիտիկական կետ է):

ա) Եթե $\boxed{f''(x_0) < 0}$, ապա x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան խիստ մաքսիմում ունի՝ $\boxed{x_0 = x_{\max}}$:

բ) Եթե $\boxed{f''(x_0) > 0}$, ապա x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան խիստ մինիմում ունի՝ $\boxed{x_0 = x_{\min}}$:

Ապացույց. Գրենք Թեյլորի բանաձևը x_0 կետի շրջակայքում $n = 2$ դեպքի համար և Պեանոյի տեսքով մնացորդային անդամով.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \quad \text{երբ } x \rightarrow x_0,$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \quad \text{երբ } x \rightarrow x_0,$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^2}{2} [f''(x_0) + o(1)], \quad \text{երբ } x \rightarrow x_0 : \quad (4-35)$$

Դժվար չէ այստեղ տեսնել, որ x_0 կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում (4-35) բանաձևի աջ կողմի նշանը համընկնում է $f''(x_0)$ -ի նշանի հետ: Ներկաբար, (4-35) բանաձևի ձախ կողմի և $f''(x_0)$ -ի նշանները նույնն են x_0 կետի փոքր շրջակայքում.

$$f''(x_0) < 0 \quad \implies \quad f(x) - f(x_0) < 0 \quad \implies \quad f(x) < f(x_0) \quad \implies \quad x_0 = x_{\max},$$

$$f''(x_0) > 0 \quad \implies \quad f(x) - f(x_0) > 0 \quad \implies \quad f(x) > f(x_0) \quad \implies \quad x_0 = x_{\min},$$

ընդ որում՝ էքստրեմումները խիստ են: □

Ապացուցված 2-րդ բավարար պայմանը ոչինչ չի ասում էքստրեմումի մասին, երբ $f''(x_0) = 0$ կամ $\nexists f''(x_0)$: Ձևակերպենք էքստրեմումի ավելի ընդհանուր հայտանիշ:

Թեորեմ 4.15. (Լոկալ էքստրեմումի 3-րդ բավարար պայմանը)

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է x_0 կետի ինչ-որ $\mathcal{U}(x_0)$ շրջակայքում.

$$f(x) \in C^{n-1}(\mathcal{U}(x_0)), \quad f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \exists f^{(n)}(x_0) \neq 0 :$$

ա) Եթե n -ը զույգ է, ապա x_0 -ն $f(x)$ ֆունկցիայի խիստ էքստրեմումի կետ է, ընդ որում՝

խիստ մաքսիմումի կետ է, $\boxed{x_0 = x_{\max}}$, երբ $f^{(n)}(x_0) < 0$, և

խիստ մինիմումի կետ է, $\boxed{x_0 = x_{\min}}$, երբ $f^{(n)}(x_0) > 0$:

բ) Եթե n -ը կենտ է, ապա x_0 -ն $f(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ :

Ապացույց. Այս անգամ գրում ենք Թեյլորի n -րդ կարգի բանաձևը x_0 կետի շրջակայքում Պեանոյի տեսքով մնացորդային անդամով.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad \text{երբ } x \rightarrow x_0,$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad \text{երբ } x \rightarrow x_0,$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} [f^{(n)}(x_0) + o(1)], \quad \text{երբ } x \rightarrow x_0,$$

և կրկնում ենք նախորդ հայտանիշի ապացույցի դափողությունները:

□

4.19 Ուռուցիկ և գոգավոր ֆունկցիաներ

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է (a, b) միջակայքում:

Սահմանում 4.14. $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **ուռուցիկ** (a, b) միջակայքում, եթե ցանկացած $x_1, x_2 \in (a, b)$ և $\alpha \in (0, 1)$ համար հավելում է՝

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \quad \text{և} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad \implies \quad f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) : \quad (4-36)$$

Ուռուցիկության (4-36) պայմանը բացառության կարիք ունի, ինչպես նաև երկրաչափական մեկնաբանության, ինչը կարվի քիչ անց:

Եթե ուռուցիկության (4-36) պայմանի մեջ անհավասարության $\leq$ նշանը փոխարինենք $\geq$ նշանով, այսինքն՝

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \quad \text{և} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad \implies \quad f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \quad (4-37)$$

ապա այդպիսի $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **գոգավոր** (a, b) միջակայքում:

Եթե (4-36), (4-37) պայմանների մեջ անհավասարության ոչ խիստ $\leq$ և $\geq$ նշանները փոխարինենք խիստ $<$ և $>$ նշաններով, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կանվանենք խիստ ուռուցիկ և խիստ գոգավոր՝ համապատասխանաբար: Ուռուցիկության և գոգավորության (4-36)-(4-37) պայմանների մեջ օգտագործված պարամետրերի քանակը կարելի է մեկով կրճատել, ինչը հաճախ արվում է ըստ հարմարության: Այլ կերպ ասած՝ (4-36)-(4-37) պայմանները կարելի է փոխարինել համարժեք (4-38)-(4-39) պայմաններով՝ համապատասխանաբար՝

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \quad \text{և} \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad \implies \quad f((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2), \quad (4-38)$$

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \quad \text{և} \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad \implies \quad f((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2) \geq (1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2) : \quad (4-39)$$

Այժմ պարզաբանենք (4-36)-(4-37) պայմանները և փանք դրանց երկրաչափական մեկնաբանությունը:

Նշանակենք $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $x_1 < x_2$, և նկատենք, որ x կետը գտնվում է x_1 և x_2 կետերի միջև՝

$x_1 < x < x_2$, քանի որ

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 < \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2 = x_2,$$

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 > \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1 = x_1 :$$

Նակադարձը. կամայական $x \in (x_1, x_2)$ կետի համար միշտ կարելի է գտնել (այն էլ միակ եղանակով)

$\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$, այնպիսիք, որ $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$:

Իսկապես, բավական է նշել α_1, α_2 պարամետրերի բացահայտ արժեքները x_1, x_2 կետերի համար.

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

և հեշտ է ստուգել, որ

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2 = x :$$

Այսպիսով, ցույց տվեցինք, որ $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ կետը (4-36)-(4-37) պայմաններում ընդամենը (x_1, x_2) միջակայքի կամայական կետ է, որը միշտ կարելի է ներկայացնել $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ պարամետրական տեսքով, որպեսզի $\alpha_1, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$:

Այս փաստը թույլ է տալիս ուռուցիկության (4-36) պայմանը արտագրել նոր, գուցե ավելի հարմար տեսքով.

$$f(x) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \quad \forall x \in (x_1, x_2) \subset (a, b),$$

կամ

$$\boxed{f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)}, \quad \forall x \in (x_1, x_2) \subset (a, b) : \quad (4-40)$$

Սա ուռուցիկության համարժեք պայման է: Նկատենք, որ ընտրված և ֆիքսված x_1, x_2 կետերի համար (4-40) պայմանի աջ կողմը գծային ֆունկցիա է, որը նշանակենք ℓ -ով.

$$\boxed{\ell(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)} :$$

Այսպիսով, սրացանք ուռուցիկության ևս մեկ համարժեք պայման՝

$$\boxed{f(x) \leq \ell(x)} \quad \forall x \in (x_1, x_2) \subset (a, b) : \quad (4-41)$$

Նշենք, որ x_1 և x_2 ծայրակետերում $f(x)$ ուռուցիկ ֆունկցիան և $\ell(x)$ գծային ֆունկցիան հավասար արժեքներ են ընդունում.

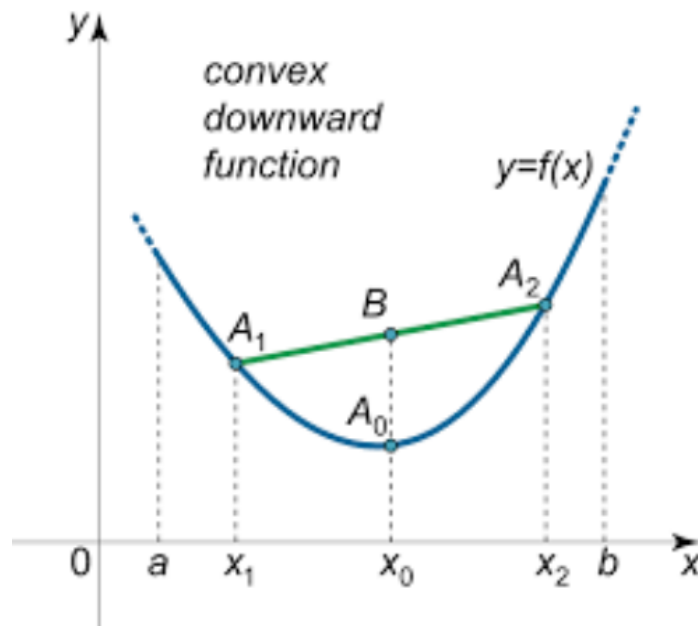
$$\ell(x_1) = f(x_1), \quad \ell(x_2) = f(x_2) :$$

Իսկ համաձայն (4-41) պայմանի՝ (x_1, x_2) միջակայքի ներսում $f(x)$ -ը չի գերազանցում $\ell(x)$ գծային ֆունկցիան:

Ահա այս հանգամանքը թույլ է տալիս երկրաչափորեն բնութագրել ուռուցիկ ֆունկցիաները:

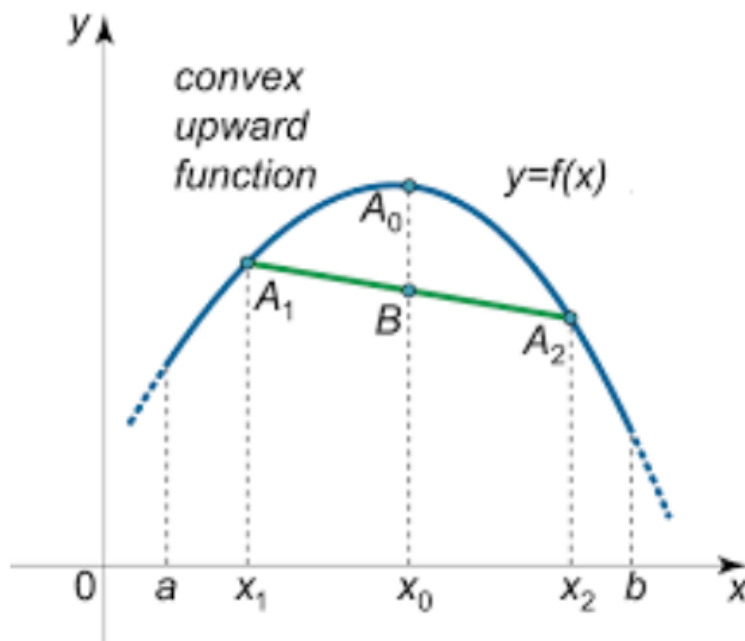
Ուռուցիկ ֆունկցիաների գրաֆիկական պարկերումը կարելի է սկսել $A_1(x_1, f(x_1))$ և $A_2(x_2, f(x_2))$ կետերից, որոնցով անցնում են և f -ի, և ℓ -ի գրաֆիկները (տես **գծագիր 4.18**):

ℓ հաբողի $A_1 A_2$ հատվածը անվանենք f -ի **լար**: Այդ լարի ներքին կետերում, այսինքն՝ (x_1, x_2) միջակայքում, ինչպես արդեն նշել էինք ըստ (4-41) պայմանի՝ $\ell = (A_1 A_2)$ լարը ընկած է f ֆունկցիայի գրաֆիկից վերև այնպես, ինչպես **գծագիր 4.18**-ում:



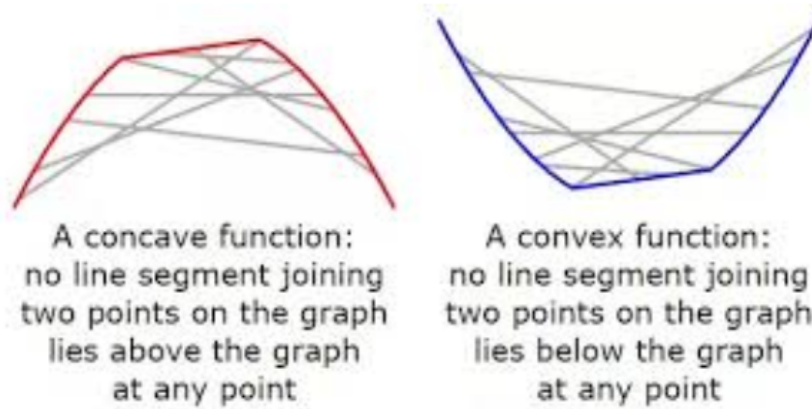
Գծագիր 4.18. Ուռուցիկ ֆունկցիայի գրաֆիկը

Գոգավոր ֆունկցիաները սահմանվում են շրջված անհավասարությամբ՝ $f(x) \geq \ell(x)$, $x \in (x_1, x_2)$, և նշված երկրաչափական բնութագրումը գլխավոր շրջվում է, այսինքն՝ գոգավոր ֆունկցիայի գրաֆիկի ցանկացած երկու կետով փարված A_1A_2 լարը ընկած է ֆունկցիայի գրաֆիկից ներքև այնպես, ինչպես **գծագիր 4.19**-ում:



Գծագիր 4.19. Գոգավոր ֆունկցիայի գրաֆիկը

Դժվար չէ նկատել, որ բացասական հասարարությունով բազմապարկելով ուռուցիկ ֆունկցիայից անմիջապես կստացվի գոգավոր ֆունկցիա, և հակառակը:



Գծագիր 4.20. Գոգավոր և ուռուցիկ ֆունկցիաների բնութագրումը լարերով

Ուռուցիկ և գոգավոր ֆունկցիաների մի քանի տարբերվող անվանումներ են օգտագործում, և դա որոշակի զրոշավորություն է պահանջում: Այսպես, երկրաչափական նկարագրության պատճառով ուռուցիկ ֆունկցիաները անվանում են նաև ուռուցիկ ներքևից կամ ուռուցիկ դեպի ներքև՝ նշելով ուռուցիկության ուղղվածությունը: Իսկ գոգավոր ֆունկցիաները անվանում են նաև ուռուցիկ վերևից կամ ուռուցիկ դեպի վերև: Անվանումները չփոխելու համար բերենք տերմինների հետևյալ համարժեքները՝

ուռուցիկ ֆունկցիա = ներքևից ուռուցիկ = դեպի ներքև ուռուցիկ = վերևից գոգավոր =
= convex function = convex downward = concave upward

գոգավոր ֆունկցիա = վերևից ուռուցիկ = դեպի վերև ուռուցիկ = ներքևից գոգավոր =
= concave function = convex upward = concave downward

Ավելորդ բարդություններից խուսափելու համար խորհուրդ կտանք օգտագործել միայն ուռուցիկ և գոգավոր անվանումները:

Ինչպես տեսանք, ուռուցիկ և գոգավոր ֆունկցիաների մի քանի համարժեք սահմանումներ կան: Եվս մի քանիսը ավելացնենք:

Կարելի է ուռուցիկության (4-40) պայմանը բացել, խմբավորել և ստանալ մի նոր համարժեք պայման՝

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad \forall x \in (x_1, x_2) \subset (a, b) : \quad (4-42)$$

Եթե ընթերցողը ծանոթ է գծային հանրահաշվի դասընթացից հայտնի մաթրիցներին և որոշիչներին, ապա (4-42) պայմանը կարելի է արտագրել որոշիչի տեսքով՝

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_2 \\ f(x_1) & f(x) & f(x_2) \end{vmatrix} \geq 0, \quad \forall x \in (x_1, x_2) \subset (a, b), \quad (4-43)$$

կամ նույնը՝

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geq 0, \quad \forall x \in (x_1, x_2) \subset (a, b) : \quad (4-44)$$

Բնականաբար, գոգավոր ֆունկցիաների համարժեք սահմանումներ ստանալու համար ընդամենը պետք է (4-42), (4-43), (4-44) պայմաններում շրջել անհավասարության նշանը:

Առանց ապացույցի նշենք օգտակար մի պնդում:

Պնդում. Բաց միջակայքում ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիան անընդհատ է :

4.20 Ուռուցիկ ֆունկցիաների բնութագրումն ածանցյալների միջոցով

Թեորեմ 4.16. *ա) Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է (a, b) միջակայքում:*

Այդ դեպքում, որպեսզի f ֆունկցիան ուռուցիկ լինի (a, b) -ում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ f -ի ածանցյալն աճի (a, b) -ում: Կարճ՝

$$\left(f(x) \text{ ֆունկցիան ուռուցիկ է } (a, b)\text{-ում} \right) \iff \left(f'(x) \nearrow (a, b)\text{-ում} \right) :$$

բ) Եթե լրացուցիչ հայտնի է, որ $\exists f''(x) \quad (a, b)$ -ում, ապա

$$\left(f(x) \text{ ֆունկցիան ուռուցիկ է } (a, b)\text{-ում} \right) \iff \left(f'(x) \nearrow (a, b)\text{-ում} \right) \iff \left(f''(x) \geq 0, x \in (a, b) \right) :$$

Ապացույց. ա) $\boxed{\implies}$ Ենթադրելով, որ f ֆունկցիան ուռուցիկ է (a, b) -ում, գրենք (4-42) պայմանը՝

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad \forall x \in (x_1, x_2) \subset (a, b) :$$

Ձգրեցնենք այսպեղ $x \rightarrow x_1$ և մեկ այլ անգամ՝ $x \rightarrow x_2$: Արդյունքում կստանանք՝

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2), \quad a < x_1 < x_2 < b,$$

$$f'(x_1) \leq f'(x_2), \quad a < x_1 < x_2 < b :$$

Քանի որ $x_1 < x_2$ կետերը կամայական էին (a, b) միջակայքից, ապա $f'(x)$ ֆունկցիան աճող է (a, b) -ում, $f'(x) \nearrow (a, b)$ -ում:

$\boxed{\impliedby}$ Այժմ ենթադրենք, որ $f'(x) \nearrow (a, b)$ -ում, և $a < x_1 < x < x_2 < b$:

$[x_1, x]$ և $[x, x_2]$ հատվածներում կիրառենք Լագրանժի թեորեմը.

$$\exists c_1 \in (x_1, x) \quad s.t. \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1),$$

$$\exists c_2 \in (x, x_2) \quad s.t. \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2) :$$

Քանի որ $f'(x) \nearrow$ և $a < x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2 < b$, ապա $f'(c_1) \leq f'(c_2)$:

Վերջին անհավասարությունը կարելի է արտագրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

ինչը համընկնում է ուռուցիկության (4-42) պայմանի հետ: Այսպիսով, f ֆունկցիան ուռուցիկ է (a, b) -ում:

բ) Ամենավերջին պնդումը՝ $\left(f'(x) \nearrow (a, b)\text{-ում}\right) \iff \left(f''(x) \geq 0, x \in (a, b)\right)$, լավ հայտնի է ֆունկցիայի մոնոտոնության հայտանիշից (Թեորեմ 4.11): $\square$

Թեորեմ 4.16-ից հետևում է նմանօրինակ հայտանիշ գոգավոր ֆունկցիաների համար:

Թեորեմ 4.17. ա) Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է (a, b) միջակայքում: Այդ դեպքում

$$\left(f(x) \text{ ֆունկցիան գոգավոր է } (a, b)\text{-ում}\right) \iff \left(f'(x) \searrow (a, b)\text{-ում}\right) :$$

բ) Եթե լրացուցիչ հայտնի է, որ $\exists f''(x) (a, b)\text{-ում, ապա}$

$$\left(f(x) \text{ ֆունկցիան գոգավոր է } (a, b)\text{-ում}\right) \iff \left(f'(x) \searrow (a, b)\text{-ում}\right) \iff \left(f''(x) \leq 0, x \in (a, b)\right) :$$

Նշենք ուռուցիկ և գոգավոր ֆունկցիաների մի քանի պարզագույն հատկություններ (a, b) միջակայքում, որոնք անմիջապես հետևում են սահմանումներից:

Նախկինություն 1. $\left(f(x) \text{ ֆունկցիան ուռուցիկ է և } c > 0\right) \implies \left(cf(x) \text{ ֆունկցիան ուռուցիկ է}\right):$

Նախկինություն 2. $\left(f(x) \text{ ֆունկցիան ուռուցիկ է և } c < 0\right) \implies \left(cf(x) \text{ ֆունկցիան գոգավոր է}\right):$

Նախկինություն 3. $\left(f(x), g(x) \text{ ֆունկցիաները ուռուցիկ են}\right) \implies \left(f(x) + g(x) \text{ նույնպես ուռուցիկ է}\right):$

Նախկինություն 4. Դիցուք (a, b) միջակայքում f ֆունկցիան հակադարձ ունի՝ f^{-1} : Այդ դեպքում

ա) $\left(f \nearrow \text{ ուռուցիկ է}\right) \iff \left(f^{-1} \nearrow \text{ գոգավոր է}\right);$

բ) $\left(f \searrow \text{ ուռուցիկ է}\right) \iff \left(f^{-1} \searrow \text{ ուռուցիկ է}\right);$

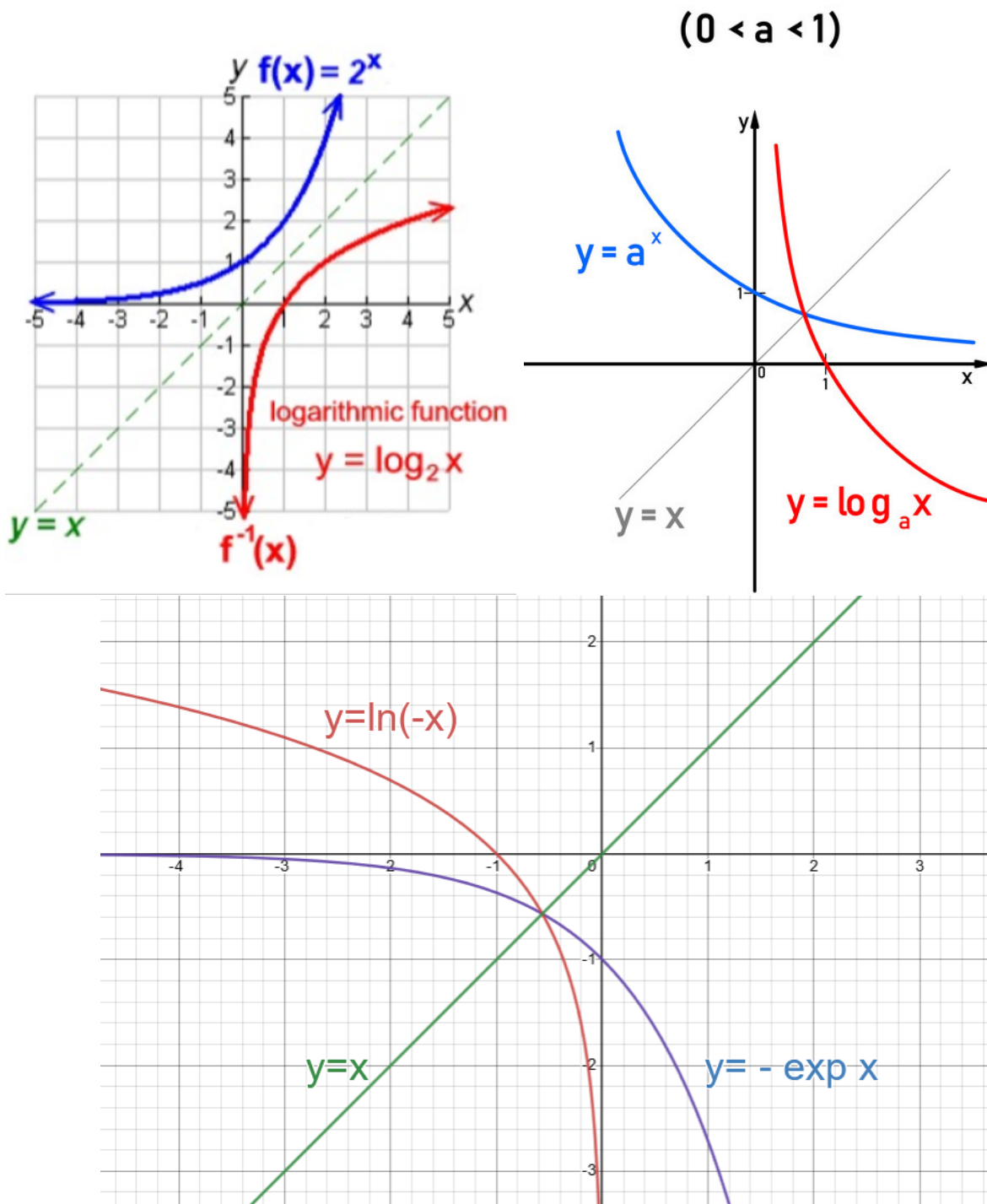
գ) $\left(f \searrow \text{ գոգավոր է}\right) \iff \left(f^{-1} \searrow \text{ գոգավոր է}\right):$

Որպես $u)$, $p)$, $q)$ դեպքերի բնորոշ օրինակներ՝ բերենք հետևյալ փոխհակադարձ ֆունկցիաների օրինակներ.

$$u) \quad f(x) = 2^x \quad \text{և} \quad f^{-1}(x) = \log_2 x,$$

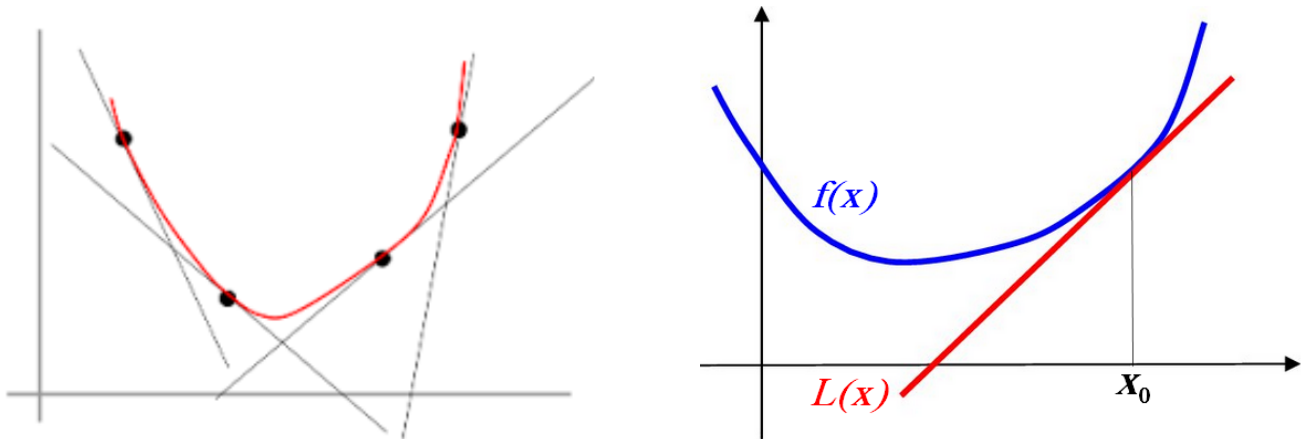
$$p) \quad f(x) = a^x \quad \text{և} \quad f^{-1}(x) = \log_a x \quad (0 < a < 1),$$

$$q) \quad f(x) = -e^x \quad \text{և} \quad f^{-1}(x) = \ln(-x) :$$



Գծագիր 4.21. Ուռուցիկ կամ գոգավոր փոխհակադարձ ֆունկցիաների օրինակներ

Վերջում նշենք դիֆերենցելի ուռուցիկ և գոգավոր ֆունկցիաների ևս մեկ երկրաչափական բնութագրում, այն է՝ շոշափողների միջոցով (տես **գծագիր 4.22**):



Գծագիր 4.22. Ուռուցիկ ֆունկցիայի բնութագրումը շոշափողներով

Թեորեմ 4.18. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է (a, b) միջակայքում:

ա) Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա գրաֆիկի յուրաքանչյուր $(x_0, f(x_0))$ կետում տարված շոշափողն ընկած լինի f -ի գրաֆիկից ներքև: Ավելի հստակ՝

$$\left(f(x) \text{ ֆունկցիան ուռուցիկ է } (a, b)\text{-ում} \right) \iff \left(\begin{array}{l} \forall x_0 \in (a, b) \text{ կետում տարված } L(x) \text{ շոշափողն ընկած է} \\ f\text{-ի գրաֆիկից ներքև, այսինքն } L(x) \leq f(x), \quad x \in (a, b) : \end{array} \right)$$

բ) Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան լինի գոգավոր, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա գրաֆիկի յուրաքանչյուր $(x_0, f(x_0))$ կետում տարված շոշափողն ընկած լինի f -ի գրաֆիկից վերև: Ավելի հստակ՝

$$\left(f(x) \text{ ֆունկցիան գոգավոր է } (a, b)\text{-ում} \right) \iff \left(\begin{array}{l} \forall x_0 \in (a, b) \text{ կետում տարված } L(x) \text{ շոշափողն ընկած է} \\ f\text{-ի գրաֆիկից վերև, այսինքն } L(x) \geq f(x), \quad x \in (a, b) : \end{array} \right)$$

Ապացույց. Ապացուցենք ուռուցիկ ֆունկցիայի ա) բնութագրումը:

$\Rightarrow$ (**Անհրաժեշտություն**) Տրված է $f(x)$ դիֆերենցելի ուռուցիկ ֆունկցիա (a, b) միջակայքում, և ուրեմն, ըստ Թեորեմ 4.16-ի, նրա $\boxed{f'(x) \nearrow}$ ածանցյալն աճող ֆունկցիա է (a, b) միջակայքում:

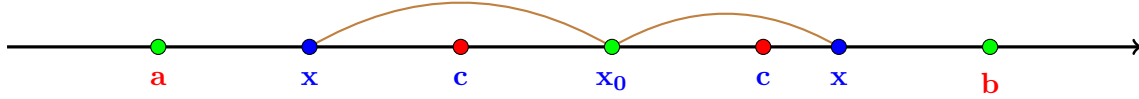
Բացի այդ, օգտվենք կամայական $\forall x_0 \in (a, b)$ կետում տարված f -ի շոշափողի հավասարումից՝

$$y = L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) :$$

Վերցնենք կամայական $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$ կերևի և կիրառենք Լագրանժի բանաձևը $[x, x_0]$ կամ $[x_0, x]$ հատվածում.

$$\exists c \in (x, x_0) \quad \text{կամ} \quad \exists c \in (x_0, x) \quad \text{s.t.} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c),$$

որտեղ c միջանկյալ կետը գտնվում է x և x_0 կետերի միջև, քանի **գծագիր 4.23**:



Գծագիր 4.23. Շոշափման կետի x_0 արագիսը և նրա շրջակայքը

Այժմ, օգտվելով բերված բանաձևերից, գնահատենք $f(x) - L(x)$ փոքրերությունը.

$$\begin{aligned} f(x) - L(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \\ &= f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0) \geq 0, \end{aligned}$$

քանի որ $\boxed{f'(x) \nearrow}$ և $\begin{cases} f'(c) \leq f'(x_0), & \text{երբ } a < x < c < x_0 < b, \\ f'(c) \geq f'(x_0), & \text{երբ } a < x_0 < c < x < b : \end{cases}$

Մեզ պետք էր ապացուցել հենց այս $f(x) - L(x) \geq 0$ գնահատականը:

$\Leftarrow$ (**Բավարարություն**) Այժմ $L(x) \leq f(x)$, $x \in (a, b)$, անհավասարությունը տրված է ըստ պայմանի՝

$$f(x) - L(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0, \quad x \in (a, b) :$$

Այսպես, եթե $x = x_1 < x_0$, ապա $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0)$,

իսկ եթե $x = x_2 > x_0$, ապա $\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \geq f'(x_0) :$

Ներկայացնենք, բոլոր $x_1 < x_0 < x_2$ կետերի համար ստանում ենք

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

անհավասարությունները, որում պարունակվող

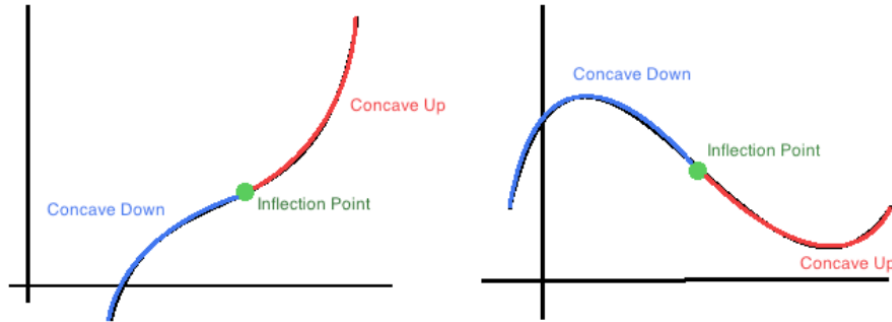
$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}, \quad a < x_1 < x_0 < x_2 < b,$$

անհավասարությունը համընկնում է ուռուցիկ ֆունկցիայի սահմանման հետ, քանի (4-42): Ուստի f -ն ուռուցիկ ֆունկցիա է (a, b) միջակայքում: □

4.21 Շրջման կետ

Սահմանում 4.15. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0 \in (a, b)$ կետում:

x_0 կետը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի **շրջման կետ**, եթե այդ կետով անցնելիս f ֆունկցիան փոխում է ուռուցիկության իր ուղղվածությունը (ներքևից վերև կամ վերևից ներքև):



Քննարկ 4.24. Շրջման կետեր

Օրինակ 4.9. $x_0 = 0$ կետը $f(x) = x^3$ ֆունկցիայի շրջման կետ է, քանի որ այդ կետից աջ ֆունկցիան ուռուցիկ է, իսկ այդ կետից ձախ՝ գոգավոր:

$$f''(x) = 6x > 0 \quad (x > 0), \quad f''(x) = 6x < 0 \quad (x < 0) :$$

Պետք չէ շրջման կետերը շփոթել էքստրեմումի կետերի հետ, դրանք բնույթով շատ փոքրեր են: Այնուամենայնիվ, նրանց հայտանիշների մեջ որոշակի նմանություն կա: Մասնավորապես հաջորդ թեորեմը հիշեցնում է Ֆերմայի թեորեմը կամ լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը:

Թեորեմ 4.19. [Շրջման կետի անհրաժեշտ պայմանը]

Եթե x_0 -ն f ֆունկցիայի շրջման կետ է, ապա կան $f''(x_0) = 0$, կան $\nexists f''(x_0) :$

Առանց ապացույցի:

Այն, որ շրջման կետում 2-րդ կարգի ածանցյալը կարող է հավասար լինել զրոյի, մենք արդեն տեսանք նախորդ $f(x) = x^3$ ֆունկցիայի դեպքում $f''(0) = 0$: Մեկ այլ օրինակով ցույց տանք, որ շրջման կետում 2-րդ կարգի ածանցյալը կարող է գոյություն չունենալ:

Օրինակ 4.10. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x^3, & x \leq 0: \end{cases}$ Գտնենք 2-րդ կարգի ածանցյալը:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0, \\ 3x^2, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0, \\ 6x, & x < 0: \end{cases}$$

Այստեղից արդեն պարզ է, որ համաձայն Թեորեմ 4.16 և 4.17-ի՝ f ֆունկցիան ուռուցիկ է $(0, \infty)$ միջակայքում և գոգավոր է $(-\infty, 0)$ միջակայքում: Ներկայումս, ըստ սահմանման՝ $x_0 = 0$ կետը f ֆունկցիայի շրջման կետ է: Յույց տանք, որ տվյալ շրջման կետում 2-րդ կարգի ածանցյալը գոյություն չունի: Բսկայեն,

$$f''_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2x}{x} = 2,$$

$$f''_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{3x^2}{x} = 0 :$$

Սա նշանակում է, որ $\nexists f''(0)$:

Թեորեմ 4.19-ում ներկայացված շրջման կետի անհրաժեշտ պայմանը բավարար չէ :

Օրինակ, $f(x) = x^4$ ֆունկցիայի համար $f''(0) = 0$, սակայն $x_0 = 0$ կետը f ֆունկցիայի շրջման կետ չէ :

Սա նշանակում է, որ շրջման կետերը գրնելու համար պետք է ունենալ բավարար պայմաններ, հայտանիշներ:

Թեորեմ 4.20. [Շրջման կետի 1-ին բավարար պայմանը]

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում:

Եթե x_0 կետով անցնելիս f'' 2-րդ կարգի ածանցյալը փոխում է իր նշանը, ապա x_0 -ն f ֆունկցիայի շրջման կետ է :

Բսկ եթե x_0 կետով անցնելիս f'' 2-րդ կարգի ածանցյալը պահպանում է իր նշանը, ապա x_0 -ն f ֆունկցիայի շրջման կետ չէ :

Ապացույց. Ակնհայտ է սահմանումներից և Թեորեմ 4.16-4.17-ից: □

Առանց ապացույցի ձևակերպենք շրջման կետի ևս երկու հայտանիշ:

Թեորեմ 4.21. [Շրջման կետի 2-րդ բավարար պայմանը]

Եթե $f''(x_0) = 0$ և $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, ապա x_0 -ն f ֆունկցիայի շրջման կետ է :

Թեորեմ 4.22. [Շրջման կետի 3-րդ բավարար պայմանը]

Դիցուք $f(x) \in C^{n-1}(\mathcal{U}(x_0))$ և $f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, բայց $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \geq 3$:

ա) Եթե n -ը կենր է, ապա x_0 -ն f ֆունկցիայի շրջման կետ է :

բ) Եթե n -ը գույգ է, ապա x_0 -ն f ֆունկցիայի շրջման կետ չէ :

4.22 Ֆունկցիայի ասիմպտոտները

Ֆունկցիայի ասիմպտոտները հապուկ ուղիղներ են և լինում են 2 փեսակի՝ ուղղահիգ և թեք ասիմպտոտներ:

Սահմանում 4.16. Կասենք, որ $x = a$ ուղիղը $f(x)$ ֆունկցիայի (ֆունկցիայի գրաֆիկի)

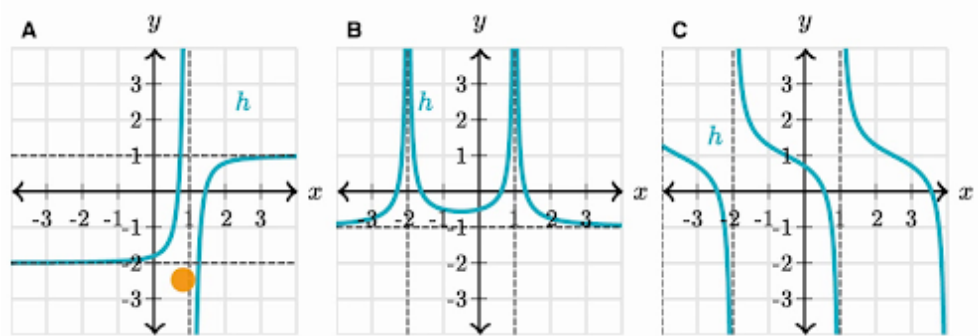
ուղղահիգ ասիմպտոտ է, եթե հետևյալ 4 պայմաններից րեդի ունի գոնե մեկը՝

$$f(a+0) = +\infty, \quad f(a+0) = -\infty, \quad f(a-0) = +\infty, \quad f(a-0) = -\infty : \quad (4-45)$$

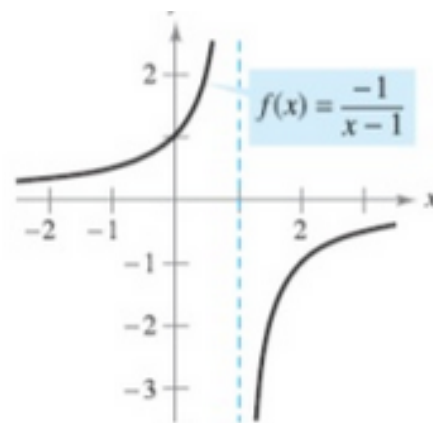
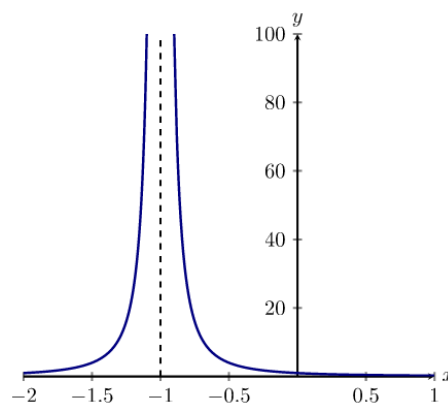
Նաշվի առնենք, որ սրանք f -ի միակողմանի սահմաններն են $x = a$ կետում՝

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) :$$

Գրաֆիկորեն (4-45) պայմանները կարելի է պարկերել: Օրինակ՝



$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$



Գծագիր 4.25. Ուղղահիգ ասիմպտոտների օրինակներ ըստ հերթականության՝

$$x = 1, \quad x = -2, \quad x = 1, \quad x = -2, \quad x = 1, \quad x = -1, \quad x = 1$$

Նկարենք, որ (4-45) պայմաններից երեքը կամ չորսը միասին րեդի ունենալ չեն կարող. դա կհակասեր ֆունկցիայի միարժեքությանը: (4-45) պայմաններից կարող է րեդի ունենալ առավելագույնը երկուսը, օրինակ՝ ինչպես վերջին երկու գրաֆիկներում՝

$$f(-1-0) = f(-1+0) = +\infty, \quad f(1-0) = +\infty, \quad f(1+0) = -\infty :$$

Սահմանում 4.17. Կասենք, որ $y = kx + b$ ուղիղը $f(x)$ ֆունկցիայի **թեք սահմանադրու է** $+\infty$ -ում, եթե

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0 \quad \text{կամ նույնը} \quad f(x) = kx + b + o(1), \quad \text{երբ } x \rightarrow +\infty : \quad (4-46)$$

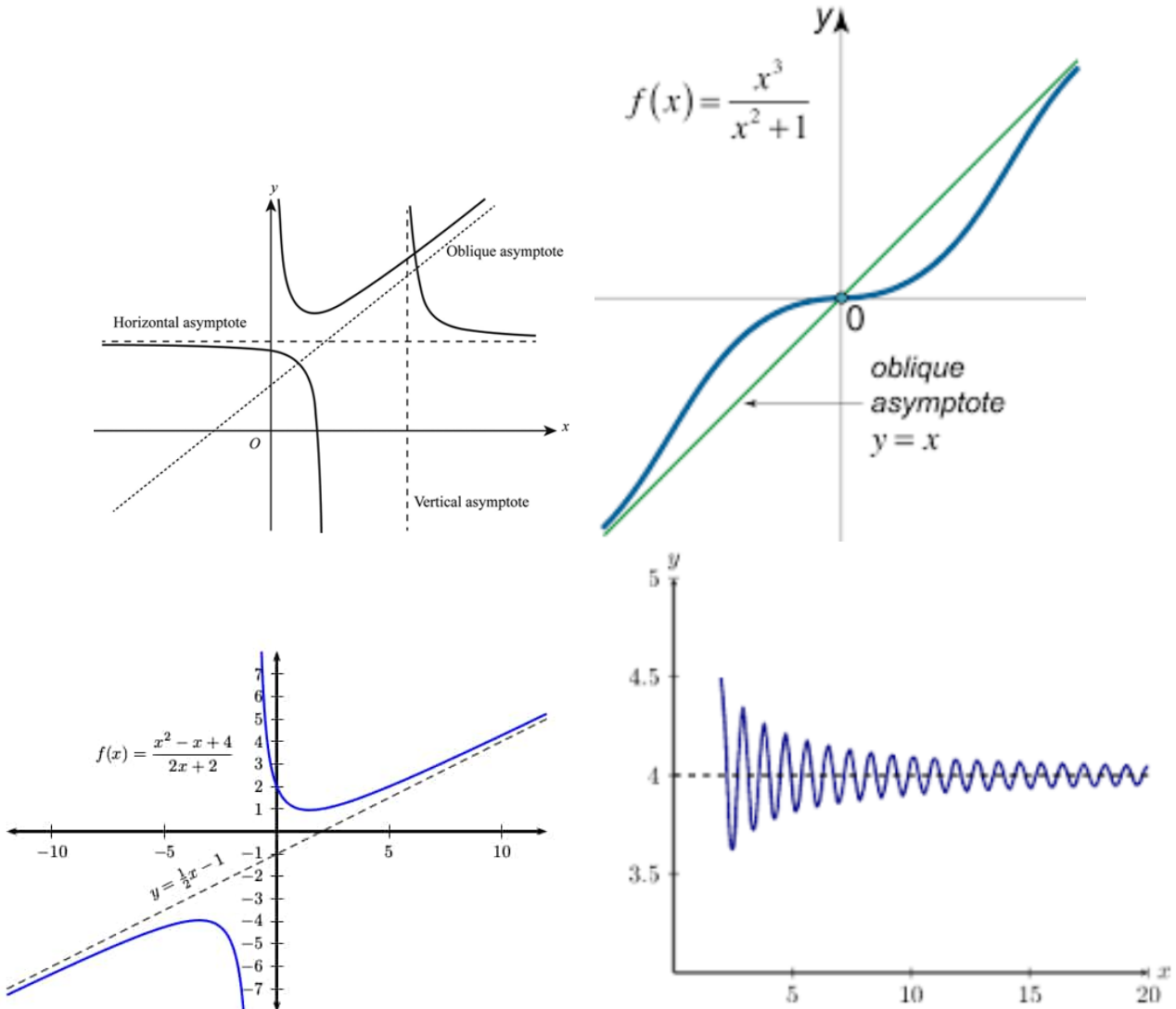
Նույն սահմանումը կրկնվում է $-\infty$ -ի համար:

Սահմանում 4.18. Կասենք, որ $y = kx + b$ ուղիղը $f(x)$ ֆունկցիայի **թեք սահմանադրու է** $-\infty$ -ում, եթե

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - b) = 0 \quad \text{կամ նույնը} \quad f(x) = kx + b + o(1), \quad \text{երբ } x \rightarrow -\infty : \quad (4-47)$$

Մասնավորապես, $y = b$ ուղիղը (այսինքն երբ $k = 0$) անվանում են հորիզոնական սահմանադրու:

Սահմանող (4-46)-(4-47) պայմանները նշանակում են, որ $+\infty$ -ում կամ $-\infty$ -ում $f(x)$ ֆունկցիան «համարյա» գծային է :



Գծազիր 4.26. Թեք սահմանադրուների օրինակներ

Այժմ լուծենք թեք ասիմպտոտի որոնման խնդիրը:

Թեորեմ 4.23. Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան թեք $y = kx + b$ ասիմպտոտ ունենա $+\infty$ -ում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{և} \quad \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b : \quad (4-48)$$

Ապացույց. $\Rightarrow$ Դիցուք $L(x) = kx + b$ ուղիղը $f(x)$ ֆունկցիայի թեք ասիմպտոտ է $+\infty$ -ում: Ապացուցենք, որ (4-48) սահմանները գոյություն ունեն: Ըստ (4-46) պայմանի՝ $f(x) = kx + b + o(1)$, երբ $x \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx + b + o(1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{o(1)}{x} \right) = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [b + o(1)] = b :$$

$\Leftarrow$ Ենթադրենք (4-48) պայմանները բերող ունեն՝

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b \quad \Rightarrow \quad f(x) - kx = b + o(1) \quad \Rightarrow \quad f(x) = kx + b + o(1),$$

երբ $x \rightarrow +\infty$:

Ուրեմն ըստ սահմանման՝ $L(x) = kx + b$ ուղիղը $f(x)$ ֆունկցիայի թեք ասիմպտոտ է $+\infty$ -ում: $\square$

Նմանապես ձևակերպում և ապացուցում ենք թեք ասիմպտոտի հայրանիշը $-\infty$ -ում:

Թեորեմ 4.24. Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան թեք $y = kx + b$ ասիմպտոտ ունենա $-\infty$ -ում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{և} \quad \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = b : \quad (4-49)$$

4.23 Ֆունկցիայի հեռագրության և գրաֆիկի կառուցման սխեման

Ֆունկցիայի քիչ թե շատ լիարժեք հեռագրության և գրաֆիկի կառուցման համար քայլերը հետևյալն են.

1. Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(f) = ?$:
2. Պարզել ֆունկցիայի վարքը որոշման տիրույթի եզրային կետերում (ծայրակետերում):
Մասնավորապես, եթե $D(f) = \mathbb{R}$, ապա պետք է գտնել $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ և $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:
3. Ներագրել ֆունկցիայի անընդհատությունը՝ $f(x) \in C(D)$, թե ոչ, գտնել խզման կետերը, նրանց բնույթը և կարգը:
4. Ներագրել ֆունկցիան ածանցյալի միջոցով՝ $f'(x) = ?$, այսինքն՝ ստանալ մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումի կետերը:
5. Ներագրել ֆունկցիան 2-րդ ածանցյալի միջոցով՝ $f''(x) = ?$, այսինքն՝ ստանալ ուռուցիկության միջակայքերը, շրջման կետերը:
6. Ստուգել ֆունկցիայի ուղղաձիգ ասիմպտոտների առկայությունը (վերջավոր կետերում) և թեք ասիմպտոտների առկայությունը ($\pm\infty$ -ում):
7. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացված հատկությունների միջոցով:

Ֆունկցիայի գրաֆիկը ճիշտ կառուցելու համար, բացի այս հիմնական յոթ կետերից, որոշ դեպքերում օգտակար է գտնել ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը, ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (եթե կան), ֆունկցիայի զրոները, առհասարակ գրաֆիկի հարման կետերը առանցքների հետ, նաև նկատել ֆունկցիայի զույգությունը, կենտությունը, պարբերականությունը (եթե այդպիսիք կան):

Այնուամենայնիվ, դրանք առաջնային չեն, և հիմնականում պետք է բավարարվել նշված յոթ կետերով:

Վարժ. 1398, [8] Ներագույրել ֆունկցիան և կառուցել գրաֆիկը՝ $f(x) = x + e^{-x}$:

Լուծում. Ներկենք $1 - 7$ բայերին:

1. $D(f) = \mathbb{R}$:

2. Ֆունկցիայի վարքը որոշման տիրույթի ծայրակետերում.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + e^{-x}] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left[\frac{x}{e^{-x}} + 1 \right] = +\infty :$$

3. $f(x) \in C(\mathbb{R})$, խզման կետեր չկան: Այսպեղից նաև հետևում է , որ ուղղաձիգ ասիմպտոտներ չկան:

4. Ներագույրենք ֆունկցիան ածանցյալի միջոցով՝ $f'(x) = ?$, այսինքն՝ ստանանք մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումի կետերը.

$$f'(x) = 1 - e^{-x} = 0 \iff e^{-x} = 1 \iff \boxed{x = 0} \text{ միակ կրիտիկական (ստացիոնար) կետը:}$$

Որպեսզի պարզենք՝ արդյոք սա էքստրեմումի կետ է , գրենք մոնոտոնության միջակայքերը.

$$f'(x) \geq 0 \iff 1 - e^{-x} \geq 0 \iff e^{-x} \leq 1 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0 :$$

$$\begin{array}{l} \text{Այսպիսով,} \qquad \text{երբ } x \geq 0, \qquad f'(x) \geq 0, \qquad f(x) \nearrow \\ \qquad \qquad \qquad \text{երբ } x \leq 0, \qquad f'(x) \leq 0, \qquad f(x) \searrow \end{array} \implies \boxed{x_{\min} = 0} :$$

Նշենք, որ էքստրեմումի կետի փաստը կարելի էր ստուգել նաև մեկ այլ հայտանիշով՝ 2-րդ ածանցյալի նշանով.

$$f''(x) = e^{-x}, \qquad f''(0) = 1 > 0 \implies \boxed{x_{\min} = 0} :$$

5. Ներագույրենք ֆունկցիան 2-րդ ածանցյալի միջոցով՝ $f''(x) = ?$, այսինքն՝ ստանանք ուռուցիկության միջակայքերը, շրջման կետերը:

$$f''(x) = e^{-x} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \implies f(x) \text{ ֆունկցիան ուռուցիկ է ամբողջ } \mathbb{R}\text{-ի վրա:}$$

Ներկաբար ֆունկցիան շրջման կետեր չունի:

6. Ստուգենք ֆունկցիայի ուղղաձիգ ասիմպտոտների առկայությունը (վերջավոր կետերում) և թեք ասիմպտոտների առկայությունը ($\pm\infty$ -ում):

Արդեն նշել էինք, որ ֆունկցիան ուղղաձիգ ասիմպտոտներ չունի, քանի որ անընդհատ է :

Նախ, ստուգենք թեք ասիմպտոտի առկայությունը $+\infty$ -ում: Ըստ թեք ասիմպտոտի հայտանիշի՝

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^{-x}}{x} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + e^{-x} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 :$$

Ուրեմն $+\infty$ -ում f ֆունկցիան թեք ասիմպտոտ ունի, և նշված k և b սահմանները այդ ասիմպտոտի գործակիցներն են՝ $\boxed{y = x}$:

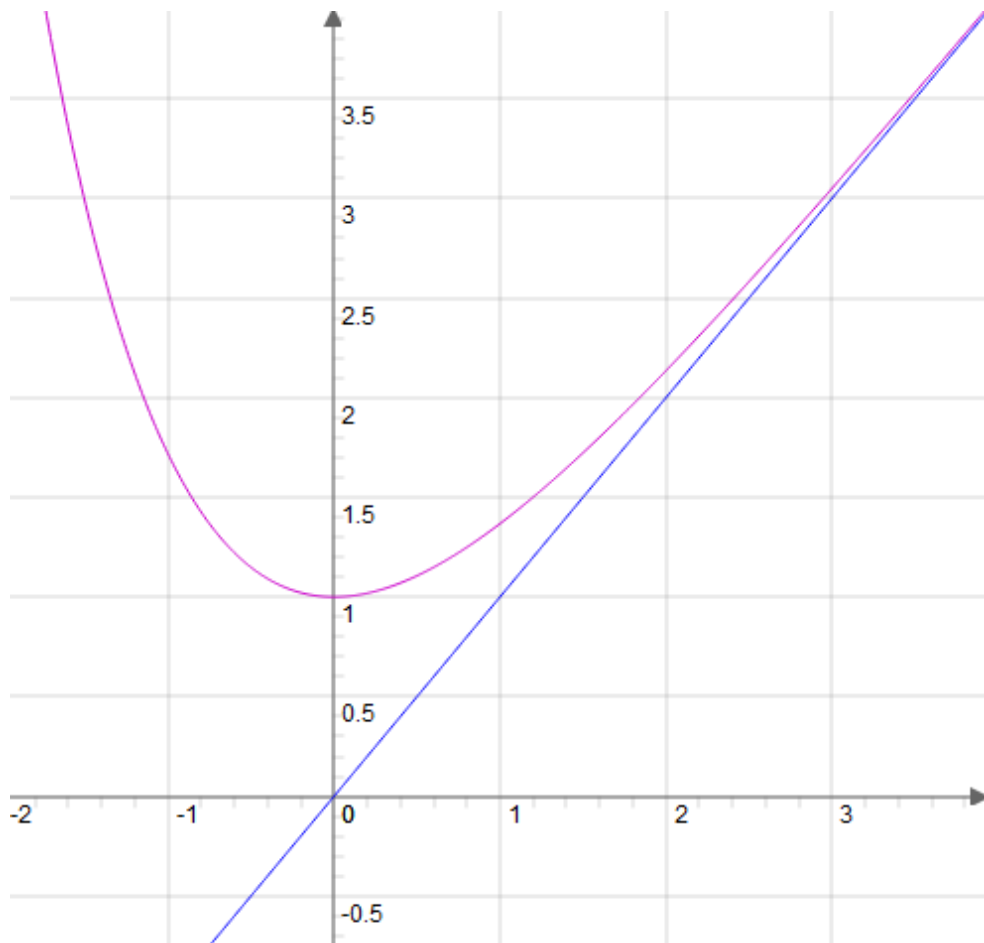
Այժմ ստուգենք թեք ասիմպտոտի առկայությունը $-\infty$ -ում: Ըստ թեք ասիմպտոտի հայտանիշի՝

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{e^{-x}}{x} \right) = \infty,$$

սահմանը գոյություն չունի (օգտվեցինք նշանավոր սահմանից):

Ուրեմն $-\infty$ -ում f ֆունկցիան թեք ասիմպտոտ չունի:

7. Ի մի բերելով բոլոր հասարակված հարկությունները՝ կառուցենք ֆունկցիայի գրաֆիկը և նրա ասիմպտոտը:



Գծագիր 4.27. $f(x) = x + e^{-x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և նրա ասիմպտոտը

4.24 Նշանավոր անհավասարություններ գումարների համար

4.24 ա. Յենսենի անհավասարությունը

Թեորեմ 4.25. *Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է X միջակայքում: Այդ դեպքում*

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in X \quad \text{կետերի համար } n$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1, \quad \text{թվերի համար}$$

ճիշդ է Յենսենի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n) : \quad (4-50)$$

Ավելի կարճ՝ այս պնդումը կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$\forall x_k \in X, \quad \forall \alpha_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, n}), \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1, \quad \implies \quad \boxed{f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k)} : \quad (4-51)$$

Ապացույց. Նկատենք, որ Յենսենի (4-50)-(4-51) անհավասարությունը ուռուցիկության պայմանի ընդհանրացումն է և հանգում է դրան, երբ $n = 2$ ՝ $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$:

Ընդհանուր դեպքում Յենսենի (4-50)-(4-51) անհավասարությունը ապացուցելու համար կարելի է դիմել մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքին: Ելման կետը $n = 2$ դեպքն է, ինչը փաստանք՝ ճշմարիտ է շնորհիվ ուռուցիկության: Կամայական $n \in \mathbb{N}$ համար համարենք, որ (4-50)-(4-51) անհավասարությունը ճիշդ է որպես ինդուկցիոն ենթադրություն: Այնուհետև փորձենք ապացուցել նույն անհավասարությունը $n+1$ կետերի համար, այսինքն՝

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}), \quad (4-52)$$

կամ նույնը կարճ՝

$$\forall x_k \in X, \quad \forall \alpha_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, n+1}), \quad \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1, \quad \implies \quad \boxed{f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k)} : \quad (4-53)$$

Իսկապես, սա ապացուցելու համար բավական է կիրառել ինդուկցիոն ենթադրությունը (n -ի դեպքը), ինչպես նաև $n = 2$ դեպքը.

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) &= \\ &= f\left(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) \left[\frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_{n+1} \right]\right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) f\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_{n+1}\right) \leq \\
&\leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} f(x_n) + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} f(x_{n+1}) = \\
&= \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}),
\end{aligned}$$

ինչը համընկնում է ակնկալվող (4-52)-(4-53) անհավասարության հետ $n+1$ կետերի համար: $\square$

Ներքին 4.7. (Միջինների անհավասարությունը)

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad a_k > 0, \quad k = \overline{1, n}: \quad (4-54)$$

Ապացույց. Վերցնենք կամայական դրական $a_k > 0$ ($k = \overline{1, n}$) թվեր և դիտարկենք կոնկրետ ուռուցիկ ֆունկցիա՝ $f(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$:

Կիրառենք $f(x) = e^x$ ֆունկցիայի նկարմամբ Յենսենի (4-50)-(4-51) անհավասարությունը, ընդ որում՝ ընտրենք $\alpha_k = \frac{1}{n}$ ($k = \overline{1, n}$) պարամետրերը իրար հավասար՝ $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \\
\exp \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} &\leq \frac{e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_n}}{n}:
\end{aligned}$$

Քանի որ $x_k \in \mathbb{R}$ թվերն այսպեղ կամայական են, ապա կարող ենք ընտրել $x_k = \ln a_k$, $a_k = e^{x_k}$ ($k = \overline{1, n}$):

Տեղադրենք և կստանանք

$$\begin{aligned}
\exp \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} &\leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\
(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} &\leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},
\end{aligned}$$

ինչը և պահանջվում էր: $\square$

4.24 ր. Յունգի անհավասարությունը

Մահմանում 4.19. Իրական p և q թվերը կոչվում են **համալուծ ինդեքսներ**, եթե $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

Թեորեմ 4.26. Եթե $A, B > 0$, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ապա

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}: \quad (4-55)$$

Ապացույց. Նշանակենք՝

$$\begin{aligned}
x &= p \ln A, & A &= e^{x/p} \\
y &= q \ln B, & B &= e^{y/q}:
\end{aligned}$$

կամ նույնը՝

Քանի որ $f(x) = e^x$ ֆունկցիան ուռուցիկ է և $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, համաձայն ուռուցիկության սահմանման, այսինքն՝ Յենսենի անհավասարության, երբ $n = 2$, սրանում ենք՝

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) &\leq \frac{1}{p}f(x) + \frac{1}{q}f(y) \\ \exp\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) &\leq \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y, \quad x, y \in \mathbb{R} : \end{aligned}$$

Տեղադրենք այսպեղ նշանակումները.

$$AB = e^{x/p} e^{y/q} \leq \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y = \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q :$$

Նենց սա է Յունգի անհավասարությունը: □

Դիպողություն 4.13. Մասնավոր դեպքում, երբ $p = q = 2$, Յունգի անհավասարությունը հանգում է պարզագույն անհավասարության.

$$AB \leq \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}, \quad \text{կամ} \quad 2AB \leq A^2 + B^2 :$$

4.24 գ. Նյուդերի անհավասարությունը

Թեորեմ 4.27. Եթե $a_k, b_k > 0$ ($k = \overline{1, n}$), $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ապա

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q} : \quad (4-56)$$

Ապացույց. Նշանակենք՝

$$A_k = \frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p}}, \quad B_k = \frac{b_k}{\left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}}, \quad k = \overline{1, n} :$$

Նեշտի է ստուգել, որ

$$\sum_{k=1}^n A_k^p = 1, \quad \sum_{k=1}^n B_k^q = 1 : \quad (4-57)$$

Բաժանելով (4-56) անհավասարությունը նրա աջ կողմի վրա՝ նկատում ենք, որ (4-56)-ը համարժեք է հետևյալ անհավասարությանը.

$$\sum_{k=1}^n A_k B_k \leq 1 : \quad (4-58)$$

Ուրեմն բավական է ապացուցել (4-58) անհավասարությունը: Կիրառենք Յունգի (4-55) անհավասարությունը A_k և B_k զույգի համար.

$$A_k B_k \leq \frac{1}{p} A_k^p + \frac{1}{q} B_k^q, \quad k = \overline{1, n} :$$

Այժմ գումարենք դրանք բոլոր k -երով՝ $k = \overline{1, n}$.

$$\sum_{k=1}^n A_k B_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n A_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n B_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 :$$

Այսպիսով ապացուցեցինք (4-58) անհավասարությունը և ամբողջ թեորեմը: $\square$

Դիպողություն 4.14. Մասնավոր դեպքում, երբ $p = q = 2$, Նյուդերի անհավասարությունը մի փոքր ավելի պարզ տեսք ունի.

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2}, \quad (4-59)$$

և սովորաբար նրան այլ կերպ են կոչում՝ **Շվարցի անհավասարություն** կամ **Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարություն**:

Դիպողություն 4.15. Մեկ այլ մասնավոր դեպքում, երբ $\{b_k\}$ հաջորդականությունը հաստատուն է, $b_k = 1$ ($k = \overline{1, n}$), Նյուդերի անհավասարությունից ստանում ենք ավելի պարզ անհավասարություն.

$$\sum_{k=1}^n a_k^p \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^p \leq n^{p-1} \sum_{k=1}^n a_k^p, \quad 1 \leq p < \infty : \quad (4-60)$$

Նշենք, որ (4-60)-ի ձախ անհավասարությունը հեշտությամբ կարելի է ապացուցել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

4.24 դ. Մինկովսկու անհավասարությունը

Թեորեմ 4.28. Եթե $a_k, b_k > 0$ ($k = \overline{1, n}$), $p > 1$, ապա

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} : \quad (4-61)$$

Ապացույց. Ձևափոխենք (4-61) անհավասարության ձախ կողմը.

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{p-1} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k (a_k + b_k)^{p-1} :$$

Ներմուծենք p -ի համալուծ ինդեքսը՝ $q = \frac{p}{p-1}$ կամ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, և կիրառենք Նյուդերի (4-56) անհավասարությունը երկու գումարների համար.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p &= \sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k (a_k + b_k)^{p-1} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right)^{1/q} = \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/q} :$$

Այնուհետև բաժանենք $\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/q}$ -ի վրա և կստանանք՝

$$\frac{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p}{\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/q}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} :$$

Ձախ կողմում ընդհանուր աստիճանով գրենք.

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1-1/q} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} :$$

Նաշվի առնելով համալուծ ինդեքսները՝ $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, համոզվում ենք, որ վերջին անհավասարությունը համընկնում է Մինկովսկու (4-61) անհավասարության հետ: $\square$

Վերջում մի պարզեցնող միջոցի մասին: Դիտարկենք $n \in \mathbb{N}$ կոորդինատներ ունեցող վեկտորներ, այդպես կոչված՝ n -չափանի վեկտորներ. $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$:

Վեկտորների **սկալյար արտադրյալը** սահմանում են ինչպես միշտ կոորդինատների միջոցով՝

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv (\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{k=1}^n a_k b_k :$$

Նշենք, որ սկալյար արտադրյալի համար երկու նշանակումներն էլ հավասարապես օգտագործում են: Վեկտորների երկարությունը սահմանում են սովորական եղանակով՝

$$|\vec{a}| = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2}, \quad |\vec{b}| = \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2} :$$

Սրա հետ մեկտեղ սահմանում են սովորական երկարությունը ընդհանրացնող ավելի լայն մի հասկացություն.

$$\|\vec{a}\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p}, \quad \|\vec{b}\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}$$

դրական մեծություններն անվանում են **պվյալ վեկտորի p -նորմ**:

Ահա այս բավականին հարմար նշանակումների միջոցով Նյուդերի (4-56) և Մինկովսկու (4-61) անհավասարությունները կարելի է արտագրել չափազանց կարճ և հարմարավետ տեսքով.

$$\text{Նյուդերի անհավասարություն} \quad \boxed{|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\|_p \|\vec{b}\|_q}, \quad 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (4-62)$$

$$\text{Մինկովսկու անհավասարություն} \quad \boxed{\|\vec{a} + \vec{b}\|_p \leq \|\vec{a}\|_p + \|\vec{b}\|_p}, \quad p > 1 : \quad (4-63)$$

Վերջին (4-63) անհավասարության մեջ դժվար չէ ճանաչել լավ հայտնի եռանկյան անհավասարությունը (նորմերի համար): Մասնավոր $p = 2$ դեպքում 2-նորմը համընկնում է վեկտորի երկարության հետ՝ $\|\vec{a}\|_2 = |\vec{a}|$, և ստանում ենք դասական եռանկյան անհավասարությունը. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| :$

4.25 Ածանցյալի որոշ փոփոխական կիրառություններ

4.25 ա. Ածանցյալի և լոգարիթմական ածանցյալի փոփոխական իմաստը

Առհասարակ ածանցյալն ունի բազմաթիվ կիրառություններ փոփոխականության մեջ:

Ինքնին որևէ ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ սահմանման արտահայտում է այդ ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը: Կոնկրետ կետում ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ սահմանման նշանակում է այդ կետում ֆունկցիայի **ակնթարթային արագությունը**, $y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$:

Տվյալ $y = y(x)$ ֆունկցիան կարող է արտահայտել փոփոխական որևէ ցուցանիշ, և ուրեմն այդ ցուցանիշի փոփոխման արագությունն է արտահայտում նրա ածանցյալը:

Օրինակ, որևէ արտադրանքի թողարկման արագությունը (այլ կերպ ասած՝ **արտադրողականությունը**), կամ աշխատունակ բնակչության աճման արագությունը, կամ թագավարակի փորածման արագությունը, կամ ձեռնարկության բաժնեգրման գների փոփոխման արագությունը և այլն:

Ենթադրենք $Q(x)$ ֆունկցիան արտահայտում է թողարկված արտադրանքի քանակի կախվածությունը x (դրամ) ծախսերի մեծությունից: $\frac{\Delta Q}{\Delta x}$ կոտորակն արտահայտում է ծախսերի Δx չափին համապատասխանող արտադրանքի միջին մեծությունը, $Q_{\text{միջին}} = \frac{\Delta Q}{\Delta x}$:

Դրա սահմանը, երբ Δx ծախսը ձգվում է զրոյի, կոչվում է **սահմանային (կամ մարջինալ) արտադրանք** փվյալ x_0 ծախսերի դեպքում,

$$MQ(x_0) \equiv Q'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} Q_{\text{միջին}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} :$$

Նմանօրինակ սահմանային (կամ մարջինալ) փոփոխական մեծություններ կան, օրինակ, սահմանային (մարջինալ) արժեք, սահմանային (մարջինալ) ծախս, սահմանային (մարջինալ) շահույթ, սահմանային հասույթ:

Վերհիշենք անընդհատ փոփոխման բանաձևը՝ $B = B(t) = P e^{rt}$:

Նաշվենք բալանսի (սպասվելի արժեքի) լոգարիթմական ածանցյալն ըստ ժամանակի,

$$B'(t) = P r e^{rt} = r B(t) \quad \implies \quad \left(\ln B(t) \right)' = \frac{B'(t)}{B(t)} = r :$$

Եզրակացություն

Անընդհատ փոփոխման սխեմայով տարեկան r փոփոխությունը հավասար է ընթացիկ ներդրման (բալանսի) լոգարիթմական ածանցյալին,

$$\left(\ln B(t) \right)' = \frac{B'(t)}{B(t)} = r$$

4.25 բ. Պահանջարկի գնառաձգականությունը

Price Elasticity of Demand (PED)

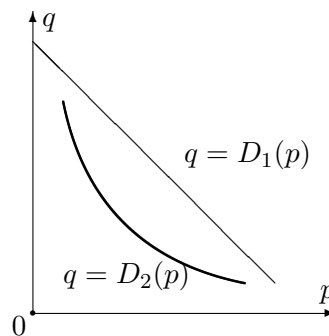
Առաձգականության փոխարեն հաճախ ասում են նաև **ճկունություն** կամ **էլաստիկություն**:

Դիտարկենք **պահանջարկի ֆունկցիան** (demand function)՝ $q = q(p) \equiv D(p)$, որտեղ նշանակված են՝

p միավոր ապրանքի (ծառայության) գինը (կամ ապրանքի միավոր գին),

q միավոր ապրանքի պահանջված քանակը, այսինքն՝ ապրանքի այն քանակն է, որը սպառողը պատրաստ է գնել տվյալ p գնի դեպքում:

Սովորական, սրանդարտ իրավիճակում շուկայում պահանջարկը նվազող ֆունկցիա է, փեն բնորոշ գրաֆիկները ստորև: Իսկապես, շուկայի օրինաչափություն է. երբ աճում է սպառողի պահանջարկը, միավոր ապրանքի գինը նվազում է: Ճիշտ է նաև հակադարձը:



Գծագիր 4.28. Պահանջարկի ֆունկցիայի գրաֆիկների բնորոշ օրինակներ

Կատարենք նոր նշանակումներ.

Δp գնաճ, Δq պահանջարկի աճ,

$\frac{\Delta p}{p}$ գնի հարաբերական աճ, $\frac{\Delta q}{q}$ պահանջարկի հարաբերական աճ,

$\frac{\Delta p}{p} \cdot 100\%$ գնի տոկոսային աճ, $\frac{\Delta q}{q} \cdot 100\%$ պահանջարկի տոկոսային աճ,

$\frac{p'}{p} \cdot 100\% = \frac{100 \frac{dp}{dp}}{p} = \frac{100}{p}$ գնի փոփոխման տոկոսային աճ,

$\frac{q'(p)}{q(p)} \cdot 100\% = \frac{100 \frac{dq}{dp}}{q}$ պահանջարկի փոփոխման տոկոսային աճ:

Սահմանում 4.20. $y = y(x)$ **ֆունկցիայի առաձգականությունը** սահմանվում է որպես հարաբերություն՝

$$E_y(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{x}{y} = \frac{x y'(x)}{y(x)} = x (\ln y(x))' = \frac{(\ln y(x))'}{(\ln x)'} :$$

$q = q(p)$ **պահանջարկի գնառաձգականությունը** սահմանվում է որպես հարաբերություն՝

$$\text{PED} \equiv E(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q}{p} \frac{\text{պահանջարկի փոփոխման փոկոսային աճ}}{\text{գնի փոփոխման փոկոսային աճ}} = \frac{\frac{100 \frac{dq}{dp}}{q}}{\frac{100}{p}} = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} = \frac{p q'}{q} = \frac{(\ln q(p))'}{(\ln p)'} :$$

Ֆունկցիայի առաձգականությունը ցույց է տալիս, թե արգումենտի 1% աճին ֆունկցիայի մոտավորապես քանի փոկոս աճ (նվազում) է համապատասխանում:

Պահանջարկի գնառաձգականությունը ցույց է տալիս, թե 1% գնաճին պահանջարկի մոտավորապես քանի փոկոս աճ (փաստացի՝ նվազում) է համապատասխանում:

Օրինակ 4.11. *Դիցուք պահանջարկի ֆունկցիան տրված է՝* $q = D(p) = 240 - 2p$, $0 \leq p \leq 120$:

Գրենք այս պահանջարկի գնառաձգականությունը՝

$$E(p) = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} = -2 \frac{p}{q} = -2 \frac{p}{240 - 2p} = \frac{-p}{120 - p} ,$$

ինչպես նաև՝ գնառաձգականության արժեքները կոնկրետ միավոր գների համար՝

$$E(100) = \frac{-100}{120 - 100} = -5, \quad E(80) = -2, \quad E(40) = -0.5 :$$

Սա նշանակում է, որ

երբ $p = 100$ (դրամ), 1% գնաճը $\implies \approx 5\%$ պահանջարկի նվազում,

երբ $p = 80$ (դրամ), 1% գնաճը $\implies \approx 2\%$ պահանջարկի նվազում,

երբ $p = 40$ (դրամ), 10% գնաճը $\implies \approx 5\%$ պահանջարկի նվազում:

Նկատենք, որ

$$q = D(p) \searrow \text{ըստ } p\text{-ի} \implies \frac{dq}{dp} = q'(p) < 0 \implies E(p) = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} < 0 \implies |E(p)| > 0 :$$

Քննարկենք առաձգականության մակարդակները.

- Եթե $|E(p)| > 1$, ապա **պահանջարկն առաձգական է** : (Elastic demand)

Պահանջարկը հարաբերականորեն զգայուն է գնի փոփոխություններին:

- Եթե $|E(p)| < 1$, ապա **պահանջարկն առաձգական չէ** : (Inelastic demand)

Պահանջարկը հարաբերականորեն զգայուն չէ գնի փոփոխություններին:

- Եթե $|E(p)| = 1$, ապա **պահանջարկը միավոր առաձգական է** : (Demand of unit elasticity)

Սա նշանակում է, որ գնի և պահանջարկի փոփոխության փոփոխությունները (մոտավորապես) հավասար են:

Օրինակ 4.12. Վերադառնանք վերջին օրինակին՝ $q = D(p) = 240 - 2p$, $0 \leq p \leq 120$:

Գրենք փոխյալ պահանջարկի գնառաձգականության մակարդակները.

$$E(p) = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} = \frac{-p}{120 - p} = -1, \quad |E(p)| = \frac{p}{120 - p} = 1 \iff p = 120 - p \iff p = 60 :$$

- Երբ $p = 60$, ապա **պահանջարկը միավոր առաձգական է**՝ $|E(p)| = 1$:

Այսինքն՝ գնի և պահանջարկի փոփոխության փոփոխությունները (մոտավորապես) հավասար են:

- Երբ $0 < p < 60$, ապա **պահանջարկն առաձգական չէ**՝ $|E(p)| < 1$:

- Երբ $60 < p < 120$, ապա **պահանջարկն առաձգական է**՝ $|E(p)| > 1$:

Պահանջարկի գնառաձգականության մակարդակն օգտակար փեղեկություն է փախս փոխյալ ապրանքի իրացման հասույթի մասին:

Նասույթի ֆունկցիան (Revenue Function) բնական է սահմանել որպես փոխյալ ապրանքի p միավոր գնի և այդ գնի դեպքում ապրանքի վաճառված q քանակի արտադրյալ՝

$$R(p) \stackrel{\text{def}}{=} p q(p) :$$

Ընդունելով, որ պահանջարկի $q(p)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, կարող ենք հաշվել հասույթի ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$R'(p) \equiv \frac{dR(p)}{dp} = q + p \frac{dq}{dp} = q \left(1 + \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} \right) = q(1 + E(p)) = q(1 - |E(p)|) :$$

Այսպիսով լավ երևում է **առաձգականության մակարդակների ազդեցությունը հասույթի ֆունկցիայի վրա.**

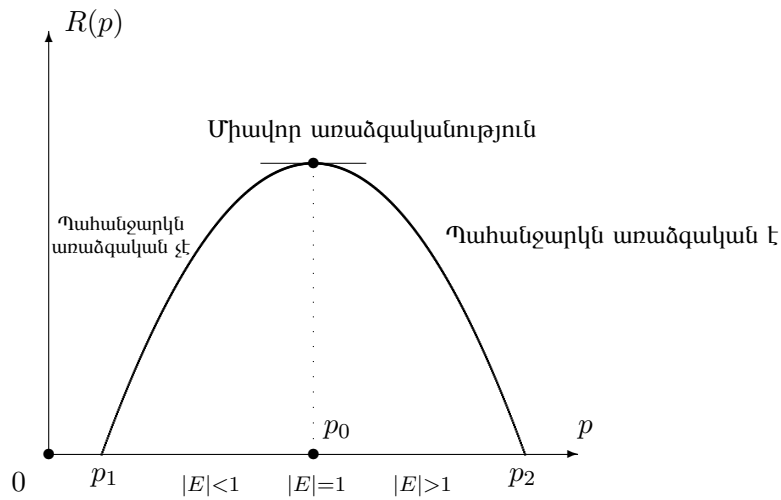
ա) Եթե պահանջարկն առաձգական է, այսինքն $|E(p)| > 1$, ապա $R'(p) < 0$, $R(p) \searrow$ ըստ p -ի:

բ) Եթե պահանջարկն առաձգական չէ, այսինքն $|E(p)| < 1$, ապա $R'(p) > 0$, $R(p) \nearrow$ ըստ p -ի:

գ) Եթե պահանջարկը միավոր առաձգական է, այսինքն $|E(p)| = 1$, ապա $R'(p) = 0$,

և ուրեմն հասույթը անփոփոխ է գնի փոքր շեղումների դեպքում:

Այս երևույթները օգտակար է պարկերել գրաֆիկական եղանակով.



Գծագիր 4.29. Հասույթը որպես գնի ֆունկցիա

Գլուխ 5

Անորոշ և որոշյալ ինտեգրալներ

5.1 Նախնական ֆունկցիա և անորոշ ինտեգրալ

Նաճախ կարիք է լինում կիրառել դիֆերենցմանը (աժանցմանը) հակադարձ գործողություն: Այսինքն՝ խնդիրը հերևյալն է. ֆունկցիայի րրված աժանցյալով գրնել ինքը ֆունկցիան, ասում են՝ վերականգնել ֆունկցիան նրա աժանցյալի միջոցով:

Սահմանում 5.1. $g(x)$ ֆունկցիան կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական (նախնական ֆունկցիա) կամ հակաաժանցյալ (a, b) միջակայքում, եթե

$$\boxed{g'(x) = f(x)}, \quad x \in (a, b) :$$

Օրինակ 5.1. Բերենք նախնականների օրինակներ.

$$\begin{array}{lll} f(x) = \cos x, & g(x) = \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ f(x) = \sin x, & g(x) = -\cos x, & x \in \mathbb{R}, \\ f(x) = \frac{1}{x}, & g(x) = \ln |x|, & x \neq 0, \\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}, & g(x) = \operatorname{arctg} x, & x \in \mathbb{R}, \quad \text{և այլն:} \end{array}$$

Բոլոր օրինակներում $g'(x) = f(x)$, և g -ն f -ի նախնականն է նշված բազմության մեջ:

Մասնավորապես, երբ $x < 0$, սրուգենք լոգարիթմական նախնականը՝

$$g(x) = \ln |x| = \ln(-x) \quad \implies \quad g'(x) = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x} = f(x),$$

որենն իսկապես g -ն f -ի նախնականն է $(-\infty, 0)$ միջակայքում:

Նախնականը սահմանող պայմանը կարելի է արգագրել դիֆերենցիալի միջոցով՝

$$\boxed{dg(x) = g'(x) dx = f(x) dx}, \quad x \in (a, b) :$$

Նկատենք, որ քանի որ $f(x)$ ֆունկցիայի նախնականը միակը չէ : Իսկապես, եթե g -ն f -ի նախնական է, ապա $g(x) + C$ ֆունկցիան ($C = \text{const} \in \mathbb{R}$) նույնպես f -ի նախնական է այն պարզ պատճառով, որ

$$(g(x) + C)' = g'(x) = f(x), \quad x \in (a, b) :$$

Նրաշալի է, որ ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը:

Թեորեմ 5.1. Եթե $g_1(x)$ և $g_2(x)$ ֆունկցիաներն $f(x)$ ֆունկցիայի նախնականներ են (a, b) միջակայքում, ապա

$$g_1(x) - g_2(x) = C = \text{const}, \quad x \in (a, b) :$$

Այլ կերպ ասած՝ f -ի ցանկացած երկու նախնականներ իրարից կարող են տարբերվել միայն հաստատուն գումարելիով:

Ապացույց. Նախնական լինելու պայմանը նշանակում է՝

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= f(x), \\ g_2'(x) &= f(x), \end{aligned} \quad \implies \quad g_1'(x) = g_2'(x), \quad x \in (a, b) :$$

Իսկ երբ երկու ֆունկցիա նույն ածանցյալն ունեն, ապա, ըստ Լագրանժի թեորեմի (հետևանքի), այդ g_1 և g_2 ֆունկցիաներն իրարից տարբերվում են միայն հաստատուն գումարելիով՝ $g_1(x) - g_2(x) = C, \quad x \in (a, b) : \quad \square$

Դիպողություն 5.1. Այսպես կարևոր էր, որ գործ ունեինք (a, b) միջակայքի հետ, ինչը թույլ տվեց կիրառել Լագրանժի թեորեմը: Նախառակ դեպքում, օրինակ, միջակայքերի միավորման համար Թեորեմ 5.1-ը սխալ է :

Քանի որ ապացուցեցինք, որ ավյալ $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր նախնականներն իրարից տարբերվում են ընդամենը հաստատուն գումարելիով, բնական է բոլոր նախնականները միավորել մեկ անվան տակ:

Սահմանում 5.2. (a, b) միջակայքում տրված $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր նախնականների համախումբը (բազմությունը) կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի **անորոշ ինտեգրալ** (a, b) -ում և նշանակվում է հատուկ սիմվոլով՝

$$\boxed{\int f(x) dx} :$$

Այսպես $\int$ ինտեգրալի նշանն է, $f(x)$ -ը կոչվում է **էնթինտեգրալային ֆունկցիա**,

dx -ն անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալն է և այսպես ցույց է տալիս, թե որ փոփոխականով է կատարվում ինտեգրումը:

Այսպիսով, եթե $g(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ -ի որևէ նախնականն է՝ $g'(x) = f(x)$, ապա $g(x) + C$ փոքրի մնացած բոլոր նախնականները միասին վերցրած կազմում են $f(x)$ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալը: Կգրենք՝

$$\boxed{g'(x) = f(x)}, \quad x \in (a, b), \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\int f(x) dx = g(x) + C}, \quad \forall C = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad x \in (a, b): \quad (5-1)$$

Դիտողություն 5.2. Կարևոր է հասկանալ՝ ըստ սահմանման՝ համարում ենք, որ (5-1) ինտեգրալային հավասարությունը ոչ թե երկու կոնկրետ ֆունկցիաների հավասարություն է, այլ ֆունկցիաների երկու բազմությունների հավասարություն: Այլ կերպ ասած՝ (5-1) ինտեգրալային հավասարությունը պետք է ընկալել հասարակ զուամարելի ճշտությամբ:

Բերենք հիմնական փարբական ֆունկցիաների անորոշ ինտեգրալների աղյուսակը, որպեսզի ենթադրում ենք, որ C -ն կամայական իրական հասարակություն է՝ $\forall C = \text{const} \in \mathbb{R}$, a -ն և b -ն պարամետրեր են, իսկ x փոփոխականը գտնվում է մասնակից ֆունկցիաների որոշման փիրություն, անգամ եթե դա նշված չէ :

$$\int 0 dx = C, \quad \int 1 dx = x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \quad (x \neq \pm 1)$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + b}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C \quad (b \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C \quad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C \quad (-a < x < a, \quad a > 0)$$

5.2 Անորոշ ինտեգրալի պարզագույն հասկացությունները

Ստորև բերված բոլոր հասկացությունները ստուգելիս կօգտվենք անորոշ ինտեգրալի սահմանումից, այսինքն՝

$$(5-1)\text{-ից} \quad \boxed{g'(x) = f(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\int f(x) dx = g(x) + C} :$$

Հասկացություն 5.1.

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx, \quad \text{կամ նույնը} \quad \frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx\right) = f(x) :$$

Ապացույց. Մասնակից $f(x)$ ֆունկցիայի նախնականը նշանակենք $g(x)$ -ով՝ $g'(x) = f(x)$, հետո օգտվենք (5-1)-ից և դիֆերենցիալի սահմանումից.

$$d\left(\int f(x) dx\right) = d(g(x) + C) = dg(x) = g'(x) dx = f(x) dx :$$

□

Հասկացություն 5.2.

$$\int dg(x) = g(x) + C :$$

Ապացույց.

$$\int dg(x) = \int g'(x) dx = \int f(x) dx = g(x) + C :$$

□

Հասկացություն 5.3.

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx :$$

Ապացույց. Մասնակից $f_1(x), f_2(x)$ ֆունկցիաների նախնականները նշանակենք համապատասխանաբար $g_1(x)$ և $g_2(x)$ -ով՝

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= f_1(x), \\ g_2'(x) &= f_2(x), \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \int f_1(x) dx &= g_1(x) + C_1, \\ \int f_2(x) dx &= g_2(x) + C_2, \end{aligned}$$

որտեղ C_1 և C_2 -ը կամայական իրական հաստատվածներ են: Յուրյ փանք, որ $g_1(x) \pm g_2(x)$ ֆունկցիան $f_1(x) \pm f_2(x)$ ֆունկցիայի նախնականն է: Իսկապես,

$$\left(g_1(x) \pm g_2(x)\right)' = g_1'(x) \pm g_2'(x) = f_1(x) \pm f_2(x) :$$

Անորոշ ինտեգրալի (5-1) սահմանման համաձայն՝ վերջին հավասարությունը համարժեք է

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = g_1(x) \pm g_2(x) + C = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx :$$

Եվս մեկ անգամ նշենք (տես Դիֆֆերենցիալ 5.2), որ անորոշ ինտեգրալ պարունակող այս տեսակի հավասարությունները պետք է հասկանալ հասարակորեն գումարելիի ճշտությամբ: $\square$

Նախադրյալ 5.4. Յանկացած $K \in \mathbb{R}$ հասարակության համար

$$\int K f(x) dx = K \int f(x) dx :$$

Ապացույց. Ինքնուրույն: $\square$

Միավորելով վերջին երկու հատկությունները՝ ստանում ենք անորոշ ինտեգրալի **գծայնությունը**:

Նախադրյալ 5.5. Յանկացած $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ հասարակությունների համար

$$\int [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] dx = \alpha_1 \int f_1(x) dx + \alpha_2 \int f_2(x) dx :$$

5.3 Անորոշ ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինման եղանակը

Անորոշ ինտեգրալի հաշվման մի քանի արդյունավետ եղանակներ կան, որոնցից առաջինը կբննարկենք փոփոխականի փոխարինման կամ տեղադրման եղանակը:

Թեորեմ 5.2. Դիցուք $g(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ ֆունկցիայի նախնականն է ինչ-որ $X \subset \mathbb{R}$ վերջավոր միջակայքում, այսինքն՝

$$g'(x) = f(x), \quad x \in X, \quad \text{կամ նույնը} \quad \int f(x) dx = g(x) + C, \quad x \in X :$$

Եթե $x = \varphi(t) : T \mapsto X$ ֆունկցիան արտասարկելու է T միջակայքը X միջակայքի վրա և դիֆերենցելի է T -ում, ապա

$$\boxed{\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = g(\varphi(t)) + C}, \quad t \in T, \quad (5-2)$$

այսինքն՝ $g(\varphi(t))$ ֆունկցիան $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ ֆունկցիայի նախնականն է T միջակայքում:

Ապացույց. Նշել է նկատել, որ գործ ունենք բարդ ֆունկցիայի ինտեգրալի հետ: Ապացույցը նույնպես անմիջապես հետևում է բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնից: Ածանցենք (5-2) բանաձևի աջ կողմը՝

$$\frac{d}{dt} g(\varphi(t)) = g'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t),$$

ինչը համարժեք է (5-2) բանաձևին: □

Դիպողություն 5.3. Եթե հաշվի առնենք, որ

$$g(\varphi(t)) + C = \left[g(x) + C \right]_{x=\varphi(t)} = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)},$$

կարելի է (5-2) բանաձևն արտագրել այսպես՝

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} : \quad (5-3)$$

Իսկ եթե գոյություն ունի φ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան՝ $\exists t = \varphi^{-1}(x) : X \mapsto T$, ապա (5-3) բանաձևը կարելի է արտագրել ավելի հարմար տեսքով՝

$$\boxed{\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}} : \quad (5-4)$$

Գործնական կիրառման համար հենց այս բանաձևն է առավել հարմար:

Օրինակ 5.2. $I_1 \stackrel{5.2}{=} \int \sin 3x dx = ?$

Սա պարզագույն ինտեգրալ է, և կարելի է հեշտությամբ կռահել՝ $I_1 = -\frac{1}{3} \cos 3x + C, \quad \forall C \in \mathbb{R} :$

Այնուամենայնիվ, հաշվենք ինտեգրալը՝ կիրառելով փոփոխականի փոխարինման կամ տեղադրման եղանակը, որպեսզի ցույց տանք ինչպես է մեթոդը գործում: Նշանակենք՝

$$t = 3x, \quad x = \varphi(t) = \frac{t}{3}, \quad t = \varphi^{-1}(x) = 3x, \quad dt = 3 dx,$$

և տեղադրենք, այդ թվում դիֆերենցիալը.

$$I_1 = \int \sin 3x dx = \int \sin t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \sin t dt :$$

Սրանք աղյուսակային ինտեգրալ, օգտվում ենք աղյուսակից, գրում նախնականը, իսկ վերջում վերադառնում ենք սկզբնական x փոփոխականին.

$$I_1 = \frac{1}{3} \int \sin t dt = \frac{-1}{3} \cos t + C = \frac{-1}{3} \cos 3x + C :$$

Պատասխան՝ $I_1 = \frac{-1}{3} \cos 3x + C :$

Օրինակ 5.3. $I_2 \stackrel{նշ.}{=} \int \frac{x}{1+x^2} dx = ?$

Նաշվենք ինտեգրալը՝ կիրառելով փոփոխականի փոխարինման կամ տեղադրման եղանակը: Նշանակենք և գրենք դիֆերենցիալը՝ $t = 1 + x^2$, $dt = 2x dx$: Տեղադրենք,

$$I_2 = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt :$$

Մենք կարողացանք բերել աղյուսակային ինտեգրալին, օգտվում ենք աղյուսակից, գրում նախնականը և վերջում վերադառնում սկզբնական x փոփոխականին,

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C :$$

2-րդ եղանակ. Փոփոխականի փոխարինումը կամ տեղադրումը կարելի է բացահայտ չկատարել, այլ անել դա անուղղակի՝ կիրառելով միայն դիֆերենցիալի սահմանումը և հարկությունները: Այսպես, ըստ դիֆերենցիալի սահմանման՝
$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} d(x^2 + 1) , \quad \text{և հետո տեղադրենք}$$

$$I_2 = \int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C :$$

Պատասխան՝ $I_2 = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C :$

Նաթկապես ուշագրավ էր այստեղ կատարված հետևյալ քայլը՝ $x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$: Կարելի է այս անցումը ձևակերպել այսպես՝ x -ը **փարանք դիֆերենցիալի նշանի տակ**՝ բնականաբար հետևելով միայն դիֆերենցիալի սահմանմանը և հարկություններին:

Օրինակ 5.4. $I_3 \stackrel{նշ.}{=} \int \sqrt{1-x^2} dx = ?$

I -ի փարբերություն նախորդ օրինակների, որտեղ որոշման տիրույթը ամբողջ թվային առանցքն էր, $x \in \mathbb{R}$, և խնդիր չէր սրեղծում, այս օրինակում որոշման տիրույթը սահմանափակ միջակայք է՝ $-1 \leq x \leq 1$ և հնարավոր է որոշակի խնդիրներ սրեղծի:

Կատարենք մի հետաքրքիր **եռանկյունաչափական** տեղադրում: Նկատելով, որ I_3 -ի որոշման տիրույթը համընկնում է սինուսի կամ կոսինուսի արժեքների տիրույթի հետ, փորձենք կատարել հետևյալ պարզեցնող տեղադրումը՝

$$x = \varphi(t) = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \Longleftrightarrow \quad t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin x, \quad -1 \leq x \leq 1 :$$

Նոր t փոփոխականի տիրույթը մենք ինքներս ընտրեցինք այնպես, որ $x = \varphi(t) = \sin t$ ֆունկցիան դառնա փոխմիարժեք և երաշխավորված ունենա հակադարձ ֆունկցիա: Տեղադրենք

$$I_3 = \int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} d(\sin t) = \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int |\cos t| \cos t dt :$$

Շնորհիվ $\varphi(t) = \sin t$ փոփոխության ֆունկցիայի մեր ընտրած որոշման տիրույթի՝ կոսինուսը ոչ բացասական է՝ $\cos t \geq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, և ուրեմն՝

$$\begin{aligned} I_3 &= \int |\cos t| \cos t \, dt = \int \cos^2 t \, dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int dt + \int \cos 2t \, dt \right) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \int \cos 2t \, d(2t) \right) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) : \end{aligned}$$

Բարեբախտաբար եռանկյունաչափական փոփոխումը բերեց պարզեցման, և կարողացանք արագ հաշվել ինտեգրալը: Այժմ մնացել է վերջին խնդիրը՝ հետ գալ սկզբնական x փոփոխականին: Այստեղ դարձյալ վճռական դեր են կատարելու փոփոխականների տիրույթները.

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2x \sqrt{1 - x^2} :$$

Այսպիսով,

$$I_3 = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) = \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x \sqrt{1 - x^2} \right) + C :$$

Ի միջի այլոց, այն, որ կամայական իրական $C \in \mathbb{R}$ հաստատունն ավելացրինք միայն ամենավերջում, խախտում համարել չի կարելի:

Պատասխան՝ $I_3 = \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x \sqrt{1 - x^2} \right) + C :$

Դիտողություն 5.4. Բոլոր բերված օրինակներում պատասխանը սրանալուց հետո կարելի է ածանցման միջոցով ստուգել մեր պատասխանը: Դա պարտադիր չէ, բայց օգտակար և կարճ ստուգման միջոց է: Օրինակ 5.4-ում ստուգենք, որ ստացված պատասխանի (նախնականի) ածանցյալն իսկապես հավասար է ենթինտեգրալային ֆունկցիային.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x \sqrt{1 - x^2} \right)' &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 + 1 - x^2 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \frac{2 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \sqrt{1 - x^2} : \end{aligned}$$

Ստուգված է :

5.4 Մասերով ինտեգրում անորոշ ինտեգրալում

Փոփոխականի փոխարինման կամ փոփոխման եղանակի հետ մեկտեղ, ինտեգրալներ հաշվելու համար կա ևս մեկ արդյունավետ միջոց՝ մասերով ինտեգրում անորոշ ինտեգրալում:

Թեորեմ 5.3. Դիցուք $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $X \subset \mathbb{R}$ միջակայքում, և $u'(x)v(x)$ ֆունկցիան նախնական ունի X միջակայքում:

Այդ դեպքում $u(x)v'(x)$ ֆունկցիան նույնպես նախնական ունի X միջակայքում, և տեղի ունի մասերով ինտեգրման հերկյալ բանաձևը՝

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx, \quad \text{կամ կարճ՝} \quad \boxed{\int u dv = uv - \int v du} :$$

Ապացույց. Մասերով ինտեգրման բանաձևը անմիջապես ստացվում է արտադրյալի ածանցման բանաձևից.

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), \quad x \in X :$$

Այս հավասարության երեք գումարելիներից երկուսը նախնական ունեն, ուրեմն երրորդը՝ $u(x)v'(x)$, նույնպես նախնական ունի X միջակայքում: Բացի այդ, ածանցման բանաձևը կարելի է համարժեքորեն արտագրել ինտեգրալների տերմիններով՝

$$u(x)v(x) + C = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx, \quad x \in X,$$

ինչն ավարտում է ապացույցը: □

Իհարկե, մասերով ինտեգրման բանաձևի կիրառումն արդարացված է, եթե արդյունքում ստացված ինտեգրալն ավելի պարզ է սկզբնականի համեմատ: Բերենք մի քանի բնորոշ օրինակներ:

Օրինակ 5.5. (Վարժ. 1716, [8]) $I_1 \stackrel{u2.}{=} \int \ln x dx = ?$

Մասերով ինտեգրման բանաձևը կիրառելու համար ընտրենք $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները.

$$u(x) = \ln x, \quad v(x) = x :$$

Այդ դեպքում՝

$$I_1 = \int \ln x dx = x \ln x - \int x d(\ln x) = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C :$$

Պատասխան՝ $I_1 = x \ln x - x + C :$

Օրինակ 5.6. (Վարժ. 1724, [8]) $I_2 \stackrel{u2.}{=} \int x^2 \sin 2x dx = ?$

Այստեղ մասերով ինտեգրումը պետք է նախապարտապես, այնուհետև նպատակային ընտրել $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները: Նախ, **եռանկյունաչափական ֆունկցիան տանենք դիֆերենցիալի նշանի տակ.**

$$I_2 = \int x^2 \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int x^2 \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2} \int x^2 d(\cos 2x) :$$

Ահա այս ներկայացման մեջ լավ երևում է, թե մասերով ինտեգրման մեջ մասնակցող $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները ինչպես պետք է ընտրել՝

$$u(x) = x^2, \quad v(x) = \cos 2x :$$

Այդ դեպքում՝

$$I_2 = -\frac{1}{2} \int x^2 d(\cos 2x) = -\frac{1}{2} \left[x^2 \cos 2x - \int \cos 2x d(x^2) \right] = -\frac{1}{2} \left[x^2 \cos 2x - 2 \int x \cos 2x dx \right] :$$

Մի պահ կանգ առնենք և տեսնենք՝ ի՞նչ շահեցինք մասերով ինտեգրման բանաձևը կիրառելով: Տամեմադրելով ստացված վերջին ինտեգրալը սկզբնականի հետ՝ նկատում ենք, որ x -ի աստիճանացույցը մեկով նվազեց, դրանով ինտեգրալը պարզեցվեց, և ուրեմն մասերով ինտեգրման բանաձևի կիրառումը նպատակահարմար էր:

Շարունակենք և կազմակերպենք մասերով ինտեգրման ևս մեկ կիրառում: Այդ նպատակով դարձյալ **եռանկյունաչափական ֆունկցիան տանենք դիֆերենցիալի նշանի տակ**.

$$I_2 = -\frac{1}{2} \left[x^2 \cos 2x - \int x \cos 2x d(2x) \right] = -\frac{1}{2} \left[x^2 \cos 2x - \int x d(\sin 2x) \right] :$$

Մասերով ինտեգրման մեջ մասնակցող $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները այստեղ ընտրենք այսպես՝

$$u(x) = x, \quad v(x) = \sin 2x :$$

Այդ դեպքում արագ աղյուսակային ինտեգրալ ենք ստանում և հաշվում.

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2} \left[x^2 \cos 2x - \int x d(\sin 2x) \right] = -\frac{1}{2} \left[x^2 \cos 2x - x \sin 2x + \int \sin 2x dx \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[x^2 \cos 2x - x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right] = \frac{1-2x^2}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + C : \end{aligned}$$

Պատասխան՝ $I_2 = \frac{1-2x^2}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + C :$

Օրինակ 5.7. $I_3 \stackrel{!}{=} \int \sqrt{1-x^2} dx = ?$

Մենք արդեն հաշվել էինք այս ինտեգրալը եռանկյունաչափական տեղադրման միջոցով: Այժմ նույն ինտեգրալը հաշվենք մասերով ինտեգրման բանաձևի միջոցով:

Ընտրենք $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները՝ $u(x) = \sqrt{1-x^2}$, $v(x) = x$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \sqrt{1-x^2} dx = x \sqrt{1-x^2} - \int x d\sqrt{1-x^2} = x \sqrt{1-x^2} - \int x \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= x \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx : \end{aligned}$$

Պարզեցնելով նպատակով արտահերթ վերջին կոպորակը և օգտվելով ինտեգրալի գծայնությունից.

$$\begin{aligned} I_3 &= x \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= x \sqrt{1-x^2} + \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = x \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \sqrt{1-x^2} dx : \end{aligned}$$

Նկատարելով, որ ստացված վերջին ինտեգրալը համընկնում է սկզբնական I_3 ինտեգրալի հետ, իսկ նախավերջին ինտեգրալն աղյուսակային է. նախնականը տալիս է $\arcsin x$ ֆունկցիան:

Արդյունքում ստանում ենք

$$I_3 = x \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \sqrt{1-x^2} dx = x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x - I_3 :$$

Լուծելով ստացված հավասարումն I_3 մեծության նկատմամբ.

$$\begin{aligned} 2I_3 &= x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x \\ I_3 &= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) : \end{aligned}$$

Պատասխան՝ $I_3 = \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x \sqrt{1-x^2} \right) + C :$

Օրինակ 5.8. (Վարժ. 1740, [8]) $I_4 \stackrel{!}{=} \int e^x \cos x dx = ?$

Դարձյալ մասերով ինտեգրումը պետք է նախապարաստել: Այստեղ միևնույն է եռանկյունա-
չափական թե էքսպոնենցիալ ֆունկցիան տանել դիֆերենցիալի նշանի տակ: Փորձենք էքսպոնենցիալ
ֆունկցիան տանել դիֆերենցիալի նշանի տակ, և այնուհետև պարզ է դառնում, թե ինչպես ընտրել $u(x)$
և $v(x)$ ֆունկցիաները՝ $u(x) = \cos x$, $v(x) = e^x$.

$$I_4 = \int e^x \cos x dx = \int \cos x de^x = e^x \cos x - \int e^x d \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx :$$

Առաջին հայացքից մասերով ինտեգրման կիրառումը որևէ պարզեցում կամ առաջընթաց չբերեց: Փոր-
ձենք ևս մեկ անգամ մասերով ինտեգրել: Դրա համար դարձյալ էքսպոնենցիալ ֆունկցիան տանենք
դիֆերենցիալի նշանի տակ.

$$\begin{aligned} I_4 &= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int \sin x de^x = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x d \sin x = \\ &= e^x (\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) - I_4 : \end{aligned}$$

Բարեբախտաբար և մի փոքր անսպասելի 2-րդ անգամ մասերով ինտեգրելուց հետո ստացանք սկզբնա-
կան I_4 ինտեգրալը: Լուծելով ստացված հավասարումն I_4 մեծության նկատմամբ.

$$2 I_4 = e^x (\cos x + \sin x) \quad \implies \quad I_4 = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C :$$

Պատասխան՝ $I_4 = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C :$

5.5 Մասերով ինտեգրման բանաձևի կիրառում բնորոշ մի ինտեգրալի նկատմամբ

Նաջորդ օրինակի ինտեգրալի հաշվարկն էապես կախված է պարունակվող պարամետրերի արժեքներից:

Օրինակ 5.9. $J_n \stackrel{!}{=} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = ? \quad (n \in \mathbb{N}, a \neq 0)$

Նախ նշենք, որ առանց խախտելու ընդհանրությունը կարելի է համարել, որ $a > 0$: Բսկայես, բացասական a -երի համար որպես մասնակցող պարամետր կդիտարկենք $|a| > 0$:

Ինտեգրալի հաշվարկը կատարենք քայլ առ քայլ: Սկսենք պարզագույն $n = 1$ դեպքից, երբ աղյուսակային ինտեգրալ ունենք.

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{a^2} + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C :$$

Այժմ ենթադրենք $n \geq 2$ և կիրառենք մասերով ինտեգրում

$$u(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad v(x) = x$$

ընտրված ֆունկցիաներով.

$$\begin{aligned} J_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x d\left(\frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\right) = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int \frac{x(-n)2x}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx : \end{aligned}$$

Այժմ արոհենք վերջին կոտորակը, ինչը կբերի J_n տեսքի ինտեգրալներին.

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx - 2n a^2 \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n J_n - 2n a^2 J_{n+1} : \end{aligned}$$

Այստեղից

$$J_{n+1} = \frac{1}{2n a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n - 1}{2n a^2} J_n : \quad (5-5)$$

Սրանք մի բանաձև, որն ինչ-որ չափով հիշեցնում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը, այն է՝ արդեն սրանցով J_n ինտեգրալի միջոցով կարելի է սրանալ հաջորդ J_{n+1} ինտեգրալը:

Այս կարգի հավասարությունները կոչվում են **անդրադարձ (կամ ռեկուրենս) բանաձևեր**:

Անգիր հիշել այս բանաձևերը չարժե: Կարևոր է հասկանալ, որ սկզբունքորեն J_n ինտեգրալները միշտ կարելի է հաշվել ցանկացած բնական $n \in \mathbb{N}$ համար:

Գործնական առումով մեզ կհանդիպեն միայն ցածր կարգի J_n ինտեգրալներ: Մասնավորապես, J_2 ինտեգրալը հաշվելու համար կվերցնենք աղյուսակային J_1 ինտեգրալը և մասերով կինտեգրենք:

5.6 Ռացիոնալ և այլ ֆունկցիաների ինտեգրումը

Ինչպես հիշում ենք, **փարրական** են կոչվում հետևյալ ֆունկցիաները.

1. աստիճանային, $f(x) = x^\alpha$,
2. ցուցային, $f(x) = a^x$,
3. լոգարիթմական, $f(x) = \log_a x$,
4. եռանկյունաչափական, $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$,
5. հակադարձ եռանկյունաչափական, $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$,

ինչպես նաև բոլոր այն ֆունկցիաները, որոնք կազմված են թվարկված ֆունկցիաներից 4 թվաբանական գործողությունների և համադրույթի միջոցով, ընդ որում այդ գործողությունները կիրառված են վերջավոր անգամ և առանց սահմանային անցման:

Մասնավորապես, n -րդ աստիճանի ցանկացած բազմանդամ (լաբիներեն՝ պոլինոմ)

$$P(x) \equiv P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad x \in \mathbb{R} \quad (a_n \neq 0), \quad \deg P = n,$$

փարրական ֆունկցիա է որպես աստիճանային ֆունկցիաների գումար:

Երկու բազմանդամների հարաբերությունը կոչվում է **ռացիոնալ ֆունկցիա**, որը դարձյալ փարրական է.

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad \deg P = m, \quad \deg Q = n :$$

Տարրական ֆունկցիաների մասին մեզ հայտնի է, որ դրանք անընդհար են իրենց որոշման փիրույթներում:

Ավելին, դրանք որպես կանոն անվերջ դիֆերենցելի են՝ $f \in C^\infty(D)$ որոշման փիրույթի ներքին կետերում:

Ածանցման կանոններից մեզ հայտնի է, որ

Ցանկացած փարրական ֆունկցիայի ածանցյալը դարձյալ փարրական ֆունկցիա է :

Այլ կերպ ասած՝ ածանցումը պահպանում է փարրական ֆունկցիաների դասը:

Զարմանալի է, բայց ածանցման հակադարձ գործողությունը՝ ինտեգրումը, նման հատկություն չունի, այսինքն՝

Տարրական ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալը (նախնականը) կարող է փարրական չլինել:

Այս պնդումը խիստ չենք ապացուցի, միայն բերենք մի քանի համապատասխան ինտեգրալների օրինակներ, որոնք փարրական ֆունկցիաներով չեն արտահայտվում: Ստորև բերված բոլոր հինգ ինտեգրալները, չլինելով փարրական, այնուամենայնիվ լավ հայտնի և հետազոտված ֆունկցիաներ են, որոնք հատուկ անվանումներ են կրում (որպես կանոն հեղինակի անունը).

1. $\int e^{-x^2} dx$, Պուասոնի ինտեգրալ,
2. $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$, Դիրիխլեի ինտեգրալներ,
3. $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$, Ֆրենելի ինտեգրալներ,
4. $\int \frac{dx}{\ln x}$, ինտեգրալային լոգարիթմ,
5. $\int \frac{e^x}{x} dx$, ինտեգրալային էքսպոնենս, և այլն:

Ի փարբերություն այս օրինակների՝

Ցանկացած ռացիոնալ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալը (նախնական) տարրական ֆունկցիա է :

Նույն միտքը ձևակերպում են նաև այսպես՝

Ցանկացած ռացիոնալ ֆունկցիա ինտեգրվում է (վերջավոր տեսքով):

Այժմ ավելի մանրամասն քննարկենք ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրման մեթոդները և սկսենք պարզագույն ռացիոնալ ֆունկցիաներից:

5.7 Պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրումը

Պարզագույն ռացիոնալ կոտորակները (ֆունկցիաները) կդասակարգենք 4 խմբերի՝

$$(i) \quad \frac{A}{x-a}, \quad (ii) \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad (iii) \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad (iv) \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} :$$

Այսպես ենթադրում ենք, որ բոլոր մասնակից պարամետրերն իրական հասարարումներ են, իսկ k -ն՝ բնական. $A, M, N, a, p, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$: Եվս մեկ ենթադրություն է արվում քառակուսային հայտարարի վերաբերյալ. այդ քառակուսի եռանդամն իրական արմարներ պետք է չունենա, այսինքն՝ նրա փարբերիչը բացասական է՝ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$:

Ցույց տանք՝ ինչպես են ինտեգրում նշված 4 տեսակի պարզագույն ռացիոնալ կոտորակները: Առաջին և երկրորդ տեսակի ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրալներն աղյուսակային են և անմիջապես հաշվարկվում են.

$$(i) \quad I_1 = \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C,$$

$$(ii) \quad I_2 = \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = \frac{A}{-k+1} (x-a)^{-k+1} + C :$$

(iii) և (iv) ֆունկցիաների ինտեգրման համար նախ ձևափոխենք հայտարարը, այն է՝ անջատենք լրիվ քառակուսին.

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2,$$

որտեղ օգտվեցինք $q - \frac{p^2}{4} > 0$ պայմանից և նշանակեցինք $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$:

Գրենք (iii)-ի ինտեգրալը, կադարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $t = x + \frac{p}{2}$,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{M(t - \frac{p}{2}) + N}{t^2 + a^2} dt = M \int \frac{t}{t^2 + a^2} dt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C : \end{aligned}$$

Ներ գալով սկզբնական x փոփոխականին՝ ստանում ենք վերջնական պարասխանը:

(iv) Կրկնենք նախորդ կերպի ձևափոխությունները.

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{M(t - \frac{p}{2}) + N}{(t^2 + a^2)^k} dt = M \int \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} dt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \\ &= \frac{M}{2} \frac{1}{-k+1} (t^2 + a^2)^{-k+1} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) J_k : \end{aligned}$$

Ինչպես տեսնում ենք, փրոհումից հետո ստացված երկու ինտեգրալներից մեկն աղյուսակային էր, և այն կարողացանք արագ հաշվել, իսկ վերջին ինտեգրալը համընկավ մեզ ծանոթ J_k ինտեգրալի հետ, որը հաշվարկվում էր մասերով ինտեգրման բանաձևի և անդրադարձ բանաձևի միջոցով, փեն Օրինակ 5.9-ի J_n ինտեգրալը:

Սրանով համոզվում ենք, որ I_4 ինտեգրալը միշտ կարելի է հաշվել, թեև մեծ k -երի դեպքում կլինեն փոխանկական բարդություններ:

5.8 Կանոնավոր և անկանոն ռացիոնալ կոպորակների ինտեգրումը

Պարզագույն ռացիոնալ կոպորակներն ինտեգրելուց հետո անցնենք ընդհանուր ռացիոնալ կոպորակների ինտեգրմանը: Նրանք երկու տեսակի են լինում՝ կանոնավոր և անկանոն:

Եթե ռացիոնալ

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad \deg P = m, \quad \deg Q = n,$$

ֆունկցիայի մեջ համարիչի բազմանդամի աստիճանը փոքր է հայտարարի բազմանդամի աստիճանից ($m < n$), ապա $R(x)$ ռացիոնալ կոպորակը կոչվում է **կանոնավոր**, հակառակ դեպքում ($m \geq n$)՝ **անկանոն**:

Օրինակ,

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 + x}, \quad \frac{x^6}{x^8 + x^6 + 2}$$

կոպորակները կանոնավոր են, իսկ

$$\frac{x^4 + 1}{x^4 + x}, \quad \frac{x^9}{x^8 + x^6 + 2}$$

կոպորակները՝ անկանոն:

Ցանկացած **անկանոն** ռացիոնալ կոպորակ կարելի է փրոհել այնպես, որ մնացորդային անդամը լինի կանոնավոր.

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = P_{m-n}(x) + \frac{r_k(x)}{Q_n(x)}, \quad k < n \leq m, \quad (5-6)$$

որպես $P_{m-n}(x)$ քանորդը սովորական (ամբողջ) բազմանդամ է ($m - n \geq 0$ աստիճանի), իսկ $r_k(x)$ մնացորդը k -րդ աստիճանի բազմանդամ է : Վերջին $\frac{r_k(x)}{Q_n(x)}$ մնացորդային անդամը կանոնավոր ռացիոնալ կոպորակ է , քանի որ $k < n$:

Ինտեգրելու փեսակերից (5-6) վերլուծության մեջ պարունակվող $P_{m-n}(x)$ քանորդի ինտեգրումը որևէ բարդություն չի ներկայացնում. փաստորեն $\int P_{m-n}(x) dx$ ինտեգրալն աղյուսակային է :

Մնաց հաշվել (5-6) վերլուծության վերջին կանոնավոր կոպորակի ինտեգրալը՝ $\int \frac{r_k(x)}{Q_n(x)} dx$:

Կարելի է եզրակացնել, որ

Ցանկացած անկանոն ռացիոնալ կոպորակի ինտեգրումը (5-6) փրոհման միջոցով հանգում է կանոնավոր ռացիոնալ կոպորակի ինտեգրմանը:

Այսպիսով, բավական է քննարկել միայն կանոնավոր ռացիոնալ կոպորակների ինտեգրման հարցը: Խնդիրը լուծելու համար ձևակերպենք բազմանդամներին վերաբերող մի թեորեմ, որը հայտնի է հանրահաշվի դասընթացից:

Թեորեմ 5.4. *Ցանկացած կանոնավոր ռացիոնալ ֆունկցիա՝*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad m < n, \quad \deg P = m, \quad \deg Q = n,$$

կարելի է ներկայացնել (i)-(iv) տեսքի պարզագույն ռացիոնալ կոպորակների վերջավոր գումարի տեսքով:

Այս թեորեմը թույլ է տալիս կամայական ռացիոնալ ֆունկցիա ի վերջո բերել (i)-(iv) տեսքի պարզագույն ռացիոնալ կոպորակների, որոնց ինտեգրումը մեզ հայտնի է:

Ճիշտ է , առաջանում են մի շարք տեխնիկական բարդություններ, որոնց հաղթահարումը պահանջում է նոր միջոցներ: Կարճ նկարագրենք պարզագույն ռացիոնալ կոպորակների վերլուծության միջոցները:

Առաջին հերթին հայտարարի $Q(x)$ բազմանդամը պետք է ներկայացնել գծային և քառակուսային արտադրիչներով, այն է՝

$$Q(x) = (x - b_1)^{\beta_1} (x - b_2)^{\beta_2} \cdots (x - b_\ell)^{\beta_\ell} (x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{\lambda_s}, \quad (5-7)$$

որտեղ բոլոր ցուցիչները բնական թվեր են՝ $\beta_i, \lambda_j \in \mathbb{N} (i = \overline{1, \ell}, j = \overline{1, s})$: Բացի այդ, (5-7)-ում ենթադրվում է, որ քառակուսի եռանդամներն իրական արմատներ չունեն։ Նկատենք, որ եթե դրանք իրական արմատներ ունենային, ապա կվերլուծվեին գծային արտադրիչների և կմիանային նախորդող գծային արտադրիչներին։ Ուրեմն ինչպես հաշվել

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{P(x)}{(x - b_1)^{\beta_1} (x - b_2)^{\beta_2} \cdots (x - b_\ell)^{\beta_\ell} (x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{\lambda_s}} dx = ?$$

ինտեգրալը և ինչպես ստանալ (i)-(iv) տեսքի պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների գումարը։ Այդ գումարը կազմելու ընդհանուր եղանակը հետևյալն է .

ա) (5-7) արտադրյալի յուրաքանչյուր $(x - b_i)^{\beta_i}$ գծային ֆունկցիայի աստիճանին համապատասխանեցնենք հետևյալ վերջավոր գումարը՝

$$(x - b_i)^{\beta_i} \longmapsto \frac{A_1}{x - b_i} + \frac{A_2}{(x - b_i)^2} + \cdots + \frac{A_{\beta_i}}{(x - b_i)^{\beta_i}}, \quad (5-8)$$

որտեղ β_i հար $A_1, A_2, \dots, A_{\beta_i} \in \mathbb{R}$ հաստատվում են անորոշ են և որոշվում են ավելի ուշ։

բ) (5-7) արտադրյալի յուրաքանչյուր $(x^2 + p_jx + q_j)^{\lambda_j}$ քառակուսային ֆունկցիայի աստիճանին համապատասխանեցնենք հետևյալ վերջավոր գումարը՝

$$(x^2 + p_jx + q_j)^{\lambda_j} \longmapsto \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \cdots + \frac{M_{\lambda_j}x + N_{\lambda_j}}{(x^2 + p_{\lambda_j}x + q_{\lambda_j})^{\lambda_j}}, \quad (5-9)$$

որտեղ $M_1, M_2, \dots, M_{\lambda_j}, N_1, N_2, \dots, N_{\lambda_j} \in \mathbb{R}$ հաստատվում են անորոշ են և որոշվում են ավելի ուշ։

Բոլոր առաջացող կոտորակները (5-8), (5-9) գումարների մեջ հենց (i)-(iv) տեսքի պարզագույն ռացիոնալ կոտորակներ են, որոնց ինտեգրումը մեզ հայտնի է :

Սրանով ավարտվում է կամայական ռացիոնալ կոտորակի ինտեգրումը։ Բնականաբար, նկարագրված մեթոդի շարժման ամրամասներ և այլընտրանքներ այստեղ բերված չեն։ Գործնական որոշ մանրամասների կծանոթանանք կոնկրետ ինտեգրալներ հաշվելիս։

Օրինակ 5.10. $I = \int \frac{dx}{x^3 + 1} = ?$

Լուծում. Ունենք կանոնավոր $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$ ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալ։

Նախ պետք է հայտարարը վերլուծել գծային և քառակուսային արտադրիչների այնպես, ինչպես (5-7)-ում, իսկ հետո $f(x)$ ֆունկցիան վերլուծել գումարի ըստ (5-8)-(5-9)։

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}, \quad (5-10)$$

որպես $A, B, C \in \mathbb{R}$ հասարակություններն անորոշ գործակիցներ են: Դրանց որոշումը կախարենք այդպես կոչված **անորոշ գործակիցների մեթոդով**:

Նկատենք, որ (5-10) հավասարությունը նույնություն է և ճիշտ է բոլոր իրական $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$, կետերի համար: Բերենք (5-10) նույնությունն ընդհանուր հայտարարի և հավասարեցնենք համարիչները.

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq -1 \quad (5-11)$$

$$1 \equiv A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1), \quad x \in \mathbb{R} : \quad (5-12)$$

Նկատենք՝ (5-12) նույնությունը ճիշտ է արդեն բոլոր իրական $x \in \mathbb{R}$ կետերի համար, ներառյալ $x = -1$ կետը՝ շնորհիվ բազմանդամի անընդհատության: Այժմ կարելի է հավասարեցնել x -ի նույն աստիճանի գործակիցները (5-12)-ի ձախ և աջ կողմերում: Արդյունքում կստանանք երեք հավասարումով համակարգ.

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 0 = -A + B + C \\ 1 = A + C \end{cases} \quad (5-13)$$

որից էլ կորոշվեն A, B, C գործակիցները:

Մի փոքր կրճատելով մեր գործը՝ (5-13) ամբողջական համակարգի փոխարեն կարելի է արագ գտնել առնվազն A գործակիցը: Դրա համար (5-12) նույնության մեջ տեղադրենք $x = -1$ կետը և անմիջապես կստանանք $A = 1/3$: Մյուս երկու B և C գործակիցները կարելի է գտնել կամ (5-13) համակարգից կամ տեղադրելով (5-12) նույնության մեջ մասնավոր այլ կետեր, օրինակ՝ $x = 0$ և $x = 1$:

(5-13) համակարգի լուծումն է $\boxed{A = 1/3, B = -1/3, C = 2/3}$:

Տեղադրենք որոշված A, B, C գործակիցների արժեքները (5-10) հավասարության մեջ և ինտեգրենք որպես պարզագույն ռացիոնալ կոտորակներ.

$$I = \int \frac{dx}{x^3+1} = \int \left[\frac{1}{3(x+1)} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1} \right] dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1} dx = I_1 + I_2 :$$

Նշանակված I_1, I_2 ինտեգրալներից առաջինը պարզագույն աղյուսակային է.

$$I_1 = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{3} \ln |x+1| + C :$$

Երկրորդ ինտեգրալում նույնպես պարզագույն ռացիոնալ կոտորակ է, որի հաշվարկը արագ կախարելու համար հայտարարում անջատում ենք լրիվ քառակուսին և հետո նշանակում $x - \frac{1}{2} = t$, $dx = dt$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1} dx = \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = \int \frac{-\frac{1}{3}(t+\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt + \int \frac{-\frac{1}{6} + \frac{2}{3}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{6} \int \frac{d(t^2)}{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \\
&= -\frac{1}{6} \int \frac{d(t^2 + \frac{3}{4})}{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\
&= -\frac{1}{6} \ln \left(t^2 + \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} = \\
&= -\frac{1}{6} \ln \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2(x - \frac{1}{2})}{\sqrt{3}} = \\
&= -\frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C :
\end{aligned}$$

Այսպիսով, վերջնական պատասխանն է

$$\begin{aligned}
I = I_1 + I_2 &= \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C = \\
&= \frac{1}{6} \ln \frac{(x + 1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C :
\end{aligned}$$

5.9 Իռացիոնալ և եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ինտեգրումը

Քառակուսի, խորանարդ կամ ավելի բարձր կարգի արմատ պարունակող ֆունկցիաները սովորաբար անվանում են **իրացիոնալ**: Իռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրման հիմնական մեթոդը բազմապիսի փոխարինումների միջոցով ֆունկցիայի ռացիոնալ դարձնելն է, այդպես կոչված՝ **ռացիոնալացումը**: Բազմաթիվ եռանկյունաչափական ինտեգրալների հաշվման հիմնական եղանակներից են այնպիսի տրեղադրումներ, որոնք կբերեն ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրմանը: Նշենք մի քանի այդպիսի տրեղադրումներ:

Դիցուք $R = R(u, v)$ -ը երկու փոփոխականի ռացիոնալ ֆունկցիա է: Կոիտարկենք $R = R(\sin x, \cos x)$ տեսքի (մեկ փոփոխականի) ֆունկցիաների ինտեգրումը:

ա) Եթե տրեղի ունի յուրօրինակ կենտրոնական հատկություն՝ $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$,

ապա շահավետ է կիրառել հետևյալ տրեղադրումն ինտեգրալում՝ $t = \cos x$:

բ) Եթե տրեղի ունի յուրօրինակ կենտրոնական մեկ այլ հատկություն՝ $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$,

ապա շահավետ է կիրառել հետևյալ տրեղադրումն ինտեգրալում՝ $t = \sin x$:

գ) Եթե տրեղի ունի յուրօրինակ գույգության հատկություն՝ $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$,

ապա շահավետ է կիրառել հետևյալ տրեղադրումն ինտեգրալում՝ $t = \operatorname{tg} x$:

դ) Եթե նախորդ երեք հատկություններից ոչ մեկը տրեղի չունի, ապա հաճախ կարող է օգնել հետևյալ տրեղադրումն ինտեգրալում՝ $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, այդպես կոչված՝ **ունիվերսալ տրեղադրումը**:

5.10 Ռիմանի որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը

Անորոշ ինտեգրալի հետ սերտորեն կապված է Ռիմանի անունը կրող որոշյալ ինտեգրալը: Որոշյալ ինտեգրալը սահմանելու համար կպահանջվի ներմուծել մի շարք նախապարաստող գաղափարներ և նոր նշանակումներ: Որոշյալ ինտեգրալը կսահմանենք որպես միանգամայն ինքնուրույն և անկախ հասկացություն: Նրա կապը անորոշ ինտեգրալի հետ կբացահայտվի շարք ավելի ուշ՝ 5.20 բաժնում:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a, b]$ հատվածում:

Սահմանում 5.3. Կասենք, որ տրված է $[a, b]$ **հատվածի տրոհում**, եթե տրված են $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ կետերն այնպես, որ

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (n \in \mathbb{N}) :$$

$[a, b]$ հատվածի տրոհումը նշանակենք $\{x_k\}_{k=0}^n$ կամ $\{x_k\}$ սիմվոլով, իսկ մասնակից x_k կետերը կանվանենք **տրոհման կետեր**: Առաջացած n հատ $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$, հատվածները կոչվում են **մասնակի միջակայքեր** կամ **տրոհման միջակայքեր**:

Սահմանում 5.4. Եթե $[a, b]$ հատվածի $\{x_k\}$ տրոհմանն ավելացնենք մեկ կամ մի քանի նոր տրոհման կետեր, ապա կառուցանա նոր $\{x'_k\}$ տրոհում, որը կանվանենք սկզբնական $\{x_k\}$ տրոհման **մանրացում**:

Մասնավորապես, կարելի է $[a, b]$ հատվածի $\{x'_k\}$ և $\{x''_k\}$ երկու տարբեր տրոհումներ միավորել, որի արդյունքում կարանանք նոր տրոհում՝ $\{x'_k\} \cup \{x''_k\} = \{x_k\}$: Նեշտ է նկատել, որ $\{x_k\}$ **միավորումը** մանրացում է հանդիսանում սկզբնական $\{x'_k\}$ և $\{x''_k\}$ երկու տրոհումներից յուրաքանչյուրի համար:

Սահմանում 5.5. Յուրաքանչյուր $[x_{k-1}, x_k]$ մասնակի միջակայքում կամայական եղանակով ընտրենք մեկ, այդպես կոչված **միջանկյալ կետ**՝

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad 1 \leq k \leq n,$$

(կարդում ենք՝ քսի-կա կետեր): Մասնավորապես, ξ_k միջանկյալ կետը կարող է համընկնել $[x_{k-1}, x_k]$ մասնակի միջակայքի ձախ կամ աջ ծայրակետի հետ:

Նշանակենք մասնակի միջակայքի երկարությունը՝ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1, n}$, և այդ երկարություններից մեծագույնը՝

$$d = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}),$$

որը կոչվում է տվյալ **տրոհման տրամագիծ**:

Եթե տրոհման տրամագիծը ձգարեցնենք գրոյի՝ $d \rightarrow 0$, ապա պետք է հասկանալ, որ տվյալ տրոհման անվերջ մանրացում է կարարվում, այսինքն՝ առանց բացառության բոլոր մասնակի միջակայքերը սեղմվում են, նրանց երկարությունները ձգարում են գրոյի:

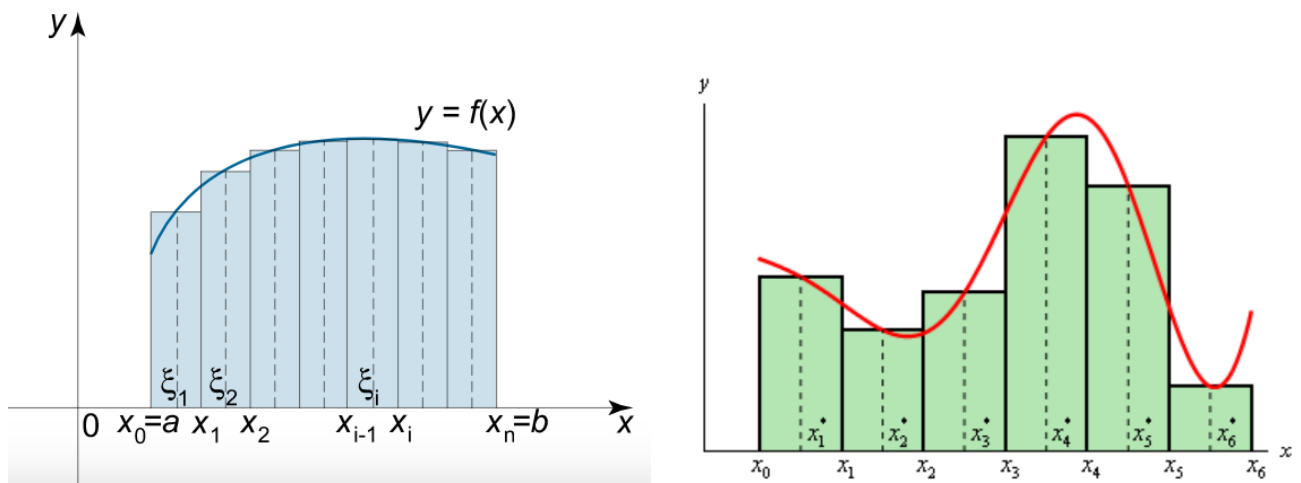
Սահմանում 5.6. $[a, b]$ հատվածի վրայ $\{x_k\}$ փրոհման համար և ընտրված $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ միջանկյալ կետերի համար կազմենք հետևյալ **ինտեգրալային գումարը՝**

$$\sigma \equiv \sigma(x_k, \xi_k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) : \quad (5-14)$$

Շեշտենք, որ փարբեր փրոհումների համար կամ միջանկյալ կետերի փարբեր հավաքածուների համար առհասարակ կստանանք ինտեգրալային գումարի փարբեր արժեքներ:

Ինտեգրալային $\sigma = \sigma(x_k, \xi_k)$ գումարի այս կախվածությունը փրոհումներից և միջանկյալ կետերից միշտ հիշենք, բայց հարմարության նկատառումներով հաճախ բաց կլռողենք՝ գրելով միայն σ :

Առաջին հայացքից անհասկանալի է, թե ինչ իմաստ են կրում բերված բոլոր սահմանումները և նշանակումները: Որպեսզի իմաստավոր դարձնենք այն ամենը, ինչ սահմանեցինք և նշանակեցինք, փորձենք դրանց գրաֆիկական պարկերումը փայլ:



Գծագիր 5.1. Ինտեգրալային գումարի պարկերումը

Գծագիր 5.1-ում փեսնում ենք ինչ-որ անընդհատ դրական ֆունկցիայի գրաֆիկ $[a, b]$ հատվածում: Վերցված է $[a, b]$ հատվածի ինչ-որ $\{x_k\}$ փրոհում, ընտրված են $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ միջանկյալ կետեր (աջ գրաֆիկում միջանկյալ կետերն են x_k^* -երը):

Ինտեգրալային $\sigma = \sigma(x_k, \xi_k)$ գումարի մեջ մասնակցող $f(\xi_k) \Delta x_k$ արտադրյալը երկրաչափորեն $[x_{k-1}, x_k]$ և $[0, f(\xi_k)]$ կողմերով ուղղանկյան մակերեսն է : Այդպիսի n հատ փարբեր ուղղանկյուններ կան, որոնք հենված են մասնակի միջակայքերի վրա: Բոլոր ուղղանկյունների մակերեսների գումարը հենց $\sigma = \sigma(x_k, \xi_k)$ ինտեգրալային գումարն է :

Այսպիսով, ինտեգրալային $\sigma = \sigma(x_k, \xi_k)$ գումարը փայլի է բոլոր կառուցված ուղղանկյունների մակերեսները միասին վերցրած: Որքան շատ են այդպիսի ուղղանկյունները, այնքան ինտեգրալային σ գումարն ավելի

ճշգրիտ է նկարագրում ֆունկցիայի գրաֆիկի և x առանցքի միջև ընկած մակերեսը: Այս միտքը բերում է մեզ հաջորդ քայլին՝ փորձել անվերջ մեծացնել կառուցված ուղղանկյունների քանակը ($n \rightarrow \infty$) կամ նույնը՝ անվերջ մանրացնել $[a, b]$ հատվածի բրտոնը ($d \rightarrow 0$):

Սահմանում 5.7. *Ինտեգրալային $\sigma = \sigma(x_k, \xi_k)$ գումարի սահմանը, երբ հատվածի բրտոնն անվերջ մանրանում է (այսինքն՝ փրամագիծը ձգվում է զրոյի՝ $d \rightarrow 0$), կոչվում է f ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ $[a, b]$ հատվածում և համարադասիան կերպ նշանակվում՝*

$$I = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(x_k, \xi_k) = \int_a^b f(x) dx : \quad (5-15)$$

Ինչպես ամեն մի սահման, այն կարող է գոյություն ունենալ կամ չունենալ: Երբ այս սահմանը գոյություն ունի, ըստ սահմանման՝ համարում ենք, որ I սահմանը կախված չէ $\{\xi_k\}$ միջանկյալ կետերի ընտրությունից: Որպեսզի ավելի ճշգրիտ լինենք, ձևակերպենք այս սահմանումը ε - δ -լեզվով.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall \{x_k\} \text{ փրոհման համար } \forall d < \delta \implies |I - \sigma| < \varepsilon, \quad (5-16)$$

$\{\xi_k\}$ միջանկյալ կետերի ցանկացած ընտրության դեպքում:

Սահմանում 5.8. *Եթե (5-15) սահմանը գոյություն ունի այնպես, ինչպես նկարագրված է նախորդ սահմանման մեջ, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի ըստ Ռիմանի $[a, b]$ հատվածում, և գրում են $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$:*

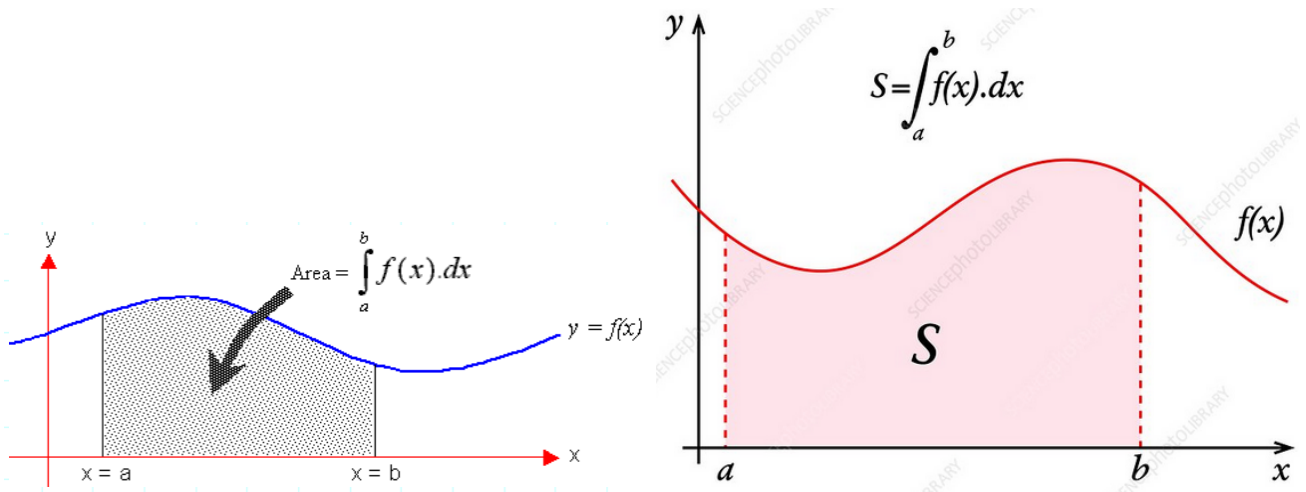
Նախատակ դեպքում կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի չէ ըստ Ռիմանի $[a, b]$ հատվածում, և կգրենք $f(x) \notin \mathcal{R}[a, b]$:

$\mathcal{R}[a, b]$ բազմությունը $[a, b]$ հատվածում ըստ Ռիմանի ինտեգրելի ֆունկցիաների դասն է :

Նկատենք, որ $[a, b]$ հատվածում ավելի ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը հաստատուն թիվ է , այլ ոչ թե ֆունկցիա, ինչպես անորոշ ինտեգրալն էր: Ներկառար որոշյալ ինտեգրալը կախված չէ x -ից, այն ձևական է և կարելի է փոխարինել ցանկացած այլ տառով.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(y) dy :$$

Ինչ վերաբերում է որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական իմաստին, արդեն նշել էինք, որ մասնակի միջակայքերի վրա կառուցված ուղղանկյունների մակերեսների σ գումարի մեջ սահմանային անցում կատարելով՝ հանգում ենք այն պարկերի մակերեսին, որն ընկած է ֆունկցիայի գրաֆիկի և x առանցքի միջև: Այդ պարկերը հաբուկ անվանում ունի՝ **կորագիծ սեղան**, երբեմն՝ **սեղանակերպ**: Ստորև բերված գծագրերում սրվերագծված փրոյեկցները կորագիծ սեղաններ են:



Պատկեր 5.2. Որոշյալ ինտեգրալը որպես կորագիծ սեղանի մակերես

Այսպիսով, որոշյալ ինտեգրալի արժեքը հավասար է համապատասխան կորագիծ սեղանի մակերեսին:

Բերենք որոշյալ ինտեգրալի հաշվման մի պարզագույն օրինակ:

Օրինակ 5.11. Տառապան ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը:

Դիցուք $f(x) = C = \text{const}$, $x \in [a, b]$: Պահանջվում է հաշվել $\int_a^b C \, dx = ?$

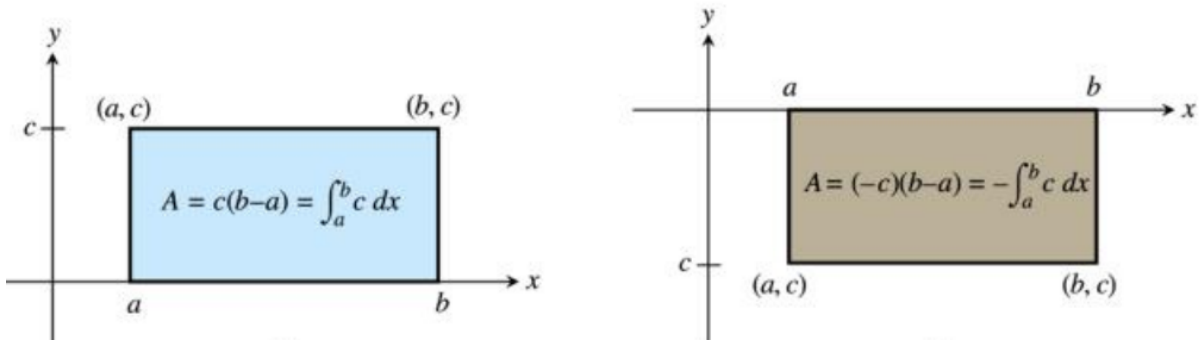
Մենք առայժմ չունենք որոշյալ ինտեգրալ հաշվելու որևէ եղանակ և արհեստագործականորեն դիմել սահմանմանը: Տրոհենք $[a, b]$ հատվածը $\{x_k\}$ կետերի միջոցով, կամայականորեն ընտրենք $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ միջանկյալ կետերը և կազմենք համապատասխան ինտեգրալային $\sigma = \sigma(x_k, \xi_k)$ գումար, որի սահմանը (երբ $d \rightarrow 0$) հենց որոշյալ ինտեգրալն է՝ համաձայն (5-15)-ի.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(x_k, \xi_k) = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n C \Delta x_k = C \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = C(b-a)$$

Այսպիսով, տառապան ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը $[a, b]$ հատվածում հավասար է այդ տառապանի և հատվածի երկարության արտադրյալին՝ $\int_a^b C \, dx = C(b-a)$:

Այս եզրակացությունը միանգամայն հասկանալի է, եթե հաշվի առնենք որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական մեկնաբանությունը՝ որպես համապատասխան կորագիծ սեղանի մակերես: Կորագիծ սեղանի դերն այստեղ կատարում է սովորական ուղղանկյունը, որի մակերեսը հավասար է նրա կողմերի արտադրյալին: Նկատենք, որ բացասական $C < 0$ տառապանի դեպքում որոշյալ ինտեգրալի արժեքը հավասար է նշված մակերեսին միևնույն $(-)$ նշանով, այսինքն՝

$$\text{Area} = - \int_a^b C \, dx = -C(b-a), \quad C < 0:$$



Պատկեր 5.3. Նաստարտում ֆունկցիայի ինտեգրալի պարկերումը

5.11 Ինտեգրելիության անհրաժեշտ պայմանը

Մենք պետք է սովորենք փաթեթակել ինտեգրելի և ոչ ինտեգրելի ֆունկցիաները: Սկսենք ֆունկցիաների ինտեգրելիության մի պարզ անհրաժեշտ պայմանից:

Թեորեմ 5.5. Նախադրում ինտեգրելի ֆունկցիան անսահմանափակ է այդ հատվածում:

$$f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \implies \exists M = \text{const} > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f(x)| \leq M, \quad x \in [a, b]:$$

Ապացույց. Վերցնենք ինչ-որ ինտեգրելի ֆունկցիա՝ $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$: Ենթադրենք հակառակը՝ $f(x)$ ֆունկցիան անսահմանափակ է $[a, b]$ -ում:

Նակատություն սրանալու համար վերցնենք $[a, b]$ հատվածի կամայական $\{x_k\}$ փրոհում:

Քանի որ, ըստ ենթադրության, $f(x)$ ֆունկցիան անսահմանափակ է $[a, b]$ -ում, ապա $f(x)$ ֆունկցիան անսահմանափակ կլինի $[x_{k-1}, x_k]$ մասնակի միջակայքերից գոնե մեկում: Առանց խախտելու ընդհանրությունը՝ համարենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան անսահմանափակ է առաջին $[a, x_1] = [x_0, x_1]$ մասնակի միջակայքում:

Միջանկյալ $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ կետերը (բացի առաջինից) $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $2 \leq k \leq n$, կարող ենք ընտրել կամայական: Իսկ առաջին $\xi_1 \in [x_0, x_1]$ միջանկյալ կետը կընտրենք քիչ հետո:

Ինտեգրալային $\sigma = \sigma(x_k, \xi_k)$ գումարի $k = 2$ -ից մինչև $k = n$ մասը նշանակենք σ_2 -ով.

$$\sigma_2 = \sigma_2(x_k, \xi_k) = \sum_{k=2}^n f(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_2) \Delta x_2 + f(\xi_3) \Delta x_3 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n:$$

Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան անսահմանափակ է առաջին $[x_0, x_1]$ մասնակի միջակայքում, ապա ըստ անսահմանափակության սահմանման՝

$$\forall M > 0 \quad \exists \xi_1 \in [x_0, x_1] \quad \text{s.t.} \quad |f(\xi_1)| > \frac{|\sigma_2| + M}{\Delta x_1} \quad \text{կամ} \quad |f(\xi_1)| \Delta x_1 - |\sigma_2| > M:$$

Այստեղից գնահատենք ինտեգրալային գումարը, ընթացքում օգտվենք եռանկյան անհավասարությունից.

$$|\sigma| = |\sigma(x_k, \xi_k)| = \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| = |f(\xi_1) \Delta x_1 + \sigma_2(x_k, \xi_k)| \geq |f(\xi_1)| \Delta x_1 - |\sigma_2(x_k, \xi_k)| > M:$$

Քանի որ $M > 0$ թիվը կամայական էր, ապա կարող ենք վերցնել անվերջ մեծ հաջորդականություն՝ $M_n \rightarrow +\infty$, փրոհումների հաջորդականություն անվերջ փոքր փրամագծերով, $d_n \rightarrow 0$, և σ_n ինտեգրալային գումարներով այնպիսիք, որ

$$|\sigma_n| \geq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N} :$$

Ձգվեցնելով $n \rightarrow \infty$ և կապարելով սահմանային անցում՝ ստանում ենք

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n| = +\infty :$$

Սա հակասում է որոշյալ ինտեգրալի գոյության պայմանին՝ $\exists I = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma$:

□

Թեորեմ 5.5-ը կարելի է վերաձևակերպել ժխտման տերմիններով:

Թեորեմ 5.6. Նախկինում սահմանափակ ֆունկցիան այդ հատվածում ինտեգրելի չէ :

Դիպողություն 5.5. Ֆունկցիայի սահմանափակությունը, լինելով ինտեգրելիության անհրաժեշտ պայման, միաժամանակ բավարար չէ : Այլ կերպ ասած՝ Թեորեմ 5.5 և 5.6-ի հակադարձ պնդումները սխալ են:

Բերենք համապատասխան հակաօրինակ, որը կհիմնավորի վերջին պնդումը:

Օրինակ 5.12. Վերհիշենք Դիրիխլեի ֆունկցիան՝

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } x\text{-ը ռացիոնալ է, } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{երբ } x\text{-ն իռացիոնալ է, } x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \end{cases}$$

Դիրիխլեի ֆունկցիան իհարկե սահմանափակ է, բայց, պարզվում է, ինտեգրելի չէ՝ $\mathcal{D}(x) \notin \mathcal{R}[a, b]$ որևէ $[a, b]$ հատվածում: Ստուգելու համար վերցնենք $[a, b]$ հատվածի կամայական $\{x_k\}$ փրոհում:

Առաջին անգամ $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ միջանկյալ կետերը վերցնենք ռացիոնալ: Այդ դեպքում՝

$$\sigma(x_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^n \mathcal{D}(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a :$$

Երկրորդ անգամ վերցնենք իռացիոնալ միջանկյալ կետեր $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$: Այդ դեպքում՝

$$\sigma(x_k, \eta_k) = \sum_{k=1}^n \mathcal{D}(\eta_k) \Delta x_k = 0 :$$

Ստացվեց, որ ինտեգրալային գումարի սահմանը՝ $I = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(x_k, \eta_k)$ երկու տարբեր մասնակի սահմաններ ունի, ինչն անպացուցում է, որ այդ սահմանը գոյություն չունի, և ուրեմն Դիրիխլեի ֆունկցիան ինտեգրելի չէ,

$$\nexists \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(x_k, \eta_k) \implies \mathcal{D}(x) \notin \mathcal{R}[a, b] :$$

5.12 Դարբուի գումարներ

Քանի որ ինտեգրելի ֆունկցիաները հապրվածում սահմանափակ են, ապա այսուհետ ինտեգրելիությունը հետագուրելիս կդիտարկենք միայն սահմանափակ ֆունկցիաներ:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և սահմանափակ $[a, b]$ հապրվածում:

Ինտեգրալային $\sigma = \sigma(x_k, \xi_k)$ գումարներից բացի կսահմանենք այլ նման գումարներ: Վերցնենք $[a, b]$ հապրվածի կամայական $\{x_k\}$ բրոհում: Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է, ապա մասնակի միջակայքերում կարելի է դիտարկել $f(x)$ -ի սուպրեմումը և ինֆիմումը, որոնք վերջավոր են:

Սահմանում 5.9. $m_k \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $M_k \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $k = \overline{1, n}$:

Մասնավորապես, $f \in C[a, b]$ անընդհատ ֆունկցիայի համար m_k և M_k մեծությունները համապատասխանաբար վերածվում են մինիմումի և մաքսիմումի՝

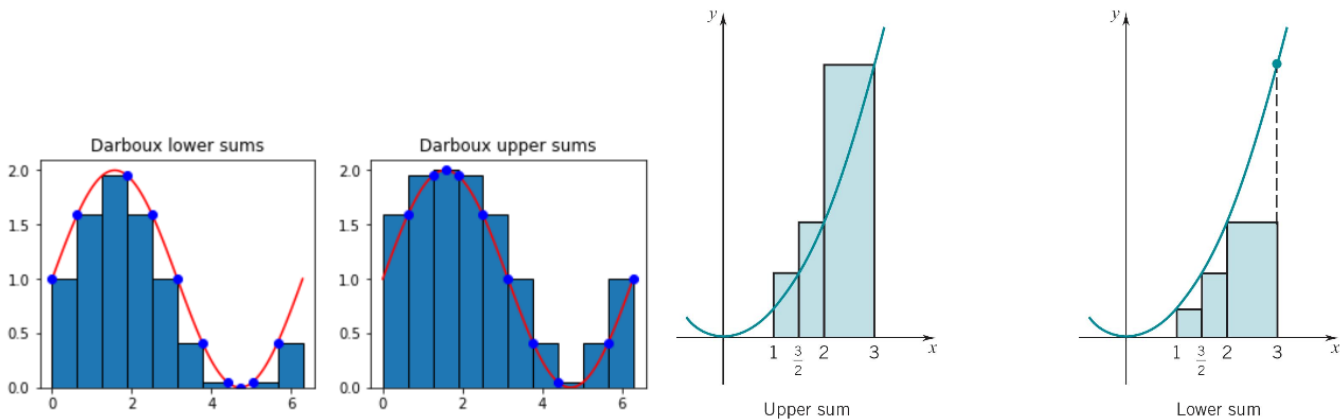
$$m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad k = \overline{1, n} :$$

Սահմանում 5.10.

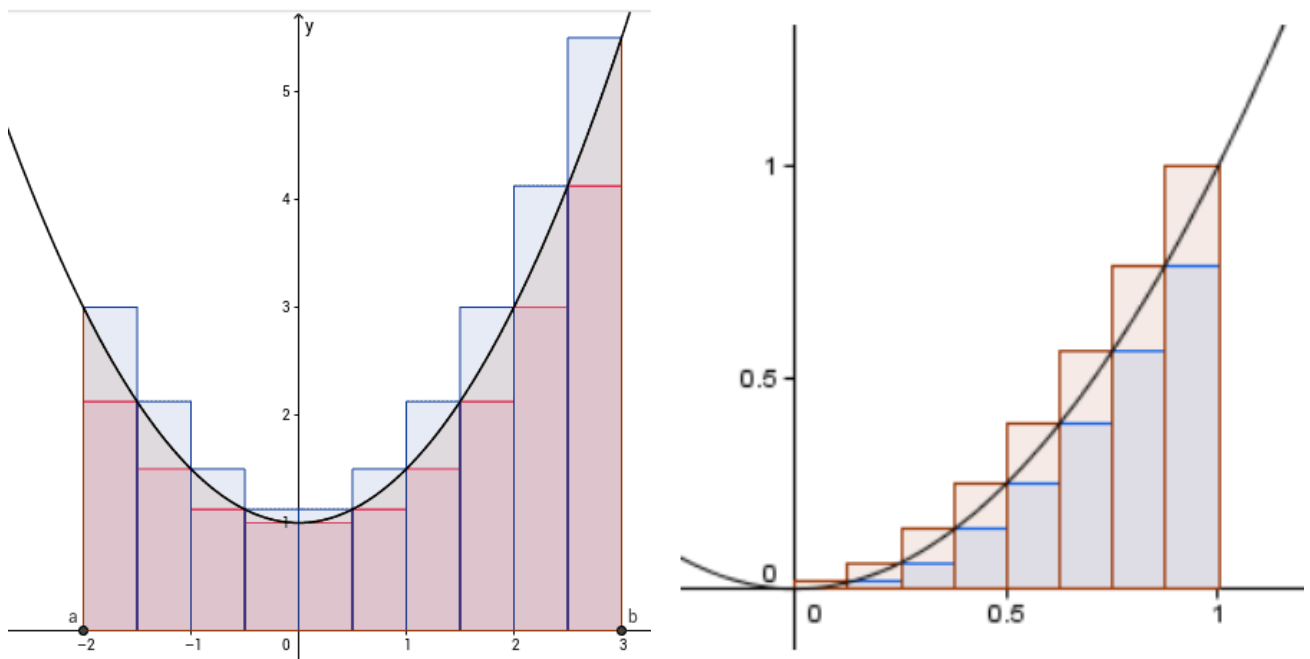
$$s = s(x_k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k, \quad S = S(x_k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

մեծությունները համապատասխանաբար կոչվում են **Դարբուի ստորին և վերին գումարներ**:

Ինտեգրալային σ գումարները, ինչպես արդեն ցույց էինք տվել, իրենցից ներկայացնում են որոշակի ուղղանկյունների մակերեսների գումար: Նման գրաֆիկական պարկերում կարելի է տալ նաև Դարբուի ստորին և վերին գումարների համար: Ստորև բերված գծագրերում դուք տեսնում եք Դարբուի ստորին և վերին գումարների երկրաչափական պարկերում ինչ-որ ֆունկցիաների համար:



Գծագիր 5.4. Դարբուի ստորին և վերին գումարների պարկերումը



Պատկեր 5.5. Դարբուի ստորին և վերին գումարների օրինակներ

Նկատենք, ըստ սահմանման, Դարբուի ստորին գումարը ցածր (ավելի փոքր) ուղղանկյունների մակերեսների գումարն է, իսկ Դարբուի վերին գումարն ավելի բարձր (մեծ) ուղղանկյունների մակերեսների գումարն է :

Պատկեր 5.5-ում կարելի է անգամ փեսնել Դարբուի վերին և ստորին գումարների $S - s$ տարբերությունը: Այդ մեծությունը հեքագայում կարևոր դեր է կատարելու: Մենք ցույց ենք փալու, որ ինքնագրելի ֆունկցիայի համար $S - s$ տարբերությունը ձգվելու է զրոյի, երբ հալվածի բրտիումը անվերջ մանրանա:

5.13 Դարբուի գումարների հալկությունները

Ստորև բերված բոլոր լեմմաներում ենթադրում ենք, որ դիփարկվող $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և սահմանափակ $[a, b]$ հալվածում:

Լեմմա 5.1. Դիցուք $\{x_k\}$ -ն $[a, b]$ հալվածի որևէ ֆիքսսած բրտիում է, իսկ S և s -ը տվյալ բրտիումներ համապատասխանող Դարբուի վերին և ստորին գումարներն են:

Այդ դեպքում $\{x_k\}$ բրտիումները համապատասխանող ինքնագրալային $\sigma = \sigma(x_k, \xi_k)$ գումարների համար ճիշտ է հեքույալ գնահատականը՝

$$s \leq \sigma \leq S, \quad \forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad (5-17)$$

միջանկյալ ξ_k կեքերի ցանկացած ընտրության համար:

Ապացույց. Այս գնահատականը գրեթե ակնհայտ է ինչպես երկրաչափական, այնպես էլ անալիտիկ իմաստով:

Մասնավորապես, **գծագիր 5.6**-ում կարելի է տեսնել որևէ մեկ $[x_{k-1}, x_k]$ մասնակի միջակայքում s, σ, S գումարների մեջ պարունակվող ուղղանկյունները:

Ցածր ուղղանկյունը առկա է Դարբուի ստորին s գումարի մեջ, միջին ուղղանկյունը՝ ինտեգրալային σ գումարի մեջ, իսկ բարձր ուղղանկյունը՝ Դարբուի վերին S գումարի մեջ, ինչն անմիջապես հանգեցնում է (5-17) գնահատականին: Թեև այս դադողությունները ճիշտ են, բայց լիարժեք ապացույց համարվել չեն կարող: Ներկաբար՝ ապացուցենք լեմման անալիտիկորեն:

Ըստ սահմանման՝ ունենք

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad k = \overline{1, n},$$

և եթե վերցնենք $[x_{k-1}, x_k]$ մասնակի միջակայքում ցանկացած ξ_k կետ, ապա այդ կետում $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն ընկած կլինի m_k և M_k -ի միջև.

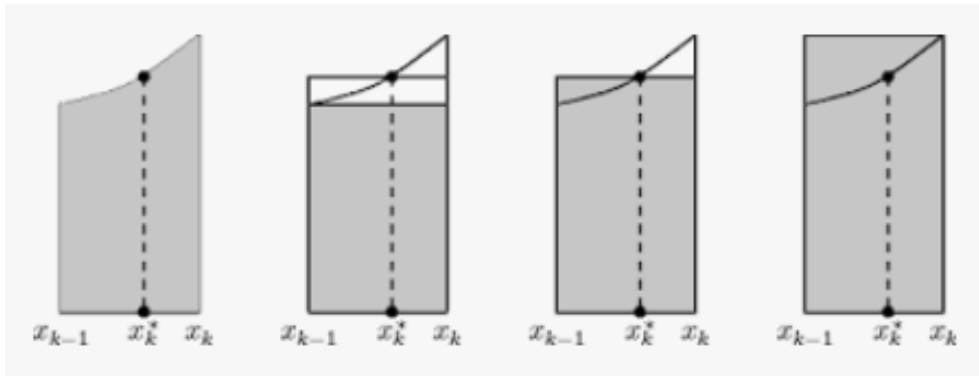
$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \quad \forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] :$$

Բազմապատկենք Δx_k երկարությամբ և գումարենք բոլոր k -երով.

$$\begin{aligned} m_k \Delta x_k &\leq f(\xi_k) \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k, \quad k = \overline{1, n}, \\ \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k &\leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k, \end{aligned}$$

ինչը համընկնում է (5-17) անհավասարությունների հետ:

□



Գծագիր 5.6. Պատկերը մեկ առանձին վերցրած $[x_{k-1}, x_k]$ մասնակի միջակայքում, $\xi_k = x_k^*$

Լեմմա 5.2. Դիցուք $\{x_k\}$ -ն $[a, b]$ հատվածի որևէ ֆիքսած տրոհում է :

Այդ դեպքում ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի միջանկյալ կետեր $\{\xi_k\}$ և $\{\eta_k\}$, որ

$$0 \leq S - \sigma(x_k, \xi_k) < \varepsilon, \quad 0 \leq \sigma(x_k, \eta_k) - s < \varepsilon : \quad (5-18)$$

Այլ կերպ ասած՝ Դարբնի վերին և ստորին գումարները կարելի է մոտարկել ինտեգրալային $\sigma = \sigma(x_k, \xi_k)$ գումարներով ցանկացած ε -ճշտությամբ.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{համար} \quad \exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = \overline{1, n}, \quad \text{s.t.} \quad 0 \leq S - \sigma(x_k, \xi_k) < \varepsilon, \quad (5-19)$$

$$\exists \eta_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = \overline{1, n}, \quad \text{s.t.} \quad 0 \leq \sigma(x_k, \eta_k) - s < \varepsilon : \quad (5-20)$$

Ապացույց. Ըստ սահմանման՝ $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $k = \overline{1, n}$: Օգտվենք սուպրեմումի սահմանումից.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{համար} \quad \exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad \text{s.t.} \quad 0 \leq M_k - f(\xi_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad k = \overline{1, n} :$$

Վերջին $b-a > 0$ ավելորդ արտադրիչը ներկա է գույք փոխակական նկարառումներով և ցանկության դեպքում կարելի է չգրել: Բազմապարկենք Δx_k երկարությամբ և գումարենք բոլոր k -երով $k = 1$ -ից մինչև $k = n$.

$$0 \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k,$$

$$0 \leq S - \sigma(x_k, \xi_k) < \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon :$$

(5-19) անհավասարությունն ապացուցված է : Երկրորդ (5-20) անհավասարությունն ապացուցվում է նույն եղանակով, ընդամենը սուպրեմումի փոխարեն կիրառում ենք ինֆիմումի սահմանումը: $\square$

Լեմմա 5.2-ը կարելի է վերաձևակերպել, եթե դարձյալ օգտվենք սուպրեմումի և ինֆիմումի սահմանումներից:

Ներկանք 5.1. Դիցուք $\{x_k\}$ -ն $[a, b]$ հատվածի որևէ ֆիքսած տրոհում է : Այդ դեպքում

$$S = \sup_{\{\xi_k\}} \sigma(x_k, \xi_k), \quad s = \inf_{\{\xi_k\}} \sigma(x_k, \xi_k), \quad (5-21)$$

որտեղ սուպրեմումը և ինֆիմումը վերցրած են բոլոր հնարավոր միջանկյալ $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ կերպերով:

Լեմմա 5.3. Տվյալ տրոհումը մանրացնելու հերևանքով Դարբնի վերին S գումարը կարող է միայն նվազել, իսկ Դարբնի ստորին s գումարը կարող է միայն աճել:

$$\text{Կարճ} \quad \boxed{S \searrow \quad u \quad s \nearrow} :$$

Ապացույց. Բավական է քննարկել ընդամենը մեկ նոր կետով մանրացման դեպքը: Դիցուք $\{x_k\}$ -ն $[a, b]$ հատվածի որևէ տրոհում է, և $\{x'_k\}$ տրոհումը սրացվում է սկզբնական $\{x_k\}$ տրոհումից՝ ընդամենը մեկ x^* նոր տրոհման կետ ավելացնելով.

$$\{x'_k\} = \{x_k\} \cup \{x^*\} :$$

Պարզ է, որ $\{x'_k\}$ փրոհումը սկզբնական $\{x_k\}$ փրոհման մանրացում է :

Սկզբնական $\{x_k\}$ փրոհմանը համապատասխանող Դարբուի վերին գումարը նշանակենք S -ով,

$$S = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_k \Delta x_k + \cdots + M_n \Delta x_n, \quad (5-22)$$

իսկ նոր $\{x'_k\}$ փրոհմանը համապատասխանող Դարբուի վերին գումարը նշանակենք S' -ով:

Այսպիսով, մեր նպատակն է ապացուցել, որ $\boxed{S' \leq S}$:

Լրացուցիչ x^* նոր փրոհման կետը կհայտնվի $[x_{k-1}, x_k]$ մասնակի միջակայքերից որևէ մեկում, ենթադրենք $x_{k-1} < x^* < x_k$: Եթե x^* նոր փրոհման կետը համընկնի այս միջակայքի ծայրակետերից մեկի հետ, ապա փրոհումը չի փոխվի և հետաքրքիր չէ : Այժմ առաջացան երկու նոր մասնակի միջակայքեր մեկի փոխարեն,

$$[x_{k-1}, x^*] \cup [x^*, x_k] = [x_{k-1}, x_k] :$$

Կարարենք նշանակումներ,

$$M'_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x^*]} f(x), \quad M''_k = \sup_{x \in [x^*, x_k]} f(x) :$$

Նախկին նեղացման հետևանքով պարզ է, որ ֆունկցիայի սուպրեմումը կարող է միայն նվազել,

$$M'_k \leq M_k \quad \text{և} \quad M''_k \leq M_k :$$

Սա պարկերացնելու համար րեն **գծագիր** 5.6-ը:

Նկատենք, որ րվյալ մանրացման հետևանքով փոփոխություն կրեց միայն S վերին գումարի մեջ պարունակվող $M_k \Delta x_k$ գումարելին և նա փոխարինվեց նոր S' վերին գումարի մեջ պարունակվող երկու նոր

$$M'_k(x^* - x_{k-1}) + M''_k(x_k - x^*)$$

գումարելիներով: Մեզ մնում է դրանք համեմատել,

$$M'_k(x^* - x_{k-1}) + M''_k(x_k - x^*) \leq M_k(x^* - x_{k-1}) + M_k(x_k - x^*) = M_k(x_k - x_{k-1}) = M_k \Delta x_k :$$

Այսպիսով (5-22) վերին S գումարը համեմատելով

$$S' = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_{k-1} \Delta x_{k-1} + M'_k(x^* - x_{k-1}) + M''_k(x_k - x^*) + M_{k+1} \Delta x_{k+1} + \cdots + M_n \Delta x_n, \quad (5-23)$$

վերին գումարի հետ, համոզվում ենք, որ $\boxed{S' \leq S}$:

Ստորին գումարների համար $\boxed{s' \geq s}$ անհավասարությունն ապացուցվում է համանման եղանակով: $\square$

Լեմմա 5.4. Դարբուի յուրաքանչյուր ստորին գումար չի գերազանցում յուրաքանչյուր վերին գումարը՝ նույնիսկ այլ փրոհումներ համապատասխանող:

Կարճ՝ $s' \leq S''$ կամայական փրոհումներին համապատասխանող s' և S'' ստորին և վերին գումարների համար:

Ապացույց. Դիցուք $\{x'_k\}$ և $\{x''_k\}$ փրոհումները $[a, b]$ հատվածի կամայական երկու փրոհումներ են:

Առաջին փրոհման վերին և ստորին գումարները նշանակենք S' , s' -ով, իսկ երկրորդ փրոհման վերին և ստորին գումարները նշանակենք S'' , s'' -ով: Միավորելով այս երկու փրոհումները՝ կազմենք նոր փրոհում.

$$\{x_k\} = \{x'_k\} \cup \{x''_k\},$$

որի վերին և ստորին գումարները նշանակենք S , s -ով:

Նշենք, որ $\{x_k\}$ միավորումը մանրացում է հանդիսանում $\{x'_k\}$ և $\{x''_k\}$ փրոհումներից յուրաքանչյուրի համար: Նախորդ Լեմմա 5.3-ի համաձայն՝

$$\begin{aligned} S &\leq S', & s &\geq s', \\ S &\leq S'', & s &\geq s'': \end{aligned}$$

Բացի այդ, ակնհայտ է, որ $s \leq S$: Միացնելով բոլոր անհավասարությունները՝ կստանանք

$$s' \leq s \leq S \leq S'' \quad \text{կամ} \quad s'' \leq s \leq S \leq S',$$

ինչն ավարտում է լեմմայի ապացույցը: □

Որպես հետևանք նշենք, որ վերին գումարների բազմությունը (բոլոր հնարավոր փրոհումներով) սահմանափակ է ներքևից (թեկուզ ինչ-որ ստորին գումարով): Ներկայացնենք վերին գումարների բազմությունը ունի վերջավոր ինֆիմում՝ $\exists \inf_{\{x_k\}} S$: Ստորին գումարների բազմությունը (բոլոր հնարավոր փրոհումներով) սահմանափակ է վերևից (թեկուզ ինչ-որ վերին գումարով): Ներկայացնենք ստորին գումարների բազմությունը ունի վերջավոր սուպրեմում՝ $\exists \sup_{\{x_k\}} s$: Նշված ճշգրիտ եզրերը հասնում են կրում:

Սահմանում 5.11.

$$\begin{aligned} I^* &\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\{x_k\}} S && \text{կոչվում է } f \text{ ֆունկցիայի Դարբուի վերին ինտեգրալ,} \\ I_* &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\{x_k\}} s && \text{կոչվում է } f \text{ ֆունկցիայի Դարբուի ստորին ինտեգրալ:} \end{aligned}$$

Այսպես ինֆիմումը և սուպրեմումը վերցրած են $[a, b]$ հատվածի բոլոր հնարավոր $\{x_k\}$ փրոհումներով:

Լեմմա 5.5. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $[a, b]$ հատվածում: Այդ դեպքում նրա վերին և ստորին ինտեգրալները բավարարում են

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S$$

անհավասարությունները ցանկացած տրոհման վերին և ստորին գումարների համար:

Ապացույց. $s \leq I_*$ և $I^* \leq S$ անհավասարությունները ակնհայտ են և բխում են ինֆիմումի ու սուպրեմումի սահմանումներից: Ուրեմն մեզ մնում է միայն ցույց տալ միջին $I_* \leq I^*$ անհավասարությունը:

Իսկապես, ըստ Լեմմա 5.4-ի, կամայական տրոհումներին համապատասխանող Դարբուի ստորին գումարը չի գերազանցում վերին գումարը, այսինքն՝ $s' \leq S''$:

Այսպես ֆիքսենք որևէ վերին գումար և վերցնենք ստորին գումարների սուպրեմումը բոլոր հնարավոր տրոհումներով: Անհավասարության նշանը կպահվանվի՝

$$I_* = \sup_{\{x_k\}} s \leq S'' :$$

Այնուհետև վերցնենք վերին գումարների ինֆիմումը բոլոր հնարավոր տրոհումներով՝

$$I_* = \sup_{\{x_k\}} s \leq \inf_{\{x_k\}} S = I^* :$$

□

5.14 Ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

Նիմանական թեորեմներ

Նախորդ դասախոսության մեջ ներկայացված Դարբուի գումարների հատկությունները թույլ են տալիս ստանալ հարվածում ֆունկցիայի ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար մի պայման:

Շարունակելու ենք օգտագործել բոլոր այն նշանակումները, որոնք ընդունել էինք որոշյալ ինտեգրալի սահմանումից սկսած:

Թեորեմ 5.7. (Նիմանական Թեորեմ) Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $[a, b]$ հարվածում:

Այդ դեպքում

$$\left(f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \right) \iff \left(\lim_{d \rightarrow 0} (S - s) = 0 \right) : \quad (5-24)$$

Վերջին սահմանը կարելի է ձևակերպել ավելի ճշգրիտ ε - δ -լեզվով և նույնիսկ էլ ավելի պարզեցնել, այն է՝

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall \{x_k\} \text{ փրոհման համար } d < \delta \implies S - s < \varepsilon \quad (5-25)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{x_k\} \text{ որևէ փրոհում } \text{s.t.} \quad S - s < \varepsilon : \quad (5-26)$$

Ապացույց. Մենք պնդում ենք բոլոր (5-24)-(5-25)-(5-26) պայմանների համարժեքությունը: Նկատենք, որ (5-25) պայմանը պարզապես (5-24) սահմանի ε - δ ձևակերպումն է :

Բացի այդ, ակնհայտ է $(5-25) \implies (5-26)$ հետևությունը:

Իսկ $(5-26) \implies (5-25)$ հետևությունը հիմնավորված է Դարբուի գումարների հատկություններով:

Իսկապես, եթե (5-26) պայմանը նշանակում է որևէ մեկ $\{x_k\}$ փրոհման գոյությունը, որի համար $S - s < \varepsilon$, ապա ավելի մանր բոլոր $\{x'_k\}$ փրոհումների համար ($d' \leq d$) Դարբուի վերին գումարն ավելի փոքր է ($S' \leq S$), իսկ ստորին գումարն ավելի մեծ է ($s' \geq s$), և ուրեմն առավել ևս $S' - s' \leq S - s < \varepsilon$: Սրանով $(5-26) \implies (5-25)$ հետևությունը հիմնավորված է :

Այժմ անցնենք թեորեմի բուն ապացույցին և ցույց տանք (5-24) համարժեքությունը, կամ նույնը՝

$$\boxed{\left(f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \right) \iff (5-26)} \quad \text{համարժեքությունը:}$$

$\implies$ **Անհրաժեշտություն.** Դիցուք f -ը որևէ ինտեգրելի ֆունկցիա է՝ $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$:

Ըստ որոշյալ ինտեգրալի սահմանման՝ սա նշանակում է

$$\exists I = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(x_k, \xi_k)$$

սահմանի գոյությունը: Սա էլ իր հերթին ε - δ -լեզվով հանգեցնում է հետևյալ պայմանին՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall \{x_k\} \text{ փրոհման համար, } \forall d < \delta \implies |I - \sigma(x_k, \xi_k)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (5-27)$$

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ միջանկյալ կետերի ցանկացած ընտրության դեպքում:

Նամաձայն Դարբուի գումարների 2-րդ հատկության (տես Լեմմա 5.2)՝ միջանկյալ կետերի ընտրության հաշվին կարելի է σ ինտեգրալային գումարները ցանկացած ճշտությամբ մոտարկել Դարբուի վերին և ստորին գումարները, այսինքն՝ արդեն ընտրված ε -ի համար

$$\exists \xi'_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = \overline{1, n}, \quad s.t. \quad S - \sigma(x_k, \xi'_k) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (5-28)$$

$$\exists \xi''_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = \overline{1, n}, \quad s.t. \quad \sigma(x_k, \xi''_k) - s < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (5-29)$$

որևէ $\{x_k\}$ բրոհման համար, որի d տրամագիծը փոքր է δ -ից՝ $d < \delta$:

Միավորելով (5-27), (5-28), (5-29) գնահատականները՝ վերջնական գնահատում ենք

$$S - s = (S - \sigma(x_k, \xi'_k)) + (\sigma(x_k, \xi'_k) - I) + (I - \sigma(x_k, \xi''_k)) + (\sigma(x_k, \xi''_k) - s) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

նշված բրոհման համար: Ստացանք (5-26) պայմանը, ինչը նշանակում է, որ $\lim_{d \rightarrow 0} (S - s) = 0$:

$\boxed{\Leftarrow}$ **Բավարարություն.** Դիցուք $\lim_{d \rightarrow 0} (S - s) = 0$:

Նամաձայն Դարբուի գումարների 5-րդ հատկության (տես Լեմմա 5.5)՝ Դարբուի վերին և ստորին ինտեգրալները՝ I^* և I_* , բավարարում են

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S, \quad \forall S, s, \quad (5-30)$$

անհավասարությունները ցանկացած բրոհման վերին և ստորին գումարների համար:

Կարելի է (5-30)-ից ստանալ

$$0 \leq I^* - I_* \leq S - s, \quad \forall S, s, \quad (5-31)$$

անհավասարությունները և նկատել, որ I^* և I_* ինտեգրալները հաստատուն թվեր են: Կարարենք սահմանային անցում (5-31)-ում և օգտվենք ոստիկանների կանոնից: Արդյունքում կստանանք $I^* = I_*$, և նշանակենք՝

$$I^* = I_* \stackrel{\text{նշ}}{=} I :$$

Այսպեսով՝

$$S \searrow I \quad \text{և} \quad s \nearrow I \quad (d \rightarrow 0), \quad s \leq I \leq S, \quad \forall S, s :$$

Մյուս կողմից, համաձայն Դարբուի գումարների 1-ին հատկության (տես Լեմմա 5.1)՝ ինտեգրալային $\sigma(x_k, \xi_k)$ գումարները միշտ ընկած են Դարբուի վերին և ստորին գումարների միջև.

$$s \leq \sigma(x_k, \xi_k) \leq S, \quad \forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad (5-32)$$

ցանկացած քրոհման համար և միջանկյալ ξ_k կետերի ցանկացած ընտրության համար:

Կարարենք սահմանային անցում (5-32)-ում և օգտվենք ուսդիկանների կանոնից,

$$\begin{array}{ccc} s \leq & \sigma(x_k, \xi_k) \leq & S \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ I & I & I \end{array} \quad (\text{երբ } d \rightarrow 0) :$$

Արդյունքում ստանում ենք

$$\exists I = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(x_k, \xi_k)$$

սահմանի գոյությունը, ինչը և նշանակում է f ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը՝ $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$:

Նիմնական թեորեմն ապացուցված է:

□

Թեորեմի ապացույցի ընթացքում կարելի է նկատել, որ f ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը արտահայտվում է նաև Դարբուի վերին և ստորին ինտեգրալների միջոցով, և ուրեմն ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

Ներևանք 5.2. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $[a, b]$ հատվածում: Այդ դեպքում

$$\left(f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \right) \iff \left(I^* = I_* \right) : \quad (5-33)$$

Ֆունկցիայի ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը կարելի է արտահայտել ևս մեկ եղանակով: Այդ նպատակով վերհիշենք որոշ հասկացություններ և ձևակերպենք մի լեմմա:

Լեմմա 5.6. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $[a, b]$ հատվածում: Սահմանենք

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in [a, b]} f(x),$$

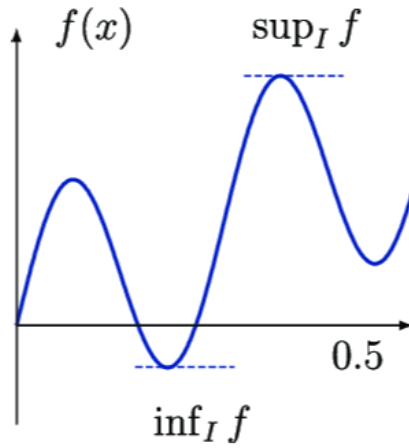
$$m \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in [a, b]} f(x),$$

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x', x'' \in [a, b]} |f(x') - f(x'')|$$

կոչվում է f ֆունկցիայի տատանում $[a, b]$ հատվածում:

Այդ դեպքում $\omega = M - m$:

Ապացույցը հիմնված է սուպրեմումի և ինֆիմումի սահմանումների վրա, այն թողնենք ընթերցողին:



Գծագիր 5.7. Փունկցիայի ճշգրիտ եզրերը և տարանունը

Նշված սուպրեմումը և ինֆիմումը կարելի է սահմանել յուրաքանչյուր մասնակի միջակայքում, եթե արված է $[a, b]$ հատվածի ինչ-որ պրոտիում: Այդ նշանակումները մենք արդեն կիրառում էինք Դարբուի վերին և ստորին գումարները սահմանելիս.

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad k = \overline{1, n},$$

$$s = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k, \quad S = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k :$$

Սրանց ավելացնենք նաև տարանունը k -րդ մասնակի միջակայքում.

$$\omega_k \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x') - f(x'')| \quad \text{կոչվում է } f \text{ ֆունկցիայի տարանունը } [x_{k-1}, x_k] \text{ հատվածում:}$$

Համաձայն վերջին լեմմայի՝

$$\omega_k = M_k - m_k, \quad k = \overline{1, n} :$$

Այս նշանակումները թույլ են տալիս Դարբուի գումարների տարբերությունն արտահայտել ω_k տարանունների միջոցով.

$$S - s = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k : \quad (5-34)$$

Սրա միջոցով վերաձևակերպենք Հիմնական Թեորեմը:

Թեորեմ 5.8. (Նիմնական Թեորեմ) Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $[a, b]$ հատվածում:

Այդ դեպքում

$$\left(f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \right) \iff \left(\lim_{d \rightarrow 0} (S - s) = 0 \right) \iff \left(\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = 0 \right) : \quad (5-35)$$

5.15 Ինտեգրելի ֆունկցիաների դասեր

Նախորդ բաժնում դուրս բերեցինք ֆունկցիայի ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար մի քանի պայմաններ, որոնք սկզբունքորեն թույլ են տալիս հաստատել կամ հերքել ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը: Այնուամենայնիվ, հիմնական թեորեմում ստացված ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը սահմանի տեսքով այնքան էլ հեշտ չէ ստուգել յուրաքանչյուր առանձին դեպքում: Այդ պարճառով ցանկալի է առանձնացնել ավելի հեշտ ստուգվող և հնարավորին չափ պարզ նկարագրվող ինտեգրելի ֆունկցիաների տարբեր դասեր: Օրինակ, մենք արդեն գիտենք, որ պարզագույն հաստատուն ֆունկցիան ինտեգրելի է հաստատված: Առաջին թեորեմով ինտեգրելի ֆունկցիաների դասը բավականին կընդլայնենք և ցույց կտանք, որ բոլոր անընդհար ֆունկցիաներն ինտեգրելի են հաստատված:

Թեորեմ 5.9. $[a, b]$ հատվածում ցանկացած անընդհար ֆունկցիա ինտեգրելի է այդ հատվածում:

$$\begin{aligned} \text{Կարճ} \quad & \boxed{f(x) \in C[a, b] \implies f(x) \in \mathcal{R}[a, b]}, \\ \text{կամ ավելի կարճ} \quad & \boxed{C[a, b] \subset \mathcal{R}[a, b]} : \end{aligned}$$

Ապացույց. Յուրաքանչյուր անընդհար ֆունկցիա հաստատված, ըստ Կանտորի թեորեմի, հավասարաչափ անընդհար է նույն հատվածում, այսինքն՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x', x'' \in [a, b], \quad |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} :$$

Սա նշանակում է, որ f ֆունկցիայի տարանջատը փոքր է նախօրոք վերցրած կամայական դրական թվից, եթե մասնակի միջակայքերի երկարությունները փոքր են δ -ից.

$$d = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k < \delta \implies \omega_k = \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} :$$

Այսպես d թիվը տվյալ $\{x_k\}$ բաժանման տրամագիծն է և որոշում է այդ բաժանման մանրացման աստիճանը:

Կարճ ասած՝ բավականաչափ մանր բաժանման համար ֆունկցիայի տարանջատը փոքր է ε -ից:

Նիշենք հիմնական թեորեմից, որ ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը կարելի է ձևակերպել

Դաբբուի գումարների կամ ֆունկցիայի տարանջատի միջոցով.

$$\left(f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \right) \iff \left(\lim_{d \rightarrow 0} (S - s) = 0 \right) \iff \left(\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = 0 \right) : \quad (5-36)$$

Ենթադրելով, որ բաժանումը բավականաչափ մանր է, $d < \delta$, գնահատենք.

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon,$$

ինչը նշանակում է, որ (5-36) սահմանը տեղի ունի, և ուրեմն f ֆունկցիան ինտեգրելի է՝ $f \in \mathcal{R}[a, b]$: $\square$

Միայն անընդհատ ֆունկցիաներով ինտեգրելի ֆունկցիաների դասը չի սահմանափակվում: Գոյություն ունեն խզվող ինտեգրելի ֆունկցիաներ: Առհասարակ, խզվող ֆունկցիաների դասը կրժառնենք երկու խմբի՝ ինտեգրելի և ոչ ինտեգրելի ֆունկցիաներ: Ինչպես դրանք տարբերակել:

Այժմ ինտեգրելի ֆունկցիաների դասը բավականին կրնոլայնենք և ցույց կտանք, որ վերջավոր քանակով խզումներ ունեցող ֆունկցիաներն ինտեգրելի են հապվածում:

Թեորեմ 5.10. *Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $[a, b]$ հապվածում:*

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան վերջավոր թվով խզման կետեր ունի, ապա f -ն ինտեգրելի է $[a, b]$ հապվածում՝ $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$:

Ապացույց. Քանի որ ֆունկցիան խզվող է, այն հաստատում չէ՝ $f \neq \text{const}$: Նաշվի առնելով նաև, որ ֆունկցիան սահմանափակ է, ուրեմն ունի վերջավոր սուպրեմում և ինֆիմում, f ֆունկցիայի տարանումն $[a, b]$ հապվածում վերջավոր է և զրո չէ.

$$\omega \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sup_{x', x'' \in [a, b]} |f(x') - f(x'')|, \quad \boxed{0 < \omega < +\infty}, \quad \omega = M - m :$$

Սկզբում թեորեմն ապացուցենք այն դեպքում, երբ ֆունկցիան ընդամենը մեկ խզման կետ ունի: Ենթադրենք՝ $x^* \in [a, b]$ կետը f ֆունկցիայի միակ խզման կետն է :

Մեր նպատակն է ապացուցել (5-36) սահմանը, ինչը կհանգեցնի f ֆունկցիայի ինտեգրելիության:

Վերցնենք կամայական $\forall \varepsilon > 0$ և ֆիքսենք այն: Խզման x^* կետը ծածկենք ε -շրջակայքով՝ $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$: Սրանով $[a, b]$ հապվածը կրժանվի երեք միջակայքերի՝

$$[a, b] = [a, x^* - \varepsilon] \cup (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon) \cup [x^* + \varepsilon, b] :$$

Ըստ Կանտորի թեորեմի՝ $f(x)$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է $[a, x^* - \varepsilon]$ և $[x^* + \varepsilon, b]$ փակ հապվածներից յուրաքանչյուրում, այսինքն՝

$$\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \text{ (կարելի է վերցնել } \delta_1 < \varepsilon) \text{ s.t. } \forall x', x'' \in [a, x^* - \varepsilon], |x' - x''| < \delta_1 \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

$$\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \text{ (կարելի է վերցնել } \delta_2 < \varepsilon) \text{ s.t. } \forall x', x'' \in [x^* + \varepsilon, b], |x' - x''| < \delta_2 \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon :$$

Սահմանելով $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \min(\delta_1, \delta_2) < \varepsilon$ կստանանք հավասարաչափ անընդհատության պայման $[a, x^* - \varepsilon]$ և $[x^* + \varepsilon, b]$ փակ հապվածների միավորման վրա.

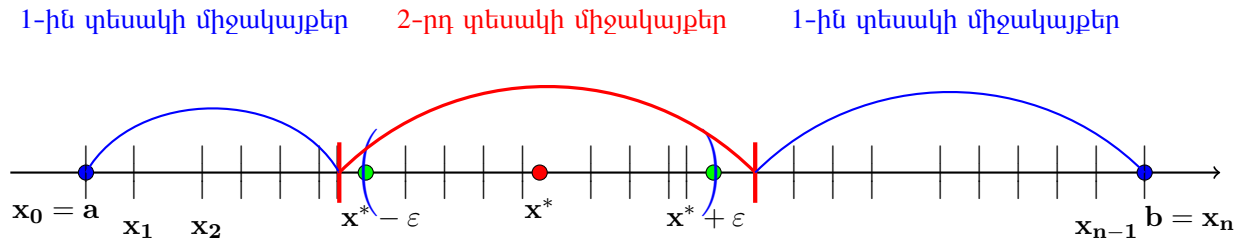
$$\exists \delta \text{ (} 0 < \delta < \varepsilon) \text{ s.t. } \forall x', x'' \in [a, x^* - \varepsilon] \cup [x^* + \varepsilon, b], |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon : \quad (5-37)$$

Այժմ վերցնենք $[a, b]$ հապվածի բավականաչափ մանր տրոհում $\{x_k\}$ այնպես, որ նրա տրամագիծը $d < \delta$:

Առաջացած $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$, մասնակի միջակայքերը բաժանենք երկու խմբերի (տեսակների).

1-ին տեսակի թող լինեն այն մասնակի միջակայքերը, որոնք ամբողջովին պարունակվում են $[a, x^* - \varepsilon]$ և $[x^* + \varepsilon, b]$ փակ հատվածներում, այսինքն՝ $[x_{k-1}, x_k] \subset [a, x^* - \varepsilon] \cup [x^* + \varepsilon, b]$:

2-րդ տեսակի թող լինեն մնացած մասնակի միջակայքերը, այսինքն որոնք հատվում են x^* խզման կետի ε -շրջակայքի հետ՝ $[x_{k-1}, x_k] \cap (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon) \neq \emptyset$:



Գծագիր 5.8. Տրոհման 1-ին և 2-րդ տեսակի մասնակի միջակայքեր, երբ առկա է մեկ խզման կետ

Գնահատենք $S - s = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k$ գումարը, որտեղ մասնակցում են բոլոր մասնակի միջակայքերը: Տա-
րանջատենք այդ գումարը երկու գումարի՝ $\sum = \sum_1 + \sum_2$. առաջինում մասնակցեն միայն 1-ին տեսակի, իսկ
երկրորդում՝ միայն 2-րդ տեսակի մասնակի միջակայքերը.

$$S - s = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = \sum_1 \omega_k \Delta x_k + \sum_2 \omega_k \Delta x_k : \quad (5-38)$$

Գնահատենք այս գումարները առանձին-առանձին:

Առաջին գումարի մեջ մասնակցում են միայն այն մասնակի միջակայքերը, որոնք պարունակվում են $[a, x^* - \varepsilon] \cup [x^* + \varepsilon, b]$ միավորման մեջ: Իսկ այդ միավորման վրա $f(x)$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է, քան (5-37) պայմանը: Թեորեմ 5.9-ի ապացույցի մեջ արդեն նշել էինք, որ ֆունկցիայի տարամոմենտները մասնակի միջակայքերում (1-ին տեսակի) փոքր են ε -ից՝ $\boxed{\omega_k < \varepsilon}$: Ներկայացնենք՝

$$\sum_1 \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \sum_1 \Delta x_k < \varepsilon(b - a) : \quad (5-39)$$

Երկրորդ գումարի մեջ մասնակցում են այն մասնակի միջակայքերը, որոնք հատվում են 2ε երկարությամբ $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ շրջակայքի հետ: Այդ միջակայքի ձախ և աջ կողմերում գտնվող ևս երկու (2-րդ տեսակի) մասնակի միջակայք կա, որոնց երկարությունների գումարը $\leq 2d < 2\delta < 2\varepsilon$:

Այսպիսով, 2-րդ տեսակի բոլոր մասնակի միջակայքերի երկարությունների գումարը փոքր է 4ε -ից: Ուստի, հաշվի առնելով նաև, որ $\omega_k \leq \omega$, գնահատում ենք՝

$$\sum_2 \omega_k \Delta x_k \leq \omega \sum_2 \Delta x_k < 4\varepsilon \omega : \quad (5-40)$$

Միացնելով բոլոր (5-38), (5-39), (5-40) պայմանները՝ վերջնական գնահատում ենք՝

$$S - s = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = \sum_1 + \sum_2 < \varepsilon(b - a) + 4\varepsilon \omega = \varepsilon[b - a + 4\omega] :$$

Քանի որ $\varepsilon > 0$ թիվը կամյական էր, ապա սա նշանակում է , որ (5-36) սահմանը րեղի ունի, և ուրեմն f ֆունկցիան ինտեգրելի է՝ $f \in \mathcal{R}[a, b]$:

Այն դեպքում, երբ f ֆունկցիան ունի վերջավոր թվով N հապ խզման կետեր, կարելի է յուրաքանչյուր խզման կետ ծածկել $\frac{\varepsilon}{N}$ -շրջակայքով և բերված ապացույցը կրկնել: $\square$

Դիպողություն 5.6. Թեորեմ 5.10-ից եզրակացնում ենք, որ ֆունկցիայի ինտեգրելիության համար բավարար է , որ ֆունկցիան միայն վերջավոր թվով խզման կետեր ունենա հատվածում: Կարելի է ասել, որ վերջավոր թվով խզման կետերի առկայությունը չի ազդում ինտեգրելիության վրա և անգամ ինտեգրալի արժեքի վրա:

Ներկայացում 5.3. Վերջավոր թվով կետերում ինտեգրելի ֆունկցիայի արժեքների փոփոխումը որևէ կերպ չի ազդում ինտեգրալի գոյության, ոչ էլ այդ ինտեգրալի մեծության վրա:

Ապացույց. Կարճ հիմնավորենք պնդումը: Դիցուք $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$: Սահմանենք նոր ֆունկցիա, որը համընկնում է f -ի հետ ամենուրեք $[a, b]$ հատվածում՝ բացի վերջավոր թվով կետերից.

$$g(x) \neq f(x), \quad [a, b]\text{-ի վերջավոր թվով կետերում},$$

$$g(x) = f(x), \quad [a, b]\text{-ի մնացած կետերում}:$$

Նոր $g(x)$ ֆունկցիան կարող է ձեռք բերել միայն վերջավոր թվով նոր խզման կետեր, ենթադրենք N հապ: Այդ նոր խզման կետերից յուրաքանչյուրը կարելի է ծածկել $\frac{\varepsilon}{N}$ -շրջակայքով և գնահատել $S - s = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k$ մեծությունը և ապացուցել, որ այն անվերջ փոքր է այնպես, ինչպես արված է Թեորեմ 2-ի ապացույցի մեջ:

Արդյունքում կստացվի, որ $g(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը չի փոխվում՝ $g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$:

$$\text{Ավելին, չի փոխվի նաև ինտեգրալի արժեքը՝ } \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx :$$

Սա բխում է այն դիտարկումից, որ f և g ֆունկցիաների $\sigma_f(x_k, \xi_k)$ և $\sigma_g(x_k, \xi_k)$ ինտեգրալային գումարներում ξ_k միջանկյալ կետերը միշտ կարելի է ընտրել այնպես, որ խզման կետերի հետ չհամընկնեն, ինչից կստանանք $\sigma_f(x_k, \xi_k) = \sigma_g(x_k, \xi_k)$ և ինտեգրալների հավասարությունը: $\square$

Դիպողություն 5.7. Թեորեմ 5.10-ի ապացույցի ուշադիր զննումը ցույց է տալիս, որ վերջավոր թվով խզումներ ունեցող ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը հաջողվում է ապացուցել ոչ այնքան խզման կետերի վերջավոր թվով լինելու հանգամանքից, որքան շնորհիվ այն փաստի, որ կարողանում ենք խզման կետերը ծածկել կամայականորեն փոքր շրջակայքերով (որոնց երկարությունների գումարը $< \varepsilon$): Սա թույլ է տալիս ենթադրելու, որ ինտեգրելի ֆունկցիան կարող է ունենալ անգամ անվերջ թվով խզման կետեր:

Թեորեմ 5.11. Տրված է $[a, b]$ հատվածում սահմանափակ $f(x)$ ֆունկցիան: Դիցուք կամայական $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունեն վերջավոր թվով $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = \overline{1, N}$ ենթամիջակայքեր, որոնք ծածկում են f -ի բոլոր խզման կետերը և $\sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \varepsilon$, այսինքն՝ այդ ենթամիջակայքերը կարելի է ընտրել՝ որքան ցանկանանք նեղ: Այդ դեպքում f -ն ինտեգրելի է $[a, b]$ հատվածում՝ $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$:

Ապացույցը չենք ներկայացնի, որովհետև այն հիմնականում կրկնում է Թեորեմ 5.10-ի ապացույցը:

Բերենք ինտեգրելի ֆունկցիայի օրինակ, որն ունի անվերջ թվով խզման կետեր:

Օրինակ 5.13. Արդյո՞ք ինտեգրելի է հետևյալ ֆունկցիան՝ $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \operatorname{sgn} \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 : \end{cases}$

Նախ գրենք ֆունկցիայի բոլոր խզման կետերը: Խզման կետերը բաժանվում են երկու խմբի.

$x_k = \frac{1}{\pi k}$ ($k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots$)՝ 1-ին կարգի խզման կետեր են և անվերջ թվով (հաշվելի):

$x_0 = 0$ ՝ 2-րդ կարգի միակ խզման կետն է:

Խզման կետերի կարգը մեզ չի հետաքրքրում, մենք շատ կուզենայինք պարզել՝ արդյո՞ք հնարավոր է բոլոր խզման կետերը ծածկել՝ որքան կամենանք փոքր միջակայքերով (որոնց երկարությունների գումարը $< \varepsilon$): Ֆիքսենք կամայական (փոքր) $\varepsilon > 0$: Սկզբում ծածկենք $x_0 = 0$ խզման կետը $\left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ միջակայքով: Նկատենք, որ $x_k = \frac{1}{\pi k} \rightarrow +0$ ($k \rightarrow \infty$) խզման կետերը կուտակվում են $x_0 = 0$ կետի շուրջը:

Ծածկելով $\left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ միջակայքով $x_0 = 0$ կետը՝ մենք նաև ծածկեցինք անվերջ թվով x_k խզման կետեր, իսկ $\left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ միջակայքից դուրս մնացին միայն վերջավոր թվով x_k խզման կետեր, ենթադրենք N հատ:

Նրանցից յուրաքանչյուրը ծածկենք $\frac{\varepsilon}{6N}$ -շրջակայքով: Սրանով բոլոր խզման կետերը ծածկված են:

Այժմ գրենք այդ ծածկող միջակայքերի երկարությունների գումարը, դժվար չէ այն գնահատել

$$\frac{\varepsilon}{2} + N \frac{2 \cdot \varepsilon}{6N} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon :$$

Նամանայն Թեորեմ 5.11-ի՝ f -ն ինտեգրելի է $[0, 1]$ հատվածում՝ $f(x) \in \mathcal{R}[0, 1]$:

Դիտողություն 5.8. Նկատենք, որ թեև դիտարկված f ինտեգրելի ֆունկցիայի խզման կետերը անվերջ թվով էին, բայց կազմում են հաշվելի բազմություն (ոչ ավելին):

Թեորեմ 5.12. Եթե $[a, b]$ հատվածում f ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա ինտեգրելի է՝ $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$:

Ապացույց. Առանց խախտելու ընդհանրությունը՝ համարենք, որ $f \not\equiv \text{const}$, $f(x) \nearrow$ ֆունկցիան աճող է և հասարարուն չէ: Նեշտ է նկատել, որ $f(a) < f(b)$, և ուրեմն ֆունկցիայի փափանույնը $[a, b]$ հատվածում զրո չէ՝ $\omega = f(b) - f(a) > 0$:

Կամայական $\forall \varepsilon > 0$ համար վերցնենք $[a, b]$ հատվածի այնքան մանր տրոհում, որի տրամագիծը $d < \frac{\varepsilon}{\omega}$:

Քանի որ f ֆունկցիան աճող է, յուրաքանչյուր մասնակի միջակայքի համար կարելի է գրել

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_{k-1}), \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_k) = m_{k+1},$$

$$\omega_k = M_k - m_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) \geq 0 :$$

Այժմ գնահատենք Դարբուի գումարների տարբերությունը և կիրառենք ինտեգրելիության հիմնական թեորեմը.

$$S - s = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k \leq d \sum_{k=1}^n \omega_k = d \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = d \cdot [f(b) - f(a)] = d \cdot \omega < \varepsilon,$$

ինչը նշանակում է, որ (5-36) սահմանը տեղի ունի, և ուրեմն f ֆունկցիան ինտեգրելի է՝ $f \in \mathcal{R}[a, b]$: $\square$

Դիպողություն 5.9. *Նշենք, որ մոնոտոն ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը վերջավոր կամ հաշվելի է (այսինքն՝ ոչ ավելի, քան հաշվելի): Միայն այդ փաստը արդեն ապացուցում է մոնոտոն ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը հաստատում:*

Առանց ապացույցի ձևակերպենք ինտեգրելիությունն ապահովող առավել ուժեղ մի արդյունք:

Թեորեմ 5.13. *Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $[a, b]$ հատվածում:*

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան հաշվելի թվով խզման կետեր ունի (այսինքն՝ խզման կետերի բազմությունը հաշվելի է), ապա f -ն ինտեգրելի է $[a, b]$ հատվածում. $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$:

Դարձյալ առանց ապացույցի և առանց անվերջ գումարներին վերաբերող ճշգրիտ սահմանումների ձևակերպենք ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար մի պայման, որով կստանանք Թեորեմներ 5.9-5.13-ի համեմատ ամենաուժեղ արդյունքը:

Թեորեմ 5.14. *(Լեբեգի թեորեմ) Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $[a, b]$ հատվածում:*

Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի լինի $[a, b]$ հատվածում՝ $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենան վերջավոր կամ հաշվելի թվով $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ ենթամիջակայքեր, որոնք կծածկեն f -ի բոլոր խզման կետերը և նրանց երկարությունների գումարը փոքր լինի ε -ից, $\sum_k (b_k - a_k) < \varepsilon$:

Դիպողություն 5.10. *Լեբեգի թեորեմի մեջ նկարագրված խզման կետերի բազմության հատկությունն ունի հարույկ անվանում. ասում են, որ դիտարկվող բազմությունն ունի զրո չափ (կամ երբեմն՝ զրո երկարություն): Այդ տերմինով Լեբեգի թեորեմի ձևակերպումն առավել պարզ տեսք է ընդունում:*

Թեորեմ 5.15. *(Լեբեգի թեորեմ) Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $[a, b]$ հատվածում:*

$f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a, b]$ հատվածում՝ $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, այն և միայն այն դեպքում, երբ f -ի խզման կետերի բազմությունն $[a, b]$ հատվածում զրո չափ ունի:

5.16 Որոշյալ ինտեգրալի՝ հավասարություններով արտահայտվող հատկությունները

Սկսենք որոշյալ ինտեգրալի սահմաններին վերաբերող մի դիտարկումից:

Մինչ այժմ, դիտարկելով $\int_a^b f(x) dx$ ինտեգրալը, միշտ համարել ենք, որ $a < b$: Այժմ կվերացնենք այդ սահմանափակող պայմանը:

Ենթադրենք $a > b$: Սահմանենք մեզ համար անսովոր $\int_a^b f(x) dx$ ինտեգրալը:

Տրոհենք $[a, b]$ (իրականում՝ $[b, a]$) հատվածը և կազմենք ինտեգրալային գումար.

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_{n-1} > x_n = b, \quad x_{k-1} \geq \xi_k \geq x_k \quad (k = \overline{1, n}) \quad \text{միջանկյալ կետեր,}$$

$$\sigma \equiv \sigma(x_k, \xi_k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} < 0:$$

Նշանակենք փրոհման փրամագիծը՝ $d = \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta x_k|$, և կարարենք սահմանային անցում ինտեգրալային գումարում.

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{d \rightarrow 0} \sigma:$$

Իսկապես, $\int_a^b f(x) dx$ ինտեգրալը ($a > b$) սահմանելիս նոր գաղափարներ չկիրառեցինք, միակ նոր երևույթը՝ $\Delta x_k < 0$ փաստն էր: Տամեմաբերվող նոր սահմանված $\int_a^b f(x) dx$ ինտեգրալը ($a > b$) մեզ ծանոթ սովորական $\int_b^a f(x) dx$ ինտեգրալի հետ՝ նկատում ենք, որ դրանք տարբերվում են միայն նշանով: Կարճ ասած՝ ապացուցված է հետևյալ հատկությունը:

Նախկինություն 5.6. *Ինտեգրելի $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ֆունկցիայի և ցանկացած $a, b \in \mathbb{R}$ թվերի համար*

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx: \quad (5-41)$$

Այն բացառիկ դեպքում, երբ $a = b$, որոշյալ ինտեգրալի բերված սահմանումից կամ էլ հենց (5-41) հատկությունից հետևում է, որ

$$\int_a^a f(x) dx = 0: \quad (5-42)$$

Նախկինություն 5.7. *Երկու ինտեգրելի ֆունկցիաների գումարը (տարբերությունը) նույնպես ինտեգրելի է.*

$$f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b] \implies f(x) \pm g(x) \in \mathcal{R}[a, b],$$

և, բացի այդ, ճիշտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx: \quad (5-43)$$

Ապացույց. Ցանկացած փրոհման համար և միջանկյալ $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ցանկացած կետերի համար կազմենք ինտեգրալային գումարներ և ներկայացնենք.

$$\sum_{k=1}^n \left[f(\xi_k) \pm g(\xi_k) \right] \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \pm \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k \quad (5-44)$$

կամ

$$\sigma_{f \pm g}(x_k, \xi_k) = \sigma_f(x_k, \xi_k) \pm \sigma_g(x_k, \xi_k) : \quad (5-45)$$

Տրոհումը մանրացնենք՝ ձգտեցնելով փրամագիծը զրոյի՝ $d \rightarrow 0$: Նամաձայն f -ի և g -ի փրված ինտեգրելիության՝

$$\exists \lim_{d \rightarrow 0} \sigma_f(x_k, \xi_k) = \int_a^b f(x) dx, \quad \exists \lim_{d \rightarrow 0} \sigma_g(x_k, \xi_k) = \int_a^b g(x) dx,$$

և ուրեմն (5-44)-(5-45)-ի ձախ կողմը նույնպես սահման ունի.

$$\exists \lim_{d \rightarrow 0} \sigma_{f \pm g}(x_k, \xi_k) = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma_f(x_k, \xi_k) \pm \lim_{d \rightarrow 0} \sigma_g(x_k, \xi_k), \quad (5-46)$$

և $f(x) \pm g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$: Ստացված (5-46) հավասարությունը համընկնում է (5-43)-ի հետ: $\square$

Նաբկություն 5.8. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է, ապա ցանկացած $C \in \mathbb{R}$ հաստատունի համար $C f(x)$ ֆունկցիան նույնպես ինտեգրելի է.

$$f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \implies C f(x) \in \mathcal{R}[a, b], \quad \forall C \in \mathbb{R},$$

և բացի այդ, ճիշտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$\boxed{\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx} : \quad (5-47)$$

Ապացույց. Ցանկացած փրոհման համար և միջանկյալ $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ցանկացած կետերի համար կազմենք ինտեգրալային գումարներ և ներկայացնենք.

$$\sum_{k=1}^n C f(\xi_k) \Delta x_k = C \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k : \quad (5-48)$$

Ձգտեցնելով $d \rightarrow 0$ ՝ կստանանք (5-47) բանաձևը: Մանրամասները՝ ինչպես նախորդ հարկության դեպքում: $\square$

Նաբկություններ 5.7 և 5.8-ը հաստատում են որոշյալ ինտեգրալի **գծայնության հարկությունը**: Կարելի է Նաբկություններ 5.7 և 5.8-ի պնդումները միավորել և գրել մեկ միասնական բանաձև: Մենք հիշում ենք, որ նույն հարկություններով օժտված էր անորոշ ինտեգրալը:

Ներկանք 5.4. Երկու ինտեգրելի ֆունկցիաների ցանկացած գծային զուգակցություն (կոմբինացիա) նույնպես ինտեգրելի է.

$$f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b], \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \implies \quad \alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{R}[a, b],$$

և բացի այդ, ճիշտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$\boxed{\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx} : \quad (5-49)$$

Այն հանգամանքը, որ այսպեղ մասնակցում են երկու ֆունկցիաներ, էական չէ : Պարզ է, որ (5-49) գծայնության հատկությունը փոքի ունի ցանկացած վերջավոր թվով ֆունկցիաների համար:

Ներկանք 5.5. Վերջավոր թվով ինտեգրելի ֆունկցիաների ցանկացած գծային զուգակցություն (կոմբինացիա) նույնպես ինտեգրելի է.

$$f_k(x) \in \mathcal{R}[a, b], \quad \forall \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad \implies \quad \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k(x) \in \mathcal{R}[a, b],$$

և բացի այդ, ճիշտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$\boxed{\int_a^b \left[\sum_{k=1}^N \alpha_k f_k(x) \right] dx = \sum_{k=1}^N \alpha_k \int_a^b f_k(x) dx} : \quad (5-50)$$

Նախկություն 5.9. ա) Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է, ապա դրա (մոդուլի) ցանկացած դրական աստիճան նույնպես ինտեգրելի է,

$$f(x) \in \mathcal{R}[a, b], \quad \forall p > 0, \quad \implies \quad |f(x)|^p \in \mathcal{R}[a, b] :$$

բ) Երկու ինտեգրելի ֆունկցիաների արտադրյալը նույնպես ինտեգրելի է.

$$f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b] \quad \implies \quad f(x) \cdot g(x) \in \mathcal{R}[a, b] :$$

Ապացույց. ա) Սահմանափակվենք միայն բառակուսու $p = 2$ դեպքի ապացույցով:

Մեզ անհրաժեշտ կլինի ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը (հիմնական թեորեմից)՝ արտահայտված ֆունկցիայի փափանդումների միջոցով.

$$\left(f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \right) \iff \left(\lim_{d \rightarrow 0} (S - s) = 0 \right) \iff \left(\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k = 0 \right), \quad (5-51)$$

որտեղ

$$\boxed{\omega_k(f) = \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x') - f(x'')|} \quad f(x) \text{ ֆունկցիայի փափանդումն է } [x_{k-1}, x_k] \text{ մասնակի միջակայքում:}$$

Ըստ պայմանի՝ $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, և (5-51) սահմանը րեղի ունի $f(x)$ ֆունկցիայի համար: Մեր նպատակն է նույն պայմանը ստանալ $f^2(x)$ ֆունկցիայի համար:

Որպես ինտեգրելի ֆունկցիա՝ f -ը սահմանափակ է, այսինքն՝

$$\exists K = \text{const} > 0 \quad \text{այնպիսին, որ} \quad |f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b]:$$

Վերցնենք կամայական $\forall x', x'' \in [a, b]$ կետեր և գնահատենք եռանկյան անհավասարության միջոցով.

$$|f^2(x') - f^2(x'')| = |f(x') + f(x'')| |f(x') - f(x'')| \leq 2K |f(x') - f(x'')|:$$

Այսպես լից կարելի է անցնել քառանկյուններին բոլոր մասնակի միջակայքերում՝

$$\omega_k(f^2) \leq 2K \omega_k(f), \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(f^2) \Delta x_k \leq 2K \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k \longrightarrow 0, \quad \text{երբ} \quad d \rightarrow 0:$$

Փաստորեն կիրառում ենք ուսրիկանների կանոնը և եզրակացնում՝

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k(f^2) \Delta x_k = 0,$$

հետևաբար, ըստ (5-51)-ի՝ f^2 ֆունկցիայի համար $f^2(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, ինչը և պահանջվում էր:

բ) Երկու ինտեգրելի ֆունկցիաների արտադրյալի ինտեգրելիությունը անմիջապես հետևում է հետևյալ նույնությունից՝

$$4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2,$$

ինտեգրելիության գծայնությունից և **ա)** պնդումից:

□

Ներկայա երկու հարկությունների ապացույցները բաց թողնենք: Ներաբրբրվողները կարող են գտնել այդ ապացույցները գրականության ցանկի դասագրքերում:

Նախկինություն 5.10. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a, b]$ հատվածում, ապա f -ն ինտեգրելի է նաև ցանկացած ենթահատվածում.

$$f(x) \in \mathcal{R}[a, b], \quad \forall [c, d] \subset [a, b] \quad \implies \quad f(x) \in \mathcal{R}[c, d]:$$

Նախկինություն 5.11. (Որոշյալ ինտեգրալի ադիտիվությունը)

$$f(x) \in \mathcal{R}[a, c], \quad f(x) \in \mathcal{R}[c, b] \quad \implies \quad f(x) \in \mathcal{R}[a, b],$$

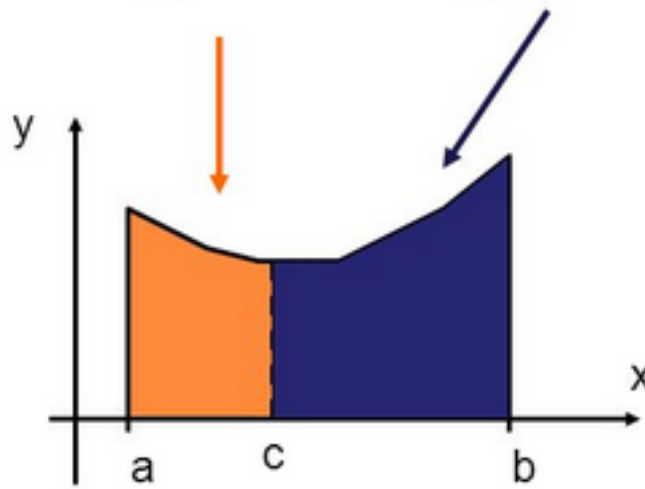
և բացի այդ, ձևից է հետևյալ բանաձևը՝

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx}: \quad (5-52)$$

Վերջին (5-52) բանաձևի համար $a < c < b$ դեպքն ամենաբովանդակալիցն է, թեև (5-52)-ը ճիշտ է ցանկացած $c \in \mathbb{R}$ համար:

Երբ $a < c < b$, (5-52) բանաձևն ունի հստակ երկրաչափական հիմնավորում, ինչը գրեթե ակնհայտ է դարձնում (5-52) բանաձևը, քանի որ որոշյալ ինտեգրալն արտահայտում է ֆունկցիայի գրաֆիկի և x առանցքի միջև ընկած կորագիծ սեղանի մակերեսը.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



Գծագիր 5.9. Որոշյալ ինտեգրալի ադիտիվության պատկերումը

5.17 Որոշյալ ինտեգրալի՝ անհավասարություններով արտահայտվող հատկությունները

Առաջին հատկությունը ցույց է տալիս, որ ինտեգրելիս ֆունկցիայի նշանը պահպանվում է :

Հատկություն 5.12. Ոչ բացասական ինտեգրելի ֆունկցիայի ինտեգրալը ոչ բացասական է.

$$f(x) \in \mathcal{R}[a, b], \quad a < b, \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad \implies \boxed{\int_a^b f(x) dx \geq 0} : \quad (5-53)$$

Ապացույց. Ցանկացած քրոհման համար և միջանկյալ $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ցանկացած կետերի համար կազմենք ինտեգրալային գումարներ և գնահատենք.

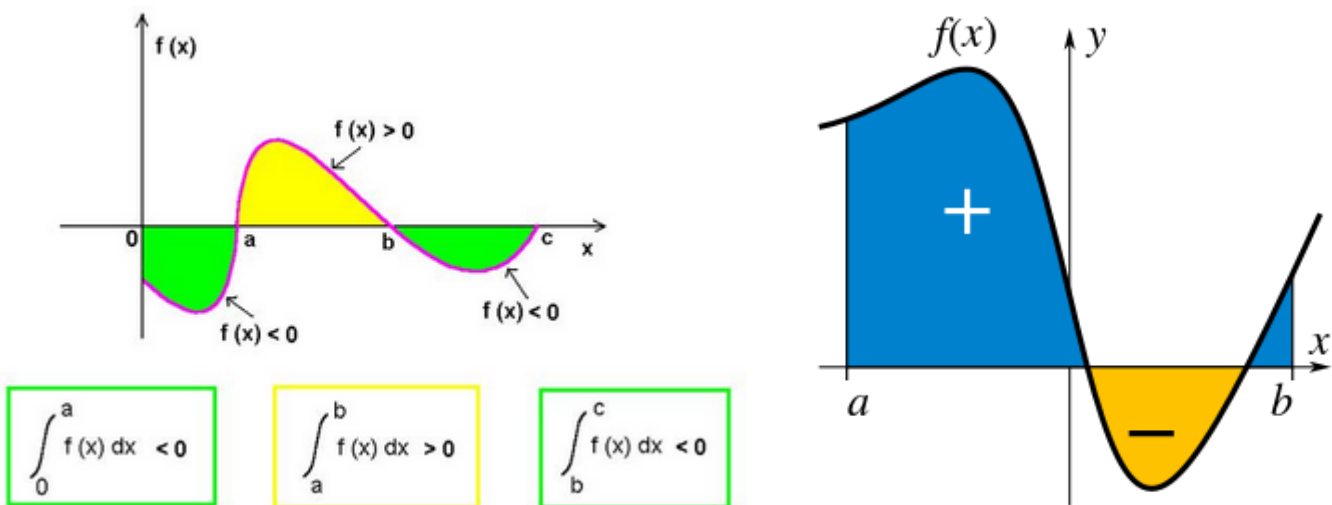
$$\sigma = \sigma_f(x_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0, \quad \text{որտեղ} \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0 : \quad (5-54)$$

Անցնենք սահմանի (5-54), $\sigma \geq 0$ անհավասարության մեջ, երբ $d \rightarrow 0$.

$$\exists \lim_{d \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

քանի որ սահմանային անցում կատարելիս հիշում ենք, որ անհավասարության նշանը պահպանվում է : $\square$

Դիպողություն 5.11. Մի փոքր կուպրացնելով՝ կարելի է պնդել, որ դրական ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը դրական է, և այդ դրական արժեքը հավասար է ֆունկցիայի գրաֆիկի և x առանցքի միջև ընկած կորագիծ սեղանի մակերեսին, ինչը մենք արդեն քննարկել էինք: Նմանապես կարելի է պնդել, որ բացասական ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը բացասական է : Այս պնդումների երկրաչափական իմաստը տեսանելի է դառնում **գծագիր 5.10**-ի գրաֆիկներով.



Գծագիր 5.10. Դրական (կամ բացասական) ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը որպես մակերես

Նախկինություն 5.13. (անհավասարության ինտեգրում)

$$f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b], \quad a < b, \quad \boxed{g(x) \leq f(x)} \quad \forall x \in [a, b], \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx} : \quad (5-55)$$

Ապացույց. Ինտեգրելի ֆունկցիաների տարբերությունը ինտեգրելի է՝ $f(x) - g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$:

Բացի այդ, $f(x) - g(x) \geq 0, x \in [a, b]$: Նամաձայն նախորդ հատկության՝

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx \geq 0,$$

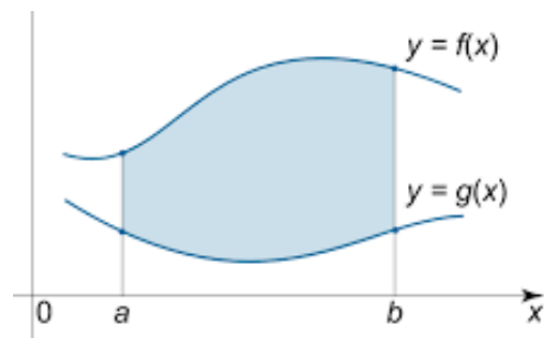
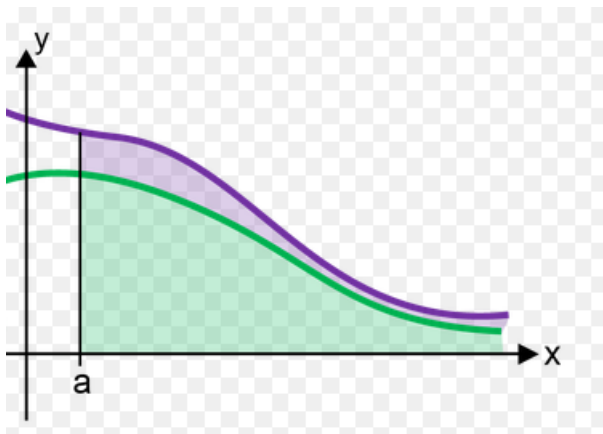
$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0,$$

և սա համընկնում է (5-55) անհավասարության հետ:

□

Դիտողություն 5.12. Նախկինություն 5.13-ը կարելի է մեկնաբանել այնպես, որ անհավասարությունները կարելի է ինտեգրել, այսինքն՝ վերցնել ինտեգրալի նշանի տակ, և արդյունքում անհավասարության նշանը կպահպանվի:

Դարձյալ մի փոքր կոպտացնելով՝ կարելի է պնդել, որ ավելի մեծ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը ավելի մեծ է, և համապատասխան կորագիծ սեղանների մակերեսները կարելի է համեմատել սրտրև բերված գրաֆիկներում:

**Գծագիր 5.11.** Երկու ֆունկցիաների որոշյալ ինտեգրալների համեմատումը

Նախկինություններ 5.12 և 5.13-ի վերջնական (5-53), (5-55) անհավասարություններում հավասարության նշանը պարպաղիր է և հանել չի կարելի: Նախորդ հատկությունը պարասխանում է, հետևյալ հարցին. ի՞նչ լրացուցիչ պայմաններ ավելացնենք Նախկինություն 5.12-ում, որպեսզի ֆունկցիայի ինտեգրալը դառնա խիստ դրական: Նման պայմաններ կարելի է նաև ավելացնել Նախկինություն 5.13-ում, որի արդյունքում (5-55) անհավասարությունը կդառնա խիստ:

Նաբերություն 5.14. Եթե n բացասական ինտեգրելի ֆունկցիան գտնե մեկ անընդհատության կետում η իրական է, ապա η իրական է նաև նրա ինտեգրալը, այսինքն՝

$$\begin{aligned} f(x) &\in \mathcal{R}[a, b], \quad a < b, \\ f(x) &\geq 0 \quad \forall x \in [a, b], \\ \exists x_0 &\in [a, b] \quad \text{s.t.} \quad f(x_0) > 0, \end{aligned} \quad \implies \quad \boxed{\int_a^b f(x) dx > 0} : \quad (5-56)$$

f -ն անընդհատ է x_0 կետում

Ապացույց. Նշանակենք $f(x_0) = \beta > 0$: Նշանի պահպանման հատկության և x_0 կետում անընդհատության շնորհիվ՝ ստանում ենք՝

$$\exists \delta > 0, \quad \exists (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b] \quad \text{ընտանք} \quad \text{s.t.} \quad \boxed{f(x) \geq \frac{\beta}{2}} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) :$$

Գնահատենք ներքևից (5-56) ինտեգրալը՝ օգտվելով ինտեգրալի ադիտիվությունից, Նաբերություններ 5.12-5.13-ից և հաստատուն ֆունկցիայի ինտեգրալի հաշվարկից.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\beta}{2} dx = \frac{\beta}{2} \cdot 2\delta = \beta \delta > 0,$$

ինչը և պահանջվում էր: □

Նաբերություն 5.15. (ինտեգրալի գնահատումը մոդուլով)

Եթե $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $a < b$, ապա $|f(x)| \in \mathcal{R}[a, b]$, և ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx} : \quad (5-57)$$

Ապացույց. Առաջին հերթին ցույց տանք, որ $|f(x)|$ ֆունկցիան նույնպես ինտեգրելի է :

Ճիշտ է, հավասարություններով արտահայտվող հատկությունների մեջ մենք ունենք ավելի ուժեղ մի պնդում՝ $|f(x)|^p \in \mathcal{R}[a, b] \quad \forall p > 0$, որն ամբողջությամբ չէինք ապացուցել:

Այժմ $|f|$ -ի ինտեգրելիությունն ապացուցելու համար օգտվենք Նիմանի Թեորեմից (ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանից).

$$\left(f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \right) \iff \left(\lim_{d \rightarrow 0} (S - s) = 0 \right) \iff \left(\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k = 0 \right), \quad (5-58)$$

որպես

$$\boxed{\omega_k(f) = \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x') - f(x'')|} \quad f(x) \text{ ֆունկցիայի տարանջատում է } [x_{k-1}, x_k] \text{ մասնակի միջակայքում:}$$

Ըստ պայմանի՝ $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, և ուրեմն (5-58) սահմանը տեղի ունի $f(x)$ ֆունկցիայի համար:

Դիտարկենք $|f|$ ֆունկցիայի քառանկյունները

$$\omega_k(|f|) = \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} ||f(x')| - |f(x'')||, \quad k = \overline{1, n},$$

բոլոր $[x_{k-1}, x_k]$ մասնակի միջակայքերում: Եռանկյան անհավասարության միջոցով հեշտ է համեմատել՝

$$||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')| \implies \omega_k(|f|) \leq \omega_k(f), \quad 1 \leq k \leq n :$$

Այսպես կարելի է գումարել բոլոր մասնակի միջակայքերով, այսինքն՝ բոլոր k -երով.

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(|f|) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k \longrightarrow 0, \quad \text{երբ } d \rightarrow 0 :$$

Փաստորեն կիրառում ենք ոստիկանների կանոնը և եզրակացնում՝

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k(|f|) \Delta x_k = 0,$$

հետևաբար՝ ըստ (5-58)-ի $|f|$ ֆունկցիայի համար $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$, ինչը և պահանջվում էր:

Իսկ (5-57) անհավասարությունն ապացուցելու համար բավական է որևէ պրոհիման և միջանկյալ կետերի համար գրել և համեմատել f և $|f|$ ֆունկցիաների ինտեգրալային գումարները.

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k, \quad (5-59)$$

ինչը ճիշտ է շնորհիվ եռանկյան անհավասարության: Մնում է (5-59)-ում մանրացնել պրոհիմնը՝ ձգտելով պրամագիծը գրոյի՝ $d \rightarrow 0$, որի արդյունքում (5-59)-ի ձախ և աջ կողմերը կձգտեն համապատասխանաբար (5-57)-ի ձախ և աջ կողմերին, ինչը կավարտի ապացույցը: $\square$

Որպեսզի Նաբկություն 5.15-ը և (5-57) անհավասարությունը պարկերացնենք երկրաչափորեն, վերցնենք որևէ նշանափոխ ֆունկցիայի գրաֆիկ, Կեն **գծագիր 5.12**:

Ըստ **գծագիր 5.12**-ի երկրորդ գրաֆիկի՝ նշանափոխ $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը համաձայն մակերեսների նշանակումների, հավասար է

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3, \quad A_1, A_2, A_3 > 0 :$$

Մինչդեռ, $|f(x)|$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը հավասար է

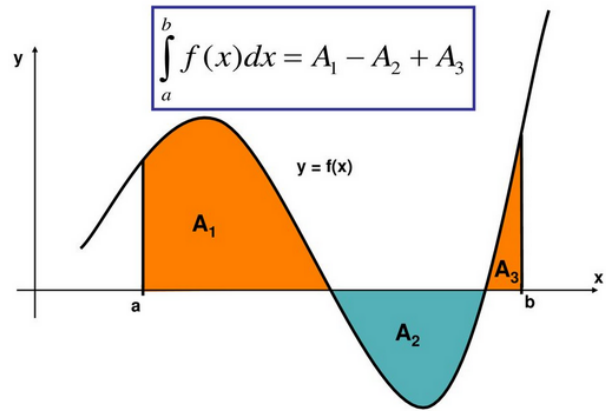
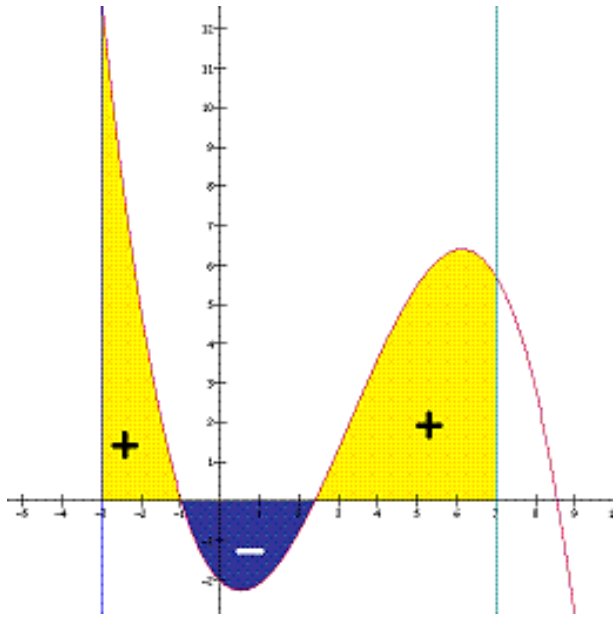
$$\int_a^b |f(x)| dx = A_1 + A_2 + A_3 :$$

Նեշտ է համեմատել՝

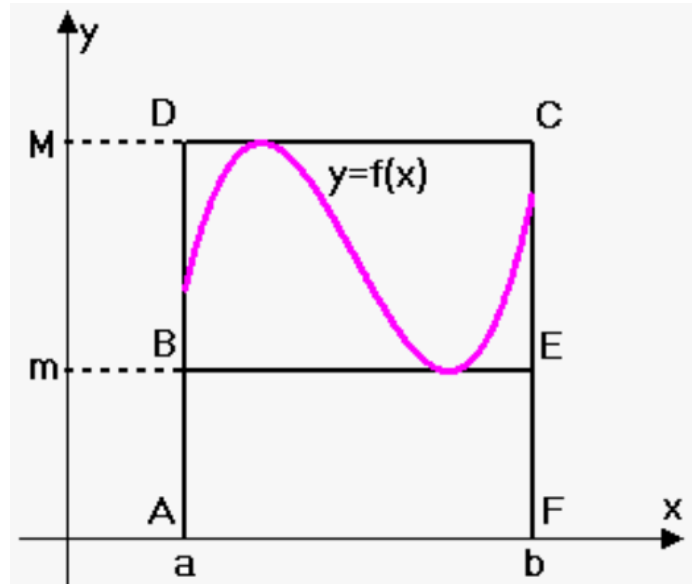
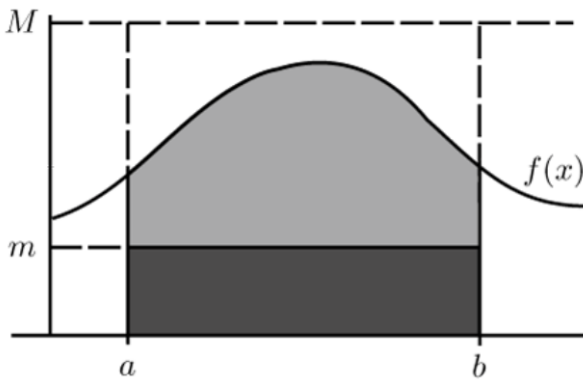
$$0 < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b |f(x)| dx,$$

ինչը հաստատում է Նաբկություն 5.15-ը (իհարկե այս մասնավոր օրինակի համար):

Վերջում ձևակերպենք Նաբկություն 5.12 և 5.13-ի հարույկ մի դեպք:



Պատկեր 5.12. Նշանափոխ ֆունկցիայի և նրա մոդուլի որոշյալ ինտեգրալների պարկերումը



Պատկեր 5.13. Որոշյալ ինտեգրալի վերին և ստորին գնահատականներ

Նախադրյալ 5.16. (Ինտեգրալի գնահատումը վերին և ստորին եզրերով)

Եթե $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $a < b$, և $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a, b]$, ապա ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները՝

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) : \quad (5-60)$$

Ապացույց. Անմիջապես հետևում է Նախադրյալ 5.13-ից: Ընդամենը պետք է ինտեգրել $m \leq f(x) \leq M$ անհավասարությունը.

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

ինչը և պահանջվում էր: Նույն արդյունքը կարելի է արագ ստանալ, եթե գրեինք ֆունկցիաների ինտեգրալային գումարները և անցնեինք սահմանի, երբ $d \rightarrow 0$: $\square$

Մասնավորապես, M և m եզրերը կարելի է վերցնել ֆունկցիայի սուպրեմում և ինֆիմում՝

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x),$$

իսկ ավելի մասնավոր անընդհար $f \in C[a, b]$ ֆունկցիայի համար՝

$$M = \max_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = \min_{x \in [a, b]} f(x) :$$

(5-60) անհավասարությունների գրաֆիկական պատկերումը տես **գծագիր 5.13**-ում:

5.18 Միջին արժեքի թեորեմներ

Թեորեմ 5.16. *Դիցուք $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ինտեգրելի ֆունկցիան սահմանափակված է հետևյալ վերին և ստորին եզրերով՝ $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a, b]$:*

Այդ դեպքում կարելի է գտնել ինչ-որ (միջին, միջանկյալ) $\exists \mu \in [m, M]$ արժեք այնպիսին, որ

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \mu (b-a)} : \quad (5-61)$$

Ապացույց. Առանց խախտելու ընդհանրությունը՝ կարելի է համարել, որ $a < b$:

Նախկին 5.16-ում ապացուցված (5-60) անհավասարությունները բաժանենք $(b-a)$ -ի.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad \implies \quad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M :$$

Նշանակենք

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

և նկատենք, որ $m \leq \mu \leq M$: Վերջին հավասարությունը համընկնում է (5-61)-ի հետ:

Նշենք, որ $a > b$ դեպքը հիմնավորելու համար բավական է գրել (5-61) բանաձևը $\int_b^a f(x) dx$ ինտեգրալի համար և փոխել ինտեգրման սահմանները: $\square$

Ներկանք 5.6. *Ցանկացած $f \in C[a, b]$ անընդհար ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել ինչ-որ միջանկյալ $\exists \xi \in [a, b]$ կերպ այնպիսին, որ*

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b-a)} : \quad (5-62)$$

Ապացույց. Ըստ Վայերշտրասի 2-րդ թեորեմի՝ փակ հարվածում անընդհար ֆունկցիան հասնում է իր սուպրեմումին և ինֆիմումին, որոնք վերածվում են համապատասխանաբար մաքսիմումի և մինիմումի.

$$\exists m \stackrel{\text{def}}{=} \min_{a \leq x \leq b} f(x), \quad M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{a \leq x \leq b} f(x), \quad m \leq f(x) \leq M :$$

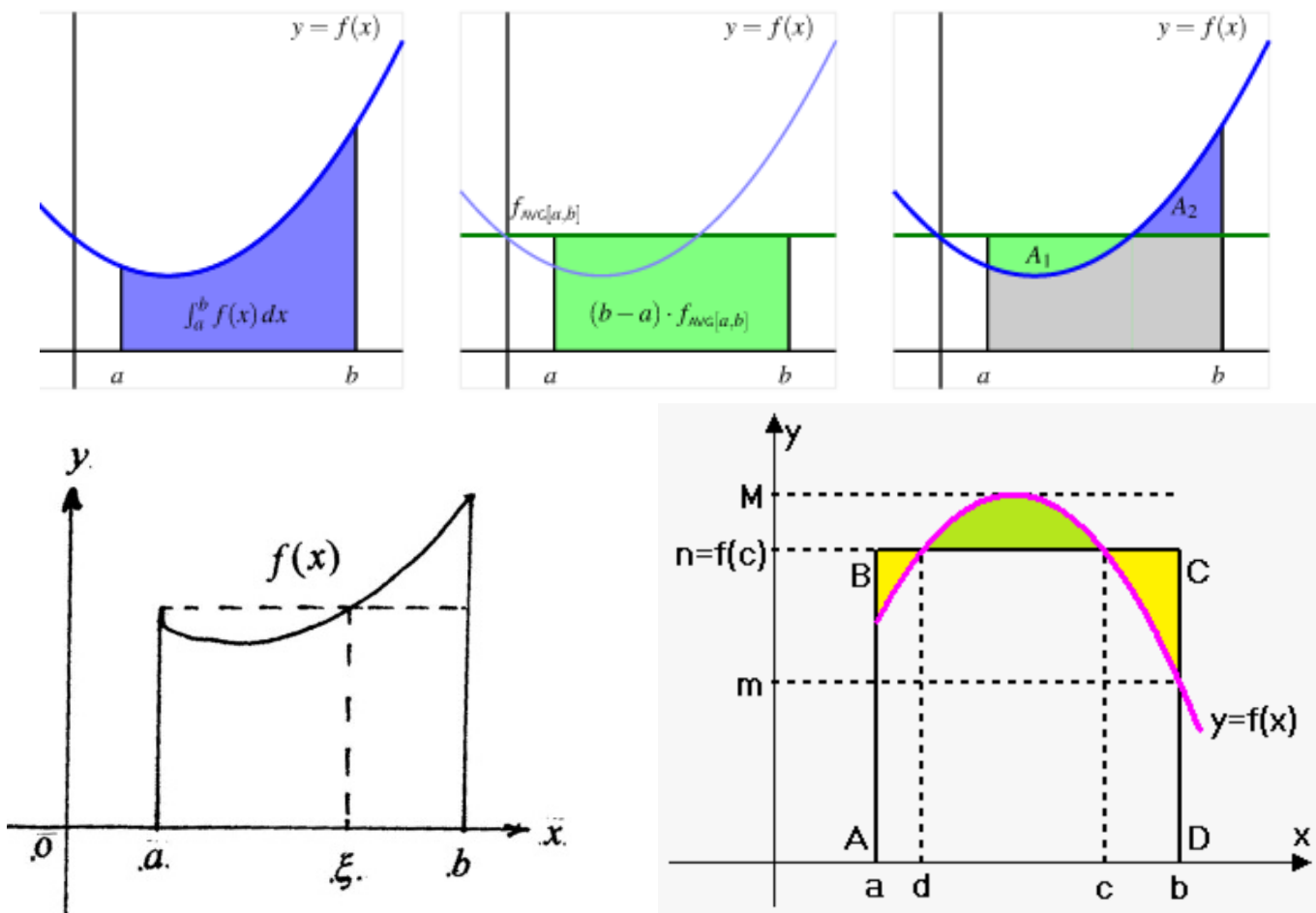
Ինչպես գիտենք, ցանկացած անընդհար ֆունկցիա հարվածում նաև ինտեգրելի է՝ $f \in C[a, b] \subset \mathcal{R}[a, b]$, և ուրեմն f -ի համար կարող ենք գրել միջին արժեքի (5-61) բանաձևը.

$$\exists \mu \in [m, M] \quad \text{s.t.} \quad \int_a^b f(x) dx = \mu (b - a) : \quad (5-63)$$

Մյուս կողմից, ըստ Բոլցանո-Կոշու թեորեմի, անընդհար ֆունկցիան ընդունում է իր բոլոր միջանկյալ արժեքները,

այդ թվում և μ -ն, այսինքն՝ $\boxed{\exists \xi \in [a, b] \quad \text{s.t.} \quad f(\xi) = \mu} :$

Տեղադրենք վերջինը (5-63)-ի մեջ և կստանանք պահանջվող (5-62) բանաձևը: □



Գծագիր 5.14. Միջին արժեքի թեորեմի պատկերումը

Դիպողություն 5.13. *Միջին արժեքի (5-61)-(5-62) բանաձևերն ունեն երկրաչափական հստակ իմաստ:*

*Միջին արժեքի (5-61)-(5-62) բանաձևերը փաստորեն երկու մակերեսների հավասարություն են արտահայտում: Բանաձևերի ձախ կողմում կորագիծ սեղանի մակերեսն է, իսկ աջ կողմում՝ միջին $\mu \in [m, M]$ արժեքով կառուցված ուղղանկյան մակերեսը: Մասնավոր անընդհատ ֆունկցիայի համար միջին μ արժեքը կարելի է փոխարինել $\mu = f(\xi)$ -ով: Նկատենք, որ μ միջին արժեքը միշտ գոյություն ունի և **միակն** է, մինչդեռ $\xi \in [a, b]$ միջանկյալ կետը կարող է միակը չլինել, ինչպես երևում է վերջին գրաֆիկում:*

Թեորեմ 5.17. *(Միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմ)*

ա) Դիցուք

$$1) \quad f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b] ;$$

$$2) \quad m \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a \leq x \leq b} f(x), \quad M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{a \leq x \leq b} f(x) ;$$

$$3) \quad g(x) \text{ ֆունկցիան պահպանում է իր նշանն } [a, b] \text{ հատվածում, այսինքն՝}$$

$$\text{կամ } g(x) \geq 0, \quad x \in [a, b], \quad \text{կամ } g(x) \leq 0, \quad x \in [a, b] :$$

Այդ դեպքում կարելի է գտնել ինչ-որ միջին $\exists \mu \in [m, M]$ արժեք այնպիսին, որ

$$\boxed{\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx} : \quad (5-64)$$

բ) Եթե լրացուցիչ հայրնի է, որ f ֆունկցիան անընդհատ է՝ $f(x) \in C[a, b]$, ապա ավելին՝ կարելի է

գտնել ինչ-որ միջանկյալ $\exists \xi \in [a, b]$ կետ այնպիսին, որ

$$\boxed{\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx} : \quad (5-65)$$

Ապացույց. Առանց խախտելու ընդհանրությունը՝ կարելի է համարել, որ $a < b$ և $g(x) \geq 0, x \in [a, b]$:

Բազմապարկենք $m \leq f(x) \leq M$ անհավասարությունները $g(x)$ -ով և ինտեգրենք

$$m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x),$$

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx : \quad (5-66)$$

Նկատենք, որ $f(x) g(x)$ արտադրյալն ինտեգրելի է: Քանի որ g ֆունկցիան ոչ բացասական է՝ $g(x) \geq 0$, ապա ոչ բացասական է նաև նրա ինտեգրալը՝ $\int_a^b g(x) dx \geq 0$: Քննարկենք երկու դեպք:

Եթե $\int_a^b g(x) dx = 0$, ապա (5-66) անհավասարությունների բոլոր երեք կողմերը վերածվում են զրոյի, և

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^b g(x) dx = 0 :$$

Ստացվեց, որ ապացուցվող (5-64) բանաձևը ճիշտ է ցանկացած μ արժեքի համար:

Եթե $\int_a^b g(x) dx > 0$, ապա (5-66) անհավասարությունները բաժանենք այդ դրական ինտեգրալի վրա.

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M :$$

Նշանակենք

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

և նկատենք, որ $m \leq \mu \leq M$: Վերջին հավասարությունը համընկնում է (5-64)-ի հետ:

Իսկ (5-65) բանաձևի հիմնավորումը ճիշտ նույնն է, ինչ (5-62) բանաձևի դեպքում էր: Դարձյալ կիրառում ենք Վայերշտրասի 2-րդ և Բուլցանո-Կոշու թեորեմները, գտնում ենք միջանկյալ կետ.

$$\exists \xi \in [a, b] \quad s.t. \quad f(\xi) = \mu :$$

Դրանով ավարտվում է թեորեմի ապացույցը:

□

5.19 Որոշյալ ինտեգրալը որպես վերին սահմանի ֆունկցիա

Որոշյալ ինտեգրալի հատկություններից մենք գիտենք, որ $[a, b]$ հատվածում ինտեգրելի $f(t) \in \mathcal{R}[a, b]$ ֆունկցիան ինտեգրելի կլինի նաև $[a, b]$ հատվածի ցանկացած ենթահատվածում՝ $f(t) \in \mathcal{R}[a, x], \forall x \in [a, b]$: Սահմանենք նոր ֆունկցիա՝

$$\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

որոշյալ ինտեգրալի տեսքով, և որը կախված է փոփոխական վերին սահմանից: Ներագույնք $\Phi(x)$ ֆունկցիայի հատկությունները, որոնցից առաջինը պնդում է, որ Φ ֆունկցիան անընդհատ է:

Լեմմա 5.7. Եթե $f(t) \in \mathcal{R}[a, b]$, ապա $\Phi(x) \in C[a, b]$:

Ապացույց. Նախ նկատենք, որ f ֆունկցիան սահմանափակ է $[a, b]$ հատվածում և ուրեմն ունի վերջավոր սուպրեմում և ինֆիմում՝

$$\exists M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) :$$

Ֆիքսենք կամայական $\forall x_0 \in [a, b]$ կետ և ապացուցենք, որ Φ ֆունկցիան անընդհատ է այդ կետում, այսինքն՝

$$\Phi(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x), \quad \text{կամ նույնը՝} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta \Phi(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)] = 0 : \quad (5-67)$$

Վերցնենք բավականաչափ փոքր Δx արգումենտի աճ այնպես, որ $x_0 + \Delta x \in [a, b]$: Կազմենք Φ ֆունկցիայի $\Delta \Phi(x_0)$ աճն x_0 կետում և ձևափոխենք՝ օգտվելով որոշյալ ինտեգրալի հատկություններից.

$$\Delta \Phi(x_0) = \Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0) = \int_a^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt : \quad (5-68)$$

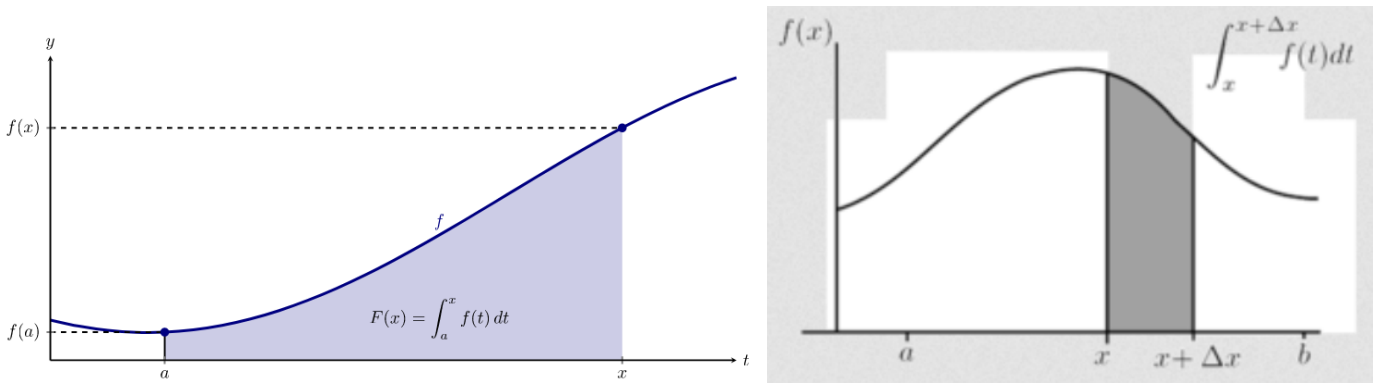
Վերջին ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք միջին արժեքի թեորեմը, ըստ որի՝

$$\exists \mu \in [m, M] \quad \text{s.t.} \quad \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt = \mu \Delta x : \quad (5-69)$$

Նշենք, որ μ -ն կախված է Δx -ից և կարելի է դիտարկել որպես Δx -ի ֆունկցիա՝ $\mu = \mu(\Delta x)$, ընդ որում՝ սահմանափակ ֆունկցիա՝ $m \leq \mu \leq M$: Այժմ սրացված հավասարության մեջ մեզ մնում է սահմանային անցում կատարել, երբ $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\Delta \Phi(x_0) = \Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt = \mu \Delta x \longrightarrow 0, \quad \text{երբ} \quad \Delta x \rightarrow 0 : \quad (5-70)$$

Սահմանն իսկապես զրո է, քանի որ անվերջ փոքր և սահմանափակ ֆունկցիաների արտադրյալն անվերջ փոքր է: Նաստարվեց (5-67) սահմանը, և լեմման ապացուցվեց: $\square$



Պատկեր 5.15. Վերին սահմանի ինտեգրալի գրաֆիկական պարկերումը

Օգտակար է երկրաչափորեն պարկերացնել Φ ֆունկցիան, որն իհարկե մակերես է արտահայտում այն կորագիծ սեղանի, որը հենված է $[a, x]$ հարվածի վրա:

Թեորեմ 5.18. Եթե ենթինտեգրալային ֆունկցիան անընդհատ է հատվածում, ապա վերին սահմանից կախյալ $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ ինտեգրալն անընդհատ դիֆերենցելի (ողորկ) ֆունկցիա է նույն հատվածում: Կարճ՝

$$f(t) \in C[a, b] \implies \Phi(x) \in C^1[a, b], \quad \text{ընդ որում՝} \quad \Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]: \quad (5-71)$$

Ավելացնենք, որ հատվածի ծայրակետերում ածանցյալը պետք է հասկանալ միակողմանի իմաստով, այսինքն՝

$$\Phi'_+(a) = f(a) \quad \text{և} \quad \Phi'_-(b) = f(b):$$

Ապացույց. Վերցնենք կամայական $\forall x_0 \in [a, b]$ կետ և ապացուցենք, որ $\Phi'(x_0) = f(x_0)$: Ածանցյալը սրանալու համար, ինչպես նախորդ լեմմայում, մեզ անհրաժեշտ է $\Phi(x)$ ֆունկցիայի աճը x_0 կետում: Կազմենք այն և օգտվենք (5-68) բանաձևից.

$$\Phi'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt: \quad (5-72)$$

Նաշվի առնելով $f(t)$ ենթինտեգրալային ֆունկցիայի անընդհատությունը՝ (5-72) ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք միջին արժեքի թեորեմը, ըստ որի՝

$$\exists \xi, \quad x_0 < \xi < x_0 + \Delta x \quad (\text{կամ} \quad x_0 + \Delta x < \xi < x_0) \quad \text{s.t.} \quad \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x: \quad (5-73)$$

Տեղադրենք (5-72) սահմանի մեջ և հաշվենք այդ սահմանը.

$$\Phi'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} f(\xi) \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi):$$

Քանի որ ξ միջանկյալ կետը միշտ գտնվում է x_0 և $x_0 + \Delta x$ կետերի միջև, ապա $\Delta x \rightarrow 0$ պայմանից հետևում է $\xi \rightarrow x_0$ պայմանը: Այնուհետև, օգտվելով f ֆունկցիայի անընդհատությունից, վերջնականապես ստանում ենք

$$\Phi'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x_0),$$

ինչը և պահանջվում էր: □

Ապացուցված (5-71) ածանցման բանաձևը կարելի է արտագրել և այսպես՝

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)}, \quad x \in [a, b]: \quad (5-74)$$

Թեորեմ 5.18-ի պնդումը կարելի է ստանալ լոկալ իմաստով, առանձին վերցրած կետում, եթե միայն այդ կետում է հայրնի ենթինտեգրալային ֆունկցիայի անընդհատությունը:

Թեորեմ 5.19. *Դիցուք $f(t) \in \mathcal{R}[a, b]$ ինտեգրելի ֆունկցիան անընդհատ է $t = x_0 \in [a, b]$ կետում:*

Այդ դեպքում $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ ֆունկցիան կլինի դիֆերենցելի x_0 կետում և $\boxed{\Phi'(x_0) = f(x_0)}$:

Ճշգրիտ ապացույցը կարելի է գտնել մաթ. անալիզի փաթեթեր դասագրքերում:

Որոշյալ ինտեգրալը կարող է կախված լինել ոչ թե փոփոխական վերին սահմանից, այլ ստորին սահմանից՝

$$\boxed{\Psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_x^b f(t) dt}, \quad x \in [a, b]:$$

Ապացուցված (5-71), (5-74) բանաձևը կարելի է վերագրել նաև $\Psi(x)$ ֆունկցիային, ընդամենը սահմանները փոխելով՝ $\Psi(x)$ ֆունկցիան հանգում է $\Phi(x)$ ֆունկցիային:

Թեորեմ 5.20. *Եթե $f(t) \in C[a, b]$, ապա $\boxed{\Psi(x) = \int_x^b f(t) dt}$ ինտեգրալն անընդհատ դիֆերենցելի (ողորկ) ֆունկցիա է $[a, b]$ հատվածում՝ $\Psi(x) \in C^1[a, b]$, և նրա ածանցյալը հավասար է $(-f)$ -ին՝*

$$\boxed{\Psi'(x) = -f(x)} \quad \text{կամ նույնը՝} \quad \boxed{\frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt = -f(x)}, \quad x \in [a, b]: \quad (5-75)$$

Որոշյալ ինտեգրալը կարող է կախված լինել և՛ վերին, և՛ ստորին փոփոխական սահմաններից: Թեորեմներ 5.18 և 5.20-ը կարելի է կիրառել նաև այդ դեպքում:

Ավելին, փոփոխական սահմանը կարող է ներկայանալ ոչ թե պարզագույն x -ի փեսքով, այլ որպես x -ից կախված որևէ դիֆերենցելի ֆունկցիայի փեսքով: Այդ դեպքում (5-71), (5-74), (5-75) բանաձևերը ևս կարելի է կիրառել, բայց հաշվի առնելով բարդ ֆունկցիայի (համադրության) ածանցման կանոնը.

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}, \quad \boxed{\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^b f(t) dt = -f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}: \quad (5-76)$$

5.20 Նյուտոն-Լայբնիցի կամ ինտեգրալային հաշվի հիմնական բանաձևը

Նախորդ բաժնում ապացուցված (5-71), (5-74) բանաձևը՝

$$\boxed{\Phi'(x) = f(x)} \quad \text{կամ նույնը} \quad \boxed{\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)}, \quad x \in [a, b], \quad (5-77)$$

կարելի է ձևակերպել այնպես, որ $\boxed{\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt}$ ֆունկցիան անընդհատ $f(t) \in C[a, b]$ ֆունկցիայի **նախնական** է : Ավելի ճիշտ՝ Φ -ն f -ի նախնականներից մեկն է $[a, b]$ հատվածում:

Նշանակենք $F(x)$ -ով f -ի **կամայական** մի նախնական $[a, b]$ հատվածում, այսինքն՝ $\boxed{F'(x) = f(x)}$, $x \in [a, b]$: Ինչպես հայտնի է, նույն ֆունկցիայի երկու նախնականներ իրարից փոքրերովում են միայն հասարարուն գումարելիով.

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \boxed{\Phi(x) = F(x) + C}, \quad x \in [a, b] : \quad (5-78)$$

Մասնավորապես, (5-78) բանաձևը կարելի է գրել $x = a$ կետում, և քանի որ $\Phi(a) = 0$, ապա

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C \quad \implies \quad \boxed{C = -F(a)} :$$

Տեղադրենք C հասարարունի սրացված արժեքը (5-78)-ի մեջ.

$$\boxed{\Phi(x) = F(x) - F(a)}, \quad x \in [a, b] : \quad (5-79)$$

Այնուհետև, (5-79) բանաձևը կարելի է մասնավորապես գրել $x = b$ կետում, և կստանանք

$$\boxed{\Phi(b) = F(b) - F(a)}, \quad \text{կամ նույնը} \quad \boxed{\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)} : \quad (5-80)$$

Ընդունված է (5-80) բանաձևը գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)} : \quad (5-81)$$

Նենց սա է Նյուտոն-Լայբնիցի կամ ինտեգրալային հաշվի հիմնական բանաձևը, որը կապ է հասարարում որոշյալ և անորոշ ինտեգրալների միջև և պարզ կերպով թույլ է տալիս որոշյալ ինտեգրալի հաշվարկը հանգեցնել անորոշ ինտեգրալին: Այսպիսով ապացուցեցինք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 5.21. (Նյուտոն-Լայբնիցի թեորեմ)

Ցանկացած $f(x) \in C[a, b]$ անընդհատ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալն $[a, b]$ հատվածում հաշվելու համար պետք է գտնել $f(x)$ -ի որևէ կամայական $F(x)$ նախնական և հաշվել $F(b) - F(a)$ արժեքը:

Բերենք պարզագույն աղյուսակային ինտեգրալի օրինակ:

Օրինակ 5.14. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} :$

5.21 Փոփոխականի փոխարինում (փեղադրում) որոշյալ ինտեգրալում

Որոշյալ ինտեգրալ հաշվելու հիմնական միջոցը Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևն է: Դրա հետ մեկտեղ, կան որոշյալ ինտեգրալ հաշվելու մի քանի մեթոդներ, որոնցից կարևորագույններն են փոփոխականի փոխարինումը և մասերով ինտեգրումը: Այդ մեթոդները մեզ ծանոթ են անորոշ ինտեգրալի համար, իսկ որոշյալ ինտեգրալի դեպքում մի քանի առանձնահատկություններ ունեն:

Թեորեմ 5.22. Դիցուք տրված է $f(x) \in C[a, b]$ անընդհատ ֆունկցիան, և նպատակ ունենք հաշվելու $\int_a^b f(x) dx$ ինտեգրալը: Տրված է նաև $x = \varphi(t) \in C^1[t_1, t_2]$ անընդհատ դիֆերենցելի (կամ ողորկ) ֆունկցիան, որը $[t_1, t_2]$ հատվածն արտասպարկերում է $[a, b]$ հատվածի վրա՝ $x = \varphi(t) : [t_1, t_2] \mapsto [a, b]$, քնդ որում հատվածների ծայրակետերն իրար համասպարասխանում են՝ $\varphi(t_1) = a$ և $\varphi(t_2) = b$: (Կարելի է t_1 -ի և t_2 -ի տեղերը փոխել):

Այդ դեպքում ճիշտ է փոփոխականի փոխարինման հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt : \quad (5-82)$$

Ապացույց. Ենթադրենք $F(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ -ի որևէ կամայական նախնականն է $[a, b]$ հատվածում, այսինքն՝

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b] :$$

Ըստ Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի՝

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) : \quad (5-83)$$

Մյուս կողմից, $F(\varphi(t))$ բարդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է որպես դիֆերենցելի ֆունկցիաների համադրույթ և

$$\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \quad t \in [t_1, t_2] :$$

Սա նշանակում է, որ $F(\varphi(t))$ բարդ ֆունկցիան $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ ֆունկցիայի նախնականն է $[t_1, t_2]$ հատվածում:

Դարձյալ կիրառում ենք Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևն այժմ $[t_1, t_2]$ հատվածում.

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_{t_1}^{t_2} = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = F(b) - F(a) : \quad (5-84)$$

Նամենապելով (5-83) և (5-84) բանաձևերը՝ ստանում ենք ինտեգրալների հավասարություն՝

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt :$$

□

Օրինակ 5.15. $I \stackrel{!}{=} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = ?$

Կարարենք **եռանկյունաձափական** տեղադրում.

$$x = \varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sin t : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto [0, 1], \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 :$$

Ծայրակերտերի համապատասխանությունը մենք ինքներս ապահովեցինք: Տեղադրենք

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} d(\sin t) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt,$$

որտեղ $\cos t \geq 0$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$: Ծարունակենք պարզեցումը և վերջում սրացվող աղյուսակային ինտեգրալը հաշվենք Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \left(\sin 2 \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{\pi}{4} : \end{aligned}$$

Նկատենք, որ ինտեգրման t փոփոխականով որոշյալ ինտեգրալը հաշվեցինք մինչև վերջ՝ առանց հետ գալու սկզբնական x փոփոխականին, ինչպես անում էինք անորոշ ինտեգրալի դեպքում:

Պատասխան՝ $I = \frac{\pi}{4}$:

Եվս մի բանի օգտակար կիրառում ներկայացնենք հետևանքի տեսքով: Նախուկ ուշադրության է արժանի գույգ կամ կենր, ինչպես նաև պարբերական ֆունկցիաների ինտեգրումը: Եթե գույգ կամ կենր ֆունկցիան ինտեգրվում է մի միջակայքով, որը համաչափ է $x = 0$ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, ապա ինտեգրման բանաձևը բավականին հարմար առանձնահատկություններ ունի:

Ներքևանք 5.7. (Զույգ կամ կենր ֆունկցիայի ինտեգրումը)

Դիցուք f ֆունկցիան ինտեգրելի է $[-\ell, \ell]$ համաչափ հատվածում՝ $f(x) \in \mathcal{R}[-\ell, \ell]$:

ա) Եթե f ֆունկցիան գույգ է, ապա $\boxed{\int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = 2 \int_0^{\ell} f(x) dx}$;

բ) Եթե f ֆունկցիան կենր է, ապա $\boxed{\int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = 0}$:

Ապացույց. ա) Տրոհենք ինտեգրալը՝ օգտվելով նրա ադիտիվության հատկությունից.

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = \int_{-\ell}^0 f(x) dx + \int_0^{\ell} f(x) dx :$$

Վերջին ինտեգրալը պահպանենք առանց փոփոխության, իսկ նախավերջին ինտեգրալում կապարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $t = -x$, $dt = -dx$, և օգտվենք ֆունկցիայի զույգությունից՝ $f(-x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx &= \int_{-\ell}^0 f(x) dx + \int_0^{\ell} f(x) dx = \\ &= \int_{\ell}^0 f(-t) (-dt) + \int_0^{\ell} f(x) dx = \int_0^{\ell} f(t) dt + \int_0^{\ell} f(x) dx = 2 \int_0^{\ell} f(x) dx, \end{aligned}$$

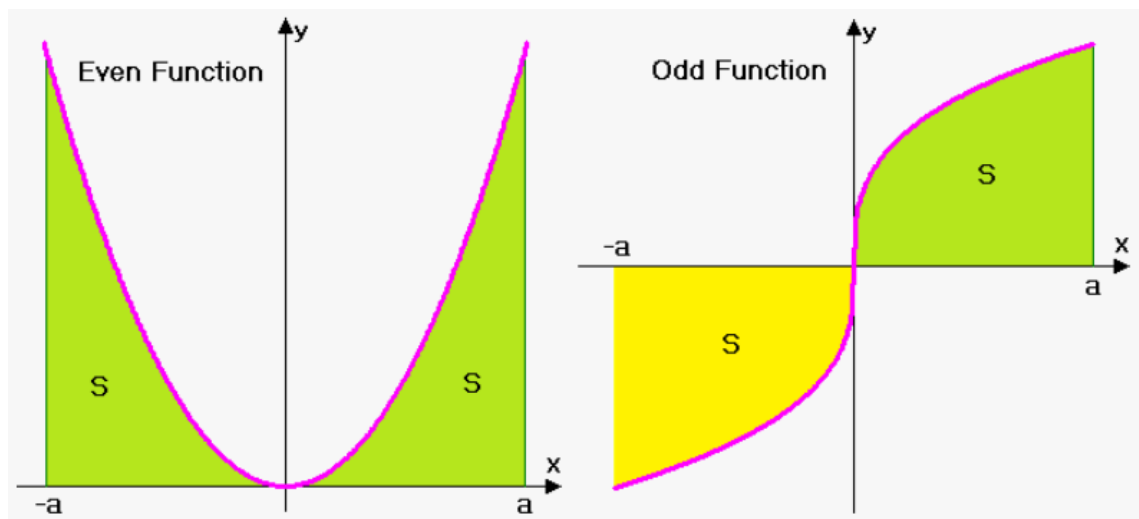
ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

բ) Կենտ ֆունկցիայի դեպքը նույն եղանակով ապացուցեք ինքնուրույն՝ այժմ օգտվելով կենտությունից.

$$f(-x) = -f(x) :$$

□

Ապացուցված հատկություններն ունեն պարզ երկրաչափական իմաստ, ինչն **գծագիր 5.16**:



Գծագիր 5.16. Զույգ կամ կենտ ֆունկցիայի ինտեգրման գրաֆիկական պատկերումը

Պարբերական ֆունկցիայի ինտեգրման միջակայքը, ինչպես պարզվում է , կարելի է որոշակիորեն փոխել՝ պահպանելով ինտեգրալի արժեքը:

Ներքև 5.8. (Պարբերական ֆունկցիայի ինտեգրումը)

Դիցուք $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիան T -պարբերական է ամբողջ թվային առանցքի վրա, այսինքն՝ $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, և նաև ինտեգրելի է (ըստ Ռիմանի) յուրաքանչյուր վերջավոր հատվածում՝ $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: Այդ դեպքում՝

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad \forall a \in \mathbb{R} :$$

Այլ կերպ ասած, եթե ինտեգրման միջակայքի երկարությունը հավասար է պարբերությանը, ապա ինտեգրալի արժեքը կախված չէ սահմաններից:

Ապացույց. Ապացույցը շար նման է նախորդ՝ Ներևանք 5.7-ի ապացույցին: Տրոհենք ինտեգրալը՝ օգտվելով ադիտիվության հատկությունից.

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx : \quad (5-85)$$

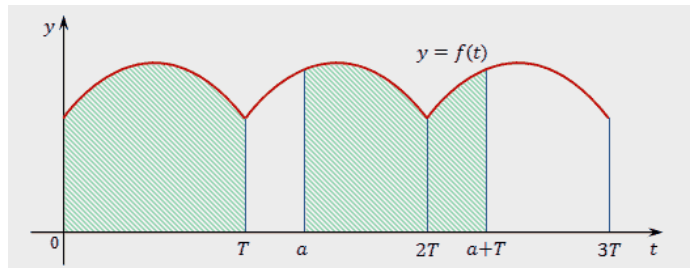
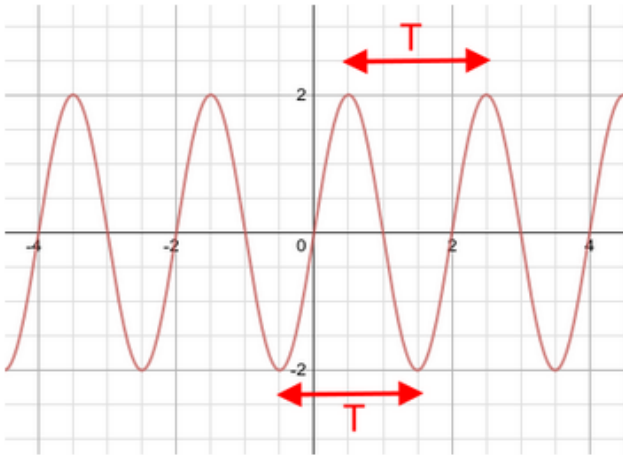
Վերջին ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $z = x - T$, $dz = dx$, և օգտվենք ֆունկցիայի պարբերականությունից՝ $f(x + T) = f(x)$.

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(z + T) dz = \int_0^a f(z) dz :$$

Տեղադրելով սա (5-85)-ի մեջ՝ վերջնականապես ստանում ենք

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^T f(x) dx,$$

և ավարտում ապացույցը: □



Գծազիր 5.17. Պարբերական ֆունկցիայի ինտեգրման գրաֆիկական պատկերումը

5.22 Մասերով ինտեգրում որոշյալ ինտեգրալում

Որոշյալ ինտեգրալի համար մասերով ինտեգրման բանաձևը կրկնում է ձեզ ծանոթ բանաձևն անորոշ ինտեգրալների համար՝ ընդամենը սահմաններ ավելացնելով:

Թեորեմ 5.23. Եթե $f(x), g(x) \in C^1[a, b]$ ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են (կամ ողորկ), ապա

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx, \quad (5-86)$$

կամ նույնը կարճ՝

$$\boxed{\int_a^b f dg = f g \Big|_a^b - \int_a^b g df} : \quad (5-87)$$

Ապացույց. Նիշենք արտադրյալի ածանցման բանաձևը.

$$\left(f(x) g(x) \right)' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x), \quad x \in [a, b] : \quad (5-88)$$

Սա նշանակում է, որ $f(x) g(x)$ ֆունկցիան նախնական է հանդիսանում (5-88) բանաձևի աջ կողմի ֆունկցիայի համար $[a, b]$ հատվածում: Ըստ Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի՝

$$\int_a^b \left[f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \right] dx = f(x) g(x) \Big|_a^b :$$

Վերջապես՝ օգտվելով որոշյալ ինտեգրալի գծայնությունից, ստանում ենք

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx + \int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b ,$$

ինչը համընկնում է ապացուցվող (5-86) բանաձևի հետ: □

Որպես օրինակ քննարկենք Օրինակ 5.15-ի նույն ինտեգրալը, բայց այս անգամ հաշվենք մասերով ինտեգրելով:

Օրինակ 5.16. $I \stackrel{!}{=} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = ?$

Նախապատրաստելու կարիք չկա և ընտրելով $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = x$ ֆունկցիաները՝ անմիջապես կիրառենք մասերով ինտեգրման բանաձևը.

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = x \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 x d\sqrt{1-x^2} = 0 - 0 - \int_0^1 x \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx :$$

Պարզեցնելու նպատակով տրոհենք վերջին կոտորակը և օգտվենք ինտեգրալի գծայնությունից.

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

և նկատենք, որ ստացված վերջին ինտեգրալը համընկնում է սկզբնական I ինտեգրալի հետ, իսկ նախավերջին ինտեգրալն աղյուսակային է՝

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \arcsin x \Big|_0^1 - I = \arcsin 1 - \arcsin 0 - I = \frac{\pi}{2} - I :$$

Այստեղից՝

$$I = \frac{\pi}{2} - I \quad \implies \quad 2I = \frac{\pi}{2} \quad \implies \quad I = \frac{\pi}{4} :$$

Պատասխան՝ $I = \frac{\pi}{4} :$

5.23 Բազմություններ, հարթ պարկերներ

Այս բաժնում քննարկելու ենք հարթության վրա գտնվող փաթեթեր բազմություններ: Դրա համար մեզ անհրաժեշտ կլինեն նշանակումներ և մի շարք սահմանումներ:

Կոորդինատային հարթությունը նշանակելու ենք $\mathbb{R}^2$ -ով, որն անվանում են նաև **երկչափ տարածություն**, քանի որ այն իրենից ներկայացնում է կոորդինատային երկու առանցքների դեկարտյան արտադրյալ (դեկարտյան քառակուսի)՝

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$$

Այն E բազմությունները, որոնք գտնվում են հարթության վրա, հաճախ կանվանենք **հարթ պարկերներ** և կգրենք $E \subset \mathbb{R}^2$:

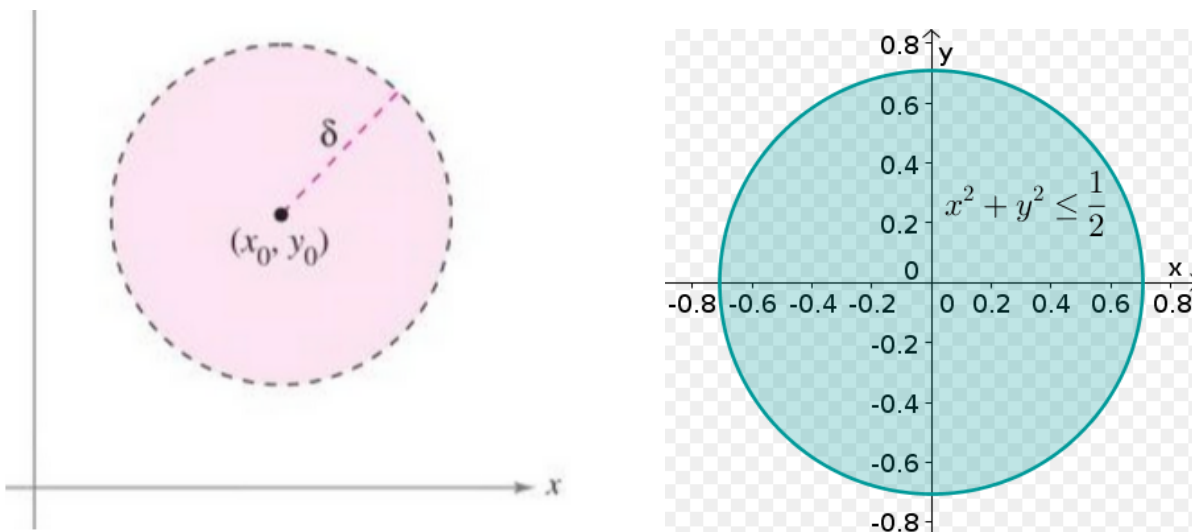
Որպես հարթ պարկերների օրինակներ կարելի է բերել շրջան, շրջանագիծ, փաթեթ կորեր, բազմանկյուն, կիսահարթություն, շերտ, անկյուն, առանձին վերցրած կետ, կետերի միավորում և այլն:

Սահմանում 5.12. Դիցուք $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ֆիքսած կետ է հարթության վրա (x_0, y_0) կոորդինատներով և $R > 0$ ֆիքսած դրական թիվ է: **Բաց շրջան** է կոչվում հետևյալ բազմությունը՝

$$B_R(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ M(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2 \right\},$$

որտեղ M_0 -ն շրջանի կենտրոնն է, իսկ R -ը՝ շառավիղը:

Սահմանում 5.13. $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ կենտրոնով և $\varepsilon > 0$ շառավիղով բաց շրջանը կանվանենք M_0 **կետի** ε -**շրջակայք**:



Գծագիր 5.18. Բաց շրջան, δ -շրջակայք և փակ շրջան

Սահմանում 5.14. $E \subset \mathbb{R}^2$ բազմությունը կոչվում է **սահմանափակ**, եթե այն պարունակվում է որևէ B_R շրջանի մեջ:

$$\exists B_R = B_R(M) \quad s.t. \quad E \subset B_R :$$

Նակառակ դեպքում բազմությունը (հարթ պարկերը) կոչվում է **անսահմանափակ**:

Օրինակ, սահմանափակ են շրջանը, շրջանագիծը, բազմանկյունը և այլն: Իսկ անսահմանափակ են կիսահարթությունը, շերտը, անկյունը, ուղիղը և այլն: Որպես կանոն դիտարկելու ենք սահմանափակ հարթ պարկերներ:

Սահմանում 5.15. $E \subset \mathbb{R}^2$ բազմությանը չպարկանող կետերի բազմությունը կոչվում է E -ի **լրացում** ($\mathbb{R}^2$ -ում) և նշանակվում է E^c -ով, այսինքն՝

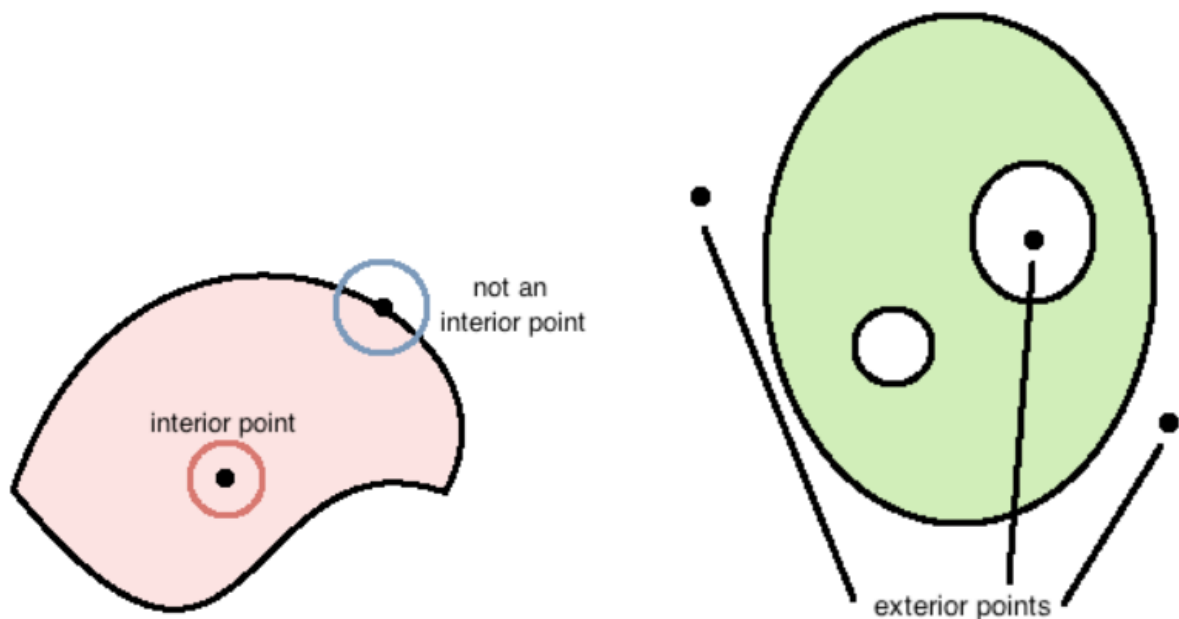
$$E^c \stackrel{def}{=} \mathbb{R}^2 \setminus E :$$

Սահմանում 5.16. $M_0(x_0, y_0)$ կետը կոչվում է E **բազմության ներքին կետ**, եթե M_0 -ն պարունակվում է E բազմության մեջ իր որևէ շրջակայքի հետ միասին, այսինքն՝

$$\exists B_\varepsilon(M_0) \quad \text{շրջակայք} \quad s.t. \quad B_\varepsilon(M_0) \subset E :$$

Սահմանում 5.17. $M_0(x_0, y_0)$ կետը կոչվում է E **բազմության արտաքին կետ**, եթե M_0 -ն ներքին կետ է E բազմության E^c լրացման համար, այսինքն՝

$$\exists B_\varepsilon(M_0) \quad \text{շրջակայք} \quad s.t. \quad B_\varepsilon(M_0) \subset E^c :$$



Գծագիր 5.19. Ներքին, եզրային և արտաքին կետեր

Սահմանում 5.18. $M_0(x_0, y_0)$ կետը կոչվում է E բազմության եզրային կետ, եթե M_0 -ի ցանկացած ε -շրջակայք պարունակում է ինչպես E -ին պատկանող, այնպես էլ E -ին չպատկանող կետեր:

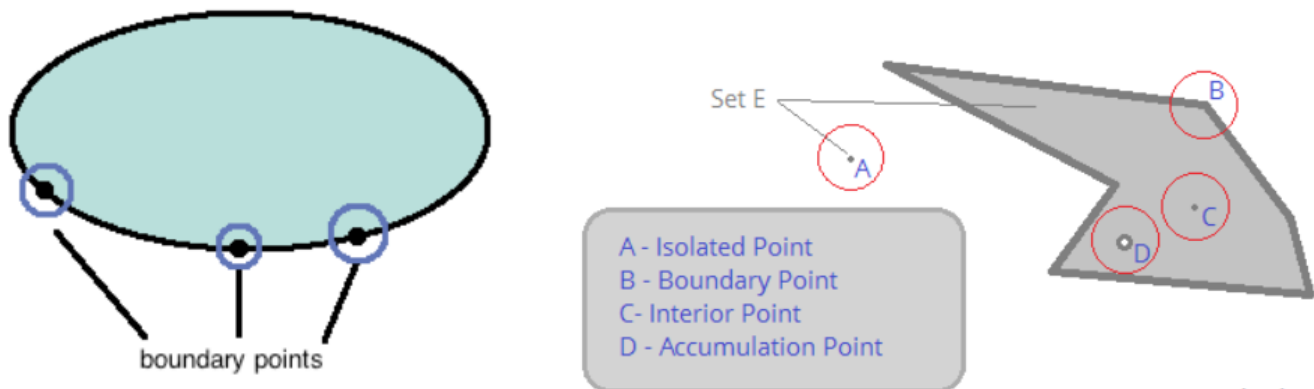
Այլ կերպ ասած՝ E բազմության եզրային կետը նրա համար ոչ ներքին է, ոչ արտաքին:

Նկատենք, որ E բազմության ներքին կետն իհարկե պատկանում է E -ին, E բազմության արտաքին կետը չի պատկանում E -ին, իսկ E բազմության եզրային կետը կարող է E -ին պատկանել կամ չպատկանել:

Այսպիսով տվյալ $E \subset \mathbb{R}^2$ բազմության համար հարթության կետերը բաժանվում են (իրար հետ չհատվող) երեք խմբերի՝ E -ի ներքին կետեր, արտաքին կետեր, եզրային կետեր:

Սահմանում 5.19. $E \subset \mathbb{R}^2$ բազմության բոլոր եզրային կետերի բազմությունը կոչվում է E -ի եզր և նշանակվում է ∂E -ով:

Օրինակ, շրջանագիծը տվյալ շրջանի եզրն է՝ անկախ այն փաստից՝ շրջանը բաց է, թե փակ:



Գծագիր 5.20. Եզրային և այլ կետեր

Սահմանում 5.20. $E \subset \mathbb{R}^2$ բազմությունը կոչվում է բաց, եթե այն բաղկացած է միայն ներքին կետերից: Այլ կերպ ասած՝ բաց բազմության յուրաքանչյուր կետ պարունակվում է E -ի մեջ իր որևէ շրջակայքի հետ միասին:

Սահմանում 5.21. $E \subset \mathbb{R}^2$ բազմությունը կոչվում է փակ, եթե այն պարունակում է իր բոլոր եզրային կետերը, այսինքն՝ $\partial E \subset E$:

Նամարժեքորեն կարելի է սահմանել, որ փակ է այն բազմությունը, որը պարունակում է իր բոլոր կուրակման (սահմանային) կետերը:

Նիշենք կուրակման կետի սահմանումը՝

Սահմանում 5.22. $M_0(x_0, y_0)$ կետը կոչվում է E բազմության կուրակման (կամ սահմանային) կետ, եթե M_0 -ի ցանկացած ε -շրջակայք պարունակում է E բազմության անվերջ թվով կետեր:

Կարելի է ցույց տալ, որ փակ բազմության լրացումը բաց է, իսկ բաց բազմության լրացումը՝ փակ: Սա փակ բազմության ևս մեկ համարժեք պայման է :

Վերջապես, կան բազմություններ, որոնք ո՛չ բաց են, ո՛չ փակ: Այսպիսով, բոլոր բազմությունները կարելի է բաժանել (իրար հետ չհամընկող) երեք խմբերի՝ բաց, փակ բազմություններ, ինչպես նաև ո՛չ բաց, ո՛չ փակ բազմություններ: Օրինակ, $B_R(M_0)$ շրջանը բաց բազմություն է, իսկ

$$\overline{B_R(M_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ M(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2 \right\}$$

շրջանը փակ բազմություն է : Եթե $\overline{B_R(M_0)}$ փակ շրջանից հեռացնենք որևէ մեկ կետ, ապա ստացված բազմությունը կլինի արդեն ո՛չ բաց, ո՛չ փակ:

Սահմանում 5.23. $E \subset \mathbb{R}^2$ բազմության և նրա բոլոր կուրակման (կամ եզրային) կետերի միավորումը կոչվում է E **բազմության փակում (փակույթ)** և նշանակվում է $\overline{E}$ -ով, այսինքն՝ $\overline{E} \stackrel{\text{def}}{=} E \cup \partial E$:

Կարելի է եզրակացնել, որ E բազմությունը փակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\overline{E} = E$:

5.24 Հարթ պարկերի մակերեսի գաղափարը, քառակուսեի բազմություններ

Մենք մտադիր ենք ներմուծել կամայական սահմանափակ հարթ պարկերի մակերեսի գաղափարը:

Դպրոցական դասընթացից մեզ հայտնի է եռանկյան մակերեսը, որը կարելի է գրնել երկրաչափական տարրեր բանաձևերով: Քանի որ կամայական բազմանկյուն (բեկյալով սահմանափակված) կարելի է տրոհել վերջավոր թվով եռանկյունների, ապա այդ եռանկյունների մակերեսների գումարն ընդունենք որպես բազմանկյան մակերես: Որևէ A բազմանկյան մակերեսը նշանակենք $|A|$ -ով: Սա համարենք մակերեսի գաղափարի հիմք, սակայն մենք ավելին ենք ցանկանում. մեր նպատակն է սահմանել մակերեսի գաղափարը կամայական սահմանափակ հարթ պարկերի համար:

Դիցուք $E \subset \mathbb{R}^2$ սահմանափակ բազմություն է: Դիտարկենք E -ի մեջ պարունակվող բոլոր հնարավոր A բազմանկյունները՝ $A \subset E$, ինչպես նաև E -ն պարունակող բոլոր հնարավոր B բազմանկյունները՝ $B \supset E$: Պայմանակա՞նորեն A բազմանկյունները կանվանենք **ներգծյալ**, իսկ B բազմանկյունները՝ **արտագծյալ**:

Պարզ է, որ $A \subset E \subset B$ և $|A| \leq |B|$:

Վերջին անհավասարությունից հետևում է՝ թվային $\{|A|\}$ բազմությունը սահմանափակ է վերևից, իսկ $\{|B|\}$ բազմությունը սահմանափակ է ներքևից: Ճշգրիտ եզրերի գոյության մասին թեորեմից բխում է, որ գոյություն ունեն հետևյալ ճշգրիտ եզրերը՝

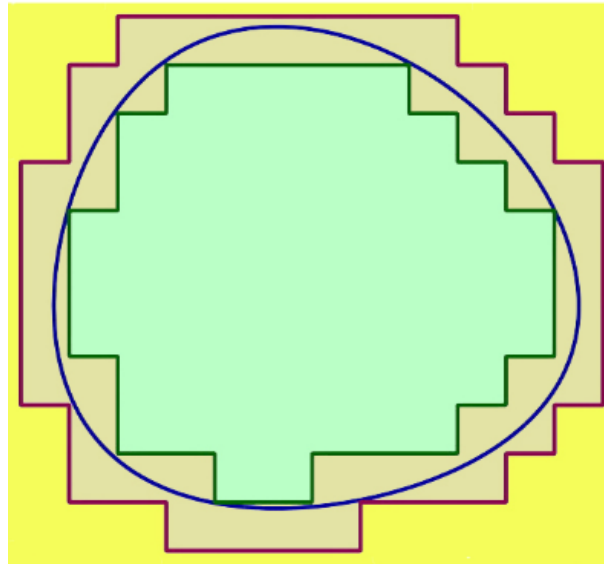
$$\exists E_* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{A \subset E} |A|, \quad \exists E^* \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{B \supset E} |B|, \quad (5-89)$$

որպես ենթադրվում է , որ սուպրեմումը վերցված է E -ի մեջ ներգծյալ բոլոր հնարավոր A բազմանկյուններով $A \subset E$, իսկ ինֆիմումը՝ E -ին արագծյալ բոլոր B բազմանկյուններով՝ $B \supset E$: Բերված (5-89) սահմանումից պարզ է , որ

$$\boxed{|A| \leq E_* \leq E^* \leq |B|} \quad \forall A \subset E, \quad \forall B \supset E : \quad (5-90)$$

E_* թիվը կոչվում է E **բազմության ներքին մակերես**,

E^* թիվը կոչվում է E **բազմության արտաքին մակերես**:



Գծազիր 5.21. Ներգծյալ և արագծյալ բազմանկյուններ

Սահմանում 5.24. Եթե $E_* = E^*$, ապա նշանակենք $E_* = E^* \stackrel{\text{նշ.}}{=} |E|$ և այս թիվն անվանենք E **բազմության մակերես**, և դրա հետք մեկրեղ E բազմությունը կոչվում է **քառակուսեղի** (այսինքն՝ մակերես ունեցող):

Ակնհայտ է , որ ցանկացած բազմանկյուն քառակուսեղի բազմություն է :

Վերլուծելով սահմանափակ պարկերի մակերեսի բավականին բարդ սահմանումը՝ կարելի է նկատել, որ այն հիշեցնում է Ռիմանի որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը, Դարբուի գումարներն իրենց հարկություններով: Իսկապես, բազմաթիվ և խորը զուգահեռներ կարելի է արձանագրել նրանց միջև:

E պարկերի $|E|$ մակերեսը համապարասխանում է որոշյալ ինտեգրալի I արժեքին, ինչը որոշակի կորագիծ սեղանի մակերես է :

Ներգծյալ A բազմանկյան $|A|$ մակերեսը համապարասխանում է Դարբուի ստորին s գումարին;

Արագծյալ B բազմանկյան $|B|$ մակերեսը համապարասխանում է Դարբուի վերին S գումարին;

E բազմության ներքին E_* մակերեսը համապարասխանում է Դարբուի ստորին I_* ինտեգրալին;

E բազմության արտաքին E^* մակերեսը համապարասխանում է Դարբուի վերին I^* ինտեգրալին:

Ցուցադրելու համար նշված մեծությունների կապը բերենք նաև ապացուցված մի քանի անհավասարություններ և համեմատենք իրար հետ.

$$\begin{aligned} |A| \leq E_* \leq E^* \leq |B|, & & |A| \leq |E| \leq |B|, \\ s \leq I_* \leq I^* \leq S, & & s \leq I \leq S : \end{aligned}$$

Թվարկված մեծությունների հարկությունները ևս նույնական են, ինչը կերևա հաջորդող թեորեմներում:

Թեորեմ 5.24. *Դիցուք E -ն սահմանափակ հարթ պարկեր է՝ $E \subset \mathbb{R}^2$:*

Որպեսզի E -ն բառակուսելի լինի, անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ պայմանը՝

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ ներգծյալ բազմանկյուն } A \subset E, & \quad s.t. \quad |B| - |A| < \varepsilon : \\ \exists \text{ արտագծյալ բազմանկյուն } B \supset E & \end{aligned}$$

Ապացույցը, որը բաց ենք թողնում, հիմնված է մակերեսի և ճշգրիտ եզրերի սահմանումների վրա:

Սահմանում 5.25. *Կասենք, որ $L \subset \mathbb{R}^2$ բազմությունն ունի զրո մակերես, կգրենք $|L| = 0$, եթե այն կարելի է ծածկել կամայականորեն փոքր մակերես ունեցող բազմանկյունով, այսինքն՝*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ արտագծյալ բազմանկյուն } B \supset L \quad s.t. \quad |B| < \varepsilon :$$

Լեմմա 5.8. *Անընդհատ կորը, որն արտահայտվում է $y = f(x) \in C[a, b]$ հավասարումով, ունի զրո մակերես:*

Ապացույց. Որևէ անընդհատ $y = f(x) \in C[a, b]$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $[a, b]$ հարվածում նշանակենք L -ով: Ցույց փանք, որ L -ը զրո մակերես ունի, $|L| = 0$:

Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հարվածում հավասարաչափ անընդհատ է (ըստ Կանտորի թեորեմի),

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{x_k\} \text{ մանր փրոհում } s.t. \quad \omega_k = M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

որպեսզի

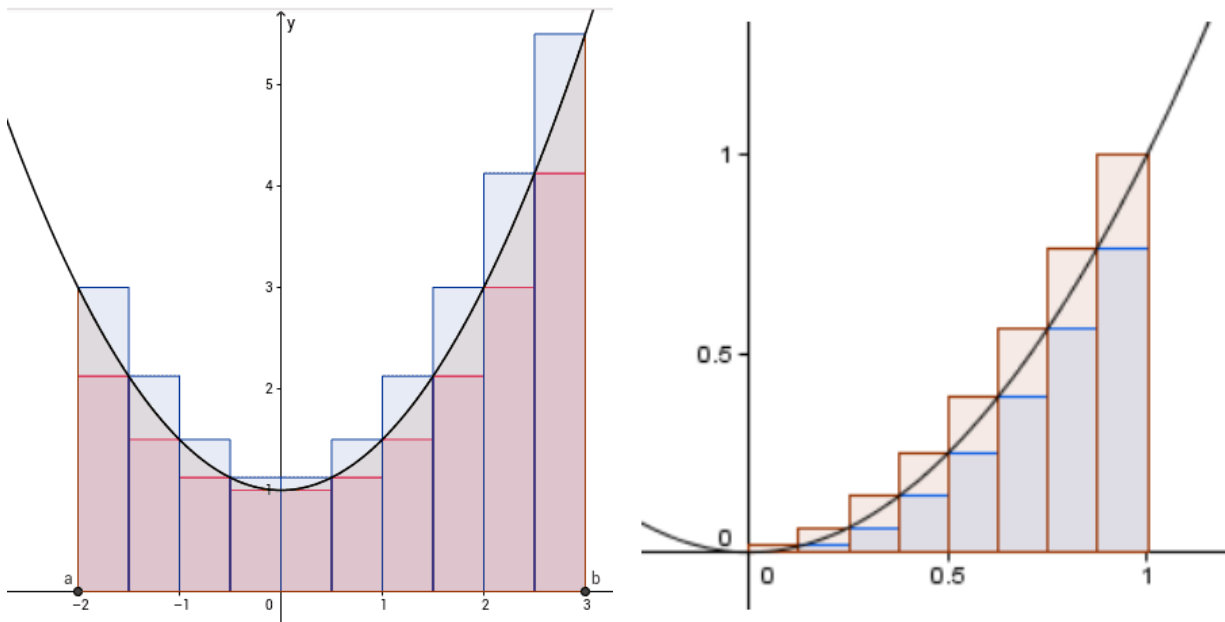
$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad k = \overline{1, n} :$$

Միավորենք բոլոր $[x_{k-1}, x_k] \times [m_k, M_k]$ ուղղանկյունները ($k = \overline{1, n}$) և նշանակենք այն B -ով, փեն **գծագիր** 5.22: Պարզ է, որ B -ն բազմանկյուն է և ծածկում է L կորը՝ $B \supset L$: Բացի այդ, հեշտ է հաշվել և գնահատել B -ի մակերեսը.

$$|B| = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon :$$

Ըստ սահմանման՝ $L = 0$:

□



Պատկեր 5.22. Անընդհատ կորը ծածկող բազմանկյուն

Առանց ապացույցի բերենք քառակուսեկիության ևս մեկ հայտանիշ:

Թեորեմ 5.25. Դիցուք E -ն n -սահմանափակ հարթ տարրեր է՝ $E \subset \mathbb{R}^n$:

Որպեսզի E -ն քառակուսեկի լինի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա եզրը զրո մակերես ունենա՝ $|\partial E| = 0$:

Դիպրոդություն 5.14. Նկատենք՝ Լեմմա 5.8-ի ապացույցի հիմնավորումներով կարելի է ցույց տալ, որ տրոհման արդյունքում ստանում ենք կորագիծ սեղանը ծածկող (այսինքն՝ արտագծյալ) բազմանկյուն և կորագիծ սեղանի մեջ պարունակվող (այսինքն՝ ներգծյալ) բազմանկյուն, որոնց մակերեսների տարբերությունը փոքր է ε -ից: Ներկայացնում ենք Թեորեմ 5.24-ի համաձայն՝ տրված կորագիծ սեղանը քառակուսեկի տարրեր է :

Նույնը հաստատում է նաև Թեորեմ 5.25-ը, քանի որ $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկը զրո մակերես ունի:

Թեորեմ 5.26. (Մակերեսի ադիտիվությունը) Դիցուք տրված են երեք հարթ տարրերներ՝ $E, E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$, այնպիսիք, որ

$$E = E_1 \cup E_2, \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset :$$

Այդ դեպքում երեք տարրերից ցանկացած երկուսի քառակուսեկիությունից հետևում է երրորդի քառակուսեկիությունը, և ճիշտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$|E| = |E_1| + |E_2| :$$

Բերենք ոչ քառակուսելի սահմանափակ բազմության մի օրինակ՝

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x, y \in \mathbb{Q} \text{ ռացիոնալ են} \right\} :$$

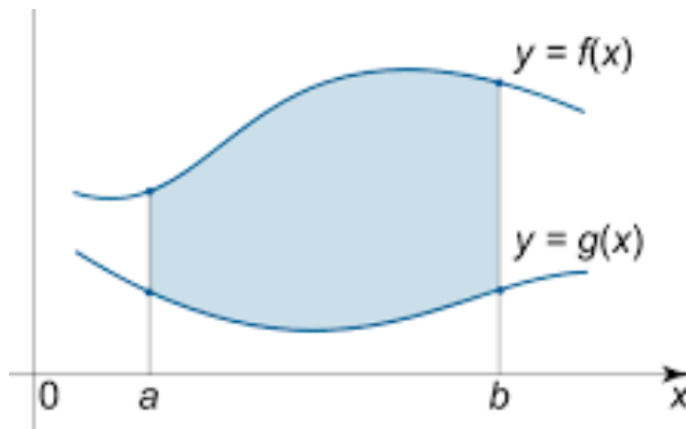
Քանի որ ցանկացած շրջակայքում (բաց շրջանում) անվերջ թվով կետեր կան, որոնց կոորդինատները ռացիոնալ կամ իռացիոնալ են, ապա փակ միավոր շրջանի յուրաքանչյուր կետ E -ի եզրային կետ է, այսինքն՝

$$\partial E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}, \quad |\partial E| > 0 :$$

Թեորեմ 5.25-ի համաձայն, եթե բազմության եզրը դրական մակերես ունի, ապա այդ E բազմությունը քառակուսելի չէ, այսինքն՝ մակերես առհասարակ չունի:

5.25 Որոշ կորագիծ պարկերների մակերեսների բանաձևեր

Մենք արդեն գիտենք, որ կորագիծ սեղանը (կամ սեղանակերպը) քառակուսելի է, և որոշ դեպքերում կարող ենք հաշվել նրա մակերեսը: Այն դեպքում, երբ կորագիծ սեղանը սահմանափակված է երկու (անընդհատ) ֆունկցիաների գրաֆիկներով, նրա մակերեսը ևս հեշտությամբ գտնվում է:



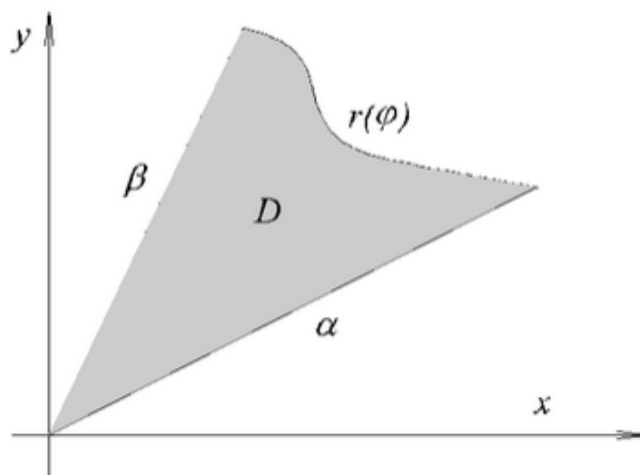
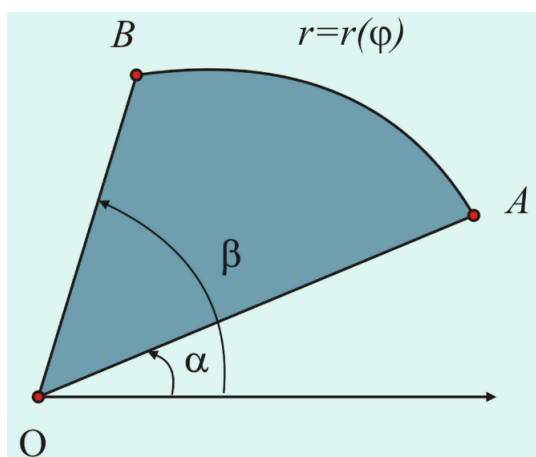
Գծագիր 5.23. Երկու ֆունկցիաների գրաֆիկներով սահմանափակված կորագիծ սեղան

Եթե $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a, b]$, և դիֆարկվող կորագիծ սեղանը նշանակենք D -ով, ապա նրա մակերեսը հաշվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$|D| = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

անկախ այն հանգամանքից, թե ինչ նշանի արժեքներ են ընդունում f և g ֆունկցիաները:

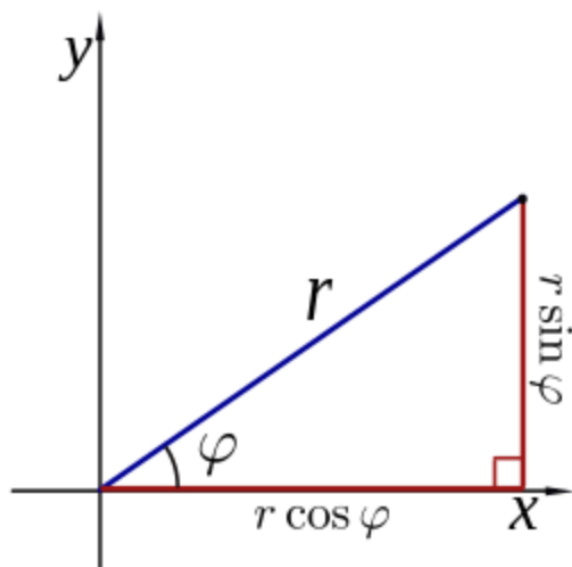
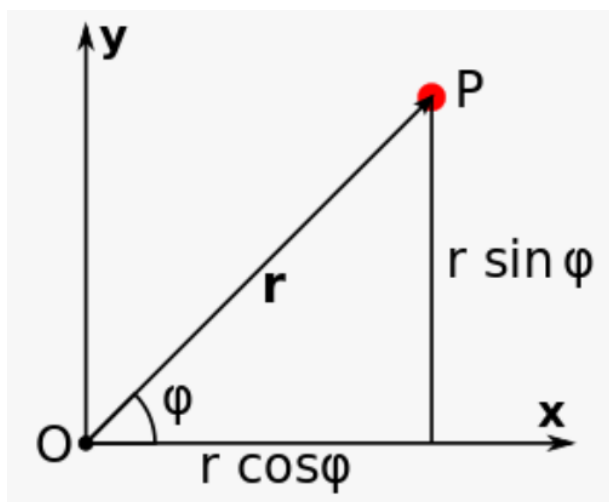
Սահմանում 5.26. *Կորագիծ սեկորո* է կոչվում այն հարթ պարկերը, որը սահմանափակված է նույն կերպից ելնող երկու ճառագայթներով և ինչ-որ $L = \widetilde{AB}$ անընդհատ կորով, որն **գծագիր 5.24:**



Պատկեր 5.24. Կորագիծ սեկտորներ

Սովորաբար $L = \widetilde{AB}$ կորը հարմար է ներկայացնել (r, φ) բևեռային կոորդինատներով և հավասարումով $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $r(\varphi) \in C[\alpha, \beta]$: Նիշենք, որ (r, φ) բևեռային կոորդինատները կապված են (x, y) դեկարտյան կոորդինատների հետ բացահայտ հավասարումներով (տես **գծապատկեր 5.25**).

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad r \geq 0, \quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (5-91)$$



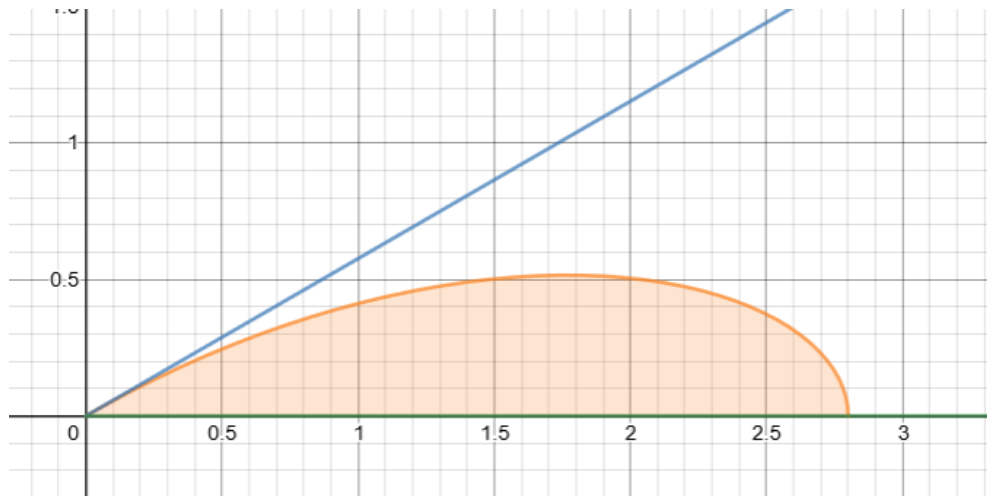
Պատկեր 5.25. Բևեռային և դեկարտյան կոորդինատներ

Թեորեմ 5.27. Կորագիծ սեկտորը քառակուսուի է, և նրա մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi : \quad (5-92)$$

Թեորեմը չենք ապացուցի, բայց բերենք համապատասխան օրինակ:

Օրինակ 5.17. Նաշվել $r = r(\varphi) = a \cos 3\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$, $a > 0$, բանաձևով տրված կորագիծ սեկտորի մակերեսը:



Գծագիր 5.26. Կորագիծ սեկտոր

Ըստ (5-92) բանաձևի՝

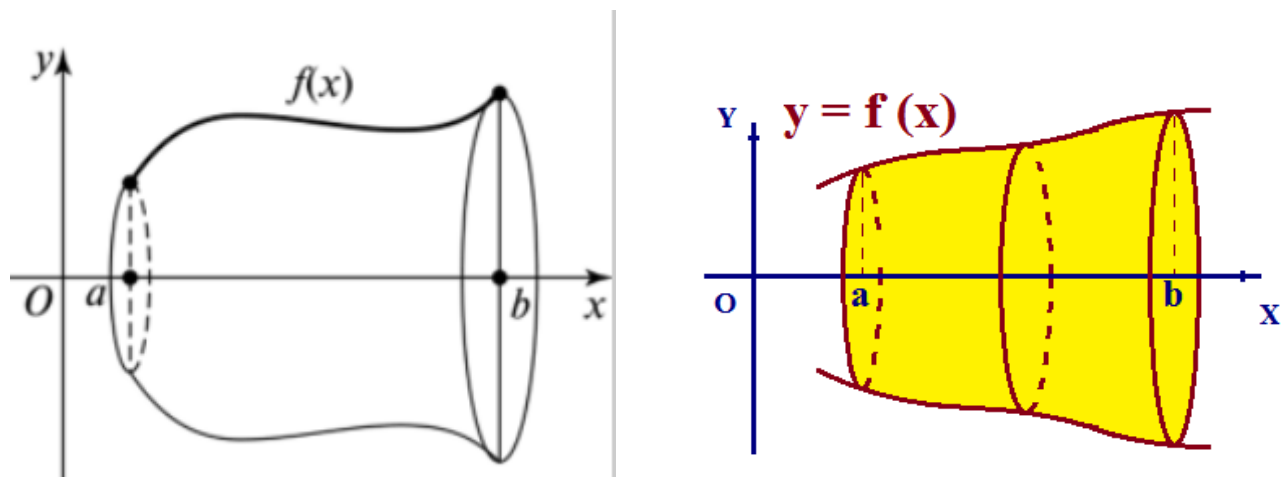
$$|D| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} a^2 \cos^2 3\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2} d\varphi = \frac{a^2}{4} \left[\frac{\pi}{6} + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi a^2}{24} :$$

5.26 Խորանարդելի մարմիններ

Տարբերակ $E \subset \mathbb{R}^2$ պարկերի մակերեսի սահմանման մոտեցումները կարելի է փարածել եռաչափ $\mathbb{R}^3$ փարածության $V \subset \mathbb{R}^3$ մարմինների ծավալի գաղափարը սահմանելու համար: Եթե հարթ պարկերի մակերեսը մենք մոտարկում էինք բազմանկյուններով, ապա սահմանափակ մարմնի մակերեսն այժմ մոտարկում են բազմանիսպերով, որոնց ծավալը համարում ենք հայտնի գաղափար՝ $A \subset V \subset B$:

Նաջորդող քայլերը և կառուցվածքը, այն է՝ ներգծյալ և արտագծյալ բազմանիսպեր, ներքին և արտաքին ծավալ, ծավալի սահմանում, կրկնում է քառակուսելի պարկերների փեսությունը, և մանրամասն այսպեղ չենք ներկայացնի: Միայն նշենք, որ ծավալ ունեցող մարմինները կոչվում են **խորանարդելի**: Թեորեմներ 5.24-5.26 ճիշտ են նաև խորանարդելի մարմինների համար:

Խորանարդելի մարմինների մեջ առանձնանում է մարմինների մի խումբ, որոնց անվանում են պարամետր մարմիններ, օրինակ՝ գլան, կոն, գունդ, էլիպսոիդ և այլն: Այդ խմբի մարմինների ծավալների համար բերենք մի բանաձև: Դիցուք $f(x) \geq 0$ և $f(x) \in C[a, b]$: Այս ֆունկցիայի գրաֆիկով կազմված կորագիծ սեղանի մակերեսի բանաձևը մեզ լավ հայտնի է : Այժմ նշված կորագիծ սեղանը պարենք x առանցքի շուրջը, որի արդյունքում կստանանք գլանաձև մի մարմին, նշանակենք այն V -ով, իսկ նրա ծավալը՝ $|V|$ -ով:

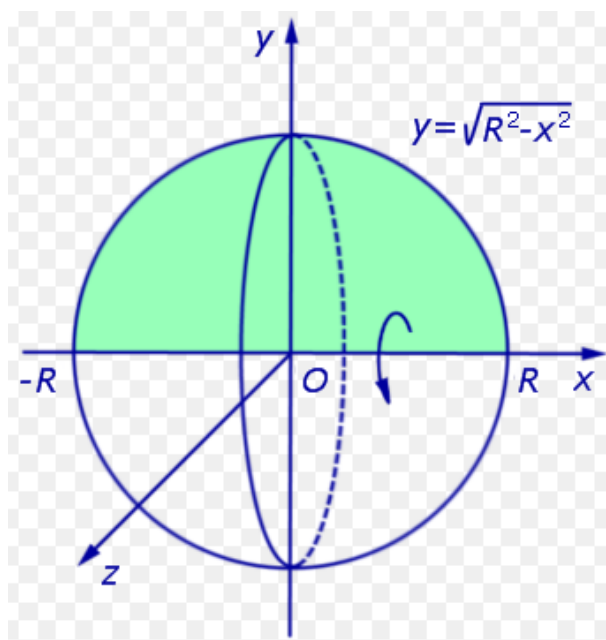


Պատկեր 5.27. Պարաման մարմիններ

Այդ դեպքում քվյալ պարաման մարմնի ծավալը հաշվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x) dx : \quad (5-93)$$

Կիրառենք այս բանաձևը պարզագույն մի դեպքում: Գտնենք $R > 0$ շառավղով գնդի ծավալը:



Պատկեր 5.28. Փունդը որպես պարաման մարմին

Անընդհատ f ֆունկցիայի դերը կատարում է այսպես $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$, ֆունկցիան:

Ինտեգրալը հաշվելու ընթացքում օգտվենք ենթինտեգրալային ֆունկցիայի զույգությունից.

$$|V| = \pi \int_{-R}^R f^2(x) dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left[R^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = 2\pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} \right] = \frac{4}{3} \pi R^3 :$$

5.27 Անընդհատ և ուղղելի կորեր: Կորի երկարությունը

Դիցուք $[\alpha, \beta]$ հատվածում տրված են երկու անընդհատ ֆունկցիաներ՝ $\varphi(t), \psi(t) \in C[\alpha, \beta]$, որոնց կանվանենք **պարամետրական ֆունկցիաներ**, իսկ t անկախ փոփոխականը՝ **պարամետր**:

Հաճախ t պարամետրը դիտարկում են որպես ժամանակի փոփոխական: Այդ դեպքում

$$L \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (5-94)$$

հավասարումները հարթության վրա որոշում են $M(x, y)$ կետի շարժման օրենք կամ հետագիծ $[\alpha, \beta]$ ժամանակահատվածում: Բոլոր առաջացող $M(x, y)$ կետերի բազմությունը հարթության վրա ներկայացնում է մի **կոր**, որը նշանակենք L -ով:

(5-94) հավասարումները կոչվում են L կորի **պարամետրական հավասարումներ**, կասենք նաև, որ L կորը **պարամետրիզացված** է (5-94) հավասարումներով:

Սահմանում 5.27. Եթե $\varphi(t), \psi(t) \in C[\alpha, \beta]$, ապա L կորը կոչվում է **անընդհատ**:

Կարելի է և այսպես ձևակերպել՝ **անընդհատ կորը** $[\alpha, \beta]$ հատվածի անընդհատ պարկերն է հարթության վրա՝

$$\left. \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{matrix} \right\} : [\alpha, \beta] \mapsto L : \quad (5-95)$$

Մենք հետագայում դիտարկելու ենք միայն անընդհատ կորեր:

Սահմանում 5.28. Այն մասնավոր դեպքում, երբ

$$L \quad \begin{cases} x = \varphi(t) = t \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \psi(x), \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (5-96)$$

L կորը որոշվում է մեկ հավասարումով, որը կոչվում է **բացահայտ**:

Նույնը կասենք, եթե

$$L \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) = t \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \varphi(y), \quad y_1 \leq y \leq y_2 : \quad (5-97)$$

Անընդհատ կորերը բավականին բարդ կառուցվածք կարող են ունենալ: Նույն կորը կարող է փարբեր պարամետրական հավասարումներով ներկայացված լինել, ասում են՝ կորը կարելի է պարամետրիզացնել փարբեր եղանակներով:

Սահմանում 5.29. Եթե $\varphi(t), \psi(t) \in C^1[\alpha, \beta]$ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են, ապա L կորը կոչվում է **ոդորկ**:

Սահմանում 5.30. L կորը կոչվում է **կլորո առ կլոր ոդորկ**, եթե այն կարելի է արոտել վերջավոր թվով ոդորկ կորերի:

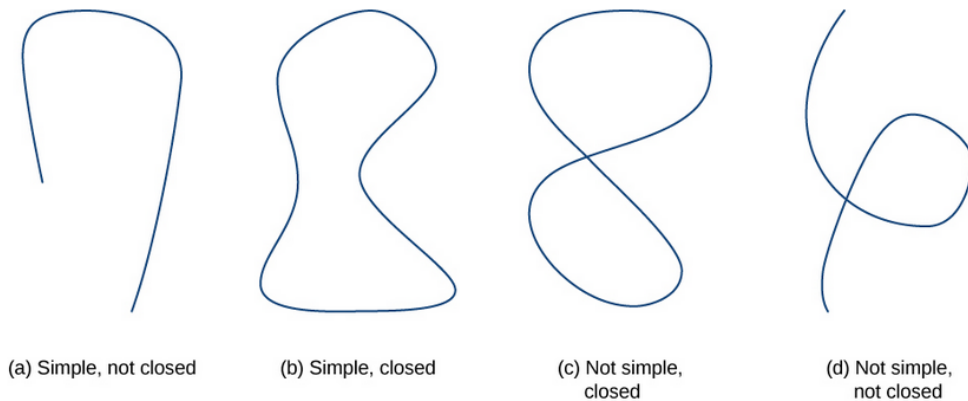
Սահմանում 5.31. Եթե L կորի սկզբնակետն ու վերջնակետը համընկնում են՝ $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = (\varphi(\beta), \psi(\beta))$, ապա կորը կոչվում է **փակ**, իսկ հակառակ դեպքում՝ **ոչ փակ**:

Սահմանում 5.32. L կորը կոչվում է **ժորդանյան** կամ **ժորդանի կոր** կամ **պարզ կոր**, եթե կորի յուրաքանչյուր $M(x, y) \in L$ կետ սրացվում է t պարամետրի միայն մեկ արժեքից:

Այլ կերպ ասած՝ t պարամետրի տարբեր արժեքներից սրացվում են կորի տարբեր կետեր: Սա պարամետրական ֆունկցիաների $\varphi(t), \psi(t)$ զույգի յուրօրինակ փոխմիարժեքություն է նշանակում:

$$\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta], \quad t_1 \neq t_2 \quad \implies \quad M_1(x_1, y_1) \neq M_2(x_2, y_2) :$$

Երկրաչափորեն սա նշանակում է, որ ժորդանյան կորն ինքն իրեն չի հատում:



Գծագիր 5.29. Տարբեր տեսակի անընդհատ կորեր՝ պարզ կամ ոչ պարզ, փակ կամ ոչ փակ

Բոլոր նկարագրված կորերը հարթ են, այսինքն՝ գտնվում են հարթության վրա: Կորերը կարող են հարթ չլինել, այլ լինել **տարածական**, այսինքն՝ $\mathbb{R}^3$ -ում: Դա լինում է այն դեպքում, երբ կորը փրված է երեք պարամետրական ֆունկցիաներով.

$$L \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) : \quad (5-98)$$

Բոլոր նախորդ դասարարությունները հավասարապես վերաբերում են տարածական կորերին:

Անցնենք կորի երկարության գաղափարին: Նշանակենք համապատասխանաբար A -ով և B -ով $L = \widetilde{AB}$ կորի սկզբնակետն ու վերջնակետը.

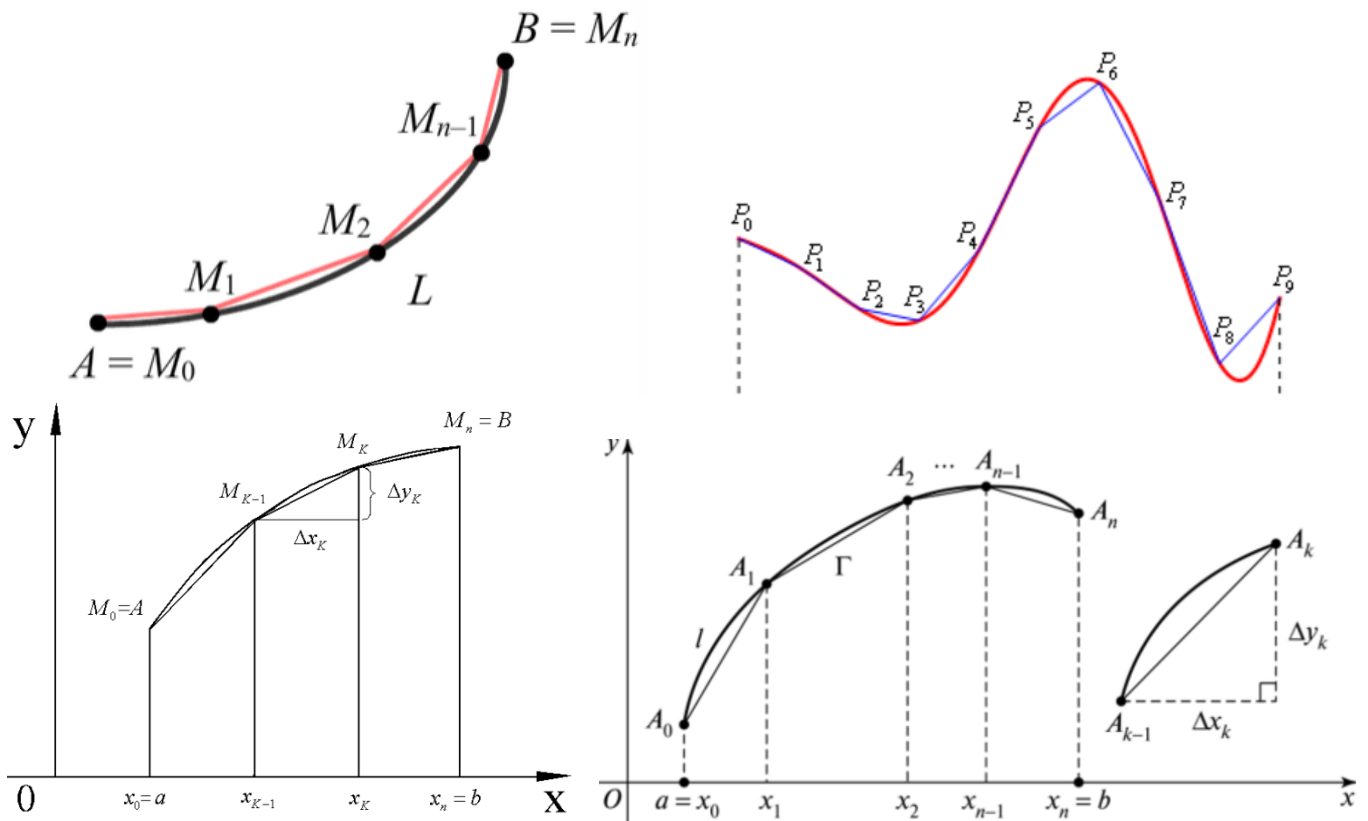
$$L = \widetilde{AB} \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta), \quad \begin{matrix} A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)), \\ B(\varphi(\beta), \psi(\beta)) : \end{matrix} \quad (5-99)$$

Տրոհենք $L = \widetilde{AB}$ կորը (t պարամետրի աճման կարգով) վերջավոր թվով կետերով.

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_k, \dots, M_{n-1}, M_n = B \in L,$$

որոնց համապատասխանում են t պարամետրի հետևյալ արժեքները՝

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta :$$



Գծագիր 5.30. Կորի փրոհումը

Տրոհման կետերով կազմենք

$$P \stackrel{\text{def}}{=} [AM_1M_2 \dots M_{n-1}B]$$

ներգծյալ բեկյալը: Բեկյալի երկարություն ասելով (նշանակենք $|P|$ -ով)՝ հասկանալու ենք այն կազմող բոլոր

$M_{k-1}M_k$ ($k = \overline{1, n}$) հաջորդականության երկարությունների գումարը՝

$$|P| = \sum_{k=1}^n |M_{k-1}M_k| :$$

Կորի փրոփան փրամագիծը բեկյալի $M_{k-1}M_k$ ($k = \overline{1, n}$) հաջորդականություններից մեծագույնն է՝

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq k \leq n} |M_{k-1}M_k| :$$

Երբ փրոփումը մանրացնում ենք և ձգտեցնում $d \rightarrow 0$, սա նշանակում է, որ ավելացնելով նորանոր փրոփան կետեր բոլոր $M_{k-1}M_k$ մասնակի աղեղներում՝ $M_{k-1}M_k$ բոլոր հաջորդականները սեղմվում են:

Սահմանում 5.33. Եթե $\exists \lim_{d \rightarrow 0} |P| \stackrel{\text{def}}{=} |L|$, ապա $|L|$ թիվը կոչվում է L **կորի երկարություն**, իսկ L կորը՝ **ուղղելի** (այսինքն՝ երկարություն ունեցող):

Նասկանալի է, որ ցանկացած բեկյալ ուղղելի կոր է: Կորի երկարությունը սահմանելիս կառուցված P ներգծյալ բեկյալի երկարությունը չի կարող գերազանցել L կորի երկարությունը՝ $|P| \leq |L|$ ցանկացած փրոփան համար: Ավելին, փրոփան մանրացման ընթացքում P ներգծյալ բեկյալի երկարությունը միայն կարող է աճել՝ $|P| \nearrow$: Այս փաստը թույլ է փախիս կորի երկարությունը սահմանող $|L| = \lim_{d \rightarrow 0} |P|$ սահմանը փոխարինել սուպրեմումով: Բեկյալի երկարությունը ներկայացնենք նրա $M_k(x_k, y_k) = M_k(\varphi(t_k), \psi(t_k))$, $k = \overline{1, n}$, հանգույցների կոորդինատներով.

$$|P| = \sum_{k=1}^n |M_{k-1}M_k| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2} :$$

Նկատենք, որ $[\alpha, \beta]$ հաջորդական առաջանում է $\{t_k\}$ փրոփում, որը համարժեք է L կորի $\{M_k\}$ փրոփանը այն իմաստով, որ

$$d = \max_{1 \leq k \leq n} |M_{k-1}M_k|, \quad \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$$

փրամագծերը համարժեք են, այսինքն $(d \rightarrow 0) \iff (\lambda \rightarrow 0)$:

Ներառալ կորի երկարությունը կարելի է ներկայացնել սուպրեմումով՝

$$|L| = \sup_{\{M_k\}} |P| = \sup_{\{M_k\}} \sum_{k=1}^n |M_{k-1}M_k|,$$

կամ

$$|L| = \sup_{\{t_k\}} \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2},$$

որպեղ սուպրեմումը վերցրած է բոլոր հնարավոր փրոփումներով:

Առանց ապացույցի բերենք ուղղելի կորերի մի քանի հատկություններ և բանաձևեր:

Նախկություն 1. Ուղղելի $L = \widetilde{AB}$ կորն օժտված է ադիտիվության հատկությամբ, այսինքն՝

$$|\widetilde{AB}| = |\widetilde{AM}| + |\widetilde{MB}|, \quad \forall M \in L :$$

Նախկություն 2. Ուղղելի L կորի $|L|$ երկարությունը կախված չէ կորի պարամետրիզացիայից:

Նախկություն 3. Ողորկ կամ կտրոր առ կտրոր ողորկ կորն ուղղելի է :

Թեորեմ 5.28. Ողորկ կամ կտրոր առ կտրոր ողորկ L կորի

$$L \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (5-100)$$

$|L|$ երկարությունը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt : \quad (5-101)$$

Մասնավորապես, եթե L կորը տրված է բացահայտ հավասարումով՝ $y = \psi(x)$ կամ $x = \varphi(y)$, ապա (5-101) բանաձևը համապատասխանաբար հանգում է

$$|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (\psi'(x))^2} dx, \quad |L| = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{(\varphi'(y))^2 + 1} dy :$$

Թեորեմ 5.29. Եթե ողորկ կամ կտրոր առ կտրոր ողորկ L կորը տրված է բևեռային կոորդինատներով՝ $r = r(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, ապա L կորի երկարությունը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta : \quad (5-102)$$

Դիտողություն 5.15. Տարածական (5-98) կորերի համար (5-101) բանաձևը վերածվում է

$$|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt : \quad (5-103)$$

Առաջադրանք. Սահմանենք հետևյալ անընդհատ ֆունկցիան՝

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 : \end{cases}$$

Ապացուցեք, որ թեև $f(x) \in C[0, 1]$, սակայն $y = f(x)$ բացահայտ հավասարումով տրված կորն ուղղելի չէ :

Ներաբերվող ընթերցողն այս ֆունկցիան իր գրաֆիկի հետ կարող է գտնել հեղագայում մեկ այլ թեմայի շրջանակներում, քան զույգ 8-ի 8.11 բաժինը:

5.28 Ինտեգրալի որոշ փոփոխական կիրառություններ,

Լորենցի կոր և Ջինսի գործակից

Որոշյալ ինտեգրալներով և համապատասխան կորագիծ սեղանների մակերեսներով կարելի է արտահայտել փոփոխական փարբեր մեծություններ: Ծանոթանանք այդպես կոչված **Լորենցի կորերի** հետ, որոնք կոչված են ցույց տալու բնակչության եկամուրների անհավասարությունը: Բայց ինչպե՞ս սահմանել մի ֆունկցիա, որը ցույց կտա բնակչության եկամուրների անհավասարությունը որպես ինչ-որ թվային մեծություն:

Ըստ սահմանման, **Լորենցի կորը** (կամ **Լորենցի $L(x)$ ֆունկցիան**) չափում է փվյալ հանրության ամբողջ հարստության այն մասնաբաժինը, որը վաստակում է հանրության ամենաքիչ եկամուրներով անդամների փվյալ քանակը: Որոշակիության համար վերցնենք փվյալ երկրի ընդհանուր փարեկան ազգային եկամուրը որպես 100% և դրա վրա բաժանենք երկրի ամենացածր վարձատրությամբ աշխատողների 100 $x\%$ ($0 \leq x \leq 1$): Արդյունքում ստացված կոպորակային թիվը (մասնաբաժինը) Լորենցի ֆունկցիայի $L(x)$ արժեքն է:

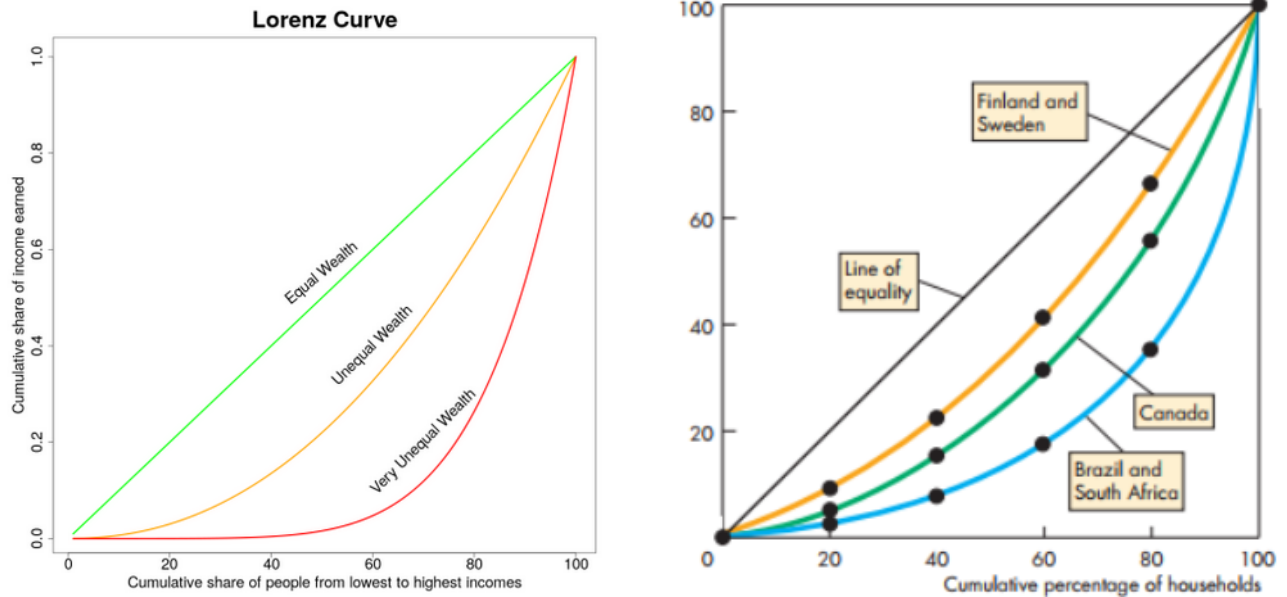
Օրինակ, երկրի՝ ամենաքիչ եկամուրներով աշխատողների 30% ենթադրենք վաստակում է երկրի ամբողջ փարեկան եկամտի 10%: Այդ դեպքում $L(0,3) = 0,1$: Մեկ այլ արգումենտի համար, օրինակ, հնարավոր է $L(0,5) = 0,25$, սա նշանակում է, որ ամենացածր վարձատրությամբ աշխատողների կեսը ստանում է ամբողջ փարեկան եկամտի մեկ քառորդը:

Լորենցի ֆունկցիայի սահմանումից անմիջապես հետևում է նրա մի քանի պարզ հատկություններ.

1. $L : [0, 1] \mapsto [0, 1]$, այսինքն՝ $0 \leq x \leq 1$ որոշման փիրույթն է և $0 \leq L(x) \leq 1$ արժեքների փիրույթն է այն պարճառով, որ Լորենցի ֆունկցիայի L ՝ արգումենտը, և՛ արժեքը մասնաբաժիններ են:
2. $L(x) \nearrow$, Լորենցի ֆունկցիան աճող է իր որոշման փիրույթում, քանի որ ավելի շատ աշխատողին հասնում է ավելի շատ եկամուր:
3. $L(0) = 0$, քանի որ եթե չկա աշխատող՝ չկա եկամուր:
4. $L(1) = 1$, քանի որ ամբողջ հանրությանը հասնում է ամբողջ հարստությունը:
5. $L(x) \leq x$ ($0 \leq x \leq 1$), քանի որ ամենացածր վարձատրությամբ աշխատողների x մասնաբաժինը չի կարող գերազանցել ամբողջ եկամտի x մասնաբաժինը:

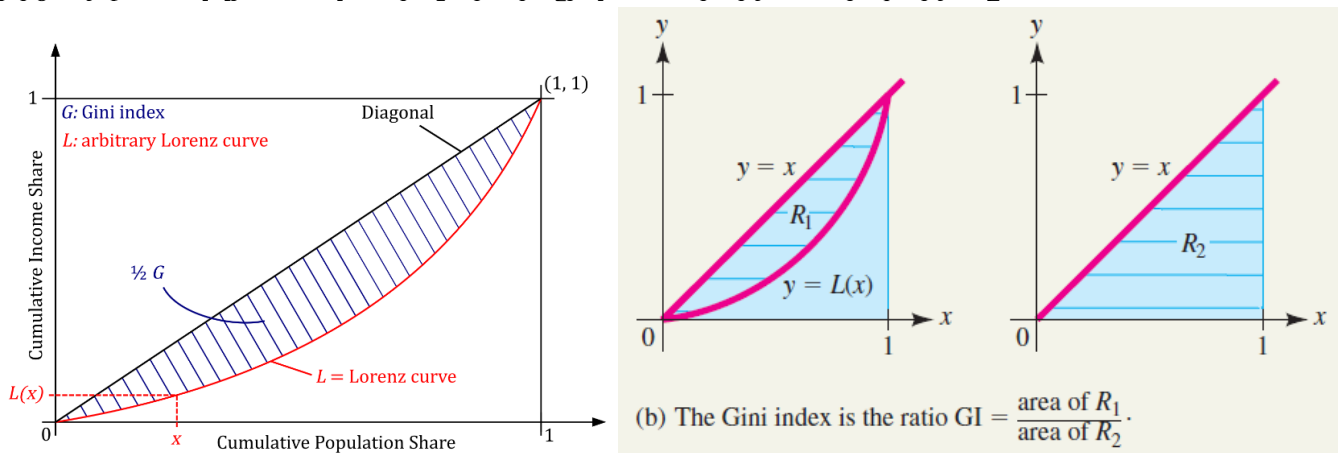
Ստորև ներկայացված է Լորենցի կորերի մի քանի բնորոշ գրաֆիկներ:

$y = x$ ֆունկցիայի հափվածը ներկայացնում է լիակատար հավասարության գիծը, իդեալական այն դեպքը, երբ հարստությունը հանրության մեջ բաշխված է հավասարաչափ:



Պատկեր 5.31. Լորենցի կորեր

Որքան ավելի մոտ է Լորենցի կորը $y = x$ լիակատար հավասարության գծին, այնքան ավելի հավասարաչափ է բաշխված հանրության հարստությունը, որքան ավելի հեռու է Լորենցի կորը լիակատար հավասարության գծից, այնքան ավելի անհավասարաչափ է բաշխված հանրության հարստությունը:



Պատկեր 5.32. Լորենցի կորը և Զինիի գործակիցը

Ներկաբար Լորենցի կորի շեղման չափը լիակատար հավասարության գծից որոշվում է **պատկեր 5.32-ի** սովորագծված մակերեսով (ձախից) կամ նույնը R_1 փրությունի մակերեսով (աջից), և այն կարելի է համարել հանրության անհավասարաչափության ցուցիչ, և նրա միջոցով սահմանում են հետևյալ մեծությունը:

R_1 -ի մակերեսը հարաբերում են $y = x$ լիակատար հավասարության գծից ներքև ընկած $|R_2| = \frac{1}{2}$ մակերեսին և սահմանում են այդպես կոչված **Զինիի գործակիցը** (կամ **եկամրային անհավասարության ինդեքս**), որը հարստության բաշխման ևս մեկ ցուցիչ է .

$$GI \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|R_1|}{|R_2|} = \frac{\int_0^1 (x - L(x)) dx}{1/2} = 2 \int_0^1 (x - L(x)) dx :$$

Պարզ է, որ $0 \leq GI \leq 1$, և Զինիի գործակցի $GI = 0$ արժեքը նշանակում է եկամտի բաշխման լիակատար հավասարություն, իսկ $GI = 1$ արժեքը նշանակում է եկամտի բաշխման լիակատար անհավասարություն:

Որքան փոքր է Զինիի գործակցը, այնքան ավելի հավասարաչափ է բաշխված հանրության հարստությունը, որքան ավելի մեծ է Զինիի գործակցը, այնքան ավելի անհավասարաչափ է բաշխված հանրության հարստությունը:

Ներառված է համեմարել հաջորդող աղյուսակում փարբեր երկրների Զինիի գործակցները:

TABLE 5.1 Gini Indices for Selected Countries

Country	Gini Index
United States	0.450
Brazil	0.567
Canada	0.321
Denmark	0.290
Germany	0.270
Japan	0.381
South Africa	0.650
Panama	0.561
Thailand	0.430
United Kingdom	0.340

Գծագիր 5.33. Որոշ երկրների Զինիի գործակցները

Վերջում նշենք, որ հարստության բաշխումը պարպաղիի չէ դիֆարկել ամբողջ երկրի և ամբողջ հասարակության շրջանակներում: Կարելի է սահմանափակվել հանրության ինչ-որ խմբով՝ փարիքային, սեռային, մասնագիտական, աշխարհագրական և այլն:

Օրինակ 5.18. Նայրնի և եկամտի բաշխման L որենցի կորերը աբամնարույթների և ֆինանսիստների հանրությունների համար:

$$L_1(x) = x^{1,7} \quad \text{և} \quad L_2(x) = 0,8x^2 + 0,2x$$

համապարասիսանարար: Ո՞ր մասնագիտության համար է եկամուրն ավելի արդար բաշխվում:

Լուծումը՝ ինքնուրույն:

5.29 Անիսկական ինտեգրալ (1-ին սեռի)

Ծանոթանանք այդպես կոչված **անիսկական ինտեգրալների հետ (1-ին և 2-րդ սեռի)**, որոնք Ռիմանի որոշյալ ինտեգրալի ընդհանրացումներ են:

Նիշենք, որ $\int_a^b f(x) dx$ որոշյալ ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ էր երկու պայման՝

- (i) ինտեգրման $[a, b] \subset \mathbb{R}$ միջակայքը վերջավոր է (սահմանափակ), այսինքն՝ $-\infty < a \leq b < +\infty$;
- (ii) ենթինտեգրալային $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է՝ $|f(x)| \leq M, x \in [a, b]$:

Մինչդեռ կիրառություններում հաճախ խիստ անհրաժեշտություն է ծագում կարողանալ ինտեգրել նշված (i)- (ii) պայմանները չբավարարող ֆունկցիաներ: Այլ կերպ ասած՝ պետք է փորձել հրաժարվել (i)-(ii) պայմաններից և դրանով ընդհանրացնել Ռիմանի որոշյալ ինտեգրալը: Թույլ ենք փալու, որ

ա) ինտեգրման միջակայքը լինի անվերջ (անսահմանափակ), այսինքն՝ սահմանելու ենք հետևյալ տեսքի ինտեգրալներ՝

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

որտեղ ինտեգրման միջակայքը ճառագայթ է կամ ամբողջ թվային առանցքը;

բ) ենթինտեգրալային $f(x)$ ֆունկցիան լինի անսահմանափակ:

Սահմանում 5.34. *Դիցուք $f(x) \in \mathcal{R}[a, A]$ ցանկացած $A > a$ թվի համար, այսինքն՝ f ֆունկցիան ինտեգրելի է (ըստ Ռիմանի) ցանկացած վերջավոր հատվածում: Եթե գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝*

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx \stackrel{\text{նշ.}}{=} \int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad (5-104)$$

ապա այն կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի 1-ին սեռի անիսկական ինտեգրալ $[a, +\infty)$ միջակայքով:

Եթե (5-104) սահմանը գոյություն ունի, այսինքն՝ վերջավոր թիվ է, ապա կասենք, որ (5-104) անիսկական ինտեգրալը **գոյաւմէր** է կամ գոյություն ունի: Նախառակ դեպքում, երբ (5-104) սահմանը գոյություն չունի, կասենք, որ (5-104) անիսկական ինտեգրալը **դաւաւմէր** է կամ գոյություն չունի:

Նման եղանակով սահմանում են այլ միջակայքերով անիսկական ինտեգրալներ, օրինակ՝ $(-\infty, b]$ ճառագայթով.

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx : \quad (5-105)$$

Ամբողջ իրական առանցքով անիսկական ինտեգրալը կարելի է սահմանել (5-104) և (5-105) սահմանումների միջոցով, ընդամենը րոտհում ենք ինտեգրալը որևէ $a \in \mathbb{R}$ կետով՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad (5-106)$$

որտեղ (5-106)-ի աջ կողմում երկու անիսկական ինտեգրալներն արդեն սահմանված են:

Անվերջ սահմաններով բոլոր (5-104)-(5-106) անիսկական ինտեգրալները կոչվում են **1-ին սեռի**:

Նաշվենք 1-ին սեռի պարզագույն անիսկական ինտեգրալներ:

Օրինակ 5.19.
$$I_2 \stackrel{\text{նշ.}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = ?$$

Կիրառենք (5-104) սահմանումը, ըստ որի՝ ինտեգրման միջակայքը պետք է կտրել $A > 1$ կամայական թվով, դրանով կազմել սովորական որոշյալ ինտեգրալ $[1, A]$ հատվածով, հետո հաշվել այն և ամենավերջում սահմանային անցում կատարել, երբ $A \rightarrow +\infty$.

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{-1}{x} \right|_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{A} \right) = 1 : \quad (5-107)$$

Նաշվեցինք I_2 անիսկական ինտեգրալը և միաժամանակ ցույց տվեցինք նրա զուգամիտությունը: Ինտեգրալը հաշվելիս մենք խիստ հետևեցինք (5-104) սահմանմանը, ինչը հասկանալի է, քանի որ, բացի սահմանումից, այս պահին մեզ հայտնի չէ անիսկական ինտեգրալների մասին որևէ այլ հատկություն: Այնուամենայնիվ, ներկայացնենք (5-107) հաշվարկի կարճ և հարմար գրելաձևը.

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left. \frac{-1}{x} \right|_1^{+\infty} = - \left(0 - \frac{1}{1} \right) = 1 : \quad (5-108)$$

Օրինակ 5.20.
$$I_p \stackrel{\text{նշ.}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = ? \quad (p \in \mathbb{R})$$

Պահանջվում է հետազոտել I_p ինտեգրալի զուգամիտությունը և հաշվել, երբ այն զուգամեր է:

Դարձյալ ունենք դրական ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ: Նախորդ օրինակի համեմատ սա ավելի ընդհանուր ինտեգրալ է, քանի որ պարունակում է կամայական իրական $p \in \mathbb{R}$ պարամետր: Կարելի է կանխատեսել, որ p պարամետրի որոշ արժեքների դեպքում I_p ինտեգրալը կլինի զուգամեր, կգրենք $I_p < +\infty$, և հնարավոր կլինի այն հաշվել, իսկ p պարամետրի մնացած արժեքների դեպքում I_p ինտեգրալը կլինի տարամեր, կգրենք $I_p = +\infty$:

Ներազոտումը սկսենք $p = 1$ հատուկ դեպքից, երբ նախնական լոգարիթմական ֆունկցիա է.

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln A = +\infty, \quad (5-109)$$

կամ նույնը կարճ գրելաձևով՝

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty :$$

Ըստ սահմանման՝ սա նշանակում է, որ I_1 ինտեգրալը տարամեր է, գոյություն չունի՝ $I_1 = +\infty$:

p պարամետրի մնացած $p \neq 1$ արժեքների դեպքում որպես նախնական հանդես է գալու աստիճանային ֆունկցիա, և ուրեմն այդ դեպքերը միասին քննարկենք.

$$I_p = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A x^{-p} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-1}{p-1} \left(\frac{1}{A^{p-1}} - 1 \right) : \quad (5-110)$$

Դարձյալ մենք խիստ հեղինակներ (5-104) սահմանմանը, և մեզ մնում է կատարել վերջին սահմանային անցումը (5-110)-ում: Եվ այստեղ նկատում ենք, որ փաթեթի p -երի համար սրացվում են փաթեթի արդյունքներ:

Եթե $p > 1$, ապա (5-110)-ում սահմանը գոյություն ունի, I_p ինտեգրալը զուգամեր է, և կարող ենք այն հաշվել.

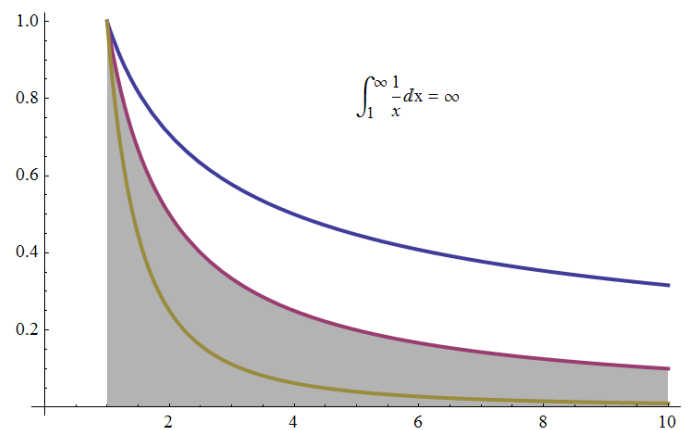
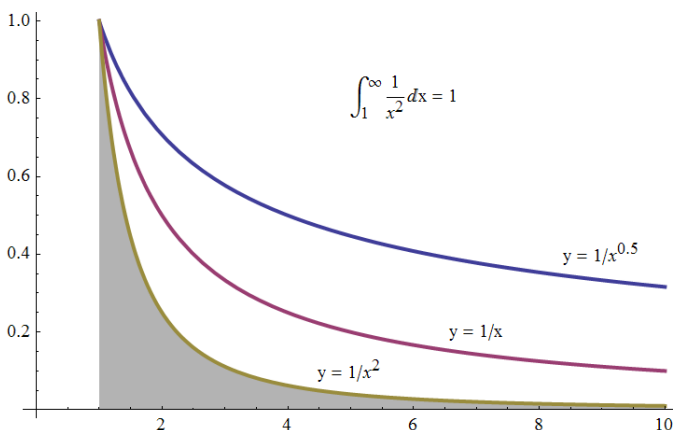
$$I_p = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-1}{p-1} \left(\frac{1}{A^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1} \quad (p > 1):$$

Իսկ եթե $p < 1$, ապա (5-110)-ում սահմանը գոյություն չունի, I_p ինտեգրալը փաթառներ է.

$$I_p = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} (A^{1-p} - 1) = +\infty \quad (p < 1):$$

Ամփոփենք, քորի p -երի համար մենք ունենք վերջնական փաթառիսան՝

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{եթե } p > 1, \text{ ապա} & \boxed{I_p = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx < +\infty}, \quad \text{զուգամեր է;} \\ \text{եթե } p \leq 1, \text{ ապա} & \boxed{I_p = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = +\infty}, \quad \text{փաթառներ է:} \end{array} \right. \quad (5-111)$$



Գծագիր 5.34. Աստիճանային ֆունկցիաների անիսկական ինտեգրալների գրաֆիկական պատկերումը

Նկատենք, որ երբ I_p ինտեգրալը զուգամեր է ($p > 1$), ենթինտեգրալային $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ֆունկցիան սահմանափակ է ինտեգրման $x \in [1, +\infty)$ միջակայքում, անգամ անվերջ փոքր է $+\infty$ -ում:

Սակայն դա անհրաժեշտ պայման չէ, այսինքն՝ զուգամեր ինտեգրալի ենթինտեգրալային ֆունկցիան կարող է լինել անսահմանափակ, ինչպես հաջորդ օրինակում:

Օրինակ 5.21. $J \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^{+\infty} f(x) dx$, որտեղ $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} n, & x = n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \notin \mathbb{N} : \end{cases}$

Ապացուցեք ինքնուրույն, որ J ինտեգրալը զուգամեր է, և հաշվեք նրա արժեքը:

5.30 Զուգամիտության Կոշու սկզբունքն 1-ին սեռի

անիսկական ինտեգրալների համար

Ֆունկցիայի սահմանի տեսությունից մենք գիտենք ֆունկցիայի սահմանի գոյության անհրաժեշտ և բավարար մի պայման, որը կրում է Կոշու անունը (**Կոշու պայման**), իսկ համապատասխան թեորեմը կոչվում է **զուգամիտության Կոշու սկզբունք**: Քանի որ անիսկական ինտեգրալը սահման է, քան (5-104)-(5-106), ապա այդ սահմանի համար նույնպես տեղի ունի զուգամիտության Կոշու սկզբունքը:

Դիտարկենք 1-ին սեռի հետևյալ ինտեգրալը՝

$$I \stackrel{\text{նշ.}}{=} \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A), \quad (5-112)$$

որտեղ նշանակել ենք այդպես կոչված կտրած ինտեգրալը՝

$$F(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^A f(x) dx, \quad A > a: \quad (5-113)$$

Ձևակերպենք (5-105) սահմանի համար Կոշու պայմանը և Կոշու սկզբունքը.

$$\left(\exists I = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) \right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0 \exists B = B(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } \forall A_1, A_2 > B \implies |F(A_1) - F(A_2)| < \varepsilon \right): \quad (5-114)$$

Վերաձևակերպելով (5-114) Կոշու սկզբունքը (5-112) ինտեգրալի համար՝ կստանանք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 5.30. (Զուգամիտության Կոշու սկզբունքն 1-ին սեռի անիսկական ինտեգրալների համար)

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ անիսկական ինտեգրալի գոյության (զուգամիտության) համար անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ (Կոշու) պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B = B(\varepsilon) > a \text{ s.t. } \forall A_1, A_2 > B \implies \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon: \quad (5-115)$$

Դիտողություն 5.16. Նախկինում է հիշել, որ (5-112) անիսկական ինտեգրալի գոյության (զուգամիտության) համար նախապես և անհրաժեշտաբար պետք է որոշված լինի f ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը (ըստ Ռիմանի) ցանկացած վերջավոր հատվածում՝ $f(x) \in \mathcal{R}[a, A] \quad \forall A > a$: Դրանից հետո (5-112) անիսկական ինտեգրալի զուգամիտության հարցը կախված կլինի միայն f ֆունկցիայի վարքից $+\infty$ -ի կամայականորեն փոքր $(b, +\infty)$ շրջակայքում: Այդ շրջակայքից դուրս, այսինքն $[a, b]$ վերջավոր միջակայքերում, f ֆունկցիայի վարքը բացարձակապես չի ազդում զուգամիտության վրա, և այդ վարքը կարելի է անտեսել: Այս երևույթը տեսանելի է կտրած (5-113) ինտեգրալի (5-112) սահմանում, ինչպես նաև (5-115) Կոշու պայմանում: Եզրակացնում ենք, որ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ և $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ ($\forall b > a$) անիսկական ինտեգրալները զուգամիտ կամ փախուստ են միաժամանակ: Այդպիսի ինտեգրալները կոչվում են **համարժեք**, և գրում են՝ $\int_a^{+\infty} f(x) dx \sim \int_b^{+\infty} f(x) dx$:

5.31 Դրական ինտեգրալների բաղդարման թեորեմներ

Եթե ենթինտեգրալային ֆունկցիան ոչ բացասական է ինտեգրման միջակայքում, ապա անհատական ինտեգրալը կանվանենք դրական:

Շարունակենք $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 1-ին սեռի անհատական ինտեգրալների զուգամիությունը հետազոտումը:

Միշտ կհամարենք, որ $f(x) \in \mathcal{R}[a, A] \quad \forall A > a$, իսկ այս բաժնում նաև՝ $f(x) \geq 0, x \in [a, +\infty)$: Քանի որ

$F(A) = \int_a^A f(x) dx$ կտրած ինտեգրալն աճող է ըստ A -ի, ապա F -ը կարող է ձգվել (երբ $A \rightarrow +\infty$) միայն

վերջավոր դրական (ոչ բացասական) թվին կամ $+\infty$ -ին: Այսինքն $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ անհատական ինտեգրալը կան զուգամեր է, կան փարամիություն է $+\infty$ -ին:

Ինտեգրալների զուգամիության հարցում հետևյալ թեորեմը կենտրոնական դեր է կատարում:

Նաշվի առնելով թեորեմի կարևորությունը, նրա հետագա կիրառությունները և ապացույցի մեթոդական նշանակությունը՝ հաջորդող թեորեմը կապացուցենք երկու եղանակով:

Թեորեմ 5.31. (Դրական ինտեգրալների բաղդարման հիմնական թեորեմ)

Դիցուք $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, A] \quad \forall A > a$ և $\boxed{0 \leq f(x) \leq g(x)}, x > a$: Այդ դեպքում՝

$$u) \quad \boxed{\int_a^{+\infty} g(x) dx < +\infty \text{ (զուգամեր է)}} \implies \boxed{\int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty \text{ (զուգամեր է)}};$$

$$բ) \quad \boxed{\int_a^{+\infty} f(x) dx = +\infty \text{ (փարամեր է)}} \implies \boxed{\int_a^{+\infty} g(x) dx = +\infty \text{ (փարամեր է)}}:$$

Ապացույց. ա) 1-ին եղանակ. Նշանակենք տրված ֆունկցիաների կտրած ինտեգրալները.

$$\boxed{F(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^A f(x) dx}, \quad \boxed{G(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^A g(x) dx}, \quad A > a:$$

Քանի որ ենթինտեգրալային ֆունկցիաները ոչ բացասական են, $0 \leq f(x) \leq g(x), x > a$, ապա $F(A)$ և $G(A)$ կտրած ինտեգրալներն աճող ֆունկցիաներ են.

$$F(A) \nearrow, \quad G(A) \nearrow, \quad A > a, \quad \text{և} \quad 0 \leq F(A) \leq G(A), \quad A > a: \quad (5-116)$$

Ըստ պայմանի՝ $g(x)$ ֆունկցիայի անհատական ինտեգրալը զուգամեր է, այսինքն՝ $\exists \lim_{A \rightarrow +\infty} G(A)$:

Այսպեղից հետևում է, որ $G(A)$ ֆունկցիան սահմանափակ է, և ուրեմն համաձայն (5-116)-ի՝ $F(A)$ ֆունկցիան նույնպես սահմանափակ է: Որպես մոնոտոն աճող և (վերևից) սահմանափակ ֆունկցիա՝ F -ը պարտադիր սահման կունենա $+\infty$ -ում՝ $\exists \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$, ինչը նշանակում է, որ $f(x)$ ֆունկցիայի անհատական ինտեգրալը զուգամեր է՝ $\int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty$:

2-րդ եղանակ. Քանի որ ըստ պայմանի $g(x)$ ֆունկցիայի անհսկական ինտեգրալը զուգամետ է ,

$\int_a^{+\infty} g(x) dx < +\infty$, ապա նրա համար ճիշտ է զուգամիտությանը համարժեք (5-115) Կոշու պայմանը, որն Կոշու սկզբունքը (Թեորեմ 5.30),

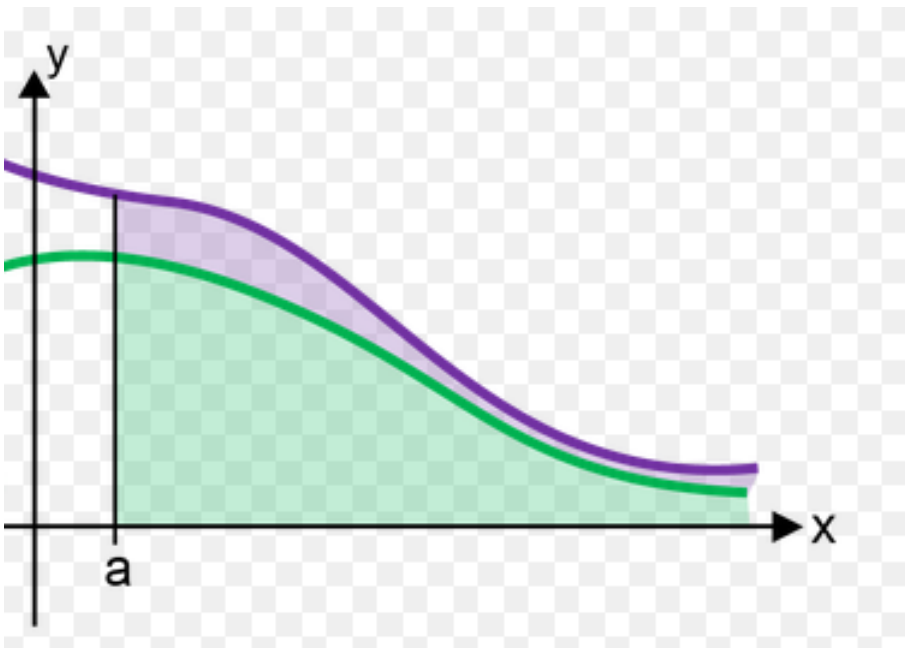
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B = B(\varepsilon) > a \quad \text{s.t.} \quad \forall A_1, A_2 > B \quad \implies \quad \int_{A_1}^{A_2} g(x) dx < \varepsilon : \quad (5-117)$$

Մյուս կողմից, f -ը չի գերազանցում g -ն, $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x > a$, հետևաբար (5-117) Կոշու պայմանը արդի ունի նաև f -ի համար,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B = B(\varepsilon) > a \quad \text{s.t.} \quad \forall A_1, A_2 > B \quad \implies \quad \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x) dx < \varepsilon : \quad (5-118)$$

Նամաձայն Կոշու սկզբունքի (Թեորեմ 5.30)՝ $f(x)$ ֆունկցիայի անհսկական ինտեգրալը նույնպես զուգամետ է , $\int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty$:

Թեորեմի հաջորդ **բ)** պնդումը պարզապես **ա)** պնդման կրկնությունն է ժխտման արեմիներով: Ապացույցն անմիջապես հետևում է հակառակ ենթադրություն կադարելով: $\square$



Գծագիր 5.35. Բաղդարման թեորեմի գրաֆիկական պարկերումը

Ներկանք 5.9.

Եթե $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ ինտեգրալը զուգամետ է , ապա $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ինտեգրալը ևս զուգամետ է :

Ապացույց. Բավական է նախորդ թեորեմի 2-րդ ապացույցը կիրառել $g(x) = |f(x)|$ ֆունկցիայի համար: $\square$

Նաջորդ բաղդարման թեորեմը փաստորեն նախորդ թեորեմի հետևանքն է , բայց ինքնին կիրառական նշանակություն ունի:

Թեորեմ 5.32. Դիցուք $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, A] \quad \forall A > a$ և $\boxed{f(x) \geq 0, g(x) \geq 0}, x > a :$

Եթե գոյություն ունի հետևյալ դրական սահմանը՝ $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{նշ}}{=} K > 0$, ապա f -ի և g -ի ինտեգրալները համարժեք են՝

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x) dx \sim \int_a^{+\infty} g(x) dx},$$

այսինքն՝ զուգամեր կամ տարամեր են միաժամանակ:

Այլ կերպ ասած՝ նրանցից մեկի զուգամիությունից (տարամիությունից) հետևում է մյուսի զուգամիությունը (տարամիությունը):

Մասնավորապես, երբ $K = 1$, ստանում ենք հետևյալ պարզ ձևակերպումը՝

$$\boxed{f(x) \sim g(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \implies \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx \sim \int_a^{+\infty} g(x) dx} :$$

Այսինքն՝ ֆունկցիաների համարժեքությունից եզակի կետում (այսպես՝ $+\infty$ -ում) հետևում է նրանց ինտեգրալների համարժեքությունը:

Ապացույց. Բավական է գրել փրկած $K > 0$ սահմանի սահմանումը, օրինակ՝ $\varepsilon = \frac{K}{2} > 0$ թվի համար

$$\exists B = B(K) > a \quad \text{s.t.} \quad \forall x > B \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \frac{K}{2},$$

կամ մոդուլը բացելուց հետո՝

$$\boxed{\frac{K}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3K}{2} g(x)} \quad \forall x > B : \quad (5-119)$$

Սրացված (5-119) երկկողմանի անհավասարությունը թույլ է տալիս կիրառել բաղդաբանական իմնական թեորեմը (Թեորեմ 5.31) երկու անգամ և երկու ուղղություններով՝ գալով g -ից f ֆունկցիային և հակադարձը: $\square$

Դիտողություն 5.17. Ընթերցողն իհարկե արդեն նկատեց, ինչ կարևորություն է տրվում անիսկական ինտեգրալի զուգամիության հարցին: Դա բնական է, քանի որ անիսկական ինտեգրալը նախ պետք է գոյություն ունենա, որից հետո միայն այն կարելի է կիրառել տարբեր խնդիրներում: Մյուս կողմից, անիսկական ինտեգրալը որոշյալ ինտեգրալի սահման է: Դա հանգեցնում է նրան, որ որոշյալ ինտեգրալների գրեթե բոլոր հատկությունները տարածվում են անիսկական ինտեգրալների վրա: Այդ հատկություններից են՝ ինտեգրալի գծայնությունը, ադիտիվությունը, գնահատականները, Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը, փոփոխականի փոխարինման և մասերով ինտեգրման բանաձևերը և այլն: Նշված հատկությունները մանրամասն չենք հիմնավորի, սակայն դրանց բոլորի համար որպես նախապայման պետք է դրված լինի մասնակից անիսկական ինտեգրալների զուգամիության պահանջը: Տակառակ դեպքում նշված հատկությունները կհաստատվեն:

5.32 Անհսկական ինտեգրալների բացարձակ և պայմանական զուգամիությունը

Սահմանում 5.35. Եթե զուգամենք է $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ դրական անհսկական ինտեգրալը, ապա $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ անհսկական ինտեգրալը կոչվում է **բացարձակ զուգամենք**, իսկ $f(x)$ ֆունկցիան՝ **բացարձակ ինտեգրելի** $[a, +\infty)$ միջակայքում:

Սահմանում 5.36. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ անհսկական ինտեգրալը կոչվում է **պայմանականորեն** (կամ **ոչ բացարձակ**) **զուգամենք**, եթե $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ինտեգրալը զուգամենք է, իսկ $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx = +\infty$ ինտեգրալը՝ տարամենք:

Հասկանալի է, որ դրական (կամ բացասական) ինտեգրալների համար բացարձակ և սովորական զուգամիությունները համընկնում են: Ուրեմն ինտեգրալների բացարձակ և պայմանական զուգամիությունները իմաստ ունի դիտարկել միայն նշանափոխ $f(x)$ ֆունկցիաների համար:

Դրական ինտեգրալների զուգամիությունը հեղադրվելու համար մենք արդեն գիտենք բավականին արդյունավետ բաղդաբան թեորեմներ: Հաջորդ թեորեմը (հայրանիշը) թույլ է տալիս պարզել նշանափոխ $f(x)$ ֆունկցիաների ինտեգրալների զուգամիությունը:

Թեորեմ 5.33. (Աբել-Դիրիխլեի 1-ին հայրանիշ)

Դիցուք $[a, +\infty)$ միջակայքում անընդհատ $f(x) \in C[a, +\infty)$ ֆունկցիան և $g(x)$ մոնոտոն ֆունկցիան բավարարում են հետևյալ պայմանները.

ա1) f -ի նախնականը սահմանափակ ֆունկցիա է, այսինքն՝

$$\boxed{F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t) dt}, \quad |F(x)| \leq M = \text{const}, \quad x \geq a;$$

բ1) Անվերջում $g(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն ձգվում է զրոյի, այսինքն՝

$$\left[\begin{array}{ll} \text{կամ} & g(x) \searrow 0, \\ \text{կամ} & g(x) \nearrow 0, \end{array} \right. \quad \text{երբ} \quad x \rightarrow +\infty :$$

Այդ դեպքում

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx} \quad (5-120)$$

ինտեգրալը զուգամենք է:

Ապացույց. Թեև այս հայտարարիչը ճիշտ է ձևակերպված ընդհանրության մեջ, ապացույցը կիրականացնենք մեկ լրացուցիչ, սահմանափակող պայմանի դեպքում: Կենթադրենք, որ $g(x) \in C^1[a, +\infty)$, g ֆունկցիան ողորկ է: Այս ոչ պարբադիր ենթադրությունն արվում է, որպեսզի պարզեցնենք ապացույցը և կիրառենք մասերով ինտեգրման բանաձևը: Բացի այդ, առանց խախտելու ընդհանրությունը **բ1)** պայմանում որոշակիության համար ենթադրենք, որ g -ն մոնոտոն նվազում է, այսինքն՝ $\boxed{g(x) \searrow 0}$, երբ $x \rightarrow +\infty$: Մոնոտոն նվազումը մասնավորապես նշանակում է, որ g -ի ածանցյալը բացասական է (ոչ դրական)՝ $\boxed{g'(x) \leq 0}$, $x > a$: Ներկայացնենք նաև g -ի սահմանը ε -լեզվով.

$$g(x) \searrow 0 \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B = B(\varepsilon) > a \quad \text{s.t.} \quad \forall x > B \quad \boxed{g(x) < \frac{\varepsilon}{2M}}, \quad (5-121)$$

որպեսզի $2M > 0$ հաստատվումի զուտ փոխնիկական նշանակությունը կերևա քիչ անց:

Որպեսզի ապացուցենք (5-120) ինտեգրալի զուգամիությունը, ստուգենք նրա Կոշու պայմանը: Վերցնենք կամայական $\forall A_1, A_2$, $a < A_1 < A_2 < +\infty$, թվեր և կազմենք հետևյալ կորած ինտեգրալը և մասերով ինտեգրենք.

$$\begin{aligned} \int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx &= \int_{A_1}^{A_2} g(x) dF(x) = F(x) g(x) \Big|_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} F(x) dg(x) = \\ &= F(A_2) g(A_2) - F(A_1) g(A_1) - \int_{A_1}^{A_2} F(x) g'(x) dx : \end{aligned} \quad (5-122)$$

Այժմ (5-122)-ը գնահատենք մոդուլով՝ կիրառելով եռանկյան անհավասարությունը և օգտվելով թեորեմի պայմաններից և մեր ենթադրություններից.

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx \right| &\leq |F(A_2)| g(A_2) + |F(A_1)| g(A_1) + \int_{A_1}^{A_2} |F(x) g'(x)| dx \leq \\ &\leq M \left(g(A_2) + g(A_1) + \int_{A_1}^{A_2} |g'(x)| dx \right) = \\ &= M \left(g(A_2) + g(A_1) - \int_{A_1}^{A_2} g'(x) dx \right) = \\ &= M \left(g(A_2) + g(A_1) - g(x) \Big|_{A_1}^{A_2} \right) = \\ &= M \left(g(A_2) + g(A_1) - g(A_2) + g(A_1) \right) = 2M g(A_1) : \end{aligned} \quad (5-123)$$

Փիքսած $\varepsilon > 0$ համար ընտրենք $B > a$ թիվը (5-121) պայմանից և պահանջենք, որ $\boxed{A_2 > A_1 > B}$: Այդ դեպքում կարող ենք օգտվել (5-121) պայմանից և շարունակել (5-123)-ի գնահատականը.

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx \right| \leq 2M g(A_1) < \varepsilon \quad \forall A_2 > A_1 > B :$$

Սա նշանակում է, որ (5-120) ինտեգրալի համար փեղի ունի Կոշու պայմանը, և համաձայն Կոշու սկզբունքի անիսկական ինտեգրալների համար (Թեորեմ 5.30)՝ (5-120) ինտեգրալը զուգամի է: □

Նաջորդ հայրանիշը փաստորեն համարժեք է առաջինին, միայն պայմանների մեջ որոշակի փոփոխություններ կարվեն, այն է՝ **ա1)** պայմանը մի փոքր կուժեղացնենք, իսկ **բ1)** պայմանը՝ կթուլացնենք:

Թեորեմ 5.34. (Աբել-Դիրիխլեի 2-րդ հայրանիշ)

Դիցուք $[a, +\infty)$ միջակայքում անընդհատ $f(x) \in C[a, +\infty)$ ֆունկցիան և $g(x)$ մոնոտոն ֆունկցիան բավարարում են հետևյալ պայմանները.

ա2) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ինտեգրալը զուգամեր է ;

բ2) g -ն սահմանափակ մոնոտոն ֆունկցիա է :

Այդ դեպքում նույն (5-120) ինտեգրալը՝

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx} \quad \text{զուգամեր է :} \quad (5-124)$$

Ապացույց. Ինչպես րեւոմ ենք, հայրանիշի նպարակը նույնն է՝ (5-124) ինտեգրալի զուգամիությունը, փոխվել են միայն **ա)** և **բ)** պայմանները: Նկարենք, որ f -ի վրա դրվող պայմանն ուժեղացել է , քանի որ

$$\text{ա2)} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$$

ինտեգրալի զուգամիությունից անհրաժեշտաբար հետևում է $F(x)$ նախնականի (կարած ինտեգրալի) սահմանափակությունը:

Այնուամենայնիվ, ապացույցը բերվում է 1-ին հայրանիշին՝ Թեորեմ 5.33-ին: Քանի որ ըստ պայմանի $g(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է և մոնոտոն $[a, +\infty)$ միջակայքում, ապա $+\infty$ -ում $g(x)$ ֆունկցիան պարտադիր (վերջավոր) սահման կունենա՝ $\exists \boxed{K \stackrel{\text{ն2.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}$: Նույնը կարելի է գրել՝ նշելով մոնոտոնությունը.

$$\begin{cases} \text{կամ } g(x) \searrow K, \\ \text{կամ } g(x) \nearrow K, \end{cases} \quad \text{երբ } x \rightarrow +\infty, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{կամ } g(x) - K \searrow 0, \\ \text{կամ } g(x) - K \nearrow 0, \end{cases} \quad \text{երբ } x \rightarrow +\infty :$$

Կազմենք (5-124) ինտեգրալի կարած ինտեգրալը $\forall A > a$ համար և ձևափոխենք այն.

$$\int_a^A f(x) g(x) dx = \int_a^A f(x) [g(x) - K + K] dx = \int_a^A f(x) [g(x) - K] dx + K \int_a^A f(x) dx : \quad (5-125)$$

Ցույց րանք, որ երբ $A \rightarrow +\infty$, այս կարած (5-125) ինտեգրալը սահման ունի, որից էլ կրխի (5-124) ինտեգրալի զուգամիությունը: Իսկպես, քննարկենք (5-125) արտահայտության վերջին երկու կարած ինտեգրալները:

Վերջին ինտեգրալը (5-125)-ում սահման ունի, երբ $A \rightarrow +\infty$ ՝ համաձայն **ա2)** պայմանի, մինչդեռ նախավերջին ինտեգրալը (5-125)-ում սահման ունի, երբ $A \rightarrow +\infty$ ՝ համաձայն Աբել-Դիրիխլեի 1-ին հայրանիշի (Թեորեմ 5.33), չէ՛ որ f ֆունկցիայի F նախնականը սահմանափակ է , իսկ $g(x) - K$ ֆունկցիան մոնոտոն ձգրում է գրոյի:

Միասին սա հանգում է (5-124) ինտեգրալի զուգամիությանը:

□

Օրինակ 5.22. *Դիրիսլեյի Դիրիսլեյի երկու հերևյալ ինտեգրալները՝*

$$I_1 \stackrel{\text{նշ.}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad I_2 \stackrel{\text{նշ.}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx : \quad (5-126)$$

Պահանջվում է հերևագորել նրանց զուգամիությունը (սովորական և բացարձակ):

Սկսենք սովորական զուգամիությունից: Նկարենք, որ ենթինտեգրալյին ֆունկցիաները նշանափոխ են, և ուրեմն բաղդարման թեորեմները ալարեղ կիրառելի չեն: Կիրառենք Աբել-Դիրիսլեյի հայրանիշը: Ընտրենք և նշանակենք հերևյալ ֆունկցիաները և նկարենք, որ դրանք անընդհար են (նույնիսկ անվերջ դիֆերենցելի):

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin x, \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x}, \quad f(x), g(x) \in C[1, +\infty) :$$

Նեշոր է տեսնել, որ $g(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն ձգտում է զրոյի $+\infty$ -ում՝ $g(x) = \frac{1}{x} \searrow 0$, երբ $x \rightarrow +\infty$: Մյուս f ֆունկցիայի F նախնականը սահմանափակ է, իսկապես՝

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^x \sin t dt = -\cos t \Big|_1^x = \cos 1 - \cos x, \\ |F(x)| \leq |\cos 1| + |\cos x| \leq 2, \quad x \geq 1 :$$

Նամանայն Աբել-Դիրիսլեյի 1-ին հայրանիշի (Թեորեմ 5.33)՝ I_1 ինտեգրալը զուգամել է: Եիշոր նույն եղանակով ապացուցում ենք, որ I_2 ինտեգրալը նույնպես զուգամել է:

Այժմ հերևագորենք (5-126) ինտեգրալների բացարձակ զուգամիությունը: Մեզ հերևաբրբում են հերևյալ երկու ինտեգրալները՝

$$I_3 \stackrel{\text{նշ.}}{=} \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx, \quad I_4 \stackrel{\text{նշ.}}{=} \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| dx : \quad (5-127)$$

Սրանք արդեն դրական ինտեգրալներ են, և կարելի է կիրառել բաղդարման թեորեմները: Ի դեպ, (5-127) ինտեգրալների նկարմամբ Աբել-Դիրիսլեյի հայրանիշների կիրառումն այս անգամ ոչինչ չի տա:

Փնահարենք (5-127)-ի ենթինտեգրալյին ֆունկցիաները ներքևից՝ նպարակ ունենալով ապացուցել (5-127) ինտեգրալների տարամիությունը.

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}, \\ \int_1^A \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{1}{2} \int_1^A \frac{1}{x} dx - \int_1^A \frac{\cos 2x}{2x} dx \quad \forall A > 1 : \quad (5-128)$$

Զգրեցնենք $A \rightarrow +\infty$ և տեսնենք՝ ինչ կարացվի (5-128)-ի աջ կողմում:

Վերջին ինտեգրալը (5-128)-ում կձգրի վերջավոր սահմանի, քանի որ արդեն ապացուցել էինք I_2 ինտեգրալի զուգամիությունը:

Իսկ նախափերջին ինտեգրալը (5-128)-ում մեզ նույնպես ծանոթ է, այն տարամեար $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$ ինտեգրալի կրրած ինտեգրալն է: Նաշվի առնելով հայտնի կանոնը (զուգամեարի և տարամեարի գումարը տարամեար է)՝ եզրակացնում ենք, որ (5-128)-ի աջ կողմը (վերջավոր) սահման չունի, երբ $A \rightarrow +\infty$, և արդյունքում տալիս է տարամեար ինտեգրալ:

Նամանայն բաղդարման հիմնական թեորեմի՝ ավելի մեծ ենթինտեգրալային ֆունկցիայով ինտեգրալը նույնպես տարամեար է.

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty :$$

Ճիշտ նույն եղանակով ապացուցում ենք, որ $I_4 = +\infty$ ինտեգրալը նույնպես տարամեար է:

Այսպիսով, I_1 և I_2 ինտեգրալները զուգամեար են, բայց բացարձակ իմաստով՝ տարամեար:

Պատասխան՝ I_1 և I_2 ինտեգրալները զուգամեար են պայմանականորեն:

Դիպողություն 5.18. I_1 և I_2 ինտեգրալները որպես զուգամեար ինտեգրալներ ունեն որոշակի արժեքներ՝ նշանակված նույն կերպ՝ հենց $I_1 \in \mathbb{R}$ և $I_2 \in \mathbb{R}$: Դրանց որոնումը և հաշվարկն առանձին և ոչ պարզունակ խնդիր է: Դիրիխլեի ինտեգրալի և որոշ այլ անխսկական ինտեգրալների հաշվարկին մենք կանդրադարձանք ավելի ուշ և մասնավորապես կապացուցենք, որ $I \stackrel{\text{նշ.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$:

Օրինակ 5.23. Ներագուրել Փրենելի երկու հերևյալ ինտեգրալների զուգամիությունը (սովորական և բացարձակ):

$$\left[J_1 \stackrel{\text{նշ.}}{=} \int_1^{+\infty} \sin x^2 dx, \quad J_2 \stackrel{\text{նշ.}}{=} \int_1^{+\infty} \cos x^2 dx \right] : \quad (5-129)$$

Դարձյալ կիրառում են Աբել-Դիրիխլեի 1-ին հայտանիշը: Բայց նախապես հարմար է կատարել փոփոխականի փոխարինում՝ $t \stackrel{\text{նշ.}}{=} x^2$: Շարունակությունը թողնում են որպես ինքնուրույն աշխատանք:

Դիպողություն 5.19. Նիշենք բաղդարման թեորեմների հերևանքներից մեկը (տե՛ս Ներևանք 5.9).

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \quad \text{զուգամեար է} \quad \implies \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{նույնպես զուգամեար է:} \quad (5-130)$$

Ներևելով ընդունված տերմիններին՝ կարելի այս պնդումը ձևակերպել հերևյալ կերպ՝

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{ինտեգրալի բացարձակ զուգամիությունից} \quad (5-131)$$

հերևում է այդ ինտեգրալի սովորական զուգամիությունը:

Ինչպես ցույց են տալիս վերոնշյալ Օրինակ 5.22-ի պայմանականորեն զուգամեար (5-126) ինտեգրալները, (5-130)–(5-131) պնդման հակադարձ պնդումը սխալ է, այսինքն՝

սովորական զուգամիությունից բացարձակ զուգամիությունը չի հերևում:

5.33 Անսահմանափակ ֆունկցիայի 2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալ

Այս բաժնում քննարկելու ենք (a, b) վերջավոր միջակայքում տրված անսահմանափակ ֆունկցիայի անխսկական ինտեգրալներ: Ինչպես լավ հայտնի է, այդպիսի ֆունկցիաներն ինտեգրելի չեն ըստ Ռիմանի, այսինքն՝ սովորական որոշյալ $\int_a^b f(x) dx$ ինտեգրալը գոյություն չունի անսահմանափակ $f(x)$ ֆունկցիայի համար: Անխսկական ինտեգրալները (a, b) միջակայքով կոչված են ընդհանրացնել Ռիմանի որոշյալ ինտեգրալները և հասնել նրան, որ անսահմանափակ ֆունկցիաների գոնե մի մասը դառնա ինտեգրելի:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a, b)$ միջակայքում և անսահմանափակ է, ենթադրենք, միայն $x = b$ աջ ծայրակերի շրջակայքում: Այսպիսով, $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $[a, b - \eta]$ յուրաքանչյուր հարվածում ցանկացած փոքր η ($0 < \eta < b - a$) պարամետրի համար: Այդ դեպքում $x = b$ կետը (որտեղ խախտվում է ֆունկցիայի սահմանափակությունը) կանվանենք **եզակի** $f(x)$ ֆունկցիայի և նրա ինտեգրալի համար: Որպես եզակի կետ կարելի է ընտրել ինտեգրման միջակայքի ցանկացած այլ կետ. դրա մասին քիչ անց:

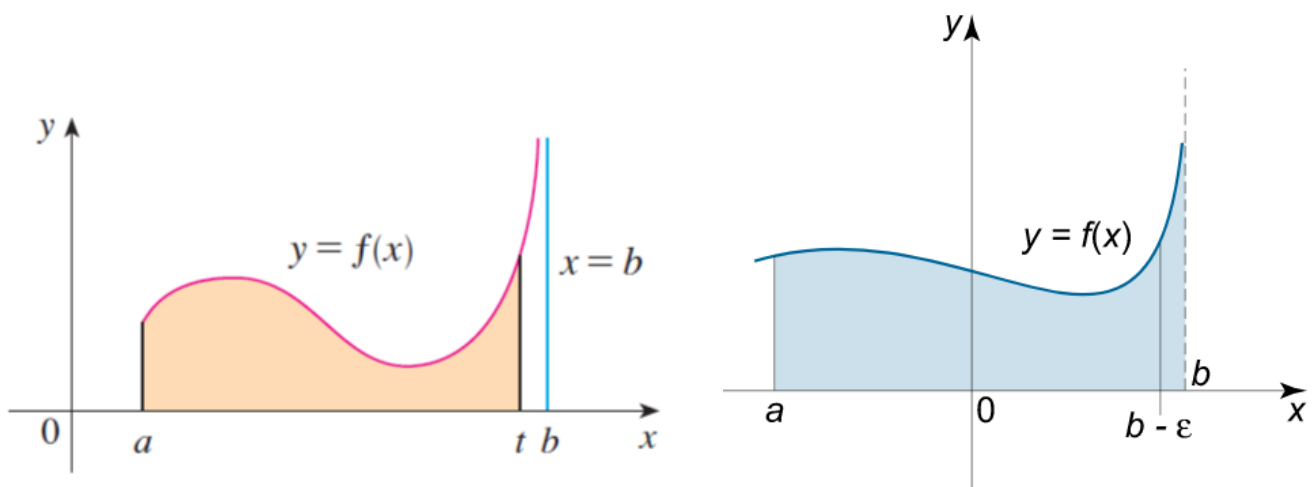
Սահմանում 5.37. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a, b)$ միջակայքում, $x = b$ կետը նրա միակ եզակի կետն է, և $f(x) \in \mathcal{R}[a, b - \eta]$ ցանկացած փոքր η ($0 < \eta < b - a$) պարամետրի համար:

Եթե գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} f(x) dx, \quad (5-132)$$

ապա այն կոչվում է $f(x)$ **ֆունկցիայի 2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալ** $[a, b]$ **միջակայքում**:

Եթե (5-132) սահմանը գոյություն ունի, այսինքն՝ վերջավոր թիվ է, ապա կասենք, որ (5-132) անխսկական ինտեգրալը **գոյաւմեք** է կամ գոյություն ունի: Նախատակ դեպքում, երբ (5-132) սահմանը գոյություն չունի, կասենք, որ (5-132) անխսկական ինտեգրալը **դաւաւմեք** է կամ գոյություն չունի:



Փճագիր 5.36. 2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալների պատկերումը, երբ եզակի կետն աջ ծայրակերն է

Դիպոդություն 5.20. Արտաքին տեսքից 2-րդ սեռի (5-132) անհսկական ինտեգրալը չի տարբերվում սովորական որոշյալ ինտեգրալից, և դրանք հեշտությամբ կարելի է շփոթել: Եթե հայտնի է, որ ենթաինտեգրալային $f(x)$ ֆունկցիան անսահմանափակ է, ապա միանշանակ կարելի է եզրակացնել, որ $\int_a^b f(x) dx$ ինտեգրալն անհսկական է:

Նաշվենք 2-րդ սեռի պարզագույն անհսկական ինտեգրալ:

Օրինակ 5.24.
$$I \stackrel{նշ.}{=} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = ?$$

Նախ նկատենք, որ ենթաինտեգրալային

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad 0 \leq x < 1,$$

ֆունկցիան անսահմանափակ է, ուրեմն ռիմանյան որոշյալ ինտեգրալի գոյության մասին խոսք լինել չի կարող, այլ կարելի է միայն քննարկել $f(x)$ -ի անհսկական ինտեգրալի գոյության (զուգամիտության) հարցը: Ներկերով (5-132) սահմանմանը՝ հաշվենք I ինտեգրալը.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \left[-2\sqrt{1-x} \right]_0^{1-\eta} = -2 \lim_{\eta \rightarrow +0} [\sqrt{\eta} - 1] = 2 :$$

Բնչպես 1-ին սեռի անհսկական ինտեգրալների դեպքում էր, այժմ նույնպես կարելի է կիրառել կարճ գրելաձև՝

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} \Big|_0^1 = -2[0-1] = 2 :$$

Օրինակ 5.25.
$$J_q \stackrel{նշ.}{=} \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q} = ? \quad (q \in \mathbb{R})$$

Պահանջվում է հետազոտել J_q ինտեգրալի զուգամիտությունը և հաշվել, երբ այն զուգամեր է:

Նախորդ օրինակի համեմատ սա ավելի ընդհանուր ինտեգրալ է կամայական $q \in \mathbb{R}$ պարամետրով:

Բնչպես 1-ին սեռի ինտեգրալի դեպքում էր, այստեղ ևս q պարամետրի որոշ արժեքների դեպքում J_q ինտեգրալը կլինի զուգամեր՝ $J_q < +\infty$, իսկ q պարամետրի մնացած արժեքների դեպքում՝ տարամեր՝ $J_q = +\infty$:

Ներազոտումը սկսենք $q = 1$ հատուկ դեպքից, երբ նախնական լոգարիթմական ֆունկցիա է.

$$J_1 = \int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} \frac{dx}{b-x} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \left[-\ln(b-x) \right]_a^{b-\eta} = -\lim_{\eta \rightarrow +0} [\ln \eta - \ln(b-a)] = +\infty,$$

կամ կարճ գրելաձևով՝

$$J_1 = \int_a^b \frac{dx}{b-x} = \left[-\ln(b-x) \right]_a^b = -\left[\lim_{x \rightarrow b-0} \ln(b-x) - \ln(b-a) \right] = +\infty :$$

Սա նշանակում է, որ J_1 ($q = 1$) ինտեգրալը տարաան է, գոյություն չունի՝ $J_1 = +\infty$:

q տարաաների մնացած $q \neq 1$ արժեքների դեպքում որպես նախնական հանդես է զարու աստիճանային ֆունկցիա, և ուրեմն այդ դեպքերը միասին քննարկենք.

$$J_q = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} (b-x)^{-q} dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} \left[-\frac{(b-x)^{-q+1}}{-q+1} \right]_a^{b-\eta} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{-1}{1-q} \left[\eta^{1-q} - (b-a)^{1-q} \right] : \quad (5-133)$$

Եթե $1-q > 0$, ապա (5-133)-ում սահմանը գոյություն ունի, J_q ինտեգրալը զուգաան է, և կարող ենք այն հաշվել.

$$J_q = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{-1}{1-q} \left[\eta^{1-q} - (b-a)^{1-q} \right] = \frac{1}{1-q} (b-a)^{1-q} :$$

Բսկ եթե $1-q < 0$, ապա (5-133)-ում սահմանը գոյություն չունի, J_q ինտեգրալը տարաան է.

$$J_q = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{-1}{1-q} \left[\frac{1}{\eta^{q-1}} - \frac{1}{(b-a)^{q-1}} \right] = +\infty :$$

Ամփոփենք, բոլոր q -երի համար մենք ունենք վերջնական տարաասիան.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Եթե } q < 1, \text{ ապա} & \boxed{J_q = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q} < +\infty}, \quad \text{զուգաան է;} \\ \text{Եթե } q \geq 1, \text{ ապա} & \boxed{J_q = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q} = +\infty}, \quad \text{տարաան է:} \end{array} \right. \quad (5-134)$$

Այժմ սահմաններ 2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալներ այլ եզակի կետերով:

Սահմանում 5.38. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(a, b]$ միջակայքում, $x = a$ կետը նրա միակ եզակի կետն է, և $f(x) \in \mathcal{R}[a+\eta, b]$ ցանկացած փոքր η ($0 < \eta < b-a$) տարաաների համար:

Այդ դեպքում $f(x)$ **ֆունկցիայի 2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալն** $[a, b]$ -ում սահմանվում է հետևյալ սահմանով՝

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx} : \quad (5-135)$$

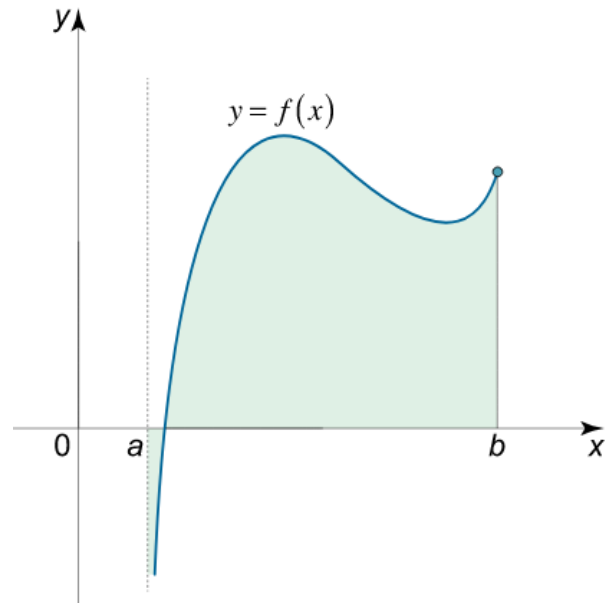
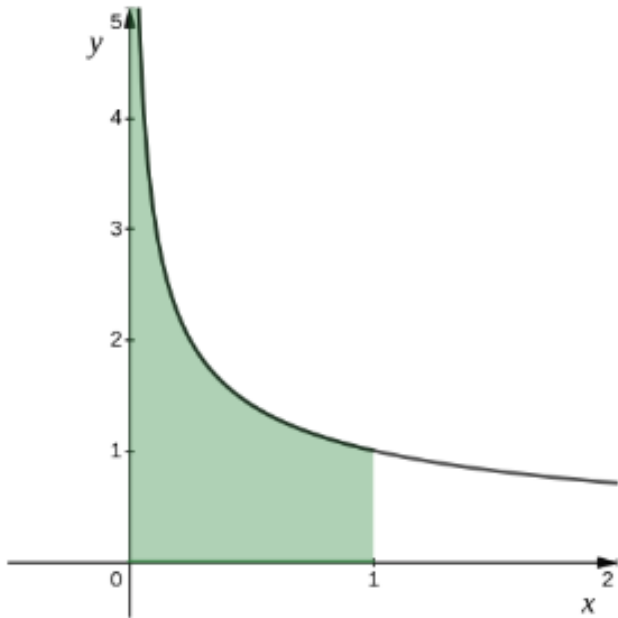
Սահմանում 5.39. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a, b]$ միջակայքում բացառությամբ՝ $x = c \in (a, b)$ եզակի կետից, և $f(x) \in \mathcal{R}([a, c-\eta] \cup [c+\eta, b])$ ցանկացած փոքր $\eta > 0$ տարաաների համար:

Այդ դեպքում $f(x)$ **ֆունկցիայի 2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալն** $[a, b]$ միջակայքում սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

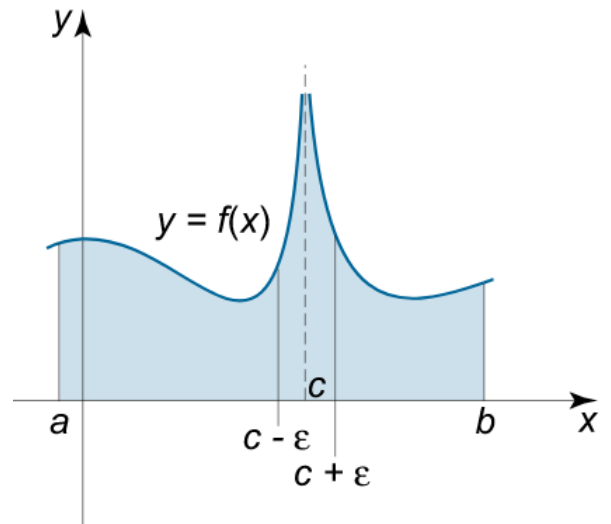
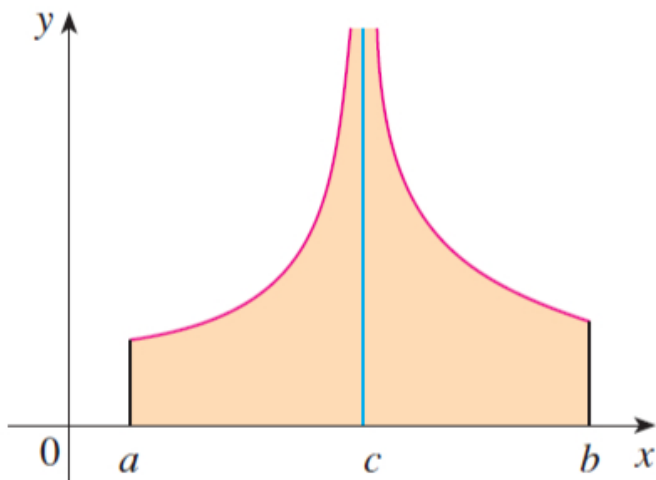
$$\boxed{\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx}, \quad (5-136)$$

որտեղ (5-136)-ի աջ կողմում երկու անխսկական ինտեգրալներն արդեն սահմանված են:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ միջակայքում վերջավոր թվով եզակի կետեր ունի հաջորդական ծայրակետերում և ներսում, ապա $f(x)$ ֆունկցիայի 2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալն $[a, b]$ միջակայքում սահմանելու համար կարող ենք $[a, b]$ հաջորդական վերջավոր թվով մասերի այնպես, որ դրանք պարունակեն մեկական եզակի կետ:



Գծագիր 5.37. 2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալների պատկերումը, երբ եզակի կետը ձախ ծայրակետն է



Գծագիր 5.38. 2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալի պատկերումը, երբ եզակի կետը միջակայքի ներսում է

Բերենք մի օրինակ (5-135) փեսքի անխսկական ինտեգրալի, որի զուգամիությունն հիմնավորումը նույնն է, ինչ (5-133) դեպքում: Նամենարեք (5-134)-ի հետ:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Եթե } q < 1, \text{ ապա} & \boxed{I_q = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} < +\infty}, \quad \text{զուգամեր է;} \\ \text{Եթե } q \geq 1, \text{ ապա} & \boxed{I_q = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = +\infty}, \quad \text{տարամեր է:} \end{array} \right. \quad (5-137)$$

Դիպողություն 5.21. Անխսկական ինտեգրալի զուգամիությունը, ինչպես տեսանք, կախված է բացառապես ենթինտեգրալային $f(x)$ ֆունկցիայի վարքից տվյալ եզակի կետի շրջակայքում: Եթե 2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալների եզակի կետերը (եզակիությունները) վերջավոր են, ապա 1-ին սեռի անխսկական ինտեգրալների եզակի կետեր պետք է համարել $+\infty$ կամ $-\infty$ անվերջ կետերը:

2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալների հատկությունները կամ զուգամիության հայրանիշները մենք մանրամասն չենք քննարկի, քանի որ դրանք բոլորը կրկնում են 1-ին սեռի անխսկական ինտեգրալների նույն հատկությունները՝ հասկանալի փոփոխություններով: Շիշարակված հատկություններից կարևորները հետևյալն են՝ բաղդարման թեորեմները, զուգամիության Կոշու սկզբունքը, բացարձակ զուգամիության գաղափարը, Աբել-Դիրիխլեի հայրանիշները, ինտեգրալի գծայնությունը, ադիտիվությունը, գնահատականները, Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը, փոփոխականի փոխարինման և մասերով ինտեգրման բանաձևերը և այլն:

Որպես նմուշ ձևակերպենք զուգամիության Կոշու սկզբունքը 2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալների համար $x = b$ միակ եզակի կետով: Դիտարկենք 2-րդ սեռի հետևյալ անխսկական ինտեգրալը՝

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} F(\eta), \quad (5-138)$$

որտեղ նշանակել ենք այդպես կոչված կտրած ինտեգրալը՝

$$F(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^{b-\eta} f(x) dx, \quad 0 < \eta < b-a : \quad (5-139)$$

Ձևակերպենք Կոշու պայմանը և Կոշու սկզբունքը (5-138) սահմանի համար.

$$\left(\exists \lim_{\eta \rightarrow +0} F(\eta) \right) \iff \iff \left(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } \forall \eta_1, \eta_2, 0 < \eta_1 < \delta, 0 < \eta_2 < \delta, \implies |F(\eta_1) - F(\eta_2)| < \varepsilon \right) : \quad (5-140)$$

Եթե վերաձևակերպենք (5-140) Կոշու սկզբունքը (5-138) ինտեգրալի համար, ապա կստանանք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 5.35. (Զուգամիության Կոշու սկզբունքը 2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալների համար)

$x = b$ միակ եզակի կետով $\int_a^b f(x) dx$ անխսկական ինտեգրալի զուգամիության համար անհրաժեշտ և բավարար է (Կոշու) հետևյալ պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } \forall \eta_1, \eta_2, 0 < \eta_1 < \delta, 0 < \eta_2 < \delta, \implies \left| \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} f(x) dx \right| < \varepsilon : \quad (5-141)$$

5.34 Նշանավոր անհավասարություններ ինտեգրալների համար

Գումարների համար ապացուցել էինք Յենսենի, Նյուդերի, Մինկովսկու անհավասարությունները: Նիշենք, որ մենք դիտարկել ենք n -չափանի վեկտորներ և նրանց երկարության գաղափարն ընդհանրացնող p -նորմեր՝

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad \|\vec{a}\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 :$$

Այժմ դիտարկելու ենք ըստ Ռիմանի ինտեգրելի ֆունկցիաներ և նրանց p -նորմեր՝

$$f(x) \in \mathcal{R}[a, b], \quad \|f\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 :$$

Սահմանված $\|f\|_p$ ոչ բացասական թիվը կոչվում է f **ֆունկցիայի ինտեգրալային p -նորմ**:

Ֆունկցիաների և դրանց նորմերի համար այժմ ապացուցելու ենք Նյուդերի, Մինկովսկու, Յենսենի ինտեգրալային անհավասարությունները:

5.34 ա. Նյուդերի անհավասարությունն ինտեգրալների համար

Թեորեմ 5.36. (Նյուդերի) Դիցուք $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p և q -ն կոչվում են համալրիչ ինդեքսներ): Այդ դեպքում ճիշտ է Նյուդերիի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\int_a^b |f(x) g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad (5-142)$$

կամ նույնը կարճ՝

$$\|f g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q : \quad (5-143)$$

Ապացույց. Եթե f և g ֆունկցիաներից գոնե մեկի նորմը հավասար է զրոյի, ասենք՝ $\|f\|_p = 0$, ապա Լեբեգի թեորեմի համաձայն (Թեորեմ 5.15)՝ $f = 0$ ամենուրեք $[a, b]$ հատվածում, բացի մի բազմությունից, որն ունի զրո չափ, այսինքն՝ այդ բազմությունը կարելի է ծածկել որքան կամենանք փոքր միջակայքերով: Այսպեսով էլ կհետևի, որ (5-142)-(5-143) անհավասարության երկու կողմերն էլ զրոներ են՝ $0 \leq 0$:

Ներկայից ապացուցենք (5-142)-(5-143) անհավասարությունը՝ ենթադրելով, որ $\|f\|_p > 0$ և $\|g\|_q > 0$:

Սկզբում դիտարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ $\|f\|_p = 1$, $\|g\|_q = 1$:

Վերհիշենք Յունգի հայտնի անհավասարությունը.

$$AB \leq \frac{1}{p} A^p + \frac{1}{q} B^q, \quad A, B \geq 0, \quad (5-144)$$

և կիրառենք այն f և g ֆունկցիաների նկատմամբ.

$$\boxed{|f(x)| |g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q}, \quad x \in [a, b] : \quad (5-145)$$

Ինտեգրենք (5-145) անհավասարությունը $[a, b]$ հապվածով և օգտվենք մեր ենթադրությունից.

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)| dx \leq \frac{1}{p} \int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{1}{q} \int_a^b |g(x)|^q dx = \frac{1}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 : \quad (5-146)$$

Ապացուցեցինք (5-142)-(5-143) անհավասարությունը մասնավոր դեպքում, երբ $\|f\|_p = 1$, $\|g\|_q = 1$:

Ընդհանուր $\boxed{\|f\|_p > 0 \text{ և } \|g\|_q > 0}$ դեպքը բերվում է նախորդ մասնավոր դեպքին հետևյալ կերպ:

Դիտարկենք f -ի և g -ի փոխարեն $\boxed{\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}}$ և $\boxed{\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}}$ ֆունկցիաները, որոնց նորմերը հավասար են մեկի, քանի որ

$$\left\| \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right\|_p^p = \int_a^b \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p dx = \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_a^b |f(x)|^p dx = 1,$$

$$\left\| \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right\|_q^q = \int_a^b \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q dx = \frac{1}{\|g\|_q^q} \int_a^b |g(x)|^q dx = 1 :$$

Ուրեմն կարելի է կիրառել ապացուցված (5-146) անհավասարությունը $\boxed{\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}}$ և $\boxed{\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}}$ ֆունկցիաների նկատմամբ.

$$\int_a^b \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} dx \leq 1,$$

կամ նույնը՝

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

ինչը համընկնում է (5-142)-(5-143) անհավասարության հետ: □

Նախուկ ուշադրության է արժանի Նյուդերի անհավասարությունը, երբ $p = q = 2$:

Ներևանք 5.10. (Կոշի-Շվարց-Բունյակովսկի)

Եթե $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, ապա ճիշտ է **Շվարցի** կամ **Կոշի-Բունյակովսկու** հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\boxed{\int_a^b |f(x) g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}}, \quad (5-147)$$

կամ նույնը կարճ՝

$$\boxed{\|f g\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2} : \quad (5-148)$$

5.34 ք. Մինկովսկու անհավասարությունն ինքեգրալների համար

Նաջորդ անհավասարությունը լավ հայտնի է եռանկյան անհավասարության նմանակն է ինքեգրալների համար:

Գումարների համար Մինկովսկու անհավասարությունն արդեն ապացուցել էինք:

Թեորեմ 5.37. (Մինկովսկի) Եթե $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, ապա տեղի ունի Մինկովսկու հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad (5-149)$$

կամ նույնը կարճ՝

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p : \quad (5-150)$$

Ապացույց. Ակնհայտ $p = 1$ դեպքը հետևում է սովորական $|f+g| \leq |f| + |g|$ եռանկյան անհավասարությունից:

Ենթադրենք $p > 1$ և վերցնենք նրա q համալուծ ինդեքսը՝ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q = \frac{p}{p-1} > 1$: Ձևափոխենք (5-149)-ի ձախ կողմի ինքեգրալը՝ կիրառելով եռանկյան և Նյուդերի (5-142)-(5-143) անհավասարությունները.

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx &= \int_a^b |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_a^b |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \leq \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} dx \right)^{1/q} + \\ &\quad + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} dx \right)^{1/q} = \\ &= \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

քանի որ $q(p-1) = p$: Այժմ բաժանենք վերջին ինքեգրալի վրա և պարզեցնենք.

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1-1/q} &\leq \|f\|_p + \|g\|_p \\ \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq \|f\|_p + \|g\|_p \\ \|f + g\|_p &\leq \|f\|_p + \|g\|_p, \end{aligned}$$

ինչը և պահաջվում էր ապացուցել:

□

5.34 գ. Յենսենի անհավասարությունն ինտեգրալների համար

Նիշենք, որ գումարների համար Յենսենի անհավասարությունը ձևակերպվում էր որևէ (α, β) միջակայքում կամայական $\varphi(x)$ ուռուցիկ ֆունկցիայի համար, այն է՝

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 \varphi(x_1) + \dots + \alpha_n \varphi(x_n), \quad \text{կամ} \quad \varphi\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi(x_k),$$

երբ $\alpha_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in (\alpha, \beta) :$

Այժմ ձևակերպենք և ապացուցենք Յենսենի անհավասարությունն ինտեգրալների համար:

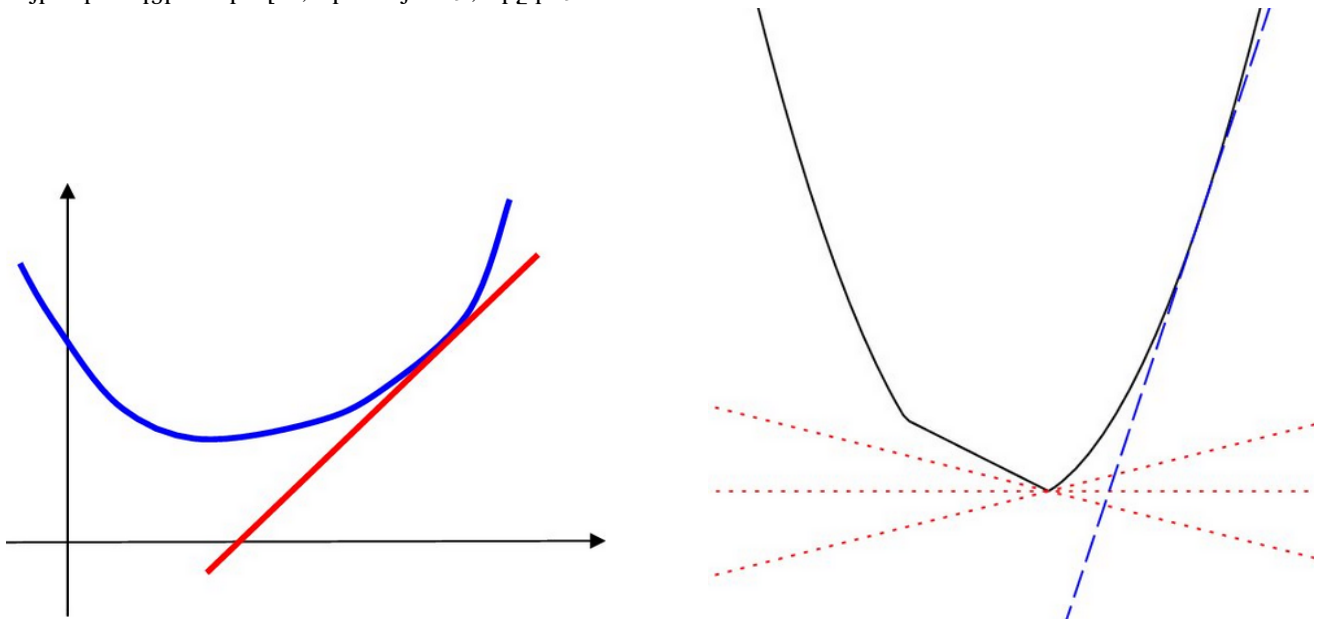
Թեորեմ 5.38. (Յենսեն) Դիցուք $f(x) \in \mathcal{R}[a, b], \quad t = f(x) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}, \quad \varphi(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ֆունկցիան ուռուցիկ է $\mathbb{R}$ -ի վրա: Այդ դեպքում

$$\varphi\left(\int_a^b f(x) \frac{dx}{b-a}\right) \leq \int_a^b \varphi(f(x)) \frac{dx}{b-a} : \quad (5-151)$$

Ապացույց. Ցանկացած ուռուցիկ ֆունկցիայի համար ճիշտ է հետևյալ բնութագրումը շոշափողների միջոցով՝

$$\varphi(t_0) = \sup \left\{ \alpha t_0 + \beta : \alpha t + \beta \leq \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R} \right\}, \quad t_0 \in \mathbb{R} : \quad (5-152)$$

Նկատենք, որ եթե տվյալ $t_0 \in \mathbb{R}$ կետում $\varphi(t)$ ուռուցիկ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա (5-152)-ի սուպրեմումը հասանելի է հենց շոշափողի համար: Իսկ եթե $t_0 \in \mathbb{R}$ կետում $\varphi(t)$ ուռուցիկ ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ և ուրեմն շոշափող չունի, ապա (5-152) հավասարությունն արտահայտում է ուռուցիկ ֆունկցիայի մոտարկումը գծային ֆունկցիաներով և, միևնույնն է, ճիշտ է:



Գծագիր 5.39. Ուռուցիկ ֆունկցիայի բնութագրումը ուղիղներով և շոշափողով տվյալ կետում

Վերցնենք կամայական գծային ֆունկցիա, որը չի գերազանցում $\varphi(t)$ ուռուցիկ ֆունկցիան.

$$\alpha t + \beta \leq \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R} :$$

Մասնավորապես, սա ճիշտ է $t = f(x)$ կերպում.

$$\alpha f(x) + \beta \leq \varphi(f(x)), \quad x \in [a, b] :$$

Ինտեգրենք $[a, b]$ հատվածով.

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta \right] \frac{dx}{b-a} &\leq \int_a^b \varphi(f(x)) \frac{dx}{b-a}, \\ \alpha \left(\int_a^b f(x) \frac{dx}{b-a} \right) + \beta &\leq \int_a^b \varphi(f(x)) \frac{dx}{b-a} : \end{aligned}$$

Այս անհավասարության երկու կողմերը վերցնենք սուպրեմումի նշանի փակ ըստ բոլոր հնարավոր գծային $\alpha t + \beta \leq \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ֆունկցիաների.

$$\sup \left[\alpha \left(\int_a^b f(x) \frac{dx}{b-a} \right) + \beta \right] \leq \int_a^b \varphi(f(x)) \frac{dx}{b-a}, \quad (5-153)$$

որպեսզի, նկատենք, աջ կողմը կախված չէր այդ գծային ֆունկցիաներից: Ուռուցիկ ֆունկցիայի (5-152) բնութագրման համաձայն՝ (5-153)-ի ձախ կողմը հանգում է φ ֆունկցիային.

$$\varphi \left(\int_a^b f(x) \frac{dx}{b-a} \right) \leq \int_a^b \varphi(f(x)) \frac{dx}{b-a}, \quad (5-154)$$

ինչը և պահանջվում էր: □

Ուռուցիկ $\varphi(t)$ ֆունկցիայի փոխարեն մասնավորապես և բավականին հաճախ հայտնվում է էքսպոնենցիալ ֆունկցիան՝ $\varphi(t) = e^t$:

Ներքևանք 5.11. (Յենսեն) Եթե $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, ապա

$$\exp \left(\int_a^b f(x) \frac{dx}{b-a} \right) \leq \int_a^b \exp f(x) \frac{dx}{b-a} : \quad (5-155)$$

Կարելի է $\varphi(t)$ ուռուցիկ ֆունկցիայի փոխարեն վերցնել աստիճանային ֆունկցիա՝ $\varphi(t) = t^p$, $t \geq 0$, $p \geq 1$:

Այդ դեպքում որպես հերևանք կստանանք Նյուտոնի անհավասարության մի մասնավոր դեպք (երբ $g \equiv 1$) :

Ներքևանք 5.12. (Յենսեն-Նյուտոն) Եթե $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $p \geq 1$, ապա

$$\left(\int_a^b |f(x)| \frac{dx}{b-a} \right)^p \leq \int_a^b |f(x)|^p \frac{dx}{b-a} \quad \text{կամ} \quad \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^p \leq (b-a)^{p-1} \int_a^b |f(x)|^p dx : \quad (5-156)$$

Դիփոդություն 5.22. Բոլոր ապացուցված անհավասարությունները՝ Յենսենի, Նյուտոնի, Միսկովսկու, այդ թվում նրանց հերևանքները, կարելի է վերաձևակերպել և հարմարեցնել անհսկական ինտեգրալների համար: Պարզադիր պայման է հանդիսանալու մասնակից անհսկական ինտեգրալների գույքամիջոցությունը:

Գլուխ 6

Շարքերի փեսություն

6.1 Թվային շարքեր և նրանց գուգամիությունը

Մենք արդեն գործ ենք ունեցել փարքեր **վերջավոր գումարների** հետ և այդպես կոչված սիգմա-գրելաձևի հետ՝

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n :$$

Իսկ ինչպես հասկանալ **անվերջ գումարները**՝ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, որոնք պարունակում են անվերջ թվով գումարելիներ: Պարզ չէ, ի՞նչը համարել անվերջ հաջորդականության գումար: Բերենք մի «պարզ» օրինակ:

Օրինակ 6.1. $a_n \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = ?$

Ինչպես իրականացնել գումարումը, ո՞րն է գումարի արժեքը: Փորձենք հաշվել գումարը երկու եղանակով.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = -1 + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = -1 + 0 + 0 + 0 + \dots = -1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0 :$$

Սա հակասություն է, որը նոր հարցեր է առաջադրում և ցույց է տալիս, որ անվերջ գումարը պարզունակ հարց չէ: Իրականում գումարման այս երկու եղանակն էլ սխալ է, և սրա բացատրությունը կբերենք ավելի ուշ:

Անվերջ գումարների իմաստը ճիշտ հասկանալու համար հարկավոր են ճշգրիտ սահմանումներ:

Սահմանում 6.1. *Անվերջ գումարը*

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

որպես սիմվոլ կանվանենք **շարք** կամ **թվային շարք**, $a_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) թվերը կոչվում են **շարքի անդամներ**, կոնկրետ a_n -ը՝ **շարքի n -րդ անդամ** կամ **շարքի ընդհանուր անդամ**:

Նաջորդ սահմանումները կիմաստավորեն (A) շարքի գաղափարը:

Սահմանում 6.2. Ընդունենք հետևյալ նշանակումները՝

$$\begin{aligned} S_1 &\stackrel{\text{def}}{=} a_1 \\ S_2 &\stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_2 \\ S_3 &\stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + a_3 \\ &\dots \quad \dots \end{aligned} \quad \boxed{S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \quad n \in \mathbb{N} :$$

S_n վերջավոր գումարը կոչվում է (A) **շարքի n -րդ մասնակի գումար**, իսկ $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ կոչվում է **մասնակի գումարների հաջորդականություն**:

Սահմանում 6.3. Եթե մասնակի գումարների $\{S_n\}$ հաջորդականությունը զուգամեր է՝ $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, ապա (A) շարքը ևս կոչվում է **զուգամեր**, իսկ հսկառակ դեպքում՝ **դիվերգենտ**:

Զուգամեր շարքի դեպքում $\boxed{S \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n}$ (վերջավոր) սահմանը կոչվում է **շարքի գումար**, կգրենք

$$\boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n} :$$

Այսպիսով, բոլոր շարքերը բաժանվում են երկու մեծ խմբերի՝ զուգամեր (գոյություն ունեցող) շարքեր, որոնք վերջավոր $S \in \mathbb{R}$ գումար ունեն, և փարամեր (գոյություն չունեցող) շարքեր, որոնք վերջավոր գումար չունեն:

Օրինակ 6.2. Դիտարկենք սարգագույն շարքերից մեկը՝ անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը.

$$(B) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + b_{n+1} + \dots = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1} + b_1 q^n + \dots \quad (b_1 \neq 0),$$

որտեղ q -ն երկրաչափական պրոգրեսիայի հայրարարն է: Ներագործենք (B) շարքի զուգամիտության հարցը: Դրա համար պետք է կազմել շարքի n -րդ մասնակի գումարը.

$$S_n = \sum_{k=1}^n b_k = b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1) :$$

Օգտվեցինք վերջավոր երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի հայրնի բանաձևից: Այժմ սահմանային անցում կատարենք, երբ $n \rightarrow \infty$: Պարզ է, որ զուգամիտության հարցը էսպես կախված է q

սարամեքրից: Մշեեք, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{եթե } |q| < 1, \\ \infty, & \text{եթե } |q| > 1, \end{cases}$ հեքևարա՝

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \begin{cases} \frac{b_1}{1 - q}, & \text{եթե } |q| < 1, \\ \infty, & \text{եթե } |q| > 1 : \end{cases}$$

Այսպիսով, եթե $|q| < 1$, ապա (B) շարքը գուգամեք է, և նրա գումարն է $S = \frac{b_1}{1 - q}$, իսկ եթե $|q| > 1$, ապա (B) շարքը սարամեք է և վերջավոր գումար չունի, րվյալ դեպքում շարքի գումարն անվերջ է :

Մեր րեասդաշրից դուրս մնաց երկու դեպք, երբ $q = \pm 1$:

Եթե $q = 1$, ապա

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_1 + b_1 + \dots + b_1 + b_1 + \dots, \quad S_n = n b_1 \rightarrow \infty, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty,$$

որեան (B) շարքը սարամեք է, շարքի գումարն անվերջ է :

Եթե $q = -1$, ապա

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + \dots,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} b_1 = b_1 (1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } n\text{-ը գույգ է,} \\ b_1, & \text{եթե } n\text{-ը կեևք է,} \end{cases}$$

այսինքն՝ մասնակի գումարների հաջորդականությունը՝ $\{S_n\} = \{b_1, 0, b_1, 0, b_1, 0, \dots\}$, առհասարակ սահման չունի: Այսպիսով, $q = -1$ դեպքում (B) շարքը սարամեք է, շարքի գումարն առհասարակ գոյություն չունի՝ ոչ վերջավոր, ոչ անվերջ: Այս վերջին $q = -1$ դեպքը լիովին վերաբերում է նաև Օրինակ 6.1-ին, որում դիտարկված շարքը սրացվում է սարամեք:

Այսպիսով, (B) երկրաջափական շարքը գուգամեք է, երբ $|q| < 1$, և սարամեք՝ երբ $|q| \geq 1$:

Օրինակ 6.3. Պարգեևք րվյալ շարքի գուգամիության հարցը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots :$$

Կազմեք շարքի n -րդ մասնակի գումարը և գնահատեք այն ներքևից.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty :$$

Ներևարա, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, շարքը սարամեք է, շարքի գումարն անվերջ է, գրելու եևք

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty :$$

6.2 Շարքերի պարզագույն հատկությունները

Սահմանում 6.4. Տրված $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $(B) \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը կոչվում են **համաարժեք**, եթե նրանք զուգամենք կամ տարամենք են միաժամանակ: Այլ կերպ ասած՝ նրանցից մեկի զուգամիտությունից (տարամիտությունից) հետևում է մյուսի զուգամիտությունը (տարամիտությունը):

$$\text{Գրելու ենք } (A) \sim (B) \text{ կամ } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n :$$

Սահմանում 6.5. Եթե տրված $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքից հեռացնենք առաջին $m \in \mathbb{N}$ անդամները, ապա ստացված $(A') \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ շարքը կոչվում է (A) շարքի **մնացորդ (մնացորդային շարք)** կամ **շարքի պոչ**:

Պնդում 6.1. Դիցուք տրված են կամայական շարք և նրա մնացորդային շարքը (պոչը).

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{և} \quad (A') \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \quad (m\text{-ը ֆիքսած է}) :$$

Այդ դեպքում (A) և (A') շարքերը **համաարժեք** են, $(A) \sim (A')$:

Ապացույց. Նշանակենք շարքերի մասնակի գումարները.

$$S_n \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sum_{k=1}^n a_k \quad (A) \text{ շարքի } n\text{-րդ մասնակի գումարն է ,}$$

$$A_n \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sum_{k=m+1}^n a_k \quad (n > m) \quad (A') \text{ շարքի } (n - m)\text{-րդ մասնակի գումարն է :}$$

Այս մասնակի գումարները բացահայտ կապված են իրար հետ.

$$S_n = S_m + A_n \quad \text{կամ} \quad S_n = \text{const} + A_n \quad (m\text{-ը ֆիքսած է}) :$$

Այդ դեպքում՝

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n ,$$

այսինքն՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ զուգամենք է} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \text{ զուգամենք է ,}$$

հենց սա էր պահանջվում ապացուցել:

□

Ապացուցված հափկությունը նշանակում է, որ շարքի վերջավոր թվով անդամների հեռացումը կամ հավելումը որևէ կերպ չի ազդում շարքի զուգամիության (տարամիության) վրա:

Պնդում 6.2. *Զուգամետ շարքի պոչը ձգվում է զրոյի, այսինքն՝*

$$\left((A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ զուգամետ է} \right) \implies \left(\alpha_m \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \longrightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \right) :$$

Ապացույց. Զուգամետ շարքն ունի վերջավոր գումար՝ $\exists S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, $S = S_m + \alpha_m$, հետևաբար՝

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} (S - S_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0 :$$

□

Պնդում 6.3. *Եթե $(A) S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, և S -ը նրա գումարն է, ապա ցանկացած*

$c = \text{const} \in \mathbb{R}$ *հաստատունի համար $c \cdot S = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ շարքը նույնպես զուգամետ է, և $c \cdot S$ -ը նրա գումարն է :*

Կարճ՝ զուգամետ շարքը կարելի է անդամ առ անդամ բազմապատկել հաստատունով:

Ապացույց. Բավական է գրել մասնակի գումարները, բազմապատկել c -ով՝

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \implies c \cdot S_n = \sum_{k=1}^n c \cdot a_k ,$$

և մնում է անցնել սահմանի, երբ $n \rightarrow \infty$:

□

Պնդում 6.4. *Դիցուք տրված է երկու զուգամետ շարք.*

$$(A) \boxed{A \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n}, \quad (B) \boxed{B \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n},$$

որոնց գումարները նշանակված են A -ով և B -ով: Այդ դեպքում $(C) \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)}$ շարքը նույնպես զուգամետ է, որի գումարն է $A + B$:

Կարճ՝ զուգամետ շարքերը կարելի է անդամ առ անդամ գումարել:

Ապացույց. Գրենք (C) շարքի մասնակի գումարները և տարանջատենք.

$$C_n \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = A_n + B_n ,$$

ինչից հետո մնում է անցնել սահմանի, երբ $n \rightarrow \infty$:

□

Վերջին երկու պնդումները միասին կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ. երկու զուգամետ շարքերի գծային զուգակցությունը (կոմբինացիան) զուգամետ է, որի գումարը սահմանափակ համար պետք է կազմել սկզբնական շարքերի գումարների նույն գծային զուգակցությունը:

Պնդում 6.5. (Շարքի զուգամիությունից անհրաժեշտ պայմանը)

Զուգամետ շարքի ընդհանուր անդամը ձգվում է զրոյի, այսինքն՝

$$\left((A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ զուգամետ է} \right) \implies \left(a_n \rightarrow 0, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty \right) : \quad (6-1)$$

Ապացույց. (A) շարքի գումարը նշանակենք S -ով՝ $S \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$: Վերջին զուգամիությունը կարելի է համարժեքորեն արտագրել մեկ համարով շեղված տեսքով.

$$\begin{aligned} S_n &\rightarrow S, \\ S_{n-1} &\rightarrow S \end{aligned} \quad (n \rightarrow \infty) \implies a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) :$$

□

Նույն պնդումը ժխտման տերմիններով շարք օգտակար հայտանիշ է փարամիության համար:

Պնդում 6.6. (Շարքի փարամիության բավարար պայմանը)

Եթե շարքի ընդհանուր անդամը չի ձգվում զրոյի, ապա շարքը փարամետ է, այսինքն՝

$$\left(a_n \not\rightarrow 0, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty \right) \implies \left((A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ փարամետ է} \right) : \quad (6-2)$$

Դիտողություն 6.1. Ապացուցված (6-1)-(6-2) պնդման հակադարձ պնդումը սխալ է: Որպես հակաօրինակ կարելի է բերել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$ փարամետ շարքն Օրինակ 6.3-ից, որի ընդհանուր անդամն անվերջ փոքր է՝ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$:

6.3 Շարքի զուգամիության Կոշու սկզբունքը

Նաջորդականությունների տեսությունից մեզ հայտնի է ֆունդամենտալության գաղափարը, որը համարժեք է զուգամիությանը: Շարքերի տեսության մեջ շարքի զուգամիությանը համարժեք նման մի գաղափար կա, այն կոչվում է Կոշու պայման, որը նույն ֆունդամենտալությունն է հարմարեցված շարքերի համար:

Թեորեմ 6.1. (Շարքի զուգամիության Կոշու սկզբունքը)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամիություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի Կոշու հետևյալ պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad \forall p = 1, 2, 3, \dots, \quad (6-3)$$

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon :$$

Նշելով, որ $\{S_n\}$ համադասությունը $\{S_n\}$ համադասության համար և $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ զուգամիության համար: Ինքը Թեորեմ 6.1-ը կրկնում է հաջորդականությունների համար նույն Կոշու սկզբունքը, ուստի ապացուցելու կարիք չկա:

Նկատելով, որ Կոշու (6-3) պայմանը մասնավոր $p = 1$ դեպքում հանգում է շարքի զուգամիության անհրաժեշտ պայմանին (Պնդում 6.5): Իսկապես, երբ $p = 1$, ստանում ենք

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad |a_{n+1}| < \varepsilon,$$

այսինքն՝ $a_{n+1} \rightarrow 0 \iff a_n \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$: Ստացվեց նույն Պնդում 6.5-ը:

Թեորեմ 6.1-ը (Կոշու սկզբունքը), պարունակելով անհրաժեշտ և բավարար պայման, կարելի է ձևակերպել ժխտման տերմիններով և արդյունքում կստացվի շարքի փառամիության հայտանիշ:

Թեորեմ 6.2. (Շարքի զուգամիության Կոշու սկզբունքը ժխտման տերմիններով)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը փառամիություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall N_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n > N_0, \quad \exists p \in \mathbb{N}, \quad (6-4)$$

$$\text{s.t.} \quad |S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \geq \varepsilon :$$

Օրինակ 6.4. Ապացուցենք, որ հետևյալ շարքը զուգամիություն է.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots :$$

Կազմենք Կոշու (6-3) պայմանը և ստուգենք այն.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad \forall p = 1, 2, 3, \dots, \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon :$$

Գնահատենք վերևից

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) = \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon :
\end{aligned}$$

Քանի որ վերջին հաջորդականությունն անվերջ փոքր է $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), այն կարելի է վերևից գնահատել կամայական ε -ով՝ սկսած որևէ N_0 համարից, որը կարելի է բացահայտ գրել, ասենք՝

$$\exists N_0 = N_0(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \implies n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{կամ} \quad \frac{1}{n} < \varepsilon :$$

Շար կարևոր է, որ այս գնահատականը տրացվեց անկախ p -ից, այսինքն՝ բոլոր p -երի համար միաժամանակ:

Այսպիսով Կոշու (6-3) պայմանը հաստատվեց, և Կոշու սկզբունքի համաձայն (Թեորեմ 6.1)՝ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

շարքը զուգամեր է, գրում են $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty}$:

Օրինակ 6.5. Ապացուցենք, որ հետևյալ **հարմոնիկ շարքը** տարամեր է՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots :$$

Կազմենք (6-4) Կոշու պայմանի ժխտումը և ստուգենք այն.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall N_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n > N_0, \quad \exists p \in \mathbb{N}, \quad \text{s.t.} \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \geq \varepsilon :$$

Գնահատենք ներքևից՝

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p} :$$

Քանի որ p -ի ընտրությունը մենք ենք որոշում, ապա ընտրենք

$$\boxed{p \stackrel{\text{def}}{=} n} \implies \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} :$$

Որպես ε վերցնենք վերջին թիվը (ստորին եզրը)՝ $\boxed{\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}}$ կամ $\boxed{0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}}$: Այդ դեպքում (6-4)

Կոշու պայմանի ժխտումը հաստատվեց, և Կոշու սկզբունքի համաձայն (Թեորեմներ 6.1 կամ 6.2)՝

հարմոնիկ շարքը տարամեր է՝ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty}$:

6.4 Դրական շարքեր:

Դրական շարքերի բաղդապման թեորեմներ

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը կանվանենք **դրական**, եթե նրա բոլոր անդամները ոչ բացասական են՝ $a_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$:
Դրական շարքերն իրենց առանձնահատկություններն ունեն։ Մասնավորապես, դրական շարքի մասնակի գումարները՝

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \text{մոնոտոն աճում են} \quad \boxed{S_n \nearrow},$$

քանի որ $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n \quad (n \in \mathbb{N})$: Վաջորդականությունների տեսությունից հայտնի է, որ մոնոտոն հաջորդականությունը զուգամեր է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն սահմանափակ է: Այս փաստը հանգում է դրական շարքերի առաջին կարևոր հատկությանը:

Թեորեմ 6.3. *ա) Դրական շարքը զուգամեր է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա մասնակի գումարների հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից.*

$$\left((A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \quad (\text{զուգամեր է}) \right) \iff \left(\exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad S_n \leq M \quad (n \in \mathbb{N}) \right):$$

բ) Դրական շարքը կարող է տարամերել միայն $+\infty$ -ին:

Դրական շարքը տարամեր է $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա մասնակի գումարների հաջորդականությունը անսահմանափակ է վերևից:

Այսպիսով, դրական շարքերի զուգամիությունը պարզելու համար պետք է հեքագուրել նրա մասնակի գումարների հաջորդականության վարքը:

Թեորեմ 6.4. *(Բաղդապման հիմնական թեորեմ) Դիցուք տրված են երկու դրական շարքեր՝*

$$(A) \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}, \quad (B) \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}, \quad a_n \geq 0, \quad b_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

և

$$\boxed{a_n \leq b_n} \quad \text{թեկուզ որևէ } n_0 \text{ համարից սկսած} \quad \forall n > n_0:$$

Այդ դեպքում՝

$$a) \quad \left((B)\text{-ն զուգամեր է} \right) \implies \left((A)\text{-ն զուգամեր է} \right),$$

$$բ) \quad \left((A)\text{-ն տարամեր է} \right) \implies \left((B)\text{-ն տարամեր է} \right):$$

Ապացույց. Նշանակենք շարքերի մասնակի գումարները.

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \boxed{A_n \nearrow}, \quad B_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n b_k = b_1 + b_2 + \dots + b_n, \quad \boxed{B_n \nearrow} :$$

Քանի որ շարքի վերջավոր թվով անդամների դեմ ներումը կամ ավելացումը որևէ կերպ չի ազդում շարքի զուգամիտության (տարամիտության) վրա, կարելի է համարել, որ $a_n \leq b_n$ պայմանը տեղի ունի բոլոր բնական ինդեքսների համար: Այստեղից նույն գնահատականը հետևում է մասնակի գումարների համար.

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \implies \quad \boxed{0 \leq A_n \leq B_n} \quad (n \in \mathbb{N}) :$$

Վերջին գնահատականը հանգեցնում է հետևյալ եզրակացությանը՝

$$\begin{aligned} \left(B_n\text{-ը սահմանափակ է վերևից} \right) &\implies \left(A_n\text{-ը սահմանափակ է վերևից} \right), \\ \left(A_n\text{-ը անսահմանափակ է վերևից} \right) &\implies \left(B_n\text{-ը անսահմանափակ է վերևից} \right) : \end{aligned}$$

Սա ավարտում է ապացույցը, քանի որ մասնակի գումարների սահմանափակությունը վերևից, ըստ Թեորեմ 6.3-ի, համարժեք է դրական շարքի զուգամիտությանը: $\square$

Ի դեպ, Թեորեմ 6.4-ի ա) և բ) կետերի պնդումները համարժեք են իրար, ուստի կարելի էր հիմնավորել միայն ա) կետը:

Թեորեմ 6.5. Դիցուք տրված են երկու դրական շարքեր՝

$$(A) \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}, \quad (B) \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}, \quad a_n \geq 0, \quad b_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

և գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝

$$\exists \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \stackrel{!}{=} K} \quad (0 \leq K \leq \infty), \quad \text{թույլատրվում է } K = \infty \text{ դեպքը:}$$

ա) Եթե $\boxed{0 < K < \infty}$, ապա (A) և (B) շարքերը համարժեք են՝ $\boxed{(A) \sim (B)}$, այսինքն՝ զուգամիտ կամ տարամիտ են միաժամանակ:

բ) Եթե $\boxed{K = 0}$, ապա (B) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (A) շարքի զուգամիտությունը:

գ) Եթե $\boxed{K = \infty}$, ապա (A) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (B) շարքի զուգամիտությունը:

Ապացույց. ա) Դիցուք $\boxed{0 < K < \infty}$: Պրենք K սահմանի սահմանումը ε -լեզվով.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad \implies \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - K \right| < \varepsilon :$$

Վերջին անհավասարությունն արտագրենք ավելի հարմար տեսքով և բացի այդ՝ վերցնենք բավականաչափ փոքր ε , օրինակ՝ $\varepsilon = \frac{K}{2}$,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - K \right| < \frac{K}{2} \iff K - \frac{K}{2} < \frac{a_n}{b_n} < K + \frac{K}{2} \iff \boxed{\frac{K}{2} b_n < a_n < \frac{3K}{2} b_n} \quad \forall n > N_0 :$$

Ստացվեց, որ շարքերի a_n և b_n անդամները երկկողմանի գնահատվում են մեկը մյուսով: Նիմնական բաղդարման թեորեմի (Թեորեմ 6.4) համաձայն՝ (A) և (B) շարքերը համարժեք են:

բ) և գ) պնդումները կարելի է ապացուցել նույն կերպ՝ օգտագործելով անվերջ փոքրի կամ անվերջ մեծի սահմանումները (ապացուցեք ինքնուրույն): $\square$

6.5 Կոշու և Դալամբերի հայտանիշները

Այս բաժնում կձանոթանանք դրական շարքերի զուգամիությունների նոր հայտանիշների հետ, որոնք տալիս են զուգամիության միայն բավարար պայմաններ:

Թեորեմ 6.6. (Կոշու հայտանիշը)

Տրված դրական (A) շարքի համար սահմանենք հետևյալ α վերին սահմանը՝

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \boxed{\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} :$$

ա) Եթե $\boxed{\alpha < 1}$, ապա (A) շարքը զուգամենք է:

բ) Եթե $\boxed{\alpha > 1}$, ապա (A) շարքը տարամենք է:

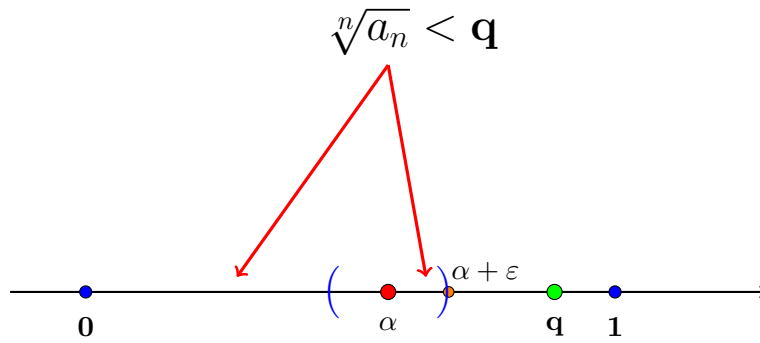
գ) Եթե $\boxed{\alpha = 1}$, ապա տրույզ ոչինչ ասել չենք կարող. (A) շարքը կարող է լինել զուգամենք կամ տարամենք:

Ապացույց. ա) Դիցուք $\boxed{\alpha < 1}$: Վերցնենք որևէ q ($\alpha < q < 1$) թիվ և ֆիքսենք այն: Քանի որ α -ն վերին սահման է, ապա

$$\exists N_0 = N_0(q) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \implies \sqrt[n]{a_n} < q \implies \boxed{a_n < q^n} :$$

Վերջին գնահատականը թույլ է տալիս կիրառել բաղդարման հիմնական թեորեմը (Թեորեմ 6.4), ըստ որի՝ քանի որ երկրաչափական շարքը զուգամենք է՝ $\sum_{n=1}^{\infty} q^n < +\infty$ ($0 < q < 1$), ապա (A) շարքը նույնպես

զուգամենք է՝ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$:

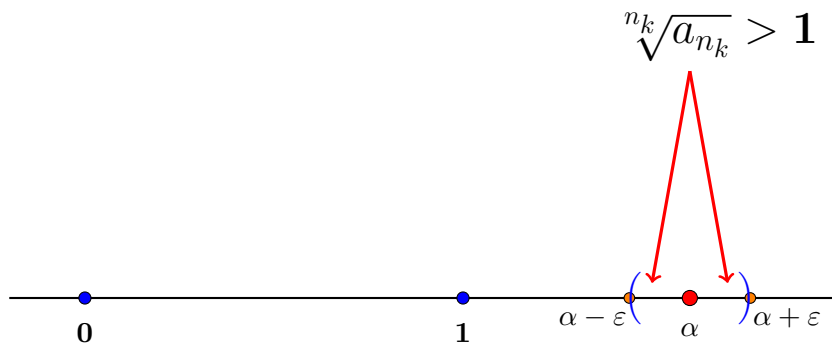


Գծագիր 6.1. Կոշու α սահմանը, երբ $\alpha < 1$

բ) Եթե $1 < \alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, ապա վերին սահմանը ներկայացնենք որպես մասնակի սահման.

$$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \quad s.t. \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = \alpha > 1 :$$

Սա նշանակում է, որ գոյություն ունեն անվերջ թվով a_n անդամներ, որոնք մեծ են մեկից՝ $a_n > 1$: Ներկայացնենք, $\{a_n\}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր չէ՝ $a_n \not\rightarrow 0$: Սա խախտում է շարքի զուգամիպության անհրաժեշտ պայմանը, և ուրեմն (A) շարքը փարամետր է՝ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$:



Գծագիր 6.2. Կոշու α սահմանը, երբ $\alpha > 1$

գ) Եթե $\alpha = 1$, ապա կարելի է բերել այդ պայմանը բավարարող ինչպես զուգամետր, այնպես էլ փարամետր շարքեր, օրինակ՝ արդեն ծանոթ հետևյալ շարքերը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \quad \alpha = 1, \quad \text{քանի որ} \quad \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) :$$

□

Թեորեմ 6.7. (Դալամբերի հայտանիշը)

Տրված դրական (A) շարքի համար սահմաններ հերկյալ α (Դալամբերի) սահմանը.

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} :$$

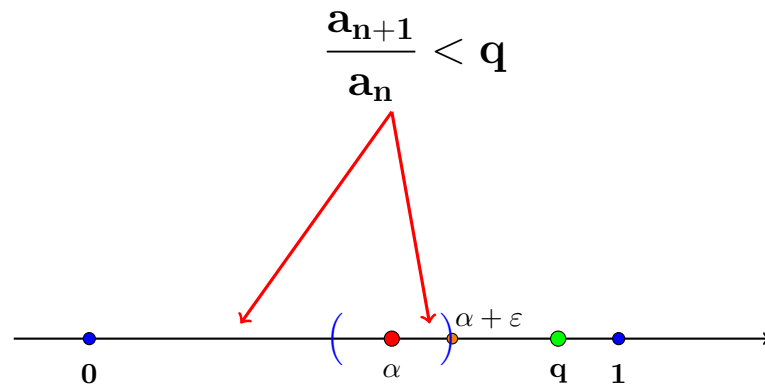
ա) Եթե $\alpha < 1$, ապա (A) շարքը զուգամեր է :

բ) Եթե $\alpha > 1$, ապա (A) շարքը տարամեր է :

գ) Եթե $\alpha = 1$, ապա սրույզ ոչինչ ասել չենք կարող. (A) շարքը կարող է լինել զուգամեր կամ տարամեր:

Ապացույց. ա) Դիցուք $\alpha < 1$: Վերցնենք որևէ q ($\alpha < q < 1$) թիվ և ֆիքսենք այն: Ըստ α սահմանի սահմանման՝

$$\exists N_0 = N_0(q) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q :$$



Գծագիր 6.3. Դալամբերի α սահմանը, երբ $\alpha < 1$

Քանի որ շարքի վերջավոր թվով անդամների դեմ ներդրումը կամ ավելացումը որևէ կերպ չի ազդում շարքի զուգամիտության (տարամիտության) վրա, կարելի է համարել, որ վերջին անհավասարությունը տեղի ունի բոլոր բնական ինդեքսների համար.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, \quad n \geq 1 :$$

Կիրառենք այս անհավասարությունն n անգամ և բազմապարկենք

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} < q^n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_1} < q^n \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} < a_1 q^n :$$

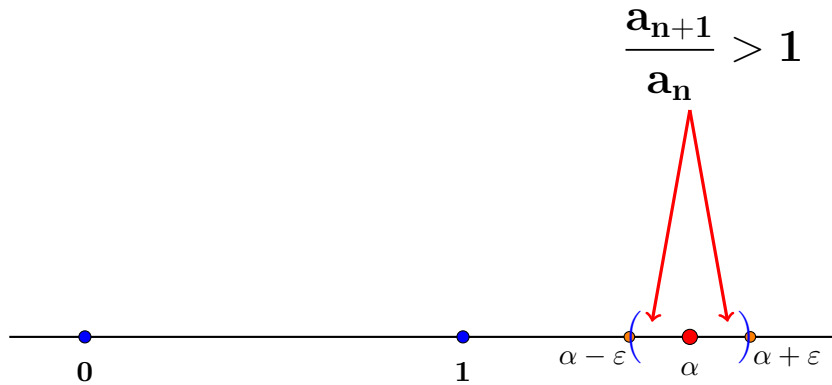
Վերջին գնահատականը թույլ է տալիս կիրառել բաղդաբան հիմնական թեորեմը (Թեորեմ 6.4), ըստ որի՝ քանի որ երկրաչափական շարքը զուգամեր է՝ $\sum_{n=1}^{\infty} q^n < +\infty$ ($0 < q < 1$), ապա (A) շարքը նույնպես

զուգամեր է՝ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$:

բ) Եթե $1 < \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, ապա ըստ սահմանի սահմանման՝

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \iff a_{n+1} > a_n :$$

Սա նշանակում է, որ $\{a_n\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն աճող է՝ $a_n \nearrow$, հետևաբար անվերջ փոքր չէ՝ $a_n \not\rightarrow 0$: Սա խախտում է շարքի զուգամիություն անհրաժեշտ պայմանը, և ուրեմն (A) շարքը փարամեր է $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$:



Գծագիր 6.4. Դալամբերի α սահմանը, երբ $\alpha > 1$

գ) Եթե $\alpha = 1$, ապա կարելի է բերել այդ պայմանը բավարարող ինչպես զուգամեր, այնպես էլ փարամեր շարքեր, օրինակ՝ արդեն ծանոթ նույն շարքերը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \quad \alpha = 1, \quad \text{քանի որ } \frac{n+1}{n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) :$$

□

Եվս մեկ հայրանիշ ձևակերպենք (առանց ապացույցի), որն ավելի ուժեղ է, քան Կոշու և Դալամբերի հայրանիշները:

Թեորեմ 6.8. (Ռասաբեի հայրանիշը)

Տրված դրական (A) շարքի համար սահմանենք հետևյալ R (Ռասաբեի) սահմանը.

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad R \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \quad \text{կամ} \quad R \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) :$$

ա) Եթե $R > 1$, ապա (A) շարքը զուգամեր է :

բ) Եթե $R < 1$, ապա (A) շարքը փարամեր է :

գ) Եթե $R = 1$, ապա ստույգ ոչինչ ասել չենք կարող. (A) շարքը կարող է լինել զուգամեր

կամ փարամեր:

6.6 Կոշու ինտեգրալային հայտանիշը

Պարզվում է՝ դրական շարքերի մի մասը սերպորեն կապված է անհսկական ինտեգրալների հետ:

Թեորեմ 6.9. (Կոշու ինտեգրալային հայտանիշը)

Դիցուք f -ը մոնոտոն նվազող դրական ֆունկցիա է $+\infty$ -ի շրջակայքում՝ $\boxed{0 < f(x) \searrow} \quad (x \geq 1)$:

Այդ դեպքում

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \sim \int_1^{+\infty} f(x) dx},$$

այսինքն՝ տվյալ շարքը և անհսկական ինտեգրալը համարժեք են, նրանք զուգամենք կամ տարամենք են միաժամանակ:

Ապացույց. Ֆունկցիայի մոնոտոն նվազումից օգտվենք և երկու կողմից գնահատենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

Գումարենք բոլոր այս անհավասարությունները.

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k),$$

կամ նշանակելով մասնակի գումարները $S_n \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sum_{k=1}^n f(k)$ ՝ արագրենք

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n :$$

Այսպես բոլոր մասնակից հաջորդականությունները մոնոտոն աճող են՝ $S_n \nearrow$ և $\int_1^{n+1} f(x) dx \nearrow$: Ըստ հայտնի Թեորեմ 2.14-ի (մոնոտոն հաջորդականությունների սահմանի մասին)՝ այդ հաջորդականությունների զուգամիությունը համարժեք է նրանց սահմանափակությանը: Ուրեմն՝

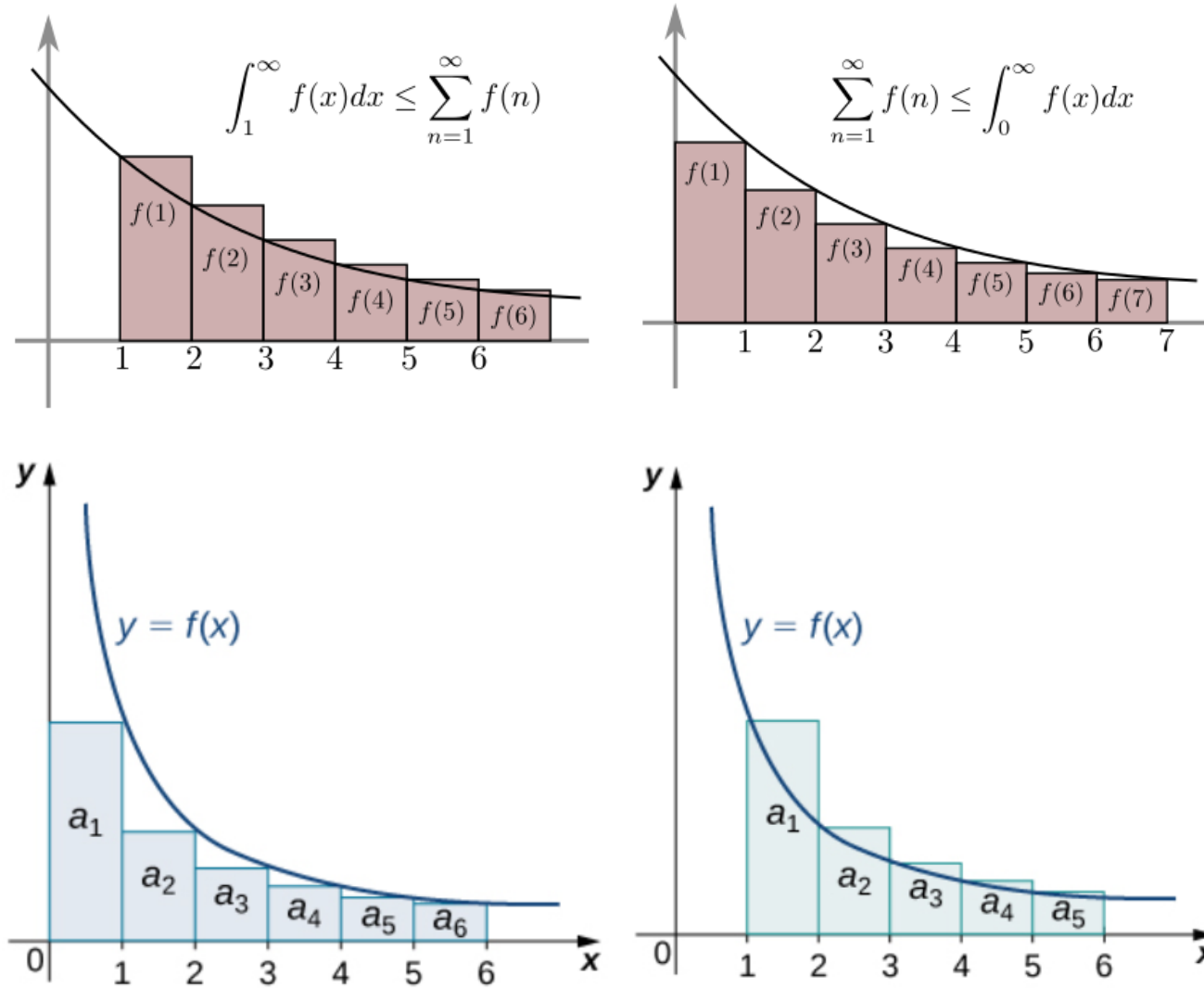
$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) dx,$$

կամ նույնը

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty} :$$

□

Ապացուցված հայտանիշը թույլ է տալիս հեթազուրկոր շարքերի զուգամիության հարցը բերել համապարասխան անհսկական ինտեգրալի զուգամիությանը, ինչն ավելի հեշտ է պարզել:



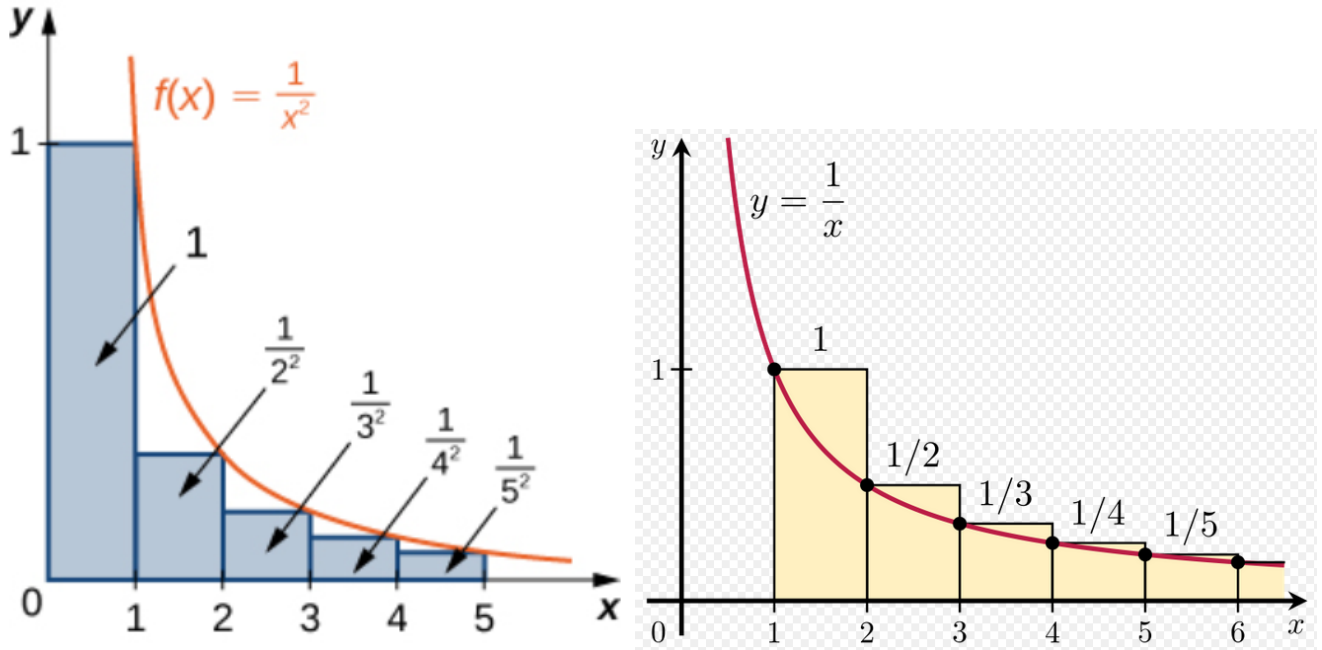
Պատկեր 6.5. Դրական շարքերի և անհսկական ինտեգրալների
զուգամիություն (տարամիություն) կապը

Օրինակ 6.6. Ներառյալ ենք $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p \in \mathbb{R}$) **ընդհանրացված հարմոնիկ շարքի** զուգամիությունը:

Նախ և առաջ նկատենք, որ $p \leq 0$ դեպքում շարքի ընդհանուր անդամը զրոյի չի ձգտում՝ $\frac{1}{n^p} \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), դրանով խախտվում է շարքի զուգամիության անհրաժեշտ պայմանը, և ուրեմն շարքը տարամետ է: Դիտարկենք $p > 0$ դեպքը, երբ $\frac{1}{n^p} \searrow 0$ ($n \rightarrow \infty$): Այս դեպքում կարող ենք կիրառել Կոշու ինտեգրալային հայտանիշը (Թեորեմ 6.9): Դրա համար սահմանենք $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^p}$ դրական նվազող ֆունկցիան՝ $0 < f(x) \searrow$ ($x \geq 1$), և Թեորեմ 6.9-ի կիրառման արդյունքում ստանալով շարքի զուգամիությունը հանգում է անհսկական ինտեգրալին, որի զուգամիության հարցը

մեզ հայտնի է ինտեգրալների տեսությունից,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Եթե } p > 1, \text{ ապա } \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sim \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx < +\infty}, \text{ զուգամեր է;} \\ \text{Եթե } p \leq 1, \text{ ապա } \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sim \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = +\infty}, \text{ տարամեր է:} \end{array} \right. \quad (6-5)$$



Գծագիր 6.6. Ընդհանուր հարմոնիկ շարքերի զուգամիություն (տարամիություն) պատկերումը

Օրինակ 6.7. Տեսրագրություն $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p}$ ($p \in \mathbb{R}$) շարքի զուգամիությունը:

Սահմանենք $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x (\ln x)^p}$ ($x \geq 2$) դրական ֆունկցիան, որը նվազող է $+\infty$ -ի շրջակայքում՝ $0 < f(x) \searrow$: Թեորեմ 6.9-ի կիրառման արդյունքում ստացվում է շարքի զուգամիությունը հանգում է նախորդ օրինակի անհսկական ինտեգրալին, և (6-5) եզրակացությունը կրկնվում է.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Եթե } p > 1, \text{ ապա } \boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p} \sim \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^p} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p} < +\infty}, \text{ զուգամեր է,} \\ \text{Եթե } p \leq 1, \text{ ապա } \boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p} \sim \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^p} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p} = +\infty}, \text{ տարամեր է:} \end{array} \right.$$

6.7 Նշանափոխ շարքեր:

Շարքի բացարձակ և պայմանական զուգամիությունը

Սահմանում 6.6. (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը կոչվում է **բացարձակ զուգամիություն**, եթե զուգամիություն է հետևյալ դրական շարքը՝ (A') $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$:

Սահմանում 6.7. (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը կոչվում է **պայմանականորեն զուգամիություն**, եթե (A) շարքը զուգամիություն է, սակայն (A') դրական շարքը՝ տարամիություն՝ (A') $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$:

Նասկանալի է, որ դրական (կամ բացասական) շարքերի համար բացարձակ և սովորական զուգամիությունները համընկնում են: Ուրեմն շարքերի բացարձակ և պայմանական զուգամիություններն իմաստ ունի դիֆարկել միայն **նշանափոխ շարքերի** համար:

Թեորեմ 6.10. $\left[\text{Շարքի բացարձակ զուգամիությունից հետևում է շարքի սովորական զուգամիությունը} \right]$, այսինքն՝

$$(A') \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \quad \text{զուգամիություն է} \quad \implies \quad (A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{նույնպես զուգամիություն է} : \quad (6-6)$$

Նախադարձ պնդումը սխալ է՝

$\left[\text{սովորական զուգամիությունից բացարձակ զուգամիությունը չի հետևում} : \right]$

Ապացույց. Կիրառենք զուգամիության Կոշու սկզբունքը, գրենք Կոշու պայմանը և օգտվենք եռանկյան անհավասարությունից.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n > N_0, \quad \forall p = 1, 2, 3, \dots, \quad \implies \\ \implies \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon : \end{aligned}$$

Այս գնահատականից պարզ է, որ եթե Կոշու պայմանը բերող ունի (A') շարքի համար, ապա այն առավել ևս բերող կունենա (A) շարքի համար: Ուրեմն (A') շարքի զուգամիությունից հետևում է (A) շարքի (սովորական) զուգամիությունը:

Այն, որ հակադարձ պնդումը սխալ է, ապացուցվում է մեկ հակաօրինակով: Այս մասի ապացույցը մի փոքր հետաձգենք, քան Օրինակներ 6.8 և 6.9 :

□

6.8 Աբել-Դիրիխլեի և Լայբնիցի հայտանիշները

Դրական շարքերի զուգամիությունը հեքագոյությունը համար մենք արդեն գիտենք մի շարք արդյունավետ հայտանիշներ: Նաջորդ հայտանիշը թույլ է փալիս պարզել ընդհանուր **նշանափոխ շարքերի** զուգամիությունը:

Թեորեմ 6.11. (Աբել-Դիրիխլեի 1-ին հայտանիշը կամ Դիրիխլեի հայտանիշը)

Դիցուք $\{a_n\}$ և $\{b_n\}$ հաջորդականությունները բավարարում են հետևյալ պայմանները.

ա1) $(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի մասնակի գումարները սահմանափակ են, այսինքն՝

$$|A_n| = \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq M = \text{const} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad (6-7)$$

բ1) $\{b_n\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն ձգրում է գրոյի՝ $b_n \searrow 0$ կամ $b_n \nearrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$:

Այդ դեպքում հետևյալ շարքը զուգամեք է՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n : \quad (6-8)$$

Ապացույցը բաց կթողնենք:

Թեորեմ 6.12. (Աբել-Դիրիխլեի 2-րդ հայտանիշը կամ Աբելի հայտանիշը)

Դիցուք $\{a_n\}$ և $\{b_n\}$ հաջորդականությունները բավարարում են հետևյալ պայմանները.

ա2) $(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամեք է;

բ2) $\{b_n\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն է և սահմանափակ:

Այդ դեպքում 1-ին հայտանիշի նույն շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \text{զուգամեք է:} \quad (6-9)$$

Ապացույց. Ինչպես րեսնում ենք, հայտանիշի նպափակը նույնն է՝ (6-9) շարքի զուգամիությունը, փոխվել են միայն **ա)** և **բ)** պայմանները: Նկատենք, որ **ա)** պայմանն ուժեղացել է, քանի որ (A) շարքի զուգամիությունից

$$\text{ա2)} \quad A \stackrel{\text{ն2.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

անհրաժեշտաբար հեքսնում է A_n մասնակի գումարների սահմանափակությունը: Իսկ **բ)** պայմանն ակնհայտորեն թուլացել է, և պահպանվել է հավասարակշռությունը: Այնուամենայնիվ, ապացույցը բերվում է Թեորեմ 6.11-ին:

Քանի որ ըստ պայմանի b_n հաջորդականությունը սահմանափակ է և մոնոտոն, ապա այն կլինի զուգամեք,

$\exists b \stackrel{\text{նշ.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$: Նույնը կարելի է գրել նշելով մոնոտոնությունը.

$$\left[\begin{array}{l} \text{կամ } b_n \searrow b, \\ \text{կամ } b_n \nearrow b, \end{array} \right. \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty, \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \text{կամ } b_n - b \searrow 0, \\ \text{կամ } b_n - b \nearrow 0, \end{array} \right. \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty :$$

Կազմենք (6-9) շարքի մասնակի գումարները և ձևափոխենք.

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k (b_k - b + b) = \sum_{k=1}^n a_k (b_k - b) + b \sum_{k=1}^n a_k \quad (n \in \mathbb{N}) : \quad (6-10)$$

Ըստ **ա2)** պայմանի՝ (6-10)-ի վերջին մասնակի գումարները զուգամեք են, իսկ (6-10)-ի նախավերջին մասնակի գումարները զուգամեք են ըստ Աբել-Դիրիխլեի 1-ին հայտանիշի (Թեորեմ 6.11) : Վերջապես երկու զուգամեք հաջորդականությունների գումարը զուգամեք է, (6-10)-ի ձախ կողմի մասնակի գումարները զուգամեք են, և ուրեմն (6-9) շարքը զուգամեք է : $\square$

Ներկանք 6.1. (Լայբնիցի հայտանիշը)

Դիցուք $\{b_n\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն ձգվում է զրոյի՝ $b_n \searrow 0$ կամ $b_n \nearrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$:

Այդ դեպքում

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 + \dots + (-1)^n b_n + \dots \quad (6-11)$$

լայբնիցյան (նշանափոխ) շարքը զուգամեք է :

Ապացույց. Թեորեմ 6.11-ի մեջ ընդամենը պետք է վերցնել $a_n \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^n$ և համոզվել, որ (6-7) պայմանը

$$\text{բավարարված է՝ } \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1 :$$

$\square$

Օրինակ 6.8. Բերենք լայբնիցյան նշանափոխ (նշանափոխ) շարքի պարզագույն, բայց շատ ցայ-

$$\text{տուն մի օրինակ՝ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} :$$

Լայբնիցի հայտանիշի համաձայն՝ տվյալ շարքը զուգամեք է, քանի որ $b_n = \frac{1}{n} \searrow 0$:

Այնուամենայնիվ բացարձակ ինասուրով շարքը տարամեք է՝ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, սա հարմոնիկ շարքն է :

Եզրակացնում ենք, որ շարքը զուգամեք է պայմանականորեն: Տենց այս օրինակը հարմար է Թեորեմ 6.10-ի մեջ որպես հակաօրինակ, որը ցույց է տալիս, որ սովորական զուգամիությունից, ընդհանրապես ասած, բացարձակ զուգամիությունը չի հեղուկում: Իհարկե կան նման շարքերի այլ օրինակներ:

Օրինակ 6.9. Բնորոշողների տեսությունից մեզ հայտնի են Դիրիխլեի նշանավոր անհսկական ինտեգրալները, որն Օրինակ 5.22: Շարքերի տեսության մեջ ևս կան նման շարքեր.

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \right] \quad \text{և} \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \right] : \quad (6-12)$$

Սրանք, ինչպես նախորդ օրինակն էր, նույնպես զուգամեար են պայմանականորեն: Ապացուցենք դա՝ հետևելով Աբել-Դիրիխլեի հայտանիշներին: Նշանակենք $a_n \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sin n$, $b_n \stackrel{\text{նշ.}}{=} \frac{1}{n}$:

Պարզ է, որ $b_n \searrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$: Յույց փանք, որ a_n -երից կազմված մասնակի գումարները սահմանափակ են՝ $\left| \sum_{k=1}^n \sin k \right| \leq \text{const}$: Բսկապես, կիրառենք որոշ եռանկյունաչափական բանաձևեր.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin k &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n 2 \sin k \sin \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \left[\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \left[\left(\cos \frac{1}{2} - \cos \frac{3}{2} \right) + \left(\cos \frac{3}{2} - \cos \frac{5}{2} \right) + \cdots + \left(\cos \left(n - \frac{1}{2} \right) - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \left[\cos \frac{1}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] : \end{aligned}$$

Գնահատենք.

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin k \right| \leq \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \left| \cos \frac{1}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \right| \leq \frac{2}{2 \sin \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}} = \text{const}, \quad \forall n \in \mathbb{N} :$$

Այսպիսով, բավարարված են Աբել-Դիրիխլեի 1-ին հայտանիշի պայմանները, ըստ որի՝ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$

շարքը զուգամեար է: Նույն եղանակով ապացուցում ենք, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ շարքը ևս զուգամեար է:

Այժմ ցույց փանք, որ (6-12) շարքերը բացարձակ տարամեար են, այսինքն՝

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n} \right| \right] = +\infty \quad \text{և} \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n} \right| \right] = +\infty : \quad (6-13)$$

Բսկապես, քանի որ սրանք դրական շարքեր են, օգտվենք բաղդարման թեորեմներից և գնահատենք ընդհանուր անդամը ներքևից.

$$\left| \frac{\sin n}{n} \right| \geq \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2n}{2n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^n \left| \frac{\sin k}{k} \right| \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{\cos 2k}{2k} : \quad (6-14)$$

Զգրեցնենք $n \rightarrow \infty$ և տեսնենք՝ ինչ կստացվի (6-14)-ի աջ կողմում: Վերջին մասնակի գումարը (6-14)-ում կձգրի վերջավոր սահմանի, քանի որ արդեն ապացուցել էինք (6-12) շարքերի զուգամիտությունը: Բսկ նախավերջին մասնակի գումարը (6-14)-ում անվերջ մեծ է, քանի որ տարամեար հարմոնիկ շարքի մասնակի գումար է: Վաշվի առնելով հայտնի կանոնը (զուգամեարի և տարամեարի գումարը տարամեար է)՝ եզրակացնում ենք, որ (6-13)-ի առաջին շարքը տարամեար է: Ծիշոր նույն եղանակով ապացուցում ենք, որ (6-13)-ի երկրորդ շարքը նույնպես տարամեար է:

Վերջնականապես ապացուցված է, որ (6-12) շարքերը զուգամեար են պայմանականորեն:

6.9 Շարքերի զուգորդական և տեղափոխական հասկացությունները:

Զուգամեք շարքի զուգորդական հասկացությունը

Վերջավոր թվով գումարելիներով գումարը և շարքի գումարը կարող են իրարից խիստ տարբերվել հասկացություններով, թեև երկու դեպքում էլ որոշ հասկացություններ նույնն են: Նշված տարբերությունները բացատրվում են այն հանգամանքով, որ շարքի գումարը ներառում է սահմանային անցում, մինչդեռ վերջավոր գումարը որևէ սահմանի հետ կապ չունի:

Որպես օրինակ՝ քննարկենք ծանոթ մի շարք.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots : \quad (6-15)$$

Մենք ապացուցել էինք, որ այս շարքը տարամեք է թեկուզ այն պարզառով, որ տեղի չունի շարքի զուգամեքության անհրաժեշտ պայմանը: Առանց փոխելու անդամների դասավորությունը ավելացնենք (6-15) շարքի մեջ փակագծեր ինչ-որ սկզբունքով, որի արդյունքում կստանանք **նոր խմբավորված շարք**.

$$-1 + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = -1 \quad \text{կամ} \quad (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 0 : \quad (6-16)$$

Ստացվեց, որ, ընդամենը փակագծեր ավելացնելով, փոխվեց շարքի բնույթը. տարամեք շարքը վերածվեց զուգամեք շարքի: Նման կարող փոփոխություն անհնար է վերջավոր գումարների համար, որոնցում փակագծեր ավելացնելը (անդամների խմբավորումը) որևէ կերպ գումարի արժեքը չի կարող փոխել:

Ներագույնք խմբավորման խնդիրը զուգամեք շարքերի համար: Դիցուք տրված է կամայական զուգամեք շարք որոշակի գումարով.

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S :$$

Վերցնենք կամայական $\forall n_k \nearrow$ աճող ենթահամարներ և կազմենք անդամների խմբեր (չփոխելով անդամների դասավորությունը).

$$\begin{aligned} a_1^* &\stackrel{\text{նշ.}}{=} a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}, \\ a_2^* &\stackrel{\text{նշ.}}{=} a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}, \\ a_3^* &\stackrel{\text{նշ.}}{=} a_{n_2+1} + a_{n_2+2} + \dots + a_{n_3}, \\ &\dots \quad \dots \\ a_k^* &\stackrel{\text{նշ.}}{=} a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \dots + a_{n_k}, \\ a_{k+1}^* &\stackrel{\text{նշ.}}{=} a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \dots + a_{n_{k+1}}, \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$

Նոր a_k^* անդամներով կազմենք նոր **խմբավորված շարք**.

$$\begin{aligned} (A^*) \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^*} &= a_1^* + a_2^* + a_3^* + \cdots + a_k^* + a_{k+1}^* + \cdots + = \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + a_{n_2+2} + \cdots + a_{n_3}) + \\ &\quad + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}) + (a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \cdots + a_{n_{k+1}}) + \cdots : \end{aligned}$$

Բերված (6-15)-(6-16) օրինակը ցույց տվեց, որ եթե (A) շարքը փարամեր է, ապա խմբավորված (A^*) շարքը կարող է զուգամեր լինել: Այժմ մեր նպատակն է պարզել, եթե (A) շարքը զուգամեր է, ապա ի՞նչ կարելի է ասել խմբավորված (A^*) շարքի մասին:

Թեորեմ 6.13. (Շարքի զուգորդական հարկությունը)

Եթե որևէ $(A) \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S}$ շարք զուգամեր է, որի գումարը հավասար է S , ապա յուրաքանչյուր

խմբավորված (A^*) շարք նույնպես զուգամեր է և նույն գումարն ունի՝ $(A^*) \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* = S} :$

Նակադարձ պնդումը սխալ է.

$$\begin{aligned} \left((A) \quad \text{զուգամեր է} \right) &\implies \left((A^*) \quad \text{զուգամեր է} \right) : \\ &\not\Leftarrow \end{aligned}$$

Ապացույց. Գրենք խմբավորված (A^*) շարքի S_k^* մասնակի գումարները և համեմատենք դրանք (A) շարքի S_n մասնակի գումարների հետ.

$$\begin{aligned} S_1^* &= a_1^* = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1} = S_{n_1}, \\ S_2^* &= a_1^* + a_2^* = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) = S_{n_2}, \\ S_3^* &= a_1^* + a_2^* + a_3^* = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_3} = S_{n_3}, \\ &\dots \quad \dots \\ S_k^* &= a_1^* + a_2^* + \cdots + a_k^* = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_k} = S_{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$

Այսպիսով ստանում ենք (A^*) շարքի k -րդ զուգամիությունը, k -րդ գումարը.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

քանի որ S_{n_k} հաջորդականությունը S_n -ի ենթահաջորդականություն է:

Նակադարձ պնդումը սխալ է, ինչպես դա արտահայտվեց (6-15)-(6-16) օրինակում:

□

Այսպիսով, զուգորդական հարկությունը, որն ակնհայտ է վերջավոր գումարների համար, ճիշտ է նաև զուգամեր շարքերի համար:

Դիպողություն 6.2. *Ինչպես արդեն նշեցինք Թեորեմ 6.13-ում, զուգորդական հարկության հակադարձը սխալ է: Սակայն եթե յուրաքանչյուր k -ի համար a_k^* -ի մեջ առկա բոլոր գումարելիները նույն նշանն ունեն, ապա զուգորդական հարկության հակադարձը դառնում է ճիշտ:*

6.10 Շարքերի տեղափոխական հարկությունը

Մեր հաջորդ խնդիրն է պարզել շարքի անդամների տեղափոխությունների հնարավորությունը: Դիցուք տրված է որևէ (A) շարք: Կազմենք նոր շարք, որի անդամները նույնն են, բայց ստացվել են (A) շարքի անդամների կամայական տեղափոխության միջոցով:

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (A') \quad \sum_{n=1}^{\infty} a'_n :$$

(A') շարքը կանվանենք (A) շարքի **տեղափոխված շարք** կամ **տեղափոխություն**:

Թեորեմ 6.14. *(Բացարձակ զուգամեր շարքի տեղափոխական հարկությունը)*

Դիցուք $(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ շարքը բացարձակ զուգամեր է, որի գումարը հավասար է S , իսկ $(A') \quad \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ շարքը (A) -ի տեղափոխված շարք է, այսինքն՝ նրա անդամները ստացվել են (A) շարքի անդամների կամայական տեղափոխության միջոցով:

Այդ դեպքում (A') շարքը նույնպես բացարձակ զուգամեր է նույն S գումարով՝ $(A') \quad \sum_{n=1}^{\infty} a'_n = S$:

Կարճ կասենք՝ բացարձակ զուգամեր շարքն օժտված է տեղափոխական հարկությամբ:

Թեորեմը չենք ապացուցի:

Քանի որ Թեորեմ 6.14-ում տեղափոխական հարկությունը քննարկված է միայն բացարձակ զուգամեր շարքերի համար, ապա բնականոն հարց է առաջանում՝ արդյո՞ք պայմանականորեն զուգամեր շարքերը նույնպես օժտված են տեղափոխական հարկությամբ:

Ճիշտ պատասխանն է՝ ոչ. պայմանականորեն զուգամեր շարքերի համար տեղափոխական հարկությունը խախտվում է, ընդ որում՝ այդ խախտումը անսովոր ծայրահեղ բնույթ է կրում: Դա նկարագրված է հետևյալ նշանավոր թեորեմում, որի ապացույցը բաց կթողնենք:

Թեորեմ 6.15. *(Ռիմանի թեորեմը պայմանականորեն զուգամեր շարքերի մասին)*

Դիցուք $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ շարքը պայմանականորեն զուգամեր է: Այդ դեպքում ցանկացած L -ի համար (վերջավոր կամ անվերջ՝ $L \in [-\infty, +\infty]$) գոյություն ունի (A) շարքի այնպիսի փոխադասություն, որ փոխադասված շարքի գումարը հենց L -ն է՝ $\exists (A') \sum_{n=1}^{\infty} a'_n = L$:

6.11 Շարքերի արտադրյալը

Մեզ հայտնի է, որ զուգամեր շարքերը կարելի է անդամ առ անդամ գումարել կամ բազմապարկել հասարարունով, այսինքն՝ գծային գործողություններ կատարել: Այս բաժնում (առանց սպույզ հիմնավորումների) քննարկենք շարքերի բազմապարկման հարցը:

Թեորեմ 6.16. *(Կոշու թեորեմը շարքերի արտադրյալի մասին)*

Դիցուք $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ և $(B) \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ շարքերը բացարձակ զուգամեր են: Այդ դեպքում (A) և (B) շարքերի արտադրյալը, որի $a_i \cdot b_k$ անդամները վերցված են կամայական կարգով՝

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i \cdot b_k = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_i \cdot b_k = A \cdot B, \quad (6-17)$$

նույնպես բացարձակ զուգամեր շարք է, որի գումարը հավասար է AB :

Տարբեր նպատակների համար հարմար է (6-17) արտադրյալ շարքի անդամները դասավորել որոշակի կարգով, օրինակ՝

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) &= a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + (a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1) + \\ &+ \cdots + (a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1) + \cdots : \end{aligned} \quad (6-18)$$

Շարքերի արտադրյալի այս հատուկ փաթեթակի համար փեղի ունի Կոշու Թեորեմ 6.16-ից ավելի ուժեղ արդյունք:

Թեորեմ 6.17. *(Մերսեննի թեորեմը շարքերի արտադրյալի մասին)*

Դիցուք $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ և $(B) \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ շարքերը զուգամեր են, իսկ նրանցից գոնե մեկը՝ բացարձակ զուգամեր: Այդ դեպքում (A) և (B) շարքերի (6-18) փեթի արտադրյալը նույնպես զուգամեր շարք է, որի գումարը հավասար է AB :

6.12 Անվերջ արտադրյալներ

Դիցուք $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ -ը կամայական թվային հաջորդականություն է : Մենք ցանկանում ենք սահմանել այս թվերի արտադրյալը՝

$$(P) \quad \prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \cdot a_{n+1} \cdots,$$

սիմվոլը կոչվում է **անվերջ արտադրյալ**, իսկ a_n թվերը՝ (P) անվերջ արտադրյալի (ընդհանուր) անդամներ կամ արտադրիչներ:

$$P_n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

վերջավոր արտադրյալը կոչվում է (P) **արտադրյալի n -րդ մասնակի արտադրյալ**:

Սահմանում 6.8. Եթե

$$\exists \quad P \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_k \neq 0,$$

այս (P) անվերջ արտադրյալը կոչվում է **զուգամենք**, իսկ $P \neq 0$ թիվը՝ (P) **արտադրյալի արժեք**,

կգրենք $P = \prod_{n=1}^{\infty} a_n \neq 0$: Նախատակ դեպքում (P) անվերջ արտադրյալը կոչվում է **դասական**:

Մասնավորապես, $P = 0$ դեպքում կասենք, որ (P) անվերջ արտադրյալը **դասական չէ** : Միշտ կհամարենք, որ $a_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$):

Օրինակ 6.10. Դիտարկենք հաստատուն ընդհանուր անդամի պարզագույն դեպքը.

$$a_n \equiv 1, \quad P_n \equiv 1 \quad \implies \quad P = \prod_{n=1}^{\infty} 1 = 1 \quad \text{արտադրյալը զուգամենք է :}$$

Օրինակ 6.11. Դիտարկենք դասական արտադրյալի հետևյալ օրինակը՝

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{1}{n}, \quad P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} = n+1 \longrightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty) :$$

Ներկայացնենք՝

$$\implies \quad P = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty \quad \text{արտադրյալը դասական չէ :}$$

Օրինակ 6.12. Եվս մեկ դասական արտադրյալի օրինակ՝

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{1}{n} \quad (n \geq 2), \quad P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) :$$

Ներկայացնենք՝

$$\Rightarrow \boxed{P = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0}, \quad \text{արտադրյալը տարամիպում է զրոյին:}$$

Օրինակ 6.13. Դիտարկենք զուգամեք արտադրյալի օրինակ՝ $a_n \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{1}{n^2} \quad (n \geq 2),$

$$P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \frac{2 \cdot 4}{3^2} \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

(երբ $n \rightarrow \infty$) : Ներկայացնենք՝

$$\Rightarrow \boxed{P = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}}, \quad \text{արտադրյալը զուգամեք է:}$$

Անվերջ արտադրյալները և դրանց զուգամիպության հարցերը շարունակական են թվային շարքերին: Դրանում կարելի է համոզվել հետևյալ պնդումներից:

Թեորեմ 6.18. (Անվերջ արտադրյալի զուգամիպության անհրաժեշտ պայմանը)

$$\text{Եթե } (P) \quad \boxed{P = \prod_{n=1}^{\infty} a_n} \quad \text{արտադրյալը զուգամեք է, ապա } \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1} : \quad \text{Նախադարձը սխալ է:}$$

Ապացույց. Անվերջ արտադրյալի զուգամիպության սահմանումից անմիջապես հետևում է՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1, \quad \text{քանի որ } P \neq 0:$$

Իսկ այն, որ փարամետր արտադրյալի a_n ընդհանուր անդամը կարող է ձգվել մեկի, փեսանք Օրինակներ 6.11 և 6.12-ում: □

Քանի որ $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1}$ պայմանը անհրաժեշտ է անվերջ արտադրյալի զուգամիպության համար, ապա բնական է դիտարկել միայն դրական $\boxed{a_n > 0}$ անդամներով անվերջ արտադրյալները:

Թեորեմ 6.19. (Անվերջ արտադրյալի և շարքի համարժեքությունը)

$$\text{Եթե } a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \text{ապա } \boxed{\prod_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n}, \quad \text{արտադրյալը և շարքը համարժեք են,}$$

այսինքն՝ անվերջ արտադրյալը և շարքը զուգամեք կամ տարամեք են միաժամանակ:

Թեորեմ 6.19-ի շնորհիվ անվերջ արտադրյալի զուգամիպության հարցը բերվում է համապատասխան շարքի զուգամիպությանը: Սրանով նոր փեսություն չի սրելով, և օգտվում ենք արդեն մեզ ծանոթ շարքերի փեսությունից:

6.13 Ֆունկցիոնալ հաջորդականություններ և շարքեր:

Կերային և հավասարաչափ զուգամիություն

Մինչ այժմ մենք հերազուրել ենք $\{a_n\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ թվային հաջորդականություններ և շարքեր, որոնց անդամներն $a_n \in \mathbb{R}$ իրական թվերն են: Սահմանենք ավելի ընդհանուր հաջորդականություններ և շարքեր, որոնց անդամները ֆունկցիաներ են: Այդպիսիք կանվանենք **ֆունկցիոնալ հաջորդականություններ** և **ֆունկցիոնալ շարքեր**:

Դիցուք բոլոր $f_n(x) : E \mapsto \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) ֆունկցիաները որոշված են միևնույն $E \subset \mathbb{R}$ բազմության վրա: Կազմենք ֆունկցիոնալ հաջորդականություն՝

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\}, \quad x \in E :$$

Եթե այս ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը դիտարկենք որևէ ֆիքսած $x_0 \in E$ կետում, ապա կստացվի սովորական թվային հաջորդականություն՝ $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$: Մեկ այլ ֆիքսած $x_1 \in E$ կետում կստացվի մեկ այլ թվային հաջորդականություն՝ $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$: Յուրաքանչյուր ֆիքսած $x \in E$ կետում կստացվի առանձին թվային հաջորդականություն: Ենթադրենք նշված թվային հաջորդականությունները զուգամեր են, և նրանցից յուրաքանչյուրն իր սեփական սահմանն ունի, երբ $n \rightarrow \infty$.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \stackrel{\text{նշ.}}{=} A_{x_0} \stackrel{\text{կամ}}{=} f(x_0),$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_1) \stackrel{\text{նշ.}}{=} A_{x_1} \stackrel{\text{կամ}}{=} f(x_1),$$

և այլն $\dots$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\text{նշ.}}{=} A_x \stackrel{\text{կամ}}{=} f(x), \quad \forall x \in E :$$

Այդ դեպքում կասենք, որ $\{f_n(x)\}$ **ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը զուգամեր է E բազմության մեջ**, իսկ առաջացած $f(x)$ ֆունկցիան՝ **սահմանային ֆունկցիա** կամ պարզապես **սահման**: Այս տեսակի զուգամիությունը անվանում են **կերային** կամ **կեր առ կեր զուգամիություն**, որովհետև այն տեղի ունի յուրաքանչյուր ֆիքսած $x \in E$ կետում: Կերային զուգամիությունը կներկայացնենք մեզ ծանոթ գրելաձևով կամ ε -լեզվով.

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)} &\iff \boxed{f_n(x) \longrightarrow f(x), \text{ երբ } n \rightarrow \infty}, \quad \forall x \in E, \iff \\ \iff &\boxed{\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon} : \end{aligned} \quad (6-19)$$

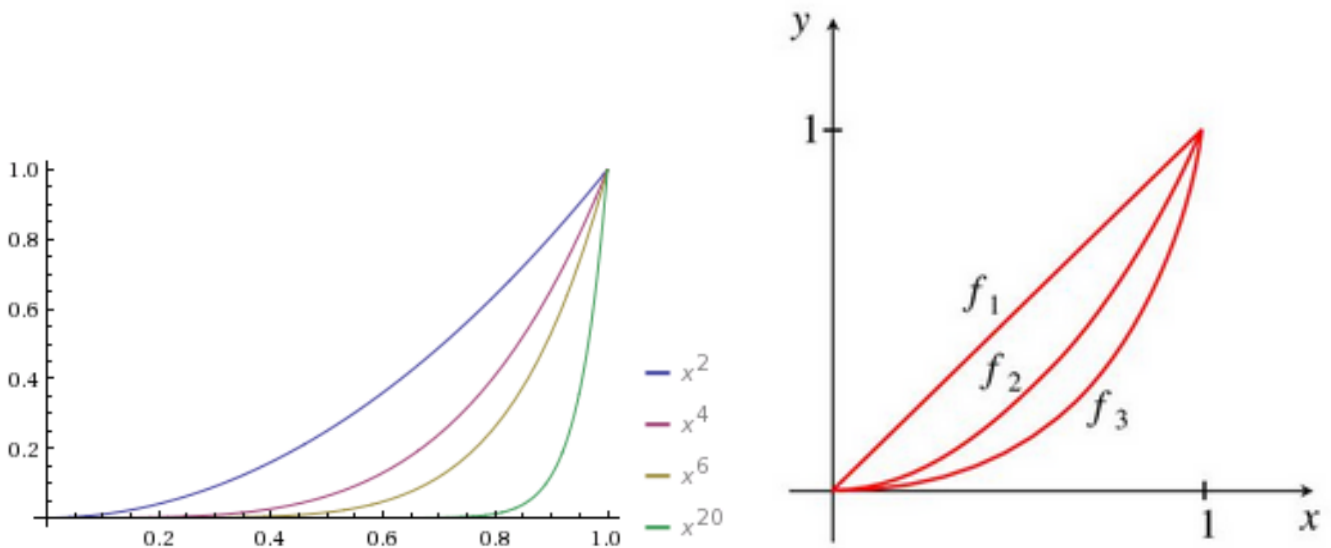
Կարևոր է այսպիսի չմոռանալ, որ $x \in E$ կերպը ֆիքսած է ի սկզբանե, ինչը հանգեցնում է N_0 համարի կախվածությանը ոչ միայն ε -ից, այլ նաև x -ից: Այլ կերպ ասած՝ N_0 համարը կարող է փոխվել մեկ կերպից մեկ այլ կերպին անցնելիս:

Օրինակ 6.14. *Քննարկենք հետևյալ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը՝ $f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^n$, $E = [0, 1)$: Յուրաքանչյուր $\forall x \in E = [0, 1)$ ֆիքսած կերպի համար գիտենք, որ $x^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$): Սա կերպային զուգամիություն է՝ $x^n \rightarrow f(x) \equiv 0$, երբ $n \rightarrow \infty$, որի սահմանը նույնաբար զրոյական ֆունկցիան է:*

Եթե մի փոքր ընդլայնենք E բազմությունը, ասենք՝ վերցնենք $E = [0, 1]$, ապա սահմանային $f(x)$ ֆունկցիան այլևս հասարարուն չի լինի.

$$x^n \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{եթե } x = 1, \end{cases} \quad (n \rightarrow \infty):$$

Տվյալ կերպային զուգամիության մասին որոշ պարկերացում կարելի է կազմել հետևյալ գծագրով՝



Գծագիր 6.7. $f_n(x) = x^n$ ֆունկցիոնալ հաջորդականության կերպային զուգամիության պարկերումը

Ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների համար կերպային զուգամիության համեմատ շատ ավելի ուժեղ զուգամիության տեսակ կա, որն այժմ կսահմանենք:

Սահմանում 6.9. Կասենք, որ $\{f_n(x)\}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը **զուգամիություն է** $f(x)$ ֆունկցիային **հավասարաչափ E բազմության վրա**, և կգրենք $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, երբ $n \rightarrow \infty$, $x \in E$,

էթե *տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E \quad (\text{միաժամանակ})} : \quad (6-20)$$

Նկատենք, որ վերջին ε -անհավասարությունը *տեղի ունի* (6-20)-ում բոլոր x -երի համար միաժամանակ և N_0 համարը անկախ է x -երից: Կետային (6-19) զուգամիությունը համեմատ սրանք են լրջագույն պարբերությունները, որոնցով հավասարաչափ զուգամիությունը շար ավելի ուժեղ պայման է հանդիսանում: Պարզ է, որ հավասարաչափ զուգամիությունից հետևում է կետային զուգամիությունը: Նակադարձը սխալ է, ինչպես կրեսնենք ստորև բերված օրինակներում:

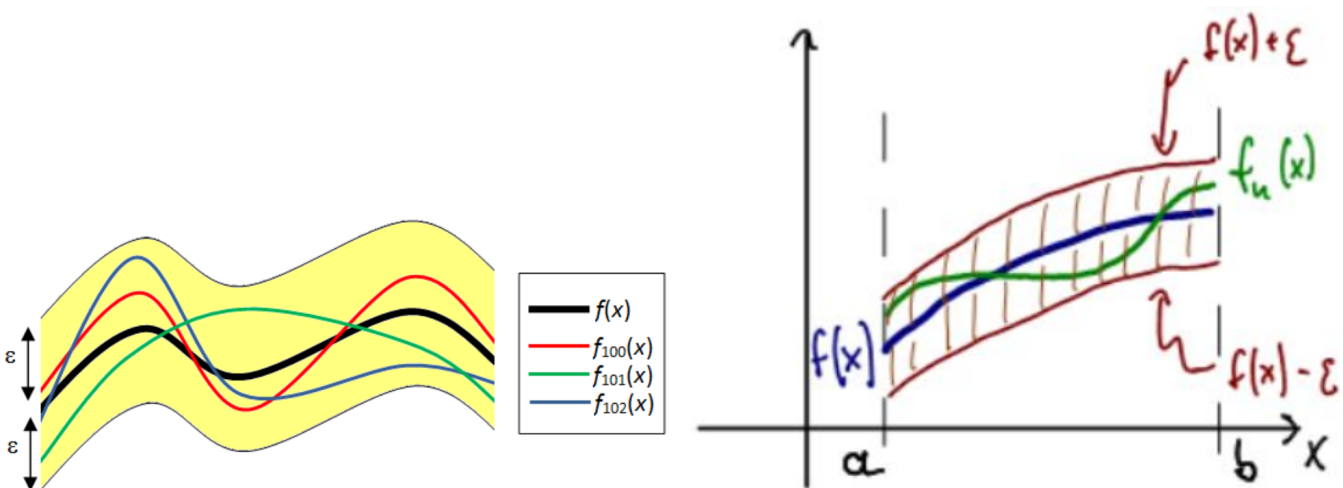
Հավասարաչափ զուգամիության (6-20) սահմանումը հաճախ հարմար է ներկայացնել ձևափոխված կամ հարմարեցված այլ տեսքով.

$$\boxed{f_n(x) \Rightarrow f(x), \quad \text{երբ} \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{հավասարաչափ} \quad x \in E \quad \text{բազմության վրա}} \iff (6-20) \iff$$

$$\iff \boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon} \quad (6-21)$$

$$\iff \boxed{\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)} : \quad (6-22)$$

Գծագիր 6.8-ը տեսանելի է դարձնում հավասարաչափ զուգամիության երևույթը:



Գծագիր 6.8. Հավասարաչափ զուգամիության գրաֆիկական պատկերումը

Սկսած որևէ N_0 համարից՝ բոլոր n -երի համար ($n > N_0$) բոլոր $f_n(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները ամբողջ որոշման փիրություն գրնվում են f -ի գրաֆիկը շրջապատող ε -շերտում (ε -շրջակայքում):

Օրինակ 6.15. *Քննարկենք մեզ ծանոթ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը՝*

$$\boxed{f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^n}, \quad E = \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

և հետազոտենք հավասարաչափ զուգամիտության հարցը: Մենք արդեն ցույց ենք տվել կետային զուգամիտությունը՝ $x^n \rightarrow f(x) \equiv 0$, երբ $n \rightarrow \infty$, որի սահմանը նույնաբար զրոյական ֆունկցիան է: Նավասարաչափ զուգամիտությունը ստուգելու համար կազմենք (6-22) սահմանը և հաշվենք այն.

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 \leq x \leq 1/2} |x^n - 0| = \sup_{0 \leq x \leq 1/2} x^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty):$$

Այսպիսով, (6-22) պայմանը հաստատվեց, և ուրեմն տվյալ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտ է տվյալ $E = [0, \frac{1}{2}]$ բազմության մեջ.

$$\boxed{x^n \Rightarrow 0, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty, \quad \text{հավասարաչափ } x \in E = [0, \frac{1}{2}] \text{ բազմության վրա}}:$$

Նույն ֆունկցիոնալ հաջորդականությունն այժմ դիտարկենք $E = (0, 1)$ բազմության մեջ: Դարձյալ ստուգենք հավասարաչափ զուգամիտության (6-22) պայմանը.

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 < x < 1} |x^n - 0| = \sup_{0 < x < 1} x^n = 1 \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty):$$

Այսպիսով, (6-22) պայմանը խախտվեց, և ուրեմն տվյալ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտ չէ (**զուգամիտ է անհավասարաչափ**) $E = (0, 1)$ բազմության վրա, կգրենք՝

$$\boxed{x^n \not\Rightarrow 0, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty, \quad x \in E = (0, 1)}:$$

Նկատենք, որ տարբեր բազմություններում նույն ֆունկցիոնալ հաջորդականության վարքը շատ տարբեր է:

Այժմ անցնենք ֆունկցիոնալ շարքերին: Դիցուք բոլոր $\boxed{f_n(x) : E \mapsto \mathbb{R}}$ ($n = 1, 2, \dots$) ֆունկցիաները որոշված են միևնույն $E \subset \mathbb{R}$ բազմության վրա: Կազմենք ֆունկցիոնալ շարք՝ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}$, $x \in E$:

Յուրաքանչյուր ֆիքսած $x_0 \in E$ կետում կստացվի սովորական թվային շարք՝ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)}$:

Յուրաքանչյուր ֆիքսած $x \in E$ կետի համար սահմաններ մասնակի գումարներ.

$$\boxed{S_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in E,$$

արդյունքում կառաջանա մասնակի գումարների (ֆունկցիոնալ) հաջորդականություն՝ $\boxed{\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}}$:

Սահմանում 6.10. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ շարքը կոչվում է **կեր առ կեր զուգամեր** $E \subset \mathbb{R}$ բազմության մեջ, եթե մասնակի գումարների $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը կեր առ կեր զուգամեր է $E \subset \mathbb{R}$ բազմության մեջ, այսինքն՝ եթե գոյություն ունի $S(x)$ սահմանային ֆունկցիա, որի համար տեղի ունի հերկյալ կերային զուգամիությունը՝

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) &\iff S_n(x) \longrightarrow S(x), \text{ երբ } n \rightarrow \infty, \quad \forall x \in E, \iff \\ \iff &\left[\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \right] : \end{aligned} \quad (6-23)$$

Այս դեպքում $S(x)$ սահմանային ֆունկցիան կոչվում է տվյալ ֆունկցիոնալ շարքի **գումար**, կգրենք՝

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in E : \quad (6-24)$$

Ի միջի այլոց, (6-23) պայմանի վերջին ε -անհավասարությունը կարելի է արտագրել շարքի անդամների միջոցով.

$$(6-23) \iff \left[\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon : \right] \quad (6-25)$$

Վերջին ε -անհավասարության մեջ տեսնում ենք սկզբնական շարքի մնացորդային շարքը կամ պոչը:

Կարելի է (6-25)-ից եզրակացնել, որ

ֆունկցիոնալ շարքը կեր առ կեր զուգամեր է E բազմության մեջ, եթե այդ շարքի պոչը կեր առ կեր ձգվում է զրոյի նույն բազմության մեջ:

Ինչպես հաջորդականությունների դեպքում էր, շարքերի համար նույնպես սահմանենք ավելի ուժեղ հավասարաչափ զուգամիություն:

Սահմանում 6.11. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ շարքը կոչվում է **հավասարաչափ զուգամեր** $E \subset \mathbb{R}$ բազմության վրա, եթե մասնակի գումարների $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամեր է E բազմության վրա, այսինքն՝ եթե տեղի ունի հերկյալ հավասարաչափ զուգամիությունը՝

$$\begin{aligned} S_n(x) \rightrightarrows S(x), \text{ երբ } n \rightarrow \infty, \text{ հավասարաչափ } x \in E \text{ բազմության վրա} &\iff \\ \iff &\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \rightrightarrows 0, \text{ երբ } n \rightarrow \infty, \text{ հավասարաչափ } x \in E \text{ բազմության վրա} \right] \quad (6-26) \\ \iff &\left[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in E \text{ (միաժամանակ)} \right] \end{aligned} \quad (6-27)$$

$$\iff \boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0 \quad \sup_{x \in E} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon} \quad (6-28)$$

$$\iff \boxed{\sup_{x \in E} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)} : \quad (6-29)$$

Այսպետից մասնավորապես կարելի է եզրակացնել, որ

Ֆունկցիոնալ շարքը հավասարաչափ զուգամեր է E բազմության վրա,
 եթե այդ շարքի պոչը հավասարաչափ ձգվում է զրոյի նույն բազմության վրա:

Օրինակ 6.16. Տեսրագուրենք $E = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ հատվածում $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ֆունկցիոնալ շարքի հավասարաչափ զուգամիությունը:

Կազմենք մասնակի գումարները և սկզբում պարզենք կերպին զուգամիության հարցը.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \longrightarrow \frac{1}{1 - x} = S(x), \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty,$$

յուրաքանչյուր ֆիքսած $x \left(|x| \leq \frac{2}{3} \right)$ կերի համար: Այսինքն՝ տեղի ունի շարքի կերպին զուգամիություն շարքի $S(x)$ գումարով՝ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$: Ի դեպ, սա մեզ լավ ծանոթ երկրաչափական շարքն է:

Այժմ ստուգենք շարքի հավասարաչափ զուգամիության (6-29) պայմանը.

$$\sup_{x \in E} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{|x| \leq 2/3} \left| \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \right| = \sup_{|x| \leq 2/3} \frac{|x|^{n+1}}{1 - x} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) :$$

Այսպիսով շարքի հավասարաչափ զուգամիությունը հաստատվեց:

Նույն ֆունկցիոնալ շարքն այժմ դիտարկենք մեկ այլ $E = (0, 1)$ բազմության մեջ: Դարձյալ ստուգենք հավասարաչափ զուգամիության (6-29) պայմանը.

$$\sup_{x \in E} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{0 < x < 1} \left| \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \right| = \sup_{0 < x < 1} \frac{|x|^{n+1}}{1 - x} = +\infty \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) :$$

Սա նշանակում է, որ տվյալ ֆունկցիոնալ շարքը հավասարաչափ զուգամեր չէ (**զուգամեր է անհավասարաչափ**) $E = (0, 1)$ բազմության վրա:

6.14 Ֆունկցիոնալ հաջորդականության և շարքի հավասարաչափ զուգամիտության Կոշու սկզբունքը

Թվային հաջորդականությունների և շարքերի զուգամիտությանը համարժեք մի նշանավոր պայման կար, որը կրում է Կոշու անունը, այն կոչվում է Կոշու պայման կամ ֆունդամենտալություն: Սովորական զուգամիտության Կոշու պայմանը ձևակերպվում էր ε -լեզվով և կարևոր էր այն բանով, որ հաջորդականության կամ շարքի անդամները համեմատում են իրար հետ, այլ ոչ թե սահմանի հետ:

Հավասարաչափ զուգամիտության համար ևս Կոշու պայմանը կարելի է ձևակերպել նույն կերպ՝ այժմ արդեն միաժամանակ բոլոր մասնակից x կետերի համար: Առանց խիստ հիմնավորումների ձևակերպենք Կոշու սկզբունքը ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների և շարքերի համար:

Թեորեմ 6.20. *(Ֆունկցիոնալ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտության Կոշու սկզբունքը)*

$\{f_n(x)\}$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է ըստ x -ի E բազմության վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի Կոշու հետևյալ պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad \forall p = 1, 2, 3, \dots \implies \sup_{x \in E} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon : \quad (6-30)$$

Այժմ նույն պայմանը ձևակերպենք ֆունկցիոնալ շարքի $\{S_n(x)\}$ մասնակի գումարների հաջորդականության համար:

Թեորեմ 6.21. *(Ֆունկցիոնալ շարքի հավասարաչափ զուգամիտության Կոշու սկզբունքը)*

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է ըստ x -ի E բազմության վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի Կոշու հետևյալ պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad \forall p = 1, 2, 3, \dots, \quad \sup_{x \in E} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \sup_{x \in E} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon : \quad (6-31)$$

Եթե (6-31) պայմանի մեջ մասնավորապես վերցնենք $p = 1$, ապա կստանանք շարքի հավասարաչափ զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը:

Ներկանք 6.2. (Ֆունկցիոնալ շարքի հավասարաչափ զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը)

Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամիտ է $x \in E$ բազմության վրա, ապա շարքի ընդհանուր անդամները հավասարաչափ ձգվում են զրոյի $x \in E$ բազմության վրա:

$$\boxed{f_n(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad x \in E} :$$

Օրինակ 6.17. Մենք արդեն ապացուցել էինք, որ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ֆունկցիոնալ շարքը զուգամիտ է անհավասարաչափ $E = (0, 1)$ բազմության վրա:

Նույն արդյունքը կարելի է ստանալ Ներկանք 6.2-ի միջոցով: Իսկապես,

$$\sup_{x \in E} |f_n(x)| = \sup_{0 < x < 1} x^n = 1 \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{այսինքն՝} \quad \boxed{x^n \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad x \in (0, 1)} :$$

Սա նշանակում է, որ շարքի հավասարաչափ զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը խախտվեց, և ուրեմն տվյալ ֆունկցիոնալ շարքը հավասարաչափ զուգամիտ չէ (զուգամիտ է անհավասարաչափ) $E = (0, 1)$ բազմության վրա:

Դիտողություն 6.3. Ըստ սահմանման՝ շարքերի զուգամիտությունը նրա մասնակի գումարների հաջորդականության զուգամիտությունն է: Այդ կերպ հաջորդականությունների զուգամիտությանը վերաբերող արդյունքները տարածվում են շարքերի վրա՝ առանց հավելյալ հիմնավորումների:

Պարզվում է, որ ճիշտ է նաև հակադարձ անցումը, այն է՝ եթե որևէ մի պնդում կամ հատկություն տեղի ունի շարքերի զուգամիտության համար, ապա այն կարելի է վերաձևակերպել հաջորդականությունների համար: Դա կարելի է իրականացնել հետևյալ կերպ. եթե ցանկանում ենք ստանալ առկա հատկությունը $\{f_n(x)\}$ հաջորդականության համար, ապա այդ հատկությունը կիրառենք հարույկ կառուցված

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) - f_{n-1}(x)]}, \quad f_0(x) \equiv 0,$$

շարքի համար, որի մասնակի n -րդ գումարը համընկնում է $f_n(x)$ -ի հետ՝

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n [f_k(x) - f_{k-1}(x)] = f_n(x) :$$

6.15 Շարքերի հավասարաչափ զուգամիտության հայտանիշներ և հատկություններ:

Շարքի հավասարաչափ զուգամիտության Վայերշտրասի մաժորանտային հայտանիշը

Բացի սահմանումից և Կոշու պայմանից՝ շարք կարևոր է ունենալ շարքերի հավասարաչափ զուգամիտության հայտանիշներ (բավարար պայմաններ), որոնք թույլ կտան հնարավորինս պարզ եղանակով ստուգել հավասարաչափ զուգամիտության առկայությունը:

Առաջին պարզ և ամենապարզավաճ հայտանիշը Վայերշտրասինն է, որը նման է բաղդապրման թեորեմներին:

Թեորեմ 6.22. (Վայերշտրասի մաժորանտային հայտանիշը)

Դիցուք $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, $x \in E$, ֆունկցիաները որոշված են $E \subset \mathbb{R}$ բազմության վրա և բավարարում են հետևյալ պայմանները.

$$a) \quad \exists c_n \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad |f_n(x)| \leq c_n, \quad x \in E, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$p) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty \quad \text{զուգամեր է:}$$

$$Այդ դեպքում $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ շարքը զուգամեր է բացարձակ և հավասարաչափ E բազմության վրա:$$

Ապացույց. Երկու անգամ օգտվենք զուգամիտության Կոշու սկզբունքից՝ սովորական և հավասարաչափ զուգամիտության համար.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad \forall p = 1, 2, 3, \dots,$$

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon \quad \forall x \in E:$$

Քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ թվային շարքը զուգամեր է, ապա նրա համար Կոշու պայմանը փեղի ունի: Ներկաբար՝ առավել ևս փեղի ունի Կոշու պայմանը $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ և $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ շարքերի հավասարաչափ զուգամիտության համար: □

Թեորեմի պայմաններում c_n թվերը կոչվում են **մաժորանտներ**, իսկ նրանցից կազմված $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ շարքը՝ **մաժորանտային**:

Օրինակ 6.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ շարքը զուգամետ է բացարձակ և հավասարաչափ $\mathbb{R}$ ամբողջ թվային առանցքի վրա: Բսկապես, ընդամենը պետք է գնահատել

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

և նկատել, որ մաժորանտային շարքը զուգամետ է՝ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$:

6.16 Շարքի հավասարաչափ զուգամիություն

Աբել-Դիրիխլեի և Լայբնիցի հայտանիշները

Աբել-Դիրիխլեի հայտանիշները մեզ ծանոթ են թվային շարքերի սովորական զուգամիության համար: Շարքի հավասարաչափ զուգամիության Աբել-Դիրիխլեի հայտանիշներում ավելանում է x պարամետրը (փոփոխականը): Առանց ապացույցի ներկայացնենք հայտանիշները:

Թեորեմ 6.23. (Աբել-Դիրիխլեի 1-ին հայտանիշ կամ Դիրիխլեի հայտանիշ)

Դիցուք $\{a_n(x)\}$ և $\{b_n(x)\}$ ($x \in E$) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունները բավարարում են հետևյալ պայմանները.

ա1) (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ շարքի մասնակի գումարները հավասարաչափ սահմանափակ են, այսինքն՝

$$|A_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq M = \text{const} \quad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad (6-32)$$

բ1) $\{b_n(x)\}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը մոնոտոն է ըստ n -ի և ձգրում է զրոյի՝

$b_n(x) \searrow 0$ կամ $b_n(x) \nearrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$, հավասարաչափ $x \in E$ բազմության վրա:

Այդ դեպքում

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \quad (6-33)$$

շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $x \in E$ բազմության վրա:

Ներկայացվում է 6.3. (Լայբնիցի հայրանիշի հավասարաչափ զուգամիտության համար)

Դիցուք $\{b_n(x)\}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը մոնոտոն է ըստ n -ի և ձգարում է զրոյի՝

$b_n(x) \searrow 0$ կամ $b_n(x) \nearrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$, հավասարաչափ $x \in E$ բազմության վրա:

Այդ դեպքում

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n(x) \quad (6-34)$$

լայբնիցյան (նշանափոխ) շարքը հավասարաչափ զուգամեր է $x \in E$ բազմության վրա:

Թեորեմ 6.24. (Աբել-Դիրիխլեի 2-րդ հայրանիշ կամ Աբելի հայրանիշ)

Դիցուք $\{a_n(x)\}$ և $\{b_n(x)\}$ ($x \in E$) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունները բավարարում են հետևյալ պայմանները.

ա2) $(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամեր է $x \in E$ բազմության վրա:

բ2) $\{b_n(x)\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն է ըստ n -ի և հավասարաչափ սահմանափակ՝

$$|b_n(x)| \leq \text{const}, \quad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N} :$$

Այդ դեպքում

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \quad (6-35)$$

շարքը հավասարաչափ զուգամեր է $x \in E$ բազմության վրա:

6.17 Նավասարաչափ զուգամեր հաջորդականությունների և շարքերի հարկություններ

Նավասարաչափ զուգամիտությունը, ինչպես պարզվում է, պահպանում է ֆունկցիաների բազմաթիվ հարկություններ, օրինակ՝ անընդհարությունը, դիֆերենցելիությունը, ինտեգրելիությունը (փարբեր իմաստներով) և այլն: Դա, իհարկե, շարք հարմար է և կիրառական նշանակություն ունի: Ապացույցները հիմնված են սահմանումների վրա, դրանք բաց կթողնենք:

Թեորեմ 6.25.

$$\left(\begin{array}{l} f_n(x) \in C(X), \quad n = 1, 2, \dots, \\ f_n(x) \Rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{հավասարաչափ } x \in X \text{ բազմության վրա} \end{array} \right) \Rightarrow \boxed{f(x) \in C(X)} :$$

Այլ կերպ ասած՝ անընդհար ֆունկցիաների հավասարաչափ սահմանն անընդհար է :

Նույն հաջողությամբ այս հարկությունը կարելի է ձևակերպել ֆունկցիոնալ շարքերի համար:

Թեորեմ 6.26.

$$\left(\begin{array}{l} f_n(x) \in C(X), \quad n = 1, 2, \dots, \\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x) \quad \text{հավասարաչափ զուգամեր է } x \in X \quad \text{բազմության վրա} \end{array} \right) \Rightarrow \boxed{S(x) \in C(X)} :$$

Այլ կերպ՝ $\boxed{\text{անընդհատ ֆունկցիաների հավասարաչափ զուգամեր շարքի գումարն անընդհատ է}} :$

Եթե լրացուցիչ պահանջներ, որ $f_n(x)$ հաջորդականությունը Թեորեմ 6.25-ում մոնոտոն է (ըստ n -ի), իսկ Թեորեմ 6.26-ում $f_n(x) \geq 0$, ապա Թեորեմներ 6.25 և 6.26-ի հակադարձ պնդումները որոշակի իմաստով նույնպես ճիշտ են, և րեղի ունեն $\mathcal{A}$ -ի հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 6.27. (*Դինիի թեորեմը մոնոտոն զուգամիություն մասին*)

$$\left(\begin{array}{l} f(x), f_n(x) \in C[a, b], \quad n = 1, 2, \dots, \\ f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad x \in [a, b], \quad n = 1, 2, \dots, \\ f_n(x) \nearrow f(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in [a, b] \\ \text{(կերպի զուգամիություն)} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} f_n(x) \Rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty), \\ \text{հավասարաչափ } x \in [a, b] \quad \text{հարվածում} \end{array} \right) :$$

Թեորեմ 6.28. (*Դինիի թեորեմը դրական շարքի զուգամիություն մասին*)

$$\left(\begin{array}{l} S(x), f_n(x) \in C[a, b], \quad n = 1, 2, \dots, \\ f_n(x) \geq 0, \quad x \in [a, b], \quad n = 1, 2, \dots, \\ S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in [a, b], \\ \text{(կերպի զուգամիություն)} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{հավասարաչափ զուգամեր է} \\ x \in [a, b] \quad \text{հարվածում} \end{array} \right) :$$

Թեորեմ 6.29. (Սահմանային անցում շարքում)

Դիցուք $u) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամեր է ինչ-որ a կերի $\mathcal{U}(a)$ շրջակայքում;

$$բ) \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \stackrel{u_2}{=} b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} :$$

Այդ դեպքում

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (6-36)$$

ընդ որում վերջին թվային շարքը զուգամեր է :

Կարճ բնութագրենք (6-36) բանաձևը.

Հավասարաչափ զուգամեր շարքում կարելի է սահմանային անցում կատարել, այսինքն՝ սահմանի նշանը կարելի է դրսից փանել գումարի նշանի փակ:

Ձևակերպենք Թեորեմ 6.29-ի համարժեքը հաջորդականությունների համար:

Թեորեմ 6.30. (Սահմանային անցում սահմանում, հաջորդական սահման)

Դիցուք $u) \quad f_n(x) \Rightarrow f(x)$, երբ $n \rightarrow \infty$, հավասարաչափ ինչ-որ $x \in \mathcal{U}(a)$ շրջակայքում;

$$բ) \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \stackrel{u_2}{=} b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} :$$

Այդ դեպքում

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \stackrel{u_2}{=} b \quad \text{և} \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b : \quad (6-37)$$

Թեորեմ 6.31. (Սահմանային անցում ինտեգրալի նշանի փակ)

Դիցուք $u) \quad f_n(x) \in \mathcal{R}[a, b], \quad n = 1, 2, \dots ;$

$բ) \quad f_n(x) \Rightarrow f(x)$, երբ $n \rightarrow \infty$, հավասարաչափ $x \in [a, b]$ հատվածում:

Այդ դեպքում $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ և

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx : \quad (6-38)$$

Կարճ բնութագրենք (6-38) բանաձևը.

Հավասարաչափ զուգամեր հաջորդականության դեպքում կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի փակ, այսինքն՝ սահմանի նշանը կարելի է դրսից փանել ինտեգրալի նշանի փակ:

Ձևակերպենք Թեորեմ 6.31-ի համարժեքը շարքերի համար:

Թեորեմ 6.32. (Շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրումը)

Դիցուք ա) $f_n(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $n = 1, 2, \dots$;

բ) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ հավասարաչափ զուգամեկ է $x \in [a, b]$ հարվածում:
Այդ դեպքում

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx, \quad (6-39)$$

ընդ որում վերջին թվային շարքը զուգամեկ է :

Թեորեմ 6.33. (Շարքի անդամ առ անդամ դիֆերենցումը կամ ածանցումը)

Դիցուք ա) բոլոր $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $[a, b]$ հարվածում;

բ) սկզբնական $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ շարքը զուգամեկ է զոնե մեկ $x_0 \in [a, b]$ կերում;

գ) ածանցված $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամեկ է $x \in [a, b]$ հարվածում:

Այդ դեպքում սկզբնական շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ածանցել՝

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad x \in [a, b] : \quad (6-40)$$

6.18 Աստիճանային շարքեր:

Աստիճանային շարքի զուգամիությունից փրկություն

Աստիճանային շարքերը ֆունկցիոնալ շարքերի մասնավոր, բայց կարևոր խումբ են կազմում:

Սահմանում 6.12. *Աստիճանային են կոչվում հետևյալ տեսքի ֆունկցիոնալ շարքերը՝*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (6-41)$$

որտեղ $x_0, a_n \in \mathbb{R}$ թվերը ֆիքսած իրական հաստատություններ են:

x -ը շարքի փոփոխականն է, a_n հաստատությունները կոչվում են (6-41) **աստիճանային շարքի գործակիցներ**, իսկ x_0 -ն՝ (6-41) **աստիճանային շարքի կենտրոն**:

Քանի որ փոփոխականի $x - x_0 \stackrel{\text{նշ.}}{=} t$ փոխարինման միջոցով (6-41) աստիճանային շարքը ստանում է ավելի պարզ տեսք՝ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, որի կենտրոնը զրոն է, ապա հեմագայում կարելի է սահմանափակվել

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (6-42)$$

աստիճանային շարքերով, որոնց կենտրոնը $x_0 = 0$ սկզբնակետն է:

Ֆունկցիոնալ շարքերի ամբողջ տեսությունը, բոլոր հատկությունները, իհարկե, կիրառելի են աստիճանային շարքերի նկատմամբ: Սակայն աստիճանային շարքերն ունեն իրենց առանձնահատկությունները: Առաջին հերթին մեզ հետաքրքրում է նրանց զուգամիության հարցը: Ակնհայտ է, որ (6-42) աստիճանային շարքը զուգամետ է շարքի $x = 0$ կենտրոնում:

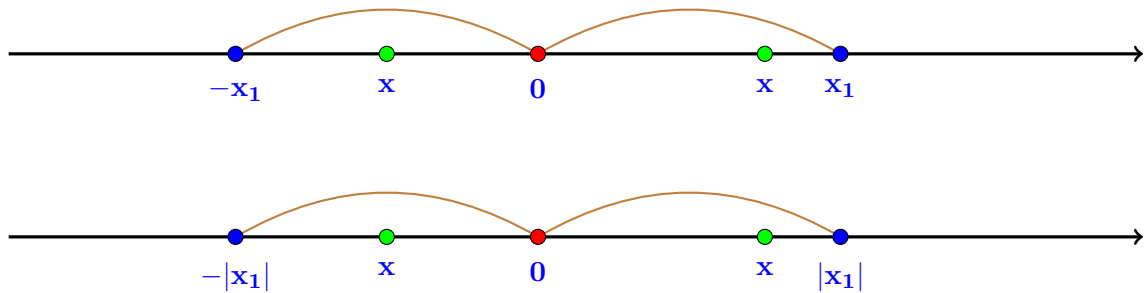
Թեորեմ 6.34. *(Արևի թեորեմը)*

Եթե (6-42) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ աստիճանային շարքը զուգամետ է որևէ $x_1 \neq 0$ կետում, ապա շարքը բացարձակ զուգամետ է յուրաքանչյուր x , $|x| < |x_1|$, կետում, այսինքն՝ $x \in (-|x_1|, |x_1|)$ միջակայքում:

Ապացույց. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ շարքի զուգամիության անհրաժեշտ պայմանի համաձայն՝

$$\begin{aligned} a_n x_1^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) &\implies \{a_n x_1^n\} \text{ սահմանափակ հաջորդականություն է} \\ &\implies \exists M = \text{const} > 0 \text{ s.t. } |a_n x_1^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, \\ &\implies |a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_1} \right|^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots : \end{aligned}$$

Այսպիսով եթե $|x| < |x_1|$, ապա $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$ շարքը զուգամետ է որպես երկրաչափական շարք $q = \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$ հայրարարով: Այնուհետև, ըստ բաղդադման թեորեմների, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ շարքը զուգամետ է յուրաքանչյուր x , $|x| < |x_1|$, կետում: $\square$



Գծագիր 6.9. $x = 0$ սկզբնականի շրջակայքը որպես ասփիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթ

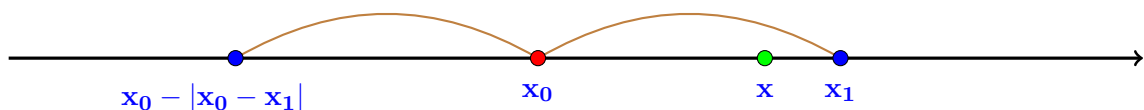
Ներկանք 6.4. Եթե (6-42) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ասփիճանային շարքը տարամետ է որևէ $x_1 \neq 0$ կետում, ապա շարքը տարամետ է յուրաքանչյուր x , $|x| > |x_1|$, կետում, այսինքն՝ $x \in (-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, +\infty)$ բազմության մեջ:

Ապացույց. Իսկապես, եթե (6-42) շարքը զուգամետ լիներ որևէ x , $|x| > |x_1|$, կետում, ապա Թեորեմ 6.34-ի համաձայն՝ զուգամետ կլիներ նաև x_1 կետում, ինչը հակասում է պայմանին: $\square$

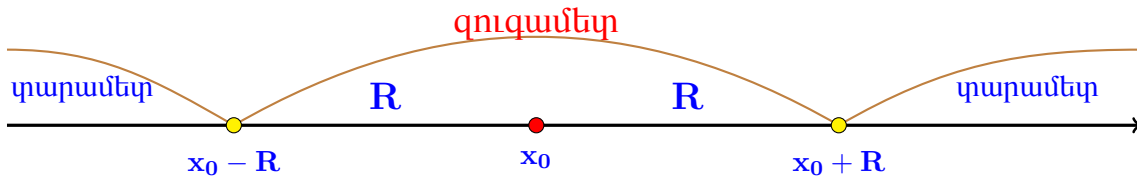
Արելի Թեորեմ 6.34-ը ձևակերպենք (6-41) ընդհանուր ասփիճանային շարքերի համար:

Թեորեմ 6.35. (Արելի թեորեմ)

Եթե (6-41) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ասփիճանային շարքը զուգամետ է որևէ $x_1 \neq x_0$ կետում, ապա շարքը բացարձակ զուգամետ է յուրաքանչյուր x , $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$, կետում, այսինքն՝ $x_0 - |x_1 - x_0| < x < x_0 + |x_1 - x_0|$ միջակայքում:



Գծագիր 6.10. x_0 կենտրոնի շրջակայքը որպես ասփիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթ



Գծագիր 6.11. x_0 -ի շրջակայքը որպես աստիճանային շարքի զուգամիտության փիրույթ, երբ $0 < R < \infty$

Թեորեմ 6.36. (Կոշի-Ադամարի թեորեմը զուգամիտության շառավղի մասին)

Աստիճանային (6-41) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ շարքի համար նշանակենք հետևյալ մեծությունը՝

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad 0 \leq R \leq +\infty :$$

ա) Եթե $R = 0$, ապա (6-41) շարքը զուգամետր է միայն $x = x_0$ կետում և փարամետր է մնացած $x \neq x_0$ կետերում:

բ) Եթե $R = +\infty$, ապա (6-41) շարքը զուգամետր է բոլոր $x \in \mathbb{R}$ կետերում:

գ) Եթե $0 < R < +\infty$, ապա (6-41) շարքը զուգամետր է $|x - x_0| < R$ միջակայքում և փարամետր է $|x - x_0| > R$ բազմության մեջ:

Ապացույց. Նշանակենք $b_n \stackrel{\text{նշ.}}{=} a_n (x - x_0)^n$ և քննարկենք $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ դրական շարքը: Կիրառենք դրական շարքերի զուգամիտության Կոշու հայտանիշը.

$$\alpha \stackrel{\text{նշ.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x - x_0| = \frac{|x - x_0|}{R} :$$

ա) Եթե $R = 0$, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ և $\alpha = +\infty$: Սա նշանակում է, որ $b_n \not\rightarrow 0$ և $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ կամ (6-41) շարքը փարամետր է ամենուրեք՝ $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$: Միակ բացառությունը $x = x_0$ կետն է, որտեղ (6-41) շարքը զուգամետր է (որի համար, ի դեպ, $\alpha = 0$):

բ) Եթե $R = +\infty$, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ և $\alpha = 0 < 1$: Ըստ Կոշու հայտանիշի՝ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ շարքը բացարձակ զուգամետր է, ուրեմն նաև զուգամետր է ամենուրեք, այսինքն՝ յուրաքանչյուր $x \in \mathbb{R}$ կետում:

գ) Երբ $0 < R < +\infty$, դիտարկենք երկու ենթադեպ:

Եթե $|x - x_0| < R$, ապա $\alpha < 1$ և ըստ Կոշու հայտանիշի՝ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ շարքը բացարձակ զուգամետր է, ուրեմն նաև զուգամետր է փոխյալ x , $|x - x_0| < R$, կետերի համար:

Իսկ եթե $|x - x_0| > R$, ապա $\alpha > 1$ և $b_n \not\rightarrow 0$: Նեղակալելով $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ կամ (6-41) շարքը փարամետր է փոխյալ x , $|x - x_0| > R$, կետերի համար: □

Թեորեմ 6.36-ի ա), բ), գ) կետերը բավարարող R մեծությունը կոչվում է **գուգամիություն շառավիղ**: Ինչպես տեսնում ենք Թեորեմ 6.36-ից, (6-41) աստիճանային շարքը փաստորեն գուգամետ է x_0 կետի R -շրջակայքում: Նիմանական գ) դեպքում առաջացած $(x_0 - R, x_0 + R)$ միջակայքը կոչվում է **գուգամիության տիրույթ (միջակայք)**, տես **գծագիր 6.11**: Թեորեմ 6.36-ը ոչ մի պարզաբանում չի տալիս միայն գուգամիության միջակայքի $x_0 \pm R$ ծայրակետերի մասին:

Կոշի-Ադամարի բանաձևից բացի՝ գուգամիության շառավիղը գտնելու համար ավելի պարզ բանաձև կա, որը, սակայն, պակաս կիրառելի է :

Ներկանք 6.5. (Աստիճանային շարքի գուգամիության շառավիղի Դալամբերի բանաձևը)

Աստիճանային (6-41) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ շարքի գուգամիության շառավիղը կարելի է գտնել հետևյալ բանաձևով՝

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

պայմանով, որ այս սահմանը գոյություն ունի կամ $+\infty$ է :

Ապացույց. Օգտվենք Թեորեմ 6.36-ի նշանակումներից:

Դրական $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ շարքի նկարմամբ կիրառենք ոչ թե գուգամիության Կոշու հայտանիշը, այլ Դալամբերի, ըստ որի՝ շարքի գուգամիության հարցը կախված է հետևյալ սահմանից՝

$$\alpha \stackrel{\text{նշ.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x - x_0| = \frac{|x - x_0|}{R} :$$

Նաջորդող դատողությունները մոտավորապես նույնն են, ինչ Թեորեմ 6.36-ի ապացույցում: □

Օրինակ 6.19. Քննարկենք նախկինից մեզ ծանոթ երկրաչափական շարքը՝ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$:

Գտնենք գուգամիության շառավիղը որևէ բանաձևով՝ $R = 1$: Զուգամիության տիրույթը $(-1, 1)$ միջակայքն է, ընդ որում՝ նկատենք, որ միջակայքի ծայրակետերում շարքը տարամետ է :

Օրինակ 6.20. Գտնենք աստիճանային շարքի գուգամիության տիրույթը, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$:

Գտնենք գուգամիության շառավիղը որևէ բանաձևով՝ $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$: Զուգամիության տիրույթը $[-1, 1)$ կիսաբաց միջակայքն է, որում նկատենք, որ $x = 1$ ծայրակետերում շարքը տարամետ է (որպես հարմոնիկ շարք), իսկ $x = -1$ ծայրակետերում շարքը գուգամետ է՝ համաձայն Լայբնիցի հայտանիշի:

Օրինակ 6.21. Գրենք աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} :$$

Գրենք զուգամիտության շառավիղը որևէ բանաձևով՝

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty :$$

Կոշի-Ադամարի թեորեմ 6.36-ի համաձայն՝ $R = +\infty$ նշանակում է՝ տվյալ աստիճանային շարքը զուգամեր է ամենուրեք՝ $x \in \mathbb{R}$:

Կոշի-Ադամարի թեորեմ 6.36-ը գրեթե լիովին լուծում է աստիճանային շարքի զուգամիտության հարցը: Բացարձակ զուգամիտության հարցը նույնպես քննարկել ենք: Նաջորդ թեորեմը քննարկում է աստիճանային շարքի հավասարաչափ զուգամիտության հարցը:

Թեորեմ 6.37. (Աստիճանային շարքի հավասարաչափ զուգամիտության մասին)

Յուրաքանչյուր (6-41) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ աստիճանային շարք զուգամեր է բացարձակ և հավասարաչափ զուգամիտության տիրույթի ներսում, այսինքն՝ յուրաքանչյուր

$$\{x : |x - x_0| \leq r\} \subset \{x : |x - x_0| < R\} \quad \forall r, \quad 0 < r < R,$$

փակ միջակայքում: Մասնավորապես, $x_0 = 0$ դեպքում, ասելով, որ աստիճանային շարքը հավասարաչափ զուգամեր է շարքի զուգամիտության տիրույթի ներսում, նկարի ունենք

$$[-r, r] \subset (-R, R) \quad \forall r, \quad 0 < r < R,$$

կամայական փակ հատվածում:

Ապացույց. Բացարձակ զուգամիտությունը հետևում է Աբելի թեորեմ 6.34-6.35-ից: Նավասարաչափ զուգամիտությունը հիմնավորվում է Վայերշտրասի մաժորանտային հայրանիշով: Մանրամասները թողնենք ընթերցողին: $\square$

Թեորեմ 6.38. (Աստիճանային շարքի դիֆերենցման մասին)

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան զուգամեր աստիճանային շարքի գումարն է, ընդ որում՝ շարքի զուգամիտության շառավիղը զրո չէ:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad R > 0 : \quad (6-43)$$

Այդ դեպքում (6-43) շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ածանցել և ինտեգրել $(x_0 - R, x_0 + R)$ միջակայքում: Ածանցելու կամ ինտեգրելու արդյունքում զուգամիտության շառավիղը չի փոխվում: Բացի այդ, (6-43) աստիճանային շարքի գումարն անվերջ դիֆերենցելի է՝ $f(x) \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$:

Ապացույց. Շարքի անդամ առ անդամ ածանցումը և ինտեգրումը հիմնավորել էինք ընդհանուր ֆունկցիոնալ շարքերի շրջանակում: Վճռական պայմանն այսպեղ աստիճանային շարքի հավասարաչափ զուգամիտության առկայությունն է զուգամիտության փրկության ներսում:

Ցույց պահենք, որ (6-43) և նրա ածանցված

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad \left(R_1 \text{ զուգամիտության շառավղով} \right)$$

շարքի զուգամիտության շառավիղները նույնն են: Իսկապես, Կոշի-Ադամարի բանաձևի համաձայն՝

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n-1}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(|a_n|^{1/n} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} :$$

Նույն կերպ կարելի է վարվել ինտեգրելու դեպքում: Ածանցված (կամ ինտեգրված) շարքը նույնպես աստիճանային է, և գործողությունը կարելի է կրկնել ցանկացած անգամ: $\square$

6.19 Թեյլորի շարքեր

Նիշենք Թեյլորի բանաձևը $\mathcal{U}(x_0)$ շրջակայքում n (կամ $n+1$) անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիայի համար.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + r_n(x), \quad x \in \mathcal{U}(x_0), \quad (6-44)$$

$r_n(x)$ -ը մնացորդային անդամն է, որը կարելի է ներկայացնել մասնավորապես Պեանոյի կամ Լագրանժի փեսքով.

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad \text{երբ } x \rightarrow x_0, \quad (6-45)$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (6-46)$$

որտեղ c -ն x -ի և x_0 -ի միջև գտնվող ինչ-որ կետ է, այսինքն՝ $x_0 < c < x$ կամ $x < c < x_0$:

Եթե ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է՝ $f(x) \in C^\infty(\mathcal{U}(x_0))$, ապա Թեյլորի (6-44) բանաձևի կարգը՝ n -ը, կարելի է վերցնել՝ որքան կամենանք մեծ: Բնական հարց է առաջանում. արդյոք չի՞ կարելի (6-44)

բանաձևը փոխարինել շարքով՝ ենթադրաբար

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots}, \quad (6-47)$$

կամ

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}, \quad x \in \mathcal{U}(x_0):$$

(6-47) շարքը կոչվում է $f(x)$ **ֆունկցիայի Թեյլորի շարք** կամ **Թեյլորի վերլուծություն** x_0 կետում, կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան վերլուծված է իր Թեյլորի շարքով x_0 կետում:

$$\boxed{a_n = a_n(f) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{թվերը } f(x) \text{ ֆունկցիայի Թեյլորի գործակիցներն են:}$$

Եթե $\boxed{x_0 = 0}$, ապա (6-47) շարքը կոչվում է նաև $f(x)$ **ֆունկցիայի Մաքլորենի կամ Թեյլոր-Մաքլորենի շարք**:

Մենք առայժմ ոչինչ չգիտենք (6-47) շարքի գոյամիություն մասին, թեև (6-47) շարքն աստիճանային է, և նրա նկատմամբ կարելի է կիրառել աստիճանային շարքերի տեսությունը, մասնավորապես Աբելի և Կոշի-Ադամարի թեորեմները:

Թեյլորի (6-44) բանաձևում փաստորեն ներկայացված են Թեյլորի (6-47) շարքի n -րդ մասնակի գումարը և շարքի պոչը (մնացորդը): Առհասարակ շարքերի գոյամիության սահմանումից հետևում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 6.39. Որպեսզի $f(x) \in C^\infty(\mathcal{U}(x_0))$ ֆունկցիան $x \in \mathcal{U}(x_0)$ կետում արտահայտվի իր Թեյլորի զուգամեկը (6-47) շարքով, անհրաժեշտ է և բավարար, որ մնացորդային անդամը ձգտի զրոյի՝ $r_n(x) \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$:

Ֆունկցիան Թեյլորի շարքով վերլուծելու և նրա գոյամիության բավական պարզ բավարար պայման կա: Ձևակերպենք այդ արդյունքը Մաքլորենի շարքերի ($x_0 = 0$) համար:

Թեորեմ 6.40. Դիցուք $\mathcal{U}(0) = (-\delta, \delta)$ շրջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է՝ $f(x) \in C^\infty(\mathcal{U}(0))$, որտեղ իր բոլոր կարգի ածանցյալները սահմանափակ են.

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathcal{U}(0) = (-\delta, \delta), \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots:$$

Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան վերլուծվում է իր Թեյլոր-Մաքլորենի շարքով.

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}, \quad x \in \mathcal{U}(0) = (-\delta, \delta):$$

Ապացույց. Թերեմ 6.39-ին հետևելով բավական է ցույց տալ, որ մնացորդային անդամն անվերջ փոքր է, երբ $n \rightarrow \infty$: Գրենք Թեյլորի բանաձևը Լագրանժի տեսքով մնացորդային անդամով և գնահատենք մնացորդը.

$$\begin{aligned} \exists \theta \in (0, 1) \quad s.t. \quad r_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \\ \Rightarrow \quad |r_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty : \end{aligned}$$

Թերեմ 6.39-ի կիրառումն ավարտում է ապացույցը: □

Ներկայացնենք որոշ տարրական ֆունկցիաների Թեյլոր-Մաքլորենի վերլուծությունները.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, & R &= \infty, \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, & R &= 1, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}, & R &= \infty, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, & R &= \infty, \\ \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, & R &= \infty, \\ \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, & R &= \infty, \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k, \quad \alpha \in \mathbb{R}, & R &= 1 : \end{aligned}$$

Աջից ներկայացված են գուգամիություն շառավիղները:

Վերջին շարքը կոչվում է **Նյուտոնի բինոմական վերլուծություն**, իսկ գործակիցները՝ **բինոմական**.

$$\boxed{\binom{\alpha}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \binom{\alpha}{0} \stackrel{\text{def}}{=} 1,$$

մասնավոր դեպքում՝

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k}, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq k \leq n :$$

Բինոմական շարքը կարելի է արտագրել կարճ՝ օգտագործելով այս նշանակումները՝

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in (-1, 1) :$$

Պարզագույն դեպքում, երբ $\alpha = -1$, գալիս ենք երկրաչափական շարքին՝

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1, 1) :$$

Դիպողություն 6.4. Ներառքի է, որ գոյություն ունեն անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ՝

$\exists f(x) \in C^{\infty}(\mathcal{U}(x_0))$, որոնք չեն ներկայացվում Թեյլորի սեփական շարքով: Անգամ եթե Թեյլորի շարքը զուգամեր է, պարտադիր չէ, որ նրա գումարը հենց f -ը լինի:

Որպես օրինակ կարելի է բերել անվերջ դիֆերենցելի

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ֆունկցիան՝ $f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, որի Թեյլորի շարքը սկզբնականում զրոյական է, և ուրեմն՝

$$f(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \dots$$

բանաձևը տեղի չունի, պարզապես սխալ է: Ցանկացողները կարող են ստուգել և համոզվել, որ Թեյլորի բոլոր գործակիցների արժեքը զրո է:

6.20 Ֆուրիեի շարքեր

Այս բաժնում կձանոթանանք Ֆուրիեի շարքերի տեսության որոշ հիմնական գաղափարներին:

Ինչպես լավ հայտնի է, յուրաքանչյուր n -չափանի վեկտոր $\mathbb{R}^n$ գծային տարածությունից ($\vec{a} \in \mathbb{R}^n$) կարելի է գծորեն վերլուծել հենքային (բազիսային) $\vec{e}_k$ վեկտորների միջոցով.

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^n a_k \vec{e}_k = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n, \quad a_k = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad \vec{e}_k \perp \vec{e}_j \quad (k \neq j), \quad |\vec{e}_k| = 1 :$$

Նման վերլուծություն հնարավոր է ամեն մի գծային տարածությունում, որում գծորեն անկախ վեկտորների քանակը վեջավոր է, այդպես կոչված *վերջավոր չափանի վեկտորական տարածություններում*: Երբ վեկտորական տարածության մեջ կարելի է գտնել ցանկացած թվով գծորեն անկախ վեկտորներ, այդպես կոչված՝ *անվերջ չափանի վեկտորական տարածություններում*, ըստ բազիսի համանման գծային վերլուծության հնարավորությունը շարքավելի խնդրահարույց է: Ֆուրիեի շարքերը հենց նման մի գծային վերլուծություն են ֆունկցիաների համար անվերջ չափանի ֆունկցիոնալ տարածություններում:

Նիշենք գծային հանրահաշվի դասընթացից որոշ հասկացություններ և հետո կքննարկենք ֆունկցիաների համակարգեր:

Սահմանում 6.13. *Դիցուք X -ն ինչ-որ գծային վեկտորական տարածություն է, որում սահմանված է $(f, g) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ արտապարկերումը (թվային ֆունկցիան), այսինքն՝ ցանկացած $f, g \in X$ վեկտորների (տարրերի) զույգին համապատասխանում է ինչ-որ $(f, g) \in \mathbb{R}$ իրական թիվ՝ հետևյալ չորս պայմանները (աքսիոմները) բավարարող՝*

1. $(f, g) = (g, f) \quad \forall f, g \in X, \quad (\text{տեղափոխական հարկություն});$
2. $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h) \quad \forall f, g, h \in X, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (\text{բաշխական կանոն});$
3. $(f, f) \geq 0 \quad \forall f \in X, \quad (\text{ոչ բացասականություն});$
4. $(f, f) = 0 \implies f = 0 :$

Այդ դեպքում (f, g) իրական թիվը կոչվում է f և g տարրերի **սկալյար արտադրյալ**:

Սահմանում 6.14. X գծային վեկտորական տարածությունը, որում կարելի է սահմանել ինչ-որ սկալյար արտադրյալ, կոչվում է **Էվկլիդեսյան տարածություն**:

Օրինակ, $X = \mathbb{R}^n$ -ը վերջավոր չափանի Էվկլիդեսյան տարածություն է, քանի որ հայտնի

$$(\vec{a}, \vec{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

սկալյար արտագրյալը բավարարում է Սահմանում 6.13-ի բոլոր չորս աքսիոմները:

Բերենք ֆունկցիոնալ տարածության օրինակ, այն է՝ անվերջ չափանի էվկլիդյան տարածություն (սովորաբար այն անվանում են **հիլբերտյան** կամ ավելի ճշգրիտ՝ **նախահիլբերտյան տարածություն**):

Վերհիշենք հասկացումը ըստ Ռիմանի ինտեգրելի ֆունկցիաների դասը՝ $\mathcal{R}[a, b]$, որում մեկ լրացում կատարենք: Նույնացնենք այն ֆունկցիաները, որոնք տարբերվում են իրարից ընդամենը զրո չափի բազմության վրա արժեքներով, քան $\mathcal{H}$ փոփոխություն 5.10 և Լեբեգի թեորեմ 5.15: Այսպես սահմանված նոր դասը նշանակենք $\overline{\mathcal{R}}[a, b]$ -ով: Զրոյական տարր $\overline{\mathcal{R}}[a, b]$ -ում կհամարվի այն ֆունկցիան, որը հավասար է զրոյի ամենուրեք $[a, b]$ -ում, բացի զրո չափի ինչ-որ բազմությունից: Նաև, $\overline{\mathcal{R}}[a, b]$ -ում սահմանենք սկալյար արտադրյալ ինտեգրալային տեսքով.

$$(f, g) \equiv (f, g)_{\mathcal{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x) g(x) dx, \quad f, g \in \overline{\mathcal{R}}[a, b] : \quad (6-48)$$

Սահմանված (6-48) սկալյար արտադրյալով $\overline{\mathcal{R}}[a, b]$ ֆունկցիոնալ դասը վերածվում է (անվերջ չափանի) էվկլիդյան վեկտորական տարածության (նախահիլբերտյան տարածության): Սահմանում 6.13-ի բոլոր չորս աքսիոմները (6-48) սկալյար արտադրյալի համար հեշտությամբ ստուգվում են, ընդ որում նկատենք, որ ֆունկցիաների նույնացման լրացուցիչ պայմանն ապահովում է 4-րդ աքսիոմը, այն է՝ $(f, f)_{\mathcal{R}} = 0 \implies f = 0 \in \overline{\mathcal{R}}[a, b]$:

Սահմանում 6.15. *Դիցուք X զծային վեկտորական տարածության յուրաքանչյուր $f \in X$ տարրի (վեկտորի) համար սահմանված է $\|f\| = \|f\|_X$ իրական թիվը՝ հետևյալ չորս պայմանները (**աքսիոմները**) բավարարող՝*

1. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \quad \forall f \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\text{համասեռություն});$
2. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \forall f, g \in X, \quad (\text{եռանկյան անհավասարություն});$
3. $\|f\| \geq 0 \quad \forall f \in X, \quad (\text{ոչ բացասականություն});$
4. $\boxed{\|f\| = 0 \implies f = 0} :$

Այդ դեպքում $\|f\|$ ոչ բացասական իրական թիվը կոչվում է f տարրի **նորմ**, իսկ X -ը՝ **նորմավորված տարածություն**:

Էվկլիդյան և նորմավորված վեկտորական տարածությունները սերտորեն կապված են իրար: Յուրաքանչյուր X էվկլիդյան տարածություն նաև նորմավորված տարածություն է, եթե նորմը սկալյար արտադրյալի միջոցով սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$\|f\|_X \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(f, f)}, \quad f \in X : \quad (6-49)$$

Իսկապես, նորմի բոլոր չորս աքսիոմները բխում են սկալյար արտադրյալի չորս աքսիոմներից: Եռանկյան անհավասարությունը (6-49) նորմի համար բխում է գծային հանրահաշվի դասընթացից հայտնի նշանավոր մի անհավասարությունից:

Լեմմա 6.1. (Շվարցի կամ Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարություն)

Յուրաքանչյուր X էվկլիդեսյան տարածության բոլոր տարրերի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g), \quad f, g \in X : \quad (6-50)$$

Եթե X -ում նորմը սահմանենք (6-49) բանաձևով, ապա (6-50) անհավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|, \quad f, g \in X : \quad (6-51)$$

Օրինակ 6.22. Արդեն դիտարկել ենք n -չափանի վեկտորների $\mathbb{R}^n$ (վերջավոր չափանի) էվկլիդեսյան տարածությունը

$$(\vec{a}, \vec{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

սկալյար արտադրյալով: Վերևաբար $\mathbb{R}^n$ տարածությունը նաև նորմավորված է, որում, ըստ (6-49)-ի, վեկտորի նորմը համընկնում է վեկտորի երկարության հետ.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} = |\vec{a}| :$$

Կոշի-Բունյակովսկի-Շվարցի անհավասարությունը $\mathbb{R}^n$ -ում հանգում է մեզ արդեն հայտնի տարրական մի անհավասարության, րեն (4-59).

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2} :$$

Բաժին 4.24-ում մենք ավելի ընդհանուր անհավասարություններ էինք ապացուցել:

Օրինակ 6.23. Դիտարկենք $\overline{\mathcal{R}}[a, b]$ -ով նշանակված անվերջ չափանի էվկլիդեսյան տարածությունը (նախա-հիլբերտյան տարածություն): Այն բաղկացած է $[a, b]$ հատվածում ըստ Օհմանի ինտեգրելի ֆունկցիաներից, ընդ որում՝ մենք նույնացնում ենք այն ֆունկցիաները, որոնք տարրերվում են իրարից միայն զրո չափի բազմության վրա արժեքներով: Սկալյար արտադրյալն $\overline{\mathcal{R}}[a, b]$ -ում սահմանել էինք (6-48) տեսքով.

$$(f, g) \equiv (f, g)_{\mathcal{R}} = \int_a^b f(x) g(x) dx, \quad f, g \in \overline{\mathcal{R}}[a, b] : \quad (6-52)$$

Այսպեսից էլ $\overline{\mathcal{R}}[a, b]$ -ը վերածվում է նորմավորված տարածության

$$\|f\|_{\mathcal{R}} = \sqrt{(f, f)_{\mathcal{R}}} = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \quad (6-53)$$

նորմով՝ (6-49)-ի և (6-52)-ի համաձայն:

Կոշի-Բունյակովսկի-Շվարցի անհավասարությունը $\overline{\mathcal{R}}[a, b]$ տարածությունում՝

$$\begin{aligned} |(f, g)_{\mathcal{R}}| &\leq \|f\|_{\mathcal{R}} \|g\|_{\mathcal{R}}, \quad \text{կամ նույնը՝} \\ \left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| &\leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad f, g \in \overline{\mathcal{R}}[a, b], \end{aligned} \quad (6-54)$$

մենք ապացուցել էինք Թեորեմ 5.36-ում և Ներկանք 5.10-ում: Իսկ եռանկյան (կամ Միևկուսկու) անհավասարությունը $\overline{\mathcal{R}}[a, b]$ -ում՝

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\mathcal{R}} &\leq \|f\|_{\mathcal{R}} + \|g\|_{\mathcal{R}}, \quad \text{կամ նույնը՝} \\ \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad f, g \in \overline{\mathcal{R}}[a, b], \end{aligned} \quad (6-55)$$

ապացուցել էինք Թեորեմ 5.37-ում:

Սահմանում 6.16. X էվկլիդեսյան (կամ հիլբերտյան) տարածության երկու վեկտորներ (տարրեր) $\varphi, \psi \in X$ կոչվում են **օրթոգոնալ**, զրոյում են $\varphi \perp \psi$, եթե նրանց սկալյար արտադրյալը զրո է՝ $(\varphi, \psi)_X = 0$:

Մասնավորապես, $\varphi, \psi \in \overline{\mathcal{R}}[a, b]$ ֆունկցիաները կոչվում են **օրթոգոնալ** $\overline{\mathcal{R}}[a, b]$ -ում, $\varphi \perp \psi$, եթե նրանց սկալյար արտադրյալը զրո է՝ $(\varphi, \psi)_{\mathcal{R}} = \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 0$:

Սահմանում 6.17. X էվկլիդեսյան (կամ հիլբերտյան) տարածության տարրերի համակարգը (հաջորդականությունը)՝ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, կոչվում է **օրթոգոնալ համակարգ**, եթե նրա φ_n տարրերը զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են՝ $(\varphi_n, \varphi_j)_X = 0 \quad (n \neq j), \quad \text{և} \quad (\varphi_n, \varphi_n)_X \neq 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$:

Այն հատուկ դեպքում, երբ լրացուցիչ $(\varphi_n, \varphi_n)_X = 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$, այսինքն՝ φ_n -ի նորմը հավասար է մեկի, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ համակարգը կոչվում է **օրթոնորմալ** (կամ **օրթոնորմավորված**):

Դժվար չէ ցույց տալ, որ յուրաքանչյուր օրթոգոնալ համակարգ գծորեն անկախ է և զրոյական տարր չի պարունակում: Նշենք նաև, որ փրկված $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ օրթոգոնալ համակարգը, բազմապատկելով համապատասխան հաստատուններով, կարելի է վերածել օրթոնորմալ համակարգի: Իսկապես, բավական է կազմել $\left\{ \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|_X} \right\}_{n=1}^{\infty}$ համակարգը, և հեշտ է ստուգել, որ այս համակարգի յուրաքանչյուր տարրի նորմը հավասար է մեկի:

Օրթոգոնալ համակարգի դասական օրինակ է այդպես կոչված **եռանկյունաչափական համակարգը** $\overline{\mathcal{R}}[-\pi, \pi]$ տարածությունում, այն է՝

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

որը կարճ կգրենք

$$\left\{ 1, \cos nx, \sin nx \right\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\mathcal{R}}[-\pi, \pi] : \quad (6-56)$$

Ստուգենք, որ եռանկյունաչափական (6-56) համակարգն օրթոգոնալ է :

Լեմմա 6.2. *(Եռանկյունաչափական համակարգի օրթոգոնալությունը)*

Եռանկյունաչափական (6-56) համակարգի բոլոր ֆունկցիաները զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են ըստ $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{R}[-\pi, \pi]}$ սկալյար արտադրյալի, իսկ յուրաքանչյուր ֆունկցիայի նորմը զրոն չէ, այսինքն՝

$$\begin{aligned} (1, \cos nx)_{\mathcal{R}} &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, & n &= 1, 2, \dots, \\ (1, \sin nx)_{\mathcal{R}} &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, & n &= 1, 2, \dots, \\ (\cos nx, \sin kx)_{\mathcal{R}} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin kx \, dx = 0, & n, k &= 1, 2, \dots, \\ (\cos nx, \cos kx)_{\mathcal{R}} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx \, dx = 0, & n \neq k, \quad n, k &= 1, 2, \dots, \\ (\sin nx, \sin kx)_{\mathcal{R}} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin kx \, dx = 0, & n \neq k, \quad n, k &= 1, 2, \dots, \\ \|1\|_{\mathcal{R}}^2 &= (1, 1)_{\mathcal{R}} = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi, \\ \|\cos nx\|_{\mathcal{R}}^2 &= (\cos nx, \cos nx)_{\mathcal{R}} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi, & n &= 1, 2, \dots, \\ \|\sin nx\|_{\mathcal{R}}^2 &= (\sin nx, \sin nx)_{\mathcal{R}} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi, & n &= 1, 2, \dots : \end{aligned}$$

Ապացույց. Հաշվենք այս ինտեգրալներից միայն մեկը-երկուսը, մյուսների հաշվարկը նմանապես է կատարվում.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+k)x + \cos(n-k)x] \, dx = \frac{\sin(n+k)x}{2(n+k)} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n-k)x}{2(n-k)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

եթե $n \neq k$, իսկ եթե $n = k$, ապա

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2nx] \, dx = \frac{1}{2} \left[2\pi + \frac{\sin 2nx}{2n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \pi,$$

բոլոր $n = 1, 2, \dots$ համար: □

Ինչպես արդեն նշել էինք, օրթոգոնալ եռանկյունաչափական համակարգը հեշտությամբ կարելի է վերածել օրթոնորմալ համակարգի:

Լեմմա 6.3. *(Եռանկյունաչափական համակարգի օրթոնորմալությունը)*

Եռանկյունաչափական

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\mathcal{R}}[-\pi, \pi] \quad (6-57)$$

համակարգը օրթոնորմալ է :

Ապացույց. Անմիջապես հետևում է նախորդ լեմմայի բանաձևերից, մասնավորապես՝

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\|_{\mathcal{R}} = 1, \quad \left\| \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\|_{\mathcal{R}} = 1, \quad \left\| \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\|_{\mathcal{R}} = 1, \quad n = 1, 2, \dots :$$

□

Դիցուք հիլբերտյան կամ անվերջ չափանի էվկլիդյան X տարածության մեջ տրված է որևէ օրթոգոնալ համակարգ՝ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$: Ենթադրենք $f \in X$ տարրը գծորեն վերլուծվում է այդ համակարգով.

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad c_n = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (6-58)$$

որտեղ նկատենք, որ շարքի զուգամիությունն ըստ X տարածության նորմի միշտ տեղի ունի: Այդ դեպքում (6-58) շարքի c_n գործակիցները կարելի է գտնել f, φ_n -ի միջոցով՝ հետևյալ կերպ: Կազմենք f -ի և φ_n -ի սկալյար արտադրյալը ($n = 1, 2, \dots$) և օգտվենք սկալյար արտադրյալի սահմանման աքսիոմներից և $\{\varphi_n\}$ համակարգի օրթոգոնալությունից.

$$(f, \varphi_n)_X = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \varphi_n \right)_X = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \varphi_k, \varphi_n)_X = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\varphi_k, \varphi_n)_X = c_n (\varphi_n, \varphi_n)_X :$$

Ներկայացնենք՝

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)_X}{(\varphi_n, \varphi_n)_X} = \frac{(f, \varphi_n)_X}{\|\varphi_n\|_X^2}, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (6-59)$$

Սահմանում 6.18. (**Ֆուրիեի ընդհանուր շարք և գործակիցներ**)

Դիցուք հիլբերտյան կամ անվերջ չափանի էվկլիդյան X տարածության մեջ տրված են օրթոգոնալ համակարգ՝ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ և որևէ $f \in X$ տարր: Այդ դեպքում

$$c_n = c_n(f) = \frac{(f, \varphi_n)_X}{(\varphi_n, \varphi_n)_X} = \frac{(f, \varphi_n)_X}{\|\varphi_n\|_X^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6-60)$$

թվերը կոչվում են f տարրի **Ֆուրիեի գործակիցներ ըստ $\{\varphi_n\}$ համակարգի**, իսկ

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)_X}{(\varphi_n, \varphi_n)_X} \varphi_n \quad (6-61)$$

շարքը կոչվում է f տարրի **Ֆուրիեի շարք ըստ $\{\varphi_n\}$ համակարգի**: Գրում են՝ $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$:

Նշենք, որ եթե $f \in X$ տարրն արդեն ներկայացված է իր Ֆուրիեի շարքով, այսինքն՝ (6-58) բանաձևով, ապա այդ վերլուծությունը միակն է, քանի որ նրա Ֆուրիեի $c_n(f)$ գործակիցները միարժեք են որոշված (6-59)-(6-60) բանաձևերով:

Նախուկ դեպքում, երբ օրթոգոնալ $\{\varphi_n\}$ համակարգը նաև օրթոնորմալ է, Ֆուրիեի շարքն ու գործակիցներն ավելի պարզ տեսք են ընդունում.

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n, \quad c_n = c_n(f) = (f, \varphi_n)_X, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (6-62)$$

Քանի որ մեզ հետաքրքրում են ֆունկցիոնալ X տարածությունները, հարկապես $\overline{\mathcal{R}}[a, b]$ տեսակի ինտեգրելի ֆունկցիաների դասերը, ներկայացնենք Ֆուրիեի շարքն ու գործակիցներն այս կարևոր դեպքում.

$$c_n = c_n(f) = \frac{(f, \varphi_n)_{\mathcal{R}}}{(\varphi_n, \varphi_n)_{\mathcal{R}}} = \frac{(f, \varphi_n)_{\mathcal{R}}}{\|\varphi_n\|_{\mathcal{R}}^2} = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6-63)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)_{\mathcal{R}}}{(\varphi_n, \varphi_n)_{\mathcal{R}}} \varphi_n(x), \quad x \in [a, b], \quad f(x) \in \overline{\mathcal{R}}[a, b] : \quad (6-64)$$

Մասնավորապես, եթե օրթոգոնալ $\{\varphi_n\}$ համակարգը նաև օրթոնորմալ է, ապա Ֆուրիեի շարքն ու գործակիցներն ավելի պարզ տեսք են ընդունում.

$$c_n = c_n(f) = (f, \varphi_n)_{\mathcal{R}} = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6-65)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n(x), \quad x \in [a, b], \quad f(x) \in \overline{\mathcal{R}}[a, b] : \quad (6-66)$$

Ֆունկցիաների օրթոգոնալ համակարգի կարևորագույն օրինակ է (6-56) **եռանկյունաչափական համակարգը** $\overline{\mathcal{R}}[-\pi, \pi]$ -ում՝

$$\left\{ 1, \cos nx, \sin nx \right\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\mathcal{R}}[-\pi, \pi] : \quad (6-67)$$

Ըստ եռանկյունաչափական համակարգի՝ Ֆուրիեի գործակիցները և շարքը հետևյալ տեսքն ունեն՝

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}a_0(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(f, 1)_{\mathcal{R}}}{(1, 1)_{\mathcal{R}}} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 dx}{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (6-68)$$

$$a_n = a_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(f, \cos nx)_{\mathcal{R}}}{(\cos nx, \cos nx)_{\mathcal{R}}} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6-69)$$

$$b_n = b_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(f, \sin nx)_{\mathcal{R}}}{(\sin nx, \sin nx)_{\mathcal{R}}} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6-70)$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad x \in [-\pi, \pi] : \quad (6-71)$$

(6-71) շարքը կանվանենք $f(x)$ ֆունկցիայի **Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարք**, որի նշանի տակ փակագծեր սովորաբար չեն դնում, իսկ համարժեքության $\sim$ նշանն ընդամենը ձևական համապատասխանություն է :

Այսպես մեր հիմնական խնդիրներից է պարզել (6-71) եռանկյունաչափական շարքի տարրեր իմաստներով գուգամիտության պայմանները, և այն պայմանները, որոնց դեպքում (6-71) եռանկյունաչափական շարքի գումարը կլինի հենց $f(x)$ ֆունկցիան:

Թեորեմ 6.41. *Եթե ինչ-որ a_n և b_n գործակիցներով*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (6-72)$$

եռանկյունաչափական շարքը հավասարաչափ զուգամեր է $[-\pi, \pi]$ հատվածում, և հայրնի է, որ շարքի գումարը $f(x)$ ֆունկցիան է, ապա շարքի a_n և b_n գործակիցները տրվում են հենց (6-68)-(6-70) բանաձևերով, այսինքն՝

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (6-73)$$

Այլ կերպ ասած՝ **հավասարաչափ զուգամեր եռանկյունաչափական շարքը սեփական $f(x)$ գումարի Ֆուրիեի շարքն է :**

Ապացույց. Քանի որ հավասարաչափ զուգամեր (6-72) շարքի անդամներն անընդհատ ֆունկցիաներ են, ապա շարքի $f(x)$ գումարը նույնպես անընդհատ ֆունկցիա է $[-\pi, \pi]$ հատվածում: Բացի այդ, շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right] dx = \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \pi a_0 : \end{aligned}$$

Մնացած գործակիցները ևս ստացվում են շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրումով և օգտվելով Լեմմա 6.2-ի ինտեգրալներից, եռանկյունաչափական համակարգի օրթոգոնալությունից՝

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right] \cos nx \, dx = \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi a_n, \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx &= b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi b_n, \end{aligned}$$

բոլոր $n = 1, 2, \dots$ համար:

□

Դիպողություն 6.5. Եթե ինտեգրելի ֆունկցիայի արժեքները փոփոխենք վերջավոր թվով կերերում, ապա, ինչպես լավ հայտնի է (տե՛ս Ներևանք 5.3) ֆունկցիան կմնա ինտեգրելի, ընդ որում՝ ինտեգրալի արժեքը չի փոխվի: Ուստի երկու ֆունկցիաներ, որոնք իրարից տարբերվում են միայն վերջավոր թվով կերերում, Ֆուրիեի նույն շարքն ունեն:

Նկատենք, որ եռանկյունաձևական համակարգի ֆունկցիաները 2π -պարբերական են $\mathbb{R}$ առանցքի վրա, այսինքն՝ օժտված են $\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, հատկությամբ: Ներկաբար՝ $[-\pi, \pi]$ հատվածում տրված ֆունկցիայի Ֆուրիեի եռանկյունաձևական շարքի գումարը ևս 2π -պարբերական է դառնում $\mathbb{R}$ առանցքի վրա: Ուրեմն Ֆուրիեի շարքով վերլուծելու համար իմաստ ունի դիտարկել $\mathbb{R}$ առանցքի վրա 2π -պարբերական ֆունկցիաներ: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան սկզբնապես որոշված է $[-\pi, \pi]$ հատվածում, ապա շարունակենք այն ամբողջ $\mathbb{R}$ առանցքի վրա այնպես, որ դառնա 2π -պարբերական: Իսկ նման 2π -պարբերական շարունակություն անհնար է իրականացնել, եթե $f(-\pi) \neq f(\pi)$, և հնարավոր է իրականացնել, եթե $f(-\pi) = f(\pi)$: Կարելի է շրջանցել այս խոչընդոտը՝ դիտարկելով f -ին համարժեք f -ի **նեղացումը** $[-\pi, \pi)$ կիսաբաց միջակայքի վրա, որն էլ հետո 2π -պարբերական կերպով շարունակել ամբողջ $\mathbb{R}$ առանցքի վրա՝ սահմանելով՝

$$f^*(x + 2\pi k) \stackrel{\text{def}}{=} f(x), \quad -\pi \leq x < \pi, \quad k \in \mathbb{Z} :$$

Կառուցված $f^*(x)$ ֆունկցիան իսկապես 2π -պարբերական է $\mathbb{R}$ առանցքի վրա և $[-\pi, \pi]$ հատվածում տարբերվում է $f(x)$ ֆունկցիայից գուցե միայն մեկ $x = \pi$ կետում: Այդ պարճառով f -ի և նրա 2π -պարբերական f^* շարունակության Ֆուրիեի շարքերը նույնն են: Երբեմն f -ի պարբերական f^* շարունակությունը նշանակում են նույն f տառով:

Չիշենք T -պարբերական ($T > 0$) ֆունկցիայի ինտեգրալ հատկությունը, տե՛ս Ներևանք 5.8.

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \quad \text{մասնավորապես,} \quad \int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (a \in \mathbb{R}),$$

եթե $f(x)$ ֆունկցիան 2π -պարբերական է : Այլ կերպ ասած, եթե ինտեգրման միջակայքի երկարությունը հավասար է պարբերությանը, ապա ինտեգրալի արժեքը կախված չէ սահմաններից: Մասնավորապես, Ֆուրիեի եռանկյունաձևական շարքի գործակիցները կարելի է ներկայացնել ինտեգրալներով, որոնք տարածված են այլ հատվածով, օրինակ՝

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx}, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (6-74)$$

Պարզվում է , որ ինտեգրելի $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի a_n , b_n գործակիցները ձգտում են զրոյի, երբ $n \rightarrow \infty$: Առանց ապացույցի ներկայացնենք Ռիմանի այդ արդյունքը:

Թեորեմ 6.42. (Ռիմանի թեորեմ)

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a, b]$ հատվածում՝ $f \in \mathcal{R}[a, b]$, ապա

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0,$$

մասնավորապես՝ $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն անվերջ փոքր են՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 \quad \text{և} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 :$$

Ձևակերպենք Ֆուրիեի եռանկյունաձևական շարքի զուգամիություն մի քանի դասական հայտանիշներ:

Սահմանում 6.19. $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **կտրոր առ կտրոր մոնոտոն** $[a, b]$ **հատվածում**, եթե $[a, b]$ հատվածը հնարավոր է փրոտել վերջավոր թվով միջակայքերի՝

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

այնպես, որ $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն լինի յուրաքանչյուր (x_{k-1}, x_k) միջակայքում, $k = \overline{1, n}$:

Սահմանափակ կտրոր առ կտրոր մոնոտոն ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածում կարող է ունենալ միայն 1-ին կարգի խզումներ և միակողմանի սահմաններ՝ $\exists f(a+0), f(b-0), f(x-0), f(x+0)$, այդ թվում՝ $x = x_k$ կետերում, $k = 1, 2, \dots, n-1$:

Թեորեմ 6.43. (Ֆուրիեի շարքի զուգամիության Դիրիլեի հայտանիշ)

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան 2π -պարբերական է $\mathbb{R}$ առանցքի վրա, սահմանափակ և կտրոր առ կտրոր մոնոտոն է $[-\pi, \pi]$ հատվածում: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի եռանկյունաձևական շարքը կետ առ կետ զուգամեր է ամենուրեք՝ $x \in \mathbb{R}$, ընդ որում՝ շարքի գումարը հավասար է $f(x-0)$ և $f(x+0)$ սահմանների կիսագումարին.

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}}, \quad x \in \mathbb{R} : \quad (6-75)$$

Մասնավորապես, եթե $x \in \mathbb{R}$ կետում $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա շարքի գումարը հավասար է $f(x)$ արժեքին.

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = f(x)} : \quad (6-76)$$

Սահմանում 6.20. $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **կտրոր առ կտրոր դիֆերենցելի** $[a, b]$ **հատվածում**, եթե $[a, b]$ հատվածը հնարավոր է փրոտել վերջավոր թվով միջակայքերի.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

այնպես, որ $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի լինի յուրաքանչյուր (x_{k-1}, x_k) բաց միջակայքում, $k = \overline{1, n}$, իսկ արոհման կետերում գոյություն ունենան միակողմանի սահմանները և հերկյալ միակողմանի ածանցյալները՝

$$f'_+(x_k) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_k + \Delta x) - f(x_k + 0)}{\Delta x}, \quad f'_-(x_k) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_k + \Delta x) - f(x_k - 0)}{\Delta x}, \quad k = \overline{0, n} :$$

Նախադի ծայրակետերում բնականաբար ենթադրվում է երկու միակողմանի սահմաններից և երկու միակողմանի ածանցյալներից միայն մեկի գոյությունը՝ $\exists f(a+0), f(b-0), f'_+(a), f'_-(b) :$

Թեորեմ 6.44. (Ֆուրիեի շարքի զուգամիություն Դիրիխլե-ժորդանի հայտանիշ)

ա) Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան 2π -պարբերական է $\mathbb{R}$ առանցքի վրա և ինտեգրելի $[-\pi, \pi]$ հարվածում՝ $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$: Եթե x_0 կետում գոյություն ունեն միակողմանի ածանցյալներ՝ $\exists f'_-(x_0), f'_+(x_0)$, ապա $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի եռանկյունաձափական շարքն x_0 կետում զուգամիություն է $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ արժեքին:

բ) Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան 2π -պարբերական է $\mathbb{R}$ առանցքի վրա և կտրոր առ կտրոր դիֆերենցելի է $[-\pi, \pi]$ հարվածում: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի եռանկյունաձափական շարքը կետ առ կետ զուգամեր է ամենուրեք առանցքի վրա՝ $x \in \mathbb{R}$, ընդ որում՝ շարքի գումարը հավասար է $f(x-0)$ և $f(x+0)$ սահմանների կիսագումարին, իսկ անընդհատության կետերում՝ հենց $f(x)$ -ին, ինչպես (6-75)-(6-76)-ում:

Թեորեմ 6.45. (Ֆուրիեի շարքի զուգամիության ժորդանի հայտանիշ)

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան 2π -պարբերական է $\mathbb{R}$ առանցքի վրա և $[-\pi, \pi]$ հարվածում վերջավոր վարիացիա ունի՝ $f(x) \in BV[-\pi, \pi]$ (տե՛ս Սահմանում 8.4):

Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի եռանկյունաձափական շարքը կետ առ կետ զուգամեր է ամենուրեք $x \in \mathbb{R}$ առանցքի վրա, ընդ որում՝ շարքի գումարը հավասար է $f(x-0)$ և $f(x+0)$ սահմանների կիսագումարին, իսկ անընդհատության կետերում՝ հենց $f(x)$ -ին, ինչպես (6-75)-(6-76)-ում:

Եթե, բացի այդ, $f(x)$ ֆունկցիան նաև անընդհատ է որևէ $[a, b] \subset \mathbb{R}$ հարվածում՝ $f \in C[a, b]$, ապա Ֆուրիեի եռանկյունաձափական (6-76) շարքը հավասարաչափ զուգամիություն է $f(x)$ -ին $[a, b]$ հարվածի վրա:

Թեորեմ 6.45-ի պնդումներն անմիջապես փարածվում են վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների $BV[-\pi, \pi]$ դասի ենթադասերի վրա, ինչպիսիք են, օրինակ, Լիպշիցի դասը կամ ողորկ (կտրոր առ կտրոր ողորկ) ֆունկցիաների դասը $[-\pi, \pi]$ հարվածում (տե՛ս Պնդում 8.6):

Առավել ընդհանուր դեպքում, երբ գործ ունենք կամայական ինտեգրելի ֆունկցիայի հետ, նրա Ֆուրիեի

շարքը կարող է փարամիտել, սակայն միշտ զուգամեծ է այդպես կոչված միջին քառակուսային իմաստով, այսինքն՝ (6-53) նորմով:

Թեորեմ 6.46. (Ֆուրիեի շարքի միջին քառակուսային զուգամիտությունը)

Ցանկացած ինտեգրելի $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը զուգամիտում է f -ին միջին քառակուսային իմաստով՝

$$f(x) \stackrel{\mathcal{R}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (6-77)$$

այն է՝ (6-53) նորմով, այսինքն՝

$$\|f - S_n\|_{\mathcal{R}}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

որտեղ $S_n = S_n(x; f)$ -ը Ֆուրիեի (6-77) շարքի n -րդ մասնակի գումարն է: Բացի այդ, տեղի ունի Պարսևալի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2): \quad (6-78)$$

Եթե Ֆուրիեի շարքով ներկայացվող ֆունկցիան **զույգ** կամ **կենտ** է, ապա նրա Ֆուրիեի շարքը կրճատ փեսք է ընդունում: Իսկապես, հիշենք զույգ և կենտ ֆունկցիաների ինտեգրալ հատկությունները, փեն Ներևանք 5.7.

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx &= 2 \int_0^{\ell} f(x) dx, & \text{եթե ինտեգրելի } f \text{ ֆունկցիան զույգ է,} \\ \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx &= 0, & \ell > 0, \quad \text{եթե ինտեգրելի } f \text{ ֆունկցիան կենտ է:} \end{aligned}$$

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան **զույգ** է, ապա նրա Ֆուրիեի գործակիցները կլինեն

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad (6-79)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6-80)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6-81)$$

և Ֆուրիեի շարքը կպարունակի **միայն կոսինուսներ**՝

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad x \in \mathbb{R}: \quad (6-82)$$

Այն դեպքում, երբ $f(x)$ ֆունկցիան **կենտ** է, նրա Ֆուրիեի գործակիցները կլինեն

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0, \quad (6-83)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6-84)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6-85)$$

և Ֆուրիեի շարքը կապրունակի միայն սինուսներ՝

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx}, \quad x \in \mathbb{R} : \quad (6-86)$$

Կոնկրետ գործնական խնդիրներ լուծելիս ստիպված ենք լինում վերլուծել $f(x)$ ֆունկցիան ոչ թե $[-\pi, \pi]$ հատվածում, այլ **կամայական** $[-\ell, \ell]$, $\ell > 0$, **հատվածում**: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի պարբերական շարունակությունը ամբողջ $\mathbb{R}$ առանցքի վրա կլինի 2ℓ -պարբերական: Փոփոխականի գծային տեղադրման միջոցով ընդամենը կարելի է այս ընդհանուր դեպքը բերել արդեն քննարկված $[-\pi, \pi]$ հատվածի դեպքին: Իսկապես, կարարենք փոփոխականի փոխարինում.

$$\boxed{t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{\ell} x} \quad \text{կամ} \quad x = \frac{\ell}{\pi} t, \quad x \in [-\ell, \ell], \quad t \in [-\pi, \pi] :$$

Այդ դեպքում $f(x) = f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right)$ բարդ ֆունկցիան որոշված կլինի $t \in [-\pi, \pi]$ հատվածում, և կարելի է կազմել նրա Ֆուրիեի գործակիցները և շարքը.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) \cos nt \, dt = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi nx}{\ell} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6-87)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) \sin nt \, dt = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi nx}{\ell} \, dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6-88)$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt, \quad \text{կամ} \\ f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi nx}{\ell}, \end{aligned} \quad (6-89)$$

որպեսզի t նոր փոփոխականից վերադարձանք սկզբնական x փոփոխականին: Այսպիսին են 2ℓ -պարբերական ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները և շարքը, որոնց վրա տարածվում են բոլոր բերված պնդումները՝ սկսած 1.6.2-ից մինչև 1.6.46-ը, ներառյալ զույգ և կենդր ֆունկցիաների մասին դիֆրոդությունը, և (6-82), (6-86) :

Օրինակ 6.24. Պահանջվում է տրված $\boxed{f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x}$, $x \in [0, \pi]$, ֆունկցիան վերլուծել որևէ տեսքի Ֆուրիեի եռանկյունաձևական շարքի: Այդ նպատակով որևէ ձևով շարունակենք ֆունկցիան $[0, \pi]$ հատվածից մինչև $(-\pi, \pi]$ միջակայք, օրինակ, զրոյական ֆունկցիայի միջոցով այնպես, որ ֆունկցիան անընդհատ մնա ամբողջ $(-\pi, \pi]$ միջակայքում.

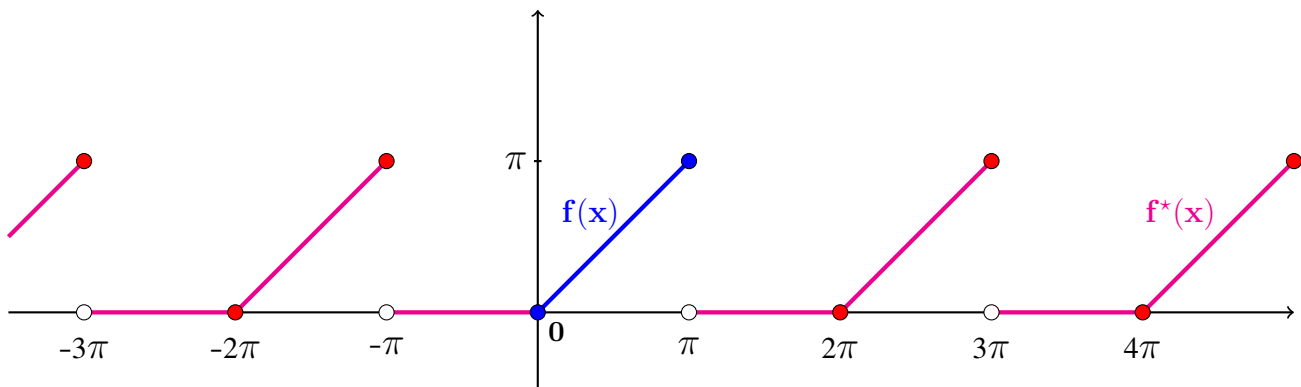
$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad f(x) \in C(-\pi, \pi] :$$

Այնուհետև $f(x)$ ֆունկցիան 2π -պարբերական ձևով շարունակենք ամբողջ $\mathbb{R}$ առանցքի վրա, ինչպես ցույց է տրված **գծագիր 6.12**-ում: Կառուցված 2π -պարբերական շարունակությունը նշանակենք $f^*(x)$ -ով, $x \in \mathbb{R}$: Նկատենք, որ $f^*(x)$ ֆունկցիան ողորկ է ամենուրեք առանցքի վրա՝ բացառությամբ $x = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) կետերի, և անընդհատ է ամենուրեք՝ բացառությամբ $x = \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) կետերի, որտեղ ունի 1-ին կարգի (թռիչքային) խզումներ: Կիրառելով Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի զուգամիություն հայտանիշներից մեկը (տե՛ս Թեորեմներ 6.43-6.45)՝ կարանանք, որ $f^*(x)$ և $f(x)$ ֆունկցիաները ներկայացվում են իրենց Ֆուրիեի շարքով.

$$\frac{f^*(x-0) + f^*(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6-90)$$

մասնավորապես $(-\pi, \pi]$ միջակայքում.

$$f(x) = f^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad -\pi < x \leq \pi :$$



Գծագիր 6.12. $f(x) = x$ ($0 \leq x \leq \pi$) ֆունկցիայի 2π -պարբերական շարունակության օրինակ

Նաշվենք Ֆուրիեի a_n, b_n գործակիցները.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} x d(\sin nx) = \frac{1}{\pi n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{\cos \pi n - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} 0, & \text{եթե } n\text{-ը զույգ է,} \\ \frac{-2}{\pi n^2}, & \text{եթե } n\text{-ը կենդ է,} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{-1}{\pi n} \int_0^{\pi} x d(\cos nx) = \frac{-1}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \\ &= \frac{-1}{\pi n} \pi \cos \pi n + \frac{1}{\pi n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{n} (-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \begin{cases} \frac{-1}{n}, & \text{եթե } n\text{-ը զույգ է,} \\ \frac{1}{n}, & \text{եթե } n\text{-ը կենդ է,} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots: \end{aligned}$$

Այսպիսով, Ֆուրիեի որոնելի շարքը հետևյալ տեսքը կընդունի.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \\ = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } -\pi < x \leq 0, \\ x, & \text{եթե } 0 \leq x \leq \pi : \end{cases} \end{aligned} \quad (6-91)$$

Նույն շարքը ներկայացնում է նաև $f^*(x)$ պարբերական ֆունկցիան ամբողջ առանցքի վրա, այսինքն՝

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \frac{f^*(x-0) + f^*(x+0)}{2}, \quad x \in \mathbb{R} : \quad (6-92)$$

Բնականաբար, f^* -ի անընդհատության կետերում այս շարքի գումարը հավասար է հենց $f^*(x)$ արժեքին, իսկ բոլոր $x = \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) խզման կետերում (6-92) շարքի գումարը հավասար է $\frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2}$, և (6-92) բանաձևը հանգում է լավ հայտնի թվային շարքին՝

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{(2k-1)^2} + 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{կամ} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}} : \quad (6-93)$$

Ի դեպ, նույն (6-93) թվային շարքը նաև (6-91)-ի անմիջական հետևանքն է, եթե վերջինիս մեջ տեղադրենք $x = 0$ կետը:

Վերջում նկատենք, որ $f(x) = x \in [0, \pi]$ ֆունկցիան կարելի էր շարունակել $(-\pi, 0)$ միջակայքի վրա **կամայական եղանակով**: Վաճորդ օրինակներում կդիտարկենք f -ի հատուկ շարունակություններ, որոնց արդյունքում կստանանք Ֆուրիեի ոչ ամբողջական շարքեր:

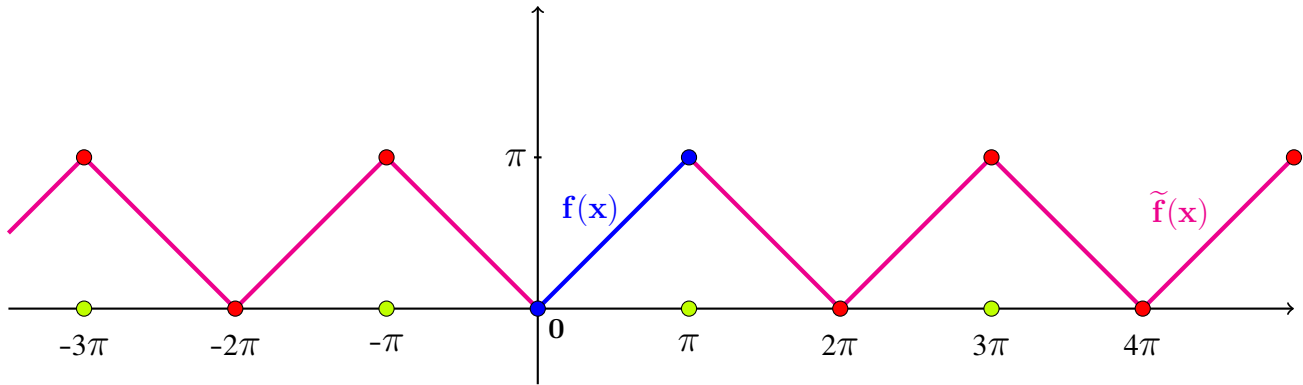
Օրինակ 6.25. Նույն $\boxed{f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x}$, $x \in [0, \pi]$, ֆունկցիան փորձենք վերլուծել Ֆուրիեի շարքի, որը կարտունակի **միայն կոսինուսներ**: Զանի որ կոսինուսը զույգ ֆունկցիա է, մեր $f(x) = x \in [0, \pi]$ ֆունկցիան ևս շարունակենք $[-\pi, 0)$ միջակայքի վրա այնպես, որ սրացվի զույգ ֆունկցիա.

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} |x| = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad f(x) \in C[-\pi, \pi], \quad f(-\pi) = f(\pi) :$$

Այնուհետև $f(x)$ ֆունկցիան 2π -պարբերական ձևով շարունակենք ամբողջ $\mathbb{R}$ առանցքի վրա, ինչպես ցույց է տրված **գծագիր 6.13**-ում: Կառուցված 2π -պարբերական շարունակությունը նշանակենք $\tilde{f}(x)$ -ով, $x \in \mathbb{R}$: Նեշտ է տեսնել, որ $\tilde{f}(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է ամենուրեք առանցքի վրա՝ $\tilde{f}(x) \in C(\mathbb{R})$, և ողորկ է ամենուրեք առանցքի վրա՝ բացառությամբ $x = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) կետերի:

Զանի որ $\tilde{f}(x)$ ֆունկցիան զույգ է, նրա Ֆուրիեի b_n գործակիցները զրո են՝ $\boxed{b_n = 0}$, $n = 1, 2, \dots$, իսկ մնացած a_n գործակիցները հաշվենք ինչպես նախորդ օրինակում.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi, \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} x d(\sin nx) = \frac{2}{\pi n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \\
 &= \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = 2 \frac{\cos \pi n - 1}{\pi n^2} = 2 \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} 0, & \text{եթե } n\text{-ը զույգ է,} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{եթե } n\text{-ը կենդ է,} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots :
 \end{aligned}$$



Գծազիր 6.13. $f(x) = x$ ($0 \leq x \leq \pi$) **Ֆունկցիայի զույգ** 2π -պարբերական շարունակությունը

Թեորեմներ 6.43-6.45-ի համաձայն՝ $\tilde{f}(x)$ **Ֆունկցիայի Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքը** զուգամիպում է հենց $\tilde{f}(x)$ -ին ամբողջ առանցքի վրա, այսինքն՝ $\tilde{f}(x) = f(x) = |x|$ -ին $[-\pi, \pi]$ հատվածում և $\tilde{f}(x) = f(x) = x$ -ին $[0, \pi]$ հատվածում:

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(x) = f(x) = |x| &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos(2k-1)x = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)x, \quad x \in [-\pi, \pi],
 \end{aligned}$$

որտեղ՝

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{կամ} \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}}, \quad x \in [0, \pi] : \quad (6-94)$$

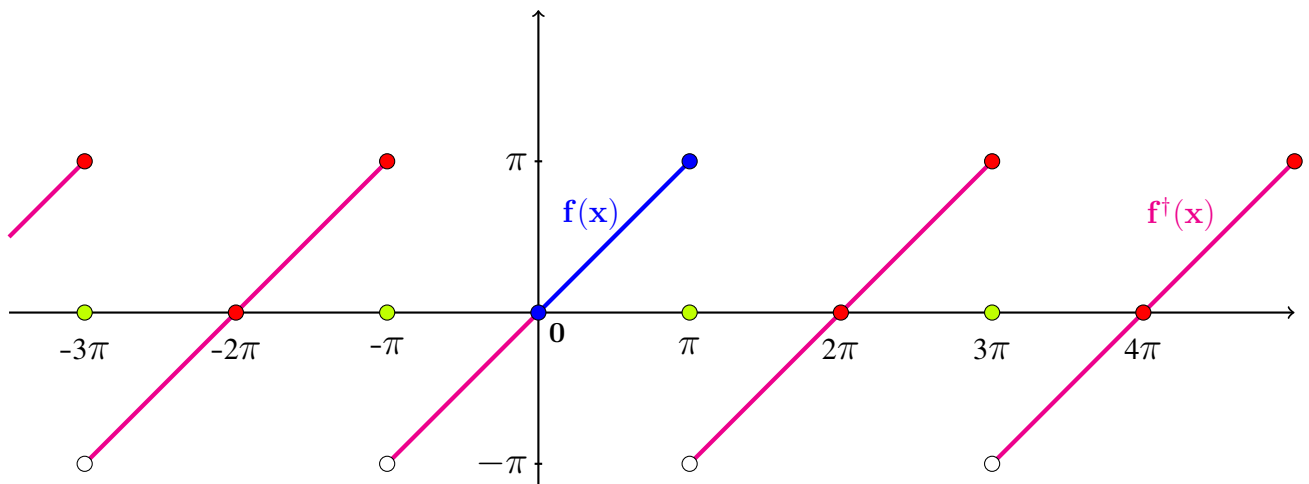
Սա է Ֆուրիեի որոնելի շարքը միայն կոսինուսներով: Մասնավորապես, $x = 0$ կետում (6-94)-ից դարձյալ ստանում ենք (6-93) հայրենի թվային շարքը:

Օրինակ 6.26. Այժմ էլ նույն $\boxed{f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x}$, $x \in [0, \pi]$, **Ֆունկցիան վերլուծենք Ֆուրիեի շարքի միայն սինուսներով:** Զանի որ սինուսը կենդ **Ֆունկցիա է**, արված $f(x) = x \in [0, \pi]$ **Ֆունկցիան ևս շարունակենք** $(-\pi, 0)$ միջակայքի վրա այնպես, որ ստացվի կենդ **Ֆունկցիա**.

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x, \quad -\pi < x \leq \pi, \quad f(x) \in C(-\pi, \pi) :$$

Շարունակենք $f(x)$ ֆունկցիան 2π -պարբերական ձևով ամբողջ $\mathbb{R}$ առանցքի վրա, ինչպես ցույց է տրված **գծագիր 6.14**-ում: Կառուցված 2π -պարբերական շարունակությունը նշանակենք $f^\dagger(x)$ -ով, $x \in \mathbb{R}$: Նկատենք, որ $f^\dagger(x)$ ֆունկցիան անընդհատ ու ողորկ է ամենուրեք առանցքի վրա՝ բացառությամբ $x = \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) կետերի, որտեղ ունի 1-ին կարգի (թռիչքային) խզումներ: Զանի որ $f^\dagger(x)$ ֆունկցիան կենր է, նրա Ֆուրիեի a_n գործակիցները զրո են՝ $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, իսկ մնացած b_n գործակիցները կարելի է հաշվել՝ օգտվելով ենթինտեգրալային ֆունկցիայի զույգությունից,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{-2}{\pi n} \int_0^{\pi} x \, d(\cos nx) = \frac{-2}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \\ &= \frac{-2}{\pi n} \pi \cos \pi n + \frac{2}{\pi n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{n} (-1)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad n = 1, 2, \dots: \end{aligned}$$



Գծագիր 6.14. $f(x) = x$ ($0 \leq x \leq \pi$) ֆունկցիայի կենր 2π -պարբերական շարունակությունը

Կիրառելով Ֆուրիեի շարքի զուգամիտության հայտանիշներից մեկը (տե՛ս Թեորեմներ 6.43-6.45) կարանանք, որ $f^\dagger(x)$ և $f(x)$ ֆունկցիաները ներկայացվում են իրենց Ֆուրիեի շարքով.

$$\frac{f^\dagger(x-0) + f^\dagger(x+0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6-95)$$

մասնավորապես $(-\pi, \pi)$ բաց միջակայքում

$$\boxed{f(x) = f^\dagger(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx}, \quad -\pi < x < \pi: \quad (6-96)$$

Խզման $x = \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) կետերում (6-95) շարքի գումարը հավասար է $\frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$, իսկ մնացած $x \neq \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) կետերում, այսինքն՝ $f^\dagger$ ֆունկցիայի անընդհատության կետերում (6-95) շարքի գումարը հավասար է $f^\dagger(x)$ արժեքին: Օրինակ, մասնավոր $x = \frac{\pi}{2}$ կետում (6-96) շարքը հանգում է լավ հայրնի լայրնիցյան թվային շարքին՝

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{\pi n}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots}: \quad$$

Վերջում նշենք, որ իզման $x = \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) կետերում $f^\dagger(x)$ ֆունկցիայի կենտրոնները փաստացի խախտվում է, օրինակ՝ $f^\dagger(-\pi) \neq -f^\dagger(\pi)$, իրականում՝ $f^\dagger(-\pi) = f^\dagger(\pi) = f(\pi) = \pi$: Բայց մենք կարող ենք անտեսել այս շեղումը, որովհետև $f^\dagger$ -ի Ֆուրիեի շարքի վրա սա որևէ կերպ չի ազդում: Ցանկության դեպքում կարող էինք $f^\dagger$ ֆունկցիայի սահմանումը լրացնել $\boxed{f^\dagger(\pi + 2\pi k) \stackrel{\text{def}}{=} 0} (k \in \mathbb{Z})$ արժեքով այնպես, որ արդյունքում ստանանք լիովին կենտ ֆունկցիա ամբողջ առանքի վրա: Դրանից $f^\dagger$ -ի Ֆուրիեի շարքը չէր փոխվի, ընդ որում՝ $f^\dagger(x)$ -ը կդառնար իր (6-95) Ֆուրիեի շարքի գումարն ամբողջ $\mathbb{R}$ առանցքի վրա՝ ներառյալ իզման կետերը:

Գլուխ 7

Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաներ

7.1 Ֆունկցիաներ և բազմություններ $\mathbb{R}^n$ -ում

Մինչ այժմ հետազոտել ենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներ՝ $y = f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto y$.

x -ը ($x \in \mathbb{R}$) f ֆունկցիայի **անկախ փոփոխական** կամ **արգումենտ**ն է,

y -ը ($y \in \mathbb{R}$) f ֆունկցիայի **կախյալ փոփոխական** կամ **արժեք**ն է :

Շատ հաճախ հանդիպում են ֆունկցիաներ, որոնք կախված են երկու, երեք կամ ավելի փոփոխականից:

Երկու փոփոխականի ֆունկցիաները կգրենք հետևյալ տեսքով՝ $z = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto z$,

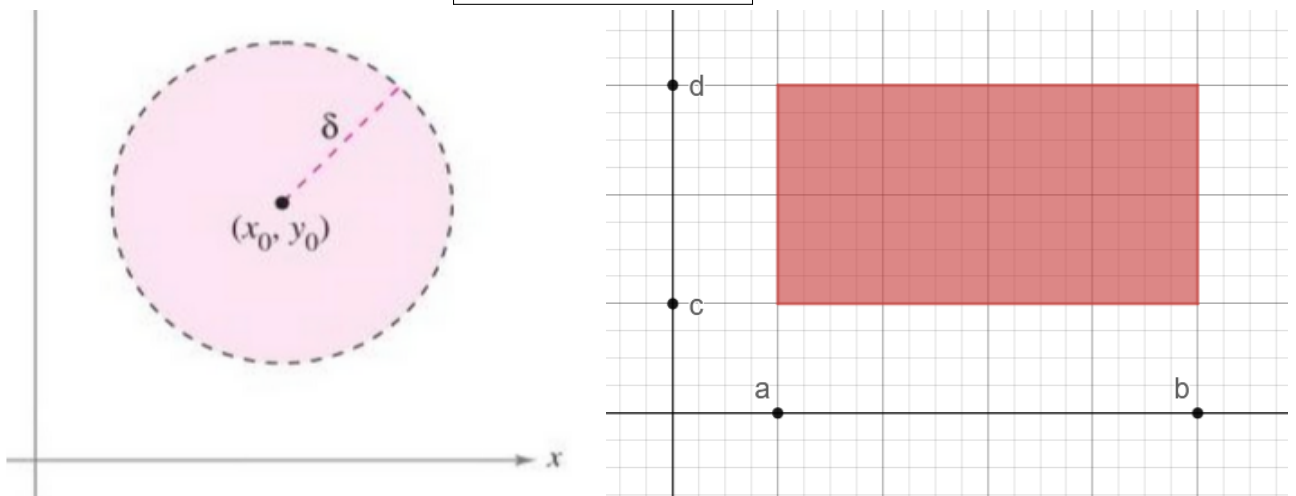
x, y -ը ($x, y \in \mathbb{R}$) f ֆունկցիայի **անկախ փոփոխականներն** են,

(x, y) զույգը կամ $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ կերպը կարելի է անվանել f ֆունկցիայի **արգումենտ**,

$M(x, y)$ կետերը միասին կազմում են f ֆունկցիայի **որոշման տիրույթ**, նշանակենք D -ով՝ $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$,

z -ը ($z \in \mathbb{R}$) f ֆունկցիայի **կախյալ փոփոխական** կամ **արժեք**ն է, z արժեքները միասին կազմում են

f ֆունկցիայի **արժեքների տիրույթ**՝ $z = f(x, y) : D \mapsto E$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $E \subset \mathbb{R}$:



Գծազիր 7.1. Բաց շրջան, δ -շրջակայք և փակ ուղղանկյուն

Նարկայես ուշադրություն դարձնենք $D \subset \mathbb{R}^2$ որոշման տիրույթի վրա. սա $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթության բազմություն է կամ հարթ պարկեր:

Նարթ պարկերները շար բազմազան են, դրանք մենք արդեն որոշ չափով քննարկել էինք, օրինակ՝

$B_R(M_0) = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\}$ բաց շրջան կամ $M_0(x_0, y_0)$ կետի R -շրջակայք,

$\overline{B_R(M_0)} = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\}$ փակ շրջան,

$[a, b] \times [c, d]$ փակ ուղղանկյուն:

Բերենք երկու փոփոխականի ֆունկցիաների օրինակներ իրենց գրաֆիկներով, որոնք (x, y, z) կետերի բազմություն են ներկայացնում եռաչափ $\mathbb{R}^3$ տարածությունում:

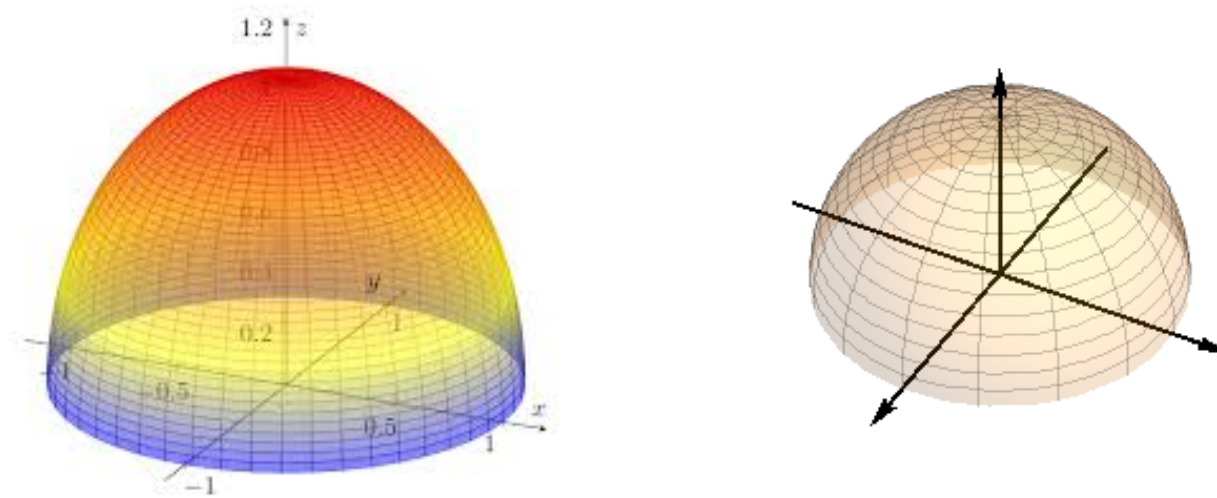
Օրինակ 7.1. Դիտարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - x^2 - y^2} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R},$$

ֆունկցիան: Նեշտ է տեսնել, որ f -ի որոշման տիրույթը $\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ միավոր փակ շրջանն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $[0, 1]$ փակ հատվածը.

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} : \mathbb{D} \mapsto [0, 1] :$$

Քանի որ ֆունկցիայի բանաձևը կարելի է արտագրել $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$, տեսքով, եզրակացնում ենք, որ f ֆունկցիայի գրաֆիկը կիսասֆերա է (վերին միավոր կիսասֆերա), տես **գծագիր 7.2** :

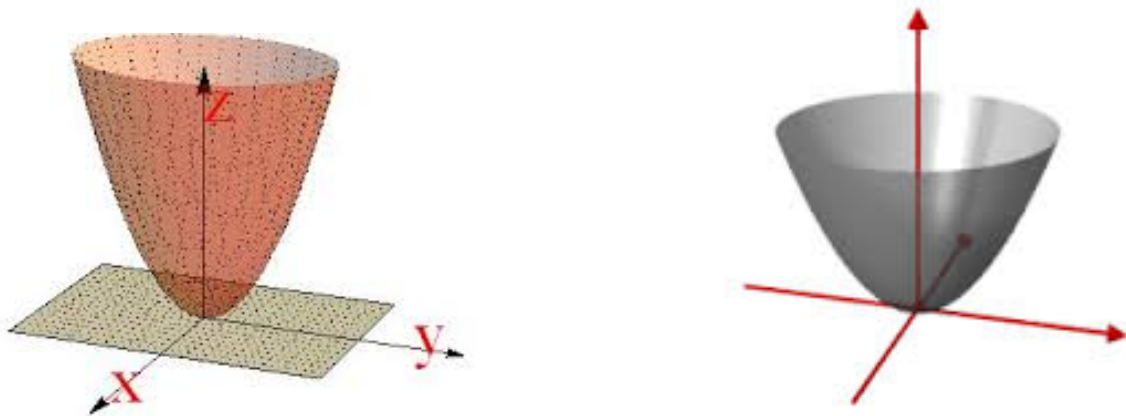


Գծագիր 7.2. Կիսասֆերան որպես ֆունկցիայի գրաֆիկ

Օրինակ 7.2. Դիտարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան: Տե՛ղք է տեսնել, որ f -ի որոշման տիրույթը ամբողջ $\mathbb{R}^2$ հարթությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ դրական կիսառանցքը: Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը ներկայացնում է էլիպտական պարաբոլոիդ $(0, 0)$ գագաթով (տե՛ս **գծագիր 7.3**):



Գծագիր 7.3. Պարաբոլոիդը որպես ֆունկցիայի գրաֆիկ

Նամանման եղանակով սահմանում ենք երեք և ավելի փոփոխականի ֆունկցիաներ.

$$u = f(M) = f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto u,$$

x, y, z -ը ($x, y, z \in \mathbb{R}$) f ֆունկցիայի **անկախ փոփոխականներն են**,

(x, y, z) եռյակը կամ $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ կետը f ֆունկցիայի **արգումենտն է**,

$M(x, y, z)$ կետերը միասին կազմում են f ֆունկցիայի D **որոշման տիրույթ**՝ $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$,

u -ն ($u \in \mathbb{R}$) f ֆունկցիայի **կախյալ փոփոխական** կամ **արժեքն** է, u արժեքները միասին կազմում են

f ֆունկցիայի **արժեքների տիրույթ**՝ $u = f(x, y, z) : D \mapsto E$, $D \subset \mathbb{R}^3$, $E \subset \mathbb{R}$:

Այս անգամ, ցավոք, ֆունկցիայի գրաֆիկը չենք կարող պատկերել, քանի որ գրաֆիկը ներկայացնում է $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ կետերի բազմություն քառաչափ $\mathbb{R}^4$ տարածության մեջ:

Նույն կերպ կազմում ենք ավելի շատ n հար փոփոխականի ֆունկցիաները՝

$$u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto u,$$

$M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ կետերը միասին կազմում են f ֆունկցիայի $D \subset \mathbb{R}^n$ **որոշման տիրույթ**:

Ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերել, բնականաբար, չենք կարող:

$\mathbb{R}^n$ -ը կոչվում է **n -չափանի էվկլիդեսյան տարածություն** և բաղկացած է բոլոր կարգավորված n -յականներից (կամ վեկտորներից), որը կարելի է նաև ներկայացնել դեկարտյան արտադրյալի տեսքով.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ անգամ}} :$$

$\mathbb{R}^n$ -ի տարրերը $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ կետերն են, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ թվերը այդ կետի կոորդինատներն են: Ինչպես $\mathbb{R}^2$ հարթության դեպքում, այնպես էլ n -չափանի տարածության մեջ սահմանում ենք երկու կետերի միջև **հեռավորության** գաղափարը, որը հաճախ նշանակում են ρ տառով:

Սահմանում 7.1. *Երկու կամայական M_1 և M_2 կետերի միջև հեռավորությունը կամ մետրիկան $\mathbb{R}^n$ -ում սահմանվում է հետևյալ կերպ՝*

$$\begin{aligned} M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 &\implies \rho(M_1, M_2) = |M_1 M_2| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \\ M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 &\implies \rho(M_1, M_2) = |M_1 M_2| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}, \\ M_1(x'_1, \dots, x'_n), M_2(x''_1, \dots, x''_n) \in \mathbb{R}^n &\implies \rho(M_1, M_2) = |M_1 M_2| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^n (x'_k - x''_k)^2} : \end{aligned}$$

Ունենալով հեռավորություն հասկացությունը՝ կարող ենք սահմանել, օրինակ, բաց կամ փակ գնդեր $\mathbb{R}^n$ -ում՝

$$M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n \text{ կենտրոնով և } R > 0 \text{ շառավղով.}$$

$$\begin{aligned} B_R(M_0) &= \left\{ M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \rho^2(M, M_0) = (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < R^2 \right\} = \\ &= \left\{ M \in \mathbb{R}^n : \rho(M, M_0) < R \right\}, \end{aligned}$$

$$\overline{B_R(M_0)} = \left\{ M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \rho(M, M_0) \leq R \right\} :$$

n -չափանի $\mathbb{R}^n$ տարածության մեջ կետի ε -շրջակայք ասելով հասկանալու ենք հենց բաց գունդը՝

$$B_\varepsilon(M_0) \text{ բաց գունդը } M_0 \text{ կետի } \varepsilon\text{-շրջակայքն է } (\varepsilon > 0) :$$

Նեռավորություն և շրջակայք հասկացությունները թույլ են տալիս միանգամայն նույն կերպ, ինչպես $\mathbb{R}^2$ հարթության դեպքում էր, սահմանել հետևյալ գաղափարները $\mathbb{R}^n$ -ում՝

տվյալ բազմության ներքին, արտաքին, եզրային, կուտակման կետերը,

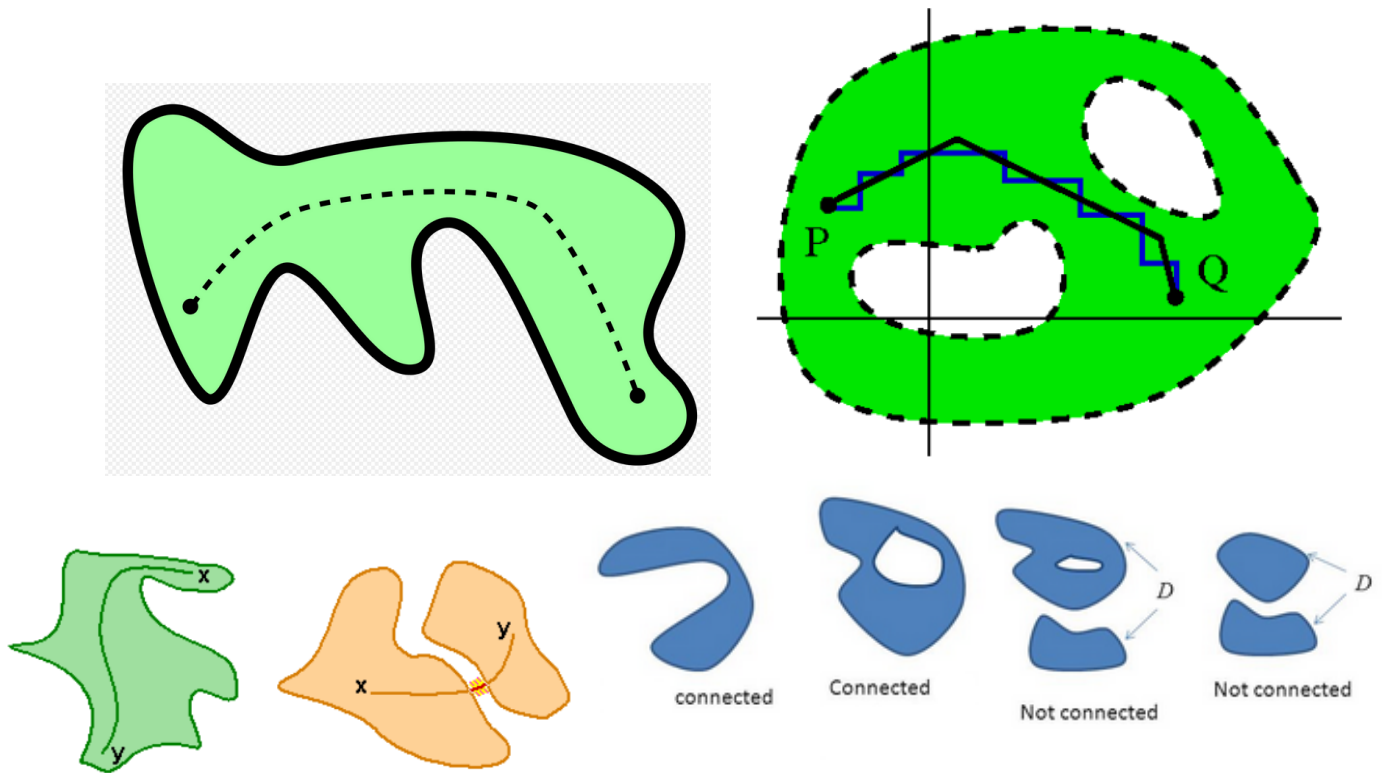
բաց, փակ, ոչ բաց, ոչ փակ բազմությունները,

բազմության եզրը և փակումը,

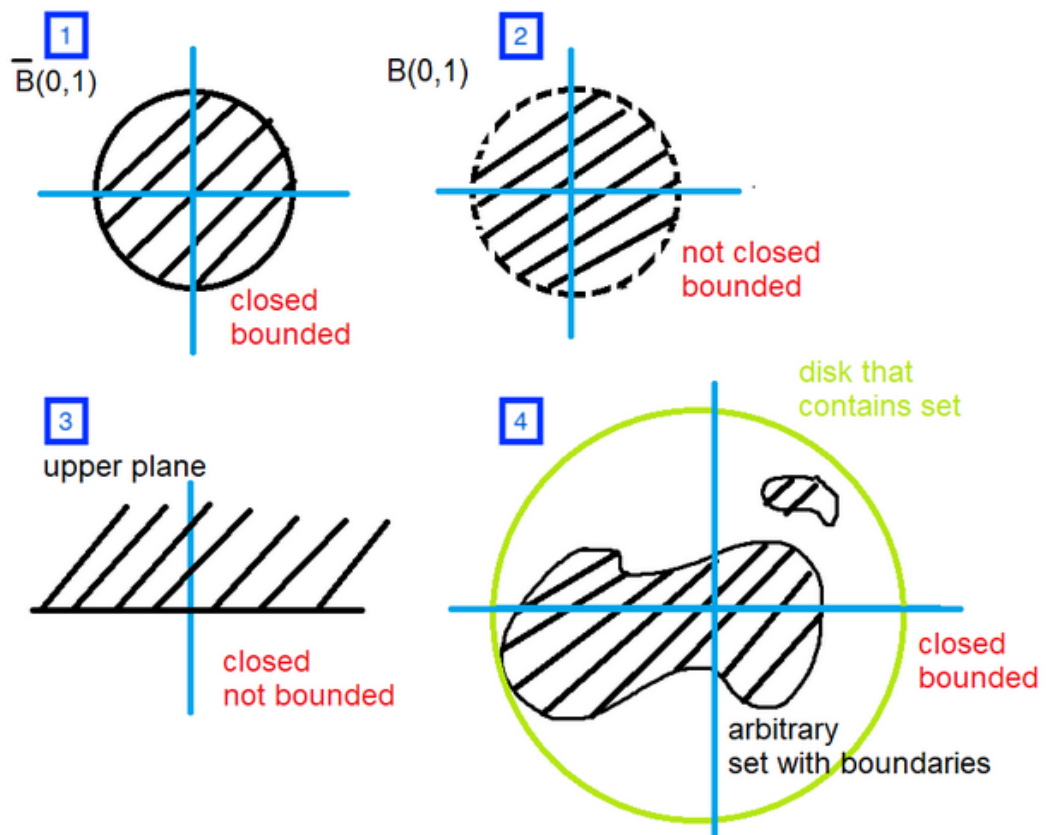
սահմանափակ և անսահմանափակ բազմությունները,

անընդհատ կորի գաղափարը $\mathbb{R}^n$ -ում և այլն:

Լրացնենք այս ցուցակը մի քանի նոր սահմանումներով:



Գծագիր 7.4. Կապակցված կամ ոչ կապակցված բազմություններ, փրկույթներ և ոչ փրկույթներ



Գծագիր 7.5. Կոմպակտների և ոչ կոմպակտների օրինակներ

Սահմանում 7.2. $E \subset \mathbb{R}^n$ բազմությունը կոչվում է **կապակցված**, եթե նրա ցանկացած երկու կետ $\forall M_1, M_2 \in E$ կարելի է միացնել ինչ-որ $L = \widetilde{M_1 M_2}$ անընդհար կորով այնպես, որ $L \subset E$:

Սահմանում 7.3. Բաց և կապակցված $E \subset \mathbb{R}^n$ բազմությունը կոչվում է **դիրքային** :

Սահմանում 7.4. Փակ և սահմանափակ $E \subset \mathbb{R}^n$ բազմությունը կոչվում է **կոմպակտ** :

7.2 Կետերի հաջորդականության սահմանի գաղափարը

Ինչպես միաջափ դեպքում էր, մեզ հետաքրքրում է հաջորդականությունների և ֆունկցիաների սահմանների պետությունը: Սկզբունքորեն մեծ փարբերություն չկա n -չափանի $\mathbb{R}^n$ եվկլիդյան փարածության մեջ սահմանված հաջորդականությունների և ֆունկցիաների պետության և ավելի ցածր չափողականության փարածություններում նույն պետության միջև: Ուստի մեր հետազոտությունը սահմանափակենք $\mathbb{R}^3$ կամ $\mathbb{R}^2$ փարածություններով, ինչը կթեթևացնի ներկայացումը և գրելաձևը: Ցանկության դեպքում դժվար չի լինի փարածել սփացված արդյունքները $\mathbb{R}^2$ կամ $\mathbb{R}^3$ -ից $\mathbb{R}^n$ -ի վրա կամայական մեծ n -ի համար:

Ներմուծենք հաջորդականության գաղափարը $\mathbb{R}^3$ եռաչափ փարածությունում:

Դիտարկենք $M_n(x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$, $n = 1, 2, \dots$, կետերը և դրանցից կազմենք $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^3$ **կետերի հաջորդականություն**:

Սահմանում 7.5. Կասենք, որ կետերի $M_n(x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$, $n = 1, 2, \dots$, հաջորդականությունը $\mathbb{R}^3$ -ում **գուգամիպրում է** $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ **կետին**, կգրենք $\boxed{M_n \longrightarrow M_0, \text{ երբ } n \rightarrow \infty}$, եթե M_n կետերի կոորդինատներն առանձին-առանձին ձգտում են M_0 կետի համապատասխան կոորդինատին, այսինքն՝

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x_0, \\ y_n \rightarrow y_0, \\ z_n \rightarrow z_0, \end{cases} \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty : \quad (7-1)$$

Սա **կոորդինատային գուգամիպրություն** է, այն կարելի է համարժեքորեն ներկայացնել ε -լեզվով.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad \begin{cases} |x_n - x_0| < \varepsilon, \\ |y_n - y_0| < \varepsilon, \\ |z_n - z_0| < \varepsilon : \end{cases} \quad (7-2)$$

Նույն գուգամիպրությունը կարելի է սահմանել՝ օգտագործելով հեռավորությունը կամ մետրիկան:

Սահմանում 7.6. Կասենք, որ կետերի $M_n(x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$, $n = 1, 2, \dots$, հաջորդականությունը $\mathbb{R}^3$ -ում **զուգամիջում է** $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ **կետին**, կգրենք $M_n \longrightarrow M_0$, երբ $n \rightarrow \infty$, եթե

$$\rho(M_n, M_0) \longrightarrow 0, \quad \text{կամ նույնը՝} \quad (x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 + (z_n - z_0)^2 \longrightarrow 0, \quad \text{երբ} \quad n \rightarrow \infty: \quad (7-3)$$

Դարձյալ սա կարելի է համարժեքորեն ներկայացնել ε -լեզվով.

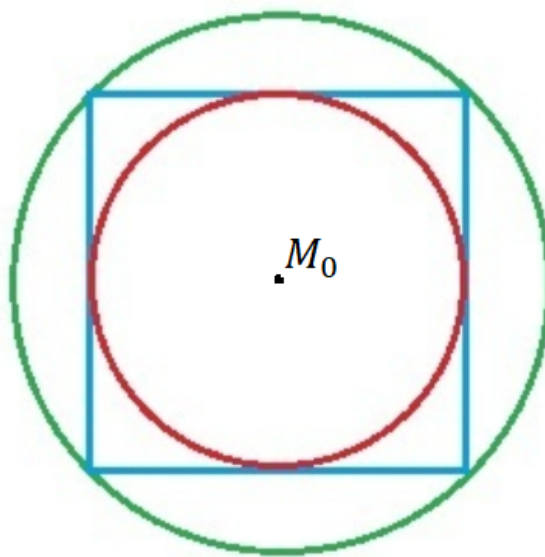
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad \rho(M_n, M_0) < \varepsilon: \quad (7-4)$$

Սահմանենք նաև «անվերջ մեծ» հաջորդականության հատուկ դեպքը: Նշանակենք կոորդինատների սկզբնակետը՝ $O(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ և ձևակերպենք.

$$M_n \longrightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n > N_0, \quad \rho(M_n, O) > \varepsilon: \quad (7-5)$$

$\boxed{\text{Սահմանում 7.5} \iff \text{Սահմանում 7.6}}$ համարժեքությունը բավականին ակնհայտ է, ընդամենը պետք է համեմատել (7-2) և (7-4) պայմանների ε -անհավասարությունները:

Ներառքքիր է երկրաչափորեն համեմատել (7-2) և (7-4) պայմանների ε -անհավասարությունները: Դրանցից առաջինը նշանակում է, որ $M_n(x_n, y_n, z_n)$ կետերը գտնվում են $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կենտրոնով և 2ε կողով բաց խորանարդի մեջ, իսկ երկրորդը նշանակում է, որ $M_n(x_n, y_n, z_n)$ կետերը գտնվում են $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կենտրոնով և ε շառավղով բաց գնդի մեջ, այսինքն՝ M_0 կետի ε -շրջակայքում: Քանի որ ε -ը կամայական է, ապա փարբերություն չկա՝ M_n կետերը գտնվում են գնդում, թե խորանարդում. չէ՞ որ խորանարդի մեջ միշտ կարելի է գտնո՞ւ ներգծել և գնդի մեջ՝ խորանարդ:



Գծազիր 7.6. Քառակուսուն ներգծած և արտագծած շրջաններ որպես շրջակայքեր

Դիպողություն 7.1. Միաչափ թվային հաջորդականությունների տեսությունից հիմնական արդյունքները տարածվում են բազմաչափ դեպքի վրա: Մասնավորապես, $\mathbb{R}^n$ -ում կարելի է սահմանել հաջորդականության ֆունկցիոնալությունը և սպացուցել, որ այն համարժեք է զուգամիտությանը (Կոշու սկզբունքը): Մասնակի սահմաններ ներմուծելով՝ կարելի է սպացուցել Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմման, այն է՝

Ցանկացած սահմանափակ հաջորդականություն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն, կամ՝

Ցանկացած սահմանափակ բազմություն գոնե մեկ կուրակման կետ ունի:

7.3 Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը

Ինչպես միաչափ դեպքում էր, ֆունկցիայի սահմանի երկու հիմնական համարժեք սահմանում կա՝ Նայնեի (հաջորդականությունների լեզվով) և Կոշու (ε - δ -լեզվով):

Սահմանում 7.7. (Ֆունկցիայի սահմանի Նայնեի սահմանումը)

Կասենք, որ $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ կետում ունի A -ին հավասար սահման ($A \in \mathbb{R}$), կգրենք $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$ կամ $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0}} f(x, y, z) = A$, եթե

$$\left(\begin{array}{l} \forall M_n \rightarrow M_0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ M_n \neq M_0 \end{array} \right) \implies \left(f(M_n) \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty) \right): \quad (7-6)$$

Սահմանում 7.8. (Ֆունկցիայի սահմանի Կոշու սահմանումը)

Կասենք, որ $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ կետում ունի A -ին հավասար սահման ($A \in \mathbb{R}$), կգրենք $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$ կամ $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0}} f(x, y, z) = A$, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| < \delta \\ |y - y_0| < \delta \\ |z - z_0| < \delta \end{array} \right. \quad (M \neq M_0) \implies |f(M) - A| < \varepsilon \quad (7-7)$$

կամ $|f(x, y, z) - A| < \varepsilon :$

(7-7) պայմանի մեջ կոորդինատային ներկայացման փոխարեն կարելի է օգտագործել հեռավորությունը, ինչպես մեկ անգամ արդեն վարվել էինք.

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A \iff \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad s.t. \quad 0 < \rho(M, M_0) < \delta \implies |f(M) - A| < \varepsilon \right): \quad (7-8)$$

Սահմանի սահմանման բերված բոլոր ձևակերպումները համարժեք են՝ $(7-6) \iff (7-7) \iff (7-8)$:

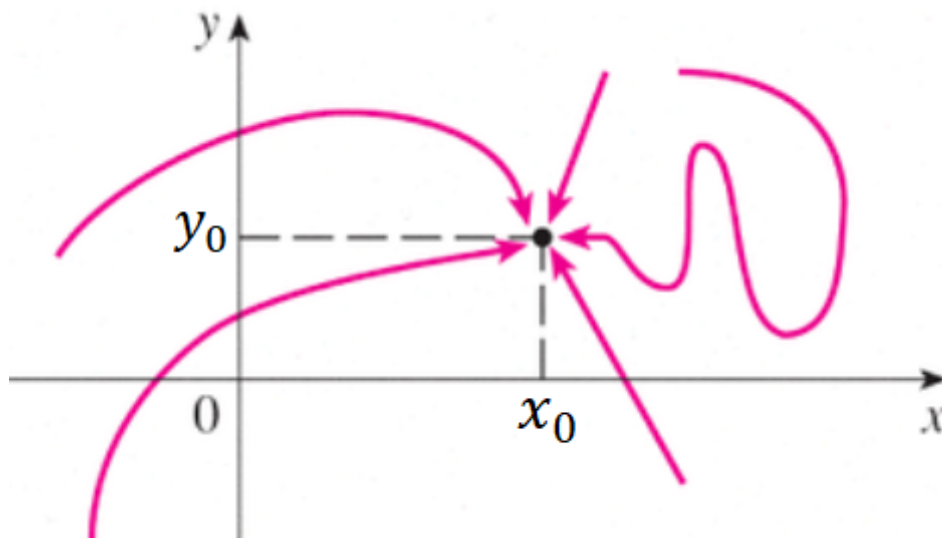
Նշենք, որ $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0}} f(x, y, z)$ սահմանը նաև կոչվում է **եռակի սահման**, իսկ $\mathbb{R}^2$ -ում համապատասխան

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ սահմանը՝ **կրկնակի (կրկնապարիկ) սահման**:

Ընդհանուր $\mathbb{R}^n$ տարածության դեպքում նույն սահմանը կոչվում է **n -պարիկ սահման**:

Սահմաններ նաև ֆունկցիայի սահմանն անվերջում, այն ունի իր առանձնահատկությունները.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = A \iff \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \rho(M, O) > \delta \implies |f(M) - A| < \varepsilon \right) : (7-9)$$



Գծազիր 7.7. Կերին մոտենալու եղանակները կրկնակի սահմանի դեպքում

7.4 Կրկնապարիկ և հաջորդական սահմաններ

Այս բաժնում կքննարկենք $\mathbb{R}^2$ -ում որոշված ֆունկցիայի փարբեր սահմաններ: Դիցուք $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ կետի $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում: Մենք արդեն սահմանել էինք M_0 կետում ֆունկցիայի սահմանը, գրում էինք

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A \quad \text{կամ} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A, \quad (7-10)$$

որն անվանում են նաև **կրկնակի** կամ **կրկնապարիկ սահման**: Պետք է այսպեղ հաշվի առնել, որ $M(x, y)$ կետի բոլոր կոորդինատները ձգվում են իրենց սահմանների՝ $x \rightarrow x_0$ և $y \rightarrow y_0$ միաժամանակ:

Մյուս կողմից, կարելի է $M(x, y)$ կետը ձգվեցնել M_0 -ին այլ կերպ՝ հաջորդաբար: Նամարելով, որ բոլոր դիֆարկվող սահմանները գոյություն ունեն, սկզբում ձգվեցնենք $x \rightarrow x_0$ և կազմենք հետևյալ սովորական սահմանը՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \stackrel{!}{=} \varphi(y),$$

որն իրենից ներկայացնում է y մեկ փոփոխականի ֆունկցիա: Այնուհետև ձգվեցնենք $y \rightarrow y_0$ և կազմենք հաջորդ սահմանը՝

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) : \quad (7-11)$$

Այս սահմանն անվանում են M_0 կետում f -ի **հաջորդական սահման**: Եթե փոխենք ձգվեցնելու հերթականությունը, ապա նմանապես կկազմենք ևս մեկ հաջորդական սահման՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) : \quad (7-12)$$

Բնական է փորձել համեմատել (7-10) կրկնակի սահմանը երկու (7-11) և (7-12) հաջորդական սահմանների հետ: Արդյո՞ք այս երեք սահմանները հավասար են կամ ինչ-որ ձևով կապված են իրար հետ. չէ՞ որ նույն ֆունկցիայի սահմաններն են նույն M_0 կետում: Դիֆարկենք պարզ օրինակ:

Օրինակ 7.3. Փորձենք գտնել $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ ֆունկցիայի սահմանները $O(0, 0)$ սկզբնակետում:
Սկզբում հաշվենք հաջորդական սահմանները.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1 :$$

Անցնենք կրկնակի $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - y}{x + y}$ սահմանին և ցույց տանք, որ այն գոյություն չունի: Դիմենք ֆունկցիայի սահմանի Նայնեի սահմանմանը և հաշվենք որոշ մասնակի սահմաններ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} :$$

Ցանկացողները կարող են այս գրելաձևի փոխարեն մեկ այլը կիրառել.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x + x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(2x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x}{2x + x} = \frac{1}{3} :$$

Երկու փարքեր մասնակի սահմանների առկայությունը, համաձայն Շայնեի սահմանման, նշանակում է, որ սահմանը գոյություն չունի՝

$$\nexists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - y}{x + y} :$$

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ կրկնակի և հաջորդական սահմանները, հնարավոր է, իրար հետ որևէ կապ չունենան։ Այնուամենայնիվ, նրանց միջև որոշակի կապ գոյություն ունի, դա արգահայտված է հաջորդ թեորեմում։

Թեորեմ 7.1. Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $M_0(x_0, y_0)$ կերի որևէ $\mathcal{U}(M_0)$ ուղղանկյունաձև շրջակայքում, բացի, հնարավոր է, $M_0(x_0, y_0)$ կերից.

$$X \stackrel{\text{նշ.}}{=} (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1), \quad Y \stackrel{\text{նշ.}}{=} (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2), \quad \mathcal{U}(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} (X \times Y) \setminus \{M_0\}, \quad \boxed{f(x, y) : \mathcal{U}(M_0) \mapsto \mathbb{R}} :$$

ա) Գոյություն ունի $M_0(x_0, y_0)$ կերում f ֆունկցիայի կրկնակի սահմանը՝

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \stackrel{\text{նշ.}}{=} A \quad (\text{վերջավոր կամ անվերջ}) :$$

$$բ) \quad \forall y \in Y \quad \text{կերի համար} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \stackrel{\text{նշ.}}{=} \varphi(y) :$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի համապատասխան հաջորդական սահմանը, և այն հավասար է կրկնակի սահմանին.

$$\exists \boxed{\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A} : \quad (7-13)$$

Ապացույց. Ապացուցենք թեորեմը վերջավոր A, x_0, y_0 թվերի համար։

Գրենք կրկնակի սահմանի սահմանումը ε - δ -լեզվով.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} |x - x_0| < \delta \\ |y - y_0| < \delta \end{cases} \quad ((x, y) \neq (x_0, y_0)) \implies |f(x, y) - A| < \varepsilon, \quad (7-14)$$

որպեղ δ -ն վերցնում ենք բավականաչափ փոքր՝ $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, այնպես, որ $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ բառակուսին պարունակվի $X \times Y$ ուղղանկյան մեջ։

Ֆիքսենք կամայական $\forall y, |y - y_0| < \delta$, և (7-14) անհավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ $x \rightarrow x_0$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad |y - y_0| < \delta \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x, y) - A| \leq \varepsilon, \quad \text{կամ ըստ բ)-ի՝} \quad |\varphi(y) - A| \leq \varepsilon :$$

Սա նշանակում է, որ $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = A$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել։ □

Ամփոփելով, կարելի է պնդել, որ հաջորդական և կրկնակի սահմանները հավասար են, եթե նախապես հայտնի է, որ գոյություն ունեն կրկնակի սահմանը և ավելի հաջորդական սահմանի ներքին սահմանը:

Թեորեմ 7.1-ում մենք քննարկեցինք (7-11) հաջորդական սահմանը: Նույն հաջորդությամբ կարելի էր դիտարկել (7-13) երկրորդ հաջորդական սահմանը:

Թեորեմ 7.2. Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $M_0(x_0, y_0)$ կերի որևէ $\mathcal{U}(M_0)$ ուղղանկյունաձև շրջակայքում, բացի, հնարավոր է, $M_0(x_0, y_0)$ կերից.

$$X \stackrel{\text{նշ.}}{=} (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1), \quad Y \stackrel{\text{նշ.}}{=} (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2), \quad \boxed{\mathcal{U}(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} (X \times Y) \setminus \{M_0\}}, \quad \boxed{f(x, y) : \mathcal{U}(M_0) \mapsto \mathbb{R}} :$$

ա) Գոյություն ունի $M_0(x_0, y_0)$ կերում f ֆունկցիայի կրկնակի սահմանը՝

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \stackrel{\text{նշ.}}{=} A \quad (\text{վերջավոր կամ անվերջ}) :$$

$$բ) \quad \forall x \in X \quad \text{կերի համար} \quad \exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \stackrel{\text{նշ.}}{=} \psi(x) :$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի համապատասխան հաջորդական սահմանը և այն հավասար է կրկնակի սահմանին.

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A : \quad (7-15)$$

Ներկայացրեք 7.1. Թորեմներ 7.1 և 7.2-ի պայմաններում, երբ կատարվում են բ) պայմանները, գոյություն ունեն և հավասար են երկու հաջորդական սահմանները,

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) : \quad (7-16)$$

Դիտողություն 7.2. Միաձախ դեպքից ֆունկցիայի սահմանի շարք հատկություններ (բայց ոչ բոլորը) տարածվում են մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանների վրա: Օրինակ՝ թվաբանական գործողություններ սահմանների հետ, սահմանային անցում անհավասարություններում, ուսրիկանների կանոնը, մասնակի սահմաններ, վերին ու ստորին սահմաններ, զուգամիտության Կոշու սկզբունք և այլն: Բսկ, օրինակ, մոնոտրոն կրկնակի սահմանի մասին խոսելը գրեթե անիմաստ է :

7.5 Անընդհատ ֆունկցիաներ

Շար փոփոխականի ֆունկցիայի անընդհատությունը փաստորեն չի փարբերվում միաջափ դեպքից: Նախուկ կնշենք այն արդյունքները, երբ որևէ փարբերություն առաջանա:

Սահմանում 7.9. (*Ֆունկցիայի անընդհատությունը կերպում*)

$f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան կոչվում է **անընդհատ** $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ կերպում, եթե

$$\boxed{\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)} \quad \text{կամ նույնը} \quad \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0}} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)} : \quad (7-17)$$

Օգտակար է սահմանը գրել ε - δ -լեզվով,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} |x - x_0| < \delta \\ |y - y_0| < \delta \\ |z - z_0| < \delta \end{cases} \implies \begin{cases} |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon \\ \text{կամ} \quad |f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)| < \varepsilon : \end{cases} \quad (7-18)$$

Ինչպես նախկինում վարվել էինք, (7-18) պայմանի մեջ կոորդինատային ներկայացման փոխարեն կարելի է օգտագործել հեռավորությունը.

$$\boxed{\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)} \iff \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \rho(M, M_0) < \delta \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon \right) : \quad (7-19)$$

Ցանկության դեպքում ֆունկցիայի անընդհատությունը և (7-17) սահմանը կարելի է սահմանել Նայնեի (այսինքն՝ հաջորդականությունների) լեզվով:

Ուշադրություն դարձրեք, որ (7-17)-ը եռակի սահման է $\mathbb{R}^3$ -ում: Եթե ֆունկցիան որոշված լիներ հարթության վրա՝ $\mathbb{R}^2$ -ում, ապա սահմանը կլիներ կրկնակի, իսկ $\mathbb{R}^n$ -ի ընդհանուր դեպքում կվերցնեինք n -պարիկ սահման: Այսպես սահմանված անընդհատությունն անվանում են **անընդհատություն x, y, z փոփոխականների ողջ համախմբի նկատմամբ**: Կարելի է դիտարկել անընդհատության ավելի թույլ տեսակներ՝ ըստ առանձին անկախ փոփոխականների կամ դրանց ոչ լրիվ համախմբի: Օրինակ, եթե ֆիքսենք $x = x_0$, ապա կարելի է $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կերպում անընդհատությունը սահմանել y, z **փոփոխականների համախմբի նկատմամբ**.

$$\boxed{\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0}} f(x_0, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)} : \quad (7-20)$$

Սահմանում 7.10. Կասենք, որ $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան **անընդհատ է** $D \subset \mathbb{R}^3$ բազմությունում և կգրենք $\boxed{f \in C(D)}$, եթե f -ն անընդհատ է D բազմության յուրաքանչյուր կետում՝ (7-17)–(7-19) իմաստով:

Օրինակ 7.4. Ստուգենք

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

Ֆունկցիայի անընդհատությունը $(0, 0)$ սկզբնակետում: Այդ նպատակով գրենք ֆունկցիայի կրկնակի սահմանը սկզբնակետում՝ $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = ?}$:

Պարզվում է, որ կրկնակի սահմանը գոյություն չունի: Իսկապես, Նայնի սահմանման համաձայն՝ բավական է գրենք ընդամենը երկու տարբեր մասնակի սահմաններ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\frac{1}{n^2} + 0} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} :$$

Յանկացողները կարող են այս գրեթե անհիմնական փոխարեն մեկ այլը կիրառել՝

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} :$$

Սա նշանակում է, որ սահմանը գոյություն չունի՝ $\boxed{\nexists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)}$, և ուրեմն $f(x, y)$ ֆունկցիան չափող է $(0, 0)$ սկզբնակետում:

Օրինակ 7.5. Ստուգենք

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

Ֆունկցիայի անընդհատությունը $(0, 0)$ սկզբնակետում: Այդ նպատակով գրենք ֆունկցիայի կրկնակի սահմանը սկզբնակետում՝ $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = ?}$:

Ի տարբերություն նախորդ օրինակի, արվյալ ֆունկցիայի կրկնակի սահմանը գոյություն ունի: Իսկապես, գնահատենք ֆունկցիան մոդուլով վերևից.

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |x| \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|}{2} :$$

Այս գնահատականի շնորհիվ, կիրառելով սահմանի սահմանումը ε - δ -լեզվով կամ ուտրիկանների կանոնը, երբ միաժամանակ $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, ստանում ենք

$$\exists \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)},$$

և ուրեմն $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(0, 0)$ սկզբնակետում:

Ի դեպ, առհասարակ $f(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$:

7.6 Որոշ կարևոր թեորեմներ անընդհար ֆունկցիաների մասին

Առանց ապացույցի բերենք անընդհար ֆունկցիաներին վերաբերող որոշ նշանավոր թեորեմներ: Նրանց ապացույցներն իրականացվում են սահմանումներով և միաջափ դեպքի մեթոդներով:

Թեորեմ 7.3. (Գործողությունների անընդհար ֆունկցիաների հեպ)

Վերջավոր թվով անընդհար ֆունկցիաների գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը, հարաբերությունը (պայմանով, որ հայտարարը զրո չէ) և կամ համադրույթը դարձյալ անընդհար ֆունկցիա են:

Թեորեմ 7.4. (Բոլցանո-Կոշու 1-ին թեորեմ)

Դիցուք $D \subset \mathbb{R}^2$ բազմությունը տիրույթ է (բաց և կապակցված բազմություն), և $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհար է D -ում՝ $f(x, y) \in C(D)$:

Գոյություն ունեն երկու կետեր, որտեղ ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ՝

$$\exists M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \in D \quad \text{s.t.} \quad f(x_1, y_1) < 0 < f(x_2, y_2) :$$

Այդ դեպքում ֆունկցիան գոնե մեկ զրո ունի D -ում՝ $\exists M_0(x_0, y_0) \in D \quad \text{s.t.} \quad f(x_0, y_0) = 0 :$

Թեորեմ 7.5. (Բոլցանո-Կոշու 2-րդ թեորեմ)

Դիցուք $D \subset \mathbb{R}^2$ բազմությունը տիրույթ է (բաց և կապակցված բազմություն), և $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհար է D -ում՝ $f(x, y) \in C(D)$:

Այդ դեպքում ֆունկցիան D -ում ընդունում է իր ցանկացած երկու արժեքների միջև գտնվող բոլոր միջանկյալ արժեքները:

Թեորեմ 7.6. (Վայերշտրասի 1-ին թեորեմ)

Կոմպակտում (փակ և սահմանափակ բազմությունում) անընդհար ֆունկցիան սահմանափակ է:

Թեորեմ 7.7. (Վայերշտրասի 2-րդ թեորեմ)

Կոմպակտում անընդհար ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:

Այլ կերպ ասած՝ կոմպակտում ֆունկցիան հասնում է իր սուպրեմումին և ինֆիմումին:

Սահմանում 7.11. $f(x, y)$ ֆունկցիան կոչվում է **հավասարաչափ անընդհար** $D \subset \mathbb{R}^2$ բազմության վրա, եթե տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D, \quad \begin{cases} |x_1 - x_2| < \delta \\ |y_1 - y_2| < \delta \end{cases} \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon :$$

Թեորեմ 7.8. (Կանտորի թեորեմ)

Կոմպակտում անընդհար ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհար է:

7.7 Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցիալ հաշիվ:

Մասնակի ածանցյալներ և դիֆերենցելիություն

Դիցուք $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան որոշված է $D \subset \mathbb{R}^3$ տիրույթում, և $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ ֆիքսած կետ է: Եթե f -ի երեք անկախ փոփոխականից երկուսը ֆիքսենք, ապա կստանանք մեկ փոփոխականի ֆունկցիա, որի նկարմամբ կիրառելի են ածանցյալի, դիֆերենցելիության գաղափարները և ամբողջ դիֆերենցիալ հաշիվը:

Ֆիքսելով $y = y_0, z = z_0$ դիտարկենք մեկ փոփոխականի $f(x, y_0, z_0)$ ֆունկցիան և փորձենք գտնել նրա ածանցյալն ըստ x -ի x_0 կետում: Վերցնելով փոքր $\Delta x \neq 0$ անկախ փոփոխականի աճ՝ կազմենք ֆունկցիայի աճը՝

$$\Delta_x f = \Delta_x f(x_0, y_0, z_0) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0), \quad (7-21)$$

որը կոչվում է f -ի մասնակի աճ ըստ x -ի $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում: Այնուհետև սահմանենք մեկ փոփոխականի $f(x, y_0, z_0)$ ֆունկցիայի ածանցյալը x_0 կետում.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \stackrel{\text{նշ.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \stackrel{\text{կամ}}{=} f'_x(M_0) : \quad (7-22)$$

(7-22) սահմանը կոչվում է $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալ ըստ x -ի $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում և նշանակվում է (7-22)-ում ներկայացված սիմվոլներով: Այդ երկու նշանակումները հավասարապես կօգտագործենք՝ ըստ հարմարության: Նույն եղանակով սահմանենք մասնակի ածանցյալներ ըստ յուրաքանչյուր անկախ փոփոխականի՝ y -ի կամ z -ի.

$$\Delta_y f = \Delta_y f(x_0, y_0, z_0) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0), \quad (7-23)$$

$$\Delta_z f = \Delta_z f(x_0, y_0, z_0) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \quad (7-24)$$

կոչվում են f -ի մասնակի աճեր համապատասխանաբար ըստ y -ի կամ z -ի $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում:

Սահմանում 7.12.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \stackrel{\text{կամ}}{=} f'_x(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}, \quad (7-25)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \stackrel{\text{կամ}}{=} f'_y(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}, \quad (7-26)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \stackrel{\text{կամ}}{=} f'_z(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta_z f(M_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z} \quad (7-27)$$

սահմանները կոչվում են $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներ համապատասխանաբար ըստ x -ի, y -ի կամ z -ի $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում:

Նույն սկզբունքով սահմանում են մասնակի ածանցյալներն ընդհանուր n -չափանի $\mathbb{R}^n$ տարածության դեպքում:

Ըստ էության, մասնակի ածանցյալները, լինելով մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի սովորական ածանցյալ, նոր երևույթ չեն: Մասնակի ածանցյալները ձեռք են բերում սովորական ածանցյալների շարք հատկություններ, օրինակ՝ գործողություններ ածանցյալի հետ, փարթալան ֆունկցիաների ածանցյալներ, բարձր կարգի ածանցյալներ և այլն:

Օրինակ 7.6. Որպեսզի հաշվել $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^y$ փարթալան ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները, բավական է օգտվել փարթալան ֆունկցիաների ածանցման հայրնի կանոններից՝

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^y) = y x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y) = x^y \ln x,$$

համարելով, որ (x, y) կետը գտնվում է որոշման տիրույթում՝ $x > 0, y \in \mathbb{R}$:

Ֆունկցիայի աճերը կազմելիս, տես (7-21), (7-23), (7-24), բոլոր անկախ փոփոխականներից միայն մեկն էր ազատ, իսկ մյուսները ֆիքսած են: Ի՞նչ կլինի, եթե բոլոր անկախ փոփոխականները աճ ստանան: Այդ դեպքում կառաջանա ֆունկցիայի մեկ այլ աճ.

$$\Delta f(M_0) = \Delta f(x_0, y_0, z_0) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \quad (7-28)$$

կոչվում է f **ֆունկցիայի լրիվ աճ** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **կետում**: Կարելի էր մտածել, որ (7-28) լրիվ աճով սահմանում են ածանցյալի գաղափարը: Սակայն այդպես չէ. «լրիվ ածանցյալի» հասկացություն գոյություն չունի: Փոխարենը (7-28) լրիվ աճի միջոցով սահմանում են ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը: Նշանակենք $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, որտեղ $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \neq 0$, այսինքն՝ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ աճերից ոչ բոլորն են զրո:

Սահմանում 7.13. $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան կոչվում է **դիֆերենցելի** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **կետում**, եթե ֆունկցիայի լրիվ աճը նույն կետում հնարավոր է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) = A \Delta x + B \Delta y + C \Delta z + o(\rho), \quad \rho \rightarrow 0, \quad (7-29)$$

որտեղ $A, B, C = \text{const}$ ինչ-որ հաստատուններ են՝ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ փոփոխական աճերից անկախ:

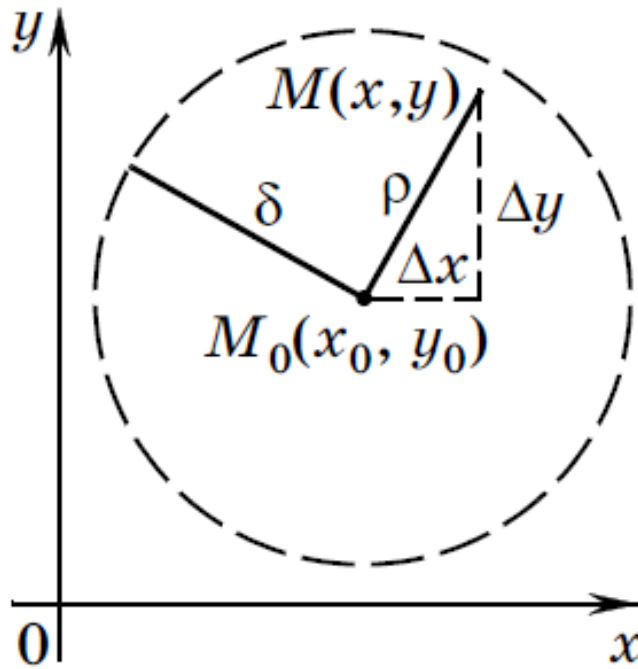
Մնացորդային անդամը կարելի է ներկայացնել $o(\rho) = \rho \cdot o(1)$ տեսքով, իսկ $\rho \rightarrow 0$ պայմանը կարելի է ներկայացնել համարժեք տեսքով՝

$$\boxed{\rho \rightarrow 0} \iff \boxed{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \quad (\text{միաժամանակ}) :$$

$\mathbb{R}^2$ հարթության վրա սահմանված ֆունկցիայի համար (7-29) ներկայացումը մի փոքր ավելի պարզ տեսք ունի.

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A \Delta x + B \Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0, \quad (7-30)$$

որտեղ $A, B = \text{const}$ ինչ-որ հաստատուններ են՝ $\Delta x, \Delta y$ փոփոխական աճերից անկախ:



Գծագիր 7.8. M_0 կետի շրջակայքը և ֆունկցիայի լրիվ աճը

Ներաբերիր է, որ $o(\rho)$ մնացորդային անդամը (7-29)-ի մեջ կարելի է ներկայացնել մեկ այլ համարժեք տեսքով, և արդյունքում կստացվի դիֆերենցելիության նոր ներկայացում.

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = A \Delta x + B \Delta y + C \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z, \quad (7-31)$$

որտեղ $A, B, C = \text{const}$ ինչ-որ հաստատուններ են՝ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ փոփոխական աճերից անկախ, և $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\gamma = \gamma(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ֆունկցիաներն ինչ-որ անվերջ փոքրեր են՝ $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0$, երբ $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ (միաժամանակ):

Ապացուցենք (7-29) և (7-31) ներկայացումների համարժեքությունը կամ նույնը՝ նրանց մեջ պարունակվող մնացորդային անդամների համարժեքությունը:

$$(7-29) \implies (7-31) \quad \text{Վերցնենք } o(\rho) \text{ մնացորդային անդամը (7-29)-ից և ձևափոխենք այն՝ օգտագործելով}$$

անվերջ փոքրերի գրելաձևը և հարկությունները.

$$\begin{aligned} o(\rho) &= \rho \cdot o(1) = o(1) \frac{\rho^2}{\rho} = o(1) \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\rho} = \\ &= \left(o(1) \frac{\Delta x}{\rho} \right) \Delta x + \left(o(1) \frac{\Delta y}{\rho} \right) \Delta y + \left(o(1) \frac{\Delta z}{\rho} \right) \Delta z \stackrel{12.}{=} \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z, \end{aligned}$$

որպես $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0$, երբ $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ (միաժամանակ), քանի որ

$$\left| \frac{\Delta x}{\rho} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\Delta y}{\rho} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\Delta z}{\rho} \right| \leq 1 :$$

(7-31) $\implies$ (7-29) Վերցնենք մնացորդային անդամը (7-31)-ից և ձևափոխենք այն.

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z = \rho \left[\alpha \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \frac{\Delta y}{\rho} + \gamma \frac{\Delta z}{\rho} \right] = \rho \cdot o(1) = o(\rho) :$$

Այսպիսով, (7-29) և (7-31) ներկայացումները միանգամայն համարժեք են, և դրանք հեղադաշտում կկիրառենք ըստ մեր ընտրության:

Թեորեմ 7.9. (Դիֆերենցելիության անհրաժեշտ պայմանը)

Եթե $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում, ապա այդ կետում գոյություն ունեն 1-ին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները, ընդ որում

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = A}, \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = B}, \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = C},$$

որտեղ A, B, C -ն հաստատություններ են (7-29) ներկայացումից:

Ապացույց. Ապացուցենք երեք հավասարություններից միայն առաջինը, քանի որ մյուսները ստացվում են համանման եղանակով: Ըստ պայմանի՝ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում փեղի ունի (7-29) կամ (7-31) ներկայացումը: Մասնավորապես, վերցնենք $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = 0$, $\Delta z = 0$, և այդ դեպքում (7-29) կամ (7-31) ներկայացման լրիվ աճը կհանգի մասնակի աճին ըստ x -ի.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = A \Delta x + o(|\Delta x|), \quad \Delta x \rightarrow 0 :$$

Բաժանենք Δx -ի և անցնենք սահմանի.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A + o(1), \quad \Delta x \rightarrow 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A, \end{aligned}$$

ինչը և պահանջվում էր: □

Որպես թեորեմի հերևանք՝ նշենք, որ (7-29) կամ (7-31) դիֆերենցելիության պայմանի մեջ A, B, C հասարակությունները գտնված են, և դրանք կարող ենք արագորել ճշգրտված տեսքով.

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \Delta z + o(\rho), \quad \rho \rightarrow 0 : \quad (7-32)$$

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z, \quad (7-33)$$

որտեղ $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0$ ինչ-որ անվերջ փոքրեր են, երբ $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ (միաժամանակ):

Մասնակի ածանցյալների միակությունից հետևում է (7-32)-(7-33) ներկայացման միակությունը:

Ինչպես և միաչափ դեպքում էր, դիֆերենցելիությունն ավելի ուժեղ հատկություն է, քան անընդհատությունը:

Թեորեմ 7.10. Եթե տվյալ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա նույն կետում նաև անընդհատ է:

Ապացույց. Բավական է գրել (7-29), (7-31), (7-32), (7-33) ներկայացումներից որևէ մեկը և սահմանային անցում կատարել, երբ միաժամանակ $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$:

Սրացված $\Delta f(x_0, y_0, z_0) \rightarrow 0$ ($\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$) պայմանը նշանակում է f -ի անընդհատությունը $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում: □

Սահմանում 7.14. Եթե $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում, ապա (7-32)-(7-33) ներկայացման մեջ գլխավոր անդամը՝

$$df(x_0, y_0, z_0) \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \Delta z \quad (7-34)$$

կամ

$$df(M_0) \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) dz, \quad (7-35)$$

կոչվում է $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում:

Այստեղ մենք նույնացնում ենք անկախ փոփոխականների աճերը և դիֆերենցիալները.

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y, \quad dz = \Delta z : \quad$$

7.8 Դիֆերենցելիության բավարար պայմանը

Դիֆերենցելիությունը պարզելու համար, բացի սահմանումից, կա ավելի պարզ հայտանիշ կամ բավարար պայման:

Թեորեմ 7.11. (Դիֆերենցելիության բավարար պայմանը)

Դիցուք $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան որոշված է $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետի որևէ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում, որտեղ գոյություն ունեն 1-ին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները.

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(M) = f'_x(x, y, z), \quad \exists \frac{\partial f}{\partial y}(M) = f'_y(x, y, z), \quad \exists \frac{\partial f}{\partial z}(M) = f'_z(x, y, z) \quad \forall M(x, y, z) \in \mathcal{U}(M_0),$$

որոնք նաև անընդհատ են $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում:

Այդ դեպքում $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում:

Ապացույց. Պարզության համար թեորեմն ապացուցենք երկու փոփոխականի դեպքում՝ $\mathbb{R}^2$ -ում: Վերցնենք $M_0(x_0, y_0)$ կետում անկախ փոփոխականների այնքան փոքր աճեր, որ $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in \mathcal{U}(M_0)$ սրացված կետերը դուրս չգան $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքից: Կազմենք f ֆունկցիայի լրիվ աճը և ձևափոխենք.

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) \right] + \left[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right] = \\ &= \Delta_x f(x_0, y_0 + \Delta y) + \Delta_y f(x_0, y_0) : \end{aligned}$$

Սրացանք f ֆունկցիայի երկու մասնակի աճեր ըստ x -ի և ըստ y -ի, որոնց նկարագրի կիրառենք վերջավոր աճերի Լագրանժի բանաձևը.

$$\exists \theta_1 \in (0, 1) \quad \text{s.t.} \quad \Delta_x f(x_0, y_0 + \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x,$$

$$\exists \theta_2 \in (0, 1) \quad \text{s.t.} \quad \Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y :$$

Բացի այդ, f'_x, f'_y մասնակի ածանցյալների անընդհատությունը $M_0(x_0, y_0)$ կետում թույլ է տալիս ներկայացնել

$$\begin{aligned} f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y), \\ f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) &= f'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y), \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{որտեղ} \\ \alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0, \\ \beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0, \end{array} \quad \text{երբ} \quad \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0, \\ \Delta y \rightarrow 0 : \end{cases}$$

Ներառաք, ֆունկցիայի լրիվ աճը կներկայացվի հետևյալ տեսքով՝

$$\Delta f(x_0, y_0) = \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) \right] + \left[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y = \\
&= \left[f'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y) \right] \Delta x + \left[f'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y) \right] \Delta y = \\
&= f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,
\end{aligned}$$

ինչը նշանակում է, ըստ սահմանման, որ $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $M_0(x_0, y_0)$ կետում: $\square$

Սահմանում 7.15. $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան կոչվում է **ոդոլի** $D \subset \mathbb{R}^3$ **տիրույթում**, կգրենք $\boxed{f(M) \in C^1(D)}$, եթե f -ն ունի 1-ին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները, որոնք նաև անընդհատ են D տիրույթում:

Նմանապես սահմանում են ընդհանուր $C^m(D)$, $C^\infty(D)$ դասերը $\mathbb{R}^n$ -ի տիրույթներում:

Մի փոքր ուժեղացնելով թեորեմի պայմանը՝ կստանանք դիֆերենցելիության բավարար պայման՝ այս անգամ ամբողջ շրջակայքի համար:

Ներքևանք 7.2. *(Դիֆերենցելիության բավարար պայման)*

$$\left(f(M) \in C^1(\mathcal{U}(M_0)) \right) \implies \left(f(M) \text{ ֆունկցիան դիֆերենցելի է } \mathcal{U}(M_0) \text{ շրջակայքում} \right):$$

Քանի որ դիֆերենցելիությունն ավելի ուժեղ պայման է, քան անընդհատությունը, ապա Թեորեմ 7.11-ը կարող է ծառայել որպես անընդհատության հայտանիշ:

Ներքևանք 7.3. *(Անընդհատության բավարար պայման)*

Դիցուք $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան որոշված է $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետի որևէ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում, որտեղ գոյություն ունեն 1-ին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները.

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(M) = f'_x(x, y, z), \quad \exists \frac{\partial f}{\partial y}(M) = f'_y(x, y, z), \quad \exists \frac{\partial f}{\partial z}(M) = f'_z(x, y, z) \quad \forall M(x, y, z) \in \mathcal{U}(M_0),$$

որոնք նաև անընդհատ են $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում:

Այդ դեպքում $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան անընդհատ է $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում:

7.9 Բարդ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները, դիֆերենցման շղթայական կանոնը

Բարդ ֆունկցիայի (կամ համադրույթի) ածանցման կանոնը բազմաչափ տեսության մեջ պահպանում է միաչափ ֆունկցիաների ածանցման սկզբունքը, սակայն, իհարկե, իրավիճակն ավելի բարդ է և քննարկման կարիք ունի: Նախ կազմենք որևէ բարդ ֆունկցիա՝ սահմանափակվելով երկչափ և եռաչափ դեպքերով:

Դիցուք տրված է երեք անկախ փոփոխականի ֆունկցիա՝ $f = f(x, y, z)$, իսկ x, y, z փոփոխականներն իրենց հերթին կախված են, ենթադրենք, ξ և η անկախ փոփոխականներից.

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \\ z = z(\xi, \eta) \end{cases} \quad \boxed{f = f(x, y, z) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) \stackrel{\text{նշ.}}{=} g(\xi, \eta)} : \quad (7-36)$$

Առաջացավ բարդ ֆունկցիա, որը նշանակեցինք g -ով, և որը կախված է միայն ξ և η անկախ փոփոխականներից: Ինչպե՞ս գտնել g բարդ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներն այն դեպքում, իհարկե, եթե դրանք գոյություն ունեն: Մեր նպատակն է դուրս բերել ածանցման համապատասխան բանաձև:

Թեորեմ 7.12. (Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման շղթայական կանոնը)

Դիցուք $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, $z = z(\xi, \eta)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են (ξ_0, η_0) կետում: Իսկ $f(x, y, z)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է (x_0, y_0, z_0) կետում, ընդ որում՝

$$x_0 = x(\xi_0, \eta_0), \quad y_0 = y(\xi_0, \eta_0), \quad z_0 = z(\xi_0, \eta_0) :$$

Այդ դեպքում $\boxed{g(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta))}$ բարդ ֆունկցիան 1-ին կարգի մասնակի ածանցյալներ ունի (ξ_0, η_0) կետում, որոնք կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով՝

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi}}, \quad \text{կամ նույնը՝} \quad \boxed{g'_\xi = f'_x \cdot x'_\xi + f'_y \cdot y'_\xi + f'_z \cdot z'_\xi}, \quad (7-37)$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta}}, \quad \text{կամ նույնը՝} \quad \boxed{g'_\eta = f'_x \cdot x'_\eta + f'_y \cdot y'_\eta + f'_z \cdot z'_\eta}, \quad (7-38)$$

կամ ավելի մանրամասն՝

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi_0, \eta_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi_0, \eta_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi_0, \eta_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi}(\xi_0, \eta_0)}, \quad (7-39)$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi_0, \eta_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi_0, \eta_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi_0, \eta_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta}(\xi_0, \eta_0)} : \quad (7-40)$$

Ապացույց. $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում մասնավորապես նշանակում է, որ f ֆունկցիան որոշված է M_0 կետի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում: Իսկ $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, $z = z(\xi, \eta)$ ֆունկցիաների դիֆերենցելիությունը (և որպես հետևանք՝ անընդհատությունը) մասնավորապես նշանակում է, որ x, y, z ֆունկցիաները որոշված են (ξ_0, η_0) կետի ինչ-որ $\mathcal{V}(\xi_0, \eta_0)$ շրջակայքում, որպեսզի որոշված է $g(\xi, \eta)$ բարդ ֆունկցիան:

Վերցնենք (ξ_0, η_0) կետում բավականաչափ փոքր $\Delta\xi$ և $\Delta\eta$ այնպես, որ դուրս չգանք $\mathcal{V}(\xi_0, \eta_0)$ շրջակայքից: Դրա հետևանքով կառաջանան $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ աճեր $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում, ընդ որում՝

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0, \quad \text{երբ} \quad \Delta\xi \rightarrow 0,$$

անընդհատության շնորհիվ: Ներառաք, $\Delta\xi$ աճը ստեղծում է g ֆունկցիայի մասնակի աճ և f ֆունկցիայի լրիվ աճ, որը f -ի դիֆերենցելիության շնորհիվ կներկայացվի (7-33) տեսքով.

$$\Delta_\xi g = \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z,$$

որպեսզի $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\gamma = \gamma(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ֆունկցիաներն ինչ-որ անվերջ փոքրեր են, $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0$, երբ $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ (միաժամանակ): Բաժանենք $\Delta\xi$ -ի վրա և կազմենք g ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալն ըստ ξ փոփոխականի.

$$\frac{\Delta_\xi g}{\Delta\xi}(\xi_0, \eta_0) = \frac{g(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0) - g(\xi_0, \eta_0)}{\Delta\xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta\xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta\xi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta\xi} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta\xi} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta\xi} + \gamma \frac{\Delta z}{\Delta\xi} :$$

Անցնենք սահմանի, երբ $\Delta\xi \rightarrow 0$, կառաջանան մասնակի ածանցյալներ.

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi_0, \eta_0) = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{g(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0) - g(\xi_0, \eta_0)}{\Delta\xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} :$$

Երկրորդ (7-38) մասնակի ածանցյալի բանաձևը դուրս է բերվում նույն եղանակով: □

Դիպողություն 7.3. Թեորեմ 7.12-ում x, y, z ֆունկցիաների վրա դրվող դիֆերենցելիության պայմանը կարելի է մի փոքր թուլացնել: Այն է՝ կարելի է ենթադրել, որ $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, $z = z(\xi, \eta)$ ֆունկցիաները (ξ_0, η_0) կետում անընդհատ են և մասնակի ածանցյալներ ունեն: Թեորեմի եզրակացությունը նույնը կմնա:

7.10 Մասնակի ածանցյալ արվյալ ուղղությամբ

Դիցուք արված է երկու կամ երեք փոփոխականի ֆունկցիա՝ իր որոշման փիրույթով.

$$f(M) = f(x, y) : D \mapsto \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2, \quad \text{կամ} \quad f(M) = f(x, y, z) : D \mapsto \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^3 :$$

Ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները՝ $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x, \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y, \frac{\partial f}{\partial z} = f'_z$ (գոյության դեպքում իհարկե) արտահայտում են ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը x, y, z կոորդինատային առանցքների ուղղությամբ: Օրինակ, $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$ մասնակի ածանցյալը որոշելիս $M(x, y, z)$ կետը փեղաշարժվում է x առանցքին զուգահեռ ուղղով: Մինչդեռ, կիրառական խնդիրներում կարիք է առաջանում պարզել ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը զանազան, կամայական ուղղություններով: Բերենք մեկ օրինակ:

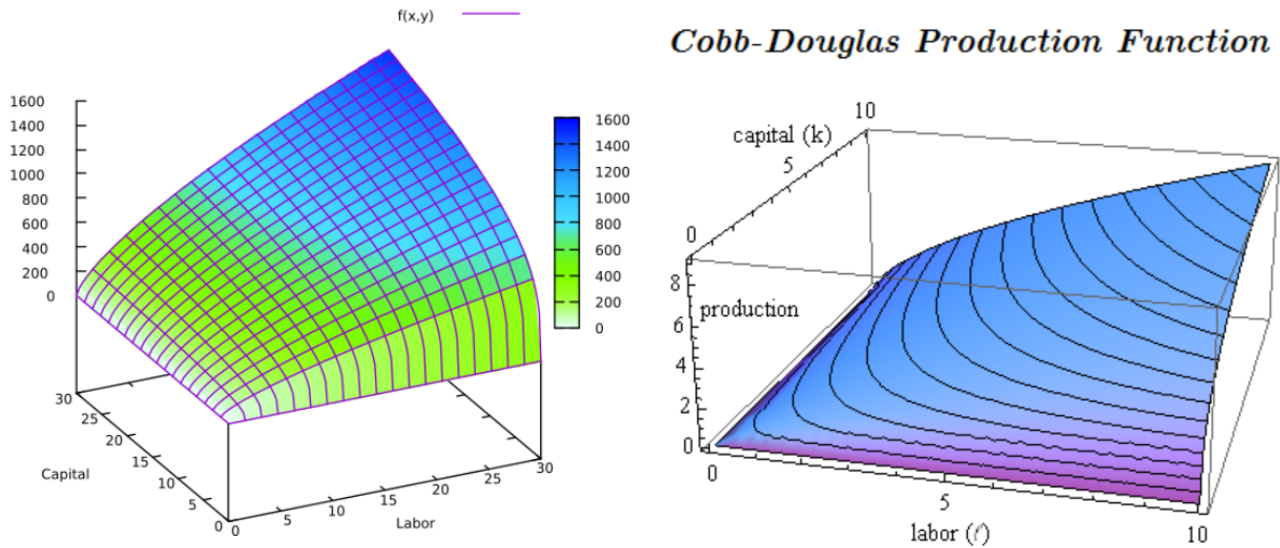
Օրինակ 7.7. Ենթադրենք՝ արված է երկու անկախ փոփոխականի ֆունկցիա՝

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} C x^{2/3} y^{1/3}, \quad C = \text{const} > 0, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

որտեղ x -ն արտահայտում է ներդրվող կապիտալի միավորների քանակը (ենթադրենք 1 միավորը = 1000 դրամ), y -ն արտահայտում է գործածվող աշխատուժի քանակը (ենթադրենք 1 միավորը = 1000 աշխատաժամ), իսկ z -ն արտահայտում է արվյալ x, y -ի դեպքում թողարկված արտադրանքի քանակը: Տնտեսագիտության մեջ f -ը սովորաբար անվանում են **Զոր-Դազլասի արտադրական ֆունկցիա** և հաճախ նշանակում են $Q = Q(K, L)$ -ով: Գրաֆիկների օրինակներ տես **գծագիր 7.9**-ում:

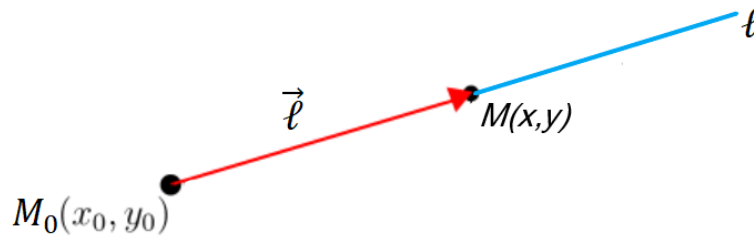
Օգտագործելով մեր նշանակումները՝ նկատենք, որ մասնակի ածանցյալն ըստ x -ի, $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$ արտահայտում է ֆունկցիայի աճման արագությունը, երբ աճ է ստանում x ներդրվող կապիտալը, իսկ աշխատուժի y քանակը մնում է հաստատուն: Նմանապես, մասնակի ածանցյալն ըստ y -ի, $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$ արտահայտում է ֆունկցիայի աճման արագությունը, երբ աճ է ստանում աշխատուժի y քանակը, իսկ x ներդրվող կապիտալը մնում է անփոփոխ: Շուկայում արտադրողը, շահագրգռված լինելով հնարավորինս արագ ավելացնել արտադրանքը և շահույթը, կարող է $\Delta x > 0$ և $\Delta y > 0$ աճեր տալ և՛ x ներդրվող կապիտալին, և՛ աշխատուժի y քանակին որոշակի համաչափությամբ: Առաջանում է $(\Delta x, \Delta y)$ նոր վեկտոր, որի ուղղությամբ պետք է պարզել արտադրանքի (այսինքն՝ f ֆունկցիայի) աճման արագությունը: Այլ կերպ ասած՝ մասնակի այնպիսի ածանցյալ պետք է սահմանել և գտնել, երբ $M(x, y)$ կետը փեղաշարժվում է արվյալ վեկտորի ուղղությամբ:

Այսպիսով, սահմանենք մասնակի ածանցյալ արվյալ ուղղությամբ, որը, սակայն, պետք է համաձայնեցված լինի սովորական $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x, \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$ մասնակի ածանցյալների սահմանումների հետ:



Պատկեր 7.9. Բոք-Դալասի արտադրական ֆունկցիայի գրաֆիկների նմուշներ

Սկզբում վերցնենք որևէ ուղղություն, այն կարող ենք սահմանել վեկտորի միջոցով: Ֆիքսենք որևէ կետ $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիայի որոշման փիրույթից՝ $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$, այնուհետև նշանակենք ℓ -ով ինչ-որ ճառագայթ, որը ելնում է M_0 կետից, և նշանակենք նույն $\vec{\ell}$ -ով այդ ճառագայթի ուղղությամբ որոշակի վեկտոր:



Պատկեր 7.10. ℓ ճառագայթը և $\vec{\ell}$ վեկտորը (ուղղությունը)

Սահմանում 7.16. (Մասնակի ածանցյալ $\vec{\ell}$ ուղղությամբ)

Դիցուք $M_0(x_0, y_0, z_0)$ սկզբնակետով և $\vec{\ell}$ ուղղությամբ ℓ ճառագայթի վրա գտնվող $M(x, y, z)$ կետերում որոշված է $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան (տե՛ս զժպիկը 7.10):

$\vec{\ell}$ ուղղությամբ մասնակի ածանցյալ է կոչվում հետևյալ սահմանը՝

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in \ell}} \frac{f(M) - f(M_0)}{|M_0 M|}, \quad (7-41)$$

որտեղ $|M_0 M| = \rho(M_0, M) > 0$ հեռավորությունն է $M_0 \in \ell$ և $M \in \ell$ կետերի միջև:

Մասնավորապես, եթե $\vec{\ell}$ ուղղությունը համընկնում է Ox առանցքի (դրական) ուղղության հետ՝ $\vec{\ell} = \overline{Ox}$, ապա $\left[\frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \right]$:

Նմանապես, եթե $\vec{\ell} = \overline{Oy}$, ապա $\left[\frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \right]$, և եթե $\vec{\ell} = \overline{Oz}$, ապա $\left[\frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \right]$:

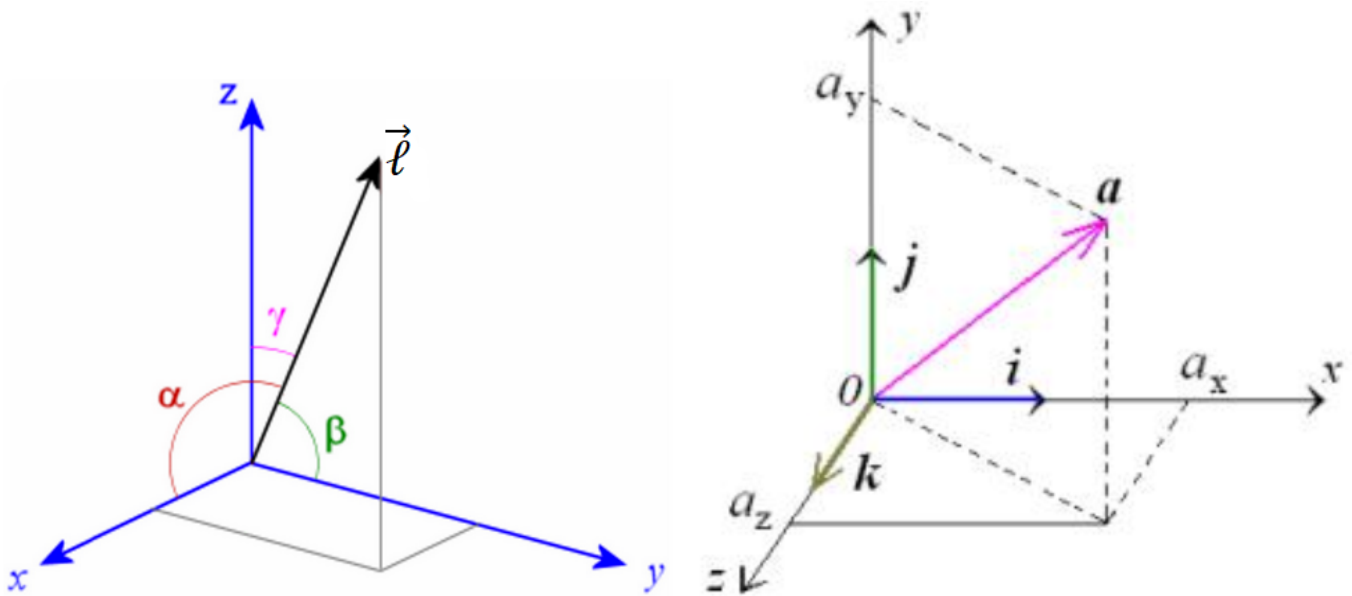
Նշանակենք $\vec{\ell}$ վեկտորի կազմած անկյունները կոորդինատային առանցքների հետ.

$$\angle(\vec{\ell}, Ox) \stackrel{\text{նշ.}}{=} \alpha, \quad \angle(\vec{\ell}, Oy) \stackrel{\text{նշ.}}{=} \beta, \quad \angle(\vec{\ell}, Oz) \stackrel{\text{նշ.}}{=} \gamma : \quad (7-42)$$

Նարմար է $\vec{\ell}$ ուղղությունը ներկայացնել $\vec{\ell}$ -ի միավոր վեկտորով, որը նշանակենք $\vec{e}$ -ով, այսինքն՝

$$\vec{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|} = \left\{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \right\} \stackrel{\text{կամ}}{=} \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}, \quad |\vec{e}|^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (7-43)$$

որպես $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ կոսինուսները փվյալ $\vec{\ell}$ վեկտորի այդպես կոչված **ուղղորդ կոսինուսներն** են :



Գծագիր 7.11. Վեկտորի անկյունները և պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա

Թեորեմ 7.13. Եթե $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում, ապա նույն կետում $f(M)$ ֆունկցիան ցանկացած $\vec{\ell}$ ուղղությամբ մասնակի ածանցյալ ունի, որը գրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos \gamma \right] : \quad (7-44)$$

Ապացույց. Օգտագործելու ենք (7-42)-(7-43) նշանակումները: Վերցնենք ℓ ճառագայթի վրա և M_0 -ին բավականաչափ մոտ փոփոխական $M(x, y, z) \in \ell$ կետ, քանի որ $\vec{\ell} \uparrow \vec{e} \uparrow \overrightarrow{M_0 M}$ (համուղված են), ապա

$$\exists t > 0 \quad s.t. \quad \overrightarrow{M_0 M} = t \cdot \vec{e} = \left\{ t \cos \alpha, t \cos \beta, t \cos \gamma \right\} :$$

Մյուս կողմից, նույն վեկտորը կարող ենք գրել կոորդինատներով և հետո հավասարեցնել դրանք՝

$$\overrightarrow{M_0 M} = \left\{ x - x_0, y - y_0, z - z_0, \right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \cos \beta \\ z = z_0 + t \cos \gamma \end{cases} :$$

Վերջին հավասարումների եռյակը փաստորեն ներկայացնում է ℓ ճառագայթի (ուղղի) պարամետրական արտաբեր: Կազմենք t փոփոխականի հետևյալ բարդ ֆունկցիան և նշանակենք՝

$$f(M) = f(x, y, z) = f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) \stackrel{\text{նշ.}}{=} g(t) :$$

Մասնավորապես, $g(0) = f(x_0, y_0, z_0) = f(M_0)$: Ուրեմն, կարող ենք անցնել որոնելի մասնակի ածանցյալի (7-41) սահմանմանը.

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) = \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in \ell}} \frac{f(M) - f(M_0)}{|M_0 M|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) :$$

Շղթայական կանոնի միջոցով հաշվենք բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = f'_x(x, y, z) \cdot \cos \alpha + f'_y(x, y, z) \cdot \cos \beta + f'_z(x, y, z) \cdot \cos \gamma :$$

Մնում է այսպեղ փոխադրել $t = 0$.

$$g'(0) = f'_x(M_0) \cdot \cos \alpha + f'_y(M_0) \cdot \cos \beta + f'_z(M_0) \cdot \cos \gamma ,$$

ուրեմն

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) = g'(0) = f'_x(M_0) \cdot \cos \alpha + f'_y(M_0) \cdot \cos \beta + f'_z(M_0) \cdot \cos \gamma ,$$

ինչը և պահանջվում էր: □

Սահմանում 7.17. $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիայի 1-ին կարգի մասնակի ածանցյալներից կազմված վեկտորը կոչվում է **գրադիենտ**, ավելի սրույզ՝

$$\nabla f(M_0) \stackrel{\text{կամ}}{=} \text{grad } f(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \right\} = f'_x(M_0) \vec{i} + f'_y(M_0) \vec{j} + f'_z(M_0) \vec{k}$$

վեկտորը կոչվում է $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **կետում** $f(M)$ **ֆունկցիայի գրադիենտ** և նշանակվում է ընդունված երկու ձևերից մեկով (կարդում ենք՝ «նաբլա էֆ»):

Թեորեմ 7.13-ում ապացուցված (7-44) բանաձևը կարելի է արտագրել գրադիենտի և սկալյար արտադրյալի միջոցով.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) = \nabla f(M_0) \cdot \vec{e} \stackrel{\text{կամ}}{=} (\nabla f(M_0), \vec{e})}, \quad (7-45)$$

որտեղ մենք ներկայացրել ենք սկալյար արտադրյալի երկու համարժեք նշանակում՝ $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$:

Սկալյար արտադրյալից կարելի է անցնել մասնակցող վեկտորների երկարություններին և նրանց կազմած անկյանը, որը նշանակենք φ -ով.

$$\boxed{\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \angle(\vec{\ell}, \nabla f(M_0))} \implies \boxed{\frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) = |\nabla f(M_0)| |\vec{e}| \cos \varphi = |\nabla f(M_0)| \cos \varphi} : \quad (7-46)$$

Ընդունենք, որ գրադիենտը զրոյական վեկտոր չէ՝ $\nabla f(M_0) \neq \vec{0}$, և քննարկենք հետևյալ հարցը.

«Բոլոր ուղղություններով $\frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0)$ մասնակի ածանցյալների մեջ հափկապես ո՞ր ուղղությամբ ածանցյալը կլինի մեծագույնը (փոքրագույնը)»:

Այս հարցն ունի հստակ պատասխան՝ շնորհիվ (7-46) ներկայացման.

եթե $\vec{\ell} \uparrow \nabla f(M_0)$ (վեկտորները համուղղված են), ապա $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ և $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) = |\nabla f(M_0)|}$,

եթե $\vec{\ell} \downarrow \nabla f(M_0)$ (վեկտորները հակուղղված են), ապա $\varphi = \pi$, $\cos \varphi = -1$ և $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) = -|\nabla f(M_0)|}$,

եթե $\vec{\ell} \perp \nabla f(M_0)$ (վեկտորներն ուղղահայաց են), ապա $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos \varphi = 0$ և $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) = 0}$:

Այսպիսով, հենց գրադիենտն է այն ուղղությունը, ըստ որի f ֆունկցիայի ածանցյալն ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, իսկ փոքրագույն արժեքն ընդունում է գրադիենտի հակադիր ուղղության դեպքում.

$$\boxed{\begin{aligned} \max_{\vec{\ell}} \frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) &= |\nabla f(M_0)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\right)^2}, \\ \min_{\vec{\ell}} \frac{\partial f}{\partial \ell}(M_0) &= -|\nabla f(M_0)| = -\sqrt{\left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\right)^2} : \end{aligned}}$$

Եզրակացնենք.

**Ֆունկցիայի գրադիենտը ավելի կետում բնութագրում է այդ կետում
ֆունկցիայի մաքսիմալ աճման ուղղությունը և մեծությունը:**

Գրադիենտի երկրաչափական իմաստը պարզելու համար սահմանենք այդպես կոչված մակարդակի գծեր և մակերևույթներ:

Սահմանում 7.18. Երկու փոփոխականի $f(x, y)$ ֆունկցիայի համար

$$\Gamma_C \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ M(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = C \right\}$$

բազմությունը կոչվում է $f(M) = f(x, y)$ **ֆունկցիայի մակարդակի գիծ** $C = \text{const} \in \mathbb{R}$ **հասարարունին համապատասխանող**:

Սահմանում 7.19. Երեք փոփոխականի $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի համար

$$\Gamma_C \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = C \right\}$$

բազմությունը կոչվում է $f(M) = f(x, y, z)$ **ֆունկցիայի մակարդակի մակերևույթ** $C = \text{const} \in \mathbb{R}$ **հասարարունին համապատասխանող**:

Մակարդակի բազմությունները (գծեր, մակերևույթներ) գտնվում են ֆունկցիայի որոշման տիրույթում և ներկայացնում այն բոլոր կետերը, որտեղ ֆունկցիան հասարարուն է, այլ կերպ ասած՝ մակարդակի բազմությունը արվյալ $C = \text{const} \in \mathbb{R}$ հասարարունի նախապարկերն է և այդ պարագայում կարելի է գրել $\Gamma_C = f^{-1}(C)$: Պետք է հիշել, որ երկու փոփոխականի ֆունկցիայի մակարդակի բազմությունը (գիծը) գտնվում է $\mathbb{R}^2$ հարթության վրա, իսկ երեք փոփոխականի ֆունկցիայի մակարդակի բազմությունը (մակերևույթը) գտնվում է $\mathbb{R}^3$ եռաչափ տարածության մեջ:

Օրինակ 7.8. Դիտարկենք

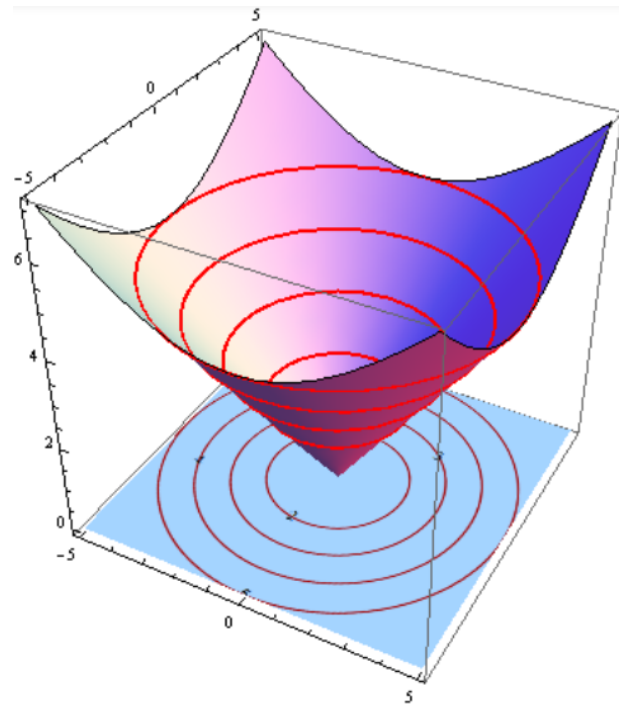
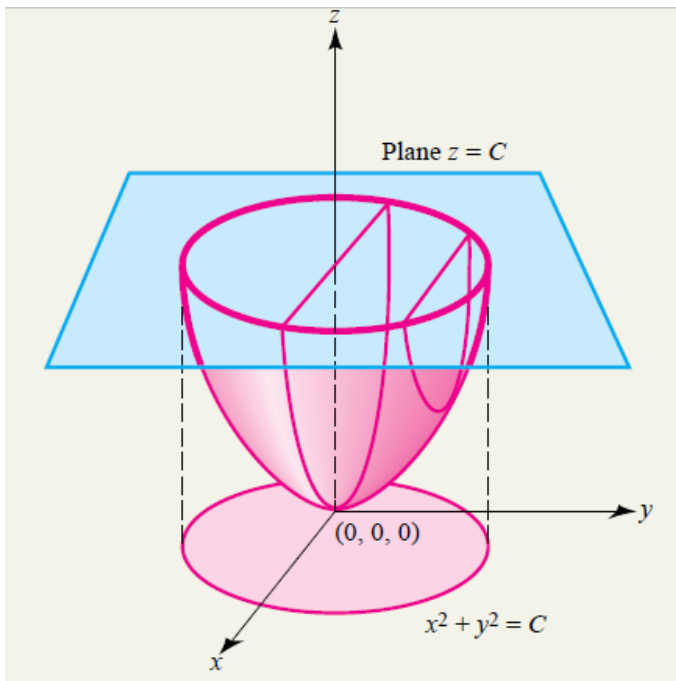
$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան, որի գրաֆիկը, ինչպես գիտենք, պարաբոլոիդ է $(0, 0)$ գագաթով: Վերցնենք արժեքների տիրույթից որևէ $C > 0$ դրական հասարարուն և կազմենք $x^2 + y^2 = C$ մակարդակի գծի հավասարումը: Պարզ է, որ սա շրջանագիծ է $(0, 0)$ կենտրոնով և $\sqrt{C}$ շառավղով: Երբ $C = 0$ մակարդակի գիծը հանգում է մեկ կետի, իսկ $C < 0$ դեպքում՝ դատարկ բազմություն է:

Սահմանումը ցույց է տալիս, որ մակարդակի գիծը երկրաչափորեն կառուցելու համար պետք է գտնել $z = f(x, y)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի և $z = C$ հարթության հատումը, որը հետո պրոյեկտվել (x, y) հարթության վրա, ինչպես դա լավ երևում է **գծագրեր 7.12-7.13**-ում:

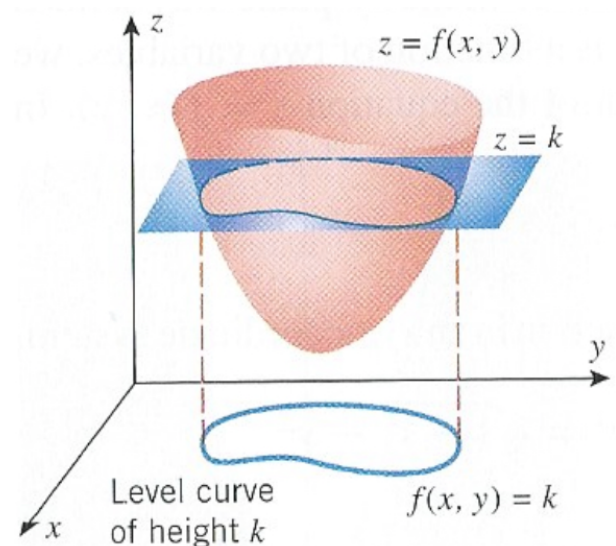
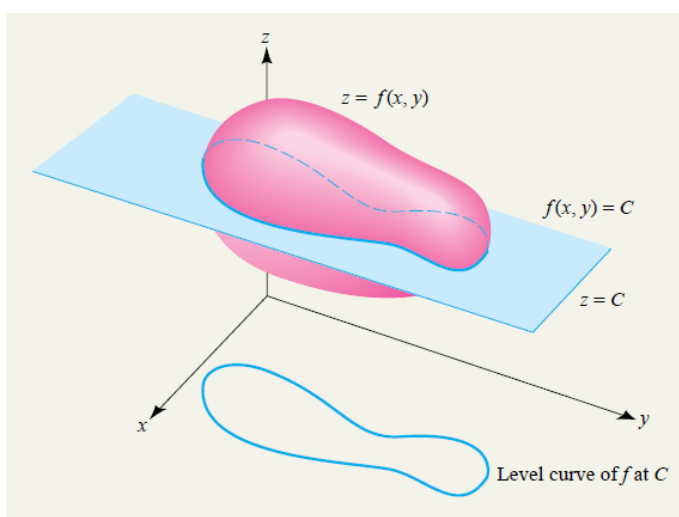
Մակարդակի գծերը և մակարդակի մակերևույթները շատ հաճախ են հանդիպում հարկապես բնագիտական և ֆեյնմենիական խնդիրներում, ինչպես նաև փնտրության բնագավառում:

Օրինակ 7.9. Մենք արդեն մասամբ քննարկել ենք (տես Օրինակ 7.7) Φ -Դալասի արտադրական ֆունկցիան, որը փնտրության մեջ նշանակում են $Q = Q(K, L)$ -ով, որտեղ K -ն արտադրություն



Պատկեր 7.12. Պարաբոլիդի մակարդակի գծերը

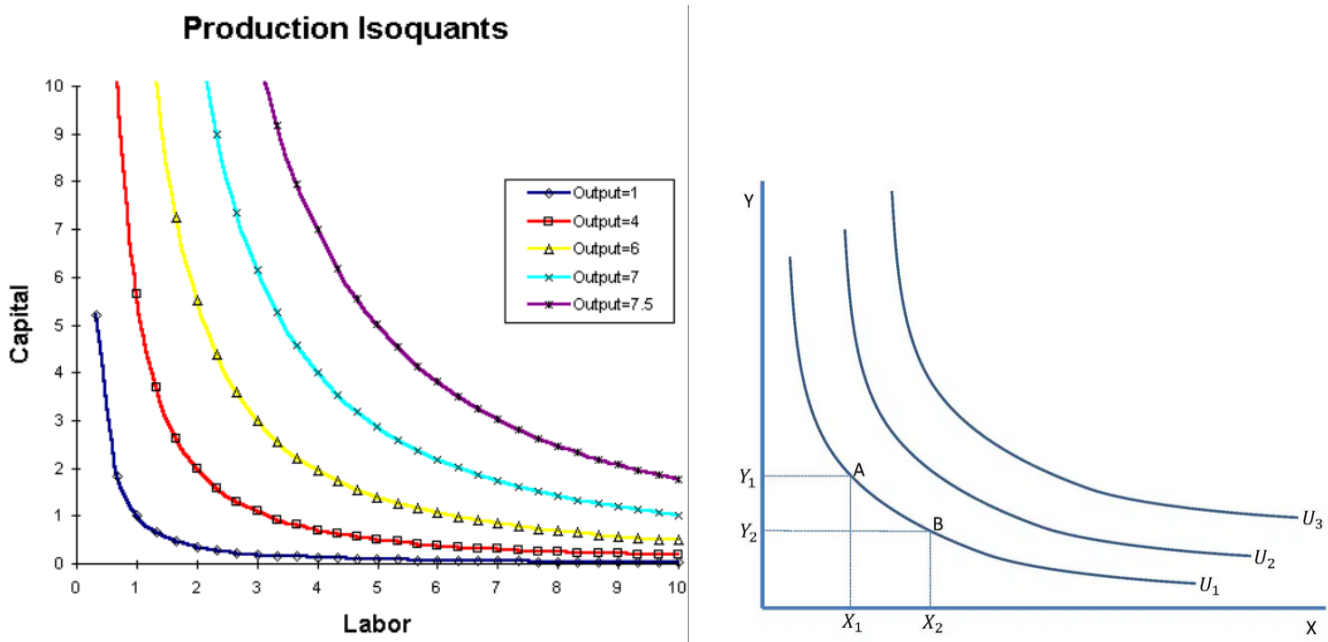
Է ներդրվող կապիտալի քանակը, L -ն արտահայտում է գործածվող աշխատուժի քանակը, և Q -ն՝ արվյալ K, L -ի դեպքում թողարկած արտադրանքի քանակը: Ինչպես երկու անկախ փոփոխականի ֆունկցիաների համար տարբեր արտադրական ֆունկցիաների դեպքում նույնպես կարող ենք կազմել մակարդակի գծեր՝ $Q(K, L) = C$ տարբեր $C = \text{const} > 0$ հաստատուններին համապատասխանող: $Q(K, L) = C$ մակարդակի գծերը կոչվում են **իզոքվանտներ**:



Պատկեր 7.13. Տարբեր ֆունկցիաների (մակերևույթների) մակարդակի գծերը

Մեկ այլ հայտնի **օգրակարության** $U(x, y)$ **ֆունկցիայի** դեպքում նրա $U(x, y) = C$ մակարդակի

գծերը կոչվում են **անարաբերության կորեր**:



Պատկեր 7.14. Իզոքվանտների և անարաբերության կորերի բնորոշ օրինակներ

Նաջորդ արդյունքը հստակ կապ է հաստատում մակարդակի գծերի և նրանց գրադիենտների միջև:

Պնդում 7.1. Ողորկ $z = f(x, y) \in C^1(D)$ ֆունկցիայի Γ_C ($C = \text{const}$) մակարդակի գծի ցանկացած $M_0 \in \Gamma_C$ կետում ֆունկցիայի գրադիենտը մակարդակի գծի նորմալն է, այսինքն՝

$$\boxed{\nabla f(M_0) \perp \Gamma_C} \quad \forall M_0 \in \Gamma_C, \quad (7-47)$$

ասում են՝ գրադիենտը մակարդակի գծին օրթոգոնալ կամ ուղղահայաց է:

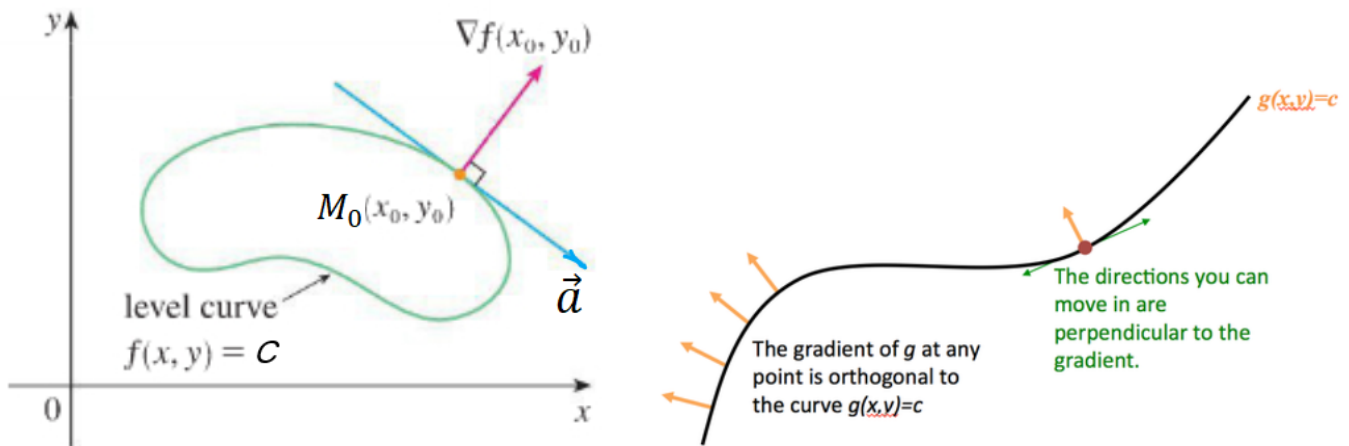
Ապացույց. Նշենք, որ (7-47) ուղղահայացությունը պետք է հասկանալ այնպես, որ ֆունկցիայի գրադիենտը M_0 կետում ուղղահայաց է այդ կետում փարված մակարդակի գծի շոշափողին:

Ֆիքսենք որևէ $C = \text{const}$ հաստատուն f -ի արժեքների փիրույթից և նրան համապատասխանող Γ_C մակարդակի գիծը: Վերցնենք կամայական կետ մակարդակի գծի վրա՝ $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma_C$, և դիտարկենք f -ի գրադիենտը M_0 կետում՝ համարելով այն ոչ զրոյական:

$$\nabla f(M_0) = \left\{ \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \right\} = \{f'_x(M_0), f'_y(M_0)\} \neq \vec{0}$$

(զրոյական գրադիենտի դեպքում ապացուցելու բան չկա):

Առանց խախտելու ընդհանրությունը համարենք, որ $\boxed{f'_y(M_0) \neq 0}$: Պարենք M_0 կետում Γ_C մակարդակի գծի շոշափողի որևէ ուղղորդ վեկտոր: Առհասարակ, որպես ինչ-որ $y = kx + b$ ուղղի ուղղորդ վեկտոր կարող է ծառայել, օրինակ, $\vec{a} = \{1, k\}$ վեկտորը:



Պատկեր 7.15. Մակարդակի գծի գրադիենտը

Մակարդակի գիծը որոշվում է $f(x, y) = C$ կամ նրանից սրացվող $y = y(x)$ հավասարումով, որը հնարավոր է բացահայտել չորս փոփոխականի անկյունային k գործակիցը հենց $y = y(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն է x_0 կետում՝

$$k = y'(x_0), \quad \text{որպեսզի} \quad f(x, y) = C \iff y = y(x) \quad \text{կորի հավասարումն է, ընդ որում} \quad y_0 = y(x_0) :$$

Քանի որ մակարդակի գծի $y = y(x)$ բացահայտել հավասարումը չունենք, վերջինիս ածանցյալը գտնենք հետևյալ եղանակով: Ածանցենք ըստ x -ի և օգտվենք բարդ ֆունկցիայի ածանցման շղթայական կանոնից.

$$f(x, y(x)) = C \implies \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = 0 \implies f'_x + f'_y y'_x = 0 \implies y'_x = y'(x) = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} :$$

Մեզ հետաքրքրում է այս ածանցյալի արժեքն x_0 կետում.

$$\implies k = y'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}, \quad \text{ուստի} \implies \vec{a} = \{1, k\} = \{1, y'(x_0)\} = \left\{1, -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}\right\}$$

վեկտորը Γ_C մակարդակի գծի շոշափողի ուղղորդ վեկտոր է: Այժմ բավական է ստուգել, որ $\vec{a}$ վեկտորն ուղղահայաց է գրադիենտին, կամ նրանց սկալյար արտադրյալը զրո է.

$$\left(\nabla f(M_0), \vec{a}\right) = \left(\{f'_x(M_0), f'_y(M_0)\}, \left\{1, -\frac{f'_x(M_0)}{f'_y(M_0)}\right\}\right) = f'_x(M_0) - f'_x(M_0) = 0,$$

ինչն ավարտում է ապացույցը: □

Դիպողություն 7.4. Ասացույցի ընթացքում $y'(x_0)$ ածանցյալը գտնելուց հետո ցանկացողները կարող են այն տեղադրել շոշափողի հավասարման մեջ և նույն հաջողությամբ համոզվել, որ գրադիենտը նրա նորմալն է:

Դիպողություն 7.5. Նույն պնդումը տեղի ունի, եթե ձևակերպման մեջ մակարդակի գիծը փոխարինենք մակարդակի մակերևույթով $\mathbb{R}^3$ -ում կամ անգամ $\mathbb{R}^n$ -ում:

7.11 Բարձր կարգի մասնակի ածանցյալներ

Դիցուք $G \subset \mathbb{R}^3$ փրոյորի ցանկացած կետում $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիան ունի 1-ին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f'_z :$$

Սրանցից յուրաքանչյուրը x, y, z անկախ փոփոխականների ֆունկցիա է և դարձյալ կարող է ունենալ մասնակի ածանցյալներ, օրինակ,

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \stackrel{\text{ն2.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \text{կամ նույնը՝} & (f'_x)'_x \stackrel{\text{ն2.}}{=} f''_{xx}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \stackrel{\text{ն2.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \text{կամ նույնը՝} & (f'_x)'_y \stackrel{\text{ն2.}}{=} f''_{xy}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \stackrel{\text{ն2.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \text{կամ նույնը՝} & (f'_y)'_x \stackrel{\text{ն2.}}{=} f''_{yx}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \stackrel{\text{ն2.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \text{կամ նույնը՝} & (f'_x)'_z \stackrel{\text{ն2.}}{=} f''_{xz}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \stackrel{\text{ն2.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \text{կամ նույնը՝} & (f'_y)'_z \stackrel{\text{ն2.}}{=} f''_{yz} \quad \text{և այլն:} \end{array}$$

Սրանք բոլորը **2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալներ** են: Նույն սկզբունքով են սահմանում և գրում **3-րդ և ավելի բարձր կարգի մասնակի ածանցյալները**, օրինակ,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = f'''_{yyy} = f^{(3)}_{y^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f'''_{yyx} = f^{(3)}_{y^2x}, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k} = f^{(k)}_{x^k} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \text{և այլն:}$$

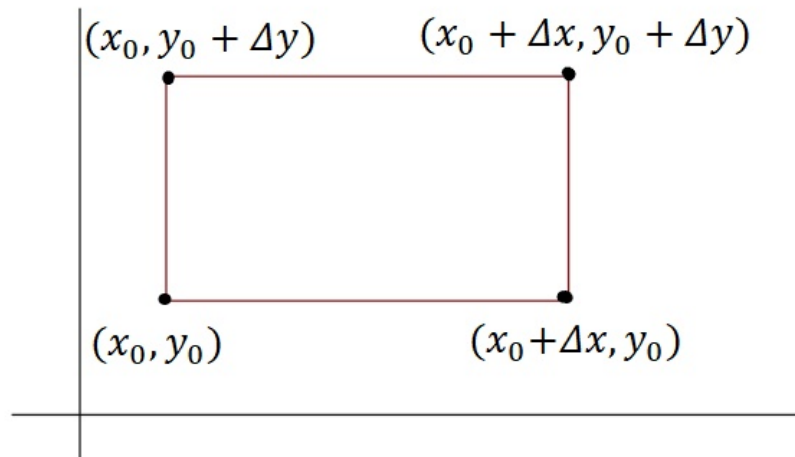
Բարձր կարգի այն մասնակի ածանցյալը, որը ստացվել է փարբեր անկախ փոփոխականների դիֆերենցման արդյունքում, կոչվում է **խառը մասնակի ածանցյալ**: Որոշ պայմանների դեպքում, ըստ նույն փոփոխականների խառը մասնակի ածանցյալները հավասար են:

Թեորեմ 7.14. (Շվարցի թեորեմը խառը մասնակի ածանցյալների մասին)

Դիցուք $M_0(x_0, y_0)$ կետի որևէ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում որոշված են $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիան և նրա $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ մասնակի ածանցյալները: Բացի այդ, f''_{xy}, f''_{yx} խառը մասնակի ածանցյալներն անընդհար են $M_0(x_0, y_0)$ կետում:

Այդ դեպքում նշված 2-րդ կարգի խառը մասնակի ածանցյալները հավասար են $M_0(x_0, y_0)$ կետում

$$\boxed{f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)}, \quad \text{կամ նույնը՝} \quad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)} : \quad (7-48)$$



Գծագիր 7.16. Ֆունկցիայի լրիվ և մասնակի աճերի գծապարկերը

Ապացույց. Վերցնենք անկախ փոփոխականների այնքան փոքր $\Delta x, \Delta y$, $\Delta x^2 + \Delta y^2 \neq 0$, աճեր, որ դուրս չգանք $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքից՝ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in \mathcal{U}(M_0)$:

Ներմուծենք օժանդակ ֆունկցիաներ՝

$$F(\Delta x, \Delta y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$$

և

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0) :$$

Այդ դեպքում կարելի է ներկայացնել՝

$$F(\Delta x, \Delta y) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) :$$

Վերջին փաթեթիության համար և $\varphi(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառենք վերջավոր աճերի Լագրանժի թեորեմը.

$$\begin{aligned} \exists \theta_1 (0 < \theta_1 < 1) \quad s.t. \quad F(\Delta x, \Delta y) &= \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x) \Delta x = \\ &= [f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)] \Delta x : \end{aligned}$$

Դարձյալ կիրառենք Լագրանժի թեորեմը՝ այս անգամ f'_x ֆունկցիայի և y փոփոխականի նկատմամբ.

$$\begin{aligned} \exists \theta_2 (0 < \theta_2 < 1) \quad s.t. \quad F(\Delta x, \Delta y) &= [f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)] \Delta x = \\ &= f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y \Delta x : \end{aligned} \quad (7-49)$$

Այժմ կարարված գործողությունները կրկնենք մեկ այլ օժանդակ ֆունկցիայի օգնությամբ՝

$$\psi(y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y) :$$

Այդ դեպքում կարելի է ներկայացնել՝

$$F(\Delta x, \Delta y) = \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) \right] - \left[f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \right] = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) :$$

Լագրանժի թեորեմը կիրառենք երկու անգամ՝ սկզբում՝ y , իսկ հետո՝ x փոփոխականի նկատմամբ.

$$\begin{aligned} \exists \theta_3, \theta_4 \quad (0 < \theta_3, \theta_4 < 1) \quad s.t. \quad F(\Delta x, \Delta y) &= \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_3 \Delta y) \Delta y = \\ &= \left[f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) - f'_x(x_0, y_0 + \theta_3 \Delta y) \right] \Delta y = \\ &= f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) \Delta x \Delta y : \end{aligned} \quad (7-50)$$

Համարելով, որ $\Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0$, և համեմատելով (7-49) և (7-50) բանաձևերը՝ կստանանք՝

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) , \quad \text{որտեղ} \quad 0 < \theta_k < 1 \quad (k = 1, 2, 3, 4) : \quad (7-51)$$

Շնորհիվ f''_{xy}, f''_{yx} խառը մասնակի ածանցյալների անընդհատության $M_0(x_0, y_0)$ կետում՝ կարելի է (7-51)-ում սահմանային անցում կատարել, երբ միաժամանակ $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$:

Արդյունքում կստացվի պահանջվող (7-48) $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ հավասարությունը: $\square$

Թեորեմ 7.14-ից, այսպիսով, կարելի է եզրակացնել, որ

$$f''_{xy} \text{ և } f''_{yx} \text{ անընդհատ մասնակի ածանցյալները միշտ հավասար են:}$$

Նույնը կարելի է պնդել ավելի բարձր կարգի խառը մասնակի ածանցյալների համար:

Սահմանում 7.20. Դիցուք $f(M)$ ֆունկցիան որոշված է M_0 կետի $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում:

$f(M)$ ֆունկցիան կոչվում է $k \in \mathbb{N}$ **անգամ դիֆերենցելի** M_0 **կետում**, եթե $f(M)$ ֆունկցիան և նրա բոլոր մասնակի ածանցյալները մինչև $(k-1)$ -րդ կարգը դիֆերենցելի են M_0 կետում:

Սահմանում 7.21. $D \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում $f(M)$ ֆունկցիան կոչվում է $k \in \mathbb{N}$ **անգամ անընդհատ դիֆերենցելի**, գրում են $\boxed{f \in C^k(D)}$, եթե $f(M)$ ֆունկցիայի բոլոր մասնակի ածանցյալները մինչև k -րդ կարգը գոյություն ունեն և անընդհատ են D տիրույթում:

Հաշվի առնելով ֆունկցիայի դիֆերենցելիության բավարար պայմանը՝ ակնհայտ է, որ եթե $f(M)$ ֆունկցիան k անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է M_0 կետի $\mathcal{U}(M_0)$ փոքր շրջակայքում՝ $f \in C^k(\mathcal{U}(M_0))$, ապա $f(M)$ ֆունկցիան կլինի k անգամ դիֆերենցելի M_0 կետում (և ամբողջ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում):

Ներքև 7.4. Եթե $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիան երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է M_0 կետի որևէ շրջակայքում՝ $f \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$, ապա 2-րդ կարգի խառը մասնակի ածանցյալները հավասար են $M_0(x_0, y_0)$ կետում՝
$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) :$$

Ներքև 7.5. Եթե $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիան $k \in \mathbb{N}$ անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է M_0 կետի որևէ շրջակայքում՝ $f \in C^k(\mathcal{U}(M_0))$, ապա k -րդ կարգի յուրաքանչյուր խառը մասնակի ածանցյալ $M_0(x_0, y_0)$ կետում կախված չէ հաջորդական ածանցման կարգից:

Թեորեմ 7.14-ը կարելի է մի փոքր ուժեղացնել՝ չափանշելով 2-րդ կարգի խառը մասնակի ածանցյալների անընդհատությունը:

Թեորեմ 7.15. Եթե $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիան կրկնակի դիֆերենցելի է $M_0(x_0, y_0)$ կետում, ապա 2-րդ կարգի խառը մասնակի ածանցյալները հավասար են $M_0(x_0, y_0)$ կետում՝
$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0) :$$

Ապացույցը չենք բերի, այն իրականացվում է Թեորեմ 7.14-ի ապացույցի նման:

7.12 Բարձր կարգի դիֆերենցիալներ

Որպես մոդելային ֆունկցիա դիտարկենք երեք անկախ փոփոխականի ֆունկցիա՝ $f(M) = f(x, y, z) :$ Սահմանել էինք ֆունկցիայի (1-ին կարգի) լրիվ դիֆերենցիալը.

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \stackrel{\text{կամ}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right) f : \quad (7-52)$$

Եթե ֆունկցիան ունի 2-րդ կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները, ապա, ինչպես միաչափ դեպքում, կարելի է սահմանել f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը: Դրա համար ֆիքսենք անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալները (աճերը)՝ $dx = const, dy = const, dz = const$ և գրենք $df(x, y, z)$ դիֆերենցիալի լրիվ դիֆերենցիալը, որն էլ կոչվում է f -ի **2-րդ կարգի դիֆերենցիալ**՝ $d^2 f = d(df) :$ Վերջինս կարելի է բերել հարմար տեսքի, եթե օգտվենք լրիվ դիֆերենցիալի սահմանումից, գծայնության հարկություններից և dx, dy, dz դիֆերենցիալների ֆիքսած լինելու պայմանից.

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y, z) &= d(df) = d \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) = \\ &= dx \cdot d \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + dy \cdot d \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + dz \cdot d \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \\ &= dx \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz \right] + dy \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} dz \right] + \end{aligned}$$

$$+ dz \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz \right] :$$

Առաջացան, մասնավորապես, մի քանի խառը մասնակի ածանցյալներ: Ընդունենք, որ կադարվում են Թեորեմ 7.14 կամ 7.15-ի պայմանները, ինչը կապահովի նույն փոփոխականներով վերցրած խառը մասնակի ածանցյալների հավասարությունը.

$$d^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz, \quad (7-53)$$

կամ նույնը՝

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + f''_{yy} dy^2 + f''_{zz} dz^2 + 2 f''_{xy} dx dy + 2 f''_{xz} dx dz + 2 f''_{yz} dy dz : \quad (7-54)$$

Այսպես չմոռանանք, որ $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$, $dz^2 = (dz)^2$, համաձայն ընդունված գրելաձևի: Նենց (7-53)-(7-54) արտահայտությունը հաճախ համարում են ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի սահմանում հարմար բանաձևային տեսքով: Այնուամենայնիվ, (7-53)-(7-54) բանաձևը կարելի է արտագրել թերևս ավելի հարմար օպերատորական (սիմվոլիկ) տեսքով, ինչպես (7-52)-ի վերջին արտահայտությունը.

$$d^2 f(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 f : \quad (7-55)$$

Եթե ձևական բացենք քառակուսին (7-55) բանաձևում, ապա կստանանք (7-53)-(7-54) բանաձևը:

Բնականաբար, եթե ֆունկցիան կախված լիներ ընդամենը երկու անկախ փոփոխականից՝ $f(M) = f(x, y)$, ապա 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը ավելի կարճ տեսքով կներկայանար.

$$d^2 f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy : \quad (7-56)$$

Ինդուկցիոն եղանակով սահմանում են ավելի բարձր կարգի դիֆերենցիալները.

$$d^3 f = d(d^2 f), \quad d^4 f = d(d^3 f), \quad \dots, \quad d^k f = d(d^{k-1} f), \quad k \in \mathbb{N} :$$

Սրանցից յուրաքանչյուրը կարելի է ներկայացնել ավելի հարմար օպերատորական (սիմվոլիկ) տեսքով, ինչպես (7-55)-ում.

$$d^3 f(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^3 f,$$

$$d^4 f(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^4 f,$$

...

$$d^k f(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^k f :$$

Բացահայտ արտահայտությունը ստանալու համար պետք է ձևականորեն բացել աստիճանը՝ հետևելով Նյուտոնի բինոմական (բազմանդամային) բանաձևերին:

7.13 Թեյլորի բանաձևը

Եթե մի քանի փոփոխականի ֆունկցիան բավականաչափ ողորկ է Կլայվ կերպի շրջակայքում, այսինքն՝ որոշակի կարգի անընդհար դիֆերենցելի է, ապա, ինչպես միաչափ դեպքում էր, ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել (Թեյլորի բանաձևով) որպես ինչ-որ բազմանդամի և մնացորդի գումար: Նիշենք, որ միաչափ դեպքում Թեյլորի բանաձևը կարելի էր ներկայացնել մի քանի տեսքով և փարբեր մնացորդային անդամներով.

$$F(x) = F(x_0) + \frac{F'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{F''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + r_n(x), \quad (7-57)$$

$$\Delta F(x_0) = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \frac{F'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{F''(x_0)}{2!} \Delta x^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n + r_n(x), \quad (7-58)$$

$$\Delta F(x_0) = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = dF(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 F(x_0) + \frac{1}{3!} d^3 F(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n F(x_0) + r_n(x), \quad (7-59)$$

որպեսզի մնացորդային անդամը կարելի է ներկայացնել Պեանոյի կամ Լագրանժի տեսքով.

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n) = o(\Delta x^n), \quad \text{երբ} \quad x \rightarrow x_0 \quad \text{կամ} \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad (7-60)$$

$$r_n(x) = \frac{F^{(n+1)}(x_0 + \theta \Delta x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(x_0 + \theta \Delta x), \quad \text{որպեսզի} \quad 0 < \theta < 1 : \quad (7-61)$$

Ամենուրեք ենթադրվում է, որ գոյություն ունեն մեկ փոփոխականի $F(x)$ ֆունկցիայի բոլոր նշված ածանցյալները:

Այժմ անցնենք երկու անկախ փոփոխականի $f(x, y)$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևի հարցին:

Թեորեմ 7.16. *Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան $n+1 \in \mathbb{N}$ անգամ դիֆերենցելի է $M_0(x_0, y_0)$ կերպի որևէ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում (տե՛ս Սահմանում 7.20): Վերցնենք կամայական բավականաչափ փոքր աճեր՝ $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, այնպես, որ դուրս չգանք $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքից՝ $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in \mathcal{U}(M_0)$:*

Այդ դեպքում ֆունկցիայի լրիվ աճը $M_0(x_0, y_0)$ կերպում ներկայացվում է Թեյլորի n -րդ կարգի հերկյալ բանաձևով՝

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \end{aligned} \quad (7-62)$$

որպեսզի $0 < \theta < 1$, $\theta = \theta(\Delta x, \Delta y)$:

Ապացույց. Նկատենք, որ (7-62) բանաձևի մնացորդային անդամը ներկայացված է Լագրանժի տեսքով:

Ապացուցելու համար ֆիքսենք $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ աճերը (դիֆերենցիալները) և նշանակենք

$$\boxed{x = x_0 + t \Delta x}, \quad \boxed{y = y_0 + t \Delta y}, \quad \text{որպեսզի } t\text{-ն պարամետր է՝ } 0 \leq t \leq 1 :$$

Այս հավասարումներով կազմենք t պարամետրից կախված հերևյալ բարդ ֆունկցիան՝

$$\boxed{F(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}, \quad 0 \leq t \leq 1 :$$

Նկարենք, որ ծայրակետերում սրանում ենք

$$F(0) = f(x_0, y_0) = f(M_0) \quad \text{և} \quad F(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(M),$$

ըստ այդմ՝ կարող ենք գրել f ֆունկցիայի լրիվ աճը.

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0) : \quad (7-63)$$

Քանի որ, ըստ պայմանի, $f(x, y)$ ֆունկցիան $(n+1)$ անգամ դիֆերենցելի է $M_0(x_0, y_0)$ կետի $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում, ապա $F(t)$ համադրույթը նույնպես $(n+1)$ անգամ դիֆերենցելի է $t=0$ կետի շրջակայքում: Ներկաբար $F(t)$ ֆունկցիայի համար կարելի է գրել (7-59) Թեյլոր-Մաքլորենի n -րդ կարգի բանաձևը ($t=0$ կենտրոնով) Լագրանժի (7-61) մնացորդային անդամով և $t=1$, $\Delta t = dt = 1 - 0 = 1$ դեպքի համար.

$$\Delta F(t) = F(t) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!} d^2 F(0) + \frac{1}{3!} d^3 F(0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n F(0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(\theta \Delta t), \quad (7-64)$$

$$\Delta F(1) = F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!} d^2 F(0) + \frac{1}{3!} d^3 F(0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n F(0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(\theta), \quad (7-65)$$

որտեղ $0 < \theta < 1$: Նաշվենք (7-65)-ում առկա F -ի դիֆերենցիալները և արտահայտենք f -ի մասնակի ածանցյալների և դիֆերենցիալների միջոցով.

$$F(0) = f(x_0, y_0),$$

$$dF(0) = F'(0) dt = F'(0) = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y = df(x_0, y_0),$$

$$d^2 F(0) = F''(0) dt^2 = F''(0) = \frac{d}{dt} \left[f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \Delta x + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \Delta y \right]_{t=0} =$$

$$= f''_{xx}(x_0, y_0) \Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \Delta x \Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0) \Delta y^2 = d^2 f(x_0, y_0),$$

$$d^3 F(0) = F^{(3)}(0) dt^3 = F^{(3)}(0) = d^3 f(x_0, y_0),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$d^n F(0) = F^{(n)}(0) dt^n = F^{(n)}(0) = d^n f(x_0, y_0),$$

$$d^{n+1} F(\theta) = d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) :$$

Տեղադրելով այս դիֆերենցիալները և համադրելով (7-63) և (7-65) բանաձևերը՝ կստանանք պահանջվող (7-62) բանաձևը: □

Եթե Θ -երեն 7.16 -ում վերցնենք $n = 0$, ապա սրացված բանաձևը կարելի է համարել վերջավոր անդերի Լագրանժի թեորեմի տարբերակը մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի համար:

Ներկանք 7.6. (Վերջավոր անդերի Լագրանժի թեորեմը)

Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $M_0(x_0, y_0)$ կետի որևէ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում: Վերցնենք կամայական բավականաչափ փոքր անձեր՝ $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, այնպես, որ դուրս չգանք $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքից՝ $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in \mathcal{U}(M_0)$:

Այդ դեպքում ֆունկցիայի լրիվ անը $M_0(x_0, y_0)$ կետում ներկայացվում է վերջավոր անդերի Լագրանժի բանաձևով՝

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = df(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \quad (7-66)$$

կամ

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta x + f'_y(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y, \quad (7-67)$$

որտեղ $\exists \theta = \theta(\Delta x, \Delta y)$, $0 < \theta < 1$:

Առանց ապացույցի բերենք Θ -եյլորի բանաձևի մեկ այլ տարբերակ **Պեանոյի տեսքով մնացորդային անդամով**, որի համար բավական են ավելի թույլ պայմաններ:

Ներկանք 7.7. Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան n անգամ դիֆերենցելի է $M_0(x_0, y_0)$ կետի որևէ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում (տե՛ս Սահմանում 7.20): Վերցնենք կամայական բավականաչափ փոքր անձեր՝

$\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, այնպես, որ դուրս չգանք $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքից՝ $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in \mathcal{U}(M_0)$:

Այդ դեպքում $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիայի լրիվ անը $M_0(x_0, y_0)$ կետում ներկայացվում է Θ -եյլորի n -րդ կարգի հերկյալ բանաձևով՝

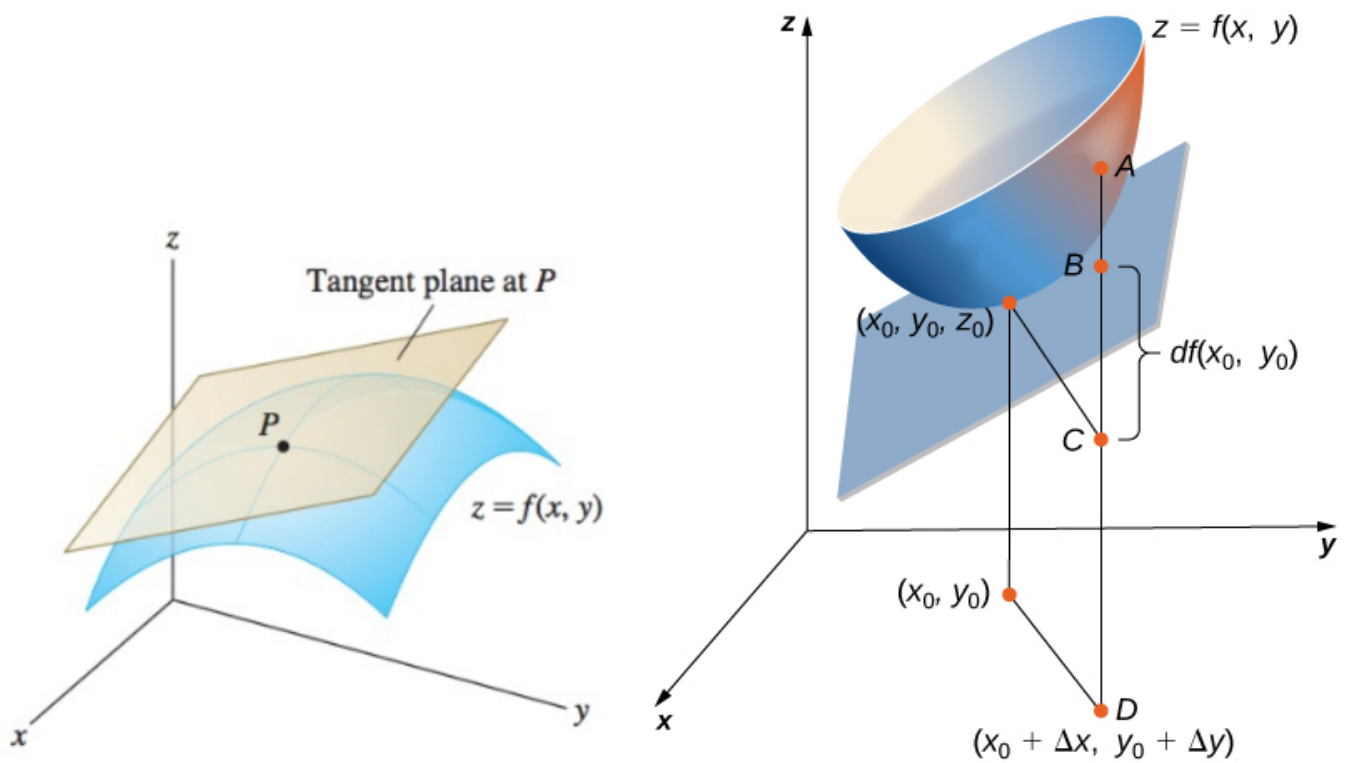
$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + o(\rho^n), \quad \text{երբ } \rho \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (7-68)$$

որտեղ նշանակված է $\rho = \rho(M, M_0) = |MM_0| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$:

Դիտողություն 7.6. Θ -եյլորի (7-62), (7-68) բանաձևում առանձնացնենք աջ կողմի առաջին գլխավոր (զծային) անդամը: Արդյունքում կստանանք $f(x, y)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին տարված շոշափող հարթության հավասարումը $M_0(x_0, y_0)$ կետում (միաչափ դեպքում ստացվում էր շոշափող ուղղի հավասարումը).

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y = df(x_0, y_0),$$

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) : \quad (7-69)$$



Պատկեր 7.17. Հոշափող հարթության պարկերներ

7.14 Անբացահայտ ֆունկցիաներ:

Մեկ հավասարումով որոշվող անբացահայտ ֆունկցիա

Քննարկենք մեկ անկախ փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանման կամ փրման փարբեր եղանակներ: Մինչ այժմ մեզ հանդիպել են միարժեք $y = f(x)$ ֆունկցիայի փրման հետևյալ եղանակները.

- 1) **բացահայտ հավասարումով՝** $y = f(x)$: Սա, թերևս, ֆունկցիայի փրման ամենափարածված եղանակն է՝ սկսած դպրոցից մեզ ծանոթ փարրական ֆունկցիաներից;
- 2) ֆունկցիան դարձյալ սահմանում են հավասարումներով, բայց **կտրոր առ կտրոր**, օրինակ,

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1, \\ f_2(x), & x \in X_2; \end{cases}$$

- 3) **պարամետրական հավասարումների** միջոցով, օրինակ,
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in T :$$

Այս եղանակով մասնավորապես սահմանում են փարբեր հարթ (նաև փարածական) կորեր;

- 4) փարբեր **նկարագրողական եղանակներով**, օրինակ, յուրաքանչյուր արգումենտին համապատասխանող արժեքն ուղղակի նշում են;
- 5) փարբեր **գրաֆիկների և գծապարկերների** միջոցով:

Ծանոթանանք ֆունկցիայի որոշման ևս մեկ՝ **անբացահայտ** եղանակի հետ: Դիցուք փրված է երկու իրական անհայտ պարունակող հավասարում.

$$\boxed{\Phi(x, y) = 0}, \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad X, Y \subset \mathbb{R} : \quad (7-70)$$

Մասնակից $\Phi(x, y)$ ֆունկցիան երկու անկախ փոփոխականի ֆունկցիա է՝ $X \times Y \subset \mathbb{R}^2$ որոշման փիրույթով:

Տրված (7-70) հավասարումը որոշակի համապատասխանություն է սահմանում x -երի և y -երի միջև, այսինքն՝ X և Y բազմությունների միջև հետևյալ կերպ: Յուրաքանչյուր $\forall x \in X$ կերի համար, ենթադրենք, գոյություն ունի մեկ կամ մի քանի $y \in Y$ արժեք այնպես, որ (x, y) գույգը բավարարի (7-70) հավասարումը: Սրացված $\boxed{x \mapsto y}$ համապատասխանությունը որոշում է x փոփոխականի ինչ-որ ֆունկցիա, որը նշանակենք f -ով՝ $y = f(x)$, $x \in X$, և որը վերածում է (7-70) հավասարումը ճիշտ նույնությամբ՝

$$\boxed{\Phi(x, f(x)) = 0}, \quad x \in X : \quad (7-71)$$

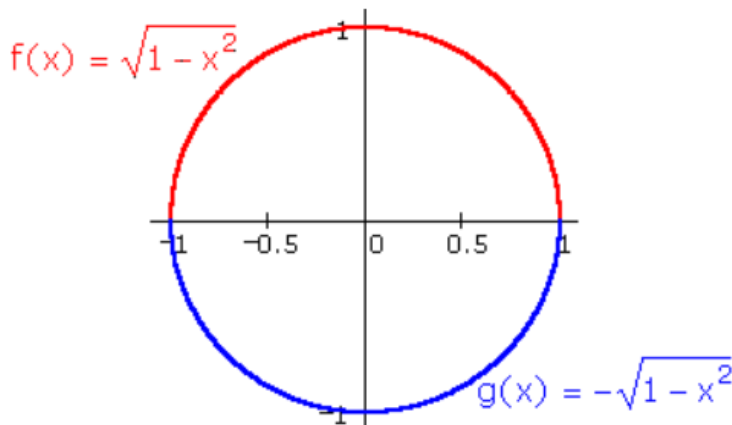
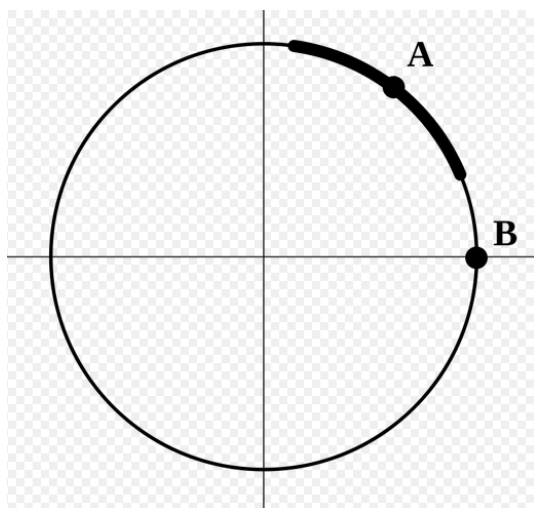
Այսպես սահմանված $y = f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **անբացահայտ**: Նկատենք, որ $y = f(x)$ անբացահայտ ֆունկցիան կարող է լինել ինչպես միարժեք, այնպես էլ բազմարժեք:

Սահմանում 7.22. $y = f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **անբացահայտ**, եթե այն տրված է y -ի նկարմանք չլուծված (7-70) $\Phi(x, y) = 0$ հավասարումով:

Օրինակ 7.10. Ներագործենք հետևյալ հավասարումը՝

$$\Phi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in [-1, 1] : \quad (7-72)$$

Հավասարումը որոշված է հարթության միավոր շրջանագծի վրա.



Գծագիր 7.18. Միավոր շրջանագիծը՝ որպես (7-72) հավասարման որոշման փրույթ

Նեշտ է տեսնել, որ $\forall x \in [-1, 1] \exists y \in [-1, 1]$ այնպիսին, որ (x, y) զույգը բավարարում է (7-72) հավասարումը: Առաջանում են անբացահայտ ֆունկցիաներ (միարժեք կամ բազմարժեք) $y = y(x)$, $x \in [-1, 1]$: Առհասարակ, հայրնի չէ, անբացահայտ ֆունկցիան բացահայտ $y = y(x)$ հավասարումով արտահայտել հնարավոր է, թե՛ ոչ: Տվյալ օրինակում, այնուամենայնիվ, հնարավոր է բացահայտ արտահայտել՝

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1] :$$

Տրված (7-72) հավասարումով որոշվում են բազմաթիվ անբացահայտ ֆունկցիաներ, իսկ եթե լրացուցիչ պայմաններ դնենք որոշման փրույթում, ապա կարելի է ստանալ միարժեք անբացահայտ ֆունկցիաներ, օրինակ,

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1],$$

$$y = g(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1],$$

$$y = h(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & x \in (0, 1], \\ -\sqrt{1 - x^2}, & x \in [-1, 0], \end{cases} \quad \text{և այլն:}$$

Այն հանգամանքը, թե անբացահայտ ֆունկցիան բացահայտ տեսքով արտահայտվում է, թե ոչ, այնքան էլ կարևոր չէ: Որպեսզի (7-72) հավասարումով որոշվող անբացահայտ ֆունկցիան միարժեք լինի, բավական է վերցնել $x^2 + y^2 = 1$ միավոր շրջանագծի այնպիսի աղեղ, որ չպարունակի $(1, 0)$, $(-1, 0)$ կետերը որպես ներքին կետեր, րեն **գծագիր 7.18**:

Եզրակացնենք, որ անբացահայտ ֆունկցիաներ հեղադրելիս առաջնային են դրանց գոյության և միարժեքության հարցերը, ինչն ապահովելուց հետո կարելի է հեղադրել անընդհատության, դիֆերենցելիության և այլ հատկություններ:

Թեորեմ 7.17. (Անբացահայտ ֆունկցիայի գոյությունը, միարժեքությունը և անընդհատությունը)

Դիցուք 1) $x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$, $y \in [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]$, $\delta_0, \Delta > 0$, միջակայքերից կազմված է $M_0(x_0, y_0)$ կերի փակ ուղղանկյունաձև շրջակայք.

$$\mathcal{U}(x_0, y_0) = [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \times [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta],$$

2) $\Phi(x, y) \in C(\mathcal{U}(x_0, y_0))$, անընդհատ է որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա,

3) $\Phi(x_0, y_0) = 0$,

4) $\forall x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$ համար $\Phi(x, y) \nearrow$ խիստ ըստ y -ի:

Այդ դեպքում գոյություն ունի ենթաշրջակայք՝

$$\exists D(x_0, y_0) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon], \quad D(x_0, y_0) \subset \mathcal{U}(x_0, y_0),$$

այնպիսին, որ $\Phi(x, y) = 0$ հավասարումը $D(x_0, y_0)$ շրջակայքում որոշում է $y = f(x)$ միարժեք անբացահայտ ֆունկցիա՝

$$\Phi(x, y) = 0 \iff y = f(x) \quad D(x_0, y_0)\text{-ում} \quad s.t. \quad \begin{array}{l} u) \quad f(x_0) = y_0, \\ p) \quad f(x) \in C(x_0 - \delta, x_0 + \delta): \end{array}$$

Թեորեմ 7.18. (Անբացահայտ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը)

Դիցուք $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ շրջակայքում որոշված է $\Phi(x, y)$ ֆունկցիան այնպիսին, որ

1) $\Phi(x, y) \in C^1(\mathcal{U}(x_0, y_0))$,

2) $\Phi(x_0, y_0) = 0$,

3) $\Phi'_y(x_0, y_0) \neq 0$:

Այդ դեպքում գոյություն ունի ուղղանկյունաձև ենթաշրջակայք՝

$$\exists D(x_0, y_0) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon], \quad D(x_0, y_0) \subset \mathcal{U}(x_0, y_0),$$

այնպիսին, որ $\Phi(x, y) = 0$ հավասարումը $D(x_0, y_0)$ շրջակայքում որոշում է $y = f(x)$ միարժեք անբացահայտ ֆունկցիա.

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x) \quad D(x_0, y_0)\text{-ում} \quad \text{s.t.} \quad \begin{array}{l} \text{ա)} \quad f(x_0) = y_0, \\ \text{բ)} \quad f(x) \in C^1(x_0 - \delta, x_0 + \delta), \end{array}$$

և

$$\boxed{f'(x) = -\frac{\Phi'_x(x, f(x))}{\Phi'_y(x, f(x))}}, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \quad (7-73)$$

Դիպողություն 7.7. Եթե Թեորեմ 7.18-ում $\Phi(x, y)$ ֆունկցիայի ողորկության պայմանը ուժեղացնենք և պահանջենք $\Phi(x, y) \in C^2(\mathcal{U}(x_0, y_0))$, ապա ավելի ուժեղ պնդում կստանանք. $f(x) \in C^2(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ և f -ի 2-րդ ածանցյալը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$\boxed{f''(x) = -\frac{[\Phi''_{xx} + \Phi''_{xy} f'(x)] \Phi'_y - \Phi'_x [\Phi''_{xy} + \Phi''_{yy} f'(x)]}{[\Phi'_y(x, f(x))]^2}}, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \quad (7-74)$$

Նամստարաստիսանքար, եթե պահանջենք $\Phi(x, y) \in C^m(\mathcal{U}(x_0, y_0))$, $m \in \mathbb{N}$, պայմանը, ապա կստանանք $f(x) \in C^m(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

Դիպողություն 7.8. Թեորեմ 7.18-ի պայմաններում $f(x)$ անբացահայտ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի հավասարումը կազմենք $M_0(x_0, y_0)$ կերպով:

Գրենք շոշափողի հայրնի հավասարումը, որտեղ մասնակցող f' ածանցյալը կարտահայտվի (7-73) բանաձևով.

$$\begin{aligned} y &= y_0 + f'(x_0)(x - x_0), \\ y &= y_0 - \frac{\Phi'_x(x, f(x))}{\Phi'_y(x, f(x))}(x - x_0), \\ \Phi'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \Phi'_y(x_0, y_0)(y - y_0) &= 0, \end{aligned}$$

շոշափողի կանոնական հավասարումն է, կամ ավելի կարճ՝ $\boxed{d\Phi(x_0, y_0) = 0}$:

Օրինակ 7.11. Գրենք

$$\Phi(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 1 = 0 \quad (7-75)$$

հավասարումով որոշվող $y = f(x)$ անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Լ-ին եղանակ. Նամստայն (7-73) բանաձևի՝

$$f'(x) = -\frac{\Phi'_x(x, y)}{\Phi'_y(x, y)} = -\frac{2x + 2y}{2x - 2y} = \frac{y + x}{y - x} :$$

2-րդ եղանակ. Նույնը կարելի է ստանալ՝ անմիջականորեն ածանցելով (7-75) հավասարումն ըստ x -ի, համարելով, որ $y = y(x) = f(x)$.

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y(x)) = (x^2 + 2xy - y^2 + 1)'_x = 0,$$

$$2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0,$$

$$x + y + y'(x - y) = 0,$$

$$y' = \frac{y + x}{y - x} :$$

Φ ֆունկցիան, որով որոշվում է անբացահայտ ֆունկցիան, կարող է կախված լինել ավելի շատ թվով փոփոխականից: Թեորեմներ 7.17-ը և 7.18-ը տեղի ունեն նաև այդ դեպքում:

Թեորեմ 7.19. (Անբացահայտ ֆունկցիայի գոյությունը, անընդհարությունը և դիֆերենցելիությունը)

Դիցուք $M_0(x^0, y^0) = M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y^0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ կերի $\mathcal{U}(M_0) = \mathcal{U}(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ շրջակայքում որոշված է $\Phi(x, y) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$, $\Phi: \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$ ֆունկցիան այնպիսին, որ

$$1) \quad \Phi(x, y) \in C(\mathcal{U}(x_0, y_0)),$$

$$2) \quad \Phi(M_0) = \Phi(x_0, y_0) = \Phi(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y^0) = 0,$$

$$3) \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ կերերի համար } \mathcal{U}(M_0) \text{ շրջակայքից } \Phi(x, y) \nearrow \text{ խիստ ըստ } y\text{-ի} :$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի $D(x_0, y_0) = D_x \times D_y$ ենթաշրջակայք (ուղղանկյունանիստ) այնպիսին, որ $\Phi(x, y) = 0$ հավասարումը $D(x_0, y_0)$ շրջակայքում որոշում է $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ միարժեք անբացահայտ ֆունկցիա.

$$\Phi(x, y) = 0 \iff y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad D(x_0, y_0)\text{-ում} \quad s.t.$$

$$u) \quad f(x_0) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = y_0,$$

$$p) \quad f(x) \in C(x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

$$q) \quad f(x) \in C(D_x) \text{ ըստ } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ համախմբի:}$$

Եթե լրացուցիչ հայրենի է, որ $\Phi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ և $\Phi(x, y) \in C^1(\mathcal{U}(x_0, y_0))$ (ողորկ է), ապա $f(x)$ ֆունկցիան նույնպես ողորկ է՝ $f(x) \in C^1(D_x)$, որի մասնակի ածանցյալները կարելի է գրել հետևյալ բանաձևերով՝

$$\boxed{f'_{x_i}(x) = -\frac{\Phi'_{x_i}(x, f(x))}{\Phi'_y(x, f(x))}}, \quad x \in D_x, \quad i = \overline{1, n} : \quad (7-76)$$

Նշենք, որ անբացահայտ ֆունկցիաները կարող են սահմանվել ոչ թե մեկ հավասարումով, այլ կամայական թվով հավասարումների համակարգով, որից կարող է ստացվել նույն բանակով անբացահայտ ֆունկցիաներ:

7.15 Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների լոկալ էքստրեմումներ:

Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը

Ֆունկցիայի էքստրեմումների որոնումն ու հայտնաբերումը ֆունկցիաների հեղադրման կարևորագույն տարրերից է: Մեծամասամբ քննարկելու ենք երկու անկախ փոփոխականից կախված $z = f(x, y)$ ֆունկցիաներ՝ երբեմն ավելի շատ փոփոխականից կախված: Շատ փոփոխականից կախված ֆունկցիաների մեջ երկու փոփոխականի $z = f(x, y)$ ֆունկցիաները պարզագույն և միակ դեպքն են, երբ գրաֆիկների միջոցով կարելի է տեսանելի դարձնել և՛ ֆունկցիան, և՛ նրա էքստրեմումի կետերը, և՛ էքստրեմումները:

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է որևէ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ հարթ բազմության մեջ, և $M_0(x_0, y_0)$ -ն այդ բազմության ներքին կետ է:

Սահմանում 7.23. $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետը կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մաքսիմումի կետ**, եթե գոյություն ունի $M_0(x_0, y_0)$ կետի որևէ $\mathcal{U}(M_0) \subset \Omega$ շրջակայք, որտեղ $f(x, y)$ ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը $M_0(x_0, y_0)$ կետում, այսինքն՝

$$\exists \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad \text{s.t.} \quad f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall M(x, y) \in \mathcal{U}(M_0) : \quad (7-77)$$

Իսկ $z_0 = f(x_0, y_0)$ արժեքը կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մաքսիմումի արժեք** կամ պարզապես **մաքսիմում**: Կգրենք $M_{\max} = M_0$ և $f_{\max} = z_0$ կամ $z_{\max} = z_0$:

Նմանապես սահմանում են ֆունկցիայի մինիմումի կետը և մինիմումը:

Սահմանում 7.24. $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետը կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մինիմումի կետ**, եթե գոյություն ունի $M_0(x_0, y_0)$ կետի որևէ $\mathcal{U}(M_0) \subset \Omega$ շրջակայք, որտեղ $f(x, y)$ ֆունկցիան ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը $M_0(x_0, y_0)$ կետում, այսինքն՝

$$\exists \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad \text{s.t.} \quad f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall M(x, y) \in \mathcal{U}(M_0) : \quad (7-78)$$

Իսկ $z_0 = f(x_0, y_0)$ արժեքը կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մինիմումի արժեք** կամ պարզապես **մինիմում**: Կգրենք $M_{\min} = M_0$ և $f_{\min} = z_0$ կամ $z_{\min} = z_0$:

Կասենք նաև, որ $M_0(x_0, y_0)$ կետում $f(x, y)$ ֆունկցիան **խիստ մաքսիմում** կամ **խիստ մինիմում** ունի, եթե (7-77) և (7-78) պայմանների մեջ անհավասարության ոչ խիստ նշանները փոխարինենք խիստ նշաններով, այսինքն՝

$$\exists \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad \text{s.t.} \quad f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad \forall M(x, y) \in \mathcal{U}(M_0), M \neq M_0, \quad (7-79)$$

կամ համապարասխանաբար՝

$$\exists \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad s.t. \quad f(x_0, y_0) < f(x, y) \quad \forall M(x, y) \in \mathcal{U}(M_0), \quad M \neq M_0 : \quad (7-80)$$

Լոկալ մաքսիմումի և մինիմումի կետերը անվանում են **(լոկալ) էքստրեմումի կետեր**, իսկ (լոկալ) մաքսիմումները և մինիմումները՝ **(լոկալ) էքստրեմումներ**:

Դիպոդություն 7.9. Բերված սահմանումներում նշված անհավասարությունները կարելի է արտահայտել ֆունկցիայի աճման տերմիններով: Նշանակելով $M_0(x_0, y_0)$ կետում ֆունկցիայի (լոկալ) աճը՝

$$\Delta f(M_0) \stackrel{def}{=} f(M) - f(M_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0), \quad M(x, y) \in \mathcal{U}(M_0),$$

կարելի է (7-77), (7-78), (7-79), (7-80) պայմանների մեջ անհավասարությունները համապարասխանորեն փոխարինել համարժեք անհավասարություններով.

$$\Delta f(M_0) \leq 0, \quad \Delta f(M_0) \geq 0, \quad \Delta f(M_0) < 0, \quad \Delta f(M_0) > 0 :$$

Դիպոդություն 7.10. Ֆունկցիայի (լոկալ) մաքսիմումի և մինիմումի արժեքները, որոնք նշանակվում են $f_{\max}, f_{\min}$ կամ $z_{\max}, z_{\min}$, չպետք է շփոթել տվյալ բազմության մեջ ֆունկցիայի $\max f$ **մեծագույն** և $\min f$ **փոքրագույն արժեքների** հետ:

Բերենք լոկալ էքստրեմումների պարզ օրինակներ:

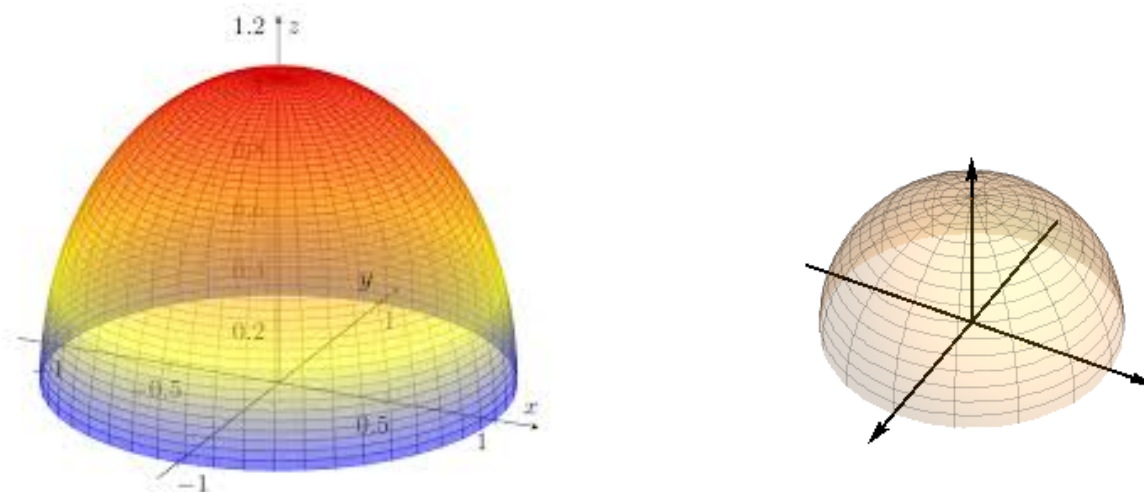
Օրինակ 7.12. Դիտարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{def}{=} \sqrt{1 - x^2 - y^2} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R},$$

ֆունկցիան: Նեշտ է տեսնել, որ f -ի որոշման տիրույթը $\mathbb{D} \stackrel{def}{=} \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ միավոր փակ շրջանն է, իսկ արժեքների տիրույթը $[0, 1]$ փակ հատվածն է.

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} : \mathbb{D} \mapsto [0, 1] :$$

Քանի որ ֆունկցիայի բանաձևը կարելի է արտագրել $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$, տեսքով, եզրակացնում ենք, որ f ֆունկցիայի գրաֆիկը կիսասփերա է (վերին միավոր կիսասփերա), տես **գծագիր 7.19**: Ակնհայտ է, որ f ֆունկցիան միայն մեկ լոկալ էքստրեմումի կետ ունի՝ իսկալ մաքսիմումի կետ $M_{\max} = (0, 0)$, և մաքսիմումի արժեքն է $f_{\max} = 1$:

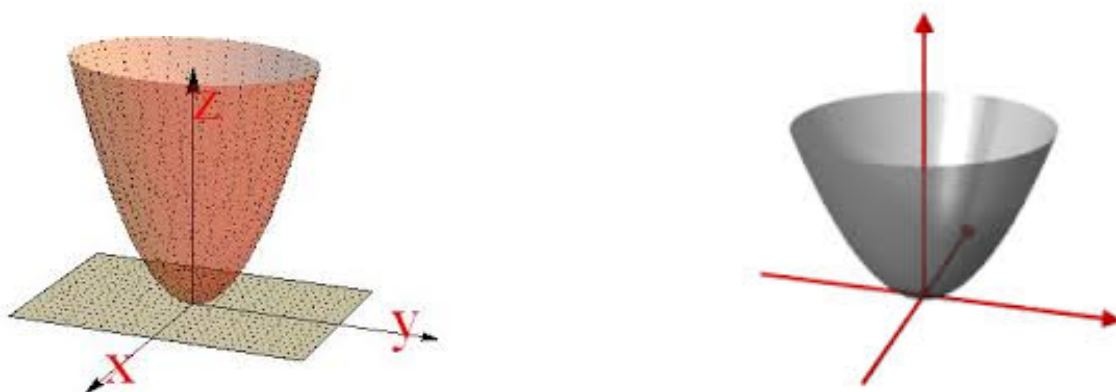


Գծագիր 7.19. Վերին կիսասփերան որպես ֆունկցիայի գրաֆիկ

Օրինակ 7.13. Դիտարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}_+$$

Ֆունկցիան: Տեսչոր է տեսանել, որ f -ի որոշման տիրույթը ամբողջ $\mathbb{R}^2$ հարթությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ դրական կիսաառանցքը: Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը ներկայացնում է էլիպտիկական սարաբոլորի $(0, 0)$ գագաթով, տեսն **գծագիր 7.20:** Ակնհայտ է, որ f ֆունկցիան միայն մեկ լոկալ էքստրեմումի կետ ունի՝ խիստ մինիմումի կետ $M_{\min} = (0, 0)$, և մինիմումի արժեքն է $f_{\min} = 0$:



Գծագիր 7.20. Պարաբոլիդը որպես ֆունկցիայի գրաֆիկ

Թեորեմ 7.20. (Ֆերմայի թեորեմը, լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Եթե $M_0(x_0, y_0)$ կետում գոյություն ունեն f ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները՝ $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \equiv f'_x(x_0, y_0)$ և $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \equiv f'_y(x_0, y_0)$, ապա դրանք հավասար են զրոյի՝

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0} : \quad (7-81)$$

Ապացույց. Ֆիքսենք $y = y_0$ և դիտարկենք մեկ փոփոխականի $f(x, y_0)$ ֆունկցիան: Քանի որ գոյություն ունի $f(x, y_0)$ ֆունկցիայի ածանցյալը (ըստ x -ի), ապա մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար, Ֆերմայի թեորեմի համաձայն, $f'_x(x_0, y_0) = 0$:

Ֆիքսելով $x = x_0$ և դիտարկելով $f(x_0, y)$ ֆունկցիան՝ կրկնում ենք դադարողությունները և ստանում $f'_y(x_0, y_0) = 0$: □

Մասնակի ածանցյալներով (7-81) պայմանը կարելի է արտագրել մեկ այլ համարժեք տեսքով՝

$$\boxed{\nabla f(M_0) \equiv \text{grad } f(M_0) = \vec{0}},$$

օգտագործելով M_0 կետում ֆունկցիայի գրադիենտը, որը մասնակի ածանցյալներով կազմված վեկտոր է՝

$$\boxed{\nabla f(M_0) \equiv \text{grad } f(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \right\}} :$$

Նիշելով ֆունկցիայի (լրիվ) դիֆերենցիալի տեսքը $M_0(x_0, y_0)$ կետում՝

$$\boxed{df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) dy},$$

կարելի է Ֆերմայի թեորեմին մի փոքր այլ ձևակերպում փալ:

Թեորեմ 7.21. (Ֆերմայի թեորեմը, լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետում դիֆերենցելի է և լոկալ էքստրեմում ունի: Այդ դեպքում $M_0(x_0, y_0)$ կետում f -ի դիֆերենցիալը նույնաբար զրո է $\boxed{df(M_0) \equiv 0}$, այսինքն՝

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) dy = 0$$

dx և dy աճերի (դիֆերենցիալների) ցանկացած ընտրության դեպքում:

Սահմանում 7.25. Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$: Եթե M_0 կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի՝

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0 \right],$$

այս $M_0(x_0, y_0)$ կետը կոչվում է f **ֆունկցիայի սրագիծնար կետ**:

Նաշվի առնելով այս սահմանումը՝ կարելի է վերաձևակերպել Ֆերմայի թեորեմը սրագիծնար կետի տերմիններով:

$$\left(M_0\text{-ն } f\text{-ի էքստրեմումի կետ է} \right) \implies \left(M_0\text{-ն } f\text{-ի սրագիծնար կետ է} \right) \quad (7-82)$$

Երկրաչափորեն սրագիծնար կետի փաստը նշանակում է, որ $M_0(x_0, y_0)$ տվյալ սրագիծնար կետում $f(x, y)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի մակերևույթին կարելի է փանել շոշափող հարթություն, որը զուգահեռ է Oxy հարթությանը կամ համընկնում է նրա հետ: Իսկապես, շոշափող հարթության հավասարումն է

$$z = f(M_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0),$$

որը սրագիծնար կետի համար պարզունակ տեսք է ընդունում՝

$$z = f(M_0) \quad \text{կամ} \quad z = z_0 :$$

Սահմանում 7.26. Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$: $M_0(x_0, y_0)$ կետը կանվանենք f **ֆունկցիայի կրիտիկական կետ**, եթե M_0 կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի կամ գոյություն չունեն:

Ուրեմն՝ սրագիծնար կետերը կրիտիկական կետերի մի մասն են:

Թեորեմ 7.22. (Ըոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Այդ դեպքում M_0 -ն f ֆունկցիայի կրիտիկական կետ է.

Այլ կերպ ասած, լոկալ էքստրեմումի կետը միշտ կրիտիկական է,

$$\left(M_0\text{-ն } f\text{-ի էքստրեմումի կետ է} \right) \implies \left(M_0\text{-ն } f\text{-ի կրիտիկական կետ է} \right) : \quad (7-83)$$

Նաշվի առնելով, որ կրիտիկական և մասնավորապես սրագիծնար կետերը փախն են լոկալ էքստրեմումի միայն անհրաժեշտ պայմանը, կրիտիկական կետերը անվանում են նաև տվյալ ֆունկցիայի **էքստրեմումի հնարավոր կետեր**: Սրացված (7-82), (7-83) պնդումներից եզրակացնում ենք, որ

f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետերը որոնելիս, նախ պետք է գտնել

f ֆունկցիայի ստացիոնար և բոլոր կրիտիկական կետերը:

Այնուամենայնիվ, Թեորեմ 7.22-ում մենք ունենք լոկալ էքստրեմումի **միայն** անհրաժեշտ պայմանը, այսինքն՝ (7-82), (7-83) պնդումների հակադարձ պնդումները սխալ են: Իսկապես, ցույց տանք, որ գոյություն ունեն ստացիոնար և կրիտիկական կետեր, որոնք էքստրեմումի կետեր չեն:

Օրինակ 7.14. *Դիտարկենք*

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} xy : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R},$$

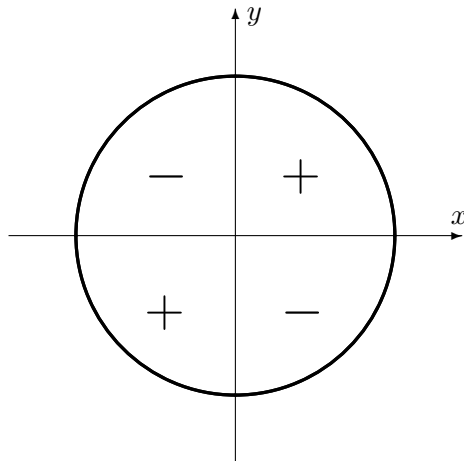
ֆունկցիան: Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը ներկայացնում է հիպերբոլական պարաբոլոիդ: Նեշտ է տեսնել, որ $(0, 0)$ կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = y \Big|_{(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = x \Big|_{(0,0)} = 0,$$

և ուրեմն՝ $(0, 0)$ կետը f ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է:

Սակայն $(0, 0)$ սկզբնակետը f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ, որովհետև $(0, 0)$ կետի ցանկացած շրջակայքում f ֆունկցիան ընդունում է ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական արժեքներ.

$$f(0, 0) = 0, \quad \begin{aligned} f(x, y) &> 0, & \text{ երբ } x, y > 0, & \text{ կամ } x, y < 0, \\ f(x, y) &< 0, & \text{ երբ } x > 0, y < 0, & \text{ կամ } x < 0, y > 0 : \end{aligned}$$

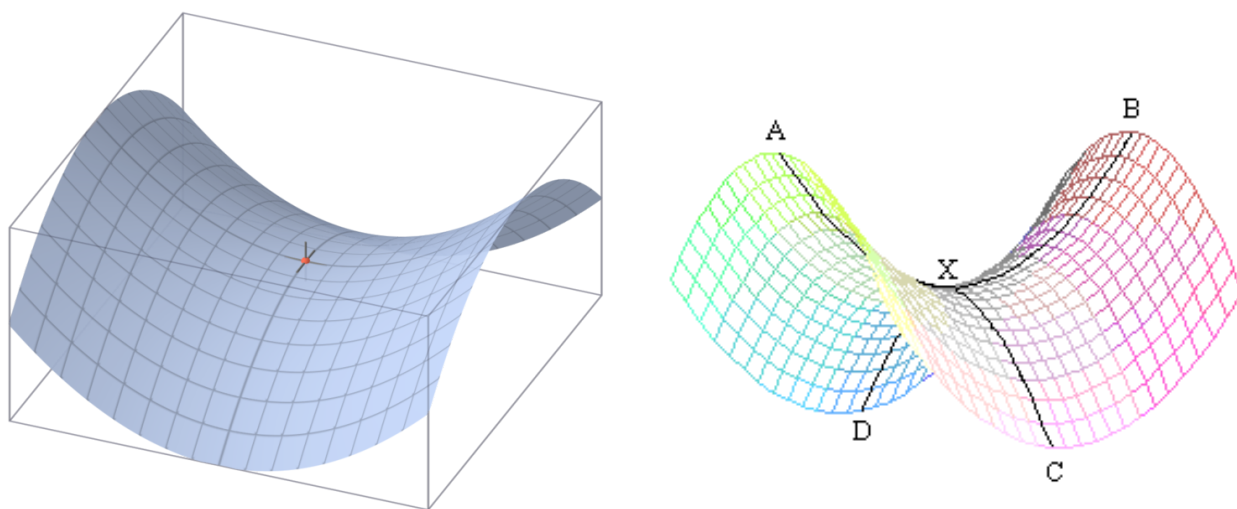


Գծագիր 7.21. **Ստացիոնար կետի շրջակայքում ֆունկցիայի նշանները**

Գծագիր 7.21-ում պատկերված է f ֆունկցիայի որոշման տիրույթում $(0, 0)$ ստացիոնար կետի կանայական շրջակայք, որտեղ f ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշանների արժեքներ: Եթե մենք դիտարկենք ֆունկցիայի գրաֆիկ հանդիսացող մակերևույթը (տես **գծագիր 7.22**), ապա կարող ենք նկատել, որ $(0, 0)$ ստացիոնար կետի շրջակայքում այդ մակերևույթը հիշեցնում է թամբ կամ լեռնանցք՝

մի ուղղությամբ «սճող», իսկ մեկ այլ ուղղությամբ՝ «նվազող»: Նման դեպքում սրացիոնար կետն անվանում են **թամբակետ**: Թամբակետը, որոշակի իմաստով, մեկ փոփոխականի $g(t) = t^3$ ֆունկցիայի $t = 0$ սրացիոնար կետի նմանակն է շար փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում: Գրաֆիկի մակերևույթի տեսքից արդեն կարելի է հասկանալ, թե ինչու տվյալ սրացիոնար կետն էքստրեմումի կետ չէ:

Սահմանում 7.27. Ֆունկցիայի **թամբակետ** է կոչվում այդ ֆունկցիայի այն սրացիոնար կետը, որն էքստրեմումի կետ չէ:



Գծագիր 7.22. $f(x, y) = xy$ ֆունկցիայի գրաֆիկը թամբակետի շրջակայքում

7.16 Լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Այժմ անցնենք լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանների ձևակերպումներին: Ինչպես տեսանք նախորդ բաժնի օրինակներում, անհրաժեշտ պայմանը բավարարող կետերը կարող են ֆունկցիայի էքստրեմումի կետեր չլինել (այդպես է նաև ավելի պարզ մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար): Ուրեմն՝ մեզ պետք են հայտանիշներ՝ լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմաններով: Ստորև կբերենք մի քանի այդպիսի հայտանիշներ (թեորեմներ), որոնցում միշտ կենթադրենք, որ դիֆարկվող կետը ստացիոնար է, այսինքն՝ M_0 կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի՝

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0,$$

կամ f -ի առաջին կարգի դիֆերենցիալն է զրոյական՝

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) dy \equiv 0, \quad \forall dx, dy :$$

Դրանից հետո էքստրեմումի կետ լինելու կամ չլինելու համար վճռական նշանակություն կունենա M_0 կետում f ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի նշանը: Ընդունենք, որ դիֆարկվող ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ ֆունկցիա է M_0 կետի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում, այսինքն՝ $f(x, y) \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$, և դիֆարկենք f -ի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը M_0 կետում՝

$$\begin{aligned} d^2 f(M_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(M_0) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) dy^2 = \\ &= f''_{xx}(x_0, y_0) dx^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0) dx dy + f''_{yy}(x_0, y_0) dy^2 \end{aligned} \quad (7-84)$$

անկախ փոփոխականների dx և dy դիֆերենցիալների կամայական և բավականաչափ փոքր արժեքների համար: Այսպես պետք է չմոռանալ, որ (7-84) և նմանօրինակ այլ դիֆերենցիալ բանաձևերում dx^2 և dy^2 արտահայտությունները ոչ թե x^2 կամ y^2 ֆունկցիաների դիֆերենցիալներ են, այլ dx և dy դիֆերենցիալների քառակուսիներ: Նույն դիֆարկումը վերաբերում է նաև անկախ փոփոխականների աճերին՝

$$\boxed{dx^2 = (dx)^2, \quad dy^2 = (dy)^2}, \quad \boxed{\Delta x^2 = (\Delta x)^2, \quad \Delta y^2 = (\Delta y)^2} :$$

Սա ընդունված գրելաձև է : Նույնը վերաբերում է ավելի բարձր աստիճաններին:

Թեորեմ 7.23. (Էքստրեմումի բավարար պայմանը)

Դիցուք $M_0(x_0, y_0)$ կետի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում $f(x, y) \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$, և M_0 կետը $f(x, y)$ ֆունկցիայի սրագիծնար կետ է, այսինքն՝ $df(M_0) \equiv 0$:

- 1) Եթե $d^2 f(M_0) > 0 \quad \forall dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0$, ապա $M_0(x_0, y_0)$ կետը f ֆունկցիայի (լիսար) լոկալ մինիմումի կետ է՝ $M_0 = M_{\min}$:
- 2) Եթե $d^2 f(M_0) < 0 \quad \forall dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0$, ապա $M_0(x_0, y_0)$ կետը f ֆունկցիայի (լիսար) լոկալ մաքսիմումի կետ է՝ $M_0 = M_{\max}$:
- 3) Եթե $d^2 f(M_0)$ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը նշանափոխ է (ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ), երբ $dx^2 + dy^2 \neq 0$, ապա $M_0(x_0, y_0)$ կետը f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ չէ :
- 4) Եթե $d^2 f(M_0) \geq 0$ կամ $d^2 f(M_0) \leq 0 \quad \forall dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0$, ապա սրույզ ոչինչ ասել չենք կարող. $M_0(x_0, y_0)$ կետը կարող է ինչպես f -ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կախահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):

Ապացույց. Բավական է պարզել $M_0(x_0, y_0)$ սրագիծնար կետում ֆունկցիայի

$$\Delta f(M_0) \stackrel{def}{=} f(M) - f(M_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0), \quad M(x, y) \in \mathcal{U}(M_0),$$

լրիվ աճի նշանը, ինչպես արդեն նկատել էինք Դիփոդոլոթյուն 7.9-ում:

$$\text{Եթե բավականաչափ փոքր բոլոր } \Delta x \text{ և } \Delta y \text{ աճերի համար} \quad \begin{cases} \Delta f(M_0) > 0, & \text{ապա } M_0 = M_{\min} \quad (\text{լիսար}), \\ \Delta f(M_0) < 0, & \text{ապա } M_0 = M_{\max} \quad (\text{լիսար}): \end{cases}$$

Այսպիսով, ֆունկցիայի լրիվ աճի նշանը պարզելու համար գրենք ֆունկցիայի Թեյլորի 2-րդ կարգի բանաձևը M_0 կետում և Պեանոյի մնացորդային անդամով՝

$$\begin{aligned} \Delta f(M_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + o(\rho^2) = \\ &= \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) + o(\rho^2), \quad \text{երբ } \rho \rightarrow 0, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} : \end{aligned}$$

Մեզ մնում է ցույց տալ, որ $\Delta f(M_0)$ լրիվ աճի և $d^2 f(x_0, y_0)$ 2-րդ դիֆերենցիալի նշանները նույնն են բավականաչափ փոքր բոլոր Δx և Δy աճերի համար: Այլ կերպ ասած՝ մնացորդային $o(\rho^2)$ անդամը նշանի հարցում կարելի է անտեսել: Իսկապես, 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը գրենք բացված տեսքով և ձևափոխենք.

$$\begin{aligned} \Delta f(M_0) &= \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) + o(\rho^2) = \frac{\rho^2}{2} \left[\frac{d^2 f(x_0, y_0)}{\rho^2} + o(1) \right] = \\ &= \frac{\rho^2}{2} \left[f''_{xx}(x_0, y_0) \frac{\Delta x^2}{\rho^2} + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \frac{\Delta x \Delta y}{\rho^2} + f''_{yy}(x_0, y_0) \frac{\Delta y^2}{\rho^2} + o(1) \right] : \end{aligned} \quad (7-85)$$

Նշանակենք $t_1 \stackrel{def}{=} \frac{\Delta x}{\rho}$, $t_2 \stackrel{def}{=} \frac{\Delta y}{\rho}$ և նկատենք, որ $t_1^2 + t_2^2 = \frac{\Delta x^2}{\rho^2} + \frac{\Delta y^2}{\rho^2} = 1$:

Սահմանենք t_1 և t_2 -ից կախված քառակուսային եռանդամ.

$$Q(t_1, t_2) \stackrel{def}{=} f''_{xx}(x_0, y_0) t_1^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) t_1 t_2 + f''_{yy}(x_0, y_0) t_2^2 = \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{\rho^2},$$

որը որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա (t_1, t_2) հարթության մեջ կոնիկայի $t_1^2 + t_2^2 = 1$ միավոր շրջանագծի վրա: Ֆունկցիայի (7-85) լոկալ աճը կարգավորվի $Q(t_1, t_2)$ քառակուսային եռանդամի միջոցով.

$$\Delta f(M_0) = \frac{\rho^2}{2} [Q(t_1, t_2) + o(1)], \quad t_1^2 + t_2^2 = 1, \quad \rho \rightarrow 0 : \quad (7-86)$$

1) Քննարկենք թեորեմի $d^2 f(M_0) > 0$ դեպքը, ինչը նշանակում է, որ $Q(t_1, t_2) > 0$ միավոր շրջանագծի վրա: Քանի որ (t_1, t_2) հարթության մեջ $t_1^2 + t_2^2 = 1$ միավոր շրջանագծի վրա կոմպակտ է (փակ և սահմանափակ), ապա Վայերշտրասի 2-րդ թեորեմի համաձայն՝ $Q(t_1, t_2)$ քառակուսային եռանդամը հասնում է մասնավորապես իր ինֆիմումին, որը վերածվում է (դրական) մինիմումի.

$$\exists \inf_{t_1^2+t_2^2=1} Q(t_1, t_2) = \min_{t_1^2+t_2^2=1} Q(t_1, t_2) \stackrel{\text{նշ.}}{=} Q_0 > 0 \implies Q(t_1, t_2) \geq Q_0 > 0 :$$

Վերցնելով ρ -ն կամ Δx , Δy -ը բավականաչափ փոքր, որպեսզի մնացորդը (7-86)-ում մոռույով մնա փոքր Q_0 -ից, հասնում ենք այն բանին, որ մնացորդը (7-86)-ում չի ազդում նշանի վրա.

$$Q(t_1, t_2) > 0 \implies Q(t_1, t_2) + o(1) > 0 \implies \Delta f(M_0) > 0 \implies M_0 = M_{\min} :$$

2) Նույն դարձությունները թեորեմի $d^2 f(M_0) < 0$ դեպքում բերում են

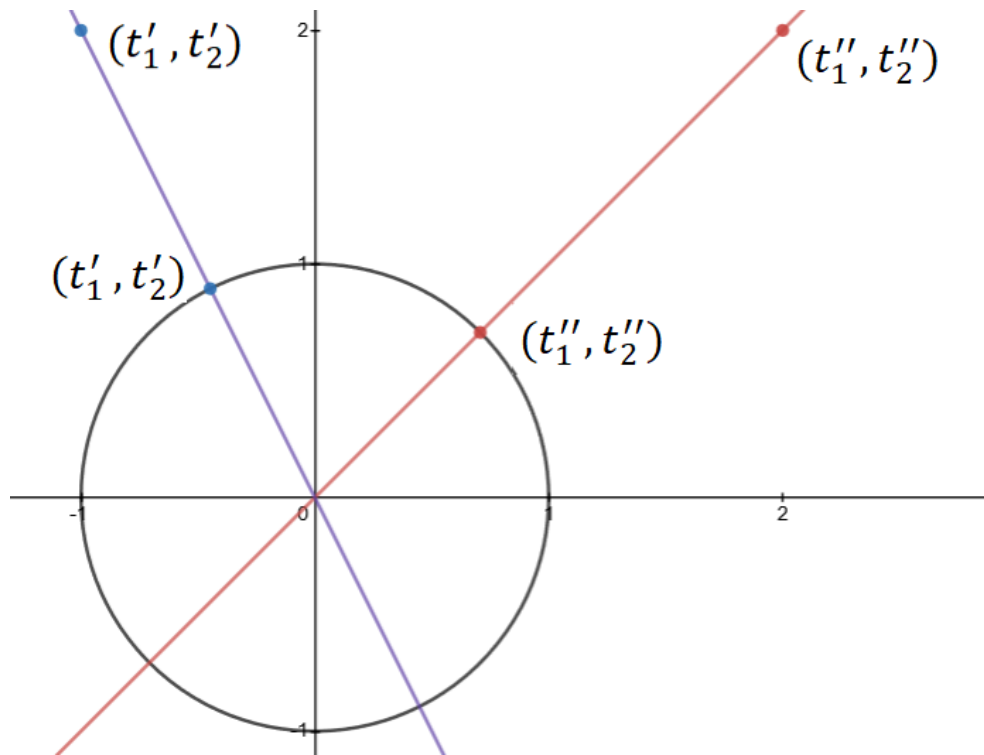
$$Q(t_1, t_2) < 0 \implies Q(t_1, t_2) + o(1) < 0 \implies \Delta f(M_0) < 0 \implies M_0 = M_{\max} :$$

3) Եթե $d^2 f(M_0)$ դիֆերենցիալը նշանափոխ է, այսինքն՝ ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ, ապա

$$\exists (t'_1, t'_2), (t''_1, t''_2), \quad s.t. \quad Q(t'_1, t'_2) < 0 < Q(t''_1, t''_2) : \quad (7-87)$$

Նկատենք, որ $Q(\lambda t_1, \lambda t_2) = \lambda^2 Q(t_1, t_2)$, $\lambda \neq 0$, (2-րդ աստիճանի) համասեռության պայմանը, մասնավորապես, նշանակում է, որ $Q(t_1, t_2)$ քառակուսային եռանդամը պահպանում է իր նշանը $(0, 0)$ և (t_1, t_2) կետերը միացնող ուղղի վրա: Ներկայացրելով (7-87) պայմանում առկա կետերը կարելի է վերցնել միավոր շրջանագծի վրա.

$$\exists (t'_1, t'_2), (t''_1, t''_2), \quad (t'_1)^2 + (t'_2)^2 = 1, \quad (t''_1)^2 + (t''_2)^2 = 1, \quad s.t. \quad Q(t'_1, t'_2) < 0 < Q(t''_1, t''_2) : \quad (7-88)$$



Գծագիր 7.23. $Q(t_1, t_2)$ քառակուսային եռանդամի որոշման փիրույթը միավոր շրջանագծի շուրջը

Երբ (t_1, t_2) կետը գտնվում է միավոր շրջանագծի վրա, մենք կարող ենք վերցնել ρ -ն կամ $\Delta x, \Delta y$ -ը որքան կամենանք փոքր, որպեսզի մնացորդը (7-86)-ում մոդուլով մնա փոքր Q_0 -ից : Դրանով մնացորդը (7-86)-ում չի կարող ազդել գումարի նշանի վրա: Ուրեմն $M_0(x_0, y_0)$ սրացիոնար կետի ցանկացած շրջակայքում գոյություն ունեն $M(x, y)$ կետեր, որոնց համար $\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ րիվ աճը սրացվում է ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական. $\Delta f(M_0) > 0$ և $\Delta f(M_0) < 0$: Այսպիսով, $M_0(x_0, y_0)$ սրացիոնար կետն էքստրեմումի կետ չէ (թամբակետ է):

4) Եթե $d^2 f(M_0) \geq 0$ կամ $d^2 f(M_0) \leq 0 \quad \forall dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0$, ապա ցույց տանք, որ $M_0(x_0, y_0)$ կետը կարող է ինչպես f -ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել: Բավական է բերել այդպիսի երկու օրինակ՝ $f_1(x, y) = x^4 + y^4$, $f_2(x, y) = x^3 + y^3$: Երկու ֆունկցիաներն էլ ունեն մեկական սրացիոնար կետ՝ $(0, 0)$ սկզբնակետը, և երկու դեպքում էլ՝ $df(0, 0) \equiv 0$: Սակայն, $(0, 0)$ սկզբնակետը f_1 -ի համար էքստրեմումի կետ է, իսկ f_2 -ի համար՝ ոչ, ինչը հաստատվում է էքստրեմումի սահմանումով: $\square$

Ներազա ձևակերպումների համար հարմար է նշանակել f ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները $M_0(x_0, y_0)$ կետում՝

$$\begin{aligned} & \boxed{a_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)}, & \boxed{a_{22} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)}, \\ & \boxed{a_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)}, & \boxed{a_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0)} : \end{aligned} \quad (7-89)$$

Քանի որ մենք ենթադրել էինք, որ դիֆարկվող ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ է՝ $f(x, y) \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$, ուրեմն՝ մասնավորապես, ըստ Շվարցի հայտնի թեորեմի՝ f -ի երկրորդ կարգի խառը մասնակի ածանցյալները հավասար են՝

$$\boxed{a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0)} : \quad (7-90)$$

Այսպիսի նշանակումներով արտագրենք f ֆունկցիայի (7-84) երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը՝

$$\boxed{d^2 f(M_0) = a_{11} dx^2 + 2a_{12} dx dy + a_{22} dy^2} : \quad (7-91)$$

Ըստ էության՝ (7-91) երկրորդ կարգի դիֆերենցիալն իրենից ներկայացնում է քառակուսի եռանդամ, որի նշանապահականման հատկությունները վճռորոշ դեր են կատարում ավելյալ $M_0(x_0, y_0)$ կետի էքստրեմումի կետ լինել-չլինելու հարցում: Նշանակենք (7-91) եռանդամի փարբերիչի (դիսկրիմինանտի) հակադիրը՝

$$\Delta \equiv \Delta(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} : \quad (7-92)$$

Նանրահաշվի դպրոցական դասընթացից հայտնի է, որ քառակուսի եռանդամի նշանապահականումը որոշվում է նրա փարբերիչի նշանով: Մասնավորապես, եթե փարբերիչը դրական է, ապա քառակուսի եռանդամը նշանափոխ է, և ուրեմն՝ ավելյալ կետում էքստրեմում լինել չի կարող: Իսկ եթե փարբերիչը բացասական է, ապա քառակուսի եռանդամը պահպանում է իր նշանը, և ուրեմն՝ ավելյալ կետը էքստրեմումի կետ է: Ամբողջական և ճշգրիտ արդյունքը ձևակերպենք հետևյալ թեորեմում:

Թեորեմ 7.24. (Էքստրեմումի բավարար պայմանը)

Դիցուք $M_0(x_0, y_0)$ կետի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում՝ $f(x, y) \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$, և M_0 կետը $f(x, y)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կետ է, այսինքն՝ $df(M_0) \equiv 0$: Ընդունենք (7-89) նշանակումները M_0 կետում f -ի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալների համար և (7-92) փարբերիչի համար՝

$$\Delta \equiv \Delta(M_0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} : \quad \text{Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ պնդումները.}$$

1) Եթե $\Delta(M_0) > 0$, ապա $M_0(x_0, y_0)$ կետը f ֆունկցիայի (սիսար) լոկալ էքստրեմումի կետ է, ընդ որում՝

սիսար մինիմումի կետ է՝ $M_0 = M_{\min}$, երբ $a_{11} > 0$ (կամ $a_{22} > 0$),

սիսար մաքսիմումի կետ է՝ $M_0 = M_{\max}$, երբ $a_{11} < 0$ (կամ $a_{22} < 0$):

2) Եթե $\Delta(M_0) < 0$, ապա $M_0(x_0, y_0)$ կերպը f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կերպ չէ :

3) Եթե $\Delta(M_0) = 0$, ապա ստույգ ոչինչ ասել չենք կարող. $M_0(x_0, y_0)$ կերպը կարող է ինչպես f -ի էքստրեմումի կերպ լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):

Ապացույց. Ինչպես Թեորեմ 7.23-ի ապացույցում էքստրեմումի առկայությունը որոշվում է $\Delta f(M_0)$, (7-86)

լրիվ աճի նշանով կամ էլ $Q(t_1, t_2)$ քառակուսային եռանդամի նշանով $t_1^2 + t_2^2 = 1$ միավոր շրջանագծի վրա: Ընդունելով (7-89) նշանակումները M_0 կերպում f -ի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալների համար՝ $Q(t_1, t_2)$ քառակուսային եռանդամը կարգադրվի հետևյալ տեսքով՝

$$Q(t_1, t_2) = a_{11} t_1^2 + 2a_{12} t_1 t_2 + a_{22} t_2^2 :$$

1) Եթե $\Delta(M_0) = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$, ապա $Q(t_1, t_2)$ քառակուսային եռանդամի տարբերիչը բացասական է $D \stackrel{\text{նշ.}}{=} a_{12}^2 - a_{11} a_{22} < 0$:

Եթե հավելյալ $a_{11} > 0$ (կամ $a_{22} > 0$), ապա $Q(t_1, t_2)$ քառակուսային եռանդամը միշտ դրական է (պարաբոլի ճյուղերն ուղղված են վերև), ուրեմն՝ ըստ (7-86)-ի՝

$$Q(t_1, t_2) > 0 \implies Q(t_1, t_2) + o(1) > 0 \implies \Delta f(M_0) > 0 \implies M_0 = M_{\min} \quad (\text{խիստ}) :$$

Իսկ եթե $a_{11} < 0$ (կամ $a_{22} < 0$), ապա $Q(t_1, t_2)$ քառակուսային եռանդամը միշտ բացասական է (պարաբոլի ճյուղերն ուղղված են ներքև), ուրեմն՝ ըստ (7-86)-ի՝

$$Q(t_1, t_2) < 0 \implies Q(t_1, t_2) + o(1) < 0 \implies \Delta f(M_0) < 0 \implies M_0 = M_{\max} \quad (\text{խիստ}) :$$

2) Եթե $\Delta(M_0) = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0$, ապա $Q(t_1, t_2)$ քառակուսային եռանդամի տարբերիչը դրական է $D = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} > 0$, ինչը նշանակում է, որ $Q(t_1, t_2)$ -ն նշանափոխ է, և ուրեմն $\Delta f(M_0)$ լրիվ աճը ևս նշանափոխ է, և M_0 կերպն էքստրեմումի կերպ չէ :

3) Եթե $\Delta(M_0) = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$, ապա, ինչպես Թեորեմ 7.23-ի ապացույցում,

$f_1(x, y) = x^4 + y^4$, $f_2(x, y) = x^3 + y^3$ օրինակները ցույց են տալիս, որ սրացիոնար կերպը $((0, 0)$ սկզբնակետը) կարող է էքստրեմումի կերպ լինել, իսկ կարող է չլինել: $\square$

Նշենք, որ Թեորեմ 7.23-ի 4)-րդ կետի և Թեորեմ 7.24-ի 3)-րդ կետի դեպքում, երբ թեորեմն ի գործ է ածվում M_0 կետի կարգավիճակը, սովորաբար դիմում են էքստրեմումի կետի սահմանմանը:

Այժմ բերենք մի քանի պարզ օրինակներ, որոնք ցույց կտան, թե ինչպես են գործում Թեորեմներ 7.23 և 7.24-ում ներկայացված բավարար պայմանները:

Օրինակ 7.15. Դիպարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան (էլիպտիկական պարաբոլոիդ), որն արդեն քննարկել էինք Օրինակ 7.13-ում և պարզել, որ $M_{\min} = (0, 0)$ սկզբնականները f -ի մինիմումի կետ է: Ցույց տանք, որ էքստրեմումի կետերը կարելի է գտնել Թեորեմներ 7.23 և 7.24-ի բավարար պայմանների միջոցով:

Նախ գտնենք f -ի սրագիտնար (կրիտիկական) կետերը: Դրա համար պետք է լուծել հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \iff (0, 0)\text{-ն միակ սրագիտնար կետն է:}$$

Այս փաստը տալիս է էքստրեմումի կետի առայժմ միայն անհրաժեշտ պայմանը: Գտնված $(0, 0)$ սրագիտնար կետը ֆունկցիայի **էքստրեմումի հնարավոր կետ է**: Ստուգելու համար, թե արդյոք $(0, 0)$ սրագիտնար կետը իսկապես էքստրեմումի կետ կլինի, կիրառենք Թեորեմներ 7.23 և 7.24-ի բավարար պայմանները: Նաշվենք f -ի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները.

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0:$$

Կազմենք Δ որոշիչը՝

$$\Delta(0, 0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0:$$

Թեորեմ 7.24-ի համաձայն՝ սա նշանակում է, որ $(0, 0)$ կետը էքստրեմումի կետ է դիպարկվող f ֆունկցիայի համար: Ավելին՝ $a_{11} = 2 > 0$ պայմանն էլ նշանակում է, որ $(0, 0)$ կետը մինիմումի կետ է՝ $M_{\min} = (0, 0)$:

Նույն եզրակացությանը կարելի է հասնել, եթե Թեորեմ 7.24-ի փոխարեն կիրառենք Թեորեմ 7.23-ը: Իսկապես, դուրս գրենք f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $(0, 0)$ սրագիտնար կետում.

$$d^2 f(0, 0) = a_{11} dx^2 + 2a_{12} dx dy + a_{22} dy^2 = 2 dx^2 + 2 dy^2 = 2(dx^2 + dy^2) > 0:$$

Ակնհայտ է, 2-րդ կարգի այս դիֆերենցիալը (սխար) դրական է, երբ $dx^2 + dy^2 \neq 0$: Ըստ Թեորեմ 7.23-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0, 0)$ կետը մինիմումի կետ է՝ $M_{\min} = (0, 0)$, դիպարկվող f ֆունկցիայի համար:

Այսպիսով՝ էքստրեմումի կետերի որոնումը և հայտնաբերումը կարելի է իրականացնել առնվազն երկու եղանակով. առաջինը՝ 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի միջոցով (Թեորեմ 7.23), երկրորդը՝ 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալներից կազմված որոշիչների միջոցով (Թեորեմ 7.24): Ընթերցողին ենք թողնում այս երկու եղանակներից ավելի հարմարի ընտրությունը:

Օրինակ 7.16. *Դիտարկենք*

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} xy : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

ֆունկցիան (հիպերբոլական պարաբոլոիդ), որն արդեն բննարկել էինք Օրինակ 7.14-ում և պարզել, որ $(0, 0)$ սկզբնակետը f -ի թամբակետ է, այսինքն՝ էքստրեմումի կետ չէ, թեև սրացիոնար կետ է (ընդ որում՝ միակը)։

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 :$$

Որպես սրացիոնար կետ՝ $(0, 0)$ սկզբնակետը f ֆունկցիայի էքստրեմումի միակ հնարավոր կետն է։ Այն, որ $(0, 0)$ սկզբնակետը f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ, Օրինակ 7.14-ում ապացուցել էինք էքստրեմումի բուն սահմանման միջոցով։ Այժմ նույնը ցույց տանք Թեորեմներ 7.23 և 7.24-ի բավարար պայմանների միջոցով։

Նաշվենք f -ի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները.

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 :$$

Կազմենք Δ որոշիչը՝

$$\Delta(0, 0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 :$$

Թեորեմ 7.24-ի համաձայն՝ սա նշանակում է, որ $(0, 0)$ կետում դիտարկվող f ֆունկցիան էքստրեմում չունի։

Նույն եզրակացությանը կարելի է հանգել, եթե Թեորեմ 7.24-ի փոխարեն կիրառենք Թեորեմ 7.23-ը։

Իսկապես, դուրս գրենք f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $(0, 0)$ սրացիոնար կետում.

$$d^2 f(0, 0) = a_{11} dx^2 + 2a_{12} dx dy + a_{22} dy^2 = 2 dx dy :$$

Ակնհայտ է՝ 2-րդ կարգի այս դիֆերենցիալը նշանափոխ է, այսինքն՝ ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ տարբեր dx և dy աճերի համար, երբ $dx^2 + dy^2 \neq 0$ ։

Թեորեմ 7.23-ի՝ համաձայն՝ սա նշանակում է, որ $(0, 0)$ կետը f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ։

Դարձյալ՝ էքստրեմումի երկու բավարար պայմաններից (Թեորեմներ 7.23 և 7.24) ընթերցողը կիրառվածն համար կարող է ընտրել ավելի դուրեկանը։

7.17 Շար փոփոխականների ֆունկցիաների լոկալ էքստրեմումները

Թեորեմ 7.23-ը նույնությամբ տարածվում է կամայական թվով անկախ փոփոխականների ֆունկցիաների դեպքի վրա: Թեորեմ 7.24-ի նմանակը շար փոփոխականների ֆունկցիաների դեպքում նույնպես տեղի ունի: Ձևա-
կերպենք այն առանց ապացույցի: Մեզ անհրաժեշտ կլինեն համապատասխան նշանակումներ:

Դիցուք $A = (a_{ij})$ քառակուսի մատրիցի a_{ij} տարրերը դիֆարենցիալ $f(M) = f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալներն են M_0 կետում.

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = \overline{1, n} :$$

Այդ դեպքում ստացված

$$A \equiv \left(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

մատրիցն անվանում են f ֆունկցիայի **Հեսսեի մատրից** (տվյալ M_0 կետում) կամ կարճ՝ **հեսսիան**:

Սահմանման մեջ դրված $a_{ij} = a_{ji}$ պայմանը բնական է, որովհետև այն համապատասխանում է խառը մասնակի ածանցյալների հավասարությանը՝

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_j \partial x_i} :$$

Բացի այդ, $a_{ij} = a_{ji}$ պայմանը նշանակում է, որ A մատրիցը **սիմետրիկ** է:

Սահմաններ հերևյալ որոշիչները՝

$$\Delta_1 \stackrel{def}{=} a_{11}, \quad \Delta_2 \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$\Delta_k \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

որոնք կոչվում են A **մատրիցի անկյունային** (կամ **գլխավոր**) **միներներ**:

Թեորեմ 7.25. Դիցուք $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ կերի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում $f(M)$ ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ է՝ $f(M) \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$, և M_0 կերը $f(M)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կեր է, այսինքն՝ $df(M_0) \equiv 0$: Բացի այդ, M_0 կերում $f(M)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները նշանակենք

$$a_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

և դրանցից կազմենք $A = (a_{ij})$ մատրիցը:

1) Եթե A մատրիցի բոլոր անկյունային միներները դրական են՝

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0, \quad (7-93)$$

ապա M_0 կերը $f(M)$ ֆունկցիայի (իսկար) լոկալ մինիմումի կեր է՝ $M_0 = M_{\min}$:

2) Եթե A մատրիցի անկյունային միներները նշանահերթափոխ են, ընդ որում՝ առաջին միները բացասական է, այսինքն՝

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \dots, \quad (-1)^n \Delta_n > 0, \quad (7-94)$$

ապա M_0 կերը $f(M)$ ֆունկցիայի (իսկար) լոկալ մաքսիմումի կեր է՝ $M_0 = M_{\max}$:

3) Դիցուք տեղի ունի կիսաորոշվածության պայմաններից որևէ մեկը՝

$$\Delta_1 \geq 0, \quad \Delta_2 \geq 0, \quad \Delta_3 \geq 0, \quad \dots, \quad \Delta_n \geq 0, \quad (7-95)$$

կամ

$$\Delta_1 \leq 0, \quad \Delta_2 \geq 0, \quad \Delta_3 \leq 0, \quad \dots, \quad (-1)^n \Delta_n \geq 0, \quad (7-96)$$

ընդ որում՝ գոյություն ունի զրոյական անկյունային միներ $\exists \Delta_k = 0$ ինչ-որ k -ի համար:

Այդ դեպքում ստույգ ոչինչ ասել չենք կարող. M_0 կերը կարող է ինչպես f -ի էքստրեմումի կեր լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում) :

4) Եթե A մատրիցի անկյունային միներները բավարարում են (7-93), (7-94), (7-95), (7-96) պայմաններից տարբերվող մեկ այլ պայման, ապա M_0 կերը $f(M)$ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կեր չէ :

Օրինակ 7.17. Գրենք

$$u = f(M) = f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

ֆունկցիայի էքստրեմումները: Նախ նկատենք, որ ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է ամբողջ որոշման տիրույթում՝ $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, և դիֆերենցման հետ խնդիր առաջանալ չի կարող: Գրենք ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը, իսկ դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} f'_x = 4x - y + 2z = 0 \\ f'_y = -x - 1 + 3y^2 = 0 \\ f'_z = 2x + 2z = 0 : \end{cases}$$

Լուծելով համոզվում ենք, որ համակարգն ունի միայն երկու լուծում՝

$$M_1 \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right), \quad M_2 \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) :$$

Սրանք f ֆունկցիայի ստացիոնար կամ էքստրեմումի հնարավոր կետերն են: Այժմ անցնենք ֆունկցիայի էքստրեմումի բավարար պայմանների ստուգմանը: Նաշվենք f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները՝

$$\begin{aligned} f''_{xx}(M) &= 4, & f''_{xy}(M) &= -1, \\ f''_{yy}(M) &= 6y, & f''_{xz}(M) &= 2, \\ f''_{zz}(M) &= 2, & f''_{yz}(M) &= 0 : \end{aligned}$$

Կազմենք f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը և դիտարկենք այն որպես քառակուսային ձև.

$$\begin{aligned} d^2 f(M) &= f''_{xx}(M) dx^2 + f''_{yy}(M) dy^2 + f''_{zz}(M) dz^2 + 2f''_{xy}(M) dx dy + 2f''_{xz}(M) dx dz + 2f''_{yz}(M) dy dz = \\ &= 4 dx^2 + 6y dy^2 + 2 dz^2 - 2 dx dy + 4 dx dz, \end{aligned}$$

որի (Նասսեի) մատրիցը կտրանս հետևյալ տեսքը՝ $A \equiv A(M) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6y & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} :$

Ներազուրենք նախ $M_1 \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$ ստացիոնար կետի էքստրեմումի բավարար պայմանները: Նասսեի մատրիցը M_1 կետում կլնդունի հետևյալ տեսքը՝

$$A(M_1) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} :$$

Նաշվենք $A(M_1)$ մատրիցի անկյունային (զլիսավոր) միներները.

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0 : \quad (7-97)$$

Քանի որ $A(M_1)$ մատրիցի անկյունային բոլոր միներները դրական են, ապա համաձայն **Թեորեմ 7.25-ի**՝ M_1 կետը f ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետ է՝ $M_{\min} = M_1$:

Այժմ հետազոտենք $M_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ստացիոնար կետի էքստրեմումի բավարար պայմանները:

Նեսսեի մատրիցը M_2 կետում կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$A(M_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} :$$

Նաշվենք $A(M_2)$ մատրիցի անկյունային (զլիսավոր) միներները.

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13 < 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 < 0 : \quad (7-98)$$

(7-98) պայմանները մատնանշում են, որ $A(M_2)$ մատրիցը չի բավարարում **Թեորեմ 7.25-ի 1)-3)** պայմանները, այլ բավարարում է **Թեորեմ 7.25-ի 4)-**րդ պայմանը, ինչից եզրակացնում ենք, որ

M_2 կետը էքստրեմումի կետ չէ :

Նույն եզրակացությանը կարելի է հասնել, եթե դիտարկենք $d^2 f(M_2)$ դիֆերենցիալը (բառակրուսային ձևը).

$$\begin{aligned} d^2 f(M_2) &= f''_{xx}(M_2) dx^2 + f''_{yy}(M_2) dy^2 + f''_{zz}(M_2) dz^2 + 2f''_{xy}(M_2) dx dy + 2f''_{xz}(M_2) dx dz + 2f''_{yz}(M_2) dy dz = \\ &= 4 dx^2 - 3 dy^2 + 2 dz^2 - 2 dx dy + 4 dx dz : \end{aligned}$$

Յույց տանք, որ $d^2 f(M_2)$ դիֆերենցիալը նշանատիոն է : Բսկապես, եթե վերցնենք $dy = dz = 0$ և $dx \neq 0$, ապա կստանանք $d^2 f(M_2) = 4 dx^2 > 0$: Բսկ եթե վերցնենք $dx = dz = 0$ և $dy \neq 0$, ապա կստանանք $d^2 f(M_2) = -3 dy^2 < 0$:

$d^2 f(M_2)$ դիֆերենցիալի նշանատիոնությունը ըստ **Թեորեմ 7.23-ի**՝ դարձյալ ցույց է տալիս, որ M_2 կետը էքստրեմումի կետ չէ :

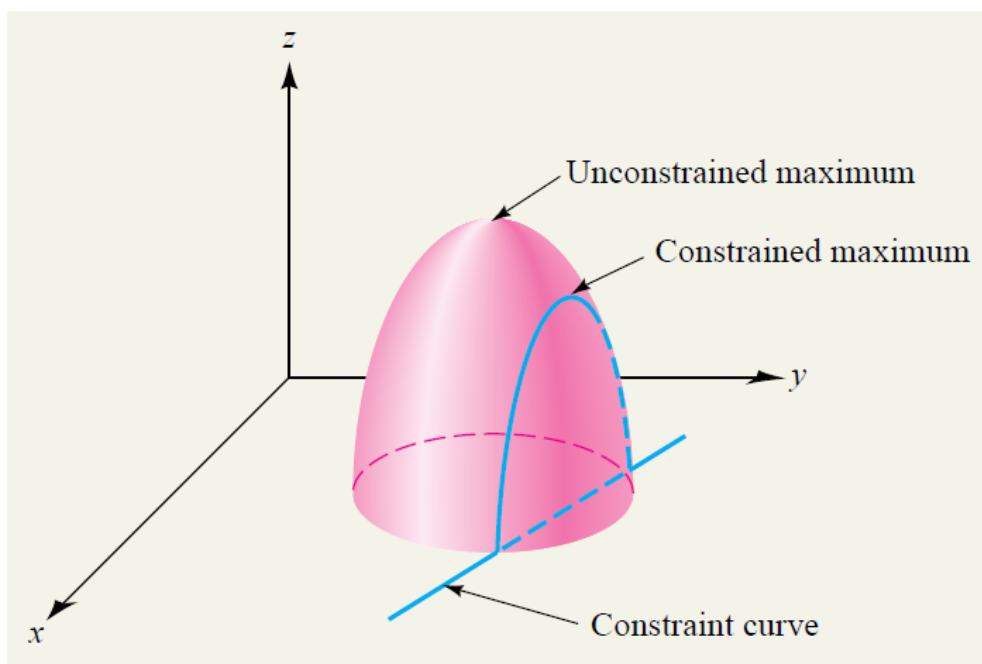
7.18 Ֆունկցիայի պայմանական (հարաբերական) էքստրեմումները և

Լագրանժի մեթոդը:

Խնդրի դրվածքը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Նախորդ բաժիններում հետազոտված էքստրեմումի կետերն անվանում են լոկալ, սովորական կամ ոչ պայմանական: Ի փարբերություն դրանց՝ այս բաժնում քննարկվող պայմանական (կամ հարաբերական) էքստրեմումի կետերը պետք է բավարարեն որոշ լրացուցիչ պայմանների:

Պարզաբանենք պայմանական էքստրեմումի հասկացությունը մի պարզ օրինակով:



Գծազիր 7.24. Պայմանական մաքսիմումի գրաֆիկական պատկերումը

Օրինակ 7.18. Դիտարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

ֆունկցիան, որի որոշման տիրույթը $\overline{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ փակ միավոր շրջանն է, իսկ գրաֆիկը՝ վերին միավոր կիսասփերան: Այս ֆունկցիան արդեն հետազոտել էինք և պարզել, որ f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի միակ կետն է սկզբնականը՝ լոկալ մաքսիմումի կետ՝ $M_{\max} = (0, 0)$: Սրանով լոկալ (և բացարձակ) էքստրեմումի խնդիրը լուծված է:

Այժմ մի փոքր այլ խնդիր ձևակերպենք: Գտնել տվյալ f ֆունկցիայի էքստրեմումները ոչ թե նրա ամբողջ $\overline{D}$ որոշման տիրույթում, այլ $\overline{D}$ -ի ինչ-որ ենթաբազմության վրա՝ ինչ-որ կորի կամ հատվածի

վրա, օրինակ՝ գրենք ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները $y = 1 - x$ ուղղի այն հատվածի վրա, որն ընկած է որոշման տիրույթում: Ուղղի հավասարումն արտագրենք համարժեք տեսքով՝

$$\boxed{\varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x + y - 1 = 0}, \quad (7-99)$$

որն անվանում են **կապի հավասարում**: էքստրեմումի դրված խնդիրը կարճ կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$\begin{cases} f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \mapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y) \equiv x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad (7-100)$$

Ուրեմն՝ մեր նպատակն է լուծել պայմանական էքստրեմումի (7-100) խնդիրը (7-99) կապի հավասարման առկայության դեպքում: Իսկ (7-100) խնդրի ակնկալվող լուծումները՝ որպես $\mathbb{R}^2$ հարթության կետեր կանվանենք **պայմանական էքստրեմումի կետեր** $\varphi(x, y) = 0$ կորի վրա կամ (7-99) կապի հավասարման դեպքում:

Նկատենք, որ եթե $\varphi(x, y) = 0$ կորը անցնի քաղաքական էքստրեմումի կետով, ապա այդպիսի պայմանական էքստրեմումի կետը կհամընկնի քաղաքական էքստրեմումի $M_{\max} = (0, 0)$ կետի հետ: Սակայն (7-100) խնդրի (7-99) կապի հավասարման կորը չի անցնում սկզբնական կետով և ուրեմն՝ կունենա պայմանական էքստրեմումի այլ կետեր:

Քանի որ մենք փաստորեն դիտարկում ենք ոչ թե ամբողջ f ֆունկցիան, այլ միայն նրա նեղացումը $\varphi(x, y) \equiv x + y - 1 = 0$ ուղղի վրա, ապա (7-100) խնդիրը հեշտությամբ կլուծվի, եթե անմիջականորեն տեղադրենք կապի $y = 1 - x$ հավասարումը f ֆունկցիայի բանաձևի մեջ և ձևակերպենք սովորական էքստրեմումի խնդիր՝

$$f(x, y) \Big|_{y=1-x} = f(x, 1-x) = \sqrt{1 - x^2 - (1-x)^2} \mapsto \text{extr.}, \quad x \in [0, 1]:$$

Ստացված միաօտի և սովորական էքստրեմումի խնդիրն արագ լուծվում է սովորական ածանցյալի միջոցով՝

$$f(x, 1-x) = \sqrt{1 - x^2 - (1-x)^2} = \sqrt{2x(1-x)}, \quad x_{\max} = \frac{1}{2}:$$

Այստեղից էլ ստանում ենք, որ (7-99) կապի հավասարումը բավարարող $M_{\max} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կետը միակ պայմանական էքստրեմումի (մաքսիմումի) կետն է, իսկ պայմանական մաքսիմումի արժեքը կլինի $f_{\max} = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

Ինչպես տեսանք, պայմանական էքստրեմումի խնդիրը հեշտությամբ լուծվեց կապի հավասարման անմիջական տեղադրմամբ ֆունկցիայի բանաձևի մեջ: Սա հնարավոր եղավ առաջին հերթին կապի հավասարման պարզության շնորհիվ, երբ y -ը բացահայտ արտահայտվեց x -ի միջոցով՝ $y = y(x)$:

Եթե $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարումը թույլ է տալիս մի փոքր ավելի ընդհանուր *պարամետրական* ներկայացում՝

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

ապա անմիջական տեղադրման եղանակը դեռևս հնարավոր է : Ստացվող

$$z = f(x(t), y(t)) \longmapsto \text{extr.} \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (7-101)$$

ֆունկցիան կախված է միայն մեկ t անկախ փոփոխականից, և դարձյալ պայմանական էքստրեմումի (7-100) խնդիրը հանգում է (7-101) սովորական էքստրեմումի խնդրին:

Ավելի բարդ դեպք ենք ունենում, երբ $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարումից չենք կարող x և y փոփոխականներից մեկը բացահայտ արտահայտել մյուսով կամ համարժեք պարամետրական հավասարումներով ներկայացնել: Դարձյալ ենթադրում ենք, որ $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարումը որոշում է մեկ փոփոխականի $y = y(x)$ ֆունկցիա, որն արդեն իրենից կներկայացնի *անբացահայտ ֆունկցիա*՝

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = y(x) \quad (\text{անբացահայտ ֆունկցիա}) :$$

Թեև $y = y(x)$ ֆունկցիայի բացահայտ տեսքն այժմ չունենք, այնուամենայնիվ ձևականորեն կարելի է այն տեղադրել $z = f(x, y)$ ֆունկցիայի մեջ և համարել, որ հարցը բերվում է մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի սովորական էքստրեմումի հետազոտմանը՝

$$z = f(x, y(x)) \longmapsto \text{extr.} \quad x_0 \leq x \leq x_1 : \quad (7-102)$$

Ներագրությունը շարունակելու համար պահանջվում է (7-102) բարդ ֆունկցիան ածանցել (բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնով)՝

$$z'_x = f'_x + f'_y y'_x : \quad (7-103)$$

Այստեղից էլ կարիք է առաջանում հաշվել $y = y(x)$ անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցյալը, ինչը կարելի է անել անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցման հայտնի բանաձևով կամ անմիջականորեն ածանցելով $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարումը ըստ x -ի՝ համարելով, որ y -ը կախյալ է x -ից՝

$$0 = \frac{d}{dx} \varphi(x, y(x)) = \varphi'_x + \varphi'_y y'_x : \quad (7-104)$$

Լրացուցիչ ենթադրելով, որ $\varphi'_y \neq 0$, ստանում ենք անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$\boxed{y'_x = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}} : \quad (7-105)$$

Տեղադրելով (7-105)-ը (7-103)-ի մեջ, ստանում ենք (7-102) z բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$z'_x = f'_x - f'_y \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} : \quad (7-106)$$

Էքստրեմումի որոնումը պահանջում է, որ նախ և առաջ պետք է գտնենք սրագիծնար կետերը, և ուրեմն՝ (7-106) ածանցյալը հավասարեցնենք զրոյի՝

$$z'_x = f'_x - f'_y \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = 0 : \quad (7-107)$$

Այսպիսով պայմանական հնարավոր էքստրեմումի կետերը պետք է բավարարեն (7-107) և կապի հավասարումներին՝

$$f'_x - f'_y \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = 0, \quad \varphi(x, y) = 0 : \quad (7-108)$$

Սրացանք հավասարումների համակարգ, որը կարելի է ներկայացնել ավելի հարմար համաչափ տեսքով: Դրա համար ներմուծենք նոր օժանդակ պարամետր՝

$$-\lambda \stackrel{def}{=} \frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}, \quad (7-109)$$

որպեսզի $(-)$ նշանը պարպադիր չէ և դրված է զուտ տեխնիկական հարմարության առումով: Օգտվելով λ պարամետրից՝ (7-108) համակարգը արագորոշվում է այսպես՝

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 : \end{cases} \quad (7-110)$$

Այսպիսով (7-110) համակարգը տալիս է $f(x, y)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի **անհրաժեշտ պայմանը** $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարման դեպքում: Նիշենք, որ մենք փորձում ենք լուծել

$$\begin{cases} f(x, y) \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (7-111)$$

պայմանական էքստրեմումի խնդիրը: Կազմելով և լուծելով (7-110) համակարգը՝ մենք կստանանք պայմանական հնարավոր էքստրեմումի բոլոր կետերը (սրագիծնար կետերը), որոնցից դեռ պետք է ընտրենք իսկապես պայմանական էքստրեմումի կետերը:

(7-110) համակարգին ավելի ամփոփ տեսք տալու համար կազմում են հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$L(x, y) \equiv L(x, y, \lambda) \stackrel{def}{=} f(x, y) + \lambda \varphi(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (7-112)$$

որպեսզի (x, y) կետը փոփոխվում է իր (որոշման) $D \subset \mathbb{R}^2$ հարթ տիրույթում, իսկ λ -ն անորոշ պարամետր է :

Սահմանված L ֆունկցիան անվանում են **Լագրանժի ֆունկցիա**, λ պարամետրը՝ **Լագրանժի բազմապարկիչ** կամ **Լագրանժի անորոշ գործակից**, և առհասարակ պայմանական էքստրեմումի նկարագրված եղանակը անվանում են **Լագրանժի մեթոդ**:

Նեշտ է տեսնել, որ (7-110) համակարգի բոլոր երեք հավասարումների ձախ մասերը Լագրանժի L ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներն են՝

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 : \end{cases} \quad (7-113)$$

Մենք փաստորեն ապացուցեցինք պայմանական էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը, որը Լագրանժի ֆունկցիայի միջոցով հեղեյալ ձևակերպումը կստանա:

Թեորեմ 7.26. *Դիցուք $z = f(x, y)$ և $\varphi(x, y)$ ֆունկցիաները որոշված են և ողորկ են $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում, $f(x, y), \varphi(x, y) \in C^1(\Omega)$, և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կերպը f -ի սայմանական էքստրեմումի կերպ է $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարման դեպքում: Բացի այդ, $M_0(x_0, y_0)$ կերպում $\varphi(x, y)$ ֆունկցիայի գրադիենտը գրոյական չէ, այսինքն՝ $\varphi'_x(x_0, y_0)$ և $\varphi'_y(x_0, y_0)$ ածանցյալները միաժամանակ զրո չեն:*

Այդ դեպքում գոյություն ունի $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ արժեք այնպիսին, որ (x_0, y_0, λ_0) եռյակը բավարարում է (7-113) համակարգը, այսինքն՝ Լագրանժի L ֆունկցիայի ստացիոնար կերպ է:

Բնականաբար պայմանական էքստրեմումի (7-114) խնդիրը լուծելու համար մեզ անհրաժեշտ կլինի ստանալ պայմանական էքստրեմումի ոչ միայն անհրաժեշտ, այլ նաև բավարար պայմանները: Լագրանժի նկարագրված մեթոդը այնքան արդյունավետ է, որ թույլ է տալիս այդ բավարար պայմանները ամփոփի ձևակերպել Լագրանժի ֆունկցիայի տերմիններով: Նիմանական միտքը հեղեյալն է՝

$f(x, y)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը համարժեք է f -ի Լագրանժի ֆունկցիայի ստորական լուկալ էքստրեմումի խնդրին:

Այժմ ավելի ճշգրիտ ձևակերպենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը:

Թեորեմ 7.27. *(Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը)*

Դրված է 2-րդ կարգի ողորկ $f(x, y)$ ֆունկցիայի սայմանական էքստրեմումի խնդիրը $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարման դեպքում, այսինքն՝

$$\begin{cases} f(x, y) \mapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y) = 0 : \end{cases} \quad (7-114)$$

Դիցուք $M_0(x_0, y_0)$ կերպը ինչ-որ $\lambda = \lambda_0$ արժեքի դեպքում $f(x, y)$ ֆունկցիայի՝ $L(x, y) \equiv L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ ֆունկցիայի սրագիծնար կերպ է, այսինքն՝ $dL(x_0, y_0) \equiv 0$, կամ

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 : \end{cases} \quad (7-115)$$

Կազմենք L ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0(x_0, y_0)$ կերպում

$$d^2 L(x_0, y_0) = L''_{xx}(x_0, y_0) dx^2 + 2L''_{xy}(x_0, y_0) dx dy + L''_{yy}(x_0, y_0) dy^2 :$$

1) Եթե $d^2 L(x_0, y_0) > 0$ բոլոր $\forall dx, dy$ դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$dx^2 + dy^2 \neq 0, \quad \boxed{\varphi'_x(x_0, y_0) dx + \varphi'_y(x_0, y_0) dy = 0}, \quad (7-116)$$

այս $M_0(x_0, y_0)$ կերպը f ֆունկցիայի (սիսթ) պայմանական մինիմումի կերպ է՝ $M_0(x_0, y_0) = M_{\min}$, $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարման դեպքում:

2) Եթե $d^2 L(x_0, y_0) < 0$ բոլոր $\forall dx, dy$ դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$dx^2 + dy^2 \neq 0, \quad \varphi'_x(x_0, y_0) dx + \varphi'_y(x_0, y_0) dy = 0,$$

այս $M_0(x_0, y_0)$ կերպը f ֆունկցիայի (սիսթ) պայմանական մաքսիմումի կերպ է՝ $M_0(x_0, y_0) = M_{\max}$, $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարման դեպքում:

3) Եթե $d^2 L(x_0, y_0)$ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը նշանափոխ է (ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ) dx, dy դիֆերենցիալների (աճերի) նույն (7-116) սահմանափակումների ներքո, այս $M_0(x_0, y_0)$ կերպը f ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կերպ չէ:

4) Եթե $d^2 L(x_0, y_0) \geq 0$ կամ $d^2 L(x_0, y_0) \leq 0$, երբ dx, dy դիֆերենցիալները (աճերը) բավարարում են նույն (7-116) սահմանափակումները, այս սրույգ ոչինչ ասել չենք կարող. $M_0(x_0, y_0)$ կերպը կարող է ինչպես f -ի պայմանական էքստրեմումի կերպ լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):

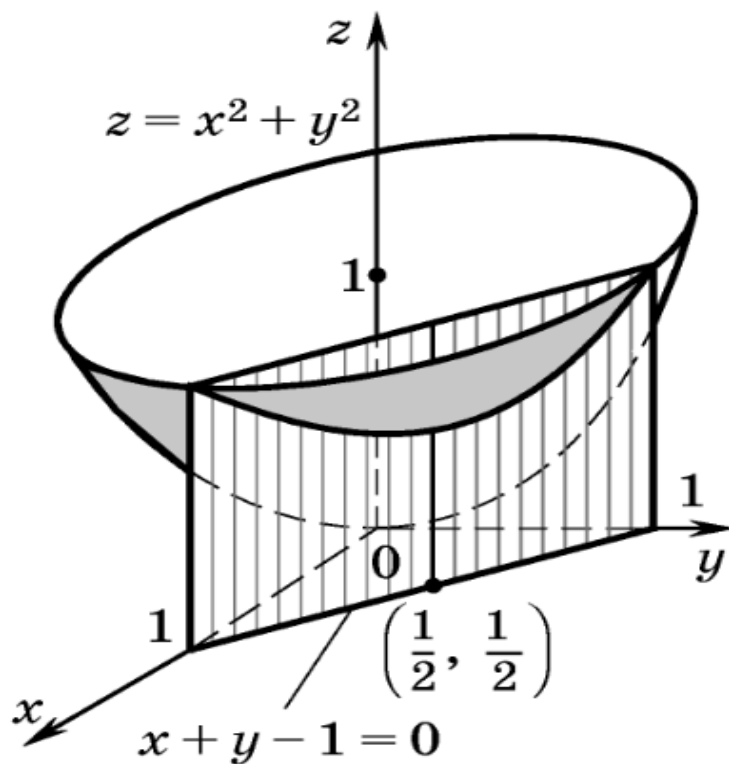
Այսպիսով՝ ինչպես լոկալ էքստրեմումի դեպքում էր, այժմ պայմանական էքստրեմումի դեպքում ևս (L ֆունկցիայի) երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը փոխադրված սրագիծնար կերպում որոշում է պայմանական էքստրեմումի առկայությունը:

Քննարկենք մի քանի պարզ օրինակներ, որոնցում պայմանական էքստրեմումները հիմնականում կորոնենք անորոշ բազմապարկիչների Լագրանժի մեթոդով:

Օրինակ 7.19. Մենք արդեն քննարկել էինք $z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}_+$ ֆունկցիան (էլիպսոիդական սարսաքողի) և պարզել, որ $M_{\min} = (0, 0)$ սկզբնակետը f -ի բացարձակ մինիմումի կետ է:

Այժմ ձևակերպենք բոլորովին այլ՝ պայմանական էքստրեմումի խնդիր $\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$ կապի հավասարման դեպքում.

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 \mapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x + y - 1 = 0 : \end{cases} \quad (7-117)$$



Պատկեր 7.25. Պայմանական էքստրեմումի օրինակ պարաբոլիդի վրա

Պայմանական էքստրեմումի այս խնդրի ամենակարճ և հասկանալի եղանակը թերևս $y = 1 - x$ կապի հավասարման անմիջական տեղադրումն է և մեկ փոփոխականի $f(x, 1 - x)$ ֆունկցիայի սովորական էքստրեմումի հետազոտումն է: Թողնում ենք սա ընթերցողին որպես վարժություն:

Լուծենք (7-117) խնդիրը Լագրանժի մեթոդով, որպեսզի ցույց տանք՝ ինչպես է այն գործում: Կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

որտեղ λ -ն L ագրանժի անորոշ բազմապարկի (գործակից) է : Նախ գրենք L ագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կետերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 2x + \lambda = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 2y + \lambda = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 1 = 0 : \end{cases} \quad (7-118)$$

Տամակարգի 1-ին և 2-րդ հավասարումներից հեշտ է տեսնել, որ $x = y$, ինչից սրանում ենք

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ x = y = \frac{1}{2} : \end{cases}$$

Այսպիսով՝ $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ կետը L ագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի միակ սրացիոնար կետն է կամ (7-117) խնդրի պայմանական հնարավոր էքստրեմումի միակ կետն է : Այժմ սրուզենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը: Տաշվենք L ագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ կետում.

$$\begin{aligned} L''_{xx}(x, y) &= 2, & L''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 2, \\ L''_{xy}(x, y) &= 0, & L''_{xy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 0, \\ L''_{yy}(x, y) &= 2, & L''_{yy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= L''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dx^2 + 2L''_{xy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dx dy + L''_{yy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dy^2 = \\ &= 2 dx^2 + 2 dy^2 > 0, \quad \text{եթե } dx^2 + dy^2 \neq 0 : \end{aligned} \quad (7-119)$$

Արդեն սրացանք, որ L ագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ դրական է, եթե $dx^2 + dy^2 \neq 0$, ինչից, ըստ Թեորեմ 7.27-ի, հետևում է, որ $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ կետը f -ի (խիստ) պայմանական մինիմումի կետ է՝ $M_{\min} = M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, կապի $\varphi(x, y) = 0$ հավասարման դեպքում:

Նշենք, որ Թեորեմ 7.27-ը պահանջում էր նաև հաշվի առնել կապի (7-116) դիֆերենցիալի հավասարումը՝

$$\varphi'_x(x_0, y_0) dx + \varphi'_y(x_0, y_0) dy = 0, \quad \text{կամ} \quad dx + dy = 0,$$

ինչից սրանում ենք

$$d^2L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 dx^2 + 2 dy^2 = 4 dx^2 > 0 \quad \text{եթե } dx \neq 0,$$

նույն եզրակացությամբ՝ $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ կետը f -ի (խիստ) պայմանական մինիմումի կետ է՝ $M_{\min} = M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, կապի $\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$ հավասարման դեպքում:

Օրինակ 7.20. Դիրարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Ֆունկցիան, որի որոշման տիրույթը $\mathbb{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ փակ միավոր շրջանն է, իսկ գրաֆիկը վերին միավոր կիսասփերան։ Այս ֆունկցիան արդեն հետազոտել էինք լոկալ էքստրեմումի առումով և Օրինակ 7.18-ում պայմանական էքստրեմումի առումով $\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$ կապի հավասարման դեպքում։ Վերջին դեպքում անմիջական տեղադրման և փոփոխականի արտաքսման եղանակով պարզել էինք, որ $M_{\max} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ կետը պայմանական մաքսիմումի կետ է։

Այժմ նույն պայմանական էքստրեմումի խնդիրը՝

$$\begin{cases} f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \mapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad (7-120)$$

լուծենք Լագրանժի մեթոդով, որպեսզի ցույց տանք՝ ինչպես է այն գործում։ Կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \lambda(x + y - 1), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

որտեղ λ -ն Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչ (գործակից) է։ Նախ գրենք Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը։ Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \lambda = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \lambda = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 1 = 0 : \end{cases} \quad (7-121)$$

Նամակարգի 1-ին և 2-րդ հավասարումներից հեշտ է տեսնել, որ $x = y$, ինչից ստանում ենք

$$\begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - x^2}} + \lambda = 0 \\ x + x - 1 = 0 : \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{x}{\sqrt{1 - 2x^2}} \\ x = \frac{1}{2} : \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = y = \frac{1}{2} : \end{cases}$$

Այսպիսով՝ $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ կետը Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի միակ ստացիոնար կետն է կամ (7-120) խնդրի պայմանական հնարավոր էքստրեմումի միակ կետն է։ Այժմ ստուգենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը։ Նաշվենք Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ կետում.

$$\begin{aligned} L''_{xx}(x, y) &= \frac{y^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, & L''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ L''_{xy}(x, y) &= \frac{-xy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, & L''_{xy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

$$L''_{yy}(x, y) = \frac{x^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, \quad L''_{yy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\begin{aligned} d^2L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= L''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dx^2 + 2L''_{xy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dx dy + L''_{yy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dy^2 = \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} dx^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2} dx dy - \frac{3\sqrt{2}}{2} dy^2 = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (3 dx^2 + 2 dx dy + 3 dy^2) : \end{aligned} \quad (7-122)$$

Ներկայումս Թեորեմ 7.27-ի պայմաններին՝ պահանջենք, որ $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ տրացիոնար կետում կարարվի կապի դիֆերենցիալ $\boxed{d\varphi(M_0) = 0}$ հավասարումը, րեն (7-116)։

$$d\varphi(M_0) = \varphi'_x(M_0) dx + \varphi'_y(M_0) dy = dx + dy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad dx = -dy :$$

Տեղադրենք աների այս կապը 2-րդ կարգի (7-122) դիֆերենցիալի մեջ՝

$$\begin{aligned} d^2L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (3 dx^2 + 2 dx dy + 3 dy^2) = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (3 dx^2 - 2 dx^2 + 3 dx^2) = -2\sqrt{2} dx^2 < 0, \quad \text{երբ } dx \neq 0 : \end{aligned}$$

Քանի որ Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ բացասական է՝ $d^2L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) < 0$, երբ $dx \neq 0$, համաձայն Թեորեմ 7.27, 2)-ի՝ $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ կետը f -ի (խիստ) պայմանական մաքսիմումի կետ է՝ $M_{\max} = M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, կապի $\varphi(x, y) = 0$ հավասարման դեպքում, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել։

Դիպոդություն 7.11. Եթե $M_0(x_0, y_0)$ կետում f ֆունկցիան լոկալ էքստրեմում ունի, և բացի այդ՝ M_0 կետով անցնում է ինչ-որ ուղիղ կամ որևէ անընդհատ Γ կոր, ապա միանգամայն պարզ է, որ f ֆունկցիան նույն M_0 կետում կունենա նաև պայմանական էքստրեմում, երբ կապի հավասարումը Γ կորով է արտահայտված։ Ներառված է, որ որոշակի իմաստով հակադարձ պնդումը սխալ է, եթե սահմանափակվենք էքստրեմումի կետով անցնող ուղիղներով միայն։ Բերենք համապարասխան օրինակ։

Օրինակ 7.21. Ապացուցենք, որ սկզբնականում

$$\boxed{z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (y - x^2)(y - 3x^2)}$$

ֆունկցիան էքստրեմում չունի, սակայն նրա նեղացումը ցանկացած $y = kx$ ուղիղ վրա նույն կետում էքստրեմում արդեն ունի։ Նաշվենք՝

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2x(y - 3x^2) - 6x(y - x^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (y - 3x^2) + (y - x^2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(2y - 3x^2) = 0 \\ y = 2x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 : \end{cases}$$

Ուրեմն՝ $(0, 0)$ սկզբնակետը $f(x, y)$ ֆունկցիայի միակ սրագիտունար կետն է, սակայն էքստրեմումի կետ չէ, այլ կետն ասած՝ f -ի թամբակետ է: Բսկապես, $f(0, 0) = 0$, և եթե $(0, 0)$ կետի շրջակայքում վերցնենք $(0, y)$, $y \neq 0$, տեսքի կետեր, ապա ֆունկցիան դրական է՝ $f(0, y) = y^2 > 0$: Բսկ եթե $(0, 0)$ կետի շրջակայքում վերցնենք $(x, 2x^2)$, $x \neq 0$, տեսքի կետեր, ապա ֆունկցիան բացասական է՝

$$f(x, 2x^2) = (2x^2 - x^2)(2x^2 - 3x^2) = -x^4 < 0, \quad \text{երբ } x < 0 :$$

Այսպիսով՝ $(0, 0)$ սկզբնակետը թամբակետ է, էքստրեմումի կետ չէ:

Մյուս կողմից, եթե դիտարկենք $(0, 0)$ կետով անցնող կամայական $y = kx$, $(k \in \mathbb{R})$ ուղիղ, ապա $f|_{y=kx}$ նեղացումն արդեն էքստրեմում կունենա $(0, 0)$ կետում: Բսկապես, սկզբում դիտարկելով f -ի նեղացումը x առանցքի վրա՝ համոզվում ենք, որ $(0, 0)$ կետը պայմանական (խիստ) մինիմումի կետ է.

$$f|_{y=0} = f(x, 0) = 3x^4, \quad M_{\min} = (0, 0) :$$

Դիտարկելով f -ի նեղացումը y առանցքի վրա՝ համոզվում ենք, որ $(0, 0)$ կետը նույնպես պայմանական (խիստ) մինիմումի կետ է.

$$f|_{x=0} = f(0, y) = y^2, \quad M_{\min} = (0, 0) :$$

Այժմ դիտարկենք f -ի նեղացումը $y = kx$, $k \neq 0$, ուղիղի վրա: Տեղադրելով սրանում ենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիա՝

$$f|_{y=kx} = f(x, kx) = (kx - x^2)(kx - 3x^2) = 3x^4 - 4kx^3 + k^2x^2 :$$

Էքստրեմումի առկայությունը ստուգենք 2-րդ կարգի ածանցյալի միջոցով՝

$$\left. \frac{d}{dx} f(x, kx) \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2}{dx^2} f(x, kx) \right|_{x=0} = 2k^2 > 0,$$

ինչը նշանակում է, որ $x = 0$ կետը $f(x, kx)$ ֆունկցիայի խիստ մինիմումի կետ է, այսինքն՝ $(0, 0)$ կետը $f(x, y)$ ֆունկցիայի պայմանական մինիմումի կետ է:

Օրինակ 7.22. Դիտարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} xy, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

ֆունկցիան տրված որոշման տիրույթով, այն է՝ կոորդինատական հարթության առաջին քառորդը: Պահանջվում է գտնել f ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ էլիպսի վրա, ավելի ստույգ՝ այդ էլիպսի առաջին քառորդի աղեղի վրա: Առաջանում է պայմանական էքստրեմումի խնդիր կապի $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$ հավասարումով.

$$\begin{cases} z = f(x, y) = xy \longrightarrow \max. & x, y > 0, \\ \varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 : \end{cases} \quad (7-123)$$

Պայմանական էքստրեմումի այս խնդիրը կարելի է լուծել ինչպես անմիջական տեղադրման եղանակով, այդ թվում՝ օգտագործելով էլիպսի պարամետրական հավասարումները, այնպես էլ Լագրանժի ընդհանուր մեթոդով:

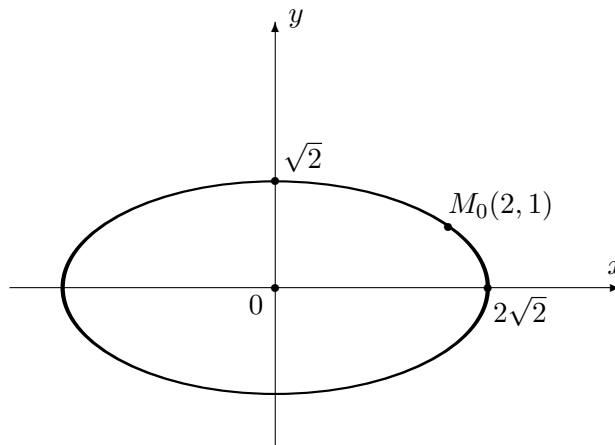
1-ին եղանակ. Օգտվելով այն պայմանից, որ ֆունկցիայի փոփոխականները դրական են, կապի $\varphi(x, y) = 0$ հավասարումից բացահայտ արտահայտենք y -ը x -ի միջոցով և տեղադրենք f ֆունկցիայի բանաձևի մեջ՝ $y = y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{8 - x^2}$.

$$z = z(x) = f(x, y(x)) = \frac{1}{2}x\sqrt{8 - x^2}, \quad (0 \leq x \leq 2\sqrt{2}) :$$

Սրանով խնդիրը հանգեց մեկ փոփոխականի $z(x)$ ֆունկցիայի սովորական էքստրեմումի խնդրին: Էլիպսի պարզեցնելով մեր գործը՝ $z(x)$ ֆունկցիայի փոխարեն կարելի է քննարկել նրա քառակուսին (հաստատունի ճշտությամբ)

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2(8 - x^2) \mapsto \max. \quad 0 \leq x \leq 2\sqrt{2},$$

որտեղից պարզ է, որ ֆունկցիան մաքսիմում ունի, երբ $x^2 = 4$, այսինքն՝ $\boxed{x_{\max} = 2}$ կետում: Այն, որ սա իսկապես մաքսիմումի կետ է, երևում է թեկուզ այն փաստից, որ հատվածի ծայրակետերում $g(x)$ ֆունկցիան զրո է, իսկ ներսում դրական է միակ $x = 2$ սրացիոնար կետով:



Գծագիր 7.26. Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և պայմանական մաքսիմումի կետը

Նաշվելով նաև $y(2) = 1$ արժեքը՝ եզրակացնում ենք, որ $(2, 1)$ կետը $f(x, y)$ ֆունկցիայի պայմանական մաքսիմումի միակ կետն է, որտեղ f -ն ընդունում է իր մաքսիմումը և մեծագույն արժեքը՝

$$\boxed{M_{\max} = M_0(2, 1)}, \quad \max f(x, y) = f_{\max} = f(M_0) = f(2, 1) = 2 :$$

2-րդ եղանակ. Էլիպսը, որը երկրաչափորեն կապի հավասարումն է տալիս, ներկայացնենք

պարամետրական տեսքով.

$$\begin{cases} x = x(t) = 2\sqrt{2} \cos t \\ y = y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right):$$

Պարամետրական այս ֆունկցիաները տեղադրենք $f(x, y)$ -ի մեջ և դրանով խնդիրը կրեքվի մեկ փոփոխականի $z(t) = f(x(t), y(t))$ ֆունկցիայի սովորական մաքսիմումի խնդրին՝

$$z = z(t) = f(x(t), y(t)) = 4 \cos t \sin t = 2 \sin 2t \longmapsto \max. \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right):$$

Նեշտությամբ գտնում ենք $z(t)$ ֆունկցիայի միակ մաքսիմումի կետը՝ $\boxed{t_{\max} = \frac{\pi}{4}}$, ինչից ստանում ենք $x(\frac{\pi}{4}) = 2$, $y(\frac{\pi}{4}) = 1$, $f(x, y)$ ֆունկցիայի պայմանական մաքսիմումի միակ $(2, 1)$ կետը: Եզրակացությունը նույնն է, ինչ նախորդ եղանակի դեպքում՝

$$\boxed{M_{\max} = M_0(2, 1)}, \quad \max f(x, y) = f_{\max} = f(M_0) = f(2, 1) = 2:$$

3-րդ եղանակ. Այժմ պայմանական մաքսիմումի նույն (7-123) խնդիրը լուծենք Լագրանժի մեթոդով: Կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = xy + \lambda \left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

որտեղ λ -ն Լագրանժի անորոշ բազմապարկիչ է: Ի միջի այլոց, Լագրանժի ֆունկցիան կազմելիս կարելի էր (-1) վերջին գումարելին դեն ներել, քանի որ դիֆերենցելու ժամանակ հասարարունք որևէ դերակարգում չունի:

Նախ գտնենք Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի սրագիտնար կետերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = y + \frac{1}{4} \lambda x = 0 \\ L'_y(x, y) = x + \lambda y = 0 \\ \varphi(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{x}{y} \\ x^2 - 4y^2 = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases} \quad (7-124)$$

Այսպիսով՝ $M_0(2, 1)$ կետը Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի միակ սրագիտնար կետն է կամ (7-123) խնդրի պայմանական հնարավոր էքստրեմումի միակ կետն է: Այժմ արուգենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը: Նաշվենք Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0(2, 1)$ կետում՝ նկարի ունենալով, որ $\lambda = -2$.

$$\begin{aligned} L''_{xx}(x, y) &= \frac{\lambda}{4}, & L''_{xx}(2, 1) &= -\frac{1}{2}, \\ L''_{xy}(x, y) &= 1, & L''_{xy}(2, 1) &= 1, \\ L''_{yy}(x, y) &= \lambda, & L''_{yy}(2, 1) &= -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 L(2, 1) &= L''_{xx}(2, 1) dx^2 + 2L''_{xy}(2, 1) dx dy + L''_{yy}(2, 1) dy^2 = \\ &= -\frac{1}{2} dx^2 + 2 dx dy - 2 dy^2 = -\frac{1}{2} (dx^2 - 4 dx dy + 4 dy^2) = \\ &= -\frac{1}{2} (dx - 2 dy)^2 : \end{aligned} \quad (7-125)$$

Ներկայումս $M_0(2, 1)$ ստացիոնար կետում կարարվի կապի դիֆերենցիալ $d\varphi(M_0) = 0$ հավասարումը, որն (7-116).

$$\begin{aligned} d\varphi(x, y) &= \varphi'_x(x, y) dx + \varphi'_y(x, y) dy = \frac{x}{4} dx + y dy \\ d\varphi(2, 1) &= \varphi'_x(2, 1) dx + \varphi'_y(2, 1) dy = \frac{1}{2} dx + dy = 0 \iff dx = -2 dy : \end{aligned}$$

Տեղադրենք աների այս կապը 2-րդ կարգի (7-125) դիֆերենցիալ մեջ.

$$d^2 L(2, 1) = -\frac{1}{2} (dx - 2 dy)^2 = -\frac{1}{2} (2 dx)^2 = -2 dx^2 < 0, \quad \text{երբ } dx \neq 0 :$$

Քանի որ L ազդանշանի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ բացասական է՝ $d^2 L(2, 1) < 0$, երբ $dx \neq 0$, համաձայն θ -կետի 7.27, 2)-ի՝ $M_0(2, 1)$ կետը f -ի (խիստ) պայմանական մաքսիմումի կետ է $M_{\max} = M_0(2, 1)$, կապի $\varphi(x, y) = 0$ հավասարման դեպքում, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: Ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը կլինի

$$M_{\max} = M_0(2, 1), \quad \max f(x, y) = f_{\max} = f(M_0) = f(2, 1) = 2 :$$

Դիպոդություն 7.12. Վերջին դեպքում պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը մենք ստուգեցինք շնորհիվ θ -կետի 7.27-ի: Տվյալ ֆունկցիայի համար այդ փաստը բավականին ակնհայտ է առանց նշված թեորեմի: Իսկապես, էլիպսի տրված աղեղի $(2\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ ծայրակետերում (որանք էլիպսի կիսաառանցքներն են) $f(x, y) = xy$ ֆունկցիան հավասար է զրոյի, իսկ աղեղի ներսում f -ը միայն մեկ ստացիոնար կետ ունի: Քանի որ f -ը դրական է, ուրեմն՝ այդ ստացիոնար կետը վերածվում է մաքսիմումի կետի:

Բերենք մի օրինակ փոփոխության բնագավառից:

Օրինակ 7.23. Նշանակենք x -ով կապիտալի, իսկ y -ով՝ աշխատուժի միավորների քանակները: Կապիտալի արժեքն է 3000 դրամ յուրաքանչյուր միավորի համար, իսկ աշխատուժի արժեքը՝ 5000 դրամ յուրաքանչյուր միավորի համար: Դրանցից կախված թողարկված արտադրանքի քանակը, ենթադրենք, որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 120 x^{4/5} y^{1/5}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 :$$

Տնտեսագիտությունում նման ֆունկցիաներն անվանում են **Քոբ-Դազլասի արտադրական ֆունկցիա** և սովորաբար նշանակում են $Q(K, L)$ տեսքով:

Արտադրողը մրադիր է ներդնել 600 հազար դրամ: Քանի՞ միավոր աշխատուժ և կապիտալ պետք է տեղաբաշխել, որպեսզի արտադրանքը հասցվի առավելագույնի: Տաշվել արտադրանքի առավելագույն քանակը:

Լուծումը հանգում է պայմանական էքստրեմումի խնդրին: Կապիտալի ընդհանուր արժեքն է 3000 x դրամ, իսկ աշխատուժի ընդհանուր արժեքը՝ 5000 y դրամ: Ըստ պայմանի՝ այդ միջոցների ընդհանուր քանակը 600 հազար դրամ է: Այստեղից սրացվեց կապի հավասարում՝

$$3000 x + 5000 y = 600\,000 \quad \text{կամ} \quad 3x + 5y = 600,$$

և առաջացավ պայմանական էքստրեմումի խնդիր՝

$$\begin{cases} z = f(x, y) = 120 x^{4/5} y^{1/5} \mapsto \max. & x, y \geq 0, \\ \varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 3x + 5y - 600 = 0 : \end{cases} \quad (7-126)$$

Խնդիրը լուծենք Լագրանժի մեթոդով և կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = 120 x^{4/5} y^{1/5} - \lambda(3x + 5y - 600), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

որտեղ λ -ն Լագրանժի անորոշ բազմապարկիչ է (λ -ի նշանը էական չէ):

Գրենք Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կետերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = 120 \frac{4}{5} x^{-1/5} y^{1/5} - 3\lambda = 0 \\ L'_y(x, y) = 120 \frac{1}{5} x^{4/5} y^{-4/5} - 5\lambda = 0 \\ \varphi(x, y) = 3x + 5y - 600 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 96 x^{-1/5} y^{1/5} = 3\lambda \\ 24 x^{4/5} y^{-4/5} = 5\lambda \\ 3x + 5y = 600, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 96 \cdot 5 x^{-1/5} y^{1/5} = 24 \cdot 3 x^{4/5} y^{-4/5} \\ 3x + 5y = 600 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0,15x \\ 3x + 5y = 600 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 160 \\ y = 24 : \end{cases}$$

Այսպիսով՝ $M_0(160, 24)$ կերը L ագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի միակ սրացիոնար կերն է կամ (7-126) խնդրի պայմանական հնարավոր էքստրեմումի միակ կերն է :

Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը կարելի է ստուգել L ագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի միջոցով, ինչպես նախորդ օրինակներում: Սակայն տվյալ օրինակում կարելի է խուսափել ավելորդ հաշվարկներից և օգտվել սրացիոնար կերի միակությունից: Բսկասպես, պայմանական էքստրեմումի (7-126) խնդրում f ֆունկցիան հետագոյություն է միայն $3x + 5y = 600$ ուղղի 1-ին քառորդում գտնվող հատվածի վրա: Այդ հատվածի ծայրակետերում f ֆունկցիան ակնհայտորեն հավասար է զրոյի, իսկ հատվածի ներսում դրական է՝

$$f(200, 0) = 0, \quad f(0, 120) = 0,$$

$$f(x, y) > 0, \quad \text{երբ} \quad 3x + 5y = 600, \quad x, y > 0 :$$

Ներկայումս՝ տվյալ հատվածի $M_0(160, 24)$ ներքին սրացիոնար կերում f ֆունկցիան կարող է միայն մաքսիմում ունենալ, ինչից էլ գտնում ենք f ֆունկցիայի պայմանական մաքսիմումի արժեքը՝

$$M_{\max} = M_0(160, 24),$$

$$f_{\max} = f(M_0) = f(160, 24) = 120 (160)^{4/5} (24)^{1/5} \approx 13\,138 :$$

Այսպիսով՝ արտադրողը պետք է տեղաբաշխի 160 միավոր կապիտալ (այսինքն՝ $160 \cdot 3000 = 480\,000$ դրամ) և 24 միավոր աշխատուժ (օրինակ 24 աշխատաժամ, որի ծախսը կկազմի $24 \cdot 5000 = 120\,000$ դրամ), որպեսզի արտադրանքը հասցնի առավելագույնի: Այդ առավելագույն քանակը կկազմի մոտավորապես 13 138 միավոր արտադրանք:

7.19 Պայմանական էքստրեմումի խնդիրը երեք փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Երեք և ավելի շար փոփոխականի դեպքում պայմանական էքստրեմումի խնդիրն ավելի բազմազան է և ծավալուն, թեև խնդրի լուծման ընդհանուր սկզբունքները չեն փոխվում: Կարճ նկարագրենք իրավիճակը և բերենք համապատասխան օրինակներ:

Երեք փոփոխականի դեպքում պայմանական էքստրեմումի խնդիրը կարող է ունենալ մեկ կամ երկու կապի հավասարում: Առավել պարզ օրինակներում դեռևս հնարավոր է անմիջական փոփոխականների թվի կրճատման եղանակը:

Օրինակ 7.24. Դիտարկենք

$$u = f(M) = f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x + y + z^2 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

ֆունկցիան ամբողջ $\mathbb{R}^3$ եռաչափ տարածության վրա երկու կապի հավասարումների դեպքում՝

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) = x + y + z^2 \mapsto \text{extr.} \\ \varphi_1(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} z - x - 1 = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} y - xz - 1 = 0 : \end{cases} \quad (7-127)$$

Նշենք, որ կապի $\varphi_1 = 0$ և $\varphi_2 = 0$ հավասարումները երկրաչափորեն ներկայացնում են ինչ-որ $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ կոր, և միայն այդ կորի վրա է f ֆունկցիան հետազոտվում էքստրեմումի առումով, այսինքն՝ հետազոտվում է Γ կորի վրա f -ի նեղացումը, կգրենք $f(M)|_{M \in \Gamma}$ կամ կարճ՝ $f|_{\Gamma}$:

Կապի հավասարումների միջոցով արտաբռենք x փոփոխականը՝

$$\begin{cases} z - x - 1 = 0 \\ y - xz - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = x + 1 \\ y = xz + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = x + 1 \\ y = x^2 + x + 1 : \end{cases}$$

Տեղադրելով f ֆունկցիայի բանաձևի մեջ՝ ստանում ենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիա.

$$\begin{aligned} u = u(x) &= f(x, x^2 + x + 1, x + 1) = x + x^2 + x + 1 + (x + 1)^2 = \\ &= 2x^2 + 4x + 2 = 2(x + 1)^2 \mapsto \text{extr.} \quad x \in \mathbb{R} : \end{aligned}$$

Ստացանք սովորական էքստրեմումի պարզ խնդիր: Առկա է միայն մեկ էքստրեմումի (մինիմումի) կետ՝ $x_{\min} = -1$, $u_{\min} = 0$: Վերաձևակերպելով սկզբնական f ֆունկցիայի համար՝ ստանում ենք, որ f ֆունկցիան միայն մեկ $f_{\min} = 0$ էքստրեմում (մինիմում) ունի $M_{\min} = M_0(-1, 1, 0)$ կետում:

Օրինակ 7.25. Դիֆուզիոն

$$u = f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - y^2 + z^2 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

Ֆունկցիան ամբողջ $\mathbb{R}^3$ եռաչափ տարածության վրա միայն մեկ կապի հավասարման դեպքում՝

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 \mapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} 2x - y - 3 = 0 : \end{cases} \quad (7-128)$$

Նշենք, որ կապի $\varphi = 0$ հավասարումը երկրաչափորեն ներկայացնում է որոշակի $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ հարթություն, և միայն այդ հարթություն վրա է f ֆունկցիան հետազոտվում էքստրեմումի առումով, այսինքն՝ հետազոտվում է $f|_{\Gamma}$ նեղացումը:

Տեղադրելով կապի $y = 2x - 3$ հավասարումը ֆունկցիայի բանաձևի մեջ՝ արտաքսում ենք y փոփոխականը և ստանում երկու փոփոխականի ֆունկցիա՝

$$u = u(x, z) = f(x, 2x - 3, z) = x^2 - (2x - 3)^2 + z^2 = -3x^2 + 12x - 9 + z^2 \mapsto \text{extr.} \quad x, z \in \mathbb{R},$$

որի սովորական լոկալ էքստրեմումներն է հարկավոր գտնել: Նախ գտնենք $u(x, z)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կետերը՝

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -6x + 12 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ z = 0 : \end{cases}$$

Ուրեմն՝ $x = 2, z = 0$ կետը $u(x, z)$ ֆունկցիայի հնարավոր (լոկալ) էքստրեմումի միակ կետն է: Այն համապատասխանում է $M_0(2, 1, 0)$ կետին $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի համար:

Էքստրեմումի բավարար պայմանը կարելի է ստուգել՝ Δ որոշիչը հաշվելով $x = 2, z = 0$ կետում.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xz} \\ u''_{zx} & u''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0 :$$

Քանի որ Δ որոշիչը բացասական է, եզրակացնում ենք, որ $x = 2, z = 0$ սրացիոնար կետում $u(x, z)$ ֆունկցիան էքստրեմում չունի: Սա վերաձևակերպելով, $M_0(2, 1, 0)$ միակ սրացիոնար կետում $f(x, y, z)$ ֆունկցիան պայմանական էքստրեմում չունի, և ուրեմն՝ ֆունկցիան առհասարակ պայմանական էքստրեմում չունի:

Ինչպես տեսանք բերված երկու վերջին օրինակներում, անմիջական տեղադրման և փոփոխականի արտաքսման եղանակը հաջողությամբ գործում է: Սակայն այդ եղանակը որպես կանոն պիտանի չէ, երբ փոփոխականներից մեկը մյուսների միջոցով բացահայտ արտահայտել հնարավոր չէ: Երկու փոփոխականի ֆունկցիաների նման

այժմ նույնպես կարելի է ներմուծել օժանդակ **Լագրանժի ֆունկցիան** և կիրառել **Լագրանժի մեթոդը**, որն արդեն ավելի ծավալուն կլինի: Ընդհանուր դեպքում կապի հավասարումները երկուսն են (կապի երեք և ավելի հավասարումներ կարող են հանգեցնել խնդրի իմաստագրկման)։

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) \mapsto \text{extr.} \\ \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 : \end{cases} \quad (7-129)$$

Կապի $\varphi_1 = 0$ և $\varphi_2 = 0$ հավասարումները երկրաչափորեն ներկայացնում են ինչ-որ $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ կոր, և միայն այդ կորի վրա է f ֆունկցիան հեղադրվում էքստրեմումի առումով, այսինքն՝ հեղադրվում է Γ կորի վրա f -ի նեղացումը՝ $f|_{\Gamma}$, ինչպես փեսանք Օրինակ 7.24-ում: Կապի միայն մեկ հավասարման առկայությունը երկրաչափորեն ներկայացնում է սովորաբար ինչ-որ $S \subset \mathbb{R}^3$ մակերևույթ, և միայն այդ մակերևույթի վրա է f ֆունկցիան հեղադրվում էքստրեմումի առումով, այսինքն՝ հեղադրվում է S մակերևույթի վրա f -ի նեղացումը՝ $f|_S$, ինչպես փեսանք Օրինակ 7.25-ում:

Պայմանական էքստրեմումի (7-129) խնդրի Լագրանժի ընդհանուր մեթոդը նկարագրելու համար սահմանենք f ֆունկցիայի **Լագրանժի ֆունկցիան**՝

$$L(x, y, z) \equiv L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z), \quad (7-130)$$

որտեղ $(x, y, z) \in \Omega$ կետը փոփոխվում է իր (որոշման) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ եռաչափ տիրույթում, իսկ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ պարամետրերը կոչվում են **Լագրանժի բազմապարկիչներ** կամ **Լագրանժի անորոշ գործակիցներ**: Ինչպես և երկու փոփոխականի դեպքում՝ վճռական է հետևյալ փաստը՝

$f(x, y, z)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը համարժեք է f -ի Լագրանժի ֆունկցիայի սովորական լոկալ էքստրեմումի խնդրին:

Ուրեմն՝ $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդրի անհրաժեշտ պայմանը համարժեք է f -ի Լագրանժի ֆունկցիայի սրացիոնար կետի պայմանին, որն էլ հանգում է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \\ \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_{\lambda_1} = 0 \\ L'_{\lambda_2} = 0 : \end{cases} \quad (7-131)$$

Համակարգը հինգ հավասարումներից է բաղկացած և հինգ անհայտ ունի: (7-131) համակարգի լուծումները f ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի հնարավոր կետերն են:

Թեորեմ 7.28. (Պայմանական էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)

Դիցուք $f(x, y, z)$, $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$ ֆունկցիաները որոշված են և ողորկ $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ տիրույթում, $f, \varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\Omega)$, և $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ կերպը (7-129) խնդրի լուծում է, այսինքն՝ f -ի պայմանական էքստրեմումի կերպ է $\varphi_1 = 0$ և $\varphi_2 = 0$ կապի հավասարումների դեպքում:

Բացի այդ, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կերպում φ_1 և φ_2 ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալներից կազմված հեյսեյսի (Յակոբիի) մատրիցը

$$J = J(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ունի ոչ զրոյական 2-րդ կարգի միևնույն: Այլ կերպ՝ J մատրիցի ռանգը հավասար է 2-ի՝ $\text{rank } J = 2$:

Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ արժեքներ այնպիսիք, որ $(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2)$ հնգյակը բավարարում է (7-131) համակարգը, այսինքն՝ Լագրանժի L ֆունկցիայի ստացիոնար կերպ է:

Այժմ ձևակերպենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը երեք փոփոխականից կախված ֆունկցիաների համար:

Թեորեմ 7.29. (Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը)

Դրված է 2-րդ կարգի ողորկ $u = f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը կապի $\varphi_1(x, y, z) = 0$ և $\varphi_2(x, y, z) = 0$ հավասարումների դեպքում, այսինքն՝

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) \mapsto \text{extr.} \\ \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 : \end{cases} \quad (7-132)$$

Դիցուք $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կերպը ինչ-որ λ_1, λ_2 արժեքների դեպքում $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի Լագրանժի

$$L(x, y, z) \equiv L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z)$$

ֆունկցիայի ստացիոնար կերպ է, այսինքն՝ $dL(M_0) \equiv dL(x_0, y_0, z_0) \equiv 0$, կամ՝

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(M_0) + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(M_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(M_0) + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(M_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(M_0) + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(M_0) = 0 \\ \varphi_1(M_0) = 0 \\ \varphi_2(M_0) = 0 : \end{cases} \quad (7-133)$$

Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կերպով՝

$$\begin{aligned} d^2L(M_0) = & L''_{xx}(M_0) dx^2 + L''_{yy}(M_0) dy^2 + L''_{zz}(M_0) dz^2 + \\ & + 2L''_{xy}(M_0) dx dy + 2L''_{xz}(M_0) dx dz + 2L''_{yz}(M_0) dy dz : \end{aligned} \quad (7-134)$$

1) Եթե $d^2L(M_0) > 0$ բոլոր $\forall dx, dy, dz$ դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն՝ $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ հավասարումները՝

$$\begin{cases} d\varphi_1(M_0) = 0 \\ d\varphi_2(M_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(M_0) dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(M_0) dz = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(M_0) dy + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(M_0) dz = 0, \end{cases} \quad (7-135)$$

ապա $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կերպ f ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական մինիմումի կերպ է՝

$M_0(x_0, y_0, z_0) = M_{\min}$ կապի $\varphi_1 = 0$ և $\varphi_2 = 0$ հավասարումների դեպքում:

2) Եթե $d^2L(M_0) < 0$ բոլոր $\forall dx, dy, dz$ դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն, $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ (7-135) հավասարումները, ապա $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կերպ f ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական մաքսիմումի կերպ է՝

$M_0(x_0, y_0, z_0) = M_{\max}$ կապի $\varphi_1 = 0$ և $\varphi_2 = 0$ հավասարումների դեպքում:

3) Եթե $d^2L(M_0)$ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը նշանափոխ է (ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ) dx, dy, dz դիֆերենցիալների (աճերի) նույն (7-135) սահմանափակումների ներքո, ապա $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կերպ f ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կերպ չէ:

4) Եթե $d^2L(M_0) \geq 0$ կամ $d^2L(M_0) \leq 0$, երբ dx, dy, dz դիֆերենցիալները (աճերը) բավարարում են նույն (7-135) սահմանափակումները, ապա սրույգ ոչինչ ասել չենք կարող. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կերպ կարող է լինել ինչպես f -ի պայմանական էքստրեմումի կերպ, այնպես էլ չլինել այդպիսին (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):

Այսպիսով՝ ինչպես լոկալ էքստրեմումի դեպքում էր, այժմ պայմանական էքստրեմումի դեպքում ևս երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը (Լագրանժի ֆունկցիայի) փվյալ սրացիոնար կերպում որոշում է պայմանական էքստրեմումի առկայությունը:

Քննարկենք մի քանի օրինակներ, որոնցում պայմանական էքստրեմումները հիմնականում կորոնենք անորոշ բազմապարկիչների Լագրանժի մեթոդով:

Օրինակ 7.26. Դիտարկենք Օրինակ 7.24-ում արդեն հետազոտված

$$u = f(M) = f(x, y, z) \stackrel{def}{=} x + y + z^2 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

Ֆունկցիան երկու կապի հավասարումների դեպքում՝

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) = x + y + z^2 \longrightarrow \text{extr.} \\ \varphi_1(x, y, z) = z - x - 1 = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = y - xz - 1 = 0 : \end{cases} \quad (7-136)$$

Պայմանական էքստրեմումի այս խնդիրն Օրինակ 7.24-ում մենք լուծեցինք անմիջական տեղադրման և փոփոխականների արտաքսման եղանակով: Այժմ նույն (7-136) խնդիրը լուծենք Լագրանժի մեթոդով՝ ցույց տալու համար՝ ինչպես է այն գործում երեք փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում: Կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$\begin{aligned} L \equiv L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z) = \\ &= x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1) \end{aligned}$$

և գրենք նրա սրացիոնար կետերը՝ լուծելով (7-131) համակարգը՝

$$\begin{cases} L'_x = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0 \\ L'_y = 1 + \lambda_2 = 0 \\ L'_z = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0 \\ \varphi_1 = z - x - 1 = 0 \\ \varphi_2 = y - xz - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = z + 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ x + 3z = -1 \\ z - x = 1 \\ y - xz = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 : \end{cases}$$

Այսպիսով, $M_0(-1, 1, 0)$ կետը Լագրանժի ֆունկցիայի միակ սրացիոնար կետն է և ուրեմն՝ $f(M)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի միակ հնարավոր կետը:

Էքստրեմումի բավարար պայմանը ստուգելու համար գրենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը՝

$$\begin{aligned} L''_{xx} &= 0, & L''_{xy} &= 0, \\ L''_{yy} &= 0, & L''_{xz} &= -\lambda_2 = 1, \\ L''_{zz} &= 2, & L''_{yz} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 L(M_0) &= L''_{xx}(M_0) dx^2 + L''_{yy}(M_0) dy^2 + L''_{zz}(M_0) dz^2 + \\ &+ 2L''_{xy}(M_0) dx dy + 2L''_{xz}(M_0) dx dz + 2L''_{yz}(M_0) dy dz = \\ &= 2 dz^2 + 2 dx dz = 2 dz(dz + dx) : \end{aligned}$$

Բացի այդ, պահանջենք, որ M_0 կետում կարարվեն կապի դիֆերենցիալ (7-135) հավասարումները՝

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} dz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} dx - dz = 0 \\ z dx - dy + x dz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} dx - dz = 0 \\ -dy - dz = 0 \end{cases}$$

կամ $\boxed{dx = dz = -dy}$: Տեղադրենք աճերի այս կապը Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի մեջ՝

$$d^2 L(M_0) = 2 dz (dz + dx) = 2 dz (dz + dz) = 4 dz^2 > 0, \quad \text{եթե} \quad dz \neq 0 :$$

Քանի որ $d^2 L(M_0) > 0$, երբ dx, dy, dz աճերը միաժամանակ զրո չեն՝ $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ $d\varphi_1 = 0, d\varphi_2 = 0$ հավասարումները, ապա համաձայն Թեորեմ 7.29, 1)-ի՝ M_0 կետում f ֆունկցիան պայմանական մինիմում ունի՝ $\boxed{M_{\min} = M_0(-1, 1, 0)}$, և մինիմումի արժեքն է $f_{\min} = 0$:

Օրինակ 7.27. Դիտարկենք

$$\boxed{u = f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - y^2 + z^2} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

ֆունկցիան, որն արդեն հեղադրել էինք Օրինակ 7.25-ում: Տրված է միայն մեկ կապի հավասարում.

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 \mapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} 2x - y - 3 = 0 : \end{cases} \quad (7-137)$$

Տեղադրման եղանակի փոխարեն այժմ կիրառենք Լագրանժի մեթոդը: Կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L \equiv L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + \lambda(2x - y - 3)$$

և գրենք նրա ստացիոնար կետերը՝ լուծելով (7-131) համակարգը՝

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda = 0 \\ L'_y = -2y - \lambda = 0 \\ L'_z = 2z = 0 \\ \varphi = 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + \lambda = 0 \\ \lambda = -2y \\ z = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 : \end{cases}$$

Այսպիսով, $M_0(2, 1, 0)$ կետը Լագրանժի ֆունկցիայի միակ ստացիոնար կետն է և ուրեմն՝ $f(M)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի միակ հնարավոր կետը:

Էքստրեմումի բավարար պայմանը ստուգելու համար գրենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը՝

$$\begin{array}{lll} L''_{xx} = 2, & L''_{yy} = -2, & L''_{zz} = 2, \\ L''_{xy} = 0, & L''_{xz} = 0, & L''_{yz} = 0, \end{array}$$

$$\begin{aligned} d^2 L(M_0) &= L''_{xx}(M_0) dx^2 + L''_{yy}(M_0) dy^2 + L''_{zz}(M_0) dz^2 + \\ &\quad + 2L''_{xy}(M_0) dx dy + 2L''_{xz}(M_0) dx dz + 2L''_{yz}(M_0) dy dz = \\ &= 2 dx^2 - 2 dy^2 + 2 dz^2 : \end{aligned}$$

Բացի այդ, պահանջենք, որ M_0 կետում կադրավի կապի դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 dx - dy = 0 :$$

Տեղադրենք աճերի այս $dy = 2 dx$ կապը Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի մեջ՝

$$d^2 L(M_0) = 2(dx^2 - dy^2 + dz^2) = 2(dz^2 - 3 dx^2) :$$

Նեշը t տեսնել, որ $d^2 L(M_0)$ դիֆերենցիալը կարող է ընդունել տարբեր նշանների արժեքներ, օրինակ՝

$$\begin{array}{ll} d^2 L(M_0) = -4 dx^2 < 0, & \text{երբ } dz = dx \neq 0, \\ d^2 L(M_0) = 2 dx^2 > 0, & \text{երբ } dz = 2 dx \neq 0 : \end{array}$$

Քանի որ $d^2 L(M_0)$ դիֆերենցիալը նշանափոխ է, երբ dx, dy, dz աճերը միաժամանակ զրո չեն՝ $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ $d\varphi = 0$ հավասարումը, ապա համաձայն **Թեորեմ 7.29, 3)**-ի՝ $M_0(2, 1, 0)$ սրացիոնար կետում f ֆունկցիան պայմանական էքստրեմում չունի, և ուրեմն՝ ֆունկցիան առիաստրակ պայմանական էքստրեմում չունի:

Գլուխ 8

Ռիմանի ինտեգրալի հեղափոխական ընդհանրացումները՝

- պարամետրից կախված ինտեգրալներ (ՊԿԻ),
- Սպիլլերի ինտեգրալ,
- կրկնակի ինտեգրալ

8.1 Պարամետրից կախված ինտեգրալների հավասարաչափ զուգամիությունը

Նախքան ինտեգրալներին անդրադառնալը սահմանենք հավասարաչափ զուգամիության ընդհանուր գաղափարը, որը մենք սահմանել էինք $f_n(x)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների և շարքերի համար: Այժմ փրկված է երկու փոփոխականի ֆունկցիա՝ $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, որի հավասարաչափ սահմանը պետք է սահմանենք:

Սահմանում 8.1. Կասենք, որ $f(x, y) : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիան **զուգամիություն է** $\varphi(x)$ ֆունկցիային **հավասարաչափ** $X \subset \mathbb{R}$ բազմության վրա (կամ ըստ x -ի), և կգրենք

$$f(x, y) \Rightarrow \varphi(x), \quad \text{երբ } y \rightarrow y_0, \quad x \in X,$$

եթե րեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall y, 0 < |y - y_0| < \delta, \quad |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X \quad (\text{միաժամանակ}) : \quad (8-1)$$

Նկատենք, որ (8-1)-ի վերջին ε -անհավասարությունը րեղի ունի բոլոր x -երի համար միաժամանակ, և δ -ն անկախ է x -երից:

Եթե (8-1) պայմանը կարարվի ոչ թե բոլոր x -երի համար միաժամանակ, այլ յուրաքանչյուր ֆիքսած $x \in X$ կետի համար առանձին, ապա այդպիսի զուգամիությունը կոչվում է **կետային** և նշանակվում $f(x, y) \rightarrow \varphi(x)$, երբ $y \rightarrow y_0$, $x \in X$: Կետային զուգամիության համեմատ հավասարաչափ զուգամիությունը շար ավելի ուժեղ պայման է : Պարզ է, որ հավասարաչափ զուգամիությունից հետևում է կետային զուգամիությունը, իսկ հակադարձը սխալ է, ինչպես կրեսնենք ստորև բերված օրինակում:

Հավասարաչափ զուգամիության (8-1) սահմանումը հաճախ հարմար է ներկայացնել ձևափոխված կամ հարմարեցված տեսքով.

$$f(x, y) \Rightarrow \varphi(x), \text{ երբ } y \rightarrow y_0, \text{ հավասարաչափ } x \in X \text{ բազմության վրա} \iff (8-1) \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall y, 0 < |y - y_0| < \delta, \quad \sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad (8-2)$$

$$\iff \sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow y_0) : \quad (8-3)$$

Օրինակ 8.1. Յույց տանք, որ $x \in (1, +\infty)$ բազմության վրա $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-xy}$ ֆունկցիան հավասարաչափ զուգամի է, երբ $y \rightarrow +\infty$: Իսկապես, նախ նկատենք, որ, երբ $y \rightarrow +\infty$, $f(x, y)$ ֆունկցիան կետորեն զուգամիություն է հաստատում $\varphi(x) \equiv 0$ ֆունկցիային.

$$f(x, y) = e^{-xy} \rightarrow 0, \quad \text{երբ } y \rightarrow +\infty, \quad x \in (1, +\infty) :$$

Այժմ ստուգենք՝ արդյո՞ք այս զուգամիությունը նաև հավասարաչափ կլինի նույն բազմության վրա:

Կազմենք (8-3) պայմանը և ստուգենք այն.

$$\sup_{x \in (1, +\infty)} |f(x, y) - \varphi(x)| = \sup_{x \in (1, +\infty)} |e^{-xy} - 0| = \sup_{x \in (1, +\infty)} e^{-xy} = e^{-y} \rightarrow 0, \quad \text{երբ } y \rightarrow +\infty :$$

Այսպիսով, (8-3) պայմանը և ֆունկցիայի հավասարաչափ զուգամիությունը հաստատվեց $x \in (1, +\infty)$ բազմության վրա.

$$f(x, y) = e^{-xy} \Rightarrow 0, \quad \text{երբ } y \rightarrow +\infty, \quad x \in (1, +\infty) :$$

Այժմ նույն հարցին պատասխանենք մեկ այլ բազմության դեպքում: Պարզվում է, որ $x \in (0, +\infty)$ ավելի լայն բազմության վրա նույն $f(x, y)$ ֆունկցիան այլևս հավասարաչափ զուգամի չէ (**զուգամի է անհավասարաչափ**).

$$f(x, y) = e^{-xy} \not\Rightarrow 0, \quad \text{երբ } y \rightarrow +\infty, \quad x \in (0, +\infty) :$$

Սա բացատրվում է սուսրենումի արժեքով, որն աճում է ավելի լայն բազմության վրա.

$$\sup_{x \in (0, +\infty)} |f(x, y) - \varphi(x)| = \sup_{x \in (0, +\infty)} |e^{-xy} - 0| = \sup_{x > 0} e^{-xy} = 1 \not\rightarrow 0, \quad \text{երբ } y \rightarrow +\infty :$$

Ինչպես ամեն մի զուգամիություն, ֆունկցիայի հավասարաչափ զուգամիությունը ևս լիարժեք նկարագրվում է զուգամիության **Կոշու** պայմանով:

Թեորեմ 8.1. *(Ֆունկցիայի հավասարաչափ զուգամիության Կոշու սկզբունքը)*

$f(x, y)$ ֆունկցիան հավասարաչափ զուգամիություն է ըստ x -ի X բազմության վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի **Կոշու** հետևյալ պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall y_1, y_2, \quad \begin{cases} 0 < |y_1 - y_0| < \delta \\ 0 < |y_2 - y_0| < \delta \end{cases} \implies \sup_{x \in X} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon : \quad (8-4)$$

Ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների տեսությունից մեզ հայտնի էր, որ անընդհատ ֆունկցիաների հավասարաչափ սահմանը անընդհատ է: Նույն պնդումը ճիշտ է ֆունկցիայի զուգամիության համար:

Թեորեմ 8.2. *(Սահմանային ֆունկցիայի անընդհատության մասին)*

Տվյալ y_0 կետի $\mathcal{U}(y_0)$ շրջակայքում և $X \subset \mathbb{R}$ բազմության մեջ

$$\left(\begin{array}{l} f(x, y) \in C(X) \quad \forall y \in \mathcal{U}(y_0), y \neq y_0, \\ f(x, y) \Rightarrow \varphi(x) \quad (y \rightarrow y_0), \quad \text{հավասարաչափ } x \in X \text{ բազմության վրա} \end{array} \right) \implies \boxed{\varphi(x) \in C(X)} :$$

Այլ կերպ ասած՝ $\text{անընդհատ ֆունկցիաների հավասարաչափ սահմանը անընդհատ է}$:

8.2 Պարամետրից կախված ինտեգրալների հատկությունները

Դիցուք րոշված է երկու փոփոխականի ֆունկցիա՝ $f(x, y) : [a, b] \times Y \mapsto \mathbb{R}$, ընդ որում՝ յուրաքանչյուր y -ի համար ($y \in Y \subset \mathbb{R}$) $f(x, y)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է (Ռիմանի իմաստով) $[a, b]$ հատվածում, ըստ x -ի, $f(x, y) \in \mathcal{R}[a, b]$: Նշանակենք ինտեգրալը, որը ներկայացնում է y -ի ֆունկցիա.

$$\boxed{I(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x, y) dx}, \quad y \in Y : \quad (8-5)$$

$I(y)$ ֆունկցիան կանվանենք y պարամետրից կախված ինտեգրալ (**ՊԿԻ**):

Մեզ հետաքրքրում են պարամետրից կախված ինտեգրալի անընդհատության, դիֆերենցելիության, ինտեգրելիության և այլ հարցեր: Կարճ կներկայացնենք դրանք:

Թեորեմ 8.3. (Սահմանային անցում ինտեգրալի նշանի տակ)

1) $\mathcal{U}(y_0)$ շրջակայքի յուրաքանչյուր y կետի համար $f(x, y)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է (Ռիմանի իմաստով) $[a, b]$ -ում՝ ըստ x -ի:

$$\forall y \in \mathcal{U}(y_0) \quad f(x, y) \in \mathcal{R}[a, b] :$$

2) $f(x, y) \Rightarrow \varphi(x) \quad (y \rightarrow y_0)$ հավասարաչափ $x \in [a, b]$ հաստատվածում:

Այդ դեպքում կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի տակ.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx : \quad (8-6)$$

Թեորեմ 8.4. (Պարամետրից կախված ինտեգրալի անընդհանուր դեպքի մասին)

Եթե $f(x, y) \in C([a, b] \times [c, d])$ անընդհանուր է որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա, ապա

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad \text{ֆունկցիան անընդհանուր է } [c, d] \text{ հաստատվածում՝ } \boxed{I(y) \in C[c, d]} :$$

Թեորեմ 8.5. (Պարամետրից կախված ինտեգրալի դիֆերենցման Լայբնիցի կանոնը)

1) Դիցուք $f(x, y) : [a, b] \times [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ ֆունկցիան անընդհանուր է $[a, b]$ -ում՝ ըստ x -ի, $[c, d]$ հաստատվածի յուրաքանչյուր y կետի համար.

$$\forall y \in [c, d] \quad f(x, y) \in C[a, b] :$$

2) $\exists f'_y(x, y) \in C([a, b] \times [c, d])$ անընդհանուր է որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա:

Այդ դեպքում կարելի է ՊԿԻ-ն ածանցել ինտեգրալի նշանի տակ.

$$\boxed{I'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f'_y(x, y) dx}, \quad y \in [c, d] : \quad (8-7)$$

Թեորեմ 8.6. (ՊԿԻ-ի դիֆերենցման Լայբնիցի ընդհանրացված կանոնը)

1) Դիցուք $f(x, y) \in C([a, b] \times [c, d])$ և $\exists f'_y(x, y) \in C([a, b] \times [c, d])$ ֆունկցիաներն անընդհանուր են որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիաներ:

2) $x = \alpha(y), x = \beta(y) : [c, d] \mapsto [a, b]$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են:

Այդ դեպքում ճիշտ է ՊԿԻ-ի ածանցման Լայբնիցի ընդհանրացված կանոնը՝

$$\boxed{\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y)}, \quad y \in [c, d] : \quad (8-8)$$

Թեորեմ 8.7. (Ֆուրիենի թեորեմ, պարամետրից կախված ինտեգրալի ինտեգրումը)

Եթե $f(x, y) \in C([a, b] \times [c, d])$ անընդհատ է որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա, ապա

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx, \quad (8-9)$$

այսինքն՝ կարելի է փոխել ինտեգրման կարգը:

Նշենք, որ (8-9) բանաձևը կարելի է արտագրել առանց փակագծերի.

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy : \quad (8-10)$$

8.3 Պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալի (ՊԿԱԻ)**հավասարաչափ զուգամիությունը**

Դիցուք տրված է երկու փոփոխականի ֆունկցիա՝ $f(x, y) : [a, +\infty) \times Y \mapsto \mathbb{R}$, և ենթադրենք, որ յուրաքանչյուր y -ի համար ($y \in Y \subset \mathbb{R}$) գոյություն ունի (զուգամետ է) $f(x, y)$ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալը $[a, +\infty)$ ճառագայթով.

$$I(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x, y) dx, \quad y \in Y : \quad (8-11)$$

$I(y)$ ֆունկցիան կանվանենք y պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալ (ՊԿԱԻ):

Նշանակենք կտրած ինտեգրալը, որը երկու փոփոխականի ֆունկցիա է .

$$\Phi(A, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^A f(x, y) dx, \quad A > a, \quad y \in Y : \quad (8-12)$$

Եթե յուրաքանչյուր ֆիքսած $\forall y \in Y$ կերի համար $\Phi(A, y) \longrightarrow I(y)$, երբ $A \rightarrow +\infty$, ապա

(8-11) $I(y)$ ինտեգրալը պարզապես զուգամետ է : Սա կերային զուգամիություն է :

Սահմանում 8.2. Եթե կտրած $\Phi(A, y)$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է ըստ y -ի՝ Y բազմության վրա՝ $y \in Y$,

$$\Phi(A, y) \Rightarrow I(y), \quad \text{երբ } A \rightarrow +\infty, \quad \text{հավասարաչափ՝ ըստ } y \in Y, \quad (8-13)$$

ապա (8-11) $I(y)$ ՊԿԱԻ-ն կոչվում է հավասարաչափ զուգամետ Y բազմության վրա:

Նույն (8-13) պայմանը կարելի է արտագրել ε -լեզվով.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B = B(\varepsilon) > a \quad s.t. \quad \forall A > B \quad \implies \\ \implies \quad \left| \int_a^A f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right| = \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \end{aligned} \quad (8-14)$$

բոլոր y -ների համար միաժամանակ, $y \in Y$,

կամ նույնը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B = B(\varepsilon) > a \quad s.t. \quad \forall A > B \quad \implies \sup_{y \in Y} \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon : \quad (8-15)$$

Այս պայմանը նշանակում է, որ $I(y)$ ինտեգրալի մնացորդը (պոչը) հավասարաչափ զուգամիություն է գրոյի, այսինքն՝

$$\boxed{\int_A^{+\infty} f(x, y) dx \Rightarrow 0}, \quad \text{երբ } A \rightarrow +\infty, \quad \text{հավասարաչափ } Y \text{ բազմության վրա:} \quad (8-16)$$

Այսպիսով, ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիությունը կարելի է սահմանել իրար համարժեք (8-13)–(8-16) պայմաններից որևէ մեկով՝ $(8-13) \iff (8-14) \iff (8-15) \iff (8-16)$:

Հավասարաչափ զուգամիության սահմանումը տարբեր ձևակերպումներով տարածվում է 2-րդ սեռի անհսկական ինտեգրալների վրա: Դիցուք տրված է 2-րդ սեռի անհսկական ինտեգրալ, որի եզակի կետը, ենթադրենք, ինտեգրման միջակայքի աջ ծայրակետն է.

$$\boxed{I(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} f(x, y) dx}, \quad y \in Y : \quad (8-17)$$

Նշանակենք կտրած ինտեգրալը, որը երկու փոփոխականի ֆունկցիա է,

$$\boxed{\Phi(\eta, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^{b-\eta} f(x, y) dx}, \quad \eta > 0, \quad y \in Y : \quad (8-18)$$

Եթե յուրաքանչյուր ֆիքսած $\forall y \in Y$ կետի համար $\boxed{\Phi(\eta, y) \longrightarrow I(y), \quad \text{երբ } \eta \rightarrow +0}$, ապա

(8-17) $I(y)$ ինտեգրալը պարզապես զուգամեր է : Սա **կետային զուգամիություն** է :

Սահմանում 8.3. Եթե կտրած $\Phi(\eta, y)$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեր է՝ ըստ y -ի՝ Y բազմության վրա ($y \in Y$).

$$\boxed{\Phi(\eta, y) \Rightarrow I(y), \quad \text{երբ } \eta \rightarrow +0}, \quad \text{հավասարաչափ ըստ } y \in Y, \quad (8-19)$$

ապա (8-17) $I(y)$ ՊԿԱԻ-ը կոչվում է **հավասարաչափ զուգամեր** Y բազմության վրա:

Նույն (8-19) պայմանը կարելի է արտագրել ε -լեզվով.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad s.t. \quad \forall \eta, 0 < \eta < \delta, \quad &\implies \\ &\implies \left| \int_a^{b-\eta} f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y) dx \right| = \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon \end{aligned} \quad (8-20)$$

բոլոր y -ների համար միաժամանակ, $y \in Y$,

կամ նույնը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad s.t. \quad \forall \eta, 0 < \eta < \delta, \quad \implies \sup_{y \in Y} \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon : \quad (8-21)$$

Այս պայմանը նշանակում է, որ $I(y)$ ինտեգրալի մնացորդը (պոչը) հավասարաչափ զուգամիպում է զրոյի, այսինքն՝

$$\boxed{\int_{b-\eta}^b f(x, y) dx \Rightarrow 0}, \quad \text{երբ } \eta \rightarrow +0, \quad \text{հավասարաչափ } Y \text{ բազմության վրա:} \quad (8-22)$$

Այսպիսով, 2-րդ սեռի ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիությունը կարելի է սահմանել իրար համարժեք (8-19)–(8-22) պայմաններից որևէ մեկով՝ $(8-19) \iff (8-20) \iff (8-21) \iff (8-22)$:

Ինչպես ամեն մի զուգամիություն, ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիությունը լիովին բնութագրվում է Կոշու պայմանով: Բավական է գրել ինտեգրալի պոչի զրոյին հավասարաչափ զուգամիություն Կոշու պայմանը և Կոշու սկզբունքը:

Թեորեմ 8.8. Որպեսզի $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ անիսկական ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամիություն լինի $y \in Y$ բազմության վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա Կոշու հետևյալ պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B = B(\varepsilon) > a \quad s.t. \quad \forall A_1, A_2 > B \quad \implies \sup_{y \in Y} \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon : \quad (8-23)$$

Նմանապես ձևակերպվում է Կոշու սկզբունքը 2-րդ սեռի անիսկական ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիության համար: Դարձյալ քննարկենք (8-17) անիսկական ինտեգրալը, որի եզակի կետն ինտեգրման միջակայքի $x = b$ աջ ծայրակետն է :

Թեորեմ 8.9. Որպեսզի $\int_a^b f(x, y) dx$ անիսկական ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամիություն լինի $y \in Y$ բազմության վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա Կոշու հետևյալ պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad s.t. \quad \forall \eta_1, \eta_2, 0 < \eta_1, \eta_2 < \delta, \quad \implies \sup_{y \in Y} \left| \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon : \quad (8-24)$$

8.4 Պարամետրից կախված անխսկական ինտեգրալի (ՊԿԱԻ)

հավասարաչափ զուգամիություն հայրանիշներ

ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիության առկայությունը կարևոր է բազմաթիվ կիրառական խնդիրներում, ուստի պետք է կարողանալ հաստատել կամ հերքել հավասարաչափ զուգամիության փաստը: Այդ նպատակով ձևակերպենք մի քանի հայրանիշներ, որոնք ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիության բավարար պայմաններ են պալիս: Առաջինը Վայերշտրասի մաժորանտային հայրանիշն է, որը շատ է հիշեցնում բաղդարման թեորեմները:

Թեորեմ 8.10. (Վայերշտրասի մաժորանտային հայրանիշը ՊԿԱԻ համար)

Դիցուք $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$, ՊԿԱԻ-ի ենթինտեգրալային $f(x, y) : [a, +\infty) \times Y \mapsto \mathbb{R}$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմանները.

ա) $f(x, y) \in \mathcal{R}[a, A]$ $\forall A > a$ և յուրաքանչյուր ֆիքսած $y \in Y$ համար;

բ) $\exists \varphi(x)$ (այն կոչվում է f -ի մաժորանտ) $s.t.$ $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$, $x > a$, $y \in Y$;

գ) $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx < +\infty$ զուգամեր է:

Այդ դեպքում $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ ինտեգրալը զուգամեր է բացարձակ և հավասարաչափ Y բազմության վրա:

Ապացույց. Երկու անգամ օգտվենք զուգամիության Կոշու սկզբունքից՝ սովորական և հավասարաչափ զուգամիության համար, րեն Թեորեմ 8.8.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B = B(\varepsilon) > a \quad s.t. \quad \forall A_1, A_2 > B \quad \implies \\ \implies \quad \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) dx \right| &\leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x, y)| dx \leq \int_{A_1}^{A_2} \varphi(x) dx < \varepsilon : \end{aligned}$$

Քանի որ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի անխսկական ինտեգրալը զուգամեր է, ապա նրա համար Կոշու պայմանը րեդի ունի: Ներկաբար՝ առավել ևս րեդի ունի Կոշու պայմանը $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ և $\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$ ինտեգրալների հավասարաչափ զուգամիության համար: $\square$

Բերենք պարզագույն օրինակ:

Օրինակ 8.2. Յույց րանք, որ $\alpha \in \mathbb{R}$ պարամետրից կախված՝

$$I(\alpha) \stackrel{def}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

անհսկակալի ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեծ է ամբողջ թվային առանցքի վրա ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

Ընդամենը պետք է գնահատել՝

$$\left| \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} \stackrel{u_2}{=} \varphi(x), \quad x \geq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} :$$

Մաժորանտի դերը կարարում է $\varphi(x)$ ֆունկցիան, որի անհսկակալի ինտեգրալը զուգամեծ է $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} < +\infty$: Նախաձայն Վայերշտրասի մաժորանտային հայրանիշի (Թեորեմ 8.10)՝ $I(\alpha)$ ինտեգրալը զուգամեծ է բացարձակ և հավասարաչափ $\mathbb{R}$ իրական առանցքի վրա:

Թեորեմ 8.11. (Աբել-Դիրիխլեի 1-ին հայրանիշը ՊԿԱԻ հավասարաչափ զուգամիտության համար)

Դիցուք յուրաքանչյուր ֆիքսած $y \in Y$ կերի համար $f(x, y), g(x, y) : [a, +\infty) \times Y \mapsto \mathbb{R}$ ֆունկցիաներն ինտեգրելի են (Ռիմանի իմաստով) ըստ x -ի վերջավոր հատվածներում:

$f(x, y), g(x, y) \in \mathcal{R}[a, A] \quad \forall A > a$ և յուրաքանչյուր ֆիքսած $y \in Y$ համար և բավարարում են հետևյալ պայմանները.

ա1) $f(x, y)$ -ի նախնականն (ըստ x -ի) հավասարաչափ սահմանափակ է, այսինքն՝

$$\left| \int_a^A f(x, y) dx \right| \leq M = \text{const}, \quad A > a, \quad y \in Y;$$

բ1) Անվերջում $g(x, y)$ ֆունկցիան մոնոտոն (ըստ x -ի) և հավասարաչափ (ըստ y -ի) ձգվում է զրոյի, այսինքն՝

$$g(x, y) \searrow 0, \quad \text{կամ} \quad g(x, y) \nearrow 0, \quad \text{երբ} \quad x \rightarrow +\infty :$$

Այդ դեպքում

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx, \quad y \in Y, \quad (8-25)$$

ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեծ է Y բազմության վրա:

Թեորեմ 8.12. (Աբել-Դիրիխլեի 2-րդ հայրանիշը ՊԿԱԻ հավասարաչափ զուգամիտության համար)

Դիցուք յուրաքանչյուր ֆիքսած $y \in Y$ կերի համար $f(x, y), g(x, y) : [a, +\infty) \times Y \mapsto \mathbb{R}$ ֆունկցիաներն ինտեգրելի են (Ռիմանի իմաստով) ըստ x -ի վերջավոր հատվածներում:

$f(x, y), g(x, y) \in \mathcal{R}[a, A] \quad \forall A > a$ և յուրաքանչյուր ֆիքսած $y \in Y$ համար և բավարարում են հետևյալ պայմանները.

ա2) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$, $y \in Y$, ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեծ է Y բազմության վրա:

բ2) Յուրաքանչյուր ֆիքսած $y \in Y$ համար $g(x, y)$ ֆունկցիան մոնոտոն է ըստ x -ի, և

$$|g(x, y)| \leq M = \text{const}, \quad x > a, \quad y \in Y :$$

Այդ դեպքում

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx, \quad y \in Y, \quad (8-26)$$

ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեծ է Y բազմության վրա:

8.5 Պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալների (ՊԿԱԻ)

անընդհատությունը, դիֆերենցելիությունը, ինտեգրելիությունը

և այլ հատկություններ

Ինչպես պարամետրից կախված ռիմանյան (իսկական) ինտեգրալների դեպքում էր, այժմ մեզ հետաքրքրում են ՊԿԱԻ-ի անընդհատության, դիֆերենցելիության, ինտեգրելիության հարցերը: Առանց ապացույցների կարճ ներկայացնենք դրանք:

Թեորեմ 8.13. (Սահմանային անցում ՊԿԱԻ-ի նշանի տակ)

Դիցուք $f(x, y) : [a, +\infty) \times \mathcal{U}(y_0) \mapsto \mathbb{R}$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմանները.

- 1) $\mathcal{U}(y_0)$ շրջակայքի յուրաքանչյուր y կետի համար $\forall y \in \mathcal{U}(y_0), \quad f(x, y) \in C[a, +\infty)$;
- 2) $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x) \quad (y \rightarrow y_0)$ հավասարաչափ ըստ $x \in [a, A]$ յուրաքանչյուր $\forall A > a$ համար;
- 3) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեծ է $y \in \mathcal{U}(y_0)$ բազմության վրա:

Այդ դեպքում կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի տակ.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx : \quad (8-27)$$

Թեորեմ 8.14. (Դինիի թեորեմ, Սահմանային անցում ՊԿԱԻ-ի նշանի տակ)

Դիցուք $f(x, y) : [a, +\infty) \times \mathcal{U}(y_0) \mapsto \mathbb{R}$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմանները.

- 1) $f(x, y) \in C[a, +\infty), \quad \forall y \in \mathcal{U}(y_0)$;
- 2) $f(x, y) \geq 0, \quad x \geq a, \quad y \in \mathcal{U}(y_0)$;
- 3) $f(x, y) \nearrow \varphi(x) \quad (y \rightarrow y_0)$, յուրաքանչյուր $\forall x \geq a$ համար ;
- 4) $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx < +\infty$ զուգամեծ է :

Այդ դեպքում $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ ինտեգրալը կետորեն զուգամեծ է $\forall y \in \mathcal{U}(y_0)$, և կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի տակ.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx : \quad (8-28)$$

Թեորեմ 8.15. (ՊԿԱԻ-ի անընդհանուրության մասին)

- Եթե 1) $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, d])$ անընդհանուր է որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա;
- 2) $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեր է $y \in [c, d]$ հարվածում,
- այսինքն $I(y) \in C[c, d]$:

Թեորեմ 8.16. (ՊԿԱԻ-ի դիֆերենցիալ Լայբնիցի կանոնը) Դիցուք՝

- 1) $f(x, y), f'_y(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, d])$ անընդհանուր են որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիաներ;
- 2) $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ ինտեգրալը զուգամեր է գոնե մեկ $y_0 \in [c, d]$ կետի համար;
- 3) $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեր է $y \in [c, d]$ հարվածում:
- Այդ դեպքում $I(y)$ ինտեգրալը կարելի է ածանցել ինտեգրալի նշանի տակ.

$$I'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d] : \quad (8-29)$$

Թեորեմ 8.17. (Ֆուրիեի թեորեմ, ՊԿԱԻ-ի ինտեգրումը)

- Եթե 1) $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, d])$ անընդհանուր է որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա;
- 2) $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեր է $y \in [c, d]$ հարվածում,
- այսինքն

$$\int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx, \quad (8-30)$$

այսինքն՝ կարելի է փոխել ինտեգրման կարգը:

Նշենք, որ (8-30) տեսքի բանաձևերը կարելի է արտագրել առանց փակագծերի.

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy : \quad (8-31)$$

Թեորեմ 8.18. (Ֆուրիեի թեորեմ, ինտեգրման կարգի փոփոխումը)

- Դիցուք՝ 1) $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, +\infty))$ անընդհանուր է որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա;
- 2) $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեր է ըստ $y \in [c, d] \quad \forall d > c$ համար;
- 3) $J(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեր է ըստ $x \in [a, b] \quad \forall b > a$ համար;
- 4) Երկու հաջորդական ինտեգրալներից՝

$$\int_c^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx \right) dy, \quad \int_a^{+\infty} \left(\int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy \right) dx$$

գոնեն մեկը (բացարձակ) զուգամեկը է :

Այդ դեպքում՝

$$\int_c^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx : \quad (8-32)$$

Թեորեմ 8.19. (Փութինիի թեորեմ, ինտեգրման կարգի փոփոխումը)

Դիցուք՝ 1) $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, +\infty))$ անընդհատ է որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա;

2) $f(x, y) \geq 0$, $x \geq a$, $y \geq c$;

3) $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \in C[c, +\infty)$, $J(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \in C[a, +\infty)$;

4) Երկու հաջորդական ինտեգրալներից՝

$$\int_c^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy, \quad \int_a^{+\infty} \left(\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx$$

գոնեն մեկը գոյություն ունի:

Այդ դեպքում գոյություն ունի մյուս հաջորդական ինտեգրալը, և դրանք հավասար են.

$$\int_c^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx : \quad (8-33)$$

Ձևակերպենք նաև Թեորեմ 8.19-ի փարբերակը 2-րդ սեռի անխակական ինտեգրալների համար:

Թեորեմ 8.20. (Փութինիի թեորեմ, ինտեգրման կարգի փոփոխումը)

Դիցուք՝ 1) $f(x, y) \in C((a, b] \times (c, d])$ անընդհատ է որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա, իսկ

$x = a$ և $y = c$ կետերը եզակի կետեր են;

2) $f(x, y) \geq 0$, $a < x \leq b$, $c < y \leq d$;

3) $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx \in C(c, d]$, $J(x) = \int_c^d f(x, y) dy \in C(a, b]$;

4) Երկու հաջորդական ինտեգրալներից՝

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy, \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

գոնեն մեկը գոյություն ունի:

Այդ դեպքում գոյություն ունի մյուս հաջորդական ինտեգրալը, և դրանք հավասար են.

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx : \quad (8-34)$$

Դիպողություն 8.1. Բոլոր այն պնդումները, որոնք ձևակերպված են 1-ին սեռի անխակական ինտեգրալների համար համապատասխան փոփոխություններով ձևակերպվում են և տեղի ունեն 2-րդ սեռի անխակական ինտեգրալների համար:

8.6 Նշանավոր անիսկական ինտեգրալներ:

Դիրիխլեի ինտեգրալը

Ներկայացնենք մի քանի նշանավոր անիսկական ինտեգրալների հաշվարկը, որոնցից են Դիրիխլեի, Պուասոնի, Ֆրենելի ինտեգրալները:

Թեորեմ 8.21. (Դիրիխլեի ինտեգրալ)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} : \quad (8-35)$$

Ապացույց. Մենք արդեն պարզել էինք (8-35) ինտեգրալի զուգամիությունը, ինչը ստուգվում է Աբել-Դիրիխլեի 1-ին հայրանիշի միջոցով, ընդ որում՝ (8-35) ինտեգրալի միակ եզակի կերպը $+\infty$ -ն է (բայց ոչ զրոն):

Ինտեգրալի հաշվարկն ավանդական եղանակով, այն է՝ Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով, ցավոք այսպեղ անհնար է: Պետք է գտնել շրջանցիկ եղանակներ: Ներմուծենք պարամետրից կախված նոր օժանդակ ինտեգրալ.

$$I(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha \geq 0 : \quad (8-36)$$

Ուրեմն, մեր նպատակն է ապացուցել, որ $I(0) = \frac{\pi}{2}$:

Նախ և առաջ ցույց տանք, որ $I(\alpha)$ (8-36) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է: Դրա համար նշանակենք

$$f(x, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin x}{x}, \quad g(x, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\alpha x}$$

և կիրառենք Աբել-Դիրիխլեի 2-րդ հայրանիշը (Թեորեմ 8.12),

$$\textbf{ա2)} \quad \int_0^{+\infty} f(x, \alpha) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է՝ ըստ } \alpha \geq 0$$

(պարզապես զուգամետ է α պարամետրից անկախ):

բ2) Յուրաքանչյուր ֆիքսած $\alpha \geq 0$ համար $g(x, \alpha) = e^{-\alpha x}$ ֆունկցիան մոնոտոն է՝ ըստ x -ի և հավասարաչափ սահմանափակ է, այսինքն՝ $|g(x, \alpha)| = e^{-\alpha x} \leq 1, \quad x \geq 0, \quad \alpha \geq 0$:

Ներկառար, հավասարաչափ զուգամիության Աբել-Դիրիխլեի 2-րդ հայրանիշի համաձայն, (8-36) $I(\alpha)$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $\alpha \in [0, +\infty)$ միջակայքում:

$I(\alpha)$ (8-36) ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիությունը $\alpha \in [0, +\infty)$ միջակայքում թույլ է տալիս եզրակացնել (տես Թեորեմ 8.15), որ $I(\alpha)$ ինտեգրալն անընդհար է $I(\alpha) \in C[0, +\infty)$, մասնավորապես՝

$$I(0) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\alpha) : \quad (8-37)$$

Ավելին, $I(\alpha)$ (8-36) ինտեգրալը դիֆերենցելի է և կարելի է ածանցել ինտեգրալի նշանի տակ: Իսկապես, քննարկենք ձևականորեն ածանցված ինտեգրալը.

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha > 0 : \quad (8-38)$$

Ցույց տանք, որ $I'(\alpha)$ (8-38) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $\alpha \in [\alpha_0, +\infty)$ միջակայքում ցանկացած ֆիքսած $\alpha_0 > 0$ համար: Իսկապես, գնահատենք՝

$$|\sin x \cdot e^{-\alpha x}| \leq e^{-\alpha_0 x}, \quad x \geq 0, \quad \alpha \geq \alpha_0 > 0,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} dx = \frac{-1}{\alpha_0} e^{-\alpha_0 x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha_0} < +\infty \quad (\text{զուգամետ է}) :$$

Մաժորանտի դերը կատարում է $e^{-\alpha_0 x}$ ֆունկցիան, որի ինտեգրալը զուգամետ է: Վայերշտրասի մաժորանտային հայտանիշի համաձայն՝ $I'(\alpha)$ (8-38) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $\alpha \in [\alpha_0, +\infty)$ միջակայքում յուրաքանչյուր ֆիքսած $\alpha_0 > 0$ համար: Սա նշանակում է, որ դիֆերենցումը $I(\alpha)$ ինտեգրալի նշանի տակ օրինական է ցանկացած $\forall \alpha > 0$ կետում (չէ՞ որ միշտ կարելի է ընտրել $\alpha_0, 0 < \alpha_0 < \alpha$) :

Այժմ բացահայտ հաշվենք $I'(\alpha)$ (8-38) ինտեգրալը: Երկու անգամ մասերով ինտեգրենք՝

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= - \int_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-\alpha x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} d(\cos x) = \\ &= e^{-\alpha x} \cos x \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \cos x d(e^{-\alpha x}) = -1 + \alpha \int_0^{+\infty} \cos x \cdot e^{-\alpha x} dx = \\ &= -1 + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} d(\sin x) = -1 + \alpha e^{-\alpha x} \sin x \Big|_0^{+\infty} - \alpha \int_0^{+\infty} \sin x d(e^{-\alpha x}) = \\ &= -1 + \alpha^2 \int_0^{+\infty} \sin x e^{-\alpha x} dx = -1 - \alpha^2 I'(\alpha) : \end{aligned}$$

Ներկայարար,

$$I'(\alpha) = \frac{-1}{1 + \alpha^2} \implies \boxed{I(\alpha) = -\arctg \alpha + C}, \quad \alpha > 0, \quad C = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (8-39)$$

որտեղ C հաստատումը որոշակի արժեք ունի, և այն կարելի է գտնել: Այդ նպատակով գնահատենք $I(\alpha)$ ինտեգրալը, երբ $\alpha \rightarrow +\infty$.

$$|I(\alpha)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| e^{-\alpha x} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha} \longrightarrow 0, \quad \text{երբ } \alpha \rightarrow +\infty,$$

այսինքն՝ $\boxed{\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = 0}$: Կատարենք սահմանային անցում (8-39) հավասարությունում, երբ $\alpha \rightarrow +\infty$.

$$0 = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = - \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \arctg \alpha + C = -\frac{\pi}{2} + C \implies \boxed{C = \frac{\pi}{2}} :$$

Գրնված C հասարարունի արժեքը րեղադրենք (8-39) բանաձևի մեջ.

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arctg \alpha, \quad \alpha > 0 : \quad (8-40)$$

Վերջապես, սահմանային անցում կարարենք՝ ձգրեցնելով $\alpha \rightarrow +0$, և օգրվենք (8-37) սահմանից.

$$I(0) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \alpha \right) = \frac{\pi}{2}, \quad (8-41)$$

ինչն ավարրում է (8-35)-ի ապացույցը: □

Ներևանք 8.1.

$$J(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta, \quad \beta \in \mathbb{R} : \quad (8-42)$$

Ապացույց. Պարամերից կախված (8-42) ինտեգրալը փոփոխականի փոխարինման միջոցով բերվում է Դիրիլեի (8-35) ինտեգրալին: Մասնավորապես, դիարրկենք $\beta < 0$ դեպքը և կարարենք $t = -\beta x$ փոխարինումը.

$$J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-t)}{-t/\beta} d\left(\frac{-t}{\beta}\right) = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{2} :$$

Եթե $\beta > 0$, ապա կարարում ենք $t = \beta x$ փոխարինումը: □

Ներևանք 8.2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi : \quad (8-43)$$

Ապացույց. Ակնհայր է ենթինտեգրալային ֆունկցիայի զուգությունից: □

8.7 Պուասոնի (Պուասոն–Էյլերի) ինտեգրալը

Թեորեմ 8.22. (Պուասոնի ինտեգրալ)

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} : \quad (8-44)$$

Ապացույց. Նախ և առաջ նկարենք, որ միակ եզակի կերը $+\infty$ -ն է, և (8-44) ինտեգրալի զուգամիությունը հերևում է պարզ գնահարականից՝ համաձայն բաղդարման թեորեմի.

$$e^{-x^2} \leq e^{-x}, \quad x > 1, \quad \int_1^{+\infty} e^{-x} dx < +\infty :$$

Պարզ է, որ (8-44) զուգամեր ինտեգրալի K արժեքը դրական է $K > 0$: Ձևափոխենք (8-44) ինտեգրալը՝ կապարելով փոփոխականի փոխարինում.

$$x = ut, \quad dx = u dt, \quad \text{որպես } u > 0, \quad \implies \quad K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} u dt :$$

Բազմապարկենք վերջին հավասարությունը e^{-u^2} -ով և ինտեգրենք ըստ u -ի $(0, +\infty)$ միջակայքով.

$$K \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_0^{+\infty} u e^{-u^2} \left[\int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt \right] du : \quad (8-45)$$

Այնուհետև (8-45)-ի հաջորդական ինտեգրալում կիրառենք Ֆուբինիի թեորեմը և փոխենք ինտեգրման կարգը, սակայն դրա հիմնավորումը մի փոքր հետաձգենք.

$$\begin{aligned} K^2 &= \int_0^{+\infty} u e^{-u^2} \left[\int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt \right] du = (\text{Ֆուբինի}) \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} u e^{-u^2} e^{-u^2 t^2} du \right] dt = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-u^2(1+t^2)} u du \right] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-u^2(1+t^2)} d(u^2) \right] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[\frac{-1}{1+t^2} e^{-u^2(1+t^2)} \right]_0^{+\infty} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \implies \quad \boxed{K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} : \end{aligned}$$

Պուասոնի ինտեգրալի արժեքը սրացված է : Մեզ մնում է հիմնավորել Ֆուբինիի թեորեմի ընթացիկ կիրառման օրինականությունը, այն է՝

$$\int_0^{+\infty} u \left[\int_0^{+\infty} e^{-u^2(1+t^2)} dt \right] du = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} u e^{-u^2(1+t^2)} du \right] dt : \quad (8-46)$$

Նշանակենք (8-46)-ի աջ կողմի ներքին ինտեգրալը՝

$$\boxed{I(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} u e^{-u^2(1+t^2)} du}, \quad t \geq 0 : \quad (8-47)$$

Նեշտ է ստուգել, որ $I(t)$ (8-47) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեր է ըստ $t \geq 0$: Իսկապես, գնահատենք

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{e^{u^2(1+t^2)}} du \leq \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^{u^2}} du < +\infty \quad \forall t \geq 0 :$$

Վայերշտրասի մաժորանտային հայրանիշի համաձայն՝ $I(t)$ (8-47) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեր է ըստ $t \geq 0$, ինչից մասնավորապես հետևում է $I(t)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը՝ $\boxed{I(t) \in C[0, +\infty)}$:

Նույն եզրակացությանն ենք հանգում, եթե նկատենք, որ $I(t)$ (8-47) ինտեգրալն արդեն հաշվել էինք.

$$I(t) = \int_0^{+\infty} u e^{-u^2(1+t^2)} du = \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2} \in C[0, +\infty) :$$

Նշանակենք այժմ (8-46)-ի ձախ կողմի ներքին ինտեգրալը՝

$$\boxed{J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} u e^{-u^2(1+t^2)} dt}, \quad u \geq 0 : \quad (8-48)$$

Ինչպես արդեն հաշվել էինք (8-45)-ում,

$$J(u) = u e^{-u^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt = e^{-u^2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = e^{-u^2} K, \quad u > 0 : \quad (8-49)$$

Այսպես հաշվի առնենք, որ $u \in [0, +\infty)$ ճառագայթի վրա $J(u)$ ֆունկցիան անընդհար է՝ բացի $u = 0$ կետից, որպեսզի $J(u)$ ֆունկցիան վերացնելի խզում ունի.

$$J(u) \in C(0, +\infty), \quad J(0) = 0, \quad J(+0) = \lim_{u \rightarrow +0} J(u) = \lim_{u \rightarrow +0} e^{-u^2} K = K > 0 :$$

Այնուամենայնիվ, վերացնելի խզումը չի կարող ազդել ինտեգրալների գոյության և արժեքի վրա: Որպեսզի $J(u)$ ֆունկցիան դառնա անընդհար $u \in [0, +\infty)$ ճառագայթի վրա, բավական է դիփարկել նոր ֆունկցիա՝

$$\widetilde{J}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} J(u), & u > 0, \\ K, & u = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\widetilde{J}(u) \in C[0, +\infty)} \quad \text{և} \quad \boxed{\int_0^{+\infty} J(u) du = \int_0^{+\infty} \widetilde{J}(u) du} :$$

Սա հնարավորություն է տալիս կիրառել Ֆուբինիի թեորեմը (տես Թեորեմ 8.19) $\widetilde{J}(u)$ ինտեգրալի մասնակցությամբ.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u \left[\int_0^{+\infty} e^{-u^2(1+t^2)} dt \right] du &= \int_0^{+\infty} J(u) du = \int_0^{+\infty} \widetilde{J}(u) du = \\ &= \int_0^{+\infty} I(t) dt = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} u e^{-u^2(1+t^2)} du \right] dt, \end{aligned}$$

ինչը հաստատում է (8-46) Ֆուբինիի բանաձևի կիրառումը: Սա ավարտում է Պուասոնի (8-44) ինտեգրալի հաշվարկը և հիմնավորումը: $\square$

Ներկանք 8.3.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}} : \quad (8-50)$$

Ապացույց. Ակնհայտ է ենթինտեգրալային ֆունկցիայի զույգությունից: $\square$

Ներկանք 8.4.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}}, \quad \alpha > 0 : \quad (8-51)$$

Ապացույց. Կարարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $t = x\sqrt{\alpha}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(x\sqrt{\alpha})^2} \frac{d(x\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} :$$

$\square$

Նշենք հայրնի ինտեգրալների ևս մեկ խումբ՝ Ֆրենելի ինտեգրալները:

Թեորեմ 8.23. *(Ֆրենելի ինտեգրալներ)*

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}} : \quad (8-52)$$

Ապացույցը բաց կթողենք, այն սկսվում է $t = x^2$ փոփոխումով և շարունակում է Դիրիխլեի (8-35) ինտեգրալի հաշվման եղանակին:

Ներառվածություն են ներկայացնում Պուասոնի կամ Պուասոնի փոքի ինտեգրալների կտրած ինտեգրալները, մնացորդները (պոչերը), որոնք սովորաբար չեն հաշվվում վերջավոր փոքով, այլ կարելի է միայն սրանալ դրանց համարժեքները: Նման ասիմպտոտիկական բանաձևերը նույնպես դրական արդյունք են և օգտակար:

Թեորեմ 8.24. $\alpha \in \mathbb{R}$ և $\beta > 0$ պարամետրերի համար ճիշտ են հետևյալ ասիմպտոտիկական բանաձևերը անվերջում.

$$\int_1^x t^\alpha e^{\beta t} dt \sim \frac{1}{\beta} x^\alpha e^{\beta x}, \quad \text{երբ } x \rightarrow +\infty, \quad (8-53)$$

$$\int_x^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^{\beta t}} dt \sim \frac{1}{\beta} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}, \quad \text{երբ } x \rightarrow +\infty, \quad (8-54)$$

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim \frac{1}{2x} e^{-x^2}, \quad \text{երբ } x \rightarrow +\infty, \quad (8-55)$$

$$\int_x^{+\infty} t^\alpha e^{-\beta t^2} dt \sim \frac{1}{2\beta} x^{\alpha-1} e^{-\beta x^2}, \quad \text{երբ } x \rightarrow +\infty : \quad (8-56)$$

Ապացույց. Բոլոր չորս բանաձևերն ապացուցվում են միապեսակ: Ապացուցենք, օրինակ, երրորդ՝ (8-55) բանաձևը, որտեղ մասնակցող ինտեգրալը հայրնի է **սխալանքի ֆունկցիա** (**Error Function**) անվանումով: Կազմենք ֆունկցիաների հարաբերությունը և նկատենք, որ գործ ունենք $\frac{0}{0}$ փոքի անորոշության հետ, ինչը կարելի է բացել Լոպիտալի կանոնի միջոցով.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt}{\frac{1}{2x} e^{-x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-x^2}}{\frac{-1}{x^2} e^{-x^2} + \frac{1}{x} e^{-x^2} (-2x)} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{-1}{x^2} - 2} = 1 :$$

□

8.8 Էյլերյան ինտեգրալներ: Էյլերի բերա ֆունկցիա

Այս բաժնում քննարկելու ենք պարամետրից կախված անխսկական ինտեգրալների մի խումբ, որոնք կրում են Էյլերի անունը: Էյլերի (կամ Էյլերյան) ինտեգրալները լայնորեն կիրառվում են և կապված են նշանավոր այլ ֆունկցիաների հետ:

Էյլերի **բերա ֆունկցիան** երկու պարամետրից կախված 2-րդ սեռի անխսկական ինտեգրալ է .

$$B(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 : \quad (8-57)$$

Ինտեգրալի զուգամիությունը $x = 0$ և $x = 1$ եզակի կետերում հիմնավորվում է α և β դրական պարամետրերով.

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{1/2} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx,$$

$$x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \sim x^{\alpha-1}, \quad \text{երբ } x \rightarrow +0, \quad \text{և} \quad \int_0^{1/2} x^{\alpha-1} dx < +\infty,$$

$$x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \sim (1-x)^{\beta-1}, \quad \text{երբ } x \rightarrow 1-0, \quad \text{և} \quad \int_{1/2}^1 (1-x)^{\beta-1} dx < +\infty :$$

Ի դեպ, եթե վերցնենք $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, ապա (8-57) անխսկական ինտեգրալը վերածվում է ռիմանյան որոշյալ (խսկական) ինտեգրալի, իսկ $\alpha \leq 0$ կամ $\beta \leq 0$ դեպքում (8-57) ինտեգրալը փարամետր է :

Բերենք բերա ֆունկցիայի մի քանի կարևոր հատկություն:

Նախկինություն 8.1. (Միմեթրիայի բանաձևը)

Բերա ֆունկցիան համաչափ է իր փոփոխականների նկատմամբ, այսինքն՝

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 : \quad (8-58)$$

Ապացույց. Անմիջապես հետևում է ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինման արդյունքում՝ $t = 1 - x$.

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt = B(\beta, \alpha) :$$

□

Նախկինություն 8.2. (Բերա ֆունկցիայի 2-րդ ինտեգրալ ներկայացումը)

Բերա ֆունկցիան ներկայացվում է մեկ այլ անխսկական ինտեգրալով՝

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 : \quad (8-59)$$

Ապացույց. Դարձյալ փոփոխականի փոխարինում կապարենք (8-57) ինտեգրալում.

$$x = \frac{y}{1+y}, \quad \text{կամ} \quad y = \frac{x}{1-x}, \quad dx = \frac{dy}{(1+y)^2},$$

որտեղից էլ կստանանք

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{1+y} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{(1+y)^{\beta-1}} \frac{dy}{(1+y)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy :$$

□

Ներկանք 8.5. *(Բեռա ֆունկցիայի 2-րդ ինտեգրալ ներկայացումը մասնավոր դեպքում)*

$$\boxed{B(\alpha, 1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{1+y} dy}, \quad 0 < \alpha < 1 : \quad (8-60)$$

Նախկություն 8.3. *(Բեռա ֆունկցիայի իջեցման բանաձևեր)*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha-1, \beta), \quad \alpha > 1, \quad \beta > 0, \quad (8-61)$$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta-1), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 1 : \quad (8-62)$$

Ապացույց. Ապացույցը թողնենք հեղաքրքրվող ընթերցողին, այն պարզ կերպով իրականացվում է մասերով ինտեգրման միջոցով: Բնականաբար, բավական է ապացուցել երկու բանաձևերից միայն մեկը: □

Ստորև մենք դուրս կբերենք այլ, թերևս ավելի հարմար իջեցման բանաձևեր:

8.9 Էյլերի գամմա ֆունկցիա

Էյլերի գամմա ֆունկցիան մեկ պարամետրից կախված անխսկական ինտեգրալ է .

$$\Gamma(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0 : \quad (8-63)$$

Ինտեգրալն ունի երկու եզակի կետ՝ $x = 0$ և $x = +\infty$, որպեսզի ինտեգրալի զուգամիպությունը կարելի է հիմնավորել բաղդապման թեորեմներով.

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \\ x^{\alpha-1} e^{-x} &\sim x^{\alpha-1}, \quad \text{երբ } x \rightarrow +0, \quad \text{և} \quad \int_0^1 x^{\alpha-1} dx < +\infty, \\ x^{\alpha-1} e^{-x} &= \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} \frac{1}{x^2} \leq C \frac{1}{x^2}, \quad \text{երբ } x \rightarrow +\infty, \quad \text{և} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty : \end{aligned}$$

Եթե $\alpha \leq 0$, ապա (8-63) ինտեգրալը փարամետր է :

Բերենք գամմա ֆունկցիայի մի քանի կարևոր հատկություն: Նախ նշենք գամմա ֆունկցիայի մասնավոր մի քանի արժեքներ.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1, \quad (8-64)$$

$$\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x de^{-x} = -x e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 0 + \Gamma(1) = 1 : \quad (8-65)$$

Նախկինություն 8.4. (Գամմա ֆունկցիայի անվերջ դիֆերենցելիությունը)

Գամմա ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է իր որոշման տիրույթում՝ $\Gamma(\alpha) \in C^\infty(0, +\infty)$, և նրա ածանցյալները կարելի է գտնել հետևյալ բանաձևերով՝

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (\ln x)^n e^{-x} dx, \quad \alpha > 0, \quad n \in \mathbb{N} : \quad (8-66)$$

Ապացույց. Ածանցման (8-66) բանաձևերը ստացվում են անխսկական ինտեգրալի նշանի տակ ածանցման Լայբնիցի կանոնից, տե՛ս Թեորեմ 8.16՝ $+\infty$ եզակի կետի դեպքի համար: Ենթինտեգրալային ֆունկցիան ակնհայտորեն անվերջ դիֆերենցելի է (ըստ α -ի), սակայն Լայբնիցի կանոնի կիրառման օրինականությունը ստուգելու կարիք ունի: Ձևականորեն ածանցված ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիպության փաստը մեզ լիովին բավարար կլինի: Ստուգենք միայն $n = 1$ դեպքը, քանի որ ավելի բարձր կարգի ածանցյալների դեպքը ստուգվում է նույն կերպ: Նշանակենք

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} f(x, \alpha) dx, \quad f(x, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} x^{\alpha-1} e^{-x},$$

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (\ln x) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx, \quad f'_\alpha(x, \alpha) = x^{\alpha-1} (\ln x) e^{-x} :$$

Քանի որ $\Gamma(\alpha)$, $\Gamma'(\alpha)$ ինտեգրալներն ունեն երկու եզակի կետ՝ $x = 0$ և $x = +\infty$, արձանագրենք ենթինտեգրալային ֆունկցիաների անընդհատությունը.

$$f(x, \alpha), f'_\alpha(x, \alpha) \in C\left((0, +\infty) \times [\alpha_0, \alpha_1]\right) \quad \text{ցանկացած ֆիքսած} \quad 0 < \alpha_0 < \alpha_1 < +\infty \quad \text{համար:}$$

Լայբնիցի կանոնի (տես Թեորեմ 8.16) հաջորդ պայմանը $\Gamma'(\alpha)$ ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիությունն է ըստ α -ի, $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ հավրվածում: Սա ապացուցելու համար $\Gamma'(\alpha)$ ինտեգրալը փրոհենք.

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (\ln x) e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} (\ln x) e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} (\ln x) e^{-x} dx \stackrel{\text{ն2.}}{=} I_1 + I_2 :$$

Գնահատենք և կիրառենք Վայերշտրասի մաժորանտային հայրանիշը.

$$|x^{\alpha-1} (\ln x) e^{-x}| \leq x^{\alpha_0-1} |\ln x|, \quad 0 < x < 1 :$$

Վերջին ֆունկցիան կարարում է մաժորանտի դերը, որի ինտեգրալը զուգամեր է .

$$\int_0^1 x^{\alpha_0-1} |\ln x| dx < +\infty :$$

Ներկաբար I_1 ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեր է $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ հավրվածում: Գնահատենք I_2 ինտեգրալը՝ օգտվելով $\ln x < x$ անհավասարությունից.

$$|x^{\alpha-1} (\ln x) e^{-x}| \leq \frac{x^\alpha}{e^x} \leq \frac{x^{\alpha_1}}{e^x}, \quad x > 1 :$$

Վերջին ֆունկցիան կարարում է մաժորանտի դերը, որի ինտեգրալը զուգամեր է .

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha_1}}{e^x} dx < +\infty :$$

Ներկաբար I_2 և ամբողջ $\Gamma'(\alpha)$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամեր են $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ հավրվածում:

Այսպիսով, Լայբնիցի ածանցման կանոնի համաձայն, $\Gamma'(\alpha)$ ինտեգրալի ածանցումն օրինական է: Ածանցման (8-66) բանաձևն ապացուցված է: $\square$

Նարկություն 8.5. (Գամմա ֆունկցիայի իջեցման բանաձևը)

$$\boxed{\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0 : \quad (8-67)$$

Ապացույց. Անմիջապես հետևում է մասերով ինտեգրման միջոցով.

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x^\alpha de^{-x} = \\ &= -x^\alpha e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} d(x^\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \Gamma(\alpha) : \end{aligned}$$

$\square$

Նվազման բանաձևը կարելի է կիրառել մի քանի անգամ,

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha + n) &= (\alpha + n - 1) \Gamma(\alpha + n - 1) = (\alpha + n - 1) (\alpha + n - 2) \Gamma(\alpha + n - 2) = \cdots = \\ &= (\alpha + n - 1) (\alpha + n - 2) \cdots (\alpha + 1) \alpha \Gamma(\alpha), \quad n \in \mathbb{N},\end{aligned}\quad (8-68)$$

$$\boxed{\frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha (\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 2) (\alpha + n - 1)}, \quad n \in \mathbb{N} : \quad (8-69)$$

Էլ ավելի մասնավոր դեպքում (8-68) և (8-64)-ից ստանում ենք

$$\begin{aligned}\Gamma(1 + n) &= n (n - 1) (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \Rightarrow \quad &\boxed{\Gamma(n + 1) = n!}, \quad n \in \mathbb{N} : \quad (8-70)\end{aligned}$$

Սրան ավելացնենք $n = 0$ հասարակ դեպքը և ընդունենք զրոյի ֆակտորիալի սահմանումը.

$$\boxed{0! = \Gamma(1) = 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma(n + 1) = n!}, \quad n \in \mathbb{Z}_+ : \quad (8-71)$$

Այսպիսով, կարելի է ասել, որ գամմա ֆունկցիան ֆակտորիալն ընդհանրացնող ֆունկցիա է :

8.9 ա. Գամմա ֆունկցիայի վարքը

Այս ենթաբաժնում քննարկենք գամմա ֆունկցիայի վարքը, հեքագույրենք այն և կառուցենք գամմա ֆունկցիայի գրաֆիկը: Ֆունկցիայի հեքագույրման ավանդական եղանակները գամմա ֆունկցիայի դեպքում ոչ միշտ են արդյունավետ: Սկսենք գամմա ֆունկցիայի վարքից $\alpha = 0$ կետում՝ որոշման տիրույթի ձախ ծայրակետում.

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \Gamma(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = +\infty : \quad (8-72)$$

Այնուհետև օգտվենք (8-64)-(8-65) արժեքներից՝ $\boxed{\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1}$: Ըստ Ռոլլի թեորեմի՝ գոյություն ունի առնվազն մեկ միջանկյալ α_0 սրացիոնար կետ՝ $\exists \alpha_0 \in (1, 2)$ s.t. $\boxed{\Gamma'(\alpha_0) = 0}$:

Մյուս կողմից, (8-66) բանաձևի համաձայն,

$$\Gamma''(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (\ln x)^2 e^{-x} dx > 0 ,$$

ինչը նշանակում է , որ բոլոր սրացիոնար կետերը խիստ մինիմումի կետեր են, ուրեմն մաքսիմումի կետեր չկան:

Ներկաբար, α_0 սրացիոնար կետը խիստ մինիմումի կետ է և միակ էքստրեմումի կետը.

$$\boxed{\alpha_0 = \alpha_{min} \in (1, 2)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Gamma(\alpha) \searrow, & \Gamma'(\alpha) < 0, & \text{երբ } 0 < \alpha < \alpha_0, \\ \Gamma(\alpha) \nearrow, & \Gamma'(\alpha) > 0, & \text{երբ } \alpha > \alpha_0 : \end{cases} \quad (8-73)$$

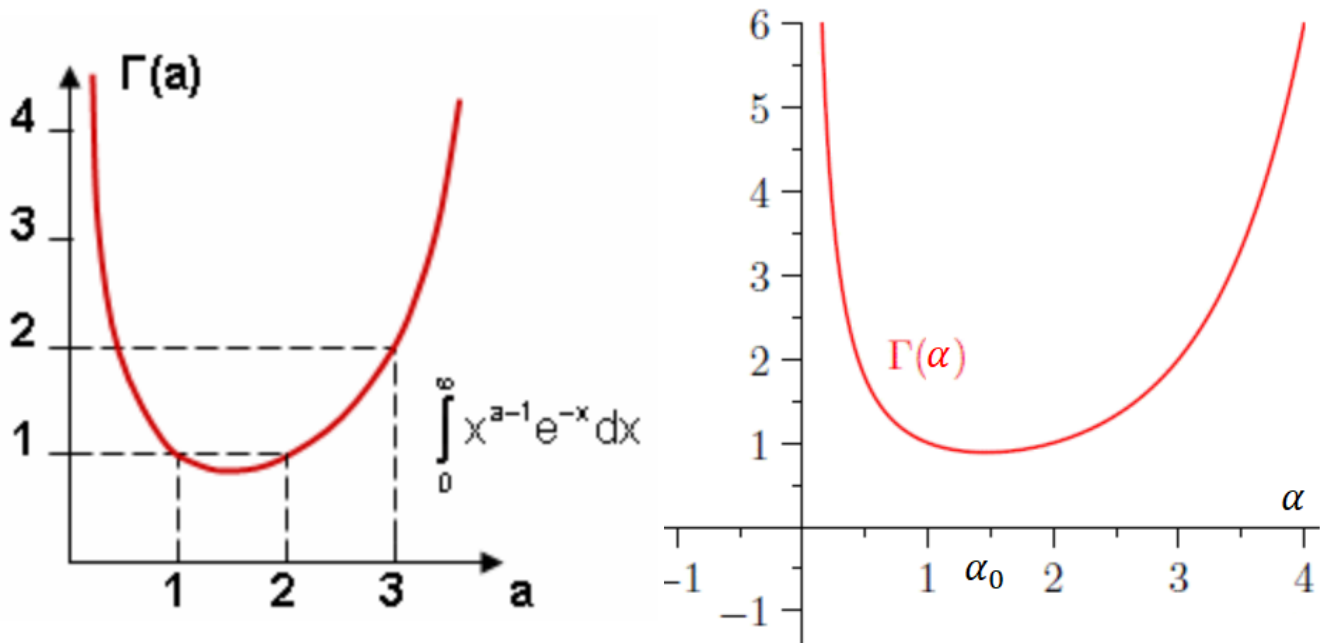
Գտնվում է գամմա ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը: Այժմ դիտարկենք մեծ արգումենտներ.

$$\alpha > n + 1 \quad \implies \quad \Gamma(\alpha) > \Gamma(n + 1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N} :$$

Սա նշանակում է, որ $\Gamma(\alpha)$ գամմա ֆունկցիան անսահմանափակ է $+\infty$ -ի շրջակայքում: Ներկայացնում ենք, գամմա ֆունկցիան անվերջ մեծ է $+\infty$ -ում.

$$\Gamma(\alpha) \nearrow +\infty, \quad \text{երբ} \quad \alpha \rightarrow +\infty : \quad (8-74)$$

Ամփոփելով բոլոր (8-72)-(8-74) արդյունքները՝ կարելի է կառուցել գամմա ֆունկցիայի գրաֆիկը.



Գծագիր 8.1. Գամմա ֆունկցիայի գրաֆիկը

8.9 բ. Բեթա և գամմա ֆունկցիաների կապը

Նախադրյուն 8.6. (Բեթա ֆունկցիայի արտահայտումը գամմա ֆունկցիայով)

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 : \quad (8-75)$$

Ապացույց. Սկսենք գամմա ֆունկցիայից և փոփոխականի փոխարինում կատարենք ինտեգրալում.

$$x = ty \quad (t > 0), \quad dx = t dy \quad \implies \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} (ty)^{\alpha-1} e^{-ty} t dy,$$

հետևաբար՝

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{t^\alpha} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-ty} dy, \quad t > 0, \quad \alpha > 0 : \quad (8-76)$$

Մասնավորապես, արտագրենք (8-76) բանաձևը՝ փոխարինելով $t \mapsto t+1$ և $\alpha \mapsto \alpha+\beta$ ($\beta > 0$)։

$$\boxed{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)y} dy}, \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 : \quad (8-77)$$

Բազմապարկենք (8-77)-ը $t^{\alpha-1}$ -ով և ինտեգրենք ըստ t -ի $(0, +\infty)$ ճառագայթով։

$$\Gamma(\alpha+\beta) \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \left[\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)y} dy \right] dt, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 : \quad (8-78)$$

Այսպես ձախ կողմում ստացանք բերա ֆունկցիայի 2-րդ ինտեգրալային ներկայացումը (տես Նախկինություն 8.2), իսկ աջ կողմում կիրառենք Ֆուբինիի թեորեմը և փոխենք ինտեգրման կարգը և այնուհետև օգտվենք (8-76)-ից,

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \left[\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)y} dy \right] dt = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-y} \left[\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-ty} dt \right] dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-y} \frac{\Gamma(\alpha)}{y^\alpha} dy = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} y^{\beta-1} e^{-y} dy = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta), \end{aligned} \quad (8-79)$$

ինչն ապացուցում է պահանջվող (8-75) բանաձևը։ Միակ բացը (8-79)-ում Ֆուբինիի թեորեմի կիրառման հիմնավորումն է։ Այդ հիմնավորումը ստուգելու համար նշանակենք ներքին ինտեգրալները և հաշվենք՝ օգտվելով (8-76)-(8-77)-ից.

$$\begin{aligned} J_1(t) &\stackrel{def}{=} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)y} dy = \Gamma(\alpha+\beta) \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} \in C(0, +\infty), \\ J_2(y) &\stackrel{def}{=} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)y} dt = \Gamma(\alpha) \frac{y^{\beta-1}}{e^y} \in C(0, +\infty) : \end{aligned}$$

Իսկ ենթինտեգրալային ֆունկցիան անընդհար է որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա.

$$0 \leq f(t, y) \stackrel{def}{=} t^{\alpha-1} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)y} \in C\left((0, +\infty) \times (0, +\infty)\right) :$$

Նաշվի առնելով, որ (8-79) անխկական ինտեգրալները երկու եզակի կետ ունեն՝ 0 և $+\infty$, կիրառենք Ֆուբինիի թեորեմներ 8.19-ը և 8.20-ը, ըստ որոնց՝ ինտեգրման կարգի (8-79) փոփոխումն օրինական է։ Սա լիովին ապացուցում է Նախկինություն 8.6-ը։ □

8.10 Գամմա և բեթա ֆունկցիաների այլ հատկություններ

Շար կարճ և առանց ապացույցի ներկայացնենք մի քանի այլ կարևոր բանաձևեր:

Լրացման բանաձև. Եթե $0 < \alpha < 1$, ապա

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (8-80)$$

կամ նույնը՝

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 : \quad (8-81)$$

Մասնավորապես, եթե $\alpha = \frac{1}{2}$, ապա

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}} : \quad (8-82)$$

Որպես հետևանք ստանում ենք նշանավոր Պուասոնի ինտեգրալի հաշվարկը գամմա ֆունկցիայի միջոցով.

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \boxed{t \stackrel{\text{ն2.}}{=} \sqrt{x}, \quad x = t^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-t^2} d(t^2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-t^2} 2t dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt : \end{aligned}$$

Այսպեսով էլ ստանում ենք Պուասոնի ինտեգրալի արժեքը՝

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} : \quad (8-83)$$

Սփրիլինգի (ասիմպտոտական) բանաձևը.

Մենք արդեն պարզել ենք, որ $+\infty$ -ում գամմա ֆունկցիան աճելով ձգվում է անվերջի: Գամմա ֆունկցիայի վարքը $+\infty$ -ում ճշգրիտ նկարագրվում է Սփրիլինգի ասիմպտոտական բանաձևով.

$$\Gamma(\alpha + 1) = \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \left[1 + o(1)\right], \quad \text{երբ} \quad \alpha \rightarrow +\infty : \quad (8-84)$$

Կարելի է սա ներկայացնել ֆունկցիաների համարժեքության տեսքով.

$$\boxed{\Gamma(\alpha + 1) \sim \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha}, \quad \text{երբ} \quad \alpha \rightarrow +\infty, \quad (8-85)$$

կամ բնական թվերի համար գրելով՝ ստանում ենք ֆակտորիալի վարքը բնութագրող ասիմպտոտական բանաձևը.

$$\boxed{n! = \Gamma(n + 1) \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}, \quad \text{երբ} \quad n \rightarrow \infty : \quad (8-86)$$

8.11 Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a, b]$ փակ հատվածում: Դիտարկենք $[a, b]$ հատվածի որևէ բրտիում.

$$a \stackrel{\text{նշ.}}{=} x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \stackrel{\text{նշ.}}{=} b,$$

որը նշանակենք $\{x_k\}_{k=0}^n$ կամ $\{x_k\}$ -ով: Կազմենք Կվյալ բրտիումնը համապատասխանող հեղեյալ վարիացիոն գումարը՝

$$V_{[a,b]}(f; \{x_k\}) \equiv V(f; x_k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| : \quad (8-87)$$

Սահմանում 8.4.

$$\bigvee_a^b f \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\{x_k\}} V(f; x_k) \quad (8-88)$$

(ոչ բացասական) մեծությունը կոչվում է $f(x)$ **ֆունկցիայի լրիվ վարիացիա** $[a, b]$ **հատվածում**:

Այսպես սուպրեմումը վերցրած է $[a, b]$ հատվածի բոլոր հնարավոր $\{x_k\}$ բրտիումներով:

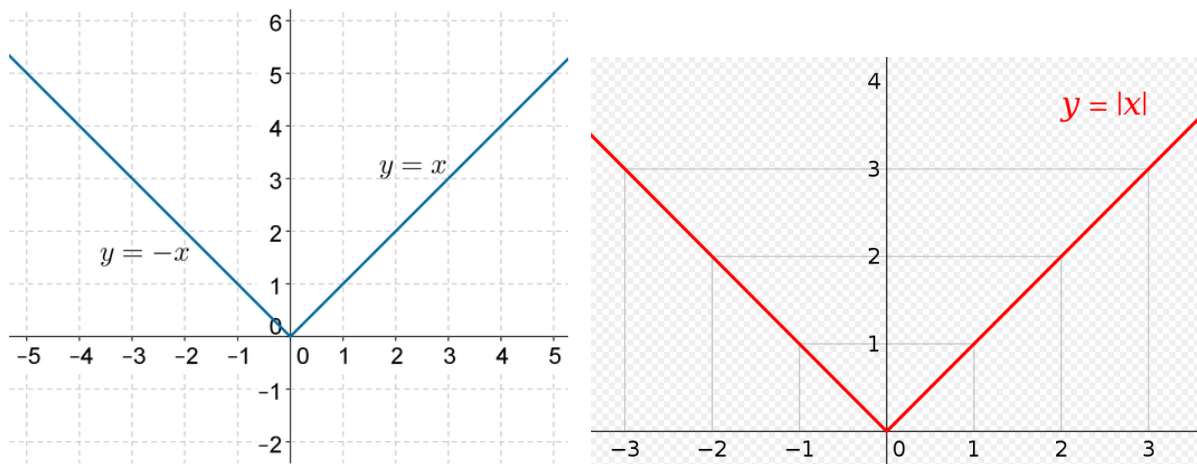
Եթե $f(x)$ ֆունկցիայի լրիվ վարիացիան վերջավոր թիվ է՝ $\bigvee_a^b f < +\infty$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **վերջավոր (կամ սահմանափակ) վարիացիայի** $[a, b]$ **հատվածում**. կգրենք $f(x) \in BV[a, b]$:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիայի լրիվ վարիացիան անվերջ է՝ $\bigvee_a^b f = +\infty$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է **անվերջ (կամ անսահմանափակ) վարիացիայի** $[a, b]$ **հատվածում**, կգրենք $f(x) \notin BV[a, b]$:

Օրինակ 8.3. Դիտարկենք $f(x) = |x|$ հայրնի ֆունկցիան որևէ հատվածում.

$$\bigvee_{-1}^3 |x| = 4, \quad \bigvee_{-3}^2 |x| = 5 :$$

Նշարոթյա՞նք ստուգում ենք, որ ցանկացած հատվածում Կվյալ ֆունկցիան վերջավոր վարիացիա ունի:



Գծազիր 8.2. $y = |x|$ ֆունկցիան որպես վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիայի օրինակ

Վարիացիոն գումարի և լրիվ վարիացիայի (8-87)-(8-88) սահմանումներից պարզ է, որ

$$\boxed{\bigvee_a^b f \geq f(b) - f(a)}, \quad \text{և ավելին,} \quad \boxed{\bigvee_a^b f \geq \omega(f)}, \quad \text{որտեղ} \quad \omega(f) = \sup_{x', x'' \in [a, b]} |f(x') - f(x'')|, \quad (8-89)$$

$\omega(f)$ -ն ֆունկցիայի փափանկությունն է $[a, b]$ հատվածում: Նավասարության նշանը (8-89) անհավասարություններում իրացվում է մոնոտոն ֆունկցիաների դեպքում, ինչը դեռ կքննարկենք:

Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների հետազոտումը սկսենք պարզագույն հատկությունից:

Պնդում 8.1. Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիան սահմանափակ է, այսինքն՝

$$\left(f(x) \in BV[a, b] \right) \implies \left(\exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b] \right):$$

Ապացույց. Կամայական $\forall x \in [a, b]$ կետի համար կարելի է գնահատել՝ համարելով, որ դիֆարենց ենթ $\{a, x, b\}$ փրոհումը.

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq \bigvee_a^b f + |f(a)| = \text{const} < +\infty:$$

□

Շար կարևոր է, որ Պնդում 8.1-ի հակադարձ պնդումը սխալ է, այսինքն՝ սահմանափակ ֆունկցիան հատվածում պարբերադիր չէ՝ վերջավոր վարիացիա ունենա.

$$\left(f(x) \text{ ֆունկցիան սահմանափակ է } [a, b]\text{-ում} \right) \not\Rightarrow \left(f(x) \in BV[a, b] \right): \quad (8-90)$$

Ավելին, հատվածում անգամ անընդհար ֆունկցիան պարբերադիր չէ՝ վերջավոր վարիացիա ունենա.

$$\left(f(x) \in C[a, b] \right) \not\Rightarrow \left(f(x) \in BV[a, b] \right): \quad (8-91)$$

Սա ստուգելու համար բավական է բերել ֆունկցիայի մեկ օրինակ, որը, լինելով անընդհար հատվածում, անվերջ վարիացիա ունի:

Սահմանենք հետևյալ անընդհար ֆունկցիան՝

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & \text{եթե } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{եթե } x = 0: \end{cases}$$

Քանի որ $f(0) = 0$ և $f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} x \cos \frac{\pi}{2x} = 0$, պարզ է, որ ֆունկցիան անընդհար է՝ $\boxed{f(x) \in C[0, 1]}$:

Այժմ ցույց տանք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի լրիվ վարիացիան անվերջ է, այսինքն՝ $f(x) \notin BV[0, 1]$:

Վերցնենք $[0, 1]$ հատվածի հատուկ մի փրոհում՝ որոշակի կարգով համարակալած՝

$$\{x_k\} = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-2}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\} = \{0 = x_{2n+1}, x_{2n}, x_{2n-1}, \dots, x_3, x_2, x_1\},$$

$$\boxed{x_k \equiv \frac{1}{k}} \quad (k = \overline{1, 2n}) \quad \text{կերտելով:}$$

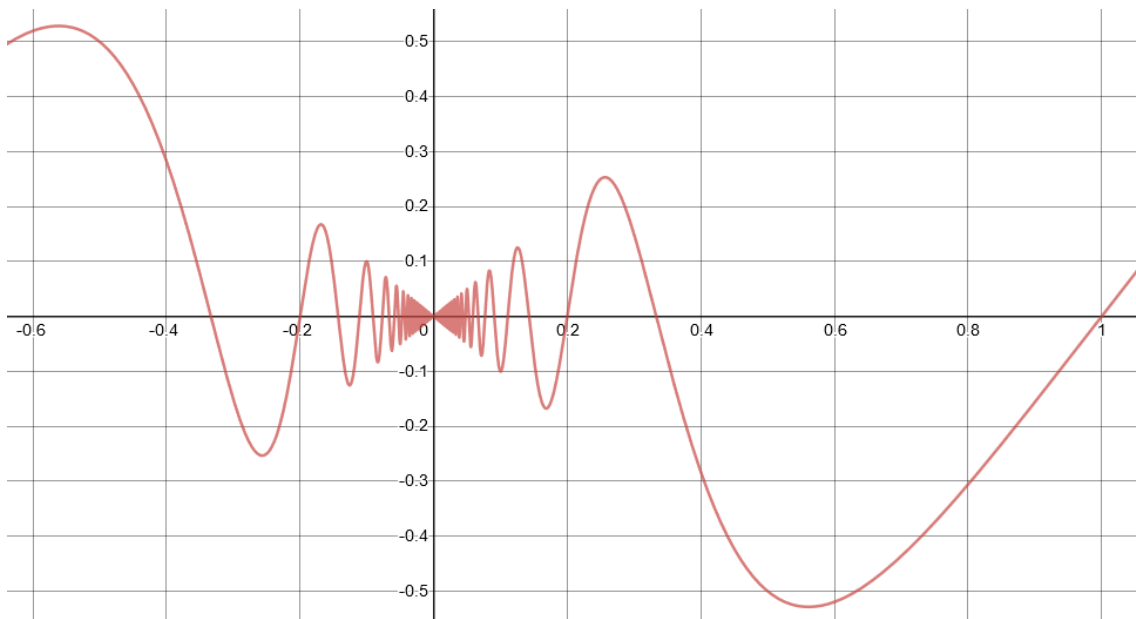
Նկատենք, որ փրոհման զույգ և կենտ համարներով կերտելում ստանում ենք ֆունկցիայի փարբեր արժեքներ.

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{2 \cdot x_{2j}} &= \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot 2j \right) = \cos \pi j = (-1)^j, \\ \cos \frac{\pi}{2 \cdot x_{2j-1}} &= \cos \left(\frac{\pi}{2} (2j-1) \right) = \cos \left(\pi j - \frac{\pi}{2} \right) = 0, \end{aligned} \quad j = \overline{1, n} :$$

Այսպեսից ստանում ենք, որ վարիացիոն գումարն անսահմանափակ է՝

$$V(f; \{x_k\}) = \sum_{k=1}^{2n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{j=1}^n \left| \frac{1}{2j} (-1)^j \right| \cdot 2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \rightarrow +\infty, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty :$$

Ներկայացնում ենք $\bigvee_0^1 f = \sup_{\{x_k\}} V(f; x_k) = +\infty$ և $\boxed{f(x) \notin BV[0, 1]}$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:



Գծազիր 8.3. $f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

8.12 Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների դասեր

Մեզ հարկավոր են վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների բավարար պայմաններ (հայտանիշներ) կամ վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների դասեր:

Պնդում 8.2. Նախաժողովում մոնոտոն ֆունկցիան վերջավոր վարիացիա ունի.

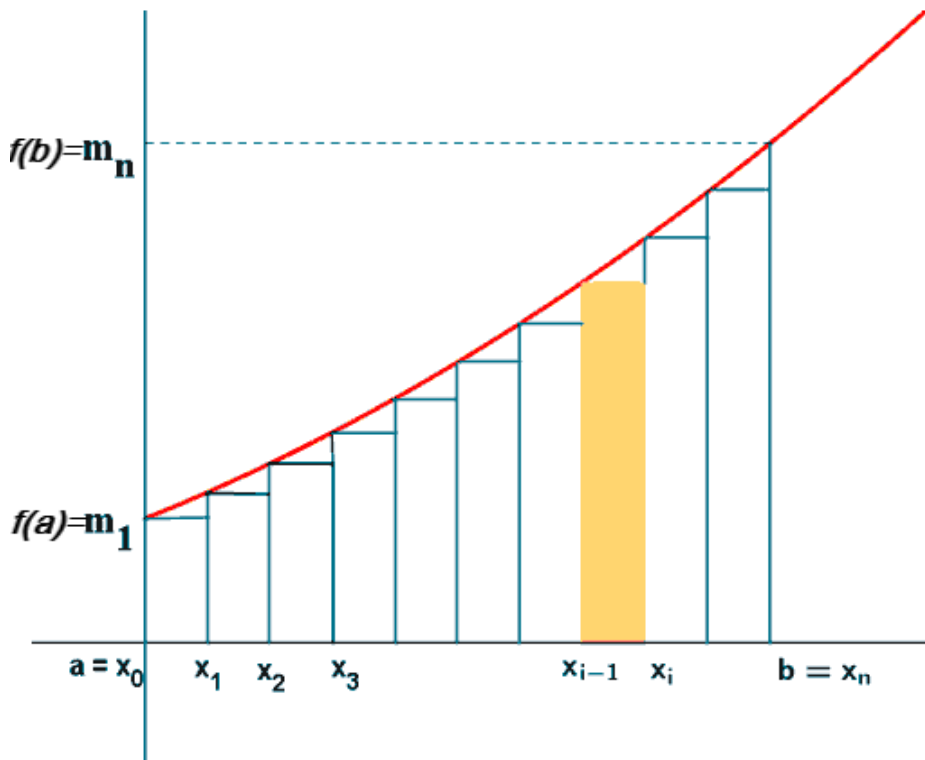
$$f(x) \in BV[a, b] \quad \text{և} \quad \boxed{\bigvee_a^b f = |f(b) - f(a)|} :$$

Ապացույց. Անմիջապես հեջում է վարիացիայի սահմանումից: Ենթադրենք՝ $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է՝ $f(x) \nearrow$: Այդ դեպքում գրենք վարիացիոն գումարը $[a, b]$ հատվածի որևէ $\{x_k\}$ բրոհման համար.

$$V(f; x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a) :$$

Ներկայացնենք՝ $\bigvee_a^b f = f(b) - f(a)$:

Նմանապես մոնոտոն նվազող ֆունկցիայի համար, $f(x) \searrow$, ստանում ենք $\bigvee_a^b f = f(a) - f(b)$: $\square$



Գծազիր 8.4. Մոնոտոն ֆունկցիայի լրիվ վարիացիան՝ $\bigvee_a^b f = |f(b) - f(a)|$

Պնդում 8.3. Նախվաժույն կրողը առ կրող մոնոտոն ֆունկցիան վերջավոր վարիացիա ունի.

$$f(x) \in BV[a, b] :$$

Ապացույց. Ըստ պայմանի՝ $[a, b]$ հատվածը կարելի է բաժանել վերջավոր թվով մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրում $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն է և ուրեմն վերջավոր վարիացիայի.

$$[a, b] = [a, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup \dots \cup [c_{m-1}, b], \quad a \stackrel{\text{նշ.}}{=} c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{m-1} < c_m \stackrel{\text{նշ.}}{=} b :$$

Ըստ Պնդում 8.2-ի՝

$$V_{[c_k, c_{k+1}]}(f; x_k) = |f(c_{k+1}) - f(c_k)|, \quad k = \overline{0, m-1} :$$

Նոր փրոհման կետեր ավելացնելիս վարիացիոն գումարը կարող է միայն աճել: Ուստի $[a, b]$ հատվածի ցանկացած $\{x_k\}_{k=0}^n$ փրոհմանն ավելացնենք $\{c_k\}_{k=1}^{m-1}$ կետերը, և նոր փրոհումը կհանգի $\{c_k\}_{k=0}^m$ -ին: Արդյունքում կստանանք

$$V_{[a, b]}(f; x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{m-1} |f(c_{k+1}) - f(c_k)| \leq M,$$

հետևաբար՝ $f(x) \in BV[a, b] :$ □

Սահմանում 8.5. Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածում բավարարում է **Լիպշիցի պայմանը**, եթե

$$\exists K = \text{const} > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f(x) - f(t)| \leq K|x - t| \quad \forall x, t \in [a, b] : \quad (8-92)$$

Այս դեպքում սահմանում են (8-92) պայմանը բավարարող ֆունկցիաների $Lip[a, b]$ **Լիպշիցի դասը**, $f(x)$ ֆունկցիան նաև **լիպշիցյան** են կոչում և գրում $f(x) \in Lip[a, b]$:

Պարզվում է, որ Լիպշիցի (8-92) պայմանը բավարարող ֆունկցիաները վերջավոր վարիացիա ունեն:

Պնդում 8.4. Նախվաժույն լիպշիցյան ֆունկցիան վերջավոր վարիացիա ունի՝ $Lip[a, b] \subset BV[a, b] :$

Ապացույց. $[a, b]$ հատվածի ցանկացած $\{x_k\}$ փրոհման համար գրենք վարիացիոն գումարը և գնահատենք Լիպշիցի (8-92) պայմանի միջոցով.

$$V(f; x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq K \sum_{k=0}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| = K(b - a) :$$

Ներկայացնելով $\sum_a^b f < +\infty$ և $f(x) \in BV[a, b] :$ □

Պնդում 8.5. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ ածանցյալ ունի $[a, b]$ հատվածում, ապա ֆունկցիան վերջավոր վարիացիա ունի, այսինքն՝

$$\left(\exists M = \text{const} > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f'(x)| \leq M, \quad x \in [a, b] \right) \implies \left(f(x) \in BV[a, b] \right) :$$

Ապացույց. Ցանկացած $\forall x, t \in [a, b]$ կետերում կիրառենք վերջավոր աճերի Լագրանժի թեորեմը՝

$$\exists c \in (x, t) \quad \text{s.t.} \quad |f(x) - f(t)| = |f'(c)| (x - t) \leq M|x - t|,$$

այսինքն՝ ֆունկցիան լիպշիցյան է : Ներկաբար, ըստ նախորդ Պնդում 8.4-ի,

$$f(x) \in Lip[a, b] \implies f(x) \in BV[a, b] :$$

□

Որպես անմիջական հետևանք ստանում ենք հետևյալ ներդրումները:

Պնդում 8.6. $C^1[a, b] \subset Lip[a, b] \subset BV[a, b] :$

Ինտեգրալային տեսքով ներկայացված վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների կարևոր մի դաս սահմաններ և հիմնավորենք:

Թեորեմ 8.25. Ինտեգրելի ֆունկցիայի նախնականը վերջավոր վարիացիա ունի.

$$\left(\varphi(t) \in \mathcal{R}[a, b], \quad f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x \varphi(t) dt \right) \implies \left(f(x) \in BV[a, b] \quad \text{և} \quad \mathbf{V}_a^b f = \int_a^b |\varphi(t)| dt \right) :$$

Ապացույց. $[a, b]$ հատվածի կամայական $\{x_k\}$ փրոհման համար գրենք վարիացիոն գումարը և գնահատենք.

$$V(f; x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi(t)| dt = \int_a^b |\varphi(t)| dt : \quad (8-93)$$

Նաշվի առնենք, որ $|\varphi(t)| \in \mathcal{R}[a, b]$, և ուրեմն (8-93) արտահայտությունը սահմանափակ է: Վերցնենք սուպրեմումը (8-93)-ում ըստ բոլոր $\{x_k\}$ փրոհումների, կստանանք լրիվ վարիացիա.

$$\mathbf{V}_a^b f = \sup_{\{x_k\}} V(f; x_k) \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt < +\infty : \quad (8-94)$$

Այսպիսով, f -ը վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա է, և մեզ մնում է ապացուցել (8-94) անհավասարության հակադարձը: Գնահատենք ներքևից $[a, b]$ հատվածի կամայական $\{x_k\}$ փրոհման համար.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_a^b f &\geq V(f; x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t) dt \right| = \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi(x_k) - \varphi(x_k) + \varphi(t)) dt \right| = \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x_k) dt - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi(x_k) - \varphi(t)) dt \right| \geq \\
 &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x_k) dt \right| - \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi(x_k) - \varphi(t)) dt \right| \right) \geq \\
 &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \left(|\varphi(x_k) \Delta x_k| - \omega_k(\varphi) \Delta x_k \right) = \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_k)| \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(\varphi) \Delta x_k, \tag{8-95}
 \end{aligned}$$

որպես $\omega_k(\varphi) = \sup_{x_k \leq t', t'' \leq x_{k+1}} |\varphi(t') - \varphi(t'')|$ մեծությունը $\varphi(t)$ ֆունկցիայի տատանումն է $[x_k, x_{k+1}]$ k -րդ մասնակի միջակայքում: Մանրացնենք տրոհումը և անցնենք սահմանի, երբ տրոհման d տրամագիծը ձգարում է զրոյի՝ $d \rightarrow 0$: Օգտվենք ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանից, ըստ որի՝

$$\varphi(t) \in \mathcal{R}[a, b] \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(\varphi) \Delta x_k = 0 :$$

Սահմանային անցումը (8-95)-ում, երբ $d \rightarrow 0$, տալիս է

$$\mathbf{V}_a^b f \geq \int_a^b |\varphi(t)| dt, \tag{8-96}$$

ինչն ավարտում է ապացույցը: □

Ներքև 8.6. Ողորկ $f(x) \in C^1[a, b]$ ֆունկցիայի լրիվ վարիացիան կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$\mathbf{V}_a^b f = \int_a^b |f'(t)| dt : \tag{8-97}$$

Ապացույց. Բավական է կիրառել Թեորեմ 8.25-ը՝ համարելով $\varphi(t) = f'(t)$: □

Դիտողություն 8.2. Թեորեմ 8.25-ը պահպանում է իր ճշմարտացիությունը, եթե $\varphi(t)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը փոխարինենք անհսկական ինտեգրալով՝ ենթադրելով, որ այդ անհսկական ինտեգրալը բացարձակ գոյգամներ է, այսինքն՝ $\int_a^b |\varphi(t)| dt < +\infty$:

8.13 Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների հարկություններ

Առաջին հարկությունն արդեն ապացուցել էինք Պնդում 8.1-ում:

Հարկություն 8.7. Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիան սահմանափակ է, այսինքն՝

$$\left(f(x) \in BV[a, b] \right) \implies \left(\exists M > 0 \quad s.t. \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b] \right) :$$

Հարկություն 8.8. Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների գծային գումարկությունը նույնպես վերջավոր վարիացիա ունի, այսինքն՝

$$\left(f(x), g(x) \in BV[a, b] \right) \implies \left(\alpha f(x) + \beta g(x) \in BV[a, b] \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right),$$

ընդ որում՝

$$\boxed{\mathbf{V}_a^b(f+g) \leq \mathbf{V}_a^b f + \mathbf{V}_a^b g}, \quad \boxed{\mathbf{V}_a^b \alpha f = |\alpha| \mathbf{V}_a^b f}, \quad \text{կամ էլ՝} \quad \boxed{\mathbf{V}_a^b(\alpha f + \beta g) \leq |\alpha| \mathbf{V}_a^b f + |\beta| \mathbf{V}_a^b g} : \quad (8-98)$$

Ապացույց. Անմիջապես հետևում է վարիացիայի սահմանումից և եռանկյան անհավասարությունից: $\square$

Հարկություն 8.9. Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիայի մոդուլը նույնպես վերջավոր վարիացիա ունի.

$$\left(f(x) \in BV[a, b] \right) \implies \left(|f(x)| \in BV[a, b], \quad \text{ընդ որում} \quad \boxed{\mathbf{V}_a^b(|f|) \leq \mathbf{V}_a^b f} \right) :$$

Ապացույց. Անմիջապես հետևում է վարիացիայի սահմանումից և եռանկյան անհավասարությունից: Ի դեպ, հակադարձ պնդումը սխալ է: $\square$

Հարկություն 8.10. Վերջավոր վարիացիայի երկու ֆունկցիաների արտադրյալը նույնպես վերջավոր վարիացիա ունի.

$$\left(f(x), g(x) \in BV[a, b] \right) \implies \left(f(x) g(x) \in BV[a, b] \right),$$

ընդ որում՝

$$\boxed{\mathbf{V}_a^b(f \cdot g) \leq \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \cdot \mathbf{V}_a^b f + \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \mathbf{V}_a^b g} : \quad (8-99)$$

Ապացույց. Քանի որ ֆունկցիաները սահմանափակ են (տես Նաբլություն 8.7), ապա նրանք ունեն վերջավոր սուպրեմումներ.

$$M \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad K \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| :$$

Գրենք և գնահատենք fg արտադրյալի վարիացիոն գումարը $[a, b]$ հատվածի կամայական $\{x_k\}$ պրոհման համար.

$$\begin{aligned} V(fg; x_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_{k+1})g(x_k) + f(x_{k+1})g(x_k) - f(x_k)g(x_k)| = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) \left(g(x_{k+1}) - g(x_k) \right) + g(x_k) \left(f(x_{k+1}) - f(x_k) \right) \right| \leq \\ &\leq M \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| + K \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \\ &\leq M \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}} g + K \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}} f : \end{aligned}$$

Մնում է վերցնել վարիացիոն գումարի սուպրեմումն ըստ բոլոր հնարավոր $\{x_k\}$ պրոհումների՝

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f \cdot g) \leq M \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}} g + K \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}} f, \quad \text{ինչն ավարտում է ապացույցը:}$$

□

Նաբլություն 8.11. Վերջավոր վարիացիայի երկու ֆունկցիաների հարաբերությունը նույնպես վերջավոր վարիացիա ունի, եթե հայտարարը անջատված է գրոյից, այսինքն՝

$$\left(f(x), g(x) \in BV[a, b], \quad |g(x)| \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in [a, b] \right) \implies \left(\frac{f(x)}{g(x)} \in BV[a, b] \right) :$$

Ապացույց. Դարձյալ նշանակենք f -ի և g -ի վերջավոր սուպրեմումները.

$$M \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad K \stackrel{\text{նշ.}}{=} \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| :$$

Գրենք և գնահատենք f/g հարաբերության վարիացիոն գումարը $[a, b]$ հատվածի կամայական $\{x_k\}$ պրոհման համար.

$$\begin{aligned} V\left(\frac{f}{g}; x_k\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{f(x_{k+1})}{g(x_{k+1})} - \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{f(x_{k+1})g(x_k) - f(x_k)g(x_{k+1})}{g(x_{k+1})g(x_k)} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1})g(x_k) - f(x_k)g(x_k) + f(x_k)g(x_k) - f(x_k)g(x_{k+1}) \right| = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left| g(x_k) \left(f(x_{k+1}) - f(x_k) \right) + f(x_k) \left(g(x_k) - g(x_{k+1}) \right) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\alpha^2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |g(x_k)| |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k)| |g(x_k) - g(x_{k+1})| \right] \leq \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2} \left[K \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + M \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \right] \leq \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2} \left[K \cdot \mathbf{V}_a^b f + M \cdot \mathbf{V}_a^b g \right] :
\end{aligned}$$

Մնում է վերցնել վարիացիոն գումարի սուպրեմումն ըստ բոլոր հնարավոր $\{x_k\}$ փրոհումների և կստանանք հարաբերության լրիվ վարիացիայի գնահատական.

$$\mathbf{V}_a^b \left(\frac{f}{g} \right) \leq \frac{1}{\alpha^2} \left[K \cdot \mathbf{V}_a^b f + M \cdot \mathbf{V}_a^b g \right] :$$

□

Թեորեմ 8.26. (Լրիվ վարիացիայի ադիտիվությունը)

$$\left(f(x) \in BV[a, b] \right) \iff \left(\forall c \in (a, b) \quad \text{կերի համար} \quad f(x) \in BV[a, c] \quad \text{և} \quad f(x) \in BV[c, b] \right) :$$

Այդ դեպքում ճիշտ է լրիվ վարիացիայի ադիտիվության բանաձևը

$$\mathbf{V}_a^b f = \mathbf{V}_a^c f + \mathbf{V}_c^b f : \quad (8-100)$$

Ապացույց. $\Rightarrow$ (Անհրաժեշտություն) Վերցնենք $[a, c]$ հատվածի կամայական $\{x'_k\}$ փրոհում և $[c, b]$ հատվածի կամայական $\{x''_k\}$ փրոհում: Միավորենք փրոհումները և կստանանք $[a, b]$ հատվածի փրոհում.

$$\{x'_k\} \cup \{x''_k\} \stackrel{\text{նշ.}}{=} \{x_k\} \quad [a, b] \quad \text{հատվածի փրոհում է :}$$

Ակնհայտ են հետևյալ գնահատականները՝

$$\begin{aligned}
V(f; x'_k) \leq V(f; x_k) \leq \mathbf{V}_a^b f &\implies \mathbf{V}_a^c f \leq \mathbf{V}_a^b f \implies f \in BV[a, c] \\
V(f; x''_k) \leq V(f; x_k) \leq \mathbf{V}_a^b f &\implies \mathbf{V}_c^b f \leq \mathbf{V}_a^b f \implies f \in BV[c, b] :
\end{aligned}$$

Այժմ ապացուցենք լրիվ վարիացիայի (8-100) բանաձևը: Ապացուցենք երկու հակադարձ անհավասարություններ:

Վերցնենք $[a, b]$ հատվածի կամայական $\{x_k\}$ փրոհում և ավելացնենք $x = c$ կետը: Տրոհման մանրացման հետևանքով վարիացիոն գումարը կարող է միայն աճել.

$$V_{[a,b]}(f; \{x_k\}) \leq V_{[a,b]}(f; \{x_k\} \cup \{c\}) = V_{[a,c]}(f; x_k) + V_{[c,b]}(f; x_k) \leq \mathbf{V}_a^c f + \mathbf{V}_c^b f :$$

Վերցնենք վարիացիոն գումարի սուպրեմումն ըստ բոլոր հնարավոր $\{x_k\}$ պրոհումների.

$$\boxed{\mathbf{V}_a^b f \leq \mathbf{V}_a^c f + \mathbf{V}_c^b f} : \quad (8-101)$$

Նակադարձը. ներկայացնենք լրիվ վարիացիաները սուպրեմումի պեսքով և գրենք սուպրեմումի սահմանումը.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a^c f = \sup_{\{x_k\}} V_{[a,c]}(f; x_k) &\stackrel{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{x'_k\} \subset [a, c] \quad s.t. \quad \mathbf{V}_a^c f - \varepsilon < V_{[a,c]}(f; x'_k), \\ \mathbf{V}_c^b f = \sup_{\{x_k\}} V_{[c,b]}(f; x_k) &\stackrel{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{x''_k\} \subset [c, b] \quad s.t. \quad \mathbf{V}_c^b f - \varepsilon < V_{[c,b]}(f; x''_k) : \end{aligned}$$

Գումարենք անհավասարությունները և հաշվի առնենք, որ $[a, c]$ և $[c, b]$ հատվածների պրոհումների միավորումը փալիս է ամբողջ $[a, b]$ հատվածի պրոհում՝ $\{x'_k\} \cup \{x''_k\} = \{x_k\}$.

$$\mathbf{V}_a^c f + \mathbf{V}_c^b f < V_{[a,c]}(f; x'_k) + V_{[c,b]}(f; x''_k) + 2\varepsilon = V_{[a,b]}(f; x_k) + 2\varepsilon \leq \mathbf{V}_a^b f + 2\varepsilon :$$

Քանի որ $\varepsilon > 0$ թիվը կամայական էր, սրանում ենք

$$\boxed{\mathbf{V}_a^c f + \mathbf{V}_c^b f \leq \mathbf{V}_a^b f} : \quad (8-102)$$

Երկու հակադարձ (8-101) և (8-102) անհավասարությունները միասին փալիս են պահանջվող (8-100) բանաձևը:

$\boxed{\iff}$ (Բավարարություն) Նույն կերպ ապացուցում ենք

$$V(f; x_k) \leq \mathbf{V}_a^c f + \mathbf{V}_c^b f < +\infty$$

$[a, b]$ հատվածի կամայական $\{x_k\}$ պրոհման համար: Այսպեղից հեքևում է՝ $f(x) \in BV[a, b] :$ $\square$

8.14 Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիայի Ժորդանի վերլուծությունը

Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաները լիովին բնութագրվում են բավականին պարզ պայմանով ֆունկցիայի մոնոտոնության փերմիններով:

Թեորեմ 8.27. *(Ժորդանի թեորեմը, վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիայի վերլուծությունը)*

Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան հատվածում վերջավոր վարիացիա ունենա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն ներկայացվի որպես երկու աճող ֆունկցիաների փարբերություն.

$$\left(f(x) \in BV[a, b] \right) \iff \left(\exists g_1(x) \nearrow, \quad g_2(x) \nearrow \quad s.t. \quad \boxed{f(x) = g_1(x) - g_2(x)}, \quad x \in [a, b] \right) :$$

Ապացույց. $\Leftarrow$ (Բավարարություն) Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան ներկայացված է որպես երկու աճող ֆունկցիաների տարբերություն, այլ կերպ ասած՝ որպես երկու մոնոտոն ֆունկցիաների գումար: Քանի որ մոնոտոն ֆունկցիան վերջավոր վարիացիա ունի (տես Պնդում 8.2), իսկ վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների գումարը նույնպես վերջավոր վարիացիա ունի (տես Նախկինություն 8.8), ապա $f(x)$ ֆունկցիան վերջավոր վարիացիա ունի՝ $f(x) \in BV[a, b]$:

$\Rightarrow$ (Անհրաժեշտություն) Ներմուծենք նոր ֆունկցիա՝

$$V(x) \stackrel{\text{def}}{=} \overset{x}{\bigvee}_a f, \quad V(a) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad x \in [a, b], \quad (8-103)$$

այն կոչվում է **f -ի վարիացիոն ֆունկցիա**: Վարիացիոն գումարի և լրիվ վարիացիայի սահմանումից պարզ է, որ վարիացիոն ֆունկցիան աճող է՝ $V(x) \nearrow$: Իսկապես, օգտվենք լրիվ վարիացիայի ադիտիվությունից.

$$\text{Եթե } a \leq x_1 < x_2 \leq b, \quad \text{ապա } V(x_2) = \overset{x_2}{\bigvee}_a f = \overset{x_1}{\bigvee}_a f + \overset{x_2}{\bigvee}_{x_1} f \geq V(x_1):$$

Այժմ ներկայացնենք

$$f(x) = V(x) - \left(V(x) - f(x) \right) \stackrel{\text{ն2.}}{=} V(x) - g(x), \quad V(x) \nearrow:$$

Մեզ մնում է ապացուցել, որ նշանակված $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} V(x) - f(x)$ ֆունկցիան աճող է՝ $g(x) \nearrow$: Իսկապես, դարձյալ օգտվենք լրիվ վարիացիայի ադիտիվությունից և սահմանումից. եթե $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, ապա

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= [V(x_2) - f(x_2)] - [V(x_1) - f(x_1)] = \left[\overset{x_2}{\bigvee}_a f - \overset{x_1}{\bigvee}_a f \right] - (f(x_2) - f(x_1)) = \\ &= \overset{x_2}{\bigvee}_{x_1} f - (f(x_2) - f(x_1)) \geq \overset{x_2}{\bigvee}_{x_1} f - |f(x_2) - f(x_1)| \geq 0: \end{aligned}$$

Ներկայացնենք $g(x_2) \geq g(x_1)$, այսինքն՝ $g(x) \nearrow$: □

Առանց ապացույցի բերենք ևս մի քանի հատկություններ:

Թեորեմ 8.28. (Վերջավոր վարիացիայի անընդհատ ֆունկցիայի մասին)

Եթե $f(x) \in BV[a, b] \cap C[a, b]$, ապա

ա) $\overset{b}{\bigvee}_a f = \lim_{d \rightarrow 0} V(f; x_k)$, որտեղ d -ն $\{x_k\}$ պրոհնանս պրամագիծն է;

բ) $V(x) = \overset{x}{\bigvee}_a f \in C[a, b]$:

Թեորեմ 8.29. (Ժորդան)

Դիցուք տրված է L անընդհատ կորը՝

$$L \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta), \quad \varphi(t), \psi(t) \in C[a, b]: \quad (8-104)$$

Այդ դեպքում

$$L \text{ կորն ուղղելի է} \iff \varphi(t), \psi(t) \in BV[a, b]:$$

8.15 Ստիլպյեսի (կամ Ռիման-Ստիլպյեսի) ինտեգրալը

Ռիման-Ստիլպյեսի (կամ պարզապես Ստիլպյեսի) ինտեգրալը Ռիմանի որոշյալ ինտեգրալի ընդհանրացումն է և միաժամանակ շար նման սահմանում ու կառուցվածք ունի: Էապես կօգտվենք Ռիմանի որոշյալ ինտեգրալի արտադրանքի գաղափարներից և նշանակումներից:

Դիցուք $[a, b]$ հատվածում որոշված են երկու ֆունկցիաներ՝ $f(x), g(x), x \in [a, b]$: Վերցնենք $[a, b]$ հատվածի րոտում

$$\{x_k\}, \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$

$$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}] \quad \text{միջանկյալ կետեր,} \quad d = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k \quad \text{րոտի մասնագիծ:}$$

Կազմենք այս րոտի մասնագիծը համապատասխանող **Ստիլպյեսի ինտեգրալային գումար** րվյալ միջանկյալ կետերով.

$$\sigma = \sigma(f, g, x_k, \xi_k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta g(x_k):$$

Սահմանում 8.6. Եթե $\exists \lim_{d \rightarrow 0} \sigma$, ապա այդ սահմանը կոչվում է $f(x)$ **ֆունկցիայի Ստիլպյեսի ինտեգրալ ըստ** $g(x)$ **ֆունկցիայի** $[a, b]$ **հատվածում** և նշանակվում է

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sigma \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x) dg(x) \stackrel{\text{def}}{=} (S) \int_a^b f(x) dg(x), \quad (8-105)$$

ընդ որում (8-105) սահմանի գոյությունը ենթադրվում է ξ_k միջանկյալ կետերի ընտրությունից անկախ:

Այդ դեպքում f -ն անվանում են **ինտեգրանդի ըստ** g **ֆունկցիայի** և գրում՝ $f(x) \in \mathcal{R}_g[a, b]$:

f -ը Ստիլպյեսի (8-105) ինտեգրալում կոչվում է **ենթինտեգրալային ֆունկցիա (integrand)**, իսկ g -ն (8-105)-ում կոչվում է **ինտեգրող ֆունկցիա (integrator)**:

Նեշտ է նկատել, որ $g(x) = x$ մասնավոր դեպքում Ստիլպյեսի (8-105) ինտեգրալը համընկնում է Ռիմանի $\int_a^b f(x) dx$ ինտեգրալի հետ:

Օրինակ 8.4. Պարզագույն դեպքում, երբ ենթինտեգրալային ֆունկցիան հաստատուն է, նրա Ստիլպյեսի ինտեգրալը արագ հաշվարկվում է բացառապես սահմանումով.

$$(S) \int_a^b C dg(x) = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} C [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = C [g(b) - g(a)]:$$

Ստիլպյեսի ինտեգրալի սահմանումից հետևում են մի քանի պարզ և բնական հատկություններ:

Նաբերություն 8.12. Եթե $f_1, f_2 \in \mathcal{R}_g[a, b]$, ապա $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}_g[a, b]$, և

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dg(x) = \int_a^b f_1(x) dg(x) + \int_a^b f_2(x) dg(x) :$$

Նաբերություն 8.13. Եթե $f \in \mathcal{R}_{g_1}[a, b]$ և $f \in \mathcal{R}_{g_2}[a, b]$, ապա $f \in \mathcal{R}_{g_1+g_2}[a, b]$, և

$$\int_a^b f(x) d(g_1(x) + g_2(x)) = \int_a^b f(x) dg_1(x) + \int_a^b f(x) dg_2(x) :$$

Նաբերություն 8.14. Եթե $f \in \mathcal{R}_g[a, b]$, ապա $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ համար $\alpha f \in \mathcal{R}_{\beta g}[a, b]$, և

$$\int_a^b \alpha f(x) d(\beta g(x)) = \alpha \beta \int_a^b f(x) dg(x) :$$

Նաբերություն 8.15. (*Մոխրյանի ինտեգրալի ադիտիվությունը*)

Ցանկացած $\forall c \in (a, b)$ կերի համար

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x), \quad (8-106)$$

եթե գոյություն ունի գոնե ձախ կողմի ինտեգրալը:

Դիպողություն 8.3. Ներառքի է, որ (8-106) բանաձևի աջ կողմի երկու ինտեգրալների գոյությունից չի հետևում ձախ կողմի ինտեգրալի գոյությունը: Բերենք համապատասխան օրինակ բնութագրիչ ֆունկցիայի տեսքով: Նշենք, որ

$$\mathbf{1}_E(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{եթե } x \in E, \\ 0, & \text{եթե } x \notin E, \end{cases} \quad (8-107)$$

Ֆունկցիան կոչվում է $E \subset \mathbb{R}$ բազմության բնութագրիչ կամ ինդիկատոր ֆունկցիա:

Սահմանենք ենթինտեգրալային և ինտեգրող ֆունկցիաները $[-1, 1]$ հատվածում.

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1}_{(0,1]}(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 : \end{cases}$$

Դժվար չէ տեսնել, որ

$$\begin{aligned} \exists \int_{-1}^0 f(x) dg(x) &= 0, & \text{որովհետև } f &\equiv 0 \quad (-1 \leq x \leq 0), \\ \exists \int_0^1 f(x) dg(x) &= 0, & \text{որովհետև } g &\equiv 1 \quad (0 \leq x \leq 1) : \end{aligned}$$

Մյուս կողմից՝ ցույց տանք, որ $\exists \int_{-1}^1 f(x) dg(x)$ ինտեգրալը գոյություն չունի:

Իսկապես, վերցնենք $[-1, 1]$ հատվածի այնպիսի $\{x_k\}$ տրոհում, որ $x = 0$ խզման կետը տրոհման կետ չլինի, և կազմենք ինտեգրալային գումար.

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (g(x_{k+1}) - g(x_k)) = f(\xi_k) (g(x_{k+1}) - g(x_k)) :$$

Նամարենք, որ $x = 0$ կետը հայտնվում է ինչ-որ k -րդ մասնակի միջակայքում՝ $x_k < 0 < x_{k+1}$:

Մնացած մասնակի միջակայքերում ինտեգրող ֆունկցիայի աճը զրո է՝

$$\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i) = 0 \quad (i \neq k), \quad \text{քանի որ } g(x) \equiv \text{const}, \quad x \notin [x_k, x_{k+1}] :$$

Այսպիսով, ինտեգրալային գումարի n գումարելիներից մնում է միայն մեկը.

$$\sigma = f(\xi_k) (g(x_{k+1}) - g(x_k)) = f(\xi_k) (1 - 0) = f(\xi_k) \implies \lim_{d \rightarrow 0} \sigma = \lim_{d \rightarrow 0} f(\xi_k) :$$

Սրանցից, որ $\lim_{d \rightarrow 0} \sigma$ սահմանը կախված է $\xi \in [x_k, x_{k+1}]$ միջանկյալ կետի ընտրությունից.

$$\text{եթե } \xi_k > 0, \quad \text{այսինքն } \sigma = f(\xi_k) = 1,$$

$$\text{եթե } \xi_k \leq 0, \quad \text{այսինքն } \sigma = f(\xi_k) = 0 :$$

Ներկայումս՝ $\nexists \lim_{d \rightarrow 0} \sigma$ սահմանը գոյություն չունի, և ուրեմն $f \notin \mathcal{R}_g[-1, 1]$:

Նկատենք, որ $\int_{-1}^1 f(x) dg(x)$ ինտեգրալի գոյություն չունենալը բացատրվում է այն հանգամանքով, որ $u' = f$ -ը, $u' = g$ -ն խզվող են նույն $x = 0$ կետում: Այսպիսով, (8-106) բանաձևը խախտվեց:

Նախադրություն 8.16. (Մասերով ինտեգրման բանաձև)

Եթե $f \in \mathcal{R}_g[a, b]$, կամ $g \in \mathcal{R}_f[a, b]$, այսինքն

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) df(x) :$$

Կարճ ներկայացնենք Սփիլոսոփիայի ինտեգրալի երկրաչափական իմաստը: Ենթադրենք $f(t) > 0$, $g(t) \nearrow$ (խիստ) և կազմենք պարամետրական տեսքով հետևյալ կորը՝

$$L \quad \begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) :$$

Այդ դեպքում Ստիլպյեսի $\int_a^b f(x) dg(x)$ ինտեգրալը հավասար է L կորով սահմանափակված պարկերի մակերեսին:

Դիտարկենք ըստ Ստիլպյեսի ինտեգրելի ֆունկցիաների մի քանի դասեր: Առանց ապացույցի ձևակերպենք ըստ Ստիլպյեսի ինտեգրելիության մի քանի հայտանիշներ:

Թեորեմ 8.30.

$$u) \quad f(x) \in C[a, b], \quad g(x) \in BV[a, b] \quad \implies \quad f \in \mathcal{R}_g[a, b] ;$$

$$p) \quad f(x) \in \mathcal{R}[a, b], \quad g(x) \in Lip[a, b] \quad \implies \quad f \in \mathcal{R}_g[a, b] ;$$

$$q) \quad f(x), \varphi(x) \in \mathcal{R}[a, b], \quad g(x) \stackrel{def}{=} c + \int_a^x \varphi(t) dt \quad \implies \quad f \in \mathcal{R}_g[a, b] ;$$

$$r) \quad \text{Եթե որևէ } c \in [a, b] \text{ կետում խզվող են } u' \text{ } f\text{-ը, } u' \text{ } g\text{-ն, ապա } f \notin \mathcal{R}_g[a, b] ;$$

$$k) \quad g(x) \in \mathcal{R}_f[a, b] \quad \iff \quad f \in \mathcal{R}_g[a, b] :$$

8.16 Ստիլպյեսի ինտեգրալի հաշվման բանաձևեր

Ստիլպյեսի ինտեգրալի հաշվման հիմնական միջոցն է որևէ եղանակով այն բերել Ռիմանի որոշյալ ինտեգրալի: Պարզագույն դեպքն է, երբ ինտեգրող $g(x)$ ֆունկցիան օժտված է դիֆերենցելիության կամ ողորկության որոշ հատկություններով, ինչպես հաջորդ թեորեմում:

Թեորեմ 8.31. Եթե $f(x), \varphi(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $g(x) \stackrel{def}{=} c + \int_a^x \varphi(t) dt$, ապա $f \in \mathcal{R}_g[a, b]$ և

$$\boxed{(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) \varphi(x) dx} : \quad (8-108)$$

Ապացույց. Կազմենք Ստիլպյեսի ինտեգրալային գումարը $[a, b]$ հատվածի կամայական $\{x_k\}$ փրոհման համար.

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx :$$

Միաժամանակ նույն $\{x_k\}$ կետերով փրոհենք (8-108) բանաձևի Ռիմանի ինտեգրալը.

$$I \stackrel{u2}{=} (R) \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \varphi(x) dx :$$

Կազմենք $\sigma - I$ փարբերությունը և գնահատենք.

$$|\sigma - I| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(x)) \varphi(x) dx \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(x)| |\varphi(x)| dx :$$

Քանի որ φ ֆունկցիան ինտեգրելի է ըստ Ռիմանի, $\varphi \in \mathcal{R}[a, b]$, ապա սահմանափակ է՝ $\exists M = \text{const} > 0$ s.t. $|\varphi(x)| \leq M, \quad x \in [a, b]$: Նշանակենք f ֆունկցիայի փարանունը k -րդ մասնակի միջակայքում.

$$\omega_k(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{[x_k, x_{k+1}]} |f(x') - f(x'')|, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

և գնահատենք՝

$$|\sigma - I| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k \longrightarrow 0, \quad \text{երբ} \quad d \rightarrow 0,$$

քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է ըստ Ռիմանի, $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$: Ներկաբար՝ $\lim_{d \rightarrow 0} \sigma = I$, և (8-108) բանաձևն ապացուցված է: □

Թեորեմ 8.32. Դիցուք $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $g(x) \in C[a, b]$, գոյություն ունի $\exists g'(x)$ ածանցյալը $[a, b]$ հասարակածում՝ բացի վերջավոր թվով կետերից, և $g'(x) \in \mathcal{R}[a, b]$: Այդ դեպքում $f \in \mathcal{R}_g[a, b]$ և

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx : \quad (8-109)$$

Ապացույց. Քանի որ $g'(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, ապա գործում է Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը.

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t) dt,$$

և հետո կիրառվում է նախորդ Թեորեմ 8.31-ը: □

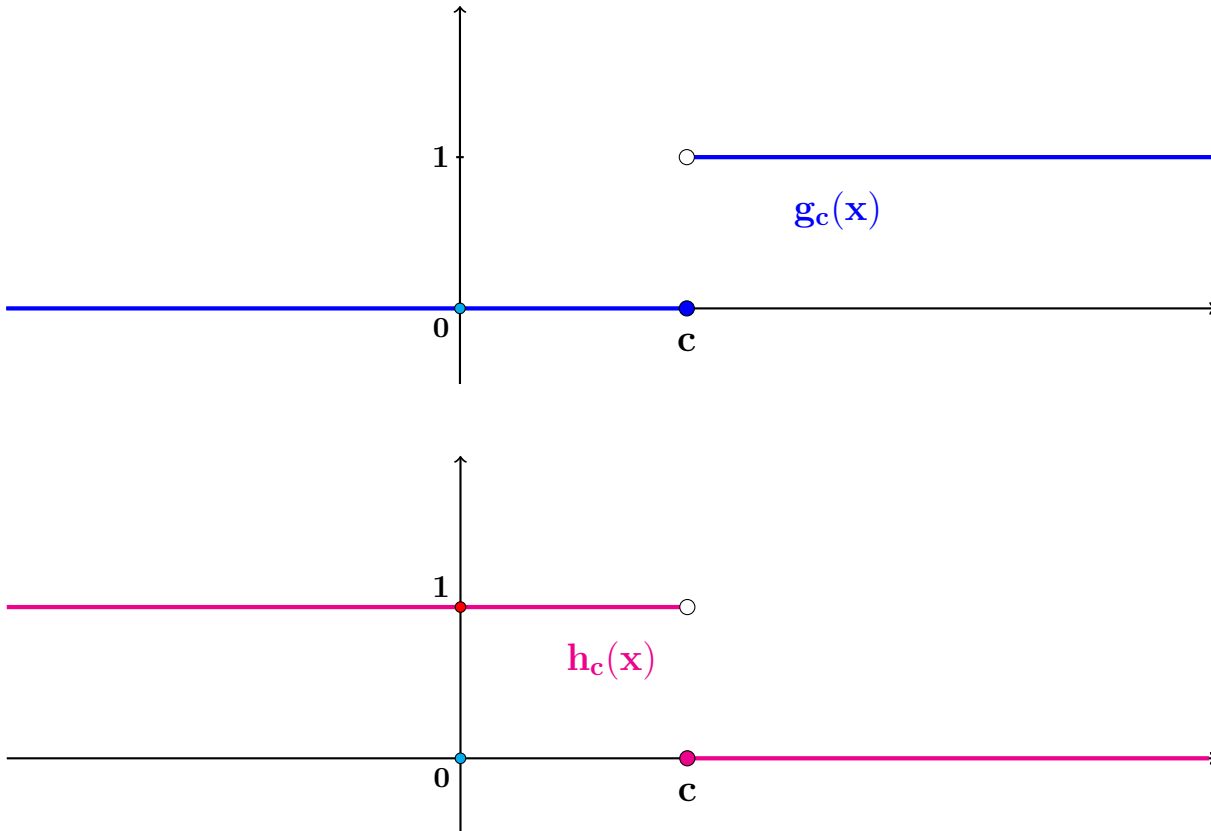
Նկատենք, որ ապացուցված (8-108)-(8-109) բանաձևում ձևականորեն պահպանվում է դիֆերենցիալի ներկայացումը՝ $dg(x) = g'(x) dx$: Ողորկ $g(x) \in C^1[a, b]$ ֆունկցիաների համար սա ակնհայտորեն ճիշտ է:

Երբ ինտեգրող $g(x)$ ֆունկցիան խզվող է

Նախուկ ուշադրության է արժանի այն դեպքը, երբ ինտեգրող $g(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հասարակածում վերջավոր թվով և 1-ին կարգի խզման կետեր ունի: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $g(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հասարակածում միայն մեկ $c \in [a, b]$ 1-ին կարգի խզման կետ ունի: Սահմանենք այդպիսի կտոր առ կտոր հասարակածում ֆունկցիաներ.

$$g_c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1}_{(c, \infty)}(x) \stackrel{\text{կամ}}{=} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x - c), \quad (8-110)$$

$$h_c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1}_{(-\infty, c)}(x) \stackrel{\text{կամ}}{=} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(c - x) : \quad (8-111)$$



Գծագիր 8.5. Կտոր առ կտոր հասարարում $g_c(x)$ և $h_c(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները

Նկատենք, որ c կետում $g_c(x)$ ֆունկցիան անընդհար է ձախից և խզվող է աջից, իսկ $h_c(x)$ ֆունկցիան անընդհար է աջից և խզվող է ձախից: Բացի այդ, c կետում նրանք ունեն մեկի հավասար թռիչք, ավելի ստույգ՝

$$\begin{aligned} g_c(c+0) - g_c(c) &= 1 - 0 = 1 && \text{աջակողմյան թռիչք,} \\ h_c(c) - h_c(c-0) &= 0 - 1 = -1 && \text{ձախակողմյան թռիչք:} \end{aligned} \quad (8-112)$$

Ընդունելով, որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհար է գոնե c կետում, հաշվենք Ստիլլերսի

$$\boxed{(S) \int_a^b f(x) dg_c(x)} = ?, \quad a \leq c < b, \quad (8-113)$$

ինտեգրալը: Նշենք, որ $c = b$ դեպքն ակնհայտ է, քանի որ $g_b(x) = \mathbf{1}_{(b, \infty)}(x) \equiv 0$, երբ $x \in [a, b]$, և ուրեմն (8-113) ինտեգրալը զրո է:

Կազմենք Սփիլոյեսի ինտեգրալային գումարը $[a, b]$ հատվածի կամայական $\{x_k\}$ փրոհման համար.

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [g_c(x_{k+1}) - g_c(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta g_c(x_k) :$$

Ենթադրենք c կետը հայտնվում է որոշակի k -րդ մասնակի միջակայքում.

$$x_k \leq c < x_{k+1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Delta g_c(x_k) &= g_c(x_{k+1}) - g_c(x_k) = 1 - 0 = 1, \\ \Delta g_c(x_i) &= 0 \quad (i \neq k) \quad \text{մնացած մասնակի միջակայքերում:} \end{aligned}$$

Ներկայացնենք σ ինտեգրալային գումարից մնում է միայն մեկ գումարելի.

$$\sigma = f(\xi_k), \quad x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1} :$$

Օգտվելով $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից՝ անցնենք սահմանի, երբ $d \rightarrow 0$.

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sigma = \lim_{d \rightarrow 0} f(\xi_k) = \lim_{\xi_k \rightarrow c} f(\xi_k) = f(c) :$$

Այսպիսով,

$$\boxed{(S) \int_a^b f(x) dg_c(x) = (S) \int_a^b f(x) d\mathbf{1}_{(c, \infty)}(x) = f(c)}, \quad a \leq c < b : \quad (8-114)$$

Նմանապես կարող ենք հաշվել նույն ինտեգրալը $h_c(x)$ ինտեգրող ֆունկցիայով.

$$\boxed{(S) \int_a^b f(x) dh_c(x) = (S) \int_a^b f(x) d\mathbf{1}_{(-\infty, c)}(x) = -f(c)}, \quad a < c \leq b : \quad (8-115)$$

Մի փոքր ընդհանրացնելով այս մասնավոր դեպքը՝ կարելի է արտագրել (8-114)-(8-115) բանաձևերը՝ հաշվի առնելով ինտեգրող ֆունկցիաների (8-112) թռիչքները.

$$\boxed{(S) \int_a^b f(x) dg_c(x) = (S) \int_a^b f(x) d\mathbf{1}_{(c, \infty)}(x) = f(c) (g_c(c+0) - g_c(c))}, \quad a \leq c < b, \quad (8-116)$$

$$\boxed{(S) \int_a^b f(x) dh_c(x) = (S) \int_a^b f(x) d\mathbf{1}_{(-\infty, c)}(x) = f(c) (h_c(c) - h_c(c-0))}, \quad a < c \leq b, \quad (8-117)$$

ընդ որում թռիչքների արժեքը կարելի է վերցնել կամայական:

Այժմ ամփոփենք անընդհատ և խզվող $g(x)$ ինտեգրող ֆունկցիաներով բանաձևերը, այսինքն՝ միավորենք Թեորեմ 8.32-ի (8-109) և (8-114)-(8-117) բանաձևերը, և ներկայացնենք մեկ միասնական բանաձևով:

Թեորեմ 8.33. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում՝ $f(x) \in C[a, b]$, իսկ $g(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում՝ բացի գուցե վերջավոր թվով c_k ($k = \overline{0, m}$) կետերից.

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{m-1} < c_m = b,$$

որպես $g(x)$ ֆունկցիան 1-ին կարգի խզումներ ունի:

Բացի այդ, գոյություն ունի $\exists g'(x)$ ածանցյալը $[a, b]$ հատվածում՝ բացի վերջավոր թվով կետերից, և $g'(x) \in \mathcal{R}[a, b]$: Այդ դեպքում $f \in \mathcal{R}_g[a, b]$ և

$$\begin{aligned} (S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx + f(a)[g(a+0) - g(a)] + f(b)[g(b) - g(b-0)] + \\ + \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)] : \end{aligned} \quad (8-118)$$

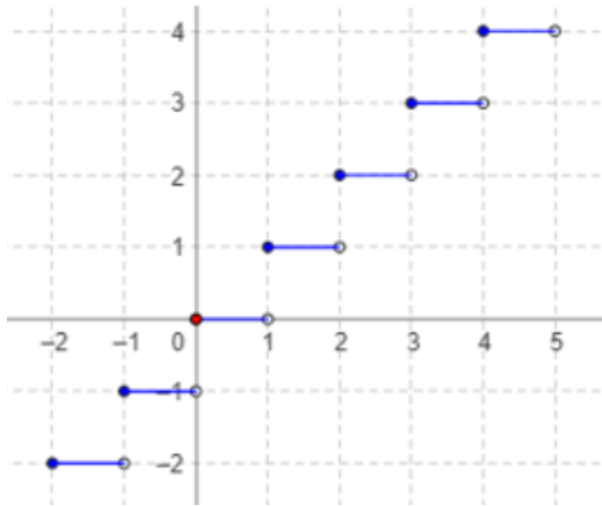
Ստիլպյեսի մի քանի պարզ ինտեգրալներ հաշվենք, որպես $g(x)$ ինտեգրող ֆունկցիան խզվող է :

Օրինակ 8.5. Մահմաններ ենթինտեգրալային $f(x) = x$ կամ $f(x) = x^2$ և ինտեգրող $g(x) = [x]$ ֆունկցիաները, և հաշվենք Ստիլպյեսի ինտեգրալներ.

$$\int_0^2 x d[x] = \int_0^2 x [x]' dx + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 = 0 + 1 + 2 = 3,$$

$$\int_1^4 x^2 d[x] = \int_1^4 x^2 [x]' dx + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 = 0 + 2^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 + 4^2 \cdot 1 = 4 + 9 + 16 = 29 :$$

Նշենք, որ ինտեգրման միջակայքերի ձախ ծայրակետերը $g(x) = [x]$ ինտեգրող ֆունկցիայի խզման կետեր չեն, այլ անընդհատության կետեր՝ $[x] \in C[0, 1)$, $[x] \in C[1, 2)$:



Գծագիր 8.6. $g(x) = [x]$ ամբողջ մաս ֆունկցիայի գրաֆիկը

8.17 Ստիլպյեսի ինտեգրալի՝ անհավասարություններով արտահայտվող հատկություններ

Այս բաժնում կձևակերպենք մի շարք հատկություններ Ստիլպյեսի ինտեգրալի գնահատականներով: Ուշադիր ընթերցողը կնկատի, որ բոլոր գնահատականներն ունեն իրենց նմանակները Ռիմանի ինտեգրալի համար: Նախկապես, երբ $g(x)$ ինտեգրող ֆունկցիան մոնոտոն է, գնահատականները (և դրանց ապացույցները) գրեթե կրկնում են Ռիմանի ինտեգրալի համապատասխան գնահատականները և ապացույցները:

Թեորեմ 8.34. (Ստիլպյեսի ինտեգրալի գնահատականներ)

Դիցուք $g(x) \nearrow$ աճող է $[a, b]$ հատվածում: Այդ դեպքում՝

$$\textbf{ա)} \quad f(x) \geq 0, \quad x \in [a, b], \quad f(x) \in \mathcal{R}_g[a, b] \quad \implies \quad (S) \int_a^b f(x) dg(x) \geq 0 ;$$

$$\textbf{բ)} \quad f_1(x) \leq f_2(x), \quad x \in [a, b], \quad f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{R}_g[a, b] \quad \implies \quad (S) \int_a^b f_1(x) dg(x) \leq (S) \int_a^b f_2(x) dg(x) ;$$

$$\begin{aligned} \textbf{գ)} \quad f(x) \in \mathcal{R}_g[a, b], \quad m \stackrel{\text{ձ2.}}{=} \inf_{a \leq x \leq b} f(x), \quad M \stackrel{\text{ձ2.}}{=} \sup_{a \leq x \leq b} f(x) \quad \implies \\ \implies \quad m [g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f(x) dg(x) \leq M [g(b) - g(a)]; \end{aligned}$$

$$\textbf{դ)} \quad f \in \mathcal{R}_g[a, b] \quad \implies \quad |f| \in \mathcal{R}_g[a, b] \quad \text{և} \quad \left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dg :$$

Թեորեմ 8.35. (Ստիլպյեսի ընդհանուր ինտեգրալի գնահատական)

Եթե $f(x) \in C[a, b]$, $g(x) \in BV[a, b]$, ապա

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| dV(x), \quad (8-119)$$

որտեղ $V = V_g$ -ն g -ի վարիացիոն ֆունկցիան է, այսինքն՝ $V(x) = \bigvee_a^x g$, $x \in [a, b]$:

Ապացույց. Նախ նկատենք, որ (8-119)-ի Ստիլպյեսի ինտեգրալները գոյություն ունեն, քանի որ ենթինտեգրալային ֆունկցիաներն անընդհար են, իսկ ինտեգրող ֆունկցիաները՝ վերջավոր վարիացիայի (տե՛ս Թեորեմ 8.30ա):

$[a, b]$ հատվածի կամայական $\{x_k\}$ բրոհման համար կազմենք և գնահատենք Ստիլպյեսի ինտեգրալային գումարը.

$$|\sigma| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (g(x_{k+1}) - g(x_k)) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| |g(x_{k+1}) - g(x_k)| :$$

Քանի որ $V(x) \nearrow$ և

$$|g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq \mathbf{V}_{x_k}^{x_{k+1}} g = V(x_{k+1}) - V(x_k),$$

ապա

$$|\sigma| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| (V(x_{k+1}) - V(x_k)) :$$

Տրոհումը մանրացնենք՝ ձգտենք ներքին $d \rightarrow 0$, և կապարենք սահմանային անցում: Կստանանք Ստիլլերսի ինտեգրալներ՝

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| dV(x) :$$

□

Ներկանք 8.7. *(Ստիլլերսի ընդհանուր ինտեգրալի գնահատական)*

Եթե $f(x) \in C[a, b]$, $|f(x)| \leq M$ ($x \in [a, b]$), $g(x) \in BV[a, b]$, ապա

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq M \cdot \mathbf{V}_a^b g : \quad (8-120)$$

Ապացույց. Ըստ Թեորեմ 8.35-ի (8-119) գնահատականի, ինչպես նաև ըստ Օրինակ 8.4-ի՝

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dV \leq M \int_a^b dV = M (V(b) - V(a)) = M \cdot V(b) = M \cdot \mathbf{V}_a^b g :$$

□

Թեորեմ 8.36. *(Միջին արժեքի թեորեմներ Ստիլլերսի ինտեգրալի համար)*

$$\textbf{ա)} \quad f(x) \in C[a, b], \quad g(x) \nearrow \quad \implies \quad \exists \xi \in [a, b] \quad s.t. \quad \left(S \int_a^b f(x) dg(x) = f(\xi) (g(b) - g(a)) \right) ;$$

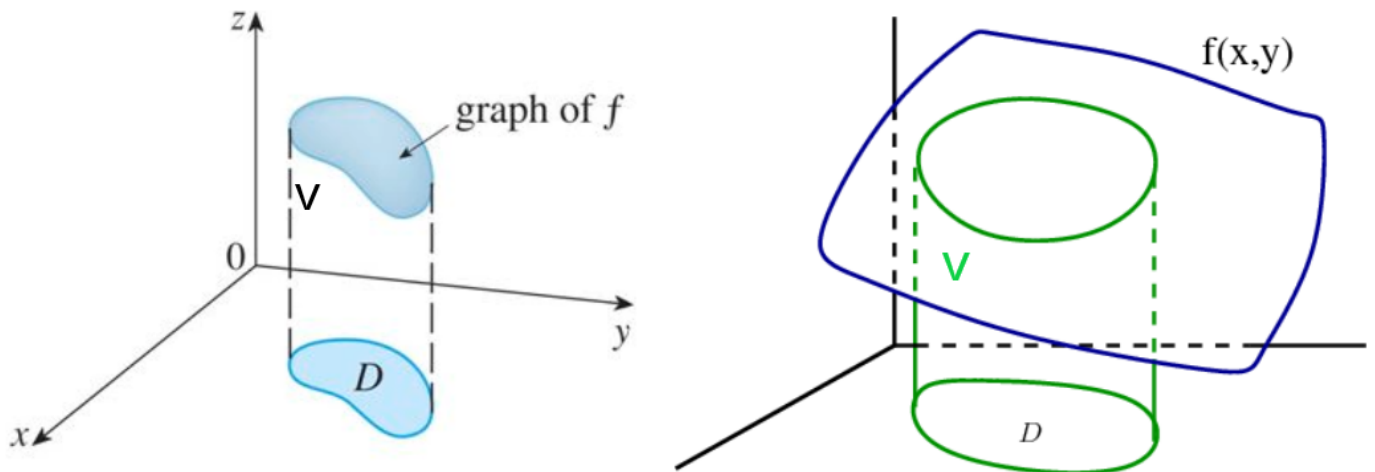
$$\textbf{բ)} \quad f(x) \nearrow [a, b]\text{-ում}, \quad g(x) \in C[a, b] \quad \implies \quad \exists \xi \in [a, b] \quad s.t.$$

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = f(a) (g(\xi) - g(a)) + f(b) (g(b) - g(\xi)) :$$

8.18 Կրկնակի ինտեգրալ

Կրկնակի ինտեգրալը ռիմանյան որոշյալ ինտեգրալի ուղղակի ընդհանրացումն է երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար: Դիցուք $D \subset \mathbb{R}^2$ բազմությունը սահմանափակ, քառակուսելի, հարթ պարկեր է, որտեղ որոշված է $z = f(x, y) : D \mapsto \mathbb{R}$ ֆունկցիան: Դրա մակերեսը նշանակենք $|D|$ -ով:

Պարկերացնելու համար կարելի է համարել $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ և դիֆարկել դրա գրաֆիկը, որն ինչ-որ մակերևույթ է: Այդ մակերևույթի պրոյեկցիան Oxy հարթության վրա հենց D որոշման փրոյեկցիան է: Պրոյեկցիան իրականացնելիս գոյանում է փարածական գլանաձև մարմին, որը նշանակենք V -ով: Ենթադրենք $V \subset \mathbb{R}^3$ մարմինը խորանարդելի է, նրա ծավալը նշանակենք $|V|$ -ով:



Պատկեր 8.7. Ֆունկցիայի գրաֆիկը և գլանաձև V մարմինը

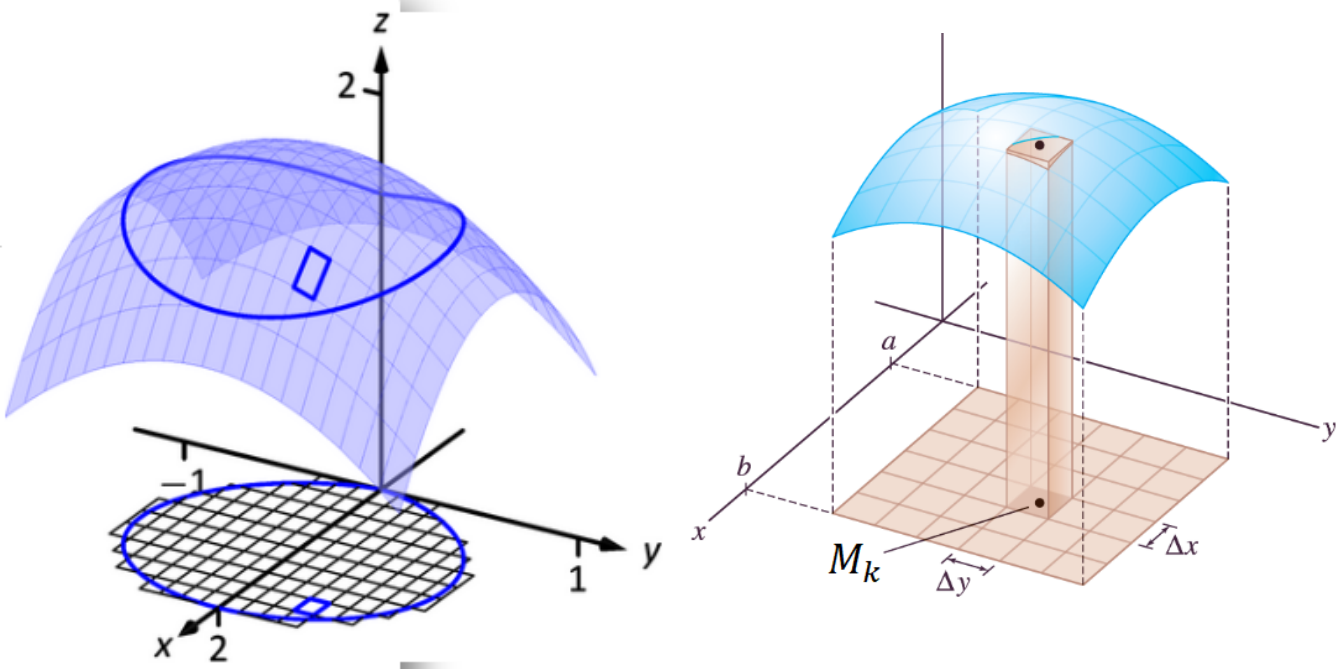
Փորձենք գրել V գլանաձև մարմնի ծավալը: Այդ նպատակով վերջավոր թվով (կտրոր առ կտրոր ողորկ) կտրերի ցանցով կառուցենք D փրոյեկցիայի փրոհում, դրա արդյունքում D -ն կփրոհվի վերջավոր թվով **մասնակի փրոյեկցիաների**, այդպես կոչված **փարթական մասնիկներ**՝ $D_1, D_2, \dots, D_n$, $D = \bigcup_{k=1}^n D_k$, րեն **պատկեր 8.8**: Քանի որ փրոհման կտրերը կտրոր առ կտրոր ողորկ են, ուստի ունեն գրոյական մակերես, և ուրեմն D_k մասնակի փրոյեկցիաները նույնպես քառակուսելի են: Բացի այդ, D_k մասնակի փրոյեկցիաները զույգ առ զույգ չեն հասկում. հետևաբար գործում է մակերեսի ադիտիվությունը՝ $|D| = \sum_{k=1}^n |D_k|$:

Յուրաքանչյուր D_k մասնակի փրոյեկցիայում վերցնենք մեկ կամայական $M_k(\xi_k, \eta_k) \in D_k$, $k = \overline{1, n}$, **միջանկյալ կետ**: Փորձենք հաշվել այն նեղ **գլանաձև սյան** ծավալը, որի հիմքը D_k k -րդ մասնակի փրոյեկցիան է: Եթե այն իսկապես ուղիղ գլան կամ պրիզմա լիներ $f(M_k)$ բարձրությամբ, ապա այդ գլանաձև սյան ծավալը կլիներ

$$f(M_k) \cdot |D_k| = f(\xi_k, \eta_k) \cdot |D_k|, \quad k = \overline{1, n} :$$

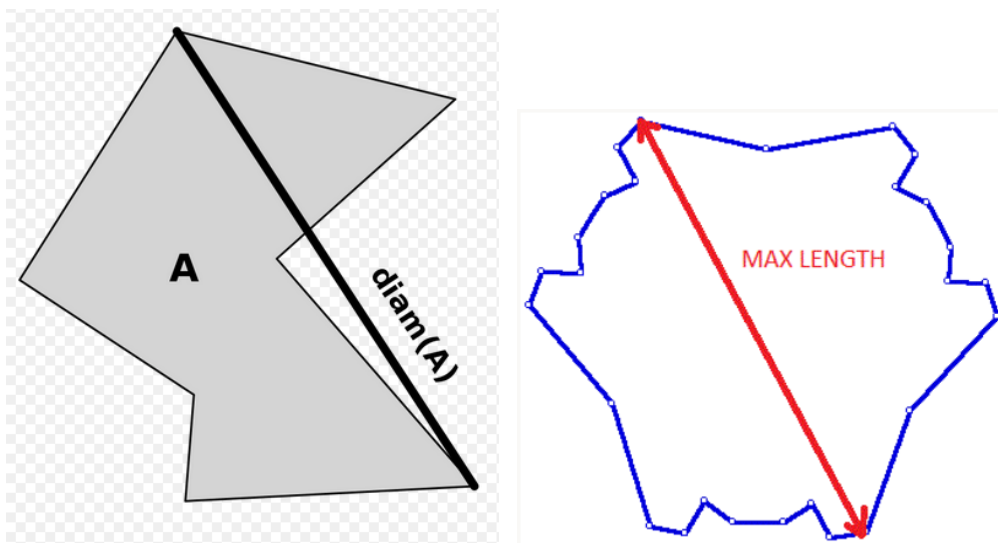
Այսպես հաշվելով յուրաքանչյուր k -ի համար՝ գումարենք դրանք և կստանանք $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիայի **ինտեգրալային գումար** արվյալ $\{D_k\}$ փրոհմանը համապատասխանող.

$$\sigma = \sigma(D_k, M_k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f(M_k) |D_k| = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) |D_k|, \quad M_k(\xi_k, \eta_k) \in D_k : \quad (8-121)$$



Պճագիր 8.8. D փրոհության փրոհումը

Նշանակենք d_k -ով D_k մասնակի փրոհության **տրամագիծը**՝ $d_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{diam } D_k$ $k = \overline{1, n}$: Նիշենք, որ հարթ բազմության **տրամագիծն** այդ բազմության կամայական երկու կետեր միացնող հարվածների երկարությունների սուպրեմումն է, այսինքն՝ $\text{diam } D_k \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{M', M'' \in D_k} \rho(M', M'')$: Մասնավորապես՝ փակ բազմության (կոմպակտի) տրամագիծը այդ բազմության ամենաերկար լարի երկարությունն է :



Պճագիր 8.9. Հարթ բազմության տրամագիծը

Նշանակենք d -ով d_k արամագծերի մեծագույնը՝ $d \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq k \leq n} d_k$, որը կանվանենք $\{D_k\}$ **պրոհման արամագիծ**: Եթե ավելացնենք պրոհման նորանոր կորեր այնպես, որ բոլոր մասնակի փրոյթները սեղմվեն, փեղի կունենա **պրոհման մանրացում**: Այս անցումը կարգահայտենք $d \rightarrow 0$ պայմանով:

Սահմանում 8.7. Եթե գոյություն ունի ինտեգրալային գումարների սահմանը (միջանկյալ M_k կետերի ընտրությունից անկախ), երբ D փրոյթի պրոհումը մանրանում է ($d \rightarrow 0$), ապա այդ սահմանը կոչվում է $f(M) = f(x, y)$ **ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալ D փրոյթով** և նշանակվում է

$$\exists \lim_{d \rightarrow 0} \sigma \stackrel{\text{def}}{=} \iint_D f(x, y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} I : \quad (8-122)$$

Եթե (8-122) սահմանը, այսինքն՝ կրկնակի ինտեգրալը գոյություն ունի, ապա $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիան կանվանենք **ինտեգրելի D փրոյթում** և կգրենք $f(x, y) \in \mathcal{R}(D)$: Եթե (8-122) սահմանը և ուրեմն կրկնակի ինտեգրալը գոյություն չունի, ապա $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիան **ինտեգրելի չէ D փրոյթում**, և կգրենք $f(x, y) \notin \mathcal{R}(D)$:

Ուշադիր ընթերցողն ուղղակի գուգահեռներ կնկարի Ռիմանի որոշյալ ինտեգրալի կառուցման և սահմանման հետ, երբ հաշվում էինք ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսը: Այժմ կրկնակի ինտեգրալի դեպքում հաշվում ենք ֆունկցիայի գրաֆիկով առաջացած V զվանածև մարմնի ծավալը, այսինքն՝

$$|V| = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad \text{համարելով} \quad f(x, y) \in \mathcal{R}(D), \quad f(x, y) \geq 0 :$$

Ինչպես կառուցել էինք Ռիմանի որոշյալ ինտեգրալի փրոյթումը, այժմ համանման եղանակով կարելի է կառուցել կրկնակի ինտեգրալի փրոյթումը: Մեզ հետաքրքրում են կրկնակի ինտեգրալի գոյության պայմանները, ինտեգրելի ֆունկցիաների դասերը, կրկնակի ինտեգրալի հատկությունները, հաշվումը և կիրառությունները: Կարճ ներկայացնենք այդ փրոյթումը:

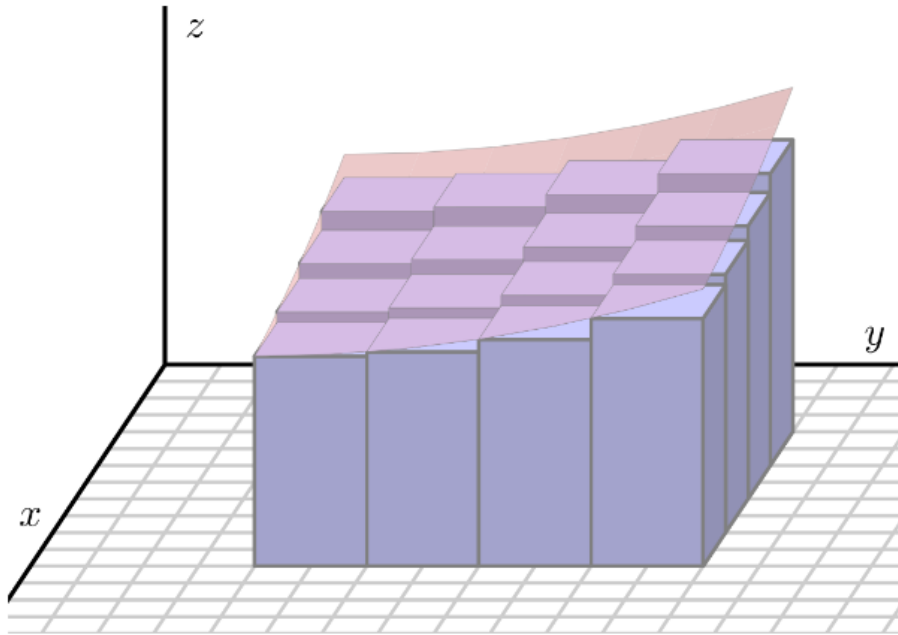
Եթե f ֆունկցիան ինտեգրելի է D սահմանափակ փրոյթում՝ $f(x, y) \in \mathcal{R}(D)$, ապա f -ը սահմանափակ է D -ում: Այլ կերպ ասած՝ ֆունկցիայի սահմանափակությունը անհրաժեշտ է նրա ինտեգրելիության համար՝ $m \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in D$: Այսուհետ, քննարկելով ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը, միշտ նախապես ենթադրելու ենք ֆունկցիայի սահմանափակությունը:

Տվյալ $\{D_k\}$ պրոհման համար սահմանենք **Դարբուի սփռին և վերին գումարները**.

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n m_k |D_k|, \quad S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n M_k |D_k|,$$

որպեսզի նշանակված են

$$m_k \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{D_k} f(x, y), \quad M_k \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{D_k} f(x, y) :$$



Գծազիր 8.10. Դարբուի (ստորին) գումարի գծապատկերը

Ինչպես և միաչափ դեպքում, ճիշտ են Դարբուի գումարների հետևյալ հատկությունները:

Հատկություն 1. Տվյալ $\{D_k\}$ փրոհմանը համապատասխանող ինտեգրալային σ գումարները սահմանափակ են Դարբուի ստորին և վերին գումարներով:

$$s \leq \sigma(D_k, M_k) \leq S \quad \forall M_k(\xi_k, \eta_k) \in D_k : \quad (8-123)$$

Հատկություն 2. Տվյալ $\{D_k\}$ փրոհման համար

$$S = \sup_{\{M_k\}} \sigma(D_k, M_k), \quad s = \inf_{\{M_k\}} \sigma(D_k, M_k), \quad (8-124)$$

որպեսզի սուպրեմումը և ինֆիմումը վերցրած են բոլոր հնարավոր միջանկյալ $M_k \in D_k$ կետերով:

Հատկություն 3. Տվյալ փրոհումը մանրացնելու հետևանքով Դարբուի վերին S գումարը կարող է միայն նվազել, իսկ Դարբուի ստորին s գումարը կարող է միայն աճել:

$$\text{Կարճ} \quad S \searrow \quad \text{և} \quad s \nearrow :$$

Հատկություն 4. Դարբուի յուրաքանչյուր ստորին գումար չի գերազանցում յուրաքանչյուր վերին գումարը՝ նույնիսկ այլ փրոհմանը համապատասխանող: Կարճ՝ $s' \leq s'' :$

Սահմանում.

$$I^* \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\{D_k\}} S$$

կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի **Դարբուի վերին ինտեգրալ**,

$$I_* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\{D_k\}} s$$

կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի **Դարբուի ստորին ինտեգրալ**:

Այսպես ինֆիմումը և սուպրեմումը վերցրած են D փրույթի բոլոր հնարավոր $\{D_k\}$ փրոհումներով:

Նախկություն 5. Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան սահմանափակ է D փրույթում: Այդ դեպքում նրա վերին և ստորին ինտեգրալները բավարարում են

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S$$

անհավասարությունները ցանկացած փրոհման վերին և ստորին գումարների համար:

Նիմանական Թեորեմ. (Ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը)

Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան սահմանափակ է D փրույթում: Այդ դեպքում

$$\left(f(x, y) \in \mathcal{R}(D) \right) \iff \left(\lim_{d \rightarrow 0} (S - s) = 0 \right) \iff \left(\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k |D_k| = 0 \right), \quad (8-125)$$

որպեսզի ω_k -ով նշանակված է f ֆունկցիայի փափանումը k -րդ մասնակի փրույթում.

$$\omega_k = \omega_k(f) = M_k - m_k = \sup_{M', M'' \in D_k} |f(M') - f(M'')| :$$

8.19 Ինտեգրելի ֆունկցիաների դասեր և հատկություններ

Թեորեմ 8.37. Դիցուք $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ հարթ պարկերը կոմպակտ է (փակ և սահմանափակ բազմություն):

Այդ դեպքում $\overline{D}$ -ում ցանկացած անընդհատ ֆունկցիա ինտեգրելի է այդ կոմպակտում:

$$\text{Կարճ} \quad \boxed{f(x, y) \in C(\overline{D})} \implies \boxed{f(x, y) \in \mathcal{R}(\overline{D})}, \quad \text{կամ ավելի կարճ} \quad \boxed{C(\overline{D}) \subset \mathcal{R}(\overline{D})} :$$

Ապացույց. Կոմպակտում յուրաքանչյուր անընդհատ ֆունկցիա, ըստ Կանտորի թեորեմի, հավասարաչափ անընդհատ է նույն կոմպակտում, այսինքն՝

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall M', M'' \in D, \quad \rho(M', M'') < \delta \implies |f(M') - f(M'')| < \frac{\varepsilon}{|D|} :$$

Սա նշանակում է, որ f ֆունկցիայի փափանումը փոքր է նախօրոք վերցրած կամայական դրական թվից, եթե մասնակի փրույթների փրամագծերը փոքր են δ -ից.

$$d = \max_{1 \leq k \leq n} d_k < \delta \implies \omega_k < \frac{\varepsilon}{|D|} :$$

Կարճ ասած՝ բավականաչափ մանր փրոհման համար ֆունկցիայի փափանույնը փոքր է ε -ից: Ենթադրելով, որ փրոհումը բավականաչափ մանր է, $d < \delta$, գնահատենք

$$\sum_{k=1}^n \omega_k |D_k| < \frac{\varepsilon}{|D|} \sum_{k=1}^n |D_k| = \frac{\varepsilon}{|D|} |D| = \varepsilon,$$

ինչը նշանակում է, որ (8-125) սահմանը փեղի ունի, և ուրեմն $f(x, y)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է D փրոյեկտում կամ $\overline{D}$ կոմպակտում՝ $f(x, y) \in \mathcal{R}(\overline{D})$: $\square$

Թեորեմ 8.38. *Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $\overline{D}$ կոմպակտում:*

Եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան վերջավոր թվով և զրո մակերեսով խզման կորեր ունի, ապա f -ն ինտեգրելի է $\overline{D}$ կոմպակտում՝ $f(x, y) \in \mathcal{R}(\overline{D})$:

Ներևանք. Վերջավոր թվով և զրո մակերեսով կորերի վրա ինտեգրելի ֆունկցիայի արժեքների փոփոխումը որևէ կերպ չի ազդում կրկնակի ինտեգրալի գոյության, ոչ էլ այդ ինտեգրալի մեծության վրա:

Թեորեմ 8.39. *(Կրկնակի ինտեգրալի գծայնությունը)*

Երկու ինտեգրելի ֆունկցիաների գծային զուգակցությունը նույնպես ինտեգրելի է, և փեղի ունի համապատասխան բանաձևը.

$$\iint_D [C_1 f_1(x, y) + C_2 f_2(x, y)] dx dy = C_1 \iint_D f_1(x, y) dx dy + C_2 \iint_D f_2(x, y) dx dy :$$

Թեորեմ 8.40. *(Կրկնակի ինտեգրալի ադիտիվությունը)*

Դիցուք $D \subset \mathbb{R}^2$ փրոյեկտը զրոյական մակերես ունեցող L կորով բաժանված է երկու մասի՝

$$\boxed{D = D_1 \cup D_2}, \quad \boxed{D_1 \cap D_2 = \emptyset} : \quad \text{Այդ դեպքում՝}$$

$$\left(f(x, y) \in \mathcal{R}(D) \right) \iff \left(f(x, y) \in \mathcal{R}(D_1) \cap \mathcal{R}(D_2) \right)$$

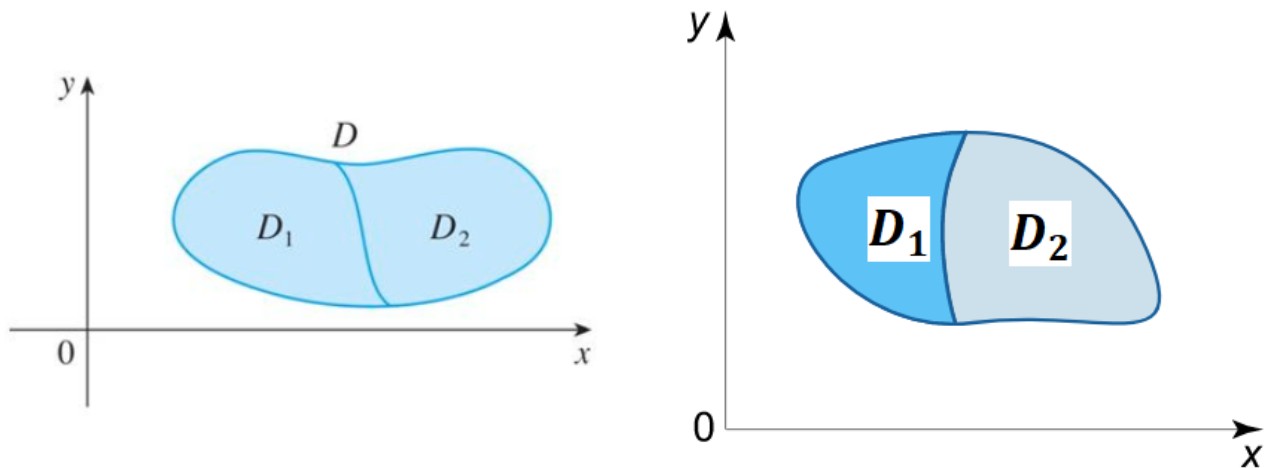
և ճիշտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy :$$

Թեորեմ 8.41. *(Կրկնակի ինտեգրալի գնահատական)*

Եթե $f, g \in \mathcal{R}(D)$ և $f(x, y) \leq g(x, y)$, $(x, y) \in D$, ապա

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy :$$



Պատկեր 8.11. Բաժանված ինտեգրման տիրույթ

Թեորեմ 8.42. (Կրկնակի ինտեգրալի գնահատման մոդուլով)

Եթե $f(x, y) \in \mathcal{R}(D)$, ապա $|f(x, y)| \in \mathcal{R}(D)$, և

$$\left| \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| \, dx \, dy : \quad (8-126)$$

Ապացույց. Ցույց տանք, որ $|f(x)|$ ֆունկցիան նույնպես ինտեգրելի է : Օգտվենք հիմնական թեորեմից (ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանից), տես (8-125).

$$\left(f(x, y) \in \mathcal{R}(D) \right) \iff \left(\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k |D_k| = 0 \right), \quad (8-127)$$

որտեղ

$$\omega_k(f) = \sup_{M', M'' \in D_k} |f(M') - f(M'')| \quad f(x) \text{ ֆունկցիայի տատանումն է } D_k \text{ մասնակի տիրույթում:}$$

Դիտարկենք $|f|$ ֆունկցիայի տատանումները՝

$$\omega_k(|f|) = \sup_{M', M'' \in D_k} ||f(M')| - |f(M'')||, \quad k = \overline{1, n} :$$

Եռանկյան անհավասարության միջոցով հեշտ է համեմատել՝

$$||f(M')| - |f(M'')|| \leq |f(M') - f(M'')| \implies \omega_k(|f|) \leq \omega_k(f), \quad 1 \leq k \leq n :$$

Գումարենք բոլոր մասնակի տիրույթներով, այսինքն՝ բոլոր k -երով.

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(|f|) |D_k| \leq \sum_{k=1}^n \omega_k(f) |D_k| \longrightarrow 0, \quad \text{երբ } d \rightarrow 0 :$$

Ներկայացնելով (8-127)-ի՝ $|f|$ ֆունկցիայի համար $|f| \in \mathcal{R}(D)$, ինչը և պահանջվում էր:

Իսկ (8-126) անհավասարությունն ապացուցելու համար բավական է որևէ պրոհիման և միջանկյալ կետերի համար գրել ու համեմատել f և $|f|$ ֆունկցիաների ինտեգրալային գումարները.

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) |D_k| \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k, \eta_k)| |D_k|, \quad (8-128)$$

ինչը ճիշտ է շնորհիվ եռանկյան անհավասարության: Մնում է (8-128)-ում մանրացնել պրոհիմը՝ ձգվեցնելով պրամագիծը զրոյի՝ $d \rightarrow 0$, որի արդյունքում (8-128)-ի ձախ և աջ կողմերը կձգվեն համապատասխանաբար (8-126)-ի ձախ և աջ կողմերին, ինչը կավարտի ապացույցը: $\square$

Թեորեմ 8.43. *(Կրկնակի ինտեգրալի երկկողմանի գնահատական)*

Եթե $f(x, y) \in \mathcal{R}(D)$ և $m \leq f(x, y) \leq M$, $(x, y) \in D$, ապա

$$m |D| \leq \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \leq M |D| : \quad (8-129)$$

Թեորեմ 8.44. *(Միջին արժեքի թեորեմ կրկնակի ինտեգրալի համար)*

ա) Եթե $f(x, y) \in \mathcal{R}(D)$ և $m \leq f(x, y) \leq M$, $(x, y) \in D$, ապա գոյություն ունի ինչ-որ միջանկյալ արժեք՝ $\exists \mu \in [m, M]$ այնպիսին, որ

$$\boxed{\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \mu |D|} : \quad (8-130)$$

բ) Եթե f ֆունկցիան անընդհատ է $\overline{D}$ կոմպակտում՝ $f(x, y) \in C(\overline{D})$, ապա գոյություն ունի ինչ-որ միջանկյալ կետ՝ $\exists M_0(x_0, y_0) \in \overline{D}$ այնպիսին, որ

$$\boxed{\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = f(x_0, y_0) |D|} : \quad (8-131)$$

Ապացույց. **ա)** Ըստ (8-129) անհավասարությունների՝

$$m |D| \leq \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \leq M |D|,$$

որը բաժանենք $|D|$ -ի.

$$m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \leq M :$$

Մնում է նշանակել

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

և նկատել, որ $m \leq \mu \leq M$:

բ) Վայերշտրասի 2-րդ թեորեմի համաձայն՝ $\overline{D}$ կոմպակտում $f(x, y)$ ֆունկցիան մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ ունի.

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\overline{D}} f(x, y), \quad M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\overline{D}} f(x, y), \quad \implies \quad m \leq f(x, y) \leq M, \quad (x, y) \in D,$$

և Կեղի ունի միջին արժեքի (8-130) բանաձևը.

$$\exists \mu \in [m, M] \quad s.t. \quad \iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \mu |D| :$$

Ըստ Բուլցանո-Կոշու թեորեմի՝ $f(x, y) \in C(\overline{D})$ անընդհատ ֆունկցիան ընդունում է իր բոլոր միջանկյալ արժեքները և մասնավորապես $\mu \in [m, M]$ արժեքը.

$$\exists M_0(x_0, y_0) \in \overline{D} \quad s.t. \quad f(x_0, y_0) = \mu,$$

ինչն ավարտում է ապացույցը:

□

8.20 Կրկնակի ինտեգրալի հաշվումը և Ֆուրիենի թեորեմը

Կրկնակի ինտեգրալի հաշվումը հիմնական խնդիրներից է այս պետության մեջ: Ստիպված ենք սկսել պարզագույն ինտեգրման փիրույթից, այն է՝ ուղղանկյունից:

Թեորեմ 8.45. (Ֆուրիենի թեորեմ)

Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $G \stackrel{\text{նշ.}}{=} [a, b] \times [c, d]$ ուղղանկյան մեջ՝ $f(x, y) \in \mathcal{R}(G)$:

ա) Եթե յուրաքանչյուր $\forall x \in [a, b]$ կերի համար $\exists I(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_c^d f(x, y) dy$, ապա գոյություն ունի նաև $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ հաջորդական ինտեգրալը, և

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx : \quad (8-132)$$

բ) Եթե յուրաքանչյուր $\forall y \in [c, d]$ կերի համար $\exists J(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x, y) dx$, ապա գոյություն ունի նաև $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ հաջորդական ինտեգրալը, և

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy : \quad (8-133)$$

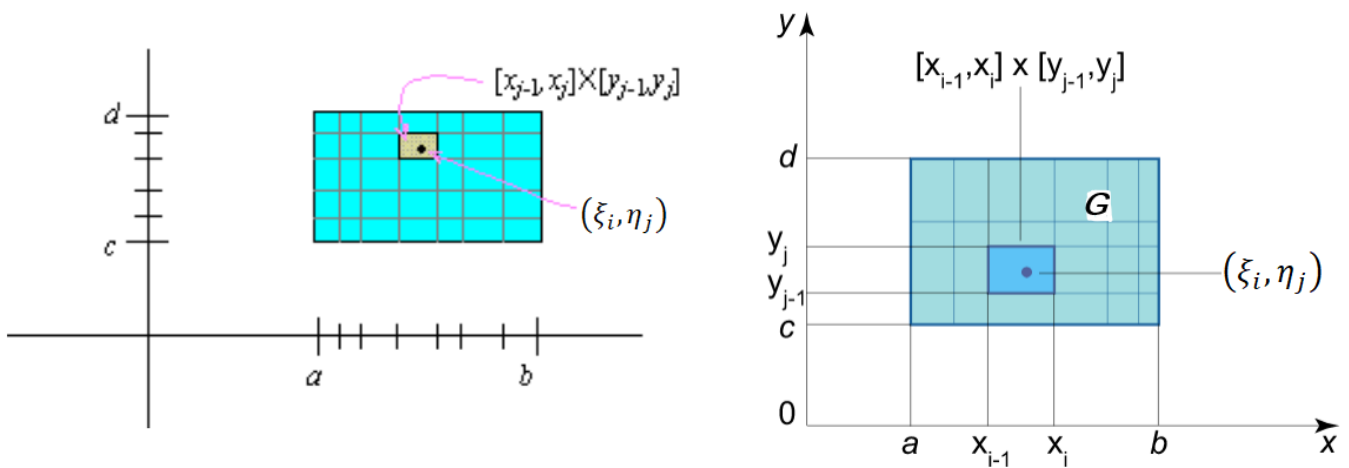
գ) Եթե գոյություն ունեն երկու ներքին որոշյալ ինտեգրալները՝ $I(x)$ ($a \leq x \leq b$), և $J(y)$ ($c \leq y \leq d$), ապա գոյություն ունեն նաև երկու հաջորդական ինտեգրալները, և րեդի ունեն $u'(8-132)$ -ը, $u'(8-133)$ -ը.

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy : \quad (8-134)$$

դ) Մասնավորապես, եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է $G = [a, b] \times [c, d]$ փակ ուղղանկյան մեջ՝ $f(x, y) \in C(G)$, ապա ճիշտ է (8-134) բանաձևը:

Ապացույց. ա) Տրոհենք $G = [a, b] \times [c, d]$ ուղղանկյան կողմերը, որի արդյունքում կստանանք ուղղանկյան փրոնում.

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b, & \Delta x_i &\stackrel{\text{նշ.}}{=} x_i - x_{i-1}, \\ c &= y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{k-1} < y_k < \cdots < y_m = d, & \Delta y_k &\stackrel{\text{նշ.}}{=} y_k - y_{k-1}, \\ D_{i,k} &\stackrel{\text{նշ.}}{=} [x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k], & i &= \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}, & \text{մասնակի ուղղանկյուններ:} \end{aligned}$$



Պատկեր 8.12. Ուղղանկյան փրոփումը

Յուրաքանչյուր մասնակի ուղղանկյան մեջ նշանակենք ֆունկցիայի սուպրեմումը և ինֆիմումը.

$$m_{i,k} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{D_{i,k}} f(x, y),$$

$$M_{i,k} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{D_{i,k}} f(x, y),$$

$$\boxed{m_{i,k} \leq f(x, y) \leq M_{i,k}}, \quad (x, y) \in D_{i,k}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m} :$$

Մասնավորապես, կամայական միջանկյալ $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ կետերի համար

$$\boxed{m_{i,k} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{i,k}}, \quad y \in [y_{k-1}, y_k], \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m} :$$

Ինտեգրենք ըստ y -ի $[y_{k-1}, y_k]$ հատվածով և հետո գումարենք բոլոր k -երով.

$$m_{i,k} \Delta y_k \leq \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i, y) dy \leq M_{i,k} \Delta y_k, \quad k = \overline{1, m},$$

$$\sum_{k=1}^m m_{i,k} \Delta y_k \leq \int_c^d f(\xi_i, y) dy = I(\xi_i) \leq \sum_{k=1}^m M_{i,k} \Delta y_k, \quad i = \overline{1, n} :$$

Նկատենք, որ $I(x)$ ինտեգրալը գոյություն ունի ըստ պայմանի: Այժմ գումարենք բոլոր i -երով.

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^m m_{i,k} \Delta y_k \right] \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n I(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^m M_{i,k} \Delta y_k \right] \Delta x_i :$$

Նաշվի առնելով մասնակի ուղղանկյունների մակերեսները՝ $|D_{i,k}| = \Delta x_i \cdot \Delta y_k$ ՝ ստանում ենք

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m m_{i,k} |D_{i,k}| \leq \sum_{i=1}^n I(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m M_{i,k} |D_{i,k}| : \quad (8-135)$$

Միջին գումարը (8-135)-ում $I(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարն է, իսկ (8-135)-ի ձախ և աջ կողմերում կրկնակի ինտեգրալի Դարբուի ստորին և վերին գումարներն են.

$$\boxed{s \leq \sum_{i=1}^n I(\xi_i) \Delta x_i \leq S} : \quad (8-136)$$

Այժմ, ձգարեցնելով զրոյի բոլոր $\Delta x_i \rightarrow 0$ և $\Delta y_k \rightarrow 0$ երկարությունները, անվերջ մանրացնում ենք a' $[a, b]$ հատվածը, և՛ ամբողջ G ուղղանկյունը: Արդյունքում (8-136)-ի ձախ և աջ կողմերում ստանում ենք նույն կրկնակի ինտեգրալը, ինչը բերում է հավասարության.

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b I(x) dx :$$

Սա համընկնում է (8-132) բանաձևի հետ: Նույն եղանակով ապացուցում ենք (8-133) բանաձևը: $\square$

Եզրակացնենք Թեորեմ 8.45-ից, որ կրկնակի ինտեգրալի հաշվման հիմնական եղանակը՝ բերել այն հաշորդական որոշյալ ինտեգրալի:

Մեր հաջորդ խնդիրն է կրկնակի ինտեգրալի հաշվումն ավելի բարդ փիրույթների համար:

Դիտարկենք հատուկ փեսքի կորագիծ փիրույթներ, որոնք բնութագրվում են հետևյալ պայմաններով:

Տիրույթը ձախից և աջից սահմանափակ է $x = a$ և $x = b$ ուղղաձիգ ուղիղներով, իսկ ներքևից և վերևից՝ $y = y_1(x)$ և $y = y_2(x)$ անընդհատ կորերով այնպես, որ ցանկացած $x = x_0$ ($a < x_0 < b$) ուղիղ հատում է փիրույթի եզրագծերը միայն երկու կետում, րեն **գծագիր** 8.13:

Այդպիսի փիրույթները կոչվում են **1-ին տեսակի կորագիծ սեղաններ**:

Թեորեմ 8.46. Տրված է $D \subset \mathbb{R}^2$ 1-ին տեսակի կորագիծ սեղան, որը ձախից և աջից սահմանափակ է $x = a$ և $x = b$ ուղիղներով, իսկ ներքևից և վերևից՝ $y = y_1(x) \in C[a, b]$ և $y = y_2(x) \in C[a, b]$ անընդհատ կորերով:

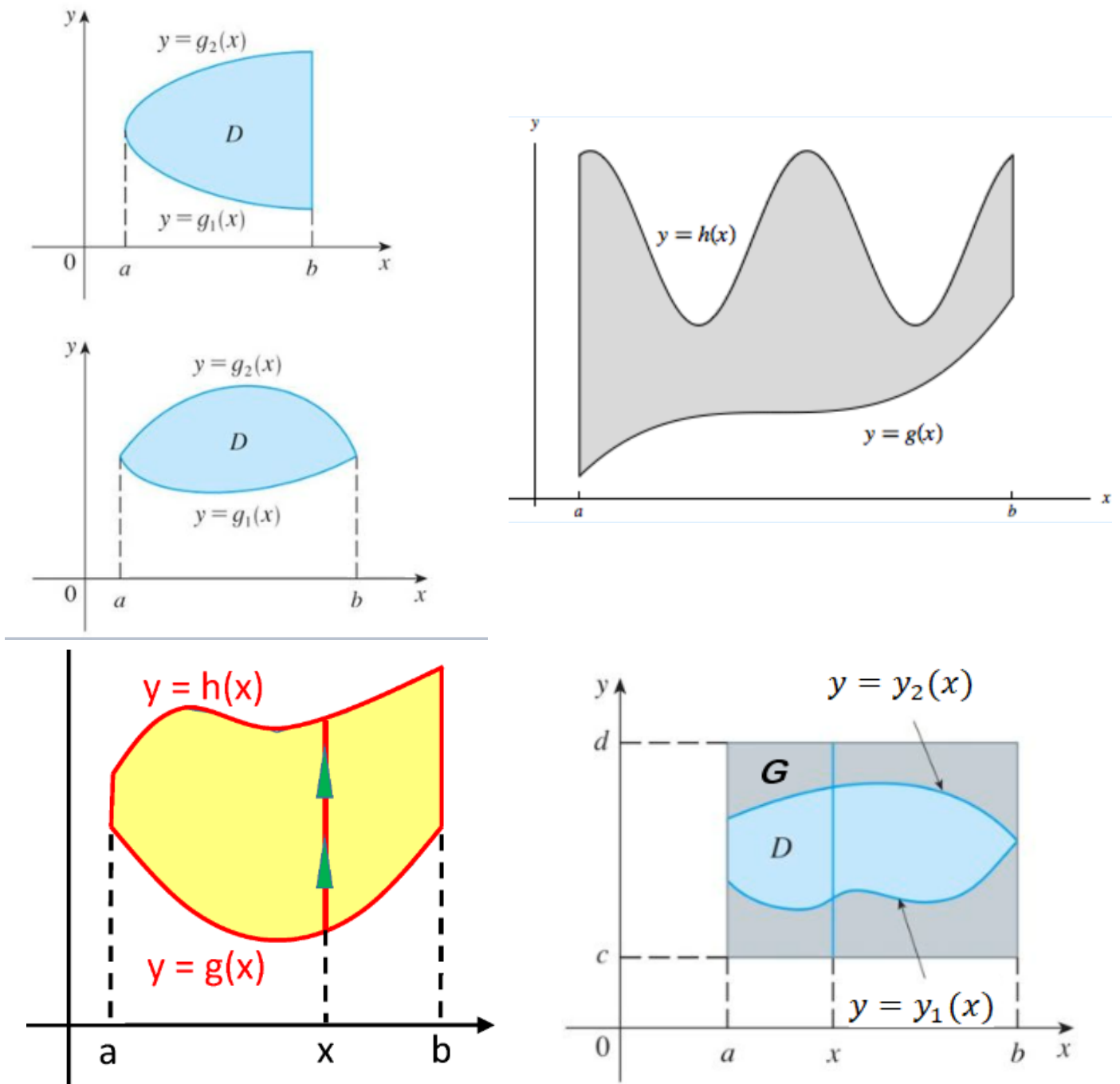
Դիցուք $f(x, y) \in \mathcal{R}(D)$, և գոյություն ունի $\exists \quad I(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ որոշյալ ինտեգրալը յուրաքանչյուր $\forall x \in [a, b]$ կերի համար:

Այդ դեպքում գոյություն ունի նաև $\int_a^b I(x) dx$ ինտեգրալը, և

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx : \quad (8-137)$$

Ապացույց. Ապացույցը բերվում է նախորդ Թեորեմ 8.45-ին: Քանի որ $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են փակ հատվածում՝ $y_1(x), y_2(x) \in C[a, b]$, ապա դրանք սահմանափակ են: Վերցնենք $y_1(x)$ -ի որևէ ստորին եզր և $y_2(x)$ -ի որևէ վերին եզր՝ $c \leq y_1(x) \leq y_2(x) \leq d$: Մասնավորապես, կարելի է վերցնել $c = \min_{a \leq x \leq b} y_1(x)$, $d = \max_{a \leq x \leq b} y_2(x)$: Կազմենք $G \stackrel{\text{նշ.}}{=} [a, b] \times [c, d]$ ուղղանկյունը: Պարզ է, որ $D \subset G$, րեն **գծագիր** 8.13-ի վերջին պարկերը: Սահմանենք նոր ֆունկցիա G փակ ուղղանկյան մեջ.

$$f^*(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x, y), & \text{երբ } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{երբ } (x, y) \in G \setminus D : \end{cases}$$



Պծագիր 8.13. 1-ին տեսակի կորագիծ սեղանների օրինակներ

Նեշտ է տեսնել, որ $f^*(x, y)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է G ուղղանկյան մեջ, $f^*(x, y) \in \mathcal{R}(G)$, քանի որ այդ ֆունկցիան ինտեգրելի է G ուղղանկյան D և $G \setminus D$ ենթափրույթներում: Նաշվենք f -ի կրկնակի ինտեգրալը՝ օգտվելով Թեորեմ 8.45-ից և f^* -ի սահմանումից.

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \iint_G f^*(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x, y) \, dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{y_1(x)} f^*(x, y) \, dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x, y) \, dy + \int_{y_2(x)}^d f^*(x, y) \, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx, \end{aligned}$$

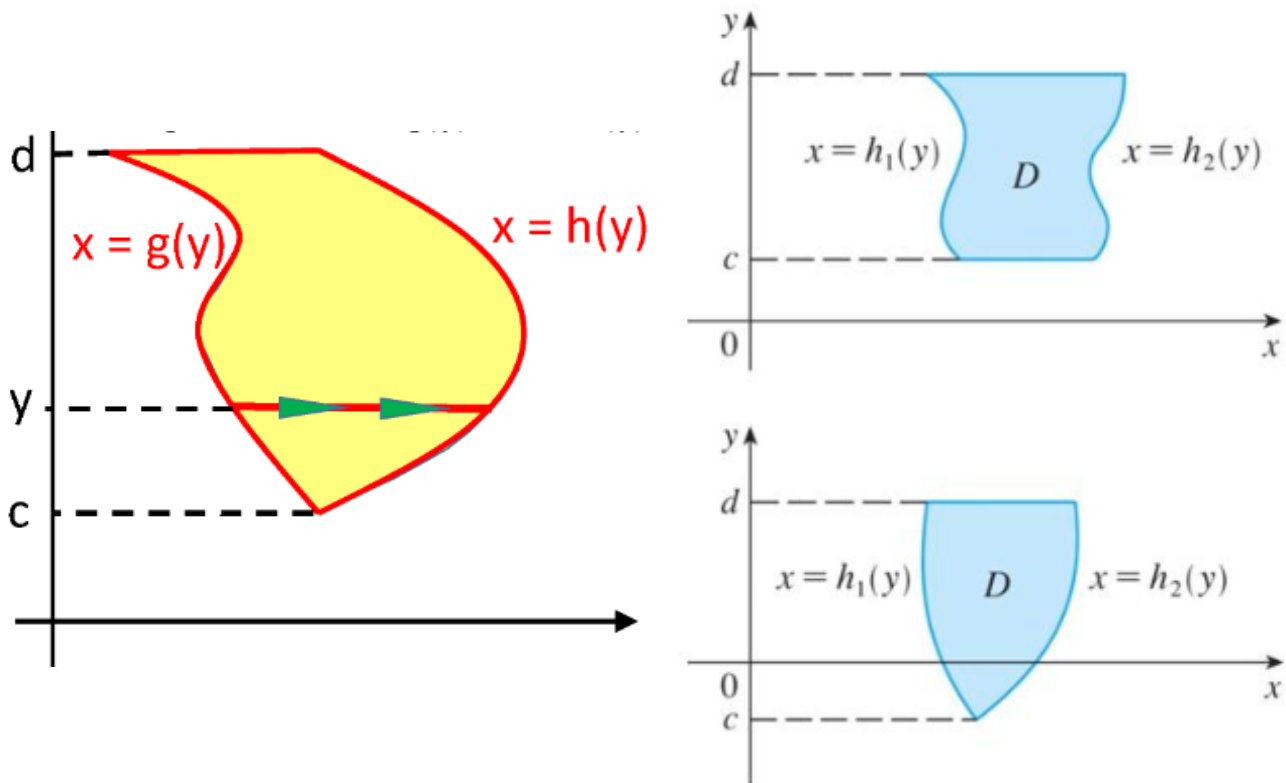
ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: $\square$

Կարելի է դիտարկել 1-ին տեսակի կորագիծ սեղանների պարզերակը:

Դիտարկենք կորագիծ փրույթներ, որոնք բնութագրվում են հետևյալ պայմաններով:

Տիրույթը ներքևից և վերևից սահմանափակ է $y = c$ և $y = d$ հորիզոնական ուղիղներով, իսկ ձախից և աջից՝ $x = x_1(y)$ և $x = x_2(y)$ անընդհար կորերով այնպես, որ ցանկացած $y = y_0$ ($c < y_0 < d$) ուղիղ հատում է փրույթի եզրագծերը միայն երկու կետում, արեն **գծագիր 8.14**:

Այդպիսի փրույթները կոչվում են **2-րդ տեսակի կորագիծ սեղաններ**:



Գծագիր 8.14. 2-րդ տեսակի կորագիծ սեղանների օրինակներ

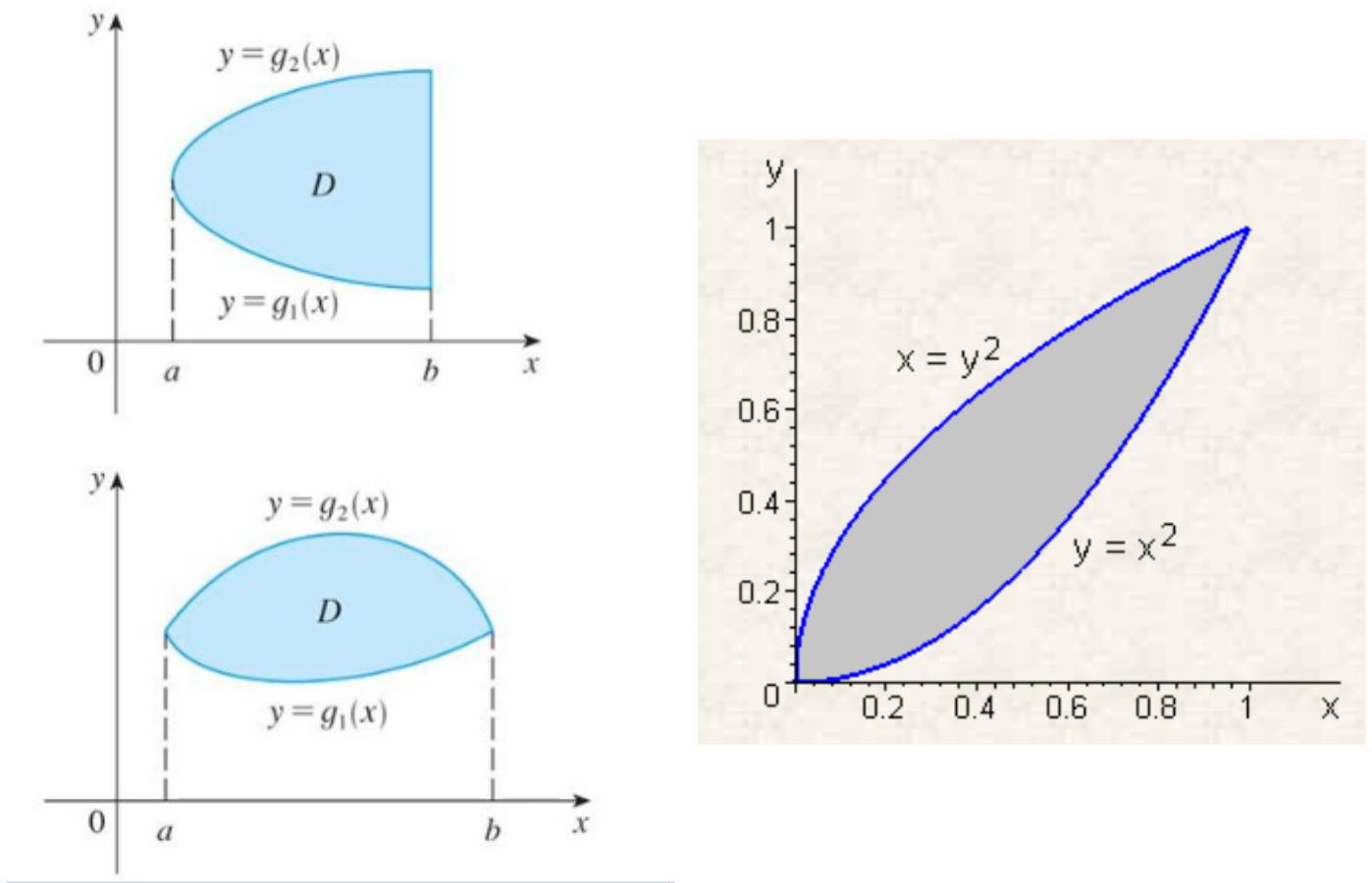
Թեորեմ 8.47. Տրված է $D \subset \mathbb{R}^2$ 2-րդ տեսակի կորագիծ սեղան, որը ներքևից և վերևից սահմանափակ է $y = c$ և $y = d$ հորիզոնական ուղիղներով, իսկ ձախից և աջից՝ $x = x_1(y) \in C[c, d]$ և $x = x_2(y) \in C[c, d]$ անընդհար կորերով:

Դիցուք $f(x, y) \in \mathcal{R}(D)$, և գոյություն ունի $\exists J(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$ որոշյալ ինտեգրալը յուրաքանչյուր $\forall y \in [c, d]$ կերի համար:

Այդ դեպքում գոյություն ունի նաև $\int_c^d J(y) dy$ ինտեգրալը, և

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy :} \quad (8-138)$$

Դիպոդություն 8.4. Տանդիպում են այնպիսի կորագիծ սեղաններ, որոնք միաժամանակ 1 -ին, 2 -րդ փնսակի են: Այդպիսի փիրությունների օրինակներ պարկերված են **գծագիր 8.15**-ում:

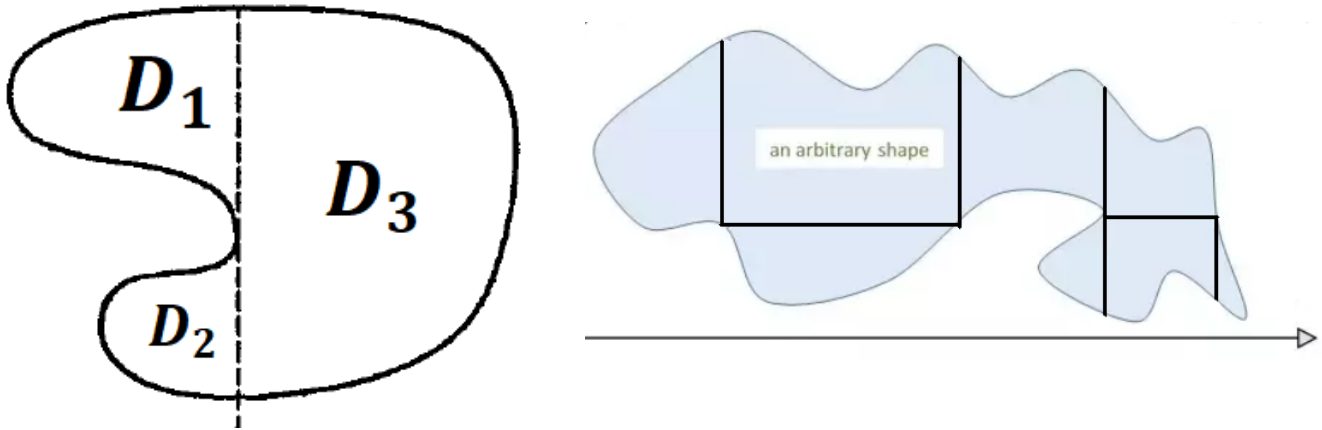


Գծագիր 8.15. Կորագիծ սեղաններ, որոնք 1 -ին, 2 -րդ փնսակի են

Նման փիրությունների համար կարելի է կիրառել Թեորեմներ 8.46 և 8.47-ի (8-137) և (8-138) բանաձևերը: Այսինքն՝ Թեորեմներ 8.46 և 8.47-ի պայմանների կատարման դեպքում ճիշտ է հետևյալ միասնական բանաձևը՝

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy : \quad (8-139)$$

Դիպողություն 8.5. Իհարկե կան ավելի բարդ տիրույթներ ավելի բարդ եզրագծերով, որոնք առհասարակ կորագիծ սեղաններ չեն ոչ 1-ին և ոչ 2-րդ տեսակի: Այնուամենայնիվ, որոշ բարդ տիրույթներ կարելի է տրոհել մի քանի կորագիծ սեղանների՝ 1-ին կամ 2-րդ տեսակի, ինչն **գծագիր 8.16**:



Գծագիր 8.16. Տիրույթի տրոհումը մի քանի կորագիծ սեղանների

Օգտվելով կրկնակի ինտեգրալի ադիտիվությունից՝ հնարավոր է հաշվել այսպիսի բարդ տիրույթներով տարածված կրկնակի ինտեգրալներ:

8.21 Փոփոխականի փոխարինում կրկնակի ինտեգրալում և մակերեսի հաշվումը

Կարճ ներկայացնենք փոփոխականի փոխարինման բանաձևը

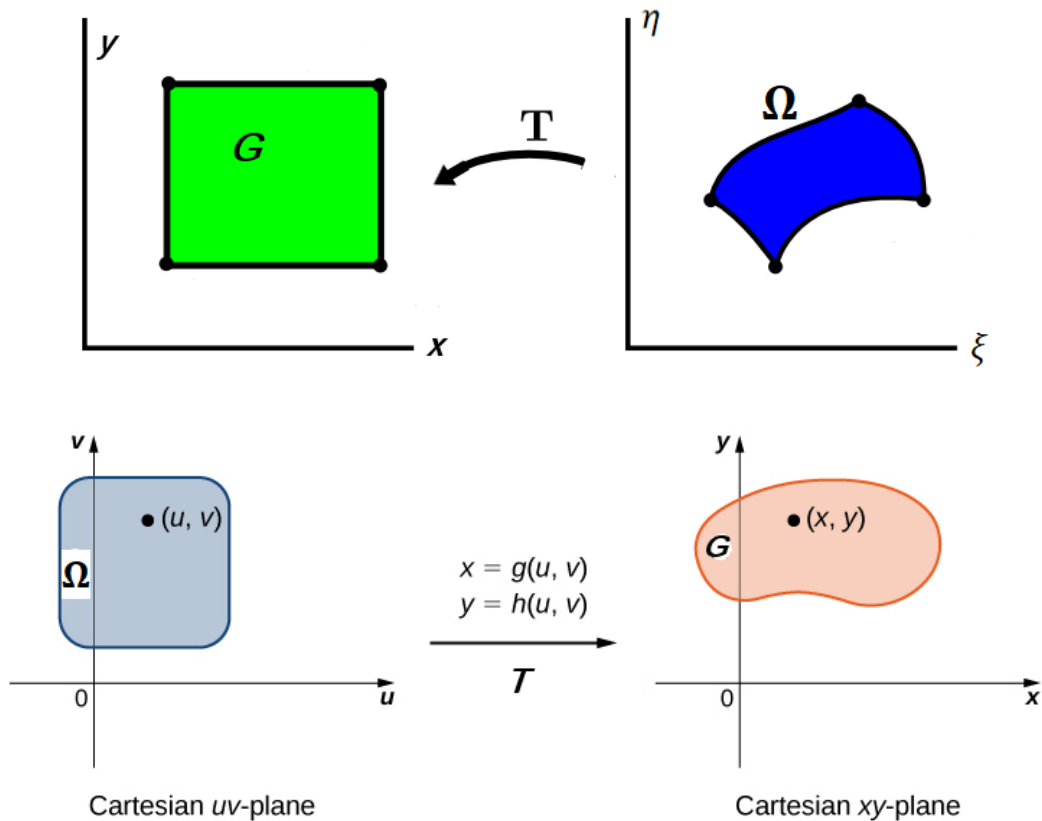
$$\iint_G f(x, y) \, dx \, dy$$

կրկնակի ինտեգրալում, երբ $G \subset \mathbb{R}^2$ փրոյությունը ինտեգրումը xy հարթության մեջ փոխարինվում է մեկ այլ փրոյությունը ինտեգրումով մեկ այլ $\xi\eta$ հարթության մեջ:

Դիցուք փրված են երկու փակ սահմանափակ բազմություններ (կոմպակտներ)՝

$G \subset \mathbb{R}_{xy}^2$ կոմպակտ է (xy) հարթության մեջ,

$\Omega \subset \mathbb{R}_{\xi\eta}^2$ կոմպակտ է $(\xi\eta)$ հարթության մեջ, րեն **գծագիր 8.17**:



Գծագիր 8.17. Նարթ փրոյութի արքաապարկերումը մեկ այլ հարթ փրոյութի

Այս երկու կոմպակտների միջև հասարարենք $T : \Omega \mapsto G$ փոխմիարժեք համապարասխանություն (արքաապարկերում) երկու պարամերքական ֆունկցիաների միջոցով.

$$T : \Omega \mapsto G, \quad T \begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad (\xi, \eta) \in \Omega : \quad (8-140)$$

$T : \Omega \mapsto G$ արտապարկերման փոխմիարժեքությունը նշանակում է , որ

$$\forall (x_0, y_0) \in G \quad \exists ! (\xi_0, \eta_0) \in \Omega \quad s.t. \quad \begin{cases} x_0 = x(\xi_0, \eta_0) \\ y_0 = y(\xi_0, \eta_0) : \end{cases}$$

Մասնավորապես, այս կոմպակտների եզրերը նույնպես փոխմիարժեքորեն արտապարկերվում են մեկը մյուսի վրա՝ $\boxed{\partial\Omega \longleftrightarrow \partial G}$:

Բացի այդ, ենթադրենք, որ պարամետրական ֆունկցիաները ողորկ են՝ $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta) \in C^1(\Omega)$:

Պարամետրական ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալների միջոցով սահմանենք հետևյալ ֆունկցիոնալ որոշիչը՝

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}, \quad (\xi, \eta) \in \Omega, \quad (8-141)$$

որը կոչվում է T արտապարկերման Յակոբիի որոշիչ (կարճ՝ **յակոբիան**):

Քանի որ պարամետրական ֆունկցիաները ողորկ են, յակոբիանը որպես ֆունկցիա անընդհար է .

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \in C(\Omega) :$$

Եվս մեկ ենթադրություն կատարենք. համարենք, որ յակոբիանը զրոներ չունի Ω -ում, այսինքն՝ պահպանում է նշանը Ω -ում:

Բոլոր այս ենթադրությունների դեպքում ճիշտ է փոփոխականների փոխարինման հետևյալ բանաձևը կրկնակի ինտեգրալում՝

$$\boxed{\iint_G f(x, y) \, dx \, dy = \iint_\Omega f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| \, d\xi \, d\eta}, \quad (8-142)$$

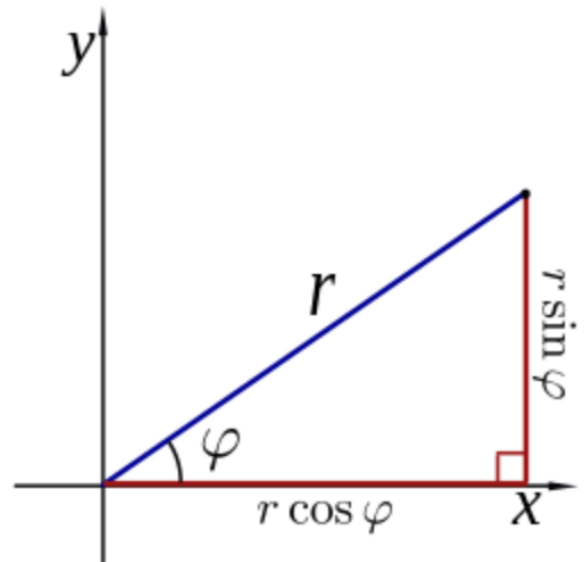
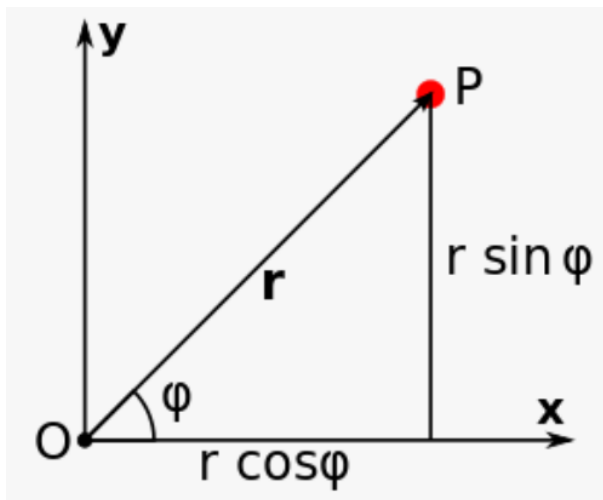
երբ $f(x, y) \in \mathcal{R}(G)$: Այն մասնավոր դեպքում, երբ ֆունկցիան հասարակորեն է , սպանում ենք G ինտեգրման փիրույթի մակերեսի բանաձև.

$$\boxed{|G| = \iint_G dx \, dy = \iint_\Omega \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| \, d\xi \, d\eta} : \quad (8-143)$$

Վերջում դիտարկենք (ξ, η) կորագիծ կոորդինատների կարևոր հատուկ դեպք.

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad r \geq 0, \quad -\pi < \varphi \leq \pi : \quad (8-144)$$

Ինչպես հիշում ենք, (r, φ) կորագիծ կոորդինատները կոչվում են **բևեռային կոորդինատներ**:



Պատկեր 8.18. Բևեռային և դեկարտյան կոորդինատներ

Քանի որ (8-144) արտապատկերումը փոխմիարժեք է, իսկ պարամետրական $x(r, \varphi)$ ու $y(r, \varphi)$ ֆունկցիաները ողորկ են, ապա կարելի է կազմել արտապատկերման յակոբիանը.

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r : \quad (8-145)$$

Այսպիսով, եթե կրկնակի ինտեգրալում դեկարտյան կոորդինատներից անցնում ենք բևեռային կոորդինատներին, ապա փոփոխականի փոխարինման (8-142) բանաձևը կհանգի հետևյալին՝

$$\boxed{\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_\Omega f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi :} \quad (8-146)$$

Յուցադրելու համար դիտարկենք պարզագույն մի օրինակ:

Օրինակ 8.6. Նաշվենք $R > 0$ շառավղով $\mathbb{D}_R = \{(x, y); x^2 + y^2 < R^2\}$ շրջանի մակերեսը բևեռային կոորդինատների միջոցով: Նաշվի առնելով, որ $r^2 = x^2 + y^2$, ըստ (8-143), (8-146) բանաձևերի և Ֆուրիենի թեորեմի հաշվում ենք՝

$$|\mathbb{D}_R| = \iint_{\mathbb{D}_R} dx dy = \iint_{r < R} r dr d\varphi = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} r dr d\varphi = 2\pi \int_0^R r dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = \pi R^2 :$$

ՆԱՎԵԼԱԾ-1

Նշանավոր սահմանների ցանկ

Նաջորդականությունների նշանավոր սահմաններ

- | | | | |
|----|--|--|---|
| 1. | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a^m n}{n^p} = 0$ | $p, a > 0, \quad a \neq 1, \quad m \in \mathbb{R},$ |
| 2. | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b^n} = 0$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{b^n} = 0$ | $b > 1, \quad p \in \mathbb{R},$ |
| 3. | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!} = 0$ | | $b > 1,$ |
| 4. | $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ | $a > 0,$ |
| 5. | $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ | |
| 6. | $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ | | |

$$\log_b n \ll n^p \ll b^n \ll n! \ll n^n, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty, \quad b > 1, \quad p > 0 :$$

Այսպիսով $x_n \ll y_n$ առնչությունը նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$, այսինքն՝ $x_n = o(y_n)$, երբ $n \rightarrow \infty$:

Փունկցիաների նշանավոր սահմաններ

- | | | | |
|----|--|---|--|
| 1. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ | |
| 2. | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ | $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$ | |
| 3. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ | $a > 0, \quad a \neq 1,$ |
| 4. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ | $a > 0, \quad a \neq 1,$ |
| 5. | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ | | $\alpha \in \mathbb{R},$ |
| 6. | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^m x}{x^p} = 0$ | $p, a > 0, \quad a \neq 1, \quad m \in \mathbb{R},$ |
| 7. | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{b^x} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{b^x} = 0$ | $b > 1, \quad p \in \mathbb{R},$ |
| 8. | $\lim_{x \rightarrow +0} x^p \ln x = 0$ | $\lim_{x \rightarrow +0} x^p \log_a^m x = 0$ | $p, a > 0, \quad a \neq 1, \quad m \in \mathbb{R} :$ |

Ասիմպտոտական բանաձևեր

1. $\sin x = x + o(x)$, երբ $x \rightarrow 0$,
2. $\ln(1+x) = x + o(x)$, երբ $x \rightarrow 0$,
3. $e^x = 1 + x + o(x)$, երբ $x \rightarrow 0$,
4. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$, երբ $x \rightarrow 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, երբ $x \rightarrow 0$:

Համարժեքության բանաձևեր

1. $\sin x \sim x$, երբ $x \rightarrow 0$,
2. $\ln(1+x) \sim x$, երբ $x \rightarrow 0$,
3. $e^x - 1 \sim x$, երբ $x \rightarrow 0$,
4. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, երբ $x \rightarrow 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, երբ $x \rightarrow 0$,
6. $\arcsin x \sim x$, երբ $x \rightarrow 0$,
7. $\operatorname{sh} x \sim x$, երբ $x \rightarrow 0$,
8. $\operatorname{tg} x \sim x$, երբ $x \rightarrow 0$,
9. $\operatorname{arctg} x \sim x$, երբ $x \rightarrow 0$,
10. $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$, երբ $x \rightarrow 0$, $a > 0$, $a \neq 1$,
11. $a^x - 1 \sim x \ln a$, երբ $x \rightarrow 0$, $a > 0$, $a \neq 1$:

ՆԱՎԵԼՎԱԾ-2

Ածանցյալների աղյուսակներ

Նիմնական տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների աղյուսակը

$$\begin{array}{llll} (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} & (\alpha \in \mathbb{R}), & \text{մասնավորապես} & C' = 0, \\ (a^x)' = a^x \ln a & (a > 0, a \neq 1), & \text{մասնավորապես} & (e^x)' = e^x, \\ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} & (a > 0, a \neq 1, x > 0), & \text{մասնավորապես} & (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0), \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (\sin x)' = \cos x, & (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \\ (\cos x)' = -\sin x, & (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right), & (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \\ (\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} & (x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}), & (\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0), \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (-1 < x < 1), \\ (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & (-1 < x < 1), \\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} & (x \in \mathbb{R}), \\ (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2} & (x \in \mathbb{R}) : \end{array}$$

Դիֆերենցման (ածանցման) կանոնները

$$\begin{array}{ll} \boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx}, & \\ (f \pm g)' = f' \pm g', & d(f \pm g) = df \pm dg, \\ (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', & d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg, \\ \text{մասնավորապես } (C \cdot f)' = C \cdot f', & dC = 0 \quad \text{և} \quad d(C \cdot f) = C \cdot df, \\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, & d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}, \\ \frac{d}{dt}[f(g(t))] = f'(g(t)) \cdot g'(t) : & \end{array}$$

ՏԱՎԵԼԿԱԾ-3

ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱԾՆԵՐ

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad \text{երբ } x \rightarrow x_0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \rightarrow 0 : \end{aligned}$$

Վերջին ներկայացման մեջ (որը կոչվում է **Նյուտոնի բինոմական վերլուծություն**) օգտվել ենք գործակիցների բավականին հարմար մի նշանակումից՝

$$\boxed{\binom{\alpha}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \binom{\alpha}{0} \stackrel{\text{def}}{=} 1 :$$

Մասնավոր դեպքում, երբ α -ն բնական թիվ է, այս գործակիցները հանգում են **Նյուտոնի դասական բինոմական գործակիցներին**՝

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k}, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq k \leq n,$$

իսկ Թեյլորի բանաձևում մնացորդային անդամը վերանում է, և արդյունքում ստանում ենք Նյուտոնի բինոմի հայտնի բանաձևը՝

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k, \quad n \in \mathbb{N} :$$

ՆԱՎԵԼԱԾ-4

Թեյլորի շարքեր

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in \mathcal{U}(x_0), \end{aligned}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1 : \end{aligned}$$

Երբ $\alpha = -1$, Նյուտոնի բինոմական շարքը հանգում է պարզագույն երկրաչափական շարքին՝

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n}, \quad |x| < 1 :$$

ՀԱՎԵԼՎԱԾ-5

Ինտեգրալների աղյուսակ

Հիմնական տարրական ֆունկցիաների անորոշ ինտեգրալների աղյուսակ

$$\int 0 \, dx = C, \quad \int 1 \, dx = x + C, \quad C = \text{const} \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \operatorname{th} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \, dx = -\operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} \, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \quad (x \neq \pm 1)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + b}} \, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C \quad (b \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C \quad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C \quad (-a < x < a, a > 0)$$

ՆԱՎԵԼՎԱԾ-6

Նշանավոր անիսկական ինտեգրալներ

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$ Դիրիխլեի ինտեգրալ,
2. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$ Պուասոնի ինտեգրալ,
3. $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$ Ֆրենելի ինտեգրալներ,
4. $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy, \quad \alpha, \beta > 0,$ Էյլերի բերա ֆունկցիա,
5. $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0,$ Էյլերի գամմա ֆունկցիա:

Ներքևյալ բանաձևերը օգտակար են Էյլերի ինտեգրալները վերջնականապես հաշվելու համար.

- 1) $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha), \quad \alpha, \beta > 0,$
- 2) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0,$
- 3) $\Gamma(n + 1) = n!, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$
- 4) $B(\alpha, 1 - \alpha) = \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$
- 5) մասնավորապես՝ $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt :$

ՀԱՎԵԼՎԱԾ-7

Դասագրքում հիշարարկված

ականավոր մաթեմատիկոսների և այլ գիտնականների ցանկ

1. **Աբել, Ն.Հ.** (Նիլս Հենրիկ Աբել, Niels Henrik Abel), 1802–1829, նորվեգացի նշանավոր մաթեմատիկոս, նրա պարվին է սահմանված «Աբելի մրցանակը», որը «Ֆիլոսոփի մրցանակի» հետ համարժեք է Նոբելյան մրցանակին մաթեմատիկայի բնագավառում;
2. **Ադամար, Ժ.Ս.** (Ժակ Սալոմոն Ադամար, Jacques Salomon Hadamard), 1865–1963, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս;
3. **Արքիմեդ** (կամ Արքիմեդես Սիրակուսից, Archimedes of Syracuse), մ.թ.ա. 287–212, հին հույն հռչակավոր մաթեմատիկոս, ֆիզիկոս, ճարտարագետ, մեխանիկ և գյուրարար;
4. **Բեռնուլլի, Յա.** (Յակոբ Բեռնուլլի, Jacob Bernoulli), 1655–1705, շվեյցարացի մաթեմատիկոս, հավանականությունների տեսության, մաթեմատիկական անալիզի և վարիացիոն հաշվի հիմնադիրներից մեկը;
5. **Բեռնուլլի, Յո.** (Յոհան Բեռնուլլի, Johann Bernoulli), 1667–1748, շվեյցարացի մաթեմատիկոս, Յակոբ Բեռնուլլիի կրտսեր եղբայրը և նրա հետնորդը, Լ. Էյլերի ուսուցիչը, Լոպիտալի հայտնի կանոնի հեղինակը;
6. **Բոլցանո, Բ.** (Բեռնարդ Բոլցանո, Bernard Bolzano), 1781–1848, չեխ և իտալացի մաթեմատիկոս, փիլիսոփա;
7. **Բունյակովսկի, Վ.Յ.** (Վիկտոր Յակովի Բունյակովսկի), 1804–1889, ռուս և ուկրաինացի մաթեմատիկոս;
8. **Դաղլաս, Փ.Հ.** (Փոլ Հովարդ Դաղլաս (Դուգլաս), Paul Howard Douglas), 1892–1976, ամերիկացի տնտեսագետ և քաղաքական գործիչ;
9. **Դալամբեր, Ժ.Ռ.** (Ժան Բապտիստ Լը Ռոն Դ'Ալամբեր, Jean Baptiste le Rond D'Alembert), 1717–1783, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, ֆիզիկոս, փիլիսոփա, երաժշտագետ, «Հանրագիտարանի» համախմբագիր;
10. **Դարբու, Ժ.Գ.** (Ժան Գաստոն Դարբու, Jean Gaston Darboux), 1842–1917, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս;
11. **Դեկարտ, Ռ.** (Ռենե Դեկարտ, Rene Descartes), 1596–1650, ֆրանսիացի փիլիսոփա, մաթեմատիկոս, ֆիզիկոս;
12. **Դե Մորգան, Օ.** (Օգաստեն Դե Մորգան, Augustus De Morgan), 1806–1871, բրիտանացի մաթեմատիկոս;

13. **Դինի, Ու.** (Ուլիս Դինի, Ulisse Dini), 1845–1918, իտալացի մաթեմատիկոս և քաղաքական գործիչ;
14. **Դիրիխլե, Պ.Գ.Լ.** (Պետեր Գուստավ Լեժյոն Դիրիխլե, Peter Gustav Lejeune Dirichlet), 1805–1859, գերմանացի մաթեմատիկոս;
15. **Էյլեր, Լ.** (Լեոնարդ Էյլեր, Leonhard Euler), 1707–1783, շվեյցարացի նշանավոր մաթեմատիկոս, ֆիզիկոս, աստղագետ, ճարտարագետ;
16. **Էվկլիդես** (Euclid of Alexandria), մ.թ.ա. IV-III դարեր, հռչակավոր հին հույն մաթեմատիկոս, դասական երկրաչափության հիմնադիր;
17. **Թեյլոր, Բ.** (Բրուք Թեյլոր, Brook Taylor), 1685–1731, անգլիացի մաթեմատիկոս;
18. **Ժորդան, Կ.** (Կամիլ Ժորդան, Camille Jordan), 1838–1922, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս;
19. **Լագրանժ, Ժ.Լ.** (Ժոզեֆ Լուի Լագրանժ, Joseph Louis Lagrange), 1736–1813, ֆրանսիացի և իտալացի մաթեմատիկոս և մեխանիկ;
20. **Լայբնից, Գ.Վ.** (Գոթֆրիդ Վիլհելմ ֆոն Լայբնից, Gottfried Wilhelm von Leibniz), 1646–1716, գերմանացի մեծանուն մաթեմատիկոս, ֆիզիկոս, իրավաբան, պարմաբան, լեզվաբան, դիվանագետ, մաթեմատիկական անալիզի հիմնադիրներից մեկը;
21. **Լեբեգ, Ա.Լ.** (Անրի Լեոն Լեբեգ, Henri Leon Lebesgue), 1875–1941, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, իրական անալիզի արդի տեսության հիմնադիր;
22. **Լիպշից, Ռ.Ո.Ս.** (Ռուդոլֆ Օտտո Սիգիզմունդ Լիպշից, Rudolf Otto Sigismund Lipschitz), 1832–1903, գերմանացի մաթեմատիկոս;
23. **Լոպիտալ, Գ.Ֆ.** (Գիյոմ Ֆրանսուա Լ'Օպիտալ, Guillaume Francois de l'Hopital), 1661–1704, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս;
24. **Լորենց, Մ.Օ.** (Մաքս Օտտո Լորենց, Max Otto Lorenz), 1876–1959, ամերիկացի փնտեսագետ;
25. **Կանտոր, Գ.** (Գեորգ Կանտոր, Georg Cantor), 1845–1918, գերմանացի մաթեմատիկոս;
26. **Կոշի, Օ.Լ.** (Օգյուստեն Լուի Կոշի, Augustin Louis Cauchy), 1789–1857, ֆրանսիացի մեծանուն մաթեմատիկոս, մաթեմատիկական անալիզի արդի տեսության հիմնադիր;
27. **Հայնե, Հ.Է.** (Հայնրիխ Էդուարդ Հայնե, Heinrich Eduard Heine), 1821–1881, գերմանացի մաթեմատիկոս;
28. **Հեսսե, Լ.Օ.** (Լյուդվիգ Օտտո Հեսսե, Ludwig Otto Hesse), 1811–1874, գերմանացի մաթեմատիկոս;

29. **Հիլբերտ, Դ.** (Դավիթ Հիլբերտ, David Hilbert), 1862–1943, գերմանացի ականավոր մաթեմատիկոս;
30. **Հյոլդեր, Լ.Օ.** (Լյուդվիգ Օտտո Հյոլդեր, Ludwig Otto Hölder), 1859–1937, գերմանացի մաթեմատիկոս;
31. **Մաքլորեն, Բ.** (Զոլին Մաքլորեն, Colin Maclaurin), 1698–1746, շոտլանդացի մաթեմատիկոս;
32. **Մերտենս, Ֆ.** (Ֆրանց Մերտենս, Franz Mertens), 1840–1927, գերմանացի և լեհ մաթեմատիկոս;
33. **Մինկովսկի, Հ.** (Հերման Մինկովսկի, Hermann Minkowski), 1864–1909, գերմանացի և լեհ մաթեմատիկոս, ֆիզիկոս;
34. **Յակոբի, Կ.Գ.Յ.** (Կարլ Գուստավ Յակոբ Յակոբի, Carl Gustav Jacob Jacobi), 1804–1851, գերմանացի մաթեմատիկոս;
35. **Յենսեն, Յ.** (Յոհան Յենսեն, Johan Jensen), 1859–1925, դանիացի մաթեմատիկոս և ճարտարագետ;
36. **Յունգ, Ու.Հ.** (Ուիլյամ Հենրի Յունգ (Յանգ), William Henry Young), 1863–1942, անգլիացի մաթեմատիկոս;
37. **Նյուտոն, Ի.** (Իսահակ Նյուտոն, Isaac Newton), 1643–1727, անգլիացի մեծանուն ֆիզիկոս, մեխանիկ, մաթեմատիկոս, աստղագետ, դասական ֆիզիկայի և մաթեմատիկական անալիզի հիմնադիրներից մեկը;
38. **Շվարց, Կ.Հ.Ա.** (Կարլ Հերման Ամանդուս Շվարց, Karl Hermann Amandus Schwarz), 1843–1921, գերմանացի մաթեմատիկոս;
39. **Պարսևալ, Մ.Ա.** (Մարկ-Անտուան Պարսևալ-Պեշեն, Marc-Antoine Parseval des Chenes), 1755–1836, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս;
40. **Պեանո, Զ.** (Զուզեպե Պեանո, Giuseppe Peano), 1858–1932, իտալացի մաթեմատիկոս և լեզվաբան;
41. **Պուասոն, Ս.Դ.** (Սիմեոն Դենի Պուասոն, Simeon Denis Poisson), 1781–1842, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս;
42. **Զինի, Կ.** (Կոռադո Զինի, Corrado Gini), 1884–1965, իտալացի տնտեսագետ, սոցիոլոգ, վիճակագիր;
43. **Ռաաբե, Յ.Լ.** (Յոզեֆ Լյուդվիգ Ռաաբե, Joseph Ludwig Raabe), 1801–1859, շվեյցարացի մաթեմատիկոս;
44. **Ռիման, Գ.Ֆ.Բ.** (Գեորգ Ֆրիդրիխ Բեռնհարդ Ռիման, Georg Friedrich Bernhard Riemann), 1826–1866, գերմանացի ականավոր մաթեմատիկոս;
45. **Ռոլլ, Մ.** (Միշել Ռոլլ, Michel Rolle), 1652–1719, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս;

46. **Ստիլտյես, Թ.Յ.** (Թոմաս Յոանես Ստիլտյես, Thomas Joannes Stieltjes), 1856–1894, հոլանդացի մաթեմատիկոս;
47. **Ստիրլինգ, Ջ.** (Ջեյմս Ստիրլինգ, James Stirling), 1692–1770, շոտլանդացի մաթեմատիկոս;
48. **Վայերշտրաս, Կ.** (Կարլ Վայերշտրաս, Karl Weierstrass), 1815–1897, գերմանացի ականավոր մաթեմատիկոս, նրան համարում են արդի մաթեմատիկական անալիզի «հայրը»;
49. **Քոբ, Չ.Վ.** (Չարլզ Վիգինս Գոբ, Charles Wiggins Cobb), 1875–1949, ամերիկացի մաթեմատիկոս և տնտեսագետ:
50. **Ֆերմա, Պ.** (Պիեր դը Ֆերմա, Pierre de Fermat), 1607–1665, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, փաստաբան;
51. **Ֆրենել, Օ.Ճ.** (Օգյուստեն Ժան Ֆրենել, Augustin-Jean Fresnel), 1788–1827, ֆրանսիացի ճարտարագետ, ֆիզիկոս;
52. **Ֆուբինի, Գ.** (Գվիդո Ֆուբինի, Guido Fubini), 1879–1943, իտալացի մաթեմատիկոս;
53. **Ֆուրիե, Ժ.** (Ժան Բապտիստ Ժոզեֆ Ֆուրիե, Jean-Baptiste Joseph Fourier), 1768–1830, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս:

SUMMARY

A Course of Mathematical Analysis

Karen Avetisyan

This textbook is aimed at first- and second-year undergraduate mathematics students at universities, primarily those studying actuarial and financial mathematics at the Faculty of Mathematics and Mechanics, Yerevan State University. Mathematical analysis is generally found by students to be one of their hardest courses in mathematics. The main goal of this book is to rigorously present the fundamental concepts of mathematical analysis in the clearest, simplest way, within the context of illuminating graphs, diagrams and examples. Topics covered include all the basic concepts and methods of mathematical analysis such as the limit of a sequence or a function, continuous and differentiable functions, the investigation of functions and the construction of their graphs, indefinite and Riemann definite integrals, improper integrals, numerical, functional and power series, functions of bounded variation, the Riemann-Stieltjes integral. It also covers multivariable calculus including local and constrained extrema, and the double integral. The textbook is suitable for self-study or for use in parallel with a standard university course on the subject.

Ստորև բերված գրականության ցանկում հավաքել ենք «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկային նվիրված և հայերենով հրապարակված մեզ հայտնի բոլոր դասագրքերը, ինչպես նաև խնդրագրքեր: Անգլերենով կամ ռուսերենով հրապարակված մաթեմատիկական անալիզի մեծաքանակ ու բազմաթիվ դասագրքերից ընտրել ենք այնպիսիք, որոնք, մեր կարծիքով, առավել մարչելի են ուսանողներին և առնվազն մասնակիորեն համապատասխանում են փնտրագրքի թեքումով և խորացված մաթեմատիկայով մասնագիտությունների բուհական ծրագրերին:

Գրականության ցանկ

- [1] **Վ.Խ. Մուսոյան**, Մաթեմատիկական անալիզ, 1-ին և 2-րդ մասեր, ԵՊՏ հրատ., 2018, 2012 ;
- [2] **Վ.Ն. Օհանյան**, Մաթեմատիկական անալիզ (դասախոսություններ), 1-ին, 2-րդ, 3-րդ մասեր, ԵՊՏ հրատ., 2008, 2013, 2020 ;
- [3] **Ա.Գ. Ղալումյան**, Մաթեմատիկական անալիզ (դասախոսություններ), 1-ին մաս, ԵՊՏ հրատ., 2002 ;
- [4] **Ա.Գ. Ղալումյան, Ա.Ա. Սարգսյան**, Մաթեմատիկական անալիզ (դասախոսություններ), 2-րդ և 3-րդ մասեր, ԵՊՏ հրատ., 2008, 2009 ;
- [5] **Ս.Պ. Սյրեփանյան**, Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքներ: Բուհական դասագիրք, ԵՊՏ հրատ., 2023 ;
- [6] **Գ.Մ. Ֆիխտենգոլց**, Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքներ, Նախորդ 1, «Լույս», Երևան, 1970 ;
- [7] **Գ.Մ. Ֆիխտենգոլց**, Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի դասընթաց, Նախորդ 1, ԵՊՏ, Երևան, 1949 ;
- [8] **Գ. Գևորգյան, Լ. Գալստյան, Ա. Թաթևյան, Գ. Միքայելյան, Կ. Նավասարդյան**, Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք, 1-ին և 2-րդ մասեր, ԵՊՏ հրատ., 2014 ;
- [9] **Ս.Մ. Նովիանինսկայան, Ա.Կ. Թաթևյան**, Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք փնտրագրքերի համար, Մաս 1 և 2, «Լիմուշ» հրատ., Երևան, 2016 ;
- [10] **Մ.Ն. Մուրադյան**, Բարձրագույն մաթեմատիկա փնտրագրքերի համար, Մաս 1 և 2, «Տնտեսագետ» հրատ., Երևան, 2019, 2024 ;
- [11] **R.G. Bartle, D.R. Sherbert**, Introduction to Real Analysis, 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc., NJ, USA, 2011 ;
- [12] **J. Stewart**, 1. Single Variable Calculus, 2. Multivariable Calculus, 7th Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, Canada, USA, 2012 ;

- [13] **L. Hoffmann, G. Bradley, D. Sobecki, M. Price**, Calculus for Business, Economics, and the Social and Life Sciences, 11th Edition, McGraw-Hill, NY, 2013 ;
- [14] **Г.М. Фихтенгольц**, Основы математического анализа, Части 1,2, изд. 10, 9-е, Лань, С-Петербург, Москва, 2015, 2008 ;
- [15] **Г.М. Фихтенгольц**, Курс дифференциального и интегрального исчисления, Тома 1,2,3, изд. 8-е, Физматлит, Москва, 2003 ;
- [16] **Л.Д. Кудрявцев**, Краткий курс математического анализа, Тома 1,2, изд. 3-е, Физматлит, Москва, 2005 ;
- [17] **Л.Д. Кудрявцев**, Курс математического анализа, Тома 1,2,3, Высшее Образование, Дрофа, Москва, 2003, 2004, 2006 ;
- [18] **В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б. Сендов**, Математический анализ, Части 1,2, МГУ, Москва, 1985, 1987.

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԿԱՐԵՆ ԼԱՐԻԿԻ ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ
ԴԱՍԸՆԹԱՑ

Դասագիրք

Համակարգչային ձևավորող՝ Կ. Չալարյան
Կազմի ձևավորող՝ Ա. Պատվականյան
Հրատ. խմբագիր՝ Լ. Ավետիսյան

Հեղինակը հաստատում է, որ ծանոթ է «ԵՊՀ գրահրատարակչական քաղաքականությամբ», և գրքում առկա փաստերը, դիրքորոշումները, կարծիքները շարադրված են հեղինակային իրավունքի և էթիկայի միջազգայնորեն ընդունված սկզբունքների պահպանմամբ:

Տպագրված է «Սի Պրինտ» ՍՊԸ-ում:
Հասցե՝ ք. Երևան, Մարգարյան փ., 2-րդ նրբ., հ. 28

Հրատարակվել է՝ 21.07.2026:
Չափսը՝ 60x84 ¹/₈: Տպ. մամուլը՝ 34:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.y-su.am



publishing.ysu.am