ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ
ԻՋԵՎԱՆԻ ՄԱՍՆԱՃՅՈՒՂ

ՄԱՆՎԵԼ ԶԱՔԱՐՅԱՆ

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԱՆԱԼԻԶ

(ուսումնամեթոդական ձեռնարկ)

МАНВЕЛ ЗАКАРЯН

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

(учебно-методическое руководство)

MANVEL ZAKARYAN

COMPLEX ANALYSIS

(testbook)

ԵՐԵՎԱՆ
ՀԵՂԻՆԱԿԱՅԻՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆ
2024

ՀՏԴ-
ԳՄԴ-

Գրախոս՝ ֆիզմաթ. գիտ. թեկն., պրոֆեսոր Մ. Ի. Կարախանյան

Մ Կոմպլեքս անալիզ (ուսումնամեթոդական ձեռնարկ).- / Մ. Զաքարյան, Եր.: Հեղինակային հրատ., 2024.- 126 էջ:

Մ. Ա. Զաքարյանի «Կոմպլեքս անալիզ» ուսումնամեթոդական ձեռնարկը ընդգրկում է խնդիրներ և առաջադրանքներ, որոնք համապատասխանում են ԵՊՀ Իջևանի մասնաճյուղի բնագիտական ֆակուլտետի համանուն ուսումնական ծրագրին: Մատչելի խնդիրների հետ մեկտեղ առաջարկվում են նաև խնդիրներ, որոնք պահանջում են լրացուցիչ գիտելիքներ և ջանքեր: Ձեռնարկը պարունակում է համառոտ տեսական տեղեկություններ կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսությունից: Պահպանված է շարադրանքի ուսումնամեթոդական մակարդակը:

Ձեռնարկը կարող է օգտակար լինել նաև այլ մասնագիտությունների ուսանողների համար, որոնք հետաքրքրված են կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսությամբ:

ՀՏԴ
ԳՄԴ

ISBN 978-9939-

© Զաքարյան Մ. Ա., 2024

1. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐ, ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԴՐԱՆՑ ՀԵՏ

1.1. Սահմանում. $z = x + iy$ տեսքի արտահայտությանը, որտեղ x-ը և y-ը կամայական իրական թվեր են, իսկ i-ն կեղծ միավորը՝ $i^2 = -1$, անվանում են կոմպլեքս թիվ, իսկ այդ թվի $z = x + iy$ տեսքին՝ կոմպլեքս թվի հանրահաշվական տեսք:

x-ը կոչվում է կոմպլեքս թվի իրական մաս և նշանակվում է $x = \operatorname{Re} z$, իսկ y-ը կոչվում է կոմպլեքս թվի կեղծ մաս և նշանակվում է՝ $y = \operatorname{Im} z$;

$\bar{z} = x - iy$ կոմպլեքս թիվը կոչվում է $z = x + iy$ կոմպլեքս թվի համալուծ կոմպլեքս թիվ:

Դիցուք $z_1 = x_1 + iy_1$ և $z_2 = x_2 + iy_2$: Այդ դեպքում՝

1) $z_1 = z_2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1 = x_2$ և $y_1 = y_2$,

2) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$,

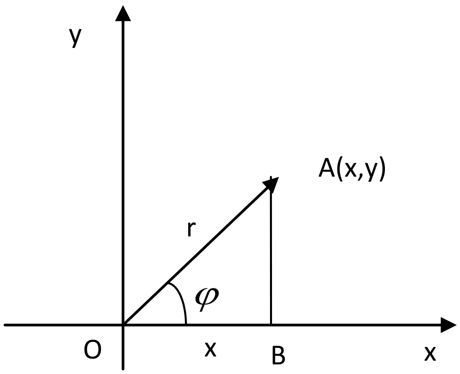
3) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$,

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, z_2 \neq 0;$

Յուրաքանչյուր $z = x + iy$ կոմպլեքս թվին համապատասխանության մեջ է դրվում OXY հարթության A(x,y)

ծայրակետով $\overrightarrow{OA}$ վեկտորը, որտեղ O-ն կոորդինատնե-րի սկզբնակետն է (գծ. 1): $\overrightarrow{OA}$ վեկտորի r երկարութ-յունը կոչվում է z կոմպլեքս թվի մոդուլ և նշանակվում է $|z|$ -ով. $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$\overrightarrow{OA}$ վեկտորի և OX -երի դրական կիսաառանցքի հետ կազմած անկյունը կոչվում է z կոմպլեքս թվի արգու-մենտ և նշանակվում է՝ $\varphi = Argz$ -ով: $\varphi = Argz$ որոշվում է $2\pi k, k \in Z$ ճշգրտությամբ: $Argz = \arg z + 2\pi k$, $\arg z$ -ը կոչվում է $Argz$ -ի գլխավոր արժեք. $-\pi < \arg z \leq \pi$: Այն որոշվում է հետևյալ բանաձևերով.



գծ. 1

ΔOBA -ից, քանի որ $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, ապա $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, որին անվանում են կոմպլեքս

թվի եռանկյունաչափական տեսք: Դիցուք

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$: Այդ դեպքում.

1. $z_1 = z_2$ միայն այն դեպքում, երբ

   $r_1 = r_2, \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in Z;$

2. $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right);$

3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right);$

Վերջին երկու հավասարություններից հետևում են

ա. $\left|z_1 z_2\right| = \left|z_1\right|\left|z_2\right|$; բ. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$; գ.

$Arg\left(z_1 z_2\right) = Argz_1 + Argz_2$; դ. $Arg\dfrac{z_1}{z_2} = Argz_1 - Argz_2$,

հավասարությունները:

Եթե $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$, ապա

$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right), n \in N$: Վերջինս կոչվում է Մուավրի բանաձև, որից հետևում է, որ $\left|z^n\right| = \left|z\right|^n$ և

$Argz^n = nArgz + 2\pi k, k \in Z;$

$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ կոմպլեքս թվից n-րդ աստիճանի կոմպլեքս արմատն ունի n հատ իրարից տարբեր արժեքներ, որոնք որոշվում են հետևյալ բանաձևով.

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right],\varphi=\arg z,k=0,1,2,\cdots,n-1;$$
(1)

Օրինակ 1.Հաշվել $\sqrt[4]{-1-i}$: Հաշվենք $(-1-i)$-թվի մոդուլը. $|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$: Հաշվենք $(-1-i)$-թվիարգումենտի գլխավոր արժեքը.

$$\arg(-1-i)=-\pi+arctg\frac{-1}{-1}=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}:$$

Համաձայն (1) բանաձևի.

$$\sqrt[4]{-1-i}=2^{1/8}\left[\cos\frac{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{4}\right],k=0,1,2,3:$$

$$z_0=2^{1/8}\left(\cos\frac{3\pi}{16}-\sin\frac{3\pi}{16}\right);z_1=2^{1/8}\left(\cos\frac{5\pi}{16}+\sin\frac{5\pi}{16}\right);$$

$$z_2=2^{1/8}\left(\cos\frac{13\pi}{16}+\sin\frac{13\pi}{16}\right);z_3=-2^{1/8}\left(\cos\frac{5\pi}{16}+\sin\frac{5\pi}{16}\right);$$

Օրինակ 2. Հաշվել $\sqrt{3+4i};\sqrt{3+4i}=x+iy;$ Հավասարության երկու մասերը բարձրացնելով քառակուսի կունենանք. $3+4i=x^2-y^2+2xyi$: Հավա-սարացնելով ստացված հավասարության իրական

և կեղծ մասերը, կստանանք. $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ xy=2 \end{cases}$: Լուծելով ստացված հավասարումների համակարգը կստանանք. $x=\pm 2, y=\pm 1$: Հետևաբար

$\sqrt{3+4i}=2+i, \sqrt{3+4i}=-2-i$:

1. Կատարել նշված գործողությունները:

ա. $\frac{1}{i}$ բ. $i^{20}+i^{21}+i^{22}$ գ. $\frac{1-i}{1+i}$ դ. $\frac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}+\frac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}$

2. Ապացուցել հետևյալ հավասարությունները:

ա. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$, **բ.** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, **գ.** $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$,

դ. $\overline{(z_1\pm z_2)}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$,

ե. $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$:

3. Ապացուցել հետևյալ անհավասարությունները:

ա. $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$, **բ.** $|z_1+z_2|\ge\left||z_1|-|z_2|\right|$,

գ. $|z_1-z_2|\ge\left||z_1|-|z_2|\right|$:

4. Ապացուցել, որ $\sqrt[n]{1}$ արմատների արժեքները դասավորված են $O(0,0)$ կենտրոնով միավոր շրջանագծին ներգծված կանոնավոր n- անկյան գագաթներում:

5. Ինչպիսի պայմանների դեպքում **ա.** z_1 և z_2 **բ.** z_1, z_2 և z_3 իրարից տարբեր կոմպլեքս թվերը կգտնվեն մեկ ուղղի վրա:

5.1 Երբ չորս կետեր՝ z_1, z_2, z_3, z_4 ,կգտնվեն միևնույն շրջանագծի վրա:

5.2 Գտնել այն z կետը, որը $z_1 z_2$ հատվածը կբաժանի $\lambda_1 : \lambda_2$ հարաբերությամբ:

5.3. Գտնել z_1, z_2, z_3 գագաթներով եռանկյան միջնագծերի /ծանրության կենտրոնի/ հատման կետը՝ z, եթե **ա.** բոլոր գագաթներում տեղբախշված է հավասար քանակությամբ զանգված. **բ.** Նշված գագաթներում տեղաբախշված են համապատասխանաբար $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ զանգվածները:

6. Հաշվել $\sum_{k=0}^{100} i^k$ գումարը:

7. Օգտվելով Մուավրի բանաձևից հաշվել՝

ա. $(1+\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$, **բ.** $(1-\cos\varphi + i\sin\varphi)$, որտեղ $n \in N$:

Կատարել նշված գործողությունները տրված կոմպլեքս թվերի հետ:

8. $z_1 = 1+i, z_2 = 1-i;$ **ա.** z_1 / z_2, **բ.** $z_1 z_2^{\,2}$, **գ.** $\sqrt[3]{z_1}$, **դ.** z_2^{102} :

9. $z_1 = 1-i\sqrt{3}, z_2 = 1+i\sqrt{3};$ **ա.** $z_1 \overline{z_2}$, **բ.** z_1 / z_2, **գ.** $\sqrt[4]{z_1}$, **դ.** z_2^{50}

10. $z_1 = 1-i\sqrt{3}, z_2 = \sqrt{3}+i;$ **ա.** $z_1 \overline{z_2}$, **բ.** $\left(\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}\right)^2$, **գ.** $\sqrt[3]{z_2}$, **դ.** z_1^{200};

11. $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = \sqrt{3} - i;$ **ա.** z_1^3, **բ.** $\frac{z_2}{\overline{z_1}}$, **գ.** $\sqrt[3]{z_1 z_2^2}$, **դ.** $z_1^{180};$

12. $z_1 = 2i,\ z_2 = 1 - 3i;$ **ա.** $\frac{z_1}{z_2}$, **բ.** $\overline{z_1} z_2^2$, **գ.** $\sqrt[3]{z_1}$, **դ.** $z_2^{100};$

13. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 3 - i;$ **ա.** $\overline{z_1 z_2}$, **բ.** $\frac{z_1}{z_2^2}$, **գ.** $\sqrt[4]{z_1}$, **դ.** $z_2^{200};$

14. $z_1 = -1 + i\sqrt{3},\ z_2 -1 + i;$ **ա.** $z_1 \overline{z_2}$, **բ.** $\frac{z_1}{\overline{z_2^2}}$, **գ.** $\sqrt[3]{z_1}$, **դ.** $z_2^{50};$

15. $z_1 = \sqrt{3} + i,\ z_2 = 1 - i\sqrt{3};$ **ա.** $\overline{z_1} z_2$, **բ.** $\frac{z_1^2}{\overline{z_2}}$, **գ.** $\sqrt[4]{z_1}$, **դ.** $z_2^{150};$

16. $z_1 = -2 - 2i,\ z_2 = -2 + 2i;$ **ա.** $z_1 \overline{z_2}$, **բ.** $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$, **գ.** $\sqrt[5]{z_1}$, **դ.** $z_2^{120};$

17. $z_1 = -8,\ z_2 = 1 + i;$ **ա.** $\frac{z_1}{\overline{z_2^2}}$, **բ.** $\frac{\overline{z_1^2}}{z_2}$, **գ.** $\sqrt[3]{z_1}$, **դ.** $z_2^{25};$

18. $z_1 = 3 + 3i,\ z_2 = -3 + 3i;$ **ա.** $z_1 \overline{z_2}$, **բ.** $\frac{\overline{z_2}}{z_1}$, **գ.** $\sqrt{z_1}$, **դ.** $z_2^{100};$

19. $z_1 = 6 - 8i,\ z_2 = -i;$ **ա.** $z_1 \overline{z_2^{10}}$, **բ.** $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$, **գ.** $\sqrt{z_1}$, **դ.** $z_2^{199};$

20. $z_1 = 4 - 3i,\ z_2 = 1 + 7i;$ **ա.** $z_1^2 \overline{z_2}$, **բ.** $\frac{z_2}{\overline{z_1^2}}$, **գ.** $\sqrt{z_1 z_2}$, **դ.** $z_2^{100};$

21. Հաշվել **ա.** $\sqrt[4]{16}$, **բ.** $\sqrt[4]{-16}$, **գ.** $\sqrt[4]{16i}$, **դ.** $\sqrt[4]{-16i};$

21.1 Հետևյալ թվերը ներկայացնել ցուցչային տեսքով.

22. Լուծել $\left|z^2-1\right|=1$ հավասարումը, եթե հայտնի է, որ $|z|=1$:

23.Դիցուք $n>1$ և $a_0>a_1>\cdots>a_n>0$ իրական թվեր են: Ապացուցել, որ $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ բազմանդամը C-ում չունի ոչ մի զրո, որը բացարձակ արժեքով փոքր կամ հավասար լինի մեկից:

24.Ցույց տալ, որ

ա. $\forall w,z\in C,\left(1+|w|^2\right)z=\left(1+|z|^2\right)w$ հավասարությունից հետևում է, որ $w=z$ կամ $\bar{z}w=1$:

բ. Եթե $a,b,c,d\in C$ և $|a|=|b|=|c|$, ապա հետևյալ կոմպլեքս թիվը իրական է. $(a-b)(c-d)\left(\bar{a}-\bar{d}\right)\left(\bar{c}-\bar{b}\right)+i\left(c\bar{c}-d\bar{d}\right)-\operatorname{Im}\left(c\bar{b}-c\bar{a}-a\bar{b}\right)$:

25. Լուծել $\bar{z}=z^{n-1}$ հավասարումը:

26. Լուծել հետևյալ հավասարումների համակարգը.

ա. $\begin{cases}\operatorname{Re}\left(z^2+z\right)=8\\ |z|^2+\operatorname{Re}z=16\end{cases}$, **բ.** $\begin{cases}z\cdot\bar{z}-\frac{1}{2}\operatorname{Im}z^2=2\\ \operatorname{Re}z^2+\frac{1}{2}\operatorname{Im}z\cdot\operatorname{Re}z=2\end{cases}$,

գ. $\begin{cases}\left|z^2-2i\right|=4\\ \left|\frac{z+1+i}{z-1-i}\right|=1\end{cases}$, **դ.** $\begin{cases}\left|\frac{z-2}{z-4}\right|=1\\ \left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=1\end{cases}$,

ե. $\begin{cases} \operatorname{Re}\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)=0 \\ \operatorname{Im}\left(\dfrac{z+i}{z-3i}\right)=4 \end{cases}$, զ. $\begin{cases} z\cdot\overline{z}-\operatorname{Im}z^2-3=2\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}z \\ \dfrac{1}{2}\operatorname{Im}z^2=\left|1+i\sqrt{11}\right| \end{cases}$;

27. Գտնել $z=(x+iy)$-ը, եթե

ա. $(1+i)z+(1-i)x+(2+i)y=4+2i,$

բ. $(2-i)z+(3+i)x+(2-i)y=11+2i;$

27.1 Դիցուք z_0-ն և z_1-ը $z+\dfrac{1}{z}=0$ հավասարման արմատներն են: Հաշվել

ա. $z_0^{50}+\dfrac{1}{z_0^{50}}$ բ. $z_1^{50}+\dfrac{1}{z_1^{50}}$ գ. $z_0^{50}+\dfrac{1}{z_1^{50}}$

27.2 Ապացուցել, որ ցանկացած z_1, z_2, z_3 կոմպլեքս թվերի համար ճշմարիտ է հետևյալ հավասարությունը՝
$z_1\operatorname{Im}\left(\overline{z_2}z_3\right)+z_2\operatorname{Im}\left(\overline{z_3}z_1\right)+z_3\operatorname{Im}\left(\overline{z_1}z_2\right)=0$:

2. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԿՈՐԵՐ ԵՎ ԿԵՏԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

$z(t)=x(t)+iy(t), t\in[\alpha,\beta]$ իրական փոփոխականի ֆունկցիան, որտեղ $x(t)$ և $y(t)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են, կոչվում է անընդհատ կոր կոմպլեքս հարթության վրա: Եթե α և β արժեքների համար $x(\alpha)=x(\beta), y(\alpha)=y(\beta)$ և կորը ինքնահատման կետեր չունի, ապա $z(t)$ կորը կոչվում է պարզ փակ կոր: $z(t)$ կորը կանվանենք ողորկ, եթե գոյություն ունի և անընդհատ է $z'(t)$ -ն. $z'(t)=x'(t)+iy'(t)\neq 0$:

Կամայական $F(x,y)=0$ անբացահայտ հավասարումով տրված կորի կոմպլեքս հավասարումը $z=x+iy$ կոմպլեքս փոփոխականի միջոցով գրվում է հետևյալ կերպ.

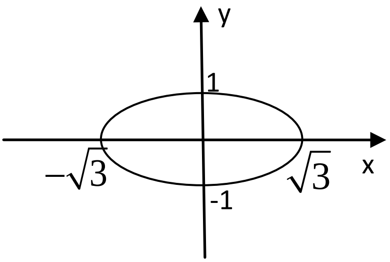
$F\left[\frac{1}{2}\left(z+\bar{z}\right),\frac{1}{2}\left(z-\bar{z}\right)\right]:=\Phi\left(z,\bar{z}\right)=0$ և հակառակը:

Օրինակ 1.Կոմպլեքս հարթության վրա պատկերել հետևյալ տիրույթը. $\left|z+\sqrt{2}\right|+\left|z-\sqrt{2}\right|\leq 2\sqrt{3}$:

$z=x+iy$ տեղադրելով տրված անհավասարության մեջ, կստանանք. $\sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2}\leq 2\sqrt{3}$:

Ձախ մասի երկրորդ գումարելին տեղափոխելով աջ մաս և ստացված անհավասարության երկու մասերն էլ բարձրացնելով քառակուսի կունենանք.

$\sqrt{3}\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2}\le 2-x\sqrt{2}$: Կրկին բարձրացնելով քառակուսի անհավասարության երկու մասերն և խմբավորելով կստանանք. $\dfrac{x^2}{\sqrt{3}^2}+\dfrac{y^2}{1^2}\le 1,$ որն իրենից ներկայացնում է էլիպս (տես գծագիրը):



Պարզել, թե ինչ կորեր են տրվում հետևյալ հավասարում-ներով.

28. ա. $\left|z-z_0\right|=R,$ **բ.** $\left|z\right|=R,$ **գ.** $\left|z\right|=1,$

դ. $\left|z-z_0\right|=R, 0\le \arg z\le \pi$:

29. $\left|z\right|=\operatorname{Re} z+1$: **30.** $\left|z\right|+\operatorname{Im} z=1$:

31. $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z = 1$: **32.** $\operatorname{Re} z + 2\operatorname{Im} z = 1$:

33. **ա.** $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = 1$, **բ.** $\operatorname{Im}\frac{1}{z} = c = const$:

34. **ա.** $\operatorname{Re} z^2 = 1$, **բ.** $\operatorname{Im} z^2 = 1$:

35. $\operatorname{Re}\frac{z-2i}{z+2i} = 0$: **36.** $\arg\frac{i-z}{z+i} = 0$:

37. $|z-3| + |z+3| = 4$: 37.1. $|z-2| + |z+2| = 2\sqrt{2}$

38. (z) կոմպլեքս հարթության մեջ գտնել $|z^2 - \lambda| = \lambda \ (\lambda > 0)$ հավասարումով տրված կորերը:

Գտնել հետևյալ կորերի կոմպլեքս հավասարումներ.

39. $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$: **40.** $x^2 + y^2 = R^2$:

41. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: **42.** $x^2 - y^2 = a^2$:

43. $ax + by + c = 0$: **44.** $y = x$:

45. Գտնել կոորդինատային առանցքների պատկերները հետևյալ արտապատկերումների ժամանակ. **ա.** $w = \frac{z+1}{z-1}$, **բ.** $w = 1 + \frac{1}{z}$, **գ.** $w = z^2 + z$:

46. Անհավասարությունների միջոցով գրել կոմպլեքս հարթության հետևյալ բաց բազմությունները.

ա. վերին կիսահարթությունը

բ. աջ կիսահարթությունը

գ. առաջին քառորդը

դ. Այն բոլոր z կետերի բազմությունը, որոնց հեռա-վորությունը կոորդինատների սկզբնակետից փոքր է տրված R թվից

ե. $\frac{\pi}{4}$ մեծություն ունեցող այն անկյան ներքին տիրույթը, որի համար $y = x$ ուղիղը հանդիսանում է անկյան կիսորդ:

47. (z) կոմպլեքս հարթության մեջ կառուցել հետևյալ կորերը.

ա. $z = 2 + iy,$

բ. $z = x - 2i,$

գ. $z = \cos t + i \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi,$

դ. $z = R\cos t + iR\sin t, 0 \le t \le \pi$:

(z) կոմպլեքս հարթության մեջ պատկերել անհավասարութ-յուններով տրված բազմությունը:

48. $\{z \in C : |z-4| < 4, |z-2| > 2\}$:

49. $\{z \in C : |z-2| \le 3, \operatorname{Re} z > 3/2, \operatorname{Im} z \ge -1/2\}$:

50. $\{z \in C : |z| > 3, -\pi/4 \le \arg z \le \pi/4\}$:

51. $\{z \in C : |z-1| \le 4, 0 \le \arg z \le \pi/2, \operatorname{Im} z > 1/2\}$:

52. $\left\{z \in C : \left|z+\sqrt{2}\right| + \left|z-\sqrt{2}\right| < 2\sqrt{3}\right\}$:

53. $\{z \in C : |z-2| + |z+3| \ge 4, \operatorname{Im} z > 0\}$:

54. $\{z \in C : |z+2| - |z-2| \ge 2\sqrt{2}, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$:

55. $\{z \in C : |z-1| < 3, |z-1| > 1, \operatorname{Re} z > 0\}$:

56. $\{z \in C : |z+2| - |z-2| \le 2\sqrt{3}, 0 \le \arg z \le \pi/6\}$:

57. $\left\{z \in C : \left|z-\sqrt{3}\right| + \left|z+\sqrt{3}\right| < 4, \left|z+\sqrt{2}\right| - \left|z-\sqrt{2}\right| \le 2\right\}$:

58. $\{z \in C : |z+2i| + |z-2i| \le 6, |z| > 1\}$:

59. $\{z \in C : |z| < 4, |z-i| \ge 1, \operatorname{Im} z \ge 0\}$:

60. $\{z \in C : |z-2| + |z+2| < 6, |z| < 1\}$:

61. $\{z \in C : |z+1| + |z-1| < 4, \operatorname{Im} z > 0\}$:

62. $\{z \in C : \operatorname{Re} z < 2, \operatorname{Im} z > 1/2, |z-1| > 1\}$:

63. Պատկերել $|z + z_0| \cdot |z - z_0| < R^2$ տիրույթը:

64. Դիցուք $T_0 = \{z \in C : |\operatorname{Re} z| \leq 1, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\}$, իսկ $T_n = \{z \in C : |\operatorname{Re} z| \leq 8 + n - \operatorname{Im} z, 2n \leq \operatorname{Im} z \leq 8 + n\}$: Պատկերել $T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$:

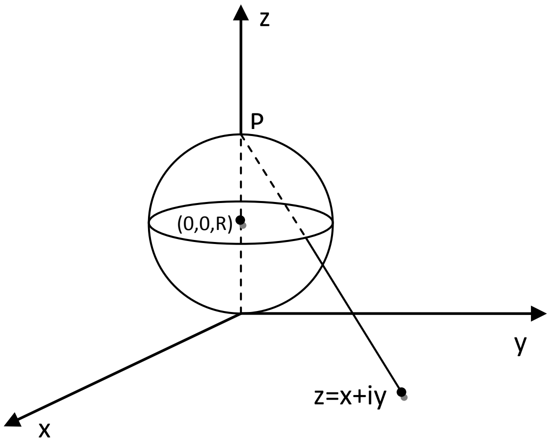
3. ՍՏԵՐԵՈԳՐԱՖԻԿ ՊՐՈՅԵԿՑԻԱ

3.1 Սահմանում. $z = \infty$ սիմվոլն անվանում են անվերջ հեռու կետ:

$z = \infty$ անվերջ հեռու կետի շրջակայք ասելով հասկանում ենք այն բոլոր z կետերի բազմությունը, որոնց համար

$|z| > R, \forall R > 0$:

$C\bigcup\{\infty\} = \overline{C}$, $\overline{C}$ -ին անվանում են ընդլայնված կոմպլեքս հարթություն:



Ռիմանյան սֆերայի միջոցով տրվում է ընդլայնված կոմպլեքս հարթության երկրաչափական մեկնաբանությունը: Դիցուք S սֆերան կոմպլեքս հարթությունը շոշափում է $z = 0$ կետում և կենտրոնը գտնվում է $(0,0,R)$ կետում: P-ն $z = 0$ կետի տրամագծորեն

հակադիր կետն է սֆերայի վրա: (z) կոմպլեքս հարթության յուրաքանչյուր $z = x + iy$ կետին համապատասխանության մեջ է դրվում սֆերայի այն կետը, որն առաջանում է սֆերայի վրա z –ը P–ին միացնելուց: Այդպիսի համապատասխանության ժամանակ $z = \infty$ կետին կհամապատասխանի P կետը: Այդ համապատասխանությունը՝ կոմպլեքս հարթության կետերի և Ռիմանի սֆերայի կետերի միջև, փոխմիարժեք է: **Այն կոչվում է ստերեոգրաֆիկ պրոյեկցիա:**

65.Գրել z կետի ստերեոգրաֆիկ պրոյեկցիաները, եթե Ռիմանի սֆերան հետևյալն է. $o\xi$ առանցքը համընկնում է OX առանցքին, $o\eta$ -ն՝ OY –ների առանցքի հետ, իսկ $o\varsigma$ –ն ուղղահայաց է $\xi o\eta$ –ին, սֆերայի շառավիղը հավասար է ½-ի, իսկ սֆերայի կենտրոնը գտնվում է $(0,0,1/2)$ կետում:

66.Գրել z կետի ստերեոգրաֆիկ պրոյեկցիաները, եթե Ռիմանի սֆերան նախորդ խնդրում նկաչագրվածն է, շառավիղը 1 է և կենտրոնը գտնվում է $(0,0,1)$ կետում:
67.Ընդհանրացնել նախորդ խնդիրները, երբ սֆերայի շառավիղը R է, իսկ կենտրոնը գտնվում է $(0,0,R)$ կետում:
68. Ռիմանի սֆերայի վրա գտնել կոմպլեքս հարթության հետևյալ կետերի պատկերները. 1,-1,i,-I,1+I,1-i
69.Ռիմանի սֆերայի վրա գտնել հետևյալ գծերի և տիրույթների պատկերները.

ա. $\arg(z)=\alpha$ ճառագայթը

բ. $y=kx$ ուղիղը,

գ. $|z|=r$ շրջանագիծը:

70.Ինչպիսին պետք է լինեն z_1 և z_2 կետերը, որպեսզի դրանց նախապատկերները Ռիմանի սֆերայի վրա լինեն տրամագծորեն հակադիր կետեր:

71.Ռիմանի սֆերայի վրա գտնել տրված $z_1=x_1+iy_1$ և $z_2=x_2+iy_2$ կետերի նախապատկերների՝ $M_1(\xi_1,\eta_1,\varsigma_1),M_2(\xi_2,\eta_2,\varsigma_2)$, d հեռավորությունը:

72.Ցույց տալ, որ Ռիմանյան սֆերան՝ S, իր վրա սահմանված $d=\dfrac{|z_1-z_2|}{\sqrt{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)}},z_1,z_2\neq\infty,$

$d=\dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}},z_2=\infty$ մետրիկայով հանդիսանում է կոմպակտ մետրիկական տարածություն, այսինքն յուրաքանչյուր $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\in S$ հաջորդականության համար գոյություն ունի $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ենթահաջորդականություն և $z\in S$ այնպիսին որ $d\left(z_{n_k},z\right)\to 0$ երբ $k\to\infty$:

4.ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՇԱՐՔԵՐ

4.1 Սահմանում. Ասում են, որ $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը զուգամետ է և ունի վերջավոր $A=a+ib$ սահմանը, եթե $\forall\varepsilon>0$ համար, գոյություն ունի $n_0\in N$, որ բոլոր $n>n_0$ համար տեղի ունի $\left|z_n-A\right|<\varepsilon$ անհավասարությունը և այդ փաստը գրում են՝ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=A$:

Քանի որ $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{x_n+iy_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ և $\begin{cases}\left|x_n-a\right|\le\left|z_n-A\right|\\ \left|y_n-b\right|\le\left|z_n-A\right|\end{cases}$ ապա

կոմպլեքս թվերից կազմված $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության զուգամիտությունը համարժեք է երկու իրական թվերից կազմված հաջորդականությունների՝ $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty},\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, զուգամիտությանը:

4.2 Սահմանում. Ասում են, որ $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ կոմպլեքս թվերից կազմված հաջորդականության սահմանը ∞ է, եթե $\forall E>0$ թվի համար $\left|z_n\right|>E$ անհավասարությունը տեղի ունի, երբ $n>n_0\in N$ և գրում են. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$:

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$ համարժեք է նրան, որ $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty},\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականություններից մեկն ու մեկը ձգտի ∞:

Գտնել տրված $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության սահմանը:

73. $z_n = \dfrac{3^n}{3^n - 1} + i \arccos\dfrac{1}{n}$: **74.** $z_n = \dfrac{a^n}{a^n + 1} + i \arcsin\dfrac{1}{n}$: **75.** $z_n = n\sin\dfrac{1}{n} + i\cos\dfrac{1}{n}$:

76. $z_n = \left(1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right) + i\dfrac{n + \sin n}{n+1}$: **77.** $z_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) + i^n$:

78. $z_n = \left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) + i\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$:

79. $z_n = \dfrac{a_0 + a_1 n + \cdots a_k n^k}{b_0 + b_1 n + \cdots + b_m n^m} + i\dfrac{b_0 + b_1 n + \cdots + b_m n^m}{a_0 + a_1 n + \cdots a_k n^k}$, որտեղ $a_j = \alpha_j + i\beta_j,\ j = 0,1,\cdots,k, b_j = \delta_j + i\gamma_j,\ j = 0,1,\cdots,m$:

80. $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2 - 1} + i\sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}}, c > 0$:

81. $z_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) + i\left(\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$:

82. $z_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+i\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$:

83. $z_n=x^n+iy^n, |x|<1, |y|<1$:

84.Պարզել հետևյալ հաջորդականությունների զուգամիտությունները.

1. $z_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{k^k}+i\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{3^k}$, 2. $z_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+4}{k^2-3k+1}+i\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{k-1}}{k^k}$, 3. $z_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k\cdot k!}{k^k}+i\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k\cdot k!}{k^k}$,

4. $z_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}+i\sum_{k=1}^{n}\frac{3k+1}{k^2\sqrt{k}+2}$:

85.Դիցուք $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունները զուգամետ են: Ցույց տալ, որ

$$\lim_{n\to\infty} z_n \lim_{n\to\infty} w_n=\lim_{n\to\infty}\frac{z_1w_n+z_2w_{n-1}+\cdots+z_nw_1}{n}:$$

86.Դիցուք M -ը C -ում բոլոր սահմանափակ հաջորդականությունների բազմությունն է: Ապացուցուցել, որ. ա. $d_1\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w_n\}_{n=1}^{\infty}\right)=\sup_{n\in N}\{|z_n-w_n|\}$,

բ. $d_2\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty},\{w_n\}_{n=1}^{\infty}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\left|z_n-w_n\right|,$ գ.

$d_3\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty},\{w_n\}_{n=1}^{\infty}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\frac{\left|z_n-w_n\right|}{1+\left|z_n-w_n\right|}$; բանաձևերից ցանկացածով M բազմությունը վերածվում է մետրիկական տարածության*:

*- Դիցուք X-ը ոչ դատարկ բազմություն է:

Սահմանում.- $d:X\times X\to[0;+\infty)$ արտապատկերումը կոչվում է **մետրիկա** X տարածության վրա, եթե այն բավարարում է հետևյալ երեք աքսիոմներին.

1. $d(x,y)\geq 0; d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y, \forall x,y\in X$;
2. $d(x,y)=d(y,x), \forall x,y\in X$;
3. $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y), \forall x,y,z\in X$;

Այդ դեպքում (X,d) զույգին անվանում են **մետրիկական տարածություն:**

Հետազոտել հետևյալ շարքերի զուգամիտությունը.

86.1 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{(1+in)^2}$ **86.2** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{3-4i}{5+12i}\right)^n$ **86.3** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)(2+i)\cdots(n+i)}{n^n}$

86.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}{n^2 n!}$ **86.5** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}$ **86.6** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}$

86.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$ **86.8** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2}$ **86.9** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$

5.ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

5.1. Սահմանում.-Ասում են, որ C կոմպլեքս հարթության մեջ ընկած D բազմության վրա որոշված է $w=f(z)$ կոմպլեքս արժեքներ ընդունող կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիան, եթե յուրաքանչյուր $z=x+iy$ կետին համապատասխանության մեջ է դրվում մեկ (միարժեք ֆունկցիա) կամ մի քանի (բազմարժեք ֆունկցիա) $w=u+iv$ կոմպլեքս արժեք:

Քանի որ $z=x+iy, w=u+iv$, ապա $w=f(z)$ համապատասխանությունը կոմպլեքս w և կոմպլեքս z փոփոխականների միջև կլինի տրված, եթե տրված են u և v իրական, երկու x,y փոփոխականի ֆունկցիաները.

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y), u(x,y)=\operatorname{Re} f(z), v(x,y)=\operatorname{Im} f(z):$$

Կոմպլեքս փոփոխականի տարրական ֆունկցիաներն են.

1. n-րդ աստիճանի բազմանդամը՝

   $$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n, a_n\neq 0:$$

2. Ռացիոնալ ֆունկցիան, որն իրենից ներկայացնում է երկու բազմանդամների հարաբերություն.

   $$f(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m}, a_n\neq 0, b_m\neq 0:$$

3. Էքսպոնեցիալ ֆունկցիան.

$$f(z)=\exp(z)=e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y):$$

4. Կոմպլեք փոփոխականի եռանկյունաչափական ֆունկցիաները.

$$f(z)=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ f(z)=\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

$$f(z)=tgz=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})},\ f(z)=ctgz=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}:$$

5. Կոմպեքս փոփոխականի հիպերբոլական

$$f(z)=chz=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\ f(z)=shz=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},$$

ֆունկցիաները.

$$f(z)=thz=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}},\ f(z)=cthz=\frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}:$$

6. Կոմպլեքս փոփոխականի լոգարիթմական ֆունկցիան.

$$f(z)=Ln(z)=\ln z+2\pi ki=\ln|z|+i\arg(z)+2\pi ki,k\in Z,$$

$$\ln z=\ln|z|+i\arg(z)$$

կոչվում է $Ln(z)$ -ի գլխավոր արժեք՝ $-\pi<\arg(z)\le\pi:$

$$Arg(z)=\arg(z)+2\pi k,k\in Z:$$

7. Աստիճանային ֆունկցիան.

$$f(z)=z^{\alpha}=e^{\alpha Ln(z)},z\ne 0,\alpha=a+ib:$$

8. Ցուցչային ֆունկցիան. $f(z)=a^{z}=e^{zLn(z)},a=\alpha+i\beta\ne 0:$

9. Կոմպլեքս փոփոխականի հակադարձ եռանկյունաչա-փական ֆունկցիաներ.

$$Arc\cos z = -iLn\left(z+\sqrt{z^2-1}\right), Arc\sin z = -iLni\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$Arctgz = \frac{i}{2}Ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right) = \frac{-i}{2}Ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right), Argcctgz = \frac{i}{2}Ln\left(\frac{z-i}{z+i}\right):$$

$$\text{arc}\cos z = -i\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right); \text{arcsin}\, z = -i\ln i\left(z+\sqrt{z^2-1}\right);$$

$$\text{arc}\,tgz = \frac{i}{2}\ln\frac{i+z}{i-z}; \text{arc}\,ctgz = \frac{i}{2}\ln\frac{z-i}{z+i};$$

$$Arcshz = Ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right); Arcchz = Ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right);$$

10.
$$Arcthz = \frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right); Arccthz = \frac{1}{2}Ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right);$$

$$\text{arcs}\,hz = \ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right); \text{arc}\,chz = \ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right);$$

$$\text{arc}\,thz = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}; \text{arc}\,cthz = \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1};$$

Օրինակ 1. Հաշվել $Ln\left(-1-i\sqrt{3}\right)$–ը: Համաձայն կոմպլեքս լոգարիթմի սահմանման.

$$Ln\left(-1-i\sqrt{3}\right) = \ln\left|-1-i\sqrt{3}\right| + i\arg\left(-1-i\sqrt{3}\right) + 2\pi ki = \ln 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right):$$

Օրինակ 2.Առանձնացնել $f(z) = ze^z$ ֆունկցիայի իրական և կեղծ մասերը:

$$f(z) = ze^z = (x+iy)e^{x+iy} = (x+iy)e^x(\cos y + i\sin y) =$$

$$e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(y\cos y + x\sin y):$$

87. Ապացուցել հետևյալ բանաձևերը.

1. $\sin iz = ishz$ 2. $shiz = i\sin z$ 3. $\cos iz = chz$ 4. $chiz = \cos z$

5. $tgiz = ithz$ 6. $ctgiz = -icthz$ 7. $\sin z = ishiz$ 8. $shz = -i\sin iz$

Լուծել հավասարումները.

88. $\sin z = 2$ **89.** $\cos z = i$ **90.** $5\cos z + 12\sin z = 39$

91. $\left|\sin z\right| = 3$ **:92.** $\sin 2z - 2\cos 2z = 3\sin z\cos z - 2$

93. $\left|shz\right| = 3$ **:93.1** $\cos z = chz$:

93.2 $\sin z = ishz$ 93.3 $\cos z = ishz$:

94. Ելնելով եռանկյունաչափական և հիպերբոլական ֆունկցիաների սահմանումներից ապապցուցել հետևյալ բանաձևերը.

1. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$ **2.** $ch^2 z - sh^2 z = 1,$

3. $sh\left(z_1 \pm z_2\right) = shz_1chz_2 \pm chz_1shz_2,$ **4.**

$ch\left(z_1 \pm z_2\right) = chz_1chz_2 \pm shz_1shz_2,$

5. $sh2z = 2shzchz,$ **6.** $ch2z = ch^2 z - sh^2 z$:

95. Օգտվելով էսպոտենցիալ ֆունկցիայի սահմանումից և Էյլերի բանաձևից՝ $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ որտեղ φ –ն իրական թիվ է, ապացուցել հետևյալ հավասարությունները.

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$ 2. $e^{z+2\pi i} = e^z$

3. $e^{z+\omega} = e^z, \forall z \in C, \omega = 2\pi ki, k \in Z$:

96.Դիցուք $f:C\to C$ որևէ ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ $f(z)$ –ը կլինի անընդհատ C–ում այն և միայն այն դեպքում, երբ $f\left(\overline{A}\right)\subset\overline{f(A)}$:

97.Ապացուցել, որ $f:C\to C$ ֆունկցիան կլինի անընդհատ այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած բաց (փակ)բազմության նախապատկերը բաց (փակ)է:

Հաշվել նշված $f(z)$ ֆունկցիայի արժեքը տրված z_0 կետում.

$98.\ f(z)=e^z, z_0=2+\frac{\pi}{3}i:$ $99.\ f(z)=(1+i)^z, z_0=2:$

$100.\ f(z)=Ln(z), z_0=\frac{1+i}{1-i}:$ $101.\ f(z)=\cos z, z_0=\frac{\pi}{4}-2i:$

$102.\ f(z)=\ln(z), z_0=\frac{1-2i}{1+2i}:$ $103.\ f(z)=\sin 2z, z_0=2+\pi i:$

$104.\ f(z)=ch\frac{z}{2}, z_0=2-\pi i:$ $105.\ f(z)=(1+i)^z, z_0=1-i:$

$106.\ f(z)=z^3, z_0=3-4i:$ $107.\ f(z)=z+\frac{1}{z}, z_0=3+3i:$

$108.\ f(z)=z^2+\frac{1}{z^2}, z_0=2-3i:$ $109.\ f(z)=tgz, z_0=\frac{\pi}{4}+i:$

$110.\ f(z)=Arc\sin z, z_0=2i:$ $111.\ f(z)=arc\cos z, z_0=-i:$

$112.\ f(z)=sh2z, z_0=1-\frac{\pi}{3}i:$ $113.\ f(z)=Arctgz, z_0=1+i:$

$114.\ f(z)=i^z, z_0=1+i:$ $115.\ f(z)=Arcshz, z_0=2i;$

$116.\ f(z)=Arcthz, z_0=i;$ **117.** $\mathrm{arc}\,cthz, z=-i$:

117.1 $A\text{rcsin}1/2$ **117.2** $\arccos 1/2$:

117.3. $\arcsin 2$ **117.4** $A\text{rc}\,ch2i$ **:**

Հաշվել հետևյալ գումարները.

118. $1/2+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx;$ **119.** $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx;$

120. $\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 2nx;$ **121.** $\sin x+\sin 3x+\cdots+\sin(2n-1)x;$

122. $\cos x+\cos(x+y)+\cdots+\cos(x+ny);$ **123.** $\sin x+\sin(x+y)+\cdots+\sin(x+ny);$

124. $\sum_{j=0}^{n-1}\cos\left(j\frac{2\pi}{n}\right);$ **125.** Ապացուցել, որ

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos\frac{2\pi k}{n}=-\frac{n}{2}$$

Առանձնացնել հետևյալ ֆունկցիաների իրական և կեղծ մասերը.

126. $f(z)=z^3+3z^2+2z-1$: **127.** $f(z)=\frac{1}{z}$:

128. $f(z)=\frac{1}{1+z}$: **129.** $f(z)=\frac{z}{z+1}$:

130. $f(z)=\frac{z-z_0}{z+z_0}$: 131. $f(z)=z-\frac{1}{z}$:

132. $f(z)=\sin 2z$: 133. $f(z)=\cos^2 z$

134. $f(z)=tg3z$: 135. $f(z)=ctg\frac{z}{2}$:

136. $f(z) = sh4z$: 137. $f(z) = thz$:

Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների մոդուլները.

138. $f(z) = \cos z$: 139. $f(z) = chz$:

140. $f(z) = z - \frac{1}{z}$: 140.1. $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$:

141. $f(z) = \ln(2z)$ 142. $f(z) = e^{2z}$:

142.1 $f(z) = \arcsin z$ 142.2 $f(z) = \text{arcs}\,hz$:

6. ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՎ ՀԱՐՄՈՆԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Դիցուք $w = f(z)$ ֆունկցիան որոշված է z կոմպլեքս հարթության E բազմության վրա և $z, z + \Delta z$ կետերը պատկանում են այդ բազմությանը:

6.1Սահմանում. $w = f(z)$ ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի $z \in E$ կետում, եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ սահմանը և այն վերջավոր թիվ է:

Այդ սահմանը անվանում են ֆունկցիայի ածանցյալ և նշանակում են $f^{'}_{z \in E}(z)$ կամ ուղղակի $f^{'}(z)$:

6.2Սահմանում. Եթե $f(z)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է E բազմության յուրաքանչյուր կետում, այն անվանում են դիֆերենցելի E բազմության վրա:

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$

$$f^{'}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}:$$

6.3Թեորեմ. Որպեսզի $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ֆունկցիան լինի կոմպլեքս դիֆերենցելի E բազմության z կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում $u(x,y), v(x,y)$ ֆունկցիաները լինեն դիֆերենցելի որպես երկու

փոփոխականի ֆունկցիաներ և բավարարեն հետևյալ հավասարություններին. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} (C-R):$

Վերջին պայմաններին անվանում են Կոշիի-Ռիմանի պայմաններ:

6.4Սահմանում. Եթե $w = f(z)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է E բազմության յուրաքանչյուր կետում, այն անվանում են անալիտիկ կամ հոլոմորֆ ֆունկցիա բազմության E վրա:

6.5 Սահմանում. $\varphi(x, y)$ երկու փոփոխականի ֆունկցիան կոչվում է հարմոնիկ $D \subset C$ տիրույթում, եթե այն այդ տիրույթում ունի մինչև երկրորդ կարգի անընդհատ մասնական ածանցյալները և բավարարում է Լապլասի հավասարմանը. $\Delta\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0:$

(C-R) պայմաններից հետևում են, որ անալիտիկ ֆունկցիայի իրական և կեղծ մասերը հանդիսանում են հարմոնիկ ֆունկցիաներ:

6.6 Սահմանում. Այն երկու $u(x, y)$ և $v(x, y)$ հարմոնիկ ֆունկցիաները, որոնք միմյանց հետ կապված են $(C-R)$ պայմաններով կոչվում են համալուծ հարմոնիկ ֆունկցիաներ:

Այսպիսով, անալիտիկ ֆունկցիայի իրական և կեղծ մասերը հանդիսանում են համալուծ հարմոնիկ ֆունկցիաներ:

6.7Թեորեմ. $f(z)$ կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիան կլինի անալիտիկ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա իրական և կեղծ մասերը լինեն համալուծ հարմոնիկ ֆունկցիաներ:

6.8Թեորեմ. $f(z)$ կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիան կլինի կոմպլեքս դիֆերենցելի այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0:$$

Օրինակ 1. $f(z) = z - \frac{1}{z}$ ֆունկցիայի համար առանձնացնել իրական և կեղծ մասերը և ստուգել Կոշիի-Ռիմանի պայմանները:

$$f(z) = z - \frac{1}{z} = x + iy - \frac{1}{x+iy} = x + iy - \frac{x-iy}{x^2+y^2} = x - \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y + \frac{y}{x^2+y^2}\right):$$

$u(x,y) = x - \frac{x}{x^2+y^2}, v(x,y) = y + \frac{y}{x^2+y^2}$: Հաշվելով մասնական ածանցյալները նկատեւմ ենք.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}:$$

Օրինակ 2. $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = x + sh2x\cos 2y + 1$: Գտնել $\operatorname{Im} f(z) = v(x,y)$ –ը և վերականգնել $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան, եթե $v(1,0) = 1$:

Կոշիի-Ռիմանի հավասարություններից կունենանք.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2ch2x\cos 2y \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2sh2x\sin 2y \end{cases} :$$

Համակարգի առաջին հավասարումն ինտեգրելով ըստ y–ի, կստանանք. $v(x,y) = y + ch2x\sin 2y + \varphi(x)$: Ստացված հավասարությունից գտնելով $\dfrac{\partial v}{\partial x}$–ը և համեմատելով համակարգի երկրորդ հավասարման հետ, կունենանք.

$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = c = const$: Հետևապես

$v(x,y) = y + ch2x\sin 2y + c; v(1,0) = 1 \Rightarrow c = 0$: Այսպիսով

$v(x,y) = y + ch2x\sin 2y$: Քանի որ

$\cos 2y = ch2yi, i\sin 2y = sh2yi$, ապա կստանանք $f(z)$–ի հետևյալ տեսքը.

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x + sh2x\cos 2y + ich2x\sin 2y + iy + 1$$
$$= (x + iy) + (sh2xch2iy + ch2xsh2yi) + 1 = z + sh(2x + 2yi) + 1 = z + sh2z + 1:$$

143. Ապացուցել, որ հարմոնիկ ֆունկցիաների գծային կոմբինացիան նույնպես հարմոնիկ ֆունկցիա է:

144. Ցույց տալ, որ Կոշիի-Ռիմանի պայմանները բևեռային կոորդինատական համակարգում ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases}:$$

145. Բևեռային կոորդինատներով գտնել Լապլասի օպերատորի տեսքը:

Գտնել այն $u(x,y)=u(r,\varphi)$ հարմոնիկ ֆունկցիաները և դրանց համապատասխանաբար անալիտիկ ֆունկցիանները. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)$, եթե տրված $h(t)$ ֆունկցիան երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է:

146. $1. u=h(x), 2. u=h(y):$ 147.1. $u=h\left(x^2+y^2\right):$

147.2. $u=h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 148.1. $u=h\left(\dfrac{y}{x}\right):$ 148.2. $u=h\left(\dfrac{x}{y}\right)$

149. $u=h(xy):$

150.1. $u=h\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right):$ 150.2. $u=h\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right):$

151.1. $u=h\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right):$ 151.2. $u=h\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

Վերականգնել $w = f(z)$ անալիտիկֆունկցիան, $w = \rho e^{i\theta}$,եթետրվածէնրամոդուլըկամարգումենտը.

152.$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$: 153.$\rho = e^{-xy}$: **154.** $\theta \alpha xy$: **155.** $\boldsymbol{\theta = \varphi + r \sin \varphi}$:

156.Գտնել այն բոլոր f ֆունկցիաները, որոնց համար $f(u(x,y))$ կլինի հարմոնիկ, որթե $u(x,y)$–ն է հարմոնիկ:

157.Պարզել տրված ֆունկցիաների հարմոնիկությունը, եթե $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ -ը անալիտիկ ֆունկցիա է. 1)$|f(z)|^p, p \geq 1;$ 2)$\ln|f(z)|$, 3)$|u(x,y)|^p, p > 1;$ 4)$\arg f(z)$:

158.Ինչպիսին է անալիտիկ ֆունկցիայի կեղծ մասը, եթե $\operatorname{Re} f(z) = C = const$:

159. $w = f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան կանվանենք միաթերթ D բազմությանվրա, եթե D բազմության երկու տարբեր կետերում այն ընդունում է տարբերարժեքներ: Դիցուք $w = f(z), f: D \to G$ միաթերթէ: Այդ դեպքում G տիրույթի մակերեսը՝ S_G , և $\gamma \subset D$ կորի պատկեր կորի՝ $\Gamma \subset G$, երկարությունը՝ L_Γ , հաշվում են հետևյալ բանաձևերով. $S_G = \iint_D |f'(z)| dxdy$ և $L_\Gamma = \int_\gamma |f'(z)| ds$:

Գտնել անալիտիկ ֆունկցիաները, առանձնացնել դրանց իրական և կեղծ մասերը և ստուգել Կոշիի-Ռիմանի պայմանները:

160. $f(z)=\dfrac{1}{1+z}$: 161. $f(z)=\dfrac{z}{1+\bar{z}}$:

162. $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$: 163. $f(z)=|z|(1+z)$:

164. $f(z)=|z|^2+z-1$: 165. $f(z)=ze^z$:

166. $f(z)=ze^{|z|^2}$: 167. $f(z)=z\sin z$:

168. $f(z)=z^2\cos z$: 169. $f(z)=tg2z$:

170. $f(z)=z^2+e^z$: 171. $f(z)=\ln(1-|z|)$:

172. $f(z)=\ln(1-z)$: 173. $f(z)=e^{z+z^2}$:

174. $f(z)=z-\dfrac{1}{z}$: 175. $f(z)=\ln(1+z^2)$:

176. $f(z)=e^z\sin 2z$: 177. $f(z)=\cos(3z+\pi/4)$:

178. $f(z)=sh(z/2)$: 179. $f(z)=ch\left(4|z|^2/\bar{z}\right)$:

180. $f(z)=th(z)$: 180.1 $f(z)=\operatorname{arc}chz$

Ստուգել տրված ֆունկցիաների հարմոնիկությունը նշված տիրույթներում, գտնել համալուծ հարմոնիկը և վերականգնել $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան տրված իրական՝ $u(x,y)=Ref(z)$,կամ կեղծ՝$v(x,y)=Imf(z)$մասով:

181. $v(x,y)=x^2-y^2-3x, 0\le |z|<\infty, u(1,0)=3$:

182.$u(x,y)=x^3-3xy^2-x, 0\le |z|<\infty, v(0,1)=-1$:

183. $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2}, 0<|z|<\infty, v(1,1)=-\frac{1}{2}$:

184. $v(x,y)=x^2-y^2+3-\frac{y}{2(x^2+y^2)}, 0<|z|<\infty, u(2,0)=2{,}5$:

185. $u(x,y)=x+\frac{x}{x^2+y^2}, 0<|z|<\infty, v(0,1)=-3$:

186. $v(x,y)=\ln(x^2+y^2)+x-2y, 0<|z|<\infty, u(1,1)=-\frac{\pi}{2}-3$:

187. $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+x-\frac{x}{x^2+y^2}, 0<|z|<\infty, v(0,1)=0$:

188. $v(x,y)=xarctg\frac{y}{x}+\frac{y}{2}\ln(x^2+y^2)+6xy-2, 0<|z|<\infty, u(1,0)=3$:

189.$v(x,y)=e^x\sin y-xy-y, 0\le |z|<\infty, u(0,0)=0$:

190. $u(x,y)=e^{2x}\cos y+xshx-y\cos xshy, 0\le |z|<\infty, v(0,0)=0$:

191. $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)+2\sin xshy+x^3-3xy^2+y, z\in C, v(0,0)=2$: **192**. $v(x,y)=\frac{x\cos xshy-y\sin xchy}{x^2+y^2}, z\in C\backslash\{0\}, u(\pi,0)=0$:

193.$u(x,y)=\frac{\frac{1}{2}x\ln\left((1+x)^2+y^2\right)+yarctg\frac{y}{1+x}}{x^2+y^2}, z\in C\backslash\{0\}, v(1,0)=0$:

194.$v(x,y)=\frac{xe^x\sin y-ye^x\cos y+y}{x^2+y^2}$,0<$|z|<\infty, u(1,0)=0$:

195. $u(x,y)=xch2x\cos 2y-ysh2x\sin 2y-x^2+y^2+x, z\in C, v(0,0)=0$:

196.Ապացուցել, որ կոմպլեքս հարթության տրված D տիրույթում որոշված այն բոլոր անալիտիկ ֆունկցիաները՝ $f=u+$

iv , որոնք ընդունում են միայն իրական կամ միայն կեղծ արժեքներ, հաստատուն են D–ում:

197.Դիցուք $f(z) = u + iv \in A(G)$ (անալիտիկ ֆունկցիա է տիրույթում): Երբ կլինի անալիտիկ $u^2 + iv^2$ֆունկցիան:

198.Ապացուցել, որեթե $f(z) = u + iv \in A(D)$ և $|f(z)| = 1$,ապա$f(z)$-ըհաստատունէD–ում:

7. ԿՈՆՖՈՐՄ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

7.1 Սահմանում. Անընդհատ ֆունկցիաների այն արտապատկերումները, որոնք պահպանում են տվյալ կետով անցնող կորերի կազմած անկյունները, կոչվում են կոնֆորմ արտապատկերումներ:

Եթե պահպանվում է ոչ միայն անկյան մեծությունը, այլ նաև անկյան հաշվարկային ուղղությունը, ապա կոնֆորմ արտապատկերումը կոչվում է առաջին տիպի կոնֆորմ արտապատկերում, հակառակ դեպքում՝ երկրորդ տիպի կոնֆորմ արտապատկերում:

D տիրույթում որոշված $w = f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան $\forall z \in D$ կետում իրականացնում է առաջին տիպի կոնֆորմ արտապատկերում, եթեմիայն $f'(z) \neq 0$:

7.2 **Սահմանում.** $\boldsymbol{z_0}$ կետը կոչվում է $w = f(z)$ ֆունկցիայի անշարժ կետ, եթե $f(z_0) = z_0$:

Այն կոտորակագծային արտապատկերումը՝ $w = f(z)$, որի դեպքում $w_i = f(z_i), i = 1,2,3,$ որոշվում է հետևյալ անբացահայտ հավասարումից. $\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$ (1):

Մասնավորապես, եթե z_i , կամ $w_i, i = 1,2,3,$ կետերից որևէ մեկը հավասար է ∞ –ի, օրինակ $z_1 = \infty$,ապա (1) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{1}{z-z_2}:\frac{1}{z_3-z_2}\,(2):$$

199. Գտնել այն գծային արտապատկերման ընդհանուր տեսքը, որի համար i –ն անշարժ կետ է, իսկ $(1+i)$ –պատկերը $(1-i)$ –ն է:

200. Գտնել այն գծային արտապատկերման ընդհանուր տեսքը, որի համար $(1+i)$ –ին անշարժ կետ է, իսկ 1–ի պատկերը i–ն է:

201.Գտնել այն գծային արտապատկերման ընդհանուր տեսքը, որը ա) վերին կիսահարթությունը արտապատկերում է իր վրա, բ) վերին կիսահարթությունը արտապատկերում է աջ կիսահարթությանը, գ) վերին կիսահարթությունը արտապատկերում է աջ կիսահարթությանը:

202. Գտնել այն արտապատկերումները, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին ա) $-1, i, 1+i$ կետերի պատկերները հանդիսանում են $i, -1, 1-i$ կետերը, բ) ± 1 կետերն անշարժ են, իսկ i կետի պատկերը հանդիսանում է$-i$ կետը, գ)$2, 2i, -2i$ կետերի պատկերները հանդիսանում են$1, -2, \infty$ կետերը:

203. Գտնել այն կոտորակագծային արտապատկերման ընդհանուր տեսքը, որը. ա) վերին կիսահարթությունն արտապատկերում է ինքն իր վրա, բ) վերին կիսահարթությունն արտապատկերում է ներքին կիսահարթության վրա, գ) վերին կիսահարթությունն արտապատկերում է աջ

կիսահարթության վրա, դ) միավոր շրջանը արտապատկերում է վերին կիսահարթության վրա:

204. $w = e^{i\alpha}\frac{z-c}{z-\bar{c}}, c = a + ib,$ ֆունկցիան արտապատկերում է վերին կիսահարթությունը միավոր շրջանի վրա: Գտնել 1)$\arg w(x) = \varphi(x), x \in R$,2)$w'(c)$:

205. $w = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, |a| < 1,$ ֆունկցիայի համար, որը միավոր շրջանը արտապատկերում է ինքն իր վրա, գտնել. 1) $\arg w\left(e^{i\varphi}\right) = \omega(\varphi)$; 2) $w'(0)$; 3) $w'(a)$;

206.Արտապատկերել $|z| < 1$ շրջանը վերին կիսահարթության վրա այնպս, որ $w(0) = 1, \arg w'(0) = \frac{\pi}{2}$:

207. Արտապատկերել $|z| < r$ շրջանը $|w| < R$ շրջանի վրա այնպես, որ $w(a) = b, \arg w'(a) = 0, |a| < r, |b| < R$:

208.Գտնել այն կոտորակագծային արտապատկերման ընդհանուր տեսքը, որըմիավոր շրջանը արտապատկերում է աջ կիսահարթության վրա, միավոր շրջանի տրված z_1, z_2 և կետերը բերելով համապատասխանաբար$0, \infty$ կետերին:

8. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ: ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ԼՈԿԱԼ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԻ

8.1 Սահմանում- Աստիճանային են կոչվում հետևյալ տեսքի շարքերը.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots \ (8.2),$$

որտեղa_n–երը տրված կոմպլեքս թվերն ենև կոչվում են (8.2) աստիճանային շարքի գործակիցներ, z_0-ն ֆիքսած կոմպլեքս թիվն է, իսկ z–ը՝կոմպլեքս փոփոխականը:

$z_0 = 0$ դեպքում (8.2) աստիճանային շարքը ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \ (8.3):$$

$z - z_0 = \tau$նշանակումով(8.2) աստիճանային շարքը բերվում է (8.3) տեսքի:

8.4 Թեորեմ(*Աբելի*) Եթե (8.2)$\left(\text{համապատասխանաբար}(8.3)\right)$ աստիճանային շարքը զուգամիտում է մի որևէ $z = \overline{z_0}$ կետում, ապա այն բացարձակ զուգամիտում է այն բոլոր z կետերի բազմության վրա, որոնց համար $|z - z_0| < |z - \overline{z_0}|(|z| < |\overline{z_0}|)$:

Այսպիսով վերը նշված տեսքի աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը շրջան է՝ $\{z \in C: |z - z_0| < R\}$ կամ համապատասխանաբար $\{z \in C: |z| < R\}, R \geq 0$: R −ը կոչվում է նշված աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղ: Այն որոշվում է հետևյալ բանաձևերից որևէ մեկով. $R = \frac{1}{\rho}, \rho = \overline{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$:

Եթե $\rho = 0, R = \infty$ և $\rho = \infty, R = 0$:

Յուրաքանչյուր աստիճանային շարքի գումարը՝ $f(z)$, իր զուգամիտության տիրույթում՝ $|z - z_0| < R\Big(համապատասխանաբար (8.3)\Big)$իրենից ներկայացնում է անալիտիկ ֆունկցիա, որի ածանցյալը կարելի է ստանալ (8.2)(8.3)աստիճանային շարքն անդամ առ անդամ ածանցելով: $|z - z_0| = R$շրջանագծի վրա յուրաքանչյուր աստիճանային շարք պահանջում է լրացուցիչ հետազոտում, իսկ զուգամիտության շրջանից դուրս նշված աստիճանային շարքերը տարամիտում են:

8.5 Թեորեմ. Եթե$f(z)$-ըմիարժեք անալիտիկ ֆունկցիա է $D < C$ տիրույթում, ապա յուրաքանչյուր $z_0 \in D$ կետի շրջակայքում այն վերլուծվում է լոկալ աստիճանային շարքի. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$որտեղ$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, n = 0,1,2,\cdots$:

Հետևյալ տարրական կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաները $z_0 = 0$ կետի շրջակայքում վերլուծվում են Թեյլորի շարքի հետևյալ կերպ.

1.$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $R = +\infty$,

2. $\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, R = \infty$,

3.$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, R = \infty$,

4.$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, -1 < R \leq 1$,

5. $arctgz = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)}, R = 1$,

6.$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \cdots, R = 1$:

Մասնավորաբար վերջին հավասարությունից կստանանք.

7.$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$,

8. $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$:

209. Ինչպես կփոխվի աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը, եթե այն դիֆերենցենք անդամ առ անդամ:

210. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ և $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ աստիճանային շարքերի զուգամիտության շառավիղներն են R և r: Ինչ կարելի է ասել հետևյալ շարքերի զուգամիտության շառավիղների մասին.

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)z^n$, 2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$, 3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n$:

211. Հայտնի է, որ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը R-է, 0<R<∞: Գտնել հետևյալ շարքերի զուգամիտության շառավիղները.

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n + 3^n)a_n z^n$, 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha}} z^n$, 3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, 4. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos a_n z^n$:

Որոշել հետևյալ աստիճանային շարքերի զուգամիտության շառավիղները:

212. $\sum_{n=0}^{\infty}(2 + (-1)^n)^n z^n$:**213**. $\sum_{n=0}^{\infty}(3^n + 4^n)^{-1} z^n$:

214.$\sum_{n=0}^{\infty} \cos inz^n$:**215**.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$:

216.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$:**217.**$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n z^n$:

218.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{5^n} z^n$:**219**.$\sum_{n=1}^{\infty}(n + \ln n)(z - i)^{2n}$:

220.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n}{arctgn} (z - 2i)^n$:**221**.$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right] \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$:

222.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n} (z - i)^n$:**223.**$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{4n+1} (z - 1)^n$:

224.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(in)}{3^n}z^n$:

Գտնել հետևյալ ֆունկցիոնալ շարքերի զուգամիտության տիրույթները:

225.$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{nz}$:226. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{z}{2z+1}\right)^n$:

227. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n$:**228.**$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$:

229. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-2}{1-2z}\right)^n$:**230**.$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n$:

231. Ապացուցել հետևյալ հավասարությունները.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \frac{1-\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}$, 2. $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \frac{r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}$:

9. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ: ԿՈՇԻԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ԹԵՈՐԵՄԸ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

Դիցուք $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ կոմպլեքս փոփոխականի միարժեք անալիտիկ ֆունկցիա է $z \in D$ տիրույթում; $\gamma \in D$ ուղղելի ողորկ կոր է, որի վրա ֆիքսված է նրա ուղղություններից մեկը (ըստ արգումենտի աճման կամ նվազման): γ կորով տարածված $f(z)$ կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիայի ինտեգրալը սահմանվում է հետևյալ կերպ․

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\left[\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy\right]$$

(որտեղ աջ մասը սեռի II կորագիծ ինտեգրալ է):

Եթե γ *ողորկ*կորը տրված է բացահայտ պարամետրական տեսքով՝

$z(t) = x(t) + iy(t), t_0 \leq t \leq T$, ապա կոմպլեքս փոփոխականի ինտեգրալը կարելի է բերել սովորական ռիմանյան ինտեգրալի՝ $\int_\gamma f(z)dz = \int_{t_0}^{T} f(z(t))z'(t)dt$:

9.1 Սահմանում․$\boldsymbol{F(z)}$անալիտիկ ֆունկցիան անվանում են տրված $f(z)$ ֆունկցիայի նախնական $D \subset C$ տիրույթում, եթե այդ տիրույթի կամայականz կետում

$F'(z) = f(z)$:

Եթե$f(z)$ անընդհատ է Dտիրույթում, ապա դրա ինտեգրալը կախված չէ կորից այլ միայն այդ կորի ծայրակետերից: Հետևաբար այն կարելի է հաշվել Նյուտոն- Լայբնիցի բանաձևով․$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$,

որտեղ $F(z)$ – ը$f(z)$- ի նախնականներից որևէ մեկն է:

9.2. Օրինակ Հաշվել ինտեգրալը․$\int_{-i}^{i} e^{3iz} \cos 3z dz$:

$$\int_{-i}^{i} e^{3iz} \cos 3zd = \int_{-i}^{i} e^{3iz} \frac{e^{3iz} + e^{3iz}}{2} dz$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-i}^{i} e^{6iz} dz + \frac{1}{2}\int_{-i}^{i} dz = \frac{i}{6}\frac{e^{6} - e^{-6}}{2} + i$$
$$= \frac{i}{6}(\sinh 6 + 6):$$

9.3. Թեորեմ(Կոշիի ինտեգրալային թեորեմը) Դիցուք $f(z)$ միարժեք անալիտիկ ֆունկցիա է D միակապ տիրույթում: Այդ դեպքում D տիրույթում ընկած ցանկացած փակ, ուղղելի Ժորդանյան γ կորով տարածված $f(z)$ ֆունկցիայի ինտեգրալը հավասար է զրոյի՝ $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$:

9.4. Ընդհանրացում I- Դիցուք$f(z)$ միարժեք անալիտիկ ֆունկցիա է Dմիակապ տիրույթում և անընդհատ է ընդհուպ

մինչև∂D եզրագիծք, որն իրենից ներկայացնում է ողորկ փակ Ժորդանյան կոր: Այդ դեպքում. $\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$:

9.5 Ընդհանրացում II- Դիցուք D բազմակապ տիրույթի եզրագիծը բաղկացած է ∂D ողորկ, փակ ժորդանյան կորից և իրար հետ զույգ առ զույգ չհատվող $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ողորկ կորերից: Եթե $f(z)$միարժեք անալիտիկ ֆունկցիա է Dտիրույթում, անընդհատ ընդհուպ մինչև եզրագիծը, ապա $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(z)dz$, որտեղ ինտեգրումները կատարվում են դրական կամ բացասական ուղղություններով :

9.6 Թեորեմ (Կոշիի ինտեգրալային բանաձևը)-Դիցուք $f(z)$ միարժեք անալիտիկ ֆունկցի է Dմիակապ տիրույթում և L փակ ուղղելի ողորկ կոր է ընկած D ներսը: Այդ դեպքում՝

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, z_0 \in D :$$

9.7 Ընհանրացում. Եթե $f(z)$ միարժեք անալիտիկ ֆունկցիա է D միակապ տիրույթում, անընդհատ ընդհուպ մինչև կտոր առ կտոր ողորկ Ժորդանյան կոր հանդիսացող ∂D եզրագիծը, ապա ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \begin{cases} f(z_0), z_0 \in D \\ 0, z_0 \notin D \end{cases} :$$

9.8 Հետևանք. Եթե $f(z)$միարժեք անալիտիկ ֆունկցիա է Dմիակապ տիրույթում, ապա այն այնտեղ անվերջ դիֆե-րենցելի է, ընդ որում ցանկացած n ոչ բացասական ամբողջ թվի համար ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը`

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}},\ z_0\in D$$

որտեղ

$$\gamma_\rho:=\{z\in D:|z-z_0|=\rho\}\in D:$$

9.9. Թեորեմ. Եթե $f(z)$ միարժեք անալիտիկ ֆունկցիա է D տիրույթում, ապա յուրաքանչյուր $z_0\in D$ կետի շրջակայքում այն վեր է լուծվում լոկալ աստիճանային շարքի$(z-z_0)$ աստիճանների տեսքով. $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$որտեղ

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}},n=0,1,2,\cdots:$$ և$\gamma_\rho-$ ով

սահմանափակված տիրույթը ամբողջությամբ ընկած է$D-$ի ներսը:

Հետևյալ տարրական կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաները վեր են լուծվում լոկալ աստիճանային շարքի (Թեյլորի շարքի) $z_0=0$ կետի շրջակայքում.

1. $\boldsymbol{e^z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots,R=\infty;$
2. $\boldsymbol{\sin z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{1}{3!}z^3+\cdots+\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\boldsymbol{R}=\infty;$

3. $\boldsymbol{\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \cdots}$, $R = \infty$;
4. $\boldsymbol{\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} = z - \frac{1}{2} z^2 + \cdots + \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} + \cdots, R = 1}$:
5. $\boldsymbol{(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \cdots, R = 1}$:

Մասնավորաբար$\alpha = -1$ դեպքում կստանանք երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևերը.

5.1 $\boldsymbol{\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots, R = 1}$;

5.2 $\boldsymbol{\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots, R = 1}$:

9.10 Օրինակ. Հաշվել $\int_{\gamma} \frac{\cosh z dz}{(z^2+\pi^2)^2}$ ինտեգրալը, որտեղ $\gamma := \{z \in C: |z - \pi i| = \pi\}$:

Քանի որ ենթաինտեգրալ ֆունկցիայի եզակի կետերից միայն $z = \pi i$ կետն է գտնվում տվյալ կորով սահմանափակված տիրույթի ներսը, ապա համաձայն Կոշիի ինտեգրալային բանձևի կունենանք. $\int_{\gamma} \frac{\cosh z dz}{(z^2+\pi^2)^2} =$

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh z/(z+\pi i)^2 dz}{(z-\pi i)^2} = 2\pi i \left(\frac{\cosh z}{(z+\pi i)^2}\right)'_{z=\pi i} = 2\pi i \left(-\frac{2}{8\pi^3 i}\right) = -\frac{1}{2\pi^2}:$$

9.11 Օրինակ. $\boldsymbol{f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}}$ ֆունկցիան վերլուծել աստիճանային շարքի z-ի աստիճանների տեսքով:

Օգտվելով 5.1 և 5.2 վերլուծություններից կունենանք.

$$f(z)=\frac{\mathbf{2z+1}}{\mathbf{z^2+z-2}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z+2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z-1}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+z/2}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-z}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n:$$

Շարքը բացարձակ զուգամիտում է, երբ $|z|<1$:

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

232. $\int_i^1 ze^z dz$;**233.**$\int_{-1}^{1+i}(z^3+2z^2+3z)dz$:

234. $\int_0^i z\cos z dz$: **235.** $\int_2^{2i}\sin z\cos 2z dz$;

236. $\int_0^i \sinh z\cos 2z$;**237.** $\int_{-1}^{0} e^{-2iz}\sin 4z dz$;

238. $\int_1^{3i} e^{2z}\cosh 8z$; **238.1** $\int_{-i}^{i} e^{2z} sh2z dz$:

239. $\int_{-\pi i}^{\pi i}\frac{1}{z^2}e^{\frac{2i}{z}}\cos\frac{2}{z}dz$,եթե նշված կետերը միացնող կորը չի անցնում կոմպլեքս հարթության զրոյական կետով:

240. $\int zIm(z^2)dz$,որտեղ $\gamma=\{z\in C: |z|=1, -\pi\le\arg(z)\le\pi\}$.

241. $\int e^{z\bar{\bar{z}}}Re(z)dz$,որտեղ
$\gamma=\{z\in C:$ *ուղիղզծովմիացնումէ* $z=0$ *և* $z=1+i$ *կետերը*$\}$:

242. $\int \boldsymbol{zIm(z^3)dz}$,որտեղ $\gamma = \{z \in C: |z| = 1\}$:

243. $\int |\boldsymbol{z-1}|\boldsymbol{dz}$,որտեղ $\gamma = \{z \in C: |z| = 1\}$:

244. $\int \boldsymbol{z \sin z\, dz}$,որտեղ $\boldsymbol{\gamma} = \{$z ∈ C: ուղիղգծովմիացնումէ z = 0 և z = i կետերը$\}$:

245. $\int \frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{z-1}}$, որտեղ $\gamma = \{z \in C: |z-1| = 2\}$:

246. Դիցուք $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t\,, 0 \le t \le 2\pi, a, b \in R$: Հաշվել $\int |\gamma(t)|^2 d\gamma(t)$:

247.Դիցուք $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ կոմպլեքս փոփոխականի բազմանդամ է և $c \in C, r \in R, > 0$: Ցույց տալ, որ $\int\limits_{|z-c|=r} \overline{P(z)} dz = 2\pi i P'(c)$:

248. Դիցուք $\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$ և $g: \gamma \to C$անընդհատ ֆունկցիա է: Ցույց տալ, որ $\overline{\int\limits_{\gamma} g(z)\,dz} = -\int\limits_{\gamma} g(z) z^{-2} dz$:

Օգտվելով 248 առաջադրանքից և Կոշիի ինտեգրալային բանաձևից հաշվել հետևյալ ինտեգրալները (նայել նաև 267 և 268 առաջադրանքները):

248.1 $\overline{\int\limits_{|z|=1} e^z dz}$: **248.2** $\overline{\int\limits_{|z|=1} ze^z dz}$:

248.3 $\overline{\int\limits_{|z|=1} \cos z dz}$

248.4 $\overline{\int\limits_{|z|=1} z\cos z dz}$:

248.5 $\overline{\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz}$:

248.6 $\overline{\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz}$:

248.7* $\int\limits_{|z|=1} e^{\bar{z}} dz$:

248.8* $\int\limits_{|z|=1} z e^{\bar{z}} dz$:

248.9* $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos \bar{z}}{z} dz$:

249. Ապացուցել, որ, $\int_0^\infty e^{-(1+ia)^2t^2}dt = \frac{1}{2}\frac{1-ia}{1+a^2}\sqrt{\pi}$ որտեղ, $a \in R, |a| \leq 1$:

250. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից հաշվել Ֆրենելի ինտեգրալները. $\int_0^\infty \cos x^2 dx$; $\int_0^\infty \sin x^2 dx$:

251. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից հաշվել. $\int_0^\infty e^{-(at)^2}\cos(2abt)dt, a, b > 0$ ինտեգրալը:

252. Հաշվել Դիրիխլեի ինտեգրալը. $\int_0^\infty \frac{\sin x dx}{x}$:

253. Դիցուք $p, q \in R, p \geq 0, f = \sqrt{p^2+q^2}$: Ցույց տալ, որ

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}\frac{\sin qt}{\sqrt{t}}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{f}\sqrt{\frac{f-p}{2}}\ ; \qquad \int_0^{\infty} e^{-pt}\frac{\cos qt}{\sqrt{t}}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{f}\sqrt{\frac{f+p}{2}}\ ;$$

254. Ապացուցել, որ $\int_0^{\infty}\frac{\sin(ax^2)dx}{x} = \frac{\pi}{4}$;

Ցուցում. Ինտեգրել $f(z) = \frac{e^{iaz^2}}{z}$ անալիտիկ ֆունկցիան նկարում պատկերված միակապ տիրույթի եզրագծով :

255. Ապացուցել հավասարությունները․

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}\cos x dx = \Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}; \int_0^{\infty} x^{p-1} cos\, x dx = \Gamma(p)\sin\frac{\pi p}{2};$$

256.* Օգտվելով Կոշիի ինտեգրալային բանաձևից ապացուցել հետևյալ հավասարությունները․

Ա. $\int_0^{\infty}\cos x^2 dx = \int_0^{\infty}\sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$

Բ. $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

Օգտվելով Կոշիի ինտեգրալային բանաձևից հաշվել տրված ինտեգրալները տրված կոնտուրով

257. $\int\limits_{\gamma} \frac{\cos z dz}{z^2+4z+3}, \gamma = \{z \in C : |z| = 2\}$:

258. $\int\limits_{\gamma} \frac{shz dz}{z^2-4z+3}, \gamma = \{z \in C : |z| = 4\}$:

259. $\int\limits_{\gamma} \frac{\sin\frac{\pi z}{2} dz}{z^2+2z-3}, \gamma = \{z \in C : |z-1| = 2\}$:

260. $\int\limits_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2+2z}, \gamma = \{z \in C : |z-\pi| = 2\pi\}$:

261. $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}, \gamma = \{z \in C : |z+i| = 1\}$:

262. $\int\limits_{\gamma} \frac{\sin \pi z dz}{\left(z^2-1\right)^2}, \gamma = \{z \in C : |z-i| = 1\}$:

263. $\int\limits_{\gamma} \frac{\cos z dz}{\left(z^2+\pi\right)^2}, \gamma = \{z \in C : |z-i\pi| = \pi\}$:

264. $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{\left(z^2-\frac{\pi^2}{2}\right)^2}, \gamma = \left\{z \in C : \left|z-\frac{\pi}{2}\right| = 1\right\}$:

265. $\int\limits_{\gamma} \frac{\left(z^2+1\right)dz}{z^3+1}, \gamma=\left\{z\in C:|z|=1/2\right\}:$

266. $\int\limits_{\gamma} \frac{e^z dz}{\left(z^2+2z\right)^2}, \gamma=\left\{z\in C:|z|=3\right\}:$

267.
$\int\limits_{\gamma} \sin\bar{z}dz, \gamma=\left\{z\in C:|z|=1\right\}$ ▯ :

268. $\int\limits_{\gamma} z\sin\bar{z}dz, \gamma=\left\{z\in C:|z|=2\right\}:$

269. $\int\limits_{\gamma} \frac{z^3 dz}{(z+2)(z-1)^3}, \gamma=\left\{z\in C:|z-i|=4\right\}:$

270. $\int\limits_{\gamma} \frac{e^{-z} dz}{z(z-1)^3}, \gamma=\left\{z\in C:|z-1|=1\right\}:$

271. $\int\limits_{\gamma} \frac{\ln(1+z)dz}{\left(z^2-1\right)^2}, \gamma=\left\{z\in C:|z-1|=1\right\}:$

272. $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}, \gamma=\left\{z\in C:|z|=r;|a|<r<|b|\right\}:$

273. $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}, \gamma=\left\{z\in C:|z|=r;|a|<|b|<r\right\}:$

274. $\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}, \gamma=\{z\in C:|z|=r;|a|<|b|<r\}$:

Տրված ֆունկցիաները վերլուծել Թեյլորի շարքի տրված կետի շրջակայքում:

275. $f(z)=\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\sin z, z_0=\frac{\pi}{4}$:**276.** $f(z)=(z-\pi/8)(\cos z)^2, z_0=\pi/8$:

277. $f(z)=\sin(2z+1), z_0=-1$:**278.** $f(z)=(\sin z)^4+(\cos z)^4, z_0=0$:

279. $f(z)=\int_0^z e^{z^2}dz, z_0=0$:**280.** $f(z)=\frac{\sin z}{z}, z_0=0$:

281. $f(z)=\ln(z^2-3z+2), z_0=0$: **282.** $f(z)=e^{\sin z}, z_0=0$:

283. $f(z)=\frac{2z+1}{z^2-5z+4}, z_0=0$: **284.** $f(z)=\frac{z}{z^2-z-6}, z_0=0$:

285. $f(z)=\frac{z+1}{z^2+z-2}, z_0=0$:**286.** $f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}, z_0=1$:

287. $f(z)=\frac{1}{z(z^2-9)}, z_0=0$: **288.** $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}, z_0=0$:

289. $f(z)=\frac{1}{(1-z^2)^3}, z_0=0$:**290.** $f(z)=\frac{1}{z(z-3)^2}, z_0=0$:

Գտնել $z_0=0$ կետի շրջակայքում հետևյալ ֆունկցիաների վերլուծության առաջին 4 անդամները:

291. $f(z)=e^{z\sin z}$:**292.** $f(z)=e^{z^2}\sin z$:

293.$\boldsymbol{f(z) = (\ln(1-z))^2}$**:294.**$\boldsymbol{f(z) = e^{z\ln(1+z)}}$:

295.$\boldsymbol{f(z) = \frac{\rho e^{i\alpha}+(z-z_0)}{\rho e^{i\alpha}-(z-z_0)}}$ ֆունկցիան, Շվարցի կորիզ,վերլուծել Թեյլորի շարքի

$(z - z_0)$ –իաստիճանների տեսքով, առանձնացնելով նրա իրական և կեղծ մասերը:

296.Հարմոնիկ ֆունկցիան վերլուծել եռանկյունաչափական շարքի և գործակիցները հաշվելու համար ստանալ համապատասխանբանաձևեր:

297.Օգտվելով Շվարցի կորիզից $|z - z_0| < \rho$ շրջանում ստանալ ինտեգրալ ներկայացումներ հոլոմորֆ և հարմոնիկ ֆունկցիաների համար:

298.Գտնել այն բոլոր անալիտիկ ֆունկցիաները, որոնց համար $f''(z) + f(z) = 0$:

299.Դիցուք $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիա է զրո կենտրոնով r և շառավղով շրջանում, ընդ որում $r > 1$:Հաշվել

$\int_\gamma \left(2 \pm \left(w + w^{-1}\right)\right)\frac{f(w)}{w}dw$ ինտեգրալը, որտեղ՝

$\gamma = \{z \in C : |z| = r\}$ և ցույց տալ հետևյալ

հավասարությունները.

I-$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\left(\cos\frac{1}{2}t\right)^2 dt = f(0) + \frac{1}{2}f'(0)$,

II- $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\left(\sin\frac{1}{2}t\right)^2 dt = f(0) - \frac{1}{2}f'(0)$ ։

300. Դիցուք $g(w,z) \in C(\gamma x\overline{D}), \gamma \in C, \frac{\partial g}{\partial z} \in C(\gamma x\overline{D})$ ։

Ապացուցել, որ $h(z) = \int\limits_{\gamma} g(w,z)dw$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է

D –ում և $h'(z) = \int\limits_{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} g(w,z)dw$ ։

10. ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԶՐՈՆԵՐԸ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ԼՈՐԱՆԻ ՇԱՐՔԻ

10.1. Սահմանում. $\boldsymbol{f(z)}$ֆունկցիայի որոշման տիրույթի z_0կետը կոչվում է $f(z)$ֆունկցիայի զրո, եթե $f(z_0)=0$:

10.2 Սահմանում. $\boldsymbol{f(z)}$ անալիտիկ ֆունկցիայիz_0 զրոն անվանում են k պատիկ զրո, կամ $k-րդ$կարգի զրո, եթե $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(k-1)}(z_0)=0$ իսկ $f^{(k)}(z_0)\neq 0$:

10.3 Թեորեմ Որպեսզի $z_0\neq\infty$կետը լինի kպատիկ զրո $f(z)$անալիտիկ ֆունկցիայի համար անհրաժեշտ է և բավարար որպեսզի այն ներկայացվի հետևյալ տեսքով.
$f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)$, որտեղ $\varphi(z_0)\neq 0$:

10.4 Սահմանում. $\boldsymbol{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n=\cdots+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots}$տեսքի շարքերին անվանում են Լորանի շարք:

$\boldsymbol{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n}$կոչվում է Լորանի շարքի գլխավոր մաս, իսկ $\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}$կոչվում է Լորանի շարքի կանոնական մաս:

Լորանի շարքը զուգամետ է$r<|z-z_0|<R$ օղակում, որտեղ $r-$ը և R- ը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով.

$r = \overline{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}} = \overline{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{-n+1}}{c_{-n}}\right|}$; $R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}} = \overline{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|}$:

10.5 Թեորեմ. $r < |z - z_0| < R$ օղակում որոշված միարժեք անալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիան կարելի է միարժեք ձևով վերլուծել Լորանի շարքի $(z - z_0)-$ի աստիճանների տեսքով. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$, որտեղ

$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, n = 0, \pm 1, \pm 2\cdots,$ իսկ $\gamma-$ն փակ ժորդանյան կոր է, որն ամբողջությամբ ընկած է նշված օղակում:

10.6 Օրինակ. Որոշել $f(z) = \frac{z^8}{1-\cos z}$ ֆունկցիայի զրոները:

Լուծում. Քանի որ $f(z) = \frac{z^8}{1-\cos z} = \frac{z^8}{\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4!}+\cdots} = z^6\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}+\cdots} = z^6\varphi(z)$,որտեղ $\varphi(0) \neq 0$, ապա

$z = 0$ վեցերորդ կարգի զրո է տրված ֆունկցիայի համար:

10.7.Օրինակ. $z \in C$կոմպլեքս հարթության մեջ $f(z) = \frac{5z-12}{z^2-5z+6}$ ֆունկցիան վերլուծել Լորանի շարքի $z-$ի աստիճանների տեսքով:

Լուծում. Քանի որ $f(z) = \frac{3}{z-3} + \frac{2}{z-2}$, ապա ամբողջ կոմպլեքս հարթությունը հետևյալ գծերով բաժանենք որեք տիրույթների. 1). $|z| < 2$; 2).$2 < |z| < 3$; 3). $|z| > 3$:

$$1).\, |z| < 2, \Rightarrow f(z) = -\frac{1}{1-\frac{z}{3}} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}\right)z^n:$$

$$2).\, 2 < |z| < 3, \Rightarrow f(z) = -\frac{1}{1-\frac{z}{3}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}:$$

$$3).\, |z| > 3, \Rightarrow f(z) = \frac{3}{z}\frac{1}{1-3/z} + \frac{2}{z}\frac{1}{1-2/z}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(3^{n+1}+2^{n+1})z^{-n-1}:$$

301. Դիցուք $f(z)$ամբողջ ֆունկցիա է և$c_1, c_2, \cdots, c_n$նրա զրոներն են համապատասխան $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$պատիկությամբ: Ապացուցել, որ $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z-c_j}$այն և միայն այն ժամանակ երբ $f(z)$ –ը բազմանդամ է:

302. Դիցուք $f(z)$ –ը և $g(z)$-ը հոլոմորֆ ֆունկցիաներ են $G \subset C$տիրույթում, որոնց համար $z = c \in G$ զրո է: Ցույց տալ, որ

Ա.$f(z)g(z)$-ի զրոյի կարգը $c \in G$-ում հավասար է $f(z)$-ի և $g(z)$-ի զրոների կարգերի գումարին$c \in G. O_c(fg) = O_c(f) + O_c(g)$:

Բ.$O_c(f+g) \geq \min\ (O_c(f), O_c(g))$,ընդ որում հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն ժամանակ, երբ $O_c(f) \neq O_c(g)$:

$z = 0 -$ *ն* որ կարգի զրո է տրված ֆունկցիաների համր:

303. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \int_0^z \sin zdz$:**304.** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \int_0^z z\ln(1+z^2)dz$:

305. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = tg(z) - \sin(z)$: **306.**$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = e^{tgz} - e^{\sin z}$:

307. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = (\cosh z)^2 - 1$:**308.** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \int_0^z \frac{dz}{z+1}$:

Որոշել հետևյալ ֆունկցիաների զրոներն ու դրանց կարգերը

309. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = 1 - \cos z$:**310.**$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = (1+z)^{\alpha} - 1 - \alpha z$:

311. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = 3\ln(1+z) - 3z + \frac{3}{2}z^2$:**312.** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = e^{\sin z^4} - 1$:

313. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = 2\cos z + z^2 - 2$:**314.**$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = z^2\left(e^{z^2} - 1\right)$:

315. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \frac{z^6}{z - \sinh z}$:**316.** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \frac{z^7}{1 - \cosh z}$:

317. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \frac{z^8}{z - \sin z}$:**318.**$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = 3arctgz - 3z + z^3$:

319. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = z^5 - 5z^4 - 6z^3$: **319.1**
$f(z) = z^6 - 4z^5 + 5z^4 - 4z^3$:

Տրված ֆունկցիաները վերլուծել Լորանի շարքի z_0 կետի շրջակայքում:

320.$f(z) = z^2\cos\frac{1}{z}, z_0 = 0$;**321.**$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = z^2e^{1/z}, z_0 = 0$:

322.$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \frac{\sin z}{z - \pi/4}, z_0 = \frac{\pi}{4}$:**323.**$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{z}\sin^2\frac{1}{z}, z_0 = 0$:

324. $f(z)=(z-1)^2\sin\frac{z+1}{z}, z_0=0$: 325. $f(z)=z^2e^{\frac{1}{1-z}}, z_0=1$:

326. $f(z)=\frac{1}{z+1}\cos^2\frac{1}{z+1}, z_0=-1$: 327. $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}, z_0=0$:

328. $f(z)=\frac{z}{z^2-5z-6}, z_0=0$: 329. $f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}, z_0=0$:

330. $f(z)=\frac{1}{z(z-3)}, z_0=1$: 331. $f(z)=\frac{z}{z^2-3z+2}, z_0=-1$:

332. $f(z)=\frac{1}{z(z-2)^2}, z_0=0$: 333. $f(z)=\frac{z^3}{(z-2)(z+1)}, z_0=0$:

333.1 $f(z)=sh\frac{1}{z}, z_0=0$: 333.2 $f(z)=ch(z-1), z_0=0$:

Հետևյալ ֆունկցիաները վերլուծել Լորանի շարքի $z=\infty$ կետի շրջակայքում:

334. $f(z)=z^2e^{1/z}$: 335. $f(z)=z\sin\frac{1}{z^2}$:

336. $f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$: 337. $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$:

338. $f(z)=\frac{1}{z(1+z^2)^2}$: 339. $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$:

340. $f(z)=\ln\frac{z-a}{z-b}$: 340.1 $f(z)=ch2z$:

341. Դիցուք $n\in N$ բնական թվի համար գոյություն ունեն $M,R>0$ թվեր, այնպիսիք, որ $|f(z)|\le M|z|^n$ երբ $|z|>R$: Ապացուցել, որ $f(z)$ բազմանդամ է որի կարգը չի գերազանցում n- ը:

11․ ՄԵԿՈՒՍԱՑՎԱԾ ԵԶԱԿԻ ԿԵՏԵՐ․ ԴՐԱՆՑ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ․ ՄՆԱՑՔ, ՄՆԱՑՔՆԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

11.1-Սահմանում․ $\boldsymbol{z_0}$կետը կոչվում է $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիայի մեկուսացված եզակի կետ, եթե $f(z)$-ը որոշված է $|z - z_0| < R$ շրջանում բացառությամբ z_0 կետից:

Այսինքն եթե $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան որոշված է $0 < |z - z_0| < R$ օղակում, ապա z_0 կետը կոչվում է մեկուսացված եզակի կետ $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիայի համար:

Կախված կետի շրջակայքում ֆունկցիայի վարքից տարբերվում են երեք տիպի եզակիություններ

1․z_0եզակի կետն անվանում են **վերացնելի եզակի կետ**$f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիայի համար, եթե գոյություն ունի A վերջավոր կոմպլեքս թիվ, այնպիսին որ

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A:$$

2․z_0կետը կոչվում է **բևեռ** $\boldsymbol{f(z)}$անալիտիկ ֆունկցիայի համար, եթե $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$:

3․z_0կետը կոչվում է **էապես եզակի կետ**$\boldsymbol{f(z)}$անալիտիկ ֆունկցիայի համար, եթե գոյություն չունի $\lim_{z \to z_0} f(z)$սահմանը:

11.2-Սահմանում. $\boldsymbol{z_0} \neq \infty$կետը կոչվում է $n-$ րդ կարգի բևեռ $f(z)$ֆունկցիայի համար, եթե այն n-րդ կարգի զրո է $\varphi(z) = 1/f(z)$ֆունկցիայի համար:

$n = 1$ դեպքում բևեռն անվանում են միապատիկ, պարզ կամ սովորական բևեռ:

11.3 Թեորեմ. Որպեսզի մեկուսացված եզակի կետը լինի վերացնելի եզակի կետ $f(z)$ֆունկցիայի համար, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա այդ կետի այնպիսի շրջակայք, որտեղ $f(z)$-ը սահմանափակ է:

11.4 Թեորեմ. Եթե z_0-ն վերացնելի եզակի կետ է $f(z)$ֆունկցիայի համար, ապա $f(z)$ֆունկցիայի Լորանի շարքը պետք է պարունակի միայն կանոնական մաս. ֆունկցիայի Լորանի շարքի գլխավոր մասը պետք է հավասար լինի զրոյի:

11.5. Թեորեմ. Որպեսզի $z_0 \neq \infty$կետը լինի լինի n-րդ կարգի բևեռ$f(z)$ ֆունկցիայի համար, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f(z)$-ը ներկայացվի տեսքով. $f(z) = (z - z_0)^{-n}\varphi(z)$, որտեղ $\varphi(z_0) \neq 0$:

11.6. Թեորեմ. $\boldsymbol{z_0}$վերջավոր կետը կլինի n-րդ կարգի բևեռ $f(z)$ֆունկցիայի համար այն և միայն այն դեպքում, եթե $f(z)$-ի Լորանի շարքը ունի հետևյալ տեսքը.

$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$,որտեղ $c_{-n} \neq 0$:

Այսինքն ֆունկցիայի Լորանի շարքի գլխավոր մասը պետք է պարունակի միայն վերջավոր թվով անդամներ:

11.7. Որպեսզի$z_0 \neq \infty$ կետը լինի էապես եզակի կետ $f(z)$ֆունկցիայի համար, անհրաժեշտ է և բավարար, որz_0 կետի շրջակայքում Լորանի շարքի վերլուծության գլխավոր մասը պարունակի անվերջ թվով անդամներ:
11.8.(Սոխոցկի) Եթե z_0 կետը էապաես եզակի կետ է $f(z)$ֆունկցիայի համար, ապա ինչպիսին էլ լինի Aկոմպլեքս թիվը (վերջավոր կամ անվերջ) գոյություն ունի z_0-ին ձգտող այնպիսի $\{z_n\}_{n\in N}$հաջորդականություն, որ $\{f(z_n)\}_{n\in N}$-ը ձգտեն A-ին. այսինքն

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) = A:$$

Եթե $f(z)$-ը անալիտիկ ֆունկցիա է $|z| > R > 0$տիրույթում, ապա $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ շարքին անվանում են $f(z)$-ի Լորանի շարք$z = \infty$ կետի շրջակայքում, իսկ $\sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n$,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$շարքերը՝ համապատասխանաբար գլխավոր և կանոնական մասեր:

11.9$\boldsymbol{z_0} = \infty$կետը $f(z)$ֆունկցիայի համար կոչվում է վերացնելի եզակի կետ / բևեռ կամ էապես եզակի կետ/, եթե$z_0 = 0$ կետը վերացնելի եզակի կետ է /բևեռ է կամ էապես եզակի կետ/ $f^*(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ ֆունկցիայի համար:

Դիցուք z_0-ն մեկուսացված եզակի կետ է $f(z)$անալիտիկ ֆունկցիայի համար:

11.10. Սահմանում. $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)\,dz$ ինտեգրալինանվանում

են$f(z)$ անլիտիկ ֆունկցիայի **մնացքը**z_0կետում և նշանակում

են$Res_{z=z_0}f(z)$-ով՝ $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)\,dz$ ։

Այստեղ γ-ն $f(z)$ −ի անալիտիկության տիրույթում ընկած կամայական փակ, ողորկ ժորդանյան կոր է, որով սահմանափակված տիրույթի ներսը և որի վրա նաև $f(z)$-ը z_0-ից բացի այլ եզակի կետեր չունի:

11.11. Թեորեմ. $\boldsymbol{f(z)}$անալիտիկ ֆունկցիայի մնացքը z_0 կետում հավասար է$0<|z-z_0|<\rho$ օղակում -$f(z)$ի Լորանի շարքի վերլուծության $(z-z_0)^{-1}$-ի գործակցին. a_{-1}՝

$$a_{-1}=\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)\,dz:$$

Տրվյալ կետում ֆունկցիայի մնացքը հաշվելու համր օգտվում են հետևյալ բանձևերից.

11.12. Կանոն-I. Եթե $z=z_0$ կետը վերացնելի եզակի կետ է $f(z)$ ֆունկցիայի համար, ապա $\boldsymbol{Res_{z=z_0}f(z)=0}$:

11.13. Կանոն-II. Եթե $\boldsymbol{z=z_0}$կետը n-րդ կարգի բևեռ է $f(z)$ ֆունկցիայի համար, ապա

$$Res_{z=z_0}f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)], n = 0,1,2,\cdots (0! = 1):$$

11.14. Կանոն-III. Եթե $f(z) = \frac{\omega(z)}{\varphi(z)}, \omega(z_0) \neq 0, \varphi(z_0) = 0$, իսկ $\varphi(z_0) \neq 0$,այսինքն $f(z)$-ը z_0-ում ունի պարզ բևեռ, ապա $Res_{z=z_0}f(z) = \frac{\omega(z_0)}{\varphi'(z_0)}$:

11.15.Թեորեմ.(Մնացքների հիմնական թեորեմը). Դիցուք $f(z)$ֆունկցիան անալիտիկ է D միակապ տիրույթում բացառությամբ $z_1, z_2, \ldots, z_n$ կետերից և անընդհատ է $\overline{D}$ −ում (այսինքն անընդհատ ընդհուպ մինչև ∂D *եզրագիծը*): Այդ դեպքում $\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=z_j} f(z)$:

Դիցուք $f(z)$-ը անալիտիկ է $|z| \geq R$ տիրույթում:

11.16.Սահմանում.$f(z)$ ֆունկցիայի մնացք $z = \infty$ կետում անվանում են հետևյալ թիվը՝

$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho>R} f(z)dz$, որտեղ ինտեգրումը կատարվում է բացասական ուղղությամբ:

11.17.Հատկություն.$f(z)$ ֆունկցիայի մնացքը $z = \infty$կետում հավասար է այդ կետում ֆունկցիայի Լորանի շարքի վերլուծության z^{-1}-ի գործակցին վերցրած հակառակ նշանով՝$-c_{-1}, Res_{z=\infty}f(z) = -c_{-1}$:

11.18.Հետևանք. Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է ընդլայնված կոմպլեքս հարթությունում բացառությամբ $z_1, z_2, \cdots, z_n, z=\infty$ կետերից: Այդ դեպքում $f(z)$ֆունկցիայի բոլոր մնացքների գումարը (ներառյալ $z=\infty$ կետը) հավասար է զրոյի.

$Res_{z=\infty} f(z) + \sum_{j=1}^{n} Res_{z=z_j} f(z), \Rightarrow Res_{z=\infty} f(z) = -\sum_{j=1}^{n} Res_{z=z_j} f(z)$:

11.19.Օրինակ. Դասակարգել $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+\pi^2)^2}$ ֆունկցիայի բոլոր եզակի կետերը և հաշվել մնացքները այդ կետերում ներառյալ նաև$z=\infty$ կետը:

Քանի որ $\boldsymbol{f(z)} = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+\pi^2)^2} = \boldsymbol{f(z)} = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-i\pi)^2(z+i\pi)^2}$, ապա $z = \pm i\pi$ կետերը երկրորդ կարգի բևեռներ են, $z=0$-ն էապես եզակի կետ է, իսկ $z=\infty$ կետը վերացնելի եզակի կետ է ($\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$):

$$Res_{z=i\pi} f(z) = \lim_{z\to i\pi} \frac{d}{dz}\left[\frac{\mathbf{e}^{\frac{1}{z}}}{(\mathbf{z}-\mathbf{i}\pi)^2(\mathbf{z}+\mathbf{i}\boldsymbol{\pi})^2}(\mathbf{z}-\mathbf{i}\boldsymbol{\pi})^2\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-e^{1/z}\left(\frac{z+i\pi}{z^2}+2\right)}{(z+i\pi)^3} = \frac{-e^{-i/\pi}(1+i\pi)}{4\pi^4}:$$

$$\boldsymbol{Res_{z=-i\pi}f(z)} = \lim_{\mathbf{z\to i\pi}}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dz}}\left[\frac{\mathbf{e^{\frac{1}{z}}}}{\mathbf{(z-i\pi)^2(z+i\pi)^2}}\mathbf{(z+i\pi)^2}\right]$$

$$= \lim_{\mathbf{n\to\infty}}\frac{-\boldsymbol{e^{1/z}}\left(\frac{\boldsymbol{z-i\pi}}{\boldsymbol{z^2}}+\mathbf{2}\right)}{\boldsymbol{(z-i\pi)^3}} = \frac{\boldsymbol{e^{i/\pi}(-1+i\pi)}}{\boldsymbol{4\pi^4}}:$$

$$Res_{z=0}f(z) = -[Res_{z=i\pi}f(z) + Res_{z=-i\pi}f(z)] = \frac{1-i\pi}{2\pi^4}\sinh\frac{i}{\pi}:$$

11.20. Օրինակ. Օգտվելով մնացքների տեսության հիմնական թեորեմից հաշվել $\int\limits_{\gamma}\frac{e^z dz}{z^2-5z+6}$ ինտեգրալը, որտեղ $\gamma = \{z \in C: |z| = 4\}$:

$$\int\limits_{\gamma}\frac{e^z dz}{z^2-5z+6} = \int\limits_{\gamma}\frac{e^z dz}{(z-3)(z-2)} = 2\pi i e^2(e-1)$$ (քանի որ $z = 2, z = 3$ կետերը գտնվում են կորով սահմանափակված տիրույթի ներսը):

342. Բերել այնպիսի ֆունկցիաների օրինակներ, որոնց համար.

Ա. $z = z_0, / z = \infty$ կետերը վերացնելի եզակի կետեր են:
Բ. $z = z_0 / z = \infty$ կետերը պարզ բևեռներ են:
Գ. $z = z_0 / z = \infty$ կետերը րդ կարգի բևեռներ են:
Դ. $z = z_0 / z = \infty$ կետերը էապես եզակի կետեր են:

343. Դիցուք $z = z_0$-ն $f(z)$ և $g(z)$ ֆունկցիաների համար համապատասխանաբար k-րդ և m-րդ կարգի բևեռ է: Ինչպիսին են հետևյալ ֆունկցիաների վարքը այդ կետում.

ա. $f(z) \pm g(z)$; բ. $f(z)g(z)$; գ. $f(z)/g(z)$:

Ինչ կարելի է պնդել դիտարկվող ֆունկցիաների մասին, եթե տրվածները համապատասխանաբար n-րդ և l-րդ կարգի բազմանդամներ են:

344.Գտնել $Res_{z=z_0}\frac{f'(z)}{f(z)}$, եթե

i. $z = z_0$ –ն n-րդ կարգի զրո է$f(z)$ֆունկցիայի համար:

ii. $\boldsymbol{z = z_0}$ –ն n-րդ կարգի բևեռ է $f(z)$ ֆունկցիայի համար:

345.Դիցուք $Res_{z=z_0}f(z) = a$: Հաշվել.

ա. $Res_{z=z_0}f^2(z)$; բ. $Res_{z=z_0}f^n(z)$:

Դիտարկել նաև այն դեպքը, երբ $z = \infty$:

Դասակարգել տրված ֆունկցիաների եզակի կետերը և հաշվել մնացքները այդ կետերում ներառյալ $z = \infty$ կետը:

346. $\boldsymbol{f(z) = \frac{e^z}{(z^2-\pi^2)^2}}$:**347.** $\boldsymbol{f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+\pi^2)^2}}$:

348. $\boldsymbol{f(z) = \frac{\cosh z}{(z^2+\pi^2)^2}}$: **349.** $\boldsymbol{f(z) = \frac{\cosh 1/z}{1-z^2}}$:

350. $f(z)=\frac{\sin 1/z}{1-z^2}$: **351.** $f(z)=\frac{\sinh z}{(z^2+\pi^2)^3}$:

352. $f(z)=\frac{z^2}{1-\cos z}$: **353.** $f(z)=\frac{z^2+4}{(z^2+3z+2)^2}$:

354. $f(z)=z^3e^{-1/z}$: **355.** $f(z)=z^3\cos\frac{1}{z^2}$:

356. $f(z)=z^5\sin\frac{1}{z^2}$: **357.** $f(z)=\frac{e^{1/z}}{1-z}$:

358. $f(z)=\frac{z^3}{\sin z-z}$: **359.** $f(z)=\frac{z^{n-1}}{\sin z}, n\geq 2$:

360. $f(z)=\frac{\cos\frac{1}{z}}{z(z+1)}$: **361.** $f(z)=\frac{\cosh 1/z}{z(1+z^2)}$:

362. $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$: **363.** $f(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$:

364. $f(z)=\frac{z}{1+z^4}$: **365.** $f(z)=\frac{e^z}{z^3(1-z)}$:

366. $f(z)=\frac{\sin z}{(1+z^2)^2}$: **366.1** $f(z)=\frac{shz}{\left(z^2+1\right)^3}$:

367. Հաշվել $\int\limits_{\gamma}\frac{z\sin\frac{\pi}{z}dz}{z-1}$ ինտեգրալը, եթե.

ա) γ կորով սահմանափակված տիրույթը պարունակում է միայն $z=0$ կետը.

բ) γ կորով սահմանափակված տիրույթը պարունակում է միայն $z = 1$ կետը.

գ) γ կորով սահմանափակված տիրույթը պարունակում է $z = 0, z = 1$կետերը:

368. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

1) $\oint_{\gamma} z\sin\frac{z+1}{z-1}dz$; **2)**

$$\oint_{|z|=R>n}\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right)\sum_{k=0}^{n} e^{\frac{1}{z-k}}dz:$$

3) $\oint_{\gamma} z^n e^{1/z}dz$: **4)** $\oint_{\gamma}\left(1+z+z^2\right)\left(e^{1/z} + e^{1/(1-z)} + e^{1/(2-z)}\right)dz$:

369. Առանձնացնելով բազմարժեք անալիտիկ ֆունկցիաների միարժեք ճյուղերը հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

1) $\oint_{|z-i|=\rho<1}\frac{dz}{Ln(z)}$;**2)** $\oint_{|z|=3}\frac{\sqrt{z}dz}{z-1}$;

3) $\oint_{|z|=3}\frac{zdz}{\sqrt{z^2+1}}$;**4)** $\oint_{|b|<|a|<|z|=R}\sqrt{(z-a)(z-b)}dz$:

Օգտվելով մնացքների տեսության հիմնական թեորեմից հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

370. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2(z-1)}$ **371.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{ze^{1/z}dz}{z+3}$:

372. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin \pi z dz}{z^3 - z^2}$:**373.** $\oint\limits_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z} dz$:

374. $\oint\limits_{|z|=1} \sin \bar{z} dz$:**375.** $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^4+2z^2+1} dz$:

376. $\oint\limits_{x^2/9+y^2/4=1} \frac{\cos z}{z^2-4} dz$:**377.** $\oint\limits_{|z|=1} e^{\bar{z}} dz$:

378. $\oint\limits_{|z|=1} z^3 \cos\frac{1}{z} dz$:**379.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2(z-i)} dz$:

380. $\oint\limits_{x^2+y^2=2x} \frac{e^z}{z^3-1} dz$:**381.** $\oint\limits_{x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} dz$:

382. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{chz}{(z^2+\pi^2)^2} dz$:**383.** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^4+1} dz$:

384. $\oint\limits_{|z|=3} z^3 \sin\frac{1}{z-2} dz$:

384.1 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{shzdz}{z^6+1}$:

12. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ՄՆԱՑՔՆԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ: ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ՄՆԱՑՔ, ՌՈՒՇԵԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

$\int_{-\infty}^{-\infty} \boldsymbol{f(x)dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{P_n(x)}}{\boldsymbol{Q_m(x)}} \boldsymbol{dx}$ **տեսքի ինտեգրալների հաշվումը.**

12.1. Թեորեմ. Դիցուք տրված է $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ֆունկցիան, որտեղ $P_n(x)$ –ը և $Q_m(x)$-ը համապատասխանաբար n –րդ և m-րդ կարգի բազմանդամներ են, ընդ որում $Q_m(x)$բազմանդամը զրո չի դառնում իրական առանցքի վրա և $m \geq n+2$: Այդ դեպքում $\int_{-\infty}^{-\infty} \boldsymbol{f(x)dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{P_n(x)}}{\boldsymbol{Q_m(x)}} \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{2\pi i\sigma}$, որտեղ σ-ն $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ֆունկցիայի այն բոլոր մնացքների գումարն է, որոնք գտնվում են վերին կիսահարթությունում:

$\int_{-\infty}^{-\infty} \boldsymbol{R(x)\cos\lambda x\,dx}, \int_{-\infty}^{-\infty} \boldsymbol{R(x)\sin\lambda x\,dx}$ **տեսքի ինտեգրալների հաշվումը,** որտեղ$R(x)$ –ը կանոնավոր ռացիոնալ ֆունկցիա է, որը զրո չի դառնում իրական առանցքի վրա, $\lambda > 0$իրական թիվ է:

Սկզբից օգտվում ենք Ժորդանի լեմմայից.

12.2. Լեմմա (Ժորդան) Դիցուք $R(z)$կանոնավոր ռացիոնալ ֆունկցիան անալիտիկ է վերին կիսահարթության մեջ՝ $0 < \arg(z) < \pi$, բացառությամբ $z_1, z_2, \cdots, z_n$ կետերից և $\lim_{|z|\to\infty} R(z) = 0$:Այդ դեպքում $\lim_{\rho\to\infty} \int_{C_\rho} R(z)e^{i\lambda z}dz = 0$, որտեղ

C_ρ-ը վերին կիսահարթությունում ընկած $O(0,0)$ կենտրոնով և ρ շառավղով կիսաշրջանն է, իսկ $\lambda > 0$:

12.3 Հետևանք. $\int_{-\infty}^{-\infty} \boldsymbol{e^{i\lambda x}R(x)dx = 2\pi i\sigma}$,որտեղ **λ**>0, $R(x)$-ը բավարարում է Ժորդանի լեմմայի պայմաններին, իսկ σ-ն $e^{i\lambda x}R(x)$ ֆունկցիայի վերին կիսահարթությունում ընկած բոլոր մնացքների գումարն է:

12.4. Դիտողություն. Եթե **λ**<0, ապա փոխարինելով C_ρկոնտուրը OX առանցքի նկատմամբ նրան համաչափ $C_{\rho-}$ կոնտուրով, կստացվի հետևյալ բանաձևը.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}R(x)dx = -2\pi i \sum_{Imz_{k<0}} Res_{z=z_k} e^{i\lambda x}R(x):$$

12.5. Դիտողություն. Եթե $R(x)$ ֆունկցիան իրական է x-երի և $\lambda > 0$ համար, ապա $\int_{-\infty}^{-\infty} \boldsymbol{e^{i\lambda x}R(x)dx} =$ $\boldsymbol{2\pi i\sigma}$հավասարության մեջ առանձնացնելով իրական և կեղծ մասերը կստանանք.

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \boldsymbol{R(x)\cos\lambda x\,dx} = -2\pi \mathrm{Im}\left[\sum_{Imz_k>0} Res_{z=z_k}\left(e^{i\lambda z}R(z)\right)\right]:$$

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \sin \lambda x \, \boldsymbol{dx}$$

$$= 2\pi \mathrm{Re} \left[\sum_{Imz_k>0} Res_{z=z_k} \left(e^{i\lambda z} R(z) \right) \right]:$$

12.6 Սահմանում. $(\ln \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}))' = \frac{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})}$ֆունկցիայի մնացքները կոչվում են $f(z)$ ֆունկցիայի լոգարիթմական մնացքներ:

12.7 Թեորեմ (***Ռուշեի***)Դիցուք $f(z)$ և $g(z) = f(z) + \varphi(z)$ ֆունկցիաները անալիտիկ են կոմպլեքս հարթության D տիրույթում և նրա եզրագծի՝ ∂D, վրա տեղի ունի $|f(z)| > |\varphi(z)|$ անհավասարությունը: Այդ դեպքում $f(z)$ և $g(z)$ ֆունկցիաները D տիրույթում ունեն միևնույն քանակով զրոներ (*յուրաքանչյուրզրոհաշվածիրպատիկությամբ*):

12.8 Օրինակ. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

Ա. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^8+1}}$,**Բ.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{\cos ax dx}}{\boldsymbol{x^2+b^2}}, \boldsymbol{a} > 0, b > 0$:

Լուծում. Ա. Համաձայն 12.1 թեորեմի $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^8+1}} = \boldsymbol{2}\pi i\sigma$,որտեղ σ −ն $f(z) = \frac{1}{z^8+1}$ ֆունկցիայի բոլոր մնացքների գումարն է, որոնք գտնվում են վերին կիսահարթությունում: Նկատենք, որ նշված ֆունկցիայի եզակի կետերը $z^8 + 1 = 0$ հավասարման արմատներն են, որոնք հանդիսանում են պարզ բևեռներ ֆունկցիայի համար և որոնցից միայն չորս եզակի

կետեր են գտնվում վերին կիսահարթությունում. $z_0 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$, $z_1 = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}$,

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8},\ \ z_3 = \cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}:$$

Համաձայն պարզ բևեռները հաշվելու 11.14 կանոնի.

$\sigma = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{z_0^7} + \frac{1}{z_1^7} + \frac{1}{z_2^7} + \frac{1}{z_3^7}\right] = \frac{1}{8}\left[\cos\frac{7\pi}{8} - i\sin\frac{7\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8} - i\sin\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} - i\sin\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right] = \frac{1}{32i\cos\frac{\pi}{8}}$: Հետևաբար որոնելի ինտեգրալը հավասար է. $\frac{\pi}{16\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\pi\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{16}$:

Լուծում Բ. Համաձայն 12.5 դիտողության պետք է գտնել $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$ ֆունկցիայի բոլոր մնացքների գումարը, որոնք գտնվում են վերին կիսահարթությունում: Այն միայն մեկն է՝ $z_0 = ib$ և $Res_{z=z_o}f(z) = \frac{-ie^{-ab}}{2b}$: Հետևապաես $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos axdx}{x^2+b^2} = \frac{\pi e^{-ab}}{b}$:

Հաշվել հետևյալ անիսկական ինտեգրալները.

385. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$: **386.** $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4+1}$:

387. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^4+1)}$: 388. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$:

389. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+16}$:390. $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$:

391. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$: 392. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$:

393. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}, n \in N$: 394. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$:

395. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^8+1}$: 396. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}, a, b > 0$:

397. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x dx}{x^4+1}$: 398. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2-2x+10}$:

399. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x dx}{x^2+2x+5}$: 400. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$:

401. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin \alpha x dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $a, b, \alpha > 0$:402. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x dx}{(x^2+a^2)^2}, a, \alpha > 0$:

403. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2) \cos 4x dx}{x^2-4x+5}$:404. $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^2+9}$:

405. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x/2 dx}{x^2+4}$:406. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x dx}{x^2+4x+20}$:

407. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos 4x dx}{x^2-2x+26}$:407.1 $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4+2x^2+1} dx$:

Հաջորդ առաջադրանքներում ընդունելով $|z| = 1$ և նշանակելով $z = e^{i\varphi}, \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi) d\varphi$ տեսքի ինտեգրալները, որտեղ $R(\cos\varphi, \sin\varphi)$ ռացիոնալֆունկցիա է $\cos\varphi - ի \sin\varphi - ի$ նկատմամբ, բերել

$$\int\limits_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{iz}$$ տեսքի և հաշվել.

408. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}, \mathbf{0}<r<1$:409. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}, \boldsymbol{a}>1$:

410. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+\cos\varphi)^2}, \boldsymbol{a}>1$:411.$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a-\cos\varphi}, \boldsymbol{a}>1$:

412. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\varphi d\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}, -\mathbf{1}<r<1$:413. $\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi d\varphi}{1-2r\sin\varphi+r^2}, \mathbf{0}<r<1$:

414.$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^4\varphi d\varphi}{1+\sin^2\varphi}$:414.1 $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{a^2+\sin^2\varphi}$:

414.2 $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\left(a^2+\cos^2\varphi\right)^2}$:

414.3 $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\left(a^2+\sin^2\varphi\right)^2}$:

Գտնել տրված բազմանդամների զրոների քանակը նշված տիրույթներում.

415. $P(z)=z^9-2z^6+z^2-8z-2, \{z\in C: |z|\le 1\}$:

416. $P(z)=2z^5-z^3+3z^2-z+8, \{z\in C: |z|\le 1\}$:

417. $P(z)=z^7-5z^4+z^2-2, \{z\in C: |z|\ge 1\}$:

418. $P(z)=z^4-5z+1, \{z\in C: 1\le |z|\le 2\}$:

419. $P(z)=z^5+2z^2+8z, \{z\in C: |z|\le 1\}$:

420. $\boldsymbol{P(z) = z^8 - 5z^5 + 2z^2 - 1,\ \{z \in C: |z| \leq 1\}}$:

421. $\boldsymbol{P(z) = z^3 - 5z + 1,\ \{z \in C: |z| \leq 1\}}$:

422. $\boldsymbol{P(z) = z^3 - 5z + 1,\ \{z \in C: 1 \leq\ |z| \leq 1\}}$:

423. $\boldsymbol{P(z) = z^3 - 5z + 1,\ \{z \in C: 2 \leq |z| \leq 3\}}$:

Գտնել տրված ֆունկցիաների լոգարիթմական մնացքները.

424. $\boldsymbol{f(z) = \frac{\sin z}{z+2}, |z| = 1}$կոնտուրի նկատմամբ:

425. $\boldsymbol{f(z) = (e^z - 2)^2, |z| = 8}$կոնտուրի նկատմամբ:

426. $\boldsymbol{f(z) = \tanh z\,, |z| = 5}$կոնտուրի նկատմամբ:

427. $\boldsymbol{f(z)} = \tan^2 z\,, \boldsymbol{|z| = 3}$կոնտուրի նկատմամբ:

A. ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

428. Դիցուք $C_+ \coloneqq \{z = x + iy \in C: Imz = y > 0\}$ վերին կիսահարթությունն է: Ցույց տալ. Ա.- $\{z \in C_+ \Leftrightarrow -1/z \in C_+\}$, Բ. – Դիցուք $z, w \in C$: Ցույց տալ, որ$|1 - z\overline{w}|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$

Ստացված հավասարությունից ելնելով ցույց տալ, որ եթե $|w| < 1$, ապա $|z| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right| < 1$, և $|z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right| = 1$:

429. Ցույց տալ հետևյալ անհավասարությունները.

Ա․- $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq |z| = \sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y|$

Բ. -$max\{|x|,|y|\} \leq |z| \leq \sqrt{2}max\{|x|,|y|\}$։

430. Դիցուք ($\boldsymbol{z}$)և($\boldsymbol{w}$)կոմպլեքս թվերի դաշտեր են։ Գտնել այն բոլոր

$w = \varphi(z)$արտապատկերումները, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին․

$$1.\, \varphi(z_1+z_2) = \varphi(z_1)+\varphi(z_2),$$

$$2.\, \varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1)\varphi(z_2), \qquad 3.\, \varphi(x) = x \quad \text{բոլոր} \quad x \in R$$

համար։

431. Ապացուցել, որ ցանկացած $z \in S^1 \backslash \{-1\} = \{z \in C\text{:}\, |z| = 1\} \backslash \{-1\}$կոմպլեքս թիվ կարելի է միարժեք ձևով ներկայացնել հետևյալ տեսքով․

$$z = \frac{1+i\tau}{1-i\tau} = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} + i\frac{2\tau}{1+\tau^2}, \quad \textit{որտեղ}\ \tau \in R\text{:}$$

432. Ցույց տալ, որ ամբողջ թիվ է և գտնել այդ թիվը։

433. Գտնել հետևյալ աստիճաններն ու արմատները.

ա. $1^{\sqrt{2}}$ **բ.** i^i **գ.** $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ **դ.** $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$ **ե.** $\sqrt{\mathbf{2-2\sqrt{3}}\boldsymbol{i}}$ **զ.** $\sqrt[5]{\sqrt{\mathbf{2}}\left(\mathbf{cos}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}+\mathbf{sin}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right)}$

434. Դիցուք $z_0 = x_0 + y_0 \neq 0$ որևէ կոմպլեք թիվ է: $\{z_n\}_{n\geq 0}$ հաջորդականությունը սահմանվում է ռեկուրենտ հետևյալ կերպ. $z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n}\right), n \geq 0$: Ցույց տալ.

Եթե $x_0 > 0$, ապա $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$:

Եթե $x_0 < 0$, ապա $\lim_{n\to\infty} z_n = -1$:

Եթե $x_0 = 0$, ապա $\{z_n\}_{n\geq 0}$ հաջորդականությունը կամ տարամետ է կամ սահմանված չէ:

435. Դիցուք $\{z_n\}_{n\geq 0}$ հաջորդականությունը սահմանվում է ռեկուրենտ հետևյալ կերպ . $z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{a}{z_n}\right), n \geq 0, z_0 \in C$: Ինչպիսի z_0 դեպքում է տվյալ հաջորդականությունը զուգամետ: (Դիտարկել $\frac{z_{n+1}-\sqrt{a}}{z_{n+1}+\sqrt{a}}$):

436. Ապացուցել, որ

Ա. բոլոր $z \in C$ համար $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$:

Բ. բոլոր $z \in C, |z| \leq 1$ համար $|e^z - 1| \leq 2|z|$:

Գ. բոլոր $z \in C, 0 < |z| < 1$ -երի համար $\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z|$:

437. Դիցուք $\{z_n\}_{n\geq 1}$ կոմպլեքս թվերի հաջորդականություն է և $\{S_n\}_{n\geq 1} = \sum_{k=1}^{n} z_k$ դրա մասնական գումարների հաջորդականությունն է․ Այնուհետև $\sigma_n = \frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}, n \geq 1$: Ցույց տալ, որ եթե $\{S_n\}_{n\geq 1}$ հաջորդականությունը զուգամետ է և $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, ապա $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ հաջորդականությունը նույնպես զուգամետ է և $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$:

438. Ապացուցել հետևյալ անվերջ արտադրյալների բացարձակ զուգամիտությունը․

1 . $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n), |z|<1$; 2 . $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), z \in C$; 3 . $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\mathbf{1}-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}, z \neq \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots$:

439. Ցույց տալ, որ $\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2^n}$:

440. Ապացուցել, որ եթե $\boldsymbol{P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n}$ բազմանդամն ունի n հատ իրական արմատներ, ապա $\boldsymbol{Q(z) = P(z+ai) + P(z-ai)}$ բազմանդամը, որտեղ a-ն կամայական իրական թիվ է, ևս ունի n հատ իրական արմատներ:

441. Ապացուցել, որ w կետը գտնվում է z_1և z_2 կետերը միացնող հատվածի վրա այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի $\alpha \in [0;1]$ իրական թիվ, այնպիսին որ $w = \alpha z_1 + (1-\alpha) z_2$:

442. Դիցուք $z_1, z_2, \cdots, z_n \in C$ կոմլեքս թվեր են: Ապացուցել, որ

$\frac{1}{\sqrt[q]{n}}\sum_{k=1}^{n}|z_k| \le (\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p)^{1/p} \le \sqrt[p]{n}\max_k|z_k|$, որտեղ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p>1$:

443.Գտնել կոմպլեքս հարթության M բազմության պատկերը նշված արտապատկերումների միջոցով.

1. $\boldsymbol{M}=\{\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}: \boldsymbol{Im}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{1}\}$, $\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{z}+\boldsymbol{1}}$:

2. $\boldsymbol{M}=\{\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}: |\boldsymbol{z}+\boldsymbol{1}|=\boldsymbol{1}\}$, $\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{z}}$:

3. $\boldsymbol{M}=\{\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}: |z|=\boldsymbol{2}\}$, $\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}+\boldsymbol{1}}$:

4. $\boldsymbol{M}=\{\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}: \boldsymbol{Im}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{1}\}$, $\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{z}+\boldsymbol{1}}$:

5. $\boldsymbol{M}=\{\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}: \boldsymbol{Re}(\boldsymbol{z})>0\}$, $\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{z}+\boldsymbol{2}}$:

6. $\boldsymbol{M}=\{\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}: |z|=\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}\le \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z})\le\boldsymbol{\pi}/\boldsymbol{4}\}$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{4}}$:

7. $\boldsymbol{M}=\{\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}: \boldsymbol{Im}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{1}\}$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{2}}$:

8. $\boldsymbol{M}=\{\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}: |\boldsymbol{z}|=\boldsymbol{2}\}$, $\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\boldsymbol{z}+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{z}}\right)$:

444. Ապացուցել որ, եթե $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \,\&\, z_1+z_2+z_3=0$, ապա z_1, z_2, z_3 կետերը գտնվում են միավոր շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկայն գագաթներում:

445. Օգտվելով Մուավրի բանաձևից $\cos nx$ -ը և $\sin nx$ -ը արտահայտել $\cos x$ -ի, $\sin x$ -ի և դրանց աստիճանների միջոցով:

446. Դիցուք $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$: Ապացուցել.

Ա. –Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել Մուավրի բանաձևը. $\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^n=\cos n\varphi+i\sin\varphi, n\in\mathbb{N}$;

Բ.- Ցույց տալ, որ $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\varphi$;

Գ.-Պարզեցնելով $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^n$ արտահայտությունը ցույց տալ, որ $\cos^4\varphi=\dfrac{1}{8}\left(\cos4\varphi+4\cos2\varphi+3\right)$;

Դ.-Դիցուք $h(c)=\int\limits_0^c\cos^4\varphi d\varphi$, $x\in(0;\pi)$: Հաշվել $h(c)$-ն և լուծել $h(c)=\dfrac{3}{8}c$ հավասարումը:

Ե.- Բացել $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^6$ փակագծերը և պարզեցնելով այն գտնել a,b,c,d իրական թվերը, որտեղ $\cos^6\varphi=a\cos6\varphi+b\cos4\varphi+c\cos2\varphi+d$, այնուհետև հաշվել $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^6\varphi d\varphi$ ինտեգրալը:

Զ. –Ցույց տալ, որ $\cos5\varphi=16\cos^5\varphi-20\cos^3\varphi+5\cos\varphi$:

447. i.- Գտնել $z^{16}-1=0$ հավասարման այն արմատները, որոնք գտնվում են առաջին քառորդում և դրանք ներկայացնել ցուցչային տեսքով:

ii.-Ցույց տալ, որ $\operatorname{Re}S=\operatorname{Im}S$, որտեղ S –ը **i**–ում գտած հավասարման արմատների գումարն է:

iii.- Ցույց տալ, որ $S=\dfrac{1+i}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$:

448. $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ բազմանդամը, որտեղ $a,b,c,d\in\mathbb{}$ ունի երկու զրոներ՝ z,w:

i.- Ցույց տալ, որ $z=(1-i)^3+(1+i)^3=-4$:

ii.- Գտնել $w=\dfrac{i^{64}\times i^{63}\times\cdots\times i^{18}}{1-2i}$ և այն ներկայացնել հանրահաշվական տեսքով:

iii. – Գտնել այդպիսի $P(x)$ բազմանդամը, որի գործակիցները պարզ թվեր են:

449. i. Ցույց տալ, որ $\dfrac{(1+i)^{2023}}{(1-i)^{2021}}$ թիվը ամբողջ թիվ է և գտնել նրա արժեքը:

ii.- Գտնել $n \in \mathbb{Z}$ ամբողջ թիվն այնպես, որ $\dfrac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^{n}}$ թիվը լինի կեղծ թիվ:

450. Գտնել z և w կոմպլեքս թվերն այնպես, որ

$$\begin{cases} \overline{z} - iw = 3 \\ \overline{w} + iz = 6 - i \end{cases} :$$

451. Դիցուք z_1 –ը և z_2 -ը $z^2 - z + 1 = 0$ հավասարման արմատներն են: Հաշվել $z_1^{2021} - z_2^{2021}$ արտահայտության արժեքը:

452. Ցույց տալ, որ $w\overline{z} - z\overline{w}$ արտահայտության իրական մասը զրո է, ցանկացած $z, w \in \mathbb{C}$ կոմպլեքս թվերի համար:

453. $P(z) = z^4 - 8z^3 + 48z^2 - 176z + 260$ բազմանդամի զրոնեից մեկը $(3-i)$-ն է, գտնել այդ բազմանդամի մյուս զրոները:

454. Գտնել a թիվն այնպես, որ $\arg z = 1$, որտեղ $z = (a+2i)^2$:

456. Ցույց տալ, որ $\left(\sqrt{3}+i\right)^n + \left(\sqrt{3}-i\right)^n = 2^{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{6}, n \in \mathbb{N}$:

457. Պարզեցնել i.- $\left(1+\omega+\overline{\omega}\right)^2$, ii.- $\left(1+\omega+3\omega^2\right)^2$, iii.- $\left(1+2\omega+3\omega^2\right)\left(1+3\omega+2\omega^2\right)$ արտահայտության արժեքները, որտեղ ω-ն $z^3-1=0$ հավասարման այն արմատներն են, որոնք տարբեր են 1-ից:

458. Օգտվելով $\int_0^\infty \boldsymbol{x^{a-1}\,R(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi a i}}\sum Res_{z=z_k}\left[z^{a-1}R(z)\right]}$ բանաձևից, որտեղ a-ն ամբողջից տարբեր իրական թիվ է, իսկ R(x)-ը կանոնավոր ռացիոնալ ֆունկցիա է, իսկ z_k-ը R(x)-ի բոլոր բևեռներն են, հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

1. $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}dx,\ 0 < a < 1;$ 2. $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x^2)^2}, 0 < a < 4$:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

1. **ա.** $-i$ **բ.** i **գ.** $-i$ **դ.** $-\frac{2}{3}$ **4. Ցուցում.-** Դիտարկել $\left|z_{k+1}-z_k\right|$ -ն, որտեղ $z_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$ **5. ա.** $\arg z_1=\arg z_2$

բ. $\operatorname{Im}\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=0$:

5. $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}\in\mathbb{R}$ **5.2** $z=\frac{\lambda_2 z_1+\lambda_1 z_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ **5.3** ա. $z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$

բ. $z=\frac{\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_3 z_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ **6.**1 **7. ա.** $2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n\varphi}{2}\right),$

բ. $2^n\sin^n\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{n(\pi-\varphi)}{2}+i\sin\frac{n(\pi-\varphi)}{2}\right)$ **8. ա.** i **բ.** $2-2i$

գ. $z_0=2^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right), z_1=2^{-1/3}(-1+i), z_3=-2^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$; **դ.** $2^{51}i$

9.ա. $-2-2\sqrt{3}i$ **բ.** $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

գ. $z_0=2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right), z_1=2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right),$

$z_3=2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right), z_4=-2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right);$

դ. $2^{49}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$

10.ա. $-4i$ **բ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

գ. $z_0 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right), z_1 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{13\pi}{18}+i\sin\frac{13\pi}{18}\right),$

$z_2 = -2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{7\pi}{18}+i\sin\frac{7\pi}{18}\right)$, դ. $-2^{199}\left(1-i\sqrt{3}\right)$; **11.ա.** -8

բ. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, գ. $z_0 = 2,\ z_1 = -1+i\sqrt{3},\ z_2 = -1-i\sqrt{3}$, դ. 2^{180}

12.ա. $-\frac{3}{5}+\frac{i}{5}$, բ. $-12+16i$,

գ. $z_0 = 2^{-\frac{2}{3}}\left(\sqrt{3}+i\right), z_1 = 2^{-\frac{2}{3}}\left(-\sqrt{3}+i\right),\ z_2 = -i2^{-\frac{2}{3}},$

դ. $10^{50}\left(\cos 100\varphi - i\sin 100\varphi\right), \varphi = \arg tg 3;$

13.ա. $4-2i$, բ. $\frac{1}{50}+\frac{7i}{50}$,

գ. $z_0 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right), z_1 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right), z_2 = -2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right),$

$z_3 = \left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right);$

դ. $10^{100}\left(\cos 200\varphi - i\sin 200\varphi\right), \varphi = -\arg ctg 3;$

14.ա. $1+\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)$, բ. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$,

գ. $z_0 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right), z_1 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right),$

$z_2 = -2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$ դ. $-2^{25}i$; **15.ա.** $-4i$, բ. 8,

գ. $z_0 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right),$

$z_1 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{13\pi}{24} + i\sin\frac{13\pi}{24}\right), z_2 = -z_0, z_3 = -z_1,$ դ. 2^{150};

16.ա. $8i,$ բ. $i,$

գ. $z_0 = 2^{\frac{3}{10}}\left(\cos\frac{3\pi}{16} - i\sin\frac{3\pi}{16}\right), z_1 = 2^{\frac{3}{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right), z_2 = 2^{\frac{3}{10}}\left(\cos\frac{13\pi}{16} + i\sin\frac{13\pi}{16}\right),$

$z_3 = -z_1,\ z_4 = -z_2,$ դ. 2^{180}; **17.ա.** $-2i,$ բ. $32-32i,$ գ. $z_0 = 1+i\sqrt{3},$

$z_1 = -2,\ z_2 = 1-i\sqrt{3},$

դ. $2^{12}(1+i)$; **18.ա.** $-18i,$ բ. $-1,$

գ. $z_0 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right), z_1 = -z_0,$ դ. -18^{50};

19.ա. $-6+8i,$ բ. $-\frac{4}{5}+\frac{3i}{5},$ գ. $2\sqrt{2}-i\sqrt{2}, -2\sqrt{2}+i\sqrt{2},$ դ. $-i$;

20.ա. $-161-73i,$ բ. $\frac{7}{25}+\frac{i}{25},$

գ. $z_0 = \sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\sqrt{2+2\sqrt{2}}, z_1 = -\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\sqrt{2+2\sqrt{2}},$

դ. $50^{50}\left(\cos 100\varphi + i\sin 100\varphi\right), \varphi = \arg tg 7$;

21.ա. $z_0 = -z_2 = 2, z_1 = -z_3 = 2i,$

բ. $z_0 = -z_3 = \sqrt{2}(1+i), -z_1 = z_3 = \sqrt{2}(1-i)$;

գ. $z_0=-z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right),$

$z_1=-z_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right),$

դ. $z_0=-z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right),$

$z_1=-z_3=2\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right);$

22. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$

23. Ցուցում. Դիտարկել $(1-z)P(z)$ բազմանդամը և նկատել, որ $\forall w,z\in C, w\neq 0, |w-z|=\big||w|-|z|\big|,$ միայն այն դեպքում, երբ $z=\lambda w, \lambda\geq 0$:

25. Եթե $n=1,$ ապա $z=x\in R$: Եթե $n\neq 2,$ ապա $z_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}, k=\overline{0;n-1}$:

26.ա. $z_{1,2}=-4\pm 2i, z_{3,4}=3\pm 2i;$

բ. $z_{1,2}=\pm\sqrt{2}, z_{3,4}=\pm\sqrt{2}(1+i),$ գ. $z_{1,2}=\pm(1-i);$

դ. $z=3-\frac{i}{2};$ ե. $z=1+3i;$ զ. $z_{1,2}=\pm\sqrt{3}(4+i),$

$z_{3,4}=\pm\sqrt{3}(1+4i);$

27. ա. $z=1,5+i,$ **բ.** $z=1+2i;$ **27.1 ա.բ.գ.** -2:

28. ա. $z_0 = x_0 + iy_0$ կենտրոնով և R շառավղով շրջանագիծ. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$: **բ.** $z=0$ կենտրոնով և R շառավղով շրջանագիծ . $x^2+y^2=R^2$: **գ.** $z=0$ կենտրոնով և 1 շառավղով շրջանագիծ. $x^2+y^2=1$: **դ.** $z_0 = x_0 + iy_0$ կենտրոնով և R շառավղով կիսաշրջանագիծ, որը գտնվում է $y=y_0$ ուղղից վերև. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2, y \ge y_0$:

29. Պարաբոլ . $2x+1=y^2$ **30.** Պարաբոլ. $y=\dfrac{1-x^2}{2}$:

31. Հիպերբոլ. $y=\dfrac{1}{x}$:

32. Ուղիղ գիծ. $x+2y=1$:

33. ա. $z_0=\dfrac{1}{2}$ կենտրոնով և $\dfrac{1}{2}$ շառավղով շրջանագիծ. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$: **բ.** $z_0=-\dfrac{i}{2c}$ կենտրոնով և $\dfrac{1}{2c}$ շառավղով շրջանագիծ. $x^2+\left(y+\dfrac{1}{2c}\right)^2=\dfrac{1}{4c^2}$:

34.ա. Հիպերբոլ. $x^2-y^2=1,$ որի ասիմպտոտներն են հանդիսանում ուղիղները. $y=\pm x$: **բ.** $y=\dfrac{1}{2x}$:

35. $z_0 = 0$ կենտրոնով և 2 շառավղով շրջանագիծ. $x^2 + y^2 = 4$:

36. $x = 0$: **37.** Հիպերբոլ, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, որի համար

ասիմպտոտներ են հանդիսանում $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$ ուղիղները:

37.1 Հիպերբոլ՝ $x^2 - y^2 = 1$:

38. $r^2 = 2\lambda\cos 2\varphi$, լեմնիսկատ: **39.** $|z - z_0| = R$: **40.** $|z| = R$:

41. $b^2\left(z + \bar{z}\right)^2 - a^2\left(z - \bar{z}\right)^2 = 4a^2b^2$: **42.** $z^2 + \bar{z}^2 = 2a^2$: **43.**

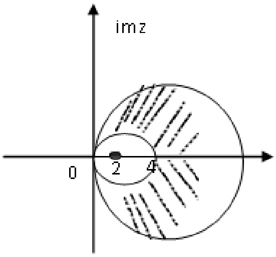
$(a - ib)z + (a + ib)\bar{z} + 4c = 0$:

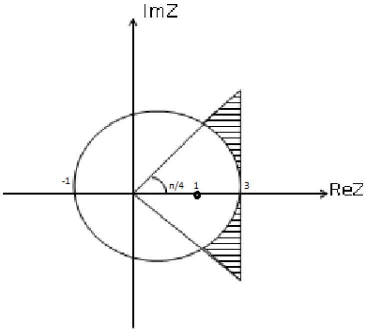
44. $(1 - i)z - (1 + i)\bar{z} = 0$: **45.** **z**-ի փոխարեն տեղադրել համապատասխանաբար x և iy:

46. ա. $\{z \in C: Im(z) > 0\}$: բ. $\{z \in C: Re(z) > 0\}$: գ.$\{z \in C: Im(z) > 0 \;\&\; Re(z) > 0\}$: դ.$\{z \in C: |z| < R\}$: ե.$\left\{z \in C: \frac{\pi}{8} < \arg(z) < 3\pi/8\right\}$:

47.ա- Կեղծ առանցքին զուգահեռ գիծ, որն անցնում է $\operatorname{Re} z = 2$ կետով: **բ**- Իրական առանցքին զուգահեռ գիծ, որն անցնում է $\operatorname{Im} z = -2$ կետով: **գ**- Կոմպլեքս հարթության վրա կոորդինատների սկզբնակետով միավոր շրջանագիծ: **դ**- Կոմպլեքս հարթության վրա կոորդինատների սկզբնակետով և R շառավղով վերին կիսաշրջանագիծ:

48.





50.

65. Լուծում. (ξ,η,ζ) կետերը պետք է բավարարեն հետևյալ սֆերայի հավասարմանը՝ $\xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$: /Ա/ Բացի այդ $(0,0,1),(\xi,\eta,\zeta),(x,y,0)$ կետերը գտնվում են միևնույն ուղղի վրա: Հետևապես՝ $\frac{\xi-0}{x-0}=\frac{\eta-0}{y-0}=\frac{\zeta-1}{0-1}$ /Բ/: Այստեղից

կստանանք՝ $x=\dfrac{\xi}{1-\zeta}, y=\dfrac{\eta}{1-\zeta}$ $\Rightarrow$

$$\left(\xi,\eta,\varsigma\right)\to z=x+iy=\frac{\xi+i\eta}{1-\varsigma}:$$

Հակադարձ կապը գտնելու համար՝ $z\to\left(\xi,\eta,\varsigma\right)$, նկատենք, որ

$$x^2+y^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{\left(1-\zeta\right)^2}=\frac{\zeta}{1-\zeta}\Rightarrow \qquad \xi=\frac{x}{x^2+y^2+1}=\frac{\operatorname{Re}z}{\left|z\right|^2+1},$$

$$\eta=\frac{y}{x^2+y^2+1}=\frac{\operatorname{Im}z}{\left|z\right|^2+1},\varsigma=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}=\frac{\left|z\right|^2}{\left|z\right|^2+1}:$$

Դիտողություն.-Եթե նշանակենք /Բ/-ի ընդհանուր արժեքը t-ով,

$$\xi=tx,\eta=ty,\zeta=\left(1-t\right)$$

ապա կգտնենք՝

Վերջիններս տեղադրելով /Ա/-ի մեջ և գտնելով t-ն կախված x-ից y-ից, կստանանք սֆերայի կետերի և կոմպլեքս հարթության կետերի միջ կապը:

66. $\left(\xi,\eta,\varsigma\right)\to z=\dfrac{2(\xi+i\eta)}{2-\varsigma}$,

$$z\to\left(\xi,\eta,\varsigma\right),\xi=\frac{4x}{x^2+y^2+4}=\frac{4\operatorname{Re}z}{\left|z\right|^2+4}=\frac{2(z+\overline{z})}{\left|z\right|^2+4},$$

$$\eta=\frac{4y}{x^2+y^2+4}=\frac{4\operatorname{Im}z}{|z|^2+4}=\frac{2(z-\overline{z})}{|z|^2+4},\ \varsigma=\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2+4}=\frac{2|z|^2}{|z|^2+4}:$$

67. $(\xi,\eta,\varsigma)\to z=\dfrac{2R(\xi+i\eta)}{2R-\varsigma}$,

$$z\to(\xi,\eta,\varsigma),\xi=\frac{4R^2x}{x^2+y^2+4R^2}=\frac{4R^2\operatorname{Re}z}{|z|^2+4R^2},$$

$$\eta=\frac{4R^2y}{x^2+y^2+4R^2}=\frac{4R^2\operatorname{Im}z}{|z|^2+4R^2},\ \varsigma=\frac{2R(x^2+y^2)}{x^2+y^2+4R^2}=\frac{2R|z|^2}{|z|^2+4R^2}:$$

68. $\boldsymbol{z=\pm 1}\mapsto\left(\pm\frac{1}{2},\mathbf{0},\frac{1}{2}\right)$; $\boldsymbol{z}=\pm\mathrm{i}\mapsto\left(0,\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $z=1\pm i\mapsto\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$:
69.ա. կիսաշրջանագիծ, **բ.** շրջանագիծ **գ.** Շրջանագիծ, որն առաջանում է Ռիմանի սֆերայի հետ հատումից: **70.** $arg(z_1)+arg(z_2)=\pi$: **71.** $d=\dfrac{|z_1-z_2|}{\sqrt{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)}},z_1,z_2\neq\infty,$

$d=\dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}},z_2=\infty$: **72. Ցուցում.** Դիտարկել երկու դեպք. ա.- $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է և օգտվել Բոլցանո-Վայերշտրասի սկզբմունքից, բ.- $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունն անսահմանփակ է. այդ դեպքում գոյություն ունի $k_0\in N$ այնպիսին որ $z_{n_{k_0}}>k_0$: Նշանակենք $\square z_{n_{k_0}}=\max_{\{1\le k\le k_0\}}\left|z_{n_k}\right|$: Նկատենք որ $d\left(z_{n_k},\infty\right)=0,$ երբ $z_{n_{k_0}}=\infty,$

և $d\left(z_{n_k},\infty\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left|z_{n_{k0}}\right|^2}}\le\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\to 0,$ երբ $k\to\infty$ ։ **73.** $1+i$

74. 0 եթե $|a|<1$, 1 եթե $|a|>1$, $\dfrac{1}{2}$ եթե $a=1$, գոյություն չունի եթե

$a=-1$։**75.** $1+i$ **76.** $e+i$ **77.** ∞ **78.** $\ln 2+ie$ **79.** $\dfrac{a_k}{b_m}+i\dfrac{b_m}{a_k}$ եթե

$k=m,$ ∞ եթե $k\neq m$ ։ **80.** $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$; **81.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$;

82. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{i}{2}$; **83.** 0 ։

84.1. Զուգամետ է 2. Տարամետ է 3. Տարամետ է4. Զուգամետ է 85.

86.1 բացարձակ զուգամետ է / $\left|e^{(1+in)^2}\right|=e^{1-n^2}$ / ։ **86.2** Բացարձակ

զուգամետ է, քանի որ $\left|\left(\dfrac{3-4i}{5+12i}\right)^n\right|=\left(\dfrac{5}{13}\right)^n$ ։ **86.3** Բացարձակ

զուգամետ է, քանի որ.

$$\left|\frac{(1+i)(2+i)\cdots(n+i)}{n^n}\right|=\frac{\prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+k^2}}{n^n}<\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{n^n}\le\frac{(n+1)!}{n^n}$$, որը

զուգամետ շարքի ընդհանուր անդամ է։ **86.4** Բացարձակ

զուգամետ է. $\left|\dfrac{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}{n^2n!}\right|=\dfrac{\prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+k^2}}{n^2n^n}$

$$=\frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=\frac{1}{n^2}e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}\le\frac{1}{n^2}e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}\le\frac{1}{n^2}e^{\pi^2/12}$$

$/\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}/$: **86.5** Բացարձակ զուգամետ է $/\left|\frac{n}{(2i)^n}\right|=\frac{n}{2^n}$ /:

86.6 Բացարձակ զուգամետ է $/\left|\frac{n!}{(in)^n}\right|=\frac{n!}{n^n}$ /: **86.7** Պայմանական զուգամետ է $/\left|\frac{e^{in}}{n}\right|=\left|\frac{\cos n}{n}+i\frac{\sin n}{n}\right|=\frac{1}{n}$ /: **86.8** Բացարձակ զուգամետ երբ $\theta\ne 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ և տարամետ երբ $\theta=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$:

86.9 Տարամետ է:

88. $z=\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right), k\in Z$:

89. $z=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln\left|1\pm\sqrt{2}\right|, k\in Z$:

90. $z=\alpha-i\ln\left(3\pm2\sqrt{2}\right)-2\pi k, k\in Z, \alpha=\mathrm{ar}\,ctg\frac{12}{5}$:**91.** $\boldsymbol{z=\frac{\pi}{2}+\pi k-\frac{i}{2}\ln\left(17\pm\sqrt{285}\right), k\in Z}$: **92.** $\boldsymbol{z=\pi k, k\in Z}$: **93.** $\boldsymbol{z=\frac{1}{2}\ln\left(19\pm6\sqrt{10}\right)+\pi k i, k\in Z}$: **93.1** $z=\pi k\left(1\pm i\right)$:

93.2 $z=\pi k\left(1+i\right); z=\frac{(2k+1)\pi}{1+i}$:

93.3 $z=\frac{(4k+1)\pi}{2(1+2i)}; z=\frac{(4k-1)\pi}{2(1-2i)}$: **98.** $\frac{e^2}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$;

99. $\sqrt{2}\left(1+i\right)$; **100.** $i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z$; **101.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(ch2+ish2\right)$;

102. $i\left(-\pi+\operatorname{arc}ctg\frac{4}{3}+2\pi k\right), k\in Z;$ **103.** $\sin 4ch2\pi+i\cos 4sh2\pi;$

104. $-ish1;$

105. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)e^{-i/2\ln 2-\pi/4-2\pi k}, k\in Z;$ **106.** $-117-44i;$

107. $\frac{19}{6}+\frac{17i}{6};$ **108.** $-\frac{63}{13}-\frac{153i}{13};$

109. $\frac{1-th^2 1}{1+th^2 1}+\frac{2th1}{1+th^2 1}i;$

110. $-i\ln\left|\left(-2+\sqrt{5}\right)/\left(-2-\sqrt{5}\right)\right|+0/(\pi)+2\pi k, k\in Z;$

111. $-i\ln\left|\left(1+\sqrt{2}\right)/\left(1-\sqrt{2}\right)\right|+\frac{\pi}{2}/\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\pi k, k\in Z;$

112. $-\frac{1}{2}sh2-\frac{i\sqrt{3}}{2}ch2;$

113. $\frac{i}{2}\ln\sqrt{5}-i\left(\frac{\pi-arctg2}{2}+\pi k\right), k\in Z;$ **114.** $ie^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}, k\in Z;$

115. $\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)+i\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z;$ **116.** $i\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right), k\in Z;$ **117.** $\ln\left(\sqrt{2}\pm 1\right)\pm i\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z;$ **117.1** $\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in \mathbf{Z}$: 117.2 $\pm\frac{\pi}{3}$: 117.3 $-\frac{\pi}{2}-i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$: 117.4 $\ln\left(\sqrt{5}\pm 2\right)+i\pi\left(2k\pm\frac{1}{2}\right)$:

118. $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$: **Ցուցում.** Որոնելի գումարը հանդիսանում է հետևյալ գումարը.

$Re\left(\frac{1}{2}+e^{ix}+e^{2ix}+\cdots+e^{nix}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{k=n}e^{ikx}$, այնուհետև բազմապատկելով այն $e^{ix/2}$ և և $e^{-ix/2}$ իրարից հանելով կստանանք ցանկալի արդյունքը:

Կամ. .

$$\boldsymbol{Re\left(\frac{1}{2}+e^{ix}+e^{2ix}+\cdots+e^{nix}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{k=n}e^{ikx}}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{inx}}\sum_{k=0}^{2n}e^{ikx}=$$

$$\frac{1}{2}e^{-inx}\frac{e^{i(2n+1)x}-1}{e^{ix}-1}=\frac{1}{2}e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{e^{i(2n+1)x}-1}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}}=\frac{1}{2}\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{\frac{ix}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{ix}}{2}}}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}:$$

119. $\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, **Ցուցում.** Հաշվել

$$\mathrm{Im}\left(e^{ix}+e^{2ix}+\cdots+e^{inx}\right)=\mathrm{Im}\,e^{ix}\left(\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\right);$$

Կամ $\boldsymbol{S_n=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx}$ հավասարության երկու մասերն էլ բազմապատկել $\boldsymbol{2\sin\frac{x}{2}}$ և բացելով աջ մասի սինուսների արտադրյալը:

120. $\frac{\sin nx\cos(n+1)x}{\sin x}$; **121.** $\frac{\sin nx\sin(n-1)x}{\sin x}$:

122. $\frac{\sin\frac{(n+1)y}{2}\cos\left(x+\frac{ny}{2}\right)}{\sin\frac{y}{2}}$; 123. $\frac{\sin\frac{(n+1)y}{2}\sin\left(x+\frac{ny}{2}\right)}{\sin\frac{y}{2}}$;

124. 0: **125.** Լուծում-Նշանակենք z_k –ով $\sqrt[n]{1}$ –ի արմատները.

$z_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}, k=\overline{0;n-1}$: Քանի որ

$z_k^n=1\Rightarrow z_k^n-1=0$, ապա ըստ Վիետի թեորեմի

$z_0+z_1+\cdots+z_{n-1}=0$: Մյուս կողմից

$z_0+z_1+\cdots+z_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2\pi k}{n}$: Հետևապես

$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2\pi k}{n}=0$, իսկ

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n}+1=0;\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n}=-1:$$

Նշանակենք

$$S=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos\frac{2\pi k}{n}=n\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n}-\sum_{k=1}^{n-1}k\cos\frac{2\pi k}{n}=-n-\sum_{k=1}^{n-1}k\cos\frac{2\pi k}{n}:$$

Մյուս կողմից դժվար չէ նկատել, որ $S=\sum_{k=1}^{n-1}k\cos\frac{2\pi k}{n}$:

Գումարելով իրար ստացված երկու հավասարությունները

կունենանք. $2S=-n;\Rightarrow S=-\frac{n}{2}$:

126. $\mathrm{Re}\left(z^3+3z^2+2z-1\right)=x^3-3x^2y+3x^2-3y^2+2x-1, \mathrm{Im}\left(z^3+3z^2+2z-1\right)=3x^2y-y^3+6xy+y$:

127. $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}, \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}$:

128. $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+z}\right)=\frac{1+x}{(1+x)^2+y^2}, \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+z}\right)=\frac{-y}{(1+x)^2+y^2}$:

$$129.\ \mathrm{Re}\left(\frac{z}{z+1}\right)=\frac{x^2+y^2+x}{(1+x)^2+y^2},\ \mathrm{Im}\left(\frac{z}{z+1}\right)=\frac{y}{(1+x)^2+y^2}:$$

$$130.\ \mathrm{Re}\left(\frac{z-z_0}{z+z_0}\right)=\frac{x^2-x_0^2+y^2-y_0^2}{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2},\ \mathrm{Im}\left(\frac{z-z_0}{z+z_0}\right)=\frac{2yx_0-2xy_0+x_0y_0}{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2}:$$

$$131.\ \mathrm{Re}\left(z-\frac{1}{z}\right)=x-\frac{x}{x^2+y^2},\ \mathrm{Im}\left(z-\frac{1}{z}\right)=y+\frac{y}{x^2+y^2}:$$

$$132.\ \mathrm{Re}(\sin 2z)=\sin 2x ch2y,\ \mathrm{Im}(\sin 2z)=\cos 2x sh2y:$$

$$133.\ \mathrm{Re}(\cos^2 z)=\cos^2 x ch^2 y-\sin^2 x sh^2 y,\ \mathrm{Im}(\cos^2 z)=\frac{1}{2}\sin 2x sh2y:$$

$$134.\ \mathrm{Re}(tg3z)=\frac{tg3x(1-th^2 3y)}{1+tg^2 3x th^2 3y},\ \mathrm{Re}(tg3z)=\frac{th3y(1+tg^2 3x)}{1+tg^2 3x th^2 3y}:$$

$$135.\ \mathrm{Re}\left(ctg\frac{z}{2}\right)=\frac{ctg\frac{x}{2}\left(1-cth^2\frac{y}{2}\right)}{ctg^2\frac{x}{2}+cth^2\frac{y}{2}},\ \mathrm{Im}\left(ctg\frac{z}{2}\right)=\frac{cth\frac{y}{2}\left(1+ctg^2\frac{x}{2}\right)}{ctg^2\frac{x}{2}+cth^2\frac{y}{2}}:$$

$$136.\ \mathrm{Re}(sh4z)=sh4x\cos 4y,\ \mathrm{Im}(sh4z)=\sin 4y ch4x:$$

$$137.\ \mathrm{Re}(thz)=\frac{thx}{\cos^2 y(1+th^2x tg^2 y)},\ \mathrm{Im}(thz)=\frac{tgy}{ch^2x(1+th^2x tg^2 y)}:$$

$$138.\ |\cos z|=\sqrt{\cos^2 x+sh^2 y}:139.\ |chz|=\sqrt{\cos^2 y+sh^2 x}=\sqrt{ch^2 x-\sin^2 y}:$$

$$140.\ \left|z-\frac{1}{z}\right|=\sqrt{\frac{3y^4-x^4+2x^2y^2+1}{x^2+y^2}}:$$

140.1 $\left|\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4+2x^2-2y^2+1}{x^2+y^2}}$ ։

141.$\left|\ln(2z)\right|=\sqrt{\frac{1}{4}\ln^2\left(4\left(x^2+y^2\right)\right)+\left(arctg\frac{y}{x}+c\right)^2}$, որտեղ

$c=\pm\pi$, կամ $c=0$։ 142.$\left|e^{2z}\right|=e^{2x}$ ։

142.1

145.$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ ։

146.1.$h(x)=ax+b,\Rightarrow f(z)=az+b+ic;a,b,c\in R$ ։

146.2.$h(y)=ay+b,\Rightarrow f(z)=a+i(bz+c);a,b,c\in R$ ։ 147.1/2.

Ցուցում.-Անցնել բևեռային կոորդինատների և օգտվել Կոշիի-Ռիմանի պայմաններից։ $f(z)=c\ln(z)+c_1+ic_2;c,c_1,c_2\in R$ ։

148.1/2. Անցնել բևեռային կոորդինատների նկատելով, որ $u(r,\varphi)=h_1(\varphi),v(r,\varphi)=h_2(r)$ ։ Օգտվելով Կոշիի-Ռիմանի պայմաններից ստանալ $h_1'(\varphi)=-rh_2'(r)=c$ ։

$h_1(\varphi)=c\varphi+c_1,h_2(r)=-c\ln(r)+c_2,$

$f(z)=-ic\ln(z)+c_1+ic_2;c,c_1,c_2\in R$ ։

149.$h(xy)=axy+b,\Rightarrow f(z)=-\frac{ia}{2}z^2+b+ic;a,b,c\in R$ ։

150.1 Ցուցում.- Անցնելով բևեռային կոորդինատների և օգտվելով Կոշիի-Ռիմանի պայմաններից ստանալ.ա).

$v(r,\varphi) = -h\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)tg\varphi + g(\varphi)$, բ).

$-th'(t) + h(t) = c, t = \frac{\cos\varphi}{r}$, և գ). $g'(\varphi)\cos^2\varphi = c$:

$f(z) = \frac{c_1}{z} + c + ic_1$: 150.2. $f(z) = \frac{ic_1}{z} + c + ic_2$:

151.1/2. $f(z) = c\sqrt{z} + c_1 + ic_2$: 152.Ցուցում.-Դիտարկել $\ln(f(z)) = \ln|f(z)| + i\arg f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, և նկատել, որ $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$: Օգտվել Կոշիի-Ռիմանի պայմաններից: $f(z) = ze^{ic}$: 153. $f(z) = e^{i(z^2/2+c)}$:

154. $f(z) = e^{az^2/2+c}$: 155. $f(z) = cze^{iz}$: 156. $f(u) = cu + c_1$:

157.Հարմոնիկ են $\ln f(z), \arg f(z)$ ֆունկցիաները:

158. $\operatorname{Im} f(z) = C = const$: 159.Ցուցում. Նկատել, որ

$$S_G = \iint_G dudv = \iint_D \left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| dxdy, L_\Gamma = \int_\Gamma |dw| = \int_\gamma |f'(z)||dz| :$$

160.Անալիտիկ ֆունկցիա է:

$$u(x,y) = \frac{1+x}{(1+x)^2+y^2}; v(x,y) = \frac{y}{(1+x)^2+y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2-(1+x)^2}{\left((1+x)^2+y^2\right)^2}; \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+x)y}{(1+x)^2+y^2} :$$

161.Անալիտիկ ֆունկցիա չէ: 162.Անալիտիկ ֆունկցիա է:

$$u(x,y)=\frac{x+x^2+y^2}{(1+x)^2+y^2},v(x,y)=\frac{y}{(1+x)^2+y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{(1+x)^2-y^2}{\left((1+x)^2+y^2\right)^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2(1+x)y}{\left((1+x)^2+y^2\right)^2}:$$

163.Անալիտիկ ֆունկցիա չէ:

164.Անալիտիկ ֆունկցիա չէ: 165.Անալիտիկ ֆունկցիա է:

$$u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y),v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\left((1+x)\cos y-y\sin y\right),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\left((1+x)\sin y+y\cos y\right):$$ 166.Անալիտիկ ֆունկցիա չէ: 167.Անալիտիկ ֆունկցիա է:

$$u(x,y)=x\sin xchy-y\cos xshy,$$

$$v(x,y)=y\sin xchy+x\cos xshy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\sin xchy+x\cos xchy+y\sin xshy,$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=y\cos xchy+\cos xshy-x\sin xshy:$$ 168.Անալիտիկ ֆունկցիա է: $u(x,y)=\left(x^2-y^2\right)\cos xchy+2xy\sin xshy,$

$$v(x,y)=2xy\cos xchy+\left(y^2-x^2\right)\sin xshy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x\cos xchy+\left(y^2-x^2\right)\sin xchy+2y\sin xshy+2xy\cos xshy,$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=2y\cos xchy-2xy\sin xshy-2x\sin xshy+\left(y^2-x^2\right)\cos xshy:$$

169.Անալիտիկ ֆունկցիա է: $u\left(x,y\right)=\dfrac{tg2x}{ch^2 2y\left(1+tg^2 2xth^2 2y\right)}$,

$$v\left(x,y\right)=\frac{th2y}{\cos^2 2x\left(1+tg^2 2xth^2 2y\right)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2\left(1-tg^2 2xth^2 2y\right)}{\cos^2 2xch^2 2y\left(1+tg^2 2xth^2 2y\right)^2},$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{4tg2xth2y}{\cos^2 2xch^2 2y}/\left(1+tg^2 2xth^2 2y\right):$$

170.Անալիտիկ ֆունկցիա է: $u\left(x,y\right)=x^2-y^2+e^x\cos y$,

$v\left(x,y\right)=2xy+e^x\cos y,\ v\left(x,y\right)=2xy+e^x\sin y,$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x+e^x\cos y,\ -\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=2y+e^x\sin y:$$

171. Անալիտիկ ֆունկցիա չէ: **172.**Անալիտիկ ֆունկցիա է:

$$u\left(x,y\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\left(1-x\right)^2+y^2\right),\ v\left(x,y\right)=arctg\frac{y}{1-x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x-1}{\left(1-x\right)^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y}{\left(1-x\right)^2+y^2}:$$

173. Անալիտիկ ֆունկցիա է: $u\left(x,y\right)=e^{x^2+x-y^2}\cos\left(y+2xy\right)$,

$$v\left(x,y\right)=e^{x^2+x-y^2}\sin\left(y+2xy\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^{x^2+x-y^2}\left(\left(2x+1\right)\cos\left(y+2xy\right)-2y\sin\left(y+2xy\right)\right),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x^2+x-y^2}\left(\left(2x+1\right)\sin\left(y+2xy\right)+2y\cos\left(y+2xy\right)\right):$$

174.Անալիտիկ ֆունկցիա է: $u\left(x,y\right)=x-\frac{x}{x^2+y^2}$,

$$v\left(x,y\right)=y+\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=1+\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}:$$

175.Անալիտիկ ֆունկցիա է:

$$u\left(x,y\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\left(1+x^2-y^2\right)^2+4x^2y^2\right),$$

$$v\left(x,y\right)=arctg\frac{2xy}{1+x^2-y^2},\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2x\left(1+x^2+y^2\right)}{\left(1+x^2-y^2\right)^2+4x^2y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{3x^2y+y^3-y}{\left(1+x^2-y^2\right)^2+4x^2y^2}:$$

176.Անալիտիկ ֆունկցիա է:

$$u\left(x,y\right)=e^x\left(\sin 2x\cos ych2y-\cos 2x\sin ysh2y\right),$$

$$v\left(x,y\right)=e^x\left(\cos 2x\cos ysh2y+\sin 2x\sin ych2y\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\left(\cos ych2y\left(\sin 2x+2\cos 2x\right)+\sin ysh2y\left(2\sin 2x-\cos 2x\right)\right),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\left(\cos ysh2y\left(\cos 2x-2\sin 2x\right)+\sin ych2y\left(2\cos 2x+\sin 2x\right)\right):$$

177. Անալիտիկ ֆունկցիա է: $u\left(x,y\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}ch3y\left(\cos 3x-\sin 3x\right)$,

$$v(x,y)=-\frac{\sqrt{2}}{2}sh3y(\cos 3x+\sin 3x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}ch3y(\cos 3x+\sin 3x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{3\sqrt{2}}{2}sh3y(\cos 3x-\sin 3x):$$

178.Անալիտիկ ֆունկցիա է: $u(x,y)=sh\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2},$

$$v(x,y)=ch\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2},\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2}ch\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2},$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}sh\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}:$$

179.Անալիտիկ ֆունկցիա է:

$$u(x,y)=ch4x\cos 4y, v(x,y)=sh4x\sin 4y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=4sh4x\cos 4y,\ -\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=4ch4x\sin 4y:$$

180.Անալիտիկ ֆունկցիա է:

$$u(x,y)=\frac{thx}{\cos^2 y(1+th^2xtg^2y)}, v(x,y)=\frac{tgy}{ch^2x(1+th^2xtg^2y)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1-th^2xtg^2y}{\cos^2 ych^2x(1+th^2xtg^2y)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{thx\sin 2y}{ch^2x\cos^4 y(1+th^2xtg^2y)^2}:$$ **181**. $u(x,y)=-2xy+3y+3, f(z)=iz^2-3iz+3$: **182.** $v(x,y)=3x^2y-y^3-y+1, f(z)=$

$z^3 - z - i$:**183.** $v(x,y) = 2xy + 5y - x - \frac{x}{x^2+y^2}, f(z) = z^2 + (5-i)z - \frac{i}{z} + 6i$:**184.** $u(x,y) = \frac{x}{2(x^2+y^2)} - 2xy + 2, f(z) = \frac{1}{2z} + iz^2 + 3i + 2$:
185. $v(x,y) = y - \frac{y}{x^2+y^2} - 3, f(z) = z + \frac{1}{z} - 3i$:**186.** $u(x,y) = -2arctg\frac{y}{x} - 2x - y, f(z) = 2i\ln z - (2-i)z$: **187.** $v(x,y) = arctg\frac{y}{x} + y + \frac{y}{x^2+y^2}, f(z) = \ln z + z - \frac{1}{z}$: **188.** $u(x,y) = \frac{x}{2}\ln(x^2+y^2) - yarctg\frac{y}{x} + 3x^2 - 3y^2,\ f(z) = z\ln z + 3z^2 - 2i$: **189.** $u(x,y) = e^x\cos y + \frac{1}{2}(-x^2+y^2) - x - 1,\ f(z) = e^z - \frac{1}{2}z^2 - z - 1$:
190. $v(x,y) = e^{2x}\sin 2y + y\sin xchy + x\cos xshy, f(z) = e^{2z} + z\sin z$:
191. $v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + 2\cos xchy + 3x^2y - y^3 - x, f(z) = ze^z + 2i\cos z + z^3 - iz$:
192.$u(x,y) = \frac{x\sin xchy + y\cos xshy}{x^2+y^2}, f(z) = \frac{\sin z}{z}$: **193.**$v(x,y) = \frac{xarctg\frac{y}{1+x} - \frac{y}{2}\ln((1+x)^2+y^2)}{x^2+y^2}, f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z}$:
194.$u(x,y) = \frac{e^x(x\cos y + y\sin y) - x}{x^2+y^2}, f(z) = \frac{e^z-1}{z}$: **195.** $v(x,y) = ych2x\cos 2y + xsh2x\sin 2y - 2xy + y,\ f(z) = zch2z - z^2 + z$: **196.** Ցուցում-Օգտվել Կոշիի-Ռիմանի պայմաններից: **197.** Երբ $u = v, \forall z \in G$: **199.** $f(z) = (1-2i)z - 2$: **200.** $f(z) = -iz + 2i$: **201.**ա)$w = az + b$, բ)$w = -i(az+b)$, գ)$w = -az + b, a, b \in R, a > 0$: **202.** ա) $\frac{w-i}{w+1} : \frac{1-2i}{2-i} = \frac{z-1}{z-i} : \frac{2+i}{1}$,բ) $\frac{w+1}{w-1} : \frac{-i+1}{-i-1} = \frac{z+1}{z-1} : \frac{i+1}{i-1}$,գ)$\frac{w-1}{w+2} = \frac{z-2}{z-2i} : \frac{-2i-2}{-4i}$: **203.** ա) $w = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc > 0$; բ) $w = \frac{az+b}{cz+d}, ad - b < 0$; գ) $w = i\frac{az+b}{cz+d}, ad - b < 0$; դ) $w = \frac{\overline{z_0}z - z_0e^{i\varphi}}{z+e^{i\varphi}}, z_0 = x_0 + y_0, y_0 > 0, \varphi \in [0; 2\pi]$: **204.** 1) $\varphi(x) = \alpha + 2arg(x-c)$, 2) $w'(c) = \frac{e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}}{2b}$: **205.** 1) $argw(e^{i\varphi}) = \alpha - \varphi + 2arg(e^{i\varphi} - \alpha) = \alpha - \varphi + 2arctg\frac{\sin\varphi - \tau\sin\theta}{\cos\varphi - \tau\cos\theta}, a = \tau e^{i\theta}$; 2) $w'(\theta) = (1-|a|^2)e^{i\alpha}$:3)$w'(a) = \frac{e^{i\alpha}}{1-|a|^2}$: **206.** $w = -\frac{z-i}{z+i}$; **207.**$R\frac{w-b}{R^2-\bar{b}w} = r\frac{z-a}{r^2-\bar{a}z}$;
208. $w = ke^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}arg\frac{z_2}{z_1}}\frac{z-z_1}{z-z_2}, k > 0$: **209.** Կմնա անփոփոխ:
210. 1.$max\{R, r\}$, 2. rR, 3. $\frac{R}{r}$: **211.**1.$R/3$, 2. R, 3. ∞, 4. $|\cos R|$: **212.** 1/3:
213. 4: **214.** e: **215.**e: **216.** ¼ :**217.**e: **218.** 5/2 : **219.** 1: **220.** ½ :**221.** 4:

222. 1/3 : **223.** 81/16 : **224.** 3/e **225.** $\{z \in C: Rez < 0\}$: **226.** $\{z \in C: 3|z|^2 + 2(z+\bar{z}) + 1 > 0\}$, կամ $(x+2/3)^2 + y^2 > \frac{1}{9}$: **227.** $\{z \in C: Rez > 0\}$: **228.** $\{z \in C: Imz > 0\}$: **229.** $\{z \in C: |z| > 1\}$: **230.** $\{z \in C: 2 < |z| < 5\}$:

232. $(\sin 1 + \cos 1) + i(\sin 1 - \cos 1)$: **233.** $\frac{-41}{12} + \frac{13i}{3}$;

234. $\cosh 1 - \sinh 1 - 1$; **235.** $\frac{\cosh 2 - \cos 2}{2} - \frac{\cosh 6 - \cos 6}{6}$;

236. $-\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2-i}}{1+2i} + \frac{e^{-2-i}}{1-2i}\right)$; **237.** $\frac{1}{4}(e^{-2i} - 1)\frac{1}{12}(e^{6i} - 1)$;

238. $\frac{1}{20}(e^{30i} - e^{10}) - \frac{1}{12}(e^{-18i} - e^{-6})$: **238.1** $\frac{-4 + \sin 4}{4} i$:

239. $\frac{-1}{4i}\sinh\frac{4}{\pi} + \frac{1}{\pi i}$; **240.** 0; **241.** $\frac{i}{4}(1 - e^{2i})$: **242.** 0: **243.** 2π:

244. $\sin 1 - \cos 1$: **245.** $2\pi i$: **246.** 0: **247.** **Ցուցում.** $P(z)$ բազմանդամը ներկայացնել $P(z) = P(c) + P'(c)(z-c) + \cdots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n$ տեսքով:

248.1 $-2\pi i$: **248.2** $-2\pi i$: **248.3** 0 : **248.4** $-2\pi i$: **248.5** $-\pi i$: **248.6** 0 : **248.7*** $2\pi i$: **248.8*** πi : **248.9*** 0 : **249.** **Ցուցում.** Օգտվել Պուասոնի ինտեգրալից. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$: **250.** $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$:

251. $\frac{e^{-b^2}\sqrt{\pi}}{a}$: **257.** $\pi i \cos 1$: **258.** $\pi i(\sinh 3 - \sinh 1$:) **259.** $\frac{\pi i}{2}$:

260. $\pi i(1 - e^{-2})$: **261.** $\frac{-\pi}{2}$: **262.** 0: **263.** $\frac{-1}{2\pi^2}$: **264.** $\frac{-2i}{\pi}$: **265.** 0:

266. $\frac{-3\pi i}{2} e^{-2}$:

267. **Լուծում.** $\int_{|z|=1} \sin \bar{z} dz = \int_{|z|=1} \sin\frac{1}{z} dz = \int_{|z|=1} \sin \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} \sin e^{-it} . ie^{it} dt =$

$-\int_0^{2\pi} \frac{\sin e^{-it}}{e^{-2it}} de^{-it} = \int_{|w|=1} \frac{\sin w dw}{w^2} = 2\pi i (\sin w)'_{w=0} = 2\pi i$:

268. 0: **269.** $2\pi i$: **270.** $2\pi i(2,5e^{-1} - 1)$: **271.** $\frac{\pi i(1 - 2\ln 2)}{4}$: **272.** $2\pi i(b - a)^{-n}$: **273.** 0: **274.** 0:

275. $\frac{\sqrt{2}}{2}(z - \pi/4)\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(z - \pi/4)^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z - \pi/4)^{2n}:\right]$

276. $\frac{\sqrt{2}}{2}(z-\pi/8)\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^n}{(2n-1)!}(z-\pi/8)^{2n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(2n)!}(z-\pi/8)^{2n}:\Big]$

277. $\Big[\cos 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^n}{(2n-1)!}(z-1)^{2n-1}+\sin 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(2n)!}(z-1)^{2n}:\Big]$

278. $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-16)^n}{(2n)!}z^{2n}$: 279. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}$: 280. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}z^{2n-2}$:

281. $\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{z^n}{n}$: 282. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)^n$:

283. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{3}{4^{n+1}}\right)z^n$: 284. $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)z^n$:

285. $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-2\right)z^n$: 286. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n$:

287. $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+2}}+\frac{(-1)^n}{3^{n+2}}\right)z^{n-1}$: 288. $\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$: 289. $\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{2n-4}$: 290. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}z^{n-2}$:

291. $1+z^2+\frac{1}{6}z^4-\frac{19}{120}z^6$: 292. $z+\frac{5}{6}z^3+\frac{41}{120}z^5-\frac{374}{7!}z^7$: 293. $z+z^3+\frac{11}{12}z^4+\frac{5}{6}z^5$: 294. $1+z^2-\frac{z^3}{3}+\frac{5}{6}z^4$: 295. $f(z)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\rho e^{i\alpha}}\right)^n=\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\theta-\alpha)+r^2}+i\frac{2\rho r\sin(\theta-\alpha)}{\rho^2-2\rho r\cos(\theta-\alpha)+r^2}, z-z_0=re^{i\theta}, r<\rho$: 296. $u(re^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}r^n(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)$, որտեղ $\alpha_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\cos n\theta d\theta$, $-\beta_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{\infty}u(re^{i\theta})\sin n\theta d\theta$:

297. $f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})\frac{\rho e^{i\alpha}+(z-z_0)}{\rho e^{i\alpha}-(z-z_0)}d\alpha+iIm(f(z_0)), Re\left(f(re^{i\theta})\right)u(re^{i\theta})$; $u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\,cos(\theta-\alpha)+r^2}$ 298. $f(z)=C_1\cos z+C_2\sin z$: 299. $2f(0)\pm f'(0)$: 303. 2: 304. 4: 305. 4: 306. 4: 307. 2: 308. 1: 309. $z=2\pi k, k\in Z, 2-$*րդ կարգի զրո*: 310. $z=0$ 2*րդ կարգի զրո*: 311. $z=0$ $3-$*րդ կարգի զրո*: 312. $z=0$ $4-$*րդ կարգի զրո*: 313. $z=0$ $4-$*րդ կարգի զրո*: 314. $z=0$ $4-$*րդ կարգի զրո*: 315. $z=0$ $3-$*րդ կարգի զրո*: 316. $z=0$ $5-$*րդ կարգի զրո*: 317. $z=0$ $5-$*րդ կարգի զրո*: 318. $z=0$ $5-$*րդ կարգի զրո*: 319. $z=0$ $3-$*րդ կարգի զրո*, $z=-1, z=6$ *միապատիկ զրոներ*: 319.1 Ֆունկցիան բերել հետևյալ տեսքի՝

$f(z)=z^3(z-1)^2(z-2)$; $z=0$-ն եռապատիկ զրո է, $z=1$-ը կրկնապատիկ զրո, $z=2$ -ը սովորական զրո:

320. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{-2n+2}, z\in C\backslash\{0\}$: **321.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2-n}}{n!}, z\in C\backslash\{0\}$:

322. $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(1+\frac{z-\pi/4}{2n+1}\right)(z-\pi/4)^{2n-1}, z\in C\backslash\{0\}$: **323.** $\frac{1}{2z}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{(2n)!}z^{-2n-1}, z\in C\backslash\{0\}$: **324.** $(z^2-2z+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}}\left(\sin 1+\frac{\cos 1}{(2n+1)z}\right), z\in C\backslash\{0\}$:

325. $[(z-1)^2+2(z-1)+1]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(z-1)^{-n}, z\in C\backslash\{1\}$:

326. $\frac{1}{2(z+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(2n)!}(z+1)^{-2n-1}, z\in C\backslash\{-1\}$: **327.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n, |z|<1, \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\frac{1}{z^{n+1}}\right), 1<|z|<2, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n+1}{z^{n+1}}, |z|>2$:

328. $\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n-\frac{1}{6^n}\right)z^n, |z|<1, \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\frac{z^n}{6^n}\right), 1<|z|<6,$ $\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+6^{n+1}}{z^{n+1}}, |z|>6$: **329.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n, |z|<2,$ $-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{z^{n+1}}+\frac{z^n}{3^{n+1}}\right), 2<|z|<3, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{z^{n+1}}, |z|>3$: **330.** $-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n\right)(z-1)^n, |z-1|<1, -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}\right), 1<|z-1|<2, \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}, |z-1|>2$: **331.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)(z+1)^n, |z+1|<2, -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2(z+1)^n}{3^{n+1}}z^n+\frac{2^n}{(z+1)^{n+1}}\right), 2<|z|<3, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 3^n-2^n}{(z+1)^{n+1}}, |z+1|>3$: **332.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}z^{n-2}, 0<|z|<2, \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^nz^{-n-3}, |z|>2$:

333. $-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n\right)z^{n+3}, |z|<1, -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n+3}}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{z^{n-2}}\right), 1<|z|<2, \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{z^{n-2}}, |z|>2$: **334.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!}$: **335.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nz^{-2n}}{(2n+1)!}$:

336. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nz^{-2n+3}}{(2n)!}$: **337.** $\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+2}$:

338. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{2n+3}$: **339.** $e\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{1}{2!}\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}-\frac{1}{2\cdot 3!}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}+\cdots:\right)$: **340.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}(b^n-a^n)z^n$: **343.** ա. $\max\{k,m\}$, բ. $k+m$, գ. $m-k$ *կարգի զրո, եթե* $m\geq k$, $k-m$ *կարգի բևեռ, եթե* $m<k$: **344i.** n: **344ii.** –n: **345.** ա.

$2aA,$ *որտեղ* $A = f_{գլխ.}(0)$, ք. 0: 346.
$z = \pm\pi$ *երկրորդ կարգի բևեռներ են.* $Res_{z=-\pi}f(z) = \frac{e^{-\pi}(\pi+1)}{4\pi^3}$,
$Res_{z=\pi}f(z) = \frac{e^{\pi}(\pi-1)}{4\pi^3}$; $z = \infty$ *է.ե.կ.* $Res_{z=\infty}f(z) = \frac{\sinh\pi - \pi\cosh\pi}{2\pi^3}$:
347. $z = \pm i\pi$ *երկրորդ կարգի բևեռներ են.* $Res_{z=-i\pi}f(z) = \frac{ie^{-\pi}(1-\pi)}{4\pi^3}$, $Res_{z=i\pi}f(z) = \frac{-ie^{\pi}(\pi+1)}{4\pi^3}$; $z = \infty$ *է.ե.կ.* $Res_{z=\infty}f(z) = \frac{ie^{-\pi}}{2\pi^2}$:
348. $z = \pm i\pi$ *երկրորդ կարգի բևեռներ են.* $Res_{z=-i\pi}f(z) = \frac{-i}{4\pi^3}$, $Res_{z=i\pi}f(z) = \frac{i}{4\pi^3}$; $z = \infty$ *է.ե.կ.* $Res_{z=\infty}f(z) = 0$: 349.
$z = \pm 1$ *պարզ բևեռներ են.* $Res_{z=-1}f(z) = \frac{\cosh 1}{2}$, $Res_{z=1}f(z) = \frac{-\cosh 1}{2}$; $z = \infty$ *է.ե.կ.* $Res_{z=\infty}f(z) = 0$:
350. $z = \pm 1$ *պարզ բևեռներ են.* $Res_{z=-1}f(z) = Res_{z=1}f(z) = -\frac{\sin 1}{2}$, $z = 0$ *է.ե.կ.* $Res_{z=0}f(z) = \sin 1$: 351.
$z = \pm i\pi$ *երրորդ կարգի բևեռներ են.* $Res_{z=-i\pi}f(z) = Res_{z=i\pi}f(z) = \frac{1}{16\pi^4}$; $z = \infty$ *է.ե.կ.* $Res_{z=\infty}f(z) = -\frac{1}{8\pi^4}$: 352. $z = 0$ *վ.ե.կ.* $z = 2\pi k, k \in Z$, *պարզ բևեռներ.* $Res_{z=0}f(z) = 8\pi k$: 353. $z = -2$, $z = -1$ *պարզ բևեռներ,* $Res_{z=-2}f(z) = 12, Res_{z=-1}f(z) = 12$:
354.
$z = 0,$ *է.ե.կ.* $Res_{z=0}f(z) = \frac{1}{24}, z = \infty,$ *երրորդ կարգի բևեռ,* $Res_{z=\infty}f(z) = -\frac{1}{24}$:
355. .
$z = 0,$ *է.ե.կ.* $Res_{z=0}f(z) = -\frac{1}{2}, z = \infty,$ *երրորդ կարգի բևեռ,* $Res_{z=\infty}f(z) = \frac{1}{2}$:
356. .
$z = 0,$ *է.ե.կ.* $Res_{z=0}f(z) = -\frac{1}{6}, z = \infty,$ *երրորդ կարգի բևեռ,* $Res_{z=\infty}f(z) = \frac{1}{6}$:
357.
$z = 1,$ *պարզ բևեռ* $Res_{z=0}f(z) = -e, z = \infty$ *է.ե.կ.* $, Res_{z=\infty}f(z) = e$:
358. $z = 0$ *վեկ.*
359. $z = 0$ *վ.ե.կ.,* $z = \pi k, k \in Z$ *պարզ բևեռներ.* $Res_{z=\pi k}f(z) = (-1)^n(\pi n)^{n-1}$:

360. $z=-1$ *պարզ բևեռ.* $Res_{z=-1}f(z)=-\cos 1$, $z=$
0 *է.ե.կ.* $Res_{z=0}f(z)=\cos 1$:

361. $z=\pm i$ *պարզ բևեռներ* . $Res_{z=\pm i}f(z)=-\frac{\cos 1}{2}$, $z=$
0 *է.ե.կ.* $Res_{z=0}f(z)=\cos 1$:
362. $z=\pm i$ *պարզ բևեռներ.* $Res_{z=-i}f(z)=\frac{i}{2}$, $Res_{z=i}f(z)=-\frac{i}{2}$:
363. $z_k=\sqrt[4]{-1}=$
$\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}$, $k=0,1,2,3$, *պարզ բևեռներ.* $Res_{z=z_k}f(z)=$
$\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}-i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)$:
364. $z_k=\sqrt[4]{-1}=$
$\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}$, $k=0,1,2,3$, *պարզ բևեռներ.* $Res_{z=z_k}f(z)=$
$\frac{1}{4}\left(\cos\left(\pi k+\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\pi k+\frac{\pi}{4}\right)\right)$: 365.
$z=0$ *երրորդ կարգի բևեռ,* $Res_{z=0}f(z)=5$, $z=$
1 *պարզ բևեռ,* $Res_{z=1}f(z)=-e$, $z=\infty$ *է.ե.կ.* $Res_{z=\infty}f(z)=$
$e-5$: 366. $z=\pm i$ *երկրորդ կարգի բևեռներ* $Res_{z=\pm i}f(z)=$
$\frac{\sinh 1-\cosh 1}{4}$, $z=\infty$ *է.ե.կ.* $Res_{z=\infty}f(z)=\frac{\cosh 1-\sinh 1}{4}$:
367 ա. $\pi-1$; բ. $2\pi i$; գ. $2\pi^2 i$:
368. 1. $4\pi i(\cos 1-\sin 1)$; 2. 0; 3. $\frac{2\pi}{(n+1)!}$; 4. 0: 369-? 370. $-4\pi i$:
371. $2\pi i\left(3e^{1/3}-2\right)$: 372. $-2\pi^2 i$: 373. $-\pi i/3$: 374. $2\pi i$: 375.
$\frac{\pi e^{i}(1-i)}{2}$: 376. 0: 377. $2\pi i$: 378. $\pi i/3$: 379. $2\pi(\sinh 1-1)$: 380.
$2\pi e i/3$: 381. 0: 382. $\frac{1}{\pi^2}$: 383. 0: 384. $14\pi i$:
384.1-0:
385. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$: 386. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$: 387. $\frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{2}$: 388. $\frac{\pi}{3}$: 389. $\frac{\pi}{8}$: 390. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$: 391. $\frac{\pi}{4}$: 392.
$\frac{3\pi}{16}$: 393. $\frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}$:
394. $\frac{\pi}{54}$: 395. $\frac{\pi\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{8}$: 396. $\frac{\pi\left(2b^3+a^3-3ab^2\right)}{4ab^3\left(a^2-b^2\right)^2}$: 397. $\frac{\pi e^{-\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}}{2}$: 398.
$\frac{(3\sin 1-\cos 1)e^{-3}\pi}{3}$:

399. $\frac{\pi e^{-6}}{2}(2\cos 3+\sin 3)$: 400. $\frac{(2e^{-1}-e^{-2})\pi}{12}$: 401. $\frac{\pi}{2(b^2-a^2)}\left(e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b}\right)$: 402. $\frac{\pi e^{-\alpha a}(\alpha a+1)}{2a^3}$:

403. $-\pi e^{-4}\sin 8$: 404. $\frac{\pi e^{-6}}{6}$: 405. $\frac{\pi e^{-1}}{2}$: 406. $\frac{\pi e^{-8}(\sin 4-2\cos 4)}{2}$:

407. $\frac{\pi e^{-20}(\cos 4-5\sin 4)}{5}$:

407.1 $\frac{\pi e^{-1}}{4}$: 408. $\frac{2\pi}{1-r^2}$: 409. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$: 410. $\frac{a\pi}{4(a^2-1)^{3/2}}$: 411. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$: 412. 0:

413. 0: 4

14. $\frac{\pi(4-\sqrt{5})}{\sqrt{5}}$: 414.1 $\frac{\pi}{2a\sqrt{a^2+1}}$: 414.2 $\frac{(2a^3+1)\pi}{4a^3\sqrt{(a^2+1)^3}}$: 414.3

$$\frac{(2a^3+1)\pi}{4a^3\sqrt{(a^2+1)^3}}:$$

424. $Res_{z=0}f(z)=1$: 425. $Res_{z=\ln 2}f(z)=Res_{z=\ln 2\pm 2\pi i}f(z)=2$:

426. $Res_{z=0}f(z)=1, Res_{z=\pm\frac{\pi}{2}}f(z)=\frac{1}{\cosh\pi}, Res_{z=\pm\pi}f(z)=\frac{1}{\cosh 2\pi}$:

427. $Res_{z=0}f(z)=2, Res_{z=\pm\frac{\pi}{2}}f(z)=-2$:

$z=$

|Խառը խնդիրներ. 16.

$$\cos nx=\cos^n x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x+\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x+\cdots$$

$$\sin nx=n\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x+\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x+\cdots$$

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

1. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐ, ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԴՐԱՆՑ ՀԵՏ 3

2. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԿՈՐԵՐ ԵՎ ԿԵՏԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ 12

3. ՍՏԵՐԵՈԳՐԱՖԻԿ ՊՐՈՅԵԿՑԻԱ 18

4.ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՇԱՐՔԵՐ 21

5.ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱ 26

6. ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՎ ՀԱՐՄՈՆԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ 33

7. ԿՈՆՖՈՐՄ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ 42

8. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ: ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ԼՈԿԱԼ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԻ 45

9. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ:

ԿՈՇԻԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ԹԵՈՐԵՄԸ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ԲԱՆԱՁԵՎԸ 50

10. ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԶՐՈՆԵՐԸ

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ԼՈՐԱՆԻ ՇԱՐՔԻ 64

11 . ՄԵԿՈՒՍԱՑՎԱԾ ԵԶԱԿԻ ԿԵՏԵՐ . ԴՐԱՆՑ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ . ՄՆԱՑՔ, ՄՆԱՑՔՆԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄԸ 69

12. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ՄՆԱՑՔՆԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ: ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ՄՆԱՑՔ, ՌՈՒՇԵԻ ԹԵՈՐԵՄԸ 80

A. ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ 86

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ 95

Մ.Ա. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԱՆԱԼԻԶ

(ուսումնամեթոդական ձեռնարկ)

М.А. ЗАКАРЯН

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

(учебно-методическое руководство)

M.A. ZAKARYAN

COMPLEX ANALYSIS

(testbook)

Տպագրության եղանակը՝ թվային
Չափսը՝ 60X84/16
Թուղթը՝ օֆսեթ (80 գ/մ^2)
Ծավալը՝ 8 պայմ. տպ. մամուլ
Տպաքանակը՝ 100

Տպագրվել է «Տիր» հրատարակչության տպագրատանը
Հասցեն՝ Երևան, Այգեձորի փող., 70
Հեռ.՝ (+374 94) 50 99 00, (91) 517 517
Էլ. փոստ՝ tirpublishinghouse@gmail.com
lerq.akumb@gmail.com