

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կարեն Գասպարյան
Նարինե Ահարոնյան
Եղորակայա Իսրաելյան

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՏՎՅԱԼՆԵՐԻ ՀԵՏ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ուսումնական ձեռնարկ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կ. Վ. Գասպարյան,
Ն. Գ. Ահարոնյան, Ե. Ռ. Իսրաելյան

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ
ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՎ ՏՎՅԱԼՆԵՐԻ ՀԵՏ
ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2023

ՀՏԴ 519.2(07)

ԳՄԴ 22.17Գ7

Գ 316

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ գիտական խորհուրդը:*

Խմբագիր՝ ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ

Կ. Վ. ԳԱՍՊԻԱՆՅԱՆ

Գրախոսներ՝ ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր

Վ. Կ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր

Ռ. Գ. ԱՐԱՍՅԱՆ

Գասպարյան Կ. Վ., Ահարոնյան Ն. Գ., Իսրայելյան Ե. Ռ.

Գ 316 Կիրառական վիճակագրություն և տվյալների հետ աշխատանք / Կ. Վ. Գասպարյան, Ն. Գ. Ահարոնյան, Ե. Ռ. Իսրայելյան: - Եր., ԵՊՀ հրատ., 2023, 90 էջ:

Ուսումնական ձեռնարկը կազմված է Երևանի պետական համալսարանի հումանիտար ֆակուլտետներում բակալավրիատում դասավանդվող «Կիրառական վիճակագրություն և տվյալների հետ աշխատանք» առարկայի ծրագրին համապատասխան: Այն պարունակում է բազմաթիվ լուծված օրինակներ և ինքնուրույն լուծելու խնդիրներ:

Ուսումնական ձեռնարկում ներառված է հետևյալ նյութը՝ հավանականությունների տեսության սկզբունքներ, նկարագրական վիճակագրություն և գնահատման տեսություն (կետային և միջակայքային գնահատում):

Ձեռնարկը նախատեսվում է հումանիտար ֆակուլտետների բակալավրիատի ուսանողների, ինչպես նաև բոլոր այն անձանց համար, ովքեր նպատակ ունեն ստանալ սկզբնական գաղափար առարկայից և պարզագույն խնդիրներ լուծելու ունակություն:

ՀՏԴ 519.2(07)

ԳՄԴ 22.17Գ7

ISBN 978-5-8084-2605-4

<https://doi.org/10.46991/YSUPH/9785808426054>

© ԵՊՀ հրատ., 2023

© Գասպարյան Կ. Վ., Ահարոնյան Ն. Գ., Իսրայելյան Ե. Ռ., 2023

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԱԽԱԲԱՆ	5
ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ	7
Գլուխ 1. Հավանականությունների տեսության սկզբունքները	9
§ 1.1. Հավանականությունների տեսության առարկան	9
§ 1.2. Հավանականություն	11
1.2.1. Պատահույթներ և տարրական պատահույթների տարածություն	11
1.2.2. Դասական հավանականություն	14
1.2.3. Համակցությունների տեսության (կոմբինատորիկայի) տարրերը	16
1.2.4. Պայմանական հավանականություն	18
1.2.5. Անկախ փորձեր և Բեռնուլիի բանաձևը	23
Խնդիրներ	25
§ 1.3. Պատահական մեծություն և բաշխման ֆունկցիա	29
1.3.1. Պատահական մեծություն	29
1.3.2. Պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիա	31
1.3.3. Դիսկրետ պատահական մեծություններ	32
1.3.4. Պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը ..	34
1.3.5. Պատահական մեծության ցրվածքը (դիսպերսիան)	37
Խնդիրներ	39
Գլուխ 2. Նկարագրական վիճակագրություն և տվյալների վերլուծություն	41
§ 2.1. Նմուշահանում: Հիմնական գաղափարներ	41
§ 2.2. Նմուշային տվյալներ	45
2.2.1. Որակական տվյալների ներկայացում	46
2.2.2. Քանակական տվյալների ներկայացում: «Ցողուն և տերևներ» ներկայացում	48
§ 2.3. Նմուշային բնութագրիչներ	59

2.3.1. Կենտրոնական դիրքի բնութագրիչներ.....	59
2.3.2. Ցրվածության բնութագրիչներ	62
Խնդիրներ.....	66
Գլուխ 3. Գնահատման տեսություն	73
§ 3.1. Կետային գնահատում	73
Խնդիրներ.....	76
§ 3.2. Միջակայքային գնահատում	78
3.2.1. Վստահության միջակայքեր համախմբի միջինի համար...79	
3.2.2. Համախմբի որոշակի հատկանիշի բաժնի վստահության միջակայքը.....	80
Խնդիրներ.....	82
Գրականություն.....	84
Խնդիրների պատասխաններ	85

ՆԱԽԱԲԱՆ

Ուսումնական ձեռնարկի ստեղծումը պայմանավորված է վերջին տարիներին կիրառական վիճակագրության մեթոդների կիրառման լայն տարածմամբ բնագիտական և հումանիտար գիտությունների տարբեր ոլորտներում: Հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ ԵՊՀ-ի գրեթե բոլոր ֆակուլտետներում բակալավրիատի 1-ին կամ 2-րդ կուրսում դասավանդվում է «Կիրառական վիճակագրություն և տվյալների հետ աշխատանք» առարկան, այս ձեռնարկի պահանջը շատ մեծ է: Հաշվի առնելով, որ ուսանողները (հատկապես հումանիտար ֆակուլտետներում սովորող) ունեն առարկան լիովին ուսումնասիրելու համար ոչ բավարար մաթեմատիկական գիտելիքներ, առաջանում է շատ բարդ խնդիր՝ շարադրել վիճակագրության հիմնական մեթոդներն այնպես, որ այն մատչելի լինի դպրոցների շրջանավարտների համար: Որքանո՞վ է լուծվել այդ խնդիրը, ցույց կտա ժամանակը:

Ուսումնական ձեռնարկը ներառում է կիրառական վիճակագրությունում օգտագործվող հիմնական գաղափարները և մեթոդները: 1-ին գլուխը նվիրված է հավանականությունների տեսության անհրաժեշտ գաղափարներին և մեթոդներին, առանց որի անհնար է ուսումնասիրել կիրառական վիճակագրությունը: 2-րդ գլխում բերված են կիրառումների սկզբնական փուլում օգտագործվող նկարագրական վիճակագրության գաղափարները և մեթոդները: Գլուխ 3-րդը վերաբերում է գնահատման տեսությանը:

Նշենք, որ ուսումնական ձեռնարկում բերվում են բազմաթիվ լուծված օրինակներ: Բացի այդ, բոլոր բաժինները եզրափակվում են համապատասխան խնդիրներով:

Հեղինակները մասնակցել են ուսումնական ձեռնարկի ստեղծման հետևյալ մասերին.

Կարեն Գասպարյան՝ գլուխներ 1 (§§ 1.2, 1.3) և 2 (§§ 2.2, 2.3 ու դրանց որոշ օրինակներ և խնդիրներ), գլուխ 3 (§§ 3.1, 3.2) և դրանց օրինակներն ու խնդիրները: Նարինե Ահարոնյան և Եսրափայա Իսրաելյան՝ գլուխ 1 (§§ 1.1 – 1.3 և դրանց օրինակներն ու խնդիրները): Նարինե Ահարոնյան՝ Ներածություն, գլուխ 2 (§§ 2.1 – 2.3 և դրանց օրինակների ու խնդիրների մի մասը): Բոլոր գլուխների մասնագիտական խմբագրումը կատարել է Կարեն Գասպարյանը:

Հեղինակները շնորհակալություն են հայտնում հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության ամբիոնի բոլոր աշխատակիցներին, ովքեր մասնակցել են ուսումնական ձեռնարկի ստեղծմանը:

Երևան, 2023

Կարեն Գասպարյան

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Վիճակագրությունը հասարակական գործունեության տեսակ է, որի նպատակն է ստանալ, մշակել և վերլուծել հասարակական կյանքի քանակական օրինաչափությունները (նրա որակական բովանդակության հետ անխզելի կապի մեջ) բնութագրող տեղեկատվությունը: Վիճակագրությունը հասարակական գիտության ճյուղ է, որն ուսումնասիրում է զանգվածային քանակական հարաբերությունների ու փոխադարձ կապերի չափման ու վերլուծության ընդհանուր հարցերը: Առավել նեղ իմաստով՝ վիճակագրությունը համարվում է որևէ երևույթի կամ ընթացքի մասին տվյալների ամբողջություն: Բնական գիտություններում վիճակագրություն հասկացությունը նշանակում է զանգվածային երևույթների վերլուծություն, որը հիմնվում է հավանականությունների տեսության մեթոդների կիրառման վրա:

Վիճակագրությունը որպես գիտություն 17-րդ դարում ստեղծել են անգլիացի գիտնականներ Պետտին և Գրաունտը: Այդ շրջանում վիճակագրությունը դեռևս չէր առանձնացվել քաղաքատնտեսությունից և սոցիալտնտեսական գիտություններից: Ժամանակակից վիճակագրությանը նախորդող պատմական մյուս գիտությունը պետության մասին գիտությունն էր, որը վիճակագրությունը դիտում էր որպես աշխարհագրության, ազգագրության, իրավաբանական տեղեկությունների հետ մի ամբողջություն: 19-րդ դարի կեսին բելգիացի գիտնական Կետլեն և նրա հետևորդները փորձում էին վիճակագրությունը ներկայացնել որպես գիտություն հասարակական երևույթների օրինաչափությունների մասին՝ հասարակական օրենքները հանգեցնելով բնական օրենքներին: 19-րդ դարի 2-րդ կեսին և 20-րդ դարի սկզբին վիճակագրությունը ինտենսիվորեն զարգացավ, կատարելագործվեցին պետական վիճակագրության մարմինները, ձևա-

վորվեցին գիտական հատուկ առարկաներ՝ կիրառական և մաթեմատիկական վիճակագրությունը:

Կիրառական վիճակագրությունը այնպիսի եղանակների, ընթացակարգերի և հնարքների համակարգ է, որոնք հնարավորություն են տալիս փորձնական տվյալները հիմնավորված ձևով հավաքել, կազմավորել, ամփոփել, ներկայացնել և վերլուծել՝ դրանց հիման վրա եզրահանգումներ անելու և որոշումներ ընդունելու նպատակով:

Մաթեմատիկական վիճակագրության խնդիրն է հիմնավորել, կատարելագործել և զարգացնել այդ եղանակներն ու ընթացակարգերը, ընդլայնել դրանց ներգործության ոլորտը:

ԳԼՈՒԽ 1

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԿՁԲՈՒՆՔՆԵՐԸ

§ 1.1. Հավանականությունների տեսության առարկան

Մեզանից յուրաքանչյուրն ունի իր ինտուիտիվ պատկերացումը հավանականություն գաղափարի վերաբերյալ: Օրինակ, կարելի է տալ հարցեր՝ «Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ վաղը կլինի անձրև», «Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ ավտոբուսի սպասման ժամանակը կանգառում չի գերազանցի 10 րոպեն» և այլն: Հավանականության մասին խոսելիս, սովորաբար, մտաբերում ենք խաղոսկրերի նետումը, խաղաքարտեր կամ այլ մոլեխաղեր:

Հավանականությունների տեսության ծնունդը համարվում է XVII դարը և կապվում է մոլեխաղերի կոմբինատոր խնդիրների հետ: Մոլեխաղերը դժվար է համարել լուրջ զբաղմունք, սակայն հենց այդ խնդիրներն են բերել այն պրոբլեմներին, որոնք չէին լուծվում այդ պահին գոյություն ունեցող մաթեմատիկական ապարատի շրջանակներում: Հավանականային մոդելներն ըմբռնելու համար մենք հաճախակի կանդրադառնանք մոլեխաղերի տարբեր օրինակներին: Նախորդ դարի սկզբին բնագիտության կարիքներից առաջացան ավելի լուրջ խնդիրներ: Այդ խնդիրները բերեցին մաթեմատիկայի այն բաժնի զարգացմանը, որն այսօր անվանում են *հավանականությունների տեսություն*: Այսօր հավանականությունների տեսությունն ունի կիրառությունների լայն շրջանակ: Այն հիմնավորում է ժառանգականության տեսությունը և այդ իսկ պատճառով մեծ դեր է խաղում գենետիկայում: Տարրական մասնիկների ժամանակակից տեսությունները օգտագործում են հավանականային մոդելներ: Ինֆեկցիոն հիվանդությունների համաճարակային տարածումը դի-

տարկվում է հավանականությունների տեսության նոր ճյուղում՝ համաճարակաբանությունում:

Բազմությանը կամ որևէ օբյեկտին իրական թիվ վերագրելու գաղափարը ծանոթ է բոլորին: Կարելի է խոսել հատվածի երկարության, եռանկյան մակերեսի, գնդի ծավալի մասին կամ ֆիզիկական մարմնի զանգվածի, ջերմաստիճանի մասին և այլն: Բոլոր այդ մեծությունները կարող են արտահայտվել իրական թվերով: Պատահույթի հավանականությունը նույնպես կարելի է արտահայտել թվով: Այդ եղանակը շատ նման է բազմություններին երկարություն, մակերես, ծավալ վերագրելու գաղափարին:

Այսպիսով, հավանականությունների տեսությունը ուսումնասիրում է պատահական երևույթները: Ինչպես և մաթեմատիկայի բոլոր ճյուղերում, հավանականությունների տեսությունը կառուցվում է աքսիոմատիկ հիմքի վրա: 1933 թ. Ա.Ն. Կոլմոգորովը առաջարկեց հավանականությունների տեսության աքսիոմատիկ մոտեցումը և դա այսօր միակ ընդունված մոդելն է:

§ 1.2. Հավանականություն

1.2.1. Պատահույթներ և տարրական պատահույթների տարածություն

Ցանկացած հավանականային խնդիր կապված է որոշակի փորձի հետ, որի բոլոր հնարավոր ելքերի բազմությունը նշանակվում է Ω -ով և կոչվում է **տարրական պատահույթների տարածություն**: Ω -ի տարրերը նշանակվում են ω -ով:

Օրինակ 1.1. Եթե փորձը վերաբերում է նորածին երեխայի սեռի որոշմանը, ապա $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, որտեղ ω_1 ելքը նշանակում է, որ նորածինը *աղջիկ* է, իսկ ω_2 -ը՝ *տղա*:

Օրինակ 1.2. Եթե փորձը վերաբերում է հարթ մակերևույթի վրա մետաղադրամի նետմանը, ապա, ինչպես և օրինակ 1.1.-ում, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, որտեղ ω_1 -ը համապատասխանում է «թվին», իսկ ω_2 -ը՝ «գինանշանին»:

Օրինակ 1.3. Եթե հարթ մակերևույթի վրա նետվում է համաչափ խաղոսկրը, ապա $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, որտեղ ω_i -ն ($i = 1, 2, \dots, 6$) համապատասխանում է բացված նիստի վրա i հատ կետ պարունակող ելքին:

Օրինակ 1.4. Դիցուք փորձը հարթ մակերևույթի վրա երկու մետաղադրամի նետումն է: Այդ դեպքում հնարավոր ելքերի բազմությունը (այսինքն՝ տարրական պատահույթների տարածությունը) չորս տարրանոց բազմություն է՝ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, որտեղ՝

$\omega_1 = (1, 1)$ ելքը՝ առաջին և երկրորդ մետաղադրամի վրա բացվել է «թիվ»,

$\omega_2 = (1, 0)$ ելքը՝ առաջին մետաղադրամի վրա բացվել է «թիվ», երկրորդի վրա՝ «գինանշան»,

$\omega_3 = (0, 1)$ ելքը՝ առաջին մետաղադրամի վրա բացվել է «զինանշան», երկրորդի վրա՝ «թիվ»,

$\omega_4 = (0, 0)$ ելքը՝ առաջին և երկրորդ մետաղադրամի վրա բացվել է «զինանշան»:

Օրինակ 1.5. Դիցուք հարթ մակերևույթի վրա նետում են երկու համաչափ խաղոսկր: Այդ դեպքում $\Omega = \{ \omega_1 = (1, 1), \omega_2 = (1, 2), \omega_3 = (2, 1), \dots, \omega_{36} = (6, 6) \}$, որտեղ (i, j) -ն այն ելքն է, երբ առաջին խաղոսկրի ցուցանիշը հավասար է i , իսկ երկրորդ խաղոսկրի ցուցանիշը՝ j , այսինքն՝ Ω -ն 36 տարր պարունակող բազմություն է:

Այս օրինակներում Ω -ն վերջավոր տարրերից կազմված բազմություն է: Սակայն կան փորձեր, որտեղ Ω -ի տարրերի թիվն անվերջ է: Օրինակ, եթե թվային ուղղի $[0, 1]$ միջակայքի վրա պատահականորեն նետվում է կետը, ապա $\omega \in \Omega$ տարրական ելքերի թիվը անվերջ է:

Տվյալ փորձին համապատասխանող Ω տարրական պատահույթների տարածության $A \subset \Omega$ ենթաբազմությունները կոչվում են **պատահույթներ**: Եթե փորձի ω տարրական ելքը պատկանում է A -ին ($\omega \in A$), ապա ասում են, որ տեղի է ունեցել A պատահույթ, հակառակ դեպքում, երբ $\omega \notin A$, ասում են, որ A պատահույթը տեղի չի ունեցել: Օրինակ 1.3-ում, $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$ ՝ պատահույթ է, և, եթե խաղոսկրը նետելիս բացվում է, օրինակ, $\omega = 2$ թվանշանը պարունակող նիստը, ապա ասում են, որ տեղի է ունեցել A պատահույթը:

Ω պատահույթը (չէ՞ որ $\Omega \subset \Omega$) անվանում են **հավաստի** պատահույթ: Պատահույթը, որը տարրական ոչ մի ելք չի պարունակում, կոչվում է **անհնար** պատահույթ և նշանակվում է $\emptyset$: A պատահույթը կոչվում է B պատահույթի մասնավոր դեպք (ասում են, որ A պատահույթից բխում է B պատահույթը), եթե $A \subset B$: Կասենք, որ A և B պատահույթները **համընկնում** են ($A = B$), եթե

$A \subset B$ և $B \subset A$: Օրինակ 1.3-ում $A = \{2, 4, 6\}$ և $B = \{\omega = 2k, k = 1, 2, 3\}$ պատահականությունները համընկնում են:

A և B պատահականությունների **միավորումը**՝ $A \cup B$, այնպիսի պատահականություն է, որը տեղի է ունենում, երբ իրականանում է նրանցից *զոնե մեկը*:

A և B պատահականությունների **հատումը** (կամ **արտադրյալը**)՝ $A \cap B$ այնպիսի պատահականություն է, որը տեղի է ունենում, երբ A և B պատահականությունները իրականանում են *համատեղ*: A և B պատահականությունները կոչվում են **անհամատեղելի**, եթե դրանք *չեն* կարող իրականանալ *համատեղ*՝ $A \cap B = \emptyset$:

A պատահականության և B պատահականության **տարբերությունը**՝ $A \setminus B$, այնպիսի պատահականություն է, որը տեղի է ունենում, երբ *իրականանում է* A պատահականությունը, իսկ B -ն՝ *ոչ*:

A պատահականության **հակադիր** պատահականությունը՝ $\bar{A}$, այնպիսի պատահականություն է, որն իրականանում է, երբ A պատահականությունը տեղի չի ունենում՝ $\bar{A} = \Omega \setminus A$:

Պարզ է, որ $A \cup \bar{A} = \Omega$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$:

$A_1, A_2, \dots, A_n$ **պատահականությունների միավորումը**՝ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, այնպիսի պատահականություն է, որը տեղի է ունենում, երբ իրականանում է այդ պատահականություններից *զոնե մեկը*:

$A_1, A_2, \dots, A_n$ **պատահականությունների հատումը**՝ $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$, այնպիսի պատահականություն է, որը տեղի է ունենում, երբ իրականանում են *բոլոր* պատահականությունները:

$A_1, A_2, \dots, A_n$ պատահականությունները կազմում են **լրիվ խումբ**, եթե նրանք *զույգ առ զույգ անհամատեղելի* են՝ $A_i \cap A_j = \emptyset$, երբ $i \neq j$ և $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$:

Օրինակ 1.3-ում $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $A_3 = \{5, 6\}$ պատահականությունները կազմում են **լրիվ խումբ**:

1.2.2. Դասական հավանականություն

Դիցուք $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ տարածությունը բաղկացած է վերջավոր թվով տարրական ելքերից: Որպես **պատահույթներ** դիտարկվում են Ω -ի բոլոր $A \subset \Omega$ ենթաբազմությունները, ներառյալ $\emptyset$ -ն (դատարկ բազմությունը) և Ω -ն:

Կամայական A պատահույթի համար, որը պարունակում է k հատ տարրական ելք, **հավանականությունը** սահմանվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ -ի տարրական ելքերի թիվը}}{n} :$$

Այսպիսով, ցանկացած A պատահույթի հավանականությունը հավասար է A պատահույթին նպաստող տարրական ելքերի թվի և Ω -ի բոլոր տարրական ելքերի թվի հարաբերությանը: Սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

այսինքն՝ բոլոր ω_i տարրական ելքերն ունեն ի հայտ գալու հավասար հնարավորություններ: Այս սահմանումը կոչվում է **հավանականության դասական սահմանում**, որն առաջին անգամ ձևակերպվել է *Լասպլասի* կողմից 1812 թ.:

Հավանականության հատկությունները

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ՝ անհնար պատահույթի հավանականությունը հավասար է 0-ի:
2. Կամայական A պատահույթի համար $\bar{A}$ հակադիր պատահույթի հավանականությունը հավասար է՝ $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$:
3. Եթե A պատահույթը B պատահույթի մասնավոր դեպքն է, այսինքն՝ $A \subset B$, ապա

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \text{ և } \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A):$$

4. Կամայական A պատահույթի համար՝ $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$:

5. Կամայական A և B պատահույթների համար՝

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B):$$

Օրինակ 1.6. Նետում են երկու խաղոսկր: Գտնենք հավանականությունը, որ բացված թվերի գումարը հավասար է 7-ի:

Լուծում: Գտնենք խաղոսկրերի վրա բացվող թվերի բոլոր հնարավոր դեպքերը, որոնց գումարը հավասար է 7-ի (A պատահույթ): Դրանք են հետևյալ գույգերը՝

$$(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3) :$$

$$\text{Հետևաբար՝ } \mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} :$$

Օրինակ 1.7. 52 խաղաքարտից բաղկացած կապուկից պատահականորեն վերցնում են մեկը: Գտնել հավանականությունը, որ վերցված խաղաքարտը կամ «արքա» է, կամ «խաչ»:

Լուծում: Նշանակենք A -ով պատահույթը, որ խաղաքարտը «խաչ» է, իսկ B -ով, որ այն՝ «արքա» է: Պահանջվող հավանականությունն է՝ $\mathbb{P}(A \cup B)$ -ն: Հավանականության 5-րդ հատկությունից հետևում է, որ

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B):$$

Դասական հավանականության սահմանումից կստանանք՝

$$\mathbb{P}(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{52} :$$

Այսպիսով՝

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13} :$$

1.2.3. Համակցությունների տեսության (կոմբինատորիկայի) տարրերը

Դասական հավանականության սահմանումը կիրառելիս հաճախ օգտագործվում է **համակցությունների տեսությունը** (կոմբինատորիկան):

Բազմապատկման սկզբունքը

Դիցուք անհրաժեշտ է կատարել k գործողություն: Եթե առաջին գործողությունը կարելի է կատարել n_1 տարբեր ձևերով, այնուհետև երկրորդը՝ n_2 , երրորդը՝ n_3 և այլն, մինչև k -րդ գործողությունը, որը կարելի է կատարել n_k տարբեր ձևերով, ապա բոլոր գործողությունները կարելի է կատարել

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

տարբեր ձևերով:

Օրինակ 1.8. Դիցուք նետված է 10 խաղոսկր: Գտնենք բոլոր հնարավոր դեպքերի թիվը:

Լուծում: Համաձայն բազմապատկման սկզբունքի՝ տեղի ունի խաղոսկրերի վրա

$$N = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 6}_{10} = 6^{10}$$

հնարավոր դեպքեր:

n հատ տարր պարունակող $\mathcal{X} := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ բազմության տարրերով հնարավոր է կազմել տարբեր համակցություններ (կոմբինացիաներ): Դրանք են՝ *կարգավորությունները, տեղափոխությունները և զուգորդությունները*:

Կարգավորություններ

Կարգավորություններ n -ից k -ական կոչվում են այնպիսի միացությունները, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է n տարրերից վերցրած k տարր, և որոնք տարբերվում են միմյանցից կամ գոնե մեկ տարրով, կամ դրանց դասավորությամբ, ընդ

որում, առանձին միացություններում յուրաքանչյուր տարր մասնակցում է ոչ ավելի, քան մեկ անգամ: n -ից k -ական կարգավորությունների թիվը նշանակվում է A_n^k -ով, և այն հավասար է՝

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \\ = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \\ 0! = 1):$$

Օրինակ 1.9. Դասարանում անցնում են 10 առարկա: Երկուշաբթի օրը 6 դաս է, ընդ որում, բոլոր դասերը տարբեր են: Քանի՞ տարբեր ձևերով կարելի է կազմել դասացուցակը երկուշաբթի օրվա համար:

Լուծում: Տարբեր ձևի դասացուցակների թիվը, որը կարելի է կազմել երկուշաբթի օրվա համար, հավասար է

$$N = A_{10}^6 = \frac{10!}{4!} = 151200 :$$

Տեղափոխություններ

n տարրերից տեղափոխություններ կոչվում են այնպիսի միացությունները, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է n տարր, որոնք միմյանցից տարբերվում են միայն տարրերի դասավորությամբ: n տարրերի տեղափոխությունների թիվը նշանակվում է P_n -ով և հավասար է՝

$$P_n = A_n^n = n! :$$

Օրինակ 1.10. Քանի՞ տարբեր ձևերով 5 զինվոր կարող են շարք կանգնել:

Լուծում: 5 զինվոր կարող են շարք կանգնել $P_5 = 5! = 120$ տարբեր ձևերով:

Զուգորդություններ

Զուգորդություններ n տարրից k -ական կոչվում են այնպիսի միացությունները, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է տվյալ n տարրից վերցրած k տարր, և որոնք տարբերվում են միմյանցից գոնե մեկ տարրով, ընդ որում, առանձին միացու-

թյուններում յուրաքանչյուր տարր մասնակցում է ոչ ավելի, քան մեկ անգամ: n -ից k -ական զուգորդությունների թիվը նշանակվում է C_n^k -ով և հավասար է՝

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} :$$

Օրինակ 1.11. Քանի՞ ձևով կարելի է անդարձ եղանակով 10 միատեսակ գնդիկ պարունակող սափորից հանել 3 գնդիկ:

Լուծում: Քանի որ գնդիկները միատեսակ են, հանված գնդիկների կարգը կարևոր չէ, ուստի բոլոր տարբերակների թիվը հավասար է՝

$$N = C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = 240:$$

1.2.4. Պայմանական հավանականություն

Քննարկենք հետևյալ իրավիճակը: Դիցուք տեղի է ունեցել որևէ A պատահույթ: Ինչպե՞ս կարելի է օգտագործել այդ տեղեկությունը՝ որոշակի B պատահույթի հավանականությունը գտնելու համար: B պատահույթի հավանականությունը այդ պայմանի դեպքում (երբ արդեն ի հայտ է եկել A պատահույթը) կանվանենք B -ի պայմանական հավանականություն A պատահույթի պայմանով և կնշանակենք $\mathbb{P}(B/A)$ -ով:

Օրինակ 1.12. Նետում են խաղոսկր: Դիցուք B -ն «6» բացվելու պատահույթն է: Ենթադրենք A -ն խաղոսկրի վրա 4-ից մեծ թիվ բացվելու պատահույթն է: Գտնենք B պատահույթի $\mathbb{P}(B/A)$ պայմանական հավանականությունը, երբ տեղի է ունեցել A պատահույթը:

Լուծում: A պատահույթի ի հայտ գալը նշանակում է, որ տեղի են ունեցել հնարավոր ելքերից միայն «5»-ը կամ «6»-ը: Կարելի է դիտարկել նոր տարրական ելքերի տարածություն, բաղկացած այդ երկու հավասարահնարավոր ելքից՝ $\Omega_A = \{\text{«5»}, \text{«6»}\}$:

Այնպես որ B պատահույթի հավանականությունը այդ նոր Ω_A տարածությունում, ըստ դասական հավանականության սահմանման, կլինի հավասար

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{1}{2}:$$

B պատահույթի **պայմանական հավանականություն** A պատահույթի պայմանով սահմանվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \quad (\mathbb{P}(A) \neq 0):$$

Այստեղից հետևում է այսպես կոչված **հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը**.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A/B): \quad (1.1)$$

Օրինակ 1.13. Սափորից, որը պարունակում է 8 կարմիր և 4 սպիտակ գնդիկ, պատահականորեն անդարձ եղանակով հանում են 2 գնդիկ: Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ հանված գնդիկները կարմիր գույնի են:

Լուծում: Նշանակենք A -ով պատահական հանված գնդիկների կարմիր գույնի լինելու պատահույթը: Նշանակենք այնուհետև A_1 -ով և A_2 -ով, համապատասխանաբար, առաջին և երկրորդ հերթին հանված գնդիկի կարմիր գույնի լինելու պատահույթները: Համաձայն հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի՝

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2/A_1):$$

$$\text{Ակնհայտ է, որ } \mathbb{P}(A_1) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}:$$

Մյուս կողմից, համարելով, որ տեղի է ունեցել A_1 պատահույթը, այսինքն՝ առաջին հերթին հանված է մեկ կարմիր գնդիկ, որից հետո սափորում մնացել է 7 կարմիր և 4 սպիտակ գնդիկ, կստանանք, որ երկրորդ հերթին հանված գնդիկի կարմիր գույնի լինելու պայմանական հավանականությունը հավասար է՝ $\mathbb{P}(A_2/A_1) = \frac{7}{11}$: Այսպիսով՝ $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$:

Պատահականությունների անկախություն

Պատահականությունների անկախության գաղափարը հավանականությունների տեսությունում ունի կարևորագույն դեր: Եթե A և B պատահականությունները բավարարում են այն պայմանին, որ A պատահականության ի հայտ գալու պայմանական հավանականությունը B -ի պայմանում՝ $\mathbb{P}(A/B)$ -ն հավասար է A պատահականության ոչ պայմանական $\mathbb{P}(A)$ հավանականությանը՝

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A), \quad (1.2)$$

ապա ինտուիտիվ կարելի է եզրակացնել, որ A պատահականություն **անկախ** է B -ից: Պարզ է, որ այս դեպքում նաև B պատահականությունը կլինի անկախ A -ից: Այսինքն՝

$$\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B): \quad (1.3)$$

Հետևաբար A -ն և B -ն փոխադարձաբար անկախ պատահականություններ են:

(1.2) կամ (1.3) պայմանից, համաձայն հավանականությունների բազմապատկման (1.1) թեորեմի, հետևում է, որ՝

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B): \quad (1.4)$$

Դժվար չէ ստանալ, որ ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը: Այսինքն՝ եթե տեղի ունի (1.4) բանաձևը, ապա $\mathbb{P}(A) \neq 0$ և $\mathbb{P}(B) \neq 0$ պայմանների դեպքում ճիշտ են (1.2) և (1.3) բանաձևերը:

Օրինակ 1.14. Դիցուք նետվում է երկու խաղոսկր: Ենթադրենք հայտնի է դարձել, որ առաջին խաղոսկրի վրա բացվել է 4 նիշը (A պատահականություն): Գտնենք հավանականությունը, որ երկու խաղոսկրի վրա բացված նիշերի գումարը, A պատահականության պայմանում, հավասար է 8-ի (B պատահականություն) և, ստուգենք A և B պատահականությունների անկախությունը:

Լուծում: Տարրական պատահականությունների տարածությունը, որը համապատասխանում է երկու խաղոսկրի նետմանը, ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\Omega = \{\omega = (i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 6\} :$$

Համաձայն բազմապատկման սկզբունքի՝ այն բաղկացած է 36 հավասարահնարավոր ելքից: A պատահույթը կազմված է հետևյալ 6 տարրական ելքից՝

$$A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\}:$$

Համապատասխանաբար, B պատահույթը բաղկացած է 5 տարրական ելքից՝

$$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}:$$

Հետևաբար, $A \cap B = \{(4, 4)\}$: Այսպիսով, կստանանք՝

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{5}{36}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}:$$

Ուստի՝

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{6}:$$

Այսպիսով՝

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36},$$

հետևաբար A և B պատահույթները *անկախ չեն*:

Օրինակ 1.15. 52 խաղաքարտերի կապուկից պատահականորեն վերցվում է մեկ խաղաքարտ: Դիցուք A պատահույթն է՝ վերցված խաղաքարտը «խաչ» է, իսկ B -ն՝ վերցված խաղաքարտը «արքա»: Անկախ են, թե՞ ոչ A և B պատահույթները:

Լուծում: Ակնհայտ է, որ

$$\mathbb{P}(A) = \frac{13}{52}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{4}{52}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}:$$

Այստեղից՝

$$\frac{1}{52} = \mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{52},$$

այսինքն՝ A -ն և B -ն *անկախ են*:

Լրիվ հավանականության բանաձևը

Երբեմն A պատահույթի հավանականությունը ուղղակիորեն հնարավոր չէ հաշվել, սակայն նրա տեղի ունենալը կախված է լինում ուրիշ B_k , $k = 1, 2, \dots, n$ պատահույթների ի հայտ գալուց:

Դիցուք $B_k, k = 1, 2, \dots, n$ պատահույթները կազմում են լրիվ խումբ, $\mathbb{P}(B_k) > 0$, իսկ A -ն որոշակի պատահույթ է: Այդ դեպքում տեղի ունի բանաձևը՝

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A/B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \dots + \mathbb{P}(A/B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n)$, որը կոչվում է **լրիվ հավանականության բանաձև**, իսկ B_k պատահույթները՝ **վարկածներ**:

Օրինակ 1.16. Առաջին սափորը պարունակում է 6 սպիտակ և 4 սև գնդիկ, երկրորդ սափորը՝ 5 սպիտակ և 2 սև գնդիկ: Առաջին սափորից պատահականորեն մեկ գնդիկ տեղափոխվում է երկրորդ սափորը, ապա երկրորդ սափորից անդարձ եղանակով պատահականորեն վերցնում են 2 գնդիկ: Ինչպիսի՞ն է այդ երկու գնդիկների սպիտակ գույնի լինելու հավանականությունը:

Լուծում: Նշանակենք B_1 -ով այն պատահույթը, որ առաջին սափորից տեղափոխել են մեկ *սպիտակ* գնդիկ, B_2 -ով՝ որ առաջին սափորից տեղափոխել են *սև* գնդիկ: Նշանակենք A -ով՝ երկրորդ սափորից վերցրել են 2 *սպիտակ* գնդիկ պատահույթը: Քանի որ B_1 և B_2 պատահույթները կազմում են լրիվ խումբ ($B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \cup B_2 = \Omega$), ապա ըստ *լրիվ հավանականության բանաձևի*՝ կստանանք.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A/B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ՝

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(B_2) = \frac{2}{5}, \quad \mathbb{P}(A/B_1) = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{6 \cdot 5}{8 \cdot 7} = \frac{15}{28},$$

$$\mathbb{P}(A/B_2) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 7} = \frac{5}{14} :$$

Հետևաբար՝

$$\mathbb{P}(A) = \frac{15}{28} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{14} \cdot \frac{2}{5} = \frac{13}{28} :$$

1.2.5. Անկախ փորձեր և Բեռնուլիի բանաձևը

Հավանականությունների տեսության շատ մոդելներ կարելի է դիտարկել որպես անկախ կրկնվող փորձերի հաջորդականություն, որտեղ յուրաքանչյուր փորձում կարող են ի հայտ գալ միայն երկու անհամատեղելի ելք՝ A պատահույթը, որը կոչվում է «հաջողություն» և $\bar{A}$ պատահույթը՝ «անհաջողություն»: **Փորձերը** կանվանենք **անկախ**, եթե դրանց ցանկացած խմբի ելքերը չեն ազդում մի այլ խմբի ելքերի վրա: Այդպիսի փորձերի հաջորդականությունը կոչվում է **անկախ փորձերի հաջորդականություն**:

Օրինակ, եթե բաղադրյալ փորձը ներկայացնում է իրենից n անգամ մետաղադրամի նետումը, ապա յուրաքանչյուր նետում, երկու ելք՝ «զինանշան» և «թիվ» ունեցող պարզ փորձ է, և այդ նետումները իրենցից ներկայացնում են անկախ փորձերի հաջորդականություն:

Նշանակենք A պատահույթի հավանականությունը՝ $\mathbb{P}(A) = p$, իսկ $\mathbb{P}(\bar{A}) = q = 1 - p$ ($0 \leq p \leq 1$): n անկախ փորձերի հաջորդականությանը համապատասխանող տարրական պատահույթների տարածությունը ներկայացնում է իրենից

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)\}$$

բազմությունը, որտեղ յուրաքանչյուր $\omega_k = A$ կամ $\omega_k = \bar{A}$, $k = 1, 2, \dots, n$: Պարզ է, որ Ω տարածության տարրական ω ելքերի թիվը, համաձայն կոմբինատորիկայի բազմապատկման սկզբունքի, հավասար է 2^n :

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝ գտնենք $\mathbb{P}_n(k)$ հավանականությունը այն $B_n(k)$ պատահույթի, որ n անկախ փորձերում «հաջողությունների» թիվը հավասար է k թվին (կարևոր չէ՝ ո՞ր փորձերում է տեղի ունեցել «հաջողությունը»): Դիտարկենք պարզագույն այդպիսի պատահույթ, երբ առաջին k փորձերում տեղի է ունեցել «հաջողությունը», մնացածում՝ «անհաջողությունը»՝

$$B_n^0(k) = \underbrace{A \cap A \cap \dots \cap A}_k \underbrace{\bar{A} \cap \bar{A} \cap \dots \bar{A}}_{n-k} :$$

Քանի որ փորձերն անկախ են, այսինքն՝ յուրաքանչյուր փորձի ելքերն անկախ են, ապա՝

$$\mathbb{P}(B_n^0(k)) = \underbrace{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A)}_k \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(\bar{A})}_{n-k} = p^k q^{n-k} :$$

Այժմ, նկատի ունենալով, որ գոյություն ունի $B_n(k)$ պատահույթների C_n^k դեպք, ապա՝

$$\mathbb{P}_n(k) := \mathbb{P}(B_n(k)) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n : \quad (1.5)$$

Այս բանաձևը կոչվում է **Բեռնուլիի բանաձև**, իսկ $\mathbb{P}_n(k)$, $k = 0, 1, \dots, n$ հավանականությունների հաջորդականությունը՝ **բինոմական օրենք**: Քանի որ $B_n(0)$, $B_n(1)$, ..., $B_n(n)$ պատահույթները կազմում են լրիվ խումբ, ապա՝

$$\mathbb{P}_n(0) + \mathbb{P}_n(1) + \dots + \mathbb{P}_n(n) = 1,$$

այսինքն՝

$$q^n + npq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + np^{n-1} q + p^n = 1: \quad (1.6)$$

Նշանակենք $\mathbb{P}_n(\geq 1)$ -ով՝ n անկախ փորձերում առնվազն մեկ հաջողություն ունենալու հավանականությունը: Անցնելով հակադիր պատահույթի՝ կստանանք՝

$$\mathbb{P}_n(\geq 1) = 1 - \mathbb{P}_n(0) = 1 - q^n:$$

Օրինակ 1.17. Կանոնավոր մետաղադրամը նետվում է չորս անգամ: Գտնենք հավանականությունը, որ իրականացել է երկու «զինանշան» և երկու «թիվ»:

Լուծում: Այս մոդելը ներկայացնում է իրենից անկախ փորձեր, որտեղ $n = 4, p = 0.5, k = 2$: Կիրառելով Բեռնուլիի (1.5) բանաձևը՝ կստանանք՝

$$\mathbb{P}_4(2) = C_4^2 (0.5)^2 (0.5)^2 = 6 \cdot 0.0625 = 0.375:$$

Օրինակ 1.18. Կանոնավոր խաղոսկրը նետում են հինգ անգամ: Գտնենք հավանականությունը, որ «6» թիվը կբացվի առնվազն երկու անգամ:

Լուծում: Խնդիրը ներկայացնում է անկախ փորձերի մոդել, որտեղ՝ $n = 5, p = 1/6$ ($q = 5/6$), $k \geq 2$: Այժմ, կիրառելով (1.5) և (1.6) բանաձևերը, կստանանք՝

$$\mathbb{P}_5(\geq 2) = 1 - \mathbb{P}_5(0) - \mathbb{P}_5(1) = 1 - q^5 - 5pq^4 \approx 1 - 0.4 - 0.4 = 0.2 :$$

Խնդիրներ

1.1. Մետաղադրամը նետվում է երկու անգամ: Նկարագրել տարրական պատահականությունների տարածությունը և հետևյալ պատահականությունները.

A - գոնե մեկ անգամ կերևա «զինանշանը»,

B - «զինանշանը» կերևա երկրորդ նետման ժամանակ:

1.2. Նշել հետևյալ պատահականությունների հակադիրները.

ա) A - մետաղադրամի երկու նետումների դեպքում կերևա «զինանշանը»,

բ) B - երեք կրակոցի դեպքում նշանին կդիպչեն երեք անգամ,

գ) C - երեք կրակոցի դեպքում նշանին կդիպչեն գոնե մեկ անգամ:

1.3. Դիցուք A -ն, B -ն և C -ն կամայական պատահականություններ են: Նկարագրել դրանց միջոցով հետևյալ պատահականությունները.

ա) ի հայտ է եկել միայն A պատահականությունը,

բ) ի հայտ են եկել A և B պատահականությունները, իսկ C -ն՝ ոչ,

գ) բոլոր երեք պատահականությունները տեղի են ունեցել,

դ) ի հայտ է եկել այդ պատահականություններից առնվազն մեկը,

ե) տեղի է ունեցել այդ պատահականություններից միայն մեկը,

զ) տեղի են ունեցել այդ պատահականություններից միայն երկուսը,

է) ոչ մի պատահականություն չի եկել,

ը) ի հայտ են եկել այդ պատահույթներից երկուսից ոչ ավելի պատահույթ:

1.4. Սարի գագաթ կարելի է հասնել 7 ուղիներով: Քանի՞ տարբեր ձևերով լեռնագնացը կարող է բարձրանալ և իջնել սարից: Լուծել խնդիրը, եթե վերելքը և վայրէջքը կատարվում են տարբեր ուղիներով:

1.5. Ուսանողը պետք է 8 օրվա ընթացքում հանձնի 4 քննություն: Քանի՞ տարբեր ձևերով կարելի է դա իրականացնել, եթե մեկ օրում կարելի է հանձնել միայն մեկ քննություն:

1.6. Ավտոմեքենայի պետհամարանիշը բաղկացած է 3 տառից և 3 թվանշանից: Կիրառվում են 10 թվանշան և 12 տառ (ընդ որում, երեք գրոյով ավտոմեքենայի պետհամարանիշ գոյություն չունի): Որքա՞ն տարբեր համարներ կարելի է կազմել:

1.7. Նետում են երկու խաղոսկր: Գտնել հետևյալ հավանականությունները.

ա) խաղոսկրերի վրա կերևան միևնույն քանակի միավորներ, բ) խաղոսկրերի վրա կերևան տարբեր քանակի միավորներ:

1.8. 1, 2, 3, 4, 5 թվերը գրված են 5 քարտերի վրա: Պատահականորեն հաջորդաբար հանում են երեք քարտ և հանված թվերը դասավորում ձախից աջ: Ինչպիսի՞ն է ստացված թվի՝ ա) զույգ, բ) 1, 2, 3 լինելու հավանականությունը:

1.9. Հեռախոսահամարը բաղկացած է 6 թվանշանից: Գտնել բոլոր թվանշանների տարբեր լինելու հավանականությունը:

1.10. Արկղը պարունակում է 15 դետալ, որոնցից 10-ը ներկված են: Բանվորը պատահական վերցնում է դրանցից 3-ը: Գտնել բոլոր վերցված դետալների ներկված լինելու հավանականությունը:

1.11. 20 ուսանողներից բաղկացած խմբում կա 6 գերազանցիկ: Գտնել պատահականորեն վերցված 9 ուսանողներից 4-ի գերազանցիկ լինելու հավանականությունը:

1.12. Մետաղադրամը նետվում է 6 անգամ: Գտնել առնվազն երկու անգամ «զինանշան» ի հայտ գալու հավանականությունը:

1.13. Նետում են երեք խաղոսկր: Գտնել «6»-ի գոնե մեկ անգամ երևալու հավանականությունը:

1.14. Կանոնավոր խաղոսկրը նետվում է 3 անգամ: Դիցուք A պատահույթն է՝ բոլոր դեպքերում բացվել են միևնույն թվով միավորներ, B պատահույթը՝ միասին բոլոր դեպքերում բացված միավորների գումարը 5-ից փոքր է: Անկախ են, թե՞ ոչ այդ պատահույթները:

1.15. Նետված է երկու խաղոսկր: Գտնել երկուսի վրա էլ «5» բացվելու պայմանական հավանականությունը, եթե հայտնի է, որ բացված միավորների գումարը բաժանվում է 5-ի:

1.16. Երկու հրաձիգ, որոնց համար թիրախին դիպչելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են 0.7 և 0.8, տալիս են մեկական կրակոց: Գտնել թիրախին՝ ա) առնվազն մեկ անգամ դիպչելու, բ) միայն մեկ անգամ դիպչելու հավանականությունը:

1.17. Երկու հաստոց արտադրում են միանման մասեր, որոնք ուղարկվում են ընդհանուր պահեստ: Առաջին հաստոցի արտադրողականությունը երկու անգամ մեծ է երկրորդի արտադրողականությունից: Առաջին հաստոցի արտադրանքի 80%-ը բարձր որակի է, իսկ երկրորդի՝ 90%-ը: Գտնել պահեստից պատահականորեն վերցրած արտադրանքի բարձր որակի լինելու հավանականությունը:

1.18. Հեղյուս արտադրող գործարանի A , B և C հաստոցները արտադրում են ամբողջ արտադրանքի համապատասխանաբար 25%-ը, 35%-ը և 40%-ը: Նրանց արտադրանքի խոտանը կազմում է 5%, 4% և 2%: Ինչի՞նչ է հավասար հավանականությունը, որ պատահական վերցված հեղյուսը խոտանված չէ:

1.19. Կատարում են 4 անկախ փորձ, որոնցից յուրաքանչ-յուրում միաժամանակ նետում են 3 մետաղադրամ: Գտնել գոնե մեկ փորձում երեք «զինանշան» բացվելու հավանականությունը:

1.20. Պատահույթի գոնե մեկ անգամ երևալու հավանականությունը չորս անկախ փորձերում հավասար է 0.76-ի: Ինչպիսի՞ն է մեկ փորձում պատահույթի երևալու հավանականությունը, եթե յուրաքանչյուր փորձում այդ հավանականությունը նույնն է:

1.21. Արտադրանքի 5%-ը խոտան է: Որոշել պատահականորեն վերցված հինգ արտադրանքից գոնե երկուսի խոտանված լինելու հավանականությունը:

§ 1.3. Պատահական մեծություն և բաշխման ֆունկցիա

1.3.1. Պատահական մեծություն

Բազմաթիվ պատահական երևույթների արդյունքը լինում է արտահայտված թվերով, օրինակ, մարդկանց որոշակի Ω համախմբության անդամների տարիքը: Դիցուք փորձը մարդկանց այդ համախմբությունից պատահական ձևով որոշակի $\omega \in \Omega$ անդամ վերցնելու մեջ է՝ որոշելով այնուհետև նրա տարիքը՝ $X(\omega)$: Այսպիսով, Ω տարրական ելքերի տարածության վրա որոշվում է $X = X(\omega)$ իրական արժեքներ ընդունող ֆունկցիան, որը կոչվում է **պատահական մեծություն**:

Հաճախ պատահական մեծության արժեքը համընկնում է տարրական ելքի հետ՝ $X(\omega) = \omega$, եթե ելքերը իրական թվեր են:

Օրինակ 1.19. Դիցուք նետվում է կանոնավոր երեք մետաղադրամ: Սահմանենք X պատահական մեծությունը հավասար «զինանշանի» երևումների $(0, 1, 2, 3)$ թվին: Գտնենք՝ ի՞նչ հավանականություններով են ընդունվում այդ արժեքները:

Լուծում: Փորձին համապատասխանող տարրական ելքերի տարածությունն է՝

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega: \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \text{ որտեղ } \omega_i \\ &= \text{«զինանշան» կամ «թիվ»}, i = 1, 2, 3\}:\end{aligned}$$

Այնուհետև կստանանք՝

$$\mathbb{P}(\omega: X(\omega) = 0) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},$$

քանի որ $\omega = (\text{«թիվ»}, \text{«թիվ»}, \text{«թիվ»})$,

$$\mathbb{P}(\omega: X(\omega) = 1) = \frac{3}{8},$$

քանի որ $\omega = (\text{«զինանշան»}, \text{«թիվ»}, \text{«թիվ»})$ կամ

(«թիվ», «զինանշան», «թիվ») կամ («թիվ», «թիվ», «զինանշան»),

$$\mathbb{P}(\omega: X(\omega) = 2) = \frac{3}{8},$$

քանի որ $\omega = (\text{«զինանշան», «զինանշան», «թիվ»})$ կամ
 $(\text{«զինանշան», «թիվ», «զինանշան»})$ կամ
 $(\text{«թիվ», «զինանշան», «զինանշան»})$,

$$\mathbb{P}(\omega: X(\omega) = 3) = \frac{1}{8},$$

քանի որ $\omega = (\text{«զինանշան», «զինանշան», «զինանշան»})$:

Այս խնդիրը կարելի է լուծել նաև օգտագործելով անկախ փորձերի մոդելը: Իրոք, եթե համարենք, որ երեք անգամ հաջորդաբար նետվում է մետաղադրամը ($n = 3$), ապա յուրաքանչյուր նետում կարելի է դիտարկել որպես փորձ: Համարենք «հաջողությունը»՝ $A = \{\text{«զինանշան»}\}$ պատահույթն է, «անհաջողությունը»՝ $\bar{A} = \{\text{«թիվ»}\}$ պատահույթը:

Պարզ է, որ $p = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $q = 1 - p = \frac{1}{2}$: Այնուհետև կստանանք՝

$$p_0 = \mathbb{P}_3(0) = \mathbb{P}(\omega: X(\omega) = 0) = q^3 = \frac{1}{8},$$

$$p_1 = \mathbb{P}_3(1) = \mathbb{P}(\omega: X(\omega) = 1) = 3pq^{3-1} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

$$p_2 = \mathbb{P}_3(2) = \mathbb{P}(\omega: X(\omega) = 2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8},$$

$$p_3 = \mathbb{P}_3(3) = \mathbb{P}(\omega: X(\omega) = 3) = p^3 = \frac{1}{8}:$$

Օրինակ 1.20. 6 գնդիկ պարունակող սափորից, որոնցից 4-ը սպիտակ են, պատահականորեն անդարձ եղանակով վերցնում են 2 գնդիկ: Դիցուք X պատահական մեծությունը հանված գնդիկների մեջ սպիտակ գնդիկների թիվն է, որն ընդունում է 0, 1, 2 արժեքները: Գտնենք՝ ի՞նչ հավանականություններով է ընդունում X պատահական մեծությունն այդ արժեքները:

Լուծում: Օգտվելով հավանականության դասական սահմանումից՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} p_0 &= \mathbb{P}(\omega: X(\omega) = 0) = \frac{1}{C_6^2} = \frac{1}{15}, \\ p_1 &= \mathbb{P}(\omega: X(\omega) = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, \\ p_2 &= \mathbb{P}(\omega: X(\omega) = 2) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5} = \frac{2}{5}: \end{aligned}$$

1.3.2. Պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիա

Իրական ուղղի կամայական $x \in \mathbb{R}$ թվի համար $X = X(\omega)$ պատահական մեծության **բաշխման ֆունկցիան** սահմանվում է որպես այդ արժեքից փոքր արժեք ընդունելու հավանականությունը, այսինքն՝

$$\mathbb{F}(x) = \mathbb{P}(\omega: X(\omega) < x) := \mathbb{P}(X < x):$$

Բաշխման ֆունկցիան օժտված է հետևյալ **հատկություններով**՝

1. $\mathbb{F}(x)$ -ը **չնվազող** ֆունկցիա է, այսինքն՝

$$\mathbb{F}(x_1) \leq \mathbb{F}(x_2), \text{ երբ } x_1 \leq x_2,$$
2. $\mathbb{F}(x) \rightarrow 0$, երբ $x \rightarrow -\infty$ և $\mathbb{F}(x) \rightarrow 1$, երբ $x \rightarrow \infty$,
3. $\mathbb{F}(x)$ -ը **ձախից անընդհատ** ֆունկցիա է, այսինքն՝

$$\mathbb{F}(x - 0) = \lim_{y \uparrow x} \mathbb{F}(y) = \mathbb{F}(x) \text{ ցանկացած } x \in \mathbb{R} \text{ համար,}$$
4. $0 \leq \mathbb{F}(x) \leq 1$ ցանկացած $x \in \mathbb{R}$ համար,
5. $\mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{F}(b) - \mathbb{F}(a)$ ցանկացած $a, b \in \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < \infty$) համար:

1.3.3. Դիսկրետ պատահական մեծություններ

Պատահական մեծությունը, որն ընդունում է *վերջավոր* կամ *հաշվելի* թվով արժեքներ, կոչվում է **դիսկրետ** պատահական մեծություն:

Օրինակ 1.21. 1. Որոշակի վայրում մեկ ամսվա ընթացքում պատահած ավտովթարների թիվը վերջավոր թվով ոչ բացասական ամբողջ արժեքներ ընդունող պատահական մեծություն է:

2. Մետադադրամի նետումների թիվը մինչ առաջին անգամ «զինանշանի» ի հայտ գալը հաշվելի (1, 2, ...) թվով արժեքներ ընդունող պատահական մեծություն է:

$x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ ($x_k < x_{k+1}, k \geq 1$) արժեքներ ընդունող
 $X = X(\omega)$ պատահական մեծության՝

ա) **բաշխման օրենք** կոչվում են հետևյալ հավանականությունները՝

$$p_k = p(x_k) = \mathbb{P}(\omega: X(\omega) = x_k) := \mathbb{P}(X = x_k), \quad k \geq 1,$$

բ) Բաշխման աղյուսակ կոչվում է

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$

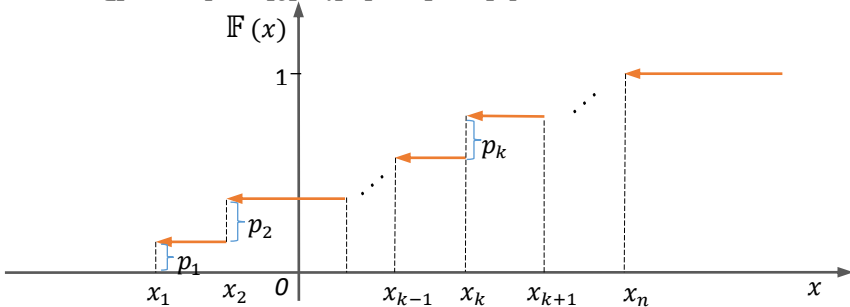
աղյուսակը, որտեղ՝ $p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots = 1$:

Եթե դիսկրետ X պատահական մեծությունն ընդունում է $x_1, x_2, \dots, x_n$ վերջավոր թվով արժեքներ, ապա դրա բաշխման ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

[illegible]

Այսպիսով, դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան աստիճանաձև, խզվող ֆունկցիա է, որի թռիչքները տեղի են ունենում x_k կետերում, իսկ թռիչքների չափը այդ կետերում հավասար է p_k -ի, $k \geq 1$:

Բաշխման ֆունկցիայի գծապատկերն է՝



Օրինակ 1.22. Դիցուք դիսկրետ X պատահական մեծությունը տրված է բաշխման աղյուսակի միջոցով՝

X	1	2	3	4
$\mathbb{P}$	1/4	1/2	1/8	1/8

Գտնենք այդ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:

Լուծում: X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան կլինի՝

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 1/4, & 1 < x \leq 2 \\ 3/4, & 2 < x \leq 3 \\ 7/8, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Բեռնուլիի պատահական մեծություն

Հավանականությունների տեսությունում և կիրառական վիճակագրությունում կարևոր դեր ունի *Բեռնուլիի պատահական մեծությունը*:

Դիցուք կատարվում է փորձ, որի արդյունքում ի հայտ է գալիս A պատահույթը («հաջողություն») կամ $\bar{A}$ պատահույթը («անհաջողություն»): Նշանակենք՝ $\mathbb{P}(A) = p$, իսկ $\mathbb{P}(\bar{A}) = q = 1 - p$ ($0 \leq p \leq 1$):

Ներմուծենք 1 և 0 արժեքներ ընդունող հետևյալ X պատահական մեծությունը (**Բեռնուլիի պատահական մեծություն**)՝ $X = 1$, եթե տեղի է ունենում A պատահույթը, և $X = 0$, եթե տեղի է ունենում $\bar{A}$ -ը: Այսպիսով, Բեռնուլիի X պատահական մեծության բաշխման օրենքը կլինի՝

$$p_0 = \mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p, \quad \mathbb{P}(X = 1) = p :$$

1.3.4. Պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը

Դիսկրետ պատահական մեծությունների դեպքը

Դիցուք X -ը վերջավոր թվով արժեքներ ընդունող *դիսկրետ պատահական մեծություն* է, որը տրված է

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

բաշխման աղյուսակի միջոցով, որտեղ $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$:

X պատահական մեծության **մաթեմատիկական սպասում** (**մաթ. սպասում**) կամ **միջին** կոչվում է

$$\mathbb{E}X = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

մեծությունը:

Եթե մեկնաբանենք $p_1, p_2, \dots, p_n$ -ը ($p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$) որպես կետային զանգվածներ, տեղադրված $x_1, x_2, \dots, x_n$ կետերում, ապա $\mathbb{E}X$ մաթ.սպասումը ներկայացնում է իրենից X պատահական մեծության արժեքների «կշռավորված» միջինը: Ֆիզիկական իմաստն այն է, որ $\mathbb{E}X$ -ը այդ զանգվածների **ծանրության կենտրոնն** է:

Օրինակ 1.23. Դիցուք X պատահական մեծության բաշխման օրենքը տրվում է հետևյալ աղյուսակի միջոցով՝

X	0	1
$\mathbb{P}$	1/2	1/2

Գտնենք X -ի միջինը:

Լուծում: Քանի որ $p_0 = \mathbb{P}(X = 0) = 1/2$,

$$p_1 = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2,$$

ապա՝

$$\mathbb{E}X = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} :$$

Օրինակ 1.24. X պատահական մեծությանը համապատասխանում է

X	0	1
$\mathbb{P}$	1/3	2/3

բաշխման աղյուսակը: Գտնենք X -ի մաթ.սպասումը:

Լուծում: Ունենք

$$p_0 = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3}, \quad p_1 = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{3} :$$

Այսպիսով՝

$$\mathbb{E}X = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} :$$

0 և 1 արժեքների կշռավորված միջինը (X -ի մաթ.սպասումը) հավասար է 2/3-ի, քանի որ X պատահական մեծության 1 արժեքը 0 արժեքի համեմատ երկու անգամ ավելի մեծ «կշիռ» ունի:

Օրինակ 1.25. Դիցուք X պատահական մեծության բաշխման օրենքը տրվում է հետևյալ աղյուսակի միջոցով.

X	x_1	x_2	...	x_n
$\mathbb{P}$	1/n	1/n	...	1/n

այսինքն՝ բոլոր արժեքները հավասարահնարավոր են (ունեն հավասար «կշիռներ»): Այդպիսի պատահական մեծությունը կոչ-

վում է $x_1, x_2, \dots, x_n$ կետերում **հավասարաչափ բաշխված**:
Գտնենք X -ի մաթ.սպասումը:

Լուծում: X պատահական մեծության մաթ. սպասումը կլինի՝

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + x_n \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i := \bar{x},\end{aligned}$$

Այսինքն՝ այն հավասար է $x_1, x_2, \dots, x_n$ արժեքների միջին թվաբանականին:

Օրինակ 1.26. Դիցուք նետվում է կանոնավոր խաղոսկրը և X պատահական մեծությունը սահմանվում է $X(\omega) = \omega$ բանաձևով, այսինքն՝ այն համապատասխանում է բացված նիստի վրա ի հայտ եկած կետերի թվին: Գտնենք X պատահական մեծության մաթ.սպասումը:

Լուծում: Քանի որ $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = 1/6$, ապա, համաձայն օրինակ 1.25-ի, X պատահական մեծության միջինը հավասար է.

$$\mathbb{E}X = \frac{1 + 2 + \dots + 6}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 + 6}{2} \cdot 6 = 3.5 :$$

Նշենք, որ այս օրինակում X պատահական մեծության միջինը հավասար չէ X -ի հնարավոր արժեքներից մեկին: Խաղոսկրը նետելիս հնարավոր չէ ստանալ 3.5 արժեքը: $\mathbb{E}X$ մաթ.սպասումը հավասար չէ X պատահական մեծության արժեքներից սպասվող արժեքին, այլ հավասար է X -ի արժեքների միջին թվաբանականին:

Մաթեմատիկական սպասման հատկությունները

Դիցուք X -ը պատահական մեծություն է: Ճիշտ են այդ պատահական մեծության մաթ.սպասման հետևյալ հատկությունները.

1. $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}X$ ՝ կամայական հաստատուն c թվի համար,

2. $\mathbb{E}c = c$ ՝ հաստատուն թվի մաթ.սպասումը հավասար է այդ հաստատունին:

Երկու X_1 և X_2 պատահական մեծությունների համար.

3. $X_1 \geq X_2$ պայմանից հետևում է $\mathbb{E}X_1 \geq \mathbb{E}X_2$ պայմանը:
Մասնավորապես, եթե $X \geq 0$, ապա $\mathbb{E}X \geq 0$,
4. $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2$, և, ընդհանրապես, ցանկացած $X_1, X_2, \dots, X_n$ պատահական մեծությունների համար՝
 $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 + \dots + \mathbb{E}X_n$:

1.3.5. Պատահական մեծության ցրվածքը (դիսպերսիան)

X պատահական մեծության **ցրվածք** (կամ **դիսպերսիա**) կոչվում է հետևյալ մեծությունը՝

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2: \quad (1.8)$$

Ցրվածքը ցույց է տալիս $\mathbb{E}X$ միջինի նկատմամբ X պատահական մեծության արժեքների սփռվածության կամ ցրվածության չափը:

Ցրվածքը օժտված է հետևյալ հատկություններով.

1. Ճիշտ է (1.8) բանաձևի

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

համարժեք ներկայացումը,

2. կամայական X պատահական մեծության համար՝ $\mathbb{D}X \geq 0$,
3. $\mathbb{D}X = 0$ և $\mathbb{P}(X = c) = 1$
պայմանները համարժեք են (որտեղ c -ն հաստատուն է),
4. կամայական a և b հաստատունների համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$\mathbb{D}(a + bX) = b^2 \mathbb{D}X :$$

5. X_1 և X_2 պատահական մեծությունների համար ճիշտ է հետևյալ ներկայացումը՝

$$\mathbb{D}(X_1 + X_2) = \mathbb{D}X_1 + \mathbb{D}X_2 + 2\mathbb{E}(X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2):$$

Դիսկրետ պատահական մեծության դեպքը

Դիցուք X -ը՝

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

բաշխման աղյուսակով *դիսկրետ* պատահական մեծություն է: Այդ դեպքում X -ի ցրվածքը կներկայացվի հետևյալ բանաձևով.

$$\begin{aligned}\mathbb{D}X &= (x_1 - \mathbb{E}X)^2 p_1 + (x_2 - \mathbb{E}X)^2 p_2 + \dots + (x_n - \mathbb{E}X)^2 p_n \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_i\end{aligned}\quad (1.9)$$

կամ համարժեք

$$\mathbb{D}X = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2 \quad (1.10)$$

բանաձևով:

Օրինակ 1.27. Դիցուք X -ը *Բեռնուլիի* պատահական մեծություն է (տե՛ս 1.3.3): Գտնենք X -ի մաթ.սպասումը և ցրվածքը:

Լուծում: X պատահական մեծության բաշխման աղյուսակն ունի հետևյալ տեսքը՝

X	0	1
$\mathbb{P}$	q	p

Այստեղից՝

$$\mathbb{E}X = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p:$$

Այնուհետև, օգտվելով բանաձև (1.10)–ից, կստանանք՝

$$\mathbb{D}X = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = pq:$$

Օրինակ 1.28. Դիցուք X -ը՝ $x_1, x_2, \dots, x_n$ կետերում *հասարակ* բաշխված պատահական մեծություն է՝

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}$	$1/n$	$1/n$	$\dots$	$1/n$

Գտնենք X -ի ցրվածքը:

Լուծում: Համաձայն օրինակ 1.25-ի՝ X պատահական մեծության միջինը հավասար է՝

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x},$$

այնպես, որ ցրվածքի համար կստանանք հետևյալ բանաձևը (տե՛ս (1.9)).

$$\mathbb{D}X = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

կամ համարժեք (տե՛ս (1.10))

$$\mathbb{D}X = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \frac{1}{n} - \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 \quad (1.11)$$

բանաձևը:

Օրինակ 1.29. Դիցուք նետվում է կանոնավոր խաղոսկրը, և X պատահական մեծությունը սահմանվում է $X(\omega) = \omega$ բանաձևով, այսինքն՝ այն համապատասխանում է բացված նիստի վրա ի հայտ եկած կետերի թվին: Գտնենք X պատահական մեծության ցրվածքը:

Լուծում: Այս խնդիրը օրինակ 1.28-ի մասնավոր դեպքն է, որտեղ $x_i = i$, $i = 1, 2, \dots, 6$, $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = 1/6$: Օգտվելով (1.11) ներկայացումից՝ կստանանք՝

$$\mathbb{D}X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}:$$

Խնդիրներ

1.22. Մետաղադրամը նետվում է երկու անգամ: Կառուցել «զինանշանի» հանդես գալու թվի բաշխման օրենքը: Գտնել բաշխման ֆունկցիան և կառուցել դրա գրաֆիկը:

1.23. Դիցուք 10 մանրակներից 8-ը ստանդարտ են: Պատահականորեն վերցվում են երկու մանրակ: Կազմել վերցված մանրակների մեջ ստանդարտ մանրակների թվի բաշխման օրենքը: Գտնել բաշխման ֆունկցիան և կառուցել դրա գրաֆիկը:

1.24. Արտադրանքի 10%-ը խոտան է: Պատահականորեն վերցվում են չորս մանրակ: Գտնել դրանց մեջ խոտան մանրակների թվի բաշխման օրենքը:

1.25. 10 արտադրանքից 3-ը խոտան են: Պատահականորեն վերցվում է երկու արտադրանք: Գտնել դրանց մեջ խոտան արտադրանքների թվի միջինը և ցրվածքը:

1.26. 2 սպիտակ և 3 սև գնդիկ պարունակող սափորից պատահականորեն հանում են 2 գնդիկ: Գտնել դրանց մեջ սպիտակ գնդիկների թվի մաթ.սպասումը և ցրվածքը:

1.27. Դիսկրետ X պատահական մեծությունը տրված է հետևյալ բաշխման աղյուսակով.

X	-1	0	2	4
$\mathbb{P}$	0.1	0.1		0.3

Լրացնել աղյուսակը և գտնել X պատահական մեծության միջինը և ցրվածքը:

1.28. Մետաղադրամը նետվում է 3 անգամ: Դիցուք X պատահական մեծությունը «զինանշանի» երևույթների թիվն է: Գտնել X -ի բաշխման օրենքը, մաթ.սպասումը և ցրվածքը:

1.29. X պատահական մեծությանը համապատասխանում է հետևյալ բաշխման աղյուսակը.

X	-1	0	1	2
$\mathbb{P}$	0.2	0.1	0.3	0.4

Գտնել այդ պատահական մեծության մաթ.սպասումը և ցրվածքը:

ԳԼՈՒԽ 2

ՆԿԱՐԱԳՐԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՏՎՅԱԼՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ

Վիճակագրական հետազոտության սկզբնական փուլի եղանակները կազմում են այսպես կոչված *նկարագրական վիճակագրությունը*: Դրանք ուղղված են հավաքված տվյալները լավագույնս (ակնառու, մատչելի) ներկայացնելու նպատակին՝ աղյուսակների, գծագրերի, ամփոփիչ բնութագրերի միջոցով:

§ 2.1. Նմուշահանում: Հիմնական գաղափարներ

Վիճակագրությունը ծագել է ժողովրդագրական խնդիրներից և, հետևաբար, հիմնական տերմինները փոխ են առնվել հենց ժողովրդագրությունից:

Որոշակի ուսումնասիրման ենթակա բոլոր առարկաների բազմությունը կանվանենք **համախմբություն** կամ **համախումբ** (անգլերեն՝ **population**): Նրա տարրը կոչվում է **անհատ**:

Անհատների դիտարկվող հատկությունները կոչվում են **հատկանիշներ**: Դրանք կարող են լինել **որակական** կամ **քանակական**: Քանակական հատկանիշները լինում են **դիսկրետ** կամ **անընդհատ**: Համախմբի քանակական հատկանիշները կնշանակենք $X, Y, \dots$ լատինական այբուբենի մեծատառերով, իսկ դրանց արժեքները որոշակի անհատների համար՝ համապատասխան $x, y, \dots$ փոքրատառերով:

Համախմբի այն մասը, որը վերցվում է քննության համար, կոչվում է **նմուշ** (անգլերեն՝ **sample**), իսկ նմուշի ստացման գործընթացը՝ **նմուշահանում** (անգլերեն՝ **sampling**): Եթե ուսումնասիրվում են համախմբի բոլոր անդամները, ապա նմուշա-

հանումը կոչվում է **հաշվեհամար** (ժողովրդագրությունում՝ **մարդահամար**): Նմուշի մեջ ընդգրկված անհատների թիվը կոչվում է **նմուշի ծավալ**:

Տարբերում են նմուշահանման երկու եղանակ՝ **պատահական** և **ոչ պատահական**:

Պատահական է կոչվում այնպիսի նմուշահանումը, որի ընթացքում համախմբի բոլոր անդամները հավասար հնարավորություն ունեն ընդգրկվելու նմուշի մեջ՝ փոխադարձ անկախությունն ու պատահականությունն ապահովող որևէ գործընթացի միջոցով: Հավանականությունների տեսության տեսակետից այդպիսի նմուշահանումը անկախ փորձերի հաջորդականություն է: Պատահական նմուշահանումը կարող է կատարվել պարզագույն վիճակահանության միջոցով: Կարևորն այն է, որ նմուշահանման ընթացքում թույլ չտրվեն պատահականության սկզբունքի խախտումներ, որոնց հետևանքով կարող են առաջանալ նմուշահանման անճշտություններ: Այդ պատճառով կիրառում են **ոչ լրիվ պատահական** նմուշահանում, որպեսզի նմուշում մասնակցեն համախմբի տարբեր որակական շերտերի անհատները, օրինակ՝ հարցումների ժամանակ տարբեր խավերի, տարիքային խմբերի, ազգությունների, բնակավայրերի և այլն, անհատների մասնակցությունը:

Պատահական նմուշահանումը կարող է կատարվել որպես համախմբից **վերադարձումով նմուշահանում**, որի ժամանակ նմուշի մեջ ընդգրկված անհատը նորից մասնակցում է հաջորդ պատահական վիճակահանությանը, ընդ որում, բոլոր իրար հաջորդող վիճակահանությունները իրարից անկախ են և կատարվում են միևնույն պայմաններում: **Անվերադարձ նմուշահանման** դեպքում նմուշի մեջ ընդգրկված անհատն այլևս չի մասնակցում հաջորդ վիճակահանություններին: Եթե համախմբի բոլոր անհատներն են շատ մեծ թվով անհատներ, ապա կարելի է հա-

մարել, որ այդ երկու տեսակի նմուշահանումները չեն տարբերվում, և հաջորդական վիճակահանումները կատարվում են համարյա անփոփոխ պայմաններում ու իրարից անկախ:

Հարց է ծագում. առաջինը՝ ինչպե՞ս կազմակերպել նմուշահանումը, որպեսզի ստացված տեղեկությունները հնարավորին չափ ճիշտ արտացոլեն ամբողջ համախմբի հետազոտվող հատկությունները՝ նմուշը լինի **ներկայացուցչական** (անգլերեն՝ **representative**) և, երկրորդը՝ ինչպե՞ս մշակել նմուշը՝ նրանից համախմբի վերաբերյալ առավել հուսալի տեղեկություններ ստանալու համար:

Համախմբից վերցված պատահական նմուշահանմանը համապատասխանող անհատների հատկանիշների ($X_1, X_2, \dots, X_n$) պատահական վեկտորը կոչվում է **պատահական նմուշ**, իսկ փորձարկումից հետո ստացված $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ իրագործումների վեկտորը՝ **թվային նմուշ** (հավանականությունների տեսությունում $X_1, X_2, \dots, X_n$ -ը *անկախ միատեսակ բաշխված* պատահական մեծությունների հաջորդականություն է):

Դիցուք ուսումնասիրվում է որոշ երևույթի վերաբերյալ հասարակության կարծիքը: X հատկանիշը սահմանենք հետևյալ ձևով՝ եթե տվյալ անձը (անհատը) կողմ է այդ երևույթին, ապա համարում ենք այդ անձի համար $X = 1$, եթե նա դեմ է՝ համարում ենք $X = 0$: Պատահականության սկզբունքով վերցված մարդկանց որոշակի խմբի համար (նմուշ) կատարվում է հարցում: X հատկանիշը դիտարկված յուրաքանչյուր i -րդ անձի համար նշանակենք X_i -ով: Այսպիսով, մինչև հարցում կատարելը դիտարկում ենք «սպասվող» կարծիքների $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ վեկտորը (նմուշը): Հարցումներից հետո $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ վեկտորը ներկայացնում է իրենից 0-ից և 1-ից կազմված վեկտոր:

X հատկանիշի չափումներից ստացված $x_1, x_2, \dots, x_n$ տվյալները կոչվում են **չմշակված**: *Չմշակման* կարգով վերադասավոր-

ված չմշակված տվյալների հաջորդականությունը կոչվում է **փոփոխման (վարիացիոն) շարք**: Փոփոխման շարքի անդամները նշանակվում են $x_{(k)}$ -ով և կոչվում են **կարգային վիճականիներ**՝

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}:$$

Կամայական ֆունկցիա նմուշից կոչվում է **վիճականի** (օրինակ՝ $x_{(1)} = \min(x_1, \dots, x_n)$, $x_{(n)} = \max(x_1, \dots, x_n)$)՝ **փոքրագույն** և **մեծագույն կարգային վիճականիներն** են):

§ 2.2. Նմուշային տվյալներ

Վիճակագրական տվյալները լինում են **որակական** և **քանակական**: Տվյալների տարբեր տեսակներին համապատասխան ընտրվում են դրանց մշակման առանձնահատկությունները:

Որակական տվյալները իրենց հերթին բաժանվում են **անվանական (նոմինալ)** և **կարգային (օրդինալ)** տվյալների:

Անվանական տվյալները առաջ են գալիս, երբ նշվում են անհատների դասերը, հատկությունները, օրինակ՝ ապրանքների տեսակների կոդերը, համալսարանի ֆակուլտետների համարները, հիվանդի նույնականացման համարը, դեղամիջոցի անվանումը, ընտանեկան վիճակը, մագերի գույնը և այլն:

Անվանական տվյալների հետ չի կարելի կատարել թվաբանական գործողություններ, չի կարելի դասավորել աճման կամ նվազման կարգով, քանի որ դրանք չեն կրում չափի իմաստ:

Կարգային տվյալները ներկայացնում են առարկաների ու երևույթների կարգավորումն ըստ կարևորության, ուժգնության կամ այլ որակի, օրինակ՝ քամու կամ երկրաշարժի ուժգնության աստիճանը (բալլը), հիվանդության աստիճանը (թեթև, ծանր, շատ ծանր), քննության գնահատականը (2, 3, 4, 5), ծանրամարտի քաշային կարգը (ամենաթեթև, թեթև, միջին, կիսածանր, ծանր, գերծանր) և այլն:

Կարգային տվյալների հետ թվաբանական գործողություններ կատարելը նույնպես անիմաստ է:

Քանակական տվյալները լինում են **դիսկրետ** և **անընդհատ**:

Դիսկրետ տվյալներ են, օրինակ, ընտանիքի երեխաների թիվը, օրվա ընթացքում հեռախոսազանգերի քանակը, հիվանդանոցում գտնվող հիվանդների թիվը, մեկ ամսվա ընթացքում ավտովթարների թիվը և այլն:

Անընդհատ տվյալներ են, օրինակ, ֆիզիկական չափումները (երկարություն, մակերես, ծավալ, քաշ, ժամանակ և այլն), բժշկական չափումներ (արյան ճնշում, արյան կենսաքիմիական ցուցանիշներ և այլն):

Ի տարբերություն որակական տվյալների՝ քանակական տվյալների հետ հնարավոր է կատարել թվաբանական գործողություններ:

2.2.1. Որակական տվյալների ներկայացում

Դիցուք փորձի ընթացքում ստացվել են որոշակի հատկանիշով դասակարգված n հատ որակական տվյալ: Տվյալ դասին պատկանող դիտումների թիվը կոչվում է այդ դասի **հաճախություն**: Դասի **հարաբերական հաճախություն** կոչվում է՝

$$\text{դասի հարաբերական հաճախությունը} = \frac{\text{դասի հաճախությունը}}{\text{դիտումների ընդհանուր թիվը}} :$$

Նշանակենք i -րդ դասին պատկանող տվյալների թիվը n_i -ով: Այդ դեպքում տվյալ դասի հարաբերական հաճախությունը, որը կնշանակենք f_i -ով, հավասար է՝

$$f_i = \frac{n_i}{n} :$$

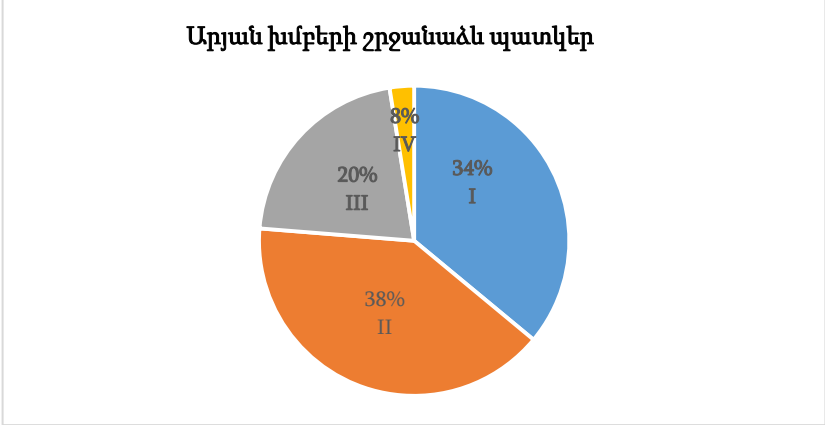
Որակական տվյալների դասերից և դրանց համապատասխան հաճախություններից (կամ հարաբերական հաճախություններից) կազմված աղյուսակը կոչվում է **հաճախությունների (հարաբերական հաճախությունների) վիճակագրական բաշխման աղյուսակ** (նշենք, որ հարաբերական հաճախությունները կարող են արտահայտված լինել տոկոսներով՝ $f_i \cdot 100$ %):

Օրինակ 2.1. Դիցուք հետազոտվում են 50 անձ, որոնք տրոհված են դասերի ըստ արյան խմբի պատկանելիության: Համա-

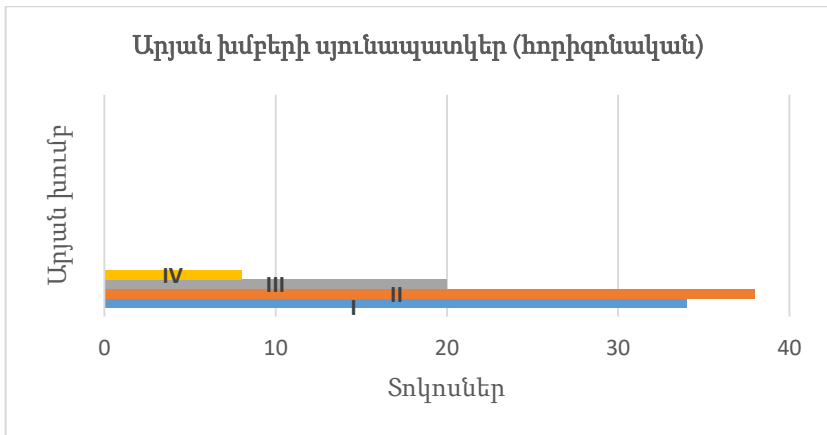
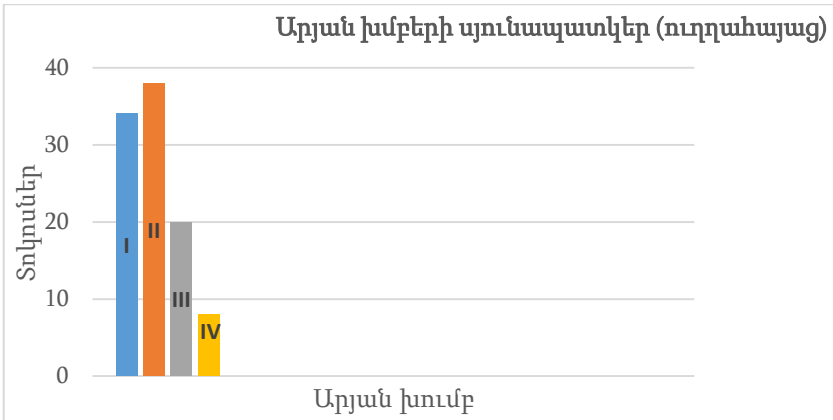
պատասխան հաճախությունների բաշխման աղյուսակը ունի հետևյալ տեսքը.

Արյան խումբը	Հաճախությունը (n_i)	Հարաբերական հաճախությունը (f_i)	Տոկոսը (%)
I	17	0.34	34
II	19	0.38	38
III	10	0.2	20
IV	4	0.08	8
Ընդհանուրը	50	1	100

Ներկայացնենք այդ տվյալները «շրջանաձև պատկերի» (pie chart) միջոցով՝ տրոհելով շրջանը արյան խմբերին համեմատական մակերեսներ ունեցող սեկտորների.



Բերենք այնուհետև տվյալների ներկայացումը ուղղահայաց և հորիզոնական պոլսապատկերների միջոցով.



2.2.2. Քանակական տվյալների ներկայացում «Ցողուն և տերևներ» ներկայացում (Stem-and-leaf plot)

Վիճակագրական տվյալների հարմար գրանցման համար օգտակար է լինում օգտագործել այդ տվյալների այսպես կոչված «ցողուն և տերևներ» ներկայացումը: Առկա տվյալները դասավորվում են ըստ խմբերի («ցողուններ»)՝ ներկայացնելով դրանք ուղ-

դաձիգ գծի ձախ կողմում: Այդ արժեքները սովորաբար ներկայացնում են իրենցից աճման կարգով գրված թվի ամբողջ մասը կամ ընդհանուր կոտորակային մասը (եթե թիվը կոտորակային է): Այնուհետև այդ գծի աջ մասում աճման կարգով գրվում են յուրաքանչյուր խմբի փոփոխվող (կոտորակային) մասը («տերևներ»):

Օրինակ 2.2. Դիցուք դիտարկված են հետևյալ տվյալները.

5.4 4.3 4.8 5.5 8.5 6.1 4.8 4.9 4.9 7.0 5.5 3.5 5.9 6.3 6.6:

Ներկայացնենք այդ տվյալները «ցողուն և տերևներ» տեսքով:

Լուծում: Վերադասավորենք տվյալները աճման կարգով, կառուցենք փոփոխման շարքը.

3.5 4.3 4.8 4.8 4.9 4.9 5.4 5.5 5.5 5.9 6.1 6.3 6.6 7.0 8.5:

Որպես ցողուն վերցնենք այդ թվերի ամբողջ մասերը՝ գրելով դրանք ուղղաձիգ գծի ձախ մասում, իսկ աջ մասում գրենք այդ թվերի կոտորակային մասերը.

3	5
4	3 8 8 9 9
5	4 5 5 9
6	1 3 6
7	0
8	5

Դիսկրետ հատկանիշների աղյուսակային և գրաֆիկական ներկայացումներ

Դիցուք ուսումնասիրման ենթակա X դիսկրետ հատկանիշին համապատասխանող n ծավալի նմուշի ընդունած տարբեր արժեքների k թիվը մեծ չէ: Այդ արժեքները կկոչենք տարբերակներ: Կազմենք մի աղյուսակ (**հաճախությունների վիճակագրական բաշխման աղյուսակ**), որում մասնակցում են աճման կարգով ներկայացված x_i տարբերակները և դրանց համապատասխան n_i

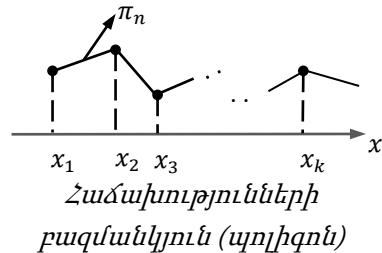
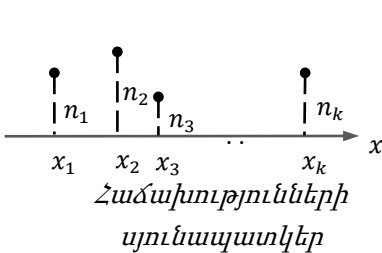
հաճախությունները (x_i տարբերակի կրկնվելու թիվը նմուշում) ու հարաբերական հաճախությունները ($f_i = n_i/n$).

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k
f_i	f_1	f_2	$\dots$	f_k

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n, \quad f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

(x_i, n_i) և $(x_i, f_i), i = 1, \dots, k$ զույգերի հաջորդականությունները կոչվում են **հաճախությունների** և, **համապատասխանաբար, հարաբերական հաճախությունների վիճակագրական բաշխման շարքեր**:

(x_i, n_i) և $(x_i, f_i), i = 1, \dots, k$ կետերին համապատասխանող ուղղաձիգ հատվածների գծապատկերը կոչվում է **հաճախությունների** և **հարաբերական հաճախությունների սյունապատկեր**, իսկ այդ կետերը միացնող բեկյալը՝ **հաճախությունների** և **հարաբերական հաճախությունների բազմանկյուն** կամ **պոլիգոն** (π_n):



Նմուշային (եմպիրիկ) բաշխման ֆունկցիա կամ **կուտակված հարաբերական հաճախությունների ֆունկցիա** կոչվում է

$$F_n(x) = \frac{n_x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

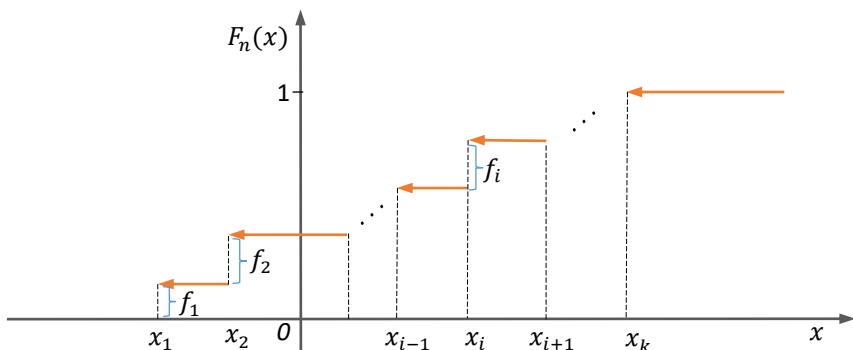
ֆունկցիան, որտեղ n_x -ով նշանակված է $\mathbb{R}$ իրական ուղղի x կետը չգերազանցող նմուշային արժեքների թիվը:

Օգտվելով հաճախությունների վիճակագրական բաշխման աղյուսակից՝ $F_n(x)$ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել հետևյալ

ձևով.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } x \leq x_1 \\ \omega_1, & \text{երբ } x_1 < x \leq x_2 \\ \dots & \\ \omega_i, & \text{երբ } x_i < x \leq x_{i+1} \\ \dots & \\ \omega_k = 1, & \text{երբ } x > x_k \end{cases}$$

որտեղ $\omega_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$ ՝ կուտակված հարաբերական հաճախականություններն են: Պարզ է, որ $\omega_k = f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$:



Նմուշային բաշխման ֆունկցիայի գծապատկերը

Օրինակ 2.3. Տրված է X պատահական մեծության նմուշը՝

$(-3, 0, 1, -1, 0, -3, 5, 0, 1, -3)$:

ա) Կազմել բացարձակ և հարաբերական հաճախությունների վիճակագրական բաշխման աղյուսակները,

բ) կառուցել հարաբերական հաճախությունների սյունապատկերը և բազմանկյունը (պոլիգոնը),

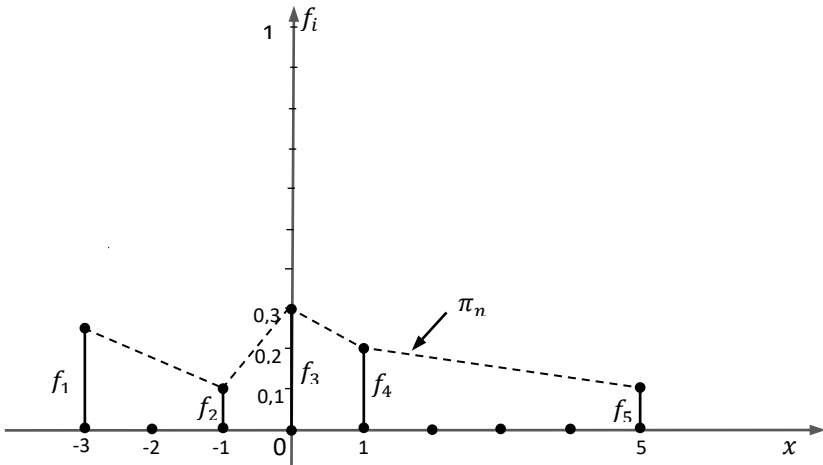
գ) կառուցել նմուշային (էմպիրիկ) բաշխման ֆունկցիայի գծապատկերը:

Լուծում:

ա) Բացարձակ (n_i) և հարաբերական ($f_i = n_i/n$) հաճախությունների վիճակագրական բաշխման աղյուսակը կլինի ($n = 10$)՝

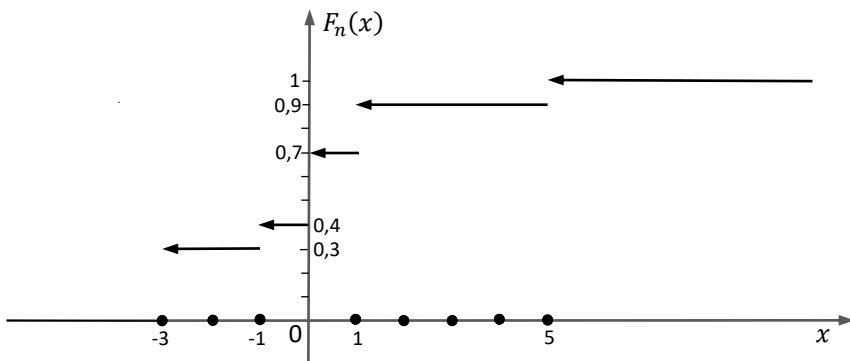
x_i	-3	-1	0	1	5
n_i	3	1	3	2	1
f_i	0.3	0.1	0.3	0.2	0.1

բ) կառուցենք հարաբերական հաճախությունների սյունապատկերը և բազմանկյունը (պոլիգոնը)՝



գ) նմուշային բաշխման ֆունկցիայի գծապատկերը կառուցելու համար կազմենք կուտակված հարաբերական հաճախությունների աղյուսակը ($\omega_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$).

x_i	-3	-1	0	1	5
ω_i	0.3	0.4	0.7	0.9	1



Անընդհատ հատկանիշների աղյուսակային և գրաֆիկական ներկայացումներ

Անընդհատ X հատկանիշի դեպքում փորձի արդյունքում ստացված n ծավալի նմուշի արժեքները կազմում են չկրկնվող թվերի շարք, որից դժվար է որևէ հատկություն նկատել: Այդ պատճառով նմուշային տվյալները ներկայացնում են խմբավորված ձևով՝ նմուշային արժեքների բազմությունը տրոհվում է $\Delta_i = [a_i, a_{i+1})$ հավասար h երկարությամբ միջակայքերի: Այնուհետև կազմվում է **միջակայքային բաշխման աղյուսակը**, որում հաշվարկվում են այդ միջակայքերին համապատասխանող n_i հաճախությունները (այսինքն՝ այդ միջակայքերին պատկանող նմուշային արժեքների թիվը) և f_i հարաբերական հաճախությունները.

Δ_i	$[a_1, a_2)$	$[a_2, a_3)$	$\dots$	$[a_k, a_{k+1})$
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k
f_i	f_1	f_2	$\dots$	f_k

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n, \quad f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1 :$$

$\Delta_i = [a_i, a_{i+1})$ հիմք և $h_i = \frac{n_i}{h}$ (համապատասխանաբար $h_i = \frac{f_i}{h} = \frac{n_i}{nh}$), $i = 1, \dots, k$ բարձրություն ունեցող ուղղանկյուններից կազմված պատկերը կոչվում է **հաճախությունների (հարաբերական հաճախությունների) պունապատկեր** կամ **հիստոգրամ**:

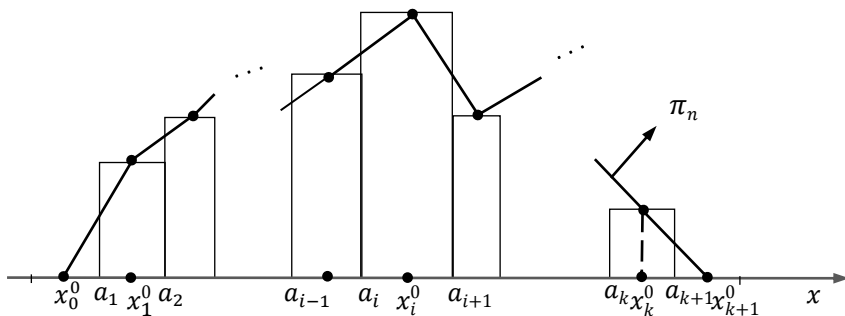
Նշանակենք x_i^0 -ով $[a_i, a_{i+1})$ միջակայքի միջնակետը՝ $x_i^0 = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$:

$\left(x_i^0, \frac{n_i}{h}\right)$ (համապատասխանաբար $\left(x_i^0, \frac{f_i}{h}\right)$), $i = 1, \dots, k$ կետերը

միացնող բեկյալը կոչվում է **հաճախությունների (հարաբերական հաճախությունների) բազմանկյուն** կամ **պոլիգոն**: Որպեսզի այդ

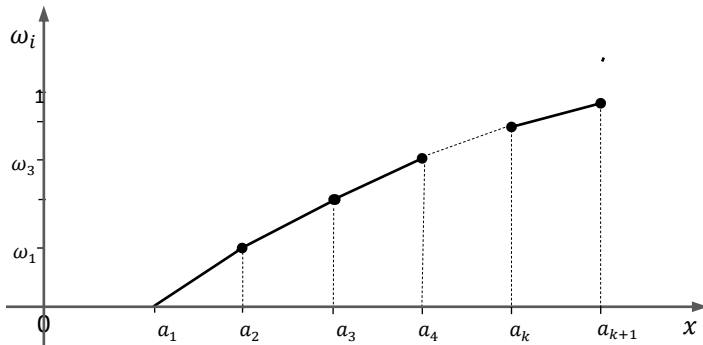
բեկյալը «փակվի» x առանցքի վրա, ավելացվում են h երկարությամբ երկու միջակայք՝ $[a_0, a_1)$ և $[a_{k+1}, a_{k+2})$, որտեղ n_i հաճախությունն ընդունվում է հավասար 0-ի: Այնուհետև ուղղագիծ հատվածներով այդ միջակայքերի $x_0^0 = \frac{a_0 + a_1}{2}$ և $x_{k+1}^0 = \frac{a_{k+1} + a_{k+2}}{2}$

միջնակետերը միացվում են համապատասխանաբար $\left(x_1^0, \frac{n_1}{h}\right)$ $\left(\left(x_1^0, \frac{f_1}{h}\right)\right)$ և $\left(x_k^0, \frac{n_k}{h}\right)$ $\left(\left(x_k^0, \frac{f_k}{h}\right)\right)$ կետերի հետ.



Հաճախությունների պունապատկեր (հիստոգրամ) և բազմանկյուն (պոլիգոն)

Կուտակված հարաբերական հաճախությունների բազմանկյուն կամ **պոլիգոն** կոչվում է $(a_1, \omega_0), (a_2, \omega_1), \dots, (a_{k+1}, \omega_k)$ կետերը միացնող բեկյալը, որտեղ $\omega_0 = 0, \omega_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i, i = 1, \dots, k$: Եթե հարաբերական հաճախությունները տրվում են տոկոսներով ($f_i \cdot 100\%$), ապա բազմանկյունը կոչվում է **կուտակված տոկոսների բազմանկյուն**: Այն թույլ է տալիս որոշել, թե դիտվող տվյալների քանի՞ տոկոսը չի գերազանցում որոշակի հաստատուն թիվը:



Կուտակված հարաբերական հաճախությունների բազմանկյուն

Օրինակ 2.4. Ատլանտյան օվկիանոսի 20 տարբեր գիտահետազոտական կայաններում կատարված չափումների արդյունքում ստացվել են հետևյալ տվյալները (0.1 ճշտությամբ) ծովային կակղամորթերի մեջ կադմիումի պարունակության վերաբերյալ (*միլիգրամներով*)՝

5.1 14.4 14.7 10.8 6.5 5.7 7.7 14.1 9.5 3.7
8.9 7.9 7.9 4.5 10.1 5.0 9.6 5.5 5.1 11.4:

ա) Բերենք տվյալների «ցողուն և տերևներ» տեսքի ներկայացումը,

բ) կազմենք բացարձակ և հարաբերական հաճախությունների միջակայքային բաշխման աղյուսակը՝ որպես առաջին միջակայք վերցնելով (3.0, 5.5] միջակայքը,

գ) կառուցենք հարաբերական հաճախությունների սյունապատկերը (հիստոգրամը) և բազմանկյունը (պոլիգոնը),

դ) կառուցենք կուտակված հարաբերական հաճախությունների բազմանկյունը:

Լուծում: ա) Կազմենք տվյալների փոփոխման շարքը՝

3.7 4.5 5.0 5.1 5.1 5.5 5.7 6.5 7.7 7.9 7.9 8.9 9.5 9.6 10.1
10.8 11.4 14.1 14.4 14.7:

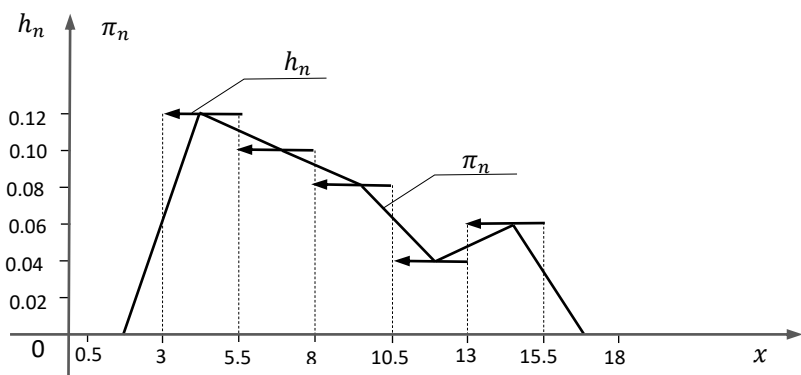
Այնուհետև, վերցնելով որպես «ցողուն» նմուշային տվյալների ամբողջ մասերը, իսկ որպես «տերևներ»՝ կոտորակային մասերը, կստանանք հետևյալ ներկայացումը՝

3	4	5	6	7	8	9	10	11	14
7	5	0	5	7	9	5	1	4	1
		1		9		6	8		4
		1		9					7
		5							
		7							

բ) Կազմենք բացարձակ (n_i) և հարաբերական ($f_i = n_i/n$) հաճախությունների միջակայքային բաշխման աղյուսակը և հաշվենք հարաբերական հաճախությունների սյունապատկերի $h_i = f_i/h, i = 1, \dots, 5, h = 2.5$ բարձրությունները.

Δ_i	(3, 5.5]	(5.5, 8]	(8, 10.5]	(10.5, 13]	(13, 15.5]
n_i	6	5	4	2	3
f_i	0.3	0.25	0.2	0.1	0.15
$h_i = f_i/h$	0.12	0.1	0.08	0.04	0.06

գ) Հարաբերական հաճախությունների սյունապատկերը և բազմանկյունը կլինի՝

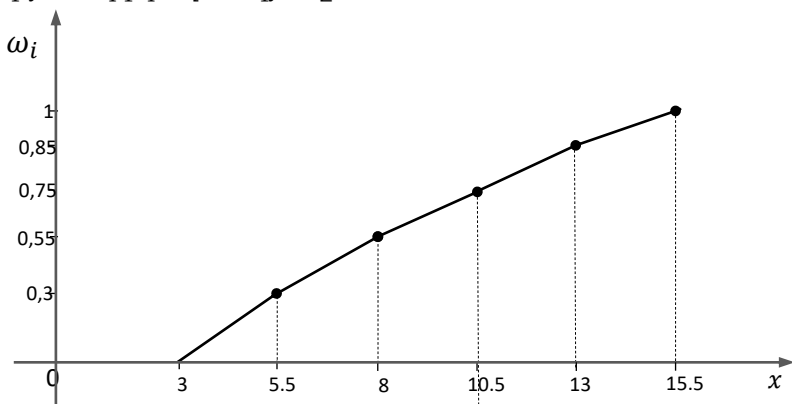


դ) Կոստակված հարաբերական հաճախությունների (տոկոսների) աղյուսակն է՝

Δ_i	(3, 5.5]	(5.5, 8]	(8, 10.5]	(10.5, 13]	(13, 15.5]
f_i	0.3	0.25	0.2	0.1	0.15
$f_i \cdot 100\%$	30%	25%	20%	10%	15%
ω_i	0.3	0.55	0.75	0.85	1
$\omega_i \cdot 100\%$	30%	55%	75%	85%	100%

որտեղ $\omega_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i, i = 1, \dots, 5$:

Այնուհետև կառուցենք կոստակված հարաբերական հաճախությունների բազմանկյունը՝



Կուտակված տոկոսների բազմանկյունը թույլ է տալիս եզրակացնել, որ, օրինակ, 10.5 արժեքը չգերազանցող տվյալները կազմում են բոլոր տվյալների 75%-ը, իսկ 9.25 արժեքը չգերազանցող տվյալները՝ կազմում են ամբողջ տվյալների 65%-ը:

§ 2.3. Նմուշային բնութագրիչներ

Հավաքագրելով քանակական տվյալները, բացի աղյուսակներից և գծապատկերներից, պահանջվում է ստանալ նաև այդ տվյալների բաշխումները նկարագրող այլ թվային բնութագրիչներ: Այդ բնութագրիչների թվին են պատկանում **կենտրոնական դիրքը** և **ցրվածությունը** նկարագրող բնութագրիչները:

2.3.1. Կենտրոնական դիրքի բնութագրիչներ

Շատ դեպքերում տվյալները ցուցաբերում են ակնհայտ միտում խմբավորվելու որոշակի կենտրոնական արժեքների շուրջ: **Կենտրոնական դիրքի** բնութագրիչները նկարագրում են իրական ուղղի որոշակի կետերի շուրջ տվյալների դիրքը: Դրանք են՝ **միջինը** (**միջին թվաբանականը**), **մեդիանը** (**կիսողը**, որը կոչվում է նաև՝ **միջնակետ** կամ **միջնարժեք**) և **մոդը**:

Միջին

Միջին թվաբանականը (որն անվանվում է ուղղակի **միջին**) առավել հաճախ օգտագործվող վիճակագրական բնութագրիչներից է: Այն իրենից ներկայացնում է տվյալների «*ծանրության կենտրոնը*», որի շուրջ սփռված են բոլոր դիտումները: Միջինը հաշվելու համար բոլոր տվյալների արժեքները գումարվում են, և արդյունքը բաժանվում այդ տվյալների քանակի վրա: Նմուշային միջինը նշանակվում է $\bar{x}$:

Այսպիսով, n ծավալ ունեցող $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ նմուշի միջինը հավասար է՝

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i:$$

Դիսկրետ հատկանիշի դեպք

Դիցուք $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ նմուշը համապատասխանում է *դիսկրետ* X հատկանիշին: Այդ դեպքում նմուշի որոշակի արժեքներ կարող են կրկնվել: Ենթադրելով, որ հաճախությունների վիճակագրական բաշխման աղյուսակն ունի հետևյալ տեսքը՝

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

որտեղ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, $\bar{x}$ նմուշային միջինը կարելի է գտնել՝ օգտվելով

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i$$

բանաձևից:

Անընդհատ հատկանիշի դեպք

Եթե X հատկանիշն *անընդհատ* է, և համապատասխան նմուշը տրվում է

Δ_i	$[a_1, a_2)$	$[a_2, a_3)$	$\dots$	$[a_k, a_{k+1})$
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

հաճախությունների միջակայքային բաշխման աղյուսակի միջոցով, ապա $\bar{x}$ նմուշային միջինը գտնելու համար որպես նմուշային արժեքներ վերցվում են համապատասխան $\Delta_i = [a_i, a_{i+1})$ միջակայքերի $x_i^0 = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ միջնակետերը, այնպես որ նմուշային միջինը կլինի հավասար՝

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1^0 + \dots + n_k x_k^0}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^0, \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_k :$$

Մեդիան

Նմուշային մեդիանը (նշանակվում է՝ x_{med}) այն արժեքն է, որը բաժանում է փոփոխման շարքը երկու «հավասար» մասի (x_{med} -ից փոքր և x_{med} -ից մեծ) այնպես, որ խմբերում լինեն հա-

վասար քանակությամբ արժեքներ: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ նմուշի համար, որին համապատասխանում է

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

փոփոխման շարքը, մեդիանը որոշվում է հետևյալ բանաձևի օգնությամբ՝

$$x_{med} = \begin{cases} \frac{x_{(m)} + x_{(m+1)}}{2}, & \text{երբ } n = 2m \\ x_{(m)}, & \text{երբ } n = 2m - 1 : \end{cases}$$

Օրինակ 2.5. Եթե $n = 10$, ապա $x_{med} = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2}$, իսկ եթե $n = 9$, ապա $x_{med} = x_{(5)}$:

Եթե տրված է նմուշի հաճախությունների միջակայքային բաշխման աղյուսակը, ապա **մեդիանը** որոշվում է հետևյալ բանաձևից՝

$$x_{med} = a_i + \frac{1}{n_i} \left(\frac{n}{2} - \sum_{j=1}^{i-1} n_j \right) (a_{i+1} - a_i),$$

որտեղ $[a_i, a_{i+1})$ -ը մեդիանը պարունակող միջակայքն է:

Օրինակ 2.6. Ըստ օրինակ 2.4 -ի տվյալների ($n = 20$)՝

Δ_i	$(3, 5.5]$	$(5.5, 8]$	$(8, 10.5]$	$(10.5, 13]$	$(13, 15.5]$
n_i	6	5	4	2	3

պարզ է, որ $x_{med} \in (5.5, 8]$, այսինքն՝ մեդիանը պարունակող միջակայքի համար ունենք՝ $i = 2, a_2 = 5.5, n_2 = 5$ և $x_{med} = 5.5 + \frac{1}{5}(10 - 6)(8 - 5.5) = 7.5$:

Մոդ

Ղիսկրետ հատկանիշի դեպք

Ղիցուք $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ը՝ ղիսկրետ X հատկանիշին համապատասխանող նմուշ է:

Մոդ (նշանակվում է՝ x_{mod}) կոչվում է նմուշային տվյալների *ամենահաճախ* հանդիպող արժեքը: Մոդը կարող է գոյություն չունենալ կամ միակը չլինել, այդ դեպքում բաշխումը կոչվում է **բազմամոդալ**:

Օրինակ 2.7

1. Դիցուք դիտվում է

(5, 4, 7, 9, 3, 3, 4, 7, 1, 4, 3, 5) նմուշը:

Պարզ է, որ $x_{mod} = 3$:

2. Հետևյալ նմուշը՝

(0, 1, -3, 1, 3, -3, 2)

ունի երկու մոդ՝ $x_{mod}^1 = -3, x_{mod}^2 = 1$: Նմուշային բաշխումը երկ-
մոդալ է:

2.3.2. Ցրվածության բնութագրիչներ

Ցրվածության բնութագրիչները նկարագրում են տվյալների սփռվածությունը (**spread**): Դրանք են՝ **նմուշի լայնքը**, **ցրվածքը** (**դիսպերսիան**), **ստանդարտ** (**միջին քառակուսային**) **շեղումը**, **փոփոխման** (**վարիացիայի**) **գործակիցը**:

Նմուշի լայնք

Պարզագույն ցրվածության բնութագրիչը **նմուշային լայնքն** է (**range**)՝

$$R = x_{(n)} - x_{(1)},$$

այսինքն՝ նմուշի *մեծագույն* և *փոքրագույն* արժեքների տարբե-
րությունը: Այն փաստորեն ցույց է տալիս նմուշային արժեքների
սփռվածության միջակայքի երկարությունը:

Ցրվածք (**դիսպերսիա**) և **ստանդարտ** (**միջին քառակուսային**)
շեղում

Նմուշային լայնքը, լինելով ցրվածության բնութագրիչ, չի նկարագրում, թե ինչպե՞ս են փոփոխվում տվյալները $x_{(1)}$ և $x_{(n)}$ **էքստրեմալ** արժեքների միջև: Տվյալների բաշխվածությունը նկարագրող բնութագրիչներից են՝ **նմուշային ցրվածքը (դիսպերսիան)** և **ստանդարտ** կամ **միջին քառակուսային շեղումը**: Այդ բնութագրիչները ցույց են տալիս միջին քառակուսային ցրվածությունը միջինի (սպասվող արժեքի) շրջակայքում:

Դիցուք X հատկանիշին համապատասխանում է $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ նմուշը:

Նմուշային ցրվածք (դիսպերսիա) կոչվում է հետևյալ մեծությունը.

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

որտեղ $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ նմուշային միջինն է:

Հաճախ s^2 ցրվածքը փոխարինվում է այսպես կոչված **անշեղ ցրվածքով**՝

$$s_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s^2 :$$

Նմուշային ցրվածքը կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ համարժեք տեսքով.

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 :$$

Նմուշային ստանդարտ կամ **միջին քառակուսային շեղում** կոչվում է

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

մեծությունը:

Դիսկրետ X հատկանիշի դեպքում, որի նմուշը տրված է

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

հաճախությունների բաշխման աղյուսակի միջոցով, նմուշային ցրվածքը կներկայացվի հետևյալ տեսքով.

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i \right)^2 :$$

Օրինակ 2.8. Դիցուք ունենք հետևյալ բաշխման աղյուսակով տրվող դիսկրետ X հատկանիշի տվյալները.

x_i	-3	-1	0	1	5
n_i	3	1	3	2	1

Գտնենք նմուշային ցրվածքը և միջին քառակուսային շեղումը:

Լուծում: Նախ գտնենք նմուշային միջինը.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \frac{1}{10} (3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5) \\ &= -0.3: \end{aligned}$$

Մյուս կողմից ունենք՝

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 = \frac{1}{10} (3 \cdot (-3)^2 + 1 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 5^2) = 5.5:$$

Այստեղից *նմուշային ցրվածքի* համար կստանանք՝

$$s^2 = 5.5 - (-0.3)^2 = 5.5 - 0.09 = 5.41,$$

իսկ *նմուշային միջին քառակուսային շեղման* համար՝

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5.41} \approx 2.33:$$

Փոփոխման (վարիացիայի) գործակից

Ի տարբերություն դիտարկված ցրվածության բնութագրիչների՝ **փոփոխման (վարիացիայի) գործակիցը** իրենից ներկայացնում

է ցրվածության հարաբերական չափը և արտահայտվում է *տոկոսներով*: **Փոփոխման գործակիցը** ցույց է տալիս տվյալների միջինի նկատմամբ ցրվածության չափը:

Փոփոխման գործակից կոչվում է տոկոսներով արտահայտված նրա միջին քառակուսային շեղման հարաբերությունը նմուշային միջինի մոդուլին՝

$$v = \frac{s}{|\bar{x}|} \cdot 100\%:$$

Եթե $v < 30\%$, ապա տվյալները համարվում են *համասեռ*, դրանց հիմնական մասը գտնվում է միջինից ոչ շատ հեռու, և $\bar{x}$ միջինը լավ է բնութագրում տվյալները: Եթե $v > 30\%$, ապա տվյալները համարվում են *անհամասեռ*, այսինքն՝ դրանց մեծ մասը գտնվում է $\bar{x}$ միջինից հեռու, և նմուշային միջինը վատ է բնութագրում այդ տվյալները:

Օրինակ 2.9. Բերված են երկու տարբեր շրջաններում խնձորենիների տերևների մեջ պրոտեինի պարունակության վերաբերյալ տվյալներ ($dq/1\text{ գ}$)՝

I շրջան	11.7	16.1	14.0	6.1	5.1	4.9
II շրջան	6.4	5.9	6.1	5.8	6.6	6.0

Գտնենք փոփոխման գործակիցները և համեմատենք դրանք:

Լուծում: Սկզբից գտնենք $\bar{x}_1$ և $\bar{x}_2$ նմուշային միջինները.

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{6} (11.7 + 16.1 + 14.0 + 6.1 + 5.1 + 4.9) = 9.65,$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{6} (6.4 + 5.9 + 6.1 + 5.8 + 6.6 + 6.0) \approx 6.13 :$$

Այնուհետև գտնենք նմուշային ցրվածքները և ստանդարտ շեղումները.

$$s_1^2 = \frac{1}{6} ((11.7)^2 + (16.1)^2 + (14)^2 + (6.1)^2 + (5.1)^2 + (4.9)^2) - (9.65)^2 \approx 20.1,$$

$$s_1 = \sqrt{s_1^2} = \sqrt{20.1} \approx 4.48,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{6} ((6.4)^2 + (5.9)^2 + (6.1)^2 + (5.8)^2 + (6.6)^2 + (6)^2) - (6.13)^2 \\ \approx 0.12,$$

$$s_2 = \sqrt{s_2^2} \approx 0.35:$$

Որտեղից կստանանք՝

$$v_1 = \frac{s_1}{|\bar{x}_1|} = \frac{4.48}{9.65} \approx 0.46, v_2 = \frac{s_2}{|\bar{x}_2|} = \frac{0.35}{6.13} \approx 0.06:$$

Այստեղից կարելի է եզրակացնել, որ երկրորդ շրջանի խնձորենիների տերևների մեջ պրոտեինի պարունակության վերաբերյալ տվյալները ավելի *համասեռ* են (մոտ են 6.13 մգ/ 1 գ միջին արժեքին), քան առաջին շրջանի համապատասխան տվյալները:

Նշենք նաև, որ փոփոխման գործակիցը օգտագործվում է, երբ անհրաժեշտ է լինում համեմատել տարբեր չափողականություն ունեցող նմուշների հարաբերական (միջինների նկատմամբ) փոփոխությունները:

Խնդիրներ

2.1. Ենթադրվում է, որ մրսածության դեմ ինչ-որ դեղամիջոց ունի լավ ազդեցություն: Այդ ենթադրությունը ստուգելու նպատակով դեղամիջոցը փորձարկվել է մեկ տարվա ընթացքում 500 հոգուց բաղկացած մարդկանց մի խմբի վրա, և արդյունքը համեմատվել 500 հոգուց բաղկացած մարդկանց մեկ այլ խմբի հետ, որոնք այդ դեղամիջոցը չեն ընդունել: Հետազոտության արդյունքում ստացվել է հետևյալ աղյուսակը.

	<i>Չեն հիվանդացել</i>	<i>Հիվանդացել են մեկ անգամ</i>	<i>Հիվանդացել են մեկից ավելի անգամ</i>
<i>Դեղամիջոցն ընդունողների թիվը</i>	252	145	103
<i>Դեղամիջոցը չընդունողների թիվը</i>	224	136	140

Կառուցել դեղամիջոցն ընդունողների և չընդունողների հարաբերական հաճախությունների (նաև արտահայտված տոկոսներով) բաշխման աղյուսակները: Բերել համապատասխան տոկոսային տվյալների շրջանաձև և սյունապատկեր ներկայացումները:

2.2. Մեկ օրվա ընթացքում 300 դոնորներ շարժական կենտրոնում հանձնել են արյուն: Ըստ դոնորների արյան խմբերի պատկանելիության՝ ստացվել է հետևյալ բաշխման աղյուսակը.

Արյան խումբը	I	II	III	IV
Հաճախությունը	120	136	32	12

Կառուցել հարաբերական հաճախությունների սյունապատկերը և բերել տոկոսային տվյալների շրջանաձև ներկայացումը:

2.3. Առաջին միջանկյալ քննության ժամանակ ուսանողները ստացել են հետևյալ գնահատականները (5 բալային համակարգով).

1.5 0 1 1 3.5 0.5 2.5 1 2 4 1.5 0 0.5 1 0 5 5 4.5
3 3 0 0.5

Կազմել փոփոխման շարքը, հաճախությունների վիճակագրական բաշխման աղյուսակը և բերել տվյալների «ցողուն և տերևներ» ներկայացումը:

2.4. «Ցողուն և տերևներ» ներկայացումով տրված 100 բալային համակարգով 20 ուսանողների ստացված միավորների օգնությամբ կազմել փոփոխման շարքը.

5	0 5 8
6	3 3 3 7
7	4 4 5 6 8 9
8	1 4 9
9	2 5 5 8

2.5. Ըստ հետևյալ տվյալների՝

0.68 0.72 0.92 1.14 1.42 0.94 0.77,
0.57 1.51 0.57 0.55 0.86 1.41 0.9,

կառուցել փոփոխման շարքը և տվյալները ներկայացնել «ցողուն և տերևներ» տեսքով՝ որպես «ցողուն» վերցնելով 0.5, 0.6, ... արժեքները:

2.6. Ըստ դիսկրետ X հատկանիշի նմուշային հաճախությունների վիճակագրական բաշխման աղյուսակի՝

x_i	- 2	0	1	3	4	7
n_i	3	2	1	5	2	4

կառուցել՝

ա) հարաբերական հաճախությունների պոնոմալատները և բազմանկյունը,

բ) նմուշային բաշխման ֆունկցիայի գծապատկերը:

2.7. Տվյալների բազմությունը պարունակում է 20 արժեք, որոնք ներկայացված են հաճախությունների աղյուսակով.

x_i	- 1	0	1	2
n_i	3	a	2	1

որտեղ 0 արժեքի հաճախությունը բացակայում է: Գտնել a -ի արժեքը և կառուցել հաճախությունների սյունապատկերը, բազմանկյունն ու բաշխման ֆունկցիայի գծապատկերը:

2.8. Բերված է տվյալների հարաբերական հաճախությունների աղյուսակը՝

x_i	1	2	3	4
f_i	0.3	p	0.2	0.1

Գտնել p -ի արժեքը և կառուցել հարաբերական հաճախությունների սյունապատկերը, պոլիգոնը և կուտակված հարաբերական հաճախությունների բազմանկյունը:

2.9. Տրված է դիսկրետ X հատկանիշի հետևյալ արժեքները.

5 4 7 9 3 3 4 7 1 4 3 5:

ա) Ներկայացնել տվյալները փոփոխման շարքի տեսքով,

բ) ստանալ հարաբերական հաճախությունների վիճակագրական բաշխման աղյուսակը,

գ) կառուցել հարաբերական հաճախությունների սյունապատկերը և բազմանկյունը,

դ) կառուցել նմուշային բաշխման ֆունկցիայի գծապատկերը:

2.10. Ըստ անընդհատ հատկանիշի հաճախությունների միջակայքային բաշխման աղյուսակի՝

1)

Միջակայքեր	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)	[7, 8)
Հաճախություններ	1	2	7	18	12	8	2

2)

Միջակայքեր	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)
Հաճախություններ	25	45	80	45	5

կառուցել հարաբերական հաճախությունների սյունապատկերը (հիստոգրամը) և բազմանկյունը ու կուտակված հարաբերական հաճախությունների բազմանկյունը:

2.11. Ըստ հետևյալ տվյալների՝

69 92 68 77 80 70 85 88 85 96

93 75 76 82 100 53 70 70 82 85

Կառուցել՝

ա) «ցողուն և տերևներ» ներկայացումը,

բ) հաճախությունների միջակայքային բաշխման աղյուսակը՝ վերցնելով 51 – 60, 61 – 70, ..., 91 – 100 միջակայքերը,

գ) հաճախությունների սյունապատկերը:

2.12. Ըստ անընդհատ հատկանիշի հետևյալ տվյալների՝

8.5 8.2 7.0 7.0 6.9 6.5 8.2 7.6 7.5 9.3

9.6 8.5 8.8 8.5 8.7 8.0 7.7 9.9 9.2 6.9

Կառուցել՝

ա) «ցողուն և տերևներ» ներկայացումը,

բ) հարաբերական հաճախությունների միջակայքային բաշխման աղյուսակը՝ վերցնելով [6, 7), [7, 8), [8, 9), [9, 10) միջակայքերը,

գ) հարաբերական հաճախությունների սյունապատկերը (հիստոգրամը),

դ) կուտակված հարաբերական հաճախությունների բազմանկյունը:

2.13. Բերված են 40 նավթատար լցանավերի ջրատարողությունների վերաբերյալ հետևյալ տվյալները (*հազարական տոննաներով*).

229 232 239 232 259 361 220 260 231 229

249 254 257 214 237 253 274 230 223 253

195 269 231 268 189 290 218 313 220 270

277 374 222 290 231 258 227 269 220 224:

ա) Բերել տվյալների «ցողուն և տերևներ» տեսքի ներկայացումը, որպես «ցողուն» վերցնելով 18, 19, 20, ... թվերը,

բ) օգտվելով ստացված ներկայացումից՝ կառուցել հաճախությունների միջակայքային վիճակագրական բաշխման աղյուսակը՝ վերցնելով *ուշ* հավասար երկարություն ունեցող միջակայքեր, որոնցից առաջինը [175, 200) միջակայքն է,

գ) կառուցել բացարձակ հաճախությունների բազմանկյունը (պոլիգոնը) և սյունապատկերը,

դ) կառուցել կուտակված հարաբերական հաճախությունների բազմանկյունը:

Նմուշային բնութագրիչներ

2.14. Գտնել հետևյալ տվյալների համար միջինը և կիսողը.

ա) 5, 11, 7, 4, 8, բ) 2, 23, 1, 0, գ) 13, 15, 6, 4, 8:

2.15. Գտնել x -ը, եթե հայտնի է, որ՝

ա) $1 - 3x$, $x - 6$, 4 , $7x$ համախմբի *միջինը* հավասար է 5-ի,

բ) 12, 27, $2x + 3$, 19, 6 համախմբի *մոդը* հավասար է 12-ի,

գ) 2, 15, 14, $3x - 2$, 3 համախմբի *կիսողը* հավասար է 10-ի:

2.16. ա) Իրար հաջորդող հինգ ամբողջ թվերի գումարը հավասար է 500-ի: Ինչի՞նչ է հավասար այդ թվերի *կիսողը*:

բ) Իրար հաջորդող 97 ամբողջ թվերի *կիսողը* հավասար է 55-ի: Ո՞րն է այդ թվերից ամենամեծը:

2.17. Տրված է հաճախությունների վիճակագրական բաշխման աղյուսակը.

x_i	0	1	2	3	4
n_i	4	11	19	11	9

Գտնել նմուշային միջինը, մոդը, կիսողը:

2.18. Ըստ հետևյալ տվյալների՝

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	12	16	11	6	3	1	2

գտնել միջինը, մոդը, կիստղը:

2.19. Տրված են դիսկրետ X հատկանիշի հետևյալ արժեքները.

$$-3 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad -3 \quad 2 \quad -3:$$

Գտնել միջինը, մոդը, կիստղը:

2.20. Գտնել 26, 28, 20, 21, 22, 25, 18, 22, 15, 30 տվյալների համար մոդը, կիստղը, լայնքը:

2.21. Գտնել հետևյալ տվյալների համար՝

ա) 7, 4, 9, 8, 2, բ) 7, 4, 9, 7, 3, 12, գ) 12, 7, 4, 9, 0, 7, 3

1) միջինը, մոդը և կիստղը,

2) լայնքը, ցրվածքը, ստանդարտ շեղումը և փոփոխման գործակիցը:

ԳԼՈՒԽ 3

ԳՆԱՀԱՏՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Նմուշային հետազոտությունների ժամանակ պետք է տարբերել երկու դեպք: Առաջին դեպքում ենթադրվում է, որ նմուշը բաշխված է հայտնի օրենքով (օրինակ, հայտնի է, որ նմուշը համապատասխանում է Բեռնուլիի բաշխում ունեցող պատահական մեծությանը), սակայն այդ բաշխումը պարունակում է անհայտ պարամետրեր: Այդ դեպքում հետազոտությունները հանգեցնում են այդ պարամետրերի գնահատման խնդրին և հետագա վերլուծություններին (վստահության միջակայքերի կառուցում, վարկածների ստուգում և այլն): Խնդիրների այդ ցանկը վերաբերում է *պարամետրական* դեպքին: Երկրորդ դեպքում նմուշի բաշխման վերաբերյալ տեղեկությունը բացակայում է, և դեպքը կոչվում է *չպարամետրական*:

§ 3.1. Կետային գնահատում

Վիճակագրության հիմնական գաղափարներն են՝ **գլխավոր համախմբությունը** (կամ **համախումբը**) և այդ համախմբությունից հետազոտությունների նպատակով վերցված **նմուշը**: Գլխավոր համախմբության տարրերի թիվը նմուշի ծավալի համեմատ բավականաչափ մեծ է, այնպես, որ գործնականորեն համարվում է, որ այն բաղկացած է անվերջ քանակությամբ տարրերից: Եթե պահանջվում է հետազոտել գլխավոր համախմբության որոշակի հատկանիշը (օրինակ՝ գնահատել որոշակի երկրում տվյալ հիվանդությամբ տառապող մարդկանց բաժինը), ապա այդ համախմբից պատահականության սկզբունքով վերցվում է n ծավալի նմուշը, և այդ նմուշի յուրաքանչյուր անդամի համար գրանցվում այդ հատկանիշը: Նմուշը ներկայացնում է իրենից $x_1, x_2, \dots, x_n$

թվային արժեքների համախմբություն (նշված օրինակում՝ $x_i = 1$, եթե i -րդ համարի տակ գրանցված մարդը հիվանդ է, և $x_i = 0$ ՝ հակառակ դեպքում):

Հետագայում, որպեսզի տարբերենք **պատահական նմուշը թվային նմուշից**, այն կնշանակենք $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ -ով, որը ներկայացնում է իրենից անկախ միատեսակ բաշխված, ինչպես զլխավոր համախմբության X հատկանիշը, պատահական մեծությունների վետկտոր: Հետևաբար, այդ պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումը հավասար է X պատահական մեծության μ մաթեմատիկական սպասմանը՝

$$\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X = \mu, \quad i = 1, \dots, n:$$

Վիճակագրության խնդիրներից մեկը ուսումնասիրվող համախմբի որոշակի անհայտ պարամետրի (անհայտ պարամետրը նշանակվում է հունական այբուբենի θ տառով) արժեքի գնահատումն է: Վերը նշված օրինակում θ պարամետրը ներկայացնում է իրենից տվյալ երկրի որոշակի հիվանդությամբ տառապող բնակչության $\theta = M/N$ բաժինը, որտեղ M -ը հիվանդների թիվն է, իսկ N -ը՝ ամբողջ բնակչության թիվը:

Որպեսզի գնահատվի որոշակի X հատկանիշին համապատասխանող անհայտ θ պարամետրը, կատարվում է համախմբից պատահական նմուշահանում, որի անդամներն են $X_1, X_2, \dots, X_n$ պատահական մեծությունները: (Բերված օրինակում $X_1, X_2, \dots, X_n$ -ը 0-ներից և 1-ից կազմված պատահական հաջորդականություն է): Որպես θ պարամետրի գնահատական՝ վերցվում է $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ նմուշից որոշակի $\theta^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ֆունկցիա, որը պատահական մեծություն է, քանի որ նմուշը պատահական վեկտոր է (վերը նշված օրինակում վերցվում է

$$\theta^*(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

նմուշային միջինը): Այժմ ենթադրենք, որ նմուշահանումը կատարվել է, այսինքն՝ $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ նմուշն ընդունել է $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ թվային արժեքներ: Այդ դեպքում θ պարամետրի գնահատականը կընդունի θ^* թվային արժեք (վերը նշված օրինակում գնահատականը կընդունի

$$\theta^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{m}{n}$$

տեսքը, որտեղ m -ը 1-երի թիվն է $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ նմուշում: Այն ցույց է տալիս հիվանդների *բաժինը* նմուշում: Այսպիսով, նմուշահանումը կատարելուց հետո, որպես համախմբի հիվանդների $\theta = M/N$ բաժնի գնահատական, վերցվում է նմուշում հիվանդների m/n բաժինը):

θ պարամետրի համար **կետային գնահատական** կոչվում է կամայական $\theta_n^* := \theta^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ֆունկցիա նմուշից: Գնահատականը, լինելով ֆունկցիա նմուշից, պատահական մեծություն է: Երբ նմուշն ընդունում է $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ թվային արժեքներ, գնահատականը կլինի θ^* թիվը:

θ_n^* գնահատականը կոչվում է **անշեղ** գնահատական θ պարամետրի համար, եթե

$$\mathbb{E}\theta_n^* = \theta,$$

այսինքն, եթե այն *միջինում* համընկնում է θ -ի հետ:

θ_n^* գնահատականի **շեղում** կոչվում է $b_n(\theta) = \mathbb{E}\theta_n^* - \theta$ մեծությունը:

Օրինակ 3.1. Վերը նշված օրինակում X պատահական մեծությունը (հատկանիշը) սահմանվում էր հետևյալ կերպ՝ $X = 1$, եթե պատահական վերցված մարդը տառապում է տվյալ հիվանդությամբ, և $X = 0$, եթե նա չունի այդ հիվանդությունը: Այդպիսի պատահական մեծությունները անվանում էին **Բեռնուլիի** պատահական մեծություններ: Որպես «հաջողություն» անվանենք ($X = 1$) պատահողությունը: Այնպես, որ «հաջողության» հավանականությունը

$$p = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{M}{N}$$

անհայտ է (M -ը անհայտ է): Նշանակենք՝ $\theta = \frac{M}{N}$: Պարզ է, որ $\mathbb{E}X = \theta = \frac{M}{N}$:

Այժմ, վերցնելով գլխավոր համախմբությունից (տվյալ երկրի ամբողջ բնակչությունը) $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ նմուշը, որպես θ պարամետրի գնահատական դիտարկենք

$$\theta_n^* = \theta^*(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

նմուշային միջինը: Քանի որ

$$\mathbb{E}\theta_n^* = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X = \theta,$$

ապա θ_n^* -ը θ պարամետրի համար **անշեղ գնահատական** է:

Խնդիրներ

3.1. Տրված է $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, $n = 5$ ծավալի նմուշ $\mathbb{B}er(\theta)$ Բեռնուլիի բաշխումից: Կառուցված է θ պարամետրի համար $\tilde{\theta} = 0.1X_1 + 0.2X_2 + 0.3X_3 + 0.3X_4 + 0.1X_5$ գնահատականը: Պարզել՝ կլինի՞ արդյոք $\tilde{\theta}$ գնահատականն **անշեղ** գնահատական θ -ի համար:

3.2. Դիցուք $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ -ը $n = 5$ ծավալի նմուշ է $\mathbb{B}er(\theta)$ Բեռնուլիի բաշխումից: Դիտարկենք θ պարամետրի համար հետևյալ գնահատականը.

$$\tilde{\theta} = 0.25X_1 + 0.25X_2 + 0.25X_3 + 0.25X_4 + 0.25X_5 :$$

Պարզել՝ կլինի՞ արդյոք $\tilde{\theta}$ -ը **անշեղ** գնահատական θ պարամետրի համար, թե՞ ոչ:

3.3. Դիսկրետ X պատահական մեծությունը տրված է հետևյալ բաշխման օրենքով.

X	-1	0	1
$\mathbb{P}$	0.5	$0.1 - \theta$	$0.4 + \theta$

(X_1, X_2) նմուշի միջոցով θ պարամետրի համար կառուցված է $\tilde{\theta} = 0.2X_1 + 0.8X_2$ գնահատականը: Գտնել $\tilde{\theta}$ գնահատականի շեղումը:

3.4. Դիսկրետ X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը.

X	0	1	2
$\mathbb{P}$	0.5	θ	$0.5 - \theta$

$n = 2$ ծավալի (X_1, X_2) նմուշի միջոցով θ պարամետրի համար կառուցված է $\tilde{\theta} = 2 - 0.4X_1 - 0.6X_2$ գնահատականը: Գտնել $\tilde{\theta}$ գնահատականի շեղումը:

§ 3.2. Միջակայքային գնահատում

Ի տարբերություն կետային գնահատման խնդիրների, որտեղ գտնվում են ֆունկցիաներ նմուշային արժեքներից (վիճականիներ), որոնք ծառայում են որպես անհայտ պարամետրի համար կետային մոտարկումներ, գործնականում առավելապես հետաքրքրություն են ներկայացնում միջակայքային գնահատման խնդիրները: Այդ խնդիրներում պահանջվում է գտնել այնպիսի (պատահական) միջակայքեր, որոնք, նախօրոք նշված մեկին շատ մոտ (0.9, 0.95, 0.99, 0.995 և այլն) հավանականությամբ, պարունակեն անհայտ պարամետրը:

Միջակայքային գնահատականները սահմանելու համար օգտագործվում է երկու փոխկապակցված գաղափար՝ **նշանակալիության մակարդակ** (նշանակվում է α -ով ($0 < \alpha < 1$), որը 0-ին մոտ փոքր թիվ է (սովորաբար $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$ կամ 0.005)) և **վստահության մակարդակ** (նշանակվում է γ -ով՝ $\gamma = 1 - \alpha$), որն անվանվում է նաև **վստահության գործակից**, **վստահության հավանականություն** կամ **հուսալիություն**:

γ մակարդակով **վստահության** (երկկողմանի) **միջակայք** անհայտ θ պարամետրի համար կոչվում է (θ^-, θ^+) **պատահական** միջակայքը, որը γ -ին հավասար հավանականությամբ պարունակում է θ պարամետրը, այսինքն՝

$$\mathbb{P}(\theta^- < \theta < \theta^+) = \gamma:$$

θ^- -ը և θ^+ -ը կոչվում են **ստորին** և **վերին վստահության սահմաններ** ու կախված են $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ նմուշից և γ մակարդակից՝ $\theta^\mp = \theta^\mp(X_1, X_2, \dots, X_n, \gamma)$, այսինքն՝ դրանք պատահական մեծություններ են: γ մակարդակով **միակողմանի** (ստորին և վերին) **վստահության միջակայք** անհայտ θ պարամետրի համար կոչվում են համապատասխանաբար

$$\mathbb{P}(\theta^- < \theta < \infty) = \mathbb{P}(\theta^- < \theta) = \gamma \quad \text{և}$$

$$\mathbb{P}(-\infty < \theta < \theta^+) = \mathbb{P}(\theta < \theta^+) = \gamma$$

պայմանները բավարարող (θ^-, ∞) և $(-\infty, \theta^+)$ պատահական միջակայքերը:

3.2.1. Վստահության միջակայքեր համախմբի միջինի համար

Հայտնի ցրվածքի դեպքը

Դիցուք $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ նմուշը համապատասխանում է հայտնի $\sigma^2 = \mathbb{D}X$ ցրվածքով և անհայտ $\theta = \mu = \mathbb{E}X$ միջինով որոշակի X հատկանիշին: Այդ դեպքում մեծ ծավալի ($n > 30$) նմուշների համար տրված $\gamma = 1 - \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) վստահության մակարդակով միջակայքային գնահատականը X հատկանիշի μ միջինի համար վերցվում է հետևյալ միջակայքը.

$$\Delta = \left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\alpha/2} \right), \quad (3.1)$$

որտեղ $z_{\alpha/2}$ -ն ընդունում է հետևյալ արժեքներ.

$$z_{\alpha/2} = \begin{cases} 1.645, \text{ եթե } \alpha = 0.1, \\ 1.96, \text{ եթե } \alpha = 0.05, \\ 2.575, \text{ եթե } \alpha = 0.01 : \end{cases}$$

Անհայտ ցրվածքի դեպքը

Այժմ դիցուք X հատկանիշի $\sigma^2 = \mathbb{D}X$ ցրվածքն անհայտ է: Այս դեպքում անհայտ $\mu = \mathbb{E}X$ միջինի վստահության միջակայքը որոշելու համար (3.1) բանաձևում $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ ստանդարտ շեղումը փոխարինվում է իր գնահատականով՝ $S = \sqrt{S^2}$ նմուշային ստանդարտ շեղումով: Այնպես, որ μ միջինի $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով վստահության միջակայքը կլինի՝

$$\Delta = \left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot z_{\alpha/2} \right) \quad (3.2)$$

Օրինակ 3.2. Որոշակի պատահական մեծության 40 անկախ չափումների արդյունքում նմուշային միջինի և ստանդարտ շեղ-

ման վերաբերյալ ստացվել են հետևյալ արժեքները՝ $\bar{x} = 121, s = 10.2$: Գտնենք այդ պատահական մեծության տեսական միջինի համար 0.9 մակարդակով վստահության միջակայքը:

Լուծում: Համաձայն պայմանի՝ $n = 40 > 30$: Հաշվի առնելով, որ $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$, տեսական միջինի համար կստանանք 0.9 մակարդակով հետևյալ վստահության միջակայքը՝

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot z_{\alpha/2}, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot z_{\alpha/2} \right) \\ &= \left(121 - \frac{10.2}{\sqrt{40}} \cdot 1.645, 121 + \frac{10.2}{\sqrt{40}} \cdot 1.645 \right) = \\ &= (118.35, 123.65) : \end{aligned}$$

3.2.2. Համախմբի որոշակի հատկանիշի բաժնի վստահության միջակայքը

Գործնական խնդիրներում հաճախ պահանջվում է ստանալ համախմբի որոշակի հատկանիշի բաժնի վերաբերյալ վստահության միջակայքը, օրինակ՝ գտնել երկրի որոշակի հիվանդության տարածվածության (անհայտ) բաժնի համար վստահության միջակայքը:

Նշանակենք X -ով այն պատահական մեծությունը, որը համապատասխանում է համախմբի որոշակի հատկանիշին՝ $X = 1$, եթե տեղի ունի տվյալ հատկանիշը («հաջողություն»), վերը նշված օրինակում, պատահական անձի տվյալ հիվանդությամբ տառապելու պայմանը, և $X = 0$, եթե հատկանիշը տեղի չունի («անհաջողություն»), տվյալ անձը առողջ է: Հայտնի է, որ այդ հատկանիշն ունի **Բեռնուլիի բաշխում** (տե՛ս օրինակ 3.1-ը):

$$(X = 1) \text{ պատահույթի } \mathbb{P}(X = 1) = M/N$$

հավանականությունն *անհայտ* է (N -ը՝ համախմբի տարրերի թիվն է (տվյալ երկրի ամբողջ բնակչության թիվը), իսկ M -ը՝ հա-

մախիմի տվյալ հատկանիշն ունեցող տարրերի թիվը (տվյալ հիվանդությամբ տառապող բնակչության (*անհայտ*) թիվը):

Նշանակենք $p = M/N$ -ով համախմբի X հատկանիշի բաժինը: Դիցուք համախմբից վերցվում է $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ պատահական նմուշը, այսինքն՝ կատարվում է n անկախ փորձ, որտեղ $X_i = 0$ կամ $X_i = 1$: Մենք տեսանք (տե՛ս օրինակ 3.1-ը), որ

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

վիճականին համախմբի X հատկանիշի անհայտ $p = M/N$ բաժնի համար *անշեղ* ($\mathbb{E}\hat{p} = p$) գնահատական է: Մեծ n -ի դեպքում ($n > 30$), փոխարինելով X հատկանիշի $\sigma^2 = \mathbb{D}X = pq$ ցրվածքը (տե՛ս օրինակ 1.27-ը) իր $\widehat{\sigma^2} = \hat{p} \cdot \hat{q}$ ($\hat{q} = 1 - \hat{p}$) գնահատականով, համախմբի $\mu = \mathbb{E}X = p$ անհայտ $p = M/N$ բաժնի համար կատանանք (տե՛ս (3.2) բանաձևը) որոնելի $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով վստահության միջակայքը՝

$$\Delta = \left(\hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \cdot z_{\alpha/2}, \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \cdot z_{\alpha/2} \right):$$

Գործնականում, նմուշի $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ իրագործմանը կհամապատասխանի X հատկանիշի

$$\hat{p} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{m}{n}$$

նմուշային բաժինը, որտեղ m -ը տվյալ հատկանիշն ունեցող x_i նմուշային անդամների թիվն է (որոնց համար $x_i = 1$): Հետևաբար, վստահության միջակայքը կլինի՝

$$\Delta = \left(\frac{m}{n} - \sqrt{\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right)} \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \frac{m}{n} + \sqrt{\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right)} \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right), \quad (3.3)$$

իսկ $\gamma = 1 - \alpha$ մակարդակով համախմբի անհայտ $p = M/N$ բաժնի համար միջակայքային **գնահատման ճշգրտությունը**՝

$$\delta = \sqrt{\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right)} \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} :$$

Օրինակ 3.3. 540 անգամ փորձը կատարելիս դրանցից 216-ում դիտվել է դրական արդյունքը: 0.99 մակարդակով գտնել մեկ փորձում անհայտ դրական արդյունքի p հավանականության վստահության միջակայքը:

Լուծում: Ունենք $m = 216$, $n = 540$, $\frac{m}{n} = \frac{216}{540} = 0.4$, $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.575$:

Այժմ, կիրառելով (3.3) բանաձևը, կստանանք որոնելի վստահության միջակայքը՝

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(0.4 - \sqrt{0.4 \cdot 0.6} \cdot \frac{2.575}{\sqrt{540}}, 0.4 + \sqrt{0.4 \cdot 0.6} \cdot \frac{2.575}{\sqrt{540}} \right) \\ &= (0.346, 0.454): \end{aligned}$$

Խնդիրներ

3.5. Որոշ ձեռնարկության պատահական վերցված 100 աշխատակիցների միջին ամսեկան աշխատավարձը կազմում է 150000 դրամ՝ 45000 դրամ ստանդարտ շեղումով: Գտնել տվյալ ձեռնարկության աշխատողների *միջին ամսեկան աշխատավարձի* 95%-անոց վստահության միջակայքը:

3.6. Էլեկտրական լամպերի անխափան աշխատելու միջին տևողությունը որոշելու համար այդ խմբաքանակից պատահականության սկզբունքով վերցվել են 400-ը, որոնց անխափան աշխատելու *միջին տևողությունը* $\bar{x} = 1220$ ժամ է, իսկ *միջին քառակուսային շեղումը*՝ $s = 35$ ժամ: Գտնել լրիվ խմբաքանակի էլեկտրական լամպերի անխափան աշխատելու *միջին տևողության* 99%-անոց վստահության միջակայքը:

3.7. 50 հրանոթից գնդակ արձակելու *միջին հեռավորությունը* 2500 մետր է, իսկ նմուշային *միջին քառակուսային շեղումը*՝ 45.7

մետր: Որոշել գնդակների արձակման *միջին հեռավորության* 95%-անոց վստահության միջակայքը:

3.8. Սոցիոլոգիական հարցման ժամանակ 300 մասնակիցներից 175-ը իրենց ձայնը տվել են ներկա քաղաքապետի օգտին, իսկ մնացածը՝ ոչ: Գտնել 0.95 մակարդակով քաղաքապետի իրական վարկանիշը (սպասվող «կողմ» արտահայտվողների բաժնի վստահության միջակայքը):

3.9. Որոշակի համախմբությունից վերցված է $n = 100$ ծավալի նմուշը, որի միջոցով ստուգված հատկանիշի բաժինը կազմել է 20%: Գտնել 95%-անոց վստահության միջակայքը հատկանիշի իրական բաժնի համար:

3.10. 400 էլեկտրական լամպերի ստուգման ժամանակ պարզվել է, որ դրանցից 40-ը խոտանված են: Գտնել գլխավոր համախմբության *խոտանի հավանականության* 0.99 մակարդակով վստահության միջակայքը:

3.11. Որոշ տեսակի արտադրանքի մեծ խմբաքանակից հսկողության նպատակով պատահական կերպով վերցված 500 հատից 20-ը *անորակ* են: Գտնել լրիվ խմբաքանակի *անորակ արտադրանքի բաժնի* 95 %-անոց վստահության միջակայքը:

Գրականություն

- [1] Гмурман В. Е., Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, М., «Юрайт», 2017.
- [2] Ивин Е. А., Курбацкий А. Н., Артамонов Д. В., Учебно – методическое пособие по математической статистике (для социально –экономических специальностей), Вологда, 2017.
- [3] Макаров А. А., Ивин Е. А., Курбацкий А. Н., Курс теории вероятностей в задачах и упражнениях (для социально – экономических специальностей), М., МАКС Пресс, 2014.
- [4] Ահարոնյան Ն. Գ., Իսրայելյան Ե. Ռ., Հավանականությունների տեսության խնդրագիրք, Երևան, ԵՊՀ հրատ., 2016:
- [5] Գասպարյան Կ. Վ., Տեսական և կիրառական վիճակագրության հիմունքներ, մաս 1, Երևան, «Գիտություն», 2015:
- [6] Գասպարյան Կ. Վ., Վիճակագրության խնդիրների ժողովածու, Երևան, ԵՊՀ հրատ., 2017.
- [7] Համբարձումյան Գ. Հ., Հավանականությունների տեսություն, 3-րդ հրատ., Երևան, «Լույս», 1977:
- [8] Հարությունյան Ե. Ա. և այլոք, Հավանականություն և կիրառական վիճակագրություն, Երևան, «Գիտություն», 2000:
- [9] Օհանյան Վ. Կ., Դիսկրետ հավանականություններ, Երևան, ԵՊՀ, 2005:
- [10] Isotalo J., Basic of Statistics, Greate Space Ind. Publ., 2014.

Խնդիրների պատասխաններ

Գլուխ 1. Հավանականությունների տեսության սկզբունքները

1.1. $\Omega = \{(q, p), (p, q), (q, q), (p, p)\}, \quad A = \{(q, p), (p, q), (q, q)\},$
 $B = \{(p, q)\}$: **1.2.** ա) $\bar{A} = \{\text{երկու նետումների դեպքում «զինանշան» չի երևա}\}, \bar{B} = \{\text{երեք կրակոցների դեպքում երեքը վրիպել են կամ գոնե մեկն է վրիպել}\}, \bar{C} = \{\text{երեք կրակոցները վրիպել են}\}$: **1.3.** $A\bar{B}\bar{C},$ բ) $AB\bar{C},$ գ) $ABC,$ դ) $A \cup B \cup C,$ ե) $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C,$ զ) $\bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C},$ է) $\bar{A}\bar{B}\bar{C},$ ը) $\overline{ABC}$: **1.4.** 49, 42: **1.5.** 1680: **1.6.** $12^3 \cdot (10^3 - 1) = 1726272$: **1.7.** ա) $1/6,$ բ) $5/6$: **1.8.** ա) 0.4, բ) $1/60$: **1.9.** 0.1512: **1.10.** $24/91 \approx 0.2637$: **1.11.** ≈ 0.1788 : **1.12.** $57/64$: **1.13.** $91/216 \approx 0.4213$: **1.14.** n_2 : **1.15.** $1/7$: **1.16.** ա) 0.94, բ) 0.38: **1.17.** $5/6 \approx 0.83$: **1.18.** 0.9655: **1.19.** ≈ 0.414 : **1.20.** ≈ 0.3 : **1.21.** ≈ 0.0226 :

1.22.

X	0	1	2
$\mathbb{P}$	0.25	0.5	0.25

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1/4, & 0 < x \leq 1 \\ 3/4, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

1.23. X -ը ստանդարտ մանրակների թիվն է,

X	0	1	2
$\mathbb{P}$	1/45	16/45	28/45

1.24. X -ը խոտան մանրակների թիվն է,

X	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}$	0.6561	0.2916	0.0486	0.0036	0.0001

1.25. $EX = 3/5$, $\mathbb{D}X = 28/75$ ՝ X -ը վերցված արտադրանքների մեջ գտնվող խոտան արտադրանքների թիվն է:

1.26. $EX = 0.8$, $\mathbb{D}X = 0.36$ ՝ X -ը հանված գնդիկների մեջ սպիտակ գնդիկների թիվն է:

1.27. $EX = 2.1$, $\mathbb{D}X = 2.49$:

1.28.

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	1/8	3/8	3/8	1/8

$EX = 1.5$, $\mathbb{D}X = 0.75$:

1.29. $EX = 0.9$, $\mathbb{D}X = 1.29$:

Գլուխ 2. Նկարագրական վիճակագրություն և տվյալների հետազոտություն

2.1.

	<i>Չեն հիվանդացել</i>	<i>Հիվանդացել են մեկ անգամ</i>	<i>Հիվանդացել են մեկից ավելի անգամ</i>
<i>Դեղամիջոցն ընդունողների թիվը</i>	0.504 (50.4 %)	0.29 (29 %)	0.206 (20.6 %)
<i>Դեղամիջոցն չընդունողների թիվը</i>	0.448 (44.8 %)	0.272 (27.2 %)	0.28 (28 %)

2.2.

x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
n_i	4	3	4	2	1	1	2	1	1	1	2

2.3.

0	0	0	0	0	5	5	5
1	0	0	0	0	5	5	
2	0	5					
3	0	0	5				
4	0	5					
5	0	0					

2.4. 50 55 58 63 63 63 67 74 74 75

76 78 79 81 84 89 92 95 95 98 :

2.5. 0.55 0.57 0.57 0.68 0.72 0.77 0.86

0.90 0.92 0.94 1.14 1.41 1.42 1.51,

0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
5	8	2	6	0	—	4	—	—	1	1
7		7		2					2	
7				4						

2.7. = 14: 2.8. $p = 0.4$: 2.9. w) 1 3 3 3 4 4 4 5 5 7 7 9,

f)

x_i	1	3	4	5	7	9
f_i	1/12	1/4	1/4	1/6	1/6	1/12

2.11.

w)

5	3						
6	8	9					
7	0	0	0	5	6	7	
8	0	2	2	5	5	5	8
9	2	3	6				
10	0						

Р)

Δ_i	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90	91 – 100
n_i	1	5	4	6	4

2.12. у)

6	5	9	9						
7	0	0	5	6	7				
8	0	2	2	5	5	5	7	8	
9	2	3	6	9					

Р)

Δ_i	[6 , 7)	[7 , 8)	[8 , 9)	[9 , 10)
n_i	3	5	8	4

2.13. у)

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	...	36	37
9	5	—	4	0	0	9	3	0	0	—	0	—	3	—	...	1	4
			8	0	1		3	8	4		0						
				0	1		4	9	7								
				2	1		7	9									
				3	2		8										
				4	2		9										
				7	7												
				9	9												
				9													

Р)

Δ_i	n_i	f_i	ω_i
175 – 200	2	0.05	0.05
200 – 225	8	0.2	0.25
225 – 250	12	0.3	0.55
250 – 275	12	0.3	0.85
275 – 300	3	0.075	0.925
300 – 325	1	0.025	0.95
325 – 350	0	0	0.95
350 – 375	2	0.05	1

2.14. ա) $\bar{x} = 7, x_{mod} = 7$, բ) $\bar{x} = 6.5, x_{med} = 1.5$, գ) $\bar{x} = 9.2, x_{med} = 8$:

2.15.

ա) $x = 4.2$, բ) $x = 4.5$, գ) $x = 4$: 2.16. ա) 100, բ) 103:

2.17. $\bar{x} = 2.18, x_{mod} = 2, x_{med} = 2$:

2.18. $\bar{x} \approx 2.57, x_{mod} = 2, x_{med} = 2$:

2.19. $\bar{x} \approx -0.67, x_{mod} = -3, x_{med} = 0$:

2.20. $x_{mod} = 22, x_{med} = 22, R = 15$:

2.21. ա) 1. $\bar{x} = 6, x_{mod} (\emptyset), x_{med} = 7, 2. R = 7, s^2 = 6.8,$

$s \approx 2.6, v \approx 43\%$ բ) 1. $\bar{x} = x_{mod} = x_{med} = 7, 2. R = 9, s^2 = 9,$

$s = 3, v \approx 43\%$: գ) 1. $\bar{x} = 6, x_{mod} = 7, x_{med} = 7, 2. R = 12,$

$s^2 \approx 13.7, s \approx 3.7, v \approx 60\%$:

Գլուխ 3. Գնահատման տեսություն

Կետային գնահատում

3.1. Անշեղ է: 3.2. Անշեղ չի: 3.3. $b(\theta) = -0.1$: 3.4. $b(\theta) = 1$:

Միջակայքային գնահատում

3.5. (141180, 158820): 3.6. (1215.5, 1224.5): 3.7. (2487.3, 2512.7):

3.8. (0.53, 0.64): 3.9. (0.12, 0.28): 3.10. (0.06, 0.14): 3.11. (0.02, 0.06):

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

**Կարեն Վահանի Գասպարյան,
Նարինե Գևորգի Ահարոնյան, Եպրակայա Ռուբիկի Իսրաելյան**

**ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ
ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՎ ՏՎՅԱԼՆԵՐԻ ՀԵՏ
ԱՇԽԱՏԱՆՔ**

Հրատ. պատ. խմբագիր՝ Լ. Հովհաննիսյան
Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Ա. Գույումջանի

Ստորագրված է տպագրության՝ 30.03.2023:
Չափսը՝ 60x84 ¹/₁₆: Տպ. մամուլը՝ 5.625:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.ysu.am



ՆԱԾԱՐԱԿՆԻԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2023
publishing.gsu.am

