

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՆԱԽԱԼՍԱՐԱՆ

ԳԱԳԻԿ ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ | ԶԱՐՈՒՈՒ ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ



ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Զ. Ս. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԵՐԵՎԱՆ

ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ

2025

ՀՏԴ 51(07)

ԳՄԴ 22.1g7

Մ 780

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ գիտական խորհուրդը:*

Միքայելյան Գ. Վ., Միքայելյան Զ. Ս.

Մ 780 Բարձրագույն մաթեմատիկա / Գ. Վ. Միքայելյան, Զ. Ս.

Միքայելյան.- Եր.: ԵՊՀ, 2025.- 250 էջ:

Գիրքը բարձրագույն մաթեմատիկայի ժամանակակից պահանջներին համապատասխանող ուսումնական ձեռնարկ է: Տեսական նյութը զուգակցվում է շատ օրինակներով, կիրառական բնույթի խնդիրների լուծման եղանակներով: Մաթեմատիկական գաղափարները ներկայացված և վերլուծված են դրանց կիրառությունների տեսակետից: Կարևորված են գիտության, տեխնիկայի, տնտեսության տարբեր բնագավառներում առաջացած խնդիրները հետազոտելու և մոդելավորելու մաթեմատիկական մեթոդները: Յուրաքանչյուր գլխի վերջում տեղադրված են ինքնուրույն լուծման համար նախատեսված խնդիրներ և վարժություններ:

Ձեռնարկը նախատեսված է բուհերի բնագիտական, տնտեսագիտական մասնագիտությունների ուսանողների, մագիստրանտների և ասպիրանտների համար: Այն օգտակար է նաև հանրակրթական ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքերի աշակերտների համար:

ՀՏԴ 51(07)

ԳՄԴ 22.1g7

ISBN 978-5-8084-2727-3

<https://doi.org/10.46991/YSUPH/9785808427273>

© ԵՊՀ հրատ., 2025

© Միքայելյան Գ. Վ., Միքայելյան Զ. Ս., 2025

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԱԽԱԲԱՆ.....	7
ԳԼՈՒԽ 1.....	10
Գծային հանրահաշիվ.....	10
1. Որոշիչներ.....	10
2. Երեք անհայտով երեք գծային հավասարումների համակարգերի լուծման Կրամերի եղանակը.....	13
3. Գործողություններ մատրիցների հետ: Համակարգերի լուծման մատրիցային մեթոդը	15
4. Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման Գաուսի մեթոդը	18
Խնդիրներ	19
ԳԼՈՒԽ 2.....	23
Վերլուծական երկրաչափություն	23
1. Կոորդինատների մեթոդը	23
2. Երկու կետերի հեռավորությունը	25
3. Հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ	26
4. Կորի հավասարումը, շրջանագծի հավասարումը	27
5. Ուղղի հավասարումը անկյունային գործակցով և օրդինատների առանցքից կտրած հատվածով	28
6. Ուղղի հավասարումը տրված կետով և անկյունային գործակցով	30
7. Տրված երկու կետերով անցնող ուղղի հավասարումը	30
8. Ուղիղների կազմած անկյունը.....	31
9. Ուղղի ընդհանուր հավասարումը.....	32
10. Կետի հեռավորությունը ուղղից	33
11. Երկրորդ կարգի կորեր	34
1. Էլիպս	34
2. Հիպերբոլ.....	35
3. Պարաբոլ.....	36
12. Վեկտորներ.....	38
1. Վեկտորի վերլուծելը բաղադրիչների.....	39
2. Սկալյար արտադրյալ.....	41
3. Վեկտորական արտադրյալ.....	44
4. Խառն արտադրյալ	45

5. Հարթության հավասարումը	46
6. Ուղիղը տարածության մեջ	48
13. Երկրորդ կարգի մակերևույթներ	49
Խնդիրներ	51
ԳԼՈՒԽ 3	56
Մաթեմատիկական անալիզ	56
1. Ֆունկցիայի գաղափարը: Ֆունկցիայի տրման եղանակները	56
2. Հաջորդականության և ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը: Անընդհատ աճի բանաձևը: Թվային շարքեր: Ֆունկցիայի անընդհատությունը	61
1. Թվային շարքեր	66
2. Անընդհատ ֆունկցիաներ	69
3. Ածանցյալ: Ածանցյալի մեխանիկական և երկրաչափական իմաստները	72
1. Ակնթարթային արագությունը	72
2. Կորին տարված շոշափողը	74
3. Հոսանքի միջին ուժը	75
4. Մոտավոր հաշվարկներ	80
4. Մաքսիմումի և մինիմումի վերաբերյալ խնդիրներ	82
5. Անորոշ ինտեգրալ: Որոշյալ ինտեգրալ: Կիրառություններ	90
6. Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաներ	101
Խնդիրներ և վարժություններ	105
ԳԼՈՒԽ 4	116
Թվային ինտեգրում	116
1. Ուղղանկյունների մեթոդը	116
2. Սեղանների մեթոդը	119
3. Պարաբոլների մեթոդը	121
Խնդիրներ	123
Հարմոնիկ անալիզ	125
1. Ներդաշնակ (հարմոնիկ) տատանումներ	125
2. Ֆունկցիայի վերլուծումը Ֆուրիեի շարքի	128
ԳԼՈՒԽ 6	134
Ֆունկցիաների մոտարկում	134

1. Ինտերպոլյացիա.....	134
2. Գծային ինտերպոլյացիա	135
3. Քառակուսային ինտերպոլյացիա.....	137
4. Լագրանժի ինտերպոլյացիոն բազմանդամը	139
5. Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը	141
6. Մոտարկող ֆունկցիայի տեսքեր	145
1. Գծային ֆունկցիա (գծային ռեգրեսիա)	146
2. Քառակուսային ֆունկցիա (քառակուսային ռեգրեսիա)	148
3. Աստիճանային ֆունկցիա (երկրաչափական ռեգրեսիա)	149
4. Ցուցչային ֆունկցիա	150
5. Կոտորակագծային ֆունկցիա	150
6. Լոգարիթմական ֆունկցիա.....	151
7. Հիպերբոլ	152
8. Բազմաչափ գծային ռեգրեսիա	152
Խնդիրներ.....	155
ԳԼՈՒԽ 7.....	157
Դիֆերենցիալ հավասարումներ.....	157
1. Կոշիի խնդրի դրվածքը	157
2. Դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման <u>անալիտիկ</u> մեթոդներ.....	159
3. Էյլերի մեթոդը.....	163
4. Ռունգե-Կուտտայի մեթոդը	164
Խնդիրներ	166
ԳԼՈՒԽ 8.....	169
Մաթեմատիկական մոդելավորում.....	169
1. Մարմնի հովացումը.....	171
2. Ռադիոակտիվ տրոհում	173
3. Հարմոնիկ տատանումներ	174
4. Պոպուլյացիայի քանակի փոփոխությունը	176
5. Սեզոնային աճի մոդելը	181
6. Համաճարակների տեսություն	183
7. Քիմիական ռեակցիաներ	187
8. Անկում մթնոլորտի մեջ	188

Խնդիրներ	190
ԳԼՈՒԽ 9	193
Հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության տարրեր	193
1. Միացություններ	193
2. Պատահույթի հավանականություն	196
3. Պատահույթների հավանականությունների հատկությունները	202
4. Պատահույթի հարաբերական հաճախությունը	206
5. Երկրաչափական հավանականություն	209
6. Պայմանական հավանականություն: Անկախ պատահույթներ	210
7. Մաթեմատիկական սպասում: Մեծ թվերի օրենքը	217
8. Տվյալների մշակում	221
1. Բաշխման փորձարարական ֆունկցիա	221
2. Հիստոգրամ	223
3. Վիճակագրական բնութագրիչներ	224
4. Կոռելյացիայի գործակից: Ռեգրեսիայի հավասարում	229
Խնդիրներ	232
ՀԱՎԵԼՎԱԾ 1	240
Տարրական ֆունկցիաների գրաֆիկները	240
ՀԱՎԵԼՎԱԾ 2	243
Ածանցյալների աղյուսակը	243
Ածանցման կանոնները	243
ՀԱՎԵԼՎԱԾ 3	244
Անորոշ ինտեգրալների աղյուսակը	244
Ինտեգրման կանոնները	244
ՀԱՎԵԼՎԱԾ 4	245
$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ֆունկցիայի աղյուսակը	245
SUMMARY	246
РЕЗЮМЕ	247
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ	248

Կա մի գիտություն, առանց որի անհնար է մյուսների գոյությունը: Դա մաթեմատիկան է, որի գաղափարները, դատողությունները և պայմանական նշանները ծառայում են որպես լեզու, նրանով գրում, խոսում և մտածում են մյուս գիտությունները: Այն բացատրում է դժվարին երևույթների օրինաչափությունները, կանխագուշակում և մեծ ճշգրտությամբ նախօրոք նկարագրում է երևույթների ընթացքը:

Ս. Սորոլև

ՆԱԽԱԲԱՆ

Մաթեմատիկական մեթոդներ կիրառվում են մարդկային գործունեության բազմաթիվ բնագավառներում: Այդ մեթոդները մուտք են գործել ժամանակակից գիտության տարբեր ճյուղեր, այդ թվում՝ նաև հումանիտար: Այժմ դժվար է պատկերացնել տնտեսագիտությունը, բժշկությունը, կենսաբանությունը, աշխարհագրությունը, երկրաբանությունը, քիմիան առանց մաթեմատիկական մեթոդների կիրառության: Մաթեմատիկական մեթոդներ օգտագործվում են նաև իրավաբանության, պատմության, լեզվաբանության և այլ հումանիտար մասնագիտությունների մեջ:

Մաթեմատիկայի թե՛ դպրոցական, թե՛ բուհական դասընթացները հիմնականում բավարար չեն կիրառական խնդիրները մաթեմատիկական լեզվով ձևակերպելու և լուծելու հմտությունների զարգացման տեսակետից: Այդ դասընթաց-

ները սովորողների մոտ մաթեմատիկական տեսությունների նկատմամբ առաջացնում են ձևական մոտեցումներ, չեն սովորեցնում ստացած գիտելիքները օգտագործել՝ լուծելու կիրառական պարզ խնդիրներ:

Այս դասագրքի նպատակն է համակարգված շարադրել բարձրագույն մաթեմատիկայի կարևոր գաղափարները, մեթոդները՝ ուղղորդելով դրանք դեպի սովորողների մոտ մաթեմատիկական մեթոդներ կիրառելու ունակությունների առաջացմանը և զարգացմանը:

Գիրքը ընդգրկում է բարձրագույն մաթեմատիկայի ավանդական թեմաները՝ գծային հանրահաշիվ, վերլուծական երկրաչափություն, մաթեմատիկական անալիզ, դիֆերենցիալ հավասարումներ, հավանականությունների տեսություն և վիճակագրություն, ինչպես նաև մաթեմատիկական մոդելավորում:

Գրքում մաթեմատիկական անալիզի այնպիսի գաղափարներ, ինչպիսիք են՝ ֆունկցիա, սահման, ածանցյալ, ինտեգրալ, քննարկված են դրանց առաջացման իրական հիմքերի և բնագիտության տարբեր ասպարեզներում կիրառությունների տեսակետից: Վերլուծված են թվային ինտեգրման հիմնական եղանակները:

Բնության պարբերական երևույթները քննարկված են հարմոնիկ անալիզին նվիրված գլխում, որտեղ բացատրված է Ֆուրիեի շարքերի կիրառական իմաստը, և բերված են դրանց կիրառությունների օրինակներ:

Մանրամասն շարադրված են բնագիտությունում հաճախ կիրառվող ֆունկցիաների մոտարկման ինտերպոլյացիայի, փոքրագույն քառակուսիների, ռեգրեսիայի մեթոդները:

Բնագիտության շատ խնդիրների լուծումներ բերվում են դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման: Քննարկված են

այդպիսի հավասարումների հիմնական տիպերի լուծման ճշգրիտ և մոտավոր մեթոդները, բերված են օրինակներ:

Բավականաչափ տեղ է հատկացված մաթեմատիկական մոդելներին: Բերված են մի շարք օրինակներ բնագիտության ամենատարբեր ասպարեզներից: Քննարկված են մաթեմատիկական մոդելներ կառուցելու սկզբունքները. ինչպես հետազոտվող օբյեկտից կամ երևույթից առանձնացնել խնդրի իրական բովանդակությունը, ձևակերպել այն որպես մաթեմատիկական խնդիր, լուծել այդ խնդիրը, մեկնաբանել ստացված արդյունքը և այլն:

Գրքի վերջին գլուխը նվիրված է հավանականությունների տեսությանը և մաթեմատիկական վիճակագրությանը: Այդ տեսություններն ունեն կիրառությունների լայն շրջանակ: Բերված են տվյալների մշակման տեսության հիմնական սկզբունքները:

Յուրաքանչյուր գլխի վերջում տրված են վարժություններ և խնդիրներ, որոնք լրացնում են շարադրված նյութը և ամրապնդում այն: Խնդիրների զգալի մասը կիրառական բնույթի են:

Բարձրագույն մաթեմատիկայի այս դասընթացը կարող է դառնալ այն կամուրջը, որն ուսումնական նյութը կապում է կիրառական հետազոտության հետ:

ԳԼՈՒԽ 1

Գծային հանրահաշիվ

1. Որոշիչներ

Երկրորդ կարգի որոշիչներ

Դիտարկենք հաստատուն գործակիցներով, երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Համակարգի առաջին հավասարումը բազմապատկենք b_2 -ով, երկրորդը՝ b_1 -ով և առաջին հավասարումից հանենք երկրորդը, կստանանք՝

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1:$$

Նույն եղանակով կարտաքսենք x անհայտը և կստանանք՝

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1:$$

Նշանակենք՝

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1:$$

Եթե տրված է չորս թիվ քառակուսի աղյուսակի (մատրիցի) ձևով՝

$$E = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix},$$

ապա այս մատրիցին համապատասխանող որոշիչ կոչվում է $A_1B_2 - A_2B_1$ տարբերությունը: Որոշիչը ընդունված է նշանակել՝

$$\det E = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 B_2 - A_2 B_1:$$

Այսպիսով, համակարգը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases}$$

Քննարկենք երեք դեպք:

1) Եթե $\Delta \neq 0$, ապա վերջին համակարգից կստանանք՝

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

այսինքն՝ համակարգն ունի միակ լուծում:

2) Եթե $\Delta = 0$, բայց Δ_x, Δ_y որոշիչներից մեկը 0 չէ, այդ դեպքում համակարգը լուծում չունի:

3) Եթե $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, ապա համակարգը ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման այս եղանակը կոչվում է Կրամերի մեթոդ:

Երրորդ կարգի որոշիչներ

Ենթադրենք՝ տրված է

$$E = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

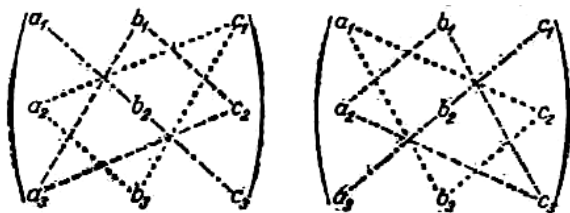
քառակուսի մատրիցը: E -ին համապատասխան որոշիչը նշանակվում է՝

$$\det E = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

և հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\det E = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3:$$

Մատրիցի տարրերը բազմապատկվում են հետևյալ սխեմաներով՝



Հասկություն 1. Որոշիչի մեծությունը չի փոխվի, եթե տողերը փոխարինենք համապատասխան համարի սյուններով:

Հասկություն 2. Երկու տողերի կամ սյունների տեղափոխությունը փոխում է որոշիչի նշանը:

Հասկություն 3. Եթե որոշիչի երկու տող կամ սյուն համընկնում են, ապա որոշիչը հավասար է զրոյի:

Հասկություն 4. Որոշիչի նույն տողի կամ սյան բոլոր տարրերը նույն թվով բազմապատկելը համարժեք է որոշիչը այդ թվով բազմապատկելուն:

Հասկություն 5. Եթե որոշիչի որևէ տողի կամ սյան բոլոր տարրերը զրո են, ապա որոշիչը հավասար է զրոյի:

Հասկություն 6. Եթե որոշիչի երկու տող կամ երկու սյուն համեմատական են, ապա որոշիչը հավասար է զրոյի:

Հասկություն 7.

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2' + a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3' + a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Հասկություն 8. Եթե որոշիչի որևէ տող կամ սյուն բազմապատկվի որևէ թվով և ավելացվի համապատասխանաբար որևէ այլ տողի կամ սյան, ապա որոշիչի մեծությունը չի փոխվի:

Որոշիչի որևէ տարրի մինոր կոչվում է այն որոշիչը, որը ստացվում է տրվածից ջնջելով այն տողը և սյունը, որոնց հատման կետում գտնվում է այդ տարրը:

Ցանկացած տարրի հանրահաշվական լրացում կոչվում է այդ տարրի մինորը՝ բազմապատկած $(-1)^{i+j}$ -ով, որտեղ i -ն տողի, իսկ j -ն սյան համարներն են:

Հատկություն 9. Որոշիչը հավասար է որևէ տողի (սյան) տարրերի և դրանց հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարին:

Օրինակ՝

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}:$$

Հատկություն 10. Որոշիչի որևէ տողի կամ սյան տարրերի և ուրիշ տողի կամ սյան տարրերի հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարը հավասար է զրոյի:

2. Երեք անհայտով երեք գծային հավասարումների համակարգերի լուծման Կրամերի եղանակը

Դիտարկենք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

որոշիչի $a_1, a_2, \dots$ տարրերի հանրահաշվական լրացումները նշանակենք $A_1, A_2, \dots$: Համակարգի առաջին հավասարման

երկու մասերը բազմապատկենք A_1 -ով, երկրորդը՝ A_2 -ով, երրորդը՝ A_3 -ով և գումարենք իրար, կստանանք.

$$\begin{aligned}(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)x + (b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3)y \\ + (c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3)z \\ = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3:\end{aligned}$$

9 և 10 հատկություններից բխում է՝

$$\Delta \cdot x = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3$$

հավասարությունը: Նույն դատողություններով ստանում ենք հետևյալ հավասարությունները.

$$\Delta \cdot y = d_1B_1 + d_2B_2 + d_3B_3,$$

$$\Delta \cdot z = d_1C_1 + d_2C_2 + d_3C_3:$$

Նշանակելով

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

կստանանք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y: \\ \Delta \cdot z = \Delta_z \end{cases}$$

1) Եթե $\Delta \neq 0$, ապա համակարգն ունի միակ լուծում՝

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}:$$

2) Եթե $\Delta = 0$ և $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ որոշիչներից որևէ մեկը 0 չէ, ապա համակարգը լուծում չունի:

3) Եթե $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, ապա համակարգը կա՛մ լուծում չունի, կա՛մ ունի բազմաթիվ լուծումներ:

Հետևյալ համակարգերը բավարարում են 3) պայմանին. դրանցից առաջինը լուծում չունի, իսկ երկրորդն ունի բազմաթիվ լուծումներ:

$$\text{Օրինակ 1.} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 : \\ 4x + 4y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$\text{Օրինակ 2.} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 5x + 2y + 4z = 2: \\ 7x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

Դիտարկվում են նաև n -րդ կարգի որոշիչներ: Որոշիչների վերը շարադրված հասկությունները ճիշտ են նաև կամայական կարգի որոշիչների համար:

n անհայտով n գծային հավասարումների համակարգի լուծումը նման է 3 անհայտով 3 գծային հավասարումների համակարգի լուծմանը:

3. Գործողություններ մատրիցների հետ: Համակարգերի լուծման մատրիցային մեթոդը

Թվերից կազմված հետևյալ աղյուսակը կոչվում է $m \times n$ չափի մատրից.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}:$$

Եթե $m = n$, ապա այն կոչվում է քառակուսային մատրից: Մատրիցը նշանակվում է նաև այսպես.

$$A = (a_{ij}), \text{ որտեղ } i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n:$$

A և B մատրիցները կոչվում են հավասար՝ $A=B$, եթե դրանք ունեն միևնույն թվով տողեր և սյուներ, ընդ որում դրանց համապատասխան տարրերը նույնն են:

Հետևյալ քառակուսային մատրիցը՝

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

կոչվում է միավոր մատրից:

Միևնույն քանակով տողեր և սյուների ունեցող $A = (a_{ij})$ և $B = (b_{ij})$ մատրիցների գումար կոչվում է այն $C = (c_{ij})$ մատրիցը, որի յուրաքանչյուր տարր հավասար է A և B մատրիցների համապատասխան տարրերի գումարին՝

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}:$$

A մատրիցի և k թվի արտադրյալ կոչվում է $C = (c_{ij})$ մատրիցը, որտեղ $c_{ij} = ka_{ij}$:

A և B մատրիցների AB արտադրյալ կոչվում է $C = (c_{ij})$ մատրիցը, որի տարրերը որոշվում են հետևյալ բանաձևով.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n:$$

A մատրիցի սյուների քանակը պետք է հավասար լինի B մատրիցի տողերի քանակին:

Օրինակ՝ տրված են

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ և } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցները: Հաշվենք AB և BA արտադրյալները.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}:$$

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ AB և BA արտադրյալները կարող են հավասար չլինել:

A^{-1} մատրիցը կոչվում է A մատրիցի հակադարձ մատրից, եթե

4. Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման Գաուսի մեթոդը

Գաուսի մեթոդը ներկայացնենք հետևյալ օրինակով.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -5 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 8 \end{cases}.$$

Կազմենք

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

ընդլայնված մատրիցը:

$\overline{A}$ մատրիցի առաջին տողը բազմապատկենք -2-ով և գումարենք երկրորդ տողին, առաջին տողը բազմապատկենք -3-ով և գումարենք երկրորդ տողին, առաջին տողը բազմապատկենք -4-ով և գումարենք չորրորդ տողին.

$$\overline{A} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 12 \\ 0 & -3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right):$$

Վերջին մատրիցի երկրորդ տողը բազմապատկենք -3-ով, հետո -5-ով և գումարենք համապատասխանաբար երրորդ և չորրորդ տողերին.

$$\overline{A} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 18 & -30 \\ 0 & 0 & -13 & 23 & -62 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 18 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & -71/2 & 71/2 \end{array} \right):$$

Վերջին քայլում երրորդ տողը բազմապատկենք $\frac{-13}{4}$ -ով և գումարենք չորրորդ տողին: Համակարգը ձևափոխենք եռանկյունաձև համակարգի:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ -x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 12 \\ -4x_3 + 18x_4 = -30 \\ \frac{-71}{2}x_4 = \frac{71}{2} \end{cases} :$$

Վերջին հավասարումից ունենք $x_4 = -1$, տեղադրելով երրորդ հավասարման մեջ՝ կստանանք՝ $x_3 = 3$, տեղադրելով երկրորդ հավասարման մեջ՝ կստանանք՝ $x_2 = 2$, և տեղադրելով առաջին հավասարման մեջ՝ կստանանք՝ $x_1 = 1$: Այսպիսով համակարգի լուծումն է՝ $(1, 2, 3, -1)$:

Խնդիրներ

1. Հավասարումների համակարգը լուծել Գաուսի եղանակով.

$$1) \begin{cases} 5x - 3y = 19 \\ 4x + 7y = 29 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 6x - y = -8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = 5 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 11 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 23 \end{cases} :$$

2. Հավասարումների համակարգը լուծել Կրամերի եղանակով.

$$1) \begin{cases} x - 3y = -10 \\ 2x + y = 40 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 8y = 30 \\ 6x - y = 9 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -3 \end{cases} :$$

3. Հաշվել մատրիցների արտադրյալը.

$$1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} :$$

4. Գտնել մատրիցի հակադարձը.

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} :$$

5. Հավասարումների համակարգը լուծել մատրիցային եղանակով.

$$1) \begin{cases} 5x - 3y = 19 \\ 4x + 7y = 29 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 6x - y = -8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -6 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1: \end{cases}$$

6. Տիգրանը երեք տետրի և երկու գրիչի համար վճարեց 310 դրամ, իսկ Սոֆին 5 տետրի և 3 գրիչի համար՝ 490 դրամ: Գտնել մեկ տետրի և մեկ գրիչի գինը:

7. Նարեկը երկու բանկում ավանդ դրեց 200000 դրամ՝ առաջինում՝ տարեկան 5%-ով, իսկ երկրորդում՝ 7%-ով: Մեկ տարի հետո նա ստացավ 11800 դրամ եկամուտ: Ինչքա՞ն դրամ նա դրեց յուրաքանչյուր բանկում:

8. Երեք հաստոց միասին օրական արտադրում են 180 դետալ, առաջինը և երկրորդը միասին՝ 100 դետալ, երկրորդը և երրորդը միասին՝ 120: Քանի՞ դետալ է արտադրում յուրաքանչյուր հաստոց:

9. Ֆերմայում կան հավեր, ոչխարներ և կովեր, որոնք միասին ունեն 100 գլուխ և 320 ոտք: Հավերի քանակը 10-ով ավելի է ոչխարների քանակից: Յուրաքանչյուր կենդանուց քանի՞ հատ կա:

10. Խառնեցին աղի երեք լուծույթ. առաջին լուծույթը՝ 10%-անոց, երկրորդը՝ 15%-անոց, երրորդը՝ 25%-անոց: Ստացան 10 լիտր 18%-անոց լուծույթ: Քանի՞ լիտր էին վերցրել երկրորդ և երրորդ լուծույթներից, եթե դրանց քանակները հավասար էին, իսկ առաջին լուծույթից վերցրել էին 2 լիտր:

11. 39 զբոսաշրջիկ մեկնեցին զբոսանքի: Նավակները երկու և երեք տեղանոց էին, ընդ որում երկու տեղանոց նավակները երկուսով ավել էին երեք տեղանոց նավակներից: Քանի՞ երկու տեղանոց և քանի երեք տեղանոց նավակ կար, եթե նավակներում բոլոր տեղերը զբաղված էին:

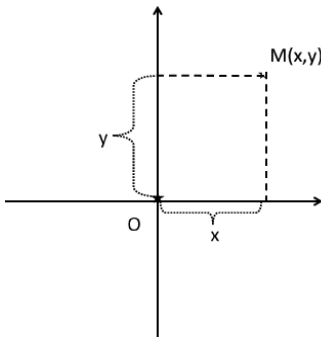
12. Քաղաքապետի պաշտոնի համար հավակնում էին երեք թեկնածու: Ընտրությունների ժամանակ առաջին թեկնածուի օգտին քվեարկեց 4 անգամ ավելի շատ ընտրող, քան երկրորդի օգտին, իսկ երրորդ թեկնածուի օգտին քվեարկեց 1,5 անգամ ավելի ընտրող, քան առաջին և երկրորդ թեկնածուներին միասին: Քանի՞ տոկոս ձայն հավաքեց հաղթողը, եթե կարելի է քվեարկել միայն մեկ թեկնածուի օգտին:

ԳԼՈՒԽ 2

Վերլուծական երկրաչափություն

1. Կոորդինատների մեթոդը

Կոորդինատների մեթոդը ստեղծել է ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ռ. Դեկարտը: Այն երկրաչափությունը կապում է հանրահաշվի հետ: Երկրաչափական օբյեկտը՝ կետը, փոխարինվում է թվերի խմբով, այսինքն՝ հանրահաշվական օբյեկտով: Դեկարտյան կոորդինատային համակարգը հնարավորություն է տալիս գտնել M կետի դիրքը հարթության վրա թվերից կամ տառերից կազմված (x, y) զույգի միջոցով (Նկար 1).



Նկ. 1

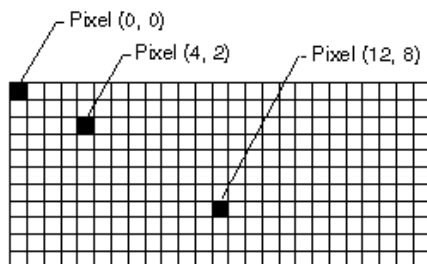
Օրինակներ.

1. Թատրոնում հանդիսատեսի տեղը նկարագրվում է շարքի և նստատեղի համարներով,

2. Շախմատի տախտակի վրա խաղաքարի դիրքը նկարագրվում է շարքի համարով և սյունակի տառով,

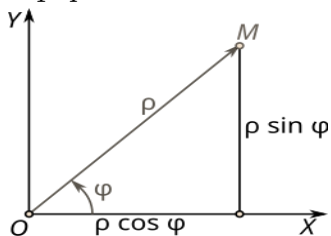
3. Քարտեզները բաժանված են քառակուսիների և յուրաքանչյուր քառակուսի նկարագրվում է երկու թվով,

4. Համակարգչի կամ հեռուստացույցի էկրանի յուրաքանչյուր կետ տրվում է երկու թվով (Նկար 2).



Նկ. 2

Կետի դիրքը հարթության վրա կարելի է որոշել նաև բևեռային կոորդինատներով: Ընտրում ենք O կետ, որը կոչվում է բևեռ, այդ կետից տանում ենք ճառագայթ, որը կոչվում է բևեռային առանցք: Կետի դիրքը հարթության վրա գտնելու համար կետը հատվածով միացնում ենք բևեռին, հաշվում այդ հատվածի երկարությունը և նրա կազմած անկյունը բևեռային առանցքի հետ (Նկար 3):



Նկ. 3

Բևեռային առանցքի ուղղությունը կարելի է ընտրել կամայականորեն: Աշխարհագրետները նախընտրում են բևեռային առանցքի ուղղությունը դեպի հյուսիս և համապատասխան անկյունը անվանում ազիմուտ: Հրետանավորները ազիմուտը հաշվում են հարավային ուղղությունից:

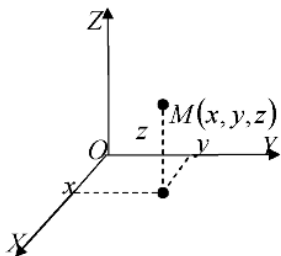
Տրված M կետի (x, y) դեկարտյան և բևեռային կոորդինատների միջև կապը արտահայտվում է

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$$

բանաձևերով:

Բնեռային կոորդինատները կիրառվում են, օրինակ, նավիգացիայում, այնպիսի ֆիզիկական համակարգերում, որտեղ մարմինները շարժվում են ինչ-որ կենտրոնի շուրջ:

Տարածության մեջ կետի դիրքը տրվում է երեք կոորդինատներով (Նկար 4).

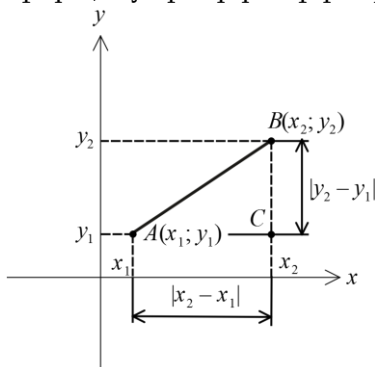


Նկ. 4

Տարածական դեկարտյան կոորդինատներով են նկարագրվում, օրինակ, ինքնաթիռի, անօդաչու թռչող սարքի, հրթիռի, երկնային լուսատուների դիրքը:

2. Երկու կետերի հեռավորությունը

$A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$ կետերի հեռավորությունը գտնում ենք (Նկար 5) Պյութագորասի թեորեմի օգնությամբ.



Նկ. 5

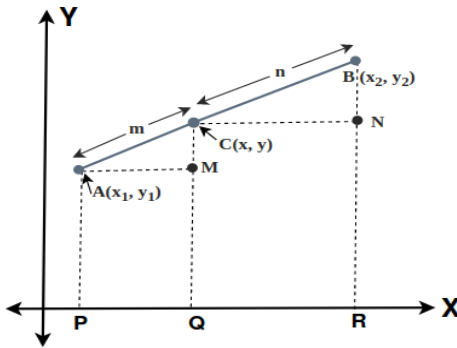
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}:$$

Տարածության մեջ $A(x_1, y_1, z_1)$ և $B(x_2, y_2, z_2)$ կետերի հեռավորությունը գտնվում է

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

բանաձևով:

3. Հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ



Նկ. 6

Տրված են $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$ կետերը (Նկար 6):

Անհրաժեշտ է AB հատվածի վրա գտնել $C(x, y)$ կետ, այնպիսին, որ $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$ ($m > 0, n > 0$): Քանի որ

$$PQ = x - x_1 \text{ և } QR = x_2 - x,$$

ապա կիրառելով Թալեսի թեորեմը՝ ստանում ենք՝

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n};$$

Այս հավասարումից գտնում ենք C կետի աբսցիսը՝

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m};$$

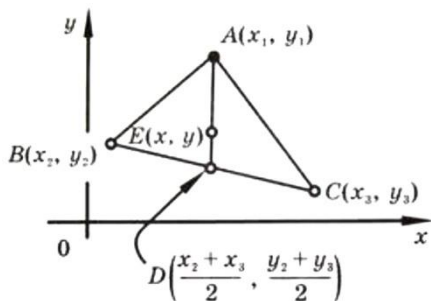
Նույն դատողություններով գտնում ենք նաև C կետի օրդինատը.

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m};$$

Մասնավորապես, երբ C -ն AB հատվածի միջնակետն է ($m = n$), ապա բանաձևերն ընդունում են հետևյալ տեսքը.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Օրինակ. Գտնենք $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ և $C(x_3, y_3)$ գագաթներով համասեռ եռանկյան ծանրության կենտրոնը (Նկար 7).



Նկ. 7

Ծանրության E կենտրոնը ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է: Քանի որ եռանկյան միջնագծերը հատման կետով բաժանվում են 2:1 հարաբերությամբ (հաշված գագաթից), հետևաբար ծանրության E կենտրոնի կոորդինատներն են՝

$$x = \frac{x_1 + 2 \frac{x_2 + x_3}{2}}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

4. Կորի հավասարումը, շրջանագծի հավասարումը

Հարթության վրա

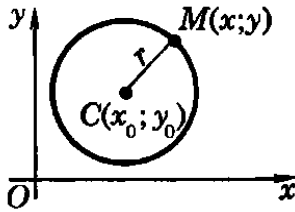
$$F(x, y) = 0$$

հավասարմանը բավարարող $M(x, y)$ կետերի բազմությունը կոչվում է այդ հավասարումով որոշվող կոր:

Օրինակ, հարթության վրա $C(x_0, y_0)$ կենտրոնով և r շառավղով շրջանագիծը որոշվում է

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

հավասարումով (Նկար 8).

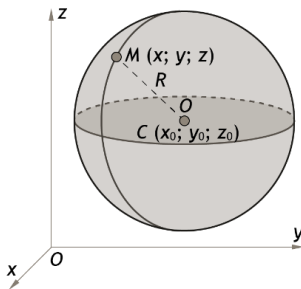


Նկ. 8

Տարածության մեջ $C(x_0, y_0, z_0)$ կենտրոնով և r շառավղով գնդային մակերևույթը (Նկար 9) որոշվում է

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

հավասարումով.

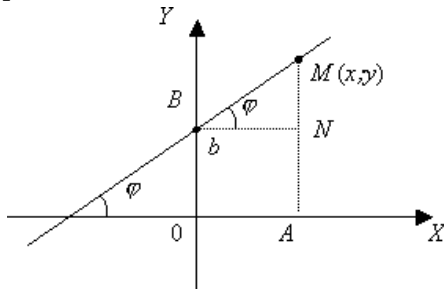


Նկ. 9

5. Ուղղի հավասարումը անկյունային գործակցով և օրդինատների առանցքից կտրած հատվածով

Ենթադրենք՝ ուղիղը ուղղահայաց չէ արգիսների առանցքին, հայտնի են նրա արգիսների առանցքի հետ կազմած φ անկյունը և օրդինատների առանցքից կտրած b հատվածի մեծությունը:

Ուղղի վրա գտնվող փոփոխական M կետի կոորդինատները նշանակենք (x, y) և դիտարկենք BNM եռանկյունը (Նկար 10).



Նկ. 10

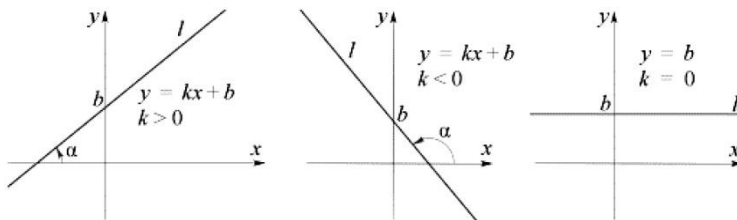
$k = tg\varphi$ թիվը կոչվում է ուղղի անկյունային գործակից: Ունենք

$$k = tg\varphi = \frac{y-b}{x}:$$

Այստեղից ստանում ենք ուղղի հավասարումը.

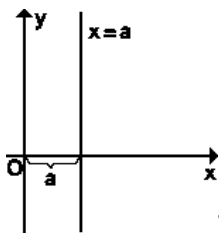
$$y = kx + b:$$

Նկարում պատկերված են ուղղի գրաֆիկներ k -ի տարբեր արժեքների դեպքում (Նկար 11).



Նկ. 11

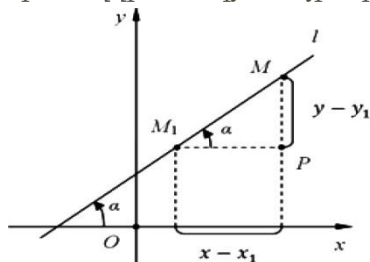
Եթե ուղիղն ուղղահայաց է OX առանցքին, ապա ուղղի հավասարումն է $x = a$ (Նկար 12).



Նկ. 12

6. Ուղղի հավասարումը տրված կետով և անկյունային գործակցով

Ենթադրենք ուղղի վրա տրված է $M_1(x_1, y_1)$ կետը և հայտնի է ուղղի k անկյունային գործակիցը (Նկար 13):



Նկ. 13

Այդ դեպքում M_1MP եռանկյունուց ունենք՝

$$k = tg\alpha = \frac{y-y_1}{x-x_1}:$$

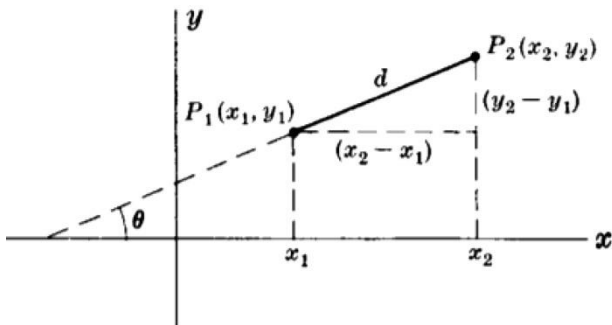
Հետևաբար ուղղի հավասարումը կարելի է գրել

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

տեսքով:

7. Տրված երկու կետերով անցնող ուղղի հավասարումը

Ենթադրենք՝ ուղղի վրա տրված են $P_1(x_1, y_1)$ և $P_2(x_2, y_2)$ կետերը (Նկար 14).



Նկ. 14

Քանի որ

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

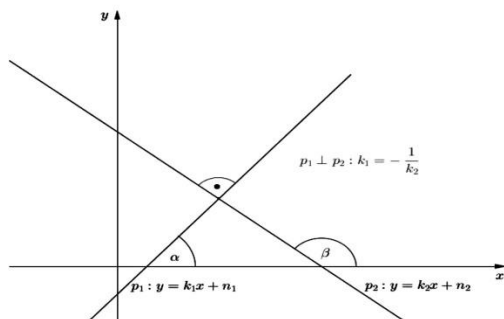
ապա նախորդ կետից ստանում ենք տրված երկու կետերով անցնող ուղղի հավասարումը.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1):$$

Այն հարմար է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

8. Ուղիղների կազմած անկյունը



Նկ. 15

Ենթադրենք տրված են p_1 և p_2 ուղիղները, որոնց հավասարումներն են (Նկար 15)՝

$$y = k_1x + n_1, y = k_2x + n_2:$$

Ուղիղների կազմած φ անկյան համար ունենք՝ $\varphi = \beta - \alpha$
և

$$tg\varphi = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta tg\alpha} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}:$$

Այսպիսով ուղիղների կազմած անկյունը գտնվում է

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

բանաձևով:

Ուղիղների ուղղահայացության դեպքում $\varphi = 90^\circ$ և $1 + k_1 k_2 = 0$: Այսինքն՝ ուղիղների ուղղահայացության պայմանն է՝ $k_1 k_2 = -1$:

Ուղիղների զուգահեռության պայմանն է՝

$$k_1 = k_2, n_1 \neq n_2:$$

9. Ուղղի ընդհանուր հավասարումը

Հետևյալ հավասարումը կոչվում է ուղղի ընդհանուր հավասարում՝

$$Ax + By + C = 0:$$

$B \neq 0$ դեպքում այն կարելի է գրառել

$$y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$$

տեսքով: Նշանակելով $k = \frac{-A}{B}$, $b = \frac{-C}{B}$, ստանում ենք $y = kx + b$ հավասարումը:

Եթե $B = 0$ և $C \neq 0$, ապա ընդհանուր հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$x = \frac{-C}{A},$$

որը OX առանցքին $x = \frac{-C}{A}$ կետում ուղղահայաց ուղղի հավասարումն է:

Հետևյալ հավասարումներով տրված ուղիղները՝

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{և} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

ա) համընկնում են, երբ $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$

բ) զուգահեռ են, երբ $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2},$

գ) ուղղահայաց են, երբ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0,$

դ) հատվում են, երբ $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}:$

10. Կետի հեռավորությունը ուղղից

$M(x_0, y_0)$ կետի հեռավորությունը $Ax + By + C = 0$ ուղից գտնվում է հետևյալ բանաձևով.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}:$$

Ուղղի ընդհանուր հավասարումը համարժեք է

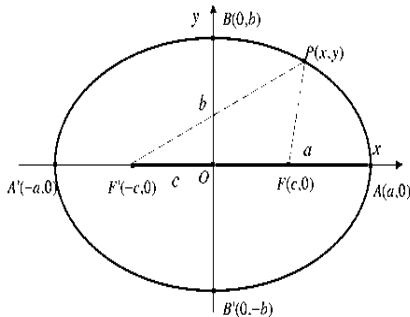
$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

հավասարմանը, որը կոչվում է ուղղի նորմալ հավասարում: Տրված կետի հեռավորությունն ուղղից գտնելու համար բավական է այդ կետի կոորդինատները տեղադրել ուղղի նորմալ հավասարման ձախ մասում և հաշվել ստացված թվի բացարձակ արժեքը:

11. Երկրորդ կարգի կորեր

1. Էլիպս

Էլիպս կոչվում է հարթության այն կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունների գումարը տրված երկու կետերից (ֆոկուսներից) հաստատուն է (Նկար 16):



Նկ. 16

Ըստ սահմանման՝ $PF + PF' = 2a$: Այստեղ տեղադրելով PF և PF' հեռավորությունների արժեքները, կատարելով որոշ ձևափոխություններ՝ ստանում ենք էլիպսի հավասարումը՝

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

որտեղ $b^2 = a^2 - c^2$:

Մասնավորապես, երբ $a = b = R$, ապա էլիպսը վերածվում է R շառավղով և $(0,0)$ կենտրոնով շրջանագծի:

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ թիվը կոչվում է էլիպսի էքսցենտրիսիտետ: Քանի որ $c < a$, ապա $0 < \varepsilon < 1$: Օգտագործելով $c^2 = a^2 - b^2$ կապը՝ ստանում ենք՝

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

այսինքն՝

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}:$$

Էքսցենտրիսիտետը բնութագրում է էլիպսի տեսքը:

Եթե էլիպսի կենտրոնը գտնվում է (x_0, y_0) կետում, ապա էլիպսի հավասարումն է՝

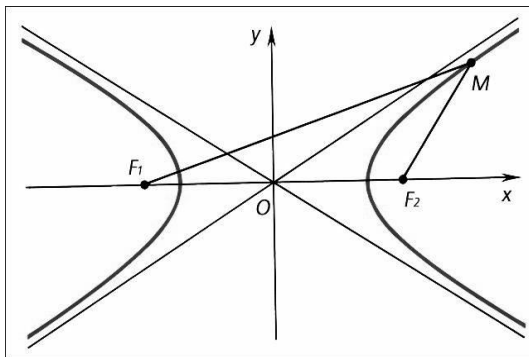
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1:$$

Էլիպսն ունի հետևյալ օպտիկական հատկությունը. եթե ձայնի կամ լույսի աղբյուրը գտնվում է էլիպսի ֆոկուսներից մեկում, ապա ճառագայթները, անդրադառնալով էլիպսից, հավաքվում են մյուս ֆոկուսում: Էլիպսի այս հատկությունը օգտագործվում է օպտիկայում, համերգային դահլիճների սկուստիկական ապահովելիս և այլն:

Արեգակնային համակարգի բոլոր մարմիններն արեգակի շուրջը պտտվում են էլիպսային ուղեծրով: Երկրի շուրջը էլիպսով է պտտվում նրա բնական արբանյակը՝ լուսինը, և արհեստական արբանյակները:

2. Հիպերբոլ

Հիպերբոլ կոչվում է հարթության այն կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունների տարբերությունը տրված երկու կետերից (ֆոկուսներից) հաստատուն է (Նկար 17).



Նկ. 17

$$MF_1 - MF_2 = 2a:$$

Հիպերբոլի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

որտեղ $b^2 = c^2 - a^2$:

Հիպերբոլի ասիմպտոտները

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

ուղիղներն են:

(x_0, y_0) կենտրոնով հիպերբոլի հավասարումն է՝

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1:$$

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ թիվը կոչվում է հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետ:

Էքսցենտրիսիտետը բնութագրում է հիպերբոլի տեսքը:

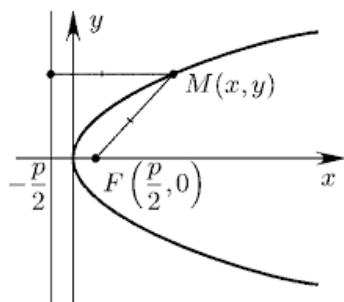
Հիպերբոլն ունի հետևյալ օպտիկական հատկությունը. եթե Δ այնի կամ լույսի աղբյուրը գտնվում է հիպերբոլի ֆոկուսներից մեկում, ապա ճառագայթները, անդրադառնալով հիպերբոլից, շարժվում են այնպես, կարծես դրանք դուրս եկած լինեն մյուս ֆոկուսից: Հիպերբոլի այս հատկությունը օգտագործվում է օպտիկայում, տիեզերական մարմինների հետազոտի հաշվարկման մեջ, ճարտարապետությունում և այլն:

Ուրիշ աստղային համակարգերից արեգակնային համակարգ ընկնող երկնային մարմինները պտտվում են արեգակի շուրջը հիպերբոլական ուղեծրով, և եթե դրանց վրա արեգակնային համակարգի մոլորակները էական ազդեցություն չեն թողնում, ապա դրանք հեռանում են նույն ուղեծրով:

3. Պարաբոլ

Պարաբոլ կոչվում է հարթության այն կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունները հարթության տրված կե-

տից և տրված ուղղից հավասար են: Տրված կետը կոչվում է ֆոկուս կամ կիզակետ, իսկ տրված ուղիղը՝ դիրեկտրիս (Նկար 18):



Նկ. 18

Հաշվելով $MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$ և M կետից դիրեկտրիս հեռավորությունը՝ $x + \frac{p}{2}$, կստանանք

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2:$$

Բացելով փակագծերը՝ ստանում ենք պարաբոլի հավասարումը՝

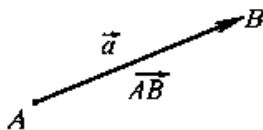
$$y^2 = 2px:$$

Եթե պարաբոլի գագաթը գտնվում է (x_0, y_0) կետում, ապա նրա հավասարումը կլինի՝ $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$:

Պարաբոլն ունի հետևյալ օպտիկական հատկությունը. եթե ձայնի, լույսի կամ ռադիոալիքի աղբյուրը գտնվում է ֆոկուսում, ապա դրա ճառագայթը, անդրադառնալով պարաբոլից, շարժվում՝ Ox առանցքին զուգահեռ: Պարաբոլի այս հատկությունը օգտագործում են լուսարձակների, գրպանի լապտերիկների, ակեհավաքների պատրաստման ժամանակ:

12. Վեկտորներ

Բնագիտության մեջ կան մեծություններ, ինչպիսիք են ուժը, արագությունը, արագացումը, որոնք բնութագրվում են ոչ միայն որոշակի թվային արժեքով, այլև որոշակի ուղղությամբ: Այս տիպի մեծությունները կոչվում են վեկտորներ: Վեկտորը ուղղորդված հատվածն է (Նկար 19):



Նկ. 19

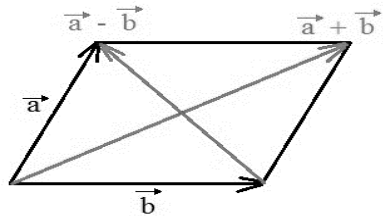
A-ն կոչվում է $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի սկիզբ, իսկ B-ն՝ վերջ: Վեկտորների համար օգտագործում են նաև $\vec{a}, \vec{b}, \dots$ նշանակումները: $\overrightarrow{BA}$ -ն $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի հակադիր վեկտորն է և $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի երկարությունը նշանակվում է $|\overrightarrow{AB}|$: Վեկտորները կոչվում են համագիծ, եթե գտնվում են զուգահեռ կամ համընկնող ուղիղների վրա: Համագիծ վեկտորները կոչվում են՝

- ա) համուղղված, եթե ունեն նույն ուղղությունը,
- բ) հակուղղված, եթե ունեն հակադիր ուղղություններ:

Վեկտորները կոչվում են հավասար, եթե դրանք համուղղված են և ունեն նույն երկարությունը:

Վեկտորները կարելի է դիտարկել և՛ հարթության վրա, և՛ տարածության մեջ: $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$ ծայրակետերով $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի կոորդինատներ կոչվում է $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ թվագույգը, իսկ եթե $A(x_1, y_1, z_1)$ և $B(x_2, y_2, z_2)$ կետերը գտնվում են տարածության մեջ, ապա $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի կոորդինատներ են $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ եռյակը:

Վեկտորի կոորդինատները այդ վեկտորի պրոյեկցիաներն են կոորդինատային առանցքների վրա: Եթե տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները, ապա այդ վեկտորները կարելի է գուգահեռ տեղափոխել այնպես, որ դրանց սկիզբները համընկնեն: Այդ դեպքում այդ վեկտորների $\vec{a} + \vec{b}$ գումարը դրանց վրա կառուցված գուգահեռագծի անկյունագիծն է նկարում ցույց տրված ուղղությամբ (Նկար 20):



Նկ. 20

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների $\vec{a} - \vec{b}$ տարբերությունը այդ գուգահեռագծի մյուս անկյունագիծն է՝ նկարում ցույց տրված ուղղությամբ:

a_1, a_2 կոորդինատներ ունեցող $\vec{a}$ վեկտորը նշանակում են $\vec{a}\{a_1, a_2\}$, իսկ a_1, a_2, a_3 կոորդինատներ ունեցող $\vec{a}$ վեկտորը՝ $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$:

Վեկտորների գումարումը, հանումը և թվով բազմապատկումը հանրահաշվորեն կատարվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$\vec{a}\{a_1, a_2\} \pm \vec{b}\{b_1, b_2\} = (\vec{a} \pm \vec{b})\{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2\},$$

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2\}:$$

1. Վեկտորի վերլուծելը բաղադրիչների

Հարթության վրա կարևոր դեր են կատարում Ox և Oy առանցքներին համուղղված $\vec{i}\{1, 0\}$ և $\vec{j}\{0, 1\}$ միավոր վեկտոր-

ները: Հիմնական պատճառը այն է, որ ցանկացած այլ $\{a_1, a_2\}$ վեկտոր կարելի է ներկայացնել դրանց միջոցով.

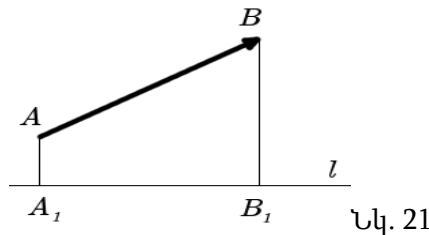
$$\vec{a} = \{a_1, a_2\} = \{a_1, 0\} + \{0, a_2\} = a_1\{1, 0\} + a_2\{0, 1\} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}:$$

Տարածության մեջ դիտարկվում են $\vec{i}\{1, 0, 0\}, \vec{j}\{0, 1, 0\}$ և $\vec{k}\{0, 0, 1\}$ միավոր վեկտորները: Ցանկացած $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$ վեկտոր կարելի է ներկայացնել դրանց գծային կոմբինացիայի միջոցով.

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}:$$

Վերը բերված բանաձևերը անվանում են վեկտորը բաղադրիչների վերլուծման բանաձևեր:

Ենթադրենք տրված են l առանցքը և $\overrightarrow{AB}$ վեկտորը: A և B կետերից տանենք ուղղահայացներ l առանցքին և ուղղահայացների հիմքերը նշանակենք A_1 և B_1 (Նկար 21): A_1B_1 -ը կոչվում է $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի պրոյեկցիա l առանցքի վրա.



Պրոյեկցիայի մեծությունը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$\Pi_l \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha,$$

որտեղ α -ն $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի և l առանցքի կազմած անկյունն է, իսկ մոդուլը վերցվում է պլուս նշանով, եթե $\overrightarrow{A_1B_1}$ -ն համուղոված է l -ին, և մինուս նշանով, եթե այն հակուղոված է l -ին:

2. Սկալյար արտադրյալ

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների $\vec{a} \cdot \vec{b}$ սկալյար արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha,$$

որտեղ α -ն $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունն է: α -ն չի գերազանցում 180° -ը:

Նկատենք, որ

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0:$$

Բազմապատկելով $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$ և $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}$ վեկտորները՝ ստանում ենք սկալյար արտադրյալ հաշվելու հետևյալ բանաձևը.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2:$$

Համապատասխանաբար $\vec{a} \{a_1, a_2, a_3\}$ և $\vec{b} \{b_1, b_2, b_3\}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալի համար ճիշտ է

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

բանաձևը:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյան կոսինուսը կարելի է գտնել

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad \text{կամ} \quad \cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

բանաձևերով:

Մասնավորապես, վեկտորների ուղղահայացության պայմանը դրանց սկալյար արտադրյալը 0-ի հավասար լինելն է:

Օրինակ 1. Գործարանը արտադրում է 3 տեսակի ապրանք՝ համապատասխանաբար x_1, x_2, x_3 գներով: Առաջին ամսում գործարանը արտադրում է առաջին տեսակից y_1 հատ ապրանք, երկրորդից՝ y_2 հատ, երրորդից՝ y_3 հատ: Երկրորդ

ամսում գործարանը առաջին տեսակից արտադրում է z_1 հատ, երկրորդից՝ z_2 հատ, երրորդից՝ z_3 հատ:

ա) Կազմենք գների վեկտորը՝

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}:$$

բ) Կազմենք առաջին և երկրորդ ամիսների արտադրանքների քանակների վեկտորները՝

$$Y = \{y_1, y_2, y_3\}, \quad Z = \{z_1, z_2, z_3\}:$$

գ) Երկու ամսում թողարկված արտադրանքի ծավալը գտնելու համար պետք է գումարել Y և Z վեկտորները.

$$Y + Z = \{y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3\}:$$

դ) Առաջին ամսում գործարանի հասույթը կլինի՝

$$P_1 = X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

սկալյար արտադրյալը, իսկ երկրորդ ամսում՝

$$P_2 = X \cdot Z = x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3$$

սկալյար արտադրյալը:

ե) Երկու ամսում գործարանի հասույթը կլինի՝

$$P = P_1 + P_2:$$

Օրինակ 2. Գործարանն արտադրում է երեք տեսակի ապրանք, որոնք վաճառվում են 4 խանութներում: Վաճառքի ծավալները տրված են հետևյալ աղյուսակում.

	Խ1	Խ2	Խ3	Խ4
Ա1	20	40	30	30
Ա2	30	10	20	50
Ա3	20	10	40	60

Ենթադրենք ապրանքների միավորի գներն են համապատասխանաբար՝ 150, 100, 200: Կազմենք վաճառքի ծավալների մատրիցը՝

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 20 \\ 40 & 10 & 10 \\ 30 & 20 & 40 \\ 30 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

և ապրանքների գների

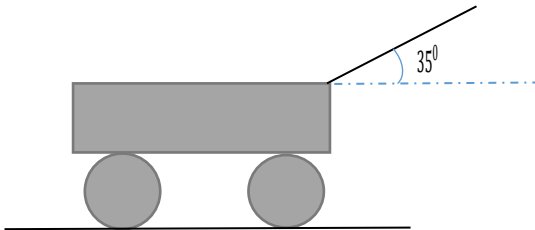
$$V = \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

մատրիցը:

Եթե A մատրիցի որևէ տողի տարրերը բազմապատկենք V մատրիցով, կստանանք համապատասխան խանութի հասույթը: Հետևաբար՝ հասույթի H վեկտորը կլինի $H=AV$ վեկտորը.

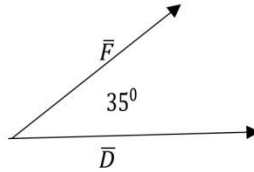
$$H = \begin{pmatrix} 10000 \\ 9000 \\ 14500 \\ 21500 \end{pmatrix}:$$

Օրինակ 3. Սայլակը հորիզոնական ճանապարհի վրայով քաշում են 100 մ, 70 նյութոն ուժով: Սայլակի բռնակը հորիզոնական ուղղության նկատմամբ կազմում է 35° անկյուն: Գտնել ուժի կատարած աշխատանքը (Նկար 22):



Նկ. 22

Նշանակենք $\vec{F}$ -ով և $\vec{D}$ -ով նկարում պատկերված վեկտորները.



Աշխատանքը հավասար է դրանց սկալյար արտադրյալին.

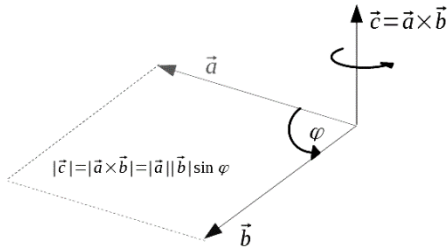
$$W = \vec{F} \cdot \vec{D} = |\vec{F}| |\vec{D}| \cos 35^\circ = 70 \cdot 100 \cdot \cos 35^\circ \\ \approx 5734 \text{ ջոուլ:}$$

3. Վեկտորական արտադրյալ

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը նշանակվում է $[\vec{a}\vec{b}]$ կամ $\vec{a} \times \vec{b}$ և սահմանվում է հետևյալ 3 պայմաններով.

- 1) $||[\vec{a}\vec{b}]|| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$, որտեղ α -ն $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունն է,
- 2) $[\vec{a}\vec{b}]$ վեկտորը ուղղահայաց է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրին,
- 3) $[\vec{a}\vec{b}]$ վեկտորը $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների նկատմամբ ուղղված է այնպես, ինչպես կորորդինատային Oz առանցքը Ox և Oy առանցքների նկատմամբ:

3)-ը կարելի է մեկնաբանել այսպես. եթե կանգնենք $[\vec{a}\vec{b}]$ վեկտորի ուղղությամբ և նայենք $\vec{a}$ վեկտորին, հետո՝ $\vec{b}$ վեկտորին, պտույտը պետք է լինի ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ (Նկար 23):



Նկ. 23

Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կիրառված են նույն կետից, ապա վեկտորական արտադրյալի մոդուլը հավասար է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռագծի մակերեսին:

Նկատենք, որ սկալյար արտադրյալը թիվ է, իսկ վեկտորական արտադրյալը՝ վեկտոր: Վեկտորական արտադրյալը ունի իր առանձնահատկությունները, օրինակ՝ $[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}]$:

Եթե $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ և $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, ապա վեկտորական արտադրյալը հաշվվում է

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

բանաձևով: Այն ապացուցվում է բազմապատկման հետևյալ աղյուսակից օգտվելով.

$$\begin{aligned} [\vec{i}, \vec{i}] &= 0, [\vec{j}, \vec{j}] = 0, [\vec{k}, \vec{k}] = 0, \\ [\vec{i}, \vec{j}] &= \vec{k}, [\vec{i}, \vec{k}] = -\vec{j}, [\vec{k}, \vec{j}] = -\vec{i}: \end{aligned}$$

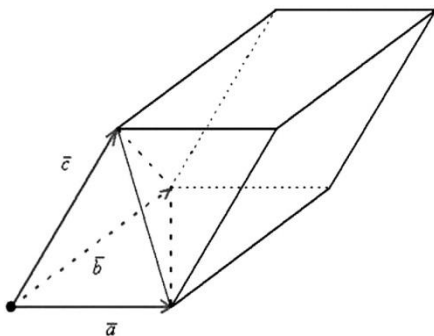
4. Խառն արտադրյալ

$\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների խառն արտադրյալ կոչվում է հետևյալ թիվը՝ $[\vec{a}\vec{b}] \cdot \vec{c}$:

Եթե $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ և $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$, ապա խառն արտադրյալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$[\vec{a}\vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}:$$

Խառն արտադրյալի մոդուլը այդ վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռանիստի ծավալն է: Մասնավորապես, եթե $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները համահարթ են, ապա $[\vec{a}\vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$ (Նկար 24):



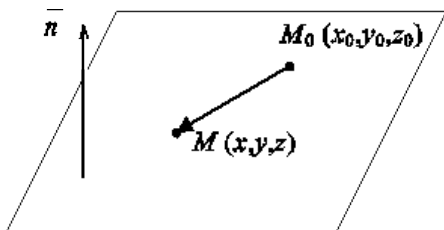
Նկ. 24

Խառն արտադրյալը օժտված է հետևյալ հատկությամբ.

$$[\vec{a}\vec{b}] \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot [\vec{b}\vec{c}]:$$

5. Հարթության հավասարումը

Ենթադրենք հարթության վրա տրված են որևէ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետ և այդ հարթությանը ուղղահայաց որևէ $\vec{n}\{A, B, C\}$ վեկտոր: $\vec{n}$ -ը կոչվում է հարթության նորմալ վեկտոր (Նկար 25):



Նկ. 25

Քանի որ $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, ապա վեկտորների ուղղահայացության պայմանից ստանում ենք

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0:$$

Բացելով փակագծերը և նշանակելով

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0,$$

ստանում ենք հարթության ընդհանուր հավասարումը.

$$Ax + By + Cz + D = 0:$$

Դիտարկենք մի քանի դեպքեր:

1. $D = 0$ դեպքում հարթությունը անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով,

2. $C = 0$ դեպքում հարթությունը զուգահեռ է Oz առանցքին,

3. $B = 0$ և $C = 0$ դեպքում հարթությունը զուգահեռ է Oyz կոորդինատային հարթությանը,

4. A, B, C, D գործակիցներից ոչ մեկը 0 չլինելու դեպքում հարթության հավասարումը կարելի է գրել

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1$$

տեսքով: Նշանակելով $\frac{-D}{A} = a, \frac{-D}{B} = b, \frac{-D}{C} = c$, կստանանք

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

որը կոչվում է հարթության հավասարում կտրած հատվածներով: a, b, c թվերը ցույց են տալիս կոորդինատային առանցքներից կտրված հատվածների մեծությունները:

Տրված $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ կետերով անցնող հարթության հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0:$$

Այն ստացվում է $\overrightarrow{M_1M}\{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_3}\{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$ վեկտորների համահարթությունից, որտեղ $M(x, y, z)$ -ը հարթության կամայական կետ է:

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետի հեռավորությունը $Ax + By + Cz + D = 0$ հարթությունից գտնում են հետևյալ բանաձևով.

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}:$$

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ հարթությունների փոխադարձ դիրքը կախված է այդ հարթությունների $\vec{n}_1\{A_1, B_1, C_1\}$ և $\vec{n}_2\{A_2, B_2, C_2\}$ նորմալ վեկտորների ուղղություններից: Օրինակ՝ հարթությունների զուգահեռության դեպքում $\vec{n}_1$ և $\vec{n}_2$ վեկտորները զուգահեռ են, իսկ ուղղահայացության դեպքում՝ ուղղահայաց:

6. Ուղիղը տարածության մեջ

Ուղիղը կարելի է ներկայացնել որպես երկու հարթությունների հատման գիծ.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Այս համակարգն ուղիղ գծի հավասարում է միայն այն դեպքում, երբ A_1, B_1, C_1 գործակիցները համեմատական չեն A_2, B_2, C_2 գործակիցներին:

Ենթադրենք՝ ուղղի վրա տրված են $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետը և $\vec{a}\{m, n, l\}$ վեկտորը, որը զուգահեռ է այդ ուղղին:

$\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ վեկտորը համագիծ է $\vec{a}\{m, n, l\}$ վեկտորին, հետևաբար $\overrightarrow{M_0M}$ վեկտորի կոորդինատները համեմատական են $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներին.

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{l}.$$

Վերջին առնչությունը կոչվում է ուղղի կանոնական հավասարում: Նշանակելով

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{l} = t,$$

կստանանք ուղղի պարամետրական հավասարումը.

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + lt \end{cases}$$

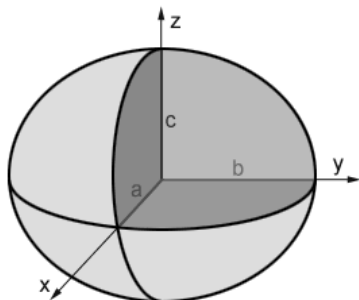
Ուղիղների և հարթությունների փոխադարձ դիրքի հետ կապված խնդիրները լուծվում են՝ համադրելով հարթությունների նորմալ վեկտորները և ուղիղների ուղղորդ վեկտորները:

13. Երկրորդ կարգի մակերևույթներ

ա) Էլիպսոիդ կոչվում է այն մակերևույթը, որը որոշվում է

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

հավասարումով (Նկար 26):



Նկ. 26

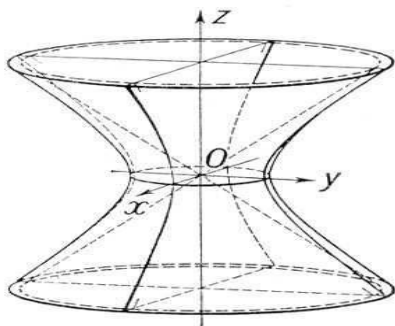
Էլիպսոիդի Oxy , Oxz կամ Oyz հարթություններին զուգահեռ հատույթները էլիպսներ են:

Եթե $b = c$, ապա էլիպսոիդը կոչվում է պտտման էլիպսոիդ, որովհետև այն ստացվում է $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ էլիպսը Ox առանցքի շուրջը պտտելիս:

բ) Միախոռոչ հիպերբոլոիդ է կոչվում այն մակերևույթը, որը որոշվում է

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

հավասարումով (Նկար 27):

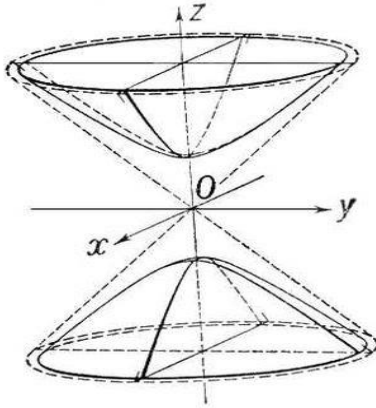


Նկ. 27

Երկխոռոչ հիպերբոլոիդ է կոչվում այն մակերևույթը, որը որոշվում է

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

հավասարումով (Նկար 28):



Նկ. 28

Oxz հարթությունով միախտոչ հիպերբոլոիդի հատույթը հիպերբոլ է, իսկ Oxy հարթությունով՝ էլիպս: Երկխտոչ հիպերբոլոիդի Oxz հարթությունով հատույթը հիպերբոլ է, իսկ $z = h (|h| > c)$ հարթությունով՝ էլիպս:

Խնդիրներ

1. $\vec{F}$ ուժը, տրված $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ վեկտորով, նյութական կետը շարժում է A (2, 1, 3) կետից B (4, 6, 2) կետ: Գտնել կատարված աշխատանքը:

2. Վաճառողը օրվա ընթացքում վաճառում է 20 հատ գաթա, 30 հատ բլիթ և 10 հատ կոլա: 1 գաթան արժե 100 դրամ, բլիթը՝ 80 դրամ, իսկ կոլան՝ 150 դրամ: Եթե $\vec{A} = \{20, 30, 10\}$ և $\vec{B} = \{100, 80, 150\}$, ապա ի՞նչ է նշանակում $\vec{A} \cdot \vec{B}$ սկալյար արտադրյալը:

3. Գտնել $A(1,4,6)$, $B(-2,5,-1)$ և $C(1,-1,1)$ գագաթներով եռանկյան մակերեսը:

4. Ապացուցել, որ $\bar{a} = \{1,4,-7\}$, $\bar{b} = \{2,-1,4\}$ և $\bar{c} = \{0,-9,18\}$ վեկտորները համահարթ են:

5. Երեք ուժեր՝ $\overline{F_1} = \{2,-3,4\}$, $\overline{F_2} = \{3,4,-1\}$, $\overline{F_3} = \{-1,-2,5\}$, կիրառված են մեկ կետում: Հաշվել այդ ուժերի կատարած ընդհանուր աշխատանքը, երբ կետը, շարժվելով ուղղաձիգ, տեղափոխվում է $A(3,4,-1)$ դիրքից $B(7,2,-4)$ դիրք:

6. Գտնել $A(5,0)$, $B(8,4)$, $C(2,12)$ գագաթներով

ա) եռանկյան պարագիծը, բ) A գագաթից տարված միջնագծի երկարությունը:

7. Տրված են $ABCD$ զուգահեռագծի $A(3,1)$, $B(4,3)$ և $C(5,9)$ գագաթները: Գտնել D գագաթի կոորդինատները:

8. Գտնել C և D կետերի կոորդինատները, եթե դրանք $A(9,2)$, $B(6,7)$ ծայրակետերով հատվածը բաժանում են երեք հավասար մասերի:

9. Տրված են $A(-3,2)$, $B(0,6)$ կետերը: Գտնել $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի կոորդինատները և երկարությունը:

10. Տրված են $A(4,-1)$ կետը և $\overrightarrow{AB} = \{5,-6\}$ վեկտորը: Գտնել B կետի կոորդինատները:

11. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների երկարություններ են՝ $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, իսկ կազմած անկյունը՝ 60° : Գտնել այդ վեկտորների սկալյար արտադրյալը:

12. Տրված են $\vec{a} = \{-5,6\}$ և $\vec{b} = \{-1,-4\}$ վեկտորները: Գտնել այդ վեկտորների սկալյար արտադրյալը:

13. Տրված են $\vec{a}\{-5,6,2\}$, $\vec{b}\{3,2,-4\}$ և $\vec{c}\{3,2,-4\}$ վեկտորները: Գտնել՝

ա) $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը,

բ) $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը,

գ) $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների խառն արտադրյալը:

14. Գտնել $\vec{a}\{-4,6\}$ և $\vec{b}\{3,2\}$ վեկտորների կազմած անկյունը:

15. Գտնել $\vec{a}\{4,3\}$ և $\vec{b}\{6,8\}$ վեկտորների կազմած անկյան կոսինուսը:

16. Տրված են ABC եռանկյան $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$ և $C(3,0,9)$ գագաթները: Գտնել ABC անկյունը:

17. Հետևյալ կետերից որո՞նք են պատկանում $2x - 3y + 4 = 0$ ուղղին. $A(3,1)$, $B(-2,0)$, $C(5,9)$, $D(1,2)$:

18. Գտնել $5x + 6y - 15 = 0$ և $9x - 2y - 27 = 0$ ուղիղների հատման կետը:

19. Գտնել $5x + 6y - 15 = 0$ ուղղի անկյունային գործակիցը և OY առանցքից կտրած հատվածի մեծությունը:

20. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(3,1)$ կետով, և որի անկյունային գործակիցն է $k = -\frac{1}{2}$:

21. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(2,-1)$ կետով և OX առանցքի հետ կազմում է 60° անկյուն:

22. Գտնել $A(4,1)$ և $B(-2,6)$ կետերով անցնող ուղղի անկյունային գործակիցը:

23. Կազմել $A(3,7)$ և $B(5,6)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:

24. Կազմել $A(5,0)$, $B(7,4)$, $C(3,0)$ գագաթներով եռանկյան A գագաթից տարված միջնագծի հավասարումը:

25. Գտնել ուղիղների կազմած անկյունը.

ա) $x + 4y - 15 = 0$ և $8x - 2y - 7 = 0$,

բ) $5x - y + 7 = 0$ և $3x + 2y = 0$,

գ) $x - 2y - 5 = 0$ և $2x - 4y + 7 = 0$:

26. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(-2,1)$ կետով և զուգահեռ է $2x - y - 5 = 0$ ուղղին:

27. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(-2,1)$ կետով և ուղղահայաց է $x - 2y + 4 = 0$ ուղղին:

28. Գտնել m թիվը, եթե հայտնի է, որ $mx - 2y + 5 = 0$ և $2x - 4y + 3 = 0$ ուղիղները

ա) զուգահեռ են, բ) ուղղահայաց են:

29. Գտնել $A(4, -1)$ կետի հեռավորությունը $3x - 4y + 3 = 0$ ուղղից:

30. Գտնել զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը.

ա) $x - 4y + 7 = 0, 3x - 12y + 4 = 0$,

բ) $3x - 4y + 9 = 0, 6x - 8y - 1 = 0$:

31. Կազմել այն շրջանագծի հավասարումը, որի շառավիղը 5 է, իսկ կենտրոնը գտնվում է $(-2,1)$ կետում:

32. Կազմել այն շրջանագծի հավասարումը, որի կենտրոնը $(2, -3)$ կետն է և անցնում է $(-4,0)$ կետով:

33. Կազմել էլիպսի հավասարումը, եթե նրա ֆոկուսները $(-2,0)$ և $(2,0)$ կետերն են, իսկ մեծ կիսաառանցքի երկարությունը՝ $\sqrt{5}$:

34. Կազմել էլիպսի հավասարումը, եթե նրա ֆոկուսները $(-4,0)$ և $(5,0)$ կետերն են, իսկ էքսցենտրիսիտետը՝ $\frac{4}{5}$:

35. Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, եթե նրա ֆոկուսները $(-13,0)$ և $(13,0)$ կետերն են, իսկ գագաթների միջև հեռավորությունը հավասար է 24-ի:

36. Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, եթե նրա ֆոկուսները $(-4,0)$ և $(4,0)$ կետերն են, իսկ գագաթներից մեկը $(1,0)$ կետն է:

37. Կազմել հարթության հավասարումը, եթե այն անցնում է $(2, -3, 5)$ կետով և ուղղահայաց է $\{3, 2, 1\}$ վեկտորին:

38. Տրված են $A(-3, 2, 1)$, $B(0, -4, 1)$ կետերը: Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է A կետով և ուղղահայաց է $\overrightarrow{AB}$ վեկտորին:

39. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $A(4, 0, 1)$, $B(0, -4, 1)$, $D(3, 2, 1)$ կետերով:

40. Գտնել m և n թվերը, եթե հայտնի է, որ $mx + 3y - 4z + 5 = 0$ և $2x - 6y + nz + 3 = 0$ հարթությունները զուգահեռ են:

41. Գտնել $A(-1, -2, 4)$ կետի հեռավորությունը $2x - 3y + 4z + 3 = 0$ հարթությունից:

42. Գտնել

$$2x + 3y - 4z + 5 = 0 \text{ և } 4x + 6y - 8z + 3 = 0$$

զուգահեռ հարթությունների հեռավորությունը:

43. Կազմել $A(-3, 2, 4)$, $B(1, -4, 1)$ կետերով անցնող ուղղի կանոնական և պարամետրական հավասարումները:

44. Գտնել հետևյալ ուղիղների կազմած անկյունը.

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}:$$

45. Գտնել հետևյալ հարթությունների կազմած անկյունը.

$$6x + 3y - 2z = 0, \quad x + 2y + 6z - 12 = 0:$$

46. Պատկերել տրված հավասարումով որոշվող մակերևույթը.

$$\text{ա) } z^2 = x^2 + y^2, \quad \text{բ) } z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9},$$

$$\text{գ) } z = x^2 + y^2, \quad \text{դ) } z = 4x^2 + 9y^2:$$

ԳԼՈՒԽ 3

Մաթեմատիկական անալիզ

Այս գլխում քննարկվում են մաթեմատիկական անալիզի հիմնական գաղափարները, դրանց առաջացման աղբյուրները և կիրառությունները:

1. Ֆունկցիայի գաղափարը: Ֆունկցիայի տրման եղանակները

Մեզ շրջապատող երևույթների քանակական հարաբերությունները դիտարկելիս անհրաժեշտություն է լինում գործունենալ տարբեր մեծությունների թվային արժեքների հետ, օրինակ՝ ժամանակի, ճանապարհի, արագության, ջերմաստիճանի, ծավալի, զնի, տարիքի, անկյան և այլն: Կախված դիտարկվող պայմաններից՝ մեծությունների մի մասն ունի հաստատուն թվային արժեքներ, իսկ մյուսների դեպքում այդ արժեքները փոփոխական են: Այդպիսի մեծություններն անվանում են համապատասխանաբար հաստատուններ և փոփոխականներ: Օրինակ՝ հավասարաչափ շարժման ժամանակ v արագությունը հաստատուն է, իսկ t ժամանակը և s ճանապարհը փոփոխականներ են, ընդ որում $s = vt$:

Բնության երևույթների ուսումնասիրությունը ցույց է տալիս, որ փոփոխական մեծությունները կախված են այլ փոփոխական մեծություններից. նրանցից մեկի թվային արժեքների փոփոխությունը բերում է մյուսի արժեքների փոփոխության:

Դիտարկենք փոփոխականների զույգեր, որոնցից մեկի արժեքները (կախյալ) փոփոխվում են կախված երկրորդի արժեքներից (անկախ): Բերված օրինակում բնական է t -ն համարել անկախ փոփոխական, s -ը՝ կախյալ, v -ն՝ հաստատուն:

Անկախ փոփոխականն անվանում են նաև արգումենտ, իսկ կախյալ փոփոխականը՝ ֆունկցիա: Ուրեմն, կարելի է ասել, որ s -ը t -ից ֆունկցիա է:

Բերենք ուրիշ օրինակներ:

1) Շրջանի S մակերեսը շառավղից կախված ֆունկցիա է.
 $S = \pi r^2$:

2) Ինչ-որ քանակի գազի V ծավալը այդ գազի p ճնշումից կախված ֆունկցիա է.

$$V = \frac{c}{p}$$

(c -ն հաստատուն է):

3) Տրված c ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյան a էջի երկարությունը այդ էջի դիմացի α անկյունից կախված ֆունկցիա է $a = c \cdot \cos \alpha$:

4) Երկրագնդի բնակչության քանակը ժամանակից կախված ֆունկցիա է:

5) Քաղաքի օդի մաքրությունը քաղաքում երթևեկող մեքենաների քանակից կախված ֆունկցիա է:

Բացատրենք **ֆունկցիայի** գաղափարը:

Ենթադրենք՝ տրված է թվերի X բազմություն, և ինչ-որ որոշակի f օրենքի շնորհիվ X բազմությանը պատկանող յուրաքանչյուր x թվի համապատասխանեցված է մեկ որոշակի y թիվ: Այդ դեպքում ասում են, որ X -ի վրա տրված է f ֆունկցիա: X բազմությունն անվանում են f ֆունկցիայի որոշման տիրույթ: y կախյալ փոփոխականի բոլոր արժեքների բազմությունն անվանում են f ֆունկցիայի արժեքների տիրույթ:

Այսպիսով, որպեսզի տրվի ֆունկցիա, պետք է նշել միջոց (օրենք, կանոն), որի միջոցով արգումենտի յուրաքանչյուր $x \in$

X արժեքի համար կարելի է գտնել y -ի համապատասխան արժեք: Մովորաբար այդ օրենքը նշանակում են մեկ տառով, օրինակ՝ f -ով, և գրում են՝ $y = f(x)$:

Ֆունկցիայի գաղափարը և ֆունկցիայի տրման տարբեր եղանակները բնագիտության մեջ օգտագործվել և օգտագործվում են շատ հաճախ: Ֆունկցիայի տրման հիմնական եղանակներն են՝ **բանաձևային, գրաֆիկական և աղյուսակային**:

Բերենք բանաձևով տրված ֆունկցիաների օրինակներ:

1) Ենթադրենք՝ յուրաքանչյուր x իրական թվի համապատասխանության մեջ է դրված x -ի հավասար y թիվը: Այդ համապատասխանությամբ տրված է $R = (-\infty, +\infty)$ որոշման տիրույթով $y = x$ ֆունկցիան:

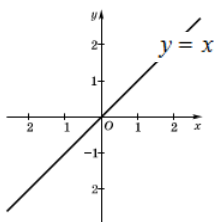
2) Ենթադրենք՝ յուրաքանչյուր x իրական թվի համապատասխանության մեջ է դրված x^2 -ուն հավասար y թիվը: Այդ համապատասխանությամբ տրված է R որոշման տիրույթով $y = x^2$ ֆունկցիան:

3) Ենթադրենք՝ զրոյից տարբեր յուրաքանչյուր x իրական թվի համապատասխանության մեջ է դրված $\frac{1}{x}$ -ի հավասար y թիվը: Այդ համապատասխանությամբ տրված է $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիան, որի որոշման տիրույթը 0 -ից տարբեր իրական թվերի բազմությունն է: $1-3$ օրինակներում ֆունկցիաները տրված են $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ բանաձևերով: Ֆունկցիան կարելի է տալ նաև գրաֆիկով: Բանաձևով տրված յուրաքանչյուր ֆունկցիա դեկարտյան կոորդինատային համակարգում ունի իր գրաֆիկը:

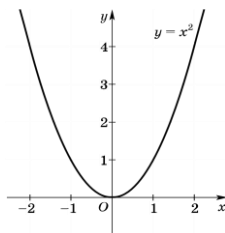
Ֆունկցիայի գրաֆիկ անվանում են կոորդինատային հարթության $(x, f(x))$ տեսքի բոլոր կետերի բազմությունը, որտեղ

x -ը ֆունկցիայի որոշման տիրույթին պատկանող կամայական թիվ է:

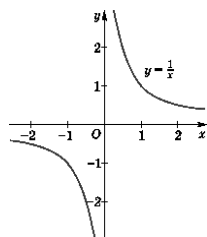
29-31 նկարներում պատկերված են $y = x$ (ուղիղ գիծ, Նկար 29), $y = x^2$, (պարաբոլ, Նկար 30), $y = \frac{1}{x}$ (հիպերբոլ, Նկար 31) ֆունկցիաների գրաֆիկները:



Նկ. 29



Նկ. 30



Նկ. 31

Տարրական ֆունկցիաների գրաֆիկները բերված են Հավելված 1-ում:

Ֆունկցիայի տրման աղյուսակային եղանակը բավականին պարզ է: Աղյուսակի մի տողում գրվում են արգումենտի արժեքները, իսկ մյուսում՝ ֆունկցիայի համապատասխան արժեքները:

Օրինակ 1. Աղյուսակում F -ը ջերմաստիճանի արժեքն է Ֆարենհայթի սանդղակով, իսկ C -ն՝ Ցելսիուսի:

C	-9,4	-3,9	1,7	7,2	12,8	18,3	23,9	29,4	35,0
F	15	25	35	45	55	65	75	85	95

Աղյուսակում տրված են F -ի և C -ի համապատասխան որոշ արժեքներ: Այսինքն՝ F -ը C -ից ֆունկցիան տրված է աղյուսակով: Եթե ջերմաստիճանի արժեքները ըստ Ցելսիուսի նշենք աբսցիսների առանցքի վրա, իսկ ըստ Ֆարենհայթի՝

օրդինատների առանցքի վրա, ապա կստանանք գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիա:

Ոչ բոլոր դեպքերում է հաջողվում գրաֆիկորեն կամ աղյուսակով տրված ֆունկցիան տալ բանաձևով: Տվյալ դեպքում աղյուսակով տրված ֆունկցիան կարելի է տալ նաև բանաձևով՝ $F = 1,8C + 32$:

Օրինակ 2. Դիցուք օդի օրվա T ջերմաստիճանի (ըստ Ցելսիուսի) կախումը t ժամանակից տրված է հետևյալ աղյուսակով.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
T	10	11	12	13	14	15	14	13	12	11	10	9

Աղյուսակով ներկայացված է $T(t)$ ֆունկցիան: Այս եղանակով տրված ֆունկցիաները բանաձևով տալը դժվար է, երբեմն նաև՝ անհնար և ոչ էֆեկտիվ:

Աղյուսակային կախումները ստացվում են փորձնական տվյալների հիման վրա: Աղյուսակով կարելի է գտնել միայն ֆունկցիայի այն արժեքները, որոնք կան աղյուսակում: Բացի դրանից՝ այս եղանակը բավարար ինֆորմացիա չի տալիս ֆունկցիայի վարքի մասին: Սակայն անհրաժեշտ է լինում գտնել ֆունկցիայի այն արժեքները, որոնք աղյուսակում չկան:

Գրաֆիկական եղանակը նշված թերությունները չունի, բայց ունի իր թերությունը: Եթե ֆունկցիան բանաձևով տրված չէ, ապա առաջանում են երևույթի ուսումնասիրման դժվարություններ՝ կապված ֆունկցիայի հետ մաթեմատիկական գործողություններ կատարելու հետ: Օրինակ՝ երևույթի փոփոխման արագությունը ուսումնասիրելու համար անհրաժեշտ է լինում այդ երևույթը նկարագրող ֆունկցիան դիֆերենցել կամ

ինտեգրել: Այսպիսով, շատ դեպքերում ֆունկցիան անհրաժեշտ է լինում իմանալ բանաձևային տեսքով:

Կիրառություններում հաճախ են նաև այնպիսի իրադրություններ, երբ ուսումնասիրվող երևույթի վրա միաժամանակ ազդում են մի շարք պատճառներ: Այդ դեպքերում դիտարկում են մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաներ:

Օդի T միջին ջերմաստիճանը կախված է կլիմայից (k), աշխարհագրական դիրքից (α), ծովի մակարդակից համապատասխան բարձրությունից (h), ծովերի և օվկիանոսների մոտիկությունից (s), ժամանակից (t): Չանդրադառնալով, թե այդ փոփոխականներից որն ինչպես է ազդում ջերմաստիճանի ձևավորման վրա՝ մենք կարող ենք գրել՝ $T = f(k, \alpha, s, h, t)$:

Տնտեսագիտության մեջ պահանջարկն (P) ապրանքի այն քանակությունն է, որ տվյալ պայմաններում գնորդները ցանկություն և հնարավորություն ունեն գնելու միավոր ժամանակում: Ապրանքի պահանջարկը կախված է գնից (m), սպառողների միջին եկամտից (e), շուկայի ծավալից (v), փոխառնչվող ապրանքների գներից (d): Այսինքն՝ առկա է $P = g(m, e, v, d)$ ֆունկցիան:

2. Հաջորդականության և ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը:

Անընդհատ աճի բանաձևը: Թվային շարքեր: Ֆունկցիայի անընդհատությունը

Եթե յուրաքանչյուր n բնական թվին ինչ-որ օրենքով համապատասխանեցված է x_n թիվը, ապա ասում են, որ տրված է x_n թվային հաջորդականությունը:

α_n թվային հաջորդականությունն անվանում են անվերջ փոքր, եթե n -ի անվերջ աճելու դեպքում այն ձգտում է զրոյի ($\alpha_n \rightarrow 0$):

Օրինակ 1. Հետևյալ հաջորդականությունները անվերջ փոքր են.

$$\text{ա) } \alpha_n = \frac{1}{n} \quad \text{բ) } \alpha_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{գ) } \alpha_n = \frac{\sin n}{n};$$

Բերենք **հաջորդականության սահմանի** սահմանումը: Դիցուք տրված է x_n թվային հաջորդականությունը: Եթե x_n -ը կարելի է գրել $x_n = a + \alpha_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) գումարի տեսքով, որտեղ a -ն ինչ-որ թիվ է, α_n -ը՝ անվերջ փոքր, ապա ասում են, որ x_n -ի սահմանը a -ն է կամ x_n -ը ձգտում է a -ի, և այդ փաստը գրում են այսպես. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ կամ $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$):

Եթե α_n -ը անվերջ փոքր է, ապա նրա սահմանը հավասար է զրոյի՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$:

Օրինակ 2. ա) $\lim_{n \rightarrow \infty} a = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + \alpha_n) = a$ ($\alpha_n = 0$),

բ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$,

գ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2(2n^2 + 1)}\right) = \frac{3}{2}$:

x_n հաջորդականությունը կոչվում է վերևից սահմանափակ M թվով, եթե $x_n \leq M$ անհավասարությունը տեղի ունի բոլոր n -երի համար: x_n հաջորդականությունը կոչվում է ներքևից սահմանափակ m թվով, եթե $x_n \geq m$ անհավասարությունը տեղի ունի բոլոր n -երի համար: x_n հաջորդականությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե այն սահմանափակ է ն՝ վերևից, և՛ ներքևից:

x_n հաջորդականությունը կոչվում է **աճող**, եթե ցանկացած n -ի համար $x_n < x_{n+1}$, և **նվազող**, եթե ցանկացած n -ի համար $x_n > x_{n+1}$:

x_n հաջորդականությունը կոչվում է **չնվազող**, եթե ցանկացած n -ի համար $x_n \leq x_{n+1}$, և **չաճող**, եթե ցանկացած n -ի համար $x_n \geq x_{n+1}$:

Եթե x_n հաջորդականությունը չնվազող է և վերնից սահմանափակ կամ չաճող է և ներքևից սահմանափակ, ապա այն ունի սահման:

Օրինակ՝ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ հաջորդականությունը չնվազող է և վերնից սահմանափակ, հետևաբար ունի սահման: Այդ սահմանը նշանակում են e -ով.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (e \approx 2,718):$$

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է x_0 կետի շրջակայքում, բացառությամբ գուցե x_0 կետի: A թիվն անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի սահման x_0 կետում և գրում են՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$$

եթե ցանկացած x_n հաջորդականության համար, որը բավարարում է $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ և $x_n \neq x_0$ պայմաններին, տեղի ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

սահմանային առնչությունը:

Հաճախ օգտագործվում են հետևյալ սահմանները.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1:$$

Օրինակ 3. Դիցուք a դրամագլուխը տարեկան p տոկոսով հանձնված է ավանդ t տարի ժամկետով, և վերահաշվարկը կատարվում է տարեկան n անգամ:

Առաջին վերահաշվարկից հետո գումարը կկազմի՝

$$a + \frac{ap}{100n} = a \left(1 + \frac{p}{100n}\right),$$

երկրորդ վերահաշվարկից հետո՝

$$a\left(1 + \frac{p}{100n}\right) + \frac{ap}{100n}\left(1 + \frac{p}{100n}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^2.$$

t տարի հետո գումարը կդառնա

$$a_n = a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt};$$

Իհարկե ավելի շահավետ է, երբ վերահաշվարկների քանակը մեծ է: Մաթեմատիկոսներն դա նշանակում է, $n \rightarrow \infty$, այսինքն՝ պետք է հաշվել

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt}$$

սահմանը:

Քանի որ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

հետևաբար

$$A = a \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}} \right]^{\frac{pt}{100}} = ae^{\frac{pt}{100}}:$$

Թվում է, թե երբ վերահաշվարկների քանակը մեծանում է, ապա ավանդի չափը անվերջ մեծանում է, սակայն ստացված արդյունքը ցույց է տալիս, որ իհարկե a_n հաջորդականությունը աճող է, բայց $A = ae^{\frac{pt}{100}}$ թվից ավելի լինել չի կարող:

Օրինակ 4. Դիցուք ավանդ հանձնված դրամագլխից կատարվում են n հավասար վճարումներ ամսական R գումարի չափով: Բանկը գումարն ընդունում է ամսական p տոկոս

շահադրույքով: Գտնենք, թե գործարքի սկզբում ինչքան v գումար պետք է ունենալ հաշվին, որպեսզի հնարավոր լինի կատարել բոլոր վճարումները:

Քանի որ ամսական վճարվում է միևնույն R գումարը, ուստի $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, և

$$R = v_n \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n :$$

Հետևաբար՝

$$v = R \left(1 + \frac{p}{100} \right)^{-1} + R \left(1 + \frac{p}{100} \right)^{-2} + \dots + R \left(1 + \frac{p}{100} \right)^{-n} :$$

Այս գումարը հաշվելու համար նշանակենք $\left(1 + \frac{p}{100} \right)^{-1} = q$ և օգտվենք երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևից.

$$\begin{aligned} v &= R(q + q^2 + \dots + q^n) = R \frac{q(1 - q^n)}{1 - q} = \\ &= R \frac{\left(1 + \frac{p}{100} \right)^{-1} \left(1 - \left(1 + \frac{p}{100} \right)^{-n} \right)}{1 - \left(1 + \frac{p}{100} \right)^{-1}} = 100R \frac{1 - \left(1 + \frac{p}{100} \right)^{-n}}{p} : \end{aligned}$$

Այսպիսով՝

$$v = 100R \frac{1 - \left(1 + \frac{p}{100} \right)^{-n}}{p} :$$

Եթե n -ը մեծացնենք, ապա v -ն մեծանում է, և $v \rightarrow \frac{100R}{p}$:
 Հետևաբար մեծ թվով վճարումների դեպքում սկզբնական
 պահին հաշվին պետք է ունենալ $\frac{100R}{p}$ գումար:

1. Թվային շարքեր

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

շարքն անվանում են **գումգամետ**, եթե նրա մասնակի գումար-
 ների

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման: S_n հաջորդա-
 կանության սահմանն անվանում են շարքի գումար՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S:$$

Եթե շարքը գումգամետ չէ, ապա այն կոչվում է տարամետ
 շարք:

Օրինակ 5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \dots = \frac{q}{1-q}$$

շարքը գումգամետ է, երբ $|q| < 1$, և տարամետ է, երբ $|q| > 1$,
 որովհետև այդ շարքի մասնակի գումարների S_n հաջորդակա-
 նությունը վերջավոր երկրաչափական պրոգրեսիայի գումար է՝

$$S_n = \sum_{k=1}^n q^k = q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q(1-q^n)}{1-q},$$

և

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{q}{1 - q}, \text{ երբ } |q| < 1:$$

Երբ $|q| \geq 1$, ապա S_n -ը վերջավոր սահման չունի:

Եթե շարքը զուգամետ է, ապա նրա a_n ընդհանուր անդամը ձգտում է 0-ի, որովհետև $a_n = S_n - S_{n-1}$: Հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

շարքը, որը կոչվում է հարմոնիկ, տարամետ է, բայց նրա ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի: Հարմոնիկ շարքի տարամետության հետևյալ ապացույցը տրվել է ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ն. Օրեսմի կողմից 14-րդ դարում.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \dots > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \dots \\ &= \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty: \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ շարքը զուգամետ է, որովհետև}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \\ &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots \end{aligned}$$

$$1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots < 2:$$

Դրական շարքերի զուգամիտությունը կամ տարամիտությունը որոշելու համար օգտագործում են բաղդատման հետևյալ երեք հայտանիշները:

Եթե $0 \leq a_n \leq b_n$, ապա

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքի զուգամիտությունից բխում է

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի զուգամիտությունը,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի տարամիտությունից բխում է

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքի տարամիտությունը,

3) Եթե $a_n \sim b_n$, այսինքն՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, ապա

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ և } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

շարքերը զուգամետ կամ տարամետ են միաժամանակ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots$$

շարքը զուգամետ է, երբ $\alpha > 1$, և տարամետ է, երբ $\alpha \leq 1$:

Խնդիր. Ենթադրենք՝ Սևանա լճից բաժակով ջուր ենք հանում հետևյալ երկու եղանակներով.

ա) Սկզբում՝ $\frac{1}{2}$ բաժակ, հետո՝ $\frac{1}{4}$ բաժակ, այնուհետև՝ յուրաքանչյուր հաջորդ քայլում նախորդ քայլում հանած ջրի կեսը:

բ) Սկզբում՝ $\frac{1}{2}$ բաժակ, հետո՝ $\frac{1}{3}$ բաժակ, n -րդ քայլում՝ $\frac{1}{n}$ բաժակ:

գ) Սկզբում՝ 1 բաժակ, հետո՝ $\frac{1}{4}$ բաժակ, n -րդ քայլում՝ $\frac{1}{n^2}$ բաժակ:

Ո՞ր դեպքում է հնարավոր Սևանա լիճը դատարկել:

Լուծում. ա) դեպքում հնարավոր չէ, որովհետև, ըստ օրինակ 5-ի,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots$$

շարքը զուգամետ է, և

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1,$$

այսինքն՝ վերջավոր ժամանակում նույնիսկ մեկ բաժակ ջուր հնարավոր չէ հանել:

բ) դեպքում հնարավոր է, որովհետև

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = +\infty$$

գ) դեպքում հնարավոր չէ, որովհետև

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

շարքը զուգամետ է:

2. Անընդհատ ֆունկցիաներ

Եթե ֆունկցիայի գրաֆիկը ինչ-որ միջակայքում անընդհատ կոր է, ապա ֆունկցիան անվանում են **անընդհատ** այդ միջակայքում: Կարելի է նաև ասել այսպես. ֆունկցիան միջակայքում կոչվում է անընդհատ, եթե արգումենտի փոքր փոփո-

խությանը համապատասխանում է ֆունկցիայի փոքր փոփոխություն:

Բերենք օրինակներ.

$$y = x, y = x^2, y = \frac{1}{x}:$$

1) $y = x$ ֆունկցիան անընդհատ է R -ում,

2) $y = x^2$ ֆունկցիան անընդհատ է R -ում,

3) $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիան անընդհատ է ինչպես $(-\infty, 0)$ միջակայքում, այնպես էլ $(0, +\infty)$ միջակայքում: $x = 0$ կետում այն սահմանված չէ, այդ պատճառով նրա գրաֆիկը տրոհվում է երկու ճյուղի:

Հիմնական տարրական ֆունկցիաները անընդհատ են: Օրինակ.

ա) բազմանդամները,

բ) աստիճանային ֆունկցիաները,

գ) ցուցային ֆունկցիաները,

դ) եռանկյունաչափական ֆունկցիաները:

Անընդհատ են նաև դրանց հակադարձ ֆունկցիաները և համադրությունները:

Բնության մեջ կան շատ երևույթներ, որոնց բնութագրող ֆունկցիաները անընդհատ չեն: Մաթեմատիկական ապարատ կիրառելու համար հաճախ այդ ֆունկցիաները փոխարինվում են մոդելային անընդհատ ֆունկցիաներով, և դրանք ուսումնասիրելուց հետո կատարվում են հետևություններ սկզբնական ֆունկցիաների վերաբերյալ:

Բերենք ոչ անընդհատ (խզվող) ֆունկցիաների օրինակներ:

Օրինակ 6. Անկում կատարող մարմնի արագությունը ժամանակից կախված անընդհատ ֆունկցիա է, սակայն գետնին

ընկնելու պահին կարելի է համարել, որ այն ակնթարթորեն դառնում է զրո, այսինքն՝ արագությունը խզվում է:

Օրինակ 7. Դիտարկենք բջիջ, որը կարող է գրգռվել դրսի ազդակներից, օրինակ՝ նյարդային կամ մկանային բջիջները և այլն: Դիցուք բջիջը ժամանակի t_0 պահին ստանում է ազդակ: $[t_0, t_1]$ -ը ազդակ ընդունելու միջակայքն է: t_1 պահին բջիջը գրգռվում է մինչև մաքսիմալ արժեքը, իսկ այնուհետև գրգռվածությունը աստիճանաբար փոքրանում է մինչև նոր ազդակ ստանալու պահը: Եթե բավականին երկար ժամանակ ազդակ չկա, ապա գրգռվածությունը դառնում է հավասար զրոյի: Ազդակ ստանալու t_0 պահը բջջի գրգռվածությունը նկարագրող ֆունկցիայի խզման կետն է:

Օրինակ 8. Տնտեսագիտության մեջ հաճախ են հանդիպում խզվող ֆունկցիաներ: Էլեկտրաէներգիայի խնայողության խթանման համար սահմանում են երկու տարբեր սակագներ: Ենթադրենք ժամը 0^{00} -ից մինչև առավոտյան 8^{00} -ն ծախսված էլեկտրաէներգիայի 1 կվտ/ժ-ը արժե d դրամ, իսկ ժամը 8^{00} -ից մինչև 24^{00} -ն էլեկտրաէներգիայի սակագինն ավելանում է p դրամով՝ դառնալով $d + p$ դրամ: Այսպիսով, եթե y -ը ծախսած էլեկտրաէներգիայի արժեքն է դրամով, իսկ x_t -ն t ժամում (0^{00} ժամից սկսած) ծախսված էլեկտրաէներգիայի քանակն է կվտ/ժ-ով, ապա

$$y = \begin{cases} d x_t, & 0 < t \leq 8 \\ d x_t + p(x_t - x_8), & 8 < t \leq 24 \end{cases} :$$

Այս ֆունկցիան խզվող է, ունի թռիչք, երբ $t = 8$:

3. Ածանցյալ: Ածանցյալի մեխանիկական և երկրաչափական իմաստները

Քննարկենք երեք կարևոր կիրառական գաղափար:

1. Ակնթարթային արագությունը

Դիցուք նյութական կետը կատարում է ուղղագիծ շարժում $s(t) = 4t^2$ օրենքով, որտեղ s -ը $t(t \geq 0)$ ժամանակում կետի անցած ճանապարհն է: Ճանապարհը, ժամանակը և արագությունը չափվում են համապատասխանաբար մետրերով, վայրկյաններով և վայրկյանում մետրերով:

Նախ հաշվենք այդ կետի միջին արագությունը $t_1 = 2$ -ից $t_2 = 5$ ժամանակահատվածում: $t_1 = 2$ վայրկյանում կետի անցած ճանապարհը հավասար է $s(2) = 4 \cdot 2^2 = 16$, իսկ $t_2 = 5$ վայրկյանում կետի անցած ճանապարհը հավասար է $s(5) = 4 \cdot 5^2 = 100$: Հետևաբար՝ $t_1 = 2$ -ից $t_2 = 5$ ժամանակահատվածում կետի անցած ճանապարհը հավասար է

$$s(5) - s(2) = 100 - 16 = 84:$$

Կետի միջին արագությունը $t_1 = 2$ -ից $t_2 = 5$ ժամանակահատվածում հավասար է

$$V_{\text{միջ}} = \frac{s(5)-s(2)}{5-2} = \frac{84}{3} = 28:$$

Այժմ հաշվենք այդ կետի միջին արագությունը t -ից $t + \Delta t$ ժամանակահատվածում: t վայրկյանում կետի անցած ճանապարհը հավասար է $s(t) = 4t^2$, իսկ $t + \Delta t$ ժամանակում՝ $s(t + \Delta t) = 4(t + \Delta t)^2$: Հետևաբար՝ t -ից $t + \Delta t$ ժամանակահատվածում կետի անցած ճանապարհը հավասար է

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = 4(t + \Delta t)^2 - 4t^2 = (8t + 4\Delta t)\Delta t :$$

Կետի միջին արագությունը t -ից $t+\Delta t$ ժամանակահատվածում հավասար է

$$V_{\text{միջ.}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(8t + 4\Delta t)\Delta t}{\Delta t} = 8t + 4\Delta t$$

Այսպիսով, $V_{\text{միջ.}}$ միջին արագությունը երկու գումարելիների գումար է: Դրանցից առաջինը կախված չէ Δt -ից, իսկ երկրորդը կախված է, ընդ որում փոքր Δt -երի համար այն առաջինի համեմատ փոքր է:

Հետևաբար, կարելի է համարել, որ փոքր Δt -երի համար $V_{\text{միջ.}}$ միջին արագությունը մոտավորապես հավասար է $8t$ թվին, այսինքն՝ $V_{\text{միջ.}}=8t$:

Ակնհայտ է, որ $8t$ թիվը այն սահմանն է, որին ձգտում է $V_{\text{միջ.}}$ -ը, երբ $\Delta t \rightarrow 0$: Այդ սահմանն անվանում են $s(t) = 4t^2$ օբեկտը շարժվող կետի ակնթարթային արագություն ժամանակի t պահին:

Ընդհանուր դեպքում, եթե կետը կատարում է ուղղագիծ շարժում $s(t) = f(t)$ օբեկտը, ապա կետի **v ակնթարթային արագություն** ժամանակի t պահին անվանում են ժամանակի $[t, t + \Delta t]$ միջակայքում միջին արագության սահմանը (եթե այն գոյություն ունի), երբ $\Delta t \rightarrow 0$.

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{\text{միջ.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}:$$

Δt մեծությունն անվանում են ժամանակի աճ, իսկ $\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$ մեծությունը՝ ճանապարհի աճ: Այլ կերպ ասած՝ շարժվող կետի ակնթարթային արագությունը ժամանակի t պահին անվանում են ճանապարհի աճի և ժամանակի աճի հարաբերության սահմանը (եթե այն գոյություն ունի), երբ ժամանակի աճը ձգտում է զրոյի. $V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$:

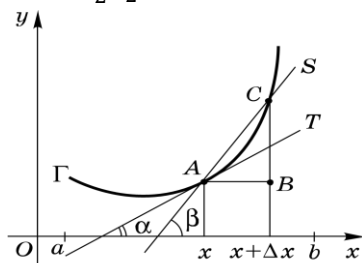
2. Կորին տարված շոշափողը

Դիցուք Γ կորը (a, b) միջակայքում $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն է (նկ. 32 կամ նկ. 33): Կորի վրա դիտարկենք x արգսիս և y օրդինատ ունեցող A կետը և $x + \Delta x$ արգսիս և համապատասխան $y + \Delta y = f(x) + \Delta f$ օրդինատ ունեցող C կետը, որտեղ

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x):$$

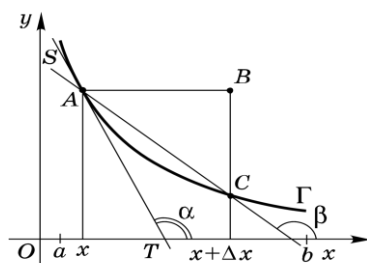
A և C կետերով անցնող հատողը Ox առանցքի դրական ուղղության հետ կազմում է β անկյուն (ուղղի և Ox առանցքի կազմած անկյունը հաշվվում է Ox առանցքից՝ ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ): Նկարներ 32-ում և 33-ում՝

$0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ համապատասխանաբար:



$$\Delta x = AB, \Delta y = BC$$

Նկ. 32



$$\Delta x = AB, \Delta y = -BC$$

Նկ. 33

32 և 33 նկարներից երևում է, որ

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}:$$

Δx -ը ձգտեցնենք զրոյի: Այդ դեպքում $y = f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ Δy -ը նույնպես կձգտի զրոյի, և C կետը, շարժվելով Γ կորի երկայնքով, կձգտի A կետին: Եթե

պարզվի, որ (այդ պահը կարող է չլինել), անկախ Δx -ի զրոյի ձգտելու ձևից, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ հարաբերությունը ձգտում է միևնույն k սահմանին՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow k (\Delta x \rightarrow 0),$$

ապա β անկյունը կձգտի ինչ-որ $\frac{\pi}{2}$ -ից տարբեր α անկյան: β -ի հետ S հաստողը, պտտվելով A կետի շուրջը, ձգտելու է սահմանում գրավել T ուղղի դիրքը, որն α անկյան տակ (Ox առանցքի դրական ուղղության նկատմամբ) անցնում է A կետով: Բայց այդ դեպքում T ուղիղը կլինի Γ կորին A կետում տարված շոշափողը, և

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha :$$

32 և 33 նկարներում՝ համապատասխանաբար $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ և $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$:

Մենք ցույց տվեցինք, որ եթե Δx -ը զրոյի ձգտելիս $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ հարաբերությունը ձգտում է վերջավոր սահմանի, ապա Γ կորը A կետում ունի շոշափող, որի և Ox առանցքի դրական ուղղության կազմած անկյան տանգենսը հավասար է այդ սահմանին:

3. Հոսանքի միջին ուժը

Դիցուք հայտնի է $Q = f(t)$ ֆունկցիան, որն արտահայտում է t ժամանակում հաղորդալարի որոշակի հատույթով անցած էներգիայի քանակը: $t + \Delta t$ ժամանակում հատույթով անցնում է $\Delta Q = f(t + \Delta t) - f(t)$ էներգիայի քանակություն: Հոսանքի միջին ուժը այդ ընթացքում հավասար է.

$$I_{\text{միջ}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Այս հարաբերության սահմանը, երբ $\Delta t \rightarrow 0$, հոսանքի ուժն է ժամանակի t պահին՝

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Այժմ դիտարկենք x կետի շրջակայքում որոշված $y = f(x)$ ֆունկցիան: Այդ շրջակայքում ընտրենք x -ից Δx -ով տարբերվող $x + \Delta x$ կետը (թիվը): Հիշեցնենք, որ Δx թիվն անվանում են արգումենտի աճ, իսկ $x + \Delta x$ և Δx կետերում ֆունկցիայի արժեքների տարբերությունը՝ ֆունկցիայի աճ: x կետում $y = f(x)$ ֆունկցիայի աճը նշանակում են Δf կամ Δy .

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x):$$

Օրինակ 1. Ցանկացած x կետում արգումենտի Δx աճին համապատասխանող $f(x) = 3x + 2$ ֆունկցիայի աճը հավասար է՝

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (3(x + \Delta x) + 2) - (3x + 2) = 3\Delta x:$$

Օրինակ 2. Ցանկացած x կետում արգումենտի Δx աճին համապատասխանող $f(x) = x^2$ ֆունկցիայի աճը հավասար է՝

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = (2x + \Delta x)\Delta x:$$

Մենք դիտարկեցինք երեք խնդիր (ակնթարթային արագության, ֆունկցիայի գրաֆիկին տարված շոշափողի և Ox առանցքի հետ կազմած անկյան տանգենսի, հոսանքի ուժի): Չնայած այդ խնդիրները վերաբերում են գիտության տարբեր ճյուղերի՝ մեխանիկային, երկրաչափությանը, էլեկտրականության տեսությանը, դրանց լուծումը մեզ բերեց մաթեմատիկական միևնույն գործողությանը, որը պետք է կատարել ֆունկցիայի հետ: Բոլոր խնդիրներում պետք էր գտնել ֆունկցիայի

աճի և արգումենտի աճի հարաբերության սահմանը, երբ արգումենտի աճը ձգտում էր զրոյի: Նույն գործողությանը բերող խնդիրների քանակը կարելի է շատացնել: Այդ տիպի խնդիրներ են, օրինակ, քիմիական ռեակցիայի արագության, զանգվածի բաշխվածության, աշխատանքի արտադրողականության խնդիրները և այլն:

Մաթեմատիկայում այդ գործողությունը ստացել է հատուկ անվանում՝ ֆունկցիայի **դիֆերենցում կամ ածանցում**: Այդ գործողության արդյունքը անվանում են ածանցյալ:

(a, b) միջակայքում որոշված $y = f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ այդ միջակայքի x կետում անվանում են այդ կետում ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերության սահմանը, երբ արգումենտի աճը ձգտում է զրոյի:

$f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը նշանակում են $f'(x)$: Հետևաբար

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}:$$

Տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները և ածանցման կանոնները բերված են Հավելված 2-ում:

Բերված խնդիրներից հետևում է, որ ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները.

1. Եթե ուղղագիծ շարժման դեպքում կետի անցած ճանապարհը t ժամանակից ֆունկցիա է, այսինքն՝ $s = f(t)$, ապա կետի արագությունը ճանապարհի ածանցյալն է ըստ ժամանակի՝ $v(t) = f'(t)$:

Այս փաստն արտահայտում է ածանցյալի **մեխանիկական իմաստը**:

2. Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին x_0 կետում տարված է շոշափող, ապա $f'(x_0)$ թիվը այդ շոշափողի և Ox

առանցքի դրական ուղղության կազմած α անկյան տանգենսն է, այսինքն՝ $f'(x_0) = tg\alpha$: Այդ անկյունն անվանում են շոշափողի թեքության անկյուն:

Այս փաստն արտահայտում է **ածանցյալի երկրաչափական իմաստը**:

3. Եթե $Q = f(t)$ ֆունկցիան արտահայտում է t ժամանակում հաղորդարի որոշակի հատույթով անցած էներգիայի քանակը, ապա հոսանքի ուժն այդ ֆունկցիայի ածանցյալն է ըստ ժամանակի՝ $I(t) = Q'(t)$:

Դիտարկենք ևս մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 3. Դիցուք $q = q(t)$ -ն ժամանակի t պահին քիմիական ռեակցիայի մեջ մտած նյութի քանակությունն է: Ժամանակի Δt աճին համապատասխանում է q մեծության Δq աճը:

$\frac{\Delta q}{\Delta t}$ հարաբերությունը Δt ժամանակահատվածում քիմիական ռեակցիայի միջին արագությունն է: Այդ հարաբերության սահմանը, այսինքն՝ $q = q(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալը, քիմիական ռեակցիայի արագությունն է ժամանակի t պահին:

Օրինակ 4. Դիցուք $p = p(t)$ -ն ժամանակի t պահին պոպուլյացիայի անդամների քանակն է: Այդ դեպքում $p'(t)$ ածանցյալը պոպուլյացիայի աճի արագությունն է ժամանակի t պահին:

Օրինակ 5. Դիցուք բանվորը մինչև ժամանակի t պահը տվել է $A = A(t)$ միավոր արտադրանք: Այդ դեպքում $A'(t)$ ածանցյալը բանվորի աշխատանքի արտադրողականությունն է ժամանակի t պահին:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան I բաց միջակայքի յուրաքանչյուր կետում ունի $f'(x)$ ածանցյալ: Այդ դեպքում $f'(x)$ -ը նույնպես I միջակայքում որոշված ֆունկցիա է: Եթե $f'(x)$ ֆունկցիան I

միջակայքի յուրաքանչյուր կետում ունի ածանցյալ, ապա այդ ածանցյալն անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալ և նշանակում են՝ $f''(x)$: Այդ դեպքում $f''(x)$ -ը նույնպես I միջակայքում որոշված ֆունկցիա է:

Մեխանիկայում շարժումն անվանում են հավասարաչափ, եթե նրա արագությունը հաստատուն է, և շարժումն անվանում են հավասարաչափ արագացող, եթե նրա արագացումը հաստատուն է:

Դիցուք կետը շարժվում է ուղղագիծ, $s = f(t)$ օրենքով: Ֆունկցիայի $s' = f'(t)$ առաջին ածանցյալը կետի արագությունն է, իսկ $s'' = f''(t)$ երկրորդ ածանցյալը՝ արագացումը: Այսպիսով, եթե կետը շարժվում է այդ օրենքով, ապա երկրորդ ածանցյալի մեխանիկական իմաստը այդ կետի արագացումն է:

Եթե կետը շարժվում է ուղղագիծ, $s = at + b$ գծային օրենքով, որտեղ a -ն և b -ն տրված թվեր են, $a \neq 0$, ապա այդ շարժումը հավասարաչափ է, քանի որ նրա $s' = a$ արագությունը հաստատուն է:

Եթե կետը շարժվում է ուղղագիծ, $s = at^2 + bt + c$ քառակուսային օրենքով, որտեղ a -ն ($a \neq 0$), b -ն և c -ն տրված թվեր են, ապա այդ շարժումը հավասարաչափ արագացող է, քանի որ նրա $s' = 2at + b$ արագությունը կախված է ժամանակից, իսկ $s'' = 2a$ արագացումը հաստատուն է:

Ընդգծենք, որ եթե կետը շարժվում է ուղղագիծ, $s = f(t)$ օրենքով, ապա s' -ը և s'' -ը ժամանակից կախված ֆունկցիաներ են: Միայն այն դեպքում, երբ կետը շարժվում է ուղղագիծ գծային օրենքով, s' -ը հաստատուն է, այսինքն՝ շարժումը հավասարաչափ է, և միայն այն դեպքում, երբ կետը շարժվում է

ուղղագիծ քառակուսային օրենքով, s'' -ը զրոյից տարբեր հաստատուն է, այսինքն՝ շարժումը հավասարաչափ արագացող է:

4. Մոտավոր հաշվարկներ

Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի ածանցյալ, և պահանջվում է մոտավոր հաշվել այդ ֆունկցիայի արժեքը x_0 -ին մոտիկ $x_0 + \Delta x$ կետում:

Քանի որ $y = f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի ածանցյալ, ապա ճշմարիտ է

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

հավասարությունը:

Չրոյին մոտիկ Δx -երի համար ճշմարիտ է

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

մոտավոր հավասարությունը, որով ածանցյալի արժեքը հաշվելիս կատարված սխալի չափը այնքան ավելի փոքր է, որքան Δx -ի արժեքը մոտ է զրոյին: (1) մոտավոր հավասարությունից ստանում ենք

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x \quad (2)$$

մոտավոր հավասարությունը:

Բերենք մոտավոր հաշվարկներում (2) հավասարության կիրառության օրինակներ:

Օրինակ 1. Հաշվենք $f(x) = x^{10}$ ֆունկցիայի մոտավոր արժեքը $x = 1,01$ կետում: Ունենք $x = 1 + 0,1$: Ընդունենք՝ $x_0 = 1, \Delta x = 0,01$: Այդ դեպքում քանի որ $f'(x) = 10x^9$, ապա

$$f(x_0) = f(1) = 1^{10} = 1, \quad f'(x_0) = f'(1) = 10 \cdot 1^9 = 10:$$

Կիրառելով (2) հավասարությունը՝ կունենանք

$$f(1,01) = f(1 + 0,1) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0,01 = 1 + 10 \cdot 0,01 = 1,1:$$

Օրինակ 2. Մոտավոր հաշվենք $\sqrt{3,96}$ -ը:

Դիտարկենք $f(x) = \sqrt{x}$ ֆունկցիան, երբ $x > 0$: Ընդունենք $x_0 = 4, \Delta x = -0,04$: Այդ դեպքում քանի որ

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

ապա

$$f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2,$$

$$f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}:$$

Կիրառելով (2) հավասարությունը՝ կունենանք

$$\begin{aligned} f(1,01) &= f(4 - 0,04) \approx f(4) + f'(4) \cdot (-0,04) = \\ &= 2 + \frac{1}{4}(-0,04) = 1,99: \end{aligned}$$

Այսպիսով $\sqrt{3,96} \approx 1,99$:

Օրինակ 3. Մոտավոր հաշվենք $\operatorname{tg} 46^\circ$ -ը:

Դիտարկենք $f(x) = \operatorname{tg} x$ ֆունկցիան: Քանի որ $46^\circ = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$ (ռադիան), տեղադրենք $x_0 = \frac{\pi}{4}, \Delta x = \frac{\pi}{180}$:

Այդ դեպքում քանի որ $f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, ապա

$$f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2:$$

Կիրառելով (2) հավասարությունը՝ կունենանք

$$f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1,035:$$

Այսպիսով $\operatorname{tg} 46^\circ \approx 1,035$:

4. Մաքսիմումի և մինիմումի վերաբերյալ խնդիրներ

$[a, b]$ հատվածում անընդհատ, (a, b) բաց միջակայքում ածանցյալ ունեցող $y = f(x)$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները գտնելու համար պետք է հաշվել $f'(x)$ ածանցյալը, այն հավասարեցնել զրոյի և գտնել $f'(x) = 0$ հավասարման (a, b) բաց միջակայքին պատկանող բոլոր $x_1, x_2, \dots, x_n$ արմատները (կրիտիկական կետերը): Այնուհետև պետք է հաշվել ֆունկցիայի

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b) \quad (3)$$

արժեքները, (3) թվերից ամենամեծը $y = f(x)$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքն է $[a, b]$ հատվածում, (3) թվերից ամենափոքրը $y = f(x)$ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքն է $[a, b]$ հատվածում:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է a և b ծայրակետերով I միջակայքում: I միջակայքը կարող է լինել հատված, բաց կամ կիսաբաց միջակայք: Ընդ որում a -ն իրական թիվ է կամ $-\infty$, b -ն իրական թիվ է կամ $+\infty$:

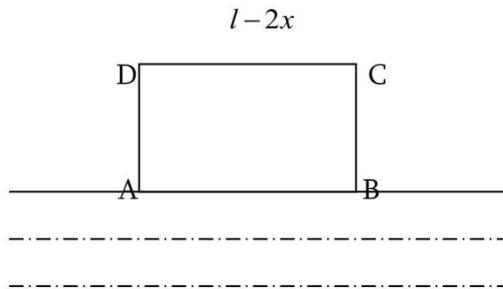
Ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան $f'(x)$ ածանցյալի հետ անընդհատ է I միջակայքում, և $x = x_0$ -ն այդ միջակայքի միակ կետն է, որտեղ $f'(x) = 0$: Այդ դեպքում եթե (a, b) միջակայքում կան այնպիսի x_1 և x_2 կետեր, որ $x_1 < x_0 < x_2$ և

ա) $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$, ապա x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան հասնում է I միջակայքում իր մաքսիմումին,

բ) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) > 0$, ապա x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան հասնում է I միջակայքում իր մինիմումին:

Խնդիր 1 (Դիդոնայի խնդիրը). Հին առասպելում պատմվում է, որ Պիգմալիոն արքան սպանում է իր քույր Դիդոնայի ամուսնուն, որպեսզի տիրանա նրա հարստությանը: Դիդոնան, հեռանալով Փյունիկիայից, շատ արկածներից հետո հասնում է Հյուսիսային Աֆրիկա: Աֆրիկացիների թագավորը ծովի ափին Դիդոնային նվիրում է հողակտոր՝ «ոչ ավելի, քան կարելի է ցանկապատել եզան կաշիով»: Դիդոնան եզան կաշին մանր կտրատում է և, գործելով երկար պարան, ծովափին վերցնում է հողակտոր, որի վրա հիմնում է Կարթագեն քաղաքը:

Պարզության համար կհամարենք, որ ծովի ափը ուղղաձիգ է, և հողակտորը ունի ուղղանկյան տեսք: Պետք է գտնել ամենամեծ մակերես ունեցող ուղղանկյունը, որի մի կողմը սահմանափակված է ծովով, իսկ մյուս երեք կողմերը՝ տրված երկարությամբ պարանով (Նկար 34):



Նկ. 34

Լուծում

BC հատվածի երկարությունը նշանակենք x -ով: Այդ դեպքում AB հատվածի երկարությունը $l - 2x$ է, և հետևաբար $ABCD$ ուղղանկյան մակերեսը կլինի հավասար.

$$S = S(x) = x(l - 2x).$$

Ակնհայտ է, որ $0 < x < \frac{l}{2}$: $S' = l - 4x$ ածանցյալը 0-ի և $\frac{l}{2}$ -ի միջև 0-ի է հավասարվում միակ $x = \frac{l}{4}$ կետում: Քանի որ

$$S(0) = S\left(\frac{l}{2}\right) = 0,$$

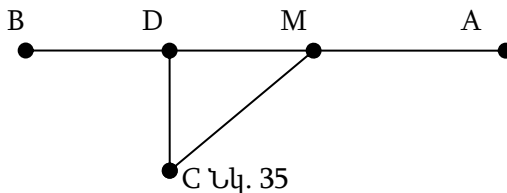
հետևաբար $x = \frac{l}{4}$ կետում S -ը հասնում է իր մեծագույն արժեքին: Այսպիսով BC կողմը պետք է ունենա $\frac{l}{4}$, իսկ AB կողմը՝ $\frac{l}{2}$ երկարություն: Մակերեսի մեծագույն արժեքը հավասար է

$$S = \frac{l}{4} \left(l - 2 \cdot \frac{l}{4} \right) = \frac{l^2}{8}:$$

Եթե հանենք այն պայմանը, որ տարածքի սահմանները պետք է ունենան ուղղանկյան տեսք, ապա կարելի է ցանկապատել ավելի մեծ տարածք: Դրա համար այն պետք է ունենա կիսաշրջանի տեսք: Իրոք, այդ դեպքում $\pi R = l$, որտեղ R -ը կիսաշրջանի շառավիղն է: Հետևաբար $R = \frac{l}{\pi}$ և

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi l^2}{2 \pi^2} = \frac{l^2}{2\pi} > \frac{l^2}{8} = S:$$

Խնդիր 2. AB ուղղով անցնում է երկաթուղին, որի մի կողմում գտնվում է C կետը: Անհրաժեշտ է բեռը C կետից տեղափոխել երկաթուղու վրա գտնվող M կետը, այնուհետև՝ A կետ՝ կատարելով հնարավորինս քիչ ծախսեր (Նկար 35): C -ից M տեղափոխումը կատարվում է մեքենայով, որն արժե m անգամ քան, քան երկաթուղով:



Լուծում

Ենթադրենք $CD = l$ -ը C կետից մինչև երկաթուղի կարճագույն հեռավորությունն է, x -ը՝ DM հեռավորությունը, իսկ R -ը D -ից A հեռավորությունն է երկաթուղով: Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $CM = \sqrt{l^2 + x^2}$:

Տեղափոխման y ծախսը արտահայտվում է hx_2 ետևյալ բանաձևով՝

$$y = y(x) = k(R - x) + mk\sqrt{l^2 + x^2},$$

որտեղ k -ն երկաթուղով 1 կմ տեղափոխելու արժեքն է: Պետք է գտնել y ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը $[0, R]$ հատվածի վրա: Ըստ խնդրի պայմանի՝ $x > 0$: Հետևաբար՝

$$y' = -k + \frac{kmx}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

ածանցյալը x -ի այդ արժեքների համար դառնում է 0 միակ

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{m^2 - 1}}$$

կետում: x_0 կետում y -ը հասնում է իր փոքրագույն արժեքին, որովհետև $y'(x) < 0$, երբ $x < x_0$, և $y'(x) > 0$, երբ $x > x_0$:

Այսպիսով, բեռի տեղափոխման ամենաքիչ ծախսերը ստացվում են, երբ $x = x_0$:

Դիտողություն. Պատասխանի մեջ չի մասնակցում R թիվը: Դա նշանակում է, որ անկախ բեռի տեղափոխման վերջնական կետից՝ անհրաժեշտ է այն տեղափոխել α անկյան տակ: α անկյունը հաշվվում է

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{x_0} = \sqrt{m^2 - 1}$$

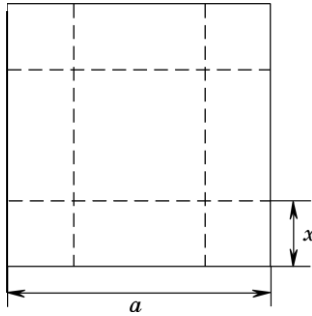
բանաձևով: Օրինակ, երբ $m = 2$, ապա $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ և $\alpha = 60^\circ$:

Խնդիր 3. Տրված է a սմ կողմով քառակուսաձև մետաղյա թիթեղ: Թիթեղի անկյուններից կտրում են միատեսակ քառակուսիներ (Նկար 36) և եզրերը կետագծերով ծռելով՝ պատրաստում են արկղ:

Անհրաժեշտ է որոշել, թե քառակուսիների ո՞ր չափերի դեպքում արկղի ծավալը կլինի մեծագույնը, և գտնել այդ ծավալը:

Լուծում

Կտրված քառակուսիների կողմը նշանակենք x սմ: Այդ դեպքում արկղի ծավալը հավասար է՝ $V = x(a - 2x)^2$ (սմ³):

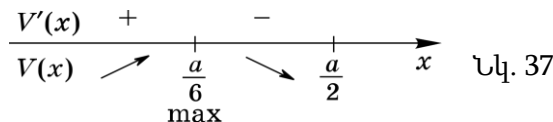


Նկ. 36

Դիտարկենք $V(x) = x(a - 2x)^2, 0 < x < \frac{a}{2}$ ֆունկցիան: Գտնենք $V(x)$ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետերը $(0, \frac{a}{2})$ բաց միջակայքում: Ունենք

$$V'(x) = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x):$$

$V'(x)$ -ը հավասարեցնելով զրոյի՝ կստանանք հավասարման արմատները՝ $x_1 = \frac{a}{2}$ և $x_2 = \frac{a}{6}$: Դրանցից միայն x_2 -ն է պատկանում $(0, \frac{a}{2})$ միջակայքին:



Ակնհայտ է, որ $x_2 = \frac{a}{6}$ կետի վրայով անցնելիս $V(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը փոխում է նշանը «+»-ից «-» (Նկար 37), հետևաբար $(0, \frac{a}{2})$ միջակայքում ֆունկցիան հասնում է լոկալ մաքսիմումի x_2 կետում: $\frac{a}{6}$ կրիտիկական կետը $(0, \frac{a}{2})$ միջակայքում միակն է, հետևաբար այն մաքսիմումի կետ է ամբողջ $(0, \frac{a}{2})$ միջակայքում:

Այսպիսով, պետք է կտրել $\frac{a}{6}$ սմ կողմով քառակուսի: Արկղի ծավալը հավասար է՝

$$V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{a}{6} \left(a - 2 \cdot \frac{a}{6}\right)^2 = \frac{2}{27} a^3 \text{ (սմ}^3\text{)}:$$

Պատասխան՝ $\frac{a}{6}$ սմ, $\frac{2}{27} a^3$ սմ³:

Խնդիր 4. Հյուրանոցի բոլոր 30 սենյակները զբաղված են լինում, եթե դրանցից յուրաքանչյուրի ամսական գինը $r=1000$ դոլար է: Դիտարկումները ցույց են դալիս, որ r -ը 40 դոլարով ավելացնելիս մեկ սենյակ ազատ է մնում: Հյուրանոցի մեկ սենյակի վրա ամսական ծախսվում է 120 դոլար, անկախ նրանից՝ սենյակը ազատ է, թե զբաղված: Ինչպե՞ս պետք է ընտրել r -ը, որպեսզի շահույթը լինի մեծագույնը:

Լուծում

$N(r)$ -ով նշանակենք զբաղված սենյակների քանակը, իսկ $P(r)$ -ով՝ հյուրանոցի ընդհանուր հասույթը: Քանի որ r -ը 40 դոլարով ավելացնելիս մեկ սենյակն ազատվում է, ուրեմն ազատ սենյակների քանակը կլինի՝ $\frac{r-1000}{40}$, երբ $r > 1000$: Հետևաբար՝

$$N(r) = 30 - \frac{r-1000}{40},$$

$$P(r) = N(r)(r-20):$$

Տեղադրելով և բացելով փակագծերը՝ կստանանք.

$$P(r) = \left(30 - \frac{r-1000}{40}\right)(r-120) = \left(55 - \frac{r}{40}\right)(r-120) = \\ = -\frac{1}{40}r^2 + 58r - 6600:$$

Գտնենք r -ի փոփոխման սահմանները: $N(r) = 0$, երբ $r = 40 \cdot 55 = 2200$: Հետևաբար զբաղված սենյակներ չեն լինի, երբ $r = 2200$: r -ի փոքրագույն արժեքը 1000-ն է, որովհետև այդ դեպքում բոլոր սենյակները զբաղված են: Այսպիսով $1000 \leq r \leq 2200$: Գտնենք ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը: Հաշվենք $P(r)$ -ի ածանցյալը և գտնենք կրիտիկական կետերը.

$$P'(r) = 58 - \frac{r}{20} = 0 \Rightarrow r = 1160:$$

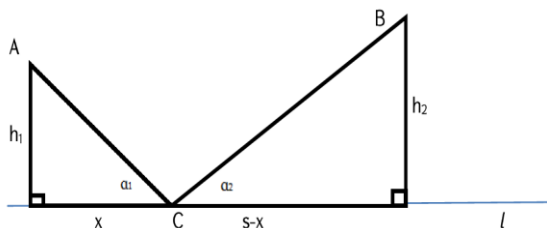
Համեմատենք $P(r)$ -ի արժեքները կրիտիկական կետում և r -ի փոփոխման միջակայքի ծայրակետերում՝

$$P(1000) = 26400, \quad P(1160) = 27040, \quad P(2200) = 0:$$

Պատասխան՝ մեծագույն եկամուտ ստացվում է, երբ $r = 1160$: Այդ դեպքում 4 սենյակ ազատ է մնում:

Խնդիր 5. (Հերոնի փոքրագույն հեռավորության սկզբունքը):

Ուղղի վրա C կետն ընտրված է այնպես, որ ACB բեկյալի երկարությունը ամենափոքրն է: Ապացուցել, որ $\alpha_1 = \alpha_2$ (Նկար 38):



Նկ. 38

Լուծում

Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ ACB բեկյալի երկարությունն է

$$f(x) = AC + CB = \sqrt{x^2 + h_1^2} + \sqrt{(s-x)^2 + h_2^2} :$$

Նկատենք, որ f ֆունկցիան ձգտում է անվերջի, երբ x -ը ձգտում է $+\infty$ կամ $-\infty$ -ի, հետևաբար այն իր փոքրագույն արժեքն է ընդունում կրիտիկական կետում: Հաշվենք f -ի ածանցյալը, հավասարեցնենք զրոյի.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{s-x}{\sqrt{(s-x)^2 + h_2^2}} = 0:$$

Անհրաժեշտություն չկա գտնել կրիտիկական կետը, որովհետև հավասարումը գրելով

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{s-x}{\sqrt{(s-x)^2 + h_2^2}}$$

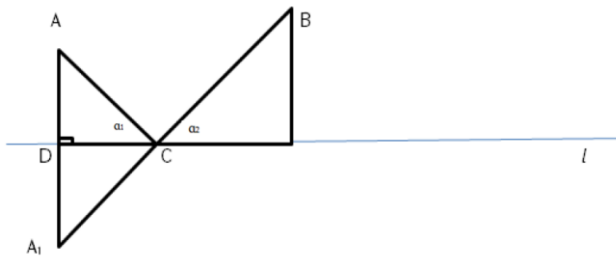
տեսքով և նկատելով, որ

$$\cos \alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{s-x}{\sqrt{(s-x)^2 + h_2^2}}$$

կստանանք, որ $\alpha_1 = \alpha_2$, քանի որ α_1, α_2 -ը գտնվում են 0 -ի և π -ի միջև:

Այժմ **Հերոնի սկզբունքն** ապացուցենք երկրաչափորեն:

Անհրաժեշտ է գտնել ACB բեկյալի ամենափոքր երկարությունը, երբ $C \in l$ (Նկար 39):



Նկ. 39

Կառուցենք A կետի A_1 համաչափը l ուղղի նկատմամբ և A_1 կետը միացնենք B -ի հետ: AB հատվածի և l ուղղի հատման կետը նշանակենք C -ով: Քանի որ ACA_1 եռանկյունը հավասարասրուն է, հետևաբար ACB բեկյալի և A_1B հատվածի երկարությունները հավասար են: A_1 և B կետերի կարճագույն հեռավորությունը A_1B հատվածն է, հետևաբար ընտրված ACB բեկյալի երկարությունը ամենափոքրն է:

Քանի որ ACA_1 եռանկյունը հավասարասրուն է, ուրեմն $\angle ACD = \angle A_1CD = \alpha_1$, և $\alpha_1 = \alpha_2$ որպես հակադիր անկյուններ:

5. Անորոշ ինտեգրալ: Որոշյալ ինտեգրալ: Կիրառություններ

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է (a, b) միջակայքում: $F(x)$ ֆունկցիան անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի **նախնական** (a, b) միջակայքում, եթե այդ միջակայքում $F'(x) = f(x)$:

Եթե $F(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ ֆունկցիայի որևէ նախնական է (a, b) միջակայքում, ապա $F(x) + C$ ֆունկցիան, որտեղ C -ն հաստատուն է, նույնպես $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական է այդ միջակայքում:

(a, b) միջակայքում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի **անորոշ ինտեգրալ** անվանում են այդ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի որևէ նախնական: $f(x)$ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալը նշանակում են՝ $\int f(x)dx$: Եթե $F(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ ֆունկցիայի որևէ նախնական է (a, b) միջակայքում, ապա

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

որտեղ C -ն որևէ հաստատուն է:

Անորոշ ինտեգրալների աղյուսակը և ինտեգրման հիմնական կանոնները բերված են Հավելված 3-ում:

Դիցուք $f(x)$ ոչ բացասական ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում: $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է Նկար 40-ում: Պահանջվում է գտնել այն պատկերի (կորագիծ սեղանի) մակերեսը, որը սահմանափակված է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով, Ox առանցքով, $x = a$ և $x = b$ ուղիղներով: Դրված խնդիրը բնական է լուծել այսպես: Կատարենք $[a, b]$ հատվածի տրոհում.

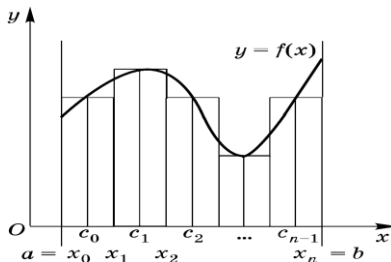
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b:$$

$[x_j, x_{j+1}]$ հատվածներից յուրաքանչյուրում ընտրենք c_j կամայական կետ և կազմենք

$$S_n = f(c_0)\Delta x_0 + f(c_1)\Delta x_1 + \dots + f(c_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

ինտեգրալային գումարը, որտեղ $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$: Նշանակենք՝

$$\lambda = \max_{j=1, \dots, n} \Delta x_j:$$



Նկ. 40

Այս գումարը, ակնհայտ է, որ հավասար է ուղղանկյունների մակերեսների գումարին (նկ. 40): Եթե անկախ $[a, b]$ հատվածի տրոհման ձևից և c_j կետերի ընտրությունից գոյություն ունի $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = S$ սահմանը, ապա S մեծությունն անվանում են տրված կորագիծ սեղանի մակերես:

Այժմ դիտարկենք $[a, b]$ հատվածում անընդհատ կամայական $f(x)$ ֆունկցիա: Այդ ֆունկցիայի համար կազմենք S_n ինտեգրալային գումարը: Եթե անկախ $[a, b]$ հատվածի տրոհման ձևից և c_j կետերի ընտրությունից գոյություն ունի $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n$ սահմանը, ապա այն անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ $[a, b]$ հատվածում և նշանակում են՝

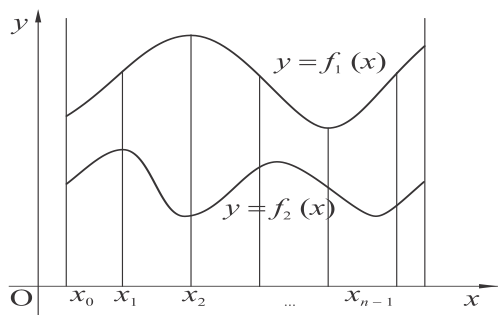
$$\int_a^b f(x) dx:$$

Անորոշ և որոշյալ ինտեգրալների կապն արտահայտվում է հետևյալ թեորեմով:

ԹԵՈՐԵՄ. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում, և $F(x)$ -ը $f(x)$ -ի որևէ նախնական է: Այդ դեպքում ճշմարիտ է Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a):$$

Օրինակ 1. Միջին հեռավորությունների որոշումը: Դիցուք տրված է $y = f_1(x)$ և $y = f_2(x)$ անընդհատ ֆունկցիաների գրաֆիկներով, $x = a$ և $x = b$ ուղիղներով սահմանափակված տիրույթը: Պահանջվում է այդ տիրույթում գտնել օրդինատների առանցքին զուգահեռ ուղղություններով միջին հեռավորությունը (Նկար 41):



Նկ. 41

Այսպիսի խնդիրներ առաջանում են, օրինակ, այսպիսի հարցադրումներին պատասխանելու ժամանակ.

1) Թռչունները Հայաստանի տարածքով հարավից հյուսիս չվելու ժամանակ միջինը ի՞նչ հեռավորություն են անցնում:

2) Ինքնաթիռները Հայաստանի տարածքով տարանցիկ ուղերթներ կատարելու ժամանակ հարավից հյուսիս միջինը ի՞նչ հեռավորություն են անցնում:

Նշանակենք $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ և $[a, b]$ հատվածը բաժանենք n հավասար մասերի: Կստանանք $[a, b]$ հատվածի

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

տրոհում, ընդ որում ցանկացած j -ի համար

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}:$$

Դիտարկենք

$$M_n = \frac{y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}}{n}$$

գումարը, որտեղ

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_{n-1} = f(x_{n-1});$$

M_n -ը կարելի է ներկայացնել

$$M_n = \frac{1}{b-a} (y_0 \Delta x_0 + y_1 \Delta x_1 + \dots + y_{n-1} \Delta x_{n-1})$$

տեսքով:

Անցնելով սահմանի, երբ $n \rightarrow \infty$, կստանանք միջին հեռավորությունը հաշվելու բանաձևը.

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx:$$

Այսպիսով, $M = \frac{S}{b-a}$, որտեղ S -ը տիրույթի մակերեսն է: Մասնավորապես, եթե տիրույթը R շառավղով շրջան է, ապա

$$M = \frac{\pi R^2}{2R} = \frac{\pi}{2} R,$$

իսկ եթե a և b կիսաառանցքներով էլիպս է, ապա

$$M = \frac{\pi ab}{2a} = \frac{\pi}{2} b:$$

Օրինակ 2. Կորի երկարությունը և պտտման մակերևույթի մակերեսը: Դիցուք Γ -ն անընդհատ ածանցյալ ունեցող $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) ֆունկցիայի գրաֆիկն է: Հաշվենք Γ կորի l երկարությունը:

Կատարենք $[a, b]$ հատվածի $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ տրոհում և համարենք, որ Γ կորի երկարության Δl_k տարրը մոտավորապես հավասար է $(x_k, f(x_k))$ և $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ ծայրակետերով հատվածի երկարությանը.

$$\Delta l_k \approx \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta f_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k:$$

Հետևաբար՝

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k,$$

որտեղ $\lambda = \max_{j=1, \dots, n} \Delta x_j$: Ինտեգրալի սահմանումից բխում է կորի երկարությունը հաշվելու հետևյալ բանաձևը՝

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx:$$

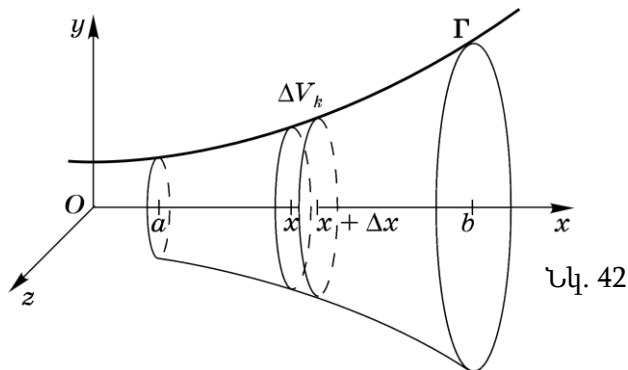
Համանման դատողություններով ապացուցվում է, որ եթե անընդհատ ածանցյալ ունեցող $y = f(x) (a \leq x \leq b)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պտտվի Ox առանցքի շուրջը, ապա առաջացած մակերևույթի մակերեսը որոշվում է

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

բանաձևով:

Օրինակ 3. Պտտման մարմնի ծավալը: Դիցուք Γ -ն անընդհատ դրական $y = f(x) (a \leq x \leq b)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն է xOy ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում:

Հաշվենք այն պտտման մարմնի V ծավալը, որը սահմանափակված է Γ կորը x -երի առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթով, $x = a$ և $x = b$ կետերով անցնող և x առանցքին ուղղահայաց հարթություններով (Նկար 42):



Նկ. 42

Կատարենք $[a, b]$ հատվածի

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

տրոհում և համարենք, որ պտտման մարմնի ծավալի ΔV_k տարրը, որը սահմանափակված է x_k և x_{k+1} կետերով անցնող և x առանցքին ուղղահայաց հարթություններով, մոտավորապես հավասար է $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ բարձրությունով և $y_k = f(x_k)$ հիմքի շառավղով գլանի ծավալին.

$$\Delta V_k \approx \pi y_k^2 \Delta x_k = \pi (f(x_k))^2 \Delta x_k.$$

Հետևաբար

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k,$$

որտեղ

$$\lambda = \max_{j=1, \dots, n} \Delta x_j:$$

Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումից բխում է

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

բանաձևը:

Եթե Γ -ն $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ էլիպսի վերին կիսահարթության մեջ գտնվող մասն է, ապա պտտման մարմինը պտտման էլիպսոիդ է, որի ծավալը հաշվվում է այսպես.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_0^a = \\ &= 2\pi b^2 \left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3} \pi b^2 a. \end{aligned}$$

Նշենք, որ երկրագունդը պտտման էլիպսոիդ է, որի ծավալի թվային արժեքը ստանալու համար բանաձևի մեջ պետք է տեղադրել կիսաառանցքների համապատասխան արժեքները:

Օրինակ 4. Աշխատանքը: Ենթադրենք՝ ուղիղ գծով շարժվող կետի վրա այդ ուղիղ գծի երկայնքով ազդում է $F = f(x)$ փոփոխական ուժը, որտեղ $f(x)$ -ը շարժվող կետի x կոորդինատից անընդհատ ֆունկցիա է: F ուժի աշխատանքը, երբ կետը տեղափոխվում է a -ից b , հավասար է

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \Delta x_j = \int_a^b f(x) dx,$$

որտեղ $\lambda = \max_{j=1, \dots, n} \Delta x_j$,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \Delta x_j = x_{j+1} - x_j:$$

Իրոք, $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ $f(x_j) \Delta x_j$ արտադրյալը մոտ է $[x_j, x_{j+1}]$ հատվածում աշխատանքի իրական արժեքին, իսկ այդպիսի արտադրյալների գումարը մոտ է $[a, b]$ հատվածում աշխատանքի իրական արժեքին, ընդ որում այնքան ավելի մոտ է, որքան λ -ն փոքր է:

Օրինակ 5. Փոփոխական խտություն ունեցող ձողի զանգվածը: Կհամարենք, որ Ox առանցքի $[a, b]$ հատվածն ունի փոփոխական $\rho(x) \geq 0$ խտություն, որտեղ $\rho(x)$ -ը $[a, b]$ հատվածում անընդհատ ֆունկցիա է: Այդ հատվածի ընդհանուր զանգվածը հավասար է

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \rho(x_j) \Delta x_j = \int_a^b \rho(x) dx,$$

որտեղ $\lambda = \max_{j=1, \dots, n} \Delta x_j$,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \Delta x_j = x_{j+1} - x_j:$$

Օրինակ 6. Էլեկտրական լիցքի աշխատանքը: Դիցուք c -ն և c_1 -ը իրարից r հեռավորության վրա գտնվող երկու լիցքեր են: Դրանց միջև փոխազդեցության F ուժը ուղղված է այդ ուղղի երկայնքով և հավասար է $F = \frac{a}{r^2}$, $a = kc c_1$, որտեղ k -ն հաստատուն է: Այդ ուժի W աշխատանքը, երբ c լիցքն անշարժ է, իսկ c_1 -շարժվում է $[R_1, R_2]$ հատվածով, կարելի է հաշվել՝ տրոհելով այդ հատվածը Δr_j երկարությամբ մասերի: Դրանցից յուրաքանչյուրում ուժը համարում ենք մոտավորապես հաստատուն, հետևաբար այդ մասում աշխատանքը հավասար է $\frac{a}{r_j^2} \Delta r_j$: Տրոհման մասերը մանրացնելով՝ համոզվում ենք, որ

$$W = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a}{r_j^2} \Delta r_j = \int_{R_1}^{R_2} \frac{a}{r^2} dr \quad (0 < R_1 < R_2):$$

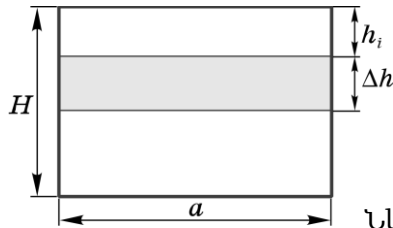
Հաշվելով ինտեգրալը՝ ստանում ենք.

$$W = -\frac{a}{r} \Big|_{R_1}^{R_2} = a \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right):$$

Մասնավորապես, F ուժի կատարած աշխատանքը, երբ c_1 լիցքը շարժվում է դեպի անվերջ (սկզբում c լիցքից ունենալով R_1 հեռավորություն), հավասար է

$$W = \lim_{R_2 \rightarrow 0} a \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{a}{R_1}:$$

Օրինակ 7. Հեղուկի ճնշումը պատի վրա: H բարձրությամբ ջրավազանը լցված է ջրով: Հաշվել հեղուկի ճնշման ուժը ջրավազանի ուղղանկյունաձև պատին, որի կողմը a է:



Նկ. 43

H բարձրությունը բաժանենք Δh երկարությամբ n հավասար մասերի: Այդ մասերից մեկը նկար 43-ում ներկված է: Քանի որ ջրի մեկ խորանարդ մետրը կշռում է մեկ տոննա, ապա հեղուկի h_i մ բարձրությամբ սյան ճնշումը 1 մ^2 մակերեսով տեղամասի վրա հավասար է h_i տոննայի:

Ջրի ճնշման ուժը h_i խորությամբ մասի վրա հավասար է h_i -ի և այդ մասի մակերեսի արտադրյալին՝ $h_i a \Delta h$: Պատի վրա ճնշման մոտավոր մեծությունը հավասար է

$$P \approx \sum_{i=0}^{n-1} a h_i \Delta h = a \sum_{i=0}^{n-1} h_i \Delta h$$

որտեղ գումարը վերցված է բոլոր Δh -երով: Ճնշման ճշգրիտ արժեքը հավասար է՝

$$P = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} a \sum_{i=0}^{n-1} h_i \Delta h = a \int_a^H h dh = \frac{aH^2}{2}:$$

Օրինակ 8. Ծանրության կենտրոնը: $m_1, m_2, \dots, m_N$ զանգվածներով $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$ նյութական կետերի համակարգի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները հաշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$x_0 = \frac{\sum_{j=1}^N m_j x_j}{\sum_{j=1}^N m_j} \quad y_0 = \frac{\sum_{j=1}^N m_j y_j}{\sum_{j=1}^N m_j} :$$

Եթե զանգվածը անընդհատ է բաշխված մակերեսով, ապա վերջավոր գումարների դերը կատարում են ինտեգրալները:

Դիտարկենք $y = 1 - x^2$ պարաբոլի այն սեգմենտը, որը ներքևից սահմանափակված է x -երի առանցքով (Նկար 44): Դիցուք այդ սեգմենտի վրա հավասարաչափ բաշխված է զանգված: Գտնենք սեգմենտի ծանրության կենտրոնը: Դրա համար x -երի առանցքի $[-1, 1]$ հատվածը բաժանենք Δx երկարությամբ n հավասար մասերի: Մեկ այդպիսի մաս ներկված է Նկար 44-ում: Քանի որ Δx -ը փոքր է, կարելի է համարել, որ ներկված մասի զանգվածը հավասար է

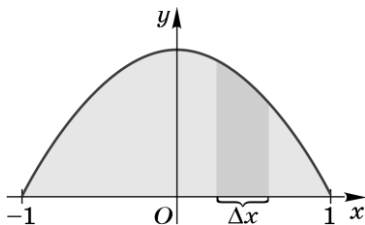
$$\rho f(x_i) \Delta x = \rho y_i \Delta x$$

և այն կենտրոնացած է $(x_i, \frac{y_i}{2})$ կետում: Այստեղ ρ -ն զանգվածի բաշխման խտությունն է:

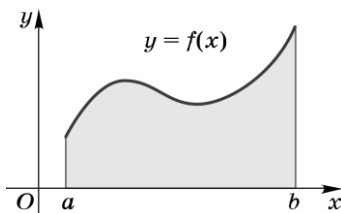
Սեգմենտի համաչափության շնորհիվ նրա ծանրության կենտրոնի աբսցիսն է՝ $x_0 = 0$: Օրդինատի մոտավոր արժեքը կարելի է գտնել

$$y_0 \approx \frac{\rho \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i}{2} y_i \Delta x}{\rho \sum_{i=1}^{n-1} y_i \Delta x} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \Delta x}{\sum_{i=1}^{n-1} y_i \Delta x}$$

բանաձևով, որտեղ գումարում մասնակցում են $[-1, 1]$ հատվածի տրոհման բոլոր մասնակի հատվածները:



Նկ. 44



Նկ. 45

Ծանրության կենտրոնի օրդինատի ճշգրիտ արժեքը կստանանք, եթե անցնենք սահմանի, երբ $\Delta x \rightarrow 0$.

$$y_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \Delta x}{\sum_{i=1}^{n-1} y_i \Delta x} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx} : \quad (4)$$

Տրված դեպքում $a = -1, b = 1$: Այսպիսով.

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2) dx} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{5} :$$

(4) բանաձևով կարելի է հաշվել նկար 45-ում պատկերված կամայական տիրույթի ծանրության կենտրոնի օրդինատը, որի վրա հավասարաչափ բաշխված է զանգված: Համապատասխան բանաձևը x_0 -ի համար ունի հետևյալ տեսքը.

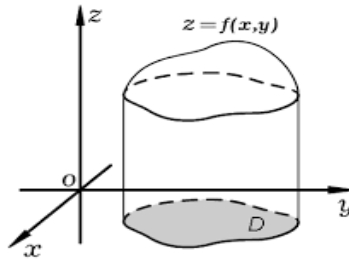
$$x_0 = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx} :$$

6. Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաներ

Մենք այստեղ կսահմանափակվենք միայն երկու փոփոխականի ֆունկցիաների քննարկումով: Երկուսից ավելի փոփոխականներով ֆունկցիաների հատկությունները շատ նման են երկու փոփոխականի դեպքին:

Ենթադրենք հարթության վրա տրված է D բազմությունը: Եթե D բազմության ցանկացած (x, y) կետի համապատասխանության մեջ է դրված որոշակի z թիվ, ապա ասում են, որ

z -ը երկու փոփոխականի ֆունկցիա է, և գրում են այսպես՝ $z = f(x, y)$, որտեղ f -ը համապատասխանության նշանն է: D բազմությունը կոչվում է ֆունկցիայի որոշման տիրույթ: $(x, y, f(x, y))$ կետերի բազմությունը կոչվում է ֆունկցիայի գրաֆիկ: Սովորաբար դա ինչ-որ մակերևույթ է.



Երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար նույնպես ներմուծվում են սահմանի և անընդհատության գաղափարները: $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$ նշանակում է, որ M կետը M_0 -ին ձգտելիս ֆունկցիայի արժեքները մոտենում են A թվին: Ֆունկցիայի անընդհատությունը նշանակում է, որ նրա արժեքները ներկայացնող մակերևույթը անցքեր և ճեղքվածքներ չունի:

Երկու փոփոխականի $z = f(x, y)$ ֆունկցիայի համար փոփոխականներից մեկը դիտարկելով որպես հաստատուն՝ սահմանվում են ըստ x -ի և ըստ y -ի մասնակի ածանցյալներ՝ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ կամ f'_x, f'_y :

Ինչպես և մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում՝ երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար նույնպես սահմանվում են բարձր կարգի ածանցյալներ. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ կամ $f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}$ և այլն:

Եթե $z = f(x, y)$ մակերևույթը (x_0, y_0, z_0) կետում ունի շոշափող հարթություն, ապա այդ հարթության հավասարումն է՝

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

իսկ այդ կետում նորմալի հավասարումն է՝

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}:$$

D տիրույթի $M_0(x_0, y_0)$ կետը կոչվում է ֆունկցիայի մինիմումի կետ, եթե

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

անհավասարությունը տեղի ունի այդ կետի որևէ շրջակայքում գտնվող յուրաքանչյուր $M(x, y)$ կետի համար: D տիրույթի $M_0(x_0, y_0)$ կետը կոչվում է ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ, եթե

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

անհավասարությունը տեղի ունի այդ կետի որևէ շրջակայքում գտնվող յուրաքանչյուր $M(x, y)$ կետի համար: Մաքսիմումի և մինիմումի կետերը կոչվում են էքստրեմումի կետեր, իսկ ֆունկցիայի արժեքները այդ կետերում՝ էքստրեմումներ:

$M_0(x_0, y_0)$ կետը կոչվում է ֆունկցիայի ստացիոնար կետ, եթե

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0:$$

Ենթադրենք $M_0(x_0, y_0)$ ստացիոնար կետը պարունակող որևէ տիրույթում f ֆունկցիան ունի մինչև երկրորդ կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ: Նշանակենք

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) = A, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = C, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = B, \\ D = AC - B^2:$$

Այդ դեպքում՝

1) եթե $D > 0$ և $A > 0$ (կամ $C > 0$), ապա M_0 կետը f ֆունկցիայի մինիմումի կետ է,

2) եթե $D > 0$ և $A < 0$ (կամ $C < 0$), ապա M_0 կետը f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է,

3) եթե $D < 0$, ապա M_0 կետը f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ,

4) եթե $D = 0$, ապա M_0 կետը կարող է լինել կամ չլինի f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ:

Խնդիրներ և վարժություններ

Հաշվել սահմանը.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{4n^2-3}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n+1}{5n^2+3}$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3+n^2+1}{n^3+4}$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3+2n^2-1}{n^4+n^3+4}$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+6n+7}{4n+5}$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3+1}{n^4+n}$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{n\sqrt{n}+1}$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+\lg n}{2+\lg n^2}$

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{n\sqrt{n}}$

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

14. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+1)} - n)$

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n}$

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+8}{4x+11}$

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x+9}{3x^2+4x+19}$

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2(x-2)}{x^3}$

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$

20. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

21. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

22. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}$

25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg x}{x}$

26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg 2x}{\sin 4x}$

27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x^2}$

28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x}$

30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x$

Հաշվել շարքի գումարը.

$$\begin{array}{ll}
 31. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 32. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n} \\
 33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} & 34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \\
 35. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2-1}{n^2} & 36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \\
 37. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right) & 38. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{2^n} - \sin \frac{2}{2^n} \right)
 \end{array}$$

Հետազոտել շարքի զուգամիտությունը.

$$\begin{array}{lll}
 39. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n & 40. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+3} & 41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} \\
 42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} & 43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4} & 44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1} \\
 45. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} & 46. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} &
 \end{array}$$

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$\begin{array}{ll}
 47. y = (x^2 + 1)(4x - 5) & 48. y = (3x^3 + 1)(4x^2 + x - 5) \\
 49. y = x^4 + \frac{1}{x} & 50. y = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \\
 51. y = \frac{1}{\sqrt{x^3}} & 52. y = \frac{3x-4}{4x+5} \\
 53. y = x \cos x & 54. y = x^2 \operatorname{tg} x
 \end{array}$$

$$55. y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$57. y = \sqrt{2 - 3x}$$

$$59. y = (3 - 4x)^5$$

$$61. y = \sin^2 x$$

$$63. y = x^2 e^{-2x^3}$$

$$65. y = 3^{-x^2+1}$$

$$67. y = \arctg 3x$$

$$56. y = \frac{x + \ln x}{\sqrt{x}}$$

$$58. y = \sqrt[3]{1 - x^2}$$

$$60. y = x\sqrt{2 + x^2}$$

$$62. y = \cos^2 2x$$

$$64. y = 2^{6-4x}$$

$$66. y = \arcsin 2x$$

$$68. y = x \arccot 2$$

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը x_0 կետում.

$$69. y = (3 - 2x)^4, x_0 = 1 \quad 70. y = \frac{x}{4 - x^2}, x_0 = 0$$

$$71. y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right), x_0 = \frac{\pi}{4} \quad 72. y = 3 \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{3}\right), x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$73. y = \frac{x^2}{4 - x^3}, x_0 = -1 \quad 74. y = \lg(1 + 3x), x_0 = 3$$

$$75. y = \sqrt{x} - \frac{1}{x^3}, x_0 = 1 \quad 76. y = \operatorname{tg}^2 x, x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$77. y = 2^x \sqrt{x}, x_0 = 1 \quad 78. y = x^2 \operatorname{ctg} x, x_0 = 0$$

Հաշվել ինտեգրալը.

$$79. \int \sqrt{x} dx \quad 80. \int \sqrt{3x} dx$$

$$81. \int \sqrt{1 - 4x} dx \quad 82. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$83. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \quad 84. \int e^{-2x} dx$$

$$85. \int \sin(x + 1) dx \quad 86. \int \cos(2x + 3) dx$$

$$87. \int e^{6-3x} dx \quad 88. \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$89. \int \frac{\ln x dx}{x} \quad 90. \int \frac{x dx}{x^2 + 1}$$

$$91. \int \frac{dx}{\cos^2 2x} \quad 92. \int x \sqrt{x^2 + 1} dx$$

$$93. \int \frac{dx}{3 - x} \quad 94. \int \sin^2 x dx$$

95. $\int \cos x \sin^2 x dx$ 96. $\int x e^2 dx$
 97. $\int \frac{dx}{x^2+4}$ 98. $\int 2^{1-x} dx$
 99. $\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx$ 100. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$
 101. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{x^2+1}$ 102. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
 103. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$ 104. $\int_0^1 e^x \sqrt{e^x+1} dx$
 105. $\int_1^9 \sqrt[3]{1-x} dx$ 106. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$
 107. $\int_0^1 \frac{x}{2+x} dx$ 108. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t g^2 x dx$
 109. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ 110. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

111. Ածխածնի օքսիդի քանակությունը ինչ-որ քաղաքի օդում որոշվում է

$$c(p) = \left(\frac{p}{2} + 1 \right) \cdot 10^{-6}$$

բանաձևով, որտեղ $p(t) = 10^6 + 10^4 t^2$ քաղաքի բնակչության քանակն է դիտարկման պահից t տարի հետո:

1) Ածխածնի օքսիդի քանակությունը ներկայացնել որպես ժամանակից կախված ֆունկցիա:

2) Գտնել ածխածնի օքսիդի պարունակությունը 2 տարի անց:

3) Քանի՞ տարի հետո ածխածնի օքսիդի քանակությունը հավասար կլինի $1+10^{-6}$:

Պատասխան՝

1) $c(p(t)) = \frac{1+\frac{t^2}{100}}{2} + 10^{-6}$ 2) 0,520001 3) 10:

112. Ուսանողը համակարգչային խաղը n -րդ փորձում կարողանում է հաղթել մոտավորապես $A(n) = 2 + \frac{6}{n}$ րոպեում:

1) Գտնել A ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

2) 2,7 թիվը պատկանո՞ւմ է արդյոք A ֆունկցիայի արժեքների տիրույթին:

3) Քանի՞ փորձից հետո ուսանողը կհաղթի 2,5 րոպեում:

Պատասխան՝ 1) $N = \{1, 2, \dots\}$, 2) Ոչ, 3) 12:

113. Երեխայի H հասակը սանտիմետրերով արտահայտվում է $H(t) = 6,5t + 50$ բանաձևով, որտեղ t -ն երեխայի տարիքն է:

1) Գտնել 8 տարեկան երեխայի հասակը:

2) Քանի՞ տարեկանում երեխան կունենա 150 սմ հասակ:

3) Նոր ծնված երեխայի հասակը քանի՞ սանտիմետր է:

Խելքին մո՞տ են ստացված պատասխանները:

Պատասխան՝ 1) 102 սմ, 2) 23, 3) 50:

114. Հիվանդը յուրաքանչյուր օր նույն ժամին ընդունում է 150 միլիգրամանոց դեղահաբ, որի 5%-ը մնում է նրա օրգանիզմում:

1) Երեք օր հետո քանի՞ միլիգրամ կմնա այդ դեղահաբից հիվանդի օրգանիզմում:

2) n օր հետո քանի՞ միլիգրամ կմնա այդ դեղահաբից հիվանդի օրգանիզմում:

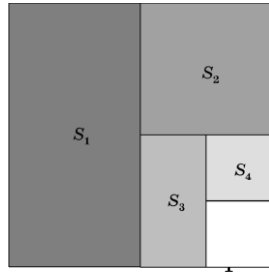
3) Երկար ժամանակ օգտագործելուց հետո քանի՞ միլիգրամ կմնա այդ դեղամիջոցից հիվանդի օրգանիզմում:

Պատասխան՝ 1) 157,875 մգ, 2) $\frac{3000}{19}(1 - 0,05^n)$ մգ,

3) 157,895 մգ:

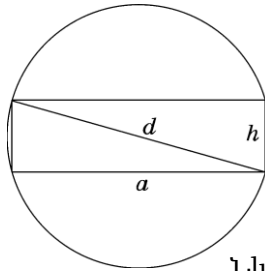
115. Տրված է a կողմով քառակուսի (Նկար 46): Դրա կեսը (S_1 մակերեսով) ներկեցին, այնուհետև մնացած կեսը (S_2 մա-

կերեսով) ներկեցին և այլն: Հաշվել ստացված շարքի n -րդ մասնակի գումարը: Զուգամե տ է արդյոք շարքը: Եթե գուգամե տ է, ապա գտնել շարքի գումարը:



Պատասխան՝ $S_n = a^2 - \frac{a^2}{2^n}$: Զուգամե տ է, $S = a^2$:

116. d տրամագծով շրջանաձև գերանից պետք է կտրել ուղղանկյուն հատույթով հեծան՝ a հիմքով և h բարձրությամբ (Նկար 47): a -ի և h -ի ի՞նչ արժեքների դեպքում հեծանի ամրությունը կլինի ամենամեծը, եթե հայտնի է, որ հեծանի ամրությունը համեմատական է ah^2 -ուն:

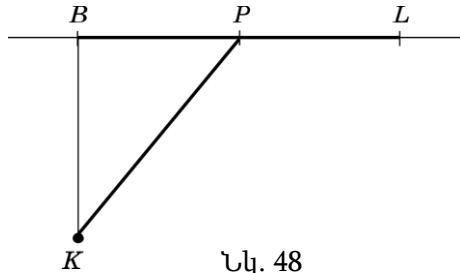


Նկ. 47

Պատասխան՝ $a = \frac{d\sqrt{3}}{3}$, $h = \frac{d\sqrt{6}}{3}$:

117. K նավը գտնվում է ուղղագիծ ափի B մոտակա կետից 9 կմ հեռավորության վրա (Նկար 48): Նավից պետք է սուրհանդակ ուղարկել L ճամբար, որը գտնվում է B կետից 15 կմ հեռավորության վրա: Ափի n ը P կետում սուրհանդակը պետք

է իջնի, որպէսզի ճամբար հասնի ամենաքիչ ժամանակում, եթէ ուտքով նա գնում է 5 կմ/ժ արագությամբ, իսկ նավակով 4 կմ/ժ արագությամբ:



Նկ. 48

Պատասխան՝ B կետից 12 կմ հեռավորության վրա:

118. Տրված V ծավալով քառակուսի հիմքով ուղղանկյունանիստաձև բաց բաք պատրաստելու համար ցանկանում է ծախսել ամենաքիչ քանակությամբ մետաղ: Որքա՞ն պետք է լինեն բաքի լայնությունը և բարձրությունը:

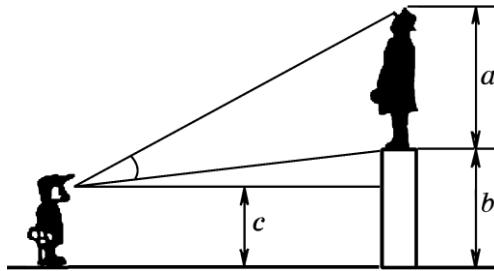
Պատասխան՝ լայնությունը՝ $\sqrt[3]{2V}$, բարձրությունը՝ $\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$:

119. Ինչ-որ պետությունում թանկացավ պահածոների տուփեր պատրաստելու թիթեղը: Պահածոների գործարանի տնտեսող տերը ցանկանում է իր արտադրանքը թողարկել V ծավալով գլանաձև տուփերով՝ մետաղի հնարավոր փոքրագույն ծախսերով: Հաշվել այդպիսի տուփի բարձրությունը և հիմքի տրամագիծը:

Պատասխան՝ գլանի բարձրությունը և հիմքի տրամագիծը հավասար են $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$:

120. a մ բարձրությամբ արձանը տեղադրված է b մ բարձրությամբ պատվանդանի վրա (Նկար 49): Դիտորդը, որի հասակը մինչև աչքերի մակարդակը c մ է ($c < b$) արձանի հիմ-

քից ի՞նչ հեռավորության վրա պետք է կանգնի, որպեսզի արձանը տեսնի ամենամեծ անկյան տակ: Պատվանդանի լայնությունը հաշվի չառնել:



Նկ. 49

Պատասխան՝ $\sqrt{(a+b-c)(b-c)}$:

121. Հաշվել R շառավղով շրջանի մակերեսը:

Պատասխան՝ πR^2 :

122. Հաշվել R շառավղով շրջանագծի երկարությունը:

Պատասխան՝ $2\pi R$:

123. Հաշվել $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ էլիպսով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Պատասխան՝ πab :

124. Հաշվել.

ա) հիմքի r շառավղով և h բարձրությունով գլանի կողմնային մակերեսային մակերեսը,

բ) հիմքի r շառավղով և h բարձրությունով կոնի կողմնային մակերեսային մակերեսը,

գ) r շառավղով սֆերայի մակերեսը:

Պատասխան՝ ա) $S = 2\pi rh$, բ) $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, գ) $S = 4\pi r^2$:

125. Հաշվել.

ա) հիմքի r շառավղով և h բարձրությունով գլանի ծավալը,

բ) հիմքի r շառավղով և h բարձրությունով կոնի ծավալը,

գ) r շառավղով գնդի ծավալը:

Պատասխան՝ ա) $V = \pi r^2 h$, բ) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, գ) $V = \frac{4}{3} \pi r^3$:

126. Հաշվել հատած կոնի ծավալը, եթե նրա հիմքերի շառավիղներն են R և r , իսկ բարձրությունը՝ h :

Պատասխան՝ $V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$:

127. Հաշվել Ox առանցքի շուրջը $y = \sqrt{x}$, $2 \leq x \leq 6$ ֆունկցիայի գրաֆիկի պտտումից առաջացած մակերևույթի մակերեսը:

Պատասխան՝ $\frac{49}{3} \pi$:

128. Հաշվել Ox առանցքի շուրջը $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ ֆունկցիայի գրաֆիկի պտտումից առաջացած մարմնի ծավալը:

Պատասխան՝ $\frac{\pi^2}{2}$:

129. Ուղիղ գծով շարժվող կետի վրա ազդում է այդ ուղիղ գծի ուղղությամբ $F = f(x)$ ուժը, որտեղ x -ը շարժվող կետի կոորդինատն է: Հաշվել F ուժի կատարած աշխատանքը, երբ կետը տեղափոխվում է $x=0$ կետից մինչև $x=2$ կետը, եթե $f(x) = -x^2 + 4$:

Պատասխան՝ $\frac{16}{3}$:

130. Չողի խտությունը $[0;4]$ հատվածում x կոորդինատի $\rho(x) = x + 1$ ֆունկցիան է: Հաշվել ձողի զանգվածը:

Պատասխան՝ 12:

Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

$$131. z = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x + y - 5} \quad 132. z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$$

$$133. z = \frac{\sqrt{x+y-1}}{x} \quad 134. z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}:$$

Գտնել ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները.

$$135. z = x^3 y - 3y^2 + x$$

$$136. z = xy + \frac{x}{y}$$

$$137. z = x^2 y - e^{xy}$$

$$138. z = x \sin(x^2 + y)$$

$$139. z = \cos \frac{x}{y}$$

$$140. z = \frac{x+y}{2y-3}$$

$$141. z = \frac{x-y}{1-xy}$$

$$142. z = \ln(x + y^2):$$

Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը.

$$143. z = x^2 + y^2 + 1 \quad 144. z = x^2 + (y - 1)^2$$

$$145. z = (x - y + 1)^2 \quad 146. z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$$

$$147. z = 3x^2 + xy + 2y^2 - x - 4y:$$

Կազմել մակերևույթի շոշափող հարթության և նորմալի հավասարումները տրված կետում.

$$148. z = xy, M_0(2, 1, 2) \quad 149. z = x^2 + y^2, M_0(1, 1, 2)$$

$$150. z = x^2 - y^2, M_0(1, 2, -3)$$

$$151. z = \frac{x^2}{4} + \frac{xy^2}{9}, M_0(2, 3, 2):$$

152. Գործարանը արտադրում է երկու տեսակի ապրանք: Առաջին տեսակի՝ x միավոր և երկրորդ տեսակի՝ y միավոր: Ապրանքի վաճառքից ստացված շահույթը նկարագրվում է հետևյալ ֆունկցիայով՝

$$P(x, y) = 60x + 80y - 2x^2 - 2y^2 - xy:$$

Գտնել x -ի և y -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում շահույթը մեծագույնն է:

$$\text{Պատասխան՝ } x = \frac{32}{3}, y = \frac{52}{3}:$$

153. Մեքենայի բենզինի ծախսը կախված է արագությունից և արագացումից հետևյալ բանաձևով՝

$$f(v, a) = 0,002v^2 + 0,1a^2 + \frac{10}{v}:$$

Գտնել v -ի և a -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում ծախսը փոքրագույնն է:

Պատասխան՝ $v \approx 13,6; a = 0$:

154. Գտնել 32 սմ^3 ծավալով բաց ուղղանկյունանիստի տեսք ունեցող արկղի չափսերը, որոնց դեպքում նյութի ծախսը, որից պատրաստված է արկղը, կլինի ամենաքիչը:

Պատասխան՝ $x = 4, y = 4, z = 2$:

ԳԼՈՒԽ 4

Թվային ինտեգրում

Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի միջոցով ոչ բոլոր որոշյալ ինտեգրալները կարելի է հաշվել: Շատ ֆունկցիաների նախնականներ չեն արտահայտվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Այդպիսի դեպքերում հարկ է լինում դիմել մոտավոր ինտեգրման մեթոդներին: Հաճախ կիրառություններում ֆունկցիան տրված է լինում աղյուսակով: Ելնելով աղյուսակային տվյալներից՝ թվային ինտեգրման մեթոդներով հնարավոր է հաշվել ինտեգրալի մոտավոր արժեքը: Ժամանակակից հաշվողական տեխնիկան հնարավորություն է տալիս գտնել որոշյալ ինտեգրալի արժեքը ցանկացած ճշտությամբ: Ծանոթանալ որոշյալ ինտեգրալների մոտավոր հաշվման երեք մեթոդների:

1. Ուղղանկյունների մեթոդը

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a; b]$ հատվածում, և պահանջվում է հաշվել $\int_a^b f(x)dx$ ինտեգրալը: $[a; b]$ հատվածը տրոհենք n հավասար մասերի: Կստանանք $[a; b]$ հատվածի $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ տրոհում, ընդ որում ցանկացած j -ի համար

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n} \text{ և } x_j = a + j\Delta x_j \text{ (} j=0,1,\dots,n-1\text{):}$$

Նշանակենք $y_j = f(x_j)$, $\Delta x_j = \Delta x$ և դիտարկենք

$$\sum_{j=1}^n y_{j-1} \Delta x, \sum_{j=1}^n y_j \Delta x,$$

ինտեգրալային գումարները: Առաջին գումարում մասնակցում են ֆունկցիայի արժեքները տրոհման միջակայքերի ձախ ծայրակետերում, իսկ երկրորդում՝ աջ ծայրակետերում:

Համաձայն ինտեգրալի սահմանման՝

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n y_{j-1} \Delta x,$$

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n y_j \Delta x:$$

Հետևաբար ինտեգրալի մոտավոր արժեքը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով.

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{j=1}^n y_{j-1} \Delta x,$$

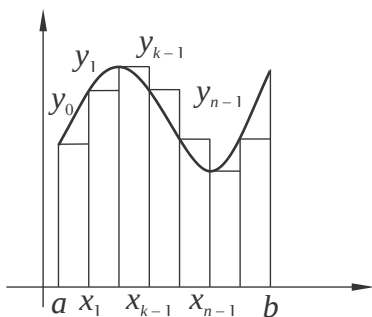
$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{j=1}^n y_j \Delta x:$$

Այս բանաձևերը կարելի է գրել այսպես.

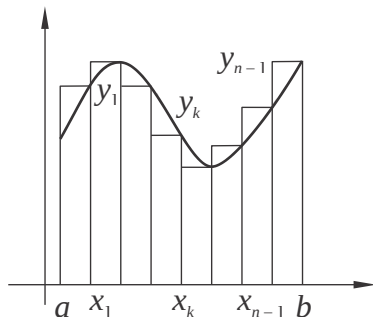
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}), \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n): \quad (2)$$

Սրանք անվանում են ուղղանկյունների բանաձևեր: Եթե $f(x)$ -ը ոչ բացասական ֆունկցիա է, ապա (1) և (2) բանաձևերի երկրաչափական իմաստն այն է, որ $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով, Ox առանցքով $x = a$ և $x = b$ ուղիղներով սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսը փոխարինվում է 50 և 51 նկարներում պատկերված $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ հիմքերով և $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ կամ $y_1, y_2, \dots, y_n$ բարձրություններով ուղղանկյունների մակերեսների գումարներով:



Նկ. 50



Նկ. 51

Երկրաչափական դատողություններից բխում է, որ տրոհման կետերի քանակը ավելացնելով կարելի է ստանալ որոշյալ ինտեգրալի ավելի ճշգրիտ արժեք:

Ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ հատվածում ունի սահմանափակ ածանցյալ՝ $|f'(x)| \leq M, x \in [a; b]$: Այս անհավասարությունը նշանակում է, որ ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը սահմանափակ է: Կիրառություններում այս պահանջը գործնականում միշտ տեղի ունի: Այդ դեպքում ուղղանկյունների բանաձևը կիրառելիս առաջացած սխալի R_n բացարձակ արժեքի համար ճշմարիտ է հետևյալ գնահատականը.

$$|R_n| \leq M \frac{(b-a)^2}{2n}:$$

Բացարձակ սխալը փոքր կլինի նախապես տրված $\varepsilon > 0$ թվից, եթե վերցնենք

$$n \geq M \frac{(b-a)^2}{2\varepsilon}:$$

Հետևաբար՝ $\int_a^b f(x)$ ինտեգրալը տրված ε -ից փոքր ճշտությամբ հաշվելու համար պետք է $[a; b]$ հատվածը տրոհել $M \frac{(b-a)^2}{2\varepsilon}$ -ից մեծ թվով մասերի:

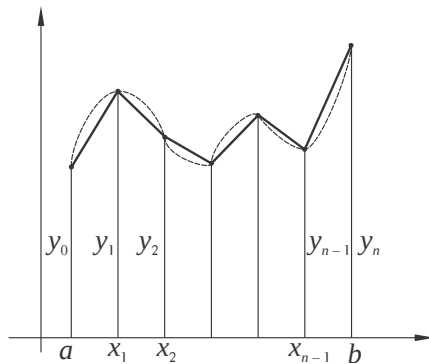
Ուղղանկյունների մեթոդը մոտավոր ինտեգրման ամենապարզ և դրա հետ մեկտեղ ամենակոպիտ մեթոդն է: Սեղանների մեթոդն ապահովում է ավելի բարձր ճշտություն:

2. Սեղանների մեթոդը

Դիտարկելով (1) և (2) բանաձևերի ձախ և աջ մասերի միջին թվաբանականները՝ կստանանք հետևյալ բանաձևը.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y_j + y_{j+1}}{2}: \quad (3)$$

(3) բանաձևի երկրաչափական իմաստը հասկանալու համար դիտարկենք $f(x)$ ոչ բացասական ֆունկցիան և $\int_a^b f(x) dx$ -ը մեկնաբանենք որպես կորագիծ սեղանի մակերես: Եթե տրոհման յուրաքանչյուր հատվածում $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի աղեղը փոխարինենք այն ձգող լարով, ապա կստանանք սեղան, որի մակերեսը հավասար է $\frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_j + y_{j+1}}{2}$: Հետևաբար (3) բանաձևը այդպիսի սեղանների մակերեսների գումար է (Նկար 52):



Նկ. 52

Երկրաչափական դատողություններից հասկանալի է, որ սեղանների մակերեսների գումարը կարելի է վերցնել որպես կորագիծ սեղանի մակերեսի մոտավոր արժեք: (3) բանաձևում նման անդամները միացնելով կստանանք սեղանների բանաձևը.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right): \quad (4)$$

Ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ հատվածում ունի սահմանափակ երկրորդ ածանցյալ՝ $|f''(x)| \leq M_2, x \in [a; b]$: Այդ դեպքում սեղանների բանաձևը կիրառելիս առաջացած սխալի R_n բացարձակ արժեքի համար ճշմարիտ է հետևյալ գնահատականը.

$$|R_n| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}:$$

Բացարձակ սխալը փոքր կլինի նախապես տրված թվից, եթե վերցնենք

$$n > \sqrt{\frac{M_2(b-a)}{12\varepsilon}}:$$

Օրինակ. Սեղանների մեթոդով հաշվենք $\int_1^4 \sqrt{x} dx$ ինտեգրալը և գնահատենք սխալը:

[1,4] հատվածը բաժանելով $\frac{1}{2}$ երկարությամբ 6 հավասար մասերի՝ (4) բանաձևից կստանանք.

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{1}}{2} + \sqrt{1,5} + \sqrt{2} + \sqrt{2,5} + \sqrt{3} + \sqrt{3,5} + \frac{\sqrt{4}}{2} \right) \approx 4,661488$$

Քանի որ $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, հետևաբար $[1,4]$ հատվածում $|f''(x)|$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը $\frac{1}{4}$ է: Սխալի գնահատականի մեջ տեղադրելով $M_2 = \frac{1}{4}$, կունենանք.

$$|R_6| \leq \frac{\frac{1}{4}(4-1)^3}{12 \cdot 6^2} = \frac{1}{64} \approx 0,0156 :$$

Հաշվենք ինտեգրալի ճշգրիտ արժեքը.

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{14}{3} :$$

Նկատենք, որ

$$\left| \frac{14}{3} - 4,661488 \right| = 0,00518 < 0,0156 :$$

3. Պարաբոլների մեթոդը

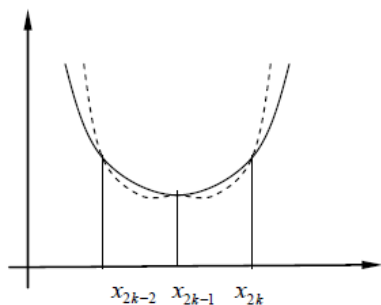
Շատ դեպքերում առավել բարձր ճշտություն է ապահովում որոշյալ ինտեգրալների հաշվման պարաբոլների մեթոդը:

$[a; b]$ հատվածը տրոհենք $2n$ հավասար մասերի՝

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

և նշանակենք $y_j = f(x_j)$, ($j = 0, 1, \dots, 2n - 1, 2n$): $[x_j, x_{j+2}]$ հատվածներից յուրաքանչյուրում $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի աղեղը փոխարինելով պարաբոլի աղեղով՝ կստանանք պարաբոլների (Միմիսոնի) բանաձևը (Նկար 53).

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} ((y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}))$$



Նկ. 53

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ հատվածում ունի չորրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալ և $|f^{(4)}(x)| \leq M_4, x \in [a; b]$, ապա պարաբոլների բանաձևը կիրառելիս առաջացած սխալի R_n բացարձակ արժեքի համար ճշմարիտ է հետևյալ գնահատականը.

$$|R_n| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} :$$

Համեմատելով երեք մեթոդներում բացարձակ սխալի գնահատականները՝ տեսնում ենք, որ ուղղանկյունների մեթոդում այն համեմատական է $\frac{1}{n}$ մեծությանը, սեղանների մեթոդում՝ $\frac{1}{n^2}$ մեծությանը, իսկ պարաբոլների մեթոդում՝ $\frac{1}{n^4}$ մեծությանը:

Պարաբոլների մեթոդը ավելի արագ է զուգամիտում, քան սեղանների մեթոդը, որն էլ իր հերթին ավելի արագ է զուգամիտում, քան ուղղանկյունների մեթոդը:

Խնդիրներ

1. Ինտեգրման միջակայքը տրոհելով 10 մասի՝ $\int_1^2 \sqrt{x} dx$ ինտեգրալը հաշվել

ա) ուղղանկյունների բանաձևով,

բ) սեղանների բանաձևով:

Գնահատել սխալը:

Պատասխան՝ ա) 0,7083, $I \approx 1,20 \pm 0,025$,

բ) 0,6944, $I \approx 1,218 \pm 0,002$:

2. Ինտեգրման միջակայքը տրոհելով երկու մասի՝ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ ինտեգրալը հաշվել

ա) սեղանների բանաձևով,

բ) Սիմփսոնի բանաձևով:

Ցույց տալ, որ սեղանների բանաձևը տալիս է մոտավորապես 2% սխալ, իսկ Սիմփսոնի բանաձևը՝ 0,2% սխալ:

Պատասխան՝ ա) 0,7083, բ) 0,6944:

3. Ինտեգրման միջակայքը տրոհելով երկու մասի՝ $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ ինտեգրալը հաշվել

ա) սեղանների բանաձևով,

բ) Սիմփսոնի բանաձևով:

Պատասխան՝ ա) 0,248, բ) 0,274:

4. Ինտեգրման միջակայքը տրոհելով չորս մասի՝ $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ ինտեգրալը հաշվել

ա) սեղանների բանաձևով,

բ) Սիմփսոնի բանաձևով:

Պատասխան՝ ա) 0,88, բ) 0,88:

5. Աղյուսակում տրված f ֆունկցիայի արժեքների միջոցով սեղանների բանաձևով հաշվել $\int_1^{10} f(x)dx$ ինտեգրալը.

x	1	4	6	9	10
$f(x)$	7	2	-1	3	5

Պատասխան՝ 21,5:

6. Յուրաքանչյուր 5 րոպեն մեկ գրանցելով ավտոմեքենայի արագաչափի ցուցմունքը՝ կազմվել է հետևյալ աղյուսակը.

t	0	5	10	15	20	25	30
$v(t)$	20	50	80	60	90	70	80

$v(t)$ -ն (կմ/ժ) ակնթարթային արագությունն է շարժումը սկսելուց t րոպե անց: Գտնել առաջին կես ժամում ավտոմեքենայի անցած ճանապարհը:

Պատասխան՝ $\approx 33,3$ կմ:

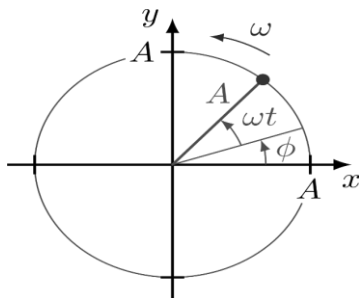
ԳԼՈՒԽ 5

Հարմոնիկ անալիզ

Բնության երևույթների մի զգալի մասն ունի պարբերական բնույթ, այսինքն՝ դրանք որոշակի T ժամանակ հետո կրկնվում են: Այդպիսի երևույթներ են, օրինակ, երկրագնդի պտույտը իր առանցքի շուրջը, տարվա եղանակների հերթափոխումը, տարեկան միջին տեղումները, գետերի ջրառատությունը և այլն: T -ն անվանում են այդ երևույթների պարբերություն: Պարբերական երևույթների հետ կապված մեծությունները դիտարկվում են որպես t ժամանակից կախված f պարբերական ֆունկցիաներ. $f(t + T) = f(t)$: Պարզագույն պարբերական ֆունկցիաները $\sin t, \cos t$ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ են, որոնց համար հիմնական պարբերություն է 2π թիվը: Այդ ֆունկցիաները բացառիկ նշանակություն ունեն պարբերական երևույթների ուսումնասիրման ժամանակ:

1. Ներդաշնակ (հարմոնիկ) տատանումներ

Դիցուք նյութական կետը ω հաստատուն անկյունային արագությամբ շարժվում է A շառավղով շրջանագծի վրայով, այսինքն՝ միավոր ժամանակում կետը գծում է ω ռադիան աղեղ (Նկար 54): Ժամանակի t պահին շրջանագծի վրա կետի արագիսը նշանակենք $x(t)$, օրդինատը՝ $y(t)$:



Նկ. 54

t ժամանակահատվածում կետը կպտտվի ωt ռադիանով: $x(t)$ -ի և $y(t)$ -ի փոփոխման օրենքը տրվում է հետևյալ հավասարումներով.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), (1)$$

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi): (2)$$

Երբ կետը պտտվում է շրջանագծով, նրա պրոյեկցիան արագիսների առանցքի վրա տատանվում է այդ առանցքի $[-A, A]$ հատվածում: Ընդ որում, այդ պրոյեկցիայի շարժումը տրվում է (1) բանաձևով:

Համանմանորեն շրջանագծով շարժվող կետի պրոյեկցիան օրդինատների առանցքի վրա կատարում է տատանումներ՝ շարժվելով ըստ (2) բանաձևի: Նման տատանումները կոչվում են ներդաշնակ:

Ներդաշնակ տատանումներ են անվանում (1) կամ (2) կանոններով կատարվող շարժումները, որտեղ A -ն կոչվում է տատանման ամպլիտուդ, ω -ն՝ անկյունային հաճախականություն, իսկ ϕ -ն՝ սկզբնական փուլ:

Այժմ համոզվեք, որ (1)-ն ու (2)-ն, ըստ էության, նույն կանոնն են: Իրոք՝

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = A \sin\left(\omega t + \left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\right):$$

Այսինքն՝ (1)-ը (2)-ից տարբերվում է միայն սկզբնական փուլով:

Ներդաշնակ տատանման գրաֆիկն անվանում են **սինուսոիդ**:

Պարզագույն պարբերական ֆունկցիաների միջոցով կարելի է կառուցել ավելի բարդերը: Ընդ որում բաղկացուցիչ սինուսոիդային մեծությունները պետք է ունենան տարբեր հաճախականություններ, քանի որ միևնույն հաճախականության սինուսոիդային մեծությունների գումարը նոր բան չի տալիս, այլ բերում է նույն հաճախականության սինուսոիդային մեծության:

Հակադարձ խնդիրը, այսինքն՝ T պարբերությամբ f պարբերական ֆունկցիան վերջավոր կամ անվերջ թվով սինուսոիդային ֆունկցիաներով ներկայացնելու խնդիրը լուծվում է մաթեմատիկական անալիզում: Բավականաչափ մեծ դասերի ֆունկցիաներ կարելի է վերլուծել ըստ եռանկյունաչափական կամ Ֆուրիեի շարքի:

Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ բարդ տատանումները տրոհվում են առանձին հարմոնիկ տատանումների: Այդ պատճառով եռանկյունաչափական շարքի առանձին սինուսոիդային մեծություններն անվանում են $f(t)$ ֆունկցիայի հարմոնիկաներ (առաջին, երկրորդ և այլն): Պարբերական ֆունկցիայի վերլուծումը հարմոնիկաների անվանում են հարմոնիկ անալիզ:

Եթե ֆունկցիան տրված է բանաձևով, ապա հարմոնիկ անալիզի խնդիրը լիովին լուծվում է մաթեմատիկական անալիզից հայտնի Ֆուրիեի շարքի գործակիցների հաշվման բանաձևերով: Սակայն երբ ֆունկցիան տրված է աղյուսակով, ապա այս մեթոդի կիրառումն անհնարին է: Այս դեպքում առաջարկվում են այլ մեթոդներ:

2. Ֆունկցիայի վերլուծումը Ֆուրիեի շարքի

Ենթադրենք տրված է 2π պարբերությամբ $f(x)$ ֆունկցիան՝ $f(x + 2\pi) = f(x)$: Հարմոնիկ անալիզի հիմնական խնդիրն է $f(x)$ ֆունկցիան ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3)$$

Համարելով, որ

$$c_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}, \sin \varphi_n = \frac{a_n}{c_n}, \cos \varphi_n = \frac{b_n}{c_n}, \quad (4)$$

(3) շարքը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx + \varphi_n): \quad (5)$$

Այստեղ c_n -ը հարմոնիկայի ամպլիտուդն է, φ_n -ը՝ փուլը: (3) Ֆուրիեի շարքի գործակիցները գտնում են հետևյալ բանաձևերով.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad (n = 1, 2, \dots): \end{aligned} \quad (6)$$

Դիցուք $[0, 2\pi]$ միջակայքը $x_0, x_1, \dots, x_k (x_i = 2\pi i/k)$ կետերով բաժանված է k հավասար մասերի, և ենթադրենք՝ հայտնի են նաև համապատասխան օրդինատները.

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_k:$$

Այդ դեպքում (6) բանաձևերի ինտեգրալների հաշվման համար կարելի է կիրառել մոտարկման տարբեր մեթոդներ: Ըստ սեղանների բանաձևի՝

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \frac{\pi}{k} \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1} + \frac{y_k}{2} \right),$$

և քանի որ $y_0 = y_k$ ուրեմն

$$\frac{k}{2} a_0 = y_0 + y_1 + \dots + y_{k-1}: \quad (7)$$

a_n և b_n գործակիցները նույնպես հաշվենք սեղանների բանաձևերով.

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} a_k = & y_0 + y_1 \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{k}\right) + y_2 \cos\left(n \cdot \frac{4\pi}{k}\right) + \dots \\ & + y_{k-1} \cos\left(n \cdot \frac{2(k-1)\pi}{k}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} b_k = & y_0 + y_1 \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{k}\right) + y_2 \sin\left(n \cdot \frac{4\pi}{k}\right) + \dots \\ & + y_{k-1} \sin\left(n \cdot \frac{2(k-1)\pi}{k}\right): \end{aligned} \quad (9)$$

(7), (8) և (9) հավասարություններից կստանանք

$$a_0 = \frac{2}{k} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} y_i, \quad a_k = \frac{2}{k} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cdot \cos(kx_i), \quad b_k = \frac{2}{k} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cdot \sin(kx_i)$$

Բեասելի բանաձևերը:

Ֆուրիեի շարքի կարելի է վերլուծել նաև կամայական T պարբերությամբ ֆունկցիաները:

Կիրառություններում հաճախ օգտագործում են Ֆուրիեի շարքի հետևյալ տեսքը.

$$f(x) = \bar{x} + \sum_{k=1}^{N/2} \left(a_k \cos \frac{2\pi kx}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{T} \right),$$

որտեղ k -ն համախմբության տվյալների քանակն է, T -ն՝ տվյալների հիմնական պարբերությունը, $\bar{x}$ -ը՝ տվյալների միջին թվաբանականը: a_k և b_k ($k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$) գործակիցները գտնվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N f(x) \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right), \quad (10)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N f(x) \sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right): \quad (11)$$

Օրինակ. Կատարենք Որոտան գետի միջին ամսական ծախսերի հարմոնիկ անալիզ (գետի ծախս անվանում են գետի լայնակի կտրվածքով 1 վրկ-ում անցած ջրի քանակը՝ արտահայտված խորանարդ մետրերով): Հետևյալ աղյուսակում բերված են Որոտան գետի ամսական ծախսերը.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14.4	15.7	17.7	35	47.7	38.3	14.1	8.4	7.1	10.5	13	14.5

Ունենք $T = 12$, $N = 12$ և $\bar{x} = 19,7$: $f(x)$ -ը յուրաքանչյուր ամսում ծախսի քանակն է: Նախ գտնենք առաջին հարմոնիկայի a_1 և b_1 գործակիցները.

$$a_1 = \frac{2}{12} \left(14,4 \cos \frac{2\pi}{12} + 15,7 \cos \frac{4\pi}{12} + 17,7 \cos \frac{6\pi}{12} + \dots + 14,5 \cos \frac{24\pi}{12} \right)$$

$$a_1 = \frac{2}{12} \left(14,4 \sin \frac{2\pi}{12} + 15,7 \sin \frac{4\pi}{12} + 17,7 \sin \frac{6\pi}{12} + \dots + 14,5 \sin \frac{24\pi}{12} \right)$$

Հաշվելով ստանում ենք, որ $a_1 = -10$ և $b_1 = 9,3$: Այսպիսով ստացանք շարքի առաջին մոտավորությունը.

$$f(x) = 19,7 - 10 \cos \frac{\pi x}{6} + 9,3 \sin \frac{\pi x}{6}$$

x -ի արժեքները տեղադրելով այս բանաձևի մեջ՝ ստանում ենք հետևյալ աղյուսակի առաջին տողը.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15.5	22.4	29	32.8	33.2	30	23.8	17	10.4	6.6	6.3	9.4
13.1	20.4	27.7	32.8	34.3	32.1	26.3	19	11.6	6.6	5.1	7.3
10.8	17.8	25.5	31.4	34.4	33.4	28.6	21.6	13.9	8	5	6
9.4	15.3	22.6	29.1	32.9	33.4	30	24.1	16.8	10	6.4	6

Այնուհետև հաշվում ենք նաև Ֆուրիեի գործակիցների մյուս զույգերը այնքան, ինչքան որ անհրաժեշտ է: Սովորաբար հաշվում են մինչև չորրորդ հարմոնիկան ներառյալ: Կատարելով համապատասխան հաշվարկներ՝ ստանում ենք այսպիսի բանաձև.

$$f(x) = 19,7 - 10 \cos \frac{\pi x}{6} + 9,3 \sin \frac{\pi x}{6} - 12 \cos \frac{\pi x}{3} + 8,05 \sin \frac{\pi x}{3} - 13,7 \cos \frac{\pi x}{2} + 5,8 \sin \frac{\pi x}{2} - 13,7 \cos \frac{2\pi x}{3} + 2,9 \sin \frac{2\pi x}{3} :$$

Աղյուսակի երկրորդ տողը լրացնում ենք՝ x -ի արժեքները տեղադրելով

$$f(x) = 19,7 - 10 \cos \frac{\pi x}{6} + 9,3 \sin \frac{\pi x}{6} - 12 \cos \frac{\pi x}{3} + 8,05 \sin \frac{\pi x}{3}$$

բանաձևի մեջ: Նույն ձևով լրացնում ենք աղյուսակի երրորդ և չորրորդ տողերը:

Խնդիրներ

1. 2π պարբերությամբ $f(x)$ պարբերական ֆունկցիան $(0, 2\pi)$ միջակայքում տրված է $f(x) = x$ բանաձևով: $f(x)$ ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրիեի շարքի:

Պատասխան՝

$$f(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} ;$$

2. 2π պարբերությամբ $f(x)$ պարբերական ֆունկցիան $(-\pi, \pi)$ միջակայքում տրված է $f(x) = x + \pi$ բանաձևով: $f(x)$ ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրիեի շարքի:

Պատասխան՝

$$f(x) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx ;$$

3. 2π պարբերությամբ $f(x)$ պարբերական ֆունկցիան $(-\pi, \pi)$ միջակայքում տրված է $f(x) = x^2$ բանաձևով: $f(x)$ ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրիեի շարքի:

Պատասխան՝

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx ;$$

4. ([9]) Աղյուսակում բերված են միջին ամսական տեղումները միլիմետրերով.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
38,1	63,5	124,5	210,8	157,5	45,7	15,2	22,9	30,5	53,3	109,2	86,4

Կատարել տեղումների հարմոնիկ անալիզ՝ հաշվելով մինչև 4-րդ հարմոնիկան:

Պատասխան՝

$$f(x) = 79,8 + 50,2 \sin \frac{\pi x}{6} - 6,6 \cos \frac{\pi x}{6} - 56,4 \sin \frac{\pi x}{3} - 6,4 \cos \frac{\pi x}{3} - \\ - 3,8 \sin \frac{\pi x}{2} + 26,3 \cos \frac{\pi x}{2} - 5,2 \sin \frac{2\pi x}{3} - 8 \cos \frac{2\pi x}{3} :$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
99,2	120	130	126,6	110,6	86,4	60,4	39,6	29,6	33	49	73,2
47,2	74,3	136,4	178,7	156,3	80	8,3	-8,1	36	85,1	94,7	66,8
43,3	48	140,2	205	152,5	53,7	12,1	20,2	32,2	58,8	98,5	93,1
42,8	56,5	132,2	204,5	161	45,7	11,6	28,7	24,2	58,3	107	85,1

ԳԼՈՒԽ 6

Ֆունկցիաների մոտարկում

1. Ինտերպոլյացիա

Դիցուք տրված է f ֆունկցիայի արժեքներից կազմված հետևյալ աղյուսակը.

Աղյուսակ 1

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\dots$	y_n

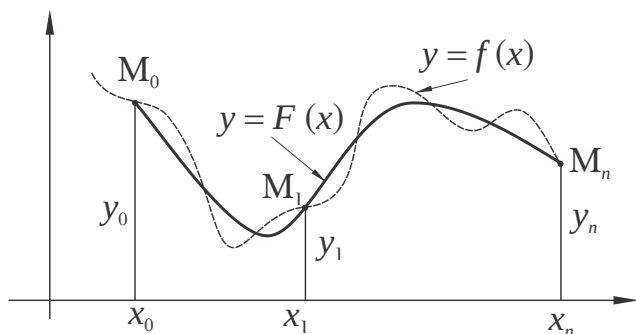
Անհրաժեշտ է ստանալ f ֆունկցիայի արժեքը $[x_0, x_n]$ հատվածին պատկանող այնպիսի x փոփոխականի համար, որը չի համընկնում $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ արժեքներից ոչ մեկի հետ:

Խնդիրը լուծել ինտերպոլյացիայի մեթոդով նշանակում է կառուցել $F(x)$ մոտարկող ֆունկցիա, որի արժեքները $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ կետերում համընկնեն $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքների հետ, այսինքն՝

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n, \quad (1)$$

որտեղ $x_0, x_1, \dots, x_n$ կետերը կոչվում են ինտերպոլյացիոն հանգույցներ:

Երկրաչափորեն դա նշանակում է գտնել $y = F(x)$ կորը, որն անցնում է նշված $M_i(x_i, y_i) (i = 0, 1, \dots, n)$ կետերով (Նկար 55): Եթե x -ը չի պատկանում $[x_0, x_n]$ միջակայքին, ապա որոնելի ֆունկցիայի արժեքները գտնելը կոչվում է էքստրապոլյացիա:



Նկ. 55

Ինտերպոլյացիոն խնդիրը կարող է լուծում չունենալ կամ ունենալ անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Սովորաբար կամայական $F(x)$ ֆունկցիայի փոխարեն փնտրում են (1) պայմաններին բավարարող որոշակի դասի պատկանող ֆունկցիա:

Ֆունկցիաների մոտարկման համար հաճախ կիրառվում են

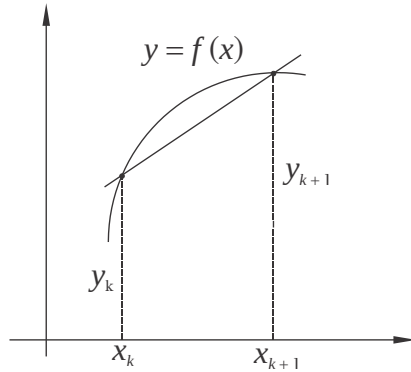
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

n աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամները: Դրանց արժեքները հեշտ են հաշվվում, բազմանդամները հեշտ է դիֆերենցել, ինտեգրել և այլն:

2. Գծային ինտերպոլյացիա

Դիցուք ֆունկցիան տրված է աղյուսակ 1-ով: Աղյուսակում դիտարկենք արգումենտի հարևան երկու՝ x_k և x_{k+1} արժեքները և նշանակենք՝ $y_k = f(x_k)$ և $y_{k+1} = f(x_{k+1})$: (x_k, x_{k+1}) միջակայքում ֆունկցիան փոխարինենք գծային ֆունկցիայով, այսինքն՝ ֆունկցիայի գրաֆիկի աղեղը փոխարինենք այն ձգող

լարով (Նկար 56): Այսպիսի փոխարինումն անվանում են գծային ինտերպոլացիա:



Նկ. 56

(x_k, y_k) և (x_{k+1}, y_{k+1}) կետերով անցնող ուղիղ գծի հավասարումն ունի

$$\frac{y - y_k}{y_{k+1} - y_k} = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

հետևյալ տեսքը, որը կարելի է գրել նաև հետևյալ կերպ.

$$y = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) :$$

Առաջացած սխալը գնահատելու համար $\varphi(x)$ -ով նշանակենք $f(x)$ ֆունկցիայի անհայտ արժեքների և մոտավոր արժեքների տարբերությունը.

$$\varphi(x) = f(x) - y_k - \Delta y_k \frac{x - x_k}{h} ,$$

որտեղ $h = x_{k+1} - x_k$:

Ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածում ունի սահմանափակ երկրորդ ածանցյալ՝ $|f''(x)| \leq M_2, x \in [a, b]$: Ֆիզիկայի տեսակետից երկրորդ ածանցյալի սահմանափա-

կույթյան պայմանը նշանակում է, որ արագացումը սահմանափակ է, այսինքն՝ $f(x)$ ֆունկցիայով նկարագրվող երևույթը փոփոխվում է համեմատաբար հավասարաչափ, իսկ ֆունկցիան՝ ոչ այնքան արագ:

Այդ դեպքում (x_k, x_{k+1}) միջակայքում ճշմարիտ է սխալի հետևյալ գնահատականը.

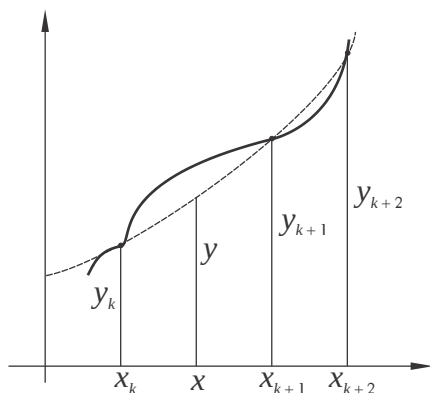
$$|\varphi(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{8}:$$

Գծային ինտերպոլյացիան սովորաբար կիրառում են, երբ առաջացած սխալը փոքր է տվյալների չափման սխալից: Եթե աղյուսակում բերված ֆունկցիայի արժեքների վերջին կարգի համարը նշանակենք m -վ, ապա չափումների սխալը հավասար կլինի $0,5 \cdot 10^{-m}$, և ինտերպոլյացիայի կիրառման պայմանը կունենա հետևյալ տեսքը՝ $M_2 h^2 < 4 \cdot 10^{-m}$:

Աղյուսակի քայլը և ճշգրտությունը պետք է համաձայնեցնել այնպես, որ վերջին պայմանը տեղի ունենա: Սակայն երբեմն, որպեսզի այդ պայմանը տեղի ունենա, անհրաժեշտ է լինում քայլը շատ փոքր ընտրել: Այսպիսի դեպքերում այդ պայմանը հաշվի չեն առնում և կիրառում են ուրիշ մեթոդներ, օրինակ՝ քառակուսային ինտերպոլյացիան:

3. Քառակուսային ինտերպոլյացիա

Դիցուք ֆունկցիան տրված է 1 աղյուսակով: (x_k, x_{k+2}) միջակայքում ֆունկցիան փոխարինենք քառակուսային ֆունկցիայով, այսինքն՝ ֆունկցիայի գրաֆիկի աղեղը փոխարինենք պարաբոլով (Նկար 57): Անհրաժեշտ է գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքները (x_k, x_{k+2}) միջակայքում:



Նկ. 57

Քառակուսային ֆունկցիան փնտրենք $y = ax^2 + bx + c$ տեսքով: Քանի որ քառակուսային ֆունկցիայի արժեքները երեք կետերում պետք է համընկնեն ֆունկցիայի աղյուսակային արժեքների հետ, ուրեմն a, b, c գործակիցները գտնելու համար պետք է լուծել հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} y_k = ax_k^2 + bx_k + c \\ y_{k+1} = ax_{k+1}^2 + bx_{k+1} + c \\ y_{k+2} = ax_{k+2}^2 + bx_{k+2} + c \end{cases}.$$

Քանի որ x_k կետերը իրարից տարբեր են, հետևաբար համակարգի որոշիչը 0-ի հավասար չէ՝

$$\begin{vmatrix} x_k^2 & x_k & 1 \\ x_{k+1}^2 & x_{k+1} & 1 \\ x_{k+2}^2 & x_{k+2} & 1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

Հավասարումների համակարգը լուծելով մատրիցային մեթոդով՝ կստանանք.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k^2 & x_k & 1 \\ x_{k+1}^2 & x_{k+1} & 1 \\ x_{k+2}^2 & x_{k+2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{pmatrix}.$$

Ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածում ունի սահմանափակ երրորդ ածանցյալ՝ $|f'''(x)| \leq M_3, x \in [a, b]$: Այդ դեպքում եթե նշանակենք

$$\varphi(x) = f(x) - ax^2 - bx - c,$$

ապա (x_k, x_{k+2}) միջակայքում ճշմարիտ է սխալի հետևյալ գնահատականը.

$$|\varphi(x)| \leq \frac{M_3 |(x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})|}{6} :$$

4. Լագրանժի ինտերպոլյացիոն բազմանդամը

Դիցուք ֆունկցիան տրված է աղյուսակ 1-ով: Անհրաժեշտ է կառուցել $m \leq n$ աստիճանի $L(x)$ բազմանդամ, որի արժեքները $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ կետերում համընկնեն $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքների հետ, այսինքն՝

$$L(x_0) = y_0, L(x_1) = y_1, \dots, L(x_n) = y_n: (2)$$

(2) պայմաններին բավարարող $L(x)$ բազմանդամը գտնելու համար դիտարկենք հետևյալ n աստիճանի բազմանդամները.

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \\ (k = 0, 1, \dots, n),$$

որոնք ընդունում են 1 արժեք, երբ $x = x_k$, և 0 արժեք, երբ $x = x_i$, եթե $i \neq k$:

Այդ դեպքում

$$L(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x)$$

բազմանդամը բավարարում է (2) պայմաններին: $L(x)$ բազմանդամի աստիճանը n -ից ավել չէ, հետևաբար այն (2) պայմաններով որոշվում է միարժեք: $L(x)$ բազմանդամն անվանում են Լագրանժի ինտերպոլացիոն բազմանդամ:

Նկատենք, որ $l_k(x)$ բազմանդամները կարելի է գրել ավելի կարճ, եթե դիտարկենք

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

բազմանդամը, որը 0 է դառնում

$$x_i (i = 0, 1, \dots, n)$$

հանգույցներում:

Պարզ է, որ

$$(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n) = \frac{\omega(x)}{x - x_k} \quad (x \neq x_k),$$

իսկ

$$\begin{aligned} (x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n) &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\omega(x)}{x - x_k} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\omega(x) - \omega(x_k)}{x - x_k} = \omega'(x_k) : \end{aligned}$$

Այսպիսով.

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}, \quad L(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)} \cdot f(x_k) :$$

Ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածում ունի սահմանափակ $(n + 1)$ -րդ կարգի ածանցյալ՝

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}, x \in [a; b]:$$

Այդ դեպքում եթե նշանակենք $\varphi(x) = f(x) - L(x)$, ապա $[a, b]$ հատվածում ճշմարիտ է սխալի հետևյալ գնահատականը.

$$|\varphi(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} :$$

5. Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը

Դիցուք հայտնի է f ֆունկցիայի փորձնական արժեքներից կազմված աղյուսակը.

x	x_0	x_1	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_n

Կիրառելով ինտերպոլյացիայի մեթոդը՝ կարելի է գտնել այս կախվածությունը արտահայտող բանաձև: Սակայն ինտերպոլյացիայի հանգույցներում ստացված ֆունկցիայի արժեքների համընկնումը փորձնական տվյալների հետ ամեննին չի նշանակում, որ այդ ֆունկցիայի և սկզբնական ֆունկցիայի վարքերը դիտարկվող ամբողջ միջակայքում կհամընկնեն: Բացի դրանից՝ աղյուսակի թվերը ստացվում են տարբեր սարքերով չափումների արդյունքում, որոնք ունեն որոշակի և ոչ միշտ բավականաչափ փոքր չափման սխալ: Մոտարկվող և մոտարկվող ֆունկցիաների հանգույցներում արժեքների ճշգրիտ համընկման պահանջը առավել ևս արդարացված չէ, եթե չափումների արդյունքում $f(x)$ ֆունկցիայի ստացված արժեքները իրենք արդեն մոտավոր են:

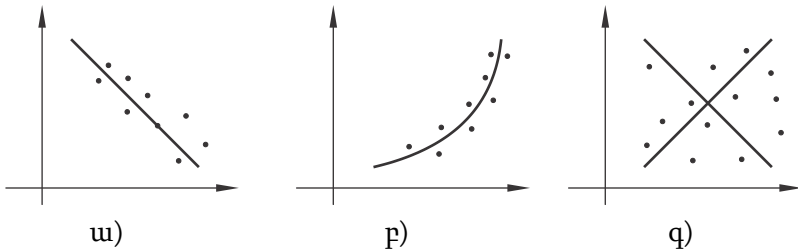
Խնդիրը ձևակերպենք այսպես: $f(x)$ ֆունկցիան տրված է աղյուսակով: Անհրաժեշտ է գտնել տրված տեսքի

$$y = F(x) \quad (3)$$

ֆունկցիա, որը $x_1, x_2, \dots, x_n$ կետերում ընդունում է աղյուսակային $y_1, y_2, \dots, y_n$ արժեքներին հնարավորինս մոտիկ արժեքներ:

Հետագոտողը մոտարկող ֆունկցիայի տեսքը հաճախ որոշում է՝ ելնելով $y = f(x)$ ֆունկցիայի մոտավոր կառուցված գրաֆիկից: Աղյուսակի միջոցով կառուցվում է $f(x)$ ֆունկցիայի կետային գրաֆիկը, այնուհետև՝ անընդհատ կոր, որը լավագույնս է արտահայտում կետերի տեղադրման բնույթը: Ստացված կորի միջոցով որոշվում է մոտարկող ֆունկցիայի տեսքը:

Դիտարկենք հետևյալ նկարները.



Նկ. 58

Նկար 58-ում պատկերված են երեք իրադրություններ.

ա) x -ի և y -ի կապը մոտիկ է գծայինին:

բ) x և y մեծությունների կապը նկարագրվում է ոչ գծային ֆունկցիայով: Օրինակ՝ պարաբոլի մի ճյուղը բավականաչափ լավ է արտահայտում այդ մեծությունների կապը:

գ) x և y մեծությունների միջև կապը բացակայում է, ինչպես էլ մենք ընտրենք կապի բանաձևը, արդյունքները կլինեն անհաջող: Ընտրված երկու ուղիղները հնարավորություն չեն

տալիս եզրակացություններ կատարելու y փոփոխականի սպասվելիք արժեքների մասին ըստ x փոփոխականի արժեքների:

Նշենք, որ աղյուսակային տվյալների խիստ ֆունկցիոնալ կախվածություն դիտարկվում է հազվադեպ, քանի որ աղյուսակի մեծություններից յուրաքանչյուրը կարող է կախված լինել շատ պատահական պատճառներից: Սակայն (3) բանաձևը հետաքրքիր է նրանով, որ հնարավորություն է տալիս գտնել f ֆունկցիայի արժեքները ոչ աղյուսակային x արժեքների համար, այսինքն՝ x -ի փոփոխման ամբողջ միջակայքում:

(3) բանաձևն անվանում են ռեգրեսիայի հավասարում:

Կոորդինատային հարթության կետերով միշտ կարելի է տանել տրված տեսքի կոր, որը որոշակի իմաստով այդպիսի կորերից լավագույնն է, այսինքն՝ «ամենամոտիկն» է կետերի տրված համախմբությանը: Սահմանենք կորի մոտիկության գաղափարը կետերի տրված համախմբությունից: Կան այդ գաղափարի տարբեր սահմանումներ:

Դիցուք մոտարկող $y = F(x)$ ֆունկցիան $x_1, x_2, \dots, x_n$ կետերում ընդունում է $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ արժեքներ: Որպես մոտիկության հայտանիշ հաճախ օգտագործվում է

$$\phi = \min \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2$$

մեծությունը, որտեղ y_i -երը փորձնական արժեքներն են, իսկ $\bar{y}_i$ արժեքները հաշվվում են ռեգրեսիայի հավասարումից: Համարում ենք, որ x_i -ն և y_i -ն հայտնի փորձնական տվյալներ են, իսկ F -ը ռեգրեսիայի կորի հավասարումն է անհայտ պարամետրերով:

Մոտարկող ֆունկցիայի պարամետրերի գնահատման մեթոդը, որը մինիմիզացնում է ϕ մեծությունը, անվանում են **փոքրագույն քառակուսիների մեթոդ**:

Այսպիսով f ֆունկցիայի մոտարկման խնդիրը կարելի է ձևակերպել այսպես. աղյուսակով տրված f ֆունկցիայի համար պետք է գտնել որոշակի տեսքի F ֆունկցիա այնպես, որ քառակուսիների ϕ գումարը լինի ամենափոքրը.

$$\phi = \sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i))^2 \rightarrow \min :$$

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ մոտարկող ֆունկցիան կախված է երեք a, b, c պարամետրերից՝

$$y = F(x, a, b, c):$$

Դիցուք՝

$$F(x_i, a, b, c) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Այդ դեպքում

$$\phi(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i, a, b, c))^2: \quad (4)$$

Խնդիրը բերվեց երեք փոփոխականի $\Phi(a, b, c)$ ֆունկցիայի մինիմումը գտնելուն: Գրենք էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0:$$

Կատանանք

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, c)] \cdot F'_a(x_i, a, b, c) = 0 \\ \sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, c)] \cdot F'_b(x_i, a, b, c) = 0 \\ \sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, c)] \cdot F'_c(x_i, a, b, c) = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

համակարգը, որը լուծելով a, b, c անհայտների նկատմամբ կունենանք $F(x, a, b, c)$ ֆունկցիայի կոնկրետ տեսքը:

Գտնված $F(x, a, b, c)$ ֆունկցիայի արժեքները $x_1, x_2, \dots, x_n$ կետերում կտարբերվեն աղյուսակային $y_1, y_2, \dots, y_n$ արժեքներից:

$$y_i - F(x_i, a, b, c) = \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Թվերն անվանում են շեղումներ: Ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի՝

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

շեղումների քառակուսիների գումարը պետք է լինի ամենափոքրը:

Աղյուսակային ֆունկցիայի երկու տարբեր մոտարկումներից, ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի, լավագույնը պետք է համարել այն, որի համար (4) գումարն ունի փոքրագույն արժեք:

6. Մոտարկող ֆունկցիայի տեսքեր

Կիրառություններում, կախված ֆունկցիայի կետային գրաֆիկի բնույթից, որպես մոտարկող ֆունկցիա հաճախ օգտագործվում են հետևյալ տեսքի ֆունկցիաներ.

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 1) $y = ax + b,$ | 5) $y = \frac{1}{ax+b},$ |
| 2) $y = ax^2 + bx + c,$ | 6) $y = a \ln x + b,$ |
| 3) $y = ax^m,$ | 7) $y = \frac{a}{x} + b,$ |
| 4) $y = ae^{mx},$ | 8) $y = \frac{x}{ax+b}:$ |

Եթե մոտարկող ֆունկցիայի տեսքը հայտնի է, ապա խնդիրը հանգում է պարամետրերի արժեքները գտնելուն:

1. Գծային ֆունկցիա (գծային ռեգրեսիա)

Ֆունկցիոնալ կախվածության ուսումնասիրությունը սովորաբար սկսում են փոփոխականների գծային կապի գնահատականից: Այս դեպքում պետք է հաշվի առնել, որ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով «լավագույն» ուղիղ գիծը միշտ գոյություն ունի, բայց նույնիսկ լավագույնը միշտ չէ, որ բավականաչափ լավ է արտացոլում իրավիճակը: Եթե իրականում փոփոխականների կապը քառակուսային է, ապա գծային ֆունկցիան այդ կապը չի կարող ճիշտ նկարագրել: Եթե x և y մեծությունները ընդհանրապես կապված չեն, մենք միշտ կարող ենք դիտարկումների տվյալ համախմբի համար գտնել «լավագույն» գծային ֆունկցիա, բայց այդ դեպքում a, b պարամետրերի կոնկրետ արժեքները որոշվում են միայն փոփոխականների պատահական շեղումներով և շատ խիստ կտարբերվեն միևնույն ընդհանուր համախմբից ընտրված տարբեր խմբերի համար:

Ենթադրենք, որ x և y մեծությունների կապը գծային է, և մոտարկող ֆունկցիան փնտրենք

$$F(x, a, b) = ax + b \quad (6)$$

տեսքով: Գտնենք $F'_a = x, F'_b = 1$ մասնակի ածանցյալները և տեղադրենք (5) համակարգի մեջ.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \end{array} \right. :$$

Պարզեցնելով վերջին համակարգը՝ կստանանք

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n y_i x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0 \end{array} \right. :$$

Յուրաքանչյուր հավասարումը բաժանելով n -ի՝ կունենանք.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot a + b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \end{array} \right. :$$

Նշանակենք՝

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = M_x, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = M_y,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = M_{xy}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = M_{x^2}: \quad (7)$$

Այդ դեպքում վերջին համակարգը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\begin{cases} M_{x^2} \cdot a + M_x \cdot b = M_{xy} \\ M_x \cdot a + b = M_y \end{cases} :$$

Այս համակարգի M_x, M_y, M_{xy} , և M_{x^2} գործակիցները հեշտությամբ հաշվվում են աղյուսակային տվյալների միջոցով: Լուծելով վերջին համակարգը՝ կստանանք a, b պարամետրերի արժեքները և հետևաբար՝ (6) գծային ֆունկցիայի կոնկրետ տեսքը:

2. Քառակուսային ֆունկցիա (քառակուսային ռեգրեսիա)

Մոտարկող ֆունկցիան փնտրենք

$$F(x, a, b) = ax^2 + bx + c \quad (8)$$

քառակուսային եռանդամի տեսքով: Գտնենք մասնակի ածանցյալները. $F'_a = x^2, F'_b = x, F'_c = 1$:

Կազմենք (5) տեսքի համակարգը.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0 \end{cases} :$$

Ձևափոխելով այս համակարգը՝ կստանանք a, b, c անհայտների նկատմամբ երեք գծային հավասարումների համակարգ, որի գործակիցները արտահայտվում են միայն աղյուսակային տվյալների միջոցով.

$$\begin{cases} M_{x^4} \cdot a + M_{x^3} \cdot b + M_{x^2} \cdot c = M_{x^2 y} \\ M_{x^3} \cdot a + M_{x^2} \cdot b + M_x \cdot c = M_{xy} \\ M_{x^2} \cdot a + M_x \cdot b + c = M_y \end{cases} \quad (9)$$

Այստեղ (7) նշանակումների հետ օգտագործված են նաև հետևյալ նշանակումները.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4 = M_{x^4}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3 = M_{x^3}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = M_{x^2 y} :$$

Լուծելով (9) համակարգը՝ կստանանք մոտարկող ֆունկցիայի a, b, c պարամետրերի արժեքները:

3. Աստիճանային ֆունկցիա (երկրաչափական ռեգրեսիա)

Մոտարկող ֆունկցիան փնտրենք

$$F(x, a, m) = ax^m \quad (10)$$

տեսքով: Ենթադրենք, որ աղյուսակում արգումենտի և ֆունկցիայի արժեքները դրական են, և $a > 0$ պայմանի դեպքում լոգարիթմենք (10) հավասարությունը.

$$\ln F = \ln a + m \cdot \ln x : \quad (11)$$

Քանի որ F -ը f ֆունկցիայի մոտարկող ֆունկցիան է, ապա $\ln F$ ֆունկցիան կլինի $\ln f$ ֆունկցիայի մոտարկող ֆունկցիան:

Ներմուծենք նոր՝ $u = \ln x$ փոփոխական: Այդ դեպքում $\ln F$ -ը կլինի u -ից կախված $\Phi(u)$ ֆունկցիա:

Նշանակենք՝

$$m = A, \ln a = B : \quad (12)$$

Այդ դեպքում (11) հավասարությունը կգրվի

$$\phi(u, A, B) = Au + B$$

տեսքով, այսինքն՝ խնդիրը բերվեց գծային ռեգրեսիայի խնդրին:

4. Ցուցային ֆունկցիա

Դիցուք աղյուսակը այնպիսին է, որ մոտարկող ֆունկցիան նպատակահարմար է փնտրել ցուցային տեսքով.

$$F(x, a, m) = ae^{mx}, a > 0 : \quad (13)$$

Լոգարիթմենք (13) հավասարությունը՝

$$\ln F = \ln a + mx$$

և օգտագործելով (12) նշանակումները՝ այն գրենք

$$\ln F = Ax + B \quad (14)$$

տեսքով:

Այսպիսով, որպեսզի գտնենք (13) տեսքի մոտարկող ֆունկցիա, անհրաժեշտ է աղյուսակում ֆունկցիայի արժեքները լոգարիթմել և նոր աղյուսակի համար կառուցել (14) տեսքի մոտարկող ֆունկցիա: Այնուհետև պետք է (12) նշանակումներին համապատասխան ստանալ պարամետրերի արժեքները և տեղադրել (13) բանաձևի մեջ:

5. Կոտորակագծային ֆունկցիա

ա) Մոտարկող ֆունկցիան փնտրենք

$$F(x, a, b) = \frac{1}{ax + b} \quad (15)$$

տեսքով:

(15) հավասարությունը գրենք

$$\frac{1}{F(x, a, b)} = ax + b$$

տեսքով:

Վերջին հավասարությունից հետևում է, որ a, b պարամետրերի արժեքները գտնելու համար սկզբնական աղյուսակի

փոխարեն պետք է կազմել նոր աղյուսակ, որտեղ արգումենտի արժեքները նույնն են, իսկ ֆունկցիայի արժեքները փոխարինված են հակադարձ թվերով: Այնուհետև պետք է ստացված աղյուսակի համար գտնել $ax + b$ տեսքի մոտարկող ֆունկցիա և a, b պարամետրերի գտնված արժեքները տեղադրել (15) բանաձևի մեջ:

բ) Դիցուք մոտարկող ֆունկցիան ունի

$$F(x, a, b) = \frac{x}{ax + b} \quad (16)$$

տեսքը: Քանի որ

$$\frac{1}{F(x, a, b)} = a + \frac{b}{x},$$

ուրեմն, եթե սկզբնական աղյուսակում x -ի, y -ի արժեքները փոխարինենք $u = \frac{1}{y}, z = \frac{1}{x}$, հակադարձ մեծություններով և մոտարկող ֆունկցիան փնտրենք $u = bz + a$ տեսքով, ապա կգտնենք (16) բանաձևի a, b պարամետրերի արժեքները:

6. Լոգարիթմական ֆունկցիա

Դիցուք մոտարկող ֆունկցիան ունի

$$F(x, a, b) = a \ln x + b \quad (17)$$

տեսքը:

Պարզ է, որ գծային ֆունկցիայի անցնելու համար բավական է նշանակել $\ln x = u$: Այստեղից հետևում է, որ a, b պարամետրերի արժեքները գտնելու համար անհրաժեշտ է սկզբնական աղյուսակում արգումենտի արժեքները լոգարիթմել և նոր աղյուսակի համար կառուցել գծային մոտարկող ֆունկցիա:

Այնուհետև պետք է ստանալ a, b պարամետրերի արժեքները և տեղադրել (17) բանաձևի մեջ:

7. Հիպերբոլ

Եթե աղյուսակով կառուցված կետային գրաֆիկն ունի հիպերբոլի ճյուղի տեսք, ապա մոտարկող ֆունկցիան կարելի է փնտրել

$$F(x, a, b) = \frac{a}{x} + b \quad (18)$$

տեսքով: Գծային ֆունկցիայի անցնելու համար կատարենք $u = \frac{1}{x}$ փոփոխականի փոխարինում և դիտարկենք

$$\Phi(u, a, b) = au + b \quad (19)$$

ֆունկցիան:

(18) տեսքի մոտարկող ֆունկցիա գտնելու համար անհրաժեշտ է սկզբնական աղյուսակում արգումենտի արժեքները փոխարինել հակադարձ թվերով և նոր աղյուսակի համար կառուցել (19) տեսքի գծային մոտարկող ֆունկցիա: Այնուհետև պետք է ստանալ a, b պարամետրերի արժեքները և տեղադրել (18) բանաձևի մեջ:

8. Բազմաչափ գծային ռեգրեսիա

Դիտարկենք շատ փոփոխականի $u = F(x, y, z)$ մոտարկող ֆունկցիաներ: Ենթադրենք՝ մոտարկող ֆունկցիան գծային է և ունի $u = ax + by + cz$ տեսքը:

Պետք է գտնել գործակիցները, եթե դրանց համար ստացվել է $n(n > 3)$ գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = ax_1 + by_1 + cz_1 \\ u_2 = ax_2 + by_2 + cz_2 \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad : \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ u_n = ax_n + by_n + cz_n \end{array} \right.$$

Ենթադրենք, որ համակարգի հավասարումներից որևէ երեքն ունեն գրոյից տարբեր որոշիչ, օրինակ՝ դիցուք

$$\left| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{array} \right| \neq 0 \quad ; \quad (20)$$

Առաջին երեք հավասարումներից գտնված a, b, c պարամետրերի արժեքները կարող են ճշգրիտ չբավարարել մյուս հավասարումներին (կա՛մ հավասարումների գործակիցների անխուսափելի անճշտությունների հետևանքով, կա՛մ այն պատճառով, որ հավասարումներն իրենք մոտավոր են):

Չունենալով հիմքեր գերադասելու հավասարումներից մեկը մյուսից և հաշվի առնելով $\delta_i = ax_i + by_i + cz_i - u_i$ սխալների անխուսափելի առկայությունը՝ աշխատում են այնպես անել, որ այդ սխալների քառակուսիների գումարը՝

$$\phi = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + by_i + cz_i - u_i)^2$$

լինի փոքրագույնը: Այլ կերպ՝ փորձին ամենալավ համապատասխանողները համարվում են a, b, c պարամետրերի այն արժեքները, որոնց դեպքում $\phi = \phi(a, b, c)$ ֆունկցիան ընդունում է ամենափոքր արժեք:

Որպեսզի գտնենք այդ արժեքները, հավասարեցնենք զրոյի ϕ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներն ըստ a, b, c փոփոխականների.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i (ax_i + by_i + cz_i - u_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i (ax_i + by_i + cz_i - u_i) = 0 : \\ \sum_{i=1}^n z_i (ax_i + by_i + cz_i - u_i) = 0 \end{cases}$$

Օգտագործելով (7) նշանակումները՝ ստացված համակարգը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$\begin{cases} M_{x^2} \cdot a + M_{xy} \cdot b + M_{xz} \cdot c = M_{xu} \\ M_{yx} \cdot a + M_{y^2} \cdot b + M_{yz} \cdot c = M_{yu} \\ M_{zx} \cdot a + M_{zy} \cdot b + M_{z^2} \cdot c = M_{zu} \end{cases} ;$$

Որպեսզի համոզվենք, որ այս համակարգով a, b, c փոփոխականների արժեքները որոշվում են միարժեքորեն, պետք է ցույց տալ, որ համակարգի որոշիչը զրոյից տարբեր է: Հանրահաշվի հայտնի թեորեմի համաձայն՝ այդ որոշիչը կարելի է ներկայացնել

$$\begin{vmatrix} M_{x^2} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{y^2} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{z^2} \end{vmatrix} = \sum_{(i,j,k)} \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}$$

տեսքով, որտեղ գումարումը կատարվում է $1, 2, \dots, n$ տարրերից բոլոր հնարավոր երեք (i, j, k) զուգորդություններով: Քանի որ աջ մասի որոշիչներից գոնե մեկը, ըստ մեր ենթադրության,

գրոյից տարբեր է, ուրեմն ձախ մասի որոշիչը նույնպես գրոյից տարբեր է:

Մնում է համոզվել, որ համակարգից գտնված փոփոխականների արժեքների դեպքում ϕ ֆունկցիան իրոք ընդունում է ամենափոքր արժեքը: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ բավականաչափ մեծ սֆերայից դուրս ϕ ֆունկցիան ցանկացած չափով մեծ կլինի: Այդ նպատակով դիտարկենք ϕ արտահայտության առաջին երեք փակագծերի արժեքները՝

$$\delta_1 = ax_1 + by_1 + cz_1 - u_1, \quad \delta_2 = ax_2 + by_2 + cz_2 - u_2,$$

$$\delta_3 = ax_3 + by_3 + cz_3 - u_3:$$

(20)-ի շնորհիվ այդ արժեքների միջոցով լրիվ որոշակի հաստատուն գործակիցներով արտահայտվում են նաև a, b, c փոփոխականները, այնպես որ $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ մեծությունների սահմանափակությունից բխում է a, b, c մեծությունների սահմանափակությունը: Այստեղից պարզ է, որ երբ $r^2 = a^2 + b^2 + c^2$ -ն անվերջ աճում է, ապա անվերջ աճում է նաև $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2$ -ն, հետևաբար նաև ϕ -ն:

Խնդիրներ

1. Հետևյալ աղյուսակի տվյալներով կազմել Լագրանժի ինտերպոլյացիոն բազմանդամը.

x	1	2	3	4
y	2	3	4	5

Պատասխան՝ $y = x + 1$:

2. Հետևյալ աղյուսակի տվյալներով կազմել Լագրանժի ինտերպոլյացիոն բազմանդամը.

x	2	4	6	8	10
y	0	3	5	4	1

Պատասխան՝ $y = \frac{1}{32}(x^4 - 26x^3 + 220x^2 - 664x + 640)$:

3. Հետևյալ աղյուսակի տվյալներով, կիրառելով փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը, գտնել մոտարկող $y = ax + b$ գծային ֆունկցիան.

x	-0,2	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8
y	0,96	1,4	1,56	1,74	1,92	2,04

Պատասխան՝ $y = 1,03x - 1,19$:

4. Հետևյալ աղյուսակի տվյալներով, կիրառելով փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը, գտնել մոտարկող $y = ax^2 + b$ քառակուսային ֆունկցիան.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	1,2	1,1	2,35	3,05	4,4	5,5

Պատասխան՝ $y = 1,48x^2 + 1,23$:

5. Հետևյալ աղյուսակի տվյալներով, կիրառելով փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը, գտնել մոտարկող $y = ax^m$ աստիճանային ֆունկցիան.

x	1	2	3	4	5
y	7,1	27,8	62,1	110	161

Պատասխան՝ $y = 7,132x^{1,958}$:

ԳԼՈՒԽ 7

Ղիֆերենցիալ հավասարումներ

Բնագիտության շատ խնդիրների լուծումներ բերվում են այնպիսի հավասարումների լուծման, որոնք պարունակում են որոնելի ֆունկցիան, որը կախված է մեկ կամ մի քանի փոփոխականներից, այդ փոփոխականները և որոնելի ֆունկցիայի տարբեր կարգի ածանցյալները: Այդպիսի հավասարումներն անվանում են ղիֆերենցիալ հավասարումներ: Որևէ երևույթ հետազոտելու արդյունքում ստացված ղիֆերենցիալ հավասարումն անվանում են երևույթի ղիֆերենցիալ մոդել: Մենք կդիտարկենք միայն այնպիսի մոդելներ, որոնք նկարագրվում են սովորական ղիֆերենցիալ հավասարումներով, այսինքն՝ հավասարումներով, որոնց մեջ անհայտ ֆունկցիան կախված է միայն մեկ փոփոխականից:

1. Կոշիի խնդրի դրվածքը

Առաջին կարգի ղիֆերենցիալ հավասարում անվանում են

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

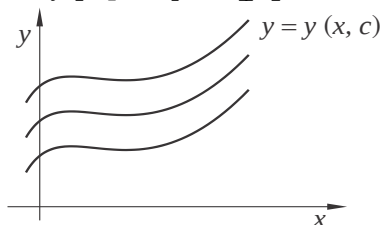
տեսքի հավասարումը: $y(x)$ -ը (1) ղիֆերենցիալ հավասարման լուծում է, եթե այն հավասարման մեջ տեղադրելիս ստացվում է նույնություն: (1) հավասարման լուծումները հաճախ ունենում են

$$y = y(x, c), \quad (2)$$

որտեղ c -ն կամայական հաստատուն է: Դա երկրաչափորեն կարելի է մեկնաբանել որպես կորերի ընտանիք, որոնցից յուրաքանչյուրը (1) հավասարման լուծման գրաֆիկն է (Նկար

59): (2) ընտանիքից մեկ կոր (մասնակի լուծում) ընտրելու համար անհրաժեշտ է տալ սկզբնական պայման՝

$y(x_0) = y_0$ (3) այսինքն՝ որոնելի լուծման կորի մեկ կետ:



Նկ. 59

Որպես կանոն գործնական նշանակություն ունեն դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումները: (1) հավասարման (3) սկզբնական պայմանին բավարարող մասնակի լուծումները գտնելու խնդիրը անվանում են Կոշիի խնդիր:

Դիֆերենցիալ հավասարումների ընդհանուր տեսությունից հայտնի է, որ եթե (1) հավասարման աջ մասի $f(x, y)$ ֆունկցիան դիտարկվող տիրույթում անընդհատ է և ունի սահմանափակ մասնակի ածանցյալներ, ապա այդ հավասարումն ունի (3) պայմանին բավարարող միակ լուծում: n -րդ կարգի

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (4)$$

դիֆերենցիալ հավասարումների համար Կոշիի խնդիրը

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (5)$$

սկզբնական պայմաններին բավարարող $y = y(x)$ լուծումը գտնելն է, որտեղ $y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)}$ -ը տրված թվեր են:

n -րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումները կարելի է բերել առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի:

Օրինակ՝ $y'' = f(x, y, y')$ երկրորդ կարգի հավասարումը փոփոխականի փոխարինման միջոցով կարելի է գրել որպես առաջին կարգի երկու հավասարումների համակարգ՝

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}.$$

Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծման մեթոդները հիմնված են մեկ հավասարման լուծման համապատասխան մեթոդների վրա:

Գոյություն ունեն դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման շատ մեթոդներ, որոնք պայմանականորեն կարելի է բաժանել երեք հիմնական խմբերի:

1. **Անալիտիկ մեթոդներ**, որոնց կիրառությունը հնարավորություն է տալիս գտնել դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումները տարրական ֆունկցիաների միջոցով:

2. **Գրաֆիկական մեթոդներ**, որոնք տալիս են գրաֆիկի տեսքով մոտավոր լուծումներ (Էյլերի մեթոդ):

3. **Թվային մեթոդներ**, երբ որոնելի ֆունկցիան ստացվում է աղյուսակի տեսքով (Ռունգե-Կուտտայի մեթոդ):

Դիտարկենք (1) տեսքի առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման կիրառությունների համար կարևոր որոշ մեթոդներ:

2. Դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման անալիտիկ մեթոդներ

ա) $y' = f(x)$ տեսքի հավասարումներ:

Այս տեսքի հավասարումները լուծվում են ֆունկցիայի նախնականը գտնելու միջոցով.

$$y = \int f(x)dx:$$

բ) Անջատվող փոփոխականներով հավասարումներ:

Անջատվող փոփոխականներով հավասարումներ անվանում են

$$y' = f(x)g(y) \quad (6)$$

տեսքի հավասարումները, որտեղ $g(y) \neq 0$:

$y'(x)$ -ը փոխարինենք $\frac{dy}{dx}$ -ով, հավասարման երկու մասերը բաժանենք $g(y)$ -ի և բազմապատկենք dx -ով, կստանանք՝

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad (7)$$

հավասարումը: Ինտեգրելով (7) հավասարումը՝

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

կունենանք (6) հավասարման ընդհանուր լուծումը (անբացահայտ):

գ) Համասեռ հավասարումներ:

Համասեռ հավասարումներ անվանում են

$$y'(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) \quad (8)$$

տեսքի հավասարումները: Դրանց լուծումը $y = ux$ փոփոխականի փոխարինման միջոցով հանգեցվում է անջատվող փոփոխականներով հավասարման: u -ն օժանդակ անհայտ ֆունկցիա է x -ից: Գտնենք ածանցյալը և տեղադրենք (8)-ի մեջ: Կստանանք՝ $u + xu' = f(u)$: Ստացված հավասարման փոփոխականները հեշտությամբ անջատվում են: Նախ

$$x \frac{du}{dx} = f(u) - u,$$

այնուհետև

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}:$$

դ) **Գծային հավասարումներ:**

Գծային հավասարումներ անվանում են

$$y'(x) + f(x)y = g(x) \quad (9)$$

տեսքի հավասարումները: (9) հավասարման մեջ կատարենք $y = uv$ փոփոխականի փոխարինում, որտեղ u -ն և v -ն օժանդակ անհայտ ֆունկցիաներ են x -ից: Կստանանք՝

$$u'v + uv' + f(x)uv = g(x) \Rightarrow u'v + u(v' + f(x)v) = g(x):$$

v օժանդակ ֆունկցիան ընտրենք այնպես, որ

$$v'(x) + f(x)v = 0: \quad (10)$$

(10)-ը անջատվող փոփոխականներով հավասարում է: Իրոք՝

$$\frac{dv}{dx} = -f(x)v, \frac{dv}{v} = -f(x)dx,$$

և

$$\int \frac{dv}{v} = - \int f(x)dx:$$

Հետևաբար՝ որպես v կարելի է ընտրել $v = e^{-\int f(x)dx}$ ֆունկցիան:

v -ն ընտրելուց հետո գծային հավասարման լուծումը հանգում է

$$u'v = g(x) \quad (11)$$

հավասարման լուծմանը: (11)-ը ա) տեսքի հավասարում է, որի ընդհանուր լուծումն է.

$$u = \int \frac{g(x)}{v} dx:$$

Այսպիսով ստացանք (9) հավասարման լուծման բանաձևը՝

$$y = uv = \int \frac{g(x)}{v} dx \cdot e^{-\int f(x)dx},$$

որտեղ $v = e^{-\int f(x)dx}$:

ե) **Երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով հավասարումներ**

Երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով հավասարումներ անվանում են.

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (12)$$

տեսքի հավասարումները, որտեղ p -ն և q -ն հաստատուն թվեր են:

(12) հավասարման լուծումը փնտրենք

$$y = e^{kx} \quad (13)$$

տեսքով: (13)-ը տեղադրելով (12)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0,$$

որտեղից, քանի որ $e^{kx} \neq 0$, կունենանք՝

$$k^2 + pk + q = 0: \quad (14)$$

(14) հավասարումն անվանում են (12)-ի բնութագրիչ հավասարում:

Կախված $D = p^2 - 4q$ տարբերիչի նշանից՝ հնարավոր է երեք դեպք.

I. $D > 0$: Այս դեպքում բնութագրիչ հավասարումն ունի իրարից տարբեր երկու՝ k_1 և k_2 արմատ: (12) հավասարման ընդհանուր լուծումը տրվում է

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

բանաձևով, որտեղ c_1 -ը և c_2 -ը կամայական հաստատուններ են:

II. $D = 0$: Այս դեպքում բնութագրիչ հավասարումն ունի մեկ k_0 արմատ: (12) հավասարման ընդհանուր լուծումը տրվում է

$$y = c_1 e^{k_0 x} + c_2 x e^{k_0 x}$$

բանաձևով, որտեղ c_1 -ը և c_2 -ը կամայական հաստատուններ են:

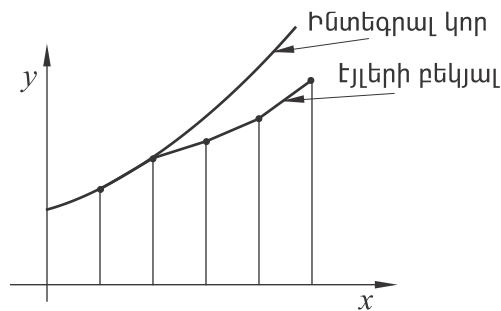
III. $D < 0$: Այս դեպքում բնութագրիչ հավասարումն ունի իրարից տարբեր երկու $k_1 = \alpha + i\beta$ և $k_2 = \alpha - i\beta$ կոմպլեքս արմատ: (12) հավասարման ընդհանուր լուծումը տրվում է

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

բանաձևով, որտեղ c_1 -ը և c_2 -ը կամայական հաստատուններ են:

3. Էյլերի մեթոդը

Էյլերի մեթոդը հնարավորություն է տալիս դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը կառուցել գրաֆիկորեն և որոնելի ֆունկցիան գտնել աղյուսակի միջոցով: $y' = f(x, y)$ դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալ կորը h երկարություն ունեցող $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում փոխարինենք $y - y_k = f(x_k, y_k)(x - x_k)$ շոշափողի հաստվածով: Ինտեգրալ կորը կփոխարինվի բեկյալով, որն անվանում են Էյլերի բեկյալ (Նկար 60):



Նկ. 60

Էյլերի մեթոդով y -ի արժեքները գտնվում են $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$ բանաձևով, որտեղ

$$\Delta y_k = f(x_k, y_k) \cdot h, \quad y_k = y(x_k), \quad x_k = x_0 + kh.$$

Էյլերի մեթոդի ճշտությունը մեծ չէ, ընդ որում սխալը յուրաքանչյուր հաջորդ քայլում սովորաբար մեծանում է: Ճշտության գնահատման ընդունված մեթոդը հետևյալն է. պետք է կատարել կրկնակի հաշիվ՝ h քայլով և $\frac{h}{2}$ քայլով, այնուհետև համեմատել ստացված արդյունքներում տասնորդական նիշերը. դրանց համընկնումը հիմք է տալիս ենթադրելու, որ դրանք ճիշտ են: Մեթոդի սխալը համեմատական է h^2 -ուն:

Օրինակ. Էյլերի մեթոդով լուծենք Կոշիի հետևյալ խնդիրը.

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1.$$

Ընտրենք՝ $h = 0,1$; $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $f(x, y) = x + y$: Կատարենք հաջորդական հաշվարկներ.

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,1(0 + 1) = 1,1,$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1(0,1 + 1,1) = 1,22,$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1,22 + 0,1(0,2 + 1,22) = 1,362.$$

Սա նշանակում է, որ եթե $y(x)$ -ը Կոշիի հետևյալ խնդրի ճշգրիտ լուծումն է, ապա $y(0,3) \approx 1,362$:

4. Ռունգե-Կուտտայի մեթոդը

Դիտարկենք $y' = f(x, y)$ դիֆերենցիալ հավասարումը՝ $y(x_0) = y_0$ սկզբնական պայմանով:

Բերենք Ռունգե-Կուտտայի մեթոդով մոտավոր լուծման հաշվարկային բանաձևերը՝ առանց համապատասխան դուրսբերումների:

Ընտրենք h քայլը և նշանակենք՝

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y(x_i), \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Որոնելի y ֆունկցիայի y_i հաջորդական մոտավորությունները որոշվում են $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ բանաձևով, որտեղ

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right),$$

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \\ k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \\ k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right) \end{cases} \quad (15)$$

Միայնը համեմատական է h^5 -ին, և հետևաբար բավականաչափ փոքր h քայլի դեպքում մոտավոր լուծումը մոտ կլինի ճշգրիտ լուծմանը:

Ռունգե-Կուտտայի մեթոդի երկրաչափական իմաստը հետևյալն է. (x_i, y_i) կետից տեղաշարժվում են α_1 անկյունով որոշվող ուղղությամբ, որի համար $tg\alpha_1 = f(x_i, y_i)$: Այդ ուղղության վրա ընտրվում է $\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$ կետը: Այնուհետև (x_i, y_i) կետից տեղաշարժվում են α_2 անկյունով որոշվող ուղղությամբ, որի համար $tg\alpha_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$, և այդ ուղղության վրա ընտրվում է $\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$ կետը: Վերջապես, (x_i, y_i) կետից տեղաշարժվում են α_3 անկյունով որոշվող ուղղությամբ, որտեղ $tg\alpha_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$, և այդ ուղղության վրա ընտրվում է $(x_i + h, y_i + k_3)$ կետը: Դրանով տրվում է ևս մեկ ուղղություն, որը որոշվում է α_4 անկյունով, որի համար

$tg\alpha_4 = f(x_i + h, y_i + k_3)$: Ստացված չորս ուղղությունները միջինացվում են (15)-ի վերջին բանաձևին համապատասխան: Այդ վերջնական ուղղության վրա էլ ընտրվում է հերթական $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i + h, y_i + \Delta y)$ կետը:

Խնդիրներ

1. Լուծել դիֆերենցիալ հավասարումը.

ա) $y' = x^2 y$

բ) $y' = x^2 e^{-y}$

գ) $xy^2 y' = x + 2$

դ) $y' = \frac{x+y}{x}, y(1)=2$

ե) $x^2 y' = xy + y^2, y(1) = -1$

զ) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

է) $y' + \frac{1}{x}y = \sqrt{x}, y(1) = 0$

ը) $y'' - 4y' + 4y = 0$

թ) $y'' - 4y' + 13y = 0$

ժ) $y'' - 7y' + 6y = 0, y(0) = 1,$

$y'(0) = 2:$

Պատասխան՝

ա) $y = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + c}$

բ) $y = \ln\left(\frac{x^3}{3} + c\right)$

գ) $y = \sqrt[3]{3(1 + 2\ln|x| + c)}$

դ) $y = -x(\ln|x| + 2)$

ե) $y = -\frac{x}{\ln|x| + 1}$

զ) $y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + c\right)$

է) $y = \frac{1}{x} \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c\right)$

ը) $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

թ) $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

ժ) $y = \frac{4}{5}e^x + \frac{1}{5}e^{6x}$

2. $p = p(h)$ -ը ծովի մակարդակից h բարձրության վրա մթնոլորտային ճնշման մեծությունն է: p -ն նվազող ֆունկցիա է, և նրա փոփոխման արագությունը ուղիղ համեմատական է p -ին: Ապացուցել, որ

ա) p -ն բավարարում է $\frac{dp}{dh} = -kp$ դիֆերենցիալ հավասարմանը, որտեղ $k > 0$ համեմատականության գործակիցն է:

բ) Գտնել ճնշման կախումը բարձրությունից:

Պատասխան՝ $p(h) = p_0 e^{-kh}$, որտեղ p_0 -ն ճնշման արժեքն է ծովի մակարդակի վրա:

3. xOy հարթության վրա գտնել $(0;0)$ կետով անցնող կոր, որի ցանկացած կետում տարված շոշափողի անկյունային գործակիցը հավասար է շոշափման կետի արագիսի կրկնապատիկին:

Պատասխան՝ $y = x^2 + c$, որտեղ c -ն կամայական հաստատուն է:

4. Կետը x -երի առանցքով կատարում է հավասարաչափ արագացող շարժում: Գտնել կետի շարժման օրենքը:

Պատասխան՝ $y = \frac{at^2}{2} + c_1 t + c_2$:

5. Հրացանից կրակեցին ուղղաձիգ դեպի վեր: Գտնել փամփուշտի շարժման օրենքը, եթե ազատ անկման արագացումը 10 մ/վրկ² է, փամփուշտի՝ հրացանից դուրս թռչելու արագությունը՝ 800 մ/վրկ: Օղի դիմադրությունն անտեսել:

Պատասխան՝ $x(t) = -5t^2 + 800t$:

6. Տակառի յուրաքանչյուր 100 լ խառնուրդում կա 10 կգ աղ: 1 բոպեում տակառի մեջ լցվում է 30 լ ջուր, և տակառից դուրս է գալիս 20 լ խառնուրդ: Ենթադրենք, որ աղը ակնթարթորեն լուծվում է խառնուրդի մեջ:

Ապացուցել, որ

ա) ժամանակի t պահին տակառի աղի $x(t)$ քանակությունը բավարարում է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարմանը.

$$x'(t) = -\frac{20x(t)}{100 + 10t}.$$

բ) Ժամանակի t պահին տակադի աղի $x(t)$ քանակությունը կարելի է գտնել $x(t) = \frac{1000}{(10+t)^2}$ բանաձևով:

7. Բանկը ավանդի համար տարեկան վճարում է 2%, բայց վերցնում է 10000 դրամ տարեկան վճար:

ա) Ապացուցել, որ եթե ժամանակի պահին $b(t)$ -ով նշանակենք բանկում գտնվող գումարի չափը, ապա $b(t)$ -ն բավարարում է

$$b'(t) = 0,02b(t) - 10000$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը:

բ) Գտնել ավանդի չափը 10 տարի հետո, եթե սկզբնական գումարը 1500000 դրամ էր:

Պատասխան՝ բ) ≈ 1721000 :

8. Էյլերի մեթոդով լուծելով $y' = x + y, y(0) = 1$ Կոշիի խնդիրը՝ հաշվել $y(0,5)$ -ը (քայլը վերցնել $h=0,05$):

Պատասխան՝ $y(0,5) \approx 1,758$:

9. Էյլերի մեթոդով լուծելով $y' = 15 - 3y, y(0) = 0$ Կոշիի խնդիրը, հաշվել $y(0,5)$ -ը (քայլը վերցնել $h=0,1$):

Պատասխան՝ $y(0,5) \approx 4,16$:

ԳԼՈՒԽ 8

Մաթեմատիկական մոդելավորում

Մաթեմատիկական մոդել անվանում են տարրերի ցանկացած համախմբություն՝ դրանք միացնող գործողություններով:

Բովանդակային առումով հետաքրքիր են այն մոդելները, որոնք իրական օբյեկտների, գործընթացների և երևույթների համարժեք արտապատկերումներ են: Մոդելով արտապատկերվող օբյեկտների ճանաչման մեթոդը անմիջականորեն կապված է մաթեմատիկական մոդելների հետ:

Դիտարկենք մի տարրական օրինակ, որը բացատրում է իմացության ընդհանուր մաթեմատիկական մեթոդը: a, b և c տարրերի $a + b = c$ բանաձևով արտահայտվող հարաբերությունը մաթեմատիկական մոդել է, որը միարժեք արտապատկերում է, օրինակ, a, b քանակներով քարերի երկու կույտերի միավորումը c քանակով ընդհանուր կույտի: $a + b = c$ մոդելը համարժեք է այդ միավորմանը, իսկ գումարման գործողությունը համապատասխանում է երկու կույտերի միավորմանը մեկ կույտի:

Այսպիսով, իմացության ընդհանուր մաթեմատիկական մեթոդը բաղկացած է հետազոտվող օբյեկտի, պրոցեսի կամ երևույթի համար մաթեմատիկական մոդելի կառուցումից, այդ մոդելի ուսումնասիրությունից և մոդելի համար ստացված արդյունքների տեղափոխումից ռեալ օբյեկտի վրա:

Մաթեմատիկական ոչ միայն ստեղծում է իր բազմազան ներքին մոդելները, այլև բնագիտության տարբեր բնագավառներում կառուցում է մաթեմատիկական մոդելներ: Մոդելների

կառուցման մեջ մաթեմատիկական հաճախ առաջ է անցել բնագիտության և տեխնիկայի կարիքներից:

Ժամանակակից մաթեմատիկայի կարևորագույն խնդիրներից մեկը իմացության ընդհանուր մաթեմատիկական մեթոդի իրականացումն է: Այն առաջին հերթին ներառում է մաթեմատիկական նոր մոդելների կառուցում յուրաքանչյուր բնագավառում՝ կենսաբանության մեջ, տիեզերքում, ֆանտաստիկ նոր տեխնոլոգիաներում և տեխնիկայում, միկրոաշխարհում, տնտեսական և սոցիալական երևույթների ճանաչողության մեջ և այլուր:

Մաթեմատիկական մեթոդները մեծ կիրառություն ունեն նաև տնտեսագիտության մեջ՝ բարդ համակարգերի դեկավարման գործընթացում: Ժամանակակից աշխարհում կառավարումը հեշտ գործ չէ, քանի որ հասարակության քաղաքական, տնտեսական, սոցիալական կառուցվածքը, լինելով բարդ, մշտապես էլ ավելի է բարդանում: Միևնույն ժամանակ էֆեկտիվ կառավարման համար անհրաժեշտ է մեծ կարևորություն տալ կազմակերպության տարբեր տարրերի փոխհարաբերություններին, ինչպես նաև նրա փոխհարաբերություններին շրջապատի հետ:

Բարդ համակարգերի դեկավարների համար հզոր զենք է մոդելավորումը: Մոդել է համարվում իրական օբյեկտի, համակարգի ներկայացումը ինչ-որ ձևով, որը տարբեր է նրա իրական գոյության ձևից: Մոլորաբար մոդելը միջոց է, որը օգնում է հասկանալ կամ կատարելագործել համակարգը:

Մաթեմատիկական մոդելի վերլուծությունը հետազոտողի համար հզոր գործիք է, որը կարող է օգտագործվել համակարգի վարքը կանխատեսելու և ստացված արդյունքները համեմատելու համար: Մոդելավորումը հնարավորություն է

տալիս տրամաբանական ճանապարհով կանխատեսել այլընտրանքային գործողությունների հետևանքները և ցույց է տալիս, թե դրանցից որ մեկին պետք է առավելություն տալ:

Վերլուծել մաթեմատիկական մոդելները ավելի հեշտ է և արագ, քան իրական օբյեկտի վարքը փորձնականորեն որոշելը: Բացի դրանից, մաթեմատիկական մոդելի վերլուծությունը թույլ է տալիս առանձնացնել տվյալ համակարգի ավելի էական հատկությունները, որոնց վրա արժե հատուկ ուշադրություն դարձնել որոշում ընդունելու ժամանակ:

Մաթեմատիկական մոդելավորման լրացուցիչ առավելությունն այն է, որ դժվար չէ փորձարկել դիտարկվող համակարգը իդեալական կամ արտակարգ պայմաններում, որոնք իրական օբյեկտների կամ երևույթների համար պահանջում են մեծ ծախսեր կամ կապված են ռիսկի հետ:

Բերենք մաթեմատիկական մոդելների օրինակներ:

1. Մարմնի հովացումը

T_0 ջերմաստիճան ունեցող մարմինը տեղադրում են մի միջավայրում, որի ջերմաստիճանը T_1 է ($T_0 > T_1$): Գտնենք մարմնի $T = T(t)$ ջերմաստիճանի t ժամանակից կախման օրենքը:

Ֆիզիկայի դասընթացից հայտնի է, որ մարմնի սառեցման $\frac{dT}{dt}$ արագությունը համեմատական է մարմնի և շրջապատող միջավայրի ջերմաստիճանների $T - T_1$ տարբերությանը:

Հաշվի առնելով, որ $T(t)$ ֆունկցիան նվազող է, կստանանք

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1), \quad (1)$$

որտեղ k -ն ($k > 0$) համեմատականության գործակիցն է:

Քանի որ $dT = d(T - T_1)$, ապա նշանակելով $x = T - T_1$ (1) հավասարումը գրենք

$$x' = -kx \quad (2)$$

տեսքով: Այստեղից ունենք $\frac{x'}{x} = -k$ կամ $(\ln x)' = -k$, և հետևաբար

$$\ln x = -k \int dt = -kt + c:$$

Պոտենցիալով վերջին հավասարությունը և տեղադրելով $e^c = A$ ՝ կունենանք

$$x = Ae^{-kt}: \quad (3)$$

(2) հավասարման (3) լուծումից ստանում ենք (1) հավասարման ընդհանուր լուծման

$$T = T_1 + Ae^{-kt} \quad (4)$$

բանաձևը:

Քանի որ մեր խնդրում ունենք $T = T_0$, երբ $t = 0$ սկզբնական պայմանը, ուրեմն $A = T - T_0$, և խնդրի վերջնական լուծումն ունի

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}$$

տեսքը: Ստացված բանաձևից երևում է, որ t^t -ի աճելու հետ մարմնի ջերմաստիճանը բավականին արագ փոքրանում է: Երբ $t \rightarrow +\infty$, այն ձգտում է T_1 -ի ($T \rightarrow T_1$, երբ $t \rightarrow +\infty$):

ՕՐԻՆԱԿ 1. Եռացած էլեկտրական թեյնիկը 10 րոպետում հովացավ մինչև 60° : Օդի ջերմաստիճանը 20° է: Քանի՞ րոպետում թեյնիկը կհովանա մինչև 25° :

Այստեղ $T_0 = 100, T_1 = 20$ ուրեմն $T = T(t)$ ֆունկցիայի համար ձիշտ է $\frac{dT}{dt} = -k(T - 20)$ հավասարությունը կամ

$$\frac{d(T-20)}{dt} = -k(T-20) \quad (5)$$

հավասարությունը:

(5) հավասարման լուծումն է $T = 20 + Ae^{-kt}$ ֆունկցիան, որտեղ A -ն ինչ-որ հաստատուն է:

Խնդրի պայմանից հետևում է, որ

$$T(0) = 20 + Ae^{-0k} = 100$$

և

$$T(10) = 20 + Ae^{-10k} = 60:$$

Առաջին պայմանից ունենք $A = 80$, իսկ երկրորդ պայմանից՝ $e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,1}$: Այժմ խնդրի հարցին պատասխանելու համար պետք է t -ի նկատմամբ լուծել $25 = 20 + Ae^{-kt}$ հավասարումը: Քանի որ $e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,1}$, ուրեմն $5 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0,1t}$, որտեղից գտնում ենք՝ $t = 40$:

Այսպիսով, թեյնիկը մինչև 25° կհովանա 40 րոպեից:

2. Ռադիոակտիվ տրոհում

Ռադիումի տրոհման արագությունը ժամանակի յուրաքանչյուր պահին ուղիղ համեմատական է այդ պահին նրա ունեցած զանգվածին: Գտնենք ռադիումի տրոհման օրենքը, եթե հայտնի է, որ ժամանակի $t = 0$ պահին կար m_0 գրամ ռադիում, և ռադիումի կիսատրոհման ժամանակը 1590 տարի է (այն ժամանակը, որի ընթացքում տրոհվում է ռադիումի առկա զանգվածի կեսը):

Դիցուք ժամանակի t պահին ռադիումի զանգվածը x գ է: Այդ դեպքում ռադիումի տրոհման արագությունը հավասար է $(m_0 - x)' = -x'$: Ըստ խնդրի պայմանի՝ $-x' = kx$ կամ $x' =$

$-kx$, որտեղ $k > 0$ -ն համեմատականության գործակիցն է: Ստացվեց (2) հավասարման տեսքի դիֆերենցիալ հավասարում, որի ընդհանուր լուծումն ունի (3) տեսքը՝ $x = Ae^{-kt}$: A -ն գտնելու համար օգտագործենք սկզբնական պայմանը՝ $x(0) = m_0$: Ունենք $A = m_0$, և հետևաբար՝ $x = m_0 e^{-kt}$:

k գործակիցը գտնում ենք $x(1590) = \frac{m_0}{2}$ լրացուցիչ պայմանից.

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1590k} \Rightarrow e^{1590k} = 2 \Rightarrow e^k = 2^{\frac{1}{1590}}:$$

Այսպիսով գտանք որոնելի ֆունկցիան՝ $x(t) = m_0 2^{-\frac{t}{1590}}$:

3. Հարմոնիկ տատանումներ

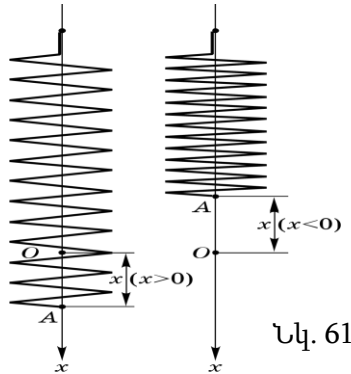
Հարմոնիկ կամ ներդաշնակ տատանումներին մենք անդրադարձել ենք 5-րդ գլխում: Այստեղ դիտարկում ենք կիրառական խնդիր:

Կախված զսպանակի ներքևից ամրացված է m զանգվածով բեռ: x -երի առանցքն ուղղենք դեպի ներքև (Նկար 61): x -երի առանցքի սկզբնակետում զսպանակը գտնվում է անշարժ դիրքում: Սեղմելով կամ ձգելով զսպանակը՝ հանենք հավասարակշռությունից և բաց թողնենք այն ժամանակի $t = 0$ սկզբնական պահին: Բեռը կտատանվի ուղղաձիգ ուղղությամբ: Պահանջվում է գտնել բեռի $x = x(t)$ կոորդինատի փոփոխման օրենքը ժամանակի ցանկացած t պահին:

Նյութոնի օրենքի համաձայն՝ ցանկացած պահի m զանգվածի և x'' արագացման արտադրյալը հավասար է այդ պահին բեռի վրա ազդող ուժին: Դա առաձգականության ուժն է, որը, ըստ Հուկի օրենքի, հավասար է a հաստատուն մեծության և բեռի սկզբնական դիրքից շեղման արտադրյալին: Այդ

ուժերը հակուղղված են, հետևաբար ճշմարիտ է $mx'' = -ax$ հավասարությունը: Նշանակելով $k^2 = \frac{a}{m}$, կստանանք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$x'' + k^2 x = 0: \quad (6)$$



Նկ. 61

Այս երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման լուծումն ունի

$$x(t) = A \sin kt + B \cos kt \quad (7)$$

տեսքը, որտեղ A -ն և B -ն հաստատուններ են (տե՛ս գլ. 7, 2 է):

(6) դիֆերենցիալ հավասարումն ունի բազմաթիվ լուծումներ, որոնք համապատասխանում են A և B թվերի գույգերին: Յուրաքանչյուր կոնկրետ ֆունկցիա գտնվում է երկու տրված պայմանների միջոցով: Սովորաբար որպես այդպիսի պայմաններ տրվում են բեռի x_0 շեղումը $t = 0$ պահին և այդ պահին բեռին հաղորդված x'_0 արագությունը:

Դիցուք $x_0 \neq 0$ և $x'_0 = 0$, երբ $t = 0$: Այդ դեպքում (7) բանաձևից հետևում է, որ

$$x_0 = B \text{ և } x'(t) = kA \cos kt - x_0 k \sin kt, \quad 0 = kA, \quad A = 0:$$

Հետևաբար՝ բեռը տատանվում է $x(t) = x_0 \cos kt$ օրենքով:

(7) բանաձևը (երբ $A^2 + B^2 > 0$) կարելի է գրել

$$x(t) = R \cos(kt + \varphi) \quad (R > 0) \quad (8)$$

տեսքով:

$R = \sqrt{A^2 + B^2}$ թիվը տատանումների ամպլիտուդն է, k -ն՝ հաճախականությունը, իսկ φ -ն՝ փուլը: $x(t)$ ֆունկցիան բավարարում է $-R \leq x(t) \leq R$ անհավասարություններին, ընդ որում գոյություն ունեն t -ի արժեքներ, որոնց համար $x = R$ և $x = -R$: (8) ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը $\frac{2\pi}{k}$ է: Միավոր ժամանակում տեղի է ունենում $1: \frac{2\pi}{k} = \frac{k}{2\pi}$ տատանում:

Նկատենք, որ (8) բանաձևով մոդելավորում են այն տատանումները, որոնք տեղի են ունենում փոքր ժամանակամիջոցում, այդ բանաձևի դուրսբերման ժամանակ հաշվի չեն առնված զսպանակի տատանումների ժամանակ առաջացած շփման ուժերը և օդի դիմադրության ուժը:

4. Պոպուլյացիայի քանակի փոփոխությունը

1. Դիցուք ժամանակի t պահին պոպուլյացիայի անդամների $x = x(t)$ քանակի փոփոխման արագությունը ուղիղ համեմատական է այդ քանակին, ընդ որում հայտնի է պոպուլյացիայի անդամների $x_0 = x(0)$ քանակը ժամանակի $t = 0$ պահին:

Ըստ խնդրի պայմանի՝ ունենք $x' = kx$ դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ k -ն համեմատականության գործակիցն է: Ստացվեց (2) հավասարման տեսքի դիֆերենցիալ հավասարում, որի ընդհանուր լուծումն ունի (3) տեսքը՝ $x = Ae^{kt}$: Օգտագործելով $x_0 = x(0)$ սկզբնական պայմանը՝ կստանանք

$$x(t) = x_0 e^{kt}: \quad (9)$$

Եթե պոպուլյացիայի քանակն աճում է, ապա $k > 0$, իսկ եթե նվազում է, ապա $k < 0$:

(9) քանաձևը 1802 թ. ստացել է Մալթուսը: Նա այդ քանաձևը կիրառում էր բոլոր տեսակի պոպուլյացիաների համար, մասնավորապես բնակչության աճը կանխատեսելու նպատակով: Այսինքն՝ Մալթուսը համարում էր, որ բնակչությունը աճում է երկրաչափական պրոգրեսիայով: Սակայն այս մոդելը ճիշտ չի արտացոլում բնակչության աճի դինամիկան, քանի որ հաշվի չեն առնվում պատերազմները, բնական աղետները, հիվանդությունները և այլն:

Խնդիր 1. 1970 թ. մեկ մարդուն սնունդով ապահովելու համար անհրաժեշտ էր 0,1 հա մակերեսով վարելահող: Ենթադրենք, որ 1970 թ. հետո այդ պայմանները չեն փոխվել և չեն փոխվի ապագայում, ինչպես նաև սննդի նոր աղբյուրներ ի հայտ չեն եկել: Այդ դեպքում երկրագնդի բնակչության քանակը կսահմանափակվի 40 միլիարդ մարդով: Մարդկությունը ե՞րբ կհասնի գերհագեցման այդ սահմանին, եթե 1970 թ. երկրագնդի բնակչության քանակը 3 միլիարդ 600 միլիոն մարդ էր և տարեկան աճում է 1,7%-ով:

Լուծում. Ըստ (9) քանաձևի՝

$$x(t) = 3,6 \cdot 10^9 e^{0,017t}, \text{ քանի որ } x_0 = 3,6 \cdot 10^9 \text{ և } k = 0.017:$$

Հետևաբար պետք է գտնենք այնպիսի t , որ

$$40 \cdot 10^9 = 3,6 \cdot 10^9 e^{0,017t}:$$

Ունենք

$$e^{0,017t} = \frac{10}{0,9} = \left(\frac{10}{9}\right)^2,$$

որտեղից՝

$$0,017t = 2 \ln \frac{10}{9} \approx 2,408 \text{ և } t = 142:$$

Այսպիսով, եթե պահպանվեն բնակչության աճի տեմպերը, և սննդի նոր աղբյուրներ ի հայտ չգան, ապա 2112 թ. աշխարհը կհասնի հազեցման սահմանին:

2. Բնակչության աճի դինամիկան ավելի ճշգրիտ նկարագրում է Վերհուլստ-Պերլի մոդելը (1845 թ.): Այն հիմնված է

$$x' = k_1x - k_2x^2 \quad (10)$$

դիֆերենցիալ հավասարման վրա, որտեղ $k_1 > 0$ և $k_2 > 0$:

Հավասարման մեջ x^2 -ու առկայությունը բացատրվում է քանակի բնակչության անդամների փոխադարձ հանդիպումների քանակով, իսկ «-» նշանը հիմնավորվում է նրանով, որ փոխադարձ հանդիպումները նվազեցնում են բնակչության աճի արագությունը: Նշենք նաև, որ $k_1 - k_2x > 0$, որովհետև $x = x(t)$ ֆունկցիան աճող է:

(10) հավասարումն անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում է: Այն կարելի է գրել

$$\frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{x} + \frac{k_2}{k_1 - k_2x} \right) dx = dt \quad (11)$$

տեսքով: Ինտեգրելով (11) հավասարման երկու մասերը՝ կստանանք

$$\frac{1}{k_1} (\ln x - \ln(k_1 - k_2x)) = t + c:$$

Վերջին հավասարությունից կունենանք.

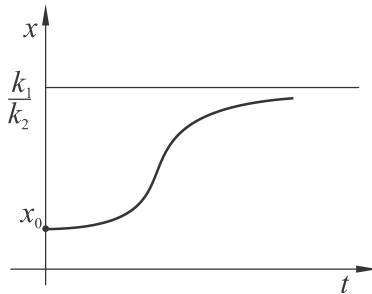
$$\frac{1}{k_1} \ln \frac{x}{k_1 - k_2x} = t + \frac{1}{k_1} \ln \frac{x_0}{k_1 - k_2x_0}, \quad (12)$$

որտեղ $x_0 = x(0)$: Պոտենցիալով (12) հավասարությունը՝ կստանանք բնակչության թիվը ժամանակի ցանկացած t պահին գտնելու

$$x(t) = \frac{k_1}{k_2 + \frac{k_1 - k_2x_0}{x_0} e^{-kt}} \quad (13)$$

բանաձևը: k_1, k_2 գործակիցները գտնելու համար անհրաժեշտ է ունենալ երկու տվյալ՝ բնակչության թիվը ժամանակի t_1 և t_2 պահերին՝ $x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2$:

Նկար 62-ում պատկերված է (13) բանաձևով տրվող ֆունկցիայի գրաֆիկի ուրվագիծը: Այն հիշեցնում է լատիներեն S ձգված տառը: Այդ պատճառով այն անվանում են S-աձև կոր:



Նկ. 62

ՕՐԻՆԱԿ (տե՛ս [14]). 1970 թ. երկրագնդի բնակչության քանակը 3 միլիարդ 704 միլիոն էր, 1980 թ.՝ 4 միլիարդ 457 միլիոն, իսկ 1990 թ.՝ 5 միլիարդ 295 միլիոն: Վերցնենք $t_1 = 10$, $t_2 = 20$ և $x_0 = 3704$ մլն մարդ, $x_1 = 4457$ մլն մարդ, $x_2 = 5295$ մլն մարդ: Տեղադրելով (13) բանաձևի մեջ՝ կստանանք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} 4457 = \frac{k_1}{k_2 + \frac{k_1 - 3704k_2}{3704}e^{-10k_1}} \\ 5295 = \frac{k_1}{k_2 + \frac{k_1 - 3704k_2}{3704}e^{-20k_1}} \end{cases} : \quad (14)$$

Լուծելով (14) համակարգը՝ կստանանք k_1 և k_2 գործակիցների մոտավոր արժեքները. $k_1 \approx 1,284535006$, $k_2 \approx 0,00000000000016$: Այդ արժեքները տեղադրելով (13) բանաձևի մեջ՝ կստանանք.

$$x(t) = \frac{92746970,8e^{0,0250396789t}}{0,00594152e^{0,0250396789t} + 0,0190981517} : \quad (15)$$

(15) քանաձևով կարելի է որոշել երկրագնդի բնակչության քանակը ժամանակի ցանկացած t պահին: Օրինակ՝ երկրագնդի բնակչության քանակը 2000 թ. ստանալու համար t -ի փոխարեն պետք է տեղադրել 30 և կատարել հաշվարկ.

$$x(30)=6\ 203\ 000\ 000 \text{ մարդ:}$$

Նշենք, որ, ըստ պաշտոնական տվյալների, երկրագնդի բնակչության քանակը 2000 թ. եղել է 6 158 000 000 մարդ, այսինքն՝ այս մոդելով հաշվված բնակչության քանակը ընդամենը 45 մլն-ով է ավելի բնակչության իրական քանակից: Ադյուսակում տրված է երկրագնդի բնակչության սպասվելիք քանակն ըստ Ֆերիսյուստ-Պերլի մոդելի:

Տարիներ	Բնակչության քանակը (մլն մարդ)
1970	3704
1980	4457
1990	5295
2000	6203
2010	7158
2020	8134
2030	9099
2040	10026
2050	10888
2060	11670
2070	12361
2080	12959
2090	13465
2100	13888

3. Դիտարկենք երկու պոպուլյացիաներ, որոնցից մեկը (գիշատիչ) սնվում է մյուսով (զոհ): Ժամանակի t պահին զոհերի քանակը նշանակենք $x(t)$, իսկ գիշատիչներինը՝ $y(t)$: Գիշատիչները կասեցնում են զոհերի աճման արագությունը, ընդ որում կասեցման արագությունը ուղիղ համեմատական է երկու տեսակների պոտենցիալ հանդիպումների թվին, այսինքն՝ $x(t) \cdot y(t)$ արտադրյալին: Որքան շատ են զոհերը, այնքան արագ է գիշատիչների բազմացումը: Այսպիսով, զոհերի և գիշատիչների քանակների փոփոխությունը նկարագրվում է հետևյալ համակարգով.

$$\begin{cases} x' = k_1x - k_2xy \\ y' = -k_3y + k_4xy \end{cases},$$

որտեղ k_1, k_2, k_3, k_4 գործակիցները դրական են, և պոպուլյացիաների սկզբնական քանակներն են՝ $x(0) = x_0, y(0) = y_0$:

Ստացված համակարգը լուծում են մոտավոր մեթոդներով, համակարգչային ծրագրերի օգնությամբ:

Դիտողություն. Եթե $x_0 = \frac{k_3}{k_4}$ և $y_0 = \frac{k_1}{k_2}$, ապա

$$x(t) = \frac{k_3}{k_4}, y(t) = \frac{k_1}{k_2}$$

ֆունկցիաները բավարարում են համակարգին, այսինքն՝ պոպուլյացիաների սկզբնական քանակները չեն փոխվում:

5. Սեզոնային աճի մոդելը

Հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը

$$x'(t) = kx(t)\cos\frac{2\pi t}{T}, \quad (16)$$

որտեղ k -ն ($k > 0$) և T -ն հաստատուններ են, կարելի է դիտարկել որպես սեզոնային աճի պարզ մոդել: $x = x(t)$ ֆունկ-

ցիայի աճի x' արագությունը մեկ դառնում է դրական, մեկ բացասական, այսինքն՝ ֆունկցիան մեկ աճում է, մեկ նվազում:

(16) հավասարումը գրելով

$$(\ln x)' = k \cos \frac{2\pi t}{T}$$

տեսքով՝ կունենանք.

$$\ln x = k \int \cos \frac{2\pi t}{T} dt = k \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} + c_1;$$

Այստեղից ստանում ենք.

$$x = e^{c_1} e^{k \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T}};$$

Վերջին բանաձևի մեջ տեղադրելով $t = 0$ ՝ կստանանք.
 $e^{c_1} = x(0)$, այսինքն՝

$$x(t) = x(0) e^{k \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T}}; \quad (17)$$

Այս մոդելում $x = x(t)$ ֆունկցիան ունի T պարբերություն, մեծագույն

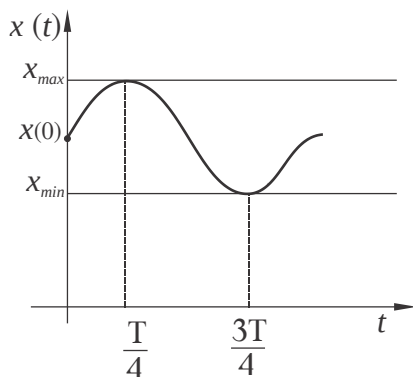
$$x_{\max} = x(0) e^{k \frac{T}{2\pi}}$$

արժեքին հասնում է $t = \frac{T}{4} + Tk, k \in Z$ կետերում, իսկ փոքրագույն

$$x_{\min} = x(0) e^{-k \frac{T}{2\pi}}$$

արժեքին՝ $t = -\frac{T}{4} + Tk, k \in Z$ կետերում:

Նկար 63-ում պատկերված է (17) բանաձևով տրվող ֆունկցիայի գրաֆիկի ուրվագիծը:



Նկ. 63

6. Համաճարակների տեսություն

Դիտարկենք պարզագույն տիպի համաճարակներ: Դիցուք հետազոտվող հիվանդությունը երկարատև է, այնպիսին, որ վարակի փոխանցումը ավելի արագ է, քան բուն հիվանդության ընթացքը: Մեզ հետաքրքրում է հիվանդության փոխանցման գործընթացը: Այդ պատճառով կենթադրենք, որ հիվանդները չեն հեռանում տվյալ միջավայրից և հանդիպման ժամանակ փոխանցում են հիվանդությունը առողջներին:

Դիցուք x_0 -ն հիվանդների, իսկ y_0 -ն առողջների թիվն է սկզբնական պահին, իսկ $x = x(t)$ -ն և $y = y(t)$ -ն համապատասխանաբար հիվանդների և առողջների թվերն են ժամանակի t պահին: Այսինքն՝ ժամանակի ցանկացած $t (0 \leq t \leq T)$ պահին տեղի ունի

$$n = x_0 + y_0 = x(t) + y(t) \quad (18)$$

հավասարությունը, որտեղ n -ը հետազոտվողների ընդհանուր քանակն է, իսկ T -ն փոքր է մեկ մարդու կյանքի տևողության ժամանակից:

Քանի որ վարակը փոխանցվում է հիվանդների և առողջների հանդիպումների ժամանակ, ապա հիվանդների քանակի աճի արագությունը ուղիղ համեմատական է նրանց հանդիպումների xy քանակին: Հետևաբար ունենք $x'(t) = kx(t)y(t)$ (19) դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ $k > 0$ -ն համեմատականության գործակիցն է:

(18)-ից գտնենք y -ը և տեղադրենք (19) հավասարման մեջ: Կստանանք

$$x' = kx(n - x) \quad (19)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը, այսինքն՝ (10) տեսքի հավասարում՝ $x(0) = x_0$ սկզբնական պայմանով:

Օգտագործելով (13) բանաձևը՝ կունենանք.

$$x(t) = \frac{n}{1 + \frac{y_0}{x_0} e^{-knt}} : \quad (20)$$

(20) բանաձևը կիրառենք ՀՀ-ում ՁԻԱՀ-ով վարակվածների թվի աճը կանխատեսելու համար:

Առաջին ՁԻԱՀ-ով հիվանդը գրանցվել է 1981թ., իսկ 2003 թ. դեկտեմբերի դրությամբ աշխարհում մոտ 70 մլն մարդ վարակվել էր ՄԻԱՎ-ով, որոնց մոտ 40%-ը (30 մլն) արդեն մահացել են: 2003 թ. դեկտեմբերի դրությամբ աշխարհում կար 2,5 մլն ՄԻԱՎ / ՁԻԱՀ-ով վարակակիր երեխա, որոնցից 700 հազարը վարակվել է 2003 թ. ընթացքում: ՀՀ-ն ևս զերծ չի մնացել այս համախտանիշից: ՀՀ-ում իմունային անբավարարվածության վիրուսով վարակվածների դեպքերի արձանագրումը սկսվել է 1998 թ.:

Ուսումնասիրվող հիվանդությունը տևում է երկար, վարակի փոխանցումը ավելի արագ է տեղի ունենում, քան հի-

վանդության ընթացքը: Վարակը փոխանցվում է հիվանդների և առողջների հանդիպման ժամանակ:

ՀՀ-ում ՁԻԱՀ-ով վարակվածների ուսումնասիրության պարագայում ժամանակի սկզբնական պահ ընդունենք 2002 թ. ($t = 0$): 2002 թ.-ին ՁԻԱՀ-ով վարակվածների քանակը ՀՀ-ում եղել է 430 մարդ ($x_0 = 430$), իսկ բնակչության քանակը այդ նույն թվականին եղել է 3212900 մարդ ($n = 3212900$): Տեղադրելով այս արժեքները (20) բանաձևի մեջ՝ կստանանք

$$x(t) = \frac{n}{1 + 7470,86046513e^{-knt}} \quad (21)$$

(21) բանաձևի մեջ կա անհայտ k գործակից: Այն գտնելու համար անհրաժեշտ է ունենալ ևս մեկ տվյալ: 2003 թ. ՁԻԱՀ-ով վարակվածների քանակը՝ $x_1 = 490$, իսկ $n_1 = 321030$: Տեղադրելով այդ արժեքները (21) բանաձևի մեջ՝ կստանանք՝

$$490 = \frac{3210300}{1 + 7470,86046513e^{-3210300k}},$$

$$3660721,6279137e^{-3210300k} = 3209810,$$

$$e^{-3210300k} = 0,8768243877176,$$

$$k = -\frac{1}{3210300} \ln 0,8768243877176 = 0,00000004067:$$

Տեղադրելով k -ի և n -ի արժեքները (21) բանաձևի մեջ՝ կստանանք՝

$$x(t) = \frac{3212900}{1 + 7470,86046513e^{-0,130668643t}}: \quad (22)$$

Օգտվելով (22) բանաձևից՝ կկանխատեսենք ՀՀ-ում ՁԻԱՀ-ով վարակվածների թվի փոփոխությունը: Ստացված արդյունքները ներկայացնենք աղյուսակի տեսքով.

Տարի	Վարակվածների թիվը (մարդ)
2005	636
2006	725
2007	826
2008	942
2009	1073
2010	1223
2011	1393
2012	1588
2013	1809
2014	2062
2015	2349
2016	2677
2017	3050
2018	3476
2019	3960
2020	4512
2021	5141
2022	5857
2023	6673
2024	7603
2025	8661
2026	9866
2027	11239
2028	12801
2029	14580
2030	16605

7. Քիմիական ռեակցիաներ

Դիտարկենք քիմիական պրոցես, որի ընթացքում փոխազդող $A, B, \dots$ նյութերը վերածվում են $M, N, \dots$ նյութերի: Քիմիական ռեակցիային մասնակցող նյութի քանակը գնահատելու համար այն արտահայտում են գրամ-մոլեկուլներով կամ մոլերով:

Ինչ-որ նյութի մոլ կոչվում է այդ նյութի այնպիսի կշռային քանակը, որն արտահայտվում է գրամներով՝ թվապես հավասար նրա մոլեկուլար կշռին: Յուրաքանչյուր նյութի մոլ միշտ պարունակում է միևնույն քանակով մոլեկուլներ՝ անկախ նյութից:

Եթե ենթադրենք, որ մի նյութի յուրաքանչյուր մոլեկուլ փոխազդում է մյուս նյութի մեկ մոլեկուլի հետ, ապա մի նյութի յուրաքանչյուր մոլին կհամապատասխանի մյուս նյութի մեկ մոլ: Ռեակցիայի սկզբից t ժամանակահատվածի ընթացքում փոխազդող նյութերից ռեակցիայի մեջ կմտնեն յուրաքանչյուրից միևնույն x մոլ քանակով: x -ի աճման արագությունը կախված է ժամանակից: $\frac{dx}{dt}$ ածանցյալը քիմիական ռեակցիայի արագությունն է:

Դիցուք պրոցեսին մասնակցում են A և B նյութեր, որոնց սկզբնական քանակները (մոլերով) նշանակենք a և b (ընդ որում համարենք՝ $b > a$): t ժամանակահատված անց A նյութից կունենանք $a - x$, իսկ B նյութից $b - x$ քանակությամբ: Բնական է, որ ժամանակի t պահին քիմիական ռեակցիայի արագությունը համեմատական է հակազդող զանգվածների արտադրյալին, այսինքն՝ սկզբնական նյութերի այն քանակությունների արտադրյալին, որոնք չեն ենթարկվել փոխակերպման: Դա բերում է այսպիսի դիֆերենցիալ հավասարման.

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

կամ

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt :$$

Ինտեգրելով կստանանք՝

$$\frac{1}{b-a} \ln \frac{a-x}{b-x} = -kt + C:$$

Քանի որ $t = 0$ դեպքում $x = 0$, ապա $C = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a}{b}$: Տեղադրելով C -ի արժեքը՝ կունենանք

$$\ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a} = -k(b-a)t,$$

որտեղից.

$$x = ab \frac{1 - e^{-k(b-a)t}}{b - ae^{-k(b-a)t}} :$$

t -ի աճման դեպքում ցուցչային արտահայտությունը ձգտում է 0 -ի, վերջավոր ժամանակահատված անց դառնում է այնքան փոքր, որ x -ը պրակտիկորեն արդեն չի տարբերվում a -ից, և ռեակցիան ավարտվում է:

8. Անկում մթնոլորտի մեջ

Եթե մարմինը ընկնում է անօդ տարածության մեջ, ապա նրա արագությունը հավասարաչափ մեծանում է: Իսկ եթե անկումը տեղի է ունենում մթնոլորտի մեջ, ապա օդի դիմադրության ուժը փոխում է իրավիճակը: Պարզության համար համարենք, որ օդի դիմադրության ուժը ուղիղ համեմատական է անկման արագությանը: Հետևաբար, եթե մարմնի զանգ-

վածը հավասար է m -ի, ապա մարմնի վրա ազդող F ուժը հավասար է $mg - kv$: Նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաձայն՝ $F = ma$, որտեղ $a = v'$ -ը արագացումն է: Այսպիսով՝

$$ma = mg - kv :$$

Վերջին հավասարումը կարելի է գրել

$$\left(v - \frac{mg}{k} \right)' = -\frac{k}{m} \left(v - \frac{mg}{k} \right)$$

տեսքով: Այս հավասարումը գլ. 8, 1 կետի (2) տեսքի հավասարում է, հետևաբար՝

$$v - \frac{mg}{k} = -\frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t},$$

որտեղից

$$v = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right): \quad (23)$$

Մեծ t -երի դեպքում $v \approx \frac{mg}{k}$, և անկումը դառնում է հավասարաչափ: k գործակիցը կախված է օդի խտությունից, մարմնի չափերից և այլն: Օրինակ՝ օդապարիկի դեպքում այդ գործակիցը բավականաչափ մեծ է, իսկ արագությունը համեմատաբար մեծ չէ (մոտավորապես 5 մ/վրկ): Պարզ է, որ փետուրի անկման արագությունը ավելի փոքր է, քան նույն զանգվածով արձիճի գնդիկի անկման արագությունը, քանի որ փետուրի մակերեսը մեծ է, և հետևաբար մեծ է k գործակցի արժեքը: Արիստոտելը հաշվի չէր առնում օդի դիմադրության ուժը և համարում էր, որ եթե մի մարմինը n անգամ ծանր է մյուսից, ապա նրա ընկնելու արագությունը n անգամ մեծ է թեթև մարմնի արագությունից: Գալիլեյը Պիզայի աշտարակից գնդեր նետելով, հերքեց այդ պնդումը:

Այժմ գտնենք ընկնող մարմնի շարժման $s = s(t)$ օրենքը: Դրա համար (23) բանաձևը գրենք

$$s' = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

տեսքով: Ինտեգրելով վերջին հավասարությունը՝ կստանանք

$$s = \frac{mg}{k} \int \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) dt = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right) + C$$

Հաշվի առնելով, որ $s(0) = 0$, կստանանք $C = -\frac{m^2g}{k^2}$:

Այսպիսով ժամանակի ցանկացած t պահին մարմնի անցած ճանապարհը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով.

$$s(t) = \frac{mg}{k} \left(t - \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \right):$$

Խնդիրներ

1. Բակտերիաների բազմացման արագությունը ուղիղ համեմատական է նրանց քանակին: Ժամանակի $t = 0$ պահին կար 100 բակտերիա, իսկ 3 ժամվա ընթացքում նրանց քանակը կրկնապատկվեց: Գտնել բակտերիաների $x(t)$ քանակի կախումը ժամանակից: 9 ժամվա ընթացքում նրանց քանակը ինչքան կդառնա:

Պատասխան՝ $x(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}, x(9) = 800$:

2. Գլյուկոզան արյունատար համակարգ ներարկվում է v (գ/ր) հաստատուն արագությամբ: Այն տրոհվում է և օրգանիզմից հեռանում գլյուկոզայի տվյալ պահին եղած քանակությամբ ուղիղ համեմատական: Գտնել գլյուկոզայի $x(t)$ քանակի կախումը ժամանակից:

Պատասխան՝

$$x(t) = \frac{v}{k} + \left(x(0) - \frac{v}{k} \right) e^{-kt},$$

որտեղ k -ն համեմատականության գործակիցն է:

3. Գործարանում բանվորների քանակը փոքրանում է նրանց քանակին ուղիղ համեմատական արագությամբ: Հայտնի է, որ նրանց քանակը մեկ տարում քչացել է 2 անգամ: Գտնել բանվորների $x(t)$ քանակի կախումը ժամանակից: Քանի՞ տարի հետո բանվորների քանակը կքչանա 8 անգամ:

Պատասխան՝ $x(t) = x(0)2^{-t}$, 3 տարի հետո:

4. RaB ռադիոակտիվ տարրը կիսատրոհվում և փոխակերպվում է RaC տարրի 26,7 րոպեում: Տրոհման արագությունը ուղիղ համեմատական է տվյալ պահին չտրոհված RaB-ի քանակին: Գտնել 0,2 քանակով RaB-ի տրոհման ժամանակը:

Պատասխան՝ $t = \frac{26,7}{\ln 2} \ln \frac{5}{4} \approx 8,6$ (րոպե):

5. A նյութը փոխակերպվում է B նյութի: Ռեակցիան սկսվելուց 1 ժ հետո մնացել էր A նյութի 44,8 գ, իսկ 3 ժ հետո՝ 11,2 գ: Գտնել A նյութի սկզբնական a քանակությունը: Քանի՞ ժամ հետո կմնա A նյութի կեսը:

Պատասխան՝ $a = 89,6, t = 1$:

6. Դիցուք $\rho(x)$ -ը քաղաքի կենտրոնից x հեռավորության վրա գտնվող կետում բնակչության խտությունն է, $\rho(x)$ -ի նվազման արագությունը համեմատական է $\rho(x)$ -ին, և $\rho(x_1) = \rho_1, \rho(x_2) = \rho_2$:

ա) Ապացուցել, որ $\rho(x) = ce^{-kx}$, որտեղ

$$c = \rho_1 \frac{x_2}{x_2 - x_1} \cdot \rho_1 \frac{x_1}{x_1 - x_2}, k = \frac{1}{x_2 - x_1} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}:$$

բ) Ապացուցել, որ $0 < x < R$ տիրույթում բնակչության քանակը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով.

$$N_R = 2\pi \int_0^R x c e^{-kx} dx = 2\pi \frac{c}{k^2} (1 - e^{-kR} (1 + kR)) :$$

7. Ապրանքի գովազդի տարածման արագությունը N պոտենցիալ գնորդների շրջանում ուղիղ համեմատական է ինչպես ապրանքի մասին իմացողների քանակին, այնպես էլ դրա մասին չիմացողների քանակին: Ապացուցել, որ ժամանակի t պահին ապրանքի մասին իմացողների գլխուկոգայի $x(t)$ քանակը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով.

$$x(t) = \frac{Nx_0}{x_0 + (N - x_0)e^{-kNt}},$$

որտեղ գլխուկոգայի $x(0) = x_0$, իսկ k -ն համեմատականության գործակիցն է: Կառուցել $x(t)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

8. Վիկտորորեգիա բուսի տերևն ունի շրջանի տեսք, և նրա S մակերեսի աճման արագությունն ուղիղ համեմատական է տերևի r շառավղին և նրա ստացած արեգակնային էներգիայի E քանակին ($\frac{dS}{dt} = k_1 r E$):

Արեգակնային էներգիայի E քանակն ուղիղ համեմատական է տերևի մակերեսին, արևի ճառագայթի և տերևին ուղղահայաց ուղղության կազմած անկյան կոսինուսին ($E = k_2 S \cos \alpha$): Առավոտյան ժամը 6-ին տերևի մակերեսը 1600 սմ² էր, իսկ նույն օրվա ժամը 18-ին՝ 25000 սմ²: Արևի ճառագայթի և ուղղաձիգ ուղղության կազմած անկյունը առավոտյան ժամը 6-ին և երեկոյան ժամը 18-ին համարել 90°, իսկ կեսօրին՝ 0°:

ա) Ապացուցել, որ ժամանակի t պահին տերևի S մակերեսը բավարարում է հետևյալ դիֆերենցյալ հավասարմանը.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{k_1 k_2}{\sqrt{\pi}} S \sqrt{S} \cos \frac{\pi}{12} (t - 6)$$

բ) Գտնել տերևի S մակերեսի և t ժամանակի կախումը արտահայտող բանաձև:

$$\text{Պատասխան՝ } S = \frac{160000}{\left(9 - \sin \frac{\pi}{12} (t - 6)\right)^2}:$$

ԳԼՈՒԽ 9

Հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության տարրեր

1. Միացություններ

1-ից n բնական թվերի արտադրյալը նշանակում են $n!$ (կարդում են « n ֆակտորիալ»): $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$:

Պայմանավորվենք համարել՝ $0! = 1$:

Երկու x_1, x_2 տարր (երկու առարկա, երկու տառ) կարելի է դասավորել (գրել) երկու եղանակով.

$$x_1, x_2 \quad (1)$$

$$x_2, x_1: \quad (2)$$

Կասենք, որ (1) և (2) դասավորվածությունները երկու տարրից բաղկացած (x_1 և x_2) տարրեր **տեղափոխություններ** են: Այսպիսով, երկու տարրից կարելի է կազմել միայն երկու տարրեր տեղափոխություն:

Երեք x_1, x_2, x_3 տարրից կարելի է կազմել միայն վեց տեղափոխություն.

$$\begin{array}{ccc} x_1, x_2, x_3 & x_2, x_1, x_3 & x_3, x_1, x_2 \\ x_1, x_3, x_2 & x_2, x_3, x_1 & x_3, x_2, x_1: \end{array} \quad (3)$$

Ըստ (3)-ի ստացվեց $3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ տեղափոխություն:
Ուրիշ տեղափոխություններ չկան:

Այժմ դիտարկենք n տարր՝ $x_1, x_2, \dots, x_n$: Դրանք դասավորված են համարների աճման հաջորդականությամբ և կազմում են որոշակի տեղափոխություն:

Ուրիշ դասավորվածության դեպքում, օրինակ՝ երբ համարները նվազում են՝ $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ ($n \geq 2$), դրանք կազմում են ուրիշ տեղափոխություն:

n տարրից տեղափոխությունը այդ տարրերի որոշակի կարգով դասավորվածությունն է: Այսպիսով n տարրից տարբեր տեղափոխությունները համապատասխանում են այդ տարրերի տարբեր տեղափոխություններին (այս կամ այն կարգով): n տարրից տեղափոխությունների քանակը նշանակում են P_n (ֆրանս. Permutation-տեղափոխություն):

Ցանկացած n բնական թվի համար ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$P_n = n!: \quad (4)$$

Դիցուք տրված է երեք տարր. x_1, x_2, x_3 : Դիտարկենք դրանցից կազմված բոլոր հնարավոր տարրերի գույգերը.

$$x_1, x_2; \quad x_1, x_3; \quad x_2, x_1; \quad x_2, x_3; \quad x_3, x_1; \quad x_3, x_2: \quad (5)$$

Ուրիշ գույգեր չկան: Յուրաքանչյուր գույգ մյուսներից տարբերվում է կա՛մ գոնե մեկ տարրով, կա՛մ տարրերի կարգով: Ասում են, որ յուրաքանչյուր այդպիսի գույգ երեք տարրից կազմված կարգավորված գույգ է:

Դիցուք տրված է n տարր՝ $x_1, x_2, \dots, x_n$:

Եթե $k \leq n$, ապա դրանցից կարելի է կազմել k տարրից բաղկացած այնպիսի հավաքածուներ, որոնք միմյանցից տարբերվում են կա՛մ գոնե մեկ տարրով, կա՛մ տարրերի կարգով: Յուրաքանչյուր այդպիսի հավաքածու k տարրից բաղկացած կարգավորված հավաքածու է, որը կազմված է տրված n տարրերից:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ n տարրից k -ական **կարգավորություն** անվանում են k տարրից բաղկացած ցանկացած կարգավորված հավաքածու, որի տարրերը ընտրված են տրված n տարրից:

n տարրից k -ական կարգավորությունների քանակը նշանակում են՝ A_n^k (ֆրանս. Arrangement-կարգավորություն):

Ցանկացած n բնական թվի համար ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) \quad (6)$$

Օրինակ՝ $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$, ((5)-ում գրված են բոլոր կարգավորությունները):

Նկատենք, որ n տարրից կամայական տեղափոխություն n տարրից n -ական կարգավորությունն է, հետևաբար՝ $A_n^n = P_n$ այսինքն՝ $A_n^n = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$:

Օրինակ. Յոթ ընկերների միջև քանի՞ եղանակով կարելի է բաշխել տարբեր կինոֆիլմերի համար երկու տոմսը (մեկ ընկերը չի կարող վերցնել երկու տոմս):

Յոթ ընկերների միջև տարբեր կինոֆիլմերի համար երկու տոմսը կարելի է բաշխել $A_7^2 = 7 \cdot (7-1) = 42$ եղանակով:

Տրված n տարրերից k -ական զուգորդություն անվանում են այդ տարրերից կազմված ցանկացած k տարր պարունակող խումբ:

Օրինակ, երեք x_1, x_2, x_3 տարրից կարելի է կազմել հետևյալ երկուական զուգորդությունները.

$$x_1, x_2 ; x_1, x_3 ; x_2, x_3 :$$

Դիտարկվող երեք տարրից ուրիշ երկուական զուգորդություններ չկան: Չորս x_1, x_2, x_3, x_4 տարրից երեքական զուգորդություններն են՝

$$x_1, x_2, x_3 ; x_1, x_2, x_4 ; x_1, x_3, x_4 ; x_2, x_3, x_4$$

Ընդգծենք, որ զուգորդության գաղափարը կապված չէ տարրերի դասավորվածության (կարգի) հետ: Եթե տրված զուգորդության մեջ ինչ-որ ձևով տեղափոխենք տարրերը, ապա այն (որպես զուգորդություն) չի փոխվի:

n տարրից k -ական զուգորդությունների քանակը նշանակում են՝ C_n^k (Ֆրանս. Combination-զուգորդություն):

Ցանկացած n բնական թվի համար ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \quad (7)$$

Կարգավորությունները հաշվելիս ստանում ենք խմբեր, որոնք իրարից տարբերվում են տարրերի կարգով, օրինակ՝ x_1, x_2 և x_2, x_1 : Երկու տարրերից կարելի է կազմել երկու տեղափոխություն, այսինքն՝ P_2 հատ կարգավորված զույգ, հետևաբար $A_n^2 = P_2 \cdot C_n^2$, որովհետև կարգավորությունների A_n^2 քանակը հավասար է խմբերի C_n^2 քանակի և խմբի ներսում տեղափոխությունների P_2 քանակի արտադրյալին:

Ցանկացած $k \leq n$ բնական թվի համար n տարրից k -ական կարգավորությունների քանակը կարելի է հաշվել

$$A_n^k = P_k \cdot C_n^k \quad (8)$$

բանաձևով(տե՛ս (4),(6),(7)):

Իրոք, n տարրից կարելի է կազմել k -ական C_n^k խումբ, իսկ յուրաքանչյուր խմբում կարելի է կատարել P_k տեղափոխություն: Այսպիսով, բոլոր կարգավորությունների A_n^k քանակը հավասար է խմբերի C_n^k քանակի և խմբի ներսում տեղափոխությունների P_k քանակի արտադրյալին, այսինքն՝ (8) բանաձևը ճշմարիտ է: Հետևաբար.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} :$$

2. Պատահույթի հավանականություն

Դիցուք կատարվում է փորձ, որի արդյունքում ինչ-որ իրադարձություն կարող է տեղի ունենալ կամ տեղի չունենալ: Այդպիսի իրադարձություններն անվանում են **պատահույթներ**:

Հավանականությունների տեսությունը մաթեմատիկայի բաժին է, որն ուսումնասիրում է պատահականությունը:

Խոսելով պատահականության մասին՝ ի նկատի կունենանք, որ դրանք կապված են մեկ լիովին որոշակի փորձի հետ:

Օրինակ 1. Դիտարկենք հետևյալ փորձը. սեղանի վրա նետվում է մետաղադրամ: Փորձի արդյունքում սեղանի վրա ընկած մետաղադրամի վերին մակերևույթին կլինի կա՛մ գինանշան, կա՛մ գիր: Զինանշան բացվելն անվանենք A պատահույթ, իսկ գիր բացվելը՝ B պատահույթ: Քանի որ ոչ մի հիմք չկա A և B պատահականություններից մեկը մյուսից գերադասելու, ապա A և B պատահականությունն անվանում են հավասարահնարավոր:

Դիտարկվող փորձի արդյունքում տեղի կունենա A և B պատահականություններից մեկը և միայն մեկը, ընդ որում այդ իրադարձությունները հավասարահնարավոր են: Այդպիսի պատահականությունն անվանում են տարրական պատահականություն:

A պատահականության հավանականությունը սահմանենք որպես այդ պատահականության նպաստող տարրական պատահականների քանակի (այսինքն՝ զինանշան բացվելու, իսկ այդպիսի տարրական պատահականությունների քանակը 1 է) և բոլոր հնարավոր տարրական պատահականությունների քանակի հարաբերություն (այդպիսի տարրական պատահականությունների քանակը 2 է):

A պատահականության հավանականությունն ընդունված է նշանակել՝ $P(A)$ (P տառը Probabilitas-հավանականություն բառի առաջին տառն է): Այսպիսով՝ $P(A) = \frac{1}{2}$:

Ակնհայտ է, որ B պատահականության հավանականությունը նույնպես $\frac{1}{2}$ է:

Օրինակ 2. Դիտարկենք այսպիսի փորձ. սեղանի վրա նետվում է խաղոսկր, որի նիստերի վրա գրված են $1, 2, \dots, 6$ թվերը:

Փորձի արդյունքում սեղանի վրա ընկած խաղոսկրի վերին նիստին i միավորի ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) հանդես գալն անվանենք A_i պատահույթ: Քանի որ ոչ մի հիմք չկա ենթադրելու, որ $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ պատահույթներից մեկի հանդես գալը մյուսից գերադասելի է, հետևաբար այդ պատահույթներն անվանում են հավասարահնարավոր:

Դիտարկվող փորձի արդյունքում տեղի կունենա $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ պատահույթներից մեկը և միայն մեկը, և այդ պատահույթներն հավասարահնարավոր են: Այդպիսի պատահույթները անվանում ենք տարրական պատահույթներ:

A_1 պատահույթին նպաստում է միայն մեկ տարրական պատահույթ՝ մեկ միավոր բացվելը:

A_1 պատահույթի հավանականությունը սահմանենք որպես այդ պատահույթին նպաստող տարրական պատահույթների քանակի և բոլոր հնարավոր տարրական պատահույթների քանակի հարաբերություն.

$$P(A_1) = \frac{1}{6}:$$

Պարզ է, որ A_i պատահույթի $P(A_i)$ հավանականությունը նույնպես $\frac{1}{6}$ է. $P(A_i) = \frac{1}{6}; i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

Նույն փորձում դիտարկենք նաև A, B, C և D պատահույթները, A -ն խաղոսկրը նետելիս բացվում է 6 միավոր, B -ն բացվում է զույգ թիվ, C -ն բացվում է 3 կամ 5 միավոր, D -ն բացվում է կա՛մ 1, կա՛մ 2, կա՛մ 3, կա՛մ 4, կա՛մ 5, կա՛մ 6 միավոր:

Այդ պատահականություններից ցանկացածի հավանականությունը սահմանենք որպես այդ պատահականության նպաստող տարրական պատահականությունների թվի և տարրական պատահականությունների ընդհանուր թվի հարաբերություն:

Ակնհայտ է, որ A պատահականությունն նպաստում է մեկ տարրական պատահականության՝ 6 միավոր բացվելը, B պատահականությունն նպաստում են երեք տարրական պատահականության՝ 2 կամ 4 կամ 6 միավոր բացվելը, C պատահականությունն նպաստում են երկու տարրական պատահականության՝ կամ 3, կամ 5 միավոր բացվելը, D պատահականությունն նպաստում են 6 տարրական պատահականության՝ կամ 1, կամ 2, կամ 3, կամ 4, կամ 5, կամ 6 միավոր բացվելը:

Հետևաբար՝

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(D) = \frac{6}{6} = 1:$$

Օրինակ 3. Ուսանողին խնդրեցին ասել 30-ը չգերազանցող որևէ բնական թիվ: Գտնել հավանականությունը, որ նա կասի ա) 3-ի բաժանվող թիվ, բ) 3-ի չբաժանվող թիվ:

Դիցուք A պատահականությունը այն է, որ նա կասի 3-ի բաժանվող թիվ, B -ն՝ 3-ի բաժանելիս 1 մնացորդ ստացվող թիվ,

C -ն՝ 3-ի բաժանելիս 2 մնացորդ ստացվող թիվ: A , B և C պատահականություններն այնպիսին են, որ տեղի է ունենում այդ պատահականություններից մեկը և միայն մեկը: A պատահականությունն նպաստում է 30-ից 10 տարրական պատահականության, հետևաբար

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3},$$

այսինքն՝ ուսանողը 3-ի բաժանվող թիվ կասի $\frac{1}{3}$ հավանականությամբ:

Դիցուք D -ն այն պատահականություն է, որ նա կասի 3-ի չբաժանվող թիվ: D պատահականությունն նպաստում է 30-ից 20 տարրական

պատահույթ, հետևաբար $P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$, այսինքն՝ ուսանողը 3-ի չբաժանվող թիվ կասի $\frac{2}{3}$ հավանականությամբ:

Ցանկացած փորձում.

ա) $A_1, A_2, \dots, A_n$ պատահույթներն անվանում են **միակ հնարավոր**, եթե այդ փորձում տեղի է ունենում դրանցից մեկը և միայն մեկը,

բ) $C_1, C_2, \dots, C_n$ պատահույթներն անվանում են **հավասարահնարավոր**, եթե այդ փորձում ոչ մի հիմք չկա դրանցից մեկը մյուսից գերադասելու,

գ) պատահույթն անվանում են **հավաստի**, եթե այդ փորձում այն ամպայման տեղի կունենա,

դ) պատահույթն անվանում են **անհնար**, եթե այդ փորձում այն չի կարող տեղի ունենալ,

ե) A և B պատահույթներն անվանում են **անհամատեղելի**, եթե այդ փորձում դրանք միաժամանակ հանդես գալ չեն կարող, կամ, ինչպես ասում են, դրանցից մեկը բացառում է մյուսին,

զ) $B_1, B_2, \dots, B_n$ պատահույթներն անվանում են **անհամատեղելի**, եթե այդ փորձում դրանցից ցանկացած զույգ անհամատեղելի է:

Նշենք, որ եթե պատահույթները միակ հնարավորն են, ապա դրանք մասնավորապես անհամատեղելի են:

Օրինակ 2-ում $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ պատահույթները միակ հնարավորն են և հավասարահնարավոր են, A_1, A_3, A_5, B պատահույթները միակ հնարավորն են, բայց հավասարահնարավոր չեն, B և C պատահույթներն անհամատեղելի են, D պատահույթը հավաստի է, E պատահույթը, որ բացվել է 7 միավոր՝ անհնար է:

Այժմ դիտարկենք փորձ, որի արդյունքում տեղի կունենա

$$A_1, A_2, \dots, A_n \quad (9)$$

n հավասարահնարավոր պատահականություններից մեկը և միայն մեկը, այսինքն՝ (9) պատահականությունը միակ հնարավոր են և հավասարահնարավոր են: Այդպիսի պատահականությունը կանվանենք **տարրական պատահականություն**:

Այդ փորձում կարելի է դիտարկել նաև այնպիսի պատահականություններ, որոնցում նախապես նշված տարրական պատահականություններից մեկը տեղի ունենա: Այսպես, օրինակ 2-ում B -ն այն պատահական է, որ տեղի է ունենում հետևյալ երեք տարրական պատահականություններից մեկը, բացվում է կա՛մ 2, կա՛մ 4, կա՛մ 6 միավոր: C պատահական այն է, որ տեղի է ունենում հետևյալ երկու տարրական պատահականություններից մեկը, բացվում է կա՛մ 3, կա՛մ 5 միավոր: A պատահական այն է, որ տեղի է ունենում մեկ տարրական պատահականություն. բացվում է 6 միավոր:

Դիցուք դիտարկվող փորձում A պատահականություն այն է, որ տեղի կունենա (9) նախապես նշված m տարրական պատահականություններից մեկը: Այդ m տարրական պատահականությունների մասին կասենք, որ դրանք նպաստում են A պատահականության:

A պատահականության հավանականությունը սահմանենք որպես A պատահականության նպաստող տարրական պատահականությունների m թվի և դիտարկվող տարրական պատահականությունների n թվի հարաբերություն, այսինքն՝

$$P(A) = \frac{m}{n}:$$

Եթե տվյալ պատահականությունն նպաստող տարրական պատահականություններ չկան, այսինքն՝ նպաստավոր տարրական պատահականությունների քանակը հավասար է 0-ի ($m=0$), ապա այդպիսի

պատահույթը անհնար է, և այն նշանակում են՝ $\emptyset$: Անհնար պատահույթի հավանականությունը հավասար է 0-ի.

$$P(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0:$$

Օրինակ, այն պատահույթը, որ խաղոսկրը նետելիս կբացվի 7 միավոր՝ անհնար է, դրա հավանականությունը հավասար է զրոյի:

Եթե պատահույթին նպաստում են բոլոր դիտարկվող տարրական պատահույթները, այսինքն՝ $m = n$, ապա այդպիսի պատահույթը հավաստի է, այն նշանակում են Ω , դրա հավանականությունը հավասար է 1-ի.

$$P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1:$$

Օրինակ, խաղոսկրը նետելիս այն պատահույթը, որ կբացվի կա՛մ 1, կա՛մ 2, կա՛մ 3, կա՛մ 4, կա՛մ 5, կա՛մ 6 միավոր, հավաստի է, դրա հավանականությունը հավասար է 1-ի:

3. Պատահույթների հավանականությունների հասկությունները

Այս կետում դիտարկվում են մեկ փորձին վերաբերող պատահույթներ:

A և B **պատահույթների գումար (միավորում)** անվանում են հետևյալ պատահույթը. տեղի է ունենում A և B պատահույթներից առնվազն մեկը (A -ն կամ B -ն կամ երկուսը միասին): A և B պատահույթների գումարը նշանակում են $A \cup B$:

Օրինակ 1. Եթե խաղոսկրը նետելիս A պատահույթը 1 կամ 2 միավոր բացվելն է, իսկ B պատահույթը՝ 2 կամ 3 միավոր բացվելը, ապա $A \cup B$ պատահույթը 1 կամ 2 կամ 3 միավոր բացվելն է:

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ գրառումը նշանակում է հետևյալ պատահույթը. տեղի է ունենում $A_1, A_2, \dots, A_n$ պատահույթներից առնվազն մեկը:

Օրինակ 2. Եթե խաղոսկրը նետելիս A պատահույթը զույգ միավոր բացվելն է, B պատահույթը՝ 3-ին բազմապատիկ միավոր բացվելը, իսկ C պատահույթը՝ 4-ից մեծ միավոր բացվելը, ապա $A \cup B \cup C$ պատահույթը կա՛մ 2, կա՛մ 3, կա՛մ 4, կա՛մ 5, կա՛մ 6 միավոր բացվելն է:

A և B անհամատեղելի պատահույթների գումարը կնշանակենք $A + B$:

Օրինակ 3. Եթե խաղոսկրը նետելիս A պատահույթը 1 միավոր բացվելն է, B պատահույթը՝ 3 միավոր բացվելը, ապա A և B պատահույթը անհամատեղելի են, հետևաբար $A + B$ պատահույթը կա՛մ 1, կա՛մ 3 միավոր բացվելն է:

A և B **պատահույթների արտադրյալ (հատում)** անվանում են հետևյալ պատահույթը. տեղի են ունենում և՛ A և՛ B պատահույթները: A և B պատահույթների արտադրյալը նշանակում են $A \cap B$ կամ AB :

Օրինակ 1-ում $A \cap B$ պատահույթը 2 միավոր բացվելն է:

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ (կամ $A_1 A_2 \dots A_n$) գրառումը նշանակում է հետևյալ պատահույթը. տեղի են ունենում բոլոր $A_1, A_2, \dots, A_n$ պատահույթները:

Օրինակ 2-ում $A \cap B \cap C$ պատահույթը 6 միավոր բացվելն է:

Պատահույթների հավանականությունները օժտված են հետևյալ հատկություններով.

1. Ցանկացած A պատահույթի հավանականությունը բավարարում է

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

անհավասարություններին:

2. Ω հավաստի պատահույթի հավանականությունը հավասար է 1-ի. $P(\Omega) = 1$:

3. A և B անհամատեղելի պատահույթների գումարի հավանականությունը հավասար է դրանց հավանականությունների գումարին.

$$P(A + B) = P(A) + P(B):$$

Սահմանումից հետևում է, որ $P(A)$ հավանականությունը, այսինքն՝ $\frac{m}{n}$ կոտորակը ոչ բացասական է և 1-ից մեծ չէ: Այն հավասար է զրոյի անհնար պատահույթի համար և հավասար է մեկի հավաստի պատահույթի համար:

Երկու միակ հնարավոր պատահույթներն անվանում են **հակադիր**:

Օրինակ, խաղոսկր նետելիս A պատահույթը (զույգ միավոր բացվելը) և B պատահույթը (կենտ միավոր բացվելը) հակադիր պատահույթներ են, C պատահույթը (1 միավոր բացվելը) և D պատահույթը (կա՛մ 2, կա՛մ 3, կա՛մ 4, կա՛մ 5, կա՛մ 6 միավոր բացվելը) հակադիր պատահույթներ են:

A պատահույթին հակադիր պատահույթը նշանակում են $\bar{A}$ (տվյալ փորձում A պատահույթը տեղի չի ունենա):

Ակնհայտ է, որ A և $\bar{A}$ պատահույթներն անհամատեղելի են, իսկ դրանց գումարը հավաստի պատահույթ է՝ $A + \bar{A} = \Omega$, հետևաբար՝ $P(A) + P(\bar{A}) = 1$:

Նշենք նաև, որ եթե A և B պատահույթների հատումն անհնար պատահույթ է ($A \cap B = \emptyset$), ապա դրանք անհամատեղելի են: Եթե A և B պատահույթները անհամատեղելի են, ապա $P(AB) = 0$:

Ապացուցենք, որ ճշմարիտ է

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (10)$$

հավասարությունը:

Նշանակենք՝ $A \setminus B$ -ով այն պատահույթը, որ A պատահույթը տեղի ունի, իսկ B պատահույթը տեղի չունի: Քանի որ A և $B \setminus AB$ պատահույթները անհամատեղելի են, և $A \cup B = A + B \setminus AB$, ապա

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus AB): \quad (11)$$

Քանի որ $B \setminus AB$ և AB պատահույթներն անհամատեղելի են, և ակնհայտ է, որ $B = B \setminus AB + AB$, ապա

$$P(B) = P(B \setminus AB) + P(AB): \quad (12)$$

(11) և (12) հավասարություններից բխում է (10) հավասարությունը:

Օրինակ 1-ում $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(AB) = \frac{1}{6}$, այդ պատճառով, ըստ (1) բանաձևի,

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}:$$

Օրինակ 4. 36 խաղաթուղթ պարունակող կապուկից պատահականորեն հանում են մեկ խաղաթուղթ: Գտնենք այդ խաղաթղթի խաչ կամ տուզ լինելու հավանականությունը:

Դիցուք A պատահույթը հանված խաղաթղթի խաչ լինելն է, իսկ B -ն՝ հանված խաղաթղթի տուզ լինելը: Այդ դեպքում $A \cup B$ -ն հանված խաղաթղթի խաչ կամ տուզ լինելու պատահույթն է, իսկ AB -ն՝ հանված խաղաթուղթը խաչի տուզ լինելու պատահույթը: Պարզ է, որ

$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{36}$, $P(AB) = \frac{1}{36}$, այդ պատճառով, ըստ (1) բանաձևի,

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}:$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}:$$

Օրինակ 5. Լսարանում կա n ուսանող: Գտնենք հավանականությունը, որ նրանցից առնվազն երկուսը կունենան միևնույն ծննդյան օրը:

Համարենք, որ տարին ունի 365 օր: Դիցուք A -ն առնվազն երկու ուսանողի նույն ծննդյան օրն ունենալու պատահական է: $\bar{A}$ -ը բոլոր ուսանողների տարբեր օրերի ծնվելու պատահական է: Այդ պատահականության տեղի ունենալու համար կան 365^n հնարավոր ելքեր, որոնցից նպաստավորների քանակն են՝ $365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)$: Հետևաբար՝

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}:$$

Հետևյալ աղյուսակում նշված են հավանականությունները արժեքները տարբեր n -երի համար.

n	4	16	23	32	40	56
$P(A)$	0,016	0,284	0,507	0,753	0,891	0,988

4. Պատահական հարաբերական հաճախությունը

Դիցուք փորձի արդյունքում կարող է տեղի ունենալ A պատահականություն, որի հավանականությունն է $p = P(A)$ ($0 < p < 1$): Փորձը կրկնենք n անգամ, և դիցուք A պատահականություն տեղի կունենա m անգամ: $\frac{m}{n}$ թիվն անվանում են A **պատահական հարաբերական հաճախություն**:

Տեղի ունի հետևյալ հրաշալի փաստը. մեծ n -երի համար պատահական հարաբերական հաճախությունը քիչ է տարբերվում p թվից՝ $\frac{m}{n} \approx p$:

Մաթեմատիկոսներ Ժ. Բյուֆֆոնը և Կ. Պիրսոնը, նետելով մետաղադրամը, կատարել են բազմաթիվ փորձեր: Արդյունքները բերված են աղյուսակում.

	Նետումների թիվը	Զինանշան բացվելու թիվը	Զինանշան բացվելու հարաբերական հաճախությունը
Բյուֆֆոն	4040	2048	0,5085
Պիրսոն	12000	6019	0,5046
Պիրսոն	24000	12012	0.5005

Ինչպես երևում է աղյուսակից, Բյուֆֆոնի և Պիրսոնի փորձերում զինանշան բացվելու հարաբերական հաճախությունը քիչ է տարբերվում նշված փորձում զինանշան բացվելու հաճախությունից, որը հավասար է 0,5:

Ոչ միշտ է հաջողվում ապրիորի (լատ. Apriori-անկախ փորձից) գտնել պատահույթի հավանականությունը, ինչպես, ասենք, մետաղադրամ կամ խաղոսկր նետելիս: Բայց եթե հնարավոր է փորձը կրկնել n անգամ, ապա մեծ n -ի դեպքում պատահույթի $\frac{m}{n}$ հարաբերական հաճախությունը կարելի է դիտարկել որպես այդ պատահույթի հավանականության մոտավոր արժեք ($\frac{m}{n} \approx p$):

Մեծ թվով փորձերի դեպքում պատահույթի հարաբերական հաճախությունը, որպես կանոն, քիչ է տարբերվում այդ պատահույթի հավանականությունից: Այդ օրինաչափությունն անվանում են հարաբերական հաճախությունների վիճակագրական կայունություն:

Նշենք, որ ինչքան շատ են կատարվում փորձեր, այնքան քիչ է լինում հարաբերական հաճախության շեղումը հավանականությունից:

Դիտողություն. Եթե պատահույթի հարաբերական հաճախությունը ընդունենք ըստ սահմանման որպես այդ պատահ-

հույթի հավանականության մոտավոր արժեք, ապա կստանանք, այսպես կոչված, հավանականության վիճակագրական սահմանումը:

2-րդ կետում բերված պատահույթի հավանականության սահմանումն անվանում են հավանականության դասական սահմանում:

Գոյություն ունի նաև հավանականության աքսիոմային սահմանում, որում հավանականության սահմանումը տրվում է նրա հատկությունների թվարկումով: Հավանականությունը տրվում է ինչպես տվյալ փորձով որոշվող բոլոր պատահույթների Ω բազմության վրա սահմանված $P(A)$ ֆունկցիա, որը (վերջավոր թվով ելքերով փորձերի համար) բավարարում է հետևյալ աքսիոմներին.

- 1) $0 \leq P(A) \leq 1$ ցանկացած պատահույթի համար Ω -ից,
- 2) $P(A) = 1$, եթե A -ն հավաստի պատահույթ է,
- 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, եթե A -ն և B -ն անհամատեղելի են:

Տեսությունը, որն ուսումնասիրում է միայն վերջավոր թվով ելքեր ունեցող փորձերի պատահույթների հավանականությունը, անվանում են **հավանականությունների տարրական տեսություն**:

Իհարկե, գոյություն ունեն նաև փորձեր անվերջ թվով հնարավոր պատահույթներով: Տեսությունը, որն ուսումնասիրում է այդպիսի պատահույթների հավանականությունը, անվանում են **հավանականությունների ընդհանուր տեսություն**:

Հավանականությունների ընդհանուր տեսության մեջ հատկություն 3-ը հասկացվում է ընդլայնված իմաստով.

$$P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots:$$

1-3 հատկություններն անվանում են հավանականությունների տեսության Կոլմոգորովի աքսիոմներ: Հենց Ա. Ն. Կոլմոգորովն է 1933 թ.-ին ստեղծել հավանականությունների աքսիոմային տեսությունը:

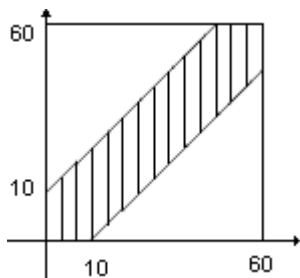
5. Երկրաչափական հավանականություն

Դիտարկենք Ω տիրույթ (ուղղի վրա, հարթության վրա կամ տարածության մեջ): Ենթադրենք, որ Ω -ի չափը (համապատասխանաբար երկարությունը, մակերեսը, ծավալը) վերջավոր է: Դիցուք այդ տիրույթի մեջ պատահաբար նետում ենք կետ: Հավանականությունը, որ կետը կլինի Ω տիրույթի D ենթաբազմության մեջ, անվանում են երկրաչափական հավանականություն և հաշվում են

$$p(D) = \frac{\mu(D)}{\mu(\Omega)}$$

բանաձևով, որտեղ μ -ն տիրույթի չափն է:

Հանդիպման խնդիրը. Երկու ընկեր պայմանավորվում են հանդիպել որոշակի տեղում, ժամը երկուսի և երեքի միջև ընկած ժամանակահատվածում: Առաջին եկողը սպասում է 10 րոպե և մյուսի չգալու դեպքում գնում է: Գտնել ընկերների հանդիպելու հավանականությունը, եթե նրանցից յուրաքանչյուրը կարող է գալ նշված ժամի ցանկացած պահին՝ անկախ մյուսից:



Նկ. 64

Առաջին ընկերոջ գալու պահը նշանակենք x -ով, երկրորդին՝ y -ով: Որպեսզի հանդիպումը տեղի ունենա, անհրաժեշտ է և բավարար $|x - y| \leq 10$ պայմանը:

Որպես կոորդինատային հարթության միավոր ընտրենք բոլորն: Բոլոր հնարավոր ելքերը պատկերենք որպես 60 կողմով քառակուսու կետեր, իսկ հանդիպմանը նպաստող կետերը գծապատենք (Նկար 64): Հետևաբար

$$p = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} = \frac{11}{36}.$$

6. Պայմանական հավանականություն:

Անկախ պատահույթներ

Օրինակ 1. Դիցուք նետվել է խաղոսկր, և հայտնի է դարձել, որ տեղի է ունեցել A պատահույթը. բացվել է հինգից ոչ պակաս միավոր: Գտնել վեց միավոր բացվելու պատահույթի պայմանական հավանականությունը:

Եթե մենք չիմանայինք, որ A պատահույթը տեղի է ունեցել, ապա B պատահույթի հավանականությունը կլիներ $\frac{1}{6}$: Սակայն խնդրում կա լրացուցիչ տեղեկություն այն մասին, որ բացվել է կա՛մ 5, կա՛մ 6 միավոր, այդ լրացուցիչ պայմանի պատճառով B պատահույթի հավանականությունը $\frac{1}{2}$ է: Այդ-

պիսի հավանականությունն անվանում են B պատահույթի պայմանական հավանականություն՝ պայմանով, որ տեղի է ունեցել A պատահույթը:

Դիցուք փորձի արդյունքում կարող են տեղի ունենալ n հավասարահնարավոր և միակ հնարավոր պատահույթներ, որոնք մենք անվանում ենք տարրական պատահույթներ, իսկ A , B , AB պատահույթներին նպաստում են այդ տարրական պատահույթներից համապատասխանաբար m_1 -ը, m_2 -ը և l -ը:

Հեշտ է տեսնել, որ եթե դիտարկվեն միայն պատահույթին նպաստող m_1 ($m_1 \neq 0$) տարրական պատահույթները, ապա AB իրադարձությանը նպաստող տարրական պատահույթները այդ m_1 տարրական պատահույթներից են (որոնցից յուրաքանչյուրը նպաստում է նաև B պատահույթին):

B պատահույթի պայմանական հավանականություն՝ պայմանով, որ տեղի է ունեցել A պատահույթը, անվանում են AB պատահույթին նպաստող տարրական պատահույթների և A պատահույթին նպաստող տարրական պատահույթների հարաբերությունը:

B պատահույթի պայմանական հավանականությունը՝ պայմանով, որ տեղի է ունեցել A պատահույթը, նշանակում են՝ $P_A(B)$: Ուրեմն՝ $P_A(B) = \frac{p(AB)}{p(A)} = \frac{l}{m_1}$:

Օրինակ 2. Ձեզ անհրաժեշտ է գուշակել ձեր ընկերոջ բնակարանի համարը, որն ապրում է մի շենքում, որի բնակարանները համարակալված են 1-ից մինչև 40: Ձեզ հայտնի է միայն, որ ընկերոջ բնակարանի համարը բաժանվում է 8-ի: Գտնել հավանականությունը, որ ընկերոջ բնակարանի համարը դուք կգուշակեք առաջին փորձից:

Դիցուք A_i պատահույթը - «բնակարանի համարն i է», $i = 1, 2, \dots, 40$: Պարզ է, որ A_i պատահույթների քանակը 40 է, դրանք բոլորը հավասարահնարավոր և միակ հնարավոր են, հետևաբար ունենք 40 տարրական պատահույթ.

$$A_1, A_2, \dots, A_{40}: \quad (13)$$

A -ով նշանակենք «բնակարանի համարը բաժանվում է 8-ի» պատահույթը: Այդ պատահույթին նպաստում են (13) տարրական պատահույթներից 5-ը.

$$A_8, A_{16}, A_{24}, A_{32}, A_{40}: \quad (14)$$

Նշանակենք B -ով «ընկերոջ բնակարանի համարը» պատահույթը: Այս պատահույթին նպաստում է (14) տարրական պատահույթներից միայն մեկը:

Հետևաբար $P_A(B) = \frac{1}{5}$, այսինքն՝ հավանականությունը, որ ընկերոջ բնակարանի համարը դուք կգուշակեք առաջին փորձից՝ իմանալով, որ այդ բնակարանի համարը բաժանվում է 8-ի, հավասար է $\frac{1}{5}$ -ի: Նշենք, որ եթե այդ լրացուցիչ տեղեկությունը չլիներ, հավանականությունը հավասար կլիներ $\frac{1}{40}$ -ի:

Քանի որ AB պատահույթի հավանականությունը հավասար է $\frac{l}{n}$, ապա

$$P(AB) = \frac{l}{n} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{l}{m_1};$$

$\frac{m_1}{n}$ արտադրիչը A պատահույթի հավանականությունն է, իսկ երկրորդ արտադրիչը՝ B պատահույթի պայմանական հավանականությունը պայմանով, որ տեղի է ունեցել A պատահույթը: Հետևաբար ճիշտ է

$$P(AB) = P(A)P_A(B)$$

հավասարությունը:

Համանմանորեն ցույց է տրվում, որ $\delta_{ij} \geq 0$ և

$$P(AB) = P(B)P_B(A)$$

հավասարությունը: Եթե $P(B) > 0$, ապա $P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$:

Դա նշանակում է, որ A պատահույթի պայմանական հավանականությունը պայմանով, որ տեղի է ունեցել B պատահույթը, կարելի է գտնել որպես AB պատահույթի հավանականության և B պատահույթի հավանականության հարաբերություն:

Եթե B -ն անհնար պատահույթ է, այսինքն՝ $P(B) = 0$ ($m_2=0$), ապա ընդունված է համարել, որ $P_B(A)$:

Օրինակ 3. Դիցուք խաղոսկրը նետելիս A պատահույթը զույգ թվով միավոր բացվելն է, B պատահույթը՝ կա՛մ 4, կա՛մ 5, կա՛մ 6 միավոր բացվելը, C պատահույթը՝ 3 միավոր բացվելը:

Այդ դեպքում AB պատահույթը կա՛մ 4, կա՛մ 6 միավոր բացվելն է, և $P(AB) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$: AC և BC պատահույթները անհնար պատահույթներ են, հետևաբար՝ $P(AC) = 0, P(BC) = 0$:

Քանի որ $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, ապա

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \text{ և } P_A(C) = \frac{P(AC)}{P(A)} = 0:$$

Քանի որ $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, ապա

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \text{ և } P_B(C) = \frac{P(BC)}{P(B)} = 0:$$

Երբեմն $P(A)$ հավանականությունն անվանում են ոչ պայմանական հավանականություն, որպեսզի շեշտվի տարբերությունը $P_B(A)$ պայմանական հավանականությունից: Դիտարկենք $P_B(A) = P(A)$ դեպքը, երբ A պատահույթի պայմանական հավանականությունը համընկնում է ոչ պայմանական հավա-

նականության հետ, այսինքն՝ երբ A պատահույթի պայմանական հավանականությունը կախված չէ նրանից, թե B պատահույթը տեղի է ունեցել, թե ոչ: Այդ դեպքում $P(AB) = P(A)P(B)$:

A և B պատահույթներին (տվյալ փորձում) անվանում են անկախ, եթե ճշմարիտ է

$$P(AB) = P(A)P(B): \quad (15)$$

հավասարությունը:

Օրինակ 4. Դիցուք միաժամանակ նետում են երկու մետաղադրամ: A պատահույթն առաջին նետման ժամանակ զինանշան բացվելն է, իսկ երկրորդին՝ կա՛մ զինանշան, կա՛մ գիր բացվելը, B պատահույթը երկրորդ նետման ժամանակ զինանշան բացվելն է, իսկ առաջինին՝ կա՛մ զինանշան, կա՛մ գիր բացվելը: Ցույց տանք, որ այդ պատահույթներն անկախ են:

Երկու մետաղադրամ նետելիս հնարավոր են միայն հետևյալ տարրական պատահույթները.

Տարրական պատահույթ	Առաջին մետաղադրամ	Երկրորդ մետաղադրամ
1	Զինանշան	Զինանշան
2	Զինանշան	Գիր
3	Գիր	Զինանշան
4	Գիր	Գիր

Հետևաբար՝ ընդամենը կա չորս տարրական պատահույթ (հավասարահնարավոր և միակ հնարավոր): Դրանցից A պատահույթին նպաստում են 1 և 2 տարրական պատահույթները, իսկ B պատահույթին՝ 1 և 3 տարրական պատահույթները: Այդ դեպքում

$$P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}:$$

$C = AB$ պատահույթը զինանշանի բացվելն է յուրաքանչ-յուր մետաղադրամի վրա: Այդ պատահույթին նպաստում է միայն մեկ տարրական պատահույթ՝ 1-ը: Հետևաբար՝

$$P(C) = \frac{1}{4}:$$

Այժմ անկնայտ է, որ $P(AB) = P(A)P(B)$: Այդ հավասարության ճիշտ լինելը նշանակում է, որ A և B պատահույթներն անկախ են:

Կիրառական հարցերում պատահույթների անկախությունը որոշելու համար հազվադեպ են այդ անում ստուգելով (15) հավասարությունը: Սովորաբար դա անում են՝ հենվելով փորձից բխող ինտուիտիվ դատողությունների վրա: Չնայած օրինակ 4-ում (15) հավասարության հիման վրա ցույց է տրված, որ A և B պատահույթներն անկախ են, բայց ինտուիտիվ պարզ է, որ մի մետաղադրամի վրա զինանշան բացվելը չի փոխում մյուս մետաղադրամի վրա զինանշան բացվելու հավանականությունը, այսինքն՝ ինտուիտիվ դատողություններով պարզ է, որ այդ պատահույթներն անկախ են: Այդ պատճառով կիրառական խնդիրներում պատահույթների անկախությունը նախօրոք տրվում է:

Օրինակ 5. Երկու հրաձիգ կրակում են թիրախին: Առաջինի՝ թիրախին դիպչելու հավանականությունը 0,6 է, իսկ երկրորդինը՝ 0,5: Համարելով, որ թիրախին դիպչելը յուրաքանչյուր հրաձիգի համար անկախ պատահույթ է (այսինքն՝ թիրախին դիպչելու հավանականությունը կախված չէ մյուս հրաձիգի թիրախին դիպչելու կամ չդիպչելու հավանականությունից), գտնենք. ա) երկու հրաձիգի թիրախին դիպչելու հավանականությունը, բ) գոնե մեկ հրաձիգի թիրախին դիպչելու հավանականությունը:

Դիցուք A -ն առաջին հրաձիգի, իսկ B -ն երկրորդ հրաձիգի՝ թիրախին դիպչելու պատահականություն է: Այդ դեպքում AB -ն երկու հրաձիգի թիրախին դիպչելու իրադարձությունն է, իսկ $A \cup B$ -ն՝ գոնե մեկ հրաձիգի: Քանի որ $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$, և A , B պատահականություններն անկախ են, ապա ըստ (3) հավասարության՝

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3:$$

Կիրառելով (10) բանաձևը՝ կստանանք.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,6 + 0,5 - 0,6 \cdot 0,5 = 0,8:$$

Հետևաբար երկու հրաձիգի՝ թիրախին դիպչելու հավանականությունը 0,8 է, իսկ գոնե մեկ հրաձիգի թիրախին դիպչելու հավանականությունը՝ 0,8:

Եթե A պատահականության տեղի ունենալը կախված է ուրիշ $B_1, B_2, \dots, B_n$ անհամատեղելի պատահականություններից, ապա ճշմարիտ է **լրիվ հավանականության բանաձևը**.

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P(A/B_k):$$

Օրինակ 6. Առաջին սափորը պարունակում է 6 սպիտակ և 4 սև գնդակ, իսկ երկրորդ սափորը՝ 5 սպիտակ և 2 սև գնդակ: Առաջին սափորից մեկ գնդակ տեղափոխում են երկրորդ սափոր: Այնուհետև երկրորդ սափորից հանում են 2 գնդակ: Գտնենք այդ երկու գնդակների սպիտակ լինելու հավանականությունը:

Նշանակենք B_1 -ով առաջին սափորից երկրորդ սափոր սպիտակ գնդակ տեղափոխելու պատահականությունը, իսկ B_2 -ով՝ սև գնդակ տեղափոխելու պատահականությունը: A -ով նշանակենք երկրորդ սափորից 2 սպիտակ գնդակ հանելու պատահականությունը: Ըստ լրիվ հավանականության բանաձևի՝

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2):$$

Քանի որ

$$P(B_1) = \frac{3}{5}, P(B_2) = \frac{2}{5}, P(A/B_1) = \frac{15}{28}, P(A/B_2) = \frac{5}{14}$$

հետևաբար

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{28} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{14} = \frac{13}{28}.$$

7. Մաթեմատիկական սպասում: Մեծ թվերի օրենքը

1. Դիցուք փորձի արդյունքում տեղի է ունենում n միակ հնարավոր $B_1, B_2, \dots, B_n$ պատահույթ, որոնք համապատասխանաբար ունեն $p_1, p_2, \dots, p_n$ հավանականություններ, ընդ որում $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$:

Դիտարկենք ֆունկցիա, որը յուրաքանչյուր B_i պատահույթին համապատասխանեցնում է որոշակի x_i թիվ: Այդ դեպքում ասում են, որ որոշված է x **պատահական մեծություն**, որը x_i արժեքն ընդունում է p_i հավանականությամբ:

x պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասում անվանում են

$$m(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

թիվը: Եթե x պատահական մեծության արժեքներն ունեն միևնույն p հավանականությունը, ապա

$$p = \frac{1}{n}, \quad m(x) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n),$$

այսինքն՝ այս դեպքում պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է նրա արժեքների միջին թվաբանականին:

Օրինակ 1 (Պասկալի խնդիրը). A և B խաղացողները պայմանավորվել էին, որ խաղագումարը կվերցնի այն խաղացողը,

որն առաջինը կհաղթի 5 խաղափուլերում: Սակայն խաղն ընդհատվեց: Այդ պահին A խաղացողն ուներ 4 հաղթանակ, իսկ B -ն՝ 3 հաղթանակ: Այդ իրավիճակում խաղացողները ի՞նչ հարաբերությամբ պետք է բաժանեն խաղագումարը (յուրաքանչյուր խաղափուլում հաղթում է խաղացողներից միայն մեկը, ոչ-ոքի չկա, և մեկ խաղափուլում յուրաքանչյուր խաղացողի հաղթելու հավանականությունը 0,5 է):

Տեսնենք, թե ինչ դեպքեր կարող էին տեղի ունենալ, եթե խաղացողները խաղային ևս երկու խաղափուլ:

1) B խաղացողը հաղթում է երկու խաղափուլերում,
 2) B խաղացողը հաղթում է առաջին խաղափուլում, բայց պարտվում է երկրորդում,

3) B խաղացողը պարտվում է առաջին խաղափուլում, բայց հաղթում է երկրորդում,

4) B խաղացողը պարտվում է երկու խաղափուլերում:

Ըստ սկզբնական պայմանավորվածության՝ չորսից երեք դեպքում հաղթում է առաջին խաղացողը, երկրորդը՝ միայն մեկում: Հետևաբար A պատահույթի (A -ն շահել է ամբողջ խաղը) հավանականությունը $\frac{3}{4}$ է, իսկ B պատահույթի (B -ն շահել է ամբողջ խաղը) հավանականությունը՝ $\frac{1}{4}$:

Եթե խաղագումարը C դրամ է, ապա A խաղացողը կստանար x_A դրամ, որտեղ x_A -ն պատահական մեծություն է, որը C արժեքն ընդունում է $\frac{3}{4}$ հավանականությամբ, իսկ 0 արժեքը՝ $\frac{1}{4}$ հավանականությամբ: B խաղացողը կստանար x_B դրամ, որտեղ x_B -ն պատահական մեծություն է, որը C արժեքն ընդու-

նում է $\frac{1}{4}$ հավանականությամբ, իսկ 0 արժեքը՝ $\frac{3}{4}$ հավանականությամբ:

Գտնենք x_A և x_B պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումները.

$$m(x_A) = C \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} C, \quad m(x_B) = C \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} C:$$

Հետևաբար՝ խաղագումարը նրանք պետք է բաժանեն $m(x_A):m(x_B)$ հարաբերությամբ, այսինքն՝ 3:1 հարաբերությամբ:

Մեծ n -երի դեպքում պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը գնահատում է նրա միջին արժեքը:

Պատահական մեծության արժեքների մաթեմատիկական սպասման շուրջը արժեքների բաշխումը նկարագրելու համար ներմուծում են պատահական մեծության դիսպերսիա գաղափարը:

2. x պատահական մեծության **դիսպերսիա** անվանում են

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

թիվը, որտեղ $m = m(x)$ -ը պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումն է:

Պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղում կամ ստանդարտ շեղում անվանում են հետևյալ թիվը.

$$\sigma = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i}:$$

Եթե պատահական մեծության արժեքներն ունեն միևնույն p հավանականությունը, ապա

$$\sigma = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}:$$

3. Ենթադրենք կատարվում է մի քանի փորձ: Փորձերն անվանում են **անկախ**, եթե յուրաքանչյուր փորձում A պատահույթի տեղի ունենալու հավանականությունը կախված չէ մյուս փորձերում նրա տեղի ունենալուց կամ չուներենալուց:

A և B անկախ պատահույթների համար (A, B) -ով նշանակենք այն պատահույթը, որ առաջին փորձում տեղի կունենա A պատահույթը, իսկ երկրորդում՝ B պատահույթը: Այդ դեպքում

$$P(A, B) = P(A)P(B):$$

4. Դիցուք փորձում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է p -ի, և փորձը կրկնվում է n անգամ, ընդ որում յուրաքանչյուր փորձ անկախ է մյուսներից:

Այդ դեպքում հավանականությունը, որ A պատահույթը տեղի կունենա k անգամ, հաշվվում է **Բեռնուլիի բանաձևով**.

$$P_n^k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}:$$

Օրինակ 2. Դիցուք ինչ-որ բույսի ծլելու հավանականությունը հավասար է 90%: Գտնենք հավանականությունը, որ հինգ ցանված սերմերից կծլի երեքը:

Տվյալ օրինակում $p = 0,9, n = 5, k = 3$: Հետևաբար $P_5^3 = C_5^3 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^2 \approx 0,0729$: Այսինքն՝ հավանականությունը, որ հինգ ցանված սերմերից երեքը կծլի, մոտավորապես 7% է:

Ձևակերպենք այսպես կոչված **մեծ թվերի օրենքը**:

Դիցուք փորձում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է p -ի, և յուրաքանչյուր փորձ անկախ է մյուսներից: Այս դեպքում փորձը շատ անգամ կրկնելիս 1-ին

մոտիկ է հավանականությունը, որ A պատահույթի հարաբերական հաճախությունը p -ից քիչ է տարբերվում:

Այս օրենքը կարելի է ձևակերպել ավելի ճշգրիտ: Դիցուք յուրաքանչյուր փորձում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է p -ի: Այդ դեպքում ցանկացած չափով փոքր ε և δ դրական թվերի համար կարելի է գտնել բավականաչափ մեծ n , այնպիսին, որ փորձը n անգամ կրկնելիս A իրադարձության $\frac{m}{n}$ հարաբերական հաճախությունը p -ից ε -ից քիչ է շեղվում $1 - \delta$ -ից մեծ հավանականությամբ.

$$p \left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) > 1 - \delta:$$

8. Տվյալների մշակում

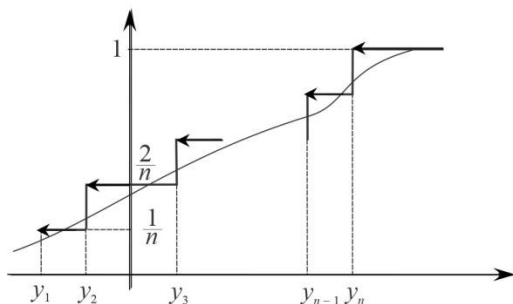
Դիցուք տրված են $x_1, x_2, \dots, x_n$ տվյալները, որոնք ξ պատահական մեծության արժեքներն են: Այդ տվյալները հավասարահնարավոր են, և դրանցից յուրաքանչյուրը կարող է հանդես գալ $\frac{1}{n}$ հավանականությամբ:

1. Բաշխման փորձարարական ֆունկցիա

Կառուցենք $x_1, x_2, \dots, x_n$ տվյալների համախմբության բաշխման փորձարարական $F_n(x)$ ֆունկցիան: Տվյալները դասավորենք չնվազման հաջորդականությամբ՝ $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$: Պարզ է, որ $y_1 = \min x_i, y_n = \max x_i$: $F_n(x)$ -ը սահմանենք հետևյալ բանաձևով.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < y_1 \\ \frac{1}{n}, & y_1 \leq x < y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{k}{n}, & y_k \leq x < y_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1, & y_n \leq x \end{cases}$$

$F_n(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ուրվագիծը պատկերված է նկար 65-ում:



Նկ. 65

Բաշխման փորձարարական ֆունկցիան չնվազող աստիճանաձև է, որը խզվող է $x_1, x_2, \dots, x_n$ կետերում: Խզման կետերում թռիչքի մեծությունը $\frac{1}{n}$ -ին բազմապատիկ թիվ է: Փորձարարական ֆունկցիայի արժեքը x կետում հավասար է x -ից փոքր տվյալների հաճախությանը: Բեռնուլիի թեորեմի համաձայն՝ գոյություն ունի $F_n(x)$ ֆունկցիաների հաջորդականության $F(x)$ սահմանը, երբ $n \rightarrow \infty$: $F(x)$ ֆունկցիան անվանում են բաշխման հիպոթետիկ ֆունկցիա:

Բաշխման փորձարարական ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով կարելի է մոտավորապես պատկերացնել, թե ինչպես է իրեն պահում բաշխման հիպոթետիկ (իրական) ֆունկցիան: Դա կարելի է անել, եթե գրաֆիկի աստիճանների վրայով անցկացվի ողորկ կոր (տե՛ս նկ. 65): Եթե տվյալների քանակը շատ է, ապա այդ կորը բավականաչափ ճշգրիտ կարտահայտի $F(x)$ ֆունկցիայի վարքը:

2. Հիստոգրամ

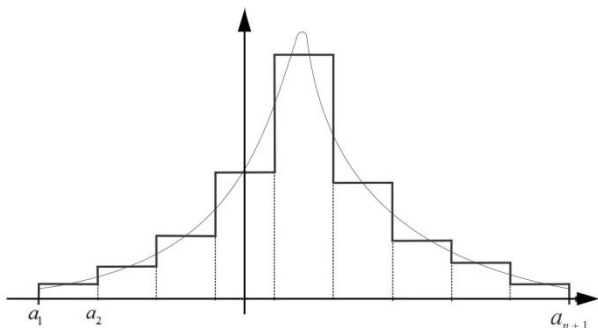
Դիցուք տրված են $x_1, x_2, \dots, x_n$ տվյալները, որոնք ξ պատահական մեծության արժեքներն են: Նշանակենք $a_1 = \min x_i$, $a_{n+1} = \max x_i$: $[a_1, a_{n+1}]$ հատվածը տրոհենք մասերի.

$$I_1 = [a_1; a_2), I_2 = [a_2; a_3), \dots, I_n = [a_n, a_{n+1}]:$$

I_k միջակայքի երկարությունը նշանակենք h_k , $h_k = a_{k+1} - a_k$: v_k -ով նշանակենք k -րդ միջակայքի մեջ ընկած տվյալների քանակը: $f_n(x)$ ֆունկցիան սահմանենք հետևյալ բանաձևով.

$$f_n(x) = \frac{v_k}{nh_k}, \text{ երբ } x \in I_k:$$

$f_n(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոչվում է հիստոգրամ: Նկար 66-ում պատկերված է հիստոգրամի ուրվագիծ:



Նկ. 66

Հիստոգրամը աստիճանաձև ֆունկցիա է, որը հաստատուն է I_k միջակայքերում: k -րդ միջակայքում աստիճանի բարձրությունը հավասար է $\frac{v_k}{nh_k}$, իսկ համապատասխան ուղղանկյան մակերեսը հավասար է տվյալների k -րդ միջակայք ընկնելու $\frac{v_k}{n}$ հաճախությանը: Բեռնուլիի թեորեմի համաձայն՝ $\frac{v_k}{n} \rightarrow p_k$, որտեղ $p_k = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$, և $f(x)$ -ը տվյալների բաշխման խտության ֆունկցիան է, ընդ որում $f(x) = F'(x)$: Հետևաբար՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$:

Եթե հիստոգրամի աստիճանների միջնակետերը միացնենք ողորկ կորով (տե՛ս նկ. 66), ապա կստանանք տվյալների բաշխման մոտավոր խտությունն արտահայտող կոր:

3. Վիճակագրական բնութագրիչներ

Դիցուք տրված են $x_1, x_2, \dots, x_n$ տվյալները: Նշանակենք

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k,$$

որտեղ $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$:

Ստանդարտ շեղում անվանում են

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

մեծությունը:

Երբեմն, որպեսզի գնահատեն տվյալների հարաբերական ցրումը, σ -ի փոխարեն օգտագործվում են $\nu = \frac{\sigma}{x}$ **վարիացիայի գործակիցը**:

Անհամաչափության գործակից անվանում են

$$g_1 = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^3}}$$

մեծությունը:

Էքսցեսի գործակից անվանում են

$$g_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} - 3$$

մեծությունը:

Եթե g_1 և g_2 մեծությունները 0-ին մոտ են, ապա կարելի է համարել, որ տվյալները բաշխված են **նորմալ**:

Պատահական մեծության բաշխումն անվանում են նորմալ, եթե նրա խտությունն ունի

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

տեսքը, որտեղ m -ը պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումն է, իսկ σ^2 -ն՝ դիսպերսիան:

Երեք սիգմաների կանոնը անդում է, որ եթե տվյալները բաշխված են նորմալ, ապա տվյալների մոտավորապես 90%-ը պատկանում է $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$ միջակայքին:

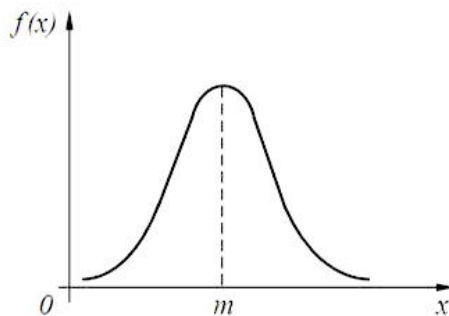
Նորմալ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան տրվում է

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

բանաձևով, որտեղ

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt :$$

Նորմալ բաշխման խտության ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է Նկար 67-ում.



Նկ. 67

X պատահական մեծության արժեքը տվյալ միջակայքում ընկնելու հավանականությունը գտնվում է

$$p(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

բանաձևով:

Նորմալ բաշխված պատահական մեծության դեպքում այդ բանաձևը ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$p(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right).$$

Φ ֆունկցիայի արժեքները գտնվում են համապատասխան աղյուսակից (տե՛ս հավելված 4): Այն ունի հետևյալ հատկությունը՝ $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$:

Օրինակ. Հաշվենք հավանականությունը, որ նորմալ բաշխված պատահական մեծության արժեքը կլինի $(m - \sigma, m + \sigma)$ միջակայքից.

$$\begin{aligned} p(m - \sigma < \xi < m + \sigma) &= \Phi\left(\frac{m + \sigma - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m - \sigma - m}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826, \end{aligned}$$

որտեղ $\Phi(1)$ -ի արժեքը վերցված է Φ ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակից: Այսպիսով պատահական մեծությունը $(m - \sigma, m + \sigma)$ միջակայքից արժեք ընդունում է 68,26% հավանականությամբ:

Նույն եղանակով հաշվելով պատահական մեծության $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$ միջակայքից արժեք ընդունելու հավանականությունը՝ ստանում ենք

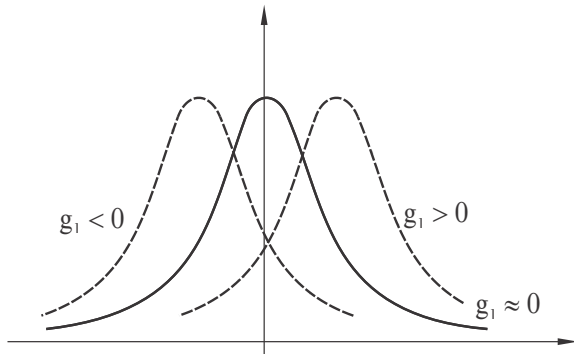
$$p(m - 3\sigma < \xi < m + 3\sigma) \approx 0,9974.$$

Այս արդյունքը հաստատում է երեք սիգմաների կանոնը, այսինքն՝ նորմալ բաշխված պատահական մեծության՝ այդ միջակայքից արժեք ընդունելը գործնականում հավաստի պատահույթ է:

g_1 և g_2 գործակիցների միջոցով կարելի է մոտավոր պատկերացում կազմել տվյալների խտության մասին: Եթե g_1 -ը

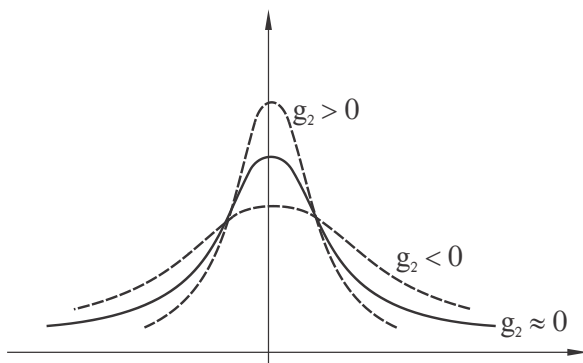
0-ից շատ է տարբերվում, ապա խտությունն անհամաչափ է $x = m$ ուղղի նկատմամբ, ընդ որում $g_1 > 0$ դեպքում բաշխումն ունի դրական անհամաչափություն, իսկ $g_1 < 0$ դեպքում՝ բացասական անհամաչափություն:

Եթե $g_1 \approx 0$, ապա բաշխումը համաչափ է (տե՛ս Նկար 68, նկարում՝ $m = 0$):



Նկ. 68

Էքսցեսի g_2 գործակիցը բնութագրում է խտության կորի ողորկությունը կենտրոնի շրջակայքում: Եթե $g_2 \approx 0$, ապա բաշխումը մոտիկ է նորմալին: Համեմատած նորմալ կորի հետ, $g_2 > 0$ դեպքում կորը կենտրոնում ունի ավելի բարձր և սուր գագաթ, իսկ $g_2 < 0$ դեպքում՝ ավելի ցածր և հարթ գագաթ (տե՛ս նկ. 69, նկարում՝ $m = 0$):



Նկ. 69

4. Կոռելյացիայի գործակից: Ռեգրեսիայի հավասարում

Դիցուք տրված են X և Y պատահական մեծությունները, որոնք համապատասխանաբար ընդունում են $x_1, x_2, \dots, x_n$ և $y_1, y, \dots, y_n$ արժեքները: Ենթադրենք՝ այդ տվյալները հավասարահնարավոր են, և դրանցից յուրաքանչյուրը կարող է հանդես գալ $\frac{1}{n}$ հավանականությամբ:

X և Y պատահական մեծությունների կապի աստիճանը բնութագրելու համար նշանակենք

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y}, \quad (16)$$

որտեղ σ_x -ը, σ_y -ը X -ի, Y -ի ստանդարտ շեղումներն են՝

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2};$$

r -ը անվանում են կոռելյացիայի գործակից: Եթե X և Y պատահական մեծություններն անկախ են, ապա $r = 0$: Իսկ եթե դրանք կապված են ճշգրիտ $Y = aX + b$ գծային կախվա-

ծությամբ, ապա $r = 1$, երբ $a > 0$, և $r = -1$, երբ $a < 0$: Ընդհանրապես կոռելյացիայի գործակիցը բավարարում է $-1 \leq r \leq 1$ պայմանին:

Կոռելյացիայի գործակցի հիման վրա կարելի է կազմել գծային ռեգրեսիայի հավասարում, որը հնարավորություն է տալիս պարզել, թե մի պատահական մեծության արժեքների փոփոխությունը ինչ փոփոխությունների է բերում մյուսի արժեքների մեջ: Ռեգրեսիայի հավասարումը գտնում են փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով (տե՛ս 6.5):

Y -ի ռեգրեսիան ըստ X -ի արտահայտում է

$$y - \bar{y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) \quad (17)$$

հավասարումը, իսկ X -ի ռեգրեսիան ըստ Y -ի՝

$$x - \bar{x} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}) \quad (18)$$

հավասարումը: Այդ հավասարումներով տրվող ուղիղների կազմած θ անկյան կոսինուսը հավասար է կոռելյացիայի գործակցին՝ $r = \cos\theta$: Եթե $r = \pm 1$, ապա այդ ուղիղները համընկնում են, իսկ եթե $r = 0$, ապա ուղիղները փոխադրահայաց են:

Օրինակ. Ուսումնասիրենք օգոնի պարունակության ազդեցությունը Հայաստանի Հանրապետության բնակչության՝ մաշկի քաղցկեղով հիվանդների քանակի վրա: Հետևյալ աղյուսակում բերված են օգոնի քանակության միջին տարեկան արժեքները և մաշկի քաղցկեղով հիվանդների քանակը:

Թիվ	Օգոնի միջին տարեկան արժեքները	Մաշկի քաղցկեղով հիվանդների քանակը
1990	$x_1 = 265$	$y_1 = 302$
1991	$x_2 = 284$	$y_2 = 255$
1992	$x_3 = 295$	$y_3 = 164$

1993	$x_4 = 286$	$y_4 = 171$
1994	$x_5 = 288$	$y_5 = 246$
1995	$x_6 = 293$	$y_6 = 287$
1996	$x_7 = 329$	$y_7 = 233$
1997	$x_8 = 342$	$y_8 = 193$
1998	$x_9 = 347$	$y_9 = 194$
1999	$x_{10} = 343$	$y_{10} = 237$
2000	$x_{11} = 309$	$y_{11} = 282$

Նախ հաշվենք

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

միջինները՝ $\bar{x} \approx 307, \bar{y} \approx 233$ և ստանդարտ շեղումները՝

$$\sigma_x \approx 27, \sigma_y \approx 45,2:$$

Այնուհետև համապատասխան արժեքները տեղադրելով (16) բանաձևի մեջ՝ կստանանք կոռելյացիայի գործակցի արժեքը՝ $r \approx -0,4$: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ X և Y պատահական մեծությունների միջև կապ կա, որը շատ ուժեղ արտահայտված չէ: x -ի աճը բերում է y -ի նվազման, այսինքն՝ օգոնի պարունակության աճը բերում է քաղցկեղով հիվանդների քանակի նվազեցման:

Ստացված թվային արժեքները տեղադրելով (16) և (17) բանաձևերի մեջ՝ կստանանք ռեգրեսիայի հավասարումները.

$$y = -0,7x + 447,9 \text{ և } x = -0,24y + 362,9:$$

Խնդիրներ

1. Մի անգամ, կիրակի օրը յոթ ընկերներ մտան սրճարան, նստեցին մի սեղանի մոտ և պատվիրեցին պաղպաղակ: Սրճարանի տերն ասաց, որ եթե յուրաքանչյուր հաջորդ կիրակի նստեն նոր ձևով և փորձեն նստելու բոլոր հնարավոր եղանակները, ապա այդ դեպքում նա խոստանում է նրանց պաղպաղակ հյուրասիրել անվճար: Կհաջողվի՞ արդյոք ընկերներին օգտվել սրճարանի տիրոջ առաջարկությունից:

Ցուցում. Ապացուցել, որ կա 5040 նստելու եղանակ:

2. Շախմատի մրցաշարի յուրաքանչյուր մասնակից մյուսների հետ խաղաց մեկ պարտիա: Հայտնի է, որ խաղացվել է 36 պարտիա: Գտնել մրցաշարի մասնակիցների քանակը:

Պատասխան՝ 9:

3. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր հանրագիտարանի 6 հատորները դասավորել գրադարակում այնպես, որ

ա) 3-րդ և 5-րդ հատորները լինեն կողք կողքի,

բ) 3-րդ և 5-րդ հատորները կողքկողքի չլինեն:

Պատասխան՝ ա) 240, բ) 480:

4. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր 7 սպիտակ և 5 կարմիր ծաղիկներից ընտրել 3 ծաղիկ այնպես, որ ա) բոլորը լինեն նույն գույնի,

բ) բոլորը նույն գույնի չլինեն:

Պատասխան՝ ա) 31, բ) 175:

5. Բաժանորդը մոռացել էր ընկերոջ հեռախոսի համարի վերջին երկու թվերը, բայց հիշում էր, որ դրանք իրարից տարբեր են: Նա վերջում հավաքեց պատահական երկու թիվ: Գտնել հավանականությունը, որ համարը ճիշտ է հավաքված:

Պատասխան՝ $P \approx 0,011$:

6. Առնվազն քանի՞ մարդու է անհրաժեշտ հարցնել ծննդյան օրվա մասին, որպեսզի $\frac{1}{2}$ -ից ոչ պակաս հավանականությամբ որևէ մեկի ծննդյան օրը համընկնի ձեր ծննդյան օրվա հետ (համարել, որ տարին ունի 365 օր):

Պատասխան՝ 253:

7. Շրջանագծին ներգծված է քառակուսի: Գտնել հավանականությունը, որ շրջանի մեջ պատահականորեն ընտրված կետը կպատկանի քառակուսուն:

Պատասխան՝ $\frac{2}{\pi}$:

8. Գտնել հավանականությունը, որ 5 սմ շառավղով շրջանի մեջ պատահականորեն ընտրված կետը կգտնվի կենտրոնից ամենաքիչը 3 սմ հեռավորության վրա:

Պատասխան՝ 0,64:

9. Խաղաթղթերի կապուկից (36 խաղաթուղթ) պատահականորեն հանվում է երեք խաղաթուղթ: Գտնել հավանականությունը, որ դրանց մեջ կլինի միայն մեկ տուգ:

Պատասխան՝ 0,2778:

10. 50 լամպերից 3-ը խոտան են: Գտնել հավանականությունը, որ պատահականորեն ընտրված 2 լամպերը կլինեն խոտան:

Պատասխան՝ $\frac{3}{1225}$:

11. Գտնել հավանականությունը, որ 5 երեխա ունեցող ընտանիքում կլինի 3 աղջիկ և 2 տղա:

Պատասխան՝ $\frac{5}{16}$:

12. Գործարանում կա երկու սարքավորում, որոնք վթարի դեպքում ազդանշան են տալիս: Հավանականությունը, որ վթարի դեպքում ազդանշան կտա առաջին սարքավորումը, 0,95 է, իսկ երկրորդի հավանականությունը 0,90 է: Համարելով, որ առաջին և երկրորդ սարքավորումների ազդանշան տալը անկախ իրադարձություններ են, գտնել հավանականությունը, որ վթարի դեպքում սարքավորումներից գոնե մեկը ազդանշան կտա:

Պատասխան՝ 0,995:

13. Քաղաքում տարվա մեջ մոտավորապես 100 օր քամին փչում է հյուսիսից, իսկ 200 օր՝ արևմուտքից: Հյուսիսում գտնվող արդյունաբերական ձեռնարկությունները վնասակար նյութեր մթնոլորտ են արտանետում 3 օրը մեկ, իսկ արևմուտքում գտնվողները՝ շաբաթվա վերջին օրը: Գտնել հավանականությունը, որ պատահականորեն ընտրված օրը քաղաքի օդը աղտոտված կլինի:

Պատասխան՝ 0,17:

14. Կիրառվող բուժման մեթոդը նպաստում է առողջացմանը 80% դեպքերում: Գտնել հավանականությունը, որ 5 հիվանդից 4-ը կառողջանա:

Պատասխան՝ 0,41:

15. 20 քննական տոմսերից 16-ը «լավ» են: Տոմսերը խառնել են, և ուսանողները հերթով վերցնում են մեկական տոմս: Առաջին^օ ուսանողի «լավ» տոմս վերցնելու հավանականությունն է մեծ, թե՞ երկրորդի:

Պատասխան՝ Հավասար են:

16. Սպիտակ արկղում կան 12 կարմիր և 6 կապույտ, իսկ դեղին ակղում՝ 15 կարմիր և 10 կապույտ միանման գնդիկներ: Նետում են խաղոսկրը: Եթե բացված թիվը բաժանվում է 3-ի,

ապա պատահականորեն գնդիկ են հանում սպիտակ արկղից, հակառակ դեպքում՝ դեղին արկղից: Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ հանված գնդիկը կարմիր է:

Պատասխան՝ $\frac{28}{45}$:

17. Քննությանը եկած 10 ուսանողներից 3-ը պատրաստվել են «գերազանց», 4-ը՝ «լավ», 2-ը՝ «բավարար», 1-ը՝ «վատ»: Քննական տոմսը բաղկացած է 20 հարցից: «Գերազանց» պատրաստված ուսանողները կարող են պատասխանել բոլոր 20 հարցերին, «լավ» պատրաստվածները՝ 16, «բավարար» պատրաստվածները՝ 10-ին, «վատ» պատրաստվածը՝ 5 հարցերին: Գտնել հավանականությունը, որ պատահական ընտրված ուսանողը կպատասխանի 3 պատահականորեն տրված հարցերի:

Պատասխան՝ $\frac{197}{380}$

18. Սեղանի առաջին դարակում դրված են թվով a կապույտ թանաքով և b կարմիր թանաքով գրիչներ, երկրորդ դարակում՝ թվով c կապույտ թանաքով և d կարմիր թանաքով գրիչներ: Առաջին դարակից պատահականորեն ընտրված գրիչը տեղափոխում են երկրորդ դարակ, ապա երկրորդ դարակից հանում են մեկ գրիչ: Գտնել հանված գրիչի կապույտ լինելու հավանականությունը: Կփոխվի՞ արդյոք պատասխանը առաջին դարակից պատահականորեն ընտրված երկու գրիչ տեղափոխելու դեպքում:

Պատասխան՝ $\frac{a(c+1)+bc}{(a+b)(c+d+1)}$, այո:

19. Սեղանին դրված են կոնֆետներով լի երկու ափսե: Առաջին ափսեի 10 կոնֆետներից 6-ը, երկրորդ ափսեի 12 կոնֆետներից 3-ը շոկոլադե են: Յուրաքանչյուր ափսեից պա-

տահականորեն վերցնում են մեկական կոնֆետ: Գտնել կոնֆետների շոկոլադե լինելու հավանականությունը:

Պատասխան՝ $\frac{17}{40}$:

20. Հայտնի է, որ բոլոր տղամարդկանց 5%-ը և բոլոր կանանց 0,25%-ը դալտոնիկներ են: Պատահականորեն ընտրված մարդը դալտոնիկ է: Գտնել հավանականությունը, որ նա տղամարդ է (տղամարդկանց և կանանց քանակները համարել հավասար):

Պատասխան՝ $\frac{20}{21}$:

21. Բենզալցակայան ունեցող ավտոճանապարհով անցնող բեռնատար մեքենաների և մարդատար մեքենաների թվերի հարաբերությունը 3:2 է: Բեռնատար մեքենայի բենզալցակայանում լիցքավորելու հավանականությունը 0,1 է, մարդատար մեքենայինը՝ 0,2: Բենզալցակայանին մոտեցել է մեքենա լիցքավորման համար: Գտնել մեքենայի բեռնատար լինելու հավանականությունը:

Պատասխան՝ $\frac{3}{7}$:

22. X պատահական մեծության բաշխման օրենքը տրված է հետևյալ աղյուսակով.

X	1	2	3
P	0,3	0,2	0,5

Գտնել X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը:

Պատասխան՝ 2,2:

23. X պատահական մեծության բաշխման օրենքը տրված է հետևյալ աղյուսակով.

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

Գտնել X պատահական մեծության դիսպերսիան:

Պատասխան՝ 2,01:

24. X պատահական մեծության բաշխման օրենքը տրված է հետևյալ աղյուսակով.

X	1	3	4	6	7
P	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

Գտնել X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան:

Պատասխան՝ $m=4,7$; $D=3,01$:

25. Կառուցել կովերի բաշխման հիստոգրամը ըստ աղյուսակում բերված կաթի յուղայնության տոկոսի:

Կաթի յուղայնությունը (%)	Կովերի քանակը
3,45 - 3,55	1
3,55 - 3,65	1
3,65 - 3,75	3
3,75 - 3,85	4
3,85 - 3,95	7
3,95 - 4,05	5
4,05 - 4,15	2
4,15 - 4,25	1
4,25 - 4,35	1

26. Գործարանում արտադրված դետալի երկարությունը նորմալ բաշխումով պատահական մեծություն է՝ 5 սմ մաթեմատիկական սպասումով և 0,9 սմ միջին քառակուսային շեղումով: Գտնել հավանականությունը, որ պատահական

վերցրած դետալի երկարությունը կլինի 4 սմ-ից մինչև 7 սմ երկարության:

Պատասխան՝ 0,8531:

27. Աղյուսակում բերված են 1996-2003 թթ. Հայաստանի Հանրապետություն ժամանած զբոսաշրջիկների քանակը (հազար մարդ) և ՀՆԱ-ի ցուցանիշները (մլն դրամ).

Տարեթիվ	Զբոսաշրջիկների քանակը	ՀՆԱ-ի ցուցանիշները
1996	13338	661209
1997	23430	804336
1998	31804	955385
1999	40745	987444
2000	45000	1031338
2001	123260	1175877
2002	162089	1327565
2003	206000	1512096

ա) Գտնել զբոսաշրջիկների քանակի և ՀՆԱ-ի ցուցանիշների կապի կոռելյացիայի գործակիցը:

բ) Գրել զբոսաշրջիկների քանակի և ՀՆԱ-ի ցուցանիշների կապի գծային ռեգրեսիայի հավասարումը:

Պատասխան՝ ա) $r \approx 0.95$,

բ) $y - 1056906 = 3,6(x - 80708,5)$:

28. Դիցուք H_i -ն i -րդ բնակավայրի բնակչության քանակն է, H_j -ն՝ j -րդ բնակավայրի բնակչության քանակը, R_{ij} -ն՝ այդ բնակավայրերի հեռավորությունը, իսկ I_{ij} -ն՝ i -ից j մարդկային հոսքի քանակը: $lg\left(\frac{H_i H_j}{I_{ij}}\right)$ և $lg R_{ij}$ մեծությունների միջև գտնել գծային ռեգրեսիոն կապ և ստանալ

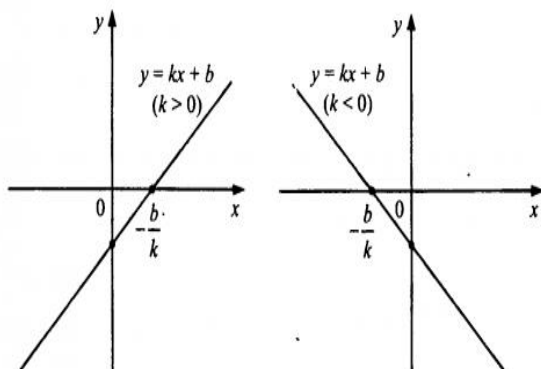
$$I_{ij} = k \cdot \frac{H_i H_j}{R_{ij}^\alpha}$$

բանաձևը, որտեղ k -ն և α -ն հաստատուններ են:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 1

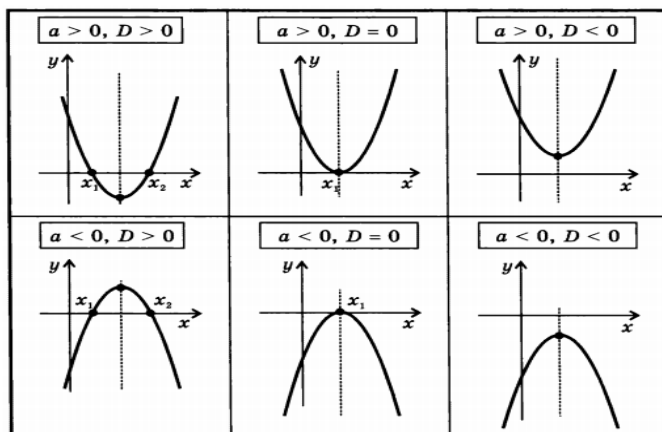
Տարրական ֆունկցիաների գրաֆիկները

1. Գծային ֆունկցիա (Նկար 69)՝ $y = kx + b$ ($\operatorname{tg} \alpha = k$)



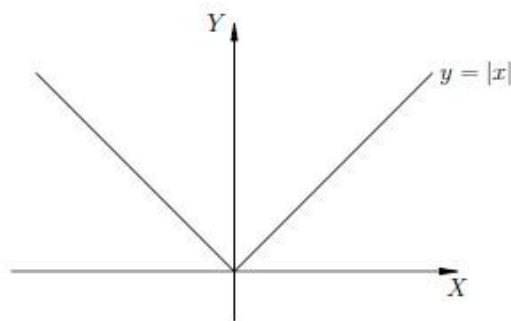
Նկ. 69

2. Քառակուսային ֆունկցիա (Նկար 70)՝
 $y = ax^2 + bx + c$ ($D = b^2 - 4ac$)



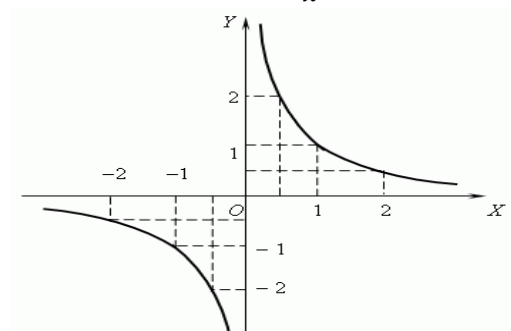
Նկ. 70

3. $y = |x|$ ֆունկցիա (Նկար 71)



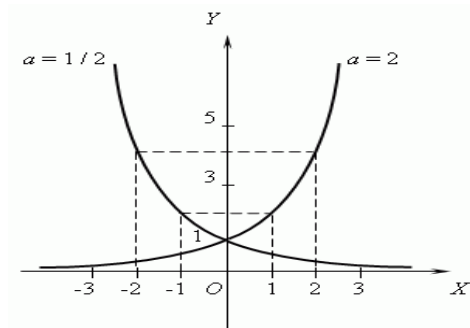
Նկ. 71

4. Հիպերբոլ (Նկար 72)՝ $y = \frac{1}{x}$



Նկ. 72

5. Ցուցչային ֆունկցիա (Նկար 73)՝ $y = a^x$



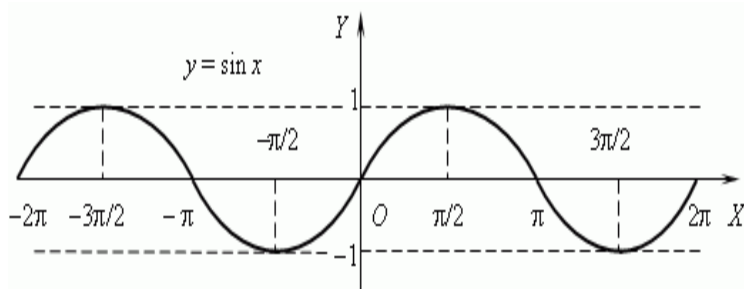
Նկ. 73

6. Լոգարիթմական ֆունկցիա (Նկար 74)՝ $y = \log_a x$

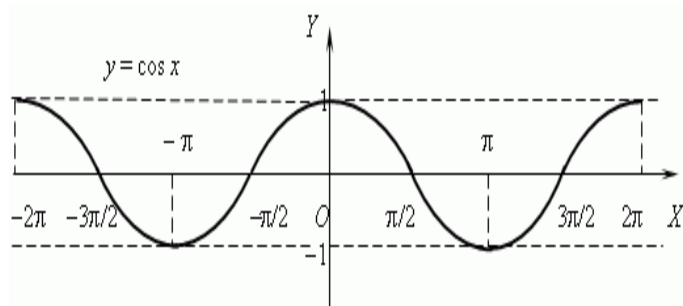


Նկ. 74

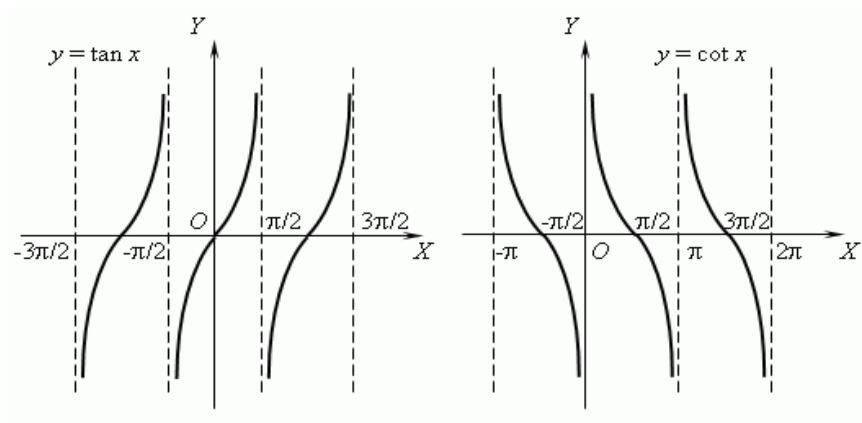
7. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ (Նկարներ 75-77)



Նկ. 75



Նկ. 76



Նկ. 77

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 2

Ածանցյալների աղյուսակը

- | | |
|---|---|
| 1. $(c)' = 0$ | 5. $(\sin x)' = \cos x$ |
| 2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ | 6. $(\cos x)' = -\sin x$ |
| 3. $(a^x)' = a^x \ln a$ | 7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| 4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | 8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| 9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | 10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | 12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

Ածանցման կանոնները

- | | |
|---|--|
| 1. $(cf)' = c(f)'$ | 4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' f}{g^2}$ |
| 2. $(f \pm g)' = (f)' \pm (g)'$ | 5. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ |
| 3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$ | |

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 3

Անորոշ ինտեգրալների աղյուսակը

- | | |
|--|--|
| 1. $\int 0 dx = c$ | 2. $\int 1 dx = x + c$ |
| 3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ (\alpha \neq -1)$ | 4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ |
| 5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | 6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$ |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + c$ | 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$ |
| 9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$ | 10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$ |
| 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + c$ | |

Ինտեգրման կանոնները

1. $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$
2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c,$
որտեղ $\int f(x)dx = F(x) + c:$
4. Մասերով ինտեգրման բանաձևը.
$$\int u dv = uv - \int v du:$$

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 4

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ ֆունկցիայի աղյուսակը}$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	1,00	0,841345	2,00	0,977250
0,05	0,519939	1,05	0,853141	2,05	0,979818
0,10	0,539828	1,10	0,864334	2,10	0,982136
0,15	0,559618	1,15	0,874928	2,15	0,984222
0,20	0,579260	1,20	0,884930	2,20	0,986097
0,25	0,589706	1,25	0,894350	2,25	0,987776
0,30	0,617911	1,30	0,903200	2,30	0,989276
0,35	0,636831	1,35	0,911492	2,35	0,990613
0,40	0,655422	1,40	0,919243	2,40	0,991802
0,45	0,673645	1,45	0,926471	2,45	0,992857
0,50	0,691463	1,50	0,933193	2,50	0,993790
0,55	0,708840	1,55	0,939429	2,55	0,994614
0,60	0,725747	1,60	0,945201	2,60	0,995339
0,65	0,742154	1,65	0,950528	2,65	0,995975
0,70	0,758036	1,70	0,955434	2,70	0,996533
0,75	0,773373	1,75	0,959941	2,75	0,997020
0,80	0,788145	1,80	0,964070	2,80	0,997445
0,85	0,802338	1,85	0,967843	2,85	0,997814
0,90	0,815940	1,90	0,971283	2,90	0,998134
0,95	0,828944	1,95	0,974412	2,95	0,998411
				3,00	0,998650

SUMMARY

HIGHER MATHEMATICS

G. V. Mikayelyan, Z. S. Mikayelyan

The book is a textbook that meets modern requirements for teaching higher mathematics. The theoretical material is accompanied by numerous examples and methods for solving applied problems. Mathematical concepts are presented and explained from the perspective of their practical applications. Special emphasis is placed on the importance of mathematical methods for modeling and analyzing problems in science, technology, and various fields of economic activity.

The book covers the following areas of higher mathematics: linear algebra, analytic geometry, mathematical analysis, harmonic analysis, function approximation, differential equations, mathematical modeling, elements of probability theory, and mathematical statistics. Each chapter concludes with exercises and problems for independent study, most of which are supplied with answers.

This textbook is intended for undergraduate and graduate students, as well as postgraduate researchers in natural sciences and economics. It will also be useful for high school students specializing in science-oriented tracks.

РЕЗЮМЕ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Г. В. Микаелян, З.С. Микаелян

Книга является учебным пособием, отвечающим современным требованиям к преподаванию высшей математики. Теоретический материал сопровождается многочисленными примерами и методами решения прикладных задач. Математические понятия представлены и объяснены с точки зрения их практического применения. Особое внимание уделено значению математических методов моделирования и исследования задач в области науки, техники и различных сфер хозяйственной деятельности.

Книга охватывает следующие разделы высшей математики: линейная алгебра, аналитическая геометрия, математический анализ, гармонический анализ, приближения функций, дифференциальные уравнения, математическое моделирование, элементы теории вероятностей и математической статистики. В конце каждой главы приведены упражнения и задачи для самостоятельного решения, большинство из которых снабжены ответами.

Пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов естественно-научных и экономических специальностей. Оно будет полезно также для учащихся старших классов общеобразовательных школ, обучающихся по естественно-научным профилям.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии, М., 1975.
2. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. 1,2 М., 2012.
3. Баврин И. И. Начала анализа и математические модели в естествознании и экономике, М., 2000.
4. Гриценко В. А., Белосевич Е. Г., Артищева Е. К. Математические методы в географии, Калининград, 1999.
5. Бейли Н. Математика в биологии и медицине, М., 1970.
6. Тихонова А. Н., Костомаров Д. П. Рассказы о прикладной математике, М., 1979.
7. Виленкин Н. Я. Функции в природе и технике, М., 1985.
8. Архипов Ю. Р. и другие Математические методы в географии, Казань, 1976.
9. Самнер Г. Математика для географов, М., 1981.
10. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях, М., 1987.
11. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи, М., 1989.
12. Հակոբյան Յու. Ռ., Թվային մեթոդներ, Երևան, 2006:
13. Մուրադյան Մ. Հ., Բարձրագույն մաթեմատիկա տնտեսագետների համար, Երևան, 2005:
14. Նիկոլսկի Ս. Մ. և ուրիշներ, Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, 10, 11, 12, Երևան, Անտարես, 2009, 2010, 2011:

15. Միքայելյան Գ. Վ., Ազիզյան Լ., Երկրագնդի բնակչության թվի սպասվելիք փոփոխությունների մաթեմատիկական մոդել, Աշխ. Գիտ. Հայաստանում, Երևան, 2006, 260-265:
16. Միքայելյան Գ. Վ., Խոյեցյան Ա. Վ., Մուրադյան Վ. Ս., Լեռնային երկրներում հողերի էրոզիոն պրոցեսների մաթեմատիկական մոդելավորում, Գիտական տեղեկագիր, ԵՊՀ, 1, 2008, 134-140:

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԳԱԳԻԿ ՎԱՋԳԵՆԻ ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ
ԶԱՐՈՒՀԻ ՄԱՐԳՍԻ ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. խմբագրումը՝ Լ. Ավետիսյանի

Հեղինակները հաստատում են, որ ծանոթ են «ԵՊՀ գրահրատարակչական քաղաքականությանը», և գրքում առկա փաստերը, դիրքորոշումները, կարծիքները շարադրված են հեղինակային իրավունքի և էթիկայի միջազգայնորեն ընդունված սկզբունքների պահպանմամբ:

Ստորագրված է տպագրության՝ 10.11.2025:

Չափսը՝ 60x84 ¹/₁₆: Տպ. մամուլը՝ 15,625:

Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.ysu.am



publishing.ysu.am