ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Անատոլի Կիռոքայան | Սարգիս Հակոբյան
Լևոն Միքայելյան | Կամո Հարությունյան

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

1919

YEREVAN STATE UNIVERSITY

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Анатолий Александрович Китбалян,
Саркис Артаваздович Акопян, Левон Велиханович Микаелян,
Камо Вагаршакович Арутюнян

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ФУНЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(На армянском языке)

Учебнно-вспомогательное пособие

Ереван
Издательство ЕГУ
2025

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա. Ա. Կիտբալյան, Ս. Ա. Հակոբյան,
Լ. Վ. Միքայելյան, Կ. Վ. Հարությունյան

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

(Ուսումնական ձեռնարկ)

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2025

ՀՏԴ 517.53/.55(07)
ԳՄԴ 22.161.55g7
Կ 687

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ գիտական խորհուրդը:*

Գրախոս՝ ֆիզ.մաթ.գիտ.դոկտոր Գ. Ա. Բարսեղյան
Խմբագիր՝ ֆիզ.մաթ.գիտ.թեկ.դոց. Ա. Հ. Ներսիսյան

Կիտբալյան Ա. Ա., $\boxed{\text{Հակոբյան Ս. Ա.,}}$
Միքայելյան Լ. Վ., Հարությունյան Կ. Վ.
Կ 687 Կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության խնդիրներ և վարժություններ *(Ուսումնական ձեռնարկ)* / Ա. Ա. Կիտբալյան, $\boxed{\text{Ս. Ա. Հակոբյան,}}$ Լ. Վ. Միքայելյան, Կ. Վ. Հարությունյան: -Եր., ԵՊՀ հրատ., 2025, 154 էջ:

Ձեռնարկում շարադրված են կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության դասընթացի հիմնական գաղափարները ու փաստերը, բերված են խնդիրների և վարժությունների լուծումներ, ինչպես նաև լսարանային և ինքնուրույն աշխատանքի համար առաջադրված են ավելի քան 800 խնդիր և վարժություն:

Նախատեսվում է ֆիզիկայի, ռադիոֆիզիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ու ինֆորմատիկայի ֆակուլտետների համար:

ՀՏԴ 517.53/.55(07)
ԳՄԴ 22.161.55g7

ISBN 978-5-8084-2705-1
https://doi.org/10.46991/YSUPH/9785808427051

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Տվյալ խնդրագրքի երկրորդ հրտարակության անհրաժեշ-տությունը պայմանավորված է նրա մեծ պահանջարկով և նա-խորդ հրատարակության ԵՊՀ գրադարանում եղած օրինակների մաշվածությամբ ու անբավարար քանակությամբ: Բացի դրանից եղած օրինակում մաթեմատիկական բանաձևերը լրացված էին ձեռագրով (1990-ին ԵՊՀ-ում դեռևս չկային համապատասխան համկարգչային խմբագրեր):

Այս հրատակությունը լրացված է ու նրանում ուղղված են նախորդում տեղ գտած նկատված վրիպակները: Ավելացված է գրականության ցանկ:

Գլուխ 1. Կոմպլեքս թվեր

Հիմնական հասկացություններ և փաստեր

Կոմպլեքս թվեր են կոչվում իրական թվերի $z=(x,y)$ կարգավորված զույգերը, եթե նրանց համար սահմանված են հավասարության գաղափար և գումարման ու բազմապատկման գործողություններ հետևյալ կերպ.

1. Երկու կոմպլեքս թվեր $z_1=(x_1,y_1)$ և $z_2=(x_2,y_2)$ համարվում են հավասար՝ $z_1=z_2$, այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1=x_2$ և $y_1=y_2$,

2. $z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)$,

3. $z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$:

$(x,0)$ կոմպլեքս թիվը նույնացվում է x իրական թվի՝ $(x,0)=x$: $(0,1)$ կոմպլեքս թիվը կոչվում է կեղծ միավոր և նշանակվում է i, այսինքն՝ $i=(0,1)$: Նկատենք, որ

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1:$$

2 և 3-ից հետևում է, որ

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)=x+iy:$$

z կոմպլեքս թվի $x+iy$ տեսքը կոչվում է հանրահաշվական տեսք: Հանրահաշվական տեսքով գրված կոմպլեքս թվերի համար 1-3-ը նշանակում են, որ $x_1+iy_1=x_2+iy_2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1=x_2$ և $y_1=y_2$:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_2+y_1),$$

$$\left(x_1+iy_1\right)\cdot\left(x_2+iy_2\right)=\left(x_1x_2-y_1y_2\right)+i\left(x_1y_2+x_2y_1\right):$$

Այսինքն կոմպլեքս թվերը գումարվում և բազմապատկվում են որպես երկանդամներ i տառի նկատմամբ i^2-ին (-1)-ով փոխարինելու պահանջով:

$z=x+iy$ կոմպլեքս թվի համար x-ը և y-ը համապատասխանաբար կոչվում են իրական և կեղծ մասեր, նշանակվում են՝ $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$: $\overline{z}=x-iy$ կոմպլեքս թիվը կոչվում է z համալուծ: Պարզ է, որ

$$\overline{z}z=x^2+y^2,\ \left(\overline{\overline{z}}\right)=z,\ \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\ \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}:$$

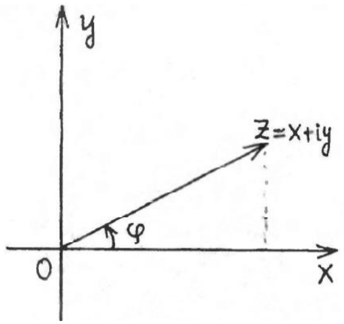
Հանումը սահմանվում է որպես գումարման հակադարձ գործողություն, այսինքն z_1-z_2 տարբերություն կոչվում է այն z կոմպլեքս թիվը, որի համար $z+z_2=z_1$: Եթե $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, ապա

$$z=z_1-z_2=\left(x_1+iy_1\right)-\left(x_2+iy_2\right)=\left(x_1-x_2\right)+i\left(y_1-y_2\right):$$

Բաժանումը սահմանվում է որպես բազմապատկման հակադարձ գործողություն, այսինքն $\frac{z_1}{z_2}\left(z_2\neq 0\right)$ քանորդ կոչվում է այն z կոմպլեքս թիվը, որի համար $z\cdot z_2=z_1$: $\frac{z_1}{z_2}$ թիվը հանրահաշվական տեսքով ներկայացնելու համար հարկավոր է կատարել պարզ հաշիվ՝

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}}=\frac{\left(x_1+iy_1\right)\left(x_2-iy_2\right)}{\left(x_2+iy_2\right)\left(x_2-iy_2\right)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}:$$

Կոմպլեքս թվերը պատկերվում են որպես կոորդինատային հարթության կետեր կամ վեկտորներ. այն է՝ ամեն մի $z = x + iy$ կոմպլեքս թիվ նույնացվում է (x, y) կոորդինատային կետի հետ: Այդ կետը նշանակվում է z տառով: z թիվը կոչվում է այդ կետի աֆեքս: z կոմպլեքս թիվը պատկերվում է նաև z կետի շառավիղ վեկտորով, ընդ որում կոմպլեքս թվերի գումարին համապատասխանում է վեկտորների գումար:



Հարթությունը, որը նույնացվում է կոմպլեքս թվերի բազմության հետ կոչվում է կոմպլեքս հարթություն, այն նշանակվում է C-ով: Հաճախ, եթե կոմպլեքս հարթության կետերը նշանակում են $z, w, \zeta, \ldots$ տառերով, ապա C կոմպլեքս հարթությունը կանվանենք համապատասխանաբար z - հարթություն, w - հարթություն, ζ - հարթություն և այլն:

Աբսցիսների առանցքը անվանում են իրական առանցք, իսկ օրդինատների առանցքը՝ կեղծ առանցք:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

թիվը, որը z կետի շառավիղ վեկտորի երկարությունն է, կոչվում է z կոմպլեքս թվի *մոդուլ*: Ox առանցքի դրական ուղղության և z վեկտորի կազմած անկյունը կոչվում է z կոմպլեքս թվի *արգումենտ*. այն նշանակվում է $Argz$ սիմվոլով: Կոմպլեքս թվի արգումենտը որոշված է միայն զրոյից տարբեր թվերի համար և միարժեք չէ, եթե $\varphi = Argz$, ապա

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} :$$

$z \neq 0$ կոմպլեքս թվի արգումենտի միայն մեկ արժեքն է բավարարում $-\pi < \varphi \leq \pi$ պայմանին, այդ արժեքը կոչվում է արգումենտի *գլխավոր արժեք* և նշանակվում է $argz$ սիմվոլով: Ակնհայտ է, որ

$$Argz = argz + 2\pi k, k \in Z :$$

$z = x + iy$ կոմպլեքս թիվը կարելի է ներկայացնել

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

տեսքով, որը կոչվում է կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսք: Տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

$$|z|^2 = \bar{z} \cdot z ,$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| ,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} ,$$

$$Arg\left(z_1 z_2\right) = Argz_1 + Argz_2 :$$

$$Arg\frac{z_1}{z_2} = Argz_1 - Argz_2 :$$

Որպես սահմանում ընդունելով

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (\textit{Էյլերի բանաձև})$$

ստանում ենք կոմպլեքս թվի

$$z = re^{i\varphi}\left(r = |z|, \varphi = Argz\right)$$

ներկայացումը, որը կոչվում է կոմպլեքս թվի *ցուցչային տեսք*:

Օգտվելով արտադրյալի մոդուլի և արգումենտի հաշվման նշված կանոններից, ստանում ենք Մուավրի բանաձևը.

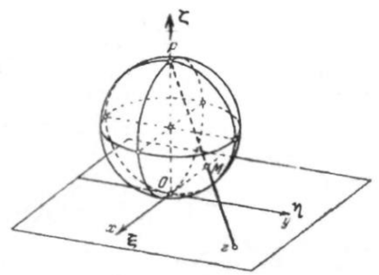
$$z^n = |z|^n \left(\cos(nArgz) + i\sin(nArgz)\right) = |z|^n e^{inArgz}, n \in Z:$$

Եթե $z \neq 0$ ապա գոյություն ունեն n հատ իրարից տարբեր թվեր, որոնց n աստիճանը հավասար է z -ի, դրանք ստացվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{argz + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{argz + 2\pi k}{n}\right), k = 0,1,...,n-1$$

և կոչվում են n աստիճանի արմատ z -ից:

Ստերեոգրաֆիկ պրոյեկցիա



(ξ,η,ζ) եռաչափ տարածության մեջ (ξ,η) կոորդինատային հարթությունը նույնացնենք (x,y) C կոմպլեքս հարթության հետ: Դիտարկենք S^2՝

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$$

սֆերան: $P(0;0;1)$ կետը կանվանենք բևեռ:

Միացնենք P բևեռը C կոմպլեքս հարթության որևէ $z = x + iy$ կետի հետ ուղղով: Սֆերայի հետ այդ ուղղի հատման կետը նշանակենք M -ով: Ստանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանություն $S^2 \setminus \{P\}$ և C բազմությունների միջև: C կոմպլեքս հարթությանը ավելացնենք մի վերացական օբյեկտ՝ ∞, անվերջ հեռու կետ, և նրան համապատասխանեցնենք P բևեռը:

Այսպիսով կստանանք փոխմիարժեք համապատասխանություն S^2 սֆերայի և $\bar{C}=C\cup\{\infty\}$ բազմությունների միջև: $\bar{C}$ կանվանենք *ընդլայնված կոմպլեքս հարթություն*, իսկ վերը նշված համապատասխանությունը՝ $\bar{C}$-ի և S^2-ի *ստերեոգրաֆիկ պրոյեկցիա*: $z=x+iy$ կետի և նրա $M(\xi,\eta,\zeta)$ պատկերի կոորդինատները կապված են հետևյալ առնչություններով.

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2},\eta=\frac{y}{1+|z|^2},\zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2},\ x=\frac{\xi}{1-\zeta},y=\frac{\eta}{1-\zeta}:\ (*)$$

Օրինակներ

1. Գտնել $z=a+ib$ կոմպլեքս թվի մոդուլը և արգումենտի գլխավոր արժեքը (a և b իրական թվեր են):

__Լուծում__. $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$: Դիցուք $z\neq 0$ φ-ն արգումենտի գլխավոր արժեքն է, այդժամ

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\pi<\varphi\leq\pi:\ (1)$$

ա) $b\geq 0$ դեպքում ունենք

$$\varphi=\arccos\frac{a}{|z|}:$$

բ) $b<0$ դեպքում ունենք

$$\varphi=-\arccos\frac{a}{|z|}:$$

Այսպիսով՝

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, b \geq 0 \\ -\arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, b < 0 \end{cases} :$$

2. Գտնել $\sqrt[5]{-1+i}$ -ի բոլոր արժեքները և նշել դրանք կոմպլեքս հարթության վրա:

<u>Լուծում</u>. Գտնենք $-1+i$ կոմպլեքս թվի մոդուլը և արգումենտի գլխավոր արժեքը:

$$|-1+i| = \sqrt{2}, \arg(-1+i) = \arccos\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} :$$

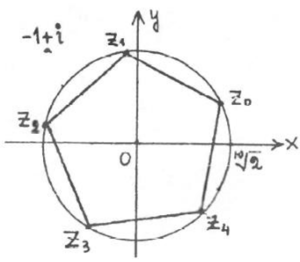
Հետևաբար՝

$$z_k = \sqrt[5]{-1+i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{5} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{5}\right), k = 0,1,2,3,4 :$$

$$z_0 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{20} + i\sin\frac{3\pi}{20}\right),\ z_1 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{20} + i\sin\frac{11\pi}{20}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{20} + i\sin\frac{19\pi}{20}\right), z_3 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{27\pi}{20} + i\sin\frac{27\pi}{20}\right),$$

$$z_4 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{20} + i\sin\frac{35\pi}{20}\right):$$



3. Լուծել $z^3 = \left(-1+i\sqrt{3}\right)\overline{z}$ հավասարումը:

<u>**Լուծում**</u>. Լուծումը փնտրենք $z = re^{i\varphi}$ ցուցչային տեսքով: Հաշվի առնելով, որ $\overline{z} = re^{-i\varphi}$ և $-1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, ստանում ենք

$$r^3 e^{3i\varphi} = 2re^{i\frac{2\pi}{3}-i\varphi}:$$

Այդ հավասարությունը նշանակում է, որ

$$r^3 = 2r, 3\varphi = \frac{2\pi}{3} - \varphi + 2\pi k:$$

Որտեղից ստանում ենք $r_1 = 0, r_2 = \sqrt{2}$ և $\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$:

$z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)}$ թվերը իրարից տարբեր են, երբ $k = 0,1,2,3$: Այսպիսով, հավասարման լուծումներն են.

$$z_1 = 0, z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, z_3 = iz_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$z_4 = -z_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, z_5 = -iz_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}:$$

4. Հարթության վրա նշել z կոմպլեքս թվերի բազմությունները, որը բավարարում է $|2z| < \left|z^2+1\right|$ անհավասարությանը:

<u>**Լուծում**</u>. $z, i, -z, -i$ գագաթներով զուգահեռագծի համար ունենք

$$\left(2|z|\right)^2 + 4 = 2|z+i|^2 + 2|z-i|^2$$

հավասարությունը, որից օգտվելով տրված անհավասարությունը փոխարինենք համարժեք անհավասարությամբ.

$$2|z+i|^2 + 2|z-i|^2 - 4 > \left|z^2+1\right|^2$$

կամ

$$2|z+i|^2+2|z-i|^2-4-|z+i|^2|z-i|^2>0:$$

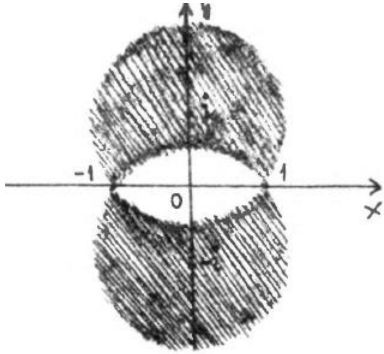
Վերջին անհավասարությունից ստանում ենք

$$\left(|z+i|^2-2\right)\left(2-|z-i|^2\right)>0$$

անհավասարությունը, որը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\begin{cases}|z+i|>\sqrt{2}\\ |z-i|<\sqrt{2}\end{cases} \text{ կամ } \begin{cases}|z-i|>\sqrt{2}\\ |z+i|<\sqrt{2}\end{cases}:$$

Որոնելի բազմությոնը որոշվում է այդ երկու համակարգերով, որոնց լուծումը կոմպլեքս հարթության ստվերագծված մասն է:



5. Ցույց տալ, որ ստերեոգրաֆիկ պրոյեկցիայի ժամանակ կոմպլեքս հարթության ցանկացած շրջանագծի կամ ուղղի պատկերը Ռիմանի սֆերայի շրջանագիծ է և հակառակը՝ Ռիմանի սֆերայի շրջանագծերի պատկերները կոմպլեքս հարթության շրջանագծեր կամ ուղիղ գծեր են (ընդլայնված կոմպլեքս հարթության շրջանագծեր):

Լուծում. z կոմպլեքս հարթության ցանկացած շրջանագծի կամ ուղիղ գծի հավասարումն է՝

$$A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0,\ (1)$$

որտեղ A,B,C,D իրական թվեր են (երբ $A=0$ ուղիղ գիծ է, եթե $4A\cdot D<B^2+C^2, A\neq 0$, ապա շրջանագիծ է):

Որպեսզի որոշենք (1)-ի պատկերը Ռիմանի սֆերայի վրա, (*)-ից x-ը և y-ը փոխարինելով ξ,η,ζ-ով, ստանում ենք՝

$$\frac{A\zeta}{1-\zeta}+\frac{B\xi}{1-\zeta},+\frac{C\eta}{1-\zeta}+D=0,$$

կամ

$$(A-D)\zeta+B\xi+C\eta+D=0:\ (2)$$

Ստացված (2) հավասարումը որոշում է հարթություն: Այսպիսով, ξ,η,ζ կոորդինատները բավարարում են սֆերայի հավասարմանը և (2) հավասարմանը: Հետևաբար, (ξ,η,ζ) կետը գտնվում է դրանց հատման գծի վրա, այսինքն՝ սֆերայի շրջանագծի վրա ($4A\cdot D<B^2+C^2$ պայմանը ապահովում է Ռիմանի սֆերայի և (2) հարթության հատումը):

Մյուս կողմից Ռիմանի սֆերայի ցանկացած շրջանագծի հավասարումը գրվում է

$$\begin{cases}\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\zeta=0\\ a\xi+b\eta+c\zeta+d=0\end{cases}\ (3)$$

հավասարումների համակարգով որպես սֆերայի և հարթության հատման գիծ (հատման պայմանն է՝ $4d(c+d)<a^2+b^2$): (3) համակարգում ξ,η,ζ-ն փոխարինենք x, y-ով արտահայտված իրենց արժեքներով

$$\xi=\frac{x}{1+x^2+y^2},\eta=\frac{y}{1+x^2+y^2},\zeta=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}:$$

Համակարգի առաջին հավասարումը կդառնա նույնություն, իսկ երկրորդը՝

$$\frac{ax}{1+x^2+y^2}+\frac{by}{1+x^2+y^2}+\frac{c\left(x^2+y^2\right)}{1+x^2+y^2}+d=0$$

կամ

$$(c+d)\left(x^2+y^2\right)+ax+by+d=0:$$

Այդ հավասարումով z կոմպլեքս հարթության մեջ որոշում է շրջանագիծ (եթե $c\neq -d$) կամ ուղիղ գիծ (եթե $c=-d$): Երբ $c=-d$, ապա (3) համակարգով որոշվում է Ռիմանի սֆերայի $(0;0;1)$ կետով անցնող շրջանագիծ՝

$$\begin{cases}\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\zeta=0\\ a\xi+b\eta+c(\zeta-1)=0\end{cases}$$

որի պատկերը z կոմպլեքս հարթության

$$ax+by+d=0$$

ուղիղն է:

Վարժություններ

1. Կատարել գործողությունները.

ա) $(2+3i)(1-i)$,

բ) $\dfrac{1-i}{1+i}$,

գ) $\dfrac{1+2i}{3-i}+\dfrac{1-3i}{2+i}$,

դ) $(1+i)^{1988}$,

ե) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{20}$,

զ) $\dfrac{1+i\cdot tg\alpha}{1-i\cdot tg\alpha}$,

է) $\dfrac{(1-i)^{10}}{(1+i)^{14}}$,

ը) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{100}$,

թ) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{50}$,

ժ) $\left(\sqrt{8}-i\right)^{2}$,

ի) $\frac{2-i}{(2+i)^{4}}$,

լ) $3i-i^{1989}$,

խ) $i^{n}+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}, n\in N$,

ծ) $i\cdot i^{2}\cdot\ldots\cdot i^{99}\cdot i^{100}$:

2. Գտնել հետևյալ կոմպլեքս թվերի մոդուլներն ու արգումենտի գլխավոր արժեքը.

ա) i,

բ) -1,

գ) $\frac{1-i}{1+i}$,

դ) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

ե) $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$,

զ) $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$,

է) $-7i$,

ը) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{3}$,

թ) $\frac{(1+i)^{8}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{6}}$,

ժ) $-\cos\alpha+i\sin\alpha, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,

ի) $1+i\cdot tg\alpha, -\pi<\alpha<\pi, \alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$,

լ) $\sin\alpha-i\cos\alpha, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$:

3. Հետևյալ կոմպլեքս թվերը ներկայացնել եռանկյունաչափական տեսքով.

ա) 1,

բ) -1,

գ) i,

դ) $-i$,

ե) $1+i$,

զ) $-1+i\sqrt{3}$,

է) $1+i\sqrt{3}$,

ը) $-1-i\sqrt{3}$,

թ) $1-i\sqrt{3}$,

ժ) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$,

ի) $1+\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,

լ) i^{n}:

4. Հետևյալ կոմպլեքս թվերը ներկայացնել ցուցչային տեսքով.

ա) 5,

բ) -2,

գ) i,

դ) $-3i$,

ե) $\dfrac{2+i}{2-i}$,

զ) $1+i^{15}$,

է) $-1-i\sqrt{3}$,

ը) $-5-5i$,

թ) $\dfrac{(1+i)^8}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^6}$,

ժ) $(-4+3i)^3$,

ի) $-\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$,

լ) $\sin\alpha-i\cos\alpha, \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$:

5. Գտնել հետևյալ արմատների բոլոր արժեքները և դրանք նշել կոմպլեքս հարթության վրա.

ա) $\sqrt[4]{1}$,

բ) $\sqrt[4]{-9}$,

գ) $\sqrt{i}$,

դ) $\sqrt[3]{-i}$,

ե) $\sqrt{3+4i}$,

զ) $\sqrt[4]{1-i}$,

է) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$,

ը) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$,

թ) $\sqrt{2-2i\sqrt{3}}$,

ժ) $\sqrt[8]{-2+2i}$,

ի) $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}}$,

լ) $\sqrt[n]{-i}, n\in N$:

6. Ապացուցել, որ

$$\sqrt{a+ib}=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}\operatorname{sgn}b\right):$$

7. Լուծել հավասարումները.

ա) $z^2+pz+q=0\left(p,q\in C\right)$,

բ) $z^3=\bar{z}$,

գ) $z^2+|z|=0$,

դ) $|z|-z=2-3i$,

ե) $(z+2i)^4=z^4$,

զ) $(z+a)^n = z^n, n\in N, a\in R, a\neq 0$:

8. Ապացուցել նույնությունները ($w,z\in C$):

ա) $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$, որտեղ $P(z)$-ն իրական գործակիցներով բազմանդամ է,

բ) $\left(|z|^2-1\right)^2 + (2\operatorname{Re} z)^2 = |z^2+1|^2$,

գ) $|z+w|^2+|z-w|^2 = 2|z|^2+2|w|^2$,

դ) $|z\overline{w}+1|^2+|z-w|^2 = \left(1+|z|^2\right)\left(1+|w|^2\right)$,

ե) $|z\overline{w}-1|^2-|z-w|^2 = \left(|z|^2-1\right)\left(|w|^2-1\right)$,

զ) $|kz+w|^2-|kz-w|^2 = k\left(|z+w|^2-|z-w|^2\right), k\in R$,

է) $\sin\alpha + r\sin(\alpha+\varphi)+\ldots+r^n\sin(\alpha+n\varphi)=$

$$=\frac{\sin\alpha - r\sin(\alpha-\varphi) - r^{n+1}\sin(\alpha+(n+1)\varphi)+r^{n+2}\sin(\alpha+n\varphi)}{1-2r\cos\varphi+r^2},$$

ը) $\cos\alpha + r\cos(\alpha+\varphi)+\ldots+r^n\cos(\alpha+n\varphi)=$

$$=\frac{\cos\alpha - r\cos(\alpha-\varphi) - r^{n+1}\cos(\alpha+(n+1)\varphi)+r^{n+2}\cos(\alpha+n\varphi)}{1-2r\cos\varphi+r^2}:$$

9. Հարթության վրա նշել z կոմպլեքս թվերի այն բազմությունները, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին

ա) $|\operatorname{Re} z|<1$,

բ) $|\operatorname{Im} z|>1$,

գ) $|2z+i|=4$,

դ) $2\leq|3z+i|<3$,

ե) $|z| = \left|z+\frac{1}{i}\right|$,

զ) $|z-3i|=\sqrt{5}, 0<\arg z\leq\frac{\pi}{4}$,

է) $|z-1|=|z+1|=|z-i\sqrt{3}|$,

ը) $\operatorname{Re}(iz+2-i)=1$,

թ) $\operatorname{Im}[(1+i)z]=1$,

ժ) $\frac{\pi}{6}<\arg(z+1)<\frac{\pi}{4}$,

ի) $|(1+i)z-i|=1$,

լ) $\arg(iz-1)=\frac{\pi}{3}$,

խ) $|z-2|<|z|$,

ծ) $|z+1-i|>|z-i|$,

կ) $0<\arg\frac{i-z}{i+z}<\frac{\pi}{2}$,

հ) $|z-i|+|z+i|<4$,

ձ) $|z-2|-|z+2|<2$,

ղ) $\operatorname{Re}[(1-i)z]<\sqrt{2}$,

ճ) $|z-a|<|1-a\bar{z}|$, a -ն իրական է,

մ) $|z|-\operatorname{Re} z\le 0$,

յ) $\operatorname{Im}(\bar{z}^2)<1$,

ն) $\operatorname{Im}\frac{1}{z}<-\frac{1}{2}$,

շ) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}<\frac{1}{2}$,

ո) $|z|^2<\frac{|z|}{2}+3$,

չ) $0<\operatorname{Re}(iz)<1$,

պ) $\operatorname{Re}(iz+2-i)=1$,

ջ) $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=a^2$, $\left(|z_1-z_2|<a\sqrt{2}\right)$,

ռ) $1+2|z|^2>|1+z^2|^2$,

ս) $|2z-z_1-z_2|<$
$<2\frac{|z-z_1||z-z_2|}{|z_1-z_2|}$ $(z_1\neq z_2)$:

10. Հարթության վրա պատկերել բոլոր այն z կոմպլեքս թվերը, որոնց համար $(1+i)z$ -ը իրական է:

11. Գտնել $z=t+i(1-t)$ տեսքի կոմպլեքս թվերի պատկերը հարթության վրա, որտեղ t-ն իրական է:

12. Ո՞ր կետն է z_1, z_2 ծայրակետերով հատվածը բաժանում $\lambda_1:\lambda_2$ (λ_1, λ_2 -իրական թվեր են) հարաբերությամբ:

13. Դիցուք $|z|=1$: Որտե՞ղ են գտնվում $2z+1+i$ կոմպլեքս թվերը պատկերող կետերը:

14. Որտե՞ղ են գտնվում $w=(1+i)z-i$ կոմպլեքս թվերը, եթե $|z+3i|=1$:

15. z_1, z_2, z_3 կետերը զուգահեռագծի երեք գագաթներն են: Գտնել չորրորդ գագաթը:

16. Կանոնավոր եռանկյան երկու գագաթները $z_1=1, z_2=2+i$ կետերն են: Գտնել երրորդ գագաթը:

17. Պարզել, թե ինչ գծեր են որոշվում հետևյալ հավասարումներով.

ա) $\operatorname{Re}\bar{z}^2=1$,

բ) $\operatorname{Im}\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$,

գ) $z^2+\bar{z}^2=1$,

դ) $2z\bar{z}+(2+i)z+(2-i)\bar{z}=2$,

ե) $|z-z_1|=|z-z_2|$,

զ) $\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1}=0$,

է) $\operatorname{Im}\frac{z-1}{z+1}=0$,

ը) $\operatorname{Re}\left(z^2-\bar{z}\right)=0$,

թ) $\operatorname{Re}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$,

ժ) $\operatorname{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$:

18. Ռիմանի սֆերայի վրա գտնել հետևյալ կետերի պատկերները.

ա) 1,

բ) -1,

գ) i,

դ) $-i$,

ե) $\frac{1}{2}$,

զ) $-2i$,

է) $1+i$,

ը) $-1+i$,

թ) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$,

ժ) $\sqrt{3}-i$:

19. Ռիմանի սֆերայի վրա գտնել հետևյալ գծերի պատկերները.

ա) $\arg z = \alpha$,

բ) $|z| = R$,

գ) $\operatorname{Re} z = C$,

դ) $\operatorname{Im} z = C$:

20. Ռիմանի սֆերայի վրա գտնել հետևյալ անհավասարումնե-րով որոշվող տիրույթների պատկերները.

ա) $\operatorname{Re} z > 0$,

բ) $\operatorname{Re} z < 0$,

գ) $\operatorname{Im} z > 0$,

դ) $\operatorname{Im} z < 0$,

ե) $|z| < 1$,

զ) $|z| > 1$,

է) $1 < |z| < 2$:

Գլուխ 2. Կոմպլեքս փոփոխականի տարրական ֆունկցիաներ

Հիմնական գաղափարներ և փաստեր

Ամեն մի $z = x + iy$ -ի համար $\exp z$ կամ e^z սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\exp z = e^z = e^x\left(\cos y + i\sin y\right):$$

e^z -ը կոչվում է էքսպոնենցիալ ֆունկցիա, որը որոշված է C -ում: e^z ֆունկցիայի արժեքները իրական $z = x$ -ի համար համընկնում է e^x ֆունկցիայի արժեքների հետ:

Եռանկյունաչափական և հիպերբոլական ֆունկցիաները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \; tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, ctgz = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, thz = \frac{shz}{chz}, cthz = \frac{chz}{shz}:$$

$Lnz\left(z \neq 0\right)$ սահմանում ենք այնպես, որ $\exp\left\{Lnz\right\} = z$: Lnz -ը z -ի միջոցով միարժեք չի որոշվում: Իսկապես, եթե $z = |z|e^{i\arg z}$, ապա

$$Lnz = \ln|z| + i\arg z + 2\pi ki\left(k = 0, \pm1, \pm2, ...; -\pi < \arg z \leq \pi\right):$$

k -ի ֆիքված արժեքի դեպքում այս բանաձևով որոշվում է ֆունկցիա, որը կոչվում է լոգարիթմական ֆունկցիայի ճյուղ որոշված $C \setminus \left(-\infty, 0\right]$-ում: $k = 0$ -ի արժեքին համապատասխանող ֆունկցիան կոչվում է լոգարիթմի գլխավոր ճյուղ:

Եթե $a \neq 0$ -ն կամայական կոմպլեքս թիվ է, ապա ըստ սահմանման

$$a^z = \exp\left\{zLna\right\}:$$

Ըստ սահմանման $w = \operatorname{Arccos} z$ հավասարությունը համարժեք է $\cos w = z$ հավասարությանը: Ճիշտ նույն ձևով սահմանվում են $\operatorname{Arcsin} z, \operatorname{Arc} tgz, \operatorname{Arcc} tgz$, ինչպես նաև $Arshz, Archz, Arthz, Arcthz$ բազմարժեք ֆունկիաները:

Օրինակներ

1. Գտնել $\cos z$ ֆունկցիայի իրական, կեղծ մասերը և մոդուլը:

<u>Լուծում</u>. Ըստ սահմանման $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$: $z = x + iy$ -ի համար

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y}\left(\cos x + i\sin x\right),$$

$$\cos z = \frac{e^{-y}\left(\cos x + i\sin x\right) + e^{y}\left(\cos x - i\sin x\right)}{2} =$$

$$= \cos x\frac{e^{-y} + e^{y}}{2} - i\sin x\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \cos xchy - i\sin xshy:$$

$$\operatorname{Re}\cos z = \cos xchy, \operatorname{Re}\cos z = -\sin xshy,$$

$$\left|\cos z\right| = \sqrt{\cos^2 xch^2 y + \sin^2 xsh^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + sh^2 y}:$$

2. Գտնել z -ի այն արժեքները, որոնց համար տեղի ունի $|tgz| = 1$ հավասարությունը:

<u>Լուծում</u>. $tgz = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\dfrac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$,

$$\left(|tgz| = 1\right) \Leftrightarrow \left(\left|e^{2iz} - 1\right| = \left|e^{2iz} + 1\right|\right) \Leftrightarrow \left(\operatorname{Re} e^{2iz} = 0\right),$$

$$\operatorname{Re} e^{2iz} = \operatorname{Re} e^{2i(x+iy)} = \operatorname{Re} e^{2ix-2y} = e^{-2y}\cos 2x,$$

$$\left(|tgz| = 1\right) \Leftrightarrow \left(e^{-2y}\cos 2x = 0\right) \Leftrightarrow \left(\cos 2x = 0\right) \Leftrightarrow \left(2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z\right):$$

Պատ. $\operatorname{Re} z = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z$

Վարժություններ

21. Գտնել հետևյալ կոմպլեքս թվերի մոդուլներն ու արգումենտի գլխավոր արժեքները.

ա) e^{3+i},

բ) e^{2-3i},

գ) e^{-3+2i},

դ) e^{-2-i},

ե) e^{1-4i},

զ) e^{1+4i},

է) $-ae^{i\varphi}, a>0, |\varphi| \le \pi$,

ը) $e^{-i\varphi}, |\varphi| \le \pi$,

թ) $e^{i\alpha} - e^{i\beta}, 0 \le \beta < \alpha \le 2\pi$,

ժ) $e^{-\frac{\pi i}{2}(1-2i)}$:

22. Հաշվել e^z ֆունկցիայի արժեքը, եթե z փոփոխականը հավասար է՝

ա) $-\frac{\pi i}{2}$,

բ) $2\pi i$,

գ) πki,

դ) $-\frac{1}{2} - \pi i$,

ե) $-\frac{5\pi}{2}(1+2i)$:

23. Նկարագրել այն z կետերի բազմությունը, որտեղ e^Z ֆունկցիան ընդունում է՝

ա) իրական արժեքներ,

բ) կեղծ արժեքներ:

24. Հաշվել.

ա) $Ln(-1)$,

բ) $ln(-1)$,

գ) $Ln(i)$,

դ) $ln(i)$,

ե) $Ln\frac{1+i}{\sqrt{2}}$,

զ) $Ln(-1+i\sqrt{3})$,

է) $Ln(-1-2i\sqrt{3})$,

ը) $ln(1-i)$,

թ) $ln\frac{1+i}{1-i}$,

ժ) $ln\frac{3}{i}$:

25. Գտնել հետևյալ աստիճանների բոլոր արժեքները.

ա) 1^{i} ,

բ) $(-1)^{\sqrt{2}}$,

գ) $i^{\sqrt{2}}$,

դ) i^{i} ,

ե) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$,

զ) 2^{-i} ,

է) $(-i)^{-i}$:

26. Գտնել իրական, կեղծ մասերը և մոդուլը.

ա) $\sin z$,

բ) tgz ,

գ) $ctgz$,

դ) shz ,

ե) chz ,

զ) thz :

27. Նկարագրել այն z կետերի բազմությունը, որտեղ հետևյալ ֆունկցիաները ընդունում են իրական արժեքներ.

ա) $\sin z$,

բ) $\cos z$,

գ) tgz ,

դ) chz ,

ե) $cthz$:

28. Նկարագրել այն z կետերի բազմությունը, որտեղ հետևյալ ֆունկցիաները ընդունում են կեղծ արժեքներ

ա) $\sin z$,

բ) shz ,

գ) $\cos z$,

դ) $ctgz$,

ե) thz :

29. Լուծել հավասարումները.

ա) $e^{z}=-2i$,

բ) $\sin z=-3$,

գ) $\cos z=-\frac{i}{2}$,

դ) $thz=\frac{3i}{2}$,

ե) $\sin z-\cos z=3$,

զ) $shz-2chz=2i$:

30. Գտնել իրական և կեղծ մասերը.

ա) $\cos(1+i)$,

բ) $\sin(-2+i)$,

գ) $tg(2-i)$,

դ) $ctg\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right)$,

ե) $cth(2+i)$,

զ) $th\left(\ln 3+\frac{\pi i}{4}\right)$,

է) $\mathrm{Arcsin}\frac{1}{2}$,

ը) $Arc\cos i$,

թ) $Arctg(1+i)$,

ժ) $Arc\cos\left(-\frac{5}{4}\right)$,

ի) $Arc\sin 3$,

լ) $Arcctg(2-i)$:

31. Նկարագրել z -ի բոլոր այն արժեքները, որոնց համար.

ա) $|thz|=1$,

բ) $|ctgz|=1$:

Գլուխ 3. Կոմպլեքս հաջորդականություններ և շարքեր

Հիմնական գաղափարներ և փաստեր:

Կոմպլեքս թվերի $\{z_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է *զուգամետ* $a(a \neq \infty)$ կոմպլեքս թվին, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի բնական N թիվ այնպես, որ N-ից մեծ բոլոր n-երի համար ճիշտ է $|z_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Այդ փաստը գրվում է $z_n \to a(n \to \infty)$ կամ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ ձևով:

Ասում ենք, որ $\{z_n\}$ հաջորդականությունը ձգտում է *անվերջի*, եթե կամայական $M > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի բնական N թիվ, որ N-ից մեծ բոլոր n-երի համար ճիշտ է $|z_n| > M$ ։ Այդ փաստը գրվում է այսպես՝ $z_n \to \infty(n \to \infty)$ կամ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ ։

Կոմպլեքս անդամներով $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ շարքը կոչվում է *զուգամետ*, եթե նրա մասնական գումարների $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \ (n = 1, 2, \ldots)$ հաջորդականությունը ունի վերջավոր S սահման: S թիվը կոչվում է $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ շարքի գումար և գրվում է $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = S$ ։ Հակառակ դեպքում շարքը կոչվում է *տարամետ*: Շարքը կոչվում է *բացարձակ զուգամետ*, եթե զուգամետ է $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ շարքը: Շարքի բացարձակ զուգամիտությունը ուսումնասիրելիս կարելի է կիրառել դրական անդամներով շարքերի զուգամիտության հայտանիշները (Կոշու, Դալամբերի և այլն):

<u>Շարքերի զուգամիտության Բոլցանո-Կոշու սկզբունքը</u>. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ շարքի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի $N = N(\varepsilon)$ թիվ, որ

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \right| < \varepsilon$$

հենց, որ $n > N$ և $p \geq 1$:

Դիցուք $\{u_n(z)\}$-ը $(n \in N)$ նույն որոշման բազմություն ունեցող ֆունկցիաների հաջորդականություն է: Դիտարկենք $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ֆունկցիանալ շարքը: Այն z կետերի բազմությունը, որտեղ նշված շարքը զուգամետ է, կոչվում է այդ շարքի զուգամիտության բազմություն: Զուգամիտության բազմությանը պատկանող ամեն մի z-ի համար շարքի գումարը նշանակենք $S(z)$-ով: Դիցուք E բազմությունը ընկած է շարքի զուգամիտության բազմության մեջ:

<u>Սահմանում</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ շարքը E բազմության վրա կոչվում է հավասարաչափ զուգամետ, եթե կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $N = N(\varepsilon)$ թիվ, որ $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ բոլոր z-երի համար E բազմությունից, հենց, որ $n > N$:

<u>Հավասարաչափ զուգամիտության Վայերշտրասի հայտանիշը</u>: Եթե $|u_n(z)| \leq a_n$, երբ $z \in E$ և $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է E-ի վրա:

$c_n \in C(n = 0,1,2,...)$ գործակիցներով

$$c_0 + c_1(z-a) + c_1(z-a)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (*)$$

տեսքի ֆունկցիանալ շարքը կոչվում է աստիճանային շարք:

Աբելի թեորեմ: Եթե $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ աստիճանային շարքը զուգամետ է $z_0 \neq a$ կետում, ապա այն բացարձակ զուգամետ է $|z-a| < |z_0 - a|$ շրջանում:

Կոշու-Հադամարի թեորեմ: Եթե

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}, \ (*)$$

ապա

1) Երբ $l=0$ (*) շարքը զուգամետ է C -ում:

2) Երբ $0 < l < \infty$ (*) շարքը զուգամետ է, երբ $|z-a| < \frac{1}{l}$ և տարամետ է, երբ $|z-a| > \frac{1}{l}$:

3) Երբ $l = \infty$ (*) շարքը զուգամետ է միայն $z_0 = a$ կետում:

$R = \frac{1}{l}$ թիվը կոչվում է զուգամիտության շառավիղ, իսկ $|z-a| < R$ շրջանը զուգամիտության շրջան:

$|z-a| = R$ շրջանագծի կետերում շարքի զուգամիտությունը ուսումնասիրելիս պետք է կատարել լրացուցիչ հետազոտություն:

Օրինակներ

1. Գտնել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ni^n}{(3^n+1)(z+6i)^n}$ շարքի զուգամիտության տիրույթը:

Լուծում. Նկատենք, որ $t = \frac{1}{z+6i}$ փոփոխականի նկատմամբ տրված շարքը աստիճանային շարք է: Այն է՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ni^n}{\left(3^n+1\right)}t^n : (1)$$

Գտնենք այս շարքի զուգամիտության շառավիղը.

$$l=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{ni^n}{\left(3^n+1\right)}\right|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt[n]{n\left|i^n\right|}}{\sqrt[n]{3^n+1}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3^n+1}}=\frac{1}{3}, R=\frac{1}{l}=3 :$$

Այսպիսով (1) շարքը զուգամետ է $|t|<3$ շրջանում: Հեշտ է նկատել, որ (1) շարքը տարամետ է $|t|=3$ շրջանագծի բոլոր կետերում: Իսկապես, տեղադրելով $t=3e^{i\varphi}$ կստանանք

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ni^n 3^n e^{i\varphi n}}{\left(3^n+1\right)} :$$

Այդ շարքը տարամետ է բոլոր φ-երի համար, քանի որ ընդհանուր անդամը չի ձգտում զրոյի:

Ուրեմն տրված շարքը զուգամետ է $\left|\frac{1}{z+6i}\right|<3$ տիրույթում այսինքն, երբ $|z+6i|>\frac{1}{3}$:

Այսպիսով, շարքը զուգամետ է $-6i$ կենտրոնով և $\frac{1}{3}$ շառավիղով փակ շրջանից դուրս:

2. Գտնել $\sum_{n=0}^{\infty}(i-3)^n z^{n!}$ (2)

աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը:

__**Լուծում**__. Նշանակենք (2)-ի գործակիցները c_n-ով, ապա

$$c_n=\begin{cases}(i-3)^n, n=k! \\ 0, n\neq k!\end{cases} :$$

Հետևաբար՝ $\sqrt[n]{|c_n|}=\begin{cases}\sqrt[k!]{|i-3|^k}=10^{\frac{k}{2k!}}, n=k!\\ 0, n\neq k!\end{cases}$

Ուստի $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$ հաջորդականության մասնակի սահմաններն են՝ 0-ն և 1-ը: Ուրեմն՝

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=1 \text{ և } R=1:$$

3. Ցույց տալ, որ $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-z}$ (3)

շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $\operatorname{Re} z\geq a>1$ տիրույթում:

<u>Լուծում</u>. Գնահատենք շարքի ընդհանուր անդամի մոդուլը՝

$$\left|n^{-z}\right|=\left|e^{-z\ln n}\right|=e^{-\operatorname{Re} z\ln n}=n^{-x}=\frac{1}{n^x}$$

և հաշվի առնելով $x\geq a>1$պայմանը կունենանք

$$\left|n^{-z}\right|\leq\frac{1}{n^a}, \text{ որտեղ } a>1:$$

Քանի որ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ շարքը զուգամետ է $a>1$ դեպքում, ուրեմն (3) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $\operatorname{Re} z\geq a>1$ տիրույթում, համաձայն Վայերշտրասի հայտանիշի:

4. Հետազոտել

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot z^n \quad (4)$$

աստիճանային շարքի վարքը զուգամիտության շրջանի եզրի վրա:

<u>Լուծում</u>. Նշանակենք (4)-ի գործակիցները c_n -ով, ապա

$$c_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(2n)}{(n!)^2}=\frac{(2n-1)!!\cdot(2n)!!}{(n!)^2}=\frac{(2n-1)!!\cdot n!\cdot 2^n}{(n!)^2}=\frac{(2n-1)!!\cdot 2^n}{n!}=\frac{(2n-1)!!\cdot 4^n}{(2n)!!}:$$

Գտնենք այս շարքի զուգամիտության շառավիղը.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!\cdot 4^n}{(2n)!!}\cdot\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!\cdot 4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{4(2n+1)}=\frac{1}{4}:$$

Այսպիսով (4) շարքը զուգամետ է $|z|<\frac{1}{4}$ շրջանում: Հետազոտենք (4) շարքի վարքը զուգամիտության շրջանի $|z|=\frac{1}{4}$ եզրի վրա: Տեղադրելով $z=\frac{1}{4}e^{i\varphi}$ $\varphi\in[0;2\pi)$ կստանանք.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\cdot e^{in\varphi}}{(2n)!!}:\ (5)$$

Նկատենք, որ ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը.

$$\frac{1}{2n+1}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}},\forall n\in N:\ (6)$$

Հետևաբար $\varphi=0\left(z=\frac{1}{4}\right)$ դեպքում (5) շարքը կընդունի

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

տեսքը և հետևաբար կլինի տարամետ է (6)-ի համաձայն: Իսկ $\varphi\neq 0$ ($|z|=\frac{1}{4}$ շրջանագծի բոլոր կետերում, բացի $z=\frac{1}{4}$ կետի) դեպքում (5) շարքը զուգամետ է, համաձայն Դիրիխլեի հայտանիշի, քանի որ $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ նվազելով ձգտում է զրոյի, իսկ հետևյալ մասնակի գումարները սահմանափակ են.

$$\left|\sum_{n=0}^{m}e^{in\varphi}\right|=\left|\frac{1-e^{i(m+1)\varphi}}{1-e^{i\varphi}}\right|\leq\frac{1+\left|e^{i(m+1)\varphi}\right|}{\left|1-e^{i\varphi}\right|}=$$

$$=\frac{2}{\left|e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{-i\frac{\varphi}{2}}-e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)\right|}=\frac{2}{\left|-2i\,\dfrac{e^{i\frac{\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{2i}\right|}=\frac{1}{\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|}:$$

Վարժություններ

32. Գտնել հետևյալ հաջորդականությունների սահմանները.

ա) $z_n=\frac{n+3}{2n+1}+i\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$,

բ) $z_n=n\sin\frac{1}{n}+i\,\frac{n^2+1}{4n^2+3}$,

գ) $z_n=ntg\,\frac{1}{n}+i\,\frac{n^5}{2^n}$,

դ) $z_n=\left(\frac{1}{n}+i\right)e^{\frac{\pi i}{n}}$,

ե) $z_n=\frac{i^n}{n}$,

զ) $z_n=\frac{e^{in}}{n^2}$,

է) $z_n=(1+3i)^n$,

ը) $z_n=\frac{n+2i}{3n+7i}$,

թ) $z_n=e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\right)}$,

ժ) $z_n=n\sin\frac{i}{n}$,

ի) $z_n=n\cos\frac{\pi n}{2}+in\sin\frac{\pi n}{2}$,

լ) $z_n=\frac{sh(in)}{n}$,

խ) $z_n=\arg\frac{i^n}{n}$,

ծ) $z_n=\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)^n$:

33. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ շարքը զուգամետ է և $|\arg c_n|\le\alpha<\frac{\pi}{2}$, ապա այն զուգամետ է բացարձակ:

34. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ շարքերը զուգամետ են: Ապացուցել, որ եթե $\mathrm{Re}\, c_n \ge 0$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ շարքը նույնպես զուգամետ է:

Դիցուք կոորդինատային սկզբնակետից ելնող երեք ճառագայթներ հարթությունը տրոհում են π-ից փոքր բացվածքով երեք անկյունների: Ցույց տալ, որ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ շարքը բացարձակ զուգամետ է, եթե զուգամետ են այն երեք շարքերը, որոնք կազմված են տրված շարքի այդ փակ անկյուններից յուրաքանչյուրում գտնվող անդամներից:

35. Հետազոտել շարքի զուգամիտությունը.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+in}{2^n}$,

բ) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}$,

գ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$,

դ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$,

ե) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$,

զ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2in}}{n\sqrt{n}}$,

է) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$,

ը) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in^2}{5^{n^2}}$,

թ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{sh(in)}$,

ժ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(in)}{3^n}$,

ի) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{tg(i\pi n)}$:

36. Գտնել տրված շարքերի զուգամիտության տիրույթները.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n z^n}$,

բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(z^n + \frac{1}{2^n z^n} \right)$, գ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{\cos(in)}$,

ը) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+in\right)(z+1+i)^n$,

դ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{(z-2i)^n}$,

թ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}$,

ե) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n}$,

ժ) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{z^n}\right)$,

զ) $\sum_{n=1}^{\infty}e^n(iz)^{-n}$,

ի) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nz)}{n}$:

է) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z(z+n)}{n}\right)^n$,

37. Գտնել այն բազմությունները, որոնց վրա տրված շարքերը հավասարաչափ զուգամետ են.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$,

գ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(zn)}{n^2}$,

բ) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nz}$,

դ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(zn)}{n}$:

38. Ապացուցել, որ հետևյալ շարքերը հավասարաչափ զուգամետ են նշված տիրույթներում.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-nz}, \operatorname{Re}z\ge\delta>0$,

բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(zn)}{2^n}, |\operatorname{Im}z|\le\delta<\ln 2$:

39. Որոշել հետևյալ աստիճանային շարքերի զուգամիտության շառավիղները.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$,

գ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^n}{2^n}$,

բ) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{in}z^n$,

դ) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+i\sqrt{3}}\right)^n$, ե) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{in}\right)^n$,

զ) $\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n$,

է) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln(in)}\right)^n$,

ը) $\sum_{n=0}^{\infty} ch\frac{i}{n}\cdot z^n$,

թ) $\sum_{n=0}^{\infty}\cos^n\frac{\pi i}{\sqrt{n}}\cdot z^n$,

ժ) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+i)\cdot z^n$,

ի) $\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{\pi i}{n}\cdot z^n$,

լ) $\sum_{n=0}^{\infty}\cos(in)\cdot z^n$,

խ) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(3+(-1)^n\right)^n\cdot z^n$,

ծ) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\ln(n+2)\right)^k\cdot z^n$,

կ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot z^n$,

հ) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}\cdot z^n$,

ձ) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\cdot e^{-n^{\alpha}}\cdot z^n, \alpha>1$,

ղ) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ ։

40. Հետազոտել աստիճանային շարքի վարքը զուգամիտության շրջանի եզրի վրա.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$,

բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$,

գ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$,

դ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n!}}{n^2}$,

ե) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\ln^2 n}$,

զ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot z^n$ ։

Գլուխ 4. Կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիա

Հիմնական գաղափարներ և փաստեր

Եթե $E \subset C\left(E \subset \bar{C}\right)$ բազմության ցանկացած z կետին որևէ f օրենքով կամ կանոնով համապատասխանության մեջ է դրված որոշակի w կոմպլեքս թիվ, ապա ասում ենք, որ E բազմության վրա տրված է կոմպլեքս փոփոխականի $w = f(z)$ ֆունկցիա: $z = x + iy$ կոմպլեքս փոփոխականի $w = f(z)$ ֆունկցիան կարելի է դիտարկելը որպես x, y իրական փոփոխականների $u(z) = u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ և $v(z) = v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ իրական ֆունկցիաների զույգ. $w = f(z) = u(z) + iv(z)$: E բազմության վրա տրված $w = f(z)$ կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիան կարելի է դիտարկելը նաև, որպես E բազմության արտապատկերումը կոմպլեքս w հարթության մեջ: Այդ դեպքում $A(A \subseteq E)$ բազմության պատկեր են անվանում $f(A) = \{w : w = f(z), z \in A\}$ բազմությունը, իսկ w հարթության մեջ ընկած B բազմության նախապատկեր $f^{-1}(B) = \{z : f(z) \in B\}$ բազմությունը:

<u>**Սահմանում**</u>: f ֆունկցիան (արտապատկերումը) կանվանենք *միաթերթ* E բազմության վրա, եթե $f : E \to f(E)$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է, այսինքն $z_1, z_2 \in E, z_1 \neq z_2$ պայմանից հետևում է $f(z_1) \neq f(z_2)$:

a կետի ε շրջակայք կանվանենք $|z - a| < \varepsilon$ բաց շրջանը: a-ն կանվանենք E բազմության սահմանային կետ, եթե նրա ցանկացած շրջակայքում կան E-ի a-ից տարբեր կետեր:

Դիցուք a-ն f ֆունկցիայի որոշման բազմության E ենթաբազմության սահմանային կետ է: Կասենք, որ $A \in C$ թիվը f ֆունկցիայի սահման է, երբ $z \to a$ E բազմության վրայով և կգրենք

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in E}} f(z) = A,$$

եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպես, որ $\left| f(z) - A \right| < \varepsilon$, երբ $0 < |z - a| < \delta$ և $z \in E$: Կասենք, որ f ֆունկցիան ձգտում է ∞-ի, երբ $z \to a$ E բազմության վրայով և կգրենք

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in E}} f(z) = \infty,$$

եթե ցանկացած $R > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպես, որ $\left| f(z) \right| > R$, երբ $0 < |z - a| < \delta$ և $z \in E$: $w = f(z)$ ֆունկցիան կանվանենք անընդհատ նրա որոշման E բազմությանը պատկանող և այդ բազմության սահմանային կետ հանդիսացող z_0 կետում, եթե

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0):$$

Դիցուք $w = f(z)$ ֆունկցիան որոշված է z_0 կետի որևէ շրջակայքում: Եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ապա կասենք, որ $w = f(z)$ ֆունկցիան z_0 կետում ունի կոմպլեքս ածանցյալ կամ z_0 կետում մոնոգեն է և $f'(z_0)$-ն կանվանենք ֆունկցիայի ածանցյալ z_0-ում: z_0-ում կոմպլեքս ածանցյալի գոյությունը (մոնոգենությունը) համարժեք է z_0-ում $f(z)$ ֆունկ-ցիայի դիֆերենցելիությանը, այն է՝

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = A\Delta z + \varepsilon(\Delta z)\Delta z \quad (1)$$

որտեղ $\varepsilon(\Delta z) \to 0$,երբ $\Delta z \to 0$, ընդ որում (1)-ը բավարարվում է այն և միայն այն դեպքում, երբ $A = f'(z_0)$:

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը.

<u>Թեորեմ</u>: Որպեսզի $w = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ ֆունկ-ցիան $z_0 = x_0 + iy_0$ կետում ունենա կոմպլեքս ածանցյալ, անհրա-ժեշտ է և բավարար, որ

ա) u և v ֆունկցիաները լինեն դիֆերենցելի (x_0, y_0) կե-տում որպես իրական փոփոխականի ֆունկցիաներ,

բ) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (x_0, y_0) կետում;

բ) պայմանները կոչվում են Կոշու-Ռիմանի պայմաններ:

Մասնավորապես ա) պայմանը բավարարվում է, եթե u և v ֆունկցիաներն ունեն մասնակի ածանցյալներ z_0 կետի որևէ շրջակայքում և z_0 կետում այդ ածանցյալներն անընդհատ են:

<u>Սահմանում</u>: $w = f(z)$ ֆունկցիան կոչվում է *անալիտիկ* D տիրույթում, եթե այն դիֆերենցելի է D–ի ցանկացած կետում: Ֆունկցիան կոչվում է անալիտիկ z_0 կետում, եթե այն անալիտիկ է այդ կետի որևէ շրջակայքում:

Պարզվում է, որ D տիրույթում անալիտիկ ֆունկցիան ունի ցանկացած կարգի ածանցյալ և հետևաբար նրա իրական և կեղծ մասերը կլինեն անվերջ դիֆերենցելի:

<u>Սահմանում</u>: $u(x,y)$ իրական ֆունկցիան կոչվում է *հար-մոնիկ* D տիրույթում, եթե D-ում այն ունի երկրորդ կարգի մաս-նակի ածանցյալներ և բավարարում է Լապլասի

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

հավասարմանը:

Կոշի-Ռիմանի պայմաններից և խառն ածանցյալների հավասարության մասին թեորեմից հետևում է, որ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ անալիտիկ ֆունկցիայի իրական u և կեղծ v մասերը հարմոնիկ ֆունկցիաներ են:

v ֆունկցիան կոչվում է u հարմոնիկ ֆունկցիայի համալուծ հարմոնիկ D տիրույթում, եթե $u + iv$ ֆունկցիան անալիտիկ է D տիրույթում: Այսինքն՝ u և v ֆունկցիաները D-ում կապված են Կոշի-Ռիմանի պայմաններով:

Եթե u-ն հարմոնիկ է, որևէ միակապ տիրույթում, ապա նրա համալուծ հարմոնիկը կարելի է գտնել

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C$$

կորագիծ ինտեգրալի միջոցով, որպես ինտեգրման ուղղի ընտրելով, օրինակ u ֆունկցիայի հարմոնիկության տիրույթում ընկած և (x_0, y_0) ու (x,y) կետերը միացնող որևէ կտոր առ կտոր ողորկ կոր:

Եթե $w = f(z)$ ֆունկցիան z_0 կետում ունի ածանցյալ, ապա պարզ է, որ

$$\left|f'(z_0)\right| = \lim_{z \to z_0} \frac{\left|f(z) - f(z_0)\right|}{\left|z - z_0\right|} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta f|}{|\Delta z|}:$$

Այսինքն z_0 կետում ածանցյալի մոդուլը Δz անվերջ փոքր վեկտորի սեղմման կամ ձգման գործակիցն է $w = f(z)$ արտապատկերման ժամանակ ընդ որում այն կախում չունի Δz վեկտորի ուղղությունից: Եթե $f'(z_0) \neq 0$, ապա $\arg f'(z_0)$–ն այն անկյուն է, որով պտտվում է z_0-ում տրված ցանկացած ուղղությունը $w=f(z)$ արտապատկերման ժամանակ: Այլ խոսքով $\arg f'(z_0)$-ն սկզբնական և արտապատկերված ուղղությունների կազմած անկյունն է:

Վերջին ասածից անմիջապես բխում է, որ եթե $w=f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է D տիրույթում, γ_1 ու γ_2 կորերն անցնում են z_0 կետով և $f'(z_0)\neq 0$, ապա այդ կորերի պատկերները $w=f(z)$ արտապատկերման ժամանակ $w_0=f(z_0)$ կետում կկազմեն նույն անկյունը, ինչ γ_1-ը և γ_2-ը z_0 կետում (հաշվի առնելով նաև ուղղությունը): Արտապատկերման այդ հատկությունը կոչվում է անկյունների պահպանման հատկություն:

<u>**Սահմանում**</u>: D տիրույթի փոխմիարժեք արտապատկերումը D^* տիրույթի վրա կոչվում է *կոնֆորմ*, եթե նա անընդհատ է D-ում և *պահպանում է անկյունները*:

Այս սահմանումից և վերևում ասածից պարզ է, որ եթե $w=f(z)$ ֆունկցիան միաթերթ է և անալիտիկ D տիրույթում, ընդ որում $f'(z)\neq 0, z\in D$, ապա նա իրականացնում է կոնֆորմ արտապատկերում D-ի և նրա $f(D)$ պատկերի միջև:

<u>**Կոտորակագծային ֆունկցիաներ**</u>: $w=az+b$ *գծային* ֆունկցիայից հետո պարզագույն կարելի է համարել

$$w=L(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad (ad-bc\neq 0),\; L\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty,\quad L(\infty)=\frac{a}{c}$$

ֆունկցիան, որը կոչվում է *կոտորակագծային* ֆունկցիա: Բազմաթիվ պարզագույն տիրույթների կոնֆորմ արտապատկերումներն իրականացվում են կոտորակագծային ֆունկցիաներով: Թվարկենք կոտորակագծային ֆունկցիաների հատկությունները:

1. Կոտորակագծային ֆունկցիան իրականացնում է z ընդլայնված հարթության կոնֆորմ արտապատկերում w ընդլայնված հարթության վրա:

2. Երկու հաջորդական կիրառվող կոտորակագծային արտապատկերումների արդյունքը նորից կոտորակագծային արտապատկերում է: Կոտորակագծային արտապատկերման հակադարձը կոտորակագծային է (խմբային հատկություն):

3. Կոտորակագծային արտապատկերման դեպքում կամայական շրջանագծի և ուղղի պատկերը ուղիղ է կամ շրջանագիծ (շրջանային հատկություն):

4. Կոտորակագծային ֆունկցիան շրջանագծի կամ ուղղի նկատմամբ սիմետրիկ կետերը արտապատկերում է շրջանագծի կամ ուղղի պատկերի նկատմամբ սիմետրիկ կետերի (սիմետրիկության ինվարիանտության հատկությունը):

5. Եթե z_1, z_2, z_3 և w_1, w_2, w_3 եռյակների մեջ չկան իրար հավասարներ, ապա գոյություն ունի միակ կոտորակագծային արտապատկերում $w = w(z)$, որը z_k կետերը տանում է w_k-ի՝ $w_k = w(z_k)$: Այդ արտապատկերումը տրվում է

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

բանաձևով: Ընդ որում, եթե $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ կետերից որևէ մեկն անվերջ հեռու կետն է, ապա այն տարբերությունը, որը պարունակում է այդ կետը փոխարինվում է 1–ով:

Օրինակներ

1. $w = \dfrac{1}{z}$ արտապատկերման ժամանակ գտնել.

1) տրված $z_0 \neq 0$ կետով անցնող ուղիղների փնջի պատկերը,

2) $E : (|z-i| > 1, \operatorname{Im} z > 0)$ բազմության պատկերը:

<u>**Լուծում**</u>. 1) Գրենք z_0 կետով անցնող ուղիղների փնջի հավասարումը՝

$$\overline{B}(z-z_0) + B(\overline{z}-\overline{z}_0) = 0:$$

Տեղադրենք $z=\dfrac{1}{w}, z_0=\dfrac{1}{w_0}$: Ստանում ենք

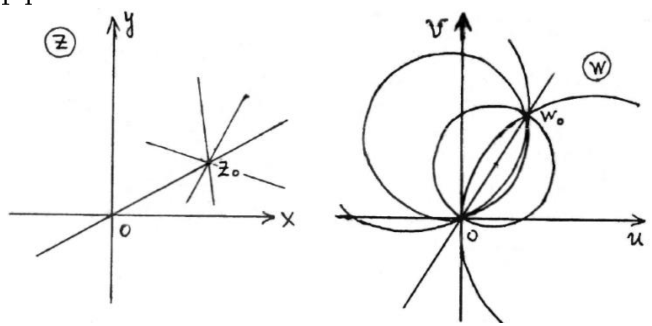
$$\bar{B}\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{w_0}\right)+B\left(\frac{1}{\bar{w}}-\frac{1}{\bar{w}_0}\right)=0,$$

$$\bar{B}\frac{w_0-w}{ww_0}+B\frac{\bar{w}_0-\bar{w}}{\bar{w}\bar{w}_0}=0,$$

$$\bar{B}\left(|w_0|^2\,\bar{w}-|w|^2\,\bar{w}_0\right)+B\left(|w_0|^2\,w-|w|^2\,w_0\right)=0\ ,$$

$$\left(Bw_0-\bar{B}\bar{w}_0\right)|w|^2-B|w_0|^2\,w+\bar{B}|w_0|^2\,\bar{w}=0:$$

Ստացվեց շրջանագծի հավասարում, որը անցնում է 0 և w_0 կետերով: Մասնավորապես, երբ $Bw_0-\bar{B}\bar{w}_0=0$, ապա պատկերը դառնում է ուղիղ գիծ, որը 0 և z_0 կետերով անցնող ուղղի պատկերն է:

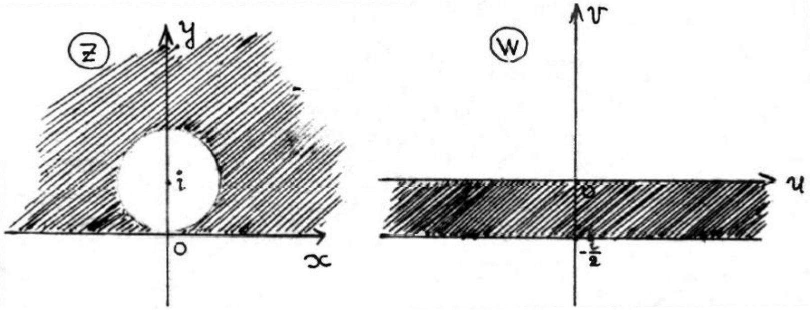


2) $|z-i|>1$-ի մեջ տեղադրելով $z=\dfrac{1}{w}$, ստանում ենք $\left|\dfrac{1}{w}-i\right|>1$, կամ $|1-wi|>|w|$, կամ $|i+w|>|w|$, որը $\operatorname{Im} w>-\dfrac{1}{2}$ կիսահարթությունն է:

$\operatorname{Im} z>0$-ի պատկերը $\operatorname{Im} w<0$ կիսահարթությունն է, քանի որ

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}\frac{1}{w} = \operatorname{Im}\frac{\bar{w}}{|w|^2} = -\frac{\operatorname{Im} w}{|w|^2}:$$

Հետևաբար՝ E-ի պատկերը $-\frac{1}{2} < \operatorname{Im} w < 0$ շերտն է:



2. Գտնել $E: 1 < |z| \le 2$ օղակի պատկերը $w = \frac{z+1}{z+2}$ արտապատկերման ժամանակ:

<u>**Լուծում**</u>. <u>**Առաջին եղանակ**</u>: Պարզ է, որ իրական առանցքի պատկերը իրական առանցքն է: $z = 2$ կետը անցնում է $w = \frac{3}{4}$ կետին, $z = -2$ կետը՝ $w = \infty$-ի, ուրեմն $|z| = 2$ շրջանագծի պատկերը կլինի $w = \frac{3}{4}$ կետով անցնող և իրական առանցքին ուղղահայաց ուղիղը՝ $\operatorname{Re} w = \frac{3}{4}$ (օգտվելով կոտորակագծային ֆունկցիայի շրջանային հատկությունից և կոնֆորմությունից): Այնուհետև, $z = 1$ կետը անցնում է $w = \frac{2}{3}$, $z = -1$ կետը՝ $w = 0$-ի: $|z| = 1$ շրջանագծի պատկերը $w = \frac{2}{3}, w = 0$ կետերով անցնող շրջանագիծ է, որն ուղղահայաց է իրական առանցքին՝ $\left|w - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$ շրջանագիծ է: Քանի որ $z = \frac{3}{2}$ կետի պատկերը $w = \frac{5}{7}$ կետն է, ուրեմն

E-ի պատկերը $\operatorname{Re} w = \dfrac{3}{4}$ ուղղով և $\left|w - \dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{1}{3}$ շրջանագծով սահմանափակված երկկապ տիրույթն է:

<u>Երկրորդ եղանակ</u>: Ունենք $z = \dfrac{2w-1}{1-w}$, հետևաբար $|z| > 1$ տիրույթի պատկերը կորոշվի $\left|\dfrac{2w-1}{1-w}\right| > 1$ անհավասարությամբ, որտեղից ստանում ենք

$$|2w-1| > |1-w|,$$

$$|2w-1|^2 > |1-w|^2,$$

$$(2w-1)(2\overline{w}-1) > (1-w)(1-\overline{w}),$$

$$4|w|^2 - 2w - 2\overline{w} + 1 > |w|^2 - w - \overline{w} + 1$$

$$3|w|^2 - w - \overline{w} > 0,$$

$$u^2 + v^2 - \frac{2}{3}u > 0,$$

$$\left(u - \frac{1}{3}\right)^2 + v^2 > \frac{1}{9},$$

$$\left|w - \frac{1}{3}\right| > \frac{1}{3}:$$

$|z| < 2$ տիրույթի պատկերը կորոշվի $\left|\dfrac{2w-1}{1-w}\right| < 2$ անհավասարությամբ, որտեղից ստանում ենք

$$|2w-1| < 2|1-w|,$$

$$|2w-1|^2 < 4|1-w|^2,$$

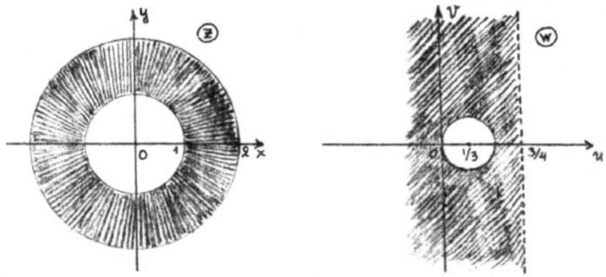
$$(2w-1)(2\overline{w}-1) < 4(1-w)(1-\overline{w}),$$

$$4|w|^2 - 2w - 2\overline{w} + 1 < 4|w|^2 - 4w - 4\overline{w} + 4$$

$$2w + 2\overline{w} - 3 < 0,$$

$$4\operatorname{Re} w < 3,$$

$$\operatorname{Re} w < \frac{3}{4}:$$



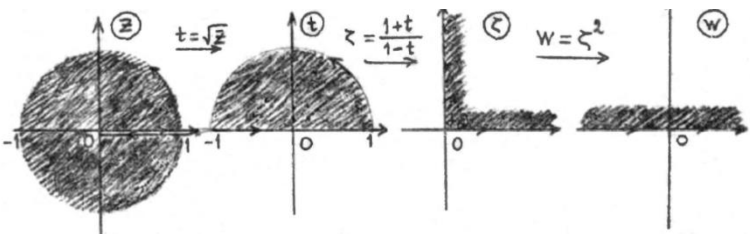
Այսպիսով E-ի պատկերը $\operatorname{Re} w = \frac{3}{4}$ ուղղով և $\left|w-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$ շրջանագծով սահմանափակված երկկապ տիրույթն է:

3. $[0,1]$ շառավղով ճեղքված միավոր շրջանը արտապատկերել վերին կիսահարթության վրա:

Լուծում. 1. Արմատի $t=\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(z=re^{i\varphi},0<\varphi<2\pi\right)$ ճյուղը ճեղքված միավոր շրջանը արտապատկերում է վերին միավոր կիսաշրջանի վրա:

2. $\zeta=\dfrac{1+t}{1-t}$ կոտորակագծային ֆունկցիան արտապատկերում է վերին միավոր կիսաշրջանը ζ հարթության առաջին քառորդի վրա:

3. $w=\zeta^2$ ֆունկցիան առաջին քառորդը արտապատկերում է վերին կիսահարթության վրա:



Սլաքներով նշված են եզրերի շրջանցման ուղղությունները այդ արտապատկերման դեպքում: Հետևաբար, որոնելի արտա-պատկերումն իրականացվում է

$$w=\zeta^2=\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2=\left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^2$$

ֆունկցիայով:

4. Գտնել $f(z)=u+iv$ անալիտիկ ֆունկցիան տրված $u=e^{2x}\cos 2y-x$ իրական մասով:

<u>Լուծում</u>. **<u>Առաջին եղանակ</u>**: Խնդիրն ունի լուծում, եթե տրված $u(x,y)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է: Ստուգենք այդ: Ունենք

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y-1, \frac{\partial u}{\partial y}=2e^{2x}\sin 2y,$$

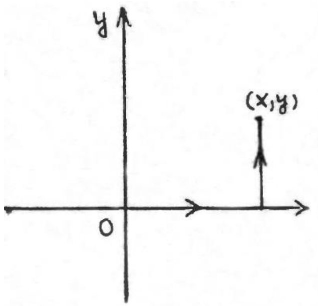
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4e^{2x}\cos 2y, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-4e^{2x}\cos 2y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4e^{2x}\cos 2y-4e^{2x}\cos 2y=0:$$

Այսպիսով $u(x,y)$-ը հարմոնիկ է ամբողջ հարթության մեջ: Գտնենք $u(x,y)$-ի համալուծ հարմոնիկ $v(x,y)$ ֆունկցիան: $v(x,y)$ ֆունկցիան որոշենք կորագիծ ինտեգրալ ով՝

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C:$$

Միակապ տիրույթում այդ ինտեգրալը կախված չէ ինտե-գրման ճանապարհից: Որպես ինտեգրման ճանապարհ ընտրենք $(0,0)$, (x,0), (x,y) գագաթներով բեկյալը:



Ստանում ենք.

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} 2e^{2x}\sin 2y\,dx+\left(2e^{2x}\cos 2y-1\right)dy+C=$$

$$=\int_{0}^{y}\left(2e^{2x}\cos 2y-1\right)dy+C=e^{2x}\sin 2y-y+C:$$

Հետևաբար՝

$$f(z)=e^{2x}\cos 2y-x+i\left(e^{2x}\sin 2y-y+C\right)=e^{2x}\left(\cos 2y+i\sin 2y\right)-$$

$$-\left(x+iy\right)+iC=e^{2x+2iy}-z+iC=e^{2z}-z+iC:$$

<u>**Երկրորդ եղանակ**</u>: Հաշվենք $f(z)$ ֆունկցիայի ածանցյալը օգտվելով Կոշու-Ռիմանի պայմաններից, կստանանք՝

$$f'(z)=u'_x+iv'_x=u'_x-iu'_y=2e^{2x}\cos 2y-1+i2e^{2x}\sin 2y=$$

$$=2e^{2x}\left(\cos 2y+i\sin 2y\right)-1=2e^{2x+i2y}-1=2e^{2z}-1$$

որի նախնականը՝

$$f(z)=e^{2z}-z+C$$

ֆունկցիան է:

5. Գտնել $f(z)=u+iv$ անալիտիկ ֆունկցիան տրված $v=e^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)-x$ կեղծ մասով:

<u>Լուծում</u>. Խնդիրն ունի լուծում, եթե տրված $v(x,y)$ ֆունկ-ցիան հարմոնիկ է: Ստուգենք այդ: Ունենք $u(x,y)$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2ye^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)-2xe^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)-1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-2xe^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)+2ye^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=4y^2e^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)-4x^2e^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)+$$

$$+8xye^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)-2e^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right),$$

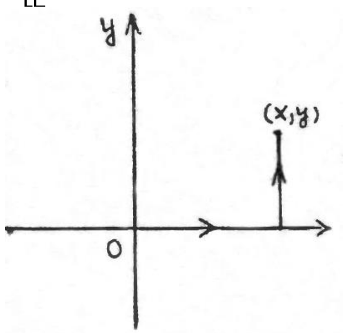
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=4x^2e^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)-8xye^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)+$$

$$+2e^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)-4y^2e^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right):$$

Որտեղից ստանում ենք

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0:$$

Այսինքն $v(x,y)$-ը հարմոնիկ է ամբողջ հարթության մեջ: Որ-պես ինտեգրման ճանապարհ ընտրենք $(0,0)$, (x, 0), (x,y) գագաթներով բեկյալը.



$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left[-2xe^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)+2ye^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)\right]dx+$$

$$+\left[2ye^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)+2xe^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)+1\right]dy+C=$$

$$=\int_0^x\left(-2x\cos x^2\right)dx+\int_0^y\left(2ye^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)+2xe^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)\right)dy+C=$$

$$=-\sin x^2-\int_0^y\left(e^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)\right)'_y dy+y+C=-\sin x^2-$$

$$-e^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)+\sin x^2+y+C=-e^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)+y+C:$$

Հետևաբար՝

$$f(z)=-e^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)+y+C+i\left(e^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)-x\right)=$$

$$=ie^{-2xy}\left(\cos\left(x^2-y^2\right)+i\sin\left(x^2-y^2\right)\right)-i(x+iy)+C=$$

$$=ie^{-2xy+i\left(x^2-y^2\right)}-i(x+iy)+C=ie^{i(x+iy)^2}-i(x+iy)+C=ie^{iz^2}-iz+C:$$

Այս դեպքում էլ կարելի է կիրառել երկրորդ եղանակը, միայն պետք է օգտագործել՝

$$f'(z)=u'_x+iv'_x=v'_y+iv'_x$$

բանաձևը:

Վարժություններ

41. Պարզել, թե հետևյալ արտապատկերումները E տիրույթում միաթերթ են, թե ոչ.

ա) $w=z^2, E:\operatorname{Re} z>0$,

բ) $w=\overline{z}^2, E:|z|<1$,

գ) $w=\dfrac{1}{z-1}, E:|z|<1$,

դ) $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right), E:|z|<2:$

42. $w = z^2$ արտապատկերման համար գտնել.

ա) $x = c$,

բ) $y = c$,

գ) $x = y$,

դ) $|z| = R$,

ե) $\arg z = \alpha$:

գծերի պատկերները:

43. $w = \frac{1}{z}$ արտապատկերման համար գտնել

ա) $x = c$,

բ) $y = c$,

գ) $|z| = R$,

դ) $\arg z = \alpha$,

ե) $|z-1| = 1$

գծերի պատկերները:

44. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ արտապատկերման համար գտնել $|z| = R$ շրջանագծերի պատկերը:

45. $w = \frac{z}{(1-z)^2}$ արտապատկերման համար գտնել $|z| = 1$ շրջանագծի պատկերը:

46. Գտնել $w = \overline{z}$ ֆունկցիայի սահմանը $z_0 = i$ կետում:

47. Գոյություն ունի՞ արդյո՞ք $w = \frac{\overline{z}}{z}$ ֆունկցիայի սահմանը $z = 0$ կետում:

48. Ապացուցել, որ e^{z^2} ֆունկցիան ձգտում է անվերջի, երբ $z \to \infty$ ցանկացած $|Argz - \pi| \le \alpha$ և $|\arg z| \le \alpha$ անկյունների մեջ, եթե միայն $\alpha < \frac{\pi}{4}$:

49. $\frac{\operatorname{Re} z}{z}, \frac{z}{|z|}, \frac{\operatorname{Re} z^2}{z^2}, \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$ ֆունկցիաները որոշված են, երբ $z \neq 0$: Դրանցից որո՞նք կդառնան անընդհատ $z=0$ կետում, պատշաճ ձևով որոշվելուց հետո:

50. Անընդհատ է արդյո՞ք $w = \operatorname{Re} z$ ֆունկցիան կոմպլեքս հարթության մեջ:

51. Հետազոտել $\frac{1}{z-1}$ և $\frac{1}{z^2+1}$ ֆունկցիաների անընդհատությունը և հավասարաչափ անընդհատությունը $|z|<1$ շրջանում:

52. Հավասարաչափ անընդհատ է արդյո՞ք e^{-z} ֆունկցիան $\operatorname{Re} z \geq \delta > 0$ տիրույթում:

53. Գտնել E բազմության պատկերը $w = f(z)$ արտապատկերման համար.

ա) $w = 2z, E: |z| < 1$,

բ) $w = \frac{1}{z}, E: |z-1| < 1$,

գ) $w = -\frac{1}{z}, E: \left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$,

դ) $w = \frac{1}{z}, E: |z+1| < 1$,

ե) $w = z^2, E: 0 < \operatorname{Re} z < 1$,

զ) $w = z^2, E: \operatorname{Im} z < 1$,

է) $w = z^2, E: \left\{|z| < R, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$,

ը) $w = z^3, E: \left\{|z| > 2, 0 < \arg z < \pi\right\}$,

թ) $w = z^4, E: \left\{|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\right\}$, ժ) $w=\dfrac{z}{z+1}, E:|z|=2$,

ի) $w=\dfrac{z}{z+1}, E:\operatorname{Re} z=1$,

լ) $w=\dfrac{z-a}{z+a}(a>0), E:\operatorname{Re} z>0$,

խ) $w=\dfrac{z-1}{z+1}, E:\operatorname{Im} z=1$,

ծ) $w=\dfrac{2}{z-1}, E:1<|z|<2$,

կ) $w=\dfrac{i+z}{i-z}, E:|z|=1$,

հ) $w=\dfrac{z+2}{1+2z}, E:|z|\le 1$,

ձ) $w=2\dfrac{1+2z}{2-z}, E:|z|\ge 1$,

ղ) $w=\dfrac{z+2}{1-z}, E:z\notin[-2;1]$,

ճ) $w=\dfrac{3+2z}{i+z}, E:x^2+y^2+2x+2y+1=0$,

մ) $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right), E:\arg z=\dfrac{\pi}{4}$,

յ) $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right), E:\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}$ ։

54. Պարզել, ինչի են ձևափոխվում $w=e^z$ ֆունկցիայով.

ա) $y=kx+b$ ուղիղները,

բ) $y_1<y<y_2\ (0\le y_1<y_2\le 2\pi)$ շերտը,

գ) $y = x, y = x + 2\pi$ ուղիղներով սահմանափակված շերտը,

դ) $x < 0, 0 < y_1 < y_2 \le 2\pi$ կիսաշերտը,

ե) $x > 0, 0 < y_1 < y_2 \le 2\pi$ կիսաշերտը,

զ) $x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2 \left(y_2 - y_1 < 2\pi\right)$ ուղղանկյունը:

55. Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որոնք ունեն ածանցյալներ.

ա) $w = z^2$,

բ) $w = \operatorname{Re} z$,

գ) $w = \overline{z}$,

դ) $w = z\overline{z}$,

ե) $w = z \operatorname{Re} z$,

զ) $w = x^2 + iy^2$,

է) $w = 2xy - i\left(x^2 - y^2\right)$:

56. Գտնել a, b, c հաստատունները այնպես, որ $f(z)$ ֆունկցիան լինի անալիտիկ.

ա) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$,

բ) $f(z) = \cos x(chy + ashy) + i \sin x(chy + bshy)$:

57. Գտնել այն տիրույթները, որտեղ $f(z) = \left|x^2 - y^2\right| + 2i|xy|$ ֆունկցիան անալիտիկ է:

58. Ցույց տալ, որ $f(z) = \sqrt{\left|z^2 - \overline{z}^2\right|}$ ֆունկցիայի համար $z = 0$ կետում բավարարվում են Կոշու-Ռիմանի պայմանները, մինչդեռ այդ կետում ածանցյալ գոյություն չունի:

59. Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է որևէ տիրույթում: Ապացուցել, որ եթե $\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z), |f(z)|, \arg f(z)$ ֆունկցիաներից որևէ մեկը հաստատուն է այդ տիրույթում, ապա հաստատուն է նաև $f(z)$ ֆունկցիան:

60. Ցույց տալ, որ բևեռային կոորդինատներով Կոշու-Ռիմանի պայմաններն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}:$$

61. Ստուգել ֆունկցիայի անալիտիկությունը Կոշու-Ռիմանի պայմանների միջոցով.

ա) $f(z)=ze^z$,　　գ) $f(z)=ztgz$,

բ) $f(z)=chz$,　　դ) $f(z)=Lnz$:

62. $w=f(z)$ արտապատկերման համար տրված կետերում գտնել ձգման (սեղմման) գործակիցը և պտույտի անկյունը.

ա) $w=z^3, z_1=2-i, z_2=1+i\dfrac{\pi}{2}$,

բ) $w=3iz+2, z_1=1+i, z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$,

գ) $w=\dfrac{1}{z}, z_1=3i, z_2=-3$,

դ) $w=\dfrac{i+z}{z-i}, z_1=2i, z_2=-1$,

ե) $w=\dfrac{2+z}{z-i}, z_1=2i, z_2=\dfrac{2}{i}$,

զ) $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right), z_1=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}, z_2=i$,

է) $w=e^z, z_1=\ln 2+i\dfrac{\pi}{4}, z_2=-1+i\dfrac{\pi}{2}$,

ը) $w=\dfrac{2+z}{z-i}\sin z, z_1=0, z_2=1+i$:

63. Գտնել բոլոր այն կետերի բազմությունը, որտեղ ձգման գործակիցը հավասար է 1-ի.

ա) $w=z^2$,

բ) $w=z^2-2z$,

գ) $w=\dfrac{1}{z}$,

դ) $w=\frac{1+iz}{1-iz}$ ։

64. Գտնել բոլոր այն կետերի բազմությունը, որտեղ պտտման անկյունը հավասար է զրոյի.

ա) $w=iz^2$,

բ) $w=z^2-2z$,

գ) $w=\frac{i}{z}$,

դ) $w=\frac{1+iz}{1-iz}$ ։

65. Պարզել թե կոմպլեքս հարթության որ մասն է ձգվում և որ մասը՝ սեղմվում հետևյալ արտապատկերման դեպքում.

ա) $w=e^z$,

բ) $w=\ln z$,

գ) $w=\frac{1}{z}$,

դ) $w=z^3$,

ե) $w=z^2+2z$ ։

66. Վերականգնել $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան տրված իրական կամ կեղծ մասերով.

ա) $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+xy$,

բ) $\operatorname{Im} f(z)=x^2-y^2+x$,

գ) $\operatorname{Re} f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)$,

դ) $\operatorname{Re} f(z)=x\cos x\cdot chy+y\sin x\cdot shy$,

ե) $\operatorname{Re} f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}, z\neq 0$,

զ) $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2}, z\neq 0$,

է) $\operatorname{Im} f(z)=3+x^2-y^2-\frac{y}{2(x^2+y^2)}, z\neq 0$,

ը) $Imf(z)=\ln(x^2+y^2)$

67. Գտնել $w = w(z)$ գծային ֆունկցիան, որը $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = i$ գագաթերով եռանկյունն արտապատկերում է $w_1 = 1 + i, w_2 = 0, w_3 = 2$ գագաթերով նման եռանկյան վրա:

68. Գտնել $w = w(z)$ գծային ֆունկցիան, որն ունի $z_0 = 1 + 2i$ անշարժ կետ և $z = i$ կետը տանում է $w = -i$ կետին:

69. Գտնել գծային ֆունկցիայի ընդհանուր տեսքը, որը արտապատկերում է.

ա) վերին կիսահարթությունը իր վրա,

բ) վերին կիսահարթությունը ստորին կիսահարթության վրա,

գ) վերին կիսահարթությունը աջ կիսահարթության վրա,

դ) աջ կիսահարթությունը իր վրա,

ե) $0 < \operatorname{Re} z < 1$ շերտը իր վրա,

զ) $y = x$ և $y = x - 1$ ուղիղներով սահմանափակված շերտը իր վրա:

70. Գտնել $w = w(z)$ կոտորակագծային ֆունկցիան, որը միավոր շրջանը արտապատկերում է իր վրա, գիտենալով, որ կետերը անշարժ են և $\frac{5+3i}{4}$ կետը գնում է ∞ :

71. Գտնել վերին կիսահարթությունը միավոր շրջանի վրա արտապատկերող կոտորակագծային ֆունկցիան այնպես, որ $-1, 0, 1$ կետերն անցնեն $1, i, -1$ կետերին:

72. Գտնել $|z| < 1$ միավոր շրջանը ստորին կիսահարթության վրա այնպես, որ $-1, 1, i$ կետերն անցնեն $1, -1, 0$ կետերին:

73. Գտնել $|z| < 1$ միավոր շրջանը վերին կիսահարթության վրա այնպես, որ $-1, 1, i$ կետերն անցնեն $\infty, 0, 1$ կետերին:

74. Գտնել $|z| < 5$ շրջանը $|w| < 1$ միավոր շրջանի վրա այնպես, որ $-5, 4 + 3i, 5$ կետերն անցնեն $-1, i, 1$ կետերին:

75. Գտնել $|z-2|<3$ շրջանը $|w|<1$ միավոր շրջանի վրա այնպես, որ $-1, 5, i\sqrt{5}$ կետերն անցնեն $1, i, -1$ կետերին:

76. Գտնել $w=w(z)$ կոտորակագծային ֆունկցիան, որը

ա) $-1, i, 1+i$ կետերը տանում է

1) $0, 2i, -1-i$; 2) $i, \infty, 1$ կետերին:

բ) $-1, \infty, i$ կետերը՝

1) $1, i, 1+i$; 2) $\infty, i, -1$; 3) $0, \infty, 1$ կետերին:

77. Գտնել կոտորակագծային ձևափոխության ընդհանուր տեսքը, որը արտապատկերում է.

ա) $|z-z_0|<R$ շրջանը $|w|<1$ միավոր շրջանի վրա,

բ) $|z|<R$ շրջանը $\operatorname{Im} w>0$ կիսահարթության վրա,

գ) $\operatorname{Re} z>0$ կիսահարթությունը $|w|<1$ միավոր շրջանի վրա,

դ) $\operatorname{Re} z>0$ կիսահարթությունը $\operatorname{Re} w>0$ կիսահարթության վրա:

78. Գտնել կոտորակագծային ձևափոխության ընդհանուր տեսքը, որը իրական առանցքը տանում է միավոր շրջանագծին:

79. Գտնել վերին կիսահարթությունն իր վրա արտապատկերող $w=w(z)$ կոտորակագծային ֆունկցիան այնպես, որ.

ա) $w(0)=1, w(1)=2, w(2)=\infty$,

բ) $w(0)=1, w(i)=2i, w(\infty)=-4$:

80. Գտնել, թե ինչի է տանում $|z|<1$ շրջանը, այն կոտորակագծային ձևափոխությամբ, որը $1, i, \infty$ կետերն անցնեն $0, \infty, 1$ կետերին:

81. Գտնել այն ֆունկցիան, որը $z = z_0 + e^{i\varphi_1}t, z = z_0 + e^{i\varphi_2}t$ որտեղ $t \geq 0, 0 < \varphi_1 < \varphi_2$ ճառագայթներով կազմած անկյունը արտապատկերում է վերին կիսահարթության վրա:

82. Գտնել այն ֆունկցիան, որը $\{0 < x < \infty, 0 < y < \pi\}$ կիսաշերտը արտապատկերում է վերին $|z| < 1$ կիսաշրջանի վրա:

83. Արտապատկերել իրական առանցքը $0 < a < x < b$ ուղղագիծ հատվածով ճեղքված հարթությունը վերին կիսահարթության վրա:

84. Արտապատկերել $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)(b < a)$ ուղղագիծ ճեղքերով z հարթությունը $\operatorname{Im} w > 0$ կիսահարթության վրա:

85. Գտնել $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ առաջին քառորդը $|w| < 1$ շրջանի վրա արտապատկերող ֆունկցիան այնպես, որ $z = 1 + i, z = 0$ կետերին համապատասխանեն $w = 0, w = 1$ կետերը:

86. Արտապատկերել վերին կիսահարթության վրա.

ա) $|z| < 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ սեկտորը,

բ) $0 < a < \operatorname{Re} z < b$ շերտը,

գ) $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ կիսաշերտը:

87. $|z-1| = 1, |z-2| = 2$ շրջանագծերով սահմանափակված լուսնյակը արտապատկերել $0 < \operatorname{Re} w < 1$ շերտի վրա:

88. $D: \{|z+1| > 1, |z+2| < 2\}$ տիրույթը արտապատկերել $0 < \operatorname{Im} w < 1$ շերտի վրա:

89. $|z+1| = 1$, $|z+i| = 1$ շրջանագծերով սահմանափակված ոսպնյակը արտապատկերել $\operatorname{Re} w > 0$ կիսահարթության վրա:

Գլուխ 5. Կոմպլեքս ինտեգրում

Հիմնական գաղափարներ և փաստեր

Եթե Γ-ն կտոր առ կտոր ողորկ ժորդանյան կոր է, իսկ $f(z)$-ը՝ $(z\in\Gamma)$ Γ-ի վրա տրված անընդհատ ֆունկցիա է, ապա կարելի սահմանել $f(z)$ ֆունկցիայի ինտեգրալ (կոմպլեքս ինտեգրալ) Γ կորով: Դիցուք $z=\lambda(t),\alpha\le t\le\beta$ Γ կորի պարամետրական հավասարումն է: Վերցնենք $[\alpha,\beta]$ հատվածի որևէ տրոհում՝ $\alpha=t_0<t_1<\ldots t_n=\beta$: Կազմենք հետևյալ գումարը.

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\lambda\left(\xi_k\right)\right)\Delta\lambda_k \text{, որտեղ}$$

$$\Delta\lambda_k=\lambda\left(t_{k+1}\right)-\lambda\left(t_k\right),\xi_k\in\left[t_k,t_{k+1}\right]:$$

σ-ն կոչվում է $f(z)$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումար: Եթե գոյություն ունի σ ինտեգրալային գումարների վերջավոր սահման, երբ $\delta=\max\left(t_{k+1}-t_k\right)\to 0$ անկախ ξ_k կետերի ընտրությունից, ապա $f(z)$ ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի Γ կորով, և սահմանը կոչվում է $f(z)$ ֆունկցիայի ինտեգրալ Γ կորով ու նշանակվում է

$$\int_\Gamma f(z)dz$$

սիմվոլով:

Եթե $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, ապա

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_\Gamma udx-vdy+i\int_\Gamma vdx+udy$$

որտեղ աջ մասում գրված են երկրորդ տիպի իրական կորագիծ ինտեգրալներ:

Եթե Γ-ն ողորկ ժորդանյան կոր է $z=\lambda(t), \alpha\le t\le\beta$ հավասարումով, ապա

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda(t))\lambda'(t)dt :$$

Նշենք ինտեգրալի հետևյալ հատկությունները.

1. $\int_{\Gamma^-} f(z)dz=-\int_{\Gamma} f(z)dz$ (Γ^--ը Γ-ի հակառակը ուղղությունն ունեցող կորն է),

2. $\int_{\Gamma}(\alpha f(z)+\beta g(z))dz=\alpha\int_{\Gamma} f(z)dz+\beta\int_{\Gamma} g(z)dz$,

3. $\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right|\le\int_{\Gamma}|f(z)||dz| \left(|dz|=ds\right)$,

4. $\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{\Gamma_1} f(z)dz+\int_{\Gamma_2} f(z)dz$ այստեղ Γ_1-ը և Γ_2-ը Γ կորի տրոհումն է:

Անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության մեջ բացառիկ կարևորություն ունի հետևյալ պնդումը.

<u>Կոշու թեորեմ.</u> Եթե D-ն վերջավոր կոմպլեքս հարթության միակապ տիրույթ է, $f(z)$-ը անալիտիկ է D-ում և Γ-ն D-ին պատկանող կտոր առ կտոր ողորկ փակ կոր է, ապա

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=0 :$$

Այս թեորեմի կարևոր ընդհանրացում է հետևյալ թեորեմը:

<u>Թեորեմ (Կոշու ընդլայնված)</u>. Եթե $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է կտոր առ կտոր ողորկ եզրով $D\subset C$ ժորդանյան տիրույթում և անընդհատ է նրա փակման վրա, ապա

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0 :$$

Այստեղ Γ-ն D տիրույթի եզրն է: Եթե տիրույթը միակապ չէ (վերջավոր կապանի է), ապա Γ-ն կազմված է վերջավոր թվով չհատվող ժորդանյան փակ կտոր առ կտոր ողորկ կորերից: Γ-ի շրջանցման դրական ուղղություն համարվում է այն, որի դեպքում տիրույթը մնում է շրջանցողի ձախ կողմում: ∂D-ով նշանակենք դրական ուղղությամբ շրջանցած Γ-ն:

Նշենք այս թեորեմի հետևանքները:

<u>**Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը**</u>. Եթե $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է D միակապ տիրույթում և $F'(z) = f(z), z \in D$, ապա

$$\int_{\gamma_{z_1 z_2}} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1), z_1, z_2 \in D$$

որտեղ $\gamma_{z_1 z_2}$-ը z_1 և z_2 կետերը միացնող D-ում ընկած որևէ կոր է:

<u>**Կոշու ինտեգրալային բանաձևը**</u>. Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է կտոր առ կտոր ողորկ եզրով $D \subset C$ ժորդանյան տիրույթում և անընդհատ է նրա փակման վրա, ապա

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases} f(z), z \in D \\ 0, z \notin \bar{D} \end{cases} :$$

<u>**Միջին արժեքի բանաձևը**</u>. Եթե $f(z)$-ը անալիտիկ է $|z-a| < R$ շրջանում, ապա ցանկացած $0 \le \rho < R$ թվի համար

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + \rho e^{it}\right)dt :$$

<u>**Մոդուլի մաքսիմումի սկզբունքը**</u>. Դիցուք $f(z)$-ն անալիտիկ է D տիրույթում և $M = \sup\limits_{z \in D} |f(z)|$: Այդ դեպքում կամ $f(z)$-ը հաստատուն է, կամ բոլոր $z \in D$ կետերում $|f(z)| < M$:

<u>Հետևանք</u>. Դիցուք $f(z)$-ն անալիտիկ է D սահմանափակ տիրույթում և անընդհատ է $\overline{D}$-ում: Այդ դեպքում, եթե $f(z)$ ֆունկցիան հաստատուն չէ, ապա $|f(z)|$ ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքը ընդունում է միայն տիրույթի եզրում: Դիցուք Γ-ն կտոր առ կտոր ողորկ կոր է և $f(z)$-ն որոշված է ու անընդհատ Γ-ի վրա:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

արտահայտությամբ $C\setminus\Gamma$ բազմության վրա որոշվում է ֆունկցիա, որը կոչվում է $f(z)$ ֆունկցիայի Կոշու տիպի ինտեգրալ Γ կորով: Այդ ֆունկցիան անալիտիկ է $C\setminus\Gamma$-ի վրա, ընդ որում

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta, n=0,1,2,\ldots:$$

Կոշու ինտեգրալային բանաձևից և նշված փաստից հետևում է, որ D-ում անալիտիկ ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է և նրա ածանցյալների համար տեղի ունի

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta, z\in D, n=0,1,2,\ldots$$

բանաձևերը, որոնք կոչվում են Կոշու բանաձևեր ածանցյալների համար: (Ենթադրվում է, որ $f(z)$-ը անընդհատ է $\overline{D}$-ում): Տեղի ունի հետևյալ պնդումը, որը կարելի է համարել Կոշու թեորեմի հակադարձը:

<u>Մորերայի Թեորեմը</u>. Եթե $f(z)$ ֆունկցիան անընդհատ է D տիրույթում և

$$\int_{\gamma}f(z)dz=0$$

ցանկացած $\gamma \subset D$ կտոր առ կտոր ողորկ փակ կորով, որով պարփակված տիրույթը ընկած է D-ում, ապա $f(z)$-ը անալիտիկ է D-ում:

Օրինակներ

Հաշվել ինտեգրալները.

1. $J_1 = \int_\gamma z \operatorname{Re} z^2 dz$, որտեղ $\gamma : |z| = 1, -\pi \le \arg z \le 0$:

<u>**Լուծում**</u>: γ-ի հավասարումն է՝ $z = e^{it}, -\pi \le t \le 0$ հետևաբար,

$$J_1 = i\int_{-\pi}^{0} e^{it} \operatorname{Re}\left(e^{2it}\right)e^{it}dt = i\int_{-\pi}^{0} e^{2it}\cos 2t dt =$$

$$= \frac{i}{2}\int_{-\pi}^{0} e^{2it}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right)dt = \frac{i}{2}\int_{-\pi}^{0}\left(e^{4it}+1\right)dt = \frac{i}{2}\left(\frac{e^{4it}}{4i}+t\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{i\pi}{2}:$$

2. $J_2 = \int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$, որտեղ γ-ն $|z| = 1$ աջ կիսաշրջանագիծն է $z = -i$ սկզբնակետով: Վերցված է $\sqrt{z}$-ի այն ճյուղը, որի համար $\sqrt{-i} = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$:

<u>**Լուծում**</u>: $z = e^{it}, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$: $\sqrt{-i} = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ պայմանից հետևում է, որ $\sqrt{e^{it}} = e^{i\left(\frac{t}{2}+\pi\right)} = -e^{\frac{it}{2}}$: Հետևաբար

$$J_2 = i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{it}dt}{-e^{\frac{it}{2}}} = -i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{it}{2}}dt = -2e^{\frac{it}{2}}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2\left(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) = -4i\sin\frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2}i:$$

3. $J_3 = \int\limits_{\gamma} z\,\mathrm{e}^{z^2}\, dz$, որտեղ γ-ն $y = 2x^2 - 1$ կորի այն աղեղն է, որը միացնում է $z = -i$ և $z = 1 + i$ կետերը:

Լուծում: Համաձայն Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի ունենք.

$$J_3 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{z^2}\Big|_{-i}^{1+i} = \frac{1}{2}\left(e^{2i} - e^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 2 - e^{-1}\right) + \frac{i}{2}\sin 2 :$$

4. $J_4 = \int\limits_{|z-1|=1} \frac{sh\pi z dz}{z^2 - 1}$:

Լուծում: $|z-1| < 1$ շրջանում կոտորակի հայտարարը զրո է դառնում $z = 1$ կետում: Կոշու ինտեգրալային բանաձևը կիրառելու համար ինտեգրալը գրենք հետևյալ տեսքով

$$J_4 = \int\limits_{|z-1|=1} \frac{\frac{sh\pi z}{z+1} dz}{z - 1}$$

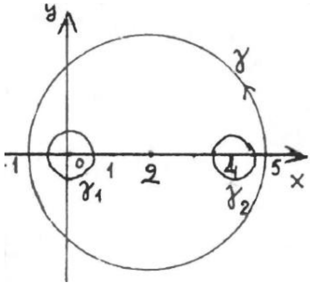
$f(z) = \frac{sh\pi z}{z+1}$ ֆունկցիան անալիտիկ է $|z-1| \le 1$ շրջանում, ուստի՝

$$J_4 = 2\pi i f(1) = 2\pi i \frac{sh\pi}{2} = \pi i sh\pi :$$

5. $J_5 = \int\limits_{|z-1|=1} \frac{che^{i\pi z} dz}{z^3 - 4z^2}, \gamma : |z-2| = 3$:

Լուծում: Ընդինտեգրալ ֆունկցիայի հայտարարը զրո է դառնում $z = 0$, $z = 4$ կետերում, որոնք գտնվում են $|z-2| < 3$ շրջանում: Դիտարկենք և շրջանագծերը:

$f(z) = \frac{che^{i\pi z} dz}{z^3 - 4z^2}$ ֆունկցիան անալիտիկ է եռակապ տիրույթում, որի եզրը $\gamma \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^-$ բարդ կորն է: Համաձայն Կոշու ինտեգրալային բանաձևի



$$J_5 = \int\limits_{\gamma_1} \frac{che^{i\pi z}dz}{z^3-4z^2} + \int\limits_{\gamma_2} \frac{che^{i\pi z}dz}{z^3-4z^2} = 2\pi i \left(\frac{che^{i\pi z}}{z-4}\right)'\Bigg|_{z=0} + 2\pi i \frac{che^{i\pi z}}{z^2}\Bigg|_{z=4} =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{i\pi z} i\pi (z-4) she^{i\pi z} - che^{i\pi z}}{(z-4)^2}\Bigg|_{z=0} + 2\pi i \frac{che^{4i\pi}}{16} =$$

$$= 2\pi i \frac{4i\pi sh1 - ch1}{16} + 2\pi i \frac{ch1}{16} = \frac{\pi^2 sh1}{2}:$$

Վարժություններ

90. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

ա) $\int\limits_{z_1}^{z_2} \operatorname{Re} z dz$, z_1 և z_2 կետերը միացնող ուղղագիծ հատվածով,

բ) $\int\limits_{-1}^{1} |z| dz$, երբ ինտեգրման կորը՝

1) ուղղագիծ հատվածն է,
2) միավոր վերին շրջանագիծն է,
3) միավոր ստորին շրջանագիծն է:

դ) $\int\limits_{\gamma} \overline{z}\,|z| dz$, γ -ն փակ կոր է, որը բաղկացած է $|z| = 1$ շրջանագծի վերին կեսից և $-1 \le x \le 1, y = 0$ հատվածից:

ե) $\int\limits_{\gamma} \frac{z}{\bar{z}}dz$, γ -ն $\{1<|z|<2, \operatorname{Im} z>0\}$ տիրույթի եզրն է:

զ) $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, γ -ն $|z|=1, y \geq 0$ կիսաշրջանագիծն է $z=1$ սկզբնակետով:

է) $\int\limits_{\gamma} \sqrt{z}dz$, γ -ն $|z|=1, y \leq 0$ կիսաշրջանագիծն է $z=-1$ սկզբնակետով; $\sqrt{z}$ -ի այն ճյուղն է, որի համար $\sqrt{-1}=i$:

ը) $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, γ -ն $|z|=1, x \geq 0$ կիսաշրջանագիծն է $z=i$ սկզբնակետով; $\sqrt{z}$ -ի այն ճյուղն է, որի համար $\sqrt{-i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$:

թ) $\int\limits_{\gamma} Lnzdz$, γ -ն $|z|=1, y \geq 0$ կիսաշրջանագիծն է $z=1$ սկզբնակետով; Lnz -ի այն ճյուղն է, որի համար $Ln1=0$:

ժ) $\int\limits_{\gamma} Lnzdz$, γ -ն $|z|=1, x \leq 0$ կիսաշրջանագիծն է $z=i$ սկզբնակետով; Lnz -ի այն ճյուղն է, որի համար $Lni=i\frac{\pi}{2}$:

ի) $\int\limits_{\gamma} \frac{Ln^2 z}{z}dz$, γ -ն $|z|=1, x \geq 0, y \geq 0$ շրջանագծի աղեղն է $z=1$ սկզբնակետով; Lnz -ի այն ճյուղն է, որի համար $Ln1=0$:

լ) $\int\limits_{\gamma} \frac{Lnz}{z}dz$, γ -ն 1 և i կետերը միացնող ուղղագիծ հատվածն է; Lnz -ի այն ճյուղն է, որի համար $Ln1=0$:

խ) $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^3-5z}$:

ծ) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z+1)(z-5)}dz$:

կ) $\int\limits_{|z|=3} \frac{chzdz}{z+2i}$ ։

հ) $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2-1}$ ։

ձ) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos zdz}{z^2-7z+10}$ ։

ղ) $\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{dz}{z^2+9}$ ։

ճ) $\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos zdz}{z^2-\pi^2}$ ։

մ) $\int\limits_{|z|=\pi} \frac{dz}{z^2+9}$ ։

յ) $\int\limits_{\gamma} \frac{shzdz}{z^2+4}$, $\gamma : x^2+y^2+6y=0$ ։

ն) $\int\limits_{|z-2|=2} \frac{zdz}{z^4-1}$ ։

շ) $\int\limits_{|z|=2} \frac{chizdz}{z^2+4z+3}$ ։

ո) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi zdz}{\left(z^2-1\right)^2}$ ։

չ) $\int\limits_{|z-1-i|=\sqrt{2}} \frac{e^z dz}{z^2-2z+2}$ ։

պ) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$,

1) 0 կետը գտնվում է γ կորի ներսում, իսկ 1-ը՝ դրսում,

2) 1 կետը գտնվում է γ կորի ներսում, իսկ 0-ը՝ դրսում,

3) 0 և 1 կետերը գտնվում են γ կորի ներսում։

ջ) $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z\left(z^2-1\right)}$, γ-ն կամայական փակ կոր է, որը չի անցնում $-1, 0, 1$ կետերով։

ռ) $\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz} dz}{\left(z^2-4\right)^2}$ ։

ս) $\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}} dz}{\left(z^2-1\right)^2}$ ։

վ) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{(z-i)^3}$ ։

տ) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)\,dz}{z(e^z+2)}$ ։ g) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{(z-\sin z)\,dz}{z^4}$ ։

ր) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{(1-\sin z)\,dz}{z^2}$ ։

91. Ապացուցել, որ $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ հավասարությունը: **Ցուցում**. e^{iz^2} ֆունկցիան ինտեգրել $|z| \le R, 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$ սեկտորի եզրով և ձգտեցնել R-ը $+\infty$-ի: Օգտվել Պուասոնի ինտեգրալից $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ։

92. Ապացուցել, որ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos 2bx dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{a}}$ $(a > 0)$ հավասարությունը: **Ցուցում**. e^{-az^2} ֆունկցիան ինտեգրել $|x| \le R, 0 \le y \le b$ ուղղանկյան եզրով, ձգտեցնել R-ը $+\infty$-ի և օգտվել Պուասոնի ինտեգրալից:

93. Ապացուցել, որ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ հավասարությունը: **Ցուցում**. $\dfrac{e^{iz}}{z}$ ֆունկցիան ինտեգրել $r \le |z| \le R, 0 \le \arg z \le \pi$ տիրույթի եզրով և ձգտեցնել $r \to 0, R \to +\infty$ ։

94. Ապացուցել, որ եթե $f(z)$ ֆունկցիան հաստատունից տարբեր անալիտիկ ֆունկցիա է D տիրույթում և $\inf\limits_{z\in D} |f(z)| = m > 0$,

ապա D տիրույթի յուրաքանչյուր z ներքին կետում $\left|f(z)\right| > m$:

95. Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է D տիրույթում D_C -ն $\left|f(z)\right| = C$ պարզ փակ մակարդակի գծով սահմանափակված տիրույթն է, ընդ որում $\bar{D}_C \subset D$: Ցույց տալ, որ եթե $f(z)$-ը հաստատուն չէ, ապա D_C -ում ունի առնվազն մեկ զրո:

96. Ապացուցել, որ եթե $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $|z| < R$ շրջանում, $f(0) = 0$ և $\left|f(z)\right| < M$, ապա $\left|f(z)\right| \le \dfrac{M|z|}{R}$ ամբողջ $|z| < R$ շրջանում:

97. Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $|z| < R$ շրջանում, այնտեղ բավարարում է $\left|f(z)\right| < M$ անհավասարությանը և այդ շրջանի z_0 կետում $f(z_0) = 0$:

Ապացուցել, որ

$$\left|f(z)\right| \le \frac{MR\left|z - z_0\right|}{\left|R^2 - z\bar{z}_0\right|} \quad \left(|z| < R\right):$$

Ցուցում. դիտարկելը $\dfrac{R^2 - z\bar{z}_0}{R\left(z - z_0\right)} f(z)$ ֆունկցիան:

Գլուխ 6. Թեյլորի շարք: Անալիտիկ ֆունկցիայի միակության թեորեմը

Հիմնական գաղափարներ և փաստեր

Հայտնի է, որ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$ աստիճանային շարքի $S\left(z\right)$ գումարը այդ շարքի զուգամիտության շրջանում անալիտիկ ֆունկցիա է: Ճիշտ է նաև հակադարձը:

<u>**Թեորեմ**</u>. Եթե $f\left(z\right)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $\left|z - z_0\right| < R\left(R > 0\right)$ շրջանում, ապա այդ շրջանում այն վերլուծվում է

$$f\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n \tag{1}$$

աստիճանային շարքի, ընդ որում

$$c_n = \frac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\left|z - z_0\right| = \rho} \frac{f\left(z\right)}{\left(z - z_0\right)^{n+1}} dz \quad \left(0 < \rho < R,\ n = 0,1,\ldots\right): \tag{2}$$

(1) շարքը, որտեղ c_n գործակիցները որոշված են (2) բանաձևերով կոչվում է $f\left(z\right)$ ֆունկցիայի Թեյլորի շարք z_0 կետի շրջակայքում: Գրենք մի քանի տարրական ֆունկցիաների Թեյլորի շարքերը $z = 0$ կետի շրջակայքում՝

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\left(R = +\infty\right),$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \ldots + \left(-1\right)^n \frac{z^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!} + \ldots\left(R = +\infty\right),$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \ldots + \left(-1\right)^n \frac{z^{2n}}{\left(2n\right)!} + \ldots\left(R = +\infty\right),$$

$$shz = z + \frac{z^3}{3!} + .\frac{z^5}{5!} .. + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...(R = +\infty),$$

$$chz = 1 + \frac{z^2}{2!} + .\frac{z^4}{4!} .. + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ...(R = +\infty),$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + .\frac{z^3}{3} .. + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n} + ...(R = 1),$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot ... \cdot(\alpha-n+1)}{n!} z^n + ...(R = 1):$$

$\ln(1+z)$-ը $Ln(1+z)$ ֆունկցիայի գլխավոր ճյուղն է: $(1+z)^\alpha$-ն սահմանելիս, այստեղ վերցված է $Ln(1+z)$ ֆունկցիայի գլխավոր ճյուղը:

Թեյլորի շարքը իր զուգամիտության շրջանում կարելի է անդամ առ անդամ ածանցել և ինտեգրել:

z_0 կետը կոչվում է $f(z)$ ֆունկցիայի զրո, եթե $f(z_0) = 0$: Կասենք, որ z_0 կետը $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիայի k-րդ կարգի կամ k պատիկության զրո է, եթե

$$f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0:$$

Առաջին կարգի զրոն անվանում են նաև պարզ զրո: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը՝ $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան z_0 կետում ունի k-րդ կարգի զրո այն և միայն այն դեպքում, եթե նա այդ կետի որևէ շրջակայքում ներկայացվում է

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

տեսքով, որտեղ $g(z)$-ն անալիտիկ է այդ շրջակայքում և $g(z_0) \neq 0$:

Թեորեմ. (անալիտիկ ֆունկցիայի միակության): Եթե $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է D տիրույթում և $f(z)=0$ D-ի մի E ենթաբազմության վրա, որն ունի գոնե մեկ կուտակման կետ D-ում, ապա $f(z)=0$ D-ում:

Այստեղից մասնավորապես հետևում է, որ D տիրույթում նույնաբար զրոյից տարբեր անալիտիկ ֆունկցիան կարող է ունենալ ամենաշատը հաշվելի թվով զրոներ, որոնք չեն կարող կուտակվել D-ի ներսում:

Օրինակներ

1. Գտնել $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ շարքի գումարը, երբ $|z|<1$:

Լուծում: Գիտենք, որ երբ $|z|<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}:$$

Անդամ առ անդամ ածանցելով կստանանք

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}:$$

Ստացված հավասարության երկու մասը բազմապատկելով z-ով և նորից ածանցելով կստանանք՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = \left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)' = \frac{1+z}{(1-z)^3}:$$

հավասարությունը, որտեղից ստանում ենք՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}:$$

2. Գտնել $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{pn}}{(pn)!}(p\in N)$ շարքի գումարը:

<u>Լուծում</u>. Նկատենք, որ

եթե $z_k=\sqrt[p]{1}=e^{i\frac{\pi k}{p}},k=0,1,...,p-1$,

ապա $\sum_{k=0}^{p-1}z_k^m=\begin{cases}0,m\neq pl,l\in Z_+\\ p,m=pl,l\in Z_+\end{cases}$:

Այժմ դիտարկենք հետևյալ գումարը $\sum_{k=0}^{p-1}e^{z_k z}$: Օգտվելով e^z ֆունկցիայի Թեյլորի շարքից, կստանանք.

$$\sum_{k=0}^{p-1}e^{z_k z}=\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m z_k^m}{m1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m1}\sum_{k=0}^{p-1}z_k^m=p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{pn}}{(pn)!}:$$

Որտեղից, ունենք.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{pn}}{(pn)!}=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}e^{z_k z}:$$

3. Գտնել $e^z\sin z$ ֆունկցիայի վերլուծությունը Թեյլորի շարքի $z=0$ կետի շրջակայքում.

<u>Լուծում</u>:

$$e^z\sin z=e^z\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(e^{(1+i)z}-e^{(1-i)z}\right)=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\left[(1+i)^n-(1-i)^n\right],$$

$$1\pm i=\sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}},\ (1\pm i)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{\pm i\frac{\pi n}{4}},$$

ուրեմն

$$(1+i)^n-(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{i\frac{\pi n}{4}}-2^{\frac{n}{2}}e^{-i\frac{\pi n}{4}}=2^{\frac{n}{2}}\left(e^{i\frac{\pi n}{4}}-e^{-i\frac{\pi n}{4}}\right)=2\cdot 2^{\frac{n}{2}}i\sin\frac{\pi n}{4},$$

հետևաբար՝

$$e^z \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{\pi n}{4}}{n!} z^n :$$

4. Գտնել $\cos z$ ֆունկցիայի վերլուծությունը Թեյլորի շարքի $z = \dfrac{\pi}{4}$ կետի շրջակայքում.

<u>Լուծում</u>:

$$\cos z = \cos\left[\frac{\pi}{4} + \left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\frac{\pi}{4}\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{4}\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right] -$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} - \ldots + (-1)^n \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^n}{n!} :$$

Ուրեմն

$$\cos z = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^n}{n!} :$$

5. Որոշել $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}+2\cos z-3$ ֆունկցիայի $z=0$ զրոյի կարգը:

<u>**Լուծում**</u>: $f(z)$ ֆունկցիան վերլուծենք Թեյլորի շարքի z -ի աստիճաններով.

$$f(z)=1+z^2+z^4+....+z^{2n}+...+2\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+...\right)-3=$$

$$=\frac{13}{12}z^4+\frac{359}{360}z^6+...+\frac{(2n)!+(-1)^n 2}{(2n)!}z^{2n}+...=z^4g(z)$$

որտեղ

$$g(z)=\frac{13}{12}+\frac{359}{360}z^2+...+\frac{(2n)!+(-1)^n 2}{(2n)!}z^{2n-4}+...(|z|<1)$$

ֆունկցիան անալիտիկ է $z=0$ կետում և $g(0)=\dfrac{13}{12}$:

Հետևաբար $z=0$ կետը չորրորդ կարգի զրո է:

6. Գոյություն ունի արդյոք $z=0$ կետում անալիտիկ ֆունկցիա, որի համար

ա) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=f\left(-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^2}$,

բ) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=f\left(-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^3}$:

<u>**Լուծում**</u>: ա) Ակնհայտ է, որ $f(z)=z^2$ ֆունկցիան բավարարում է նշված պայմաններին:

բ) Դիտարկենք $g(z)=f(z)-z^3$ ֆունկցիան: Պարզ է, որ $g\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$ քանի որ $\dfrac{1}{n}\to 0$ և 0 կետը $g(z)$-ի անալիտիկության տիրույթում է, ուրեմն $g(z)\equiv 0$, ուստի $f(z)=z^3$: Այսինքն

$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$ պայմանից հետևում է, որ $f(z)=z^3$, որը սակայն հակասում է $f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$ պայմանին: Հետևաբար այդպիսի անալիտիկ ֆունկցիա գոյություն չունի:

Վարժություններ

98. Գտնել շարքերի գումարները, երբ $|z|<1$

ա) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$,

բ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$,

գ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$,

դ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n}$,

ե) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdot z^n}{6}$,

զ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 z^{2n}$,

է) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(2n)!}$,

ը) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}$,

թ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{(2n+1)!}$,

ժ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$:

99. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների վերլուծությունը Թեյլորի շարքի $z=0$ կետի շրջակայքում և գտնել զուգամիտության շառավիղը.

ա) $\frac{1}{az+b}(a\neq 0, b\neq 0,)$,

բ) $\frac{1}{(z+1)^2}$,

գ) $\dfrac{z}{z^2+i}$,

դ) $\dfrac{1}{\left(1-z^2\right)^2}$,

ե) $\dfrac{1}{\left(1+z^3\right)^2}$,

զ) $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$,

է) $\dfrac{z}{\left(z^2+1\right)\left(z^2-4\right)}$,

ը) $\dfrac{1}{1+z+z^2}$,

թ) $\dfrac{z^3}{\left(z^2+1\right)(z-1)}$,

ժ) $\dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$:

ի) $\dfrac{z}{z^2-4z+13}$

լ) $\dfrac{2z-1}{4z^2-2z+1}$

խ) $\sin^2 z$,

ծ) $\cos^2\dfrac{iz}{2}$,

կ) $sh^2\dfrac{z}{2}$,

հ) $\cos^3 z$,

ձ) $\sin^4 z+\cos^4 z$,

ղ) $\cos z\cdot chz$,

ճ) $(a+z)^{\alpha}$:

100. Նշված ֆունկցիաները վերլուծել աստիճանային շարքի տրված կետի շրջակայքում և գտնել զուգամիտության շառավիղը.

ա) $\dfrac{z}{z+2}, z_0=1$,

բ) $\dfrac{z}{z^2-2z+5}, z_0=1$,

գ) $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}, z_0=1$,

դ) $\sin\left(2z-z^2\right), z_0=1$,

ե) $chz, z_0=1$,

զ) $\dfrac{z}{(z+1)(2-z)}, z_0=1$,

է) $e^z, z_0=\dfrac{1}{2}$,

ը) $\dfrac{z^2-5}{z^2-4z+3}, z_0=2$,

թ) $\dfrac{1}{3z+1},\ z_0=-2$,

ժ) $\sin(2z+1),\ z_0=-1$։

101. Գտնել $z=0$ զրոյի կարգը.

ա) $\dfrac{z^6}{z-\sin z}$,

բ) $\dfrac{z^3}{1+z-e^z}$,

գ) $z^2\left(e^{z^2}-1\right)$,

դ) $e^{\sin z}-e^{tgz}$ ։

102. Գտնել ֆունկցիայի բոլոր զրոները և որոշել դրանց կարգը.

ա) z^2+1,

բ) $z\sin z$,

գ) $1+chz$,

դ) $(1-\cos z)^2$,

ե) $\sin z^3$,

զ) e^z+1,

է) $\left(z^2+1\right)^2 shz$,

ը) $\left(z^2+\pi^2\right)\left(1+e^{-z}\right)$։

103. Գոյություն ունի արդյոք $z=0$ կետում անալիտիկ ֆունկցիա, որը $z=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\ldots)$ կետերում ընդունում է հետևյալ արժեքները.

ա) 1) 0, 1, 0, 1, …, 0, 1, …

2) $0,\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{4},0,\dfrac{1}{6},\ldots,0,\dfrac{1}{2n},\ldots$

3) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6},\ldots,\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{2n},\ldots$

4) $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\ \ldots,\dfrac{n}{n+1},,\ldots$

բ) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2n+1}$, գ) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$,

դ) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cos\pi n$,

ե) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+\cos\pi n}$,

զ) $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$,

է) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < e^{-n}$,

ը) $2^{-n} < \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < 2^{1-n}$:

Գլուխ 7. Լորանի շարք: Եզակի կետերի դասակարգումը

Հիմնական գաղափարներ և փաստեր

$z-a$-ի ամբողջ աստիճաններով կազմված

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \tag{1}$$

շարքերը ընդունված է անվանել ընդհանրացված աստիճանային շարք:

<u>Սահմանում</u>: Կասենք, որ (1) շարքը զուգամետ է $r<|z-a|<R(0\le r<R\le+\infty)$ օղակում, եթե այդ օղակում միաժամանակ զուգամետ են $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ և $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ շարքերը: Այդ դեպքում զուգամիտության օղակում (1) շարքի գումարը կոչվում է նշված երկու շարքերի գումարների գումարը: Համաձայն Աբելի թեորեմի առաջին շարքը զուգամետ է $|z-a|<R$ շրջանում, իսկ երկրորդը՝ $|z-a|>r$ տիրույթում:

(1) շարքի գումարը նրա զուգամիտության օղակում անալիտիկ ֆունկցիա է: Ճիշտ է նաև հակադարձը:

<u>Թեորեմ</u>: Եթե $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $r<|z-a|<R$ օղակում, ապա այն կարելի է վերլուծել այդ օղակում զուգամետ

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

ընդհանրացված աստիճանային շարքի, ընդ որում

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}(r<\rho<R, n=0,\pm1,\pm2,...):$$

Թեորեմում հանդես եկող շարքը կոչվում է $r<|z-a|<R$ օղակում անալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիայի Լորանի շարք:

Եթե $r<|z-a|<R$ օղակում $f(z)$-ը վերլուծված է

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$$

Լորանի շարքի, ապա $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ շարքը կոչվում է վերլուծության գլխավոր մաս, իսկ $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ -ը՝ կանոնավոր մաս:

<u>Սահմանում</u>: a կետը անվանում են $f(z)$ ֆունկցիայի մեկուսացված եզակի կետ (կամ մեկուսացված եզակիություն), եթե $f(z)$-ը անալիտիկ է a կետի որևէ $0<|z-a|<\delta$ անկենտրոն շրջակայքում, իսկ a կետում մոնոգեն չէ:

$f(z)$ ֆունկցիան a մեկուսացված եզակի կետի $0<|z-a|<\delta$ շրջակայքում վերլուծվում է.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \quad (*)$$

Լորանի շարքի: Մեկուսացված եզակիությունը ըստ Լորանի վերլուծության դասակարգվում են այսպես:

<u>Սահմանում</u>: $a\neq\infty$ մեկուսացված եզակի կետը կոչվում է

1. վերացնելի եզակի կետ, եթե $c_{-n}=0, n\in N$,

2. բևեռ, եթե գոյություն ունի k բնական թիվ, այնպես, որ $c_{-n}=0$ $n>k$ համար և $c_{-k}\neq 0$: k -ն կոչվում է բևեռի կարգ: 1 կարգի բևեռը կոչվում է պարզ բևեռ:

3. էապես եզակի կետ, եթե (*) վերլուծությունը պարունակում է անվերջ թվով զրոյից տարբեր բացասական ինդեքսով գործակիցներ:

Հետևյալ պնդումները վերաբերվում են ֆունկցիայի վարքին եզակի կետի շրջակայքում:

<u>Թեորեմ 1</u>: Որպեսզի $f(z)$ ֆունկցիայի համար a կետը լինի վերացնելի եզակի կետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա վերջավոր սահման $\lim_{z\to a} f(z)$ կամ, որ $f(z)$-ը լինի սահմանափակ a-ի $0<|z-a|<\delta$ որևէ անկենտրոն շրջակայքում:

<u>**Թեորեմ 2**</u>: $f(z)$ ֆունկցիան a կետում կունենա բևեռ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\lim_{z\to a} f(z)=\infty:$$

<u>**Թեորեմ 2՝**</u>: a կետը $f(z)$ ֆունկցիայի համար կլինի k-րդ կարգի բևեռ այն և միայն այն դեպքում, եթե $\dfrac{1}{f(z)}$ ֆունկցիայի համար k-րդ կարգի զրո է:

<u>**Թեորեմ 3 Սոխոցկի-Վայերշտրաս**</u>: Եթե $f(z)$-ի համար a կետը էապես եզակի կետ է, ապա ցանկացած $A\in\overline{C}$ թվի համար գոյություն ունի a-ին զուգամիտող $\{z_n\}$ հաջորդականություն, որ

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=A:$$

<u>**Սահմանում**</u>: Կասենք, որ $f(z)$ ֆունկցիայի համար ∞-ը մեկուսացված եզակի կետ է, եթե որևէ $R>0$ թվի համար $f(z)$-ն անալիտիկ է $R<|z|<+\infty$ տիրույթում:

$f(z)$ ֆունկցիան $z=\infty$ կետում ունի վերացնելի եզակի կետ, բևեռ կամ էապես եզակի կետ, եթե այդպիսին է $\varphi(\zeta)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ ֆունկցիայի համար եզակիությունը $\zeta=0$ կետում:

φ-ի և f-ի կապից բխում է, որ $f(z)$ ֆունկցիան անվերջ հեռու կետի շուրջը վերլուծվում է

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

Լորանի շարքի: Ընդ որում վերլուծության գլխավոր մաս հանդիսանում է z -ի դրական աստիճաններով կազմված մասը և եզակի կետի դասակարգումը կատարվում է նրա միջոցով:

Օրինակներ

1. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$ ֆունկցիան վերլուծել Լորանի շարքի:

ա) $0<|z+1|<3$ օղակում,

բ) $1<|z|<2$ օղակում:

<u>**Լուծում**</u>. ա) ֆունկցիան ներկայացնենք

$$f(z)=1-\frac{1}{3(z+1)}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z-2}$$

տեսքով: Երբ $|z+1|<3$ ունենք

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z+1-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^n}:$$

Հետևաբար՝

$$f(z)=-\frac{1}{3(z+1)}+\frac{5}{9}-\frac{4}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^n}:$$

բ) Երբ $1<|z|<2$ ունենք

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n},$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}:$$

Հետևաբար՝

$$f(z)=1-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}-\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{-n}+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}:$$

2. $z=1$ կետի շրջակայքում $f(z)=\cos\frac{z}{z-1}$ ֆունկցիան վերլուծել Լորանի շարքի:

<u>**Լուծում**</u>. Ունենք

$$\cos\frac{z}{z-1}=\cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\cos 1\cos\frac{1}{z-1}-\sin 1\sin\frac{1}{z-1}:$$

Քանի որ

$$\cos\frac{1}{z-1}=1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\ldots$$

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\ldots,$$

ապա $f(z)$ ֆունկցիայի համար ստանում ենք

$$f(z)=\cos 1-\frac{\sin 1}{z-1}+\frac{\cos 1}{2!(z-1)^2}+\frac{\sin 1}{3!(z-1)^3}+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+(-1)^{n+1}\frac{\sin 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(1+\frac{\pi n}{2}\right)}{n!}(z-1)^{-n}\ (0<|z-1|<+\infty):$$

Վարժություններ

104. Հետևյալ ֆունկցիաները վերլուծել Լորանի շարքի կամ նշված օղակում, կամ նշված կետի շրջակայքում: Վերջին դեպքում որոշել զուգամիտության տիրույթը.

ա) $\frac{1}{z}, z=0$ և $z=\infty$ կետերի շրջակայքում, բ) $\dfrac{1}{(z-a)^k}$, a կետի շրջակայքում $(a \neq 0, k \in N)$,

գ) $\dfrac{1}{z(1-z)}$, $z=0, z=1, z=\infty$ կետերի շրջակայքում,

դ) $\dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$, $z=-1, z=2, z=\infty$ կետերի շրջակայքում և $1<|z|<2$ օղակում,

ե) $\dfrac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$, $1<|z|<2$ օղակում,

զ) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z-2)}$, $1<|z|<2$ օղակում,

է) $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$, $1<|z|<2$ օղակում,

ը) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$, $1<|z|<2$ օղակում,

թ) $\dfrac{1}{z(z-3)^2}$, $1<|z-1|<2$ օղակում,

ժ) $\dfrac{z+i}{z^2}$, $1<|z-i|<+\infty$ օղակում,

ի) $\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$, $\sqrt{2}<|z-1|<+\infty$ օղակում,

լ) $\dfrac{1}{(z^2-9)z^2}$, $1<|z-1|<2$ օղակում,

խ) $\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$, $0<|z+1|<3$ օղակում, ծ) $\dfrac{1}{\left(z^2-1\right)\left(z^2+4\right)}$, $2<|z|<+\infty$ օղակում,

կ) $\dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, $1<|z|<2$ և $2<|z|<+\infty$ օղակներում,

հ) $\dfrac{2}{z^2-1}$, $1<|z+2|<3$ օղակում,

ձ) $\dfrac{1}{z^2+2z-8}$, $2<|z+2|<4$ օղակում,

ղ) $\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$, $2<|z-1|<+\infty$ օղակում,

ճ) $\dfrac{\sin z}{z}$, $z=0$ կետի շրջակայքում,

մ) $\dfrac{\sin^2 z}{z}$, $z=0$ կետի շրջակայքում,

յ) $z^{-n}e^z$, $z=0$ կետի շրջակայքում $\left(n\in N\right)$,

ն) $z^n e^{\frac{1}{z}}$, $z=0$ կետի շրջակայքում $\left(n\in N\right)$,

շ) $\dfrac{1+\cos z}{z^4}$, $z=0$ կետի շրջակայքում,

ո) $\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$, $z=0$ կետի շրջակայքում,

չ) $\dfrac{\sin z}{z-2}$, $z=2$ կետի շրջակայքում,

պ) $ze^{\frac{1}{z+i}}$, $z=-i$ կետի շրջակայքում,

ջ) $e^{\frac{1}{1-z}}$, $z=1$ կետի շրջակայքում,, ռ) $\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z=2$ կետի շրջակայքում,

ս) $z^2\sin\pi\frac{1+z}{z}$, $z=0$ կետի շրջակայքում,

վ) $z^3\cos\frac{1}{z-2}$, $z=2$ կետի շրջակայքում:

106. Գտնել Լորանի շարքի գլխավոր մասը նշված z_0 կետի շրջակայքում.

ա) $\frac{z}{(z+2)^2}$, $z_0=-2$,

բ) $\frac{e^z+1}{e^z-1}$, $z_0=2\pi ki\,(k\in Z)$,

գ) $\frac{z-1}{\sin^2 z}$, $z_0=0$,

դ) $\frac{e^{iz}}{z^2+b^2}$, $z_0=ib\,(b>0)$,

ե) $\frac{(z^2+1)^2}{z^2+b^2}$, $z_0=\infty$,

զ) $ctg\pi z$, $z_0=k\,(k\in Z)$,

է) $\frac{1}{\sin\pi z}$, $z_0=k\,(k\in Z)$,

ը) $e^{\frac{1}{1-z}}$, $z_0=\infty$:

106. Գտնել ֆունկցիայի մեկուսացված եզակի կետերը և պարզել դրանց բնույթը.

ա) $\frac{z^2-1}{z-1}$,

բ) $\frac{1-\cos z}{z^2}$,

գ) $ctgz-\frac{1}{z}$,

դ) $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$,

ե) $ctgz-\frac{2}{z}$,

զ) $\frac{z+i}{z^2+1}$,

է) $\frac{z}{1-\cos z}$,

ը) $\frac{z^3}{(1-z)^3}$,

թ) $\dfrac{1}{e^z+1}$,

ժ) thz,

ի) $\dfrac{1}{\sin z - \sin a}$,

լ) $\dfrac{z-\pi}{\sin^2 z}$,

խ) $\sin\dfrac{\pi}{z^2}$,

ծ) $e^{\frac{z}{1-z}}$,

կ) $z\left(e^{\frac{1}{z}}-1\right)$,

հ) $\dfrac{1}{z^2-1}\cos\dfrac{\pi z}{z+1}$ ։

Գլուխ 8. Մնացք և մնացքների տեսության հիմնական թեորեմը

Հիմնական գաղափարներ և փաստեր

Դիցուք $a \neq \infty$-ը $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիայի մեկուսացված եզակի կետ է: Եթե $f(z)$-ը անալիտիկ է $0<|z-a|<R$ անկենտրոն շրջանում և $0<r<R$, ապա

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=r} f(z)dz$$

ինտեգրալը կոչվում է $f(z)$ ֆունկցիայի մնացք a կետում և նշանակվում է

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) \text{ կամ } \operatorname*{res}_{z=a} f(z):$$

Եթե c_{-1}–ը a կետում $f(z)$ ֆունկցիայի Լորանի վերլուծության մեջ $(z-a)^{-1}$–ի գործակիցն է, ապա Լորանի վերլուծության գործակիցների բանաձևերի համաձայն

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}:$$

Դիցուք $f(z)$-ը անալիտիկ է $R \leq |z| < +\infty$-ում, այդ դեպքում $f(z)$ ֆունկցիայի մնացք կոչվում է

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R} f(z)dz = -c_{-1}$$

մեծությունը: Այստեղ c_{-1}-ը ∞-ում Լորանի վերլուծության մեջ z^{-1}-ի գործակիցն է:

Եթե վերջավոր a կետը $f(z)$ ֆունկցիայի համար k-րդ $(k \geq 1)$ կարգի բևեռ է, ապա մնացքը կարելի է հաշվել

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^k\ f(z)\right]^{(k-1)}$$

բանաձևով:

Մասնավորաբար a պարզ բևեռի դեպքում

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\,f(z):$$

Եթե $f(z)$ ֆունկցիան a կետի շրջակայքում ներկայացված է $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ տեսքով, որտեղ φ և ψ ֆունկցիաները անալիտիկ են, ընդ որում $\psi(a)=0, \psi'(a)\neq 0$, ապա

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}:$$

Հետևյալ պնդումը կոչվում է մնացքների տեսության հիմնական թեորեմ: Ենթադրենք D-ն կտոր առ կտոր ողորկ ժորդանյան եզրով տիրույթ է:

<u>**Թեորեմ**</u>. Եթե $f(z)$-ը անընդհատ է $\bar{D}$-ում և անալիտիկ D-ում, բացի վերջավոր թվով $z_k \in D, k=1,2,...,n$ կետերից, որտեղ $f(z)$-ն ունի մեկուսացված եզակիություններ, ապա

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z):$$

Այս թեորեմից հետևում են հետևյալ պնդումները:

1. <u>**Թեորեմ**</u>. (լոգարիթմական մնացքի մասին): Եթե $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է կտոր առ կտոր ողորկ ժորդանյան եզրով D տիրույթի փակման վրա, բացի $b_1, b_2, .., b_n \in D$ կետերից, որտեղ ունի համապատասխանաբար $\beta_1, \beta_2, .., \beta_n$ կարգի բևեռներ, իսկ $a_1, a_2, .., a_m \in D$ կետերում ունի համապատասխանաբար $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$ կարգի զրոներ, ապա

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k-\sum_{k=1}^{n}\beta_k=N-P\ :$$

Այստեղ $N=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k, P=\sum_{k=1}^{n}\beta_k$ մեծությունները համապատասխանաբար նշում են ֆունկցիայի զրոների, բևեռների քանակը D տիրույթում, երբ ամեն մի զրո և բևեռ հաշվվում է այնքան անգամ, որքան նրա պատիկությունն է:

Թեորեմում եղած հավասարության ձախ մասը կոչվում է $f(z)$ ֆունկցիայի լոգարիթմական մնացք D տիրույթում:

Լոգարիթմական մնացքն ունի հետաքրքիր երկրաչափական մեկնաբանություն՝ այն ցույց է տալիս, թե քանի պտույտ է կատարում $w=f(z)$ վեկտորի ծայրակետը $w=0$ կետի շուրջը, երբ z կետը շրջանցում է D տիրույթի ∂D եզրը դրական ուղղությամբ:

Այսինքն

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}Argf(z)=N-P\ ,$$

այստեղ $\Delta_{\partial D}Argf(z)$-ը $f(z)$ ֆունկցիայի արգումենտի աճն է, երբ z կետը շրջանցում է ∂D-ն դրական ուղղությամբ: Վերջին հավասարությունը կոչվում է արգումենտի սկզբունք:

Արգումենտի սկզբունքի հետևանք է հետևյալ պնդումը:

<u>Թեորեմ</u>. (Ռուշե): Եթե φ և ψ ֆունկցիաները անալիտիկ է կտոր առ կտոր ողորկ ժորդանյան եզրով D տիրույթի փակման վրա և $|\psi(z)|<|\varphi(z)|$, երբ $z\in\partial D$, ապա $\varphi(z)$ և $\psi(z)+\varphi(z)$ ֆունկցիաները D-ում ունեն հավասար քանակով զրոներ, հաշված պատիկություններով:

Ձևակերպենք նաև հանրահաշվի հիմնական թեորեմը:

<u>Թեորեմ</u>. Ամեն մի n աստիճանի $(n\in N)$ բազմանդամ՝ $P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_0\ (a_n\neq 0)$ C-ում ունի ճիշտ n զրո, եթե յուրաքանչյուր զրո հաշվվում է իր պատիկությամբ:

Օրինակներ

<u>Օրինակ 1</u>. Գտնել $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(9+z^2)}$ ֆունկցիայի մնացքները բոլոր եզակի կետերի և անվերջ հեռու կետի նկատմամբ:

<u>Լուծում</u>. Հայտարարի զրոները $f(z)$ ֆունկցիայի բևեռներն են, $z=0$ երկրորդ կարգի բևեռ, $z=3i$ և $z=-3i$ պարզ բևեռներ են: Ուստի

$$\underset{z=0}{res}\, f(z)=\left[z^2 f(z)\right]'_{z=0}=\left(\frac{e^z}{9+z^2}\right)'_{z=0}=\left.\frac{e^z(9+z^2)-2ze^z}{(9+z^2)^2}\right|_{z=0}=\frac{9}{81}=\frac{1}{9},$$

$$\underset{z=3i}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\left(\frac{e^z}{4z^3+18z}\right)_{z=3i}=\frac{e^{3i}}{-108i+54i}=\frac{e^{3i}}{-54i}=\frac{\cos 3+i\sin 3}{-54i}=\frac{\sin 3-i\cos 3}{54},$$

$$\underset{z=-3i}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\left(\frac{e^z}{4z^3+18z}\right)_{z=-3i}=\frac{e^{-3i}}{108i-54i}=\frac{e^{-3i}}{54i}=\frac{\cos 3-i\sin 3}{54i}=-\frac{\sin 3+i\cos 3}{54}:$$

Գտնենք $f(z)$ ֆունկցիայի Լորանի վերլուծության մեջ $\dfrac{1}{z}$-ի գործակիցը: Եթե $|z|>3$ ունենք

$$\frac{1}{z^2(9+z^2)}=\frac{1}{z^4\left(1+\dfrac{9}{z^2}\right)}=\frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 9^n}{z^{2n}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 9^n}{z^{2n+4}}$$

և

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}:$$

$f(z)$-ի վերլուծության մեջ $\dfrac{1}{z}$–ի գործակիցը

$$\frac{1}{3!}-\frac{3^2}{5!}+\frac{3^4}{7!}-\frac{3^6}{9!}+\ldots=\frac{1}{27}\left(\frac{3^3}{3!}-\frac{3^5}{5!}+\frac{3^7}{7!}-\frac{3^9}{9!}+\ldots\right)=\frac{1}{27}(-\sin 3+3):$$

Հետևաբար՝

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = \frac{1}{27}(\sin 3 - 3):$$

<u>**Օրինակ 2**</u>. Հաշվել ինտեգրալները:

ա) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{1+z^6}:$

<u>**Լուծում**</u>. $1+z^6=0$ հավասարման արմատները $\dfrac{1}{1+z^6}$ ֆունկ-ցիայի բևեռներն են, դրանք են՝

$$z_k = \sqrt[6]{-1} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{6}}, k = 0,1,2,3,4,5:$$

$|z-1|<1$ շրջանում գտնվում են $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ և $z_5 = z_{-1} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ կետերը: Հաշվենք մնացքներն այդ կետերում

$$\underset{z=z_0}{res}\frac{1}{1+z^6} = \frac{1}{6z_0^5} = \frac{1}{6e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{1}{6}e^{-i\frac{5\pi}{6}},$$

$$\underset{z=z_5}{res}\frac{1}{1+z^6} = \frac{1}{6z_5^5} = \frac{1}{6e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{1}{6}e^{i\frac{5\pi}{6}}:$$

Համաձայն մնացքների տեսության հիմնական թեորեմի՝

$$\int\limits_{|z-1|=1}\frac{dz}{1+z^6} = 2\pi i\left(\frac{1}{6}e^{-i\frac{5\pi}{6}} + \frac{1}{6}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) = \frac{2\pi i}{3}\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi i}{\sqrt{3}}:$$

բ) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}:$

<u>**Լուծում**</u>. $|z|>2$ տիրույթում $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)(z^5-1)}$ ֆունկցիան ունի բևեռ $z=3$ կետում: Ուստի

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}=-2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=3}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)\right):$$

$$\operatorname*{res}_{z=3}f(z)=\lim_{z\to3}(z-3)f(z)=\lim_{z\to3}\frac{1}{z^5-1}=\frac{1}{3^5-1}=\frac{1}{242}$$

$z=\infty$ -ը $f(z)$ -ի համար զրո է, ուստի

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=-\lim_{z\to\infty}\frac{z}{(z-3)(z^5-1)}=0:$$

Հետևաբար՝

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}=-\frac{2\pi i}{242}=-\frac{\pi i}{121}:$$

գ) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{z+1}dz$:

<u>Լուծում</u>. $f(z)=\dfrac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{z+1}$ ֆունկցիան $|z|>2$ տիրույթում անալիտիկ է, ուստի

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{z+1}dz=-2\pi i\operatorname*{res}_{z=\infty}f(z)=2\pi ic_{-1}:$$

որտեղ c_{-1} -ը $z=\infty$ -ի շրջակայքում $f(z)$ -ի Լորանի շարքի մեջ $\dfrac{1}{z}$ -ի գործակիցն է:

Ունենք

$$\frac{z^3}{z+1}=\frac{z^2}{1+\frac{1}{z}}=z^2\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\dots\right)=z^2-z+1-\frac{1}{z}+\dots(|z|>1),$$

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots(|z|>0),$$

$$\frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1} = \left(z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \ldots \right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots \right) =$$

$$= z^2 + 1 - \frac{1}{3z} + \ldots \left(|z| > 1 \right):$$

Այսինքն $c_{-1} = -\frac{1}{3}$: Հետևաբար՝

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1} dz = -\frac{2\pi i}{3}:$$

<u>**Օրինակ 3**</u>. Գտնել $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ հավասարման արմատների քանակը $|z| < 1$ շրջանում:

<u>**Լուծում**</u>. Նշանակենք $\varphi(z) = -4z^5$, $\psi(z) = z^8 + z^2 - 1$: Եթե $|z| = 1$, ապա $|\varphi(z)| = |-4z^5| = 4$, $|\psi(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \le |z^8| + |z^2| + 1 = 3$, այսինքն $|z| = 1$ շրջանագծի վրա տեղի ունի $|\psi(z)| < |\varphi(z)|$ անհավասարությունը: Ըստ Ռուշեի թեորեմի $\psi(z) + \varphi(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ հավասարման արմատների քանակը $|z| < 1$ շրջանում համընկնում է $\varphi(z) = -4z^5 = 0$ հավասարման արմատների թվին, իսկ վերջինը $|z| < 1$ շրջանում ունի միայն հնգապատիկ արմատ կետում: Այսպիսով $|z| < 1$ շրջանում տրված հավասարումն ունի 5 հատ արմատ:

Վարժություններ

107. Հաշվել.

ա) $\underset{z=i}{res} \frac{e^z}{(z-i)^2}$, բ) $\underset{z=0}{res} \frac{z^{n-1}}{\sin^n z} (n \in N)$, գ) $\operatorname*{res}_{z=0}\frac{\sin z - z}{(1-\cos z)^2}$,

դ) $\operatorname*{res}_{z=0}\frac{e^z - z - 1}{(1-\cos 2z)\sin z}$,

ե) $\operatorname*{res}_{z=1} ze^{\frac{1}{z-1}}$,

զ) $\operatorname*{res}_{z=0}\frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}(n\in N)$,

է) $\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{\sin z}{z^2}$,

ը) $\operatorname*{res}_{z=\infty} z^2\sin\frac{\pi}{z}$,

թ) $\operatorname*{res}_{z=\infty} z^n e^{\frac{a}{z}}(n\in N)$,

ժ) $\operatorname*{res}_{z=\pi n} ctg^2 z(n\in N)$:

108. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների մնացքները բոլոր վերջավոր եզակի կետերում.

ա) $\frac{z^2}{1+z^4}$,

բ) $\frac{z^2}{(1+z)^3}$,

գ) $\frac{1}{(1+z^2)^3}$,

դ) $\frac{1}{(z^2-1)(i+z)^2}$,

ե) $\frac{1}{\sin\pi z}$,

զ) $\frac{\cos z}{(z-1)^2}$,

է) $\frac{1}{e^z+1}$,

ը) $\frac{1}{\sin z^2}$,

թ) $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}(n\in N)$,

ժ) $\frac{e^z-1}{z^2(z+5)}$,

ի) $z^3e^{\frac{1}{z}}$,

լ) $\frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1+z^4}$,

խ) $\frac{e^z}{1-4\sin^2 z}$,

ծ) $\frac{1-\cos z}{z^3(z-2)}$,

կ) $e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$,

հ) $\frac{1}{z(1-e^{-z})}$,

ձ) $\sin z\cos\frac{1}{z}$,

ղ) $e^{\frac{z}{z-1}}$,

ճ) $\frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$,

մ) $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z}$,

յ) $e^z\sin\frac{1}{z}$:

109. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների մնացքները անվերջում.

ա) $\frac{z^4+1}{z^6-1}$,

բ) $\cos\frac{\pi(z+2)}{2z}$,

գ) $z\sin^2\frac{\pi}{z}$,

դ) $\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$,

ե) $\frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$,

զ) $\frac{z^{10}+1}{z^6(z^2+4)}$,

է) $\sin z\sin\frac{1}{z}$,

ը) $\frac{1+z^{2n}}{z^n(z-a)}, a\neq 0, n\in N$,

թ) $\frac{\cos z}{(1+z^2)^2}$,

ժ) $z^2\cos\frac{\pi}{z}$,

ի) $\frac{\sin z}{(1+z^2)^2}$:

110. Հաշվել ինտեգրալները.

ա) $\int\limits_{|z|=1} z^2 tg\pi z dz$,

բ) $\int\limits_{|z|=\pi} tgnzdz\,(n\in N)$,

գ) $\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin zdz}{(z+1)^2(z-i)}$,

դ) $\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^4+1}, \gamma: x^2+y^2=2x$, ե) $\int\limits_{\gamma} \frac{z^2 dz}{(z-1)^2 (z+2)},\ \gamma : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$,

զ) $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3 (z+1)}$

է) $\int\limits_{|z-i|=3} \frac{\left(e^{z^2}-1\right) dz}{z^3 - iz^2}$,

ը) $\int\limits_{|z|=r} \sin\frac{1}{z}\, dz$,

թ) $\int\limits_{|z|=r} z^2 \sin\frac{1}{z}\, dz$,

ժ) $\int\limits_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z dz}{z^2 - z}$,

ի) $\int\limits_{|z+1|=4} \frac{z dz}{e^z + 2}$,

լ) $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{\sin^3 z \cos z}$,

խ) $\int\limits_{|z+1|=4} \frac{e^z dz}{z^4 + 2z^2 + 1}$,

ծ) $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}\, dz$,

կ) $\int\limits_{\gamma} \frac{\sin \pi z dz}{\left(z^2-1\right)^2},\gamma : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

հ) $\int\limits_{\gamma} \frac{z \sin z dz}{(z-1)^5},\gamma : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$,

ձ) $\int\limits_{|z|=1} z^3 \sin\frac{1}{z}\, dz$,

ղ) $\int\limits_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1) e^{\frac{1}{z}} dz$,

ճ) $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{1+2z^4}$,

մ) $\int\limits_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2 \left(z^2+1\right)}$,

յ) $\int\limits_{\gamma} \frac{\sin z dz}{(z+1)^3},\gamma : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$,

ն) $\int\limits_{|z|=4} \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{3z}} dz$,

շ) $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^3 \left(z^{10}-2\right)}$,

ո) $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^4 - 1}$,

չ) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{z^2 dz}{\left(z^2+1\right)^2}$,

պ) $\int\limits_{|z|=3} \sin\frac{z}{z+1}\, dz$,

ջ) $\int\limits_{|z|=2} z \sin\frac{z+1}{z-1}\, dz$, ռ) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \sin\frac{1}{z-1}\,dz$,

ս) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} z\cos\frac{z}{z+1}\,dz$,

վ) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z dz}{\left(z^3-z\right)\left(z-i\right)}$,

տ) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{zdz}{e^{z^2}-1}$,

ր) $\displaystyle\int\limits_{|z-1-i|=1} \frac{ch\pi z dz}{i-2z^2}$,

ց) $\displaystyle\int\limits_{|z|=r} \sin^2\frac{1}{z}\,dz$,

ու) $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{zdz}{\sin z\left(1-\cos z\right)}$,

փ) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^{14}}$,

ք) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} z^3\cos\frac{1}{z-1}\,dz$,

և) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z^{10}dz}{1+z^{11}}$ ։

111. Օգտվելով Ռուշեի թեորեմից գտնել տրված հավասարումների արմատների թիվը նշված տիրույթներում.

ա) $z^7-4z^5-z^2+1=0, |z|<1$,

բ) $z^4-3z^3-1=0, |z|<2$,

գ) $z^3+z+1=0, |z|<\frac{1}{2}$,

դ) $z^5+z^2+1=0, |z|<2$,

ե) $28z^{11}-17z+10=0, |z|<1$,

զ) $z^8-6z^6-z^3+2=0, |z|<1$,

է) $4z^4-29z^2+25=0, 2<|z|<3$,

ը) $z^7-5z^4+z^2-2=0, 1<|z|<2$,

թ) $z^4-3z+1=0, |z|<1$,

ժ) $2z^4-5z+2=0, |z|<1$,

ի) $z^8 - 4z^5 + 127 = 0, |z| < 2$,

լ) $z^4 - 9z + 1 = 0, |z| < 2$,

խ) $z^6 - 6z + 10 = 0, |z| > 1$,

ծ) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0, |z| < 1$,

կ) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0, |z| < 1$,

հ) $z^4 - 5z + 1 = 0, 1 < |z| < 2$,

ձ) $z^4 - 8z + 10 = 0,\ 1 < |z < 3|$,

ղ) $z^2 - ae^z = 0, \left(0 < a < \frac{1}{e}\right), |z| < 1$,

ճ) $e^z = az^n, \left(n \in N, |a| > e\right), |z| < 1$,

մ) $e^{z-\lambda} = z, \left(\lambda > 1\right), |z| < 1$:

Գլուխ 9. Ինտեգրալների հաշվումը մնացքների օգնությամբ

Հիմնական գաղափարներ և փաստեր

1. $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi) d\varphi$ տեսքի ինտեգրալներ:

<u>**Թեորեմ 1**</u>. Եթե $R(u,v)$-ն u և v իրական փոփոխականների ռացիոնալ ֆունկցիա է, ընդ որում $R(\cos\varphi, \sin\varphi)$-ն անընդհատ է $[0, 2\pi]$ հատվածում, ապա

$$I = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \tilde{R}(z)$$

որտեղ

$$\tilde{R}(z)=\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

իսկ $z_1,z_2,...,z_n$ կետերը $\tilde{R}(z)$ ֆունկցիայի այն բևեռներն են, որոնք ընկած են $|z|<1$ շրջանում:

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ տեսքի ինտեգրալներ:

<u>Թեորեմ 2</u>. Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $\operatorname{Im} z\ge 0$ կիսահարթության մեջ, բացի վերջավոր թվով $z_1,z_2,...,z_n\left(\operatorname{Im} z_k>0, k=\overline{1,n}\right)$ մեկուսացված եզակի կետերից, անընդհատ է $\operatorname{Im} z\ge 0$ փակ կիսահարթության մեջ և $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$, ապա

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

(ինտեգրալը հասկացվում է գլխավոր իմաստով):

<u>Թեորեմ 2*</u>. Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $\operatorname{Im} z\le 0$ կիսահարթության մեջ, բացի վերջավոր թվով $z_1,z_2,...,z_n\left(\operatorname{Im} z_k<0, k=\overline{1,n}\right)$ մեկուսացված եզակի կետերից, անընդհատ է $\operatorname{Im} z\le 0$ փակ կիսահարթության մեջ և $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$, ապա

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=-2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

(ինտեգրալը հասկացվում է գլխավոր իմաստով):

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx$ տեսքի ինտեգրալներ:

Ժորդանի լեմման: Դիցուք $\lambda > 0$ և տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝

1) $g(z)$ ֆունկցիան անընդհատ է $\Omega = \left\{ z : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0 \right\}$ տիրույթում,

2) $g(z) \underset{z\to\infty}{\to} 0$, երբ $z \to \infty$:

Այդ ժամանակ

$$\lim_{z\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} g(z) e^{i\lambda z} = 0$$

որտեղ γ_R^+-ը $|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0$ կիսաշրջանագիծն է:

Այս լեմմայից բխում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3. Դիցուք

1) $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $\operatorname{Im} z \geq 0$ կիսահարթության մեջ, բացի վերջավոր թվով $z_1, z_2, ..., z_n \left(\operatorname{Im} z_k > 0, k = \overline{1,n} \right)$ մեկուսացված եզակի կետերից:

2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$:

Այդ ժամանակ ցանկացած $\lambda > 0$ համար տեղի ունի

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \left[f(z) e^{i\lambda z} \right]:$$

Թեորեմ 3*. Դիցուք

1) $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $Imz \leq 0$ կիսահարթության մեջ, բացի վերջավոր թվով $z_1, z_2, ..., z_n \left(\operatorname{Im} z_k < 0, k = \overline{1,n} \right)$ մեկուսացված եզակի կետերից:

2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$:

Այդ ժամանակ ցանկացած $\lambda < 0$ համար տեղի ունի

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \left[f(z) e^{i\lambda z} \right]:$$

Հետևանք 1. Դիցուք

1) $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $\operatorname{Im} z \ge 0$ կիսահարթության մեջ, բացի վերջավոր թվով $z_1, z_2, \dots, z_n \left(\operatorname{Im} z_k > 0, k = \overline{1,n} \right)$ մեկուսացված եզակի կետերից,

2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$:

Եթե $f(x)$-ը $(x \in R)$ զույգ ֆունկցիա է, ապա

$$\int\limits_0^\infty f(x)\cos\lambda x dx = \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z) e^{i\lambda z} \right] (\lambda > 0):$$

Եթե $f(x)$-ը $(x \in R)$ կենտ ֆունկցիա է, ապա

$$\int\limits_0^\infty f(x)\sin\lambda x dx = \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z) e^{i\lambda z} \right] (\lambda > 0):$$

Հետևանք 2. Դիցուք

1) $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $\operatorname{Im} z \ge 0$ կիսահարթության մեջ, բացի վերջավոր թվով $z_1, z_2, \dots, z_n \left(\operatorname{Im} z_k > 0, k = \overline{1,n} \right)$ մեկուսացված եզակի կետերից,

2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$,

3) $f(x)$-ը իրական է, երբ $x \in (-\infty, \infty)$, ապա

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\cos\lambda x dx = -2\pi i \cdot \operatorname{Im}\left[\sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(e^{i\lambda z} f(z) \right) \right]:$$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\sin\lambda x dx = 2\pi \operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(e^{i\lambda z} f(z) \right) \right],$$

$$(\lambda > 0):$$

4. $\int\limits_0^{+} x^{\alpha-1} R(x) dx$ տեսքի ինտեգրալներ:

Թեորեմ 4. Դիցուք $\alpha \in (0,1)$, $R(z)$-ը ռացիոնալ $z_1, z_2, ..., z_n$ բևեռներով ֆունկցիա է, ընդ որում բևեռներից ոչ մեկը ընկած չի իրական դրական կիսաառանցքի վրա, $R(z)$-ը զրոյում կարող է ունենալ միայն պարզ բևեռ և $z=\infty$ կետի շրջակայքում տեղի ունի $|R(z)| \le \frac{M}{|z|}$ գնահատականը:

Այդ ժամանակ

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} R(x) dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \left[z^{\alpha-1} R(z) \right]:$$

Թեորեմ 5. Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է կոմպլեքս հարթությունում, բացի վերջավոր թվով $z_1, z_2, ..., z_n$ մեկուսացված եզակի կետերից և $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)\ln z = 0$: Այդ դեպքում, եթե $f(z)$-ը չունի եզակիություններ $[0,+\infty)$-ում, ապա

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \left[f(z) \ln^* z \right]$$

իսկ $\ln^* z = \ln|z| + i \arg^* z, \ \arg^* z \in [0, 2\pi)$:

Ընդհանրապես

$$I_m = \int_0^{+\infty} f(x) (\ln x)^m dx$$

ինտեգրալը կարելի է արտահայտել $I_0, I_1, ..., I_{m-1}$ ինտեգրալների միջոցով:

Թեորեմ 5*. Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է կոմպլեքս հարթությունում, բացի վերջավոր թվով $z_1, z_2, ..., z_n$ մեկուսացված եզակի կետերից և $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)(\ln z)^{m+1} = 0$: Այդ դեպքում, եթե $f(z)$-ը չունի եզակիություններ $[0,+\infty)$-ում, ապա

$$(m+1)I_m = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)(\ln^* z)^{m+1}\right] - \sum_{k=0}^{m-1} C_{m+1}^{k}(2\pi i)^{m-k} I_k$$

իսկ $\ln^* z = \ln|z| + i\arg^* z,\ \arg^* z \in [0, 2\pi)$:

<u>Թեորեմ 6</u>. Դիցուք $R(z)$-ը ռացիոնալ ֆունկցիա է առնվազն երկրորդ կարգի զրոյով անվերջում, $z_1, z_2, ..., z_n$ բևեռներնով, որոնք չեն պատկանում $[0, +\infty)$ կիսառանցքին, և ընդունում է իրական արժեքներ իրական առանցքի վրա: Այդ դեպքում՝

$$\int_0^{+\infty} R(x)\ln x dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k}\left[R(z)(\ln^* z)^2\right],$$

$$\int_0^{+\infty} R(x) dx = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k}\left[R(z)(\ln^* z)^2\right],$$

իսկ $\ln^* z = \ln|z| + i\arg^* z,\ \arg^* z \in [0, 2\pi)$:

<u>Թեորեմ 7</u>. Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $\operatorname{Im} z \geq 0$ կիսահարթության մեջ, բացի վերջավոր թվով $z_1, z_2, ..., z_n \left(\operatorname{Im} z_k > 0, k = \overline{1, n}\right)$ մեկուսացված եզակի կետերից և իրական առանցքի վերջավոր թվով $b_1, b_2, ..., b_m \left(\operatorname{Im} b_k > 0, k = \overline{1, m}\right)$ պարզ բևեռներից: Եթե $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, ապա

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \pi i\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=b_k} f(z)$$

(գլխավոր արժեքի իմաստով):

<u>Օրինակ 1</u>. Հաշվել՝ $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{2 - \cos\varphi}$ ինտեգրալը:

<u>Լուծում</u>. Ընդունելով $z = e^{i\varphi}$ կստանանք

$$\tilde{R}(z)=\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)=\frac{1}{z}\cdot\frac{\left[\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^2}{2-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^4-2z^2+1}{z^2\left(z^2-4z+1\right)}:$$

$\tilde{R}(z)$ ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի բևեռ $z=0$ կետում և պարզ $z=2-\sqrt{3}$ և $z=2+\sqrt{3}$ կետերում, որոնցից $|z|<1$ շրջանում գտնվում են $z=0$ և $z=2-\sqrt{3}$ կետերը: Հաշվենք մնացքները այդ կետերում

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\tilde{R}(z)=2,\ \operatorname*{Res}_{z=2-\sqrt{3}}\tilde{R}(z)=-\sqrt{3}:$$

Հետևաբար՝

$$I_1=2\pi\left(2-\sqrt{3}\right):$$

<u>Օրինակ 2</u>. Հաշվել՝ $I_2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-4ix-5\right)}$ ինտեգրալը:

<u>Լուծում</u>. $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z^2-4iz-5\right)}$ ֆունկցիան վերին կիսահարթության մեջ ունի երեք բևեռ՝ $i,-1+2i,1+2i$, իսկ ստորին կիսահարթության մեջ մեկ բևեռ՝ $-i$: Ուստի նպատակահարմար է օգտվել թեորեմ 2^*-ից: Հաշվելով մնացքը $z=-i$ կետում, ստանում ենք

$$I_2=-2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=-i}f(z)=-\frac{\pi}{10}:$$

<u>Օրինակ 3</u>. Հաշվել $I_3=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos xdx}{x^2-2x+10}$ ինտեգրալը:

<u>Լուծում</u>. $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+10}$ ֆունկցիան իրական է իրական առանցքի վրա և վերին կիսահարթության մեջ ունի մեկ պարզ բևեռ՝ $z=1+3i$, բացի դրանից պարզ է, որ $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$: Ուրեմն, ըստ 2-րդ հետևանքի

$$I_3 = -2\pi \operatorname{Im} \operatorname*{Res}_{z=1+3i} \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10} = -2\pi \operatorname{Im} \frac{(3-i)e^{i-3}}{6} = \frac{\pi}{3} e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1):$$

<u>**Օրինակ 4**</u>. Հաշվել $I_4 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{\left(x^2+2ix-2\right)^2}$ ինտեգրալը:

<u>**Լուծում**</u>.

$$I_4 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{\left(x^2+2ix-2\right)^2} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}dx}{\left(x^2+2ix-2\right)^2} = \frac{1}{2}\left(I_4' + I_4''\right):$$

$f(z) = \frac{1}{\left(z^2+2iz-2\right)^2}$ ֆունկցիան ունի երկու երկրորդ կարգի բևեռներ $z_1 = 1-i$ և $z_2 = -1-i$ կետերում: Այդ կետերը ստորին կիսահարթության մեջ են, հետևաբար $I_4' = 0$ և

$$I_4'' = -2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=1-i} \frac{e^{-iz}}{\left(z^2+2iz-2\right)^2} + \operatorname*{Res}_{z=-1-i} \frac{e^{-iz}}{\left(z^2+2iz-2\right)^2}\right] = \frac{\pi}{e}(\sin 1 - \cos 1):$$

Ուրեմն՝

$$I_4 = \frac{\pi}{2e}(\sin 1 - \cos 1):$$

<u>**Օրինակ 5**</u>. Հաշվել $I_5 = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$ ինտեգրալը:

<u>**Լուծում**</u>. $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$ ֆունկցիան հարթության մեջ ունի 3 պարզ բևեռ՝ $-1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, որոնք չեն պատկանում $[0,+\infty)$ և $\lim\limits_{z\to\infty} = \frac{z\ln z}{1+z^3} = 0$: Ուստի օգտվելով թեորեմ 7-ից, ստանում ենք

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}dx=-\left(\underset{z=-1}{res}\frac{\ln^* z}{z^3+1}+\underset{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{res}\frac{\ln^* z}{z^3+1}+\underset{z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{res}\frac{\ln^* z}{z^3+1}\right)=$$

$$=-\left(\frac{\ln^*(-1)}{3(-1)^2}+\frac{\ln^*\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{\ln^*\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)=$$

$$=-\left(\frac{i\pi}{3}-\frac{i\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3}-\frac{i\frac{5\pi}{3}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3}\right)=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}:$$

<u>**Օրինակ 6**</u>. Հաշվել $I_5=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$ ինտեգրալը:

<u>**Լուծում**</u>. Ունենք $R(z)=\frac{1}{(1+z)^2(1+z^2)}$, որի համար $z=-1=e^{i\pi}$ կետը երկրորդ կարգի բևեռ է, $z=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ և $z=-i=e^{i\frac{3\pi}{2}}$ կետերը պարզ բևեռներ են, ընդ որում

$$\underset{z=-1}{Res}\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^2(1+z^2)}=\left(\frac{z^{\alpha-1}}{1+z^2}\right)'_{z=-1}=$$

$$=\left.\frac{(\alpha-1)z^{\alpha-2}(1+z^2)-2z^{\alpha}}{(1+z^2)^2}\right|_{z=-1}=\frac{\alpha-2}{2}e^{i\pi\alpha}$$

$$\underset{z=i}{\mathrm{Res}}\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^2(1+z^2)}=\frac{i}{4}e^{i\frac{\pi\alpha}{2}},\underset{z=-i}{\mathrm{Res}}\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^2(1+z^2)}=-\frac{i}{4}e^{i\frac{3\pi\alpha}{2}}:$$

Հետևաբար՝

$$I_5=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\left(\frac{\alpha-2}{2}e^{i\pi\alpha}+\frac{i}{4}e^{i\frac{\pi\alpha}{2}}-\frac{i}{4}e^{i\frac{3\pi\alpha}{2}}\right)=\frac{\pi}{2\sin\pi\alpha}\left(2-\alpha-\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right):$$

<u>Օրինակ 7</u>. Հաշվել՝ $I_6=v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$ ինտեգրալը գլխավոր արժեքի իմաստով:

<u>Լուծում</u>. $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z^2+1)}$ ֆունկցիան վերին կիսահարթության մեջ ունի մեկ պարզ բևեռ՝ i, և իրական առանցքի վրա մեկ պարզ բևեռ՝ 1: Ուստի օգտվելով թեորեմ 2 գ)-ից, ստանում ենք

$$I_6=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=i}f(z)+\pi i\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=2\pi i\frac{1}{(i-1)2i}+\pi i\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{2}:$$

Վարժություններ

112. Հաշվել ինտեգրալները.

ա) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi},a>b>0$,

բ) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{13+12\cos\varphi}$,

գ) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2},0<p<1$,

դ) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\cos^2 3\varphi d\varphi}{1-2p\cos2\varphi+p^2},0<p<1$,

ե) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\cos\varphi d\varphi}{1-2p\sin\varphi+p^2},0<p<1$,

զ) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{a+b\cos\varphi},a>b>0$,

է) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2},a>b>0$,

ը) $\int\limits_{0}^{\pi}tg(\varphi+ia)d\varphi,\ \operatorname{Im}a=0$,

թ) $\int\limits_{0}^{2\pi}ctg(\varphi+a)d\varphi,\ \operatorname{Im}a\neq0$,

ժ) $\int\limits_{0}^{\pi}e^{2i\varphi}\cdot ctg(\varphi-ia)d\varphi,a>0$, ի) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^4 \varphi d\varphi}{1+\sin^2 \varphi}$,

ծ) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1+\varepsilon \cdot \cos\varphi)^2}, 0<\varepsilon<1$:

լ) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 2\varphi d\varphi}{1-2p\cos 2\varphi + p^2}, -1<p<1$,

խ) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi d\varphi}{a-\cos\varphi}, n>1, a>1,$

113. Հաշվել ինտեգրալները.

ա) $\int\limits_0^{\infty} \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$,

թ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-5ix+6}$,

բ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, a>0, b>0$,

ժ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+2)dx}{x^4+5x^2+4}$,

գ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$,

ի) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-x+2)dx}{x^4+10x^2+9}$,

դ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$,

լ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^4+1)dx}{x^6+1}$,

ե) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)^2}, a>0, b>0$,

խ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{x^4+6x^2+25}$,

զ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}, a>0, b>0$,

ծ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+4ix-5)^2}$,

է) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4dx}{(bx^2+a)^4}, a>0, b>0$,

կ) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^3}, a>0$,

ը) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(3x+5)dx}{(x^2+x+1)^2}$,

հ) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^6dx}{(x^4+a^4)^2}, a>0$, ձ) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2-2ix-1-a^2\right)^3}, a>0$,   ղ) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}, m,n\in N, n\geq m+1$:

114. Հաշվել ինտեգրալները.

ա) $\int_0^{\infty}\frac{(x+1)\cos x dx}{x^2-4x+13}$,

բ) $\int_0^{\infty}\frac{x\sin x dx}{x^2+4x+20}$,

գ) $\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}, \lambda>0$,

դ) $\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x dx}{x^2+a^2}, \lambda>0, a>0$,

ե) $\int_0^{\infty}\frac{x^3\sin\lambda x dx}{\left(x^2+1\right)^2}, \lambda>0$,

զ) $\int_0^{\infty}\frac{\cos x dx}{x^2+ix+2}$,

է) $\int_0^{\infty}\frac{\sin x dx}{x^2-5ix+6}$,

ը) $\int_0^{\infty}\frac{x\sin\lambda x dx}{x^2+a^2}, \lambda>0, a>0$,

թ) $\int_0^{\infty}\frac{\left(2x^3+13x\right)\sin x dx}{x^4+13x^2+36}$,

ժ) $\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x dx}{x^4+x^2+1}, \lambda>0$,

ի) $\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}, \lambda>0, a>0$,

լ) $\int_0^{\infty}\frac{\cos x dx}{\left(x^2+a^2\right)^3}, a>0$,

խ) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda x dx}{x^4+x^2+1}, \lambda>0$,

ծ) $\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x dx}{x^4+1}, \lambda>0$,

կ) $\int_0^{\infty}\frac{\cos x dx}{x^4+4a^4}, a>0$,

հ) $\int_0^{\infty}\frac{x\sin 2\lambda x dx}{x^4+1}, \lambda>0$:

115. Հաշվել ինտեգրալները.

ա) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$,

բ) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x+i)\sqrt{x}}$,

գ) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}}$,

դ) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha (x+a)}, 0<\alpha<1, a>0$,

ե) $\int\limits_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{(x+a)(x+2a)}, -1<\alpha<1, a>0$,

զ) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, 0<\alpha<3$,

է) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p dx}{x^2+1}, -1<p<1$,

ը) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p dx}{(x^2+1)^2}, -1<p<3$,

թ) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p dx}{x^2+2x\cos\lambda+1}$,

$-1<p<1, -\pi<\lambda<\pi$,

ժ) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x dx}{x^2+a^2}, a>0$,

ի) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln^2 x dx}{x^2+a^2}, a>0$,

լ) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+a)^2}, a>0$,

խ) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x dx}{x^2+2x+2}$,

ծ) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x^2+1)^2}$,

կ) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$,

հ) $\int\limits_0^\infty \frac{x \ln x dx}{(x^2+a^2)^2}, a>0$,

ձ) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2 \ln x dx}{(x^2+1)^2}$,

ղ) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln^2 x dx}{(x^2+1)^2}$,

ճ) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2+2ax\cos\lambda+a^2}$,

$a>0, 0<\lambda<\pi$,

մ) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+1)\sqrt{x}}$,

յ) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+1)^2\sqrt[3]{x}}$, ն) $\int_0^{\infty}\frac{\ln x dx}{(x^2+1)\sqrt{x}}$,

շ) $\int_0^{\infty}\frac{\ln x dx}{(x^2+a^2)^2\sqrt{x}}, a>0$,

ո) $\int_0^{\infty}\frac{\ln x dx}{(x+1)^2\sqrt{x}}$,

չ) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$,

պ) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^3+1)(x^2+1)}$,

ջ) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+a^2)}, a>0$,

ռ) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2(x^4+1)}$:

116. Հաշվել ինտեգրալները գլխավոր արժեքի իմաստով.

ա) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+1)dx}{(x^4+1)(x-\sqrt{2})}$,

բ) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x-\sqrt{ab})}, a>0, b>0$,

գ) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x+2)}$,

դ) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-2)dx}{(x^2+4x+13)^2(x-1)}$,

ե) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x-a)}, a>0$,

զ) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x+b)(x^2+b^2)^2}, b>0$, է) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2 (x-b)}, a>0, b>0$,

ը) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(3x+5)dx}{\left(x^2+x+1\right)^2 (x-1)}$,

թ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^4+5x^2+6\right)(x-3)}$,

ժ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(x^2+2\right)dx}{\left(x^4+5x^2+4\right)(x+1)}$,

ի) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\left(x^4+10x^2+9\right)(x-3)}$,

լ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^6+1\right)(x-1)}$,

խ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{\left(x^4+6x^2+25\right)(x-5)}$,

ծ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^2 (x-a)}, a>0$,

կ) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{\left(x^4+a^4\right)(x-a)}, a>0$։

Գլուխ 10. Կոմպլեքս ամպլիտուդների մեթոդը

Դիտարկենք n-րդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$L_n\left(p\right)x=a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=f\left(t\right), \tag{1}$$

որտեղ $\dfrac{d}{dt}=p$ և համապատասխան համասեռ հավասարումը՝

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=0, \tag{2}$$

$$L_n\left(p\right)x=0: \tag{3}$$

Թեորեմ 1: Համասեռ (2) հավասարման լուծումների բազմությունը n չափանի գծային տարածություն է:

(3) դիֆերենցիալ հավասարման համապատասխանում է

$$L_n\left(\lambda\right)=0, \tag{4}$$

հավասարումը, որը կոչվում է բնութագրիչ հավասարում:

Թեորեմ 2: (պարզ արմատների դեպք) Դիցուք $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ $\lambda_i\neq\lambda_j$ $i,j=1,\ldots,n$ բնութագրիչ (4) հավասարման արմատներն են, այդ դեպքում

$$\varphi_1\left(t\right)=e^{\lambda_1 t};\varphi_2\left(t\right)=e^{\lambda_2 t};\cdots;\varphi_n\left(t\right)=e^{\lambda_n t}, \tag{5}$$

ֆունկվիաները՝ (3) հավասարման ֆունդամենտալ լուծումների համակարգն է (լուծումների բազմության բազիսն է), և, հետևաբար, (3) հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\psi\left(t\right)\equiv\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i\left(t\right), \tag{6}$$

որտեղ $C_i\left(i=1,\ldots,n\right)$ կամայական հաստատուններ են:

Թեորեմ 3: (պատիկ արմատների դեպք) Դիցուք $\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\lambda_i\neq\lambda_j$ $i,j=1,\ldots,m$ բնութագրիչ (4) հավասարման արմատներն են, ընդ որում այդ դեպքում λ_i-ն՝ k_i $(i=1,\ldots,m)$ պատիկ արմատ է և $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$, այդ դեպքում

$$\begin{array}{lll}
\varphi_1(t)=t^0e^{\lambda_1 t}; & \varphi_{k_1+1}(t)=t^0e^{\lambda_2 t}; & \varphi_{n-k_m+1}(t)=t^0e^{\lambda_m t}; \\
\varphi_2(t)=te^{\lambda_1 t}; & \varphi_{k_1+2}(t)=te^{\lambda_2 t}; & \varphi_{n-k_m+2}(t)=xe^{\lambda_m t}; \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\varphi_{k_1}(t)=t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}; & \varphi_{k_1+k_2}(t)=t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t}; & \varphi_n(t)=t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}
\end{array}, \qquad (7)$$

ֆունկցիաները՝ (3) հավասարման ֆունդամենտալ լուծումների համակարգն է (լուծումների բազմության բազիսն է), և, հետևաբար, (3) հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\psi(t)\equiv\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i(t), \qquad (8)$$

որտեղ $C_i\ (i=1,\ldots,n)$ կամայական հաստատուններ են:

Օրինակ 1. Լուծել $\ddot{x}+\omega^2x=0$ հավասարումը:

Կազմենք $\lambda^2+\omega^2=0$ բնութագրիչ հավասարումը, որի արմատներն են՝ $\lambda_1=i\omega;\ \lambda_2=-i\omega$. Հետևաբար, $x_1=e^{i\omega t};\ x_2=e^{-i\omega t}$ ֆունդամենտալ լուծումների համակարգն է, իսկ ընդհանուր լուծումն ունի հետևյալ տեսքը՝ $x=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}$: Օգտվելով Էյլերի բանաձևից ընդհանուր լուծումը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝ $x=a_1\cos\omega t+a_2\sin\omega t$, որտեղ $a_1=C_1+C_2, a_2=i(C_1-C_2)$: Պարզագույն ձևափոխությունների միջոցով այն կարելի գրել հետևյալ տեսքով՝ $x=r\cos(\omega t+\alpha)$, որտեղ $r=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $\alpha=\arccos\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$:

Դիտարկենք n-րդ կարգի անհամասեռ գծային հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$L_n(p)y = f(x). \tag{9}$$

Երբ հավասարման աջ կողմը կվազիբազմանդամ է՝

$$f(x) = P_{m_1}(x)e^{\lambda_1 x} + P_{m_2}(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + P_{m_k}(x)e^{\lambda_k x}, \tag{10}$$

որտեղ $P_{m_1}, \ldots, P_{m_k}$ – $m_1, \ldots, m_k$ աստիճանի բազմանդամ, իսկ $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ իրարից տարբեր կոմպլեքս թվեր են:

Թեորեմ 4. (9) հավասարումը ունի հետևյալ հատկություններր՝

1. եթե ψ_1-ը $b_1(x)$ ազատ անդամով հավասարման լուծումն է, իսկ ψ_2-ը՝ $b_2(x)$ ազատ անդամով հավասարման լուծումը, ապա $\psi_1 + \psi_2$-ը՝ $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$ ազատ անդամով հավասարման լուծումն է:

2. Անհամասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը հավասար է համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծման և անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծման գումարին:

Դիտարկենք հետևյալ հավասարումը՝

$$L_n(p)y = P_m(x)e^{\lambda_0 x} \tag{11}$$

և գտնենք նրա մասնավոր լուծումը:

Թեորեմ 5. (11) հավասարման մասնավոր լուծումը ունի հետևյալ հետևյալ՝

$$\psi_0(x) = Q_m(x)x^r e^{\lambda_0 x}, \tag{12}$$

որտեղ r որոշվում է հետևյալ կերպ՝ $r = 0$ եթե $L_n(\lambda_0) \neq 0$, եթե $L_n(\lambda_0) = 0$, ապա r-ը $L_n(\lambda)$ բազմանդամի λ_0-ի արմատի պատիկությունն է, իսկ Q_m-ը նույն աստիճանի բազմանդամ է, ինչ P_m բազմանդամը:

Կոմպլեքս ամպլիտուդների մեթոդը: Ֆիզիկայի և տեխնիկայի այն բաժիններում, որոնք առնչվում են տատանողական պրոցեսներին, կարևոր դեր են խաղում հարմոնիկ (ներդաշնակ) տատանումները: Մաթեմատիկորեն ներդաշնակ տատանումները տրվում են հետևյալ ֆունկցիայով՝

$$r\cos\left(\omega t+\alpha\right), r\geq 0, \tag{13}$$

որտեղ r -ը տատանումների ամպլիտուդն է, α -ն սկզբնական ֆազն է, իսկ ω -ն տատանումների հաճախականությունն է: Օրինակ 1-ում մենք տեսանք, որ

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0 \tag{14}$$

հավասարման ընդհանուր լուծումը ω հաճախականությամբ և կամայական ամպլիտուդով ու սկզբնական ֆազով (9) ներդաշնակ ֆունկցիան է:

Ներդաշնակ տատանումները ուսոքւմնասիրելիս հաճախ դիտարկվում է

$$L_n\left(p\right)x=r\cos\left(\omega t+\alpha\right) \tag{15}$$

հավասարումը: (15) հավասարումը կարելի է լուծել 2-5 թեորեմների միջոցով, քանի որ այդ հավասարման աջ կողմը կվազիբազմանդամ է: Երբ $L_n\left(p\right)$ բազմանդամի գործակիցները իրական թվեր են Թեորեմ 5-ը կարելի է օգտագործել այլ մեթոդ: Այդ մեթոդը էլեկտրոստատիկայում կոչվում է *կոմպլեքս ամպլիտուդների մեթոդը*: Այն է՝ իրական ներդաշնակ ֆունկցիայի (13) հետ մեկտեղ դիտարկում ենք նրան համապատասխանող կոմպլեքս ներդաշնակ

$$\rho e^{i\omega t}, \tag{16}$$

ֆունկցիան, որտեղ

$$\rho=re^{i\alpha}. \tag{17}$$

(16) ֆունկցիայի իրական մասը համընկնում է (13) ֆունկցիայի հետ.

$$\rho e^{i\omega t}=re^{i(\alpha+\omega t)}=r\cos(\alpha+\omega t)+ir\sin(\alpha+\omega t):$$

(17) ֆունկցիան կոչվում է կոմպլեքս ներդաշնակ ֆունկցիայի կոմպլեքս ամպլիտուդ: Նշենք, որ

$$|\rho|=r:$$

Երբ $L_n(p)$ բազմանդամի գործակիցները իրական թվեր են մինչև (15) հավասարումը լուծելը, լուծում ենք

$$L_n(p)z=\rho e^{i\omega t} \tag{18}$$

հավասարումը:

Եթե $z=x+iy$ (18) հավասարման լուծումն է, ապա x-ը (15) հավասարման լուծումն է: Ենթադրելով, որ $i\omega$-ն $L_n(p)$ բազմանդամի արմատը չէ՝

$$L_n(i\omega)\neq 0\,, \tag{19}$$

(18) հավասարման լուծումը փնտրում ենք ներդաշնակ կոմպլեքս ֆունկցիայի՝ $z=\sigma e^{i\omega t}$ տեսքով, որտեղ $\sigma=se^{i\beta}$-ն կոմպլեքս ամպլիտուդն է:

$z=\sigma e^{i\omega t}$ տեղադրելով (18) հավասարման մեջ, ստանում ենք՝

$$\sigma=\frac{\rho}{L_n(i\omega)}: \tag{20}$$

Այսպիսով, (15) հավասարման լուծումը ստանում ենք հետևյալ տեսքով՝

$$x=s\cos(\omega t+\beta), \tag{21}$$

որտեղ s ամպլիտուդը և β ֆազը որոշվում է

$$se^{i\beta}=\frac{re^{i\alpha}}{L_n(i\omega)}$$

հավասարումից:

Մասնավորապես՝ $|s| = |\sigma| = \dfrac{r}{|L_n(i\omega)|}$: Եթե $L_n(p)$ բազմանդամը կայուն է (բոլոր արմատների իրական մասերը բացասական են), ապա $L_n(i\omega) \neq 0$: Այդ դեպքում (15) հավասարման ընդհանուր լուծումը ունի հետևյալ տեսքը.

$$x = u + s\cos(\omega t + \beta), \tag{22}$$

որտեղ u-ն $L_n(p)u = 0$ համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է: Քանի որ u-ն ձգտում է զրոյի երբ $t \to \infty$, ապա (15) հավասարման կամայական լուծումը ձգտում է (21) լուծմանը: (21) լուծումը կոչվում է *կայունացված լուծում*: (21) լուծումը համապատասխանում է *կայունացված պրոցեսին,* իսկ (22) լուծումը՝ *անցումային պրոցեսին*: Կայունացված լուծումը (15) հավասարման միակ պարբերական լուծումն է:

Օրինակ. Գտնել հետևյալ հավասարման կայունացված լուծումը

$$x'' + 10x' + 25x = 5\cos(5t + 1): \tag{23}$$

Լուծում. Դիտարկենք հետևյալ

$$L_2(p)z = z'' + 10z' + 25z = \rho e^{5it} \tag{24}$$

որտեղ $\rho = 5e^i : L_2(5i) = -25 + 50i + 25 = 50i \neq 0$:

(24) հավասարման լուծումը փնտրում ենք ներդաշնակ կոմպլեքս ֆունկցիայի՝ $z = \sigma e^{i\omega t}$ տեսքով, որտեղ $\sigma = se^{i\beta}$-ն կոմպլեքս ամպլիտուդն է:

$z = \sigma e^{i\omega t}$ տեղադրելով (24) հավասարման մեջ, ստանում ենք՝

$$\sigma = \frac{\rho}{L_2(i\omega)} = \frac{5e^i}{50i} = -0,1ie^i, \quad |s| = |\sigma| = 0,1:$$

β ֆազը որոշվում է $0,1e^{i\beta}=-0,1ie^{i}$ հավասարումից: Որտեղից ստանում ենք

$$e^{i\beta}=-ie^{i}=e^{i\left(1-\frac{\pi}{2}\right)},\ \beta=1-\frac{\pi}{2}:$$

Այսպիսով (23) հավասարման կայունացված լուծումն է՝ $x=0,1\cos\left(5t+1-\frac{\pi}{2}\right)$:

117. Գտնել հետևյալ հավասարումների կայունացված լուծումը.

ա) $x''+5x'+4x=2\cos(3t+4)$,

բ) $x''+5x'+6x=5\cos(7t-4)$,

գ) $x''+4x'+4x=3\cos(2t+5)$,

դ) $x''+4x'+5x=5\cos(3t-6)$,

ե) $x''+6x'+10x=5\cos(4t+7)$,

զ) $x''+8x'+17x=4\cos(5t-4)$,

է) $x''+6x'+9x=5\cos(8t+3)$,

ը) $x''+10x'+26x=7\cos(2t-5)$,

թ) $x''+6x'+8x=4\cos(5t+8)$,

ժ) $x''+7x'+6x=4\cos(5t-4)$:

Պատասխաններ

1. ա) $5+i$, բ) $-i$, գ) $-0,1-0,7i$, դ) -2^{994}, ե) 1, զ) $\cos 2\alpha + i\cdot\sin 2\alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, է) $\frac{1}{4}$, ը) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, թ) $-2^{49}\left(1+i\sqrt{3}\right)$, ժ) $7-4\sqrt{2}i$, ի) $-\frac{38}{625}-i\frac{41}{625}$, լ) $2i$, խ) 0, ծ) -1:

2. ա) $1,\frac{\pi}{2}$, բ) $1,\pi$, գ) $1,-\frac{\pi}{2}$, դ) $1,-\frac{2\pi}{3}$, ե) $1,\frac{6\pi}{7}$, զ) $2\cos\frac{\pi}{14},\frac{\pi}{14}$, է) $7,-\frac{\pi}{2}$, ը) $8;0$, թ) $\frac{1}{4};0$, ժ) $1,\pi-\alpha$, ի) $\frac{1}{|\cos\alpha|}$, $\begin{cases}\alpha, |\alpha|<\frac{\pi}{2}\\ \alpha-\pi\operatorname{sgn}\alpha, \frac{\pi}{2}<|\alpha|<\pi\end{cases}$, լ) $1,\ \alpha-\frac{\pi}{2}$:

3. ա) $\cos 2\pi n + i\cdot\sin 2\pi n$, բ) $\cos\pi(2n+1)+i\cdot\sin\pi(2n+1)$, դ) $\cos\pi\left(2n-\frac{1}{2}\right)+i\cdot\sin\pi\left(2n-\frac{1}{2}\right)$, ե) $\sqrt{2}\left(\cos\pi\left(2n+\frac{1}{4}\right)+i\cdot\sin\pi\left(2n+\frac{1}{4}\right)\right)$,
զ) $2\left(\cos\pi\left(2n+\frac{2}{3}\right)+i\cdot\sin\pi\left(2n+\frac{2}{3}\right)\right)$, է) $2\left(\cos\pi\left(2n+\frac{1}{3}\right)+i\cdot\sin\pi\left(2n+\frac{1}{3}\right)\right)$,
ը) $2\left(\cos\pi\left(2n-\frac{2}{3}\right)+i\cdot\sin\pi\left(2n-\frac{2}{3}\right)\right)$, թ) $2\left(\cos\pi\left(2n-\frac{1}{3}\right)+i\cdot\sin\pi\left(2n-\frac{1}{3}\right)\right)$,
ժ) $2\left(\cos\pi\left(2n+\frac{3}{4}\right)+i\cdot\sin\pi\left(2n+\frac{3}{4}\right)\right)$,

ի) $-2\cos\alpha\left(\cos\left(\alpha+(2n-1)\pi\right)+i\cdot\sin\left(\alpha+(2n-1)\pi\right)\right)$, լ) $\cos\frac{\pi n}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$:

4. ա) $5e^{i\cdot 2\pi n}$, բ) $2e^{i\cdot\pi(2n+1)}$, գ) $e^{i\cdot\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)}$, դ) $3e^{i\cdot\pi\left(2n-\frac{1}{2}\right)}$, ե) $e^{i\cdot\left(2n\pi+arctg\frac{4}{3}\right)}$,

զ) $\sqrt{2}e^{i\cdot\pi\left(2n-\frac{1}{4}\right)}$, է) $2e^{i\cdot\pi\left(2n-\frac{2}{3}\right)}$, ը) $5\sqrt{2}e^{i\cdot\pi\left(2n-\frac{3}{4}\right)}$, թ) $\frac{1}{4}e^{i\cdot 2\pi n}$,

ժ) $125e^{i\cdot\left(2\pi n+arctg\frac{117}{44}\right)}$, ի) $e^{i\cdot\pi\left(2n+\frac{4}{5}\right)}$, լ) $e^{i\cdot\left(\alpha+\pi\left(2n-\frac{1}{2}\right)\right)}$:

5. ա) $1,-1,i,-i$, բ) $\sqrt{3}e^{i\cdot\frac{\pi}{4}(2n+1)}$, $n=0,1,2,3$, գ) $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$,

դ) $i,\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$, ե) $\pm(2+i)$, զ) $\sqrt[8]{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{16}(8n-1)}$, $n=0,1,2,3$,

է) $\sqrt[3]{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{18}(12n-1)}, n=0,1,2$, ը) $\sqrt[4]{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{12}(6n+1)}, n=0,1,2,3$, թ) $\pm\left(\sqrt{3}-i\right)$,

ժ) $\sqrt[16]{8}e^{i\cdot\frac{\pi}{32}(8n+3)}$, $n=0,1,\ldots,7$, ի) $\sqrt[10]{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{30}(12n+1)}, n=0,1,2,3,4$,

լ) $e^{i\cdot\frac{\pi}{2n}(4k-1)}, k=\overline{0,n-1}$:

7. ա) $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, բ) $0,1,-1,i,-i$, գ) $0,i,-i$, դ) $\frac{5}{4}+3i$,

ե) $1-i,-i,-1-i$, զ) $-\frac{a}{2}\left(1+ictg\frac{\pi k}{n}\right), k=1,2,\ldots,n-1$:

9. ա) $\{-1<x<1, y\in R\}$ շերտը, բ) $y>1$ և $y<-1$ կիսահարթությունների միավորումը, գ) $-\frac{i}{2}$ կենտրոնով և 2 շառավղով շրջանագիծը, դ) $-\frac{i}{3}$ կենտրոնով $\frac{2}{3}$ և 1 շառավիղներով շրջանային օղակ, ընդ որում $\frac{2}{3}$ շառավիղով շրջանագիծը պատկանում է այդ բազմությանը, իսկ 1 շառավիղով շրջանագիծը՝ ոչ, ե) $y=\frac{1}{2}$ ուղիղը, զ) $3i$ կենտրոնով և $\sqrt{5}$ շառավիղով շրջանագծի $1+i, 2+2i$ ծայրակետերով կարճագույն աղեղը, է) $\frac{i}{\sqrt{3}}$ կետը, ը) $y=1$ ուղիղը, թ) $x+y=1$ ուղիղը, ժ) անկյուն, որի գագաթը $z=-1$ կետն է, իսկ կողմերը իրական առանցքի հետ կազմում են $\frac{\pi}{6}$ և $\frac{\pi}{4}$ մեծությամբ անկյուններ, ի) շրջանագիծ, որի կենտրոնը $\frac{1+i}{2}$ կետն է, իսկ շառավիղը $\frac{1}{\sqrt{2}}$-ի, լ) ճառագայթ, որի սկզբնակետը $z=-i$ կետն է և որը իրական առանցքի հետ կազմում է $-\frac{\pi}{6}$ մեծության անկյուն, առանց $z=-i$ կետի, խ) $x>1$ կիսահարթությունը, ծ) $x>-\frac{1}{2}$ կիսահարթությունը, կ) աջ միավոր բաց կիսաշրջանը, հ) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ էլիպսի ներքին տիրույթը, ձ) հարթության այն մասը, որը գտնվում է $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ հիպերբոլի ձախ ճյուղից աջ, ղ) $x+y<\sqrt{2}$ կիսահարթությունը, ճ) $|z|<1$, եթե $|a|<1$; $|z|>1$, եթե $|a|>1$; $\varnothing$, եթե $|a|=1$, մ) $[0;+\infty)$ կիսառանցքը, յ) հարթության այն մասը, որը գտնվում է $xy=-\frac{1}{2}$ հիպերբոլի ճյուղերի միջև, ն) $x^2+(y-1)^2<1$ շրջանը, շ) $(x-1)^2+y^2>1$, ո) $x^2+y^2<4$ շրջանը, չ) $\{-1<y<0, x\in R\}$ շերտը, պ) $y=1$ ուղիղը, ջ) $\frac{z_1+z_2}{2}$ կենտրոնով $\sqrt{\frac{a^2}{2}-\left|\frac{z_1-z_2}{2}\right|^2}$ շառավիղով շրջանագիծը, ռ) i և $-i$ կենտրոններով 1 շառավիղով շրջանների միավորումը, ս) $\left|z-z_1\right|<\dfrac{\left|z_2-z_1\right|}{\sqrt{2}}$,$\left|z-z_2\right|<\dfrac{\left|z_2-z_1\right|}{\sqrt{2}}$ շրջանների ընդհանուր մասը և նրանց արտաքին տիրույթը: **10.** $x+y=0$ ուղիղը, **11.** $x+y=1$ ուղիղը, **12.** $z=\dfrac{\lambda_2 z_1+\lambda_1 z_2}{\lambda_2+\lambda_1}$, **13.** $1+i$ կենտրոնով և 2 շառավղով շրջանագծի վրա, **14.** $3-4i$ կենտրոնով և $\sqrt{2}$ շառավղով շրջանագծի վրա, **15.** $z_1+z_3-z_2$, **16.** $\dfrac{3\mp\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, **17.** ա) $x^2-y^2=1$ հիպերբոլը, բ) $\left|z+i\right|=1$ շրջանագիծը առանց $z=0$ կետի, գ) $x^2-y^2=\dfrac{1}{2}$ հիպերբոլը, դ) $-1+\dfrac{i}{2}$ կենտրոնով և $\dfrac{3}{2}$ շառավղով շրջանագիծը, ե) z_1 և z_2 ծայրակետերով հատվածի միջնուղղահայացը, զ) $\left|z\right|=1$ շրջանագիծը առանց $z=-1$ կետի, է) $y=0$ ուղիղը առանց $x=-1$ կետի, ը) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-y^2=\dfrac{1}{4}$ հիպերբոլը, թ) շրջանագիծ, որի տրամագիծը z_1, z_2 ծայրակետերով հատվածն է, առանց z_2 կետի, ժ) z_1 և z_2 կետերով անցնող ուղիղը, առանց z_2 կետի:

18. ա) $\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$, բ) $\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$, գ) $\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, դ) $\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, ե) $\left(\dfrac{2}{5},0,\dfrac{1}{5}\right)$, զ) $\left(0,-\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right)$, է) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$, ը) $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$, թ) $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}\right)$, ժ) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{5},-\dfrac{1}{5},\dfrac{4}{5}\right)$:

19. ա) α երկայնության կիսամիջօրեական, բ) $\beta = 2arctgR - \frac{\pi}{2}$ լայնության զուգահեռական $\left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$, գ) սֆերայի և $\xi + C(\zeta - 1) = 0$ հարթության հատման շրջանագիծը, դ) սֆերայի և $\eta + C(\zeta - 1) = 0$ հարթության հատման շրջանագիծը:

20. ա) $\xi > 0$ կիսասֆերա, բ) $\xi < 0$ կիսասֆերա, գ) $\eta > 0$ կիսասֆերա, դ) $\eta < 0$ կիսասֆերա, ե) $\zeta < \frac{1}{2}$ կիսասֆերա, զ) $\zeta > \frac{1}{2}$ կիսասֆերա, է) սֆերայի $\frac{1}{2} < \zeta < \frac{4}{5}$ շերտը:

21. ա) $e^3, 1$, բ) $e^2, -3$, գ) $e^{-3}, 2$, դ) $e^{-2}, -1$, ե) $e, 2\pi - 4$, զ) e, $4 - 2\pi$, է) $a, \varphi - \pi$, եթե $0 < \varphi \le \pi$; $a, \varphi + \pi$, եթե $-\pi \le \varphi \le 0$; ը) $1, -\varphi$, եթե $|\varphi| < \pi$; $1, \pi$, եթե $|\varphi| = \pi$, թ) $2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$, $\frac{\alpha + \beta + \pi}{2}$ եթե $\alpha + \beta \le \pi$; $2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}, \frac{\alpha + \beta - 3\pi}{2}$, եթե $\alpha + \beta > \pi$; ժ) $e^{-\pi}, -\frac{\pi}{2}$:

22. ա) $-i$, բ) 1, գ) $(-1)^k$, դ) $-\frac{1}{\sqrt{e}}$, ե) $-e^{-\frac{5\pi}{2}}$:

23. ա) $\operatorname{Im} z = \pi k, k \in Z$, բ) $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$:

24. ա) $i\pi(2n+1)$, $n \in Z$, բ) $i\pi$, գ) $i\pi\left(2n + \frac{1}{2}\right), n \in Z$, դ) $\frac{i\pi}{2}$, ե) $i\pi\left(2n + \frac{1}{4}\right), n \in Z$, զ) $\ln 2 + i\pi\left(2n + \frac{2}{3}\right)$, $n \in Z$, է) $\frac{1}{2}\ln 13 + i\left(arctg 2\sqrt{3} + \pi(2n-1)\right), \quad n \in Z$, ը) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{i\pi}{4}$,

թ) $\frac{i\pi}{2}$, ժ) $ln3 - \frac{i\pi}{2}$ ։

25. ա) $e^{2\pi n}$, բ) $e^{i\sqrt{2}\pi(2n+1)}$, գ) $e^{i\sqrt{2}\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)}$, դ) $e^{\pi\left(2n-\frac{1}{2}\right)}$, ե) $\frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{\pi\left(2n+\frac{1}{4}\right)}$,

զ) $e^{2\pi n}\left(\cos\ln 2 - i\sin\ln 2\right)$, է) $e^{\pi\left(2n-\frac{1}{2}\right)}$, $n \in Z$ ։

26. ա) $\sin x ch y$, $sh y \cos x$, $\sqrt{\sin^2 x + sh^2 y}$, բ) $\frac{\sin 2x}{\cos 2x + ch2y}$,

$\frac{sh2y}{\cos 2x + ch2y}$, $\sqrt{\frac{ch2y - \cos 2x}{\cos 2x + ch2y}}$, գ) $\frac{\sin 2x}{ch2y - \cos 2x}$,

$-\frac{sh2y}{ch2y - \cos 2x}$, $\sqrt{\frac{ch2y + \cos 2x}{ch2y - \cos 2x}}$, դ) $shx \cos y$, $\sin y chx$,

$\sqrt{\sin^2 y + sh^2 x}$, ե) $chx \cos y$, $\sin y shx$, $\sqrt{\cos^2 y + sh^2 x}$,

զ) $\frac{sh2x}{ch2x + \cos 2y}$, $\frac{\sin 2y}{ch2x + \cos 2y}$, $\sqrt{\frac{ch2x - \cos 2y}{ch2x + \cos 2y}}$ ։

27. ա) $\operatorname{Re} z = \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)$ կամ $\operatorname{Im} z = 0$, բ) $\operatorname{Re} z = \pi k$ կամ $\operatorname{Im} z = 0$, գ) $\operatorname{Im} z = 0$, դ) $\operatorname{Im} z = \pi k$ կամ $\operatorname{Re} z = 0$,

ե) $\operatorname{Im} z = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$ ։

28. ա) $\operatorname{Re} z = \pi k$, բ) $\operatorname{Re} z = 0$ կամ $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

գ) $\operatorname{Re} z = \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)$, դ) $\operatorname{Re} z = \frac{\pi k}{2}$, ե) $\operatorname{Re} z = 0, k \in Z$:

29. ա) $z = i\pi\left(2n - \frac{1}{2}\right) + \ln 2$, բ) $z = \pi\left(2n - \frac{1}{2}\right) - i\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$,

գ) $z = \pi\left(2n \pm \frac{1}{2}\right) - i\ln\left(\frac{\sqrt{5} \mp 1}{2}\right)$, դ) $z = i\left(arctg\frac{3}{2} + \pi n\right)$,

ե) $z = \pi\left(2n + \frac{3}{4}\right) - i\ln\frac{3 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$, զ) $z = \ln\left(\sqrt{7} \mp 2\right) + i\pi\left(2n \pm \frac{1}{2}\right)$,

$n \in Z$:

30. ա) $\cos 1 ch1, -\sin 1 sh1$, բ) $-\sin 2ch1$, $\cos 2sh1$, գ) $\frac{\sin 4}{\cos 4 + ch2}$,

$-\frac{sh2}{\cos 4 + ch2}$, դ) $\frac{8}{17}$, $\frac{15}{17}$, ե) $\frac{sh4}{ch4 - \cos 2}$, $\frac{\sin 2}{ch4 - \cos 2}$, զ) $\frac{40}{41}$,

$\frac{9}{41}$, է) $\pi\left(n + \frac{(-1)^n}{6}\right)$, ը) $\pi\left(2n + \frac{1}{2}\right) - i\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$,

$\pi\left(2n - \frac{1}{2}\right) + i\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$, թ) $-\frac{1}{2}arctg2 + \frac{\pi}{2}(2n+1) + i\frac{\ln 5}{4}$,

ժ) $\pi(2n+1) \pm i\ln 2$, ի) $\pi\left(2n + \frac{1}{2}\right) - i\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$,

լ) $\pi\left(n + \frac{1}{8}\right) + i\frac{\ln 2}{4}, n \in Z$:

31. ա) $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, բ) $\operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$:

32. ա) $\frac{1}{2}+\frac{i}{e}$, բ) $1+\frac{i}{4}$, գ) 1, դ) i, ե) 0, զ) 0, է) ∞, ը) $\frac{1}{3}$, թ) $-i$, ժ) i, ի) ∞, լ) 0, խ) սահման չունի, ծ) e^{a+ib} :

36. ա) բացարձակ զուգամետ է, բ) տարամետ է, գ) պայմանական զուգամետ է, դ) բացարձակ զուգամետ է, ե) տարամետ է, զ) բացարձակ զուգամետ է, է) տարամետ է, ը) բացարձակ զուգամետ է, թ) տարամետ է, ժ) բացարձակ զուգամետ է, ի) տարամետ է:

37. ա) $|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$, բ) $\frac{1}{2}<|z|<1$, գ) $|z|>\frac{1}{e}$, դ) $|z-2i|>2$, ե) $z\neq -k, k\in N$,զ) $|z|>e$, է)$|z|<1$, ը) $|z+1+i|<1$, թ) $|z|\neq 1$, ժ) $|z|>1$, ի) $\operatorname{Im} z=0$:

38. ա) $|z|=1$, բ) $\operatorname{Re} z\geq\delta>0$, գ) $\operatorname{Im} z=0$, դ) $z\in\bigcup\limits_{k\in Z}\left[2\pi k+\varepsilon, 2\pi(k+1)-\varepsilon\right], (0<\varepsilon<\pi)$:

40. ա) $R=1$, բ) $R=1$, գ) $R=2$, դ) $R=2$, ե) $R=+\infty$, զ) $R=1$, է) $R=+\infty$, ը) $R=1$, թ) $R=1$, ժ) $R=1$, ի) $R=1$, լ) $R=\frac{1}{e}$, խ) $R=\frac{1}{4}$, ծ) $R=1$, կ) $R=\frac{1}{4}$, հ) $R=1$, ձ) $R=+\infty$, ղ) $R=1$:

41. ա) տարամետ է $|z|=1$ շրջանագծի բոլոր կետերում, բ) պայմանական զուգամետ է, եթե $z\neq 1$, տարամետ է $z=1$ կետում, գ) բացարձակ զուգամետ է $|z|=1$ շրջանագծի բոլոր կետերում, դ) բացարձակ զուգամետ է $|z|=1$ շրջանագծի բոլոր կետերում, ե) բացարձակ զուգամետ է $|z|=1$ շրջանագծի բոլոր կետերում, գ) պայմանական զուգամետ է $|z|=\frac{1}{4}$ շրջանագծի բոլոր կետերում, բացի $z=\frac{1}{4}$ կետից, որում տարամետ է:

42. ա) այո, բ) ոչ, գ) այո, դ) ոչ:

43. ա) $u=c^2-\frac{v^2}{4c^2}$, եթե $c\neq 0$; $v=0, u\leq 0$ եթե $c=0$,

բ) $u=\frac{v^2}{4c^2}-c^2$, եթե $c\neq 0$; $v=0, u\geq 0$, եթե $c=0$,

գ) $u=0, v\geq 0$, դ) $|w|=R^2$, ե) $argw=\begin{cases} 2\alpha+2\pi, \alpha\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right] \\ 2\alpha, \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ 2\alpha-2\pi, \alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right] \end{cases}$:

44. ա) $\left|w-\frac{1}{2c}\right|=\frac{1}{2|c|}$, եթե $c\neq 0$; $u=0$, եթե $c=0$,

բ) $\left|w-\frac{i}{2c}\right|=\frac{1}{2|c|}$, եթե $c\neq 0$; $v=0$, եթե $c=0$, գ) $|w|=\frac{1}{R}$,

դ) $\arg w=-\alpha$, ե) $\operatorname{Re} w=\frac{1}{2}$:

45. $\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)\right]^2}+\frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)\right]^2}=1$, եթե $R\neq 1$; $[-1;1]$, եթե $R=1$:

46. $\left(-\infty.-\dfrac{1}{4}\right)$: **47.** $-i$: **48.** ոչ: **50.** միայն $f(z)=\dfrac{z\operatorname{Re}z}{|z|}$, $f(0)=0$ ֆունկցիան: **51.** այո: **52.** Ոչ հավասարաչափ անընդհատ են: **53.** այո:

54. ա) $|w|<2$, բ) $\operatorname{Re}w>\dfrac{1}{2}$, գ) $\left|w+\dfrac{8}{3}\right|=\dfrac{4}{3}$, դ) $\operatorname{Re}w=-\dfrac{1}{2}$,

ե) $u=1-\dfrac{v^2}{4}$, պարաբոլի ներսը առանց $(-\infty.0)$ ճառագայթի,

զ) $u=\dfrac{v^2}{4}-1$ պարաբոլի դուրսը, է) $\left\{|w|<R^2 : 0<\arg w<\pi\right\}$,

ը) $|w|>8$, թ) $\left\{|w|=1 : 0\le\arg w\le\pi\right\}$, ժ) $\left|w-\dfrac{4}{3}\right|=\dfrac{2}{3}$,

ի) $\left|w-\dfrac{3}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$, լ) $|w|<1$, խ) $|w-1-i|=1$,

ծ) $\left\{(\operatorname{Re}z>-1)\cap\left(\left|w-\dfrac{2}{3}\right|>\dfrac{4}{3}\right)\right\}$, կ) $\operatorname{Re}w=0$, հ) $|w|\ge1$,

ձ) $\left|w+\dfrac{8}{3}\right|\ge\dfrac{10}{3}$, ղ) $w\notin[0,+\infty)$, ճ) $v=\dfrac{3}{2}u+\dfrac{1}{4}$, մ) $u^2-v^2=\dfrac{1}{2}$,

$u>0$, յ) $u^2-v^2=\dfrac{1}{2}$ հիպերբոլի ճյուղերի միջև ընկած տիրույթը:

55. ա) $\rho=e^{\frac{\theta-b}{k}}$ սպիրալների, եթե $k\ne0$; $\theta=b$ ճառագայթների, եթե $k=0$, բ) $y_1<\theta<y_2$ անկյան, երբ $y_1=0$ և $y_2=2\pi$ իրական առանցքի դրական ուղղությամբ ճեղքված հարթություն, գ) $\rho=e^{\theta}$ սպիրալով ճեղքված հարթություն, դ) $\rho<1, 0<\theta<y_1$ սեկտորի, եթե $y_1<2\pi$; երբ $y_1=2\pi$՝ $v=0, 0\le u\le1$ շառավղով ճեղքված միավոր շրջանի: ե) $\rho>1, 0<\theta<y_1$ տիրույթի, եթե $y_1\ne2\pi$; երբ

$y_1 = 2\pi$՝ միավոր շրջանի արտաքին մասի ճեղքված $v = 0, 1 \le u < +\infty$ ճառագայթով: զ) $e^{x_1} < \rho < e^{x_2}$, $y_1 < \theta < y_2$ տիրույթի; երբ $y_2 - y_1 = 2\pi$ համակենտրոն օղակի ճեղքված $\theta = y_1, e^{x_1} \le \rho \le e^{x_2}$ հատվածով:

56. ա) ունի, բ) չունի, գ) չունի, դ) ունի միայն $z = 0$ կետում, ե) ունի միայն $z = 0$ կետում, զ) ունի միայն $z = 0$ կետում, է) ունի:

57. ա) $c = 1$, $b = -a$, $f(z) = (1 - ia)z$, բ) $a = b = -1$, $f(z) = e^{iz}$:

58. Ֆունկցիան անալիտիկ է $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$, $\pi < Argz < \frac{5\pi}{4}$ տիրույթներում, $f(z) = z^2$ և $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < Argz < \frac{7\pi}{4}$ տիրույթներում, $f(z) = -z^2$:

63. ա) 15, $-arctg\frac{4}{3}$; $3\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)$, $\pi - arctg\frac{4\pi}{\pi^2 - 4}$, բ) $3, \frac{\pi}{2}; 3, \frac{\pi}{2}$, գ) $\frac{1}{9}, 0; \frac{1}{9}, \pi$, դ) $2, \frac{\pi}{2}; 1, \pi$, ե) $\sqrt{5}, arctg\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{5}}{9}, arctg\frac{1}{2}$, զ) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}; 1, 0$, է) $2, \frac{\pi}{4}; \frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}$, ը) $1, 0; \sqrt{\cos^2 1 + sh^2 1}$, $-arctg(tg1 \cdot th1)$:

64. ա) $|z| = \frac{1}{2}$, բ) $|z - 1| = \frac{1}{2}$, գ) $|z| = 1$, դ) $|z + i| = \sqrt{2}$:

65. ա) $\arg z = -\dfrac{\pi}{2}$, բ) $\operatorname{Re} z > 1, \operatorname{Im} z = 0$, գ) $x + y = 0$, դ) $x + y + 1 = 0$:

66. ա) սեղմվում է, երբ $\operatorname{Re} z < 0$; ձգվում է, երբ $\operatorname{Re} z > 0$, բ) սեղմվում է, երբ $|z| > 1$; ձգվում է, երբ $|z| < 1$, գ) սեղմվում է, երբ $|z| > 1$; ձգվում է, երբ $|z| < 1$, դ) սեղմվում է, երբ $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; ձգվում է, երբ $|z| > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, ե) սեղմվում է, երբ $|z+1| < \dfrac{1}{2}$; ձգվում է, երբ $|z+1| > \dfrac{1}{2}$:

67. ա) $f(z) = \left(1 - \dfrac{i}{2}\right) z^2 + C$, բ) $f(z) = i\left(z^2 + z\right) + C$, գ) $f(z) = ze^z + C$, դ) $f(z) = z\cos z + C$, ե) $f(z) = \dfrac{1}{z} + C$, զ) $f(z) = z^2 + (5 - i)z - \dfrac{i}{z} + C$, է) $f(z) = i\left(z^2 + 3\right) + \dfrac{1}{2z} + C$, ը) $f(z) = 2i\ln z + C$:

68. $w = (1+i)(1-z)$: **69.** $w = (2+i)z + 1 - 3i$:

70. ա) $f(z) = az + b, a > 0, \operatorname{Im} b = 0$, բ) $f(z) = az + b$, $a < 0$, $\operatorname{Im} b = 0$, գ) $f(z) = -iaz + ib$, $a > 0$, $\operatorname{Im} b = 0$, դ) $f(z) = az + b$, $a > 0$, $\operatorname{Re} b = 0$, ե) $f(z) = z + b$ կամ $f(z) = -z + b + 1$, $\operatorname{Re} b = 0$, զ) $f(z) = z + b(1+i)$ կամ $f(z) = -z + b(1+i) + 1$ $\operatorname{Im} b = 0$:

71. $w=\dfrac{(5-3i)z-4}{4z-5-3i}$: 72. $w=-i\dfrac{z-i}{z+i}$: **73.** $w=\dfrac{(2i-1)z+2+i}{5z+3i-4}$:

74. $w=-i\dfrac{z-1}{z+1}$: **75.** $w=\dfrac{2z-5}{10-z}$:

76. $w=\dfrac{(1+10i)z-5+6\sqrt{5}+i\left(10-6\sqrt{5}\right)}{\left(11-2\sqrt{5}\right)z+5+4\sqrt{5}-i6\sqrt{5}}$:

77. ա) 1) $w=-\dfrac{2i(z+1)}{4z-1-5i}$, 2) $w=\dfrac{iz+3}{(2+i)(z-i)}$,

բ) 1) $w=\dfrac{z+2+i}{z+2-i}$, 2) $w=i\dfrac{z-1}{z+1}$, 3) $w=\dfrac{1-i}{2}(z+1)$:

78. ա) $w=\mathrm{R}e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{R^2-(z-z_0)(\bar{a}-\bar{z}_0)}$, $|a-z_0|<R$, $\alpha\in R$,

բ) $w=\dfrac{a\mathrm{R}e^{i\alpha}-\bar{a}z}{\mathrm{R}e^{i\alpha}-z}$, $\operatorname{Im}a>0,\alpha\in R$, գ) $w=e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{z+\bar{a}}$, $\operatorname{Re}a>0$,

$\operatorname{Im}\alpha=0$, դ) $w=\dfrac{az+ib}{icz+d}$, $a,b,c,d\in R$, $ad+bc=1$:

79. $w=e^{i\alpha}\dfrac{z+b}{z+\bar{b}}$, $\operatorname{Im}\alpha=0,\operatorname{Im}b\neq 0$: **80.** ա) $w=\dfrac{2}{2-z}$,

բ) $w=\dfrac{4z+2}{2-z}$: **81.** $w=\dfrac{z-1}{z-i}$, $\operatorname{Re}w+\operatorname{Im}w<0$:

82. $w=\left[(z-z_0)e^{-i\varphi_1}\right]^{\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}}$: **83.** $w=-e^{-z}$: **84.** $w=\sqrt{\dfrac{z-a}{b-z}}$:

85. $w=\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$: **86.** $w=\dfrac{2i-z^2}{2i+z^2}$: **87.** ա) $w=\left(\dfrac{16+z^4}{16-z^4}\right)^2$, բ) $w=e^{\pi i\frac{z-a}{b-a}}$, գ) $w=\left(\frac{1-e^{-z}}{1+e^{-z}}\right)^2$: **88.** $w=2\frac{z-2}{z}$:

89. $w=2i\frac{z+2}{z}$: **90.** $w=\left(\frac{z}{z-1+i}\right)^2$:

91.ա) $\frac{1}{2}(z_2-z_1)(\operatorname{Re}z_1+\operatorname{Re}z_2)$, բ) 1) 1, 2) 2, 3) 2, գ) 1) i, 2) $2i$, 3) $2i$, դ) πi, ե) $\frac{4}{3}$, զ) $-2+2i$, է) $-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$, ը) $-2\sqrt{2}i$, թ) $2-i\pi$, ժ) $2\pi+2i$, ի) $-i\frac{\pi^3}{24}$, լ) $-\frac{\pi^2}{8}$, խ) $-\frac{2\pi i}{5}$, ծ) $\frac{i\pi\sin 1}{3}$, կ) $i2\pi\cos 2$, հ) $i2\pi sh1$, ձ) $-i\frac{2\pi}{3}\cos 2$, ղ) $\frac{\pi}{3}$, ճ) 0, մ) 0, յ) $\frac{i\pi\sin 2}{2}$, ն) $\frac{i\pi}{2}$, շ) $i\pi\cos 1$, ո) $-i\frac{\pi^2}{2}$, չ) πe^{1+i}, պ) 1) 1, 2) $-\frac{e}{2}$, 3) $1-\frac{e}{2}$, ջ) $-2\pi i$, եթե γ-ն ընդգրկում է 0 կետը և չի ընդգրկում 1 և -1 կետերը; πi, եթե γ-ն ընդգրկում է 1 և -1 կետերից մեկը և չի ընդգրկում 0 կետը; $-\pi i$, եթե γ-ն ընդգրկում է 0 կետը և 1 ու -1 կետերից որևէ մեկը; $2\pi i$, եթե γ-ն ընդգրկում է 1 և -1 կետերը և չի ընդգրկում 0 կետը; 0, եթե γ-ն ընդգրկում է 0, 1 և -1 կետերը կամ չի ընդգրկում դրանցից ոչ մեկը, ռ) $-\frac{\pi}{2}(1+i)e^i$, ս) $-i\frac{3\pi\sqrt{e}}{32}$, վ) $\pi sh1$, տ) $i\frac{2\pi}{3}ch\pi$, ր) $-2\pi i$, ց) $i\frac{\pi}{3}$:

99. ա) $\dfrac{z}{(1-z)^2}$, բ) $-\ln(1-z)$, գ) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+z}{1-z}$, դ) $\dfrac{1}{\left(1+z^2\right)^2}$,

ե) $\dfrac{1}{(1-z)^4}$, զ) $\dfrac{z^6+4z^4+z^2}{\left(1-z^2\right)^4}$, է) $\cos\sqrt{z}$, ը) $\dfrac{1}{2}(chz+\cos z)$,

թ) $\dfrac{1}{4}\left((z+1)\dfrac{sh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}-ch\sqrt{z}\right)$, ժ) $\dfrac{1}{3}\left(e^z+2e^{-\frac{z}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{z}\right)$:

100. ա) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a^n}{b^{n+1}}z^n, R=\left|\dfrac{b}{a}\right|$, բ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n, R=1$,

գ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}i^{n-1}z^{2n+1}$, դ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{2n}, R=1$, ե) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{3n}, R=1$,

զ) $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-2^{-n-1}\right]z^n, R=1$, է) $-\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+4^{-n-1}\right]z^{2n+1}, R=1$,

ը) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(z^{3n}-z^{3n+1}\right), R=1$, թ) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(z^{4n-1}+z^{4n}\right), R=1$,

ժ) $\dfrac{2}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n5^{-n-1}-\dfrac{1}{2}\right]z^n, R=1$, ի) $\dfrac{i}{6}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2-3i)^n-(2+3i)^n}{13^n}z^n, R=\sqrt{13}$,

լ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(2^{3n+2}z^{3n+2}-2^{3n}z^{3n}\right),\ R=\dfrac{1}{2}$,

խ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}, R=+\infty$, ծ) $1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{2(2n)!}, R=+\infty$,

կ) $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}, R=+\infty$, հ) $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{9^n+3}{(2n)!}z^{2n}, R=+\infty$, ծ) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{4n-2}z^{2n}}{(2n)!}, R=+\infty$, ղ) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}}{(4n)!}z^{4n}$, $R=+\infty$,

ճ) $a^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}\left(\dfrac{z}{a}\right)^n$, $\left(a^{\alpha}=e^{\alpha\ln a}\right)$, $R=|a|$:

101. ա) $1-\dfrac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n}(z-1)^n$, $R=3$, բ) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}\left[(z-1)^{2n}+(z-1)^{2n+1}\right]$,

$R=2$, գ) $\dfrac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n-3)}{2^{n+2}}(z-1)^n$, $R=2$, դ) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin\left(1-\dfrac{\pi n}{2}\right)}{n!}(z-1)^{2n}$,

$R=+\infty$, ե) $ch1\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^{2n}}{(2n)!}+sh1\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=+\infty$,

զ) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{n+2}+(-1)^{n+1}}{6\cdot 2^n}(z-1)^n, R=1$, է) $\sqrt{e}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^n}{n!}, R=+\infty$,

ը) $1-4\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^{2n+1}, R=1$, թ) $-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{5^{n+1}}(z+2)^n$, $R=\dfrac{5}{3}$,

ժ) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}-1\right)}{n!}(z+1)^n, R=+\infty$:

102. ա) երրորդ, բ) առաջին, գ) չորրորդ, դ) երրորդ:

103. ա) $z=\pm i$ պարզ զրոներ, բ) $z=0$ երկրորդ կարգի զրո, $z=\pi k, k\in Z\setminus\{0\}$ պարզ զրոներ, գ) $z=i\pi(2k+1), k\in Z$ երկրորդ կարգի զրոներ, դ) $z=2\pi k, k\in Z$ չորրորդ կարգի զրոներ, ե) $z=0$ երրորդ կարգի զրո, $z=\pm\sqrt[3]{\pi k}$, $z=\sqrt[3]{\pi k}\left(\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$z=\sqrt[3]{\pi k}\left(-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $k\in N$ պարզ զրոներ, զ) $z=i\pi(2k+1), k\in Z$ պարզ զրոներ, է) $z=\pm i$ երկրորդ կարգի զրոներ, $z=i\pi k, k\in Z$ պարզ զրոներ, ը) $z=\pm i\pi$ երկրորդ կարգի զրոներ, $z=i\pi(2k+1), k\in Z\setminus\{0;-1\}$ պարզ զրոներ:

104. ա) 1) ոչ, 2) ոչ, 3) ոչ, 4) այո, $f(z)=\frac{1}{1+z}$, բ) այո, $f(z)=\frac{z}{2+z}$, գ) ոչ, դ) ոչ, ե) ոչ, զ) ոչ, է) այո, $f(z)=0$, ը) ոչ:

105. ա) $\frac{1}{z}$, բ) $\frac{1}{(z-a)^k}$, գ) $\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$, $0<|z|<1$, $-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}, |z|>1$, $-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n$, $0<|z-1|<1$, դ) $-\frac{1}{3(z+1)}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+2}}$, $0<|z+1|<3$, $\frac{1}{3(z-2)}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-2)^n}{3^{n+2}}$, $0<|z-2|<3$, $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{z^{n+2}}, |z|>2$, $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, 1<|z|<2$,

ե) $\frac{1}{6}+\frac{5z}{12}+\frac{7z^2}{24}+\frac{17}{6}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{2^n}+\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$,

զ) $-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}+\frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n-1}}+\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^{2n}}$,

է) $\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}+\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-4}{z^n}$, ը) $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+2}}-\frac{1}{2z}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$, թ) $\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+5)(z-1)^n}{2^{n+2}}+\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(z-1)^n}$, ժ) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-i)^n(1-n)}{(z-i)^{n+1}}$,

ի) $1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{\frac{n+2}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}}{(z-1)^{n+1}}$,

լ) $\frac{1}{27}\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n+1}2^{-2n-3}-2^{-n-2}\right)(z-1)^n+\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{(z-1)^n}$,

խ) $\frac{5}{9}-4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+2}}-\frac{1}{3(z+1)}$, ծ) $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n 4^{n-1}}{z^{2n}}$,

կ) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{z^n},\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n+n}{z^{n+1}}$,

հ) $-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z+2)^n}$, ձ) $-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{4^{n+1}}+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{(z+2)^n}$,

ղ) $\frac{1}{z-1}+\frac{5}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^n}$, ճ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}, z\in C$,

մ) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}z^{2n-1}}{(2n)!}, z\in C$, յ) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(n+k)!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!z^k}, 0<|z|<+\infty$,

ն) $\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{(n-k)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!z^k}, 0<|z|<+\infty$,

շ) $\frac{2}{z^4}-\frac{1}{2z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+4)!}, 0<|z|<+\infty$, ո) $\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{2z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{(n+3)!},0<|z|<+\infty$,

չ) $\dfrac{\sin 2}{z-2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos\left(2+\dfrac{\pi n}{2}\right)(z-2)^n}{(n+1)!},0<|z-2|<+\infty$,

պ) $z+i+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1-i(n+1)}{(n+1)!(z+i)^n},\ 0<|z+i|<+\infty$,

ջ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(z-1)^n},0<|z-1|<+\infty$,

ռ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{2n}\cos\left(1-\dfrac{\pi n}{2}\right)}{n!(z-2)^{2n}},0<|z-2|<+\infty$,

ս) $-\pi z+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!z^{2n-1}},\ 0<|z|<+\infty$,

վ) $(z-2)^3+6(z-2)^2+\dfrac{23}{2}(z-2)+5+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\left(48n^2+72n+23\right)}{(2n+2)!(z-2)^{2n-1}}+$

$+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\left(32n^2+48n+10\right)}{(2n+2)!(z-2)^{2n}}$ ։

106. ա) $\frac{1}{z+2}-\frac{2}{(z+2)^2}$, բ) $\frac{2}{z-2\pi ki}$, գ) $\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}$, դ) $-\frac{ie^{-b}}{2b(z-ib)}$, ե) z^2, զ) $\frac{1}{\pi(z-k)}$, է) $\frac{(-1)^k}{\pi(z-k)}$, ը) 0 ։ **107.** ա) $z=1$ վերացնելի եզակի կետ, $z=\infty$ առաջին կարգի բևեռ, բ) $z=0$ վերացնելի եզակի կետ, $z=\infty$ էապես եզակի կետ, գ) $z=0$ վերացնելի եզակի կետ, $z=\pi k, k\in Z\setminus\{0\}$ պարզ բևեռներ, դ) $z=0$ վերացնելի եզակի կետ, $z=2\pi ki,\quad k\in Z\setminus\{0\}$ պարզ բևեռներ, ե) $z=\pi k, k\in Z$ պարզ բևեռներ, զ) $z=i$ պարզ բևեռ, $z=-i$ վերացնելի եզակի կետ, է) $z=0$ պարզ բևեռ, $z=2\pi k, k\in Z\setminus\{0\}$ երկրորդ կարգի բևեռներ, ը) $z=1$ երկրորդ կարգի բևեռ, $z=\infty$ վերացնելի եզակի կետ, թ) $z=i\pi(2k+1), k\in Z$ պարզ բևեռներ, ժ) $z=i\pi\left(k+\frac{1}{2}\right), k\in Z$ պարզ բևեռներ, ի) եթե $a\neq\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k$, ապա $z=(-1)^k a+\pi k$ պարզ բևեռներ; եթե $a=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, ապա $z=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ երկրորդ կարգի բևեռներ; եթե $a=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, ապա $z=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ երկրորդ կարգի բևեռներ, լ) $z=\pi$ պարզ բևեռ է, $z=\pi k, k\in Z\setminus\{1\}$ երկրորդ կարգի բևեռներ, խ) $z=0$ էապես եզակի կետ, ծ) $z=1$ էապես եզակի կետ, կ) $z=0$ էապես եզակի կետ, հ) $z=1$ վերացնելի եզակի կետ, $z=-1$ էապես եզակի կետ։

108. ա) e^i, բ) 1, գ) $-\frac{2}{3}$, դ) $\frac{1}{4}$, ե) $\frac{3}{2}$, զ) $\frac{1}{n!}$, է) -1, ը) $\frac{\pi^3}{6}$, թ) $-\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$, ժ) 0 ։

109. ա) $\pm\frac{1-i}{4\sqrt{2}}$, երբ $z=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\pm\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$, երբ $z=\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, բ) 1, երբ $z=-1$, գ) $\pm\frac{3i}{16}$, երբ $z=\mp i$, դ) $-\frac{i}{4}$, երբ $z=\pm1$; $\frac{i}{2}$, երբ $z=-i$, ե) $\frac{(-1)^k}{\pi}$, երբ $z=k\in Z$, զ) $-\sin1$, երբ $z=1$, է) -1, երբ $z=i\pi(2k+1)\in Z$, ը) 0, երբ $z=0$; $\pm\frac{(-1)^k}{2\sqrt{\pi k}}$, երբ $z=\sqrt{\pi k},k\in N$; $\pm\frac{(-1)^k}{2i\sqrt{\pi k}}$, երբ $z=i\sqrt{\pi k},k\in N$, թ) $(-1)^{n+1}C_{2n}^{n-1}$, երբ $z=-1$; ժ) $\frac{1}{5}$, երբ $z=0$; $\frac{1-e^5}{25e^5}$, երբ $z=-5$, ի) $\frac{1}{24}$, երբ $z=0$, լ) 0, երբ $z=0$; $\pm\frac{1+i}{4\sqrt{2}}e^i$, երբ $z=\mp\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\pm\frac{1-i}{4\sqrt{2}}e^{-i}$, երբ $z=\mp\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, խ) $\mp\frac{\sqrt{3}}{6}e^{\pm\frac{\pi}{6}+\pi k}$, երբ $z=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z$, ծ) $-\frac{1}{4}$, երբ $z=0$; $\frac{1}{4}\sin^2 1$, երբ $z=2$, կ) 0, երբ $z=0$, հ) $\frac{1}{2}$, երբ $z=0$; $\frac{1}{2\pi ki}$; երբ $z=k,k\in Z\setminus\{0\}$, ձ) $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!(2n)!}$, երբ $z=0$, ղ) e, երբ $z=1$, ճ) $\sin1$, երբ $z=0$; $-\sin1$, երբ $z=1$, մ) $1-\frac{1}{e}$, երբ $z=0$; $\frac{1}{e}$, $z=-1$, յ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n)!}$, երբ $z=0$:

110. ա) 0, բ) π, գ) $-\pi^2$, դ) 0, ե) -1, զ) 0, է) 0, ը) $-a^n$, թ) 0, ժ) 0, ի) $\frac{1}{2e}$: **111.** ա) $-i$, բ) $-4\pi i$,

գ) $\pi\left[\sin 1-\cos 1+i\left(sh1-\cos 1\right)\right]$, դ) $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$, ե) $2\pi i$, զ) $\pi i\left(1-\frac{2}{e}\right)$, է) $2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)$, ը) $2\pi i$, թ) $-\frac{\pi i}{3}$, ժ) 0, ի) $-2\pi i\ln 2$,

լ) $2\pi i$, խ) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{i\left(1-\frac{3\pi}{4}\right)}$, ծ) πi, կ) $-i\pi^2$, հ) $\frac{\pi i}{12}\left(\sin 1-4\cos 1\right)$,

ձ) 0, ղ) $3\pi i$, ճ) πi, մ) $-\frac{\pi i}{2}$, յ) $\pi i\sin 1$, ն) $-\frac{16}{3}\pi i$, շ) 0, ո) $2\pi i$,

չ) $\frac{\pi}{2}$, պ) $-2\pi i\cos 1$, ջ) $4\pi i\left(\cos 1-\sin 1\right)$, ռ) $2\pi i$, ս) $-\pi i\left(cos1+2\sin 1\right)$, վ) $\frac{\pi}{2}\left(-1+i\right)\sin 1$, տ) $10\pi i$, ր) $\frac{\pi}{2}\left(-1+i\right)sh\frac{\pi}{2}$, ց) 0, ու) 0, փ) 0, ք) $-\frac{35}{12}\pi i$, և) $2\pi i$:

112. ա) 5, բ) 3, գ) 0, դ) 5, ե) 11, զ) 6, է) 2, ը) 3, թ) 1, ժ) 1, ի) 8, լ) 1, խ) 6, ծ) 1, կ) 0, հ) 3, ձ) 4, ղ) 2, ճ) n, մ) 1:

113. ա) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$, բ) $\frac{13\pi}{45}$, գ) $\frac{2\pi}{1-p^2}$, դ) $\frac{\pi\left(1-p+p^2\right)}{1-p}$, ե) 0,

զ) $\frac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$, է) $\frac{2\pi a}{\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^3}}$, ը) $\pi i\,\mathrm{sgn}\,a$, թ) $-2\pi i\,\mathrm{sgn}\left(\mathrm{Im}\,a\right)$, ժ) $2\pi i e^{-2a}$, ի) $2\pi\left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right)$, լ) $\dfrac{\pi\left(1+a^4\right)}{1-a^2}$,

խ) $\dfrac{\pi\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)}{\sqrt{a^2-1}}$, ծ) $\dfrac{2\pi}{\varepsilon^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-1\right)$:

114. ա) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$, բ) $\dfrac{\pi}{ab\left(a+b\right)}$, գ) $\dfrac{\pi\left(2n\right)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}$, դ) $-\dfrac{\pi}{27}$,

ե) $\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{a^5-b^5-5a^2b^2\left(a-b\right)}{a^3b^3\left(a^2-b^2\right)^3}$, զ) $\dfrac{\pi\left(a+2b\right)}{2ab^3\left(a+b\right)^2}$, է) $\dfrac{\pi}{16}a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{5}{2}}$,

ը) $\dfrac{14\pi\sqrt{3}}{9}$, թ) $\dfrac{2\pi}{7}$, ժ) $\dfrac{\pi}{3}$, ի) $\dfrac{5\pi}{12}$, լ) $\dfrac{4\pi}{3}$, խ) $\dfrac{\pi}{4}$, ծ) 0, կ) $\dfrac{\pi}{16a^3}$,

հ) $\dfrac{3\pi\sqrt{2}}{16a}$, ձ) 0, ղ) $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi\left(2m+1\right)}{2n}}$:

115. ա) $\pi e^{-3}\left(\cos 2-\sin 2\right)$, բ) $\dfrac{\pi}{2}e^{-4}\left(2\cos 2+\sin 2\right)$,

գ) $\dfrac{\pi}{16}\left(e^{-\lambda}-\dfrac{1}{3}e^{-3\lambda}\right)$, դ) $\dfrac{\pi}{2a}e^{-\lambda a}$, ե) $\dfrac{\pi}{4}\left(2-\lambda\right)e^{-\lambda}$, զ) $\dfrac{\pi}{3e}\left(1+\dfrac{1}{e}\right)$,

է) $\dfrac{\pi i}{7}\left(\dfrac{1}{e}-e^{-6}\right)$, ը) $\pi e^{-\lambda a}$, թ) $\pi\left(e^{-2}+e^{-3}\right)$, ժ) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$,

ի) $\dfrac{\pi}{4a^3}\left(\lambda a+1\right)e^{-\lambda a}$, լ) $\dfrac{\pi\left(a^2+3a+3\right)e^{-a}}{16a^5}$, խ) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}}\cos\dfrac{\lambda}{2}$,

ծ) $\dfrac{\pi}{2}e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}\sin\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{4}\right)$, կ) $\dfrac{\pi}{8a^3}\left(\sin a+\cos a\right)e^{-a}$, ի) $\dfrac{\pi}{2}e^{-a\sqrt{2}}\sin a\sqrt{2}$: 116. ա) π , բ) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}(1-i)$, գ) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}2^{-\frac{4}{3}}$,

դ) $\dfrac{\pi a^{-\alpha}}{\sin\pi\alpha}$, ե) $\left(2^{\alpha}-1\right)\dfrac{\pi a^{\alpha-1}}{\sin\pi\alpha}(\alpha\neq 0)$, զ) $\dfrac{\pi}{2\sin\pi\alpha}\left(1-2^{\alpha}+3^{\alpha-1}\right)$,

է) $\dfrac{\pi}{2\cos\frac{\pi p}{2}}$, ը) $\dfrac{\pi(1-p)}{4\cos\frac{\pi p}{2}}$, թ) $\dfrac{\pi\sin p\lambda}{\sin p\pi\cdot\sin\lambda}$, եթե $\lambda\neq 0$ և

$\dfrac{\pi p}{\sin p\pi}$, եթե $\lambda=0$, ժ) $\dfrac{\pi}{2a}\ln a$, **Ցուցում**: Դիտարկել $\int\limits_C \dfrac{\ln z}{z^2+a^2}dz$

ինտեգրալը, որտեղ C -ն ա) կոնտուրն է, ի) $\dfrac{\pi}{8a}\left(\pi^2+4\ln^2 a\right)$,

լ) $\dfrac{\ln a}{a}$, **Ցուցում**: Դիտարկել $\int\limits_C \dfrac{\ln^2 z}{(z+a)^2}dz$ ինտեգրալը, որտեղ C -ն

բ) կոնտուրն է, խ) $\dfrac{\pi}{8}\ln 2$, ծ) $-\dfrac{\pi}{4}$, կ) $-\dfrac{\pi^2}{16}$, հ) $\dfrac{\ln a}{2a^2}$, ձ) $\dfrac{\pi}{4}$, ղ) $\dfrac{\pi^3}{16}$,

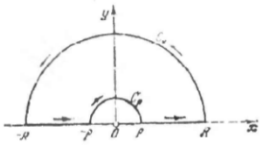
ճ) $\dfrac{\lambda\ln a}{a\sin\lambda}$, մ) 0 , յ) $2\pi\left(\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, ն) $-\dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{4}$,

շ) $\dfrac{\pi}{2a^3\sqrt{2a}}\left(\dfrac{3}{2}\ln a-1-\dfrac{3\pi}{4}\right)$, ո) $-\pi$, չ) $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, **Ցուցում**: Դիտարկել

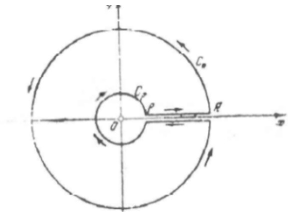
$\int\limits_C \dfrac{\ln z}{z^3+1}dz$, ինտեգրալը, որտեղ C -ն բ) կոնտուրն է, պ) $\dfrac{\pi}{4}$,

ջ) $\dfrac{\pi\left(1-a^2\right)+4a\ln a+2a\left(1+a^2\right)}{2a\left(1+a^2\right)^2}$, ռ) $\dfrac{1}{2}$:

ա/



բ/



116. ա) $-\dfrac{4}{5}\pi$, բ) $-\dfrac{\pi\sqrt{ab}}{a^2b^2\left(a+b\right)}$, գ) $\dfrac{2}{5}\pi$, դ) $-\dfrac{2\pi}{81}$, ե) $-\dfrac{\pi}{2a^2}$,

զ) $\dfrac{\pi}{2b^3}$, է) $-\dfrac{\pi b\left(3a^2+b^2\right)}{2a^3\left(a^2+b^2\right)^2}$, ը) $-\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$, թ) $-\dfrac{\pi\left(18\sqrt{2}+11\sqrt{3}\right)}{132}$,

ժ) $\dfrac{7\pi}{30}$, ի) $-\dfrac{5}{72}\pi$, լ) $-\pi$, խ) $-\dfrac{\pi}{160}$, ծ) 0, կ) 0,

117. ա) $x=0,04\sqrt{10}\cos\left(3t+4-\arccos\left(-0,1\sqrt{10}\right)\right)$,

բ) $x=5\cos\left(7t-4-\arccos\left(-\dfrac{43}{\sqrt{3074}}\right)\right)$, գ) $x=\dfrac{3}{8}\cos\left(2t+5-\dfrac{\pi}{2}\right)$,

դ) $x=0,125\sqrt{10}\cos\left(3t-6-\arccos\left(-0,1\sqrt{10}\right)\right)$,

ե) $x=\dfrac{5\sqrt{17}}{102}\cos\left(4t+7-ar\,c\cos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)$,

զ) $x=\dfrac{\sqrt{26}}{52}\cos\left(5t-4-ar\,c\cos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{26}}\right)\right)$,

է) $x=\dfrac{5\sqrt{5329}}{5329}\cos\left(8t+3-ar\,c\cos\left(-\dfrac{55}{\sqrt{5329}}\right)\right)$,

ը) $x=\dfrac{7\sqrt{221}}{442}\cos\left(2t-5-ar\,c\cos\dfrac{11}{\sqrt{221}}\right)$, թ) $x=\dfrac{4\sqrt{1189}}{1189}\cos\left(5t+8-\arccos\left(-\dfrac{17}{\sqrt{1189}}\right)\right)$,

ժ) $x=\dfrac{4\sqrt{1589}}{1589}\cos\left(5t-4-\arccos\left(-\dfrac{19}{\sqrt{1589}}\right)\right)$:

РЕЗЮМЕ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ФУНЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Анатолий Александрович Китбалян,
Саркис Артаваздович Акопян, Левон Велиханович Микаелян,
Камо Вагаршакович Арутюнян

Учебное пособие включает весь учебный материал по теории функций комплексного переменного, предназначенный для факультета информатики и прикладной математики, а также института физики.

SUMMARY

PROBLEMS AND EXERCISES ON THE THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE

Anatoly Aleksandrovich Kitbalyan, Sarkis Artavazdovich Akopyan, Levon Velikhanovich Mikaelyan, Kamo Vagarshakovich Arutyunyan

The textbook includes all the educational material on the theory of functions of a complex variable, intended for the Faculty of Computer Science and Applied Mathematics, as well as the Institute of Physics.

Գրականություն

1. Ներսիսյան Ա.Հ. Ներածություն կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության, Եր., ԵՊՀ հրատ., 1989։
2. Մուսոյան Վ.Խ. Կոմպլեքս անալիզ.- Եր., ԵՊՀ հրատ., 1991:
3. Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк. Лекции по теории функций комплексного переменного.-М.: Наука, 1982.
4. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972.
5. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функций комплексной переменной.-М.: Наука, 1967
6. Rudin W. Real and compiex analysis, Mc. Graw Hill, 2021.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կիտբալյան Անատոլի Ալեքսանդրի,
Հակոբյան Սարգիս Արտավազդի, Միքայելյան Լևոն Վելիխանի,
Հարությունյան Կամո Վաղարշակի

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

(Ուսումնական ձեռնարկ)

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. խմբագիր՝ Ա. Հովակիմյան

Հեղինակները հաստատում են, որ ծանոթ են «ԵՊՀ գրահրատարակչական քաղաքականությանը», և գրքում առկա փաստերը, դիրքորոշումները, կարծիքները շարադրված են հեղինակային իրավունքի և էթիկայի միջազգայնորեն ընդունված սկզբունքների պահպանմամբ:

Ստորագրված է տպագրության՝ 20.03.2025:
Չափսը՝ 60x84 1/16: Տպ. մամուլը՝ 9.75:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.ysu.am

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2025
publishing.ysu.am