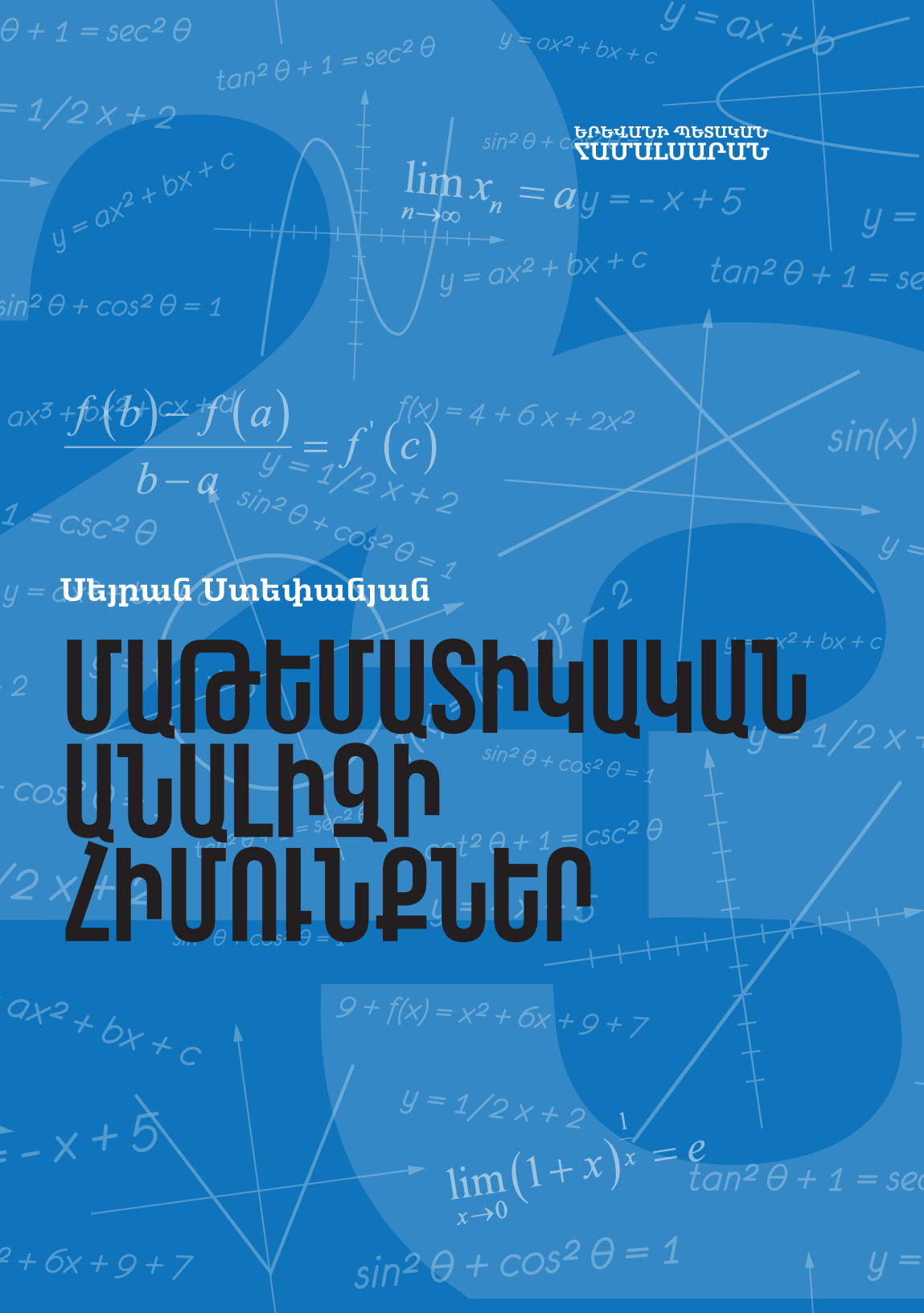




ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՀԱՍՏԱՆԱՐԱՆ

ՄԵԼԻՍԱՆ ՄԱՌԵՓԻԱՆՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՄԵՅՐԱՆ ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ
ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐ

Բուհական դասագիրք

ԵՐԵՎԱՆ

ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

2023

ՀՏԴ 517(075.8)
ԳՄԴ 22.161g73
Ս 887

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ գիտական խորհուրդը:*

Խմբագիր՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Ռ. Ա. Խաչատրյան:

Ստեփանյան Ս. Պ.

Ս 887 Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքներ: Բուհական
դասագիրք/ Ս. Պ. Ստեփանյան: ԵՊՀ. – Եր., ԵՊՀ հրատ.,
2023, – 320 էջ:

Դասագրքում ներկայացված է ԵՊՀ ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի «Տեղեկատվական անվտանգություն» մասնագիտության համար կարդացվող դասընթացի՝ «Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքներ» առարկայի ծրագրային նյութի համակարգված շարադրանքը:

Դասագիրքը նախատեսված է ԵՊՀ ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի «Տեղեկատվական անվտանգություն», ինչպես նաև այլ բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական մասնագիտացումներով սովորող ուսանողների համար:

ՀՏԴ 517(075.8)
ԳՄԴ 22.161g73

ISBN 978-5-8084-2641-2
<https://doi.org/10.46991/YSUPH/9785808426412>

© ԵՊՀ հրատ., 2023
© Ստեփանյան Ս.Պ., 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԱԽԱԲԱՆ	11
---------------	----

ԳԼՈՒԽ 1

ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ, ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՃՇԳՐԻՏ ԵԶՐԵՐ....14

§1. Ռացիոնալ թվեր և դրանց պարզագույն հատկությունները	14
Ռացիոնալ թվերի կարգավորվածություն	15
Թվաբանական գործողություններ ռացիոնալ թվերի հետ	16
Թվային առանցքի վրա հատվածի չափումը	17
Իրական թվերի կարգավորվածություն	22
Իրական թվերի մոտարկումը ռացիոնալ թվերով	23
Բազմության սահմանափակություն: Թվային բազմության եզրեր: Վերին ու ստորին ճշգրիտ եզրեր.....	26
Ճշգրիտ եզրի գոյության վերաբերյալ թեորեմը	28
Իրական թվեր. գումարում և բազմապատկում	31

ԳԼՈՒԽ 2

ԹՎԱՅԻՆ ՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

34

§ 1. Սահմանափակ և անսահմանափակ հաջորդականություններ	39
§ 2. Հաջորդականության սահման, անվերջ մեծ և անվերջ փոքր հաջորդականություններ	43
Զուգամետ և տարամետ հաջորդականությունների օրինակներ	46
§ 3. Անվերջ մեծ և անվերջ փոքր հաջորդականությունների հատկություններ	51
Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար.....	54

§ 4. Զուգամետ հաջորդականությունների հատկությունները	55
§ 5. Թվաբանական գործողություններ զուգամետ հաջորդականությունների հետ	58
§ 6. Զուգամետ հաջորդականության հատկություններն անհավասարություններով	62
§ 7. Մոնոտոն հաջորդականություններ	64
Ներդրված հատվածների լեմման	66
<i>e</i> թիվը	68
<i>e</i> թվի արժեքի հաշվումը	70
<i>e</i> թվի իռացիոնալությունը	73
§ 8. Հաջորդականության մասնակի սահման	73
§ 9. Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը	84
Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար	88

ԳԼՈՒԽ 3

ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԱՀՄԱՆ	92
Մեծություն: Փոփոխական մեծություն և ֆունկցիոնալ կախվածություն: Միջակայք և կետի շրջակայք	92
§ 1. Ֆունկցիայի սահմանի սահմանումը	94
§ 2. Միակողմանի սահմաններ	100
Անվերջ սահման	102
Ֆունկցիայի սահմանը անվերջությունում	102
§ 3. Թվաբանական գործողություններ վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների հետ	104
§ 4. Սահման ունեցող ֆունկցիայի հատկությունները	105
Կոշիի՝ ֆունկցիայի սահմանի գոյության սկզբունքը	107
§ 5. Նշանավոր սահմաններ	111
Հիմնական բանաձև <i>e</i> թվի համար	113

§ 6. Անվերջ փոքր և անվերջ մեծ ֆունկցիաներ, դրանց համեմատումը.....	116
Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար.....	119

ԳԼՈՒԽ 4

ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ.....	122
§ 1. Անընդհատության սահմանումը, օրինակներ.....	122
Աջակողմյան ու ձախակողմյան անընդհատություն.....	123
§ 2. Թվաբանական գործողություններ անընդհատ ֆունկցիաների հետ	125
§ 3. Բարդ ֆունկցիայի անընդհատությունը.....	127
§ 4. Ֆունկցիայի խզում, խզումների դասակարգումը.....	129
§ 5. Բոլցանո-Կոշիի առաջին և երկրորդ թեորեմները.....	133
Բոլցանո-Կոշիի առաջին (ֆունկցիայի զրո դառնալու վերաբերյալ) թեորեմը	133
Բոլցանո-Կոշիի երկրորդ (ֆունկցիայի միջանկյալ արժեք ընդունելու վերաբերյալ) թեորեմը	136
§ 6. Վայերշտրասի առաջին և երկրորդ թեորեմները.....	137
Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմը.....	138
§ 7. Մոնտոն ֆունկցիայի անընդհատությունը.....	140
§8. Հակադարձ ֆունկցիայի անընդհատությունը	141
§9. Հավասարաչափ անընդհատություն: Կանտորի թեորեմը.....	143
Մի քանի կարևոր բանաձևեր սահմանների վերաբերյալ.....	146
Օրինակներ՝ հիմնական բանաձևերի կիրառմամբ.....	148
Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար.....	149

ԳԼՈՒԽ 5

ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ, ՖՈՒՆԿՑԻԱՑԻ

ԱՇՄԱՆՑՑԱԼ	151
§1. Ֆունկցիայի ածանցյալ, նրա երկրաչափական և ֆիզիկական իմաստը	151
Ածանցյալի երկրաչափական իմաստը	152
Ածանցյալի ֆիզիկական իմաստը	154
Միակողմանի ածանցյալներ	154
Անվերջ ածանցյալ	155
§2. Ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը և կապը անընդհատության հետ	156
Դիֆերենցիալի երկրաչափական իմաստը	158
§3. Գումարի, արտադրյալի և քանորդի դիֆերենցման կանոնները	159
§4. Բարդ և հակադարձ ֆունկցիաների ածանցյալները	161
Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալը	163
§5. Պարզագույն ֆունկցիաների ածանցյալները	164
Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար	166

ԳԼՈՒԽ 6

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ	168
§1. Ֆերմայի թեորեմը	168
§2. Ռոլի թեորեմը	170
§3. Լագրանժի թեորեմը	172
§4. Կոշիի թեորեմը	177
§5. Լոպիտալի առաջին կանոնը	178
§6. Բարձր կարգի ածանցյալներ և դիֆերենցիալներ	183
Առաջին դիֆերենցիալի անփոփոխականությունը (ինվարիանտությունը)	184

Բարձր կարգի դիֆերենցիալում ինվարիանտության խախտումը.....	185
§7. Թեյլորի բանաձևը բազմանդամի և կամայական ֆունկցիայի համար	186
Կամայական ֆունկցիայի դեպքը.....	188
Մնացորդային անդամը՝ Լագրանժի տեսքով	188
Մնացորդային անդամը՝ Կոշիի տեսքով.....	190
Մնացորդային անդամը՝ Պեանոյի տեսքով.....	191
Սակլորենի բանաձևը որոշ տարրական ֆունկցիաների համար.....	195
Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար.....	198

ԳԼՈՒԽ 7

ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ

ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ.....	199
§1. Էքստրեմումի բավարար պայմաններ.....	199
Էքստրեմումի երրորդ բավարար պայման: Ֆունկցիայի հետազոտումը բարձր կարգի ածանցյալներով	204
§2. Ֆունկցիայի ուռուցիկություն և գոգավորություն: Ֆունկցիայի ուռուցիկության բավարար պայմաններ.....	205
§3. Ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետ: Անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ.....	209
Շրջման կետի անհրաժեշտ պայմանը.....	210
Շրջման կետի առաջին բավարար պայմանը.....	211
Շրջման կետի երկրորդ բավարար պայման	212
§4. Շրջման կետի երրորդ բավարար պայմանը	213
§5. Ֆունկցիայի գրաֆիկի ասիմպտոտներ.....	215
§6. Ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման հիմնական սխեման .	217
Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար.....	218

ԳԼՈՒԽ 8

ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ, ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ

ԿԱՆՈՆՆԵՐ.....	221
§1. Ֆունկցիայի նախնական, անորոշ ինտեգրալ	221
§2. Անորոշ ինտեգրալների հիմնական աղյուսակ.....	224
§3. Ինտեգրում փոփոխականի փոխարինման միջոցով.....	226
§5. Ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրում	228
Կանոնավոր կոտորակների ինտեգրումը	231
§6. Եռանկյունաչափական արտահայտությունների ինտեգրումը.....	233
Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար.....	236

ԳԼՈՒԽ 9

ՈՐՈՇՅԱԼ ԵՎ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ.....

§1. Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը: Ինտեգրելիության անհրաժեշտ պայմանը.....	239
§2. Դարբուի գումարները և նրանց հատկությունները	244
§3. Ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայման	252
§4. Ինտեգրելի ֆունկցիաների դասեր.....	253
§5. Որոշյալ ինտեգրալի հիմնական հատկություններ	256
Անհավասարություններով արտահայտվող հատկությունները	260
§6. Միջին արժեքի թեորեմը	262
Միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմը.....	263
Միջին արժեքի երկրորդ թեորեմը.....	265
§7. Ինտեգրալը որպես փոփոխական վերին սահմանի ֆունկցիա: Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը	265
Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը.....	268

§8. Մասերով ինտեգրման և փոփոխականի փոխարինման կանոնները որոշյալ ինտեգրալում	269
Փոփոխականի փոխարինում որոշյալ ինտեգրալում.....	270
§9. Անիսկական ինտեգրալի սահմանումը, Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը, համեմատական հայտանիշները.....	272
Անիսկական ինտեգրալի մի քանի հատկություններ.....	274
Դրական ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունը.....	275
Առաջին սեռի անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունը ընդհանուր դեպքում.....	277
Կոշիի սկզբունքը (բավարար պայման)	278
Համեմատության հայտանիշներ.....	278
Բացարձակ զուգամիտություն	282
Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշները	283
§10. Անիսկական ինտեգրալ անսահմանափակ ֆունկցիայից.....	284
Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար.....	287

ԳԼՈՒԽ 10

ԿՈՐԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ, ՊԱՏԿԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍ, ՄԱՐՄՆԻ ԾԱՎԱԼ.....291

§ 1. Կորի երկարության սահմանումն ու ադիտիվության հատկությունը: Ողորկ կորի երկարության բանաձևը	291
§ 2. Հարթ պատկերի մակերեսի սահմանումը: Կորագիծ սեղանի մակերեսի բանաձևը, կորագիծ սեկտորի մակերեսը	302
Մակերեսի արտահայտումն ինտեգրալով	304
Կորագիծ սեկտորի մակերեսը.....	307

Մարմնի ծավալի սահմանումն ու արտահայտումը որոշյալ ինտեգրալով.....	309
Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար.....	315
 SUMMARY	317
PE3IOME	317
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ.....	318

ՆԱԽԱԲԱՆ

Դասագրքի հիմքում ընկած են Երևանի պետական համալսարանի ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի (ԻԿՄ) ֆակուլտետում հեղինակի՝ երկար տարիների ընթացքում կարդացած դասախոսությունները:

Գիրքը բաղկացած է տասը գլխից:

Առաջին գլխում տրվում է իրական թվի գաղափարը: Սահմանվում են իրական թվերի բազմության համար վերին ու ստորին ճշգրիտ եզրերի գաղափարները, և ապացուցվում են դրանց գոյությունը: Իրական թվերի միջև սահմանվում են կարգավորվածություն ու թվաբանական գործողություն:

Երկրորդ գլուխը նվիրված է թվային հաջորդականություններին: Զուգամետ հաջորդականությունների համար բերված են հիմնական հատկությունները: Տրված է ենթահաջորդականության գաղափարը: Բերված է հաջորդականության վերջավոր սահմանի գոյության վերաբերյալ թեորեմի ապացույցը վերին ու ստորին սահմաններով:

Տրված են անվերջ մեծի ու անվերջ փոքրերի սահմանումներն ու դրանց հատկությունները:

Երրորդ գլխում բերվում է ֆունկցիայի սահմանի սահմանումը՝ և՛ ըստ Կոշիի, և՛ ըստ Հայնեի: Նաև ապացուցվում է այդ երկու սահմանումների համարժեքությունը: Ապացուցվում են սահման ունեցող ֆունկցիաների հատկություններն ու հիմնական բանաձևերը:

Չորրորդ գլուխը նվիրված է ֆունկցիայի անընդհատությանն ու խզումներին: Ապացուցված են և՛ մոնոտոն, և՛ բարդ, և՛ հակադարձ ֆունկցիաների անընդհատությունները: Բերված են անընդհատության հիմնական թեորեմներն իրենց

ապացույցներով: Տրված են նաև հավասարաչափ անընդհատության սահմանումն ու Կանտորի հայտնի թեորեմը:

Հինգերորդ գլխում բերված են ֆունկցիայի դիֆերենցելիության գաղափարը, ածանցյալի և դիֆերենցիալի կապը, դրանց երկրաչափական իմաստը, ինչպես նաև կապը անընդհատության հետ:

Վեցերորդ գլուխը նվիրված է դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական թեորեմների ձևակերպմանն ու դրանց ապացույցներին: Յուրաքանչյուր թեորեմի համար նկարագրված է երկրաչափական իմաստը:

Բերված է նաև անորոշությունների բացման հիմնական թեորեմի ապացույցը (Լոպիտալի կանոնը):

Կամայական ֆունկցիայի համար ստացվել է Թեյլորի բանաձևը՝ մնացորդային անդամի տարբեր տեսքերով:

Յոթերորդ գլուխը նվիրված է ֆունկցիայի հետազոտմանը: Բերված են էքստրեմումի ինչպես անհրաժեշտ, այնպես էլ բավարար պայմաններ: Տրված են ֆունկցիայի ուռուցիկության, գոգավորության և շրջման կետի սահմանումները: Բերված են անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ շրջման կետի վերաբերյալ: Տրված են ֆունկցիայի ասիմպտոտների սահմանումները, և նկարագրված են ասիմպտոտների տարբեր տեսքերը:

Ութերորդ գլխում տրված են ֆունկցիայի նախնականի գաղափարը, անորոշ ինտեգրալն ու ինտեգրման պարզագույն կանոնները:

Իններորդ գլուխը նվիրված է որոշյալ և անիսկական ինտեգրալների սահմանումներին ու հատկություններին: Բերված են Դաբբուի ստորին ու վերին գումարների հատկությունները և նրանց ապացույցները: Դիտարկված են ինտեգրելիու-

թյան անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները, ինտեգրելի ֆունկցիաների որոշ դասեր, որոշյալ ինտեգրալի հիմնական հասկությունները, միջին արժեքի թեորեմները: Բերված են նաև Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը, անիսկական ինտեգրալների սահմանումներն ու զուգամիտության հայտանիշներ:

Տասներորդ գլուխը նվիրված է որոշյալ ինտեգրալի կիրառություններին: Բերված են կորի երկարության, պատկերի մակերեսի և մարմնի ծավալի հաշվման բանաձևերը:

Յուրաքանչյուր գլխի վերջում բերվում են խնդիրներ ու վարժություններ:

Հատուկ շնորհակալություն ենք հայտնում ԵՊՀ ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի պրոֆեսորադասախոսական անձնակազմին դասագրքի բազում քննարկումների ընթացքում կատարած էական դիտողությունների ու օգտակար առաջարկությունների համար:

Շնորհակալություն ենք հայտնում նաև բոլոր նրանց, ում բարեկամական աջակցությամբ լույս է ընծայվում այս դասագիրքը:

Ս. Պ. Ստեփանյան

ԳԼՈՒԽ 1
ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ, ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՃՇՋՐԻՏ
ԵԶՐԵՐ

**§1. Ռացիոնալ թվեր և դրանց պարզագույն
հատկությունները**

Իրական թվի գաղափարը տալու, այդ թվերի մեջ կարգավորման համակարգ ներմուծելու և թվաբանական գործողություններ կատարելու կանոններ սահմանելու նպատակով նախ դիտարկենք ռացիոնալ թվերի բազմությունը:

Սկսենք ամբողջ թվերի բազմությունից և այն նշանակենք Z -ով. $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$:

Տարրական մաթեմատիկայի դասընթացից գիտենք երկու ամբողջ թվերի բաժանման գործողությունը. եթե բաժանարարը հավասար չէ զրոյի, ընդ որում՝ վերցնում ենք քանորդը՝ $+$ նշանով, եթե բաժանելին ու բաժանարարը նույն նշանի են, և $-$ նշանով՝ մնացած դեպքերում:

Սահմանում 1.1: Ռացիոնալ թիվ ասելով՝ հասկանում ենք

$\frac{m}{n}$ տեսքի թվերը, որտեղ $m \in Z$, $n \in N$:

Ռացիոնալ թվերի կարգավորվածություն

Ցանկացած a ու b երկու ռացիոնալ թվեր կապված են $>$, $<$ և $=$ նշաններից որևէ մեկով: Այս կանոնը անվանում են կարգավորվածության (համեմատության) կանոն:

Սահմանում 1.2: Կասենք $\frac{m_1}{n_1}$ և $\frac{m_2}{n_2}$ ռացիոնալ թվերը

իրար հավասար են, եթե $m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$:

Օրինակ՝ $\frac{2}{7}$ և $\frac{10}{35}$ ռացիոնալ թվերը իրար հավասար են:

Այսինքն՝ նույն ռացիոնալ թիվը տարբեր ձևերով կարելի է ներկայացնել երկու ամբողջ թվերի հարաբերությունների տեսքով:

Օրինակ՝

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots = \frac{9}{18} = \dots \quad (1.1)$$

Ռացիոնալ թվերի $>$ և $<$ հարաբերությունը սահմանելու համար պայմանավորվենք, որ $\frac{m}{n}$ ռացիոնալ թվի հայտարարը դրական թիվ է:

Դիտարկենք $\frac{m_1}{n_1}$ և $\frac{m_2}{n_2}$ ռացիոնալ թվերը:

Սահմանում 1.3: Կասենք, որ $\frac{m_1}{n_1} > \frac{m_2}{n_2}$, եթե $m_1 \cdot n_2 > m_2 \cdot n_1$:

Սահմանում 1.4: Կասենք, որ $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$, եթե $m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1$:

Թվաբանական գործողություններ ռացիոնալ թվերի հետ

Դիցուք $a = \frac{m_1}{n_1}$ և $b = \frac{m_2}{n_2}$ ռացիոնալ թվեր են:

Սահմանում 1.5: a և b ռացիոնալ թվերի գումար ասելով՝ հասկանում ենք հետևյալ՝

$$c = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2} \text{ ռացիոնալ թիվը:}$$

Սահմանում 1.6: a և b ռացիոնալ թվերի արտադրյալ ասելով՝ հասկանում ենք հետևյալ՝

$$c = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} \text{ ռացիոնալ թիվը:}$$

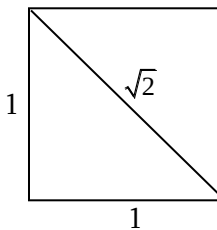
Սահմանված այս գործողությունները օժտված են հետևյալ հատկություններով:

1. Եթե $a > b$ և $b > c$, ապա $a > c$ (տրանզիտիվության հատկություն):
2. $a + b = b + a$ (տեղափոխելիության հատկություն):
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (գուգորդական հատկություն):
4. Գոյություն ունի 0 ռացիոնալ թիվ այնպիսին, որ $a + 0 = a$, $\forall a \in Q$:
5. Ցանկացած a ռացիոնալ թվի համար գոյություն ունի $\bar{a}$ հակադիր ռացիոնալ թիվ այնպիսին, որ $a + \bar{a} = 0$:
6. $a \cdot b = b \cdot a$ (տեղափոխելիության հատկություն):
7. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (գուգորդականության հատկություն):
8. Գոյություն ունի 1 (միավոր) ռացիոնալ թիվ այնպիսին, որ $a \cdot 1 = a$, $\forall a \in Q$:

9. Ցանկացած $a \neq 0$ ռացիոնալ թվի համար գոյություն ունի $\tilde{a}$ հակադարձ ռացիոնալ թիվ այնպիսին, որ $a \cdot \tilde{a} = 1$:
10. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (բազմապատկման բաշխական օրենքը գումարման նկատմամբ):
11. Եթե $a > b$, ապա $a + c > b + c$:
12. Եթե $a > b$ և $c > 0$, ապա $a \cdot c > b \cdot c$:
13. Արքիմեդի կանոնը, ըստ որի՝ կա կամայական ռացիոնալ թվից մեծ բնական թիվ:

Թվային առանցքի վրա հատվածի չափումը

Դպրոցական դասընթացից հայտնի է, որ երկու հատվածներ կոչվում են համաչափելի, եթե նրանց երկարությունների հարաբերությունը ռացիոնալ թիվ է: Կան նաև ոչ համաչափելի հատվածներ, որոնք կդիտարկենք հետագա շարադրանքում: Այդպիսի հատվածներ են, օրինակ, քառակուսու անկյունագիծն ու կողմը:



Նկար 1.1

Ապացուցենք, որ քառակուսու անկյունագիծն ու կողմը համաչափելի չեն (Նկ. 1.1):

Ենթադրենք, որ դրանք համաչափելի են: Սա նշանակում է, որ ներքնաձիգի ու կողմի երկարությունների հարաբերությունը ներկայացվում է անկրճատելի $\frac{m}{n}$ կոտորակի տեսքով՝ $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$:

Քառակուսի բարձրացնելով հավասարության երկու մասը՝ կստանանք՝ $2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$: Սա նշանակում է m -ը

գույգ թիվ է՝ $m = 2k$: Տեղադրելով $2 = \frac{m^2}{n^2}$ -ի մեջ՝ կստանանք՝

$2 = \frac{4k^2}{n^2}$, որտեղից էլ պարզ կդառնա $n^2 = 2k^2$, այսինքն՝ n -ը

ևս գույգ է: Հետևաբար $\frac{m}{n}$ հարաբերությունը կրճատվում է:

Ստացած հակասությունը նշանակում է, որ քառակուսու անկյունագիծն ու կողմը համաչափելի չեն:

Թվային առանցք կանվանենք այն ուղիղը, որի վրա վերցված է որևէ O կետ, որը կանվանենք սկզբնակետ, և որևէ երկարությամբ OE հատված, որը կանվանենք մասշտաբ: E կետը թվային առանցքի վրա տեղավորենք O կետից աջ և այդ OE ուղղությունը անվանենք դրական ուղղություն: Բնական է դնել հետևյալ հարցը: Արդյո՞ք հնարավոր է թվային առանցքի որևէ M կետի համապատասխանության մեջ դնել թիվ, որը անվանենք OM հատվածի երկարություն: Այդ թիվը կլինի դրական, եթե M կետը գտնվում է O -ից աջ և բացասական, եթե M կետը O -ից ձախ է:

Նախ նկատենք, որ յուրաքանչյուր ռացիոնալ թվի թվային առանցքի վրա համապատասխանում է որոշակի կետ: Իրոք, թվային առանցքի վրա կարող ենք կառուցել այն հատվածը, որի երկարությունը կլինի OE մասշտաբի $\frac{1}{n}$ մասը, որտեղ n -ը կամայական դրական ամբողջ թիվ է: Այնուհետև կարող ենք կառուցել նաև այն հատվածը, որի երկարությունը OE մասշտաբի $\frac{m}{n}$ մասն է, այսինքն՝ $\frac{1}{n}$ -ը վերցված է m հատ՝ $m > 0$:

Հետևաբար կառուցման նշված եղանակով կարող ենք թվային առանցքի վրա նշել այն կետը, որը կհամապատասխանի $\frac{m}{n}$ ռացիոնալ թվին:

Դիցուք թվային առանցքի OM հատվածը պահանջվում է չափել OE մասշտաբով: Այստեղ արդեն նշենք, որ անհամաչափելի հատվածների գոյությունը հնարավորություն է տալիս պնդելու, որ թվային առանցքի ոչ բոլոր կետերին է համապատասխանում ռացիոնալ թիվ: Հետևաբար հատվածների չափման համար ռացիոնալ թվերը չեն բավականացնում: Դրա համար անհրաժեշտ է լինելու ընդլայնել թվերի դաշտն այնպես, որ հնարավոր լինի թվային առանցքի յուրաքանչյուր M կետի համապատասխանեցնել թիվ, որը կանվանենք OM հատվածի երկարություն:

Դիցուք M -ը թվային առանցքի կամայական կետ է, որը, ենթադրենք, E կետի հետ միասին գտնվում է O կետից աջ: Ցանկանում ենք OM հատվածը չափել OE մասշտաբով: Այդ

նպատակով OE մասշտաբը տեղավորենք OM հատվածի վրա: Հնարավոր է երկու դեպք:

1-ին դեպք: OE մասշտաբը OM -ի վրա տեղավորվում է a_0 ամբողջ անգամ առանց մնացորդի: Այդ դեպքում կասենք, որ M կետին համապատասխանում է a_0 թիվը, և OM հատվածի երկարությունը կլինի a_0 ամբողջ թիվը:

2-րդ դեպք: OE մասշտաբը OM -ի վրա տեղավորվում է a_0 ամբողջ անգամ և մնում է որևէ NM մնացորդ, որը փոքր է OE -ից: Այս դեպքում OM -ի չափը պակասորդով կլինի a_0 ամբողջ թիվը միավորի ճշտությամբ: Այնուհետև NM մնացորդի վրա տեղավորում ենք OE մասշտաբի $\frac{1}{10}$ մասը:

Եթե այն տեղավորվում է a_1 ամբողջ անգամ և մնում է որևէ N_1M մնացորդ, ապա OM -ի չափը պակասորդով կլինի a_0, a_1 $\frac{1}{10}$ -ի ճշտությամբ: Այնուհետև N_1M մնացորդի վրա տեղավորում ենք OE մասշտաբի $\frac{1}{100}$ մասը և այսպես շարունակ:

Արդյունքում հնարավոր է երկու դեպք:

1) Այդ պրոցեսը վերջավոր քայլերից հետո ավարտվում է:

Այդ դեպքում կասենք, որ M կետին համապատասխանում է վերջավոր տասնորդական կոտորակ,

$$a_0; \quad a_0, a_1; \quad a_0, a_1, a_2; \quad \dots; \quad a_0, a_1, a_2 \dots a_n; \quad (1.2)$$

կամ անվերջ տասնորդական կոտորակ, որի մեջ n -րդ քայլից հետո գրված են զրոներ $a_0, a_1, a_2 \dots a_n \ 000 \dots$:

2) Մասշտաբի մասերի բաժանման պրոցեսը անվերջ շարունակվում է: Չափման այս նկարագրած պրոցեսով կատանանք, որ ընթացիկ M կետին համապատասխանության մեջ է դրվում որոշակի անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով գրված թիվ՝

$$a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots, \quad (1.3)$$

որտեղ $a_0 \in \mathbb{Z}$, իսկ $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ -ը ընդունում են արժեքներ $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ բազմությունից:

Ընդհանրապես $a = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n$ ռացիոնալ թիվը, որտեղ $a_n \neq 0$ կարող է ներկայացվել երկու տարբեր անվերջ տասնորդական կոտորակների տեսքով՝

$$\text{ա) } a = a_0, a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \cdots,$$

$$\text{բ) } a = a_0, a_1 a_2 \cdots a_{n-1} (a_n - 1) 999 \cdots:$$

Ստացվեց, որ թվային առանցքի վրա որոշակի հատվածի չափման պրոցեսի նկարագրությունը բնականորեն հանգեցրեց անվերջ տասնորդական կոտորակների դիտարկմանը:

Նշենք, որ նույն դատողությունները կարելի է կատարել նաև այն դեպքում, երբ M կետը ընկած է O կետից ձախ: Այդ դեպքում M կետին համապատասխանող անվերջ տասնորդական կոտորակը կանվանենք բացասական թիվ:

Այսպիսով՝ ունեցանք, որ թվային առանցքի յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \quad (1.4)$$

տեսքի թվերից որևէ մեկը: Ճիշտ է նաև հակառակը, որ յուրաքանչյուր անվերջ տասնորդական կոտորակին համապատասխանում է թվային առանցքի որևէ կետ:

Կարելի է համոզվել, որ ռացիոնալ թվի (1.1) սահմանումը համարժեք է հետևյալ պնդմանը:

Պնդում 1.1: Վերջավոր տասնորդական կամ անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակը ռացիոնալ թիվ է:

Անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակը այն կոտորակն է, որի գրելաձևում, որոշ տեղից սկսած, մեկ կամ մի քանի թվանշաններ պարբերաբար կրկնվում են:

Օրինակ՝ $7.54232323\cdots$, $4.215333333\cdots$ և այլն:

Սահմանում 1.7: Անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակը կանվանենք իռացիոնալ թիվ:

Սահմանում 1.8: Ռացիոնալ ու իռացիոնալ թվերը միասին կանվանենք իրական թվեր:

Իրական թվերի կարգավորվածություն

Սահմանում 1.9: Կասենք՝ a ու b երկու իրական թվեր՝

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots, \quad (1.5)$$

$$b = \pm b_0, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots, \quad (1.6)$$

հավասար են, եթե ունեն նույն նշանը, և տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n \cdots \quad (1.7)$$

կամ $a = a_0, a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n 000\ldots$, $b = a_0, a_1 a_2 \cdots a_{n-1} (a_n - 1) 999\ldots$

Թվի մոդուլ: Անվերջ տասնորդական կոտորակով ներկայացվող a թվի մոդուլ՝ $|a|$, կանվանենք այդ նույն ներկայացումով գրված թիվը՝ միայն թե վերցրած + նշանով:

Դիցուք a -ն ու b -ն երկու տարբեր իրական ոչ բացասական թվեր են, այսինքն՝

$$a = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots, \quad (1.8)$$

$$b = b_0, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots : \quad (1.9)$$

Քանի որ իրար հավասար չեն, նշանակում է՝ խախտվում է 1.7 հավասարություններից գոնե մեկը: Երբ k -ն այն ամենավոքոր համարն է, որի դեպքում $a_k \neq b_k$, ապա կասենք, որ $a > b$, եթե $a_k > b_k$, և, հակառակը, $a < b$, եթե $a_k < b_k$ ՝ բացառությամբ այն դեպքի, երբ $a = a_0, a_1 a_2 \cdots a_{m-1} a_m 000 \dots$ և $b = a_0, a_1 a_2 \cdots a_{m-1} (a_m - 1) 999 \dots$ թվերն են:

Եթե a ու b թվերից մեկը ոչ բացասական է, իսկ մյուսը՝ բացասական, ապա ոչ բացասական թիվը մեծ է բացասականից:

Եթե a ու b երկու թվերն էլ բացասական են, այդ դեպքում կհամեմատենք $|a|$ ու $|b|$ թվերը: Կասենք $a > b$, եթե $|a| < |b|$ և, հակառակը, $a < b$, եթե $|a| > |b|$:

Այսպիսով՝ ամբողջովին ձևակերպեցինք անվերջ տասնորդական կոտորակների տեսքով ներկայացվող երկու a ու b թվերի համեմատության կանոնը:

Իրական թվերի մոտարկումը ռացիոնալ թվերով

Դիցուք տրված է որևէ իրական թիվ: Որոշակիության համար ընդունենք, որ այն դրական է և ներկայացվում է $a = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ տեսքով: Եթե այս թվի մեջ վերցնենք

ստորակետից հետո գրված թվանշաններից վերջավոր հատ՝ մինչև a_n -ը ներառյալ, այսինքն՝ կտրենք ստորակետից հետո n -րդ նշանից, ապա կստանանք $a_0, a_1 a_2 \cdots a_n$ վերջավոր տասնորդական կոտորակ: Ավելացնենք այդ թվին $\frac{1}{10^n}$, կստանանք $a_0, a_1 a_2 \cdots a_n + \frac{1}{10^n}$ այլ վերջավոր տասնորդական կոտորակ: Իրական թվերի համեմատության կանոնից կարող ենք պնդել, որ տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \leq a \leq a_0, a_1 a_2 \cdots a_n + \frac{1}{10^n}: \quad (1.10)$$

Այս անհավասարությունը ցույց է տալիս, որ a իրական թիվը ընկած է երկու տարբեր ռացիոնալ թվերի միջև, որոնց տարբերությունը $\frac{1}{10^n}$ է: Ակնհայտ է, որ $\exists n \in \mathbb{N}$, որից սկսած՝ բոլոր բնական թվերի համար $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$:

Այսպիսով՝ կարող ենք կատարել հետևյալ պնդումը:

Պնդում 1.2: Կամայական a իրական ու կամայական ε դրական ռացիոնալ թվերի համար գոյություն ունեն երկու տարբեր α_1 և α_2 ռացիոնալ թվեր այնպես, որ $\alpha_1 \leq a \leq \alpha_2$, ընդ որում՝ $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon$:

Այստեղից էլ ակնհայտ է, որ $a_0, a_1 a_2 \cdots a_n$ ռացիոնալ թիվը a իրական թվի մոտարկումն է $\frac{1}{10^n}$ ճշտությամբ:

Պնդում 1.3: Դիցուք a -ն ու b -ն անվերջ տասնորդական կոտորակների տեսքով գրված իրական տարբեր թվեր են: Այդ դեպքում գոյություն ունի γ ռացիոնալ թիվ, որն ընկած է a և b թվերի միջև:

Ապացույց: Նախ ընդունենք, որ a -ն ու b -ն դրական են, և $a > b$: Եթե $a = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$, և $b = b_0, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$, ապա $a > b$ -ից ստացվում են, որ գոյություն ունի k այնպես, որ $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k > b_k$:

Եթե a թվի ներկայացման մեջ k համարից հետո բոլորը զրոներ են, այսինքն՝ $a = a_0, a_1 a_2 \cdots a_k 000 \cdots$, այդ դեպքում կդիտարկենք a թվի հետևյալ գրելաձևը $a = a_0, a_1 a_2 \cdots (a_k - 1) 999 \cdots$:

Հնարավոր է, որ a թվի գրելաձևի մեջ k համարից հետո լինեն զրոներ: Նշանակենք m -ով k -ից հետո այն ամենափոքր համարը, որի դեպքում $a_m \neq 0$: Այդ դեպքում a թիվը կունենա հետևյալ տեսքը՝ $a = a_0, a_1 a_2 \cdots a_k 00 \cdots 0 a_m \cdots$, $a_m > 0$:

Այսպիսով՝ առանց ընդհանրությունը խախտելու ի սկզբանե կարող ենք ենթադրել, որ a թիվը ներկայացված է անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով: Որպես γ թիվ կարող ենք վերցնել $\gamma = a_0, a_1 a_2 \cdots a_k 000 \cdots (a_m - 1) 999 \cdots$: Ակնհայտ է, որ տեղի ունի $a > \gamma > b$ անհավասարությունը: Իրոք, $a > \gamma$, քանի որ $a_m > a_m - 1$, իսկ $\gamma > b$ -ն ստացվում է $a_k > b_k$ -ից:

Եթե $a > 0$, իսկ $b < 0$, ապա կվերցնենք $\gamma = 0$: Եթե երկուսն էլ բացասական են, ապա կդիտարկենք $|a|$ ու $|b|$ թվերը: ■

Պնդում 1.4: Դիցուք a -ն ու b -ն անվերջ տասնորդական կոտորակներով ներկայացված թվեր են: Եթե կամայական ε դրական ռացիոնալ թվի համար գոյություն ունեն α ու β ռացիոնալ թվեր այնպես, որ $\alpha \leq a \leq \beta$, $\alpha \leq b \leq \beta$ և $\beta - \alpha < \varepsilon$, ապա $a = b$:

Ապացույց: Ենթադրենք $a \neq b$, ընդունենք $a > b$: Այդ դեպքում, ըստ պնդում 1.2-ի, գոյություն կունենան r_1 ու r_2 ռացիոնալ թվեր այնպես, որ տեղի ունենա հետևյալ անհավասարությունը՝ $a > r_2 > r_1 > b$: Ճիշտ կլինի նաև $\alpha \leq b < r_1 < r_2 < a \leq \beta$, որտեղից էլ կհետևի, որ $\beta - \alpha > r_2 - r_1$: Ստացվեց հակասություն այն բանի, որ $\beta - \alpha < \varepsilon$: Իրոք, եթե որպես ε վերցնենք $r_2 - r_1$, ապա կստանանք, որ $\beta - \alpha > r_2 - r_1 = \varepsilon$: Հետևաբար մեր ենթադրությունը, որ $a > b$ ճիշտ չէ, ուրեմն $a = b$: ■

Բազմության սահմանափակություն:

Թվային բազմության եզրեր: Վերին ու ստորին ճշգրիտ եզրեր

Դիտարկենք իրական թվերի կամայական բազմություն, որը դատարկ չէ, այսինքն՝ պարունակում է գոնե մեկ տարր: Այդպիսի բազմությունը նշանակենք $\{X\}$ սիմվոլով:

Սահմանում 1.10: Իրական թվերի $\{x\}$ բազմությունը կոչվում է սահմանափակ վերևից, եթե գոյություն ունի այնպիսի M իրական թիվ, որ $\{x\}$ բազմության յուրաքանչյուր x տարրի համար $x \leq M$:

Այդ դեպքում M թիվը անվանում են $\{x\}$ բազմության վերին եզր: Ակնհայտ է, որ վերևից սահմանափակ բազմությունը ունի անվերջ թվով վերին եզրեր: Իրոք, եթե M -ը վերին եզր է, իսկ M^* -ը՝ կամայական թիվ, $M^* > M$, ապա M^* -ը ևս վերին եզր է:

Սահմանում 1.11: Իրական թվերի $\{x\}$ բազմությունը կոչվում է սահմանափակ ներքևից, եթե գոյություն ունի այնպիսի m իրական թիվ, որ $\{x\}$ բազմության յուրաքանչյուր x տարրի համար $x \geq m$:

Այդ դեպքում m թիվը անվանում են $\{x\}$ բազմության ստորին եզր: Ակնհայտ է, որ ներքևից սահմանափակ բազմությունը նույնպես ունի անվերջ թվով ստորին եզրեր:

Սահմանում 1.12: $\{x\}$ բազմության վերին եզրերից ամենափոքրը անվանում են ճշգրիտ վերին եզր և նշանակում են $\sup\{x\}$ սիմվոլով:

Սահմանում 1.13: $\{x\}$ բազմության ստորին եզրերից ամենամեծը անվանում են ճշգրիտ ստորին եզր և նշանակում են $\inf\{x\}$ սիմվոլով:

Վերին ու ստորին ճշգրիտ եզրերը կարելի է սահմանել նաև հետևյալ կերպ:

Սահմանում 1.14: Կասենք a թիվը $\{x\}$ բազմության ճշգրիտ վերին եզրն է և կնշանակենք $a = \sup \{x\}$, եթե.

- 1) $\forall x \in \{x\}, x \leq a$,
- 2) $\forall x' < a, \exists x \in \{x\}, x > x'$:

Սահմանում 1.15: Կասենք a թիվը $\{x\}$ բազմության ճշգրիտ ստորին եզր է և կնշանակենք $a = \inf \{x\}$, եթե.

- 1) $\forall x \in \{x\}, x \geq a$,
- 2) $\forall x' > a, \exists x \in \{x\}, x < x'$:

Հեշտ է տեսնել, որ սահմանումներից 1.12-ը համարժեք է 1.14-ին, իսկ 1.13-ը՝ 1.15-ին:

Ճշգրիտ եզրի գոյության վերաբերյալ թեորեմը

Թեորեմ 1.1: Եթե իրական թվերի ոչ դատարկ $\{x\}$ բազմությունը սահմանափակ է վերևից, ապա այն ունի վերին ճշգրիտ եզր:

Ապացույց: Դիցուք $\{x\}$ բազմությունը սահմանափակ է վերևից, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի M թիվ, որ $x \leq M$ կամայական x թվի համար $\{x\}$ բազմությունից: Այլ կերպ ասած՝ M -ը $\{x\}$ -ի վերին եզր է:

Հնարավոր է երկու դեպք:

Առաջին դեպք: Բազմության տարրերի մեջ կա գոնե մեկ ոչ բացասական իրական թիվ:

Երկրորդ դեպք: $\{x\}$ բազմության բոլոր տարրերը բացասական իրական թվեր են:

Առաջին դեպքում դիտարկենք միայն ոչ բացասական իրական թվերը և յուրաքանչյուրը ներկայացնենք անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով: Համեմատենք այդ թվերի ամբողջ մասերը: Պարզ է, որ այդ ամբողջ թվերը չեն գերազանցում M -ը, ուրեմն կա ամենամեծը, որը կնշանակենք $\bar{x}_0$:

$\{x\}$ բազմությունից պահենք բոլոր այն թվերը, որոնց ամբողջ մասերը $\bar{x}_0$ է, իսկ մնացածը դեն նետենք: Այնուհետև պահպանված թվերի մեջ համեմատենք ստորակետից հետո առաջին տասնորդական նիշերը և դրանցից ամենամեծը նշանակենք $\bar{x}_1$: Պահենք այն թվերը, որոնց ամբողջ մասը $\bar{x}_0$ -ն է, իսկ ստորակետից հետո առաջին նիշը՝ $\bar{x}_1$ -ը, իսկ մնացածը դեն նետենք: Պահպանված թվերի մեջ համեմատենք ստորակետից հետո երկրորդ տասնորդական նիշերը և ամենամեծը նշանակենք $\bar{x}_2$: Այդպես շարունակելով՝ արդյունքում կստանանք իրական թիվ՝

$$\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \dots: \quad (1.11)$$

Ապացուցենք, որ հենց այս $\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \dots$ թիվը կլինի $\{x\}$ բազմության վերին ճշգրիտ եզրը: Ապացույցը կատարելու նպատակով ստուգենք, որ այս թվի համար բավարարվում են վերին ճշգրիտ եզրի **1.14 սահմանման** երկու պայմանները:

Նախ 1-ին պայմանը բավարարված է, որովհետև $\{X\}$ բազմության յուրաքանչյուր X տարրի համար ճիշտ է $x \leq \bar{x}$ անհավասարությունը, քանի որ բոլոր բացասական թվերը փոքր են $\bar{x}$ դրական թվից, իսկ այն, որ ոչ բացասական թվերը չեն գերազանցում $\bar{x}$ -ը, պարզ է $\bar{x}$ -ի կառուցումից:

Ստուգենք 2-րդ պայմանը: Դիցուք $x' = x'_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots$ -ը $\bar{x}$ -ից փոքր որևէ իրական ոչ բացասական թիվ է: Ապացուցենք, որ գոյություն ունի x' -ից մեծ $\{X\}$ բազմության գոնե մեկ X տարր: Քանի որ $x' < \bar{x}$, ապա, ըստ թվերի համեմատության կանոնի, կգտնվի մի այնպիսի n համար այնպես, որ.

$$x'_0 = \bar{x}_0, \quad x'_1 = \bar{x}_1, \quad x'_2 = \bar{x}_2, \dots, x'_{n-1} = \bar{x}_{n-1}, \quad x'_n < \bar{x}_n: \quad (1.12)$$

Ըստ $\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots$ թվի կառուցվածքի՝ կամայական բնական n թվի համար կգտնվի $\{X\}$ բազմության պատկանող ոչ բացասական $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ թիվ, որի ամբողջ մասը և ստորակետից հետո առաջին n նիշերը նույնն են, ինչ որ $\bar{x}$ -ը: Այսինքն՝

$$x_0 = \bar{x}_0, \quad x_1 = \bar{x}_1, \quad x_2 = \bar{x}_2, \dots, x_{n-1} = \bar{x}_{n-1}, \quad x_n = \bar{x}_n: \quad (1.13)$$

Համեմատելով 1.12-ն ու 1.13-ը՝ կստանանք՝

$$x_0 = \bar{x}'_0, \quad x_1 = \bar{x}'_1, \quad x_2 = \bar{x}'_2, \dots, x_{n-1} = \bar{x}'_{n-1}, \quad x_n > \bar{x}'_n: \quad (1.14)$$

Սա նշանակում է՝ $x > x'$: ■

Երկրորդ դեպքի ապացույցը կատարվում է համանման եղանակով: Երբ բազմության բոլոր թվերը բացասական են, այդ դեպքում $\{X\}$ բազմության տարրերը կներկայացնենք բացասական անվերջ տասնորդական կոտորակների տեսքով: Կնշանակենք $\bar{x}_0$ -ով այդ տասնորդական կոտորակների ամ-

բողջ մասերի ամենափոքր թիվը, ստորակետից հետո առաջին տասնորդական թվանշաններից ամենափոքրը՝ $\bar{x}_1$ -ով և այսպես շարունակ: Արդյունքում կստանանք $\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \dots$ թիվը, որը հենց կլինի վերին ճշգրիտ եզրը:

Նման ձևով կարելի է ապացուցել հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1.2: Եթե իրական թվերի ոչ դատարկ $\{x\}$ բազմությունը սահմանափակ է ներքևից, ապա այն ունի ստորին ճշգրիտ եզր:

Իրական թվեր. գումարում և բազմապատկում

Դիցուք a -ն ու b -ն այնպիսի իրական թվեր են, որ տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\alpha_1 \leq a \leq \beta_1, \alpha_2 \leq b \leq \beta_2, \quad (1.15)$$

որտեղ $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ և β_2 թվերը 1.15 անհավասարությունները բավարարող կամայական ռացիոնալ թվեր են:

Սահմանում 1.16: a ու b իրական թվերի գումար կանվանենք այն c իրական թիվը, որն ընկած է վերը նշած բոլոր $\alpha_1 + \alpha_2$ ու $\beta_1 + \beta_2$ թվերի միջև, այսինքն՝ $\alpha_1 + \alpha_2 \leq c \leq \beta_1 + \beta_2$: Այդ c թիվը նշանակում են $c = a + b$ սիմվոլով:

Դիտարկենք բոլոր հնարավոր $\{\alpha_1 + \alpha_2\}$ տեսքի թվերի բազմությունը, որոնց համար ճիշտ են 1.15 անհավասարությունները: Ակնհայտ է, որ այդ բազմությունը վերևից սահմանափակ է, օրինակ, որևէ $\beta_1 + \beta_2$ -ով: Հետևաբար այդ բազմությունը ունի վերին ճշգրիտ եզր, նշանակենք $c_1 = \sup\{\alpha_1 + \alpha_2\}$:

Նման ձևով $\{\beta_1 + \beta_2\}$ բազմությունը սահմանափակ է ներքևից, և բավարարվում են 1.15 անհավասարությունները: Ուստի այդ բազմությունն ունի $c_2 = \inf \{\beta_1 + \beta_2\}$ ստորին ճշգրիտ եզր: Պարզ է, որ ճիշտ է նաև $\alpha_1 + \alpha_2 \leq c_1 \leq c_2 \leq \beta_1 + \beta_2$ անհավասարությունը:

Հետևաբար օգտվելով **պնդում 1.1, 1.2** և **1.3**-ից՝ կարող ենք հիմնավորել, որ.

$$c = c_1 = c_2: \quad (1.16)$$

Ուրեմն սուպրեմումի սահմանումից ակնհայտ է, որ $\alpha_1 + \alpha_2 \leq c$, իսկ ինֆիմումի սահմանումից՝ $c \leq \beta_1 + \beta_2$: Հենց այս c -ն կանվանենք a ու b իրական թվերի գումար: a ու b իրական թվերի արտադրյալ սահմանելու համար նախ ընդունենք, որ դրանք դրական են, և բավարարվում են հետևյալ անհավասարությունները՝ $0 < \alpha_1 \leq a \leq \beta_1$, $0 < \alpha_2 \leq b \leq \beta_2$:

Այստեղ $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ -ը կամայական ռացիոնալ թվեր են:

Սահմանում 1.17: a և b դրական իրական թվերի արտադրյալ կանվանենք այն c իրական թիվը, որի համար բավարարվում է $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \leq c \leq \beta_1 \cdot \beta_2$ անհավասարությունը: Պարզ է, որ գոյություն ունի $\{\alpha_1 \cdot \alpha_2\}$ բազմության ճշգրիտ վերին եզր՝ $c_1 = \sup \{\alpha_1 \cdot \alpha_2\}$, իսկ $\{\beta_1 \cdot \beta_2\}$ բազմության ստորին ճշգրիտ եզր՝ $c_2 = \inf \{\beta_1 \cdot \beta_2\}$:

Օգտվելով **պնդում 1.1, 1.2** և **1.3**-ից՝ կարող ենք հիմնավորել, որ $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \leq c_1 \leq c_2 \leq \beta_1 \cdot \beta_2$ անհավասարությունից պարզ կդառնա՝ $c = c_1 = c_2$.

$$c = \inf \{\beta_1 \cdot \beta_2\} = \sup \{\alpha_1 \cdot \alpha_2\} = a \cdot b: \quad (1.17)$$

Անվերջ տասնորդական կոտորակով գրված կամայական a թվի համար ընդունում են՝ $a \cdot 0 = 0$:

Ընդհանուր դեպքում, երբ $a \neq 0$, $b \neq 0$, կամայական իրական թվեր են, ապա արտադրյալ սահմանվում է հետևյալ կերպ՝ $a \cdot b = |a| \cdot |b|$, եթե a ու b թվերը նույն նշանի են, և $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$, եթե տարբեր նշանի են:

Նշենք վերջապես, որ իրական թվերի մեջ սահմանվող գործողություններն ու հատկությունները, որոնք ճիշտ են ռացիոնալ թվերի համար, իրական թվերի դեպքում ևս բավարարվում են:

Այսպիսով՝ կարող ենք պնդել, որ իրական թվերի ու թվային առանցքի կետերի միջև փոխմիարժեք համապատասխանությունը հետագայում հնարավորություն է տվել սահմանելու կամայական արգումենտի (թվի) ֆունկցիաներ: Այդպիսիններից են՝ իրական թվի աստիճանն ու արմատը՝ x^α , $\sqrt[n]{x}$, լոգարիթմը՝ $\log_a x$, ցուցային ֆունկցիան՝ a^x , եռանկյունաչափական ֆունկցիաները՝ $\sin x$, $\cos x$, tgx , $ctgx$ և այլն: Բացի դրանից՝ իրական թվերի դաշտի ներմուծումը հնարավորություն է տվել կառուցելու մաթեմատիկական անալիզի ողջ տեսությունը՝ իր բաժիններով՝ սահմանների տեսությամբ, դիֆերենցիալ ու ինտեգրալ հաշվով և այլն:

ԳԼՈՒԽ 2

ԹՎԱՅԻՆ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Սահմանում 2.1: Եթե որոշակի օրենքով յուրաքանչյուր n բնական թվին համապատասխանության մեջ է դրված որևէ x_n իրական թիվ, ապա կասենք, որ ունենք $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ հաջորդականություն:

Դիտարկենք անվերջ քանակով իրական թվերի հաջորդականություն՝ ենթադրելով, որ այդ թվերը ինչ-որ կանոնով համարակալված են $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$: Այդ դեպքում x_1 -ը կոչվում է հաջորդականության առաջին անդամ, x_2 -ը՝ երկրորդ անդամ և այլն:

Ամբողջ հաջորդականության նշանակման համար օգտագործում են հետևյալ սիմվոլը՝ $\{x_n\}_{n \geq 1}$ կամ կրճատ $\{x_n\}$:

Օրինակներ

1. $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$, այստեղ $x_n = \frac{1}{n^2}$ ($n = 1, 2, \dots$), և ասում են, որ հաջորդականությունը տրված է իր ընդհանուր անդամի բանաձևով: Այս դեպքում հաջորդականության անդամները կլինեն $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$:

2. $-1, 1, 2, -1, 1, 2, -1, 1, 2, \dots$ Նկատենք, որ այս օրինակում հաջորդականությունը տրված չէ իր ընդհանուր անդամի (n -րդ անդամի) բանաձևով, սակայն ակնհայտ է այն օրինաչափությունը, որով կառուցված են հաջորդականության հեր-

թական անդամները, այն է՝ $-1, 1, 2$ եռյակը կրկնվում է պարբերաբար:

3. $7, 7, 7, 7, \dots$ այս հաջորդականությանը անվանում են հաստատուն, քանի որ հենց առաջին համարից սկսած՝ բոլոր անդամները իրար հավասար են:

4. $8, 6, 5, \frac{1}{4}, -3, \frac{1}{9}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ Այս օրինակում ևս հաջորդականությունը տրված չէ ընդհանուր անդամի բանաձևի տեսքով, սակայն հստակ նշված է այն օրինաչափությունը, որով ստացվում են հաջորդականության բոլոր անդամները: Առաջին վեց անդամները որոշակի տրված թվեր են, իսկ յոթերորդ համարից սկսած՝ բոլոր անդամները հավասար են 1 -ի:

Նշենք, որ եթե հաջորդականության բոլոր անդամները, սկսած որևէ համարից, իրար հավասար թվեր են, ապա այդպիսի հաջորդականությունը անվանում են ի վերջո հաստատուն (ստացիոնար): Այսինքն՝ երրորդ օրինակում դիտարկած հաջորդականությունն ի վերջո ստացիոնար է:

5. Եթե տված հաջորդականությունից ջնջենք վերջավոր թվով անդամներ, և մնացած անդամները վերահամարակալենք բնական թվերով, ապա նորից կստանանք հաջորդականություն: Ուրեմն ակնհայտ է, որ եթե հաջորդականության մեջ որևէ ձևով ավելացնենք (խառնենք) վերջավոր քանակությամբ թվեր, ապա նոր հավաքածուն համարակալելուց հետո դառնում է հաջորդականություն:

6. Բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմությունը $Q = \left\{ \frac{m}{n}; m \in Z, n \in N \right\}$ հնարավոր է համարակալել և դարձնել հաջորդականություն:

Ապացույց: Ապացուցելու համար պետք է տանք այն կանոնը (օրենքը), որով հնարավոր է լինում բոլոր ռացիոնալ թվերը համարակալել բոլոր բնական թվերով:

Նախ համարենք, որ ցանկացած $\frac{m}{n} \in Q$ ռացիոնալ թիվ ներկայացվում է անկրճատելի կոտորակի տեսքով, 0 -ն կներկայացնենք $\frac{0}{1}$ տեսքով, իսկ ցանկացած k ամբողջ որպես $\frac{k}{1}$ թիվ (օրինակ՝ $1 = \frac{1}{1}$, $-4 = \frac{-4}{1}$, $5 = \frac{5}{1}$) և այլն): Համարակալման օրենքը տալու համար կազմենք հետևյալ աղյուսակը՝

$$A_1 = \left\{ \frac{0}{1} \right\}, A_2 = \left\{ \frac{1}{1}, -\frac{1}{1} \right\}, A_3 = \left\{ \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\},$$

$$A_4 = \left\{ \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right\}, A_5 = \left\{ \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\} \quad (2.1)$$

և այսպես շարունակ: Նկատենք, որ յուրաքանչյուր A_i կազմված է այնպիսի $\frac{m}{n} \in Q$ տարրերից, որոնց մեջ $|m| + n = i$, սակայն նշենք, որ եթե i -ն երկուսից մեծ գույգ թիվ է, ապա այդ

A_i -ի մեջ բաց ենք թողում $\frac{i/2}{i/2} = 1$ -ը և $\frac{-(i/2)}{i/2} = -1$ -ը, որով-

հետև դրանք արդեն $A_2 = \left\{ \frac{1}{1}, -\frac{1}{1} \right\}$ -ի մեջ կան: Բաց ենք թողում

նաև այն թվերը, որոնք նախորդների մեջ կան: $A_1 = \left\{ \frac{0}{1} \right\}$ -ի

տարրը, որը 0 -ն է, համարակալենք 1 -ով, $A_2 = \left\{ \frac{1}{1}, -\frac{1}{1} \right\}$ -ի

7. Նշենք, որ չպետք է կարծել, որ ցանկացած անվերջ բազմություն հաջորդականություն է: Օրինակ՝ $[0; 1]$ հատվածը պարունակում է անվերջ թվով տարրեր, սակայն այդ հատվածի բոլոր թվերը հնարավոր չէ համարակալել բոլոր բնական թվերով, ինչն էլ նշանակում է՝ հնարավոր չէ $[0; 1]$ հատվածի թվերը դարձնել հաջորդականություն:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \dots \\ x_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \dots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots a_{nn} \dots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.2}$$

Պայմանավորվենք նաև, որ այն ռացիոնալ թվերը, որոնք ունեն երկու տարբեր ներկայացումներ, գրել 9-եր պարունակող տեսքով (օրինակ՝ $1 = 0,999\dots$):

Դիտարկենք $[0; 1]$ հատվածին պատկանող հետևյալ իրական թիվը՝ $x = 0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$, որտեղ b_1 -ը a_{11} -ից, 0-ից ու 9-ից տարբեր ցանկացած թվանշան է, b_2 -ը a_{22} -ից, 0-ից ու 9-ից տարբեր թվանշան է և այլն (b_n -ը տարբեր է a_{nn} -ից, 0-ից ու 9-ից): Բավական է համոզվել, որ $x = 0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ -ը չի համընկնում $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ թվերից ոչ մեկին: Իրոք, քանի որ x -ը ստորակետից հետո չունի 0 և 9 թվանշաններ, ուստի այն չի համընկնում ռացիոնալ թվերի հետ, որոնք ունեն երկու գրելաձև: Հետևաբար x -ը միակ ձևով է ներկայացվում անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով և ըստ այդ կոտորակների՝ համեմատման կանոնի չի համընկնում $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ թվերից ոչ մեկի հետ, որովհետև, օրինակ, $x = x_m$ -ը կնշանակեր, որ $b_m = a_{mm}$:

Ստացված հակասությունը ցույց է տալիս, որ մեր ենթադրությունը այն մասին, որ $[0; 1]$ հատվածի բոլոր թվերը կարելի է համարակալել, սխալ էր: ■

8. Նշենք, որ հաջորդականություն չէ նաև վերջավոր հատ թվերից կազմված հավաքածուն, որովհետև այդ հավաքածուն համարակալվում է վերջավոր հատ բնական թվերով, այնինչ հաջորդականությունը համարակալվում է բոլոր բնական թվերով:

§ 1. Սահմանափակ և անսահմանափակ հաջորդականություններ

Դիտարկենք $\{x_n\}$ հաջորդականությունը և նրա արժեքների բազմությունը, երբ $n=1, 2, 3, \dots$: Քանի որ n -ի համապատասխան x_n -ը իրական թիվ է, ուրեմն կստանանք ինչ-որ մի թվային բազմություն: $\{x_n\}$ -ի արժեքների բազմությունը կարող է բաղկացած լինել ինչպես վերջավոր թվերից, այնպես էլ անվերջ տարրերից:

Օրինակ 1. $x_n = (-1)^n$ հաջորդականությունը ընդունում է երկու արժեք՝ 1 ու -1 , ընդ որում՝ $n=2k-1$ ($k=1, 2, 3, \dots$) դեպքում $x_{2k-1} = -1$, և $n=2k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) դեպքում $x_{2k} = 1$:

Օրինակ 2. $x_n = \frac{1}{n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$): x_n -ի ընդունած արժեքները անվերջ հատ են՝ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$:

Սահմանում 2.2: $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է սահմանափակ վերևից, եթե գոյություն ունի այնպիսի M իրական թիվ, որ այդ հաջորդականության յուրաքանչյուր x_n անդամի համար բավարարվում է $x_n \leq M$ ($n=1, 2, \dots$) անհավասարությունը:

Սահմանում 2.3: $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է սահմանափակ ներքևից, եթե գոյություն ունի այնպիսի m իրական թիվ, որ այդ հաջորդականության յուրաքանչյուր x_n

անդամի համար բավարարվում է $x_n \geq m$ ($n=1, 2, \dots$) անհավասարությունը:

Սահմանում 2.4: $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե այն միաժամանակ սահմանափակ է և՛ վերևից, և՛ ներքևից:

Այսինքն՝ գոյություն ունեն m և M թվեր այնպես, որ ցանկացած n -ի համար $m \leq x_n \leq M$ ($n=1, 2, \dots$):

Պնդում 2.1: $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի $C > 0$ թիվ այնպես, որ այդ հաջորդականության ցանկացած x_n անդամի համար բավարարվում է $|x_n| \leq C$ ($n=1, 2, \dots$) անհավասարությունը:

Ապացույց: Դիցուք $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, այսինքն՝ գոյություն ունեն m և M թվեր այնպես, որ $m \leq x_n \leq M$ ($n=1, 2, \dots$):

Նշանակենք C -ով $|m|$ և $|M|$ թվերից մեծագույնը: Հետևաբար սահմանափակության պայմանից կստանանք՝ $|x_n| \leq C$ ($n=1, 2, \dots$):

Հակադարձ պնդումը ապացուցելու համար ցույց տանք, որ $|x_n| \leq C$ ($n=1, 2, \dots$) անհավասարությունից պարզ կդառնա այնպիսի m և M թվերի գոյությունը, որոնց համար տեղի կունենա $m \leq x_n \leq M$ ($n=1, 2, \dots$): Դրա համար նշանակենք $m = -C$, իսկ $M = C$: Քանի որ $|x_n| \leq C$ -ն համարժեք է

$-C \leq x_n \leq C$ ($n=1,2,\dots$), ապա կստանանք, որ $m \leq x_n \leq M$, ($n=1,2,\dots$): ■

Նշենք նաև, որ շատ կարևոր է կարողանալ ձևակերպել բերված սահմանումների ժխտումները: Օրինակի համար ձևակերպել, թե ինչ է նշանակում՝ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ չէ:

Ըստ պնդում 2.1-ի՝ պարզ է, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ չէ, եթե կամայական $C > 0$ թվի համար գոյություն ունի այդ հաջորդականության գոնե մեկ անդամ՝ x_{n_0} այնպես, որ $|x_{n_0}| > C$, որտեղ n_0 -ն կախված է C -ից՝ $n_0(C)$:

Վարժություն: Ձևակերպել, թե ինչ է նշանակում՝ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ չէ վերևից (ներքևից):

Օրինակներ

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, որովհետև հաջորդականության յուրաքանչյուր անդամի համար բավարարվում է $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ ($n=1,2,\dots$) անհավասարությունը:

2) $-2, 1, 0, -2, 1, 0, -2, 1, 0, \dots$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, որովհետև նրա յուրաքանչյուր անդամ գտնվում է -2 և 1 թվերի միջև:

Նշենք, որ -2 -ի փոխարեն կարող ենք վերցնել նաև, օրինակ, -3 -ը, իսկ 1 -ի փոխարեն՝ 5 -ը:

3) Ցանկացած ստացիոնար հաջորդականությունն սահմանափակ է: Իրոք, արդեն նշել ենք, որ ստացիոնար հաջորդականությունն ունի հետևյալ տեսքը՝ $a_1, a_2, \dots, a_k, b, b, b, \dots$:

Եթե նշանակենք $M = \max(a_1, a_2, \dots, a_k, b)$, իսկ $m = \min(a_1, a_2, \dots, a_k, b)$, ապա հաջորդականության ցանկացած անդամ կգտնվի m ու M թվերի միջև:

4) Պարզ է, որ $\{n\}$ բոլոր բնական թվերի հաջորդականությունը ներքևից սահմանափակ է, քանի որ $n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$): Ցույց տանք, որ այդ հաջորդականությունը սահմանափակ չէ վերևից: Իրոք, ինչպիսին էլ լինի $M \geq 0$ թիվը, գոյություն կունենա, օրինակ, $[M] + 1$ հաջորդականության անդամ, որը մեծ է M -ից:

5) $x_n = (-1)^n \cdot n$ ($n = 1, 2, \dots$) հաջորդականությունը սահմանափակ չէ ո՛չ ներքևից, ո՛չ վերևից: Իրոք, եթե գրենք բացված տեսքով, կտեսնենք, որ այն կունենա հետևյալ տեսքը՝ $-1; 2; -3; 4; -5; 6; -7; \dots$ Ինչպիսին էլ լինի $M \geq 0$ թիվը, այս հաջորդականության մեջ կգտնվի $2k$ տեսքի թիվ (որտեղ k -ն բնական թիվ է) այնպես, որ $2k > M$: Այստեղ բավական է վերցնել $k = \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil + 1$: Իսկ, եթե $M < 0$, ապա հաջորդականության երկրորդ անդամը արդեն մեծ է M -ից: Նման ձևով ստուգվում է, որ հաջորդականությունը սահմանափակ չէ ներքևից:

§ 2. Հաջորդականության սահման, անվերջ մեծ և անվերջ փոքր հաջորդականություններ

Սահմանում 2.5: Կասենք n -ը անվերջի ձգտելիս $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ձգտում է a թվին, եթե կամայական ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $N = N(\varepsilon)$ բնական թիվ, որ երբ $n > N(\varepsilon)$ տեղի ունի $|x_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Սահմանում 2.6: Կասենք n -ը անվերջի ձգտելիս $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ձգտում է ∞ -ի, եթե կամայական E դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $N = N(E)$ բնական թիվ, որ երբ $n > N(E)$ տեղի ունի $|x_n| > E$ անհավասարությունը:

Սահմանում 2.7: Կասենք n -ը անվերջի ձգտելիս $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ձգտում է $+\infty$ -ի, եթե կամայական E դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $N = N(E)$ բնական թիվ, որ երբ $n > N(E)$ տեղի ունի $x_n > E$ անհավասարությունը:

Սահմանում 2.8: Կասենք n -ը անվերջի ձգտելիս $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ձգտում է $-\infty$ -ի, եթե կամայական E դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $N = N(E)$ բնական թիվ, որ երբ $n > N(E)$ տեղի ունի $x_n < -E$ անհավասարությունը:

Այն փաստը, որ a թիվը $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանն է, սիմվոլիկ կգրենք այսպես՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ կամ $x_n \rightarrow a$:

Վերջավոր սահման ունեցող հաջորդականությունը անվանում են զուգամետ, հակառակ դեպքում՝ տարամետ:

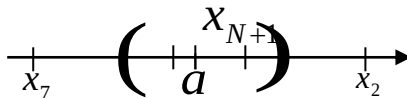
Եթե $|x_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը գրենք բացված տեսքով, այսինքն՝ $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ կամ $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, ապա կստանանք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականության այն անդամները, որոնց համարները մեծ են N -ից, գտնվում են $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ միջակայքում:

Սահմանում 2.9: Թվային առանցքի բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք ընկած են $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ միջակայքում, անվանում են a կետի ε շրջակայք:

Հետևաբար $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանի սահմանումը կարող ենք ձևակերպել հետևյալ կերպ:

Սահմանում 2.10: a թիվը կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության սահման, եթե a կետի ցանկացած ε -շրջակայքի համար կգտնվի այնպիսի N -բնական թիվ, որ հաջորդականության բոլոր անդամները, սկսած $N+1$ -համար ունեցող անդամից (այսինքն՝ $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ անդամները), կգտնվեն այդ շրջակայքում, այսինքն՝ $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, եթե $n > N$: Հաջորդականության սահմանի այս սահմանմանը երբեմն ան-

վանում են սահմանում « $\varepsilon - N$ » լեզվով: Այս գրվածը թվային առանցքի վրա կարելի է պատկերել, օրինակ, այսպես՝



Նկար 2.1

Այլ կերպ ասած՝ a թիվը կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության սահման, եթե a կետի ցանկացած ε -շրջակայքում գտնվում են այդ հաջորդականությունից անվերջ թվով անդամներ, որն է համարից սկսած՝ բոլորը, իսկ դրսում՝ գուցե միայն վերջավոր թվով անդամներ:

Նշենք, որ այս վերջին սահմանման տեսանկյունից հարմար է մեկնաբանել, թե ինչ է նշանակում տարամետ հաջորդականություն, այսինքն՝ հաջորդականություն, որը չունի վերջավոր սահման:

Պարզ է, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կլինի տարամետ, եթե ինչպիսին էլ լինի a իրական թիվը, կարելի է նշել a կետի այնպիսի ε -շրջակայք, որից դուրս գտնվում են $\{x_n\}$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ:

Ջուգամետ և տարամետ հաջորդականությունների օրինակներ

1) Ցանկացած ստացիոնար հաջորդականություն գուգամետ է:

Իրոք, եթե $\{x_n\}$ -ը ստացիոնար է, ապա այն ունի հետևյալ տեսքը՝ $x_1, x_2, \dots, x_k, c, c, c, \dots$ (որտեղ k -ն որևէ ամրագրած բնական թիվ է): Ցույց տանք, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$: Պարզ է, որ ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon > 0$ թիվը $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$, շրջակայքից դուրս կարող են մնալ այս հաջորդականության ամենաշատը k -հատ անդամներ (գուցե միայն $x_1, x_2, \dots, x_k$ անդամները), այսինքն՝ $N = k + 1$ -րդ անդամից սկսած՝ հաջորդականության անդամները գտնվում են $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$ միջակայքում: Նշանակում է c թիվը այդ հաջորդականության սահմանն է: Նկատենք նաև, որ այս օրինակում N -բնական թիվը կախված չէ ε -ից:

2) Դիտարկենք $x_n = \frac{n+3}{n+2}$ ($n = 1, 2, \dots$) հաջորդականությունը: Ապացուցելու համար $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+2} = 1$, ցույց տանք, որ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $N(\varepsilon)$ -բնական թիվ, որ տեղի ունենա $\left| \frac{n+3}{n+2} - 1 \right| < \varepsilon$ անհավա-

սարքությունը, երբ $n > N(\varepsilon)$: Լուծելով այս անհավասարությունը՝ կստանանք՝

$$-\varepsilon < \frac{n+3}{n+2} - 1 < \varepsilon, \quad (2.3)$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 2: \quad (2.4)$$

Այս անհավասարությունը ճիշտ դարձնող առաջին բնական թիվը կա՛մ 1-ն է, եթե $\left(\frac{1}{\varepsilon} - 2 < 1\right)$, կա՛մ $\left[\frac{1}{\varepsilon} - 2\right] + 1$, եթե $\left(\frac{1}{\varepsilon} - 2 \geq 1\right)$: Այսպիսով, եթե նշանակենք.

$$N = \max \left\{ 1; \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2 \right] + 1 \right\}, \text{ ապա } n \geq N \text{ պայմանից կստաց-}$$

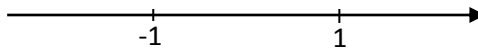
վի նաև.

$$\text{որ } \left| \frac{n+3}{n+2} - 1 \right| < \varepsilon: \quad \blacksquare$$

3) Դիտարկենք $x_n = (-1)^n$; ($n=1, 2, \dots$): Ցույց տանք, որ այս հաջորդականությունը տարամետ է: Իրոք, բացված տեսքով հաջորդականությունը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$-1; 1; -1; 1; \dots \quad (2.5)$$

Հաջորդականության անդամները թվային առանցքի վրա գրավում են երկու դիրք՝



Նկար 2.2

Հետևաբար թվային առանցքի վրա, որտեղ էլ վերցնենք կամայական a կետը, միշտ կարող ենք նշել a կետի այնպիսի ε շրջակայք, որ $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ միջակայքից դուրս կգտնվեն հաջորդականության անթիվ քանակությամբ անդամներ: Ուստի $\forall a$ կետ չի կարող լինել այս հաջորդականության սահման, հետևաբար այն տարամետ է:

4) $x_n = n$ ($n=1, 2, \dots$) հաջորդականությունը նույնպես տարամետ է, քանի որ ցանկացած a թվի, օրինակ՝ $\left(a - \frac{1}{4}; a + \frac{1}{4}\right)$ շրջակայքում կարող է գտնվել ոչ ավելի, քան մեկ անդամ, ուստի այդ շրջակայքից դուրս գտնվում են $x_n = n$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ:

Նման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ $x_n = -n$ ($n=1, 2, \dots$) հաջորդականությունը ևս տարամետ է:

Այսպիսով՝ կարելի է բերել տարամետ հաջորդականությունների բազմաթիվ օրինակներ:

Սահմանում 2.11: Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը զրոն է $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\right)$, ապա $\{x_n\}$ -ը կոչվում է անվերջ փոքր: Այսինքն՝ կասենք $\{x_n\}$ -ը անվերջ փոքր է, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N = N(\varepsilon)$, որ երբ $n > N$, տեղի ունի $|x_n| < \varepsilon$:

Նշենք, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ համարժեք է $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ -ին: Այսինքն՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ -ից կստացվի նաև, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ և, հակառակը, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ -ից հետևում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$:

Սահմանում 2.12: $\{x_n\}$ -ը կոչվում է անվերջ մեծ, եթե $\forall E > 0$ թվի համար $\exists N = N(E)$, որ հենց որ $n > N$, տեղի ունի $|x_n| > E$:

Այն փաստը, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը անվերջ մեծ է, գրում են $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$:

Հետևանք 1. Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, ապա այդ նշանակում է, որ հաջորդականության բոլոր անդամները, սկսած մի ինչ-որ համարից, դրական են:

Հետևանք 2. Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, ապա այդ նշանակում է, որ հաջորդականության բոլոր անդամները, սկսած մի ինչ-որ համարից, բացասական են:

Օրինակներ

1) $x_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$ ($n=1, 2, \dots$) հաջորդականությունը անվերջ

փոքր է, որովհետև $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\left| \frac{(-1)^n}{n^3} \right| < \varepsilon$ անհավա-

սարությունը կրավարարվի $\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ -ից մեծ բոլոր բնական թվերի դեպքում, այսինքն՝ որպես $N = N(\varepsilon)$ կարելի է վերցնել

$N = \left\lceil \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \right\rceil + 1$ բնական թիվը:

2) Ապացուցելու համար, որ $x_n = n^5 + n^3 + 2$ ($n=1, 2, \dots$) հաջորդականությունը անվերջ մեծ է, $\forall E > 0$ թվի համար

պետք է գտնենք այնպիսի $N = N(E)$ բնական թիվ, որ $n > N$ դեպքում տեղի ունենա $|n^5 + n^3 + 2| > E$ անհավասարությունը:

Իրոք, քանի որ $|n^5 + n^3 + 2| > n^5$, պահանջենք, որ $n^5 > E$, որտեղից էլ կստանանք, որ $n > \sqrt[5]{E}$: Եթե նշանակենք $N = \left[\sqrt[5]{E} \right] + 1$, ապա $n > N$ դեպքում տեղի կունենա $|n^5 + n^3 + 2| > n^5 > E$: Այսպիսով՝ ապացուցեցինք, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^5 + n^3 + 2) = +\infty:$$

3) $x_n = (-1)^n \lg n$ ($n = 1, 2, \dots$) հաջորդականությունը անվերջ մեծ է, որովհետև 10^E -ից մեծ բոլոր բնական թվերը բավարարում են $|(-1)^n \lg n| > E$ անհավասարությունը, այսինքն՝ որպես $N = N(E)$ կարող ենք վերցնել $N = \left[10^E \right] + 1$ բնական թիվը:

4) Պարզ է, որ ցանկացած անվերջ մեծ հաջորդականություն սահմանափակ չէ: Սակայն հաջորդականությունը կարող է սահմանափակ չլինել, բայց անվերջ մեծ էլ չլինել: Օրինակ՝

$$0; 1; 0; 2; 0; 3; 0; 4; \dots \quad (2.6)$$

հաջորդականությունը սահմանափակ չէ, որովհետև ցանկացած $C > 0$ թվի համար գոյություն ունի, օրինակ, հաջորդականության անդամ հանդիսացող $[C] + 1$ բնական թիվ, որը մեծ է C -ից: Բայց մյուս կողմից 2.6 հաջորդականությունը անվերջ մեծ չէ, որովհետև, օրինակ, $E = 5$ թվի համար հնարավոր չէ նշել այնպիսի $N = N(E)$ բնական թիվ, որ հաջորդականու-

թյան բոլոր անդամները, որոնց համարները մեծ են N -ից, մեծ լինեն 5-ից:

§ 3. Անվերջ մեծ և անվերջ փոքր հաջորդականությունների հատկություններ

Դիցուք $\{\alpha_n\}$ -ն ու $\{\beta_n\}$ -ը անվերջ փոքրեր են: Այն $\{\gamma_n\}$ հաջորդականությունը, որի n -րդ անդամը տրվում է հետևյալ բանաձևերով՝

$$\gamma_n = \alpha_n + \beta_n; \quad \gamma_n = \alpha_n - \beta_n; \quad \gamma_n = \alpha_n \cdot \beta_n; \quad \gamma_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n};$$

կանվանենք համապատասխանաբար $\{\alpha_n\}$ ու $\{\beta_n\}$ անվերջ փոքրերի գումար, տարբերություն, արտադրյալ ու քանորդ:

Լեմմա 2.1: Եթե $\{\alpha_n\}$ -ն ու $\{\beta_n\}$ -ը անվերջ փոքրեր են, ապա $\{\alpha_n + \beta_n\}$ -ը ևս անվերջ փոքր է:

Ապացույց: Քանի որ $\{\alpha_n\}$ -ը անվերջ փոքր է, ուրեմն $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N_1 = N_1(\varepsilon)$ բնական թիվ, որ երբ $n > N_1$, տեղի ունի՝

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} : \quad (2.7)$$

Նույն ձևով $\exists N_2 = N_2(\varepsilon)$ բնական թիվ, որ երբ $n > N_2$, տեղի ունի՝

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} : \quad (2.8)$$

Նշանակենք $N = \max\{N_1; N_2\}$: Եթե $n > N$, ապա այդ դեպքում միաժամանակ տեղի կունենան ն՝ 2.7-ը, և՝ 2.8-ը: Գնահատենք $|\gamma_n| = |\alpha_n + \beta_n|$, կստանանք՝

$$|\gamma_n| = |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon: \quad (2.9)$$

Այսինքն՝ $n > N$ դեպքում տեղի ունի $|\gamma_n| < \varepsilon$, որն էլ նշանակում է, որ $\{\gamma_n\}$ -ը անվերջ փոքր է: ■

Նման ձևով ապացուցվում է, որ $\{\gamma_n\} = \{\alpha_n - \beta_n\}$ -ը անվերջ փոքր է: Այս ապացույցից կարող ենք հանգել այն հետևությանը, որ վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի գումարը անվերջ փոքր է:

Լեմմա 2.2: Սահմանափակ հաջորդականության (կամ մեծության) և անվերջ փոքրի արտադրյալը անվերջ փոքր է:

Ապացույց: Դիցուք $\{x_n\}$ -ը սահմանափակ հաջորդականություն է, իսկ $\{\alpha_n\}$ -ը՝ անվերջ փոքր: Ըստ սահմանափակ հաջորդականության սահմանման՝ $\exists C > 0$ թիվ այնպես, որ.

$$|x_n| \leq C \quad (n = 1, 2, \dots): \quad (2.10)$$

Քանի որ $\{\alpha_n\}$ -ը անվերջ փոքր է, հետևաբար $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար, մասնավորապես $\frac{\varepsilon}{C}$ թվի համար $\exists N = N(\varepsilon, C)$ բնական թիվ այնպես, որ.

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{C}: \quad (2.11)$$

Այսպիսով, եթե նշանակենք $\gamma_n = x_n \cdot \alpha_n$, ապա 2.10-ից ու 2.11-ից, երբ $n > N$ կհետևի, որ.

$$|\gamma_n| = |x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon : \quad (2.12)$$

Ստացվեց, որ $|\gamma_n| < \varepsilon$, իսկ սա էլ նշանակում է, որ $\{\gamma_n\}$ անվերջ փոքր է: ■

Լեմմա 2.3: Եթե $\{x_n\}$ -ը անվերջ մեծ է, և $x_n \neq 0$, երբ $n \geq N^*$, ապա $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ հաջորդականությունը կլինի անվերջ փոքր:

Ապացույց: Նախ նշենք, որ $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ հաջորդականության առաջին անդամը $\frac{1}{x_{N^*}}$ -ն է, երկրորդ անդամը՝ $\frac{1}{x_{N^*+1}}$ -ը և այլն:

Անվերջ մեծի սահմանման համաձայն՝ $\frac{1}{\varepsilon}$ դրական թվի համար կգտնվի այնպիսի $N \geq N^*$, որ երբ $n > N$, տեղի ունի $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$, որտեղից էլ կհետևի, որ $\frac{1}{|x_n|} = \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon$:

Այսպիսով՝ ստացանք, որ $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}_{n \geq N^*}$ անվերջ փոքր հաջորդականություն է: ■

Լեմմա 2.4: Եթե $\{x_n\}$ անվերջ փոքր հաջորդականության բոլոր անդամները տարբեր են 0-ից, ապա $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ անվերջ մեծ է:

Ապացույց: Դիցուք ε -ը կամայական դրական թիվ է: Քանի որ $\{x_n\}$ անվերջ փոքր է, հետևաբար $\frac{1}{\varepsilon}$ դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի N բնական թիվ (համար), որ հենց որ $n > N$, տեղի կունենա $|x_n| < \frac{1}{\varepsilon}$: Այստեղից էլ կստանանք, որ $\left| \frac{1}{x_n} \right| > \varepsilon$, այսինքն՝ $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ -ը անվերջ մեծ է: ■

Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար

1) Ապացուցել, որ երկու անվերջ փոքրերի արտադրյալը անվերջ փոքր է:

2) Դիցուք $\{\alpha_n\}$ -ն ու $\{\beta_n\}$ -ը անվերջ փոքրեր են: Ի՞նչ կարելի է ասել $\left\{ \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right\}$ -ի մասին:

3) Դիցուք $\{\alpha_n\}$ -ն ու $\{\beta_n\}$ -ը անվերջ մեծ են: Ի՞նչ կարելի է ասել $\{\alpha_n + \beta_n\}$, $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ և $\left\{ \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right\}$ -ի մասին:

4) Դիցուք $\{\alpha_n\}$ -ն անվերջ փոքր է, իսկ $\{\beta_n\}$ -ը՝ անվերջ մեծ: Ապացուցել, որ $\{\alpha_n + \beta_n\}$ -ը անվերջ մեծ է: Ի՞նչ կարելի է ասել $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ -ի մասին:

§ 4. Չուգամետ հաջորդականությունների հատկությունները

1) $\{x_n\}$ հաջորդականության վերջավոր a սահման
 $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a\right)$ ունենալու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$x_n - a = \alpha_n$ -ը լինի անվերջ փոքր կամ, որ նույն է, $x_n = a + \alpha_n$:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք $\{x_n\}$ հաջորդա-
 կանությունը ունի վերջավոր a սահման, այսինքն՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

Օգտվելով հաջորդականության սահմանի սահմանումից՝
 կարող ենք գրել, որ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N$ բնական թիվ որ
 երբ $n > N$, տեղի ունի $|x_n - a| < \varepsilon$: Իսկ սա նշանակում է, որ
 $\{x_n - a\}$ հաջորդականությունը անվերջ փոքր է, այսինքն՝
 $x_n - a = \alpha_n$: Հետևաբար $x_n = a + \alpha_n$:

Բավարարություն: Դիցուք $x_n - a = \alpha_n$ անվերջ փոքր է:
 Ըստ անվերջ փոքրի սահմանման՝ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N$
 բնական թիվ, որ երբ $n > N$, տեղի ունի $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon$:
 Այսինքն՝ $|x_n - a| < \varepsilon$, որն էլ նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$: ■

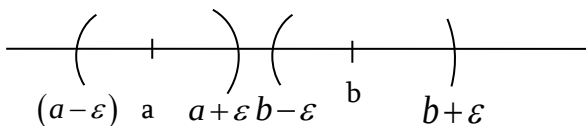
2) Եթե զուգամետ հաջորդականությունից ջնջենք վեր-
 ջավոր թվով անդամներ, ապա ստացված նոր հաջորդակա-
 նությունը ևս կլինի զուգամետ, ընդ որում՝ կզուգամիտի այն
 նույն թվին, որին զուգամիտում էր սկզբնական հաջորդա-
 կանությունը:

Ապացույց: Դիցուք $\{x_n\}$ -ը զուգամիտում է a թվին, այսինքն՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$: Նշանակենք $\{y_n\}$ -ով նոր ստացված հաջորդականությունը: Ըստ $\{x_n\}$ -ի զուգամիտության՝ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ միջակայքից դուրս կարող են գտնվել $\{x_n\}$ -ի գուցե միայն վերջավոր թվով անդամներ: Հետևաբար $\{y_n\}$ հաջորդականության այն անդամների քանակը, որոնք գտնվում են $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ միջակայքից դուրս, միայն կարող են ավելի քիչ լինել: Այսինքն՝ $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ -ից դուրս $\{y_n\}$ -ից նույնպես կգտնվեն ամենաշատը վերջավոր թվով անդամներ, և ուրեմն $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$: ■

Նույն ձևով կարելի է ապացուցել, որ եթե զուգամետ հաջորդականության անդամներին որևէ ձևով «խառնենք» վերջավոր թվով նոր անդամներ, ապա ստացված հաջորդականությունը կլինի զուգամետ, ընդ որում՝ սահմանը կլինի նույն թիվը:

3) Զուգամետ հաջորդականությունն ունի միայն մեկ սահման:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը: Ընդունենք, որ հաջորդականությունն ունի երկու տարբեր սահմաններ՝ a ու b : Այսինքն՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$: Որոշակիության համար ենթադրենք $a < b$:



Նկար 2.3

Նշանակենք $\varepsilon = \frac{b-a}{4}$: Պարզ է, որ այս դեպքում $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ և $(b - \varepsilon; b + \varepsilon)$ միջակայքերը չեն հատվում:

Քանի որ a -ն $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանն է, ապա $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ -ից դուրս կարող են գտնվել $\{x_n\}$ հաջորդականությունից միայն վերջավոր թվով անդամներ: Ուստի $(b - \varepsilon; b + \varepsilon)$ միջակայքը կարող է պարունակել միայն վերջավոր թվով անդամներ $\{x_n\}$ -ից, որը նշանակում է, որ b -ն չի կարող լինել $\{x_n\}$ -ի սահմանը: Այսպիսով՝ ստացանք, որ մեր ենթադրությունը սխալ էր, ուստի $a = b$: ■

4) Զուգամետ հաջորդականությունը ահմանափակ է:

Ապացույց: Դիցուք $\{x_n\}$ հաջորդականությունը զուգամետ է, այսինքն՝ այն ունի վերջավոր սահման՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$: Ըստ սահմանի սահմանման՝ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N$ բնական թիվ, այնպես որ $n > N$ դեպքում $|x_n - a| < \varepsilon$: Այսինքն՝ $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ ($n = N + 1, N + 2, \dots$), որն էլ նշանակում է, որ $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ շրջակայքից դուրս կարող են գտնվել հաջոր-

դականության գուցե միայն վերջավոր թվով անդամներ՝ $x_1, x_2, \dots, x_N$:

Նշանակենք $M = \max\{a - \varepsilon, a + \varepsilon, x_1, x_2, \dots, x_N\}$, իսկ $m = \min\{a - \varepsilon, a + \varepsilon, x_1, x_2, \dots, x_N\}$: Ակնհայտ է, որ $m \leq x_n \leq M$, իսկ սա էլ նշանակում է, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է: ■

5) Սահմանափակ հաջորդականությունը կարող է զուգամետ չլինել:

Օրինակ 1: $0, 2, 0, 2, \dots$ այս հաջորդականությունը սահմանափակ է, բայց զուգամետ չէ:

Օրինակ 2: $3, 3, 3, 3, \dots$ այս հաջորդականությունը և՛ սահմանափակ է, և՛ զուգամետ:

§ 5. Թվաբանական գործողություններ զուգամետ հաջորդականությունների հետ

Դիցուք $\{x_n\}$ ու $\{y_n\}$ հաջորդականությունները զուգամետ են, այսինքն՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$: Այդ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

$$\text{Ա. } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b \quad (2.13)$$

$$\text{Բ. } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b \quad (2.14)$$

$$\text{Գ. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}; \quad (b \neq 0): \quad (2.15)$$

Ա-ի ապացույցը: Քանի որ $\{x_n\}$ -ն ու $\{y_n\}$ -ը զուգամետ են, ապա, ըստ առաջին հատկության, $x_n = a + \alpha_n$, իսկ $y_n = b + \beta_n$, որտեղ α_n -ն ու β_n -ը անվերջ փոքրեր են: Ձևափոխելով $(x_n + y_n)$ -ը՝ կստանանք՝

$$(x_n + y_n) = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n):$$

Նշանակենք $\gamma_n = (\alpha_n + \beta_n)$: Ստացվեց, որ $(x_n + y_n) = (a + b) + \gamma_n$, որտեղ γ_n -ն անվերջ փոքր է, ինչն էլ նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a + b$: Նման ձևով ապացուցվում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a - b$: ■

Բ-ի ապացույցը: Ունենք

$$(x_n \cdot y_n) = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = (a \cdot b) + (a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n):$$

Նշանակենք $\gamma_n = (a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n)$, ակնհայտ է, որ γ_n -ն անվերջ փոքր է: Ստացանք, որ $(x_n \cdot y_n) = (a \cdot b) + \gamma_n$, որն էլ նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b$: ■

Գ-ի ապացույցը: Նախ ապացուցենք, որ եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ և $b \neq 0$, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$: Հետևաբար այստեղից էլ կհետևի, որ $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \rightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$, այսինքն կստանանք **Գ-ի** ապացույցը:

Եվ այսպես, դիցուք $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ ($b \neq 0$): Այստեղից պարզ կլինի, որ $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ դրական թվի համար կգտնվի այնպիսի N^*

բնական թիվ, որ $n > N^*$ դեպքում տեղի ունենա $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$
անհավասարությունը: Նկատի ունենալով $|b| = |b - y_n + y_n|$
նույնությունը՝ կստանանք՝
 $|b| = |b - y_n + y_n| \leq |b - y_n| + |y_n| < \frac{|b|}{2} + |y_n|$, երբ $n > N^*$: Այստե-
ղից պարզ կդառնա, որ $|y_n| > \frac{|b|}{2}$, իսկ սա էլ նշանակում է, որ
 $\left| \frac{1}{y_n} \right| < \frac{2}{|b|}$ ($n > N^*$): Այսինքն՝ $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}_{n > N^*}$ հաջորդականություն-
ը սահմանափակ է:

Ցույց տանք, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$ ($b \neq 0$): Իրոք, գնահատենք

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| \text{ տարբերությունը և կստանանք՝}$$

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - y_n}{by_n} \right| < \frac{\varepsilon}{|b| \frac{|b|}{2}} = \frac{2\varepsilon}{|b|^2} = \varepsilon_1: \quad (2.16)$$

Սա նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$ ($b \neq 0$): Հետևաբար

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0): \quad \blacksquare \quad (2.17)$$

Նշենք, որ այս հատկությունները կարելի է ապացուցել նաև ուրիշ եղանակով՝ օգտվելով սահմանի սահմանման « $\varepsilon - N$ » լեզվից:

Որպես օրինակ ապացուցենք.

Ա) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b$: Իրոք, քանի որ ըստ պայմանի՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ապա $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N_1$ բնական թիվ, որ հենց որ $n > N_1$, տեղի ունի $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$:

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ -ի դեպքում էլ պարզ կլինի, որ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N_2$ բնական թիվ, որ հենց որ $n > N_2$, տեղի ունի $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$: Հետևաբար, եթե նշանակենք $N = \max\{N_1; N_2\}$, ապա $n > N$ -ի դեպքում միաժամանակ տեղի կունենա և՛ $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, և՛ $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$: Գնահատելով $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)|$ տարբերությունը՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} |(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| &= |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \leq \\ &\leq |(x_n - a)| + |(y_n - b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad : \end{aligned}$$

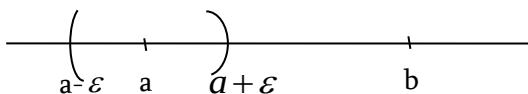
Սա էլ նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b$: ■

Նման ձևով կապացուցվեն նաև **Բ**-ն ու **Գ**-ն:

§ 6. Զուգամետ հաջորդականության հատկություններն անհավասարություններով

1) Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ընդ որում՝ $x_n > b$ ($n \geq N_0$), ապա $a \geq b$:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը՝ $a < b$: Վերցնենք $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, պարզ է, որ $a + \varepsilon < b$



Նկար 2.4

Քանի որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ապա սկսած մի ինչ-որ N համարից՝ $\{x_n\}$ հաջորդականության բոլոր անդամները կգտնվեն $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ միջակայքում, այսինքն՝ $n > N$ դեպքում $x_n < a + \varepsilon < b$: Բայց սա հակասում է $x_n > b$ ($n \geq N_0$) պայմանին, ուստի մեր ենթադրությունը սխալ էր, փաստորեն՝ $a \geq b$: ■

Նման եղանակով կարելի է ապացուցել նաև, որ երբ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ և $x_n < b$ ($n \geq N_0$), ապա $a \leq b$:

2) Ճիշտ նույն ձևով ապացուցվում են հետևյալ պնդումները:

- Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ և $x_n \geq b$ ($n \geq N_0$), ապա $a \geq b$:

• Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, ընդ որում՝

$x_n \geq y_n$; ($n \geq N_0$), ապա $a \geq b$:

• Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, ընդ որում՝ $a > b$, ապա գոյություն ունի մի N_0 բնական թիվ, որ $n \geq N_0$ դեպքում $x_n > y_n$:

• Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ և $a > b$ ($a < b$), ապա գոյություն ունի մի N_0 բնական թիվ, որ $n \geq N_0$ դեպքում $x_n > b$ ($x_n < b$):

• Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ և $x_n \in [a; b]$, ապա $c \in [a; b]$:

3) Թեորեմ երեք հաջորդականությունների վերաբերյալ Թեորեմ 2.1

1. Եթե $x_n \leq z_n \leq y_n$ ($n=1, 2, \dots$),

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$,

ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$:

Ապացույց: Ըստ սահմանի սահմանման՝ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N_1$ բնական թիվ այնպես, որ $n \geq N_1$ դեպքում $|x_n - a| < \varepsilon$, այսինքն՝

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad (n = N_1, N_1 + 1, \dots), \quad (2.18)$$

Նման ձևով $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N_2$ բնական թիվ այնպես, որ $n \geq N_2$ դեպքում $|y_n - a| < \varepsilon$, այսինքն՝

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \quad (n = N_2, N_2 + 1, \dots), \quad (2.19)$$

Նշանակենք $N = \max\{N_1, N_2\}$: Այդ դեպքում հենց որ $n \geq N$, ըստ թեորեմի երկրորդ պայմանի՝ միաժամանակ տեղի կունենան ն՝ 2.18, և՛ 2.19 անհավասարությունները: Ուստի օգտվելով դրանցից և թեորեմի առաջին պայմանից՝ կարող ենք գրել, որ.

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \quad (n \geq N): \quad (2.20)$$

Այստեղից՝

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \quad (n \geq N), \quad (2.21)$$

որը նշանակում է՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$: ■

§ 7. Մոնոտոն հաջորդականություններ

Սահմանում: $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է չնվազող (չաճող), եթե այդ հաջորդականության ցանկացած անդամ, սկսած երկրորդից, փոքր չէ (մեծ չէ) իր նախորդից, այսինքն՝ ցանկացած n բնական թվի համար տեղի ունի $x_n \leq x_{n+1} \quad (x_n \geq x_{n+1}) \quad (n = 1, 2, \dots)$ անհավասարությունը:

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է **մոնոտոն**, եթե այն կա՛մ չնվազող է, կա՛մ չաճող:

Եթե ցանկացած n բնական թվի համար տեղի ունի $x_n < x_{n+1} \quad (x_n > x_{n+1})$, ապա $\{x_n\}$ -ը կանվանենք **աճող (նվազող)** կամ **խիստ աճող (խիստ նվազող)**:

Օրինակներ

1, 1, 1, 2, 2, 2, ..., n , n , n , ... -ը չնվազող է:

$x_n = 1 - \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) -ը խիստ աճող է և սահմանափակ:

$x_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) -ը խիստ նվազող է և սահմանափակ:

Թեորեմ մոնոտոն հաջորդականության սահմանի գոյության վերաբերյալ

Թեորեմ 2.2: Եթե $\{x_n\}$ -ը չնվազող է և վերնից սահմանափակ, ապա ունի վերջավոր սահման, ավելին՝
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \geq 1} \{x_n\}$:

Այստեղ $\{x_n\}$ հաջորդականության էլեմենտներին համապատասխանող թվային բազմության ճշգրիտ վերին եզրը (հիշենք, որ այդ բազմությունը կարող է բաղկացած լինել նույնիսկ մեկ էլեմենտից) նշանակել ենք $\sup_{n \geq 1} \{x_n\}$ սիմվոլով:

Ապացույց: Քանի որ $\{x_n\}$ -ը սահմանափակ է վերնից, ապա այն ունի վերին ճշգրիտ եզր: Այն նշանակենք $a = \sup_{n \geq 1} \{x_n\}$ և ցույց տանք, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

Նախ վերին եզրի սահմանման համաձայն՝
 $x_n \leq a$ ($n = 1, 2, \dots$): Մյուս կողմից $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N = N(\varepsilon)$ այնպիսի բնական թիվ, որ $x_N > a - \varepsilon$: Բայց քանի որ $\{x_n\}$ -ը չնվազող է, ուստի $x_n \geq x_N$, երբ $n \geq N$:
 Հետևաբար $x_n \geq x_N > a - \varepsilon$:

Այսպիսով՝ մեզ հաջողվեց $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար գտնել այնպիսի N բնական թիվ, որ հենց որ $n \geq N$, տեղի ունի

$a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon$ պայմանը: Իսկ սա էլ նշանակում է,
 որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$: ■

Ներդրված հատվածների լեմման

Սահմանում 2.13: Կասենք $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_n; b_n], \dots$ հատվածների հաջորդականությունը ներդրված է, եթե $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$, այսինքն՝ ցանկացած n բնական թվի համար՝ $a_n \leq a_{n+1}, b_n \geq b_{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$):

Լեմմա 2.5: Դիցուք $\{[a_n; b_n]\}_{n \geq 1}$ -ը ներդրված հատվածների այնպիսի հաջորդականություն է, որ $b_n - a_n \rightarrow 0$, այսինքն՝ այդ հատվածների երկարություններից կազմված հաջորդականությունը ձգտում է 0-ի: Այդ դեպքում գոյություն ունի ճիշտ մեկ կետ, որը պատկանում է բոլոր հատվածներին:

Ապացույց: Դիտարկենք տրված միջակայքերի ձախ ծայրակետերից բաղկացած $\{a_n\}$ թվային հաջորդականությունը: Ըստ պայմանի՝ $\{a_n\}$ -ը չնվազող է: Պարզ է նաև, որ $\{a_n\}$ -ը սահմանափակ է վերևից, որովհետև $a_n \leq b_1$ ($n=1, 2, \dots$): Ուստի ըստ նախորդ թեորեմի՝ գոյություն ունի $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c = \sup_{n \geq 1} \{a_n\}$: Ճիշտ նույն ձևով կարող ենք պնդել, որ քանի որ $\{b_n\}$ -ը չաճող է և ներքևից սահմանափակ՝ $b_n \geq a_1$ ($n=1, 2, \dots$), ուստի գոյություն ունի

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = d = \inf_{n \geq 1} \{b_n\}$: Յույց տանք, որ $c = d$: Իրոք,

$$d - c = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0; \Rightarrow d = c:$$

Այսպիսով՝ ցանկացած n բնական թվի համար՝
 $a_n \leq c \leq b_n$, իսկ սա էլ հենց նշանակում է, որ
 $c \in [a_n; b_n]$ ($n=1, 2, \dots$): ■

Դիտարկում 1. Նկատենք, որ այս լեմմայում $[a_n; b_n]$ միջակայքերի փակ լինելը էական է, որովհետև $\left\{ \left(0; \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \geq 1}$ կիսամիջակայքերը, օրինակ, կազմում են ներդրված հաջորդականություն և նրանց երկարությունների տարբերություն. $\frac{1}{n}$ հաջորդականությունը ձգտում է 0-ի, սակայն չկա ոչ մի կետ, որ պատկանի բոլոր այդ կիսամիջակայքերին:

Դիտարկում 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ պայմանը անհրաժեշտ է միայն նրա համար, որ ապահովի այդ միջակայքերին պատկանող ճիշտ մեկ կետի գոյությունը:

Օրինակ: Եթե վերցնենք $\left\{ \left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \geq 1}$ միջակայքի հաջորդականություն, ապա լեմման ճիշտ կլինի:

Եթիվը

Դիտարկենք $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n = 1, 2, \dots$) հաջորդականու-

թյունը:

Ցույց տանք, որ այն աճող է և վերնից սահմանափակ:
Օգտվենք Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից.

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))b^n}{n!}: \end{aligned} \quad (2.22)$$

Վերցնենք $a=1$, $b=\frac{1}{n}$, կստանանք.

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{n!} \frac{1}{n^n}: \end{aligned} \quad (2.23)$$

Այստեղից՝

$$\begin{aligned} x_n &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right): \end{aligned} \quad (2.24)$$

Հետևաբար՝

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\
& + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right): \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Համեմատելով x_n -ն ու x_{n+1} -ը՝ կնկատենք, որ x_n -ը բաղկացած է n հատ դրական գումարելիներից, իսկ x_{n+1} -ը՝ $n+1$ հատ դրական գումարելիներից: Բացի դրանից՝ 2.24-ի յուրաքանչյուր գումարելի փոքր է 2.25-ի համապատասխան գումարելիներից, և 2.25-ի մեջ ավելացել է նոր դրական գումարելի: Այսինքն՝ $x_n < x_{n+1}$, որն էլ նշանակում է, որ $\{x_n\}$ -ը աճող է: Ստուգենք, որ $\{x_n\}$ -ը սահմանափակ է վերևից: Իրոք, 2.24-ից պարզ է, որ.

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}: \quad (2.26)$$

Քանի որ $k \geq 2$ դեպքում $k! = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \geq 2^{k-1}$, ուստի 2.26-ից կունենանք.

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3: \quad (2.27)$$

Այսպիսով, քանի որ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n=1, 2, \dots$) հաջորդա-

կանությունը աճող է և վերևից սահմանափակ, ապա, ըստ մոնոտոն հաջորդականության սահմանի գոյության վերա-

բերյալ թեորեմի, այն ունի սահման, որն ընդունված է

$$\text{նշանակել } e\text{-ով՝ } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e:$$

Քանի որ $2 \leq x_n < 3$ ($n=1, 2, \dots$), ապա ճիշտ է նաև $2 \leq e \leq 3$ անհավասարությունը:

***e* թվի արժեքի հաշվումը**

2.26 անհավասարության աջ մասը նշանակենք $\{y_n\}$ -ով, այսինքն՝

$$y_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}: \quad (2.28)$$

Օգտվելով 2.24-ից՝ կարող ենք նկատել, որ երբ $n > k$, ապա տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\begin{aligned} x_n &> 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right): \end{aligned} \quad (2.29)$$

Եթե k -ն պահենք հաստատուն (ֆիքսենք), իսկ n -ը ձգտեցնենք անվերջի, կստանանք՝

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &> \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right): \end{aligned} \quad (2.30)$$

Այսինքն՝ $e \geq \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}\right)$: Հետևաբար նկատի ունենալով նաև 2.26-ը՝ կարող ենք ասել, որ տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $e \geq y_n > x_n$: Այստեղից էլ, ըստ երեք հաջորդականությունների հայտնի հատկության, կարող ենք պնդել, որ քանի որ $x_n \rightarrow e$, ապա y_n -ը ևս ձգտում է e -ի:

Այնուհետև e թվի հաշվման համար օգտագործենք ոչ թե x_n -ը, այլ y_n -ը: Կազմենք հետևյալ տարբերությունը և այն գնահատենք՝

$$\begin{aligned} y_{n+m} - y_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+m)!} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n+2) \dots (n+m)} \right] < \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} \right] < \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{(n+2)}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{(n+2)}{(n+1)} = \frac{1}{n!} \frac{(n+2)}{(n+1)^2} : \end{aligned}$$

Այսինքն՝ ստացանք, որ.

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{n!} \frac{(n+2)}{(n+1)^2} : \quad (2.31)$$

2.31-ի մեջ n -ը պահենք հաստատուն, իսկ m -ը ձգտեցնենք անվերջի, կստանանք՝

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n!} \frac{(n+2)}{(n+1)^2}: \quad (2.32)$$

Կարելի է նկատել, որ $\frac{(n+2)}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$: Հետևաբար 2.32-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n \cdot n!}: \quad (2.33)$$

Այս անհավասարության երեք մասը բաժանենք $\frac{1}{n \cdot n!}$ -ի վրա, կստանանք՝

$$0 < \frac{e - y_n}{\frac{1}{n \cdot n!}} < 1: \quad (2.34)$$

Նշանակենք $\theta = \frac{e - y_n}{\frac{1}{n \cdot n!}}$, ուստի 2.34-ից պարզ կլինի, որ

$0 < \theta < 1$, իսկ $e - y_n = \frac{\theta}{n! \cdot n}$, հետևաբար կստանանք, որ.

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n! \cdot n} \quad (0 < \theta < 1): \quad (2.35)$$

Այսպիսով՝ այս բանաձևով կարելի է հաշվել e -ի թվային արժեքը ցանկացած ճշտությամբ:

e թվի իռացիոնալությունը

Պնդում 2.1: e թիվը իռացիոնալ է:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ e -ն ռացիոնալ թիվ է: Այդ դեպքում այն ներկայացվում է $\frac{m}{n}$ տեսքով, ուստի կստանանք՝

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n} \quad (0 < \theta < 1): \quad (2.36)$$

Հավասարության երկու մասը բազմապատկենք $n!$ -ով, ձախ մասում կստանանք ամբողջ թիվ, իսկ աջ մասում՝ ամբողջ թվին գումարած $\frac{\theta}{n}$: Այստեղից էլ կհետևի, որ $\frac{\theta}{n}$ -ը, որտեղ $0 < \theta < 1$ նույնպես ամբողջ թիվ է, որը հնարավոր չէ: Հետևաբար մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ, ուրեմն e -ն իռացիոնալ թիվ է:

§ 8. Հաջորդականության մասնակի սահման

Դիցուք $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ -ը որևէ թվային հաջորդականություն է: Կազմենք բնական թվերի մի որևէ $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ աճող հաջորդականություն և $\{X_n\}$ -ից առանձնացնենք այն անդամները, որոնց համարները համընկնում են $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ թվերի հետ, այսինքն՝ $X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_n}, \dots$: Ստացված $\{X_{k_n}\}_{n \geq 1}$ հաջորդականու-

թյունը, որի առաջին անգամը X_{k_1} -ն է, երկրորդը՝ x_{k_2} -ը և այլն, կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության ենթահաջորդականություն: Մասնավորապես, երբ $k_n = n$, $\{x_n\}$ հաջորդականությունն իր ենթահաջորդականությունն է: Նկատենք, որ $k_n \geq n$ ($n=1, 2, \dots$), որովհետև $\{k_n\}$ -ը բնական թվերի աճող հաջորդականություն է:

Օրինակ 1. $y_n = \frac{1}{4n^2}$ ($n=1, 2, \dots$) հաջորդականությունը

$x_n = \frac{1}{n^2}$ ($n=1, 2, \dots$) հաջորդականության համար ենթահաջորդականություն է, որովհետև $y_n = x_{2n}$ ($n=1, 2, \dots$):

2. $1, 1, 1, \dots$ հաջորդականությունը $1, -1, 1, -1, \dots$ հաջորդականության ենթահաջորդականություն է, որովհետև այն ստացվել է՝ վերջինից առանձնացնելով 1-ին, 3-րդ, 5-րդ և մնացած կենտ համարի անդամները:

3. $4, 2, 1, 5, 6, 7, 8, \dots$ հաջորդականությունը $x_n = n$ ($n=1, 2, \dots$) հաջորդականության համար ենթահաջորդականություն չէ: Նկատենք, որ եթե հեռացնենք առաջին երեք անդամները, ապա ստացված $5, 6, 7, 8, \dots$ հաջորդականությունը կլինի $x_n = n$ ($n=1, 2, \dots$)-ի ենթահաջորդականություն:

Թեորեմ 2.3: Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը a թիվն է, ապա նրա ցանկացած $\{x_{k_n}\}$ ենթահաջորդականության սահմանը նույն a թիվն է:

Ապացույց: Նշանակենք $y_n = x_{k_n}$ ($n=1, 2, \dots$) և ցույց տանք, որ y_n -ը ևս ձգտում է a -ին:

Քանի որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ուստի $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N$ բնական թիվ, որ հենց որ $n \geq N(\varepsilon)$, տեղի ունի $|x_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Քանի որ $\{k_n\}$ -ը աճող է, ուստի $n \geq N(\varepsilon)$ -ից պարզ կլինի, որ $k_n \geq N(\varepsilon)$, այսինքն՝ տեղի կունենա $|y_n - a| = |x_{k_n} - a| < \varepsilon$: Այսպիսով՝ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար կարողացանք նշել այնպիսի N բնական թիվ, որ $n \geq N(\varepsilon)$ դեպքում տեղի ունի $|y_n - a| < \varepsilon$: Սա էլ հենց նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$: ■

Այսպիսով՝ կարող ենք կատարել հետևյալ պնդումը. Զուգամետ հաջորդականության ցանկացած ենթահաջորդականություն զուգամետ է, և նրանց սահմանները նույնն են:

Նկատենք նաև, որ տարամետ հաջորդականությունը կարող է ունենալ զուգամետ ենթահաջորդականություն (**օրինակ 2**):

Տանք հաջորդականության մասնակի սահմանի (կամ սահմանային կետի) գաղափարը:

Սահմանում 2.14: a թիվը կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության **մասնակի սահման** կամ **սահմանային կետ**, եթե նրա $\forall \varepsilon > 0$ շրջակայքում գտնվում են այդ հաջորդականությունից անվերջ թվով անդամներ:

Սահմանում 2.15: a թիվը կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության **մասնակի սահման** կամ **սահմանային կետ**, եթե այդ հաջորդականությունից կարելի է առանձնացնել a -ին գուգամիտող ենթահաջորդականություն:

Ապացուցենք, որ այս երկու սահմանումները համարժեք են:

Այսինքն, եթե a -ն $\{x_n\}$ -ի սահմանային կետ է **սահմանում 2.14**-ի իմաստով, ապա այն սահմանային կետ է նաև **սահմանում 2.15**-ի իմաստով և հակառակը:

Ապացուցենք, որ **սահմանում 2.14**-ից բխում է **սահմանում 2.15**-ը: Իրոք, վերցնենք $\varepsilon = 1$, ըստ **սահմանում 2.14**-ի՝ $(a-1; a+1)$ միջակայքում գտնվում են $\{x_n\}$ -ից անվերջ քանակությամբ անդամներ: Ընտրենք դրանցից որևէ մեկը՝ X_{k_1} :

Այնուհետև $\left(a - \frac{1}{2}; a + \frac{1}{2}\right)$ միջակայքում ևս $\{x_n\}$ -ից կլինեն անվերջ քանակությամբ անդամներ, որոնցից կարող ենք ընտրել այնպիսին, որի համարը՝ $k_2 > k_1$: Այս պրոցեսը անվերջ շարունակելով n -րդ քայլում՝ $\left(a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}\right)$ միջակայքում ընտրում ենք $\{x_n\}$ -ից այնպիսի X_{k_n} անդամ, որի համարը մեծ է նախորդ ընտրված անդամի համարից՝

$k_n > k_{n-1}$: Պարզ է, որ $x_{k_n} \in \left(a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}\right) (n=1, 2, \dots)$, ինչը նշանակում է $|x_{k_n} - a| < \frac{1}{n}$: Այստեղից՝ $\left(a - \frac{1}{n} < x_{k_n} < a + \frac{1}{n}\right)$: Նկատի ունենալով, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a - \frac{1}{n}\right) = a$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{n}\right) = a$, նաև հաշվի առնելով **§6**-ի երեք հաջորդականությունների մասին թեորեմ 2.1-ը՝ կատանանք, որ $x_{k_n} \rightarrow a$, այսինքն՝ a -ն $\{x_n\}$ -ի մասնակի սահման է՝ ըստ **սահմանում 2.15**-ի:

Ապացուցենք հակադարձը, որ **սահմանում 2.15**-ից բխում է **սահմանում 2.14**-ը:

Դիցուք $\exists \{x_{k_n}\}_{n \geq 1}$ այնպես, որ $\lim_{k_n \rightarrow \infty} (x_{k_n}) = a$: Ըստ հաջորդականության սահմանի սահմանման a կետի՝ ցանկացած $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ շրջակայքում կգտնվեն $\{x_{k_n}\}$ $\{x_n\}$ -հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ, այսինքն՝ a -ն կհանդիսանա $\{x_n\}$ -ի մասնակի սահման՝ ըստ **սահմանում 2.14**-ի:

Օրինակներ

1. Պարզ է, որ եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ապա a -ն կլինի $\{x_n\}$ -ի միակ սահմանային կետը: Իրոք, a -ի ցանկացած ε -շրջակայքում գտնվում են $\{x_n\}$ -ից անվերջ թվով անդամներ: Ավելին, այդ շրջակայքում գտնվում են $\{x_n\}$ -ի բոլոր անդամները՝ սկսած ինչ-որ համարից: Եթե ենթադրենք, որ, բացի a -ից, կան a -ից տարբեր x սահմանային կետ, այդ դեպքում

վերցնելով a -ի և x -ի իրար հետ չհատվող շրջակայքեր՝ կստանանք, որ x -ի շրջակայքում կգտնվեն ամենաշատը վերջավոր թվով անդամներ $\{x_n\}$ -ից: Բայց դա կնշանակի, որ x -ը չի կարող լինել սահմանային կետ:

2. $-1; 0; 1; -1; 0; 1; \dots$ հաջորդականությունն ունի ճիշտ երեք սահմանային կետ՝ -1 -ը, 0 -ն, և 1 -ը: Պարզ է, որ երբ $n=1, 2, \dots$, ապա $x_{3n-2}=-1$, $x_{3n-1}=0$ և $x_{3n}=1$ ենթահաջորդականություններն ունեն -1 , 0 , և 1 սահմանները համապատասխանաբար: Մնում է ցույց տալ, որ այս հաջորդականությունը այլ սահմանային կետեր չունի: Իրոք, եթե x -ը -1 , 0 , 1 թվերից տարբերվող սահմանային կետ է, ապա կարող ենք նշել x -ի ε շրջակայք՝ $(x-\varepsilon; x+\varepsilon)$, որում -1 , 0 , 1 կետերը չլինեն: Սա նշանակում է x -ը չի կարող լինել սահմանային կետ:

3. Դիցուք $\{r_n\}$ -ը բոլոր ռացիոնալ թվերի հաջորդականությունն է: Ակնհայտ է, որ ցանկացած a իրական թիվ կլինի $\{r_n\}$ -ի մասնակի սահման, որովհետև կամայական $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ շրջակայքում գտնվում են անվերջ քանակությամբ ռացիոնալ թվեր:

4. $x_n = n$ ($n=1, 2, \dots$) հաջորդականությունը սահմանային կետ չունի, որովհետև, օրինակ, ցանկացած x թվի $\left(x-\frac{1}{4}; x+\frac{1}{4}\right)$ շրջակայքում գտնվում է միայն մեկ ամբողջ թիվ:

Լեմմա 2.6: (Բուցանո-Վայերշտրասի լեմմա) Ցանկացած սահմանափակ հաջորդականություն ունի գոնե մեկ սահմանային կետ:

Սա կարելի է ձևակերպել նաև հետևյալ կերպ:

Լեմմա 2.7: Ցանկացած սահմանափակ հաջորդականությունից կարելի է առանձնացնել զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Ապացույց: Դիցուք $\{x_n\}$ -ը սահմանափակ հաջորդականություն է, այսինքն՝ գոյություն ունեն այնպիսի m և M թվեր, որ $m \leq x_n \leq M$; ($n=1, 2, \dots$): Այս $[m; M]$ հատվածը կիսենք և նշանակենք $[a_1; b_1]$ -ով այն հատվածը, որը պարունակում է $\{x_n\}$ հաջորդականությունից անվերջ թվով անդամներ, եթե երկու հատվածն էլ այդպիսին են, ապա պայմանավորվենք ընտրել նրանցից աջ գտնվողը: Նման ձևով $[a_1; b_1]$ -ը տրոհենք երկու հավասար մասերի և $[a_2; b_2]$ -ով նշանակենք այն հատվածը, որը պարունակում է $\{x_n\}$ -ից անվերջ թվով անդամներ: Այս պրոցեսը անվերջ շարունակելով՝ կստանանք $\{[a_n; b_n]\}$ ներդրված հատվածների հաջորդականություն, ընդ որում՝
$$b_n - a_n = \frac{M - m}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$
 և ցանկացած $[a_n; b_n]$ -ին պատկանում են $\{x_n\}$ -ից անվերջ թվով անդամներ: Հետևաբար ըստ ներդրված միջակայքերի լեմմայի՝ $\exists c \in [a_n; b_n], (n=1, 2, \dots)$, ընդ որում՝
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c, \quad a_n \leq c \quad \text{և} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c, \quad b_n \geq c:$$
 Ուստի

$\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N_1$ այնպիսին, որ հենց $n > N_1$, տեղի ունի $c - \varepsilon < a_n \leq c$ և $\exists N_2$, որ $n \geq N_2$ դեպքում՝ $c \leq b_n < c + \varepsilon$: Եթե նշանակենք $N = \max\{N_1; N_2\}$, ապա $n \geq N$ դեպքում միաժամանակ տեղի կունենա և՛ $c - \varepsilon < a_n \leq c$, և՛ $c \leq b_n < c + \varepsilon$, այսինքն՝ $[a_N; b_N] \subset (c - \varepsilon; c + \varepsilon)$, քանի որ $[a_N; b_N]$ -ում գտնվում են $\{x_n\}$ -ից անվերջ թվով անդամներ, ապա $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$ -ը ևս կպարունակի $\{x_n\}$ -ից անվերջ թվով անդամներ: Սա էլ նշանակում է, որ c -ն $\{x_n\}$ -ի սահմանային կետ է: ■

Երկրորդ ձևակերպմամբ լեմման ապացուցելու համար կվարվենք նույն կերպ, այսինքն՝ կընտրենք հատվածները կիսելու եղանակ: Այս դեպքում կստանանք 0 -ի ձգտող երկարությամբ ներդրված միջակայքերի $[a_n; b_n]$ հաջորդականություն: Կկառուցենք ենթահաջորդականություն, որը կունենա վերջավոր սահման:

Որպես ենթահաջորդականության առաջին անդամ վերցնենք $[a_1; b_1]$ -ում գտնվող $\{x_n\}$ -ից ցանկացածը և այն նշանակենք x_{n_1} , $[a_2; b_2]$ -ից նույնպես վերցնենք $\{x_n\}$ -ից ցանկացածը, որի համարը նախորդ վերցրած անդամի համարից մեծ է, այն նշանակենք x_{n_2} և այսպես շարունակ: Արդյունքում կստանանք x_{n_k} ենթահաջորդականություն, որը ընկած է $[a_k; b_k]$ -ում: Ստացվեց, որ $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$, իսկ քանի որ $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = c$, հետևաբար $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$: ■

Սահմանում 2.16: (Հաջորդականության ստորին և վերին սահմաններ) $\{x_n\}$ սահմանափակ հաջորդականության մասնակի սահմաններից ամենամեծը անվանում են հաջորդականության վերին սահման և նշանակում են $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, իսկ մասնակի սահմաններից ամենափոքրը կոչվում է հաջորդականության ստորին սահման՝ նշանակելով $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ սիմվոլով:

Վերևից անսահմանափակ հաջորդականության վերին սահմանը $+\infty$ -ն է, իսկ ներքևից անսահմանափակ հաջորդականության ստորին սահմանը՝ $-\infty$ -ը:

Թեորեմ 2.4: Ցանկացած սահմանափակ հաջորդականություն ունի և՛ վերին, և՛ ստորին սահմաններ:

Ապացույց: Նշանակենք E -ով $\{x_n\}$ -ի բոլոր սահմանային կետերի բազմությունը, որը, ըստ Բուլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի, դատարկ չէ ($E \neq \emptyset$): Համոզվենք, որ E -ն սահմանափակ թվային բազմություն է: Նախ, եթե $x \in E$, ապա $\exists \{x_{k_n}\}$ այնպիսի ենթահաջորդականություն, որ $x_{k_n} \rightarrow x$: Ըստ թեորեմի սահմանափակության պայմանի՝ $\exists m$ և M այնպիսի թվեր, որ $m \leq x_n \leq M$; ($n=1, 2, \dots$): Սա նշանակում է, որ տեղի ունի նաև $m \leq x_{k_n} \leq M$; ($n=1, 2, \dots$) անհավասարությունը: Այստեղից, ըստ զուգամետ հաջորդականությունների հայտնի հատկության, $m \leq x \leq M$ (այսինքն՝ E բազմության ցանկացած x էլեմենտ գտնվում է m և M թվերի միջև) E -ն սահմանափակ է: Ըստ ճշգրիտ եզրի գոյության

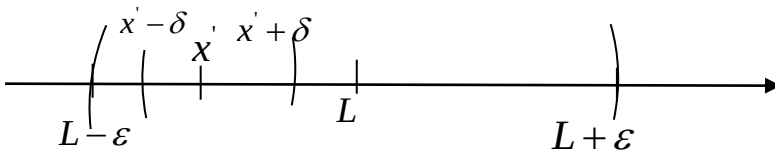
վերաբերյալ թեորեմի՝ E -ն կունենա ճշգրիտ վերին եզր՝ $L = \sup E$: Եթե ապացուցենք, որ $L \in E$, ապա նաև $L = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$, որովհետև L -ը որպես E -ի մեծագույն տարր կլինի $\{x_n\}$ -ի մասնակի սահմաններից ամենամեծը:

Ըստ ճշգրիտ վերին եզրի սահմանման՝ $L = \sup E$ նշանակում է՝

ա. $\forall x \in E; x \leq L$,

բ. $\forall \varepsilon > 0, \exists x' > L - \varepsilon$

Վերցնենք $\delta > 0$ թիվն այնքան փոքր, որ $(x' - \delta; x' + \delta) \subset (L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ (տե՛ս Նկ. 2.5):



Նկար 2.5

Քանի որ x' -ը $\{x_n\}$ -ի սամանային կետ է, ապա $(x' - \delta; x' + \delta)$ -ում կան $\{x_n\}$ -ից անվերջ թվով անդամներ:

Ավելին, $\{x_n\}$ -ից անվերջ թվով անդամներ կպարունակի $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ միջակայքը, այսինքն՝ L -ը կլինի $\{x_n\}$ -ի սահմանային կետ, հետևաբար $L \in E$: ■

Ճիշտ նույն ձևով ապացուցվում է սահմանափակ հաջորդականության ստորին սահմանի գոյությունը:

Թեորեմ 2.5: Սահմանափակ հաջորդականության գումարաբանությունը լիմիտի համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n :$$

Ապացույց: **Անհրաժեշտություն:** Դիցուք $\{x_n\}$ -ը գումարաբան է, նշանակում է $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ինչն էլ նշանակում է, որ a -ն $\{x_n\}$ -ի միակ սահմանային կետն է, ուստի $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n :$

Բավարարություն: Եթե $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ապա $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N_1$, որ $n \geq N_1$ դեպքում

$$x_n < a + \varepsilon; \quad (n = N_1, N_1 + 1, \dots), \quad (2.36)$$

նույն ձևով $\exists N_2$, որ $n \geq N_2$ դեպքում

$$x_n > a - \varepsilon; \quad (n = N_2, N_2 + 1, \dots): \quad (2.37)$$

Նշանակենք $N = \max\{N_1, N_2\}$: Այդ դեպքում, երբ $n \geq N$ միաժամանակ տեղի ունենւմ 2.36-ը, և՛ 2.37-ը, այսինքն՝ $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon; \quad (n = N, N + 1, \dots)$: Սա էլ նշանակում է, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a :$$

■

§ 9. Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը

Սահմանում 2.17: Կասենք $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N = N(\varepsilon)$ այնպես, որ կամայական $p = 1, 2, \dots$ բնական թվի և $n \geq N$ համար տեղի ունի $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Կա նաև մեկ այլ սահմանում, որը համարժեք է նախորդին:

Սահմանում 2.18: Կասենք $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N = N(\varepsilon)$, որ երբ $n \geq N$ և $m \geq N$, ապա տեղի ունի $|x_n - x_m| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Լեմմա 2.8: Եթե հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, ապա այն սահմանափակ է:

Ապացույց: Ֆունդամենտալության պայմանից բխում է, որ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N = N(\varepsilon)$, որ երբ $n \geq N$ և $m \geq N$, ապա տեղի ունի $|x_n - x_m| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Եթե m -ը պահենք հաստատուն, այսինքն՝ ամրագրենք, ապա x_m -ը կլինի որոշակի թիվ, հետևաբար $|x_n - x_m| < \varepsilon$ անհավասարությունից կստանանք՝ $x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$: Սա նշանակում է, որ $\{x_n\}$ -ը սահմանափակ է:

Թեորեմ 2.6: Կոշիի սկզբունքը: $\{x_n\}$ հաջորդականության զուգամետ լինելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ֆուդամենտալ:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք $\{x_n\}$ հաջորդականությունը զուգամետ է, ապացուցենք, որ այն ֆուդամենտալ է: Քանի որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ապա $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N = N(\varepsilon)$ այնպիսի բնական թիվ, որ $n \geq N$ դեպքում $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$: Պարզ է, որ $n \geq N$ պայմանից ակնհայտ է նաև $n + p \geq N$ անհավասարությունը ցանկացած $p = 1, 2, \dots$ բնական թվի դեպքում: Ուստի տեղի ունի նաև $|x_{n+p} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ անհավասարությունը: Հետևաբար, եթե p -ն բնական թիվ է և $n \geq N$, ապա վերևի արդյունքներից օգտվելով՝ կարող ենք գրել՝

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - a + a - x_n| \leq \\ &\leq |x_{n+p} - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon: \end{aligned} \quad (2.38)$$

Այսինքն՝ $\{x_n\}$ -ը ֆուդամենտալ է:

Բավարարություն: Դիցուք $\{x_n\}$ -ը ֆուդամենտալ է, ցույց տանք, որ այն զուգամետ է: Համաձայն լեմմա 2.8-ի՝ $\{x_n\}$ -ը սահմանափակ է: Ըստ Բոլցան-Վայերշտրասի լեմմայի՝ այդ սահմանափակ հաջորդականությունը ունի գոնե մեկ սահ-

մանային կետ, այսինքն՝ $\exists \{x_{k_n}\}$ այնպես, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = c$:

Ապացուցենք, որ այդ նույն սահմանին է ձգտում նաև $\{x_n\}$ հաջորդականությունը: Նախ ըստ ֆունդամենտալության պայմանի՝ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N_1 = N_1(\varepsilon)$, որ երբ $n \geq N_1$ և

$m \geq N_1$, ապա տեղի ունի $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ անհավասարությունը:

Մյուս կողմից, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = c$ -ից բխում է, որ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար

$\exists N_2 = N_2(\varepsilon)$, որ երբ $k_n \geq N_2$, ապա տեղի ունի

$|x_{k_n} - c| < \frac{\varepsilon}{2}$: Նշանակենք $N = \max\{N_1; N_2\}$: Այդ դեպքում,

եթե $n \geq N$, և հաշվի առնելով, որ $k_n \geq n$, կարող ենք գրել՝

$$\begin{aligned} |x_n - c| &= |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - c| \leq \\ &\leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon : \end{aligned} \quad (2.39)$$

Այսինքն՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$: ■

Օրինակ 1: Ստուգել, որ $x_n = \frac{1}{n^2}$ հաջորդականությունը

ֆունդամենտալ է:

Ապացուցման համար կազմենք $x_{n+p} - x_n$ տարբերությունը և գնահատենք.

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{1}{(n+p)^2} - \frac{1}{n^2} \right| = \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+p)^2} \right| < \frac{1}{n^2} < \varepsilon : (2.40)$$

Օգտվելով $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ անհավասարությունից՝ կստանանք՝
 $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$: Սա նշանակում է որպես $N = N(\varepsilon)$ կարող ենք ըն-
 դունել $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil + 1$: Այսպիսով՝ ցույց տվեցինք, որ $\forall \varepsilon > 0$
 թվի համար $\exists N = N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil + 1$ $n \geq N$ դեպքում, և
 $\forall p = 1, 2, \dots$ բնական թվի համար $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, այսինքն՝
 $x_n = \frac{1}{n^2}$ -ն ֆունդամենտալ է:

Օրինակ 2: Ապացուցել, որ $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ հաջոր-
 դականությունը ֆունդամենտալ չէ:

Ապացույց: Քանի որ

$$x_{n+p} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \right), \quad \text{ապա}$$

$|x_{n+p} - x_n|$ տարբերության համար ունենք.

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \right) \right| > \\ &> \left| \frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p} \right| = \frac{p}{n+p}: \end{aligned} \quad (2.41)$$

Եթե վերցնենք $p = n$, ապա 2.41-ից կստանանք
 $\frac{p}{n+p} = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$: Այսինքն՝ $p = n$ դեպքում վերցնելով $\varepsilon = \frac{1}{2}$

2.41-ից՝ կատարվի, որ $|x_{n+p} - x_n| > \frac{1}{2}$: Սա ապացուցում է, որ

$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ հաջորդականությունը ֆուդամենտալ չէ:

Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար

1. Ապացուցել x_n հաջորդականության սահմանափակությունը.

$$\text{ա) } x_n = \frac{2n-1}{n^2}, \quad \text{բ) } x_n = \frac{\cos(2^n) \cdot \operatorname{arctg}(n!)}{n^3},$$

$$\text{գ) } x_n = \frac{\sin(n!) + \cos(n!)}{\sqrt{n}}, \quad \text{դ) } x_n = \frac{4^{\sqrt{n}} + 1}{n^2 - 2^{2\sqrt{n}}},$$

$$\text{ե) } x_n = \lg(\sqrt{3n^2 + 2} - \sqrt{2n}) - \lg(\sqrt{3n}):$$

2. Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը սահմանափակ չէ.

$$\text{ա) } x_n = \frac{n-3}{\sqrt{2n}}, \quad \text{բ) } x_n = \frac{(2n+3) + (-1)^n 2n}{\sqrt{n}},$$

$$\text{գ) } x_n = \frac{n^2 + 5}{2 - 3n}, \quad \text{դ) } x_n = \frac{4^{\sqrt{n}} + 1}{n + 7},$$

$$\text{ե) } x_n = \lg(\sqrt{n^3 + 2} - n):$$

3. Գտնել $\sup\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ և $\inf\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

ա) $x_n = \frac{2n-1}{n},$

բ) $x_n = \frac{2n-1}{2n+1}(-1)^n,$

գ) $x_n = 3\sin^4\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \frac{5n+7}{2n},$ դ) $x_n = \frac{n}{2n^2+1} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi n}{2}\right),$

ե) $x_n = 7 + 3(-1)^n - 2(-1)^{n+1}:$

4. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 8}{2n^2 + 3} = 2,$ բ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n + \sqrt{n}}{n^4 + 2} = 0,$

գ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n + 1}{3n + 3} = \infty,$ դ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2}{4n^3 + 5n^2} \right) = \frac{1}{3},$

ե) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n - 2n + 3}{4n + 9} = -\frac{1}{2}:$

5. Հաշվել սահմանը.

ա) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) n^2}{5n^2 + 2n + 1},$

բ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n} + 3}{4(n)^{\frac{2}{3}} + \cos^2(n)},$ գ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{5n + 4n^2 - 2} \right),$

դ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+2)} \right),$

$$\text{է) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3 - n^2 + 1 + 2 + \dots + n}{n \cdot \sin(n!) - 3n^2 + 7n^3} \right):$$

$$6. \text{ Գտնել } \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} \text{ -ը և } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} \text{ -ը, եթե.}$$

$$\text{ա) } x_n = (-1)^{n+1} \left(3 + \frac{5}{n} \right), \quad \text{բ) } x_n = 1 + \frac{n+1}{n+3} \sin \frac{\pi n}{2},$$

$$\text{գ) } x_n = 3 + 2(-1)^n + 5(-1)^{n+1}, \quad \text{դ) } x_n = \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n (-1)^{n+1},$$

$$\text{ե) } x_n = 1 + \frac{3 \cdot (-1)^n}{n} - \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2}:$$

7. Ապացուցել, որ x_n -ը անվերջ մեծ է.

$$\text{ա) } x_n = \frac{2n+3}{10^{12} \sqrt{n}}, \quad \text{բ) } x_n = \frac{8n^2+3}{3n+17},$$

$$\text{գ) } x_n = \frac{2n^2 - n + 4}{n+2}, \quad \text{դ) } x_n = \frac{2n^2+3}{3n-1} (-1)^{4n},$$

$$\text{է) } x_n = 1 + 3n + \frac{2}{n}:$$

7. Ապացուցել, որ x_n -ն անվերջ փոքր է.

$$\text{ա) } x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{1}{n+3} \right), \quad \text{բ) } x_n = \frac{3}{5n+6} (-1)^{2n},$$

$$\text{գ) } x_n = \frac{3 + \sin(7^n)}{2n}, \quad \text{դ) } x_n = \frac{5n}{7n^2 + n} \arctg(2^{\sqrt{n}}),$$

$$\text{է) } x_n = \frac{3(-1)^{8n}}{n^2} - \frac{\cos(n! \cdot 4^n)}{n}:$$

8. Հետազոտել հաջորդականության ֆունդամենտալությունը.

$$\text{ա) } x_n = \frac{2n+3}{n},$$

$$\text{բ) } x_n = \frac{3n-1}{n+4},$$

$$\text{գ) } x_n = \frac{n^2}{2+3n^2},$$

$$\text{դ) } x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

$$\text{ե) } x_n = 3 + \frac{5}{n} + n^2,$$

$$\text{զ) } x_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \dots + \frac{\cos n}{3^n},$$

$$\text{է) } x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}, \quad \text{ը) } x_n = \frac{3+2n^2}{n},$$

$$\text{թ) } x_n = \frac{\sin(1!)}{1 \cdot 2} + \frac{\sin(2!)}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin(n!)}{n \cdot (n+1)},$$

$$\text{ժ) } x_n = \frac{\cos(1!)}{1^3} + \frac{\cos(2!)}{2^3} + \dots + \frac{\cos(n!)}{n^3}:$$

ԳԼՈՒԽ 3

ՖՈՒՆԿՑԻՍՑԻ ՍԱՀՄԱՆ

Մեծություն: Փոփոխական մեծություն և ֆունկցիոնալ կախվածություն: Միջակայք և կետի շրջակայք

Հետագա ուսումնասիրությունների համար նախապես տանք որոշ հասկացությունների բացատրություններն ու հիմնական սահմանումները:

Մեծություն: Մեծությունն այն հիմնական հասկացություններից է, որին հանդիպում ենք յուրաքանչյուր քայլափոխի: Մեծություն ասելով՝ հասկանում ենք այն ամենը, որոնք չափվում են և արտահայտվում թվով կամ թվերով:

Մեծության օրինակներ են երկարությունը, մակերեսը, ծավալը, կշիռը, ջերմաստիճանը, արագությունը և այլն:

Բնության կամ տեխնիկայի մեջ կատարվող երևույթները մեր կողմից ընկալվում են որպես այդ երևույթին մասնակից որևէ մեծության փոփոխություն, որը պայմանավորված է մեկ այլ մեծության փոփոխությամբ:

Պրոցեսների ուսումնասիրության համար մաթեմատիկայում ներմուծվում է փոփոխական մեծության գաղափարը:

Այն մեծությունը, որը ընդունում է տարբեր թվային արժեքներ անվանում են փոփոխական մեծություն: Իսկ այն մեծությունը, որը պահպանում է իր թվային արժեքը անվանում են հաստատուն:

Երբ որևէ մեծության փոփոխություն բերում է մեկ ուրիշ մեծության փոփոխություն, ապա այդ պրոցեսը (երևույթը)

մաթեմատիկայում անվանում են ֆունկցիոնալ կախվածություն:

Մաթեմատիկական անալիզի կարևորագույն խնդիրներից է համակողմանի ուսումնասիրել այդպիսի ֆունկցիոնալ կախվածությունները:

Ֆունկցիայի սահմանումը: Դիցուք $X = \{x\}$ -ը մի որևէ բազմություն է: Եթե այդ բազմության յուրաքանչյուր x տարրին որոշակի օրենքով (կանոնով) համապատասխանության մեջ է տրված մի y թիվ, ապա կասենք, որ $X = \{x\}$ բազմության վրա տրված է $y = y(x)$ կամ $y = f(x)$ ֆունկցիան: Ընդ որում՝ x -ը կոչվում է անկախ փոփոխական կամ ֆունկցիայի արգումենտ, $X = \{x\}$ բազմությունը՝ ֆունկցիայի որոշման տիրույթ, իսկ տրված x -ին համապատասխանող y -ը կոչվում է ֆունկցիայի արժեք x կետում: Բոլոր այդ y -ների բազմությունը կնշանակենք $Y = \{y\}$ -ով՝ անվանելով ֆունկցիայի արժեքների բազմություն:

Սահմանում 3.1: Բոլոր այն թվերի (կետերի) բազմությունը, որոնք ընկած են երկու տարբեր թվերի (կետերի) միջև, անվանում են միջակայք:

Այսինքն՝ միջակայք կոչվում է բոլոր այն x կետերի բազմությունը, որի տարրերի համար բավարարվում է հետևյալ անհավասարություններից որևէ մեկը՝ $a < x < b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, $a \leq x \leq b$:

Նշված միջակայքերը համապատասխանաբար նշանակվում են հետևյալ սիմվոլներով՝ $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$, $[a; b]$: Այստեղ a -ն ու b -ն կոչվում են միջակայքի ծայրակետեր:

$(a; b)$ միջակայքը կոչվում է բաց միջակայք, $[a; b]$ -ն՝ փակ, իսկ $[a; b)$ -ն և $(a; b]$ -ն՝ կիսաբաց ու կիսափակ:

Բացի վերջավոր միջակայքերից՝ կան նաև կիսաանվերջ կամ անվերջ միջակայքեր: Դրանք հետևյալներն են՝ $(-\infty; c)$, $(c; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$:

Սահմանում 3.2: a կենտրոնով 2δ երկարությամբ միջակայքն անվանում են a կետի δ -շրջակայք:

a կետի δ -շրջակայքին պատկանող կետի x կոորդինատի համար բավարարվում է հետևյալ անհավասարությունը՝ $a - \delta < x < a + \delta$:

§ 1. Ֆունկցիայի սահմանի սահմանումը

Ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը տալու համար մեզ անհրաժեշտ է սահմանել, թե ինչ է բազմության սահմանային կամ կուտակման կետը:

Սահմանում 3.3: Դիցուք X -ը մի որևէ բազմություն է: Կասենք, a թիվը (կետը) X -ի սահմանային (կուտակման) կետ է, եթե $\forall \delta > 0$ թվի համար $(a - \delta; a + \delta)$ միջակայքում գոյություն ունի X -ին պատկանող և a -ից տարբեր կետ:

Պնդում 3.1: a -ի X բազմության սահմանային կետ լինելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա $\{x_n\}_{n \geq 1}$ հաջորդականություն, որի անդամները պատկանում են X -ին՝ $x_n \in X$, $(x_n \neq a, n = 1, 2, \dots)$ այնպես, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Եթե a -ն X -ի սահմանային կետ է, ապա $a-1 < x < a+1$ միջակայքում կա $x_1 \in X$, ըստ այդմ՝ $x_1 \neq a$: Նույն ձևով $\left(a - \frac{1}{2}; a + \frac{1}{2}\right)$ միջակայքում կա $x_2 \in X$ կետ, ըստ այդմ՝ $x_2 \neq a$: Այս պրոցեսը անվերջ շարունակելով՝ կստանանք $\{x_n\}_{n \geq 1}$ հաջորդականություն, որի անդամների համար բավարարվում են հետևյալ պայմանները՝ $x_n \in X$, $x_n \in \left(a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}\right)$, $(n=1, 2, \dots)$, $x_n \neq a$: Այստեղից ստացվում է, որ $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, այսինքն՝ $a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}$, որտեղից էլ, ըստ երեք հաջորդականությունների մասին թեորեմի, բխում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

Բավարարություն: Դիցուք $\exists \{x_n\}_{n \geq 1}$, $x_n \in X$, $(n=1, 2, \dots)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$: Ցույց տանք, որ a -ն X -ի սահմանային կետ է: Իրոք, ըստ սահմանի սահմանման՝ $\forall \delta > 0$ թվի համար $(a - \delta; a + \delta)$ շրջակայքում գտնվում են $\{x_n\}$ -ի անվերջ թվով անդամներ: Հետևաբար կա նաև a -ից տարբեր գոնե մեկ անդամ: Ուրեմն a -ն X -ի սահմանային կետ է: ■

Սահմանում 3.4: (Ֆունկցիայի սահմանի սահմանումն ըստ Կոշիի): Կասենք A թիվը $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանն է x_0 կետում (կամ x -ը x_0 -ին ձգտելիս), եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի

համար $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ թիվ այնպես, որ $0 < |x - x_0| < \delta$ պայմանից հետևի՝ $|f(x) - A| < \varepsilon$:

Այն փաստը, որ A թիվը $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանն է x_0 կետում, կրճատ գրում են $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ կամ $f(x) \rightarrow A$,

երբ $x \rightarrow x_0$:

Երկրաչափական մեկնաբանություն տալու համար սահմանման մեջ եղած անհավասարությունները գրենք բացված տեսքով. $0 < |x - x_0| < \delta$ նշանակում է

$(x_0 - \delta < x < x_0 + \delta)$; $x \neq x_0$, իսկ $|f(x) - A| < \varepsilon$ բացված տեսքով կլինի՝ $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$:

Այսինքն՝ $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ միջակայքի բոլոր $x \neq x_0$ -երի համար $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքները պատկանում են $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ միջակայքին:

Օրինակ: Ապացուցել, որ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2}{x - 5} = -\frac{1}{2}$:

Ապացույց: Գնահատենք $\left| \frac{x^2 + 2}{x - 5} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right|$ տարբերությունը և կստանանք՝

$$\left| \frac{x^2 + 2}{x - 5} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right| = |(x+1)| \left| \frac{\left(x - \frac{1}{2} \right)}{x - 5} \right| : \text{ Առանց որևէ դժվար}$$

բության կարող ենք ցույց տալ, որ $(-1 - 0.5; -1 + 0.5)$

միջակայքում $\left| \frac{(2x-1)}{2(x-5)} \right| \leq \frac{4}{9} : \text{ Հետևաբար}$

$$\left| \frac{x^2 + 2}{x - 5} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right| = |(x+1)| \left| \frac{(2x-1)}{2(x-5)} \right| \leq \frac{4}{9} |(x+1)| < \varepsilon$$

Այստեղից կստացվի $|(x+1)| < \frac{9}{4} \varepsilon : \text{ Այնուհետև որպես}$

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ կվերցնենք $\delta(\varepsilon) = \min \left\{ 0.5; \frac{9}{4} \varepsilon \right\} :$

Այսպիսով՝ ստացանք, որ $x_0 = -1$ -ի $\delta(\varepsilon)$ շրջակայքի ցանկացած x -ի համար $\frac{x^2 + 2}{x - 5}$ ֆունկցիայի արժեքները գտնվում են $A = \frac{-1}{2}$ թվի ε շրջակայքում:

Սա նշանակում է $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2}{x - 5} = -\frac{1}{2} :$ ■

Սահմանում 3.5: (Ֆունկցիայի սահմանի սահմանումն ըստ Հայնեի): Կասենք A թիվը $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանն է x_0 կետում (կամ x -ը x_0 -ին ձգտելիս), եթե $\forall \{x_n\}_{n \geq 1}$ հաջորդականության համար, որի անդամները $X = \{x\}$ բազմու-

թյունից են՝ $x_n \in \{x\}$, $(n=1, 2, \dots)$, ընդ որում՝ $x_n \rightarrow x_0$ և $x_n \neq x_0$ -ից կհետևի, որ համապատասխան $\{f(x_n)\}_{n \geq 1}$ հաջորդականությունը ձգտում է A թվին:

Նկատենք, որ երկու սահմանումներում էլ ընդգծում ենք, որ $x \neq x_0$ կամ $x_n \neq x_0$ պայմանը, որովհետև $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում կարող է որոշված չլինել, սակայն, անգամ եթե որոշված էլ լինի, միևնույնն է, $f(x_0)$ արժեքը ոչ մի տեղ չի մասնակցում:

Թեորեմ 3.1: Ֆունկցիայի սահմանի երկու սահմանումները համարժեք են:

Ապացույց: Դիցուք A -ն $f(x)$ -ի սահմանն է x_0 Կետում՝ ըստ Կոշիի սահմանման (ըստ սահմանում 3.4-ի): Վերցնենք կամայական $\forall \varepsilon > 0$ թիվ, որին համապատասխան, ըստ սահմանման, կգտնվի $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ թիվ, որ $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in \{x\}$ պայմանից բխում է, որ $|f(x) - A| < \varepsilon$: Դիցուք $\{x_n\}_{n \geq 1}$ -ը կամայական այնպիսի հաջորդականություն է, որ $x_n \in \{x\}$, $x_n \rightarrow x_0$ և $x_n \neq x_0$: Ապացուցենք, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$: Ըստ հաջորդականության սահմանի սահմանման՝ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $N = N(\delta) = N(\delta(\varepsilon))$ համար, որ $n \geq N$ դեպքում $|x_n - x_0| < \delta$: Հետևաբար այս x_n -երի համար ևս տեղի ունի $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, որն էլ նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$:

Ապացուցենք, որ սահմանում 3.5-ից բխում է սահմանում 3.4-ը: Ապացույցը տանենք հակասող ենթադրությամբ այսինքն՝ ընդունենք, որ, ըստ Հայնեի, ունենք՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, սակայն սահմանումը, ըստ Կոշիի, տեղի չունի: Նշանակում է $\exists \varepsilon_0 > 0$ թիվ, որ $\delta > 0$ թվի դեպքում կա $x \in \{x\}$ այնպես, որ չնայած $0 < |x - x_0| < \delta$, բայց $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$: Մասնավորապես,

$\delta_1 = 1$ դեպքում $\exists x_1 \in \{x\}$ այնպիսին, որ

$0 < |x_1 - x_0| < 1$, բայց $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$: $\delta_2 = \frac{1}{2}$ -ի դեպքում

$\exists x_2 \in \{x\}$ այնպիսին, որ $0 < |x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$, բայց

$|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$: Այսպես անվերջ շարունակելով՝ $\delta_n = \frac{1}{n}$ -ի

դեպքում $\exists x_n \in \{x\}$ այնպես, որ $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, բայց

$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$:

Այստեղից էլ կատանանք, որ $x_n \rightarrow x_0$ և $x_n \neq x_0$, սակայն $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$: Ստացանք հակասություն, որովհետև ունենինք $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$: Հետևաբար մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ: Այսպիսով՝ ապացուցվեց, որ սահմանում 3.5-ին հետևեց սահմանում 3.4-ը: ■

§ 2. Միակողմանի սահմաններ

Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X բազմության վրա, և x_0 -ն այնպիսի կետ է, որ $\forall \delta > 0$ թվի համար $(x_0; x_0 + \delta)$ միջակայքում կա X բազմության գոնե մեկ կետ: Այսինքն՝ x_0 -ն X բազմության կուտակման կետ է:

Սահմանում 3.6: A_1 թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան սահման x_0 կետում, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ այնպիսի թիվ, որ $(x_0 < x < x_0 + \delta)$, $x \in X$ պայմանից ստացվի է՝ $|f(x) - A_1| < \varepsilon$: Այս փաստը սիմվոլիկ գրում են այսպես՝ $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_1$ կամ $f(x_0 + 0) = A_1$:

Տանք աջակողմյան սահմանի սահմանմանը համարժեք սահմանումը՝ ըստ Հայնեի:

Սահմանում 3.7: A_1 թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան սահման x_0 կետում, եթե $\forall \{x_n\}_{n \geq 1}$ հաջորդականության համար, երբ $x_n \rightarrow x_0$, $x_n > x_0$ հետևի, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A_1$:

Նման եղանակով սահմանվում է նաև ձախակողմյան սահմանը:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X բազմության վրա, և x_0 -ն այնպիսի կետ է, որ $\forall \delta > 0$ թվի համար $(x_0 - \delta; x_0)$ ինտերվալում կա X -ի գոնե մեկ կետ:

Սահմանում 3.8: A_2 թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի ձախակողմյան սահման x_0 կետում, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $(x_0 - \delta < x < x_0), x \in \{x\}$ պայմանի դեպքում տեղի ունի $|f(x) - A_2| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Այդ փաստը սիմվոլիկ գրառում են $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_2$ կամ $f(x_0 - 0) = A_2$:

Նշենք, որ այս սահմանման համարժեք սահմանումն ըստ Հայնեի կարելի է ձևակերպել արդեն վերը կատարած եղանակով:

Ակնհայտ է, որ եթե գոյություն ունի $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, ապա գոյություն ունեն նաև $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_2$ աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանները, և տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_1 = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_2$$

Ճիշտ է նաև հակառակը, այսինքն, եթե գոյություն ունեն $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_1$ $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_2$ և $A_1 = A_2 = A$, ապա գոյություն ունի նաև $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ և տեղի ունի $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$:

Անվերջ սահման

Ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է որևէ X բազմության վրա, որի համար X_0 -ն սահմանային կետ է:

Սահմանում 3.9: Կասենք X -ը X_0 -ին ձգտելիս $f(x)$ -ը ձգտում է անվերջի, եթե $\forall E > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(E) > 0$ այնպիսին, որ $0 < |x - x_0| < \delta$ դեպքում $|f(x)| > E$, որը սիմվոլիկ գրառվում է $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ տեսքով:

Սահմանում 3.10: Կասենք $x \in X$ -ը X_0 -ին ձգտելիս $f(x)$ -ը ձգտում է $+\infty$ -ի, եթե $\forall E > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(E) > 0$ այնպիսին, որ $0 < |x - x_0| < \delta$ դեպքում $f(x) > E$, որը սիմվոլիկ գրառվում է $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ տեսքով:

Սահմանում 3.11: Կասենք $x \in X$ -ը X_0 -ին ձգտելիս $f(x)$ -ը ձգտում է $-\infty$ -ի, եթե $\forall E > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(E) > 0$ այնպիսին, որ $0 < |x - x_0| < \delta$ դեպքում $f(x) < -E$, որը սիմվոլիկ գրառվում է $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$:

Ֆունկցիայի սահմանը անվերջությունում

Դիցուք ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում, որը օժտված է հետևյալ հատկությամբ. $\forall E > 0$ թվի համար

$[-E; E]$ միջակայքից դուրս կա գոնե մեկ էլեմենտ X բազմությունից:

Սահմանում 3.12: A թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի սահման, երբ $x \rightarrow \infty$, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists E = E(\varepsilon) > 0$ այնպիսին, որ $|x| > E$, $x \in X$ պայմանի դեպքում տեղի ունի $|f(x) - A| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Այս փաստը կրճատ գրառվում է՝ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$:

Նշենք, որ պարզ ձևով կարելի է ձևակերպել այս սահմանման համարժեք սահմանումը՝ ըստ Հայնեի:

Սահմանում 3.13: A թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի սահման, երբ $x \rightarrow +\infty$, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists E = E(\varepsilon) > 0$ այնպիսին, որ $x > E$, $x \in X$ պայմանից ստացվի $|f(x) - A| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Կրճատ գրառումը կլինի՝ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$:

Սահմանում 3.14: A թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի սահման, երբ $x \rightarrow -\infty$, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists E > 0$ այնպիսին, որ $x < -E$, $x \in X$ պայմանից բխում է, որ տեղի ունի $|f(x) - A| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Կրճատ գրառումը կլինի՝ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$:

§ 3. Թվաբանական գործողություններ վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների հետ

Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են միևնույն X բազմության վրա, որի համար x_0 -ն սահմանային կետ է, ընդ որում՝ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, որտեղ A -ն ու B -ն վերջավոր թվեր են: Այդ դեպքում՝

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$,
3. Եթե $B \neq 0$, ապա $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$:

Ապացույց: Ապացուցման համար օգտվենք Հայնեի ֆունկցիայի սահմանի սահմանումից:

Դիցուք $x_n \in X$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ և $x_n \neq x_0$: Այդ դեպքում $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B$: Ուստի ըստ հաջորդականությունների մասին հայտնի թեորեմների՝ տեղի ունեն՝

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \pm g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \pm \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A \pm B$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A \cdot B$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)} = \frac{A}{B}$: ■

Օրինակ: Ենթադրենք՝ $f(x) = x^3 - 3x + 2$,
 $g(x) = 2x^3 + 4x - 7$: Այդ դեպքում՝ $f(x) + g(x) = 3x^3 + x - 5$,

$$f(x) \cdot g(x) = 2x^6 - 2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 29x - 14,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 4x - 7} :$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x + 2) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + 4x - 7) = 17,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^6 - 2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 29x - 14) = 68 \quad \text{և}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 4x - 7} = \frac{4}{17}, \text{ ապա թվաբանական գործողությունները}$$

ճիշտ են:

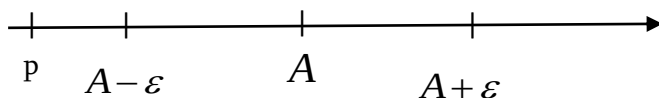
§ 4. Սահման ունեցող ֆունկցիայի հատկությունները

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X բազմության վրա, որի համար X_0 -ն կուտակման կետ է:

Հատկություն 1. Եթե $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = A$, որտեղ A -ն վերջավոր թիվ է, և $A > p$ ($A < p$), ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպես, որ $f(x) > p$ ($f(x) < p$), երբ $0 < |x - x_0| < \delta$, և $x \in X$:

Ապացույց: Ըստ ֆունկցիայի սահմանի սահմանման՝ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ այնպիսին, որ $0 < |x - x_0| < \delta$ $x \in X$ դեպքում $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$: Դիցուք $A > p$: Վերցնենք $\varepsilon > 0$ դրական թիվն այնպես, որ

$A - \varepsilon > p$, ինչպես պատկերված է Նկար 3.1-ում: Քանի որ $p < A - \varepsilon < f(x)$, կստացվի, որ $f(x) > p$: ■



Նկար 3.1

Օրինակ: Դիտարկենք $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ ֆունկցիան: Պարզ է, որ $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 4x - 2) = 5$ և $5 > 2$: Ապացուցենք, որ գոյություն ունի $x_0 = 1$ կետի այնպիսի δ շրջակայք, որտեղից վերցրած կամայական x -ի համար $f(x) > 2$:

Ապացույց: Լուծենք $3x^2 + 4x - 2 > 2$ անհավասարումը, կստանանք՝ $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$: Հետևաբար, եթե վերցնենք, օրինակ, $\delta = 0.2$, ապա $x \in (0.8; 1.2)$ -ի համար $f(x) > 2$: ■

Նման ձևով կապացուցվի մյուս անհավասարությունը:

Նկատենք անմիջապես, որ այս հատկությունից պարզ կլինի, որ, եթե ընդունենք $p = 0$, իսկ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ և $A > 0$ ($A < 0$), ապա գոյություն կունենա x_0 -ի այնպիսի շրջակայք, որին պատկանող x -երի համար ևս $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$):

Հատկություն 2. Դիցուք $f(x)$, $g(x)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաները որոշված են X բազմության վրա, որի համար X_0 -ն կուտակման կետ է: Տեղի ունի $g(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$ անհավասարությունը, և $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան ևս ունի սահման, երբ $x \rightarrow x_0$ և $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$:

Ապացույց: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$ պայմանից բխում է, որ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ թիվ այնպես, որ x_0 կետի δ շրջակայքի $x \in X$ -երի համար տեղի ունի $A - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) < A + \varepsilon$ անհավասարությունը: Այսինքն՝ $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, որն էլ նշանակում է $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$: ■

Կոշիի՝ ֆունկցիայի սահմանի գոյության սկզբունքը

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X բազմության վրա, որի համար X_0 -ն սահմանային կետ է:

Սահմանում 3.15: Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան X_0 կետում բավարարում է Կոշիի պայմանը, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ այնպիսին, որ X միջակայքին պատկանող ցանկացած x_1 ու x_2 թվերի համար, որոնք բավարարում են $0 < |x_1 - x_0| < \delta$ և $0 < |x_2 - x_0| < \delta$ պայմանները, տեղի ունենա $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Թեորեմ 3.2 (Կոշիի սկզբունքը): $f(x)$ ֆունկցիայի՝ X_0 կետում վերջավոր սահման ունենալու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում $f(x)$ -ի բավարարվի Կոշիի պայմանը:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, այդ դեպքում, ըստ ֆունկցիայի սահմանի սահմանման, $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ թիվ այնպես, որ կամայական x_1 ու x_2 թվերի համար, որոնք X_0 -ի շրջակայքից են, այսինքն՝ $0 < |x_1 - x_0| < \delta$ և $0 < |x_2 - x_0| < \delta$ տեղի ունենան՝

$$|f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ և } |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.1)$$

անհավասարությունները: Հետևաբար կարող ենք գրել՝

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon: \quad (3.2)$$

Այսինքն՝ $f(x)$ ֆունկցիայի համար X_0 կետում բավարարվում է Կոշիի պայմանը:

Բավարարություն: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիայի համար X_0 կետում բավարարվում է Կոշիի պայմանը: Ապացուցենք, որ այն X_0 կետում ունի սահման, այսինքն՝ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$:

Օգտվենք ֆունկցիայի սահմանի Հայնեի սահմանումից: Վերցնենք X_0 -ից տարբեր և X_0 -ին ձգտող կամայական X_n հաջորդականություն: Ապացուցենք, որ $f(x_n)$ հաջորդակա-

նությունը ունի սահման և ցույց տանք, որ այդ սահմանը կախված չէ X_n -ի ընտրությունից:

Քանի որ $X_n \rightarrow X_0$, $X_n \neq X_0$, հետևաբար, եթե $\forall \varepsilon > 0$ պայմանը բավարարող $\forall \varepsilon$ -ը ամրագրենք, ապա $\delta(\varepsilon) > 0$ թվին համապատասխան գոյություն կունենա $N(\delta)$ համար այնպիսին, որ $n \geq N(\delta)$ դեպքում տեղի ունի $0 < |x_n - x_0| < \delta$: Ակնհայտ է, որ կամայական $p = 1, 2, 3, \dots$ բնական թվի համար առավել ևս ճիշտ կլինի $0 < |x_{n+p} - x_0| < \delta$: Այսպիսով՝ ստացանք, որ $n \geq N(\delta)$ դեպքում տեղի ունեն $0 < |x_n - x_0| < \delta$ և $0 < |x_{n+p} - x_0| < \delta$: Հետևաբար, ըստ $\forall \varepsilon$ -ի պայմանի, կստանանք՝

$$|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon, \quad p = 1, 2, \dots: \quad (3.3)$$

Իսկ այս անհավասարությունը նշանակում է, որ $f(x_n)$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, հետևաբար այն ունի վերջավոր A սահման՝ $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = A$:

Մնում է ցույց տալ, որ եթե վերցնենք մեկ ուրիշ $x_n' \rightarrow x_0$, $x_n' \neq x_0$ հաջորդականություն, ապա $f(x_n')$ -ը ևս ձգտում է նույն A սահմանին:

Ենթադրենք հակառակը, որ $\lim_{x_n' \rightarrow x_0} f(x_n') = B$:

Կազմենք հետևյալ հաջորդականությունը՝

$x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3', \dots, x_n, x_n', \dots$, որը ձգտում է

x_0 -ին: Սակայն կստանաք, որ.

$$f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2'), \dots, f(x_n), f(x_n'), \dots$$

հաջորդականությունը սահման չի ունենա, քանի որ նրա մասնակի՝ $f(x_n)$ և $f(x_n')$ ենթահաջորդականությունները ձգտում էին տարբեր սահմանների: Իսկ դա հնարավոր չէ: Հետևաբար մեր այն ենթադրությունը, որ $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n') = B$,

ճիշտ չէ: Այսպիսով՝ ստանում ենք, որ $A = B$: ■

Նշենք, որ նման եղանակով ձևակերպվում է Կոշիի պայմանը $X \rightarrow \infty$, $X \rightarrow -\infty$ և $X \rightarrow +\infty$ դեպքերի համար, և համապատասխանաբար ապացուցվում Կոշիի սկզբունքը:

Օրինակ: Ապացուցել, որ $f(x) = x^2 + 3x + 5$ ֆունկցիայի համար $x_0 = 1$ կետում Կոշիի պայմանը բավարարվում է:

Ապացույց: Ֆունկցիայի որոշման տիրույթին պատկանող x_1 -ի ու x_2 -ի համար, որոնք $x_0 = 1$ կետի շրջակայքից են, կազմենք $|f(x_2) - f(x_1)|$ -ը և գնահատենք:

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= |(x_2^2 + 3x_2 + 5) - (x_1^2 + 3x_1 + 5)| \\ &= |(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 3)| = |(x_2 - 1) + (1 - x_1)| |x_2 - 1 + x_1 - 1 + 5| \\ &\leq (|x_2 - 1| + |1 - x_1|)(|x_2 - 1| + |x_1 - 1| + 5) \end{aligned}$$

Պահանջենք, որ $|1 - x_1| < \delta$, $|x_2 - 1| < \delta$: Այդ դեպքում $|f(x_2) - f(x_1)|$ -ի համար կստանանք՝

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |2\delta(2\delta + 5)|:$$

Եթե վերցնենք $\delta_1 = 1$, ապա $(1 - \delta_1; 1 + \delta_1)$ միջակայքում $(2\delta + 5)$ արտահայտության արժեքը կարող ենք փոքր դարձնել 7-ից: Այսպիսով՝ $|f(x_2) - f(x_1)| \leq |2\delta(2\delta + 5)|$ -ից կունենանք՝ $|f(x_2) - f(x_1)| \leq 14\delta < \varepsilon$: Այսինքն՝ $\delta < \frac{\varepsilon}{14}$:
 Հետևաբար $\delta = \delta(\varepsilon) = \min \left\{ \delta_1; \frac{\varepsilon}{14} \right\}$: ■

§ 5. Նշանավոր սահմաններ

● $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$: Ապացուցման նպատակով նախ ապացուցենք հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x; \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}: \quad (3.1)$$

Դիտարկենք R շառավղով շրջանը՝ նրա մեջ կատարած կառուցումներով (Նկ. 3.2): Օգտվենք եռանկյան և սեկտորի մակերեսի հաշվման հայտնի բանաձևերից: Ակնհայտ է, որ $\triangle AOB$ -ի մակերեսը փոքր է AOB սեկտորի մակերեսից, որն էլ փոքր է AOC եռանկյան մակերեսից: Քանի որ $AC \perp OA$, հետևաբար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\frac{1}{2} R^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2} R^2 \cdot x < \frac{1}{2} R^2 \cdot \operatorname{tg} x: \quad (3.2)$$

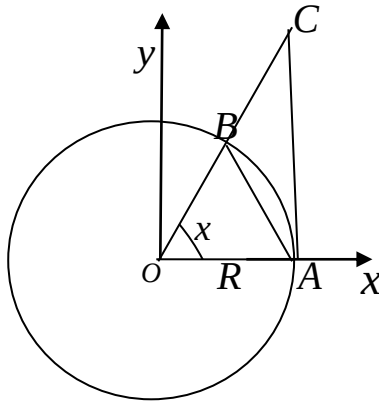
Կրճատենք $\frac{1}{2} R^2$ -ով, կստանանք 3.1 անհավասարությունը, որը պահանջվում էր ապացուցել:

Ենթադրենք, որ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ և 3.1 անհավասարության երեք մասը բաժանենք $\sin x$ -ի վրա, կստանանք՝

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad (3.3)$$

որը շրջելուց հետո կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1: \quad (3.4)$$



Նկար 3.2

Ձևափոխենք և արդյունքում կունենանք՝

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x: \quad (3.5)$$

Բայց

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < x: \quad (3.6)$$

Հետևաբար 3.5-ից կստանանք՝

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x; \quad (3.7)$$

Այստեղից պարզ կլինի, որ երբ $x \neq 0$, և $|x| < \frac{\pi}{2}$ դեպքում տեղի կունենա հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|; \quad (3.8)$$

Ըստ պայմանի՝ մենք ունենք, որ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$: Պահանջենք, որ տեղի ունենա $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x| < \varepsilon$: Հետևաբար, եթե վերցնենք $\delta = \min\left\{\varepsilon; \frac{\pi}{2}\right\}$, ապա կստանանք, որ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta = \min\left\{\varepsilon; \frac{\pi}{2}\right\}$ այնպիսին, որ հենց $|x - 0| < \delta$ -ից ակնհայտ է, որ $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$: Սա էլ նշանակում է $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$: ■

Հիմնական բանաձև e թվի համար

● $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$: Ապացուցման համար ցուց տանք, որ գոյություն ունեն աջակողմյան ու ձախակողմյան սահմանները, որոնք իրար հավասար են և հավասար են e թվին:

Այսինքն՝ ցույց տանք, որ $\lim_{x \rightarrow 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, և՛

$$\lim_{x \rightarrow 0-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e:$$

Առաջինը ապացուցելու համար ընդունենք, որ X -ը ձգտում է զրոյի՝ դրական մնալով, հետևաբար կարող ենք ընտրել $\{X_k\}$ հաջորդականություն, որը, փոքր մնալով մեկից, ձգտում է զրոյի: Այսինքն՝ $x_k \rightarrow 0$, $0 < x_k < 1$: Նշա-

նակենք $\frac{1}{x_k}$ -ի ամբողջ մասը $n_k = \left[\frac{1}{x_k} \right]$: Պարզ է, որ

$n_k \rightarrow +\infty$, և տեղի ունի

$$n_k \leq \frac{1}{x_k} < n_k + 1: \quad (3.9)$$

անհավասարությունը: Այստեղից կարող ենք գրել, որ.

$$\frac{1}{n_k + 1} < x_k \leq \frac{1}{n_k}: \quad (3.10)$$

Ուստի 3.9-ից և 3.10-ից պարզ կդառնա, որ ճիշտ է նաև հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1} \right)^{n_k} < (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} \leq \left(1 + \frac{1}{n_k} \right)^{n_k + 1}: \quad (3.11)$$

Սա կարող ենք արտագրել այսպես.

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1} \right)^{n_k + 1}}{\left(1 + \frac{1}{n_k} \right)} < (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} \leq \left(1 + \frac{1}{n_k} \right)^{n_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_k} \right): \quad (3.12)$$

Այստեղից, ըստ երեք հաջորդականությունների սահմանի գոյության վերաբերյալ թեորեմի, կստանանք, որ

$$\lim_{x_k \rightarrow 0+} (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e, \quad \text{իսկ սա էլ նշանակում է, որ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e:$$

Ապացուցենք երկրորդ սահմանը՝ $\lim_{x \rightarrow 0-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$: Նշանակենք $x_k = -y_k$, և քանի որ x -ը ձգտում է զրոյի՝ բացասական մնալով՝ $x_k \rightarrow 0-$, $-1 < x_k < 0$, ուրեմն կունենանք՝ $y_k \rightarrow 0$, $0 < y_k < 1$:

Հետևաբար՝

$$\begin{aligned} (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} &= (1-y_k)^{\frac{-1}{y_k}} = \frac{1}{(1-y_k)^{\frac{1}{y_k}}} = \left(1 + \frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} = \\ &= \left(1 + \frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k} - 1 + 1} = \left(1 + \frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}} \left(1 + \frac{y_k}{1-y_k}\right): \end{aligned}$$

Եթե նշանակենք $\frac{y_k}{1-y_k} = z_k > 0$, կստանանք՝ $z_k \rightarrow 0+$:

Հետևաբար ըստ նախորդ դեպքի՝ $\lim_{z_k \rightarrow 0+} (1+z_k)^{\frac{1}{z_k}} = e$, իսկ

$\left(1 + \frac{y_k}{1-y_k}\right) \rightarrow 1$: Այստեղից էլ պարզ կլինի, որ

$$\lim_{x \rightarrow 0-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e:$$

Այսպիսով՝ ապացուցվեց, որ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$: ■

§ 6. Անվերջ փոքր և անվերջ մեծ ֆունկցիաներ, դրանց համեմատումը

Սահմանում 3.16: Դիցուք $\alpha(x)$ ֆունկցիան որոշված է X բազմության վրա, որի համար a -ն սահմանային կետ է: Կասենք $\alpha(x)$ -ը a կետում անվերջ փոքր է, եթե նրա սահմանն այդ կետում հավասար է 0 -ի, այսինքն՝ $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$: Սա նշանակում է $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ այնպես, որ $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X$ պայմանից բխում է $|\alpha(x)| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Օրինակ՝ $\alpha(x) = 3(2x-1)^7(x+4)$ ֆունկցիան $\frac{1}{2}$ և -4 կետերում անվերջ փոքր է, որովհետև և՛ $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 3(2x-1)^7(x+4) = 0$, և՛ $\lim_{x \rightarrow -4} 3(2x-1)^7(x+4) = 0$:

Նկատենք, որ այդ ֆունկցիան ցանկացած այլ կետում անվերջ փոքր չէ:

Ամփոփապես նշենք, որ օգտագործելով անվերջ փոքրի այս սահմանումը՝ կարող ենք ֆունկցիայի սահմանի սահմանման համար տալ հետևյալ ձևակերպումը:

Պնդում 3.2: $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանը x_0 կետում A -ի հավասար լինելու համար, այսինքն $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն ունենա հետևյալ տեսքը՝ $f(x) = A + \alpha(x)$, որտեղ $\alpha(x)$ -ը x_0 կետում անվերջ փոքր է: Ապացույցը ակնհայտ է:

Սահմանում 3.17: Դիցուք $\alpha(x)$ ֆունկցիան որոշված է X բազմության վրա, որի համար a -ն սահմանային կետ է: Կասենք, որ $\alpha(x)$ -ը a կետում անվերջ մեծ է, եթե $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \infty$:

Այսինքն՝ $\forall E > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(E) > 0$ այնպես, որ $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X$ պայմանից բխում է $|\alpha(x)| > E$ անհավասարությունը:

Սահմանում 3.18: Դիցուք $\alpha(x)$ -ն ու $\beta(x)$ -ը որոշված են միևնույն X բազմության վրա, որի համար a -ն կուտակման կետ է, ընդ որում՝ $\alpha(x)$ -ը, $\beta(x)$ -ը a կետում անվերջ փոքրեր են: Կասենք, որ $\alpha(x)$ -ը a կետում ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան $\beta(x)$ -ը, եթե $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, որտեղ $\beta(x) \neq 0$, $x \in X$:

Դա սիմվոլիկ գրում են՝ $\alpha = o(\beta)$ կամ $\alpha = \overline{o}(\beta)$:

Սահմանում 3.19: Կասենք, որ a կետում $\alpha(x)$ և

$\beta(x)$ անվերջ փոքրերը միևնույն կարգի են, եթե $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, C \neq 0, C$ -ն վերջավոր թիվ է: Դա սիմվոլիկ գրում են՝ $\alpha = O(\beta)$ կամ $\alpha = \underline{O}(\beta)$:

Սահմանում 3.20: Կասենք, որ $\alpha(x)$ -ն ու $\beta(x)$ -ը a կետում համարժեք անվերջ փոքրեր են, եթե $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$: Սիմվոլիկ գրում են՝ $\alpha(x) \sim \beta(x)$:

Օրինակներ

1) $\alpha(x) = x^3 - 4x^5$ և $\beta(x) = 7x^3 + 5x^6$ ֆունկցիաները $x=0$ կետում միևնույն կարգի անվերջ փոքրեր են, որովհետև.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 4x^5}{7x^3 + 5x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 4x^2}{7 + 5x^3} = \frac{1}{7}:$$

2) $\alpha(x) = (x-3)^2(x-2)$ և $\beta(x) = (x-3)^2$ ֆունկցիաները $x=3$ կետում համարժեք անվերջ փոքրեր են, որովհետև.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2(x-2)}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-2) = 1:$$

3) $\alpha(x) = (x-3)^5$ ֆունկցիան $x=3$ կետում ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան $\beta(x) = (x-3)^2$, որովհետև.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^5}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^3 = 0:$$

Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար

1. Պարզել հետևյալ անվերջ փոքրերի կարգը միմիանց նկատմամբ.

ա) $\alpha(x) = 1 - \cos(x)$, $\beta(x) = \frac{x^2}{4}$, $x \rightarrow 0$,

բ) $\alpha(x) = \sin(x-2)$, $\beta(x) = \frac{(x-2)^2}{3}$, $x \rightarrow 2$,

գ) $\alpha(x) = 1 - \cos(x-3)$, $\beta(x) = \frac{(x-3)^2}{2}$, $x \rightarrow 3$,

դ) $\alpha(x) = (x-3) \cdot e^{x+3}$, $\beta(x) = (x+3) \cdot \operatorname{tg}(x-3)$, $x \rightarrow 3$,

ե) $\alpha(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x)$, $\beta(x) = \frac{1}{x}$, $x \rightarrow +\infty$:

2. Ապացուցել, որ ֆունկցիան սահմանափակ է.

ա) $f(x) = 2 - \cos(3^x)$, $-\infty < x < +\infty$,

բ) $f(x) = \frac{1+2^x}{1+4^x}$, $0 < x < +\infty$,

գ) $f(x) = \frac{1+\sin(x)}{7+2^x}$, $-\infty < x < +\infty$,

դ) $f(x) = \frac{1+x^4}{1+x^8}$, $-\infty < x < +\infty$,

ե) $f(x) = \frac{7 - \operatorname{arctg}(7^x)}{1+x^8}$, $-\infty < x < +\infty$:

3. Հաշվել ֆունկցիայի սահմանը.

$$3.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x}{7x},$$

$$3.2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 + x^2 - 1}{2(x-1)},$$

$$3.3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3 + x^3 + 1}{4x^3},$$

$$3.4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+4x)^3 - (1+3x)^4}{2x^2},$$

$$3.5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2(x^2 - 1)^2}, 3.6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+2x)(2+3x)(3+4x)(4+5x)}{6(x^2 + 1)^2},$$

$$3.7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{(x^4 - 8x^2 + 16)},$$

$$3.8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 1},$$

$$3.9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}},$$

$$3.10) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2},$$

$$3.11) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}},$$

$$3.12) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1},$$

$$3.13) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9},$$

$$3.14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x^2 + x},$$

$$3.15) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8},$$

$$3.16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)},$$

$$3.17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x - \sin 1}{x - 1},$$

$$3.18) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a},$$

$$3.19) \lim_{x \rightarrow b} \frac{\cos x - \cos b}{x - b},$$

$$3.20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x},$$

$$3.21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2},$$

$$3.22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x},$$

$$3.23) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{5x+4} \right)^{x^2},$$

$$3.24) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7+4x}{4x+1} \right)^{\frac{1-x}{1-x^2}},$$

$$3.25) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}},$$

$$3.26) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}},$$

$$3.27) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$3.28) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}},$$

$$3.29) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 4x + 4)}{\ln(x^{10} + 5x + 2)}, \quad 3.30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(1 + xe^x)}:$$

ԳԼՈՒԽ 4

ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 1. Անընդհատության սահմանումը, օրինակներ

Սահմանում 4.1: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X բազմության վրա, որի համար x_0 -ն սահմանային կետ է, ընդ որում՝ $x_0 \in X$: Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, եթե այդ կետում $f(x)$ -ն ունի սահման, որը հավասար է $f(x_0)$ -ի, այսինքն՝ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$:

Օգտվելով Կոշիի և Հայնեի ֆունկցիայի սահմանի սահմանումներից՝ կարող ենք ձևակերպել ֆունկցիայի անընդհատության հետևյալ համարժեք սահմանումները:

Սահմանում 4.2: Ըստ Կոշիի՝ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում կոչվում է անընդհատ, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ այնպես, որ $|x - x_0| < \delta$, $x \in X$ պայմանից տեղի ունենա $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Օրինակ: Հետազոտել $f(x) = x^2 - 5x + 4$ ֆունկցիայի անընդհատությունը $x_0 = 2$ կետում:

Կազմենք $|f(x) - f(x_0)|$ տարբերությունը և գնահատենք:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - 5x + 4 + 2| = |(x - 2)(x - 3)|:$$

Ընտրենք $\delta_1 = 0.5$ և $(2 - 0.5; 2 + 0.5)$ միջակայքում որոշենք $|x - 3|$ -ի մեծագույն արժեքը, որը կլինի 1.5 : Հետևաբար՝

$$|f(x) - f(x_0)| = |(x - 2)(x - 3)| \leq 1.5|(x - 2)| < \varepsilon:$$

Այստեղից կստանանք՝ $1.5|(x - 2)| < \varepsilon$, այսինքն՝

$$|x - 2| < \frac{2\varepsilon}{3}, \text{ և որպես } \delta \text{ կվերցնենք } \delta(\varepsilon) = \min\left\{0.5; \frac{2\varepsilon}{3}\right\}:$$

Սա նշանակում է՝ $f(x) = x^2 - 5x + 4$ ֆունկցիան $x_0 = 2$ կետում անընդհատ է:

Սահմանում 4.3: Ըստ Հայնեի՝ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում կոչվում է անընդհատ, եթե X միջակայքին պատկանող $\forall \{x_n\}_{n \geq 1}$ հաջորդականության համար, երբ $x_n \rightarrow x_0$ -ից կբխի, որ $\{f(x_n)\}_{n \geq 1}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է $f(x_0)$ թվին:

Աջակողմյան ու ձախակողմյան անընդհատություն

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման X բազմությունն այնպիսին է, որ $x_0 \in X$ և $\forall \delta > 0$ թվի համար $(x_0; x_0 + \delta)$ միջակայքում կա X բազմությունից գոնե մեկ տարր:

Այդ դեպքում կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում աջից անընդհատ է, եթե գոյություն ունի նրա աջակողմյան սահմանը, և այն հավասար է $f(x_0)$ ՝ $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$:

$f(x)$ ֆունկցիայի x_0 կետում ձախից անընդհատությունը սահմանելիս պահանջենք, որ նրա որոշման X բազմությունը լինի այնպիսին, որ $x_0 \in X$ և $\forall \delta > 0$ թվի համար $(x_0 - \delta; x_0)$ միջակայքը պարունակի X բազմության գոնե մեկ տարր:

Այդ դեպքում կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի x_0 կետում ձախից անընդհատ է, եթե գոյություն ունի նրա ձախակողմյան սահմանը, և այն հավասար է $f(x_0)$ ՝ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$:

Պնդում 4.1: $f(x)$ ֆունկցիայի՝ x_0 կետում անընդհատ լինելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի անընդհատ և՛ ձախից, և՛ աջից:

Ապացույցը ակնհայտ է:

Սահմանում 4.4: Կասենք X միջակայքի վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է այդ միջակայքում, եթե ֆունկցիան անընդհատ է X -ի բոլոր կետերում:

Մասնավոր դեպքում կասենք՝ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a; b]$ հատվածում, եթե այն անընդհատ է այդ հատվածի բոլոր ներքին կետերում, իսկ a կետում անընդհատ է աջից, b կետում անընդհատ է ձախից:

§ 2. Թվաբանական գործողություններ անընդհատ ֆունկցիաների հետ

Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են X բազմության վրա, որի համար $x_0 \in X$ սահմանային կետ է:

Թեորեմ 4.1: Եթե $f(x)$ -ը և $g(x)$ -ը անընդհատ են x_0 կետում, ապա այդ կետում անընդհատ են նաև $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ ֆունկցիաները: Իսկ $g(x_0) \neq 0$ դեպքում անընդհատ է նաև $\frac{f(x)}{g(x)}$ ֆունկցիան:

Ապացույց: Ըստ պայմանի, քանի որ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ և $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, ապա օգտվելով սահման ունեցող ֆունկցիաների հետ թվաբանական գործողությունների հայտնի հատկություններից՝ կարող ենք գրել՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}: \quad \blacksquare$$

Օրինակ: Դիտարկենք $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^3 - 4$ ֆունկցիաները, իսկ $x_0 = 2$: Նախ ապացուցենք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը $x_0 = 2$ կետում,

այնուհետև՝ $f(x) + g(x)$ -ի անընդհատությունը այդ նույն կետում:

Ապացույց: Քանի որ $f(2) = 3$, ապա կարող ենք գրել՝
 $|f(x) - f(x_0)| = |(x^2 - 1) - 3| = |x - 2||x + 2|$: Եթե ընդունենք $\delta_1 = 1$, ապա $x \in (2 - 1; 2 + 1)$ -ի համար կստանանք՝
 $|f(x) - f(x_0)| = |x - 2||x + 2| \leq 5|x - 2| < \varepsilon$, որտեղից՝
 $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta_2$:

Նման ձևով $g(x)$ -ի համար կունենանք՝
 $|g(x) - g(x_0)| = |(x^3 - 4) - 4| = |x - 2||x^2 + 2x + 4|$,
 այստեղից կստանանք՝

$$|g(x) - g(x_0)| = |x - 2||x^2 + 2x + 4| \leq 19|x - 2| < \varepsilon \text{ և}$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{19} = \delta_3:$$

Գնահատենք $|(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))|$ -ն, երբ $x \in (1; 3)$ կստանանք՝

$$|(x^3 - 4) - (x^2 - 1) - 7| \leq 24|x - 2| < \varepsilon, \quad \text{այստեղից}$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{24}:$$

$$\text{Հետևաբար կվերցնենք } \delta(\varepsilon) = \min \left\{ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \frac{\varepsilon}{24} \right\}:$$

■

§ 3. Բարդ ֆունկցիայի անընդհատությունը

Դիցուք $x = \varphi(t)$ ֆունկցիան որոշված է $\{t\}$ բազմության վրա, իսկ $\{x\}$ -ը $\varphi(t)$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է: Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթն ընդգրկում է $\varphi(t)$ ֆունկցիայի արժեքների $\{x\}$ բազմությունը: Այդ դեպքում իմաստ ունի՝ $y = f(\varphi(t))$ -ն, որը կլինի t փոփոխականից կախված ֆունկցիա: Այս $F(t) = f(\varphi(t))$ ֆունկցիան կոչվում է t փոփոխականից բարդ ֆունկցիա կամ $f(x)$ և $\varphi(t)$ ֆունկցիաների սուպերպոզիցիա կամ համադրույթ:

Նշենք, որ նման ձևով սահմանվում է նաև մի քանի ֆունկցիաների համադրույթ:

Թեորեմ 4.2: Դիցուք $x = \varphi(t)$ ֆունկցիան անընդհատ է t_0 կետում, իսկ $y = f(x)$ ֆունկցիան $x_0 = \varphi(t_0)$ կետում: Այդ դեպքում $y = f(\varphi(t)) = F(t)$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է t_0 կետում:

Ապացույց: Դիցուք $\{t_n\}$ -ը $\{t\}$ բազմությանը պատկանող հաջորդականություն է, որը ձգտում է t_0 -ի: Այդ դեպքում $x = \varphi(t)$ ֆունկցիայի անընդհատության հաշվին $x_n = \varphi(t_n)$ հաջորդականության սահմանը կլինի $x_0 = \varphi(t_0)$ -ն: $y = f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության պատճառով կստանանք, որ $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, այսինքն $f(\varphi(t_n)) \rightarrow f(\varphi(t_0))$, որն էլ

նշանակում է, որ $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$: Այսպիսով՝ ստացանք, որ

$F(t)$ ֆունկցիան անընդհատ է t_0 կետում: ■

Այս նույն թեորեմը ապացուցենք « $\varepsilon - \delta$ » լեզվով:

Ապացույց: Քանի որ $y = f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է

x_0 կետում, նշանակում է $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta_1 > 0$

թիվ, որ հենց $|x - x_0| < \delta_1$, ապա $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$:

Օգտվելով t_0 կետում $x = \varphi(t)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից՝ կարող ենք ասել, որ արդեն այս $\delta_1 > 0$ գտած թվին համապատասխան՝ $\exists \delta = \delta(\delta_1) > 0$ թիվ, և $|t - t_0| < \delta$ -ից պարզ կդառնա $|x - x_0| = |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \delta_1$: Այսպիսով՝ $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ թվի միջոցով $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար գտանք $\delta = \delta(\delta_1(\varepsilon))$ այնպիսին, որ $|t - t_0| < \delta$ -ից բխում է $|f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ անհավասարությունը, որն էլ հաստատում է $y = f(\varphi(t)) = F(t)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը t_0 կետում: ■

Օրինակ: $f(x) = x^3 + 5x$ -ը անընդհատ է $x \in [-3; 5]$ -ում, իսկ $x = 2t - 1$ -ֆունկցիան անընդհատ է $t \in [-1; 3]$ -ում, և արժեքները դուրս չեն գալիս $[-3; 5]$ հատվածից:

Հետևաբար $F(t) = f(\varphi(t)) = (2t - 1)^3 + 5(2t - 1)$ -ը, ըստ t փոփոխականի՝ անընդհատ է $[-1; 3]$ -ում:

§ 4. Ֆունկցիայի խզում, խզումների դասակարգումը

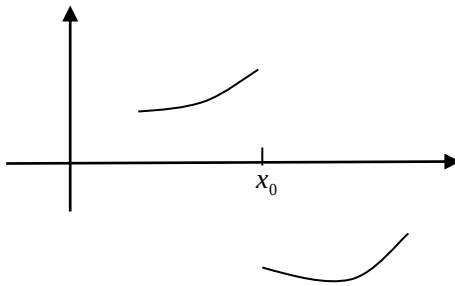
Սահմանում 4.5: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $\{x\}$ միջակայքում: Կասենք $x_0 \in \{x\}$ կետը ֆունկցիայի համար խզման կետ է, եթե այդ կետում ֆունկցիան անընդհատ չէ:

Հնարավոր են հետևյալ դեպքերը:

Ա) Գոյություն ունեն x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան ու ձախակողմյան վերջավոր սահմանները, սակայն դրանք իրար հավասար չեն (Նկ. 4.1): Այսինքն՝
$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \quad \text{և} \quad f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x),$$

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0):$$

Այս դեպքում խզումը անվանում են առաջին սեռի, իսկ $|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ -ը x_0 կետում՝ ֆունկցիայի թռիչք:



Նկար 4.1

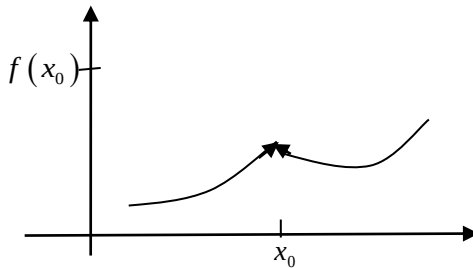
Բ) x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան ու ձախակողմյան վերջավոր սահմանները գոյություն ունեն, իրար հավասար են, սակայն հավասար չեն ֆունկցիայի արժեքին այդ կետում (Նկ. 4.2), այսինքն՝

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0):$$

Նշենք, որ այս դեպքում, եթե լրացուցիչ ընդունենք, որ տեղի ունի նաև՝

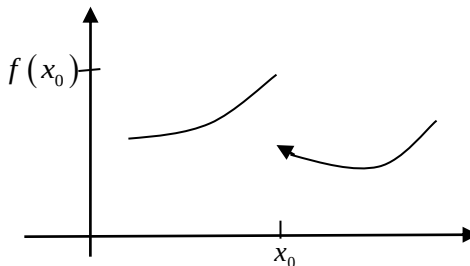
$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0),$$

ապա ֆունկցիան կդառնա անընդհատ, և այդ պատճառով խզումը անվանում են վերացնելի: Այս դեպքերում ևս կասենք, որ ֆունկցիան ունի առաջին սեռի (տիպի) խզում:



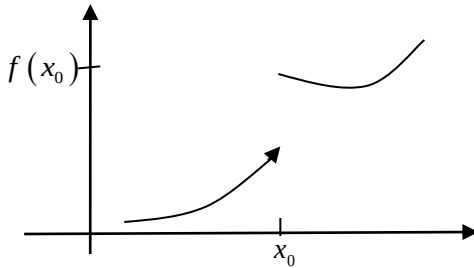
Նկար 4.2

Եթե $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \neq f(x_0 + 0)$, ապա կասենք, որ ֆունկցիան ձախից անընդհատ է, իսկ աջից՝ խզվող (Նկար 4.3): Այս դեպքում $|f(x_0) - f(x_0 + 0)|$ -ը անվանում են ֆունկցիայի թռիչք աջից:



Նկար 4.3

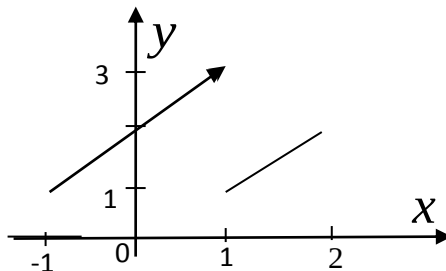
Եթե $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \neq f(x_0 - 0)$, ապա կասենք, որ ֆունկցիան աջից անընդհատ է, իսկ ձախից՝ խզվող (Նկ. 4.4), և ֆունկցիայի թռիչքը ձախից կլինի՝ $|f(x_0) - f(x_0 - 0)|$.



Նկար 4.4

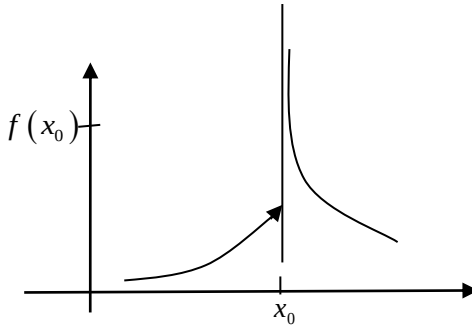
Օրինակ: $f(x) = \begin{cases} x + 2; & x \in [-1; 1) \\ 3x - 2; & x \in [1; 2] \end{cases}$ -ի համար

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 3, \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1:$$



Առաջին սեռի խզում $x=1$ կետում: Աջից անընդհատ է, իսկ ձախից՝ խզվող:

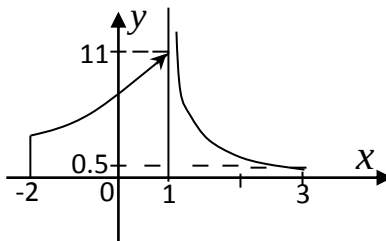
Գ) Եթե ձախակողմյան կամ աջակողմյան սահմաններից գոնե մեկը անվերջ է կամ գոյություն չունի, ապա խզումը անվանում են երկրորդ սեռի (տիպի) (Նկ. 4.5):



Նկար 4.5

Օրինակ: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 6; & x \in [-2; 1) \\ \frac{1}{x-1}; & x \in (1; 3] \end{cases}$ -ի համար

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = +\infty, \quad f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 11:$$



§ 5. Բուլցանո-Կոշիի առաջին և երկրորդ թեորեմները

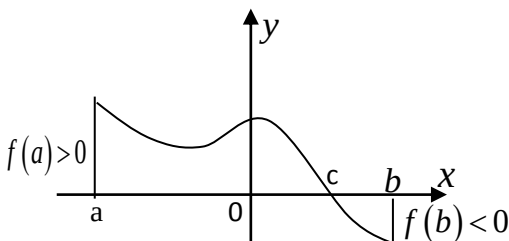
Բուլցանո-Կոշիի առաջին (ֆունկցիայի զրո դառնալու վերաբերյալ) թեորեմը

Թեորեմ 4.3: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a; b]$ հատվածում և այդ հատվածի ծայրակետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ: Այդ դեպքում գոյություն ունի $c \in (a; b)$ կետ այնպես, որ $f(c) = 0$:

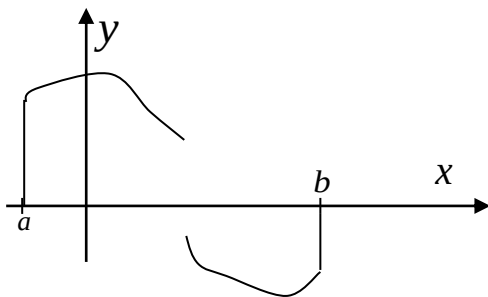
Ապացույց: Ենթադրենք $f(a) < 0$, իսկ $f(b) > 0$: Կիսենք $[a; b]$ հատվածը $\frac{a+b}{2}$ բաժանման կետով: Եթե $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, ապա ապացույցը ավարտվում է, որովհետև որպես $c \in (a; b)$ կետ կվերցնենք հատվածի $\frac{a+b}{2}$ միջնակետը: Եթե $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ հատվածներից գոնե մեկի ծայրակետերում կընդունի տարբեր նշանի արժեքներ: Այդ հատվածը նշանակենք $[a_1; b_1]$, ընդ որում՝ $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$: Այնուհետև կիսենք $[a_1; b_1]$ հատվածը և այդ պրոցեսը անվերջ շարունակենք: Արդյունքում կստանանք՝ $[a_n; b_n]$; $n = 1, 2, 3, \dots$ ներդրված հատվածների հաջորդականություն այնպես, որ $f(a_n) < 0$,

$f(b_n) > 0$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$: Ըստ ներդրված միջակայքերի լեմմայի՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$: Ֆունկցիայի անընդ-
 հատության շնորհիվ $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$,
 $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$: Այս երկու անհավասարություններից
 ստացվում է, որ $f(c) = 0$: ■

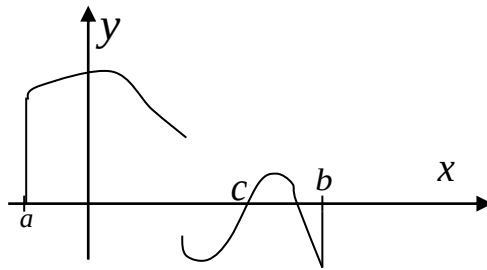
Երկրաչափական մեկնաբանությունն այն է, որ ֆունկցիայի գրաֆիկը c կետում հատում է x -ի առանցքը (Նկ. 4.6):



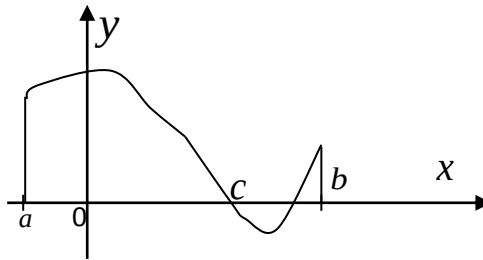
Նկար 4.6



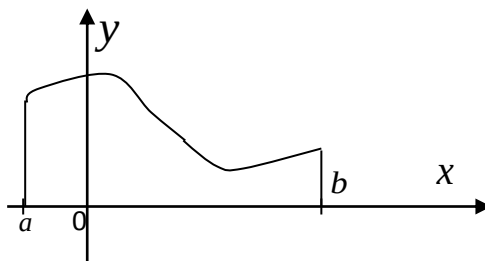
Նկար 4.7



Նկար 4.8



Նկար 4.9



Նկար 4.10

Նկար 4.7-ն ու 4.10-ը ցույց են տալիս, որ եթե թեորեմի պայմաններից որևէ մեկը չպահանջենք, ապա թեորեմի պնդումը հնարավոր է՝ տեղի ունենա, հնարավոր է՝ նաև տեղի չունենա:

Բուլցանո-Կոշիի երկրորդ (ֆունկցիայի միջանկյալ արժեք ընդունելու վերաբերյալ) թեորեմը

Թեորեմ 4.4: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a; b]$ հատվածում և այդ հատվածի ծայրակետերում ընդունում է տարբեր արժեքներ՝ $f(a) = A$, $f(b) = B$: Այդ դեպքում A ու B թվերի մեջ ընկած կամայական C թվի համար գոյություն ունի $c \in (a; b)$ կետ, և $f(c) = C$:

Ապացույց: Ենթադրենք $(A < C < B)$: Դիտարկենք $\varphi(x) = f(x) - C$ օժանդակ ֆունկցիան: Այս $\varphi(x) = f(x) - C$ ֆունկցիայի համար ստուգենք **Բուլցանո-Կոշիի առաջին** թեորեմի պայմանները: Այն անընդհատ է որպես երկու անընդհատ ֆունկցիաների տարբերություն: Մյուս կողմից՝

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0, \quad \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0:$$

Քանի որ $\varphi(x)$ -ը հատված ծայրակետերում փոխում է նշանը, ապա, ըստ Բուլցանո-Կոշիի առաջին թեորեմի,

$$\exists c \in (a; b), \text{ որ } \varphi(c) = f(c) - C = 0, \text{ այսինքն՝ } f(c) = C: \quad \blacksquare$$

Հետևանք: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է որևէ X միջակայքում (փակ կամ բաց, վերջավոր կամ անվերջ), ապա նրա արժեքների բազմությունը միջակայք է:

Իրոք, $f(x)$ ֆունկցիայի ընդունած արժեքների բազմությունը նշանակենք Y -ով:

Նշանակենք՝ $m = \inf Y$, $M = \sup Y$: Նշենք, որ եթե Y բազմությունը վերնից սահմանափակ չէ, ապա $\sup Y = +\infty$, իսկ եթե ներքևից սահմանափակ չէ, ապա $\inf Y = -\infty$:

Դիցուք C -ն m -ի և M -ի միջև ընկած կամայական թիվ է, այսինքն՝ $m < C < M$: Ճշգրիտ եզրերի սահմանումից բխում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի $x_1, x_2 \in X$, որ.

$$m < f(x_1) < C < f(x_2) < M : \quad (4.1)$$

Բայց ապացուցած թեորեմից պարզ է, որ $\exists x_0 \in (x_1; x_2)$, որ $f(x_0) = C$: Այսինքն՝ այդ C թիվը գտնվում է Y բազմության մեջ:

Հետևաբար այդ Y բազմությունը m և M ծայրակետերով միջակայք է:

§ 6. Վայերշտրասի առաջին և երկրորդ թեորեմները

Թեորեմ 4.5: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a; b]$ հատվածում, ապա այն սահմանափակ է:

Ապացույց: Ապացուցենք, որ գոյություն ունեն այնպիսի m և M թվեր, որ տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $m \leq f(x) \leq M$, երբ $a \leq x \leq b$:

Ենթադրենք հակառակը, որ $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ չէ: Նշանակում է, օրինակ, 1 թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $x_1 \in [a; b]$ կետ, որ $|f(x_1)| > 1$: Նման կերպ գոյություն ունի այնպիսի $x_2 \in [a; b]$ կետ, որ $|f(x_2)| > 2$: Այսպես շարունակելով՝ կստանանք, որ գոյություն ունի այնպիսի $x_n \in [a; b]$; $n = 1, 2, \dots$ հաջորդականություն, որ $|f(x_n)| > n$:

Քանի որ $x_n \in [a; b]$, հետևաբար ըստ Բոլցանո Վա-
յերշտրասի լեմմայի՝ այդ հաջորդականությունից կարող ենք
առանձնացնել $x_{n_k} \rightarrow x_0$, ($k \rightarrow \infty$) զուգամետ ենթահաջորդա-
կանություն:

Նկատի ունենալով, որ x_0 -ն ևս պատկանում է $[a; b]$
հատվածին, և հաշվի առնելով $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհա-
տությունը՝ կստանանք՝ $|f(x_{n_k})| \rightarrow |f(x_0)|$, երբ $k \rightarrow \infty$: Սա
հնարավոր չէ, քանի որ $|f(x_n)| > n$ անհավասարությունից
բխում է, որ $|f(x_{n_k})| \rightarrow \infty$, երբ $k \rightarrow \infty$: Ստացանք հակասու-
թյուն, հետևաբար մեր ենթադրությունը, որ $f(x)$ ֆունկցիան
սահմանափակ չէ, ճիշտ չէ: ■

Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմը

Թեորեմ 4.6: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a; b]$
հատվածում, ապա այն ընդունում է իր մեծագույն ու փոքրա-
գույն արժեքները:

Ապացույց: Համոզվենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան ընդունում է
իր մեծագույն արժեքը, իսկ փոքրագույն արժեքի դեպքը ապա-
ցուցվում է նույն եղանակով:

Նշանակենք $M = \sup_{x \in [a; b]} \{f(x)\}$ և ենթադրենք, որ $f(x)$

ֆունկցիան M արժեքը չի ընդունում, այսինքն՝ $\forall x \in [a; b]$ -ի
համար $f(x) < M$:

Դիտարկենք $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ օժանդակ ֆունկցիան:

Ակնհայտ է, որ այն անընդհատ է $[a; b]$ -ում: Հետևաբար ըստ **Վայերշտրասի** առաջին թեորեմի՝ այն սահմանափակ է, ուստի սահմանափակ կլինի նաև վերնից, ինչն էլ նշանակում է, որ գոյություն ունի $\mu > 0$ թիվ այնպես, որ

$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq \mu$, երբ $x \in [a; b]$: Այս անհավասարու-

թյունից հեշտությամբ կստացվի, որ $f(x) \leq M - \frac{1}{\mu}$, որը հնա-

րավոր չէ, քանի որ M թիվը $f(x)$ ֆունկցիայի ընդունած արժեքների բազմության վերին ճշգրիտ եզրն էր, իսկ դրանից փոքր $M - \frac{1}{\mu}$ թիվը չի կարող լինել ֆունկցիայի արժեքների

բազմության համար վերին եզր: Ստացանք հակասություն, հետևաբար $f(x) < M$ ճիշտ չէ, ուրեմն $x_0 \in [a; b]$ այնպես, որ $f(x_0) = M$: ■

Նշենք, որ եթե թեորեմի պայմաններից որևէ մեկը չպահանջենք, ապա թեորեմի պնդումը կարող է ճիշտ չլինի:

Օրինակ: Դիտարկենք $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $x \in [-5; 6]$ ֆունկցիան, որը $x=2$ կետում խզվող է, և պարզ է, որ մեծագույն արժեքին չի հասնում:

$$\text{Իսկ եթե դիտարկենք } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \in [-5, 2) \\ 7 - x, & x \in (2; 6], \end{cases} \quad f(2) = 1$$

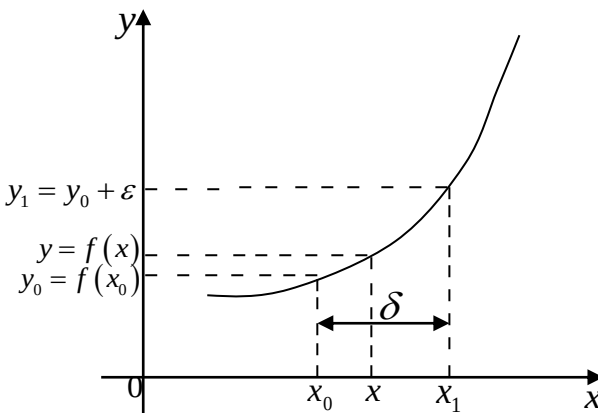
ֆունկցիան, ապա այն ևս խզվող է, սակայն ընդունում է իր մեծագույն ու փոքրագույն արժեքները:

§ 7. Մոնոտոն ֆունկցիայի անընդհատությունը

Թեորեմ 4.7: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որևէ X միջակայքում (փակ կամ բաց, վերջավոր կամ անվերջ) մոնոտոն աճող (նվազող) է, և ընդունած արժեքների բազմությունը Y միջակայք է, ապա $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է X միջակայքում:

Ապացույց: Դիտարկենք մոնոտոն աճող ֆունկցիայի դեպքը: Վերցնենք որևէ $x_0 \in X$ կետ, որը տարբեր է X միջակայքի ծայրակետերից: Ապացուցենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ն՛ աջից, ն՛ ձախից անընդհատ է:

Ապացուցենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում աջից անընդհատ է, իսկ ձախից անընդհատությունը կապացուցվի նույն եղանակով:



Նկար 4.11

Քանի որ x_0 կետը X -ի աջ ծայրակետ չէ, նշանակում է $\exists x \in X$, որ $x_0 < x$ (Նկ. 4.11): Ուստի ֆունկցիայի մոնոտոնությունից ակնհայտ կդառնա, որ $y_0 = f(x_0) < f(x) = y$: y_0 -ն ու y -ը պատկանում են Y միջակայքին: Վերցնենք կամայական ε դրական թիվ այնպիսին, որ $y_1 = y_0 + \varepsilon$ -ը ևս պատկանի Y միջակայքին: Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան լցնում է Y միջակայքը՝ $Y = \{f(x)\}$, ապա X միջակայքում կգտնվի $x_1 \in X$, որ $y_1 = f(x_1)$: Ընդ որում՝ $x_1 > x_0$, որովհետև հակառակ դեպքում կստացվեր $y_1 = f(x_1) \leq f(x_0) = y_0$, որը հակասում է $y_1 = y_0 + \varepsilon$ -ին:

Նշանակենք $\delta = x_1 - x_0$, որտեղից էլ $x_1 = x_0 + \delta$: Եթե $x \in X$ -ն այնպիսին է, որ բավարարվում է $0 < x - x_0 < \delta$ անհավասարությունը, այսինքն՝ $x_0 < x < x_0 + \delta = x_1$, ապա՝ $y_0 < f(x) < y_1 = y_0 + \varepsilon$, այսինքն՝ $0 < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$: Հենց սա էլ նշանակում է, որ $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$: Հետևաբար $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում աջից անընդհատ է: ■

§8. Հակադարձ ֆունկցիայի անընդհատությունը

Թեորեմ 4.8: Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճող (նվազող) է և անընդհատ X միջակայքում: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքների Y միջակայքում գոյություն

ունի $x = \varphi(y)$ միարժեք հակադարձ ֆունկցիա, որը նույնպես մոնոտոն աճող (նվազող) է և անընդհատ է:

Ապացույց: Ենթադրենք $y = f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է: Նշեք, որ նվազող դեպքի ապացույցը դժվարություն չի ներկայացնում:

Քանի որ $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան անընդհատորեն լցնում է Y միջակայք (Բոլցանո-Կոշիի երկրորդ թեորեմի հետևանք), ապա այդ միջակայքից վերցրած յուրաքանչյուր y_0 արժեքին կհամապատասխանի գոնե մեկ x_0 արժեք X միջակայքից, այսինքն՝ $y_0 = f(x_0)$: Բայց քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն է, ուստի X -ի այդպիսի միայն մեկ արժեք կգտնվի: Եթե վերցնենք $x_1 > x_0$ կամ $x_1 < x_0$, ապա համապատասխանաբար կհետևի, որ $f(x_1) > f(x_0)$ կամ $f(x_1) < f(x_0)$: Այսպիսով՝ x_0 արժեքը համապատասխանեցնելով Y -ից վերցրած y_0 արժեքին՝ կստանանք միարժեքորեն որոշվող $x = \varphi(y)$ ֆունկցիա, որն էլ կլինի $y = f(x)$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիա:

Հեշտ է նկատել, որ $x = \varphi(y)$ ֆունկցիան նույնպես կլինի մոնոտոն աճող: Եթե $y_2 > y_1$ ապա $x_1 = \varphi(y_1)$ և $x_2 = \varphi(y_2)$ արժեքների միջև ևս պետք է տեղի ունենա $x_2 > x_1$ անհավասարությունը, որովհետև $x_2 \leq x_1$ հակառակը անհավասարությունը կհանգեցնի $f(x)$ ֆունկցիայի մոնոտոն աճող լինելու պայմանի հակասության: Իսկ $x = \varphi(y)$ հակադարձ

ֆունկցիայի անընդհատությունը կրիսի արդեն նրա մոնոտոն լինելուց, քանի որ այն անընդմեջ լցնում է X միջակայքը: ■

Օրինակ: Դիտարկենք $y = f(x) = (x-3)^2 + 2$, $x \in [3;6]$ ֆունկցիան, որը նշված միջակայքում աճող է և $y \in [2;11]$: $y = (x-3)^2 + 2$ -ից կստանանք՝ $x = 3 + \sqrt{y-2}$: Այսպիսով՝ $y = 3 + \sqrt{x-2}$, $x \in [2;11]$ -ֆունկցիան կլինի հակադարձը, որը նույնպես աճող է $x \in [2;11]$ միջակայքում: Հետևաբար ապացուցած թեորեմից բխում է դրա անընդհատությունը:

Ապացուցեցինք, որ այս ֆունկցիան անընդհատ է $x \in [2;11]$ միջակայքում:

§9. Հավասարաչափ անընդհատություն: Կանտորի թեորեմը

Ենթադրենք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է D_f բազմության վրա, որի ցանկացած կետ իր համար կուտակման կետ է: Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է D_f -ի վրա, ապա $\forall \varepsilon > 0$ թվի և $x_0 \in D_f$ -ի համար գոյություն ունի $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ թիվ այնպես, որ կամայական $x \in D_f$ -ի համար $|x - x_0| < \delta(x_0, \varepsilon)$ դեպքում տեղի ունենա $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Այս դեպքում հարց է առաջանում. արդյո՞ք հնարավոր է, որ δ -ն կախված լինի միայն ε -ից, և x_0 -ից կախված չլինի:

Սահմանում 4.6: D_f միջակայքում որոշված $y = f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է հավասարաչափ անընդհատ, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta(\varepsilon) > 0$ թիվ՝ կախված միայն ε -ից, որ կամայական x' և x'' կետերի համար, որոնք պատկանում են D_f -ին տեղի ունենա $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ անհավասարությունը, երբ $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$:

Թեորեմ 4.9: (Կանտորի թեորեմը): Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a; b]$ հատվածում, ապա այն հավասարաչափ անընդհատ է այդ միջակայքում:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ -ում անընդհատ է, սակայն հավասարաչափ անընդհատ չէ: Այդ դեպքում $\forall \delta > 0$ թվի համար $[a; b]$ -ում գոյություն կունենան x' և x'' , որոնք կախված են δ -ից այնպիսին, որ չնայած $|x' - x''| < \delta$, բայց $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$:

Վերցնենք $\delta_n = \frac{1}{n}$; $n = 1, 2, 3, \dots$ զրոյի ձգտող հաջորդականություն: Հետևաբար յուրաքանչյուր δ_n -ի համար $[a; b]$ -ում գոյություն ունեն x'_n և x''_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ այնպես, որ $|x'_n - x''_n| < \delta_n$, բայց $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$:

Ըստ Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի՝ X'_n և X''_n սահմանափակ հաջորդականություններից կարող ենք առանձնացնել զուգամետ ենթահաջորդականություններ:

Նշանակումները չբարդացնելու համար ենթադրենք, որ հենց X''_n -ը զուգամիտում է $[a; b]$ հատվածի մի որոշ X_0 կետի: Քանի որ $\delta_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$, ապա $|X'_n - X''_n| < \delta_n$ անհավասարությունից պարզ կդառնա, որ X'_n -ը ևս ձգտում է X_0 -ին: $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ կստանանք, որ $f(X'_n) \rightarrow f(X_0)$, $f(X''_n) \rightarrow f(X_0)$, այսինքն՝ $|f(X'_n) - f(X''_n)| \rightarrow 0$: Ստացանք հակասություն այն բանի, որ $|f(X'_n) - f(X''_n)| \geq \varepsilon$: Հետևաբար ճիշտ չէ ենթադրությունը, որ $f(x)$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ չէ: ■

Հետևանք: Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a; b]$ հատվածում, ապա $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta > 0$ թիվ, որ եթե միջակայքը կամայական եղանակով տրոհենք δ -ից փոքր երկարությամբ միջակայքերի, ապա դրանցից յուրաքանչյուրում $f(x)$ ֆունկցիայի տատանումը փոքր կլինի ε -ից: Ապացույցը ակնհայտ է: ■

Այստեղ, ֆունկցիայի տատանում ասելով, հասկանում ենք տվյալ միջակայքում ֆունկցիայի ընդունած արժեքներից մեծագույնի ու փոքրագույնի տարբերությունը:

Օրինակ: Հետազոտել $f(x) = x^2 + 3x + 1$ ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատությունը $[-4; 8]$ միջակայքում:

Գնահատենք $|f(x_1) - f(x_2)|$ տարբերությունը, որտեղ x_1 -ն ու x_2 -ը պատկանում են $[-4; 8]$ միջակայքին:

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |(x_1^2 + 3x_1 + 1) - (x_2^2 + 3x_2 + 1)| \\ &= |(x_1^2 + 3x_1 + 1) - (x_2^2 + 3x_2 + 1)| \leq 3|x_1 - x_2|(|x_1| + |x_2|) \\ &< 36|x_1 - x_2| < \varepsilon \Rightarrow |x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{36} : \end{aligned}$$

Որպես $\delta(\varepsilon)$ կվերցնենք $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{36}$, հետևաբար ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է:

Մի քանի կարևոր բանաձևեր սահմանների վերաբերյալ

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log_a(1+x)}{x} \right) = \log_a e : \quad (4.2)$$

Ապացույց: Քանի որ

$$\left(\frac{\log_a(1+x)}{x} \right) = \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} \text{ և}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \text{ապա} \quad \text{օգտվելով} \quad \text{լոգարիթմական}$$

ֆունկցիայի անընդհատությունից՝ կարող ենք գրել՝

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log_a(1+x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e : \quad \blacksquare$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 1: \quad (4.3)$$

Այս հավասարությունը անմիջապես ստացվում է 4.2-ից, եթե վերցնենք $a = e$: ■

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} \right) = \ln a; (a > 0; a \neq 1): \quad (4.4)$$

Ապացույց: Նշանակենք $a^x - 1 = y$: Ակնհայտ է, որ $x \rightarrow 0$ -ից պարզ կդառնա, որ $y \rightarrow 0$: Իսկ $a^x - 1 = y$ -ից կստանանք՝ $x = \log_a(1+y)$: Հետևաբար կարող ենք գրել, որ.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y}{\log_a(1+y)} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{1}{y} \log_a(1+y)} \right) = \frac{1}{\log_a e} = \ln a: \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Այստեղ ևս օգտվեցինք լոգարիթմական ֆունկցիայի անընդհատությունից:

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \right) = \alpha: \quad (4.5)$$

Ապացույց: Նշանակենք $(1+x)^\alpha - 1 = y$: Երբ $x \rightarrow 0$, ապա y -ը նույնպես կձգտի զրոյի: Նշանակելով $(1+x)^\alpha - 1 = y$ ՝ կստանաք՝ $\alpha = \log_{(1+x)}(1+y) = \frac{\ln(1+y)}{\ln(1+x)}$:

$$\begin{aligned} \text{Հետևաբար, } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{y}{x} \cdot \frac{1}{\alpha} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{x} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \alpha = \alpha: \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Օրինակներ՝ հիմնական բանաձևերի կիրառմամբ

$$1: \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right) = 1:$$

$$2: \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{3}{x^2 - 2} \right)^{\frac{x^2 - 2}{3} \cdot \frac{3}{x^2 - 2} \cdot x^2} = e^3:$$

$$3: \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+3^x)}{3^x} \cdot \frac{2^x}{\ln(1+2^x)} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^x \right) = 0:$$

$$4: \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt[5]{1+\sin x} - 1}{\ln(1+tgx)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{5}} - 1}{\sin x} \cdot \frac{tgx}{\ln(1+tgx)} \cdot \cos x \right) = \frac{1}{5}:$$

Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար

1. Ապացուցել, որ ֆունկցիայի անընդհատ է x_0 կետում.

$$1.1) f(x) = x^2 - 4; x_0 = 1, \quad 1.2) f(x) = 3x + 7; x_0 = 2,$$

$$1.3) f(x) = 3x^2 - 2x + 1; x_0 = 2, \quad 1.4) f(x) = 2x^2 + 1; x_0 = -1,$$

$$1.5) f(x) = 2x^3 - x - 2; x_0 = 1, \quad 1.6) f(x) = 5x^2 - 2; x_0 = -2,$$

$$1.7) f(x) = \sin x + 2; x_0 = 1, \quad 1.8) f(x) = \cos^2 x + 4; x_0 = \frac{\pi}{2},$$

$$1.9) f(x) = 2^x + 1; x_0 = 2, \quad 1.10) f(x) = 2 \cdot 3^x - 1; x_0 = 2,$$

2. Հետազոտել ֆունկցիայի անընդհատությունը: Դասակարգել խզման կետերն ըստ սեռի.

$$2.1) f(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{2x+3}, & x \neq -\frac{3}{2} \\ A, & x = -\frac{3}{2} \end{cases}, \quad 2.2) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ A, & x = 3 \end{cases},$$

$$2.3) f(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x+5}, & x \neq -5 \\ 7, & x = -5 \end{cases}, \quad 2.4) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ A, & x = 3 \end{cases},$$

$$2.5) f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x \in (-\infty; 2) \\ 5x, & x \in [2; +\infty) \end{cases}, \quad 2.6) f(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \in (-\infty; 1] \\ 3x^2, & x \in (1; +\infty) \end{cases},$$

$$2.7) f(x) = \begin{cases} \left| \frac{\sin x}{x} \right|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \quad 2.8) f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{8-x^3}, & x \neq 2 \\ 3x^2, & x = \frac{1}{12} \end{cases},$$

$$2.9) f(x) = \begin{cases} \frac{tgx}{x}, & x \neq 0 \\ -2, & x = 0 \end{cases}, \quad 2.10) f(x) = \begin{cases} \frac{2 + \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}:$$

3. Ընտրել a պարամետրի արժեքն այնպես, որ ֆունկցիան դառնա անընդհատ.

$$3.1) f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ 3a + 2x, & x > 1 \end{cases}, \quad 3.2) f(x) = \begin{cases} 5a + 3x^2, & x \leq 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases},$$

$$3.3) f(x) = \begin{cases} 4a - a^2 + x, & x \leq 1 \\ 2a + x, & x > 1 \end{cases}, \quad 3.4) f(x) = \begin{cases} 5a - x, & x \leq 3 \\ 6x + 2a, & x > 3 \end{cases},$$

4. Հետազոտել ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատությունը.

$$4.1) f(x) = 4x - 3, x \in R, \quad 4.2) f(x) = \sqrt{x}, x \in (3; +\infty),$$

$$4.3) f(x) = 3x^2 + 1, x \in R, \quad 4.4) f(x) = \sqrt[3]{x}, x \in R,$$

$$4.5) f(x) = \frac{2}{x^3}, x \in (0; +\infty), \quad 4.6) f(x) = \frac{2}{x^2}, x \in [1; +\infty),$$

$$4.7) f(x) = \sin 3x, x \in (0; +\infty), \quad 4.8) f(x) = \arctg x, x \in R,$$

$$4.9) f(x) = 2 \sin 2x, x \in R, \quad 4.10) f(x) = tgx, x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]:$$

ԳԼՈՒԽ 5
ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ, ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ
ԱԾԱՆՅՅԱԼ

§1. Ֆունկցիայի ածանցյալ, նրա երկրաչափական և
ֆիզիկական իմաստը

Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է որևէ $(a; b)$ միջակայքում: Ամրագրենք որևէ $x \in (a; b)$ կետ և ֆունկցիայի արգումենտին տանք $\Delta x \neq 0$ աճ այնպես, որ $(x + \Delta x)$ -ը ևս պատկանի $(a; b)$ միջակայքին:

Այդ դեպքում՝

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (5.1)$$

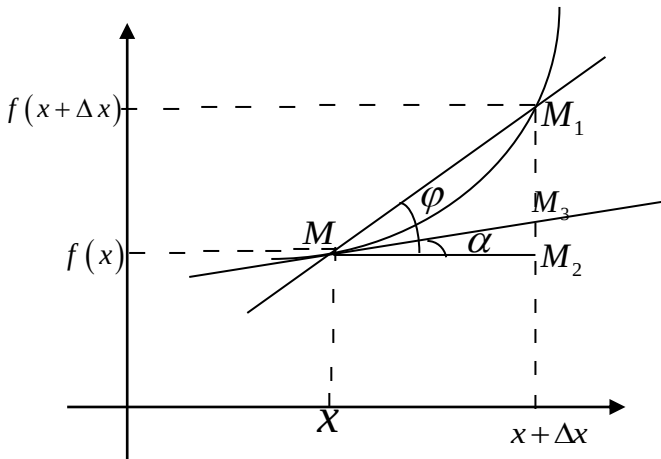
տարբերությանը կանվանենք X կետում $f(x)$ ֆունկցիայի աճ:

Սահմանում 5.1: Արգումենտի աճը զրոյի ձգտելիս ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերության սահմանը կանվանենք ֆունկցիայի ածանցյալ X կետում՝ նշանակելով՝

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x): \quad (5.2)$$

Ածանցյալի երկրաչափական իմաստը

Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է որևէ $(a; b)$ միջակայքի վրա: Ֆունկցիայի գրաֆիկը L կորն է, իսկ $M(x; f(x))$ -ը նրա վրա որևէ ընթացիկ կետ է (Նկ. 5.1): M կետում L կորին տանենք շոշափող ուղիղ: Այդ նպատակով կորի վրա ընտրենք մեկ այլ $M_1(x + \Delta x; f(x + \Delta x))$ կետ և տանենք MM_1 հատող ուղիղը: Այնուհետև, M_1 կետը կորի վրայով սահեցնենք M կետ, մինչև դրանք համընկնեն: Հատողի սահմանային դիրքը, երբ M_1 -ը կհամընկնի M -ին, կլինի M կետում L կորին տարված շոշափողը (Նկ. 5.1):



Նկար 5. 1

Նկատենք, որ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{|M_1 M_2|}{|MM_2|} = \operatorname{tg} \varphi, \quad (5.3)$$

որտեղ φ -ն $M_1 M_2$ հատողի ու X -երի առանցքի կազմած անկյունն է: 5.3-ի մեջ սահմանի անցնելիս φ -ի սահմանային արժեքը կլինի α -ն, իսկ ձախ մասի սահմանը ածանցյալն է X կետում: Այսպիսով՝ X կետում $f'(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը գրաֆիկի $M(x; f(x))$ կետում կորին տարված շոշափողի անկյունային գործակիցն է, այսինքն՝ $f'(x) = tg\alpha$:

Նկատենք, որ 5.3-ից բխում է.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \cdot tg\varphi, \quad (5.4)$$

որտեղից էլ կարող ենք գրել, որ L կորի $M_0(x_0; f(x_0))$ կետում կորին տարած շոշափողի հավասարումը կլինի՝

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0): \quad (5.5)$$

Երկրաչափությունից հայտնի է, որ երկու ուղիղներ՝ $y = k_1 x + b_1$ և $y = k_2 x + b_2$, կլինեն փոխուղղահայաց, եթե՝

$$k_1 \cdot k_2 = -1: \quad (5.6)$$

Հետևաբար, եթե $M_0(x_0; f(x_0))$ կետում կորն ունի շոշափող, որը զուգահեռ չէ X -երի առանցքին ($tg\alpha \neq 0$), ապա $M_0(x_0; f(x_0))$ կետով անցնող շոշափողին ուղղահայաց ուղղի հավասարումը կլինի.

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0): \quad (5.7)$$

Այս ուղիղը կոչվում է շոշափող ուղղի նորմալ:

Ածանցյալի ֆիզիկական իմաստը

Ենթադրենք $s = s(t)$ ֆունկցիան ժամանակից կախված նկարագրում է նյութական կետի ուղղագիծ շարժման օրենքը:

Եթե $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ արտահայտության մեջ անցնենք

սահմանի, երբ $\Delta t \rightarrow 0$, ապա աջ մասում կստանանք $s(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալը: Իսկ ձախ մասը, որ բնութագրում է նյութական կետի շարժման միջին արագությունը, կլինի ակնթարթային արագությունը:

Հաշվի առնելով, որ արագության փոփոխությունը ժամանակի ընթացքում արագացումն է, նման եղանակով հեշտ է հիմնավորել, որ շարժվող մարմնի $v(t)$ արագության ֆունկցիայի ածանցյալը ակնթարթային արագացումն է:

Միակողմանի ածանցյալներ

Սահմանում 5.2: Եթե գոյություն ունի $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ սահմանը, ապա կասենք, որ

$y = f(x)$ ֆունկցիան ունի աջակողմյան ածանցյալ, իսկ եթե

գոյություն ունի $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, ապա կասենք, որ

$y = f(x)$ ֆունկցիան ունի ձախակողմյան ածանցյալ:

Աջակողմյան ու ձախակողմյան ածանցյալներ նշանակում են $f'(x+0)$ և $f'(x-0)$ համապատասխանաբար:

Օրինակ՝

$$f(x) = |x| = \begin{cases} +x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Այս ֆունկցիայի աջակողմյան ու ձախակողմյան ածանցյալները, ըստ սահմանման, կլինեն.

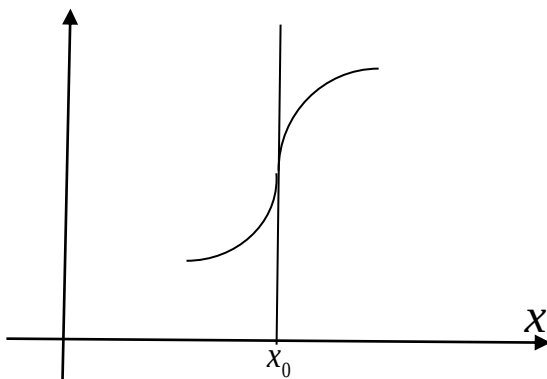
$$f'(x+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{(x+\Delta x)-(x)}{\Delta x} = 1: \quad (5.9)$$

$$f'(x-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{-(x+\Delta x)-(-x)}{\Delta x} = -1: \quad (5.10)$$

Այս արդյունքը նշանակում է, որ $f(x) = |x|$ ֆունկցիան $x = 0$ կետում ածանցյալ չունի:

Անվերջ ածանցյալ

Նկատի ունենալով, որ ֆունկցիայի ածանցյալը կորի այդ կետում տարած շոշափողի անկյունային գործակիցն է, այսինքն՝ $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, ապա, երբ շոշափողը X -երի առանցքի հետ կազմում է 90° -ի անկյուն, կասենք, որ ֆունկցիան այդ կետում ունի անվերջ ածանցյալ (Նկ. 5.2): Այլ կերպ ասած, եթե որևէ X_0 կետում տեղի ունի հետևյալ սահմաններից գոնե մեկը.



Նկար 5. 2

$$\lim_{\Delta x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty; (-\infty), \quad (5.11)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty; (-\infty): \quad (5.12)$$

ապա կասենք, որ ֆունկցիան X_0 կետում ունի անվերջ ածանցյալ համապատասխանաբար աջից կամ ձախից:

§2. Ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը և կապը անընդհատության հետ

Սահմանում 5.3: Կասենք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x կետում, եթե $\exists A$ վերջավոր թիվ այնպես, որ այդ x կետում ֆունկցիայի աճը հնարավոր է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x): \quad (5.13)$$

Սահմանում 5.4: Կասենք, որ $[a; b]$ հատվածի վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է այդ հատվածում, եթե այն դիֆերենցելի է $[a; b]$ -ի բոլոր կետերում:

Թեորեմ 5.1: $f(x)$ ֆունկցիայի X կետում դիֆերենցելի լինելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում այն ունենա վերջավոր ածանցյալ:

Ապացույցն ակնհայտ է և բխում է անմիջապես 5.13-ից և ածանցյալի 5.2 սահմանումից:

Թեորեմ 5.2: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան X_0 կետում ունի ածանցյալ, ապա այդ կետում ֆունկցիան անընդհատ է (հակառակը կարող է ճիշտ չլինել, օրինակ՝ $f(x) = |x|$):

Ապացույց: Երբ $f(x)$ ֆունկցիան X_0 կետում ունի ածանցյալ, ապա ածանցյալի սահմանման 5.2 բանաձևը կարող է գրվել հետևյալ տեսքով՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0): \quad (5.14)$$

Սրանից բխում է՝

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \alpha(x), \quad (5.15)$$

որտեղ $\alpha(x)$ -ը ձգտում է զրոյի, երբ $x \rightarrow X_0$: Ուստի 5.15 հավասարությունը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x) \cdot (x - x_0): \quad (5.16)$$

Այստեղից բխում է, որ երբ $x \rightarrow x_0$, ապա $f(x) \rightarrow f(x_0)$:
 Իր հերթին սա էլ նշանակում է $f(x)$ ֆունկցիայի x_0 կետում
 անընդհատությունը: ■

Ֆունկցիայի աճի՝ $f'(x) \cdot \Delta x$ գլխավոր մասը անվանում
 ենք ֆունկցիայի դիֆերենցիալ և գրում ենք՝
 $dy = df = f'(x) \cdot dx$:

Նկատենք, որ 5.16-ից ստացվում է $\Delta f - df = o(dx)$, ինչը
 նշանակում է, որ արգումենտի շատ փոքր արժեքների
 դեպքում կստացվի $\Delta f \approx df$ մոտավոր բանաձևը:

Դիֆերենցիալի երկրաչափական իմաստը

Քանի որ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի
 $dy = df = f'(x) \cdot dx$ բանաձևում մասնակցող ածանցյալը, x
 կետում ֆունկցիայի գրաֆիկին տարված շոշափողի
 անկյունային գործակիցն է, իսկ $dx = \Delta x$, ապա Նկար 5.1-ից
 կարելի է նկատել, որ $df = |M_2 M_3|$:

Այսպիսով՝ կարող ենք պնդել, որ որևէ x կետում ֆունկ-
 ցիայի դիֆերենցիալը այդ կետում ֆունկցիայի գրաֆիկին
 տարված շոշափողի օրդինատի աճն է:

§3. Գումարի, արտադրյալի և քանորդի դիֆերենցման կանոնները

Թեորեմ 5.3: Եթե $(a; b)$ միջակայքի վրա որոշված $u(x)$ ու $v(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $x \in (a; b)$ կետում, ապա այդ կետում դիֆերենցելի կլինեն նաև $y = u(x) \pm v(x)$, $y = u(x) \cdot v(x)$ և $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ ($v(x) \neq 0$) ֆունկցիաները, և տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը:

$$\bullet (u(x) \pm v(x))' = (u(x))' \pm (v(x))' : (5.17)$$

$$\bullet (u(x) \cdot v(x))' = (u(x))' \cdot v(x) + u(x) \cdot (v(x))' : (5.18)$$

$$\bullet \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{(u(x))' \cdot v(x) - u(x) \cdot (v(x))'}{(v(x))^2} : (5.19)$$

Ապացույց: Նշանակենք $y(x), u(x)$ ու $v(x)$ ֆունկցիաների աճերը համապատասխանաբար Δy , Δu և Δv -ով, իսկ արգումենտի աճը՝ Δx -ով:

Հետևաբար $y = u(x) \pm v(x)$ ֆունկցիայի համար կունենանք՝

$$\begin{aligned} \bullet \quad \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = [u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] \\ &\quad - [u(x) \pm v(x)] = [u(x + \Delta x) - u(x)] \\ &\quad \pm [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v : \end{aligned} \quad (5.20)$$

Եթե $\Delta x \neq 0$, ապա (5.20) հավասարության երկու մասը բաժանենք Δx -ի վրա: Անցնելով սահմանի, երբ $\Delta x \rightarrow 0$ կստանանք՝

$$y' = (u(x) \pm v(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v': \quad (5.21)$$

Նման ձևով $y = u(x) \cdot v(x)$ ֆունկցիայի համար կլինի՝

$$\begin{aligned} \bullet \quad \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) \\ &\quad - u(x) \cdot v(x) = [u(x + \Delta x)v(x) - u(x) \cdot v(x)] \\ &\quad + [u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x)v(x)]: \end{aligned} \quad (5.22)$$

Այսինքն՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u(x + \Delta x): \quad (5.23)$$

Նկատի ունենալով, որ $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելիության հաշվին նաև անընդհատ են, ապա անցնելով սահմանի, երբ $\Delta x \rightarrow 0$, կստանանք՝

$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x): \quad (5.24)$$

Կազմենք $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ հարաբերությունը $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ ֆունկցիայի

համար:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \Delta y &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \\ &= \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x) - [v(x + \Delta x) - v(x)]u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}: \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ուստի՝

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]}{\Delta x} v(x) - \frac{[v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x} u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} :$$

Հաշվի առնելով $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաների դիֆերենցելիությունը՝ կստանանք՝

$$y' = \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} : \quad (5.26)$$

§4. Բարդ և հակադարձ ֆունկցիաների ածանցյալները

Թեորեմ 5.4: Դիցուք $y = f(u)$ ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի u կետում դիֆերենցելի է (ունի ածանցյալ), իսկ $u = \varphi(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է իր որոշման տիրույթի այնպիսի x կետում, որ $u = \varphi(x)$: Այդ դեպքում $y = f(\varphi(x))$ ֆունկցիան ևս դիֆերենցելի է x կետում, և տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$y'(x) = (f(\varphi(x)))' = f'(u) \cdot \varphi'(x) : \quad (5.27)$$

Ապացույց: $u = \varphi(x)$ ֆունկցիայի X արգումենտին տանք կամայական Δx աճ: Ֆունկցիան կստանա Δu աճ, ինչի շնորհիվ $y = f(u)$ ֆունկցիան կունենա Δy աճ, որը կարող ենք գրել՝

$$\Delta y = y'(u) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u, \quad (5.28)$$

որտեղ $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = 0$: 5.28-ի երկու մասը բաժանենք Δx -ի վրա և անցնենք սահմանի.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(y'(u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(y'(u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\alpha(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= y'(u) \cdot u'(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) \cdot u'(x): \end{aligned} \quad (5.29)$$

Քանի որ Δx -ը զրոյի ձգտելիս Δu -ն ևս ձգտում է զրոյի, որովհետև $u = \varphi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = 0$, հետևաբար սա նշանակում է՝ 5.29-ից կստանաք՝

$$\left(f(\varphi(x)) \right)' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x): \quad (5.30)$$

Օրինակ: Դիտարկենք $f(u) = 2u^4 + 3u$,

$$u = \varphi(x) = 2^x + 1:$$

Ածանցյալների համար կունենանք՝

$$f'(u) = 8u^3 + 3, \quad u' = \varphi'(x) = 2^x \ln 2,$$

$$f'(u) \cdot \varphi'(x) = (8u^3 + 3) 2^x \ln 2:$$

Կազմենք $f(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիա և հաշվենք դրա ածանցյալը. $f(\varphi(x)) = 2(2^x + 1)^4 + 3(2^x + 1)$

$$f'(\varphi(x)) = 8(2^x + 1)^3 \cdot 2^x \ln 2 + 3 \cdot 2^x \ln 2$$

$$2^x \ln 2 \cdot \left[8(2^x + 1)^3 + 3 \right] = (8u^3 + 3) 2^x \ln 2 = f'(u) \varphi'(x):$$

Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալը

Թեորեմ 5.5: Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան խիստ մոնոտոն է և անընդհատ $(a; b)$ միջակայքում և $x_0 \in (a; b)$ կետում ունի $f'(x_0) \neq 0$ վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում $x = \varphi(y)$ հակադարձ ֆունկցիան $y_0 = f(x_0)$ կետում կունենա ածանցյալ, և տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$x'(y_0) = \varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}: \quad (5.31)$$

Ապացույց: Հակադարձ ֆունկցիայի անընդհատության 4.8 թեորեմից (Գլուխ 4, § 8) պարզ է, որ $x = \varphi(y)$ ֆունկցիայի արժեքները անընդհատորեն լցնում են միջակայք: Հետևաբար, եթե $x = \varphi(y)$ ֆունկցիայի արգումենտի y_0 արժեքին տանք Δy աճ, ապա $x = \varphi(y)$ ֆունկցիան կստանա Δx աճ: Բայց մյուս կողմից, քանի որ $y = f(x)$ ֆունկցիան միարժեք է, ապա $\Delta x \neq 0$, երբ $\Delta y \neq 0$: Հետևաբար կարող ենք գրել, որ.

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}: \quad (5.32)$$

5.32 մեջ անցնելով սահմանի, երբ $\Delta y \rightarrow 0$, և հաշվի առնելով $x = \varphi(y)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը՝ կստանանք՝

$$x'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x)}: \quad \blacksquare \quad (5.33)$$

Օրինակ: Դիտարկենք $y = \arccos x$ ֆունկցիան, քանի որ $x = \cos y$, և $x' = -\sin y$, ապա՝

$$y' = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}:$$

§5. Պարզագույն ֆունկցիաների ածանցյալները

Օգտվելով մեր ապացուցած թեորեմներից՝ կարող ենք ստանալ տարրական և այլ ֆունկցիաների ածանցյալների համար հաշվման բանաձևերը.

- | | |
|-----------------------|---|
| 1. $y = c;$ | $y' = 0,$ |
| 2. $y = x;$ | $y' = 1,$ |
| 3. $y = x^m;$ | $y' = m \cdot x^{m-1},$ |
| 4. $y = \frac{1}{x};$ | $y' = -\frac{1}{x^2},$ |
| 5. $y = \sqrt{x};$ | $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$ |
| 6. $y = a^x;$ | $y' = a^x \cdot \ln a,$ |
| 7. $y = e^x;$ | $y' = e^x,$ |
| 8. $y = \log_a(x);$ | $y' = \frac{\log_a(e)}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a},$ |
| 9. $y = \ln(x);$ | $y' = \frac{1}{x},$ |
| 10. $y = \sin(x);$ | $y' = \cos(x),$ |
| 11. $y = \cos(x);$ | $y' = -\sin(x),$ |

$$12. y = tg(x); \quad y' = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

$$13. y = ctg(x); \quad y' = \frac{-1}{\sin^2(x)},$$

$$14. y = \arcsin(x); \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$15. y = \arccos(x); \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$16. y = \arctg(x); \quad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$17. y = arcctg(x); \quad y' = -\frac{1}{1+x^2};$$

3. Ապացուցենք, որ եթե $y = x^m$, ապա $y' = m \cdot x^{m-1}$: Իրոք, ըստ ածանցյալի սահմանման՝

$$y' = (x^m)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^{m-1} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1 \right]}{\frac{\Delta x}{x}} = mx^{m-1};$$

6. Ապացուցենք, որ $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$: Կազմենք $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ կստանանք՝

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \ln a :$$

8. Ապացուցենք, որ $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$: Իրոք, որ.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a} :$$

10. Ապացուցենք, որ $(\sin(x))' = \cos(x)$: Իրոք, որ.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x :$$

14. Ապացուցենք, որ $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: Իրոք,

$y = \arcsin(x)$ -ից բխում է, որ $x = \sin(y)$, հետևաբար՝

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - (\sin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} :$$

Նշենք, որ այստեղ օգտագործեցինք այն փաստը, որ $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, այսինքն՝ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, հետևաբար $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$:

Նման ձևով կարող ենք ապացուցել նաև մնացած բանաձևերը:

Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար

1. Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից՝ գտնել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$1.1 \quad f(x) = 3x^2 + x - 1, \quad 1.2 \quad f(x) = 2x^3 + 1,$$

$$1.3 \quad f(x) = x^2 + 3x + 5, \quad 1.4 \quad f(x) = x^2 + x - 2,$$

$$1.5 \quad f(x) = 2^x + 3, \quad 1.6 \quad f(x) = 2 \cdot 3^x - 4,$$

$$1.7 \quad f(x) = \ln(2x + 4), \quad 1.8 \quad f(x) = \ln(5x + 1),$$

$$1.9 \ f(x) = \sin(x+2) + 7, \quad 1.10 \ f(x) = x + \cos(x-1):$$

2. Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից՝ գտնել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները $x = x_0$ կետում.

$$2.1 \ f(x) = 2x^2 + 3x, \ x_0 = 1, \quad 2.2 \ f(x) = 4x^2 + 3x - 1, \ x_0 = 2,$$

$$2.3 \ f(x) = 5x^2 + 2x + 3, \ x_0 = 0.5, \quad 2.4 \ f(x) = x^2 + 7x + 1, \ x_0 = -1,$$

$$2.5 \ f(x) = x^2 + x - 4, \ x_0 = -1, \quad 2.6 \ f(x) = 2x^2 - 7x + 4, \ x_0 = -2,$$

$$2.7 \ f(x) = 2^x + 4, \ x_0 = 1, \quad 2.8 \ f(x) = 3^x - 2x, \ x_0 = 0,$$

$$2.9 \ f(x) = \sin(2x+1) - 1, \ x_0 = \pi, \quad 2.10 \ f(x) = \ln(x+3) - 1, \ x_0 = 1:$$

3. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$3.1 \ f(x) = 3x^3 + \ln^2(x^2 + 4), \quad 3.2 \ f(x) = (3x)^2 + (\sin^2 5x)^3,$$

$$3.3 \ f(x) = \left(\frac{2x^4 + 3^x}{4 + \sin^2(5x)} \right), \quad 3.4 \ f(x) = \frac{\cos^3(3^x + \ln(2x))}{5x^4 + 8},$$

$$3.5 \ f(x) = (4x^3 + 2^x) \cdot (5x^2 + 3), \quad 3.6 \ f(x) = (6x^5)^2 \cdot (\sin^2 5x)^2,$$

$$3.7 \ f(x) = \ln^2(\sqrt{x^2 + 4}), \quad 3.8 \ f(x) = \sqrt{\ln^4(\sqrt{3x^2 + 1})},$$

$$3.9 \ f(x) = \frac{\ln^3(2x^2 + 3^x)}{4^{3x} - 1}, \quad 3.10 \ f(x) = \frac{\sqrt{(\sin^2 5x)^3}}{2^{3x} + x^2}:$$

ԳԼՈՒԽ 6

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ

§1. Ֆերմայի թեորեմը

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(a; b)$ միջակայքում:

Սահմանում 6.1: $x_0 \in (a; b)$ կետը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետ (լոկալ մաքսիմումի կետ), եթե գոյություն ունի x_0 կետի այնպիսի $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ շրջակայք, որ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap (a; b)$ -ի համար $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$):

Լոկալ մինիմումի ու լոկալ մաքսիմումի կետերը կոչվում են ֆունկցիայի էքստրեմումի կետեր:

Թեորեմ 6.1: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(a; b)$ միջակայքում, իսկ $x_0 \in (a; b)$ -ն $f(x)$ -ի էքստրեմումի կետ է: Եթե այդ կետում ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա $f'(x_0) = 0$:

Ապացույց: Ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ընդունում է լոկալ մեծագույն արժեք, այսինքն՝ գոյություն ունի x_0 կետի այնպիսի δ շրջակայք, որ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ -ի համար $f(x) \leq f(x_0)$: Եթե $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, ապա
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{և} \quad x \in (x_0 - \delta; x_0) \quad \text{դեպքում}$$

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$: Քանի որ x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան

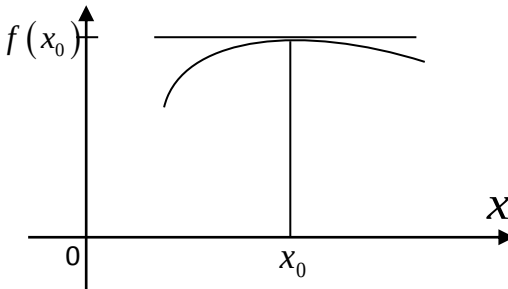
ունի ածանցյալ, ապա ունի աջակողմյան և ձախակողմյան ածանցյալներ, որոնք իրար հավասար են: Հետևաբար՝

$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0: \quad (6.1)$$

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0: \quad (6.2)$$

6.1-ից և 6.2-ից բխում է, որ $f'(x_0) = 0$: ■

$f'(x_0) = 0$ պայմանը բավարարող կետերը կոչվում են ստացիոնար կետեր, իսկ այս պայմանը՝ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայման:



Նկար 6:1

Երկրաչափական տեսանկյունից թեորեմը պնդում է, որ էքստրեմումի կետում ֆունկցիայի գրաֆիկին տարած շոշափողը զուգահեռ է արագիսների առանցքին (Նկ. 6:1):

§2. Ռոլի թեորեմը

Թեորեմ 6.2: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիայի համար բավարարվում են հետևյալ պայմանները՝

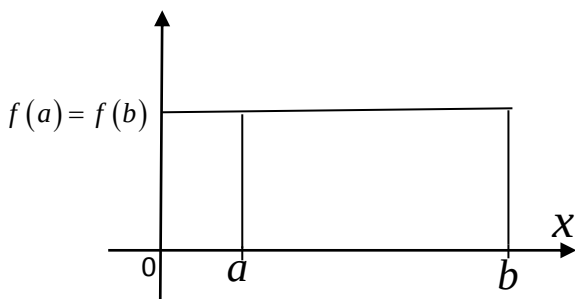
- 1.) անընդհատ է $[a; b]$ փակ հատվածում,
- 2.) դիֆերենցելի է $(a; b)$ բաց միջակայքում,
- 3.) $f(a) = f(b)$:

Այդ դեպքում գոյություն կունենա գոնե մեկ $c \in (a; b)$ կետ այնպես, որ $f'(c) = 0$:

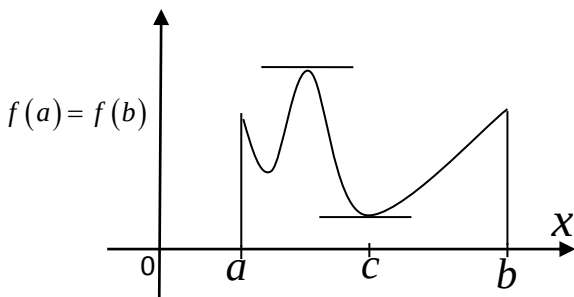
Ապացույց: Քանի որ $[a; b]$ փակ հատվածում $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա, ըստ Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի, նա ընդունում է իր փոքրագույն ու մեծագույն արժեքները՝ $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$, $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$:

Եթե $m = M$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան հաստատուն է, և ուրեմն $f'(x) = 0$: Այս դեպքում որպես C կետ կարող ենք վերցնել $(a; b)$ միջակայքի կամայական կետ (Նկ. 6.2):

$M \neq m$ դեպքում, քանի որ ըստ թեորեմի ենթադրության՝ $f(a) = f(b)$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքներից գոնե մեկը կընդունի $c \in [a; b]$ հատվածի ներքին կետում:



Նկար 6.2



Նկար 6.3

Այս դեպքում, ըստ թեորեմի ենթադրության 2-րդ պայմանի, C կետում $f(x)$ ֆունկցիան ունի ածանցյալ, հետևաբար ըստ Ֆերմայի թեորեմի՝ $f'(c) = 0$ (Նկ. 6.3): ■

Օրինակ: Դիտարկենք $f(x) = 2x^4 - 2x^2 + 1$, $x \in [-3; 3]$:

Առանց դժվարության կարող ենք համոզվել, որ այս ֆունկցիայի համար բավարարվում են Ռոլի թեորեմի պայմանները:

1. Այն անընդհատ է $[-3; 3]$ -ում:
2. Դիֆերենցելի է $(-3; 3)$ -ում:

$$3. \quad f(3) = f(-3) = 145$$

Հետևաբար գոյություն ունի $c \in [-3; 3]$ այնպես, որ $f'(c) = 0$: Քանի որ $f'(x) = 8x^3 - 4x$, ապա որպես c կեն կարող ենք վերցնել $x = 0$, $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ կամ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

§3. Լագրանժի թեորեմը

Թեորեմ 6.3: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a; b]$ փակ հատվածում և դիֆերենցելի է $(a; b)$ միջակայքում: Այդ դեպքում գոյություն ունի գոնե մեկ $c \in (a; b)$ կետ, ըստ որի՝

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c): \quad (6.3)$$

Ապացույց: Դիտարկենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան.

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a): \quad (6.4)$$

Պարզ է, որ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի համար բավարարվում են Ռոլի թեորեմի երեք պայմանները: Նախ $\varphi(x)$ -ը անընդհատ է $[a; b]$ -ում որպես անընդհատ ֆունկցիաների գումար և արտադրյալ: Երկրորդ, այն դիֆերենցելի է $(a; b)$ -ում, քանի որ $f(x)$ -ը դիֆերենցելի է: Վերջապես ճիշտ է նաև երրորդ պայմանը՝ $\varphi(a) = \varphi(b)$, որովհետև.

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = 0: \quad (6.5)$$

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = 0: \quad (6.6)$$

Հետևաբար ըստ Ռոլի թեորեմի՝ գոյություն ունի $c \in (a; b)$ կետ, որ $\varphi'(c) = 0$: Քանի որ 6.4-ից ակնհայտ է, որ.

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (6.7)$$

ապա՝

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad (6.8)$$

հավասարությունից ստանում ենք հետևյալ բանաձևը՝

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c): \quad \blacksquare$$

Այս բանաձևը անվանում են Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձև:

Եթե նշանակենք $a = x_0$, $b = x$, իսկ $\frac{c - x_0}{x - x_0} = \theta$, ապա

հաշվի առնելով $a < c < b$ անհավասարությունը՝ կստանանք, որ $0 < \theta < 1$: Հետևաբար Լագրանժի բանաձևը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0); \quad 0 < \theta < 1: \quad (6.9)$$

Եթե լրացուցիչ նշանակենք $\Delta x = x - x_0$, ապա այս բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

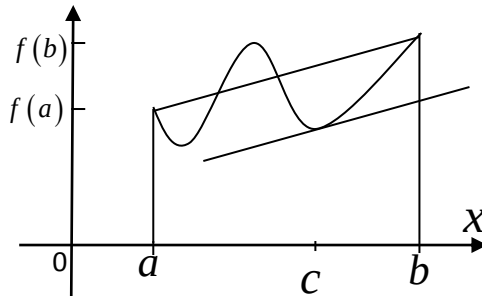
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x; \quad 0 < \theta < 1: \quad (6.10)$$

Այս բանաձևն ու 6.9 բանաձևը անվանում են Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձև:

Երկրաչափական տեսանկյունից թեորեմը պնդում է, որ գոյություն ունի $c \in (a; b)$ կետ այնպես, որ $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին $(c; f(c))$ կետում տարված շոշափողը զուգահեռ է $(a; f(a))$ և $(b; f(b))$ կետերով անցնող ուղղին (Նկ. 6.4): ■

Հետևանք 1: Ֆունկցիայի հաստատուն լինելու պայմանը

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է որևէ $(a; b)$ միջակայքում, և $f'(x) = 0$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան $(a; b)$ -ում հաստատուն է:



Նկար 6.4

Ապացույց: Ակնհայտ է անմիջապես 6.10 բանաձևից, քանի որ կստացվի $f(x) = f(x_0) = \text{const}$, $\forall x \in (a; b)$, որտեղ $x_0 \in (a; b)$ կետը ամրագրած է:

Հետևանք 2: Ֆունկցիայի մոնոտոն լինելու պայման Դի-ցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a; b)$ միջակայքում:

Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան չի նվազում (չի աճում) այն և միայն այն դեպքում, երբ $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$): Եթե $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), ապա $f(x)$ -ը աճում է (նվազում է):

Ապացույց: Ենթադրենք $f'(x) \geq 0$; այդ դեպքում 6.9-ից ակնհայտ է, որ $f(x)$ ֆունկցիան չի նվազում: Հակառակ կողմի ապացույցը պարզ է ածանցյալի սահմանումից: Իրոք, եթե $f(x)$ ֆունկցիան չի նվազում, ուրեմն կամայական երկու x և x_0 կետերի համար, որոնք պատկանում են $(a; b)$ -ին, նշանակում է $x < x_0$ դեպքում $f(x) \leq f(x_0)$, իսկ $x > x_0$ դեպքում՝ $f(x) \geq f(x_0)$: Հետևաբար
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$
 անհավասարությունից պարզ կդառնա՝ $f'(x_0) \geq 0$: ■

Հետևանք 3: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է որևէ $[a; b]$ միջակայքում, ապա այդ միջակայքի այն x_0 կետը, որը $f'(x)$ ֆունկցիայի համար խզման կետ է, երկրորդ սեռի խզման կետ է: Այլ կերպ ասած՝ այդ կետը չի կարող լինել առաջին սեռի կամ վերացնելի խզման կետ:

Ապացույց: Ենթադրենք գոյություն ունի $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x)$; $x_0 \in (a; b)$: Քանի որ $x_0 + \theta(x - x_0) \rightarrow x_0$, երբ $x \rightarrow x_0$ և $0 < \theta < 1$, ապա գոյություն ունի նաև
$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x_0 + \theta(x - x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x):$$

Լագրանժի վերջավոր աճերի (6.10) բանաձևից կարող ենք գրել՝

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x_0 + \theta(x - x_0)) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0): \end{aligned}$$

Այսինքն՝ $f'(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում աջից:

Նման ձևով կապացուցվի, որ $f'(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում ձախից:

Հետևաբար, եթե գոյություն ունեն $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$ և $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x)$ սահմանները, ապա $f'(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում կլինի անընդհատ: Եթե այդ սահմաններից որևէ մեկը գոյություն չունի, ապա x_0 -ն կլինի երկրորդ սեռի խզման կետ: ■

Օրինակ՝

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases} : \quad (6.11)$$

Ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x \in (-\infty; +\infty)$ -ում: Իրոք, եթե $x \neq 0$, ապա՝

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \quad (6.12)$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0: \quad (6.13)$$

Այսպիսով՝ $f'(x)$ ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա և անընդհատ է, երբ $x \neq 0$: Նկատենք, որ գոյություն չունի $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$ սահմանը, որովհետև $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} \right)$ սահմանը գոյություն ունի (հավասար է զրոյի), բայց $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ սահմանը գոյություն չունի: Այսպիսով՝ $f'(x)$ ֆունկցիան $x=0$ կետում ունի երկրորդ սեռի խզում:

§4. Կոշիի թեորեմը

Թեորեմ 6.4: Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[a; b]$ -ում, դիֆերենցելի են $(a; b)$ -ում և $g'(x) \neq 0$ $(a; b)$ -ում: Այդ դեպքում գոյություն ունի $c \in (a; b)$ կետ այնպես, որ տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}: \quad (6.14)$$

Ապացույց: Դիտարկենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$h(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x): \quad (6.15)$$

Պարզ է, որ այս ֆունկցիան անընդհատ է $[a; b]$ -ում, դիֆերենցելի է $(a; b)$ -ում և $h(a) = h(b)$: Հետևաբար $h(x)$ ֆունկցիայի համար բավարարվում են Ռոլի թեորեմի

պայմանները: Սա նշանակում է՝ գոյություն ունի $c \in (a; b)$ կետ, և $h'(c) = 0$: 6.15-ից հետևում է՝

$$h'(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(x): \quad (6.16)$$

Տեղադրելով x -ի փոխարեն C ՝ կստանանք՝

$$h'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = 0: \quad (6.17)$$

Այսինքն՝

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}:$$

■

Դիտարկում: Եթե C ունի թեորեմի մեջ վերցնենք $g(x) = x$, ապա կստանանք Լագրանժի թեորեմը:

§5. Լոպիտալի առաջին կանոնը

Սահմանում 6.2: Կասենք, որ $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների $\frac{f(x)}{g(x)}$ հարաբերության սահմանը $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշություն է, եթե $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$:

Բացել այս տիպի անորոշությունը նշանակում է հաշվել հետևյալ սահմանը՝ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$:

Թեորեմ 6.5: (Լոպիտալի առաջին կանոնը): Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են և դիֆերենցելի $(a; b]$

միջակայքում: Ենթադրենք նաև, որ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$,

իսկ $g'(x) \neq 0$ a կետի շրջակայքում: Այդ դեպքում

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ վերջավոր կամ անվերջ սահմանի գոյությունից

պարզ կդառնա, որ գոյություն ունի նաև $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, և տեղի

ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} : \quad (6.18)$$

Ապացույց: Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների համար լրացուցիչ ընդունենք, որ $f(a) = g(a) = 0$, ապա այդ ֆունկցիաները կդառնան անընդհատ ամբողջ $[a; b]$ -ում: Հետևաբար կարողենք գրել՝

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} : \quad (6.19)$$

Նշենք, որ այստեղ կիրառեցինք Կոշիի թեորեմը և օգտվեցինք այն փաստից, որ $a < c < x < b$: Այստեղից էլ պարզ է, որ եթե $x \rightarrow a$, ապա c -ն ևս ձգտում է a -ին: Հետևաբար 6.19-ից բխում է թեորեմի ապացույցը: ■

Օրինակ: Հաշվել սահմանը $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$:

Լուծում: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos bx \cdot (-\sin ax) a}{\cos ax \cdot (-\sin bx) b}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos bx \cdot \left(\frac{-\sin ax}{ax} \right) a^2}{\cos ax \cdot \left(\frac{-\sin bx}{bx} \right) b^2} = \frac{a^2}{b^2} :$$

Դիտարկում: Նկատենք, որ կարող է $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ սահմանը

գոյություն չունենալ, սակայն $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ սահմանը գոյություն

ունենա: Օրինակ՝ $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$ ֆունկցիա-

ների դեպքում $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ -ը գոյություն չունի, բայց $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

գոյություն ունի:

Թեորեմ 6.6: Դիցուք

1) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $[c; +\infty)$ միջակայքում, որտեղ $c > 0$:

2) Գոյություն ունեն $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$:

3) $[c; +\infty)$ -ում գոյություն ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալները, ընդ որում՝ $g'(x) \neq 0$:

4) Գոյություն ունի վերջավոր կամ անվերջ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$ սահմանը: Այդ դեպքում ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K : \quad (6.20)$$

Ապացույց: Նշանակենք $x = \frac{1}{t}$, եթե $x \rightarrow +\infty$, ապա $t \rightarrow 0+$, ճիշտ է նաև հակառակը: Թեորեմի 2-րդ պայմանից պարզ կլինի՝

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0,$$

իսկ 4-րդ պայմանից՝ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = K :$

Թեորեմ 6.5-ը կիրառենք $f\left(\frac{1}{t}\right)$ և $g\left(\frac{1}{t}\right)$ ֆունկցիաների նկատմամբ, կստանանք՝

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = K : \quad \blacksquare \quad (6.21)$$

Սահմանում 6.2: Կասենք, որ $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների $\frac{f(x)}{g(x)}$ հարաբերությունը $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն

է, եթե $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty :$

Բացել այս տիպի անորոշությունը նշանակում է հաշվել հետևյալ սահմանը՝ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$:

Նշենք, որ Լոպիտալի երկրորդ կանոնը վերաբերում է այս տիպի անորոշությունների բացմանը:

Գրենք Լոպիտալի երկրորդ կանոնն առանց ապացույցի:

Թեորեմ 6.6: Դիցուք

1) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $(a; b]$ միջակայքում:

2) Գոյություն ունեն $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$:

3) $(a; b]$ միջակայքում գոյություն ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ ածանցյալները, ընդ որում՝ $g'(x) \neq 0$:

4) Գոյություն ունի վերջավոր կամ անվերջ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$

սահմանը: Այդ դեպքում գոյություն ունի նաև՝

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K: \quad (6.20)$$

Օրինակ: Հաշվել սահմանը $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)^x$:

Լուծում: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\pi}{2 \operatorname{arctg} x} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-x^2}{(1+x^2)}} = e^{-\frac{2}{\pi}} .$$

Սահմանում 6.3: Կասենք, որ $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների $f(x) - g(x)$ տարբերությունը $(\infty - \infty)$ տեսքի անորոշություն է, եթե $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$:

Նշենք, որ այս տիպի անորոշությունները բերվում են $\frac{0}{0}$ կամ $\frac{\infty}{\infty}$ անորոշության հետևյալ ձևափոխությամբ՝

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \frac{1}{g(x)}} :$$

§6. Բարձր կարգի ածանցյալներ և դիֆերենցիալներ

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որևէ $(a; b)$ միջակայքում ունի $f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ, ապա այդ ածանցյալ՝ $f'(x)$ ֆունկցիան կարող է ունենալ ածանցյալ: Այդ $f'(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը՝ $(f'(x))'$, որը կոչվում է $f''(x)$ -ով, անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ:

Նման ձևով սահմանվում են ավելի բարձր կարգի ածանցյալները, այսինքն՝ $f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$:

Բարձր կարգի ածանցյալների համար կիրառում են նաև հետևյալ նշանակումները՝

$$\frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^3 f}{dx^3}, \dots, \frac{d^n f}{dx^n}: \quad (6.22)$$

Նույն եղանակով սահմանվում են նաև բարձր կարգի դիֆերենցիալները: Եթե $f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը՝ $df = f'(x) \cdot dx$ -ը, դիֆերենցելի է, այսինքն՝ գոյություն ունի $f''(x)$ -ը, ապա այդ դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը կանվանենք $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ և կնշանակենք $d^2 f = d(f'(x) \cdot dx)$ -ով: Ինդուկտիվ եղանակով սահմանվում են ավելի բարձր կարգի դիֆերենցիալները՝

$$d^3 f = d(d^2 f), \dots, d^n f = d(d^{n-1} f): \quad (6.23)$$

Առաջին դիֆերենցիալի անփոփոխականությունը (ինվարիանտությունը)

Ինչպես արդեն սահմանել ենք, եթե $y = f(x)$ դիֆերենցելի ֆունկցիայի արգումենտը անկախ փոփոխական է, ապա իր որոշման տիրույթի որևէ X կետում այդ դիֆերենցիալը ունի հետևյալ՝

$$dy = df = f'(x) \cdot dx \quad (6.24)$$

տեսքը, որտեղ dx -ը հաստատուն է: Համոզվենք, որ այս բանաձևը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ X -ը լինի ոչ թե անկախ

փոփոխական, այլ t անկախ փոփոխականից կախված $x = \varphi(t)$ դիֆերենցելի ֆունկցիա՝ $dx = \varphi'(t) \cdot dt$: Այս դեպքում դիֆերենցիալի 6.24 բանաձևում dx -ը ոչ թե անկախ փոփոխականի աճն է, այլ $x = \varphi(t)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը: Ստացվում է, որ առաջին կարգի դիֆերենցիալը մնում է ինվարիանտ:

Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է ըստ X -ի, իսկ $x = \varphi(t)$ դիֆերենցելի է ըստ t փոփոխականի: Հետևաբար իմաստ ունի դիտարկելու $y = f(\varphi(t))$ բարդ ֆունկցիան: Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման կանոնից կարող ենք գրել՝

$$dy = d[f(\varphi(t))] = (f(\varphi(t)))' dt = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt : (6.25)$$

Նկատենք, որ $\varphi'(t) \cdot dt$ -ն $x = \varphi(t)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալն է, այսինքն՝ $dx = \varphi'(t) \cdot dt$: Սա հաշվի առնելով՝ 6.25-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$dy = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt = f'(x) dx : (6.26)$$

Այսպիսով՝ բարդ ֆունկցիայի դեպքում 6.24 բանաձևի տեսքը նույնպես պահպանվեց: ■

Բարձր կարգի դիֆերենցիալում ինվարիանտության խախտումը

Դիցուք $y = f(x)$ և $x = \varphi(t)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են, և ունենք $y = f(\varphi(t))$ բարդ ֆունկցիա: Այս բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը, ըստ t փոփոխականի, գրվում է

$dy = f'(x) \cdot dx$ ձևով, որտեղ $dx = \varphi'(t) \cdot dt$: Հաշվենք $y = f(\varphi(t))$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալն ըստ t փոփոխականի.

$$\begin{aligned} d^2 y &= d(f'(x) \cdot dx) = d(f'(x)) \cdot dx + f'(x) \cdot d(dx) \\ &= f''(x) dx \cdot dx + f'(x) d^2 x = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2 x: (6.27) \end{aligned}$$

Այսպիսով՝ ստացանք, որ.

$$d^2 y = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2 x: (6.28)$$

Սակայն x անկախ փոփոխականի դեպքում երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը ուներ հետևյալ տեսքը՝

$$d^2 y = f''(x) dx^2: (6.29)$$

Այսինքն՝ բարդ ֆունկցիայի դեպքում երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի արտահայտության 6.28 բանաձևի մեջ ավելացավ երկրորդ գումարելին: Հետևաբար երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը փոփոխվեց: Այսինքն՝ ինվարիանտությունը խախտվեց: ■

§7. Թեյլորի բանաձևը բազմանդամի և կամայական ֆունկցիայի համար

Դիցուք $p(x)$ -ը n աստիճանի բազմանդամ է՝

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n: (6.30)$$

Նրա՝ մինչև n -րդ կարգի ածանցյալները կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned}
p'(x) &= a_1 + 2a_2x + \dots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1}, \\
p''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot x + \dots + (n-1)n \cdot a_n \cdot x^{n-2}, \\
p'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \dots + (n-2)(n-1)n \cdot a_n \cdot x^{n-3}, \\
&\dots\dots\dots \\
p^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)(n-1)n a_n :
\end{aligned}
\tag{6.31}$$

Այս արտահայտություններում տեղադրենք $x=0$, կստանանք՝

$$a_0 = \frac{p(0)}{0!}, a_1 = \frac{p'(0)}{1!}, a_2 = \frac{p''(0)}{2!}, \dots, a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!} : \tag{6.32}$$

Սրանք տեղադրելով 6.30-ի մեջ՝ $p(x)$ բազմանդամի համար կստանանք հետևյալը՝

$$p(x) = \frac{p(0)}{0!} + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n : \tag{6.33}$$

Այս բանաձևը անվանում են Թեյլորի բանաձև բազմանդամի համար $x=0$ կետի շրջակայքում:

Նշենք, որ 6.33-ն անվանում են նաև Մակլորենի բանաձև:

Եկեք 6.30 բազմանդամի փոխարեն դիտարկենք ավելի ընդհանուր տեսքի բազմանդամ՝

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n : \tag{6.34}$$

Հաշվենք $p(x)$ -ի մինչև n -րդ կարգի ածանցյալները և x -ի փոխարեն տեղադրենք x_0 :

Գործակիցների համար կստանաք 6.32-ի նման արտահայտություններ՝

$$a_0 = \frac{p(x_0)}{0!}, a_1 = \frac{p'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{p''(x_0)}{2!}, \dots, a_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!} : \tag{6.35}$$

Այնուհետև 6.34-ից և 6.35-ից կստանանք՝

$$p(x) = \frac{p(x_0)}{0!} + \frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n : \quad (6.36)$$

Ստացված բանաձևն անվանում են Թեյլորի բանաձև:

Կամայական ֆունկցիայի դեպքը

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետի շրջակայքում ունի մինչև $n-1$ -րդ կարգի ածանցյալները, այսինքն՝ գոյություն ունեն $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$, և $f^{(n)}(x)$ -ը x_0 կետում:

Դիտարկենք հետևյալ բազմանդամը՝

$$P_n(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n : \quad (6.37)$$

Կազմենք $P_n(x)$ -ի և $f(x)$ -ի տարբերությունը: Այդ տարբերությունը նշանակենք՝

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) : \quad (6.38)$$

Մնացորդային անդամը՝ Լագրանժի տեսքով

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան, որն ամբողջ աստիճանի բազմանդամ չէ, որոշված է X միջակայքում և այդ միջակայքի x_0 կետի որոշ շրջակայքում ունի բոլոր կարգի ածանցյալները

մինչև $(n+1)$ -րդ կարգը ներառյալ՝
 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)$:

Վերցնենք $z \in [x_0; x]$ միջակայքից (որոշակիության համար ընդունենք, որ $x > x_0$), $P_n(x)$ -ի մեջ x_0 -ն փոխարինենք Z -ով և կազմենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$\begin{aligned} \varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 - \dots \\ - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n : \end{aligned} \quad (6.39)$$

Պարզ է, որ $\varphi(z)$ ֆունկցիան $[x_0; x]$ միջակայքում անընդհատ է, և գոյություն ունի $\varphi'(z)$ ածանցյալը $(x_0; x)$ -ում: Պարզագույն հաշվումներով կարելի է համոզվել, որ.

$$\varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n, \quad (6.40)$$

իսկ

$$\varphi(x_0) = r_n(x), \quad \varphi(x) = 0 : \quad (6.41)$$

Վերցնենք մեկ ուրիշ՝

$$\psi(z) = (x-z)^{n+1} \quad (6.42)$$

ֆունկցիա, որն անընդհատ է $[x_0; x]$ միջակայքում և $(x_0; x)$ -ում ունի զրոյից տարբեր ածանցյալ՝

$$\psi'(z) = -(n+1)(x-z)^n : \quad (6.43)$$

Այնուհետև $\varphi(z)$ և $\psi(z)$ ֆունկցիաների համար $[x_0; x]$ միջակայքում կիրառենք Կոշիի բանաձևը՝

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}, \quad (6.44)$$

որտեղ $c \in (x_0; x)$, այսինքն՝ $c = x_0 + \theta \cdot (x - x_0)$, $0 < \theta < 1$:

Արդյունքում հաշվի առնելով 6.40-ից մինչև 6.44-ը՝ կստանանք՝

$$\frac{-r_n(x)}{-(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x - c)^n}{-n! \cdot (n+1)(x - c)^n}: \quad (6.45)$$

Այսինքն՝

$$r_n(x) = \frac{-f^{(n+1)}(c) \cdot (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}: \quad (6.46)$$

Հետևաբար 6.37, 6.38 և 6.46-ից կստանանք, որ.

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}: \end{aligned} \quad (6.47)$$

Այս բանաձևը անվանում են Թեյլորի բանաձև $f(x)$ ֆունկցիայի համար, իսկ 6.46-ը՝ մնացորդային անդամ՝ L ագրանժի տեսքով:

Նշենք, որ $x_0 = 0$ դեպքում բանաձևն անվանում են Մակլորենի բանաձև:

Մնացորդային անդամը՝ Կոշիի տեսքով

Ենթադրենք նախորդ դեպքի պայմանները տեղի ունեն: Դիտարկենք $\psi(z) = (x - z)$ ֆունկցիան, ունենք՝

$$\psi(x_0) = (x - x_0), \quad \psi(x) = 0, \quad \psi'(c) = -1: \quad (6.48)$$

Կիրառենք Կոշիի բանաձևը՝ օգտվելով 6.41-ից և նկատի ունենալով, որ.

$$(x - c) = (x - (x_0 + \theta \cdot (x - x_0))) = (x - x_0)(1 - \theta), \quad (6.49)$$

մնացորդային անդամի համար կստանաք՝

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (1 - \theta)^n \cdot (x - x_0)^{n+1}}{n!}, \quad (6.50)$$

որն էլ անվանում են մնացորդային անդամ՝ Կոշիի տեսքով:

Մնացորդային անդամը՝ Պեանոյի տեսքով

Թեորեմ (6.7): Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետի շրջակայքում ունի նվազագույնը մինչև $n - 1$ -րդ կարգի ածանցյալները, այսինքն՝ գոյություն ունեն $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$, և $f^{(n)}(x)$ -ը x_0 կետում: Այդ դեպքում 6.38 մնացորդային անդամը կներկայացվի հետևյալ տեսքով՝

$$r_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right); \text{ երբ } x \rightarrow x_0: \quad (6.51)$$

Այսինքն՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0, \quad (6.52)$$

Ապացույց: Համեմատելով 6.37 և 6.47 բանաձևերը նկատում ենք, որ $P_n(x)$ -ի և $f(x)$ -ի, ինչպես նաև նրանց նույն կարգի ածանցյալների արժեքները x_0 կետում համընկնում են, այսինքն՝

$$P_n(x_0) = f(x_0), P'_n(x_0) = f'(x_0), \dots, P^{(n)}_n(x_0) = f^{(n)}(x_0) : (6.53)$$

Հետևաբար 6.38-ից կստանանք՝

$$r_n(x_0) = r'_n(x_0) = r''_n(x_0) = \dots = r^{(n)}_n(x_0) = 0 : (6.54)$$

Ապացուցենք, որ 6.54 պայմանի դեպքում, երբ $x \rightarrow x_0$, տեղի կունենա

$$r_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right) \quad (6.55)$$

հավասարությունը:

Ապացուցման համար օգտվենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից: $n=1$ դեպքում ունենք՝ $r_1(x_0) = r'_1(x_0) = 0$: Հետևաբար՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_1(x) - r_1(x_0)}{x - x_0} = r'_1(x_0) = 0,$$

որն էլ նշանակում է $r_1(x) = o(x - x_0)$, երբ $x \rightarrow x_0$: Այսինքն՝ $n=1$ դեպքում 6.55-ը ճիշտ է: Ենթադրենք 6.55-ը ճիշտ է n -ի համար, ապացուցենք, որ այն ճիշտ է նաև $n+1$ -ի համար: Այդ նպատակով ենթադրենք, որ $r_n(x)$ -ի համար տեղի ունի

$$r_n(x_0) = r'_n(x_0) = r''_n(x_0) = \dots = r^{(n)}_n(x_0) = r^{(n+1)}_n(x_0) = 0 \quad (6.56)$$

պայմանը: Սա նշանակում է որ $r'_n(x)$ ֆունկցիան բավարարում է 6.54 պայմանը: Հետևաբար $r'_n(x)$ -ֆունկցիայի համար ունենք $r'_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$ Այսինքն՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r'_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 : \quad (6.57)$$

Մյուս կողմից կարող ենք գրել՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r'_n(c)}{(x-x_0)^n} : \quad (6.58)$$

Այստեղ կիրառեցինք Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը, որտեղ $x_0 < c < x$: 6.58-ը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r'_n(c)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{r'_n(c)}{(c-x_0)^n} \cdot \left(\frac{c-x_0}{x-x_0} \right)^n \right] : \quad (6.59)$$

Քանի որ x -ը x_0 -ին ձգտելիս c -ն նույնպես ձգտում է x_0 -ի, և $0 < \frac{c-x_0}{x-x_0} < 1$, ապա՝ 6.57 և 6.59-ից կստանանք՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0, \text{ այսինքն՝ } r_n(x) = o\left((x-x_0)^{n+1}\right) : \quad \blacksquare$$

Այսպիսով՝ 6.51-ը ապացուցվեց: Հետևաբար 6.38-ից կստանանք՝

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot (x-x_0)^n}{(n)!} + o\left((x-x_0)^n\right) : \quad (6.60) \end{aligned}$$

Այստեղ, երբ $x \rightarrow x_0$, $r_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$, անվանում են մնացորդային անդամ՝ Պեանոյի տեսքով:

Պեանոյի տեսքով մնացորդային անդամի ներկայացումը կարող ենք ստանալ նաև մնացորդային անդամի Լագրանժի ներկայացումից:

Ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետի շրջակայքում ունի $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ ածանցյալները, իսկ $f^{(n)}(x)$ -ը x_0 կետում անընդհատ է:

Գրենք 6.47 բանաձևը՝ n -ը փոխարինելով $(n-1)$ -ով՝

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c) \cdot (x-x_0)^n}{n!}, \quad (6.61)$$

որտեղ $c \in (x_0; x)$: Քանի որ $f^{(n)}(x)$ -ը x_0 կետում անընդհատ է, ուրեմն կարող ենք գրել՝

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \quad (6.62)$$

որովհետև, երբ $x \rightarrow x_0$ նաև $c \rightarrow x_0$, $\alpha(x) \rightarrow 0$:

Տեղադրենք 6.62-ը 6.61-ի վերջին գումարելու մեջ և կստանանք՝

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \alpha(x)(x-x_0)^n:$$

Այսինքն՝ $\alpha(x)(x-x_0)^n = o(x-x_0)^n$:

Ստացանք 6.60 ներկայացումը: ■

Մակլորենի բանաձևը որոշ տարրական ֆունկցիաների համար

- $f(x) = e^x$, քանի որ $(f(x))^{(n)} = e^x$ և $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, հետևաբար՝

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_{n+1}(x): \quad (6.63)$$

- $f(x) = \sin x$, քանի

$$\text{որ } (f(x))^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \text{ իսկ}$$

$$f^{(n)}(0) = \sin^{(n)}(0) = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0; & n = 2k \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}; & n = 2k-1 \end{cases}$$

Ուստի՝

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!} + r_{n+2}(x), \quad (6.64)$$

որտեղ n -ը կենտ է, իսկ մնացորդային անդամը՝

$$r_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \sin\left(\theta \cdot x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad 0 < \theta < 1: \quad (6.65)$$

- $f(x) = \cos x$, քանի

$$\text{որ } (f(x))^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

իսկ $f^{(n)}(0) = \cos^{(n)}(0) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0; & n = 2k - 1 \\ (-1)^{\frac{n}{2}}; & n = 2k \end{cases},$

ապա Մակլորենի բանաձևը կլինի՝

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{x^n}{n!} + r_{n+2}(x), \quad (6.66)$$

որտեղ n -ը զույգ է, իսկ մնացորդային անդամը՝

$$r_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \cos\left(\theta \cdot x + n \cdot \frac{\pi}{2} + \pi\right); \quad 0 < \theta < 1:$$

- $f(x) = \ln(1+x)$, քանի որ $(f(x))^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, և

$f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$, ապա Մակլորենի բանաձևը կլինի՝

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n!} + r_{n+1}(x): \quad (6.67)$$

Այստեղ մնացորդային անդամը, ըստ Լագրանժի, կլինի՝

$$r_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}; \quad 0 < \theta < 1, \quad (6.68)$$

իսկ ըստ Կոշիի՝

$$r_{n+1}(x) = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}; \quad 0 < \theta < 1: \quad (6.69)$$

- $f(x) = (1+x)^\alpha$, որտեղ α -ն իրական թիվ է: Քանի որ $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \cdot (1+x)^{\alpha-n}$, իսկ

$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$, ապա Մակլորենի
բանաձևը կլինի՝

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_{n+1}(x), \quad (6.70)$$

որտեղ

$$r_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}; \quad 0 < \theta < 1: \quad (6.71)$$

Նկատենք, որ եթե $\alpha = n$ բնական թիվ է, ապա $r_{n+1}(x) = 0$, և
կստանանք՝

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}x^n, \quad (6.72)$$

որը համընկնում է Նյուտոնի երկանդամի բանաձևին:

- $f(x) = \arctg x$, կարելի է պարզել, որ.

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0; & n = 2k \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (n-1)!; & n = 2k-1 \end{cases} : \quad (6.73)$$

Հետևաբար Մակլորենի բանաձևի մնացորդային անդամը
Պեանոյի տեսքով կլինի՝

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + o(x^{2k}): \quad (6.74)$$

Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար

1. Օգտվելով դիֆերենցելիության սահմանումից՝ հետազոտել $x = x_0$ կետում ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը.

$$1.1 \quad f(x) = 3x^2 + 2x - 1, x_0 = 0, \quad 1.2 \quad f(x) = 5x^2 - x, x_0 = 1,$$

$$1.3 \quad f(x) = \sin(3x) + 2x, x_0 = 1, \quad 1.4 \quad f(x) = 2^{3x} - 4x, x_0 = 2,$$

$$1.5 \quad f(x) = 3e^{2x} + x^2 + 1, x_0 = 0, \quad 1.6 \quad f(x) = 5x^2 + \ln(x+1), x_0 = 2,$$

$$1.7 \quad f(x) = 4^{2x} + x^3 - 2, x_0 = 3, \quad 1.8 \quad f(x) = \sin(x^2) + e^x, x_0 = 0,$$

$$1.9 \quad f(x) = \cos 5x + \frac{2}{x} - 1, x_0 = 1, \quad 1.10 \quad f(x) = \ln(x^2) + \sin(3x), x_0 = 0:$$

2. a և b թվերի ինչպիսի՞ ընտրության դեպքում ֆունկցիան կլինի դիֆերենցելի.

$$2.1 \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2, & x \geq 1 \\ ax + 2b, & x < 1 \end{cases}, \quad 2.2 \quad f(x) = \begin{cases} 3a + 2b, & x > 1 \\ x^2 + 3, & x \leq 1 \end{cases},$$

$$2.3 \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & |x| < 1 \\ \frac{2}{|x|}, & x \geq 1 \end{cases}, \quad 2.4 \quad f(x) = \begin{cases} 2a + 3b + x, & x > 0 \\ x^2 + e^x, & x \leq 0 \end{cases},$$

$$2.5 \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2^x, & x \geq 0 \\ a + 3bx + 1, & x < 0 \end{cases}, \quad 2.6 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{ax + 2b}{2a}, & x < 1 \\ ax^2 + 2bx + 3, & x \geq 1 \end{cases} :$$

3. Օգտվելով Լոպիտալի կանոնից՝ հաշվել սահմանը.

$$3.1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}, \quad 3.2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{6x^2}, \quad 3.3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - tg 3x}{2x - tg 4x},$$

$$3.4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - tg(2x)}{\sin 7x}, \quad 3.5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(3x) - 1}{3x^2 + \sin^2(4x)}, \quad 3.6 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{2(x-1)},$$

$$3.7 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 \sin(x)}{\cos(x-1) - 1}, \quad 3.8 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{tg(x-2)}{\ln x - \ln 2}, \quad 3.9 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x+1)^2}{\sin(x+1)}:$$

ԳԼՈՒԽ 7
ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ
ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

§1. Էքստրեմումի բավարար պայմաններ

Թեորեմ 7.1: Էքստրեմումի առաջին բավարար պայման: Դիցուք $x_0 \in X$ կետը $f(x)$ ֆունկցիայի համար ստացիոնար կետ է, և x_0 կետի $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta) \in X$ շրջակայքում գոյություն ունի $f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ, իսկ x_0 կետում ֆունկցիան անընդհատ է: Այդ դեպքում՝

Ա) Եթե $f'(x) > 0$, երբ $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ և $f'(x) < 0$, երբ $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի լոկալ մաքսիմում:

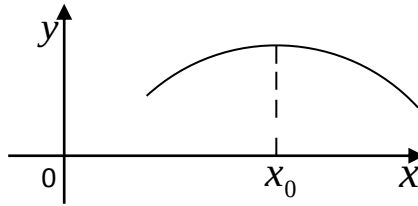
Բ) Եթե $f'(x) < 0$, երբ $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ և $f'(x) > 0$, երբ $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի լոկալ մինիմում:

Գ) Եթե $f'(x) > 0$ և՛ $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ -ում, և՛ $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ -ում կամ $f'(x) < 0$ և՛ $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ -ում, և՛ $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ -ում, ապա այս դեպքերում $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում էքստրեմում չունի:

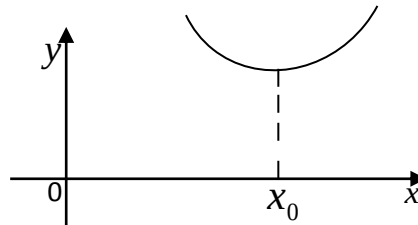
Ապացույց: Ա-ի դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան $(x_0 - \delta; x_0)$ -ում աճում է, իսկ $(x_0; x_0 + \delta)$ -ում՝ նվազում, ուրեմն x_0 կետը լոկալ մաքսիմումի կետ է (Նկ. 7.1):

Բ-ի դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան $(x_0 - \delta; x_0)$ -ում նվազում է, իսկ $(x_0; x_0 + \delta)$ -ում՝ աճում, ուրեմն x_0 կետը լոկալ մինիմումի կետ է (Նկ. 7.2):

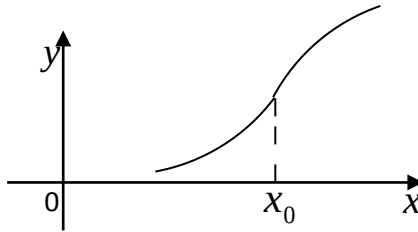
Գ-ի դեպքում x_0 կետից աջ ու ձախ մասերում ֆունկցիայի ածանցյալը նշանը չի փոխել: Հետևաբար այդ կետը էքստրեմումի կետ չէ (Նկ. 7.3 և 7.4): ■



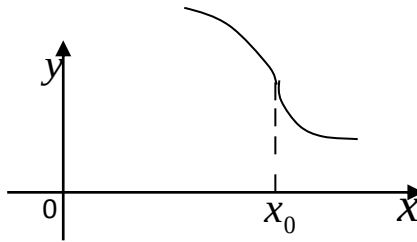
Նկար 7.1



Նկար 7.2



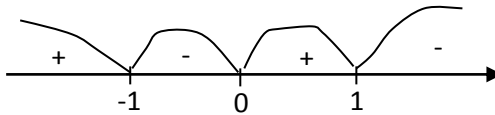
Նկար 7.3



Նկար 7.4

Օրինակ: Գտնել $f(x) = 2x^2 - x^4$ ֆունկցիայի էքստրեմումների կետերը և հաշվել էքստրեմալ արժեքները:

Լուծում: $(f(x))' = 4x - 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1, x = 1$



Յուրաքանչյուր միջակայքում պարզենք ածանցյալի նշանը՝

$$f'(-2) = 24 > 0, \quad f'\left(\frac{1}{-2}\right) = -\frac{3}{2} < 0, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} > 0,$$

$f'(2) = -24 < 0$: Հետևաբար $f(x)$ ֆունկցիան աճում է, երբ $x \in (-\infty; -1] \cup [0; 1]$: Ֆունկցիան նվազում է, երբ $x \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$:

Այսպիսով՝

$$f_{\max} = f(-1) = 1, \quad f_{\max} = f(1) = 1, \quad f_{\min} = f(0) = 0:$$

Թեորեմ 7.2: Երկրորդ բավարար պայման

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիայի համար x_0 -ն ստացիոնար կետ է՝ $f'(x_0) = 0$: Ֆունկցիան այդ կետի շրջակայքում ունի առաջին կարգի $f'(x)$ ածանցյալ և այդ կետում երկրորդ կարգի՝ $f''(x_0)$ վերջավոր ածանցյալ.

Ա) Եթե $f''(x_0) > 0$, ապա x_0 -ն լոկալ մինիմումի կետ է:

Բ) Եթե $f''(x_0) < 0$, ապա x_0 -ն լոկալ մաքսիմումի կետ է:

Ապացույց: 1-ին եղանակ: Ըստ երկրորդ կարգի ածանցյալի սահմանման և հաշվի առնելով, որ $f'(x_0) = 0$ ՝ կարող ենք գրել՝

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}: \quad (7.1)$$

Այստեղից հեշտ է նկատել, որ եթե $f''(x_0) > 0$, ապա տեղի ունի հետևյալ՝

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \quad (7.2)$$

անհավասարությունը: Նշանակում է $x < x_0$ դեպքում $f'(x) < 0$, իսկ $x > x_0$ դեպքում՝ $f'(x) > 0$: Ուրեմն x_0 կետը մինիմումի կետ է: Նման ձևով ապացուցվում է, որ $f''(x_0) < 0$ դեպքում x_0 կետը մաքսիմումի կետ է: ■

2-րդ եղանակ: Նշենք, որ թեորեմի ապացույցը հնարավոր է կատարել՝ օգտվելով նաև Թեյլորի բանաձևից ու մնացորդային անդամը գրելով Պեանոյի տեսքով:

Իրոք, վերցնենք $n = 2$, այդ դեպքում՝

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

Կամ, որ նույնն է՝

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \alpha \cdot (x-x_0)^2, \quad (7.3)$$

որտեղ $\alpha \rightarrow 0$, երբ $x \rightarrow x_0$: Հետևաբար՝

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0) + 2\alpha}{2!} \cdot (x-x_0)^2 \quad (7.4)$$

Նկատենք, որ $f(x) - f(x_0)$ -ի նշանը համընկնում է աջ մասի արտահայտության նշանին, որն էլ համընկնում է $f''(x_0)$ -ի նշանի հետ: Հետևաբար, եթե $f''(x_0) > 0$ ուրեմն $f(x) > f(x_0)$, այսինքն՝ x_0 -ն լոկալ մինիմումի կետ է: Եթե $f''(x_0) < 0$ ուրեմն $f(x) < f(x_0)$, այսինքն՝ x_0 -ն լոկալ մաքսիմումի կետ է: ■

Օրինակ: Գտնել էքստրեմումի կետերը, երբ $f(x) = x^2 - x^3$:

Լուծում: $f'(x) = 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0; x = \frac{2}{3} :$

$f''(x) = 2 - 6x$: $f''(0) = 2 > 0$, ուրեմն $x = 0$ -ն մինիմումի կետ է: $f''\left(\frac{2}{3}\right) = -2 < 0$, $x = \frac{2}{3}$ -ը մաքսիմումի կետ է:

Էքստրեմումի երրորդ բավարար պայման: Ֆունկցիայի հետազոտումը բարձր կարգի ածանցյալներով

Թեորեմ 7.3: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիայի համար x_0 -ն ստացիոնար կետ է, և

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0: \quad (7.5):$$

Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ պնդումները

Ա) Եթե $n = 2k$ և $f^{(n)}(x_0) < 0$, ապա x_0 -ն լոկալ մաքսիմումի կետ է:

Բ) Եթե $n = 2k$ և $f^{(n)}(x_0) > 0$, ապա x_0 -ն լոկալ մինիմումի կետ է:

Գ) Եթե $n = 2k + 1$, ապա x_0 -ն էքստրեմումի կետ չէ:

Ապացույց: Հաշվի առնելով 7.5-ը՝ Թեյլորի բանաձևը գրենք մնացորդային անդամի Պեանոյի տեսքով՝

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!} (x - x_0)^{2k} + \alpha \cdot (x - x_0)^{2k}, \quad (7.6)$$

որտեղ $\alpha \rightarrow 0$, երբ $x \rightarrow x_0$:

Այսինքն՝

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2k)}(x_0) + (2k)! \alpha}{(2k)!} \cdot (x - x_0)^{2k} \quad (7.7)$$

Սա նշանակում է, որ $f(x) - f(x_0)$ -ի նշանը համընկնում է $f^{(2k)}(x_0)$ -ի նշանի հետ: Հետևաբար, եթե $f^{(2k)}(x_0) < 0$ ուրեմն $f(x) < f(x_0)$, այսինքն՝ x_0 -ն լոկալ մաքսիմումի կետ է: Նույն կերպ, եթե $f^{(2k)}(x_0) > 0$, ուրեմն $f(x) > f(x_0)$, այսինքն՝ x_0 -ն լոկալ մինիմումի կետ է:

Եթե $n = 2k + 1$, այսինքն՝

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2k)}(x_0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0: (7.8)$$

Այդ դեպքում կստանանք՝

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2k+1)}(x_0) + (2k+1)! \alpha}{(2k+1)!} \cdot (x - x_0)^{2k+1} \quad (7.9)$$

Քանի որ $(x - x_0)^{2k+1}$ -ը x_0 -ից աջ և ձախ նշանը փոխում է, ապա x_0 -ն էքստրեմումի կետ չէ: ■

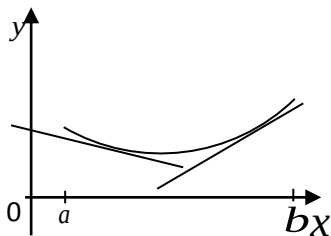
§2. Ֆունկցիայի ուռուցիկություն և գոգավորություն:

Ֆունկցիայի ուռուցիկության բավարար պայմաններ

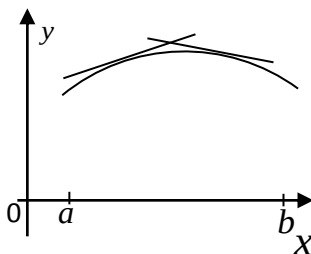
Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a; b)$ միջակայքի ցանկացած կետում, այսինքն՝ ունի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կամայական $M(x; f(x))$, $x \in (a; b)$ կետում գոյություն ունի շոշափող, որը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին:

Սահմանում 7.1: Կասենք $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $(a; b)$ միջակայքում ունի ուռուցիկություն ուղղված դեպի ներքև (վերև), եթե այդ միջակայքում ֆունկցիայի գրաֆիկը ընկած է իր կամայական շոշափողից վերև (ներքև):

Նկար 7.5-ում պատկերված է ուռուցիկությունը դեպի ներքև, իսկ Նկար 7.6-ում՝ ուռուցիկությունը դեպի վերև:



Նկար 7.5



Նկար 7.6

Նշենք, որ մաթեմատիկական գրականության մեջ ուռուցիկությունը դեպի ներքև անվանում են ուռուցիկություն, իսկ ուռուցիկությունը դեպի վերև՝ գոգավոր:

Թեորեմ 7.4: Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան $(a; b)$ միջակայքում ունի երկրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ, և եթե այդ $f''(x)$ երկրորդ կարգի ածանցյալը ամբողջ $(a; b)$ -ում ոչ բացասական է (ոչ դրական է), ապա ֆունկցիայի գրաֆիկը $(a; b)$ -ում ունի ուռուցիկություն դեպի ներքև (ուռուցիկություն դեպի վերև):

Ապացույց: Որոշակիության համար ենթադրենք $f''(x) \geq 0; x \in (a; b)$: Դիցուք $c \in (a; b)$ կամայական կետ է: Պահանջվում է ապացուցել, որ այս դեպքում $y = f(x)$

ֆունկցիայի գրաֆիկը չի գտնվում $M(c; f(c))$ կետով անցնող շոշափողից ներքև: Այդ կետով անցնող շոշափողի հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$Y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c): \quad (7.10)$$

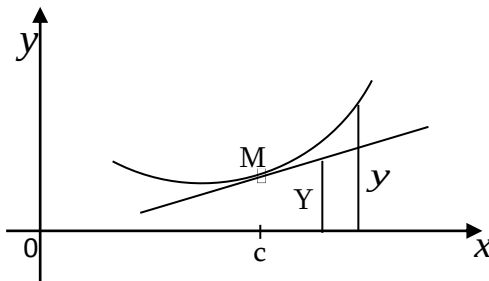
Այնուհետև $y = f(x)$ ֆունկցիան C կետի շրջակայքում ներկայացնենք Թեյլորի բանաձևով՝

$$y = f(x) = f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x - c)}{1!} + \frac{f''(\xi) \cdot (x - c)^2}{2!}, \quad (7.11)$$

որտեղ $\xi \in (c; x)$, իսկ մնացորդային անդամը գրված է Լագրանժի տեսքով:

Օգտվելով 7.10-ից ու 7.11-ից՝ կազմենք $y - Y$ տարբերությունը՝ պարզելու համար նրա նշանը.

$$\begin{aligned} y - Y &= \left(f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x - c)}{1!} + \frac{f''(\xi) \cdot (x - c)^2}{2!} \right) \\ &\quad - (f(c) + f'(c) \cdot (x - c)) = \frac{f''(\xi) \cdot (x - c)^2}{2!}: \quad (7.12) \end{aligned}$$



Նկար 7.7

Այստեղից ակնհայտ է, որ $y - Y \geq 0$, այսինքն՝ $y \geq Y$: Սա նշանակում է, որ ֆունկցիայի գրաֆիկը չի գտնվում նրա ցանկացած կետում տարված շոշափողից ներքև (Նկ. 7.7): ■

Նման ձևով ապացուցվում է նաև այն դեպքը, երբ $f''(x) \leq 0$; $x \in (a; b)$:

Նշենք, որ եթե ամբողջ $(a; b)$ -ում $f''(x) = 0$, $x \in (a; b)$, ապա կստանաք, որ $y = f(x)$ ֆունկցիան գծային է: Սա կնշանակի, որ նրա ուռուցիկությունը կարող ենք ընդունել կամայական՝ ինչպես դեպի վերև, այնպես էլ դեպի ներքև:

Թեորեմ 7.5: Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $f''(c)$ երկրորդ կարգի ածանցյալը: Եթե $f''(c) > 0$ ($f''(c) < 0$), ապա գոյություն ունի c կետի այնպիսի շրջակայք, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ուռուցիկությամբ ուղղված է դեպի ներքև (դեպի վերև):

Ապացույց: Դիտարկենք $f''(c) > 0$ դեպքը, իսկ $f''(c) < 0$ դեպքը կապացուցվի նույն եղանակով: Գրենք c կետի շրջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը: Վերցնենք $n = 2$, իսկ մնացորդային անդամը գրենք Պեանոյի տեսքով:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x - c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x - c)^2}{2!} + \alpha \cdot (x - c)^2,$$

(7.13) որտեղ $\alpha \rightarrow 0$, երբ $x \rightarrow c$:

Նշանակենք՝

$$Y = f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x - c)}{1!}, \quad (7.14)$$

որը $M(c; f(c))$ կետում $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին տարված շոշափողի օրդինատն է: Հետևաբար 7.13-ից կստանանք՝

$$f(x) - Y = \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \alpha \cdot (x-c)^2: \quad (7.15)$$

Ստացանք, որ գոյություն ունի C կետի շրջակայք, որտեղ $f(x) - Y > 0$, այսինքն՝ ֆունկցիայի գրաֆիկը այդ շրջակայքում գտնվում է շոշափողից վերև: Ուրեմն ֆունկցիայի գրաֆիկը ուռուցիկությամբ ուղղված է դեպի ներքև: ■

Օրինակ: Դիտարկենք $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ ֆունկցիան: Նկատենք, որ $f''(x) = 6(x-1)$ կլինի բացասական, երբ $x < 1$: Հետևաբար ֆունկցիայի գրաֆիկը $(-\infty; 1)$ տիրույթում ուռուցիկությամբ ուղղված է դեպի վերև (այսինքն՝ գոգավոր է), իսկ $(1; \infty)$ տիրույթում՝ դեպի ներքև (այսինքն՝ ուռուցիկ է):

§3. Ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետ: Անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ

Սահմանում 7.2: Կասենք $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի $M(c; f(c))$ կետը շրջման կետ է, եթե արացիսների առանցքի վրա գոյություն ունի C կետի այնպիսի շրջակայք, որի աջ ու ձախ կողմերում ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի ուռուցիկության տարբեր ուղղվածություն (Նկ. 7.8):

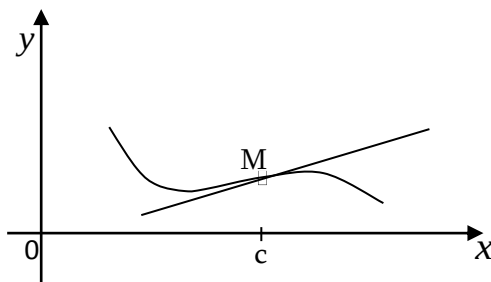
Շրջման կետի անհրաժեշտ պայմանը

Թեորեմ: 7.6: Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի համար $M(c; f(c))$ կետը շրջման կետ է, և այդ կետում գոյություն ունի $f''(x)$ երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալը, ապա $f''(c) = 0$:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, որ $f''(c) \neq 0$: Ըստ նախորդ թեորեմի՝ գոյություն կունենա C կետի այնպիսի շրջակայք, որում ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի որոշակի կողմ ուղղված ուռուցիկություն: Հետևաբար C կետը չէր կարող լինել շրջման կետ: Ստացանք հակասություն, ուրեմն մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ:

Այսպիսով՝ $f''(c) = 0$: ■

Այս թեորեմից պարզ է, որ ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետերը գտնելու համար պետք է լուծել $f''(x) = 0$ հավասարումը, գտնել բոլոր արմատները, այնուհետև լրացուցիչ ուսումնասիրել՝ արդյոք այդ կետերը շրջման կետեր են:



Նկար 7.8

Օրինակ: Դիտարկենք $f(x) = (x-4)^3 + 2$ ֆունկցիան, որի համար $M(4; 2)$ կետը շրջման կետ է: Դժվար չէ համոզվել, որ այդ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը՝ $f''(4) = 0$: Այսինքն՝ անհրաժեշտ պայմանը տեղի ունի:

Շրջման կետի առաջին բավարար պայմանը

Թեորեմ 7.7: Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան որևէ C կետում ունի երկրորդ կարգի ածանցյալ, և այդ կետում $f''(c) = 0$ և, եթե գոյություն ունի C -ի այնպիսի շրջակայք, որ $f''(x)$ երկրորդ կարգի ածանցյալը C կետի տարբեր կողմերում ունի տարբեր նշաններ, ապա C կետը շրջման կետ է:

Ապացույց: Նկատենք, որ $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $M(c; f(c))$ կետում ունի շոշափող, քանի որ $f'(c)$ -ն վերջավոր է: Գրենք C կետի $\delta > 0$ շրջակայքում Թեյլորի բանաձևը: Վերցնենք $n = 1$, իսկ մնացորդային անդամը՝ Լագրանժի տեսքով՝

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(\xi) \cdot (x-c)^2}{2!}, \quad (7.16)$$

որտեղ $\xi \in (c-\delta; c)$ կամ $\xi \in (c; c+\delta)$: Հաշվի առնելով 7.14-ը՝ 7.16-ից կստանանք՝

$$f(x) - Y = \frac{f''(\xi) \cdot (x-c)^2}{2!} \quad (7.17)$$

Ըստ թեորեմի պայմանի, քանի որ $f''(x)$ -ը C -ի աջ և ձախ մասերում ունի տարբեր նշաններ, հետևաբար 7.17-ից երևում է, որ տարբեր նշաններ ունի $f'(x)-Y$ -ը: Այսինքն՝ ֆունկցիայի գրաֆիկը $(c-\delta; c)$ և $(c; c+\delta)$ միջակայքերում գտնվում է շոշափողի տարբեր կողմերում: Հետևաբար այն ունի տարբեր կողմեր ուղղված ուռուցիկություն, իսկ սա էլ նշանակում է, որ C կետը շրջման կետ է: ■

Օրինակ: Դիտարկենք $f(x) = (x-5)^3$ ֆունկցիան: Ակնհայտ է, որ $f''(5) = 0$, իսկ $f''(x) < 0$, երբ $x \in (-\infty; 5)$ և $f''(x) > 0$, երբ $x \in (5; +\infty)$: Այսինքն՝ $M(5; 0)$ կետը ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետ է:

Շրջման կետի երկրորդ բավարար պայման

Թեորեմ 7.8: Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան որևէ C կետում ունի երրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ և այդ կետում $f''(c) = 0$, իսկ $f'''(c) \neq 0$, ապա $M(c; f(c))$ կետը ֆունկցիայի գրաֆիկի համար շրջման կետ է:

Ապացույց: Քանի որ $f'''(c) \neq 0$, այսինքն՝ $((f''(x))'(c)) \neq 0$, ուրեմն $f''(x)$ ֆունկցիան C կետում կամ աճող է կամ նվազող: Բայց մյուս կողմից, քանի որ $f''(c) = 0$, ուրեմն կգտնվի C կետի այնպիսի շրջակայք, որում $f''(x)$ -ը C -ի աջ ու ձախ կողմերում կունենա տարբեր նշանի արժեք-

ներ, որն էլ նշանակում է, որ $M(c; f(c))$ կետը շրջման կետ է: ■

Օրինակ: Դիտարկենք $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 7$ ֆունկցիան:

Պարզ է, որ $f''(3) = 0$, իսկ $f'''(3) \neq 0$: Հետևաբար $M(3; f(3)) = M(3; -2)$ կետը ֆունկցիայի գրաֆիկի համար շրջման կետ է:

§4. Շրջման կետի երրորդ բավարար պայմանը

Թեորեմ 7.9: Դիցուք $n \geq 2$ որևէ զույգ թիվ է, իսկ $y = f(x)$ ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի որևէ C կետի շրջակայքում ունի մինչև $(n+1)$ -րդ կարգի ածանցյալները: Ընդ որում՝

$$f^{(2)}(c) = f^{(3)}(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0, \quad f^{(n+1)}(c) \neq 0: \quad (7.18)$$

Այդ դեպքում $M(c; f(c))$ կետը ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետ է:

Ապացույց: Քանի որ $n = 2$ դեպքում թեորեմը համընկնում է նախորդի՝ թեորեմ 7.8-ի հետ, ապա ապացույցը կատարենք $n \geq 4$ դեպքի համար: Դրա համար $f''(x)$ ֆունկցիան ներկայացնենք Թեյլորի բանաձևով, իսկ մնացորդային անդամը՝ Լագրանժի տեսքով՝

$$f^{(2)}(x) = f^{(2)}(c) + \frac{f^{(3)}(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3}$$

$$+ \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!} (x-c)^{n-2} : \quad (7.19)$$

Օգտվելով 7.18 պայմաններից՝ կստանանք՝

$$f^{(2)}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!} (x-c)^{n-2}, \quad (7.20)$$

որտեղ ξ -ն գտնվում է X -ի և C -ի միջև: Քանի որ $f^{(n+1)}(c) \neq 0$, ապա $f^{(n)}(x)$ ֆունկցիան C կետում կամ աճում է (եթե $f^{(n+1)}(x) > 0$) կամ նվազում (եթե $f^{(n+1)}(x) < 0$): Բացի դրանից՝ քանի որ $f^{(n)}(c) = 0$, ուրեմն երկու դեպքում էլ գոյություն ունի C կետի այնպիսի շրջակայք, որտեղ C կետի տարբեր կողմերում $f^{(n)}(x)$ -ը ունի տարբեր նշաններ: Հետևաբար 7.20-ից պարզ կդառնա, որ $f^{(2)}(x)$ ֆունկցիան C կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքի կամայական X -ի համար C կետի աջ և ձախ կողմերում ունի տարբեր նշան: Այսպիսով՝ $M(c; f(c))$ կետը շրջման կետ է: ■

Օրինակ: Դիտարկենք $f(x) = \frac{(x-2)^5(x+4)}{5}$ ֆունկցիան:

Պարզագույն հաշվարկներով կարելի է համոզվել, որ $f'(2) = f''(2) = f'''(2) = f^{(4)}(2) = 0$, սակայն $f^{(5)}(2) \neq 0$: Հետևաբար $M(2; 0)$ կետը ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետ է:

§5. Ֆունկցիայի գրաֆիկի ասիմպտոտներ

Սահմանում 7.3: Կասենք $x = a$ ուղիղը $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի համար ուղղաձիգ ասիմպտոտ է, եթե տեղի ունի հետևյալ հավասարություններից գոնե մեկը՝

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty: \end{aligned} \quad (7.21)$$

Օրինակ: $y = \frac{1}{x-2}$ ֆունկցիայի համար $x = 2$ ուղիղը ուղղաձիգ ասիմպտոտ է, քանի որ $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty$, իսկ

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty:$$

Սահմանում 7.4: Կասենք $y = kx + b$ ուղիղը $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի համար թեք ասիմպտոտ է, եթե

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0, \quad (7.22)$$

կամ՝

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - b) = 0: \quad (7.23)$$

Թեորեմ 7.10: Որպեսզի $y = kx + b$ ուղիղը $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի համար լինի թեք ասիմպտոտ x -ը $+\infty$ -ի կամ $-\infty$ -ի ձգտելիս անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան հետևյալ սահմանները՝

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b, \quad (7.24)$$

կամ՝

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = b: \quad (7.25)$$

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Որոշակիության համար դիտարկենք $x \rightarrow +\infty$ դեպքը: Դիցուք $y = kx + b$ ուղիղը $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի համար թեք ասիմպտոտ է:

Հաշվի առնելով 7.22-ը՝ $\frac{f(x)}{x}$ -ը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - kx - b}{x} + k + \frac{b}{x}: \text{ Այստեղից կստանանք, որ}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) - kx - b}{x} + k + \frac{b}{x} \right) = k, \text{ իսկ}$$

$$f(x) - kx = (f(x) - kx - b) + b \text{ նույնությունից պարզ}$$

կդառնա, որ.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((f(x) - kx - b) + b) = b: \quad \blacksquare$$

Բավարարություն: Դիցուք տեղի ունի 7.25-ը: Այդ դեպքում $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$ հավասարությունից պարզ կլինի, որ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0: \quad \blacksquare$$

Սահմանում 7;5: Կասենք $y = b$ ուղիղը $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի համար հորիզոնական ասիմպտոտ է, եթե տեղի ունի հետևյալ հավասարություններից գոնե մեկը՝

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ կամ } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b: \quad (7.26)$$

Օրինակներ

1. Դիտարկենք $f(x) = 2x - \frac{1}{x+3}$ ֆունկցիան: Քանի որ

գոյություն ունի $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{2x - \frac{1}{x+3}}{x} \right) = 2$, ուրեմն

$k=2$: b -ն գտնելու համար հաշվենք հետևյալ սահմանը՝
 $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx)$, որտեղ $k=2$: Կստանանք՝

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(2x - \frac{1}{x+3} - 2x \right) = 0: \quad \text{Հետևաբար}$$

$y = 2x$ ուղիղը թեք ասիմպտոտ է:

Ակնհայտ է նաև, որ $x = -3$ ուղիղը ուղղաձիգ ասիմպտոտ է:

2. Դիտարկենք $f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{4x^2 + 6}$ ֆունկցիան: Հեշտ է

նկատել, որ $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3x^2 - 5x}{4x^2 + 6} = \frac{3}{4}$: Հետևաբար $y = \frac{3}{4}$

ուղիղը հորիզոնական ասիմպտոտ է:

§6. Ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման հիմնական սխեման

Հաշվի առնելով այս գլխում շարադրածը՝ նկարագրենք բոլոր այն քայլերի հերթականությունը, որոնց կատարմամբ կարող ենք հետազոտել ֆունկցիան և կառուցել գրաֆիկը:

1. Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

2. Գտնել ֆունկցիայի փոփոխման տիրույթը:
3. Գտնել ֆունկցիայի գրաֆիկի հատման կետերը կոորդինատային առանցքների հետ:
4. Գտնել աճման և նվազման միջակայքերը:
5. Գտնել կրիտիկական կետերը և պարզել, թե որոնք են էքստրեմումի կետեր:
6. Որոշել էքստրեմումի կետերում ֆունկցիայի արժեքները
7. Գտնել ուռուցիկության ու գոգավորության տիրույթները և շրջման կետերը:
8. Պարզել՝ ֆունկցիան ունի արդյոք ասիմպտոտներ, և գտնել դրանց հավասարումները:

Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար

1. Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները նշված միջակայքում:

1.1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4; \quad x \in [-2; 4],$

1.2) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4; \quad x \in [-1; 5],$

1.3) $f(x) = 3x^2 + x - 2; \quad x \in [-3; 2],$

1.4) $f(x) = e^x - 4; \quad x \in [-2; 1],$

1.5) $f(x) = \sin x^2 + \cos x; \quad x \in [-2; 0]:$

2. Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը:

2.1) $f(x) = x \cdot 2^x + x^2 + 1,$

2.2) $f(x) = (x-3)(x+1)^2,$

2.3) $f(x) = (x+9)^3(2x-1),$

2.4) $f(x) = \frac{(x^2-2)}{(x+2)^2},$

$$2.5) f(x) = \frac{(2x-1)}{x^2-3x+2},$$

$$2.6) f(x) = 2 + \frac{3}{x^2-2x},$$

$$2.7) f(x) = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{2x+3},$$

$$2.8) f(x) = x\sqrt{3x^2-1},$$

$$2.9) f(x) = \sqrt{(x+2)^3} - \frac{x}{3x-4}, \quad 2.10) f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2+3}}:$$

3. Գտնել ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը:

$$3.1) f(x) = x \cdot 2^x + x^2 - 3,$$

$$3.2) f(x) = (2x-5)(x-1)^2,$$

$$3.3) f(x) = (x+2)^2(1-3x),$$

$$3.4) f(x) = \frac{(x-5)}{(x^2+3)^2},$$

$$3.5) f(x) = 2^x \cdot x^2 - 4,$$

$$3.6) f(x) = (2x^2+1)(x-3),$$

$$3.7) f(x) = \frac{(x-2)}{(2-5x)},$$

$$3.8) f(x) = x^3 - 2x^2 + 7,$$

$$3.9) f(x) = x - 3\sin 2x,$$

$$3.10) f(x) = \cos^3(x+3):$$

4. Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և էքստրեմալ արժեքները:

$$4.1) f(x) = \frac{2x+x^2-1}{1-x},$$

$$4.2) f(x) = \frac{(5x-2)}{(x-3)^2},$$

$$4.3) f(x) = (\sqrt{3x+x^2-1})(2-x), \quad 4.4) f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2},$$

$$4.5) f(x) = \left(\frac{3+x}{2-x}\right)^4,$$

$$4.6) f(x) = \frac{(3x-5)^2}{(2x+3)^2},$$

$$4.7) f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 3},$$

$$4.8) f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 4},$$

$$4.9) f(x) = 2x^3 + x^2 - 5, \quad 4.10) f(x) = (5x - 2)^3 - \frac{x^2}{3} :$$

5. Գտնել ֆունկցիայի ասիմպտոտները:

$$5.1) f(x) = \frac{25x + x^2 - 7}{3 - 2x^2}, \quad 5.2) f(x) = \frac{(4x^3 - 2)}{(x - 3)^3},$$

$$5.3) f(x) = \frac{x - 2}{1 - 3x^2}, \quad 5.4) f(x) = \frac{(2x^2 + 5)}{(x - 2)^4},$$

$$5.5) f(x) = \frac{x^3 \cdot \arctg x}{2x^3 + 3}, \quad 5.6) f(x) = \frac{(2x^2 - 1)}{(x + 2)^2},$$

$$5.7) f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{3x^2 - 1}, \quad 5.8) f(x) = 7x - \sin^2 x,$$

$$5.9) f(x) = \frac{x \cdot (2x + 41)}{5x^2 + 13}, \quad 5.10) f(x) = \frac{7x^3 - 5}{2x^2 + 3} :$$

6. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը, նախապես հետազոտելով §6 -ում նշված քայլերով:

$$6.1) f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{3 - 2x}, \quad 6.2) f(x) = \frac{(4x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 1)},$$

$$6.3) f(x) = (2x - 3)\sqrt{5x}, \quad 6.4) f(x) = \sqrt{4x + 5} \cdot (3x + 7),$$

$$6.5) f(x) = \frac{(2x + 3)}{\sqrt{3x}}, \quad 6.6) f(x) = \frac{\sqrt{4x + 5}}{(3x + 7)},$$

$$6.7) f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2}, \quad 6.8) f(x) = \sqrt{5x^2 + 3x^4},$$

$$6.9) f(x) = \left(\frac{2 + x}{3 - x} \right)^4, \quad 6.10) f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 4x^2}}{x} :$$

ԳԼՈՒԽ 8

ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ, ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ԿԱՆՈՆՆԵՐ

§1. Ֆունկցիայի նախնական, անորոշ ինտեգրալ

Սահմանում 8.1: Կասենք $F(x)$ ֆունկցիան տված $(a; b)$ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական ֆունկցիա է, եթե այդ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում $F(x)$ -ը դիֆերենցելի է, և տեղի կունենա

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a; b) \quad (8.1)$$

հավասարությունը: Ընդ որում՝ $[a; b]$ փակ միջակայքի a կետում 8.1 հավասարությունը ընկալվում է հետևյալ կերպ՝ $F'(a+0) = f(a)$, իսկ b կետում՝ $F'(b-0) = f(b)$:

Օրինակ: $f(x) = x^2$ -ի համար $F(x) = \frac{x^3}{3}$ -ը նախնական է քանի որ $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$:

Նման ձևով $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ -ի համար նախնական կլինի $F(x) = \arcsin x$ -ը:

Ակնհայտ է, որ, եթե $f(x)$ ֆունկցիայի համար $F(x)$ -ը նախնական է տրված միջակայքում, ապա կամայական C

իրական թվի դեպքում $F(x) + C$ -ն նույնպես նախնական է նույն միջակայքում:

Իրոք, եթե $F'(x) = f(x)$, ապա ակնհայտ է, որ

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x): (8.2)$$

Թեորեմ 8.1: Եթե $F(x)$ -ը տրված միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի համար որևէ նախնական է, ապա այդ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի կամայական այլ $\phi(x)$ նախնական ֆունկցիա կունենա $\phi(x) = F(x) + C$ տեսքը, որտեղ C -ն կամայական հաստատուն է:

Ապացույց: Դիցուք $\phi(x)$ -ը կամայական նախնական է $f(x)$ -ի համար: Այդ դեպքում այդ միջակայքի ցանկացած x կետում $\phi'(x) = f(x)$, հետևաբար՝

$$(\phi(x) - F(x))' = \phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0: (8.3)$$

Այսպիսով՝ կատանանք, որ $\phi(x) - F(x) = C$, կամ, որ նույնն է.

$$\phi(x) = F(x) + C: \quad \blacksquare (8.4)$$

Այս թեորեմի ապացույցից բխում է, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան ունի նախնական, ապա այն ունի նախնականների բազմություն:

Սահմանում 8.2: $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական ֆունկցիաների բազմությունը նշանակում են $\int f(x) dx$ սիմվոլով և անվանում $f(x)$ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալ: Այսպիսով՝

$$\int f(x) dx = F(x) + C : \quad (8.5)$$

Անորոշ ինտեգրալի սահմանումից անմիջապես կարող ենք ստանալ հետևյալ հատկությունները:

$$1. \int F'(x) dx = \int dF(x) = F(x) + C : \quad (8.6)$$

Այսինքն՝ $\int$ -ի նշանն ու d -ն կրճատվում են, մնում է միայն $F(x)$ -ը, որին ավելանում է C հաստատունը:

$$2. \int f(x) dx = d(F(x) + C) = d(F(x)) + d(C) \\ = F'(x) dx + 0 = f(x) dx : (8.7)$$

Այս դեպքում d -ն և $\int$ նշանը կրճատվում են, և մնում է միայն $f(x) dx$ -ը:

3. Եթե $F(x)$ -ը $f(x)$ -ի համար նախնական է, ապա

$k \cdot f(x)$ -ի համար, որտեղ k -ն կամայական թիվ է, նախնական կլինի $k \cdot F(x)$ -ը:

Ապացույց: Քանի որ $F'(x) = f(x)$, ուստի $(k \cdot F(x))' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$, որն էլ նշանակում է, որ

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot F(x) + k \cdot C = k \cdot (F(x) + C) = k \cdot \int f(x) dx : (8.8)$$

Այսինքն՝ հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս հանել ինտեգրալի նշանի տակից:

4. Եթե $F_1(x)$ -ը նախնական է $f(x)$ -ի համար, իսկ $F_2(x)$ -ը նախնական է $g(x)$ -ի համար, ապա $F_1(x) \pm F_2(x)$ -ը կլինի նախնական $f(x) \pm g(x)$ -ի համար, որովհետև.

$$\left(F_1(x) \pm F_2(x) \right)' = \left(F_1(x) \right)' \pm \left(F_2(x) \right)' = f(x) \pm g(x): (8.9)$$

Հետևաբար տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = F_1(x) \pm F_2(x) + C = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

§2. Անորոշ ինտեգրալների հիմնական աղյուսակ

$$1. \int 0 dx = C,$$

$$2. \int 1 dx = x + C,$$

$$3. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad (m \neq -1),$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C,$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$6. \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C,$$

$$7. \int \cos(x) dx = \sin(x) + C,$$

$$8. \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\operatorname{ctg}(x) + C,$$

$$9. \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg}(x) + C,$$

$$10. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + C,$$

$$11. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin}(x) + C,$$

$$12. \int sh(x) dx = ch(x) + C,$$

$$13. \int ch(x) dx = sh(x) + C,$$

$$14. \int \frac{1}{sh^2(x)} dx = -cth(x) + C,$$

$$15. \int \frac{1}{ch^2(x)} dx = th(x) + C,$$

$$16. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C_1 = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C_2,$$

$$17. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad (a \neq 0)$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C, \quad (a \neq 0),$$

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C_1 = -\arccos \frac{x}{a} + C_2, \quad (a > 0)$$

Օրինակ: Օգտվելով բերված աղյուսակից՝ հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int (2^x + 7x^3 - 4\sin(x)) dx$$

Լուծում: Օգտվելով 5-րդ, 3-րդ, 6-րդ բանաձևերից և հիմնական հատկություններից՝ կստանանք՝

$$\int (2^x + 7x^3 - 4\sin(x)) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{7}{4} x^4 + 4\cos(x) + C:$$

§3. Ինտեգրում փոփոխականի փոխարինման միջոցով

Թեորեմ 8.3: Դիցուք $F(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ -ի համար նախնական է, իսկ $x = \varphi(t)$ -ն դիֆերենցելի է, և $E(\varphi) \subset D(f)$, այդ դեպքում $F(\varphi(t))$ -ն կլինի նախնական $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ ֆունկցիայի համար:

Ապացույց: Իրոք, քանի որ $F'(x) = f(x)$, հետևաբար ըստ բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնի՝ կարող ենք գրել, որ.

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot (\varphi(t))' = f(\varphi(t)) \cdot (\varphi(t))':$$

Այսպիսով՝ կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t)) \cdot d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C: \quad \blacksquare \quad (8.10)$$

Օրինակ: Գտնել նախնականը:

$$a) \int \sin^4(x) \cos(x) dx,$$

Լուծում: Նշանակենք $\sin(x) = t$, կստանանք՝

$$\begin{aligned} \int \sin^4(x) \cos(x) dx &= \int \sin^4(x) \sin'(x) dx \\ &= \int \sin^4(x) d\sin(x) \\ &= \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^5(x)}{5} + C: \end{aligned}$$

$$բ) \int e^{x^3} x^2 dx$$

Լուծում: Նշանակենք $x^3 = t$ և ինտեգրալը ձևափոխենք հետևյալ կերպ.

$$\int e^{x^3} x^2 dx = \int e^{x^3} (x^3)' \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

§4. Մասերով ինտեգրում

Դիցուք $u = f(x)$ և $v = g(x)$ ֆունկցիաներն ունեն
 $u' = f'(x)$, $v' = g'(x)$ անընդհատ ածանցյալներ: Այդ
դեպքում ակնհայտ է, որ $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$: Հետևաբար
կարող ենք գրել, որ.

$$\int d(u \cdot v) = \int u \cdot dv + \int v \cdot du,$$

որտեղից կստանանք.

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du: \quad (8.11)$$

Այս բանաձևն անվանում են մասերով ինտեգրման
բանաձև:

Օրինակներ

ա) $\int x^2 \cdot \ln x \cdot dx = \frac{1}{3} \int \ln x \cdot d x^3$. Ընդունենք $u = \ln x$, իսկ

$v = x^3$: Կիրառելով 8.11 բանաձևը՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \ln x \cdot dx &= \frac{1}{3} \int \ln x \cdot d x^3 = \frac{1}{3} \left(x^3 \cdot \ln x - \int x^3 \cdot d \ln x \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(x^3 \cdot \ln x - \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{3} \left(x^3 \cdot \ln x - \int x^2 \cdot dx \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(x^3 \cdot \ln x - \frac{x^3}{3} \right) + C: \end{aligned}$$

բ) $\int \arcsin x \cdot dx$. Ընդունենք $u = \arcsin x$, $v = x$: Կիրա-
ռելով մասերով ինտեգրման 8.11 բանաձևը՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x \cdot d x &= x \cdot \arcsin x - \int x \cdot d(\arcsin x) = \\
&= x \cdot \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \cdot \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\
&= x \cdot \arcsin x + \int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

§5. Ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրում

Ռացիոնալ ֆունկցիաներից դիտարկենք հետևյալ պարզագույն կոտորակները՝

$$\frac{A}{x-a}; \quad \frac{A}{(x-a)^n}; \quad \frac{M \cdot x + N}{x^2 + px + q}; \quad (8.12)$$

Նկարագրենք թե ինչպես կարելի է գտնել այդ տեսքի ֆունկցիաների նախնականները՝

$$\text{ա) } \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln(x-a) + C$$

$$\text{բ) } \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = A \cdot \frac{(x-a)^{-n+1}}{1-n} + C,$$

$$\text{գ) } \int \frac{M \cdot x + N}{x^2 + px + q} dx$$

Այս գ տեսքի ինտեգրալը հաշվելու համար դիտարկենք երկու դեպք: Առաջին՝ ենթադրենք $x^2 + px + q = 0$ իրական արմատներ չունի, և երկրորդ դեպք, երբ արմատներ ունի:

Առաջին դեպքում ձևափոխենք $x^2 + px + q$ արտահայտությունը՝ առանձնացնելով լրիվ քառակուսի, կստանանք՝

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right):$$

Քանի որ արմատներ չունի,

$$\text{ուրեմն } \left(q - \frac{p^2}{4}\right) > 0, \text{ հետևաբար այն կարող ենք ներկայացնել}$$

ինչ-որ թվի քառակուսու տեսքով:

$$\text{Այսպիսով, եթե նշանակենք } \left(x + \frac{p}{2}\right) = t, \quad \text{իսկ}$$

$$\left(q - \frac{p^2}{4}\right) = a^2, \text{ ապա } x^2 + px + q \text{ -ը կարող ենք գրել հետևյալ}$$

տեսքով՝ $x^2 + px + q = t^2 + a^2$: Իսկ ինտեգրալը կունենա հետևյալ ներկայացումը՝

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{M \cdot t + \left(N - M \frac{p}{2}\right)}{t^2 + a^2} dt \\ &= \int \frac{M \cdot t}{t^2 + a^2} dt + \int \frac{\left(N - M \frac{p}{2}\right)}{t^2 + a^2} dt = \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) \\ &\quad + \left(N - M \frac{p}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C: \end{aligned} \quad (8.13)$$

Ստացված արտահայտության մեջ տեղադրելով

$$t = \left(x + \frac{p}{2}\right), \quad a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \text{ և կատարելով որոշ ձևափոխություններ՝ վերջնականապես կստանաք.}$$

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \arctg \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C : \quad (8.14)$$

Երկրորդ դեպքում, երբ $x^2 + px + q = 0$ հավասարումն ունի իրական արմատներ, ապա $x^2 + px + q$ -ը վերլուծելով արտադրիչների՝ պահանջվող ինտեգրալը կներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Mx + N}{(x - x_1)(x - x_2)} dx \\ &= \frac{1}{(x_1 - x_2)} \int (Mx + N) \left(\frac{1}{(x - x_1)} - \frac{1}{(x - x_2)} \right) dx, \end{aligned} \quad (8.15)$$

որն էլ հեշտությամբ կարող ենք հաշվել՝ բերելով հայտնի տեսքերի: Այստեղ x_1 -ն ու x_2 -ը $x^2 + px + q = 0$ հավասարման արմատներն են: Այսպիսով՝ շարունակելով ձևափոխությունը՝ 8.15-ը կներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \frac{M}{(x_1 - x_2)} \left[\int \frac{xdx}{(x - x_1)} - \int \frac{xdx}{(x - x_2)} \right] + \\ &+ \frac{N}{(x_1 - x_2)} [\ln|x - x_1| - \ln|x - x_2|] \\ &= \frac{M}{(x_1 - x_2)} [x_1 \ln|x - x_1| - x_2 \ln|x - x_2|] \\ &+ \frac{N}{(x_1 - x_2)} [\ln|x - x_1| - \ln|x - x_2|] + C : \end{aligned} \quad (8.16)$$

Կանոնավոր կոտորակների ինտեգրումը

Սահմանում 8.3: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ տեսքի կոտորակը, որտեղ $P(x)$ -ն

ու $Q(x)$ -ը հանրահաշվական բազմանդամներ են, անվանում են ռացիոնալ կոտորակ:

Ռացիոնալ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ կոտորակը անվանում են կանոնավոր,

եթե $P(x)$ բազմանդամի կարգը ցածր է $Q(x)$ -ի կարգից, հակառակ դեպքում այն անվանում են անկանոն կոտորակ:

Դիտարկենք $\frac{P(x)}{Q(x)}$ տեսքի կանոնավոր կոտորակ, որտեղ

$Q(x)$ -ը իրական գործակիցներ ունեցող բազմանդամ է: Հանրահաշվից հայտնի է, որ $Q(x)$ -ը վերլուծվում է արտադրիչների հետևյալ տեսքով՝

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_m)^{k_m} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \cdots (x^2 + p_nx + q_n)^{m_n}, \quad (8.17)$$

որտեղ $k_1, k_2, \dots, k_m$ և $m_1, m_2, \dots, m_n$ բնական թվեր են և $k_1 + k_2 + \dots + k_m + 2(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$ -ը հավասար է $Q(x)$ -ի բազմանդամի աստիճանին: Այս դեպքում $\frac{P(x)}{Q(x)}$ -ը կներկայացվի հետևյալ տեսքի պարզագույն կոտորակների գումարի տեսքով՝

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} \\
&+ \frac{A_{21}}{(x-a_2)} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} \\
&\dots + \frac{A_{m1}}{(x-a_m)} + \frac{A_{m2}}{(x-a_m)^2} + \dots + \frac{A_{mk_m}}{(x-a_m)^{k_2}} \\
&+ \frac{M_{11}x + N_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)} + \frac{M_{12}x + N_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{1m_1}x + N_{1m_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}} \\
&+ \frac{M_{21}x + N_{21}}{(x^2 + p_2x + q_2)} + \frac{M_{22}x + N_{22}}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots + \frac{M_{2m_2}x + N_{2m_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2}} \\
&\dots + \frac{M_{m_n1}x + N_{m_n1}}{(x^2 + p_nx + q_n)} + \frac{M_{m_n2}x + N_{m_n2}}{(x^2 + p_nx + q_n)^2} + \dots + \frac{M_{m_nm_n}x + N_{m_nm_n}}{(x^2 + p_nx + q_n)^{m_n}} : (8.18)
\end{aligned}$$

Նշենք, որ $\frac{M_mx + N_m}{(x^2 + px + q)^m}$ տեսքի արտահայտությունների

ինտեգրումը կատարվում է անդրադարձ բանաձևի օգնությամբ, որի ապացույցը չենք բերի:

Օրինակ՝

$$\frac{3x^2 + 2x + 7}{(x-3)(x^2 + 2)^2} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 2)} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2} : \quad (8.19)$$

A, B, C, D, E անհայտները գտնելու համար 8.19-ի աջ մասը բերենք ընդհանուր հայտարարի և համարիչը հավասարեցնենք ձախ մասի համարիչին: Արդյունքում կստանանք հինգ անհայտով հինգ զծային հավասարումների համակարգ՝

$$3x^2 + 2x + 7 = A(x^2 + 2)^2 + (Bx + C)(x - 3)(x^2 + 2) + (Dx + E)(x - 3) : (8.20)$$

Այս հավասարումից կստանանք հետևյալ համակարգը, որը լուծել դժվար չէ:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3B + C = 0 \\ 2A + 2B - 3C + D = 3 \\ -6B + 2C - 3D + E = 2 \\ 4A - 6C - 3E = 7 \end{cases} \quad (8.21)$$

Վերջում գտնված արժեքները տեղադրելով 8.19-ի մեջ՝ կկատարենք ինտեգրում:

§6. Եռանկյունաչափական արտահայտությունների ինտեգրումը

Դիցուք $R(\sin x, \cos x)$ -ը $\sin x$ -ից և $\cos x$ -ից կախված արտահայտություն է: Նմանօրինակ արտահայտությունների ինտեգրումը հնարավոր է իրականացնել $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; $(-\pi < x < \pi)$ նշանակումով: Օգտվելով հայտնի բանաձևերից՝

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

Կստանանք՝ $x = 2 \arctg(t)$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$:

Կան դեպքեր, երբ կարելի է կատարել ավելի հարմար նշանակումներ:

1. Եթե $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$,

ապա հարմար է նշանակել $\cos x = t$:

2. Եթե $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$,

ապա կատարում են $\sin x = t$ նշանակումը:

3. Եթե $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$,

ապա նշանակում են $\operatorname{tg} x = t$:

Օրինակներ

Գտնել նախնականները:

1) $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, dx$

Նշանակելով $\cos x = t$ ՝ կստանանք՝

$$x = \arccos t; \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} : \text{ Հետևաբար՝}$$

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^4 x \, dx =$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \sqrt{(1 - \cos^2 x)} \cos^4 x \, dx =$$

$$= -\int (1 - t^2) \sqrt{(1 - t^2)} \cdot t^4 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)}} =$$

$$= -\int t^4 dt + \int t^6 dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C :$$

2) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 3}$

Նշանակելով $tg \frac{x}{2} = t$ ՝ կստանանք $x = 2arctgt$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$:

Օգտագործելով հայտնի $\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$,

$\cos x = \frac{1-tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ բանաձևերը՝ ինտեգրալը կարող ենք

հաշվել հետևյալ կերպ՝

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 3} &= \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \right)} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{2t - 1 + t^2 + 3 + 3t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4} \right)^2} = : \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \frac{4 \left(t + \frac{1}{4} \right)}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \frac{4tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{7}} + C$$

3) $\int \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$. Նշանակենք $tg x = t$: Կստանանք

$x = arctgt$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$: Շարունակելով ինտեգրալի համար՝

կունենանք՝

$$\int \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x} dx = \int \frac{1 + \cos^2 x - 1}{1 + \cos^2 x} dx = \int dx - \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} =$$

$$= x - \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{1}{1+t^2}\right)} = x - \int \frac{dt}{t^2+2} = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{tgx}{\sqrt{2}} + C:$$

Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար

1. Օգտվելով ինտեգրման բանաձևերից՝ գտնել ինտեգրալները:

$$1.1) \int (4x - x^3)^2 dx, \quad 1.2) \int x^5 (2x^2 - 3x)^3 dx,$$

$$1.3) \int (3x^2 + 5x^3)(2-x)dx, \quad 1.4) \int \frac{(2x^4 - 3x^3)^2}{x} dx,$$

$$1.5) \int \left(\frac{5x + x^3}{3x} \right)^2 dx, \quad 1.6) \int (x^5 + 2)(6x^3 - 5x + 3)dx,$$

$$1.7) \int \left(\frac{8}{x^2} - \frac{7}{x^3} + \frac{2}{3+x^2} \right) dx, \quad 1.8) \int \frac{x^3}{2x^2 + 5} dx,$$

$$1.9) \int (9x + x^2) \sqrt{x^2} \sqrt{x} dx, \quad 1.10) \int \left(\frac{2}{x^2} + 13x \right) \sqrt[3]{x^5} dx,$$

$$1.11) \int \left(\frac{\sqrt{x^2} \sqrt{x} + 4x}{x} \right) dx, \quad 1.12) \int \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} \right) dx,$$

$$1.13) \int (4^{2x} + x^5) dx, \quad 1.14) \int (5^{3x} + 6^x)^2 dx,$$

$$1.15) \int \left(\frac{9}{3-2x^2} \right) dx, \quad 1.16) \int \frac{7}{\sqrt{8x-5}} dx,$$

$$1.17) \int \left(\frac{1}{\sqrt{7+3x^2}} \right) dx, \quad 1.18) \int \frac{4}{\sqrt{5x^2-3}} dx,$$

$$1.19) \int \left(\frac{3}{x^2 - 5x + 6} \right) dx, \quad 1.20) \int \frac{6}{x^2 - 3x + 2} dx,$$

$$\begin{array}{ll}
1.21) \int \left(\frac{4x}{(x+2)(x-5)} \right) dx, & 1.22) \int \frac{7}{(x^2+2)(x^2-3)} dx, \\
1.23) \int \sin^2(3x) dx, & 1.24) \int \cos^2(5x) dx, \\
1.25) \int \sin(4x) \cdot \cos(2x) dx, & 1.26) \int \cos(5x) \cdot \sin x dx, \\
1.27) \int \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx, & 1.28) \int (1 - \cos(4x)) dx, \\
1.29) \int \frac{(1+e^x)^2}{(1+e^{2x})} dx, & 1.30) \int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos x}:
\end{array}$$

2. Մասերով ինտեգրում

$$\begin{array}{ll}
2.1) \int x \cdot \ln x \cdot dx, & 2.2) \int x \cdot \sin x \cdot dx, \\
2.3) \int x \cdot \sin^2 x \cdot dx, & 2.4) \int x \cdot \cos^2 x \cdot dx, \\
2.5) \int x^3 \cdot e^{-x^2} \cdot dx, & 2.6) \int x \cdot e^{-x} \cdot dx, \\
2.7) \int x^2 \cdot \sin x \cdot dx, & 2.8) \int x^2 \cdot \cos x \cdot dx, \\
2.9) \int \arcsin x \cdot dx, & 2.10) \int \arccos x \cdot dx, \\
2.11) \int \arctg \sqrt{x} \cdot dx, & 2.12) \int x \cdot \arctg x \cdot dx:
\end{array}$$

3. Ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրում

$$\begin{array}{ll}
3.1) \int \frac{(x+2)}{(2x-1)(3x+2)} \cdot dx, & 3.2) \int \frac{(x+2)}{(2x-1)(3x+2)} \cdot dx, \\
3.3) \int \frac{(3x-5)}{(4x+1)(x-2)} \cdot dx, & 3.4) \int \frac{(x+2)}{(2x-1)(3x+2)} \cdot dx,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 3.5) \int \frac{(2x^2+1)}{(x+2)^2(x+3)} \cdot dx, & 3.6) \int \frac{(x-1)}{(x+3)(x+2)^2} \cdot dx, \\
 3.7) \int \frac{(x+5)}{(x-2)^2(x-7)} \cdot dx, & 3.8) \int \frac{3}{(x^4-1)} \cdot dx, \\
 3.9) \int \frac{5}{(x^2-4x+4)(x-3)} \cdot dx, & 3.10) \int \frac{8}{(x^3-1)} \cdot dx:
 \end{array}$$

4. Եռանկյունաչափական արտահայտությունների ինտեգրում

$$\begin{array}{ll}
 4.1) \int \sin^3 x \cdot dx, & 4.2) \int \cos^5 x \cdot dx, \\
 4.3) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} \cdot dx, & 4.4) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} \cdot dx, \\
 4.5) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 3\sin x + 2} \cdot dx, & 4.6) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 6\cos x + 5} \cdot dx, \\
 4.7) \int \frac{5}{\cos^4 x} \cdot dx, & 4.8) \int \frac{6}{\sin^4 x} \cdot dx, \\
 4.9) \int \frac{3\sin x \cdot \cos x}{\cos x + \sin x} \cdot dx, & 4.10) \int \frac{7}{(3 + \sin x)\cos x} \cdot dx:
 \end{array}$$

ԳԼՈՒԽ 9

ՈՐՈՇՅԱԼ ԵՎ ԱՆԻՄԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§1. Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը: Ինտեգրելիության անհրաժեշտ պայմանը

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a; b]$ հատվածում: Տրոհենք $[a; b]$ հատվածը մասերի x_k կետերով հետևյալ կերպ՝

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b : \quad (9.1)$$

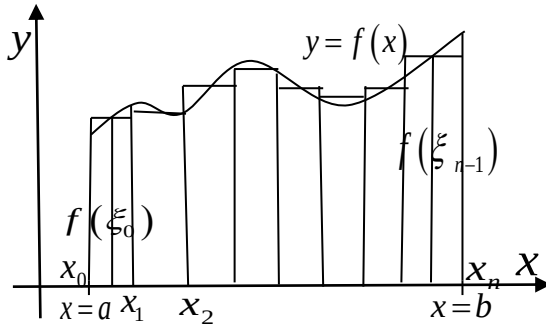
Տրոհման յուրաքանչյուր հատվածի երկարությունը նշանակենք $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k; k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$: Այդ հատվածներից յուրաքանչյուրում ընտրենք կամայական ξ_k կետ, հաշվենք ֆունկցիայի արժեքը այդ ξ_k կետերում և կազմենք հետևյալ գումարը՝

$$\sigma(x_k, \xi_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k): \quad (9.2)$$

Սա կոչվում է ինտեգրալային գումար:

Պարզաբանենք ինտեգրալային գումարի երկրաչափական իմաստը: Դիտարկենք կորագիծ սեղանը, որը հետևյալ պատկերն է: Այն սահմանափակված է $[a; b]$ -ում որոշված անընդհատ և դրական $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով, աբցիսների առանցքի $[a; b]$ հատվածով և դրան ուղղահայաց $x = a$ և $x = b$ ուղիղներով (Նկ. 9.1): Հեշտ է տեսնել, որ 9.2 բանաձևով որոշվող ինտեգրալային գումարը Նկար 9.1-ում պատկերված

աստիճանաձև տիրույթի մակերեսն է, որն է $x_{k+1} - x_k$; $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ հիմքով և $f(\xi_k)$ բարձրությամբ ուղղանկյունների մակերեսների գումարը:



Նկար 9.1

Նշանակենք $\lambda = \max(\Delta x_k)$, որը կանվանենք տրոհման տրամագիծ: Հետագայում $[x_k; x_{k+1}]$ հատվածը կանվանենք տրոհման հատված, իսկ $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ -ը միջանկյալ կետ:

Սահմանում 9.1: Եթե անկախ տրոհման ձևից և ξ_k կետերի ընտրությունից λ -ն գրոյի ձգտելիս σ ինտեգրալին գումարն ունի վերջավոր սահման, ապա կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ -ում ինտեգրելի է՝ ըստ Ռիմանի: Այդ $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$ թիվը կանվանենք $f(x)$ ֆունկցիայի Ռիմանի ինտեգրալ ու կգրենք՝

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (9.3)$$

որն էլ կանվանենք $[a; b]$ հատվածում $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ: Այստեղ a -ն կոչվում է ինտեգրալի ստորին սահման, իսկ b -ն՝ վերին սահման:

Սահմանում 9.2: Կասենք I թիվը σ ինտեգրալային գումարի սահմանն է λ տրամագիծը զրոյի ձգտելիս, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, որ $\lambda < \delta$ պայմանի, և կամայական ξ_k միջանկյալ կետերի ընտրության դեպքում տեղի կունենա $|\sigma - I| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Պնդում 9.1: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ հատվածում անսահմանափակ է, ապա այն այդ հատվածում ինտեգրելի չէ:

Ապացույց: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ -ում անսահմանափակ է: Ցույց տանք, որ կամայական $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$ տրոհման դեպքում $\sigma(x_k, \xi_k)$ ինտեգրալային գումարը ξ_k կետերի ընտրությամբ կարող ենք բացարձակ արժեքով դարձնել անվերջ մեծ:

Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ -ում անսահմանափակ է, ուրեմն այն անսահմանափակ կլինի տրոհման $[x_k; x_{k+1}]$ հատվածներից գոնե մեկում: Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք՝ ֆունկցիան անսահմանափակ է $[x_0; x_1]$ հատվածում: Մնացած՝ $[x_1; x_2], [x_2; x_3], \dots, [x_{n-1}; x_n]$ հատվածներում կամայական ձևով ընտրենք $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ միջանկյալ կետերը և նշանակենք՝

$$\sigma_1 = \sigma_1(x_k, \xi_k) = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1}:$$

Դիտարկենք $f(x)$ ֆունկցիան միայն $[x_0; x_1]$ հատվածի վրա: Քանի որ այդ հատվածի վրա ֆունկցիան անսահմանափակ է, ապա կամայական E դրական թվի համար գոյություն ունի $\xi_0 \in [x_0; x_1]$ այնպես, որ $|f(\xi_0)| > \frac{|\sigma_1| + E}{\Delta x_0}$:

Այստեղից $|f(\xi_0) \Delta x_0| > |\sigma_1| + E$: Հետևաբար ինտեգրալային գումարի համար կստանանք՝

$$\begin{aligned} |\sigma(x_k, \xi_k)| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \right| = |f(\xi_0) \Delta x_0 + \sigma_1(x_k, \xi_k)| \\ &\geq |f(\xi_0) \Delta x_0| - |\sigma_1(x_k, \xi_k)| \geq E: \end{aligned} \quad (9.4)$$

Ապացուցենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ -ում ինտեգրելի չէ: Ենթադրենք հակառակը, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ -ում ինտեգրելի է, այսինքն՝ գոյություն ունի $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$: Որպես E թիվ վերցնենք, օրինակ, $E = I + 1$: Օգտվենք (9.4) անհավասարությունից և գնահատենք $|\sigma - I|$ -ն: Հաշվի առնելով $|\sigma - I| > |\sigma| - |I|$ հայտնի անհավասարությունը և $|\sigma| \geq |I| + 1$ -ը՝ կստանանք՝ $|\sigma - I| > |\sigma| - |I| > |I| + 1 - |I| = 1$: Ստացված $|\sigma - I| > 1$ անհավասարությունը հակասում է ինտեգրելիության սահմանմանը: Հետևաբար մեր այն ենթադրությունը, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ -ում ինտեգրելի է ճիշտ չէ:

Այսպիսով՝ ապացուցեցինք, որ $[a; b]$ -ում ինտեգրելի ֆունկցիաները սահմանափակ են:

Ֆունկցիայի այս հատկությունը անվանում են ինտեգրելիության անհրաժեշտ պայման:

Բնական հարց է առաջանում՝ արդյոք $[a; b]$ -ում սահմանափակ բոլոր ֆունկցիաներն են ինտեգրելի: Պարզվում է՝ ոչ: Այդպիսի օրինակ է Դիրիխլեի ֆունկցիան: Այն $[a; b]$ -ի ռացիոնալ կետերում ընդունում է 1 արժեք, իսկ իռացիոնալ կետերում՝ 0 արժեք, սահմանափակ է, բայց ինտեգրելի չէ:

Ապացույց: Եթե $[a; b]$ հատվածը տրոհենք λ տրամագծով զրոյի ձգտող մասերի և միջանկյալ ξ_k կետերը վերցնենք իռացիոնալ կետերը, ապա ինտեգրալային գումարի համար կստանանք՝ $\sigma_1 = 0$: Իսկ, եթե միջանկյալ ξ_k կետերը վերցնենք ռացիոնալ կետերը, ապա կստանանք $\sigma_2 = b - a$:

Եթե ֆունկցիան ինտեգրելի է, այսինքն՝ $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$, ապա $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ դրական թվի համար կունենայինք $|\sigma_1 - I| < \frac{b-a}{2}$

և $|\sigma_2 - I| < \frac{b-a}{2}$: Բայց մյուս կողմից

$$|\sigma_2 - \sigma_1| < |(\sigma_2 - I) + (I - \sigma_1)| \leq |\sigma_2 - I| + |I - \sigma_1| < b - a:$$

Ստացանք հակասություն այն բանի, որ $\sigma_2 - \sigma_1 = b - a$: ■

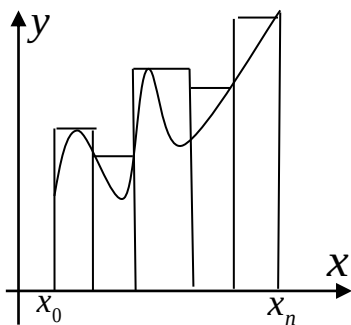
Այստեղ և հետագա ուսումնասիրության ժամանակ ենթադրելու ենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է, այսինքն՝ գոյություն ունեն m և M թվեր, և $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b]$:

§2. Դարբուի գումարները և նրանց հատկությունները

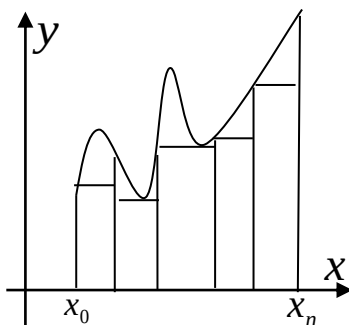
Դարբուի գումարներ: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a; b]$ հատվածում: Տրոհենք $[a; b]$ հատվածը մասերի և յուրաքանչյուր $[x_i; x_{i+1}]$ հատվածում ֆունկցիայի ստորին ու վերին ճշգրիտ եզրերը նշանակենք համապատասխանաբար m_i -ով և M_i -ով: Այնուհետև կազմենք հետևյալ գումարները՝

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot \Delta x_i \text{ և } S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot \Delta x_i : \quad (9.5)$$

Այս գումարները անվանում են Դարբուի վերին և ստորին գումարներ: Դարբուի վերին գումարը Նկար 9.2 ա-ում պատկերված ուղղանկյունների մակերեսների գումարն է, իսկ ստորինը՝ Նկար 9.2 բ-ում պատկերված ուղղանկյունների մակերեսների գումարը:



Նկար 9.2 ա



Նկար 9.2 բ

Ակնհայտ է, որ կամայական $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ -ի համար տեղի կունենա՝

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i: \quad (9.6)$$

անհավասարությունը: 9.6 անհավասարության երեք մասերը բազմապատկենք Δx_i -ով և գումարենք, ըստ i -ի՝ կստանանք՝

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot \Delta x_i: \quad (9.7)$$

Այսինքն՝

$$s \leq \sigma \leq S: \quad (9.8)$$

Քանի որ տվյալ տրոհման դեպքում S և S գումարները կլինեն հաստատուն թվեր, իսկ ξ_i կետի կամայական լինելու պատճառով $f(\xi_i)$ -ին կարող ենք մոտեցնել և m_i -ին և M_i -ին, ապա σ ինտեգրալային գումարը կախված $f(\xi_i)$ -ից կլինի փոփոխական: Այսպիսով՝ σ ինտեգրալային գումարը կարող ենք մոտեցնել s -ին, և՛ S -ին: Այսինքն՝ Դարբուի ստորին ու վերին գումարները կլինեն ինտեգրալային գումարների բազմության համապատասխանաբար ստորին ու վերին ճշգրիտ եզրերը:

Օրինակ: Տրոհելով տրված հատվածը n հավասար մասերի՝ գտնել Դարբուի ստորին և վերին գումարները.

$$f(x) = 3x + 2, \quad x \in [1; 4]:$$

Լուծում: Ըստ պայմանի՝ կունենանք $\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n},$

$$x_i = 1 + \frac{3}{n}i, \quad x_{i+1} = 1 + \frac{3}{n}(i+1), \quad i = 0, 1, \dots, (n-1):$$

Քանի որ տրված ֆունկցիան նշված միջակայքում աճող է, հետևաբար Դարբուի ստորին գումարները հաշվելիս որպես ξ_i կետ կվերցնենք հատվածների ձախ ծայրակետերը, իսկ Դարբուի վերին գումարը գտնելու համար՝ հատվածների աջ ծայրակետերը: Այսպիսով՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=0}^{n-1} (3x_i + 2) \frac{3}{n} = \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(3 \left(1 + \frac{3}{n} i \right) + 2 \right) \\ &= \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(5 + \frac{9}{n} i \right) = \frac{3}{n} \left(5n + \frac{9}{n} \frac{n(n-1)}{2} \right) = \frac{3}{n} \left(\frac{19n-9}{2} \right): \\ S &= \sum_{i=0}^{n-1} (3x_{i+1} + 2) \frac{3}{n} = \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(3 \left(1 + \frac{3}{n} (i+1) \right) + 2 \right) \\ &= \frac{3}{n} \left(\frac{19n}{2} + \frac{9}{2} \right): \end{aligned}$$

Հատկություններ

Առաջին հատկություն: Եթե տրոհման կետերին նոր կետեր ավելացնենք, ապա Դարբուի ստորին գումարը չի կարող փոքրանալ, իսկ վերին գումարը՝ մեծանալ:

Ապացույց: Ապացուցման համար ենթադրենք՝ եղած տրոհման կետերին ավելացնում ենք մեկ ուրիշ $\bar{X}$ կետ: Ընդունենք, որ $\bar{X}$ կետը գտնվում է x_k, x_{k+1} կետերի միջև, այսինքն՝ $x_k < \bar{X} < x_{k+1}$: Ապացուցենք, որ Դարբուի վերին գումարը կարող է միայն փոքրանալ:

Այսպիսով, եթե սկզբնական տրոհման համապատասխան Դարբուի վերին գումարը նշանակենք S , իսկ տրոհման կետերին կետ ավելացնելուց հետո Դարբուի ստացված վերին

գումարը նշանակենք $\bar{S}$ -ով, ապա S -ը և $\bar{S}$ -ը կտարբերվեն միայն $[x_k; x_{k+1}]$ հատվածում եղած գումարելիով: S գումարի մեջ ունենք $M_k \cdot [x_{k+1} - x_k]$, իսկ $\bar{S}$ -ի մեջ այդ գումարելին կտրոհվի երկու գումարելիների: Դրանք են՝

$$\bar{M}_k \cdot (\bar{x} - x_k) + \bar{\bar{M}}_k \cdot (x_{k+1} - \bar{x}), \quad (9.9)$$

որտեղ $\bar{M}_k$ -ն $f(x)$ ֆունկցիայի վերին ճշգրիտ եզրն է $[x_k; \bar{x}]$ հատվածի վրա, իսկ $\bar{\bar{M}}_k$ -ն՝ $[\bar{x}; x_{k+1}]$ միջակայքում: Ակնհայտ է նաև, որ.

$$\bar{M}_k \leq M_k, \quad \bar{\bar{M}}_k \leq M_k: \quad (9.10)$$

Հետևաբար հաշվի առնելով, որ.

$$\bar{M}_k \cdot (\bar{x} - x_k) \leq M_k \cdot (\bar{x} - x_k); \quad \bar{\bar{M}}_k \cdot (x_{k+1} - \bar{x}) \leq M_k \cdot (x_{k+1} - \bar{x}), \quad (9.11)$$

9.9-ից կստանանք՝

$$\begin{aligned} \bar{M}_k \cdot (\bar{x} - x_k) + \bar{\bar{M}}_k \cdot (x_{k+1} - \bar{x}) &\leq M_k \cdot (\bar{x} - x_k) \\ &+ M_k \cdot (x_{k+1} - \bar{x}) = M_k \cdot (x_{k+1} - x_k): \end{aligned} \quad (9.12)$$

Այսպիսով՝ $\bar{S}$ -ի համապատասխան գումարելին փոքր է S -ի գումարելուց, իսկ մնացած գումարելիները նույնն են, ուրեմն՝ $\bar{S} \leq S$:

Նման ձևով կապացուցվի, որ Դարբուի ստորին գումարը կարող է միայն մեծանալ:

Հատկություն երկրորդ: Անկախ տրոհումից՝ Դարբուի ցանկացած ստորին գումար չի գերազանցում Դարբուի ցանկացած վերին գումարը:

Ապացույց: Դիցուք $[a; b]$ հատվածը կամայական ձևով տրոհենք մասերի, այդ տրոհումը նշանակենք T_1 -ով, իսկ

Դարբուի գումարները՝ համապատասխանաբար S_1 և S_1 : Մեկ ուրիշ տրոհում նշանակենք T_2 -ով, իսկ Դարբուի գումարները՝ S_2 և S_2 : Ապացուցենք, որ $S_1 \leq S_2$: Դրա համար կազմենք մեկ այլ երրորդ տրոհում՝ խառնելով T_1 և T_2 տրոհումները, այն նշանակենք T_3 համապատասխան S_3 և S_3 գումարներով:

Քանի որ T_3 տրոհումը ստանում ենք՝ T_1 -ին կետեր ավելացնելով, ապա՝

$$S_1 \leq S_3, \quad (9.13)$$

բայց T_3 -ը ստացել ենք՝ նաև T_2 -ին կետեր ավելացնելով, ուստի՝

$$S_3 \leq S_2 : \quad (9.14)$$

Այսպիսով՝ 9.13-ից և 9.14-ից կստանանք, որ.

$$S_1 \leq S_3 \leq S_2 : \quad (9.15)$$

Վերջինից ակնհայտ է՝

$$S_1 \leq S_2 : \quad \blacksquare (9.16)$$

Հասկություն երրորդ: $[a; b]$ հատվածի ցանկացած տրոհման դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի համար ստացված Դարբուի վերին գումարների $\{S\}$ բազմությունը սահմանափակ է ներքևից, իսկ ստորին գումարների $\{s\}$ բազմությունը՝ վերևից:

Ապացույցը ակնհայտ է և բխում է նախորդ հասկությունից:

Նշանակենք $I^* = \inf \{S\}$, $I_* = \sup \{s\}$, որոնք համապատասխանաբար կոչվում են $[a; b]$ հատվածում $f(x)$ ֆունկցիայի Դարբուի վերին ու ստորին ինտեգրալներ:

Ապացուցենք, որ $I_* \leq I^*$: Ապացույցը կատարենք հակասող ընդունելությամբ, այն է՝ ենթադրենք $I_* > I^*$, այսինքն՝ $I_* - I^* = \varepsilon > 0$: Ստորին ճշգրիտ եզրի սահմանման համաձայն՝ գոյություն կունենա $[a; b]$ հատվածի՝ $a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_k < x'_{k+1} < \dots < x'_n = b$ տրոհում, որի համապատասխան S' Դարբուի վերին գումարի համար $S' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$: Նման ձևով վերին ճշգրիտ եզրի համար գոյություն կունենա $[a; b]$ հատվածի՝ $a = x''_0 < x''_1 < \dots < x''_k < x''_{k+1} < \dots < x''_n = b$ տրոհում, որի համապատասխան s'' Դարբուի ստորին գումարի համար $s'' > I_* - \frac{\varepsilon}{2}$: S' -ից հանենք s'' -ը, կստանանք՝

$$S' - s'' < \left(I^* + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(I_* - \frac{\varepsilon}{2}\right) = I^* - I_* + \varepsilon: \text{ Բայց քանի որ}$$

$I^* - I_* = -\varepsilon$, ապա $S' - s''$ -ի համար կունենանք՝ $S' - s'' < 0$: Սա իր հերթին նշանակում է՝ $S' < s''$, որը հակասում է 9.16-ին: Հետևաբար մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ, ուրեմն $I_* \leq I^*$: ■

Այսպիսով՝ կարող ենք պնդել, որ Դարբուի ցանկացած ստորին ու վերին գումարների համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S : \quad (9.17)$$

Դարբբուի լեմմա: Դիցուք $f(x)$ -ը $[a; b]$ հատվածում սահմանափակ է: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի Դարբբուի վերին և ստորին ինտեգրալային գումարների սահմանները, երբ $\lambda = \max(\Delta x_k) \rightarrow 0$, համապատասխանաբար հավասար են Դարբբուի վերին և ստորին ինտեգրալներին՝

$$I^* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S, \quad I_* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s :$$

Ապացույց: Պետք է ցույց տանք, որ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ թիվ, այնպես որ $[a; b]$ հատվածի կամայական T տրոհման համար, երբ $\lambda = \max\{\Delta x_k\} < \delta(\varepsilon)$, բավարարվի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$I_* - \varepsilon < s(T) \leq S(T) < I^* + \varepsilon :$$

Դիցուք ε -ը կամայական դրական թիվ է: Ըստ վերին ճշգրիտ եզրի սահմանման՝ $I_* = \sup\{s\}$ -ից պարզ կդառնա, որ գոյություն ունի $[a; b]$ հատվածի այնպիսի T_1 տրոհում, որ Դարբբուի համապատասխան ստորին գումարի համար կարող ենք գրել՝

$$I_* - \frac{\varepsilon}{2} < s(T_1) :$$

Դիտարկենք $[a; b]$ հատվածի կամայական այլ T տրոհում այնպես, որ բավարարվի $\lambda(T) = \max\{\Delta x_k\} < \delta_1(\varepsilon)$:

$$\text{Եթե } M = \sup_{x \in [a; b]} f(x) \text{ և } m = \inf_{x \in [a; b]} f(x) \text{ արժեքները}$$

համընկնում են, ապա կհետևի, որ $f(x) = c = \text{const}$, և հետևաբար Դաբբուի լեմման դառնում է ակնհայտ, որովհետև կամայական T տրոհման համար կստանանք՝

$$s(T) = S(T) = c(b-a):$$

Ուստի՝ $I_* = I^* = c(b-a)$:

Իսկ $M > m$ դեպքում կազմենք $[a; b]$ հատվածի T_2 տրոհում, որը T_1 և T տրոհումների միավորումն է: Այդ դեպքում, ըստ 9.16 հատկության, կունենանք՝

$$s(T_1) \leq s(T_2) < s(T) + \frac{\varepsilon}{2}:$$

Օգտվելով $I_* - \frac{\varepsilon}{2} < s(T_1)$ -ից՝ կստանանք

$$I_* - \frac{\varepsilon}{2} < s(T_1) \leq s(T_2) < s(T) + \frac{\varepsilon}{2}:$$

Հետևաբար՝

$$I_* - \varepsilon < s(T):$$

Այսպիսով՝ $[a; b]$ հատվածի կամայական T տրոհման դեպքում, երբ $\lambda(T) = \max \{\Delta x_k\} < \delta_1(\varepsilon)$ ստացանք՝ $I_* - \varepsilon < s(T)$: Նման ձևով կապացուցվի, որ գոյություն ունի $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, որ $\lambda(T) = \max \{\Delta x_k\} < \delta_2(\varepsilon)$ քայլով $[a; b]$ հատվածի կամայական T տրոհման դեպքում կբավարարվի՝

$$S(T) < I^* + \varepsilon:$$

Այնուհետև, եթե վերցնենք $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$, ապա $\lambda(T) = \max \{\Delta x_k\} < \delta(\varepsilon)$ դեպքում կստանանք՝

$$I_* - \varepsilon < s(T) \leq S(T) < I^* + \varepsilon: \quad \blacksquare$$

§3. Ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայման

Թեորեմ 9.1: $f(x)$ ֆունկցիայի՝ $[a; b]$ հատվածում ինտեգրելի լինելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0: \quad (9.18)$$

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է: Այդ դեպքում, ըստ ինտեգրելիության սահմանման, ինչպիսի տրոհում և ինչպիսի ξ_i կետեր էլ վերցնենք, σ ինտեգրալային գումարը ունի I սահմանը: Այսինքն՝ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ հենց $\lambda < \delta$ տեղի ունի՝ $|\sigma - I| < \varepsilon$ կամ $I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$ անհավասարությունը: Մյուս կողմից օգտվելով Դարբուի լեմմայից՝ $\lambda < \delta$ դեպքում տեղի ունի նաև հետևյալը՝

$$I - \varepsilon \leq s \leq S \leq I + \varepsilon: \quad (9.19)$$

Այսինքն և՛ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} s = I$, և՛ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S = I$, որտեղից էլ կհետևի, որ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0: \quad (9.20)$$

Բավարարություն: Ենթադրենք, որ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$: Ապացուցենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է: Այդ դեպքում $s \leq I_* \leq I^* \leq S$ անհավասարությունից պարզ կլինի, որ $I_* = I^*$: Այդ արժեքը նշանակենք $I_* = I^* = I$:

Այսպիսով՝

$$s \leq I \leq S : \quad (9.21)$$

Քանի որ տեղի ունեն նաև՝

$$s \leq \sigma \leq S \quad (9.22)$$

անհավասարությունները, ապա՝ $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$: Սա նշանակում է,

որ $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է: ■

Նկատենք, որ եթե նշանակենք $\omega_i = M_i - m_i$, ապա ինտեգրելիության պայմանը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ ձևով՝

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i : \quad (9.23)$$

§4. Ինտեգրելի ֆունկցիաների դասեր

Թեորեմ 9.2: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ հատվածում անընդհատ է, ապա այն ինտեգրելի է:

Ապացույց: Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ հատվածում անընդհատ է, ապա, ըստ Կանտորի թեորեմի, այն հավասարաչափ անընդհատ է: Բացի դրանից, Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի համաձայն, կունենանք $M_i = \max_{x \in [x_i; x_{i+1}]} f(x)$, և

$m_i = \min_{x \in [x_i; x_{i+1}]} f(x)$: Օգտվելով Կանտորի թեորեմի հետևանքից (Գլուխ 4 §9)՝ ունենք, որ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպես, որ ցանկացած $\Delta x_i < \delta$ -ի դեպքում տեղի ունի $\omega_i = M_i - m_i < \varepsilon$: Հետևաբար՝

$$(S - s) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon (b - a) : \quad (9.24)$$

Այսպիսով՝ ինտեգրելիության պայմանը բավարարվում է, ուրեմն $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է:

Թեորեմ 9.3: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ հատվածում սահմանափակ է և ունի վերջավոր թվով խզման կետեր, ապա այն ինտեգրելի է:

Ապացույց: Դիցուք M -ն ու m -ը $f(x)$ ֆունկցիայի $[a; b]$ -ում ընդունած արժեքների բազմության համապատասխանաբար վերին և ստորին ճշգրիտ եզրերն են: Դիցուք $\varepsilon > 0$ կամայական թիվ է: $[a; b]$ հատվածը տրոհենք փոքր մասերի այնպես, որ խզման կետեր պարունակող տրոհման հատվածների երկարությունների գումարը փոքր լինի $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ թվից:

Իսկ այն մասերում, որտեղ ֆունկցիան անընդհատ է, տրոհման հատվածների երկարությունները վերցնենք այնքան փոքր, որ ֆունկցիայի տատանումը յուրաքանչյուր հատվածում փոքր լինի $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ թվից: Ակնհայտ է, որ դա կարող ենք

անել տվյալ հատվածում ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատության շնորհիվ: Այսպիսի տրոհմամբ կստանանք՝

$$(S-s) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \text{ -ը կբաժանվի երկու}$$

մասի: Նշանակենք խզման կետեր պարունակող տրոհման հատվածներով մասը՝ $\sum_i' \omega_i \Delta x_i$, իսկ մյուս մասը, որը

հատում չունի խզման կետերի շրջակայքերի հետ, նշանակենք՝ $\sum_i'' \omega_i \Delta x_i$:

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\sum_i' \omega_i \Delta x_i \leq (M - m) \sum_i' \Delta x_i < (M - m) \frac{\varepsilon}{2(M - m)} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (9.25)$$

$$\sum_i'' \omega_i \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b - a)} \sum_i'' \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b - a)} (b - a) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (9.26)$$

և ինտեգրելիության պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$(S - s) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_i' \omega_i \Delta x_i + \sum_i'' \omega_i \Delta x_i < \varepsilon: \quad (9.27)$$

Սա նշանակում է, որ $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է: ■

Թեորեմ 9.4: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ հատվածում մոտոն է, ապա այն ինտեգրելի է:

Ապացույց: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան չնվազող է: Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ և $[a; b]$ հատվածը բաժանենք հավասար մասերի, որոնց երկարությունները փոքր են $\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ թվից: Քանի որ $f(x)$

ֆունկցիան հաստատուն չէ, ապա $f(b) > f(a)$:

Նշանակենք՝ $M_i = \sup_{x \in [x_i; x_{i+1}]} f(x)$, $m_i = \inf_{x \in [x_i; x_{i+1}]} f(x)$ և

գնահատենք $(S - s) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$ -ը:

Կստանանք՝

$$\begin{aligned} (S - s) &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon: \end{aligned} \quad (9.28)$$

Հետևաբար ըստ 9.18 ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանի՝ ֆունկցիան կլինի ինտեգրելի: ■

§5. Որոշյալ ինտեգրալի հիմնական հատկություններ

Նախապես նշենք, որ որոշ պարզագույն հատկություններ կբերենք առանց ապացույցի:

$$1. \quad \int_a^a f(x) dx = 0, \quad (9.29)$$

$$2. \quad \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx, \quad (9.30)$$

3. Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները ինտեգրելի են $[a; b]$ -ում, ապա ինտեգրելի են նաև $f(x) \pm g(x)$ և $f(x) \cdot g(x)$ ֆունկցիաները, ընդ որում՝

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx: \quad (9.31)$$

Ապացուց: Եթե $[a; b]$ հատվածը տրոհենք մասերի և վերցնենք կամայական ξ_i կետեր, ապա կարող ենք գրել՝

$$\sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) \pm g(\xi_i)) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \Delta x_i, \quad (9.32)$$

որտեղից էլ կհետևի 9.31-ը: Արտադրյալ ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը ապացուցելու համար $[a; b]$ հատվածի կամայական տրոհման $[x_i; x_{i+1}]$ մասի վրա վերցնենք x' և x'' կետեր և գնահատենք $f(x'') \cdot g(x'') - f(x') \cdot g(x')$ տարբերությունը:

Հաշվի առնելով նաև, որ $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները ինտեգրելի են, հետևաբար սահմանափակ են՝ $|f(x)| \leq A$, $|g(x)| \leq B$ կստանանք՝

$$\begin{aligned} |f(x'') \cdot g(x'') - f(x') \cdot g(x')| &= \left| [f(x'') - f(x')] g(x'') \right| + \\ &+ \left| [g(x'') - g(x')] f(x') \right| \leq B [f(x'') - f(x')] + \\ &+ A [g(x'') - g(x')]: \end{aligned} \quad (9.33)$$

Արդյունքում $f(x) \cdot g(x)$ ֆունկցիայի համար կստանանք, որ $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = B \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\omega}_i \Delta x_i + A \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\bar{\omega}}_i \Delta x_i$, որտեղ $\bar{\omega}_i$ -ը $f(x)$ ֆունկցիայի տատանումն է, իսկ $\bar{\bar{\omega}}_i$ -ը $g(x)$ ֆունկցիայի տատանումը: Այսպիսով՝ տրոհման համար կստանանք՝

$$\begin{aligned} (S - s) &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = B \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\omega}_i \Delta x_i + A \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\bar{\omega}}_i \Delta x_i \\ &< B \frac{\varepsilon}{2B} + A \frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon: \end{aligned} \quad (9.34)$$

4. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; b]$ -ում, ապա $c \cdot f(x)$ -ը ևս ինտեգրելի է, և տեղի կունենա հետևյալը՝

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx: \quad (9.35)$$

Ապացույցն անմիջապես բխում է $\sum_{i=0}^{n-1} c f(\xi_i) \Delta x_i = c \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ հավասարությունից:

5. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; b]$ -ում, ապա այն ինտեգրելի է նաև $[a; b]$ -ում ընկած կամայական $[c; d]$ հատվածում:

Ապացույց: Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ -ում ինտեգրելի է, ապա կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն կունենա այնպիսի T տրոհում՝ $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$, որ $S - s < \varepsilon$: Տրոհման կետերին ավելացնենք c և d կետերը: Ստացված տրոհումը նշանակենք T^* -ով: Դարբուի գումարները նշանակենք համապատասխանաբար S^* և s^* : Այս դեպքում ճիշտ կլինի նաև $S^* - s^* < \varepsilon$ անհավասարությունը: Միայն $[c; d]$ հատվածում տրոհումը նշանակենք $\bar{T}$ -ով, իսկ Դարբուի գումարները՝ $\bar{S}$ և $\bar{s}$: Պարզ է, որ $\bar{S} - \bar{s} < S^* - s^*$, որովհետև $(\bar{S} - \bar{s})$ -ի մեջ յուրաքանչյուր $(M_k - m_k)\Delta x_k$ դրական գումարելի գումարելի է նաև $S^* - s^*$ -ի համար: Հետևաբար $\bar{S} - \bar{s} < S^* - s^* < \varepsilon$, ինչն էլ նշանակում է, որ $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[c; d]$ -ում:

6. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; b]$, $[a; c]$ ու $[c; b]$ հատվածներից ամենամեծում, ապա այն ինտեգրելի կլինի նաև մյուս երկուսում, և a , b , c կետերի կամայական դասավորության դեպքում տեղի կունենա հետևյալ հավասարությունը՝

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx: \quad (9.36)$$

Ապացույց: Ենթադրենք $a < c < b$: Քանի որ $f(x)$ -ը ինտեգրելի է հատվածներից ամենամեծում, ապա ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; b]$ -ում: Դիցուք $\{x_k\}$ -ը $[a; b]$ հատվածի տրոհում է և $c \in \{x_k\}$: Նախորդ հատկությունից անմիջապես կհետևի, որ $f(x)$ -ը ինտեգրելի կլինի նաև $[a; c]$ -ում, և $[c; b]$ -ում, որովհետև $[a; c] \subset [a; b]$, $[c; b] \subset [a; b]$: Այդ դեպքում կարող ենք գրել, որ

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a;c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c;b]} f(\xi_i) \Delta x_i: \text{ Եթե այս հա-}$$

վասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ տրամագիծը ձգտում է զրոյի, կստանանք 9.36-ը:

Եթե C կետը չի պատկանում $[a; b]$ -ին, ապա $[a; b]$ -ն պատկանում է կա՛մ $[a; c]$ -ին, կա՛մ $[c; b]$ -ին: Ենթադրենք, օրինակ, $c < a < b$, այսինքն՝ $[a; b] \subset [c; b]$:

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\int_c^b f(x) dx = \int_c^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx: \text{ Քանի որ}$$

$$\int_c^a f(x) dx = - \int_a^c f(x) dx, \text{ ապա սա տեղադրելով նախորդ}$$

հավասարության մեջ՝ կստանանք 9.36-ը: ■

Անհավասարություններով արտահայտվող հատկությունները

1. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան ոչ բացասական է և ինտեգրելի է $[a; b]$ -ում: Այդ դեպքում՝

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0: \quad (9.37)$$

2. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; b]$ -ում և $f(x) \geq m$, ապա՝

$$\int_a^b f(x) dx \geq m(b-a): \quad (9.38)$$

Իրոք, քանի որ $f(x) \geq m$, ուրեմն $f(x) - m \geq 0$ և կլինի ինտեգրելի $[a; b]$ -ում: Հետևաբար $\int_a^b (f(x) - m) dx \geq 0$, այսինքն՝

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m(b-a): \quad (9.39)$$

3. Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները ինտեգրելի են $[a; b]$ -ում և $f(x) \geq g(x)$, ապա՝

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx: \quad (9.40)$$

Ապացույցը պարզ է, քանի որ $f(x) - g(x) \geq 0$, որտեղից, ըստ առաջին հատկության, $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$: ■

4. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; b]$ -ում, ապա $|f(x)|$ -ը ևս ինտեգրելի է $[a; b]$ -ում, և տեղի կունենա հետևյալը՝

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx : \quad (9.41)$$

Ապացույց: $|f(x)|$ ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը կրիսի հետևյալ հայտնի անհավասարությունից՝
 $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \|f(x_1) - f(x_2)\|$: Իսկ եթե

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| \cdot \Delta x_k \quad \text{անհավասարության մեջ}$$

անցնենք սահմանի, երբ $\lambda = \max \{\Delta x_k\} \rightarrow 0$, ապա կստանանք 9.41-ը: ■

Օրինակ: Համեմատել հետևյալ ինտեգրալները:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx \quad \text{և} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

Լուծում: Քանի որ $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ -ում $\sin^{10} x \leq \sin^2 x$ հետևաբար

$$\text{ըստ 9.40 բանաձևի՝} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$$

§6. Միջին արժեքի թեորեմը

Թեորեմ 9.5: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; b]$ -ում, իսկ m -ը և M -ը $[a; b]$ -ում $f(x)$ ֆունկցիայի ստորին ու վերին ճշգրիտ եզրերն են, ապա գոյություն ունի այնպիսի μ թիվ՝ $m \leq \mu \leq M$, որ.

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a): \quad (9.42)$$

Ապացույց: Քանի որ $f(x)$ -ը ինտեգրելի է $[a; b]$ -ում, ուրեմն այն սահմանափակ է: Հետևաբար գոյություն ունեն այնպիսի m և M , որ $m \leq f(x) \leq M$, և

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx: \quad (9.43)$$

Այստեղից ակնհայտ կլինի, որ.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a): \quad (9.44)$$

Անհավասարության երեք մասը բաժանելով $(b-a)$ -ի վրա՝ կստանանք՝

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \leq M: \quad (9.45)$$

Նշանակելով $\mu = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx$ ՝ ակնհայտ է դառնում

9.42 բանաձևը:

Եթե թեորեմի մեջ պահանջենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ -ում լինի անընդհատ, ապա, ըստ Բոլցանո-Կոշիի երկրորդ թեորեմի, գոյություն կունենա $\xi \in [a; b]$ կետ՝ $\mu = f(\xi)$: Հետևաբար 9.42-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a): \quad \blacksquare (9.46)$$

Օրինակ: Գտնել $f(x) = \sqrt{x}$ ֆունկցիայի միջին արժեքը $[0; 100]$ միջակայքում:

Լուծում: Կիրառենք միջին արժեքի թեորեմի 9.46 բանաձևը և կստանանք $\int_0^{100} \sqrt{x} dx = \sqrt{\xi}(100-0)$: Այսինքն՝

$$\sqrt{\xi} = \frac{\int_0^{100} \sqrt{x} dx}{100} = \frac{1}{100} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{100} = 6 \frac{2}{3} :$$

Միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմը

Թեորեմ 9.6: Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները ինտեգրելի են $[a; b]$ -ում, $m \leq f(x) \leq M$ և $g(x) \geq 0$ ($g(x) \leq 0$), ապա գոյություն ունի μ թիվ՝ $m \leq \mu \leq M$,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx: \quad (9.47)$$

Իսկ եթե $f(x)$ ֆունկցիան նաև անընդհատ է, ապա գոյություն կունենա $\xi \in [a; b]$ կետ, որ.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx: \quad (9.48)$$

Ապացույց: Ապացույցը կատարենք $g(x) \geq 0$ դեպքում, որովհետև հակառակը կհանգի $-g(x) \geq 0$ դեպքին: Եթե $m \leq f(x) \leq M$ անհավասարության երեք մասը բազմապատկենք $g(x)$ -ով, ապա կունենանք՝ $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$: Այստեղից և 9.40-ից կարող ենք գրել՝

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx: \quad (9.49)$$

Եթե $\int_a^b g(x)dx = 0$, ապա 9.48-ից բխում է

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0, \quad \text{ուստի } \mu\text{-ն թիվ կարող է լինել}$$

կամայական թիվ: Եթե $\int_a^b g(x)dx > 0$, ապա

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

անհավասարություն կարող ենք արտագրել հետևյալ՝

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M \quad (9.50)$$

տեսքով: Եթե նշանակենք՝

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu, \quad (9.51)$$

ապա կարող ենք գրել.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx: \quad \blacksquare (9.52)$$

Միջին արժեքի երկրորդ թեորեմը

Այն կբերենք առանց ապացույցի:

Թեորեմ 9.7: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a; b]$ հատվածում ինտեգրելի է, իսկ $g(x)$ ֆունկցիան՝ մոնոտոն, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a; b]$ կետ այնպես, որ տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx: \quad (9.53)$$

§7. Ինտեգրալը որպես փոփոխական վերին սահմանի ֆունկցիա: Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը

Եթե $f(t)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; b]$ հատվածում, ապա, ըստ 9.36-ի, այն ինտեգրելի է նաև $[a; x]$ հատվածում,

որտեղ $x \in [a; b]$ կամայական կետ է: Հետևաբար $\int_a^x f(t) dt$

ինտեգրալի արժեքը կփոփոխվի x -ի փոփոխմանը համապատասխան, այսինքն՝ այդ ինտեգրալը x փոփոխականից կախված ֆունկցիա է: Ուստի նշանակենք՝

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt : x \in [a; b]: \quad (9.54)$$

Թեորեմ 9.8: Եթե $f(t)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; b]$

հատվածում, ապա $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ֆունկցիան անընդհատ

է $[a; b]$ -ում:

Ապացույց: Կազմենք հետևյալ տարբերությունը.

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= F(x + \Delta x) - F(x) \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt: \end{aligned} \quad (9.55)$$

Այս ինտեգրալի նկատմամբ կիրառելով միջին արժեքի 9.5 թեորեմը՝ կստանանք՝

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \mu \cdot \Delta x, \quad (9.56)$$

որտեղ $m \leq \mu \leq M$, իսկ $m = \inf_{t \in [x; x+\Delta x]} (f(t))$,

$M = \sup_{t \in [x; x+\Delta x]} (f(t))$: 9.56-ից հետևում է $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

ֆունկցիայի անընդհատությունը, որովհետև $\Delta x \rightarrow 0$ դեպքում $\Delta F \rightarrow 0$: ■

Թեորեմ 9.9: Դիցուք $f(t)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; b]$ -ում: Եթե $f(t)$ ֆունկցիան $t=x$ կետում անընդհատ է, ապա այդ կետում $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ֆունկցիան ունի ածանցյալ, որը հավասար է $f(x)$ -ին:

Այսինքն՝ $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a; b]$ -ի համար:

Ապացույց: Օգտվենք (9.56) ներկայացումից և կազմենք $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ հարաբերությունը: Կստանանք՝ $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \mu$, որտեղ $m \leq \mu \leq M$, իսկ $m = \inf_{t \in [x; x+\Delta x]} (f(t))$, $M = \sup_{t \in [x; x+\Delta x]} (f(t))$:

Անցնենք սահմանի, երբ $\Delta x \rightarrow 0$:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu: \quad (9.57)$$

Քանի որ $f(t)$ ֆունկցիան $t=x$ կետում անընդհատ է, ապա կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնվի $\delta > 0$ թիվ, որ հենց $|\Delta x| < \delta$, կհետևի, որ կամայական $t \in [x; x+\Delta x]$ -ի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon: \quad (9.58)$$

Նկատենք, որ տեղի կունենա նաև հետևյալ՝

$$f(x) - \varepsilon \leq m \leq \mu \leq M \leq f(x) + \varepsilon \quad (9.59)$$

անհավասարությունը, որն էլ նշանակում է, որ

$$f(x) - \varepsilon \leq \mu \leq f(x) + \varepsilon, \quad \text{այսինքն՝} \quad |f(x) - \mu| \leq \varepsilon:$$

Հետևաբար 9.57-ից կստանանք՝

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu = f(x): \quad \blacksquare(9.60)$$

Հետևանք: Քանի որ թեորեմը ճիշտ է կամայական $x \in [a; b]$ -ի համար, ուրեմն $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a; b]$ -ի համար: Սա նշանակում է, որ $F(x)$ -ը նախնական է $f(x)$ -ի համար:

Նյութոն-Լայբնիցի բանաձևը

Վերևը ապացուցեցինք, որ $[a; b]$ հատվածում անընդ-
հատ $f(x)$ ֆունկցիայի համար $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ֆունկցիան
նախնական է: Դիցուք $\phi(x)$ -ը $f(x)$ -ի որևէ նախնական է:
Սա նշանակում է՝

$$\phi(x) = F(x) + C, \quad (9.61)$$

որտեղ C -ն կամայական հաստատուն է:

Եթե 9.61-ի մեջ տեղադրենք $x = a$, կստանանք՝ $C = \phi(a)$,
որովհետև $F(a) = 0$, ուստի $C = \phi(a)$: Տեղադրելով $x = b$,
կունենանք $\phi(b) = F(b) + C$, այսինքն՝ $F(b) = \phi(b) - C$:

$$\text{Բայց } F(b) = \int_a^b f(t)dt = \phi(b) - C = \phi(b) - \phi(a):$$

Այսպիսով՝ ստացանք, որ եթե $\phi(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ -ի
համար նախնական է, ապա՝

$$\int_a^b f(x) dx = \phi(b) - \phi(a): \quad \blacksquare \quad (9.62)$$

Այս ստացված բանաձևը կոչվում է ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձև: Այն անվանում են նաև Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձև:

§8. Մասերով ինտեգրման և փոփոխականի փոխարինման կանոնները որոշյալ ինտեգրալում

Անորոշ ինտեգրալի ուսումնասիրության ժամանակ մենք արդեն ստացել ենք մասերով ինտեգրման հետևյալ բանաձևը՝

$$\int u(x) \cdot dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) du(x): \quad (9.63)$$

Եթե $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները $[a; b]$ հատվածում ունեն անընդհատ ածանցյալներ, ապա որոշյալ ինտեգրալի համար տեղի ունի այսպիսի բանաձև՝

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x): \quad (9.64)$$

Ապացույց: Ակնհայտ է, որ $u(x) \cdot v(x)$ ֆունկցիան նախնական է $u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$ -ի համար: Հետևաբար օգտվելով 9.62 Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևից և ինտեգրալի ադիտիվությունից՝ ստանում ենք հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b [u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)] dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b: \quad (9.65)$$

Կամ որ նույնն է՝

$$\int_a^b u(x) \cdot dv(x) + \int_a^b v(x) \cdot du(x) = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b : \quad (9.66)$$

Այստեղից անմիջապես ակնհայտ է 9.64 բանաձևը:

Օրինակ՝

$$1). \int_2^5 \ln x \cdot dx = (\ln x \cdot x) \Big|_2^5 - \int_2^5 x \cdot d \ln x = 5 \ln 5 - 2 \ln 2$$

$$- \int_2^5 x \cdot \frac{1}{x} dx = 5 \ln 5 - 2 \ln 2 - (5 - 2) = 5 \ln 5 - 2 \ln 2 - 3:$$

$$2). \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \cos(x)$$

$$= - \left(x \cdot \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx \right) =$$

$$= - \left(0 - \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1:$$

Փոփոխականի փոխարինում որոշյալ ինտեգրալում

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a; b]$ -ում, իսկ է $[\alpha; \beta]$ միջակայքում որոշված $x = g(t)$ ֆունկցիայի արժեքները դուրս չեն գալիս $[a; b]$ -ից: Բացի դրանից՝ $[\alpha; \beta]$ միջակայքում $x = g(t)$ ֆունկցիան ունի անընդհատ ածանցյալ

$a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t) dt : \quad (9.67)$$

Այս պնդման ապացույցը բխում է անորոշ ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինման 8.10 բանաձևից և Նյուտոն-Լայբնիցի 9.62 բանաձևից:

Օրինակ: Կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ հաշվել ինտեգրալը.

$$\int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} :$$

Նշանակենք $\frac{1}{(x+1)} = t$, այստեղից՝ $x = \frac{1}{t} - 1$, $dx = -\frac{1}{t^2} :$

Երբ $x = 0 \Rightarrow t = 1$, իսկ $x = 0.75 \Rightarrow t = \frac{4}{7}$: Հետևաբար ինտեգրալի համար կունենանք՝

$$\begin{aligned} \int_0^{0.75} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} dx &= - \int_1^{\frac{4}{7}} \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 2}} \frac{1}{t^2} dt = \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\frac{4}{7}} \frac{dt}{\sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\ln \left| \left(t - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \right| \right]_1^{\frac{4}{7}} \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\ln \left| \frac{1}{14} + \sqrt{\frac{1}{156} + \frac{1}{4}} \right| - \ln \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \right] \end{aligned}$$

§9. Անխսկական ինտեգրալի սահմանումը, Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը, համեմատական հայտանիշները

Մենք արդեն նշել ենք, որ որոշյալ ինտեգրալի համար $[a; b]$ -ում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան պետք է լինի սահմանափակ: Ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված $[a; +\infty)$ -ում և ցանկացած $A > a$ դեպքում $[a; A]$ այն ինտեգրելի է, այսինքն՝ $\int_a^A f(x)dx$ -ը կամայական $A > a$ -ի դեպքում վերջավոր է:

Սահմանում 9.3: $\int_a^A f(x)dx$ -ի վերջավոր կամ անվերջ

սահմանը, երբ $A \rightarrow +\infty$, կանվանենք $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալ a -ից մինչև $+\infty$: Այդ սահմանը նշանակում են հետևյալ սիմվոլով

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx: \quad (9.68)$$

Սրան անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի առաջին սեռի անխսկական ինտեգրալ:

Եթե $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$ -ը վերջավոր է, ապա ասում են, որ

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ անխսկական ինտեգրալը զուգամետ է, իսկ $f(x)$ ֆունկցիան՝ ինտեգրելի է $[a; +\infty)$ -ում: Եթե այդ սահմանը

անվերջ է կամ գոյություն չունի, ապա ասում են, որ անիսկական ինտեգրալը տարամետ է:

Նման եղանակով սահմանվում է $f(x)$ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ $(-\infty; a]$ -ում, եթե $f(x)$ -ը ինտեգրելի է $[A; a]$ միջակայքում, և գրում են՝

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx: \quad (9.69)$$

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է կամայական $[A_1; A_2]$ միջակայքում: Այդ դեպքում ևս սահմանվում առաջին սերի անիսկական ինտեգրալ $(-\infty; +\infty)$ -ում, և գրում են՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A_1 \rightarrow -\infty \\ A_2 \rightarrow +\infty}} \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx, \quad (9.70)$$

երբ իրարից անկախ $A_1 \rightarrow -\infty$, $A_2 \rightarrow +\infty$: Եթե կամայական

C թվի համար զուգամետ են $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ և $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ ինտե-

գրալները, ապա զուգամետ է նաև $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ անիսկական

ինտեգրալը: Ընդ որում՝ այն ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx: \quad (9.71)$$

Այսպիսով՝

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{A_1 \rightarrow -\infty} \int_{A_1}^c f(x) dx + \lim_{A_2 \rightarrow +\infty} \int_c^{A_2} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx : \quad (9.72)\end{aligned}$$

Անիսկական ինտեգրալի հաշվման համար ևս օգտագործվում է ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձևը: Եթե $f(x)$ -ի համար $F(x)$ -ը նախնական է, ուրեմն՝

$$\int_a^A f(x) dx = F(A) - F(a) : \quad (9.73)$$

Հետևաբար՝

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (F(A) - F(a)) = F(x) \Big|_a^{+\infty} : \quad (9.74)$$

Նույն եղանակով՝

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^a : \quad (9.75)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} : \quad (9.76)$$

Անիսկական ինտեգրալի մի քանի հատկություններ

1. Եթե $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ինտեգրալը զուգամետ է, ապա զուգամետ է

նաև $\int_A^{+\infty} f(x) dx$; ($A > a$)-ը և հակառակը: Այդ դեպքում տեղի

ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^A f(x) dx + \int_A^{+\infty} f(x) dx: \quad (9.77)$$

2. Եթե $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ինտեգրալը զուգամետ է, ապա՝

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f(x) dx = 0: \quad (9.78)$$

3. Եթե $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ինտեգրալը զուգամետ է, ապա զուգամետ է

նաև հետևյալ ինտեգրալը $\int_a^{+\infty} c \cdot f(x) dx; (c = \text{const})$, ընդ որում՝

$$\int_a^{+\infty} c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^{+\infty} f(x) dx: \quad (9.79)$$

4. Եթե զուգամետ են $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ և $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ ինտեգրալները,

ապա զուգամետ է $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx$ ինտեգրալը.

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx + \int_a^{+\infty} g(x) dx: \quad (9.80)$$

Դրական ֆունկցիայի անխսկական ինտեգրալի զուգամիտությունը

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; A]$ միջակայքում: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ոչ բացասական է, ապա ակնհայտ

է, որ $\int_a^A f(x)dx$ -ը A փոփոխականից կախված աճող ֆունկցիա է. այն նշանակենք $F(A)$: Հետևաբար A -ն անվերջի ձգտելիս այդ ինտեգրալի գուգամիտության հարցը բերվում է $F(A) = \int_a^A f(x)dx$ ֆունկցիայի վերջավոր սահմանի գոյության հարցին: Ակնհայտ է, որ $F(A)$ -ն աճող ֆունկցիա է:

Թեորեմ 9.10: A -ն անվերջի ձգտելիս $\int_a^A f(x)dx$ ինտեգրալի գուգամետ լինելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն վերնից լինի սահմանափակ, այսինքն՝

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx \leq C; \quad (C = \text{const}): \quad (9.81)$$

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք $\int_a^A f(x)dx$ ինտեգրալը գուգամետ է երբ $A \rightarrow +\infty$ -ի: Սա նշանակում է, որ գոյություն ունի $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$ վերջավոր սահմանը: Հետևաբար $F(A)$ -ն սահմանափակ է:

Բավարարություն: Ենթադրենք $F(A)$ -ն սահմանափակ է վերնից և ապացուցենք, որ այն ունի վերջավոր սահման: Օգտվենք ֆունկցիայի սահմանի Հայնեի սահմանումից: Կամայական $A_n \rightarrow +\infty$ հաջորդակա-նության դեպքում $F(A_n)$ -ը կլինի մոնոտոն աճող և վերնից սահմանափակ հաջորդականություն: Հետևաբար ըստ թեորեմ 2.2-ի՝ $F(A_n)$ -ը ունի

վերջավոր սահման, այսինքն՝ $F(A_n) = \int_a^{A_n} f(x) dx$ զուգամետ է:

Այսպիսով՝ ստացանք՝

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) < +\infty: \quad \blacksquare (9.82)$$

Օրինակի համար պարզենք $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունը: Քանի որ կամայական $A > 0$ -ի համար $F(A) = \int_a^A \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^A = \arctg A$, իսկ $\arctg A$ -ն սահմանափակ է, ապա սա նշանակում է $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctg A = \frac{\pi}{2}$ և $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է:

Առաջին սեռի անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունը ընդհանուր դեպքում

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; A]$ միջակայքում: Ինչպես արդեն նկարագրեցինք $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունը համարժեք է A -ն անվերջի ձգտելիս $F(A) = \int_a^A f(x) dx$ ֆունկցիայի վերջավոր սահմանի գոյությանը:

Կոշիի սկզբունքը (բավարար պայման)

Թեորեմ 9.11: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ինտեգրալի զուգամետ լինելու

համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի $E > a$ թիվ, որ $A_1 > E$ և $A_2 > E$ -ի դեպքում տեղի ունենա հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left| F(A_1) - F(A_2) \right| = \left| \int_a^{A_1} f(x) dx - \int_a^{A_2} f(x) dx \right| = \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon: \quad (9.83)$$

Համեմատության հայտանիշներ

Թեորեմ 9.12: Եթե $a \leq x < +\infty$ -ի դեպքում $|f(x)| \leq g(x)$,

այսինքն $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունից ակնհայտ

կդառնա $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունը, իսկ

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ինտեգրալի տարամիտությունից՝ $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ -ի

տարամիտությունը:

Ապացույց: Դիցուք $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ -ը զուգամետ է: Այդ դեպքում

կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի

$E > a$ թիվ, որ $A_1 > E$ և $A_2 > E$ -ի դեպքում բավարարվում է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} g(x) dx \right| < \varepsilon : \quad (9.84)$$

Հետևաբար ըստ թեորեմի $|f(x)| \leq g(x)$ պայմանի և 9.41-ի՝ կստանանք՝

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x) dx : \quad (9.85)$$

Հաշվի առնելով 9.84-ը՝ այստեղից կունենանք, որ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $E > a$ թիվ, որ $A_1 > E$ և $A_2 > E$ -ի դեպքում.

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon : \quad (9.86)$$

Իսկ սա նշանակում է, որ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ -ը գոյություն է:

Ապացուցենք թեորեմի մյուս մասը: Դիցուք $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ -ը տարամետ է: Հետևաբար $f(x) \leq |f(x)| \leq g(x)$ անհավասարությունից և որոշյալ ինտեգրալի (9.40) հատկությունից ակնհայտ կդառնա $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ -ի տարամիտությունը: ■

Թեորեմ 9.13: Դիցուք $f(x)$ -ը և $g(x)$ դրական են և ինտեգրելի են $[a; A]$ միջակայքում, եթե գոյություն ունի.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K; \quad (0 \leq K < +\infty): \quad (9.87)$$

Եթե սահմանը $K < +\infty$, ապա $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունից պարզ կդառնա $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ -ի զուգամիտությունը: Եթե $K > 0$, ապա $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ -ի տարամիտությունից ակնհայտ կլինի $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ ինտեգրալի տարամիտությունը:

Ապացույց: Ենթադրենք $K < +\infty$: Այդ դեպքում, ըստ 9.87-ի, կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ $x > \delta$ -ից հետևում է.

$$K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon: \quad (9.88)$$

Այսինքն՝ $(K - \varepsilon)g(x) < f(x) < (K + \varepsilon)g(x)$: Այս անհավասարությունից կստանանք, որ $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունից ակնհայտ կդառնա $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ -ի զուգամիտությունը:

Եթե $K = +\infty$, ապա կամայական $E > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$, որ $x > \delta$ դեպքում $\frac{f(x)}{g(x)} > E$:

Սա նշանակում է՝ $f(x) > E \cdot g(x)$: Հետևաբար $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ -ի
 զուգամիտությունից պարզ կդառնա $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ -ի զուգամիտու-
 րությունը, իսկ $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ -ի տարամիտությունից՝ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ -ի
 տարամիտությունը:

Պարզ է, որ $0 < K < +\infty$ -ի դեպքում երկու ինտեգրալները
 զուգամիտում կամ տարամիտում են միաժամանակ: ■

Պնդում 9.2: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է
 $[a; A]$ ($a > 0$) միջակայքում: Եթե x -ի բավականաչափ մեծ
 արժեքների համար $f(x)$ ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}; \quad \lambda > 0, \quad (9.89)$$

ապա $\lambda > 1$, և $\varphi(x) \leq C < +\infty$ դեպքում $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ -ը զուգա-
 մետ է, իսկ $\lambda \leq 1$ և $\varphi(x) \geq C > 0$ դեպքում՝ տարամետ: ■

Օգտվելով ֆունկցիայի (9.89) ներկայացումից՝ կարող ենք
 գրել՝ $f(x) \leq \frac{C}{x^\lambda}$; $\lambda > 0$ -ը: Քանի որ $\frac{1}{x^\lambda}$ ֆունկցիան կամա-
 յական $A > 0$ դեպքում ինտեգրելի է $[a; A]$ միջակայքում,
 ապա կստանանք՝

$$F(A) = \int_a^A \frac{1}{x^\lambda} dx = \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_a^A = \frac{A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \quad (\lambda \neq 1): \quad (9.90)$$

Այստեղից անմիջապես երևում է, երբ $A \rightarrow +\infty$, ապա

$F(A)$ -ը կունենա վերջավոր սահման, եթե $\lambda > 1$: Իսկ $\lambda \leq 1$ դեպքում $F(A)$ -ի սահմանը գոյություն չունի:

Այսպիսով՝ $\lambda > 1$ դեպքում $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda} dx$ անիսկական ինտեգրալը գուգամետ է և հավասար է $\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}$, իսկ $\lambda \leq 1$ դեպքում այն տարամետ է: ■

Բացարձակ գուգամիտություն

Սահմանում 9.4: Եթե $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ ինտեգրալը գուգամետ է, ապա ասում են, որ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ -ը բացարձակ գուգամետ է: Նկատենք, որ $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ -ի գուգամիտությունից հետևում է $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ -ի գուգամիտությունը (տե՛ս 9.85), իսկ հակառակը, ընդհանրապես ասած, ճիշտ չէ:

Սահմանում 9.5: Եթե $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ անիսկական ինտեգրալը գուգամետ է, իսկ $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ -ը՝ տարամետ, ապա ասում են, որ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ -ը պայմանական գուգամետ է:

Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշները

Աբելի հայտանիշ: Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $[a; +\infty)$ -ում: Եթե $f(x)$ -ը ինտեգրելի է այնպես, որ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ -ը զուգամետ է գոնե ոչ բացարձակ, իսկ $g(x)$ -ը մոնոտոն է և սահմանափակ՝ $|g(x)| \leq C$; ($C = \text{const}$, $a \leq x < \infty$), ապա $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է:

Դիրիխլեի հայտանիշ: Եթե $f(x)$ -ը ինտեգրելի է կամայական $[a; A]$; ($A > a$) վերջավոր տիրույթում, և $|\phi(A)| = \left| \int_a^A f(x)dx \right| \leq K$; ($K = \text{const}$, $a \leq x < \infty$) սահմանափակ է, իսկ $g(x)$ -ը մոնոտոն ձգտում է զրոյի, երբ $x \rightarrow \infty$, այսինքն՝ $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, ապա $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)dx$ -ը զուգամետ է:

Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշների ապացույցները չենք բերի:

§10. Անհսկական ինտեգրալ անսահմանափակ ֆունկցիայից

Դիցուք $[a; b)$ -ում տրված է $f(x)$ ֆունկցիա: Կասենք՝ b կետը եզակի կետ է, եթե $f(x)$ -ը $[a; b)$ -ում անսահմանափակ է, բայց սահմանափակ է այդ միջակայքում ընկած կամայական $[a; b - \eta]$ ($\eta > 0$) հատվածում: Ենթադրենք նաև, որ կամայական $[a; b - \eta]$; $0 < \eta < b - a$ միջակայքում ֆունկցիան սահմանափակ է և ինտեգրելի:

Նշանակենք՝ $F(\eta) = \int_a^{b-\eta} f(x) dx$ ՝ պարզելու համար այդ

ֆունկցիայի սահմանի գոյությունը $\eta = 0$ կետում:

Սահմանում 9.6: η -ն գրոյի ձգտելիս $\int_a^{b-\eta} f(x) dx$ -ի վեր-

ջավոր կամ անվերջ սահմանը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ սեռի անհսկական ինտեգրալ a -ից մինչև b , և գրում են՝

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0+} \int_a^{b-\eta} f(x) dx: \quad (9.91)$$

Եթե այդ սահմանը վերջավոր է, ապա կասենք, որ 9.91 ինտեգրալը զուգամետ է, և $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a; b]$ -ում: Եթե այդ սահմանը անվերջ է կամ գոյություն չունի, ապա կասենք, որ ինտեգրալը տարամետ է:

Օրինակ: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ֆունկցիան սահմանափակ է և

ինտեգրելի կամայական $[0; 1-\eta]$; $0 < \eta < 1$ միջակայքում, ուստի՝

$$\int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{1-\eta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\arcsin x \Big|_0^{1-\eta} \right) = \frac{\pi}{2} : (9.92)$$

Այսինքն՝ անիսկական ինտեգրալը գոյգամետ է:

Օրինակ: Դիտարկենք $[a; b)$ -ում տրված $f(x) = \frac{1}{(b-x)^\lambda}$,

$\lambda > 0$ ֆունկցիան: Պարզ է, որ b կետը այդ ֆունկցիայի համար եզակի կետ է: Բացի դրանից՝ ֆունկցիան ինտեգրելի է կամայական $[a; b-\eta]$, $0 < \eta < b-a$ հատվածում: Հաշվելով այդ ֆունկցիայի ինտեգրալը՝ կստանանք՝

$$\int_a^{b-\eta} \frac{1}{(b-x)^\lambda} dx = \begin{cases} -\frac{(b-x)^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_a^{b-\eta} = \frac{(b-a)^{1-\lambda} - \eta^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda \neq 1 \\ -\ln(b-x) \Big|_a^{b-\eta} = \ln(b-a) - \ln \eta, & \lambda = 1 \end{cases} :$$

Այստեղից նկատում ենք՝ ինտեգրալը գոյգամետ կլինի, եթե $\lambda < 1$, իսկ $\lambda \geq 1$ դեպքում կլինի տարամետ:

Այս դեպքի համար, երբ b կետը եզակի կետ է, ձևակերպենք Կոշիի գոյգամիտության սկզբունքը:

Թեորեմ 9.14: $\int_a^b f(x) dx$ երկրորդ սեռի ինտեգրալի գոյ-

գամետ լինելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի $\delta > 0$

թիվ, որ կամայական $0 < \eta_1 < \delta$, $0 < \eta_2 < \delta$ թվերի համար

տեղի ունենա $\left| \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Համեմատության հայտանիշ: Երկրորդ սեռի անիսկական ինտեգրալի զուգամիտության հարցը պարզելու համար կարող ենք 9.89 տեսքի համեմատության հայտանիշ այստեղ ևս ձևակերպել:

Պնդում 9.3: Եթե $|f(x)| \leq C(b-x)^{-\lambda}$, որտեղ $\lambda < 1$, ապա $\int_a^b f(x) dx$ -ն զուգամետ է: Եթե $|f(x)| \geq C(b-x)^{-\lambda}$, $C > 0$, $\lambda \geq 1$,

ապա ինտեգրալը տարամետ է:

Ապացույցը ակնհայտ է, հետևում է համեմատության ընդհանուր հայտանիշից և վերևում բերած օրինակից:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է և ինտեգրելի կամայական $[a+\eta; b]$; ($0 < \eta < b-a$) միջակայքում, սակայն անսահմանափակ a կետից աջ կամայական $[a; a+\eta]$ միջակայքում:

Սահմանում 9.5: η -ն զրոյի ձգտելիս $\int_{a+\eta}^b f(x) dx$ -ի վերջավոր կամ անվերջ սահմանը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ սեռի անիսկական ինտեգրալ a -ից մինչև b , և գրում են՝

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx : \quad (9.93)$$

Օրինակ: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ֆունկցիան սահմանափակ է և

ինտեգրելի կամայական $[-1+\eta; 0]$ միջակայքում, ուստի՝

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-1+\eta}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\arcsin x \Big|_{-1+\eta}^0 \right) = \frac{\pi}{2} : (9.94)$$

Հեշտ է ցույց տալ, որ, եթե ունենք $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\lambda} dx$ տեսքի

անիսկական ինտեգրալը, $\lambda < 1$ դեպքում գուգամետ է, իսկ $\lambda \geq 1$ դեպքում՝ տարամետ:

Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար

1. Տրված հատվածը տրոհելով n հավասար մասերի ու տրոհման յուրաքանչյուր հատվածում որպես ξ_i կետ ընտրելով հատվածի միջնակետը՝ կազմել ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարը և հաշվել այն:

1.1 $f(x) = 2x + 1; x \in [-2; 5]$, 1.2 $f(x) = x^2 + 2x; x \in [1; 8]$,

1.3 $f(x) = x + 3; x \in [2; 6]$, 1.4 $f(x) = 2x^2 + 3x; x \in [3; 7]$,

1.5 $f(x) = 5x - 2; x \in [3; 9]$, 1.6 $f(x) = 3x^2 + x; x \in [0; 6]$:

2. Տրված հատվածը տրոհելով n հավասար մասերի՝ կազմել Դարբուի վերին ու ստորին գումարները:

2.1 $f(x) = -x + 3; x \in [-1; 3]$, 2.2 $f(x) = 2x^2 + 3x; x \in [1; 4]$,

2.3 $f(x) = 3x + 4; x \in [0; 8]$, 2.4 $f(x) = x^2 - 2x; x \in [2; 5]$,

2.5 $f(x) = 2 - 3x; x \in [-4; 0]$, 2.6 $f(x) = -2x^2 - x; x \in [-6; -2]$:

3. Հաշվել հաջորդականության սահմանը՝ այն ներկայացնելով որպես որոշակի ֆունկցիայի ինտեգրալային գումար:

$$3.1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{4}{n} + \frac{6}{n} + \dots + \frac{2n-2}{n} \right) \frac{3}{n},$$

$$3.2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2n+2} + \frac{3}{2n+4} + \frac{3}{2n+6} + \dots + \frac{3}{4n} \right),$$

$$3.3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n^2+2} + \frac{n}{2n^2+8} + \frac{n}{2n^2+18} + \dots + \frac{n}{4n^2} \right),$$

$$3.4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right),$$

$$3.5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right),$$

$$3.6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n} \right):$$

4. Օգտվելով Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևից՝ հաշվել ինտեգրալը.

$$4.1 \int_0^3 (9 - x^3)^2 dx,$$

$$4.2 \int_0^3 (9 - x^3)^2 dx,$$

$$4.3 \int_2^5 x^2 (1 - x^2)^3 dx,$$

$$4.4 \int_{-1}^4 (2x + x^2)^2 dx,$$

$$4.5 \int_1^4 \frac{(x+1)(1-x^2)}{x^3 \sqrt{x}} dx,$$

$$4.6 \int_{-3}^{+2} \frac{(2+x+x^2)^3}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx,$$

$$4.7 \int_{-1}^5 \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)(2+x^3)}{x^2 \sqrt[5]{x^3}} dx,$$

$$4.8 \int_{-5}^{+5} \frac{(2x+3x^3+2x^2)^2}{\sqrt{x}} dx,$$

$$4.9 \int_3^8 \frac{(2^x + 3)(3^x - 2)}{5^x} dx,$$

$$4.10 \int_{-2}^3 \frac{(2^{x+2} - 5^{x+1})}{10^x} dx:$$

5. Կատարելով հարմար նշանակում՝ հաշվել ինտեգրալը.

$$5.1 \int_0^1 x^2 \sqrt[3]{1-x} dx, \quad 5.2 \int_2^3 (1-5x^2) x^3 dx,$$

$$5.3 \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{3-x}} dx,$$

$$5.4 \int_e^{e^2} \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1+\ln x}},$$

$$5.5 \int_2^3 x^5 (2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx,$$

$$5.6 \int_1^4 (1+e^x)^{-\frac{1}{2}} dx:$$

6. Կատարելով մասերով ինտեգրում՝ հաշվել ինտեգրալը.

$$6.1 \int_3^{e^2} x^2 \ln x \cdot dx,$$

$$6.2 \int_1^2 \sqrt{x} \ln^2 x \cdot dx,$$

$$6.3 \int_2^3 x^2 e^{-2x} \cdot dx,$$

$$6.4 \int_1^2 x^2 \arcsin x \cdot dx,$$

$$6.5 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x \cdot dx,$$

$$6.6 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cos x \cdot dx,$$

$$6.7 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin^2 x \cdot dx,$$

$$6.8 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cos^2 x \cdot dx,$$

$$6.9 \int_1^{\frac{\pi}{3}} x \arctg x \cdot dx, \quad 6.10 \int_1^{\frac{\pi}{4}} x \ar \cos x \cdot dx:$$

7. Հաշվել անիսկական ինտեգրալը.

$$7.1 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}, \quad 7.2 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3},$$

$$7.3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

$$7.4 \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2},$$

$$7.5 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$7.6 \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}},$$

$$7.7 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2},$$

$$7.8 \int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt[3]{x-1}}:$$

ԳԼՈՒԽ 10

ԿՈՐԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ, ՊԱՏԿԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍ, ՄԱՐՄՆԻ ԾԱՎԱԼ

§ 1. Կորի երկարության սահմանումն ու աղիտիվության հատկությունը: Ողորկ կորի երկարության բանաձևը

Դիցուք $[\alpha; \beta]$ միջակայքում տված են $x = \varphi(t)$ և $y = \psi(t)$ անընդհատ ֆունկցիաներ: Այս ֆունկցիաների t արգումենտն այնուհետև կանվանենք պարամետր: Դիտարկենք x և y թվերի բոլոր հնարավոր (x, y) թվագույգերի համախմբությունը: Յուրաքանչյուր այդպիսի թվագույգ կանվանենք հարթության կետ՝ գրելով $M(x, y)$: Այս դեպքում ասում են, որ կետն ունի x ու y կոորդինատներ:

Եթե որպես t պարամետր ընդունենք ժամանակը, ապա $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ հավասարումներով որոշվում է $M(x, y)$ կետի շարժման օրենքը: Արդյունքում t պարամետրի $[\alpha, \beta]$ միջակայքի բոլոր հնարավոր արժեքների համար որոշվող M կետերի $\{M\}$ բազմությունը կնշագծի M կետի շարժման հետագիծը:

Սահմանում 10.1: Պարզ կոր: M կետերի $\{M\}$ բազմությունը, որոնց կոորդինատները $t \in [\alpha, \beta]$ դեպքում որոշվում են $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ հավասարումներով, անվանում են L

պարզ կոր, եթե t պարամետրի տարբեր արժեքներին համապատասխանում են $\{M\}$ բազմության տարբեր կետեր:

Այդպիսի յուրաքանչյուր M կետ անվանում են կորի կետ, ընդ որում՝ $t = \alpha$ և $t = \beta$ արժեքներին համապատասխանող կետերը անվանում են կորի ծայրակետեր:

Այդպիսի դեպքում ասում են, որ կորը տրված է պարամետրական տեսքով:

Օրինակ: Պարզ կորի օրինակ է R շառավղով կիսաշրջանագիծը, որի հավասարումները տրված են $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$ տեսքով:

Պարզ կորի ընդհանուր տեսքի օրինակ կարող է լինել $[\alpha, \beta]$ -ում որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Այն կարող ենք գրել պարամետրական տեսքով, եթե նշանակենք $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$:

Փակ կոր: Դիցուք L_1 -ն ու L_2 -ը երկու տարբեր պարզ կորեր են: Եթե L_1 -ի ու L_2 -ի ծայրակետերը համընկնում են, իսկ դրանց ցանկացած այլ կետեր միմյանցից տարբեր են, ապա L_1 -ի և L_2 -ի միավորված կորը անվանում են փակ կոր:

Մաթեմատիկական անալիզում հանդիպում ենք նաև ոչ պարզ կորերի: Սրանք ունենում են ինքնահատումներ կամ որոշ տեղամասերի վրա համընկնում են: Այդ պատճառով անհրաժեշտություն է առաջանում դիտարկելու պարամետրացվող կորերը:

Ենթադրենք, որ t պարամետրի $\{t\}$ բազմությունը հատված, կիսափակ կամ բաց միջակայք է:

Սահմանում 10.2: Տրոհում: Կասենք $\{[t_{i-1}, t_i]\}$ հատվածների վերջավոր կամ անվերջ բազմությունը տրոհում է $\{t\}$ բազմությունը, եթե դրանց միավորումը ամբողջ $\{t\}$ բազմությունն է, և այդ հատվածներից կամայական երկուսի համար միայն նրանց ծայրակետերն են ընդհանուր:

Օրինակ: $[n-1, n]$ հատվածների համախումբը, որտեղ n -ը կամայական ամբողջ թիվ է, տրոհում է ամբողջ թվային առանցքը:

Դիցուք $\{t\}$ բազմության վրա որոշված $\varphi(t)$ ու $\psi(t)$ ֆունկցիաները անընդհատ են:

Սահմանում 10.3: Կասենք $\varphi(t)$ ու $\psi(t)$ ֆունկցիաները նկարագրում են պարամետրացվող L կոր, եթե գոյություն ունի $\{t\}$ բազմությունը տրոհող $\{[t_{i-1}, t_i]\}$ հատվածների այնպիսի համակարգ, որ յուրաքանչյուր հատվածից վերցրած t պարամետրի արժեքով $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ հավասարումները նկարագրում են պարզ կոր:

Այսպիսով՝ պարամետրացվող կորը կարելի է դիտարկել որպես պարզ կորերի միավորում: Ընդ որում՝ M ընթացիկ կետի կոորդինատները ստացվում են t պարամետրի արժեքների աճմանը զուգընթաց: Նշենք, որ տարածական կորը սահմանվում է նույն եղանակով, ինչպես հարթության դեպքում: Այսինքն՝ տարածական պարզ կորի M ընթացիկ կետի կոորդինատները համապատասխանաբար որոշվում են $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \lambda(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ հավասարումներով:

Տանք պարամետրացվող կորի աղեղի երկարության գաղափարը: Դիտարկենք հարթության վրա տրված այնպիսի ոչ փակ կորեր, որոնց աղեղն ունի երկարություն (դրանց անվանում ենք ուղղելի կորեր): Դիցուք L կորը (Նկ. 10.1) տրված է պարամետրական հավասարումներով՝

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta), \quad (10.1)$$

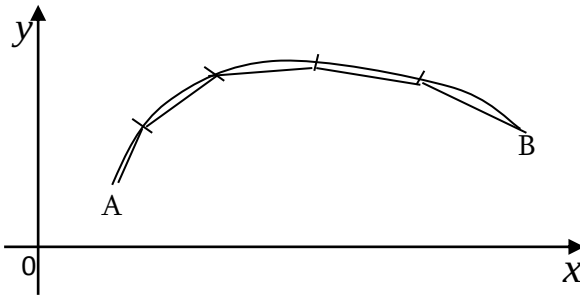
որտեղ $\varphi(t)$ և $\psi(t)$ ֆունկցիաները անընդհատ են, և տեղի ունեն հետևյալ կապերը՝

$$x_A = \varphi(\alpha), \quad x_B = \varphi(\beta), \quad y_A = \psi(\alpha), \quad y_B = \psi(\beta): (10.2)$$

Եթե $t \in [\alpha, \beta]$ տիրույթը կամայական ձևով բաժանենք մասերի՝

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta, \quad (10.3)$$

ապա 10.1 բանաձևերով AB կորը նույնպես կբաժանվի մասերի $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ կետերով: Այստեղ՝

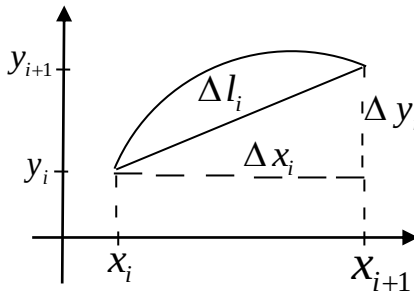


Նկար 10.1

$A = M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0)), \quad M_1(\varphi(t_1), \psi(t_1)), \quad M_2(\varphi(t_2), \psi(t_2)),$
 $\dots, \quad M_n(\varphi(t_n), \psi(t_n)) = B$: Այդ $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ բաժանման կետերը հատվածներով միացնելով՝ ստացված բեկյալը

կանվանենք L կորին ներգծած: Բեկյալի i -րդ հատվածի երկարությունը նշանակենք $|l_i|$, որը $M_{i-1}(\varphi(t_{i-1}), \psi(t_{i-1}))$ ու $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ կետերը միացնող հատվածի երկարությունն է (Նկ. 10.2).

$$|l_i| = \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2} : \quad (10.4)$$



Նկար 10.2

Ամբողջ բեկյալի երկարությունը կլինի՝

$$|l| = \sum_{i=1}^n |l_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2} : \quad (10.5)$$

Սահմանում 10.4: L կորը կանվանենք ուղղելի, եթե $[\alpha, \beta]$ հատվածի կամայական տրոհումից առաջացած կորին ներգծած բեկյալների երկարությունների $\{|l|\}$ բազմությունը սահմանափակ է: Այդ $\{|l|\}$ բազմության վերին ճշգրիտ եզրը անվանում են L կորի երկարություն՝ գրելով $|L| = \sup \{|l|\}$:

Թեորեմ 10.1: Դիցուք $x = \varphi(t)$ և $y = \psi(t)$ ֆունկցիաները իրենց ածանցյալների հետ միասին անընդհատ են $[\alpha, \beta]$ -ում: Այդ դեպքում L կորը, որը որոշվում է $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $(\alpha \leq t \leq \beta)$ հավասարումներով, ուղղելի է: Իսկ նրա երկարությունը կհաշվվի հետևյալ բանաձևով՝

$$|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt : \quad (10.6)$$

Ապացույց: Նախ ապացուցենք, որ L կորը ուղղելի է: Կորին ներգծած բեկյալի երկարությունը գտնելու համար ունենք 10.5 բանաձևը: Իսկ $\varphi(t)$ ու $\psi(t)$ ֆունկցիաների համար յուրաքանչյուր $[t_{i-1}, t_i]$ հատվածի վրա բավարարված են Լագրանժի թեորեմի պայմանները: Հետևաբար $[t_{i-1}, t_i]$ հատվածի վրա կգտնվեն այնպիսի ξ_i և η_i կետեր, որ $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i) \Delta t_i$, $\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \varphi'(\eta_i) \Delta t_i$ որտեղ $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$: Այսպիսով՝ կունենանք՝

$$|l| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\eta_i))^2} \Delta t_i : \quad (10.7)$$

Քանի որ ըստ թեորեմի պայմանի՝ $\varphi(t)$ և $\psi(t)$ ֆունկցիաները $[\alpha, \beta]$ -ում ունեն անընդհատ ածանցյալներ, ապա դրանք սահմանափակ են: Այսինքն՝ $\forall t \in [\alpha, \beta]$ -ի համար $|\varphi'(t)| \leq M$, $|\psi'(t)| \leq M$: Հետևաբար 10.7-ից կստանանք՝

$$0 < |l| = \sum_{i=1}^n \sqrt{M^2 + M^2} \Delta t_i = M \sqrt{2} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = M \sqrt{2} (\beta - \alpha) :$$

Ստացանք, որ կամայական տրոհման համար L կորին ներգծած բեկյալների երկարությունների $\{|l|\}$ բազմությունը սահմանափակ է, այսինքն՝ կորն ուղղելի է:

Ապացուցենք 10.6 բանաձևը: Դիտարկենք $\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$ ինտեգրելի ֆունկցիայի հետևյալ ինտեգրալին գումարը, որը համապատասխանում է $[\alpha, \beta]$ հատվածի տրոհմանը՝

$$\sigma(t_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\xi_i))^2} : \quad (10.8)$$

Նշանակենք $d = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i$ և ապացուցենք, որ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta > 0$ թիվ, որ $d < \delta$ անհավասարությունից հետևում է $\|l\| - I < \varepsilon$, որտեղ $I = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(t_i, \xi_i)$:

$$\text{Այսինքն՝ } I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt :$$

Ապացուցման համար օգտվենք հետևյալ հայտնի անհավասարությունից՝ $\sqrt{a^2 + b_1^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \leq |b_1 - b|$: Կիրառման արդյունքում կունենանք՝

$$\left| \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\eta_i))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\xi_i))^2} \right| < |\psi'(\eta_i) - \psi'(\xi_i)| < M_i - m_i : \quad (10.9)$$

Այստեղ M_i -ն ու m_i -ն $\psi(t)$ ֆունկցիայի $[t_{i-1}, t_i]$ միջակայքում ունեցած արժեքների բազմության վերին և ստորին ճշգրիտ եզրերն են:

Օգտվենք 10.9-ից և գնահատենք $\|l\| - \sigma$ -ն.

$$\begin{aligned}
\|I - \sigma\| &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\eta_i))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\xi_i))^2} \right) \Delta t_i \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left| \left(\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\eta_i))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\xi_i))^2} \right) \right| \Delta t_i \\
&\leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta t_i = S - s, \tag{10.10}
\end{aligned}$$

որտեղ S -ն ու s -ը $\psi'(t)$ ֆունկցիայի $[\alpha; \beta]$ միջակայքի տրոհմանը համապատասխանող Դարբուի գումարներն են։ Քանի որ $\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$ ու $\psi'(t)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[\alpha; \beta]$ -ում, ուրեմն ինտեգրելի են։ Այստեղից էլ, ըստ ինտեգրելիության պայմանի, $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta > 0$ թիվ, որ $d < \delta$ անհավասարությունից ակնհայտ է՝

$$|\sigma(t_i, \xi_i) - I| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |S - s| < \frac{\varepsilon}{4}: \tag{10.11}$$

Հետևաբար $d < \delta$ դեպքում նկատի ունենալով 10.10-ն ու 10.11-ը՝ կունենանք՝

$$\|I - I\| = \|I - \sigma + \sigma - I\| \leq \|I - \sigma\| + |\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}: \quad \blacksquare \tag{10.12}$$

Ապացուցենք, որ բոլոր հնարավոր l բեկյալների բազմության մեջ, որոնց $|l|$ երկարությունները բավարարում են 10.12-ը, կան այնպիսիները, որոնց երկարությունները L կորի $|L|$ երկարությունից տարբերվում են $\frac{\varepsilon}{2}$ -ով:

Քանի որ $|L|$ -ը $\{|l|\}$ բազմության վերին ճշգրիտ եզրն է, ապա կգտնվի այնպիսի T^* տրոհում, ըստ որի՝ l^* բեկյալի՝ $|l^*|$ երկարության և L կորի՝ $|L|$ երկարության համար կունենանք՝

$$\|L - l^*\| < \frac{\varepsilon}{2}: \quad (10.13)$$

Եթե T^* տրոհումը մանրացնենք ու նոր տրոհումը նշանակենք T , իսկ այդ տրոհման համապատասխան բեկյալը՝ l , ապա կարող ենք գրել՝ $0 < |l^*| \leq |l| \leq |L|$: Ուստի 10.13-ի համաձայն՝ տեղի կունենա նաև $0 \leq |L| - |l| < \frac{\varepsilon}{2}$: Այսպիսով՝ 10.12-ից ու 10.13-ից կստանանք $\|L - l\| < \varepsilon$, իսկ քանի որ ε -ը կամայական դրական թիվ է, ուրեմն $|L| = l$: ■

Հետևանք: Եթե L կորը $[a, b]$ հատվածում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն է, որն ունի $[a, b]$ -ում անընդհատ ածանցյալ, ապա կորը ուղղելի է, և նրա երկարությունը որոշվում է հետևյալ՝

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (10.14)$$

բանաձևով:

Դիցուք

$$y = f(x), \quad (a \leq x \leq b) \quad (10.15)$$

կորը ներկայացնենք պարամետրական տեսքով: Նշանակենք $x = t$, $y = f(t)$, $(a \leq t \leq b)$ և 10.6 բանաձևի մեջ ընդունելով $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = f(t)$ ՝ կստանանք՝

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx : \quad (10.16)$$

Դիցուք կորը տրված է բևեռային կոորդինատներով՝

$$r = g(\varphi); \quad (\theta_0 \leq \varphi \leq \theta): \quad (10.17)$$

$g(\varphi)$ -ն իր ածանցյալի հետ միասին անընդհատ է: Օգտվելով դեկարտյան ու բևեռային կոորդինատների միջև եղած հայտնի կապից՝

$$x = r \cos \varphi = g(\varphi) \cos \varphi, \quad y = g(\varphi) \sin \varphi, \quad (\theta_0 \leq \varphi \leq \theta) \quad (10.18)$$

և 10.6 բանաձևից՝ կստանանք.

$$|L| = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi : \quad (10.19)$$

Օրինակ: Գտնել հետևյալ կորի երկարությունը.

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi:$$

Լուծում: Կիրառելով 10.6 բանաձևը՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} |L| &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(t - \sin t))' ^2 + (a(1 - \cos t))' ^2} dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a: \end{aligned}$$

Օրինակ: Գտնել կորի աղեղի երկարությունը.

$$y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq b < a:$$

Լուծում: Օգտվելով 10.16 բանաձևից՝ գրենք.

$$y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2} = 2a^2 \ln a - a \ln(a^2 - x^2),$$

$$|L| = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{2ax}{a^2 - x^2} \right)^2} dx = \int_0^b \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} dx = a \ln \frac{a+b}{a-b} - b :$$

Օրինակ: Գտնել հետևյալ կորի երկարությունը.

$$r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3} :$$

Լուծում: Պարզ է, որ $0 \leq \frac{\varphi}{3} \leq \pi$, այսինքն՝ $0 \leq \varphi \leq 3\pi$:

Կիրառելով 10.19 բանաձևը՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} |L| &= \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}} d\varphi = \\ &= \frac{a}{2} \int_0^{3\pi} \left(1 - \cos \frac{2\varphi}{3} \right) d\varphi = \frac{3\pi a}{2} : \end{aligned}$$

Աղեղի երկարության կարևոր հատկությունը, որը կրե-
րենք առանց ապացույցի, նրա աղիտիվությունն է (գումարա-
կանությունը): Այն հետևյալն է. եթե AB աղեղի վրա վերցնենք
որևէ C կետ, ապա AB աղեղի ուղղելիությունից բխում է
և՛ AC , և՛ CB աղեղների ուղղելիությունը: Տեղի կունենա
հետևյալը. AB աղեղի երկարությունը հավասար է AC ու CB
աղեղների երկարությունների գումարին:

§ 2. Հարթ պատկերի մակերեսի սահմանումը: Կորագիծ սեղանի մակերեսի բանաձևը, կորագիծ սեկտորի մակերեսը

Հարթ պատկերի մակերեսի գաղափարը տալու համար նախ դիտարկենք դրա մասնավոր դեպքը, որը բազմանկյուն տիրույթն է:

Հարթության վրա բազմանկյուն տիրույթ ասելով՝ հասկանում ենք այն տիրույթը, որը սահմանափակված է վերջավոր թվով եռանկյունների համախմբությամբ:

Հետագայում բազմանկյուն տիրույթը կնշանակենք P , իսկ մակերեսը՝ $S(P)$, որը եռանկյունների մակերեսների գումարն է:

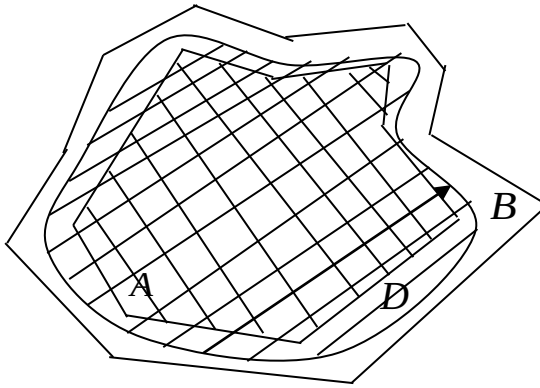
Բազմանկյուն տիրույթի մակերեսն ունի հետևյալ հատկությունները՝ ադիտիվություն, ինվարիանտություն, մոնոտոնություն:

Ադիտիվություն: Եթե P_1 -ն ու P_2 -ը իրար հետ չհասկվող բազմանկյուն տիրույթներ են, ապա՝
 $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$:

Ինվարիանտություն: Եթե $P_1 = P_2$, ապա $S(P_1) = S(P_2)$:

Մոնոտոնություն: Եթե $P_1 \subset P_2$, ապա $S(P_1) \leq S(P_2)$:

Ենթադրենք հարթության վրա կա փակ ու սահմանափակ կամայական D տիրույթ: Դիտարկենք D -ի մեջ ընկած բոլոր հնարավոր բազմանկյուն տիրույթների $\{A\}$ բազմությունն ու D -ն ընդգրկող բոլոր հնարավոր բազմանկյուն տիրույթների $\{B\}$ բազմությունը (Նկ. 10.3):



Նկար 10.3

Նշանակենք $S(A)$ -ով A բազմանկյուն տիրույթի մակերեսը, իսկ $S(B)$ -ով՝ B բազմանկյուն տիրույթի մակերեսը: Պարզ է, որ $S(A) \leq S(B)$: Պարզ է նաև, որ $\{A\}$ բազմությունը սահմանափակված է վերևից կամայական B -ով, ուստի այդ $\{A\}$ բազմությունը ունի վերին ճշգրիտ եզր՝ S_* : Նման ձևով $\{B\}$ բազմությունն ունի ստորին ճշգրիտ եզր՝ S^* : Այսինքն՝ $S_* = \sup \{A\}$ անվանում են D տիրույթի ներքին մակերես, իսկ $S^* = \inf \{B\}$ անվանում են D տիրույթի արտաքին մակերես:

Եթե $S_* = \sup \{A\} = S^* = \inf \{B\}$, ապա այդ արժեքը անվանում են D տիրույթի մակերես, իսկ D տիրույթն անվանում են քառակուսելի:

Թեորեմ 10.2: D տիրույթի քառակուսելի լինելու համար անհրաժեշտ ու բավարար, որ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար

գոյություն ունենան այնպիսի $A \subset D$ ու $D \subset B$ բազմանկյուններ, որ.

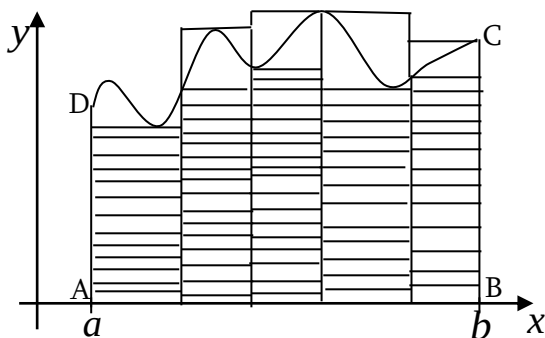
$$S(B) - S(A) < \varepsilon : \quad (10.20)$$

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք D տիրույթը քառակուսելի է, այսինքն՝ $S_* = S^*$: Հետևաբար ըստ ճշգրիտ եզրերի սահմանման՝ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունեն $A \subset D$ և $D \subset B$ այնպիսի բազմանկյուններ, որ $S_* - \frac{\varepsilon}{2} < S(A) \leq S_*$, $S^* \leq S(B) < S^* + \frac{\varepsilon}{2}$: Այս անհավասարություններից ու $S_* = S^*$ պայմանից կստացվի $S(B) - S(A) < \varepsilon$: Անհրաժեշտությունը ապացուցվեց:

Քաղաքարություն: Դիցուք կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունեն $A \subset D$ ու $D \subset B$ բազմանկյուն տիրույթներ, որոնց համար տեղի ունի $S(B) - S(A) < \varepsilon$ անհավասարությունը: Քանի որ $S(A) \leq S_* \leq S^* \leq S(B)$, ապա 10.20-ից պարզ կդառնա, որ $S_* = S^*$: ■

Մակերեսի արտահայտումն ինտեգրալով

Դիտարկենք $x = a$, $x = b$, $y = 0$ ուղիղներով և $y = f(x)$ կորով սահմանափակված կորագիծ սեղանը (Նկ. 10.4):



Նկար 10.4

Այս կորագիծ սեղանի մակերեսը հաշվելու համար $[a; b]$ հատվածը բաժանենք մասերի՝

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b :$$

Յուրաքանչյուր $[x_i; x_{i+1}]$; $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ հատվածի վրա $f(x)$ ֆունկցիայի փոքրագույն ու մեծագույն արժեքները համապատասխանաբար նշանակենք m_i և M_i -ով: Կազմենք Շարբուի ստորին ու վերին գումարները՝

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i ; \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i : \quad (10.21)$$

Պարզ է, որ s -ը կորագիծ սեղանին ներգծած ուղղանկյունների մակերեսների գումարն է, իսկ S -ը՝ արտագծած ուղղանկյունների մակերեսների գումարը:

Այդ ներգծած ուղղանկյունները ներգծած բազմանկյուն տիրույթն են, իսկ արտագծած ուղղանկյունները՝ արտագծած բազմանկյունը, հետևաբար՝

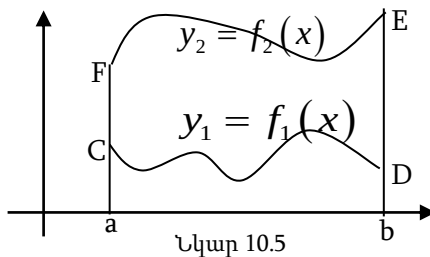
$$s \leq S_{ABCD} \leq S : \quad (10.22)$$

Երբ $\lambda = \max_i \Delta x_i \rightarrow 0$, ապա S -ն ու S -ը կունենան նույն սահմանը, հետևաբար՝

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x) dx: \quad (10.23)$$

Եթե կորագիծ սեղանը և՛ վերևից, և՛ ներքևից սահմանափակված է $y_2 = f_2(x)$ ու $y_1 = f_1(x)$ կորերով (Նկ. 10.5), ապա՝

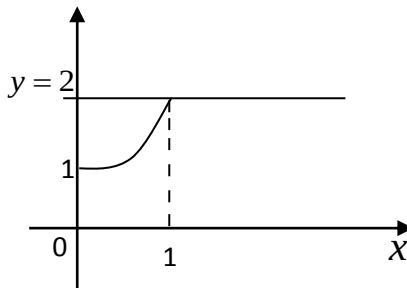
$$S_{CDEF} = \int_a^b (y_2 - y_1) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx: \quad (10.24)$$



Օրինակ: Գտնել հետևյալ կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$y = 2^x, \quad y = 2, \quad x = 0:$$

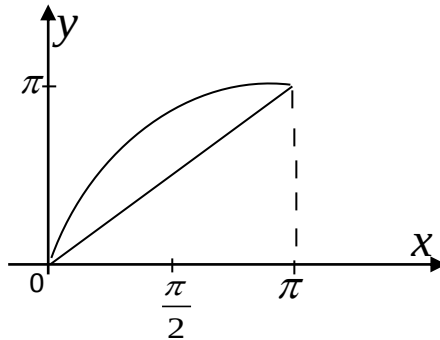
Լուծում: Ուղղանկյուն կորդինատական համակարգում կառուցենք այդ կորերի գրաֆիկները:



Կիրառելով 10.24 բանաձևը՝ կստանանք՝

$$S = \int_0^1 (2 - 2^x) dx = 2x \Big|_0^1 - \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{\ln 2} :$$

Օրինակ: Գտնել $y = x$ և $y = x + \sin^2 x$, $0 \leq x \leq \pi$ կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

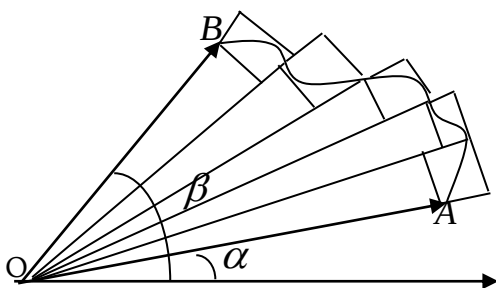


Լուծում: Օգտվելով 10.24 բանաձևից՝ գրենք՝

$$S = \int_0^{\pi} ((x + \sin^2 x) - x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} :$$

Կորագիծ սեկտորի մակերեսը

Դիցուք հարթության վրա տրված է AOB կորագիծ սեկտորը, որը սահմանափակված է AB կորով, OA և OB շառավիղ վեկտորներով (Նկ. 10.5):



Նկար 10.5

Այս դեպքում AB կորը տված է $r = g(\varphi): (\alpha \leq \varphi \leq \beta)$ հավասարմամբ: $[\alpha: \beta]$ տիրույթը բաժանենք մասերի, $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_i < \varphi_{i+1} < \dots < \varphi_n = \beta$, արդյունքում AB կորը կբաժանվի մասերի: $g(\varphi)$ ֆունկցիայի մեծագույն ու փոքրագույն արժեքները $[\varphi_i: \varphi_{i+1}]$ հատվածի վրա նշանակենք համապատասխանաբար M_i և m_i , որոնք հանդես կգան որպես շառավիղներ: Հետևաբար ներգծած սեկտորների մակերեսների գումարը կլինի՝

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2} \sum_i m_i^2 \Delta \varphi_i, \quad (10.25)$$

իսկ արտագծած սեկտորների մակերեսների գումարը՝

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \sum_i M_i^2 \Delta \varphi_i: \quad (10.26)$$

Պարզ է, որ $\sigma_{\min} < S_{AOB} < \sigma_{\max}$, և բացի դրանից՝ $\sigma_{\min}$ -ն ու

$\sigma_{\max}$ -ը կլինեն $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g^2(\varphi) d\varphi$ ինտեգրալի համար Դարբուի

գումարներ:

Այսպիսով՝ ստանում ենք, որ AOB կորագիծ սեկտորի մակերեսը կհաշվվի հետևյալ բանաձևով՝

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g^2(\varphi) d\varphi : \quad (10.27)$$

Օրինակ: Գտնել բևեռային կոորդինատական համակարգում տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

$$r = \frac{P}{1 - \cos \varphi}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} :$$

Լուծում: Կիրառելով 10.27 բանաձևը՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{P^2}{(1 - \cos)^2} d\varphi = \frac{P^2}{8} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^4} d\varphi = -\frac{P^2}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} d \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \\ &= -\frac{P^2}{4} \left[\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \frac{\operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2}}{3} \right] \bigg|_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{P^2}{6} (3 + 4\sqrt{2}) : \end{aligned}$$

Մարմնի ծավալի սահմանումն ու արտահայտումը որոշյալ ինտեգրալով

Հարթ պատկերի մակերեսի սահմանման մեթոդիկան օգտագործենք տարածական որևէ մարմնի ծավալի սահմանման համար և գտնենք բանաձև այդ ծավալի հաշվման համար:

Դիցուք տված է որևէ (V) մարմին, որի եզրը (S) փակ մակերևույթ է կամ մակերևույթների խումբ:

Դիտարկենք այդ (V) մարմնում ընկած ու V_A ծավալ ունեցող բազմանիստ մարմինների $\{V(A)\}$, ինչպես նաև (V) մարմինն ընդգրկող ու V_B ծավալ ունեցող բազմանիստ մարմինների $\{V(B)\}$ բազմությունը:

Նշենք, որ բազմանիստ մարմինը վերջավոր թվով եռանկուն բուրգերի միավորումն է, իսկ ծավալը՝ այդ բուրգերի ծավալների գումարը:

Քանի որ $\{V(A)\}$ -ն սահմանափակված է վերևից, իսկ $\{V(B)\}$ -ն՝ ներքևից, ապա միշտ գոյություն ունի $\{V(A)\}$ -ի համար վերին ճշգրիտ եզր, իսկ $\{V(B)\}$ -ի համար՝ ստորին ճշգրիտ եզր:

Նշանակենք՝

$$V_* = \sup \{V(A)\}, V^* = \inf \{V(B)\}: \quad (10.28)$$

Պարզ է, որ $V_* \leq V^*$:

Սահմանում 10.5: Կասենք (V) մարմինը խորանարդելի է կամ ունի ծավալ, եթե $V_* = V^*$:

Այդ դեպքում $V = V_* = V^*$ կանվանենք (V) մարմնի ծավալ:

Այսպիսով՝ կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեմը, որն ապացուցվում է ճիշտ նույն եղանակով, ինչպես թեորեմ 10.2-ի ապացույցը:

Թեորեմ 10.3: (V) մարմինը խորանարդելի լինելու համար (ունենա ծավալ) անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենան այնպիսի $V(A)$ և $V(B)$ բազմանիստ մարմիններ, որ նրանց ծավալների տարբերության համար բավարարվի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$V_B - V_A < \varepsilon : \quad (10.29)$$

Սահմանում 10.6: Կասենք՝ տարածության կետերի բազմությունն ունի զրո ծավալ, եթե այն ընկած է անվերջ փոքր ծավալ ունեցող բազմանիստ մարմնի մեջ:

Թեորեմ 10.4: (V) մարմինը խորանարդելի լինելու համար (ունենա ծավալ) անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն սահմանափակող (S) մակերևույթն ունենա զրո ծավալ:

Հարթ պատկերի մակերեսի նման ծավալը նույնպես օժտված է ադիտիվության հատկությամբ: Այսինքն, եթե (V) մարմինը բաժանվում է երկու՝ (V_1) ու (V_2) մարմինների, ապա դրանց ծավալի գոյությունից պարզ կլինի (V) -ի ծավալի գոյությունը: Ընդ որում՝

$$V = V_1 + V_2 : \quad (10.30)$$

Դիցուք տված է որևէ (V) մարմին, որը գտնվում է $x = a$ ու $x = b$ հարթությունների միջև: Այդ մարմինը հատենք X -երի առանցքին ուղղահայաց հարթությամբ, ստացված հատույթի մակերեսը, որը կախված է X -ից, նշանակենք

$P(x)$: Ապացուցենք, որ այդ մարմնի ծավալը կարտահայտվի հետևյալ՝

$$V = \int_a^b P(x) dx \quad (10.31)$$

բանաձևով:

Իրոք, $[a; b]$ հատվածը տրոհենք մասերի հետևյալ կերպ՝

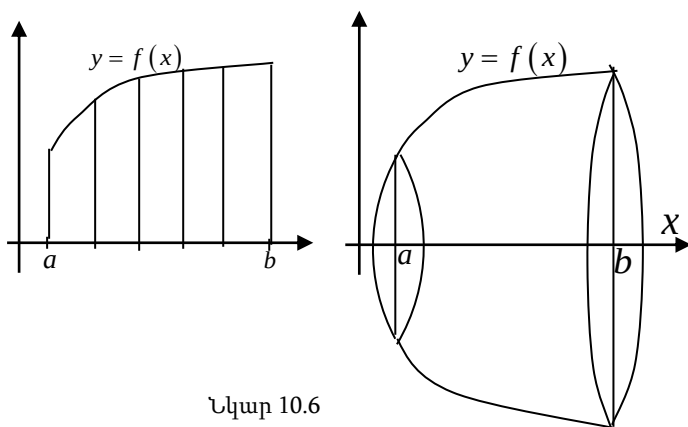
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b: \quad (10.24)$$

Պարզ է, որ այդ տրոհման կետերով յուրաքանչյուր $[x_i; x_{i+1}]$, $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ հատվածներով մարմինը կբաժանվի շերտերի, որում $P(x)$ հատույթը՝ որպես ֆունկցիա, կունենա M_i մեծագույն ու m_i փոքրագույն արժեքներ: Եթե այդ մեծագույն ու փոքրագույն հատույթների վրա կառուցենք զլաններ, ապա մեծագույն արժեքով կառուցված զլանը կպարունակի մարմնի համապատասխան շերտը, իսկ փոքրագույնի վրա կառուցված զլանը ընկած կլինի շերտի մեջ: Հետևաբար արդյունքում կստանանք, որ մարմինն ընդգրկող զլանների ծավալների գումարը կլինի՝

$$V_1 = \sum_i M_i (x_{i+1} - x_i), \quad (10.32)$$

իսկ մարմնի մեջ ընկած զլանների ծավալների գումարը՝

$$V_2 = \sum_i m_i (x_{i+1} - x_i): \quad (10.33)$$



Նկար 10.6

Այս գումարների սահմանները, երբ
 $\lambda = \max_i (x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0$ նույնն են և հավասար կլինեն

$$V = \int_a^b P(x) dx :$$

■

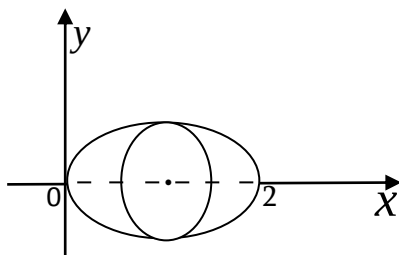
Ենթադրենք, որ $f(x)$ ոչ բացասական ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է $[a; b]$ հատվածի վրա:

Կորագիծ սեղանը Ox առանցքի շուրջը պտտելիս ստացված մարմնի ծավալը, ըստ 10.31 բանաձևի, կլինի՝

$$V = \int_a^b P(x) dx = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx : \quad (10.34)$$

Օրինակ: Գտնել $y = 2x - x^2$, $y = 0$ կորերով սահմանափակված պատկերը Ox և Oy առանցքների շուրջը պտտելիս ստացված մարմինների ծավալները:

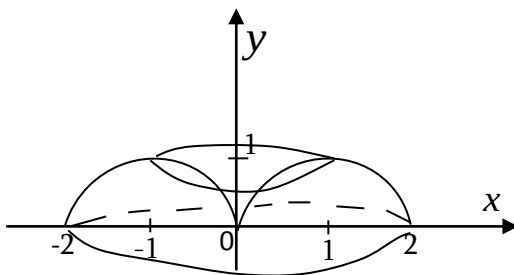
Լուծում: ա) Կառուցենք այդ կորերի գրաֆիկները և Ox առանցքի շուրջը պտտելիս ստացված մարմնի ծավալը հաշվելու համար կիրառենք 10.34 բանաձևը, կստանանք՝



Նկար 10.7

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \bigg|_0^2 = \frac{16}{15} \pi :$$

բ) Oy առանցքի շուրջը պտտելիս կստանանք՝



$$y = 2x - x^2 \text{ -ից՝ } x_1 = 1 - \sqrt{1 - y}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{1 - y} :$$

Հետևաբար ստացված մարմնի ծավալը հաշվելու համար կուենենանք՝

$$V = \pi \int_0^1 \left[(1 + \sqrt{1 - y})^2 - (1 - \sqrt{1 - y})^2 \right] dy = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 - y} dy = \frac{8\pi}{3} :$$

Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար

1. Գտնել կորի աղեղի երկարությունը:

$$1.1 \quad y = 4x^{\frac{5}{4}}; \quad x \in [0; 3], \quad 1.2 \quad y = 5x^{\frac{6}{5}}; \quad x \in [1; 4],$$

$$1.3 \quad y = \frac{1}{\ln 2} 2^x; \quad x \in [1; 4], \quad 1.4 \quad y = \frac{1}{2 \ln 3} 3^{2x}; \quad x \in [1; 2],$$

$$1.5 \quad y = \sin(2x); \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right], \quad 1.6 \quad y = \ln \cos x; \quad x \in [0; 1.5],$$

$$1.7 \quad x = \cos^4 t; \quad y = \sin^4 t; \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{3} \right],$$

$$1.8 \quad x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t); \quad t \in [0; 2\pi],$$

$$1.9 \quad r = a(1 + \cos \varphi); \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right],$$

$$1.10 \quad r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}; \quad \varphi \in [0; \pi]:$$

2. Գտնել կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

$$2.1 \quad y = x^2; \quad x + y = 3,$$

$$2.2 \quad y = 2^x; \quad y = 1 + 3x; \quad x = 2; \quad x = 0,$$

$$2.3 \quad y = 3x - x^2; \quad y = 2x^2 - 1,$$

$$2.4 \quad y = 3^x; \quad y = 1 + 7x; \quad x = 0; \quad x = 1,$$

$$2.5 \quad y = \ln x; \quad y = 1; \quad x = 5,$$

$$2.6 \quad y = \ln \frac{x}{2}; \quad y = 2; \quad x = 28,$$

$$2.7 \quad y^2 = 4 - x^2; \quad y^2 = 2x - 1; \quad x \geq \frac{1}{2},$$

$$2.8 \quad y = 3^x x; \quad y = 0; \quad x = 2,$$

$$2.9 \ y = |\log_3 x|; \ y = 0; \ x = \frac{1}{3},$$

$$2.10 \ y = \cos x; \ y = \frac{1}{2}:$$

3. Հաշվել տրված կորերով սահմանափակված պատկերը Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը:

$$3.1 \ y = 3x^{\frac{5}{2}}; \ y = 1; \ x = 1; \ x = 3,$$

$$3.2 \ y = 2^x; \ y = 1; \ y = x + 2,$$

$$3.3 \ y^2 = 3x; \ y = 1; \ x = 4,$$

$$3.4 \ y^2 = 2x + 3; \ y = 0.5; \ x = 0,$$

$$3.5 \ y = 3x^2 - 1; \ y = 0; \ x = 7,$$

$$3.6 \ y = \sin x; \ y = 0; \ x = \frac{\pi}{2},$$

$$3.7 \ y = \cos x; \ y = \frac{1}{2}, 3.8 \ y = 2 \sin 3x; \ y = 1,$$

$$3.9 \ y = 2 \sin 2x; \ y = 2 \cos 2x; \ y = 0,$$

$$3.10 \ y = 3^x; \ y = -3x + 1; \ x = \frac{1}{3}:$$

SUMMARY

Fundamentals of mathematical analysis

Seyran Stepanyan

The textbook presents a systematic description of the program material of the course “Fundamentals of Mathematical Analysis” in the field of the specialty “Information Security” of the Faculty of Informatics and Applied Mathematics of Yerevan State University.

The textbook is intended for students studying the specialty “Information Security” of the Faculty of Informatics and Applied Mathematics of Yerevan State University, as well as students studying physics and mathematics at other universities.

РЕЗЮМЕ

Основы математического анализа

Сейран Степанян

В учебнике представлено систематическое описание программного материала курса «Основы математического анализа» специальности «Информационная безопасность» факультета информатики и прикладной математики ЕГУ.

Учебник предназначен для студентов, обучающихся по специальности «Информационная безопасность» факультета информатики и прикладной математики ЕГУ, а также студентов, изучающих физико-математические специальности других вузов.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Գևորգյան Գ. Գ., Գալստյան Լ. Հ., Թալալբյան Ա. Կ., Միքայելյան Գ. Վ., Նավասարդյան Կ. Ա., Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք, մաս 1, Երևան, 2007:
2. Մուսոյան Վ. Խ., Մաթեմատիկական անալիզ, մաս I, Երևան, 2009:
3. Ֆիխտենգոլց Գ. Մ., Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքներ, Երևան, «Լույս» հրատ., 1970:
4. Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Медведев Г. Н., Шишкин А. А., Математический анализ в вопросах и задачах, Москва: «Высшая школа», 1984.
5. Демидович Б. П., Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Москва: Изд. «Наука», 1977.
6. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., Математический анализ, Москва: Изд. Московского университета, 1987.
7. Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, Москва: Изд. «Наука», 1971.
8. Стефан Банах, Дифференциальное и интегральное исчисление, Москва: Изд. «Наука», 1966.
9. Уваренков И. М., Маллер М. З., Курс математического анализа, Москва: «Просвещение», 1976.
10. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1-2, Москва: Изд. «Наука», 1970.

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՄԵՅՐԱՆ ՊԱՎԵԼԻ ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐ

Բուհական դասագիրք

Համակարգչային ձևավորումը՝ Ս. Ստեփանյանի,
Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. խմբագրումը՝ Ս. Հովհաննիսյանի

Տպագրվել է «ՊրինտԱրմ» ՍՊԸ-ում:
Ք. Երևան, Անդրանիկի 94 շ., 26 բն.

Ստորագրված է տպագրության՝ 26.12.2023:
Չափսը՝ 60x84 ¹/₁₆: Տպ. մամուլը՝ 20:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
Ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishinq.am

