

ԱՅՎԱԳՅԱՆ Է.

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ

դասավանդման
մեթոդիկա

[ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՆԱԽԱՆԱԲԱՆ]

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՅՎԱԶՅԱՆ ԷԴՎԱՐԴ

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա Յ Ի
Դ Ա Ս Ա Վ Ա Ն Դ Մ Ա Ն
Մ Ե Թ Ո Դ Ի Կ Ա

(ընդհանուր մեթոդիկա)

Երևան

ԵՊՀ հրատարակչություն

2016

ՀՏԴ 37.016:51
ԳՄԴ 74.262.21
Ա 551

*Հաստատվել է ՀՀ ԿԳ նախարարի կողմից՝
որպես բուհական դասագիրք*

*Հրատարակման է երաշխավորել
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի
ֆակուլտետի գիտխորհուրդը*

Մասնագիտական խմբագիր, ֆիզիկամա-
թեմատիկական գիտ. թեկնածու, դոցենտ՝ **Բաբկեն Ներսիսյան**

ԱՅՎԱԶՅԱՆ ԷԴՎԱՐԴ ԻՇԽԱՆԻ

Ա 551 Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա: Դասագիրք մանկավարժական բուհերի մաթեմատիկայի ֆակուլտետների և ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի ուսանողների համար/ Է. Ի. Այվազյան: Եր., ԵՊՀ հրատ., 2016, 202 էջ:

*Նվիրում եմ ծնողներին՝ վաստակաշատ մանկավարժներ Բշխան Պողոսի
Այվազյանի և Նվարդ Կարապետի Նուրբեկյանի պայծառ հիշատակին:*

ՀՏԴ 37.016:51
ԳՄԴ 74.262.21

ISBN 978-5-8084-2060-1

© ԵՊՀ հրատ., 2016
© Այվազյան Է., 2016

ՆԱԽԱԲԱՆ

Կրթության ոլորտի շատ մասնագետների կարծիքով՝ XX դարը իրավամբ համարվում է հանրակրթության ձևավորման ու զարգացման դար: Սակայն այսօր գրեթե բոլոր զարգացած երկրները, չբավարարվելով իրենց իսկ երկրի կրթության, մասնավորապես հանրակրթության փաստացի վիճակով, կարևորում են այդ համակարգի անընդհատ բարեփոխման հիմնահարցը:

Ընդհանրապես կրթության հիմնախնդիրների կարևորությունն ընդունում են բոլորը: Եվ պատահական չէ, որ 2006 թ. հուլիսին ՌԴ նախագահի նախաձեռնությամբ այդ հարցը Սանկտ Պետերբուրգի գագաթաժողովում մտցվեց **«Մեծ ութնյակի»** ղեկավարների հանդիպման օրակարգ:

Հայտնի է, որ կրթության որակի բարձրացման, գիտատեխնիկական առաջադիմության աճի, տնտեսական ներուժի զարգացման գործում վճռական դեր ունի հենց դպրոցականների և ուսանողների մաթեմատիկական կրթությունը [80; XXXVI]:

Հենց այս փաստի խոր գիտակցմամբ ԵՊՀ-ում ներկայումս «Մաթեմատիկա» առարկան դասավանդվում է նաև բոլոր հումանիտար ֆակուլտետներում: Այս իմաստով ներկայումս գնալով առանձնապես կարևորվում են մաթեմատիկայի մասին հումանիտար գիտությունների մասնագետների տեսակետները:

Ընդհանրապես մաթեմատիկան արդի քաղաքակրթության հիմքերից մեկն է, ընդ որում՝ այն հանդես է գալիս որպես մեր քաղաքակրթության կարևորագույն բաղկացուցիչ մաս՝ ներառելով նաև հոգևոր մշակույթի շատ կողմեր [80; XXXIV]: Այդ պատճառով հատկապես կարևորվում է ժամանակակից մաթեմատիկական կրթության առաջ դրված հիմնախնդիրների լուծումը: Հիմնախնդիրներ, որոնք անհրաժեշտ է դիտարկել ոչ միայն նեղ մասնագիտական, այլև ընդհանուր հումանիտար դիրքորոշումների տեսանկյունից [80; XXXIV], ինչն էլ հեղինակը պայմանավորում է անձի ինտելեկտուալ զարգացման, աշխարհայացքի ձևավորման գործում «Մաթեմատիկա» առարկայի դաստիարակչական ներուժով, ինչպես նաև ամբողջ միջնակարգ և բարձրագույն կրթության համակարգում մաթեմատիկական գիտելիքի ունեցած կարևորագույն դերով:

Դեռ ավելին՝ անցած դարի վերջին տարին՝ 2000 թվականը, ՅՈՒՆԵՍԿՕ-ի կողմից հայտարարվեց **«ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ տարի»** (ԳԴՀ-ում՝ 2008 թ.):

Հայտնի է, սակայն, որ հանրակրթական առարկաների ուսումնադաստիարակչական գործընթացի արդյունավետության բարձրացման համար պատասխանատու կենտրոնական պաշտոնատար անձը ինքը՝ ուսուցիչն է: Խորապես գիտակցելով այս փաստը՝ ՀՀ ԿԳՆ կրթության ազգային ինստիտուտը մշտապես փորձում է համապատասխան տարաբնույթ վերապատրաստման դասընթացների միջոցով բարձրացնել գործող ուսուցիչների առարկայական, մեթոդամանկավար-

ժական և հոգեբանական պատրաստվածության մակարդակը: Մակայն, մյուս կողմից, որոշակիորեն հետ է մնացել բուն՝ ուսուցչի պատրաստման գործընթացի համահունչ բարեփոխման կարևորագույն հիմնախնդրի լուծումը, ինչին միտված են «ՀՀ բարձրագույն և հետբուհական մասնագիտական կրթության մասին» օրենքը [3] և «ՀՀ կրթության զարգացման 2011-2015 թթ. պետական ծրագիրը» [2]: Այդ առումով «ՀՀ կրթության զարգացման 2011-2015 թթ. պետական ծրագրում» մասնավորաբար նշվում է, որ «Մասնագիտական կրթության կարևորագույն խնդիրներից է բուհերում և ՄՄՈՒՀ-ներում ժամանակակից, միջազգային պահանջներին համապատասխան կահավորված գրադարանների (այդ թվում՝ էլեկտրոնային) բացակայությունը...: Խնդիրներ կան նաև ուսումնական գրականության ստեղծման, թարգմանության և տեղայնացման ապահովման, ուսումնական հաստատությունները ժամանակակից տեխնիկական սարքավորումներով, լաբորատորիաներով ու ուսումնամեթոդական պարագաներով համալրման աշխատանքներում» (հոդվ. 39)»: Նշենք, որ համապատասխան կայքերում էլեկտրոնային գրադարաններն արդեն ներդրված են:

Համաձայն «ՀՀ բարձրագույն և հետբուհական մասնագիտական կրթության մասին» օրենքի հոդված 6-ի՝ բուհերի իրավասության մեջ մասնավորաբար նշվում են ԲՀՄԿ մասնագիտությունների և մասնագիտացումների ուսումնական պլանների և առարկայական ծրագրերի մշակումն ու հաստատումը, ուսումնական գրականության և ուսումնամեթոդական ձեռնարկների հրատարակումը:

Հավելենք նաև, որ ներկայումս հրապարակում գրեթե չկան, օրինակ, «Մաթեմատիկայի դասավանդման ընդհանուր մեթոդիկայի», ինչպես նաև կոնկրետ և մասնավոր մեթոդիկաների ժամանակակից, հայերեն բուհական դասագրքեր:

Սույն ձեռնարկը հիմնականում նվիրված է միջնակարգ դպրոցի մաթեմատիկայի դասավանդման ընդհանուր մեթոդիկայի բուհական դասընթացի շարադրմանը: Ձեռնարկի «Հավելված» բաժնում ընդգրկված նյութերը կարող են օգտագործվել որպես ուսանողների կուրսային աշխատանքների թեմաներ:

Այս գրքում իրենց արտացոլումն են գտել ներկայումս ՀՀ մանկավարժական բուհերում և ԵՊՀ-ում գործող «Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի» (ՄԴՄ) ծրագրերի հարցերը: Ընդ որում՝ մաթեմատիկայի ընդհանուր և կոնկրետ մեթոդիկաների հարցերը ընտրված են ըստ դպրոցական մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշչի բովանդակային հիմնական գծերի:

Ձեռնարկի բովանդակությունը մշակելիս հեղինակը հենվել է հետևյալ դրույթների վրա:

ա. Ձեռնարկում անհրաժեշտաբար պետք է արժարժվեն ուսուցչի մեթոդական պատրաստվածության հիմնական հարցերը (տեսական պատրաստվածության համար անհրաժեշտ նյութը, մեթոդական խորհուրդներ մանկավարժական պրակ-

տիկայի անցկացման համար, ցուցումներ կուրսային և ավարտական աշխատանքների կատարման համար):

բ. Դասախոսությունը ուսանողի համար գիտելիքների, կարողությունների ու հմտությունների ձեռքբերման միակ ու լիակատար աղբյուրը չէ: Ոչ պակաս կարևոր ու արդյունավետ է նաև ուսուցման ժամանակակից՝ փոխներգործուն (ինտերակտիվ) և համագործակցային մեթոդներով անցկացված գործնական և սեմինարային պարապմունքների միջոցով ուսանողների ինքնուրույն աշխատանքի կազմակերպումը:

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

0.1. Արդի փուլում բարձրագույն դպրոցի մասնագետների պատրաստման հիմնական խնդիրները

Համաձայն «ՀՀ բարձրագույն և հետբուհական մասնագիտական կրթության մասին» օրենքի հոդված 4-ի՝ բարձրագույն և հետբուհական մասնագիտական կրթության բնագավառում պետական քաղաքականությունը իրականացվում է մասնավորապես.

- մարդու և քաղաքացու՝ բարձրագույն և հետբուհական մասնագիտական կրթություն ստանալու իրավունքի ապահովման և պաշտպանության,
- այդ կրթության մատչելիության, կրթական գործընթացի անընդհատության, հաջորդայնության և շարունակականության, մրցութայնության, թափանցիկության և հրապարակայնության սկզբունքների միջոցով:

Վերոհիշյալ սկզբունքները իրականացնելու նպատակով նույն օրենքի հոդված 5-ը մասնավորապես նախատեսում է.

- բարձրագույն և հետբուհական կրթության որակի ապահովմանը, միջազգային գիտակրթական համագործակցության զարգացմանը և դրա ինտեգրմանը նպաստելու, այդ կրթության համակարգի զարգացման և միջազգային ասպարեզում մրցունակության բարձրացման խնդիրների լուծումը:

Իր հերթին պետությունը ապահովում է բարձրագույն և հետբուհական մասնագիտական կրթության (ԲՀՄԿ) զարգացման հետևյալ ձևերը.

- անցում բարձրագույն կրթության որակավորման երկաստիճան (բակալավր-մագիստրոս) համակարգի,
- գիտելիքների ստուգման և որակի գնահատման, ուսուցման կազմակերպման նոր ձևերի, այդ թվում՝ կրեդիտային համակարգի ներդրում,
- զարգացում ապահովելու նպատակով կրթական նոր հայեցակարգերի և տեխնոլոգիաների ներդրում և այլն:

Համաձայն «Կրթության մասին» ՀՀ օրենքի՝ կրթության բնագավառում պետական քաղաքականության կազմակերպական հիմքը կրթության զարգացման պետական ծրագիրն է, որում նկարագրված են կրթության համակարգի առկա վիճակը և հիմնախնդիրները (տե՛ս հոդված 2-ը):

Միաժամանակ ցածր է կրթության որակը մանկավարժական բուհերում, ինչը պայմանավորված է մի շարք գործոններով. դիմորդներն ուսման համեմատաբար ցածր առաջադիմություն ունեցող շրջանավարտներն են, բուհերը համալրված չեն ժամանակակից ուսումնական ռեսուրսներով, բարձրագույն կրթության ոլորտի բարեփոխումները դանդաղ են ներդրվում նշված բուհերում: Մանկավարժների պատրաստման բնագավառում առկա խնդիրների լուծմանն է ուղղված

«Կրթության որակ և համապատասխանություն» երկրորդ վարկային ծրագրի հիմնական բաղադրիչներից մեկը (հոդված 28):

0.2. Արդի պայմաններում մաթեմատիկայի ուսուցչի պատրաստմանը ներկայացվող հիմնական պահանջները

Մաթեմատիկական կրթության բարելավման հարցերը մշտապես գտնվել են բոլոր զարգացած երկրների ուշադրության կենտրոնում: Վերջին շրջանում այդ ուշադրությունն առավել մեծացել է: Եվ դա ունի հստակ բացատրություն:

ԽՍՀՄ-ի և Արևմուտքի միջև Սառը պատերազմի ավարտից հետո էապես փոքրացավ այդ երկրների ռազմաարդյունաբերական համալիրների կարևորագույն բաղադրիչների՝ մաթեմատիկա գիտության և մաթեմատիկական կրթության ֆինանսավորումը: Դա տեղի ունեցավ պլանավորված տնտեսությունից շուկայականի անցած ոչ միայն Ռուսաստան, Հայաստան և այլ երկրներում, այլև ԱՄՆ-ում, Ֆրանսիայում և արևմտյան այլ երկրներում:

Հայտնի է, որ ԽՍՀՄ-ում մաթեմատիկական կրթությունը աշխարհում լավագույններից մեկն էր: Շուկայական տնտեսություն որդեգրած ՌԴ-ում, ՀՀ-ում առաջացած տնտեսական իրավիճակի հետևանքով այդ և մնացած հետխորհրդային երկրների մաթեմատիկական կրթությունը հայտնվեց առանձնակի ծանր իրավիճակում: Նման բարդագույն իրավիճակում, որում հայտնվել է մաթեմատիկական կրթությունը, անհրաժեշտ է հաշվի առնել այդ հիմնախնդրի լուծման մանկավարժական, սոցիոլոգիական ու հոգեբանական գործոնները և ծառացած իրավիճակի խոր ու բազմակողմանի վերլուծության հենքի վրա հաստատական, զգուշորեն և շրջահայացորեն բարելավել այն, ինչին հասնելը բոլորովին էլ հեշտ չէ [80; XXXVI]: Այնուամենայնիվ, այդ ուղղությամբ որոշակի քայլեր կատարվում են ողջ աշխարհում:

Ներկայումս էապես բարեփոխվել է ՀՀ դպրոցական մաթեմատիկական կրթությունը: Միջնակարգ հանրակրթական դպրոցը դարձել է եռաստիճան՝ տարրական դպրոց, միջին դպրոց և ավագ դպրոց: Ընդ որում՝ ավագ դպրոցն ունի իրավաբանական անձի կարգավիճակ և գործում է ԿԳՆ ենթակայությամբ: Ըստ նոր ուսումնական պլանների՝ ավագ դպրոցներում իրականացվում է տարբերակված՝ հոսքային ուսուցում՝ ըստ տարբերակված հանրակրթական (հումանիտար), հիմնական, բնագիտական (հարակից) և խորացված ուսուցման (ֆիզմաթ) հոսքերի: Դա իր հերթին էապես ընդլայնում է ուսուցման գործընթացի հնարավորությունները՝ թույլ տալով առավել ամբողջականորեն բավարարել ավագ դպրոցի աշակերտների կարիքներն ու հոգևոր պահանջմունքները:

Թերևս արդի փուլում միջնակարգ հանրակրթական դպրոցում կատարված ամենանշանակալից նորույթը ո՛չ բովանդակային է և ո՛չ էլ՝ մեթոդամանկավարժական: Այն վերաբերում է դպրոցավարությանն ընդհանրապես: Հայտնի է, որ

նախկինում, հատկապես խորհրդային շրջանում, դպրոցը **ուսուցակենտրոն** էր. դպրոցի կենտրոնական դեմքը ուսուցիչն էր, և ամեն ինչ պլանավորվում էր այս փաստի գիտակցման հիման վրա: Ներկայումս մենք սահուն կերպով անցում ենք կատարում ուսուցակենտրոն համակարգից դեպի նոր՝ **աշակերտակենտրոն համակարգ**: Ամենին էլ չնսեմացնելով ուսուցչի կարևորագույն դերը ուսուցման գործընթացում, այնուամենայնիվ, մենք այժմ ամեն ինչ պետք է պլանավորենք «**աշակերտի**»՝ այն կարևորագույն անձի շուրջը, որի կրթադաստիարակչական կարիքները բավարարելուն էլ նպատակաուղղված է հանրակրթությունը:

Նշենք ժամանակակից, մասնավորապես, մաթեմատիկայի ուսուցչի հիմնական անձնային այն որակները, որոնց նա պետք է բավարարի որպես Հայաստանի Հանրապետության հանրակրթական դպրոցի ուսուցիչ:

Առաջին հերթին, ապագա ուսուցիչ-ուսանողի անձի կայացման գործընթացում կարևորվում է նրա աշխարհայացքի ձևավորումը, համոզմունքների և հայրենասիրական որակների դաստիարակումը, մարդկանց հետ աշխատելու հաղորդակցական, համագործակցային կարողությունների ու հմտությունների ձևավորումը, ակտիվ քաղաքացի լինելու ձգտումը:

Երկրորդ հերթին, մասնագետի՝ մաթեմատիկայի ուսուցչի պատրաստման կարևոր պայմաններից մեկը նրա ընդհանուր գիտական պատրաստվածության բարձր մակարդակն է: Դա ներկայումս առավել կարևոր է, քանի որ մաթեմատիկայի ներկա դասընթացում լայնորեն են ներկայացված ժամանակակից մաթեմատիկայի հիմնական հասկացություններն ու գաղափարները:

Մաթեմատիկայի ապագա ուսուցչի պատրաստվածության երրորդ, ոչ պակաս կարևոր, միգուցե կարևորագույն որակը նրա մանկավարժական, հոգեբանական և մեթոդամանկավարժական գիտելիքների իմացությունն է, ուսումնադաստիարակչական գործընթացի խորքային այն օրինաչափությունների գիտակցումը, որոնք ապահովում են դրա արդյունավետությունը:

Ներկայումս ՀՀ միջնակարգ հանրակրթական դպրոցում ավարտվել է անցումը 12-ամյա միջնակարգ, եռաստիճան հանրակրթական դպրոցի նոր չափորոշիչներին, ծրագրերին և ուսումնական պլաններին, որոնցում, հաշվի առնելով միջնակարգ մաթեմատիկական կրթության մեզանում գոյություն ունեցող ավանդույթներն ու միջազգային փորձը, սահմանված են մաթեմատիկայի դպրոցական կրթության բովանդակությունը և ուսուցման համար անհրաժեշտ մաթեմատիկայի դասընթացի օպտիմալ կառուցվածքը: Այդ պատճառով չափորոշչահեն մաթեմատիկական կրթություն իրականացնելու հաջողության գրավականը ապագա ուսուցչի կողմից այդ չափորոշիչներում, ծրագրերում ու դրանց հիման վրա ստեղծված դասագրքերում ներդրված գաղափարների գիտակցումն է և դրանք սովորողներին փոխանցելու պատրաստակամությունը:

Ակնհայտ է նաև, որ, ինչպես ընդունված է մեթոդիկայում, սովորողների կողմից այդ նոր դասընթացի ստեղծագործաբար յուրացումը հնարավոր է միայն ուսուցչի կողմից համապատասխան ստեղծագործական մեթոդական աշխատանքի դեպքում: Իսկ դա հնարավոր է, եթե ուսուցիչը կարողանա անընդհատ մեթոդական «փորձեր» կատարել, պարբերաբար իրականացնել ուսումնական գործընթացի արդյունավետության գնահատումներ, համեմատել ուսուցման տարբեր ձևեր ու մեթոդներ, ամեն անգամ գտնել տվյալ նյութը ուսուցանելու նպատակահարմար ուսուցման մեթոդը, հաճախակի դիմել գիտական ճանաչողության մեթոդների արդյունավետ կիրառություններին, տիրապետել ուսուցման ինչպես ավանդական, այնպես էլ ժամանակակից՝ փոխներգործուն և համագործակցային ուսուցման մեթոդներին և սովորողների առաջադիմության գնահատման միավորային ու ոչ միավորային մեթոդներին:

Բնականաբար, նման վարպետության հասնելու համար առաջին հերթին անհրաժեշտ է շատ լավ յուրացնել մաթեմատիկայի բովանդակային միջուկն ու թաղանթը, ազատորեն տիրապետել մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի հիմնական գաղափարներին, իմանալ դրանց դերն ու տեղը դպրոցականների մաթեմատիկական գիտելիքների համակարգում:

Դիտարկենք մաթեմատիկայի ապագա ուսուցչի մեթոդական պատրաստվածության հիմնական բաղադրիչները.

- իմանալ հասարակության զարգացման արդի փուլում հանրակրթական դպրոցի առաջ դրված խնդիրները,

- իմանալ մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի և նրա հետազոտության մեթոդների տեսական հիմունքները, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում աշակերտներին դաստիարակելու գործնական ուղիները,

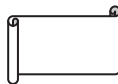
- խորապես և համակողմանիորեն տիրապետել մաթեմատիկայի գործող ծրագրերին, դասագրքերին ու ուսումնամեթոդական ձեռնարկներին,

- կարողանալ ստեղծագործաբար կիրառել սեփական մեթոդամանկավարժական գիտելիքները,

- ծանոթ լինել ինչպես մեր երկրի, այնպես էլ արտասահմանյան զարգացած երկրների մաթեմատիկական կրթության բարեփոխումների հիմնական ուղղություններին,

- տիրապետել սովորողների ուսուցումը կազմակերպելու նոր՝ փոխներգործուն և համագործակցային ուսուցման մեթոդներին, ձևերին ու եղանակներին,

- կարողանալ սերմանել և զարգացնել սովորողների հետաքրքրությունները մաթեմատիկայի նկատմամբ, խթանել նրանց ճանաչողական ակտիվությունը և այլն:



ԳԼՈՒԽ ԱՌԱՋԻՆ. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴԱՍԱՎԱՆԴՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱՅԻ ԱՌԱՐԿԱՆ

1.1. Մաթեմատիկա գիտության և միջնակարգ դպրոցի «Մաթեմատիկա» բնագավառի բնութագրումը

1.1.1. «Մաթեմատիկա» գիտության զարգացման մասին

Մաթեմատիկայի զարգացման ողջ պատմությունը պայմանականորեն կարելի է տրոհել չորս հիմնական փուլերի: Յուրաքանչյուր նոր փուլի սկիզբը նշանավորվում է գիտական խոշորագույն հայտնագործումով, որը արձանագրում է մաթեմատիկայի զարգացման որակապես նոր դարաշրջանի սկիզբը:

I փուլը կոչվում է մաթեմատիկայի սաղմնավորման փուլ: Այն սկսվում է հին ժամանակներից ու տևում է մ.թ.ա. VI – V դարերը և կապված է պրակտիկ հաշվումների և չափումների, «թիվ» և «պատկեր» հասկացությունների ձևավորման հետ: Այս փուլում են սկզբնավորվում թվաբանությունն ու երկրաչափությունը, որպես պրակտիկ խնդիրների լուծման համար անհրաժեշտ էմպիրիկ կանոնների հավաքածու: Այդ մասին է վկայում անտիկ ժամանակներից մեզ հասած մաթեմատիկական տրակտատների համար տարածված հետևյալ հունական բնաբանը՝ «Արա՛յնպես, ինչպես կատարվում է, իսկ կատարվում է այսպես ...»: Այս ռեպրոդուկտիվ հրահանգը, ցավոք, գործում է մինչև մեր ժամանակները և համարվում է ներկայումս գործող կրկնուսուցման հիմնական աշխատանքային գործիքը:

II փուլը՝ տարրական կամ **հաստատուն մեծությունների մաթեմատիկան** սկսվում է մ.թ.ա. VI – V դարերից և շարունակվում է մինչև մ.թ. XVII դարը: Այս փուլի սկիզբը նշանավորվում է Էվկլիդեսի կողմից իր նշանավոր «Սկզբունքներ» աշխատությունում երկրաչափության՝ որպես ինքնուրույն գիտության կառուցմամբ: Որպես ինքնուրույն գիտություն՝ այս փուլում սկզբնավորվում է նաև էմպիրիկ թվաբանությունը, իսկ թվաբանությունն ու երկրաչափությունն արդեն ունեն իրենց հետազոտության սեփական առարկան (թիվը ու պատկերը) և մեթոդը: Այս փուլի մաթեմատիկան Արիստոտելը (մ.թ.ա. 384-322 թթ.) բնութագրում է որպես **գիտություն քանակի մասին**: Նշված փուլը բնութագրվում է նաև դեդուկտիվ (ապացուցման) մեթոդի հայտնագործմամբ, որն իր զարգացումն է գտնում Զենոնի, Էվկլիդեսի, Արքիմեդի (Արքիմեդեսի), Ապոլոնիոսի և այլոց աշխատանքներում: Ամենայն հավանականությամբ դեդուկտիվ մեթոդի սաղմերը պետք է փնտրել բաբելոնական և եգիպտական մաթեմատիկայում: Օրինակ՝ հայտնի է, որ բաբելոնացիները տիրապետել են, այսպես կոչված, Պյութագորասի թեորեմին, սակայն, ինչպես գտնում է Գ. Ֆրոյդենտալը, չէր կարող այդ այդքան էլ ոչ ակնհայտ թեորեմը

էմպիրիկ (փորձի) ճանապարհով հայտնագործվել Բաբելոնում: Այն անպայմանորեն հայտնագործվել է դեդուկտիվ ճանապարհով:

II փուլի կարևոր իրադարձություններից մեկը «հանրահաշվի» հայտնագործումն է, հատուկ սիմվոլիկայի ներմուծումը: Այդպիսով՝ էապես ընդլայնվում է նաև մաթեմատիկայի հետազոտության առարկան:

III փուլը, որը սկսվում է XVII դարից և շարունակվում է մինչև XIX դարի կեսերը, կոչվում է դասական բարձրագույն մաթեմատիկայի (անալիզի) կամ փոփոխական մեծությունների մաթեմատիկա: Այս փուլը սկզբնավորվում է անվերջ փոքրերի հաշվի հայտնագործմամբ: Գնալով ավելի հիմնարար տեղ է գրավում ֆունկցիայի գաղափարը և դրա հետ կապված՝ անընդհատության ու շարժման գաղափարները: Մաթեմատիկական անալիզի հայտնագործմամբ մաթեմատիկան վերածվում է բնության ճանաչման հզորագույն գործիքի: Անալիտիկ երկրաչափության ստեղծմամբ անսպասելի «կամուրջ» է գցվում երկրաչափության, հանրահաշվի և անալիզի միջև: Մեծ հաջողությունների են հասնում աքսիոմատիկ մեթոդի զարգացումն ու կիրառումը, ինչն էլ վերջին հաշվով, բնականաբար, հանգեցնում է մաթեմատիկայի տրամաբանական հիմնավորման հարցի առաջնահերթության կարգով դրմանը: Դրանով բացատրվում է նաև մաթեմատիկայի բնույթը:

IV փուլը սկսվում է XIX դարի կեսերից և շարունակվում է մինչև օրս: Այն սկզբնավորվում է Ն. Ի. Լոբաչևսկու և Յա. Բոլայի կողմից ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափության հայտնագործմամբ և կոչվում է Ժամանակակից մաթեմատիկայի կամ փոփոխական հարաբերությունների կամ էլ կառուցարկելի մաթեմատիկայի փուլ: Մաթեմատիկայի զարգացման այս փուլին հատուկ են մաթեմատիկայի ծայրահեղորեն լայն ճյուղավորումը, ինչպես նաև աքսիոմատիկ մեթոդի խոր զարգացումը, որի արդյունքում ձևավորվեց նոր հիմնարար մաթեմատիկական հասկացություն՝ «Մաթեմատիկական կառուցվածքի (ստրուկտուրայի)» հասկացությունը: «Մաթեմատիկական կառուցվածք» հասկացությունը թույլ տվեց միասնություն հաստատել մաթեմատիկական այնպիսի փաստերի և մեթոդների բազմազանությունում, որոնք առաջին հայացքից իրարից բավականաչափ տարբեր են: XX դարում աստիճանաբար գիտակցվեց նաև, որ մաթեմատիկայում լիարժեքորեն թույլատրելի և գործնականորեն օգտակար են այն օբյեկտների մասին դատողությունները, որոնք և զգայական ոչ մի մեկնաբանություն չունեն:

Ժամանակակից մաթեմատիկայի փուլը սկզբնավորվեց նրա գրեթե բոլոր հիմնական բաժինների խոր փոփոխություններով: Այդ փոփոխությունները առավել ընդգծված կարելի է ցուցադրել երկրաչափության զարգացման օրինակի վրա:

1. Եթե նախկինում երկրաչափությունը ուսումնասիրում էր միայն նյութական աշխարհի տարածական ձևերն ու հարաբերությունները, ապա ներկայումս նրա առարկան ընդգրկում է բազմաթիվ այլ ձևեր և հարաբերություններ, որոնք նման են

տարածականներին և թույլ են տալիս երկրաչափական (վեկտորական, կոորդինատների, ձևափոխությունների) մեթոդների կիրառություններ: Դրա հետ կապված՝ **«տարածություն»** հասկացությունը մաթեմատիկայում ստանում է նոր առավել լայն և առանձնահատուկ իմաստ: Դրան համապատասխան զանազանվում են, օրինակ, Լորաշևսկու տարածություն, պրոյեկտիվ տարածություն, Էվկլիդեսյան տարածություն, բազմաչափ (քառաչափ և ավելի) տարածություն, ռիմանյան տարածություն, տոպոլոգիական և այլ տարածություններ: Դրանց համապատասխան զանազանվում են Լորաշևսկու, պրոեկտիվ, Էվկլիդեսյան, բազմաչափ, ռիմանյան, տոպոլոգիական և այլ երկրաչափություններ:

2. Առաջ է գալիս նոր մոտեցում երկրաչափական պատկերի հատկությունների հետազոտման նկատմամբ, որը առաջին անգամ ձևակերպեց հայտնի երկրաչափ Ֆելիքս Բլայնը 1872 թ. իր հայտնի Էռլանգենյան ծրագրում: Ըստ Ֆ. Բլայնի՝ **երկրաչափությունը սահմանվում է որպես ձևափոխությունների որևէ խմբի ինվարիանտների տեսություն**: Այսինքն՝ փոփոխելով ձևափոխությունների խումբը՝ կատանանք մի այլ երկրաչափություն, օրինակ՝ վերևում նշվածները:

Վերոհիշյալ տեսությունները իրենց կարևորագույն կիրառություններն ունեն ոչ միայն մաթեմատիկայում, այլև ֆիզիկայում և մեխանիկայում, ընդ որում՝ առանձնակի նշանակալից են դրանց կիրառությունները հարաբերականության տեսությունում:

Վերջին շրջանում շատ բուռն զարգացում է ապրել նաև հանրահաշիվը: Սկսելով թվային բազմություններում թվաբանական գործողությունների ուսումնասիրություններից՝ ժամանակակից հանրահաշիվը, պահպանելով այդ հենքը, զբաղվում է այդ գործողություններին միայն ձևականորեն նման և ցանկացած բնույթի տարրեր ունեցող բազմությունների վրա տրված գործողությունների ուսումնասիրմամբ: Ժամանակակից բարձրագույն հանրահաշիվի և նրա առանձին բաժինների՝ խմբերի, օղակների, կիսաօղակների, դաշտերի և այլ տեսությունների հասկացությունները, մեթոդներն ու արդյունքները լայն կիրառություն ունեն անալիզում, երկրաչափությունում, ֆիզիկայում, բյուրեղագիտությունում և այլն:

Շատ խոր տեղաշարժեր կատարվեցին նաև անալիզում: Կառուցվեց իրական թվերի խիստ տեսությունը, ճշգրտվեց **«ֆունկցիա»** հասկացությունը և դրա միջոցով էլ՝ **«սահման», «ածանցյալ» և «ինտեգրալ»** հասկացությունները: Այդ ճշգրտումները կատարվեցին XIX դարի 80-ական թվականներին գերմանացի մաթեմատիկոսներ Վայերշտրասի, Դեդեքինդի և Կանտորի կողմից: Վերջինս հիմք դրեց նաև բազմությունների տեսությանը, որը հետագայում դարձավ ժամանակակից մաթեմատիկայի հիմունքներից մեկը: Անալիզից տրոհվեցին (առանձնացան) բազմաթիվ բաժիններ՝ իրական փոփոխականի ֆունկցիաների տեսությունը և կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսությունը, ֆունկցիաների կոնստրուկտիվ տեսությունը, դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունը, ինտեգրալ հավասար

քումների տեսությունը, մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների տեսությունը, ֆունկցիոնալ անալիզը և այլն:

Ոչ էվկլիդյան երկրաչափությունների հայտնագործումը իր հերթին ցնցեց մաթեմատիկայի շենքի հիմքերը և հանգեցրեց մաթեմատիկայի հիմունքների բնագավառում խոր հետազոտությունների կատարմանը, ընդհուպ միչև նոր տեսության հայտնագործմանը, որը Դ. Հիլբերտն անվանեց պարզապես մետամաթեմատիկական ապացուցումների տեսություն: Այս տեսության հետագա զարգացումը խթան դարձավ մաթեմատիկական տրամաբանության բուռն զարգացմանը:

Մինչև XX դարի 40-ական թվականները աստիճանաբար նկատելի էր դառնում հաշվումների բնագավառում տեխնիկական միջոցների անբավարարությունը, իսկ առանձին դեպքերում՝ նաև անհնարիությունը: Այդ միջոցների փնտրտուքի արդյունքում 1940-ական թվականներին հայտնագործված էՀՄ-ները, աստիճանաբար հզորանալով (սկսելով 100-ից՝ այժմ միչև միլիոնավոր գործողություն վայրկյանում), մեծ հեղաշրջում առաջացրին հաշվողական տեխնիկայում: ԷՀՄ-ները թույլ են տալիս լուծել ոչ միայն մաթեմատիկական, այլ նաև տարբեր բնագավառների տարաբնույթի խնդիրներ (տեխնոլոգիական գործընթացների կառավարում արդյունաբերությունում, տեքստի թարգմանում մի լեզվից մեկ այլ լեզվի և այլն): Այդ հնարավորությունների արդյունքում հիմք դրվեց կառավարման և կապի խնդիրներով զբաղվող գիտական բնագավառի՝ կիբեռնետիկայի ստեղծմանը:

Ժամանակակից մաթեմատիկայի այս բուռն ճյուղավորումը առաջին հայացքից պետք է բերեր մաթեմատիկական տեսությունների՝ իրարից օտարմանը: Սակայն դրանց դիֆերենցմանը զուգահեռ միաժամանակ ընթանում էր նաև դրանց ինտեգրման՝ զլոբալացման աշխատանքները, որոնց հիմքում դրվեց տեսաբազմական մոտեցում: Այդ աշխատանքները կատարվեցին XIX դարի վերջին և XX դարի սկզբին, երբ մշակվեցին ժամանակակից մաթեմատիկայի ընդհանուր տրամաբանական հիմունքները:

Ժամանակակից մաթեմատիկայի շարադրմանը տեսաբազմական մոտեցում էր ցուցաբերում, օրինակ, Բուրբակի ծածկանունով հայտնի ֆրանսիական հրաշալի մաթեմատիկոսների խումբը:

Ակադեմիկոս Ա. Ն. Կոլմոգորովի կողմից տրվել է «ժամանակակից մաթեմատիկայի» հետևյալ սահմանումը:

«ա. Մաթեմատիկայի հիմքում դրված է բազմությունների մաքուր տեսությունը:

բ. Մաթեմատիկայի առանձին բաժինները զբաղվում են այս կամ այն կառուցվածքների սեռին պատկանող կառուցվածքներով: Կառուցվածքների յուրաքանչյուր սեռ բնութագրվում (սահմանվում) է արսիոմների համապատասխան համակարգով: Մաթեմատիկան հետաքրքրվում է կառուցվածքների միայն այն հատկություններով, որոնք արտածվում, բխում են միայն ընդունված արսիոմների

համակարգից, այսինքն՝ կառուցվածքները ուսումնասիրվում են իզոմորֆիզմի ճշտությամբ»:

Իսկ հայտնի մաթեմատիկոս Վ. Ուսպենսկին նշում է, որ «...ներկայումս առավել ևս պարզ է դառնում, որ մաթեմատիկան ոչ միայն թեորեմների տեսքով ներկայացված **փաստերի հավաքածու է, այլ առաջին հերթին՝ մեթոդների զինանոց և նույնիսկ ամենից առաջ՝ գիտության և պրակտիկ գործունեության ամենատարբեր բնագավառների փաստերի նկարագրման համար անհրաժեշտ լեզու»:**

Նշենք միայն, որ ժամանակակից մաթեմատիկայի զարգացման և նրա սահմանման վերոհիշյալ իմաստների մեկնաբանման փայլուն օրինակ է մաթեմատիկական տրամաբանությունը:

1.1.2. Միջնակարգ դպրոցի «Մաթեմատիկա» բնագավառի ուսումնական առարկաների բնութագրումը

Մաթեմատիկայի՝ որպես գիտության ուսումնասիրության առարկայի հարցը առաջնային է, ինչպես մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի, այնպես էլ մաթեմատիկայի ուսուցչի՝ պրակտիկ գործունեության համար:

Հայտնի է Ֆ. Էնգելսի կողմից տրված և արդեն դասական դարձած՝ «Մաթեմատիկա» առարկայի սահմանումը. **«Մաքուր մաթեմատիկայի ուսումնասիրման օբյեկտը իրական աշխարհի տարածական ձևերն ու քանական հարաբերություններն են, այսինքն՝ միանգամայն իրական նյութը»:**

Այդ տարածական ձևերի ու քանակական հարաբերությունների ուսումնասիրման համար մաթեմատիկան վերացարկվում է դրանց նյութական բովանդակությունից: Մաթեմատիկայի համար կարևոր չէ, թե ինչ նյութից է պատրաստված գունդը. նրա համար կարևոր է միայն, որ գոյություն ունեն գնդի տեսք ունեցող տարածական մարմիններ, որոնք էլ ինքը ուսումնասիրում է:

Հավասարապես մաթեմատիկայի համար էական չէ, թե բնական ինչ երևույթների ուսումնասիրումն է հանգեցրել որոշակի ֆունկցիաների դիտարկման անհրաժեշտությանը. մաթեմատիկայի համար ֆունկցիան ինքնին կարևոր է, և հենց այն էլ հանդիսանում է մաթեմատիկայի ինքնուրույն օբյեկտ:

Պատմականորեն մաթեմատիկայի ելքային հասկացությունները՝ **«բնական թիվն» ու «երկրաչափական պատկերը»**, փոխառված են իրական աշխարհից, այլ ոչ թե ծնվել են որևէ մեկի ուղեղում, որպես մաքուր մտածողության արդյունք:

Ֆ. Էնգելսի սահմանումից հետո ժամանակակից մաթեմատիկան շատ է հարստացել ու ճյուղավորվել:

Իրականում մաթեմատիկայի ուսումնասիրության առարկա են համարվում ցանկացած բնույթի տարրերից բաղկացած բազմության վրա սահմանված (տրված) գործողություններն ու հարաբերությունները, որոնք, կախված համապատասխան աքսիոմների համակարգից, կազմում են մաթեմատիկական զանազան կառուցվածքներ: Մաթեմատիկայի ամենատարբեր բաժիններն ու բնագավառները նույնիսկ ներկայացվում են այդ կառուցվածքների մոդելների (ինտերպրետացիաների) տեսքով: Դրան համապատասխան ժամանակակից մաթեմատիկան կարելի է սահմանել որպես **գիտություն մաթեմատիկական կառուցվածքների և նրանց մոդելների մասին:**

Նկատենք, սակայն, որ օբյեկտի կոնկրետ առանձնահատկություններից և բովանդակությունից վերացարկվելը ամեննին էլ չի նշանակում հեռացում իրականությունից: Կոնկրետ բովանդակությունից ժամակավորապես շեղվելով՝ մաթեմատիկան տալիս է աբստրակտ (վերացական) կառուցվածքների հարուստ հավաքածու, որը, հակառակը թույլ է տալիս, առավել տնտեսվար ու խնայողաբար, առավել արդյունավետորեն ուսումնասիրել իրականության ամենատարբեր երևույթները:

Մաթեմատիկան, ինչպես ցանկացած այլ գիտություն, գտնվում է անընդհատ զարգացման գործընթացում, որը պայմանավորվում է երկու հիմնական պատճառներով՝ կյանքից բխող պահանջների և բուն մաթեմատիկայի կայացման ներքին պահանջների հիման վրա:

Մաթեմատիկայի բուռն զարգացումը (այսօր աշխարհում օրական շուրջ 50 հայտնագործություն է կատարվում) մեծ ազդեցություն է թողնում տեխնիկայի, տնտեսության, արտադրության կառավարման զարգացման վրա և այլ գիտությունների, այդ թվում՝ նաև մանկավարժության և մեթոդիկայի վրա:

Մարդկային հասարակության զարգացումն անիմաստ կլիներ առանց հերթական սերնդին նախորդ սերունդների կողմից կուտակած մշակույթի, մասնավորապես մաթեմատիկայի հսկա շտեմարանի, այսինքն՝ գիտելիքների ու փորձի փոխանցման: Թեկուզև միայն մաթեմատիկայի ահռելի ծավալով շտեմարանի այն մասը պետք է «Մաթեմատիկա» ուսումնական առարկայի շրջանակներում մատուցվի (փոխանցվի) նոր սերնդին, ինչն էլ.

- *հնարավորություն կտա երիտասարդ սերնդին որոշակի հստակ պատկերացում ունենալու մաթեմատիկա գիտության մասին,*

- *կօգնի տիրապետել մաթեմատիկական մեթոդներին և դրանց կիրառություններին,*

- *կնպաստի նրանց տրամաբանական մտածողության զարգացմանը:*

Հասկանալի է, որ «Մաթեմատիկա» ուսումնական առարկայի բովանդակությունը չի կարող չփոխվել ժամանակի ընթացքում: Այդ փոփոխությունները պայմանավորված են հետևյալ հիմնական պատճառներով:

1. Պայմանավորված հասարակության զարգացման և նրա տեխնիկատնտեսական կարիքների բավարարման պահանջներով՝ անընդհատ ընդլայնվում և փոփոխվում են մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակները, ինչն էլ էական պահանջներ է դնում ոչ միայն մաթեմատիկայի բովանդակության փոփոխման վրա, այլ նաև ուսումնական ծրագրերով սահմանվող սովորողների մաթեմատիկական պատրաստվածության մակարդակի վրա:

2. Բուն մաթեմատիկա գիտության անընդհատ զարգացումը, նրանում նոր, կարևոր բնագավառների առաջացումը առաջ են բերում մի կողմից ուսումնական առարկայի համապատասխան նորացման անհրաժեշտության, մյուս կողմից իրենց ճանաչողական նշանակությունն ու գործնական արժեքը կորցրած թեմաների կրճատում, հեռացում ծրագրից... *(կոմբինատորիկայի և բազմությունների տեսության տարրերի մուտք, մաթեմատիկական անալիզի, մաթեմատիկական տրամաբանության վիճակագրության ու հավանականությունների տեսության տարրերի մուտք, լոգարիթմական հաշվեքանոնի հեռացում ծրագրից և այլն):*

3. Հասարակության զարգացման շրջանակներում սովորողների ընդհանուր զարգացման բարձրացման միտումը, նրանց ճանաչողական հնարավորությունների աճը հնարավորություն են տալիս առարկայի ուսուցումը սկսելու ավելի վաղ տարիքից և ավարտելու ավելի ուշ: Օրինակ՝ նախկինում 7-8 տարեկանի փոխարեն, 2006 թ.-ից սկսած, միջնակարգ մաթեմատիկական կրթությունը պետք է սկսվի 6 տարեկանից և շարունակվի 12 տարի՝ մինչև 18 տարեկանը:

4. Բուն մանկավարժագիտության, մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի զարգացումը առաջավոր փորձի և նոր տեխնոլոգիաների մուտքը մասսայական դպրոց նույնպես հնարավորություն են ընձեռում որոշակիորեն բարձրացնելու մաթեմատիկայի բովանդակության յուրացման մատչելիությունն ու արդյունավետությունը և համապատասխան ձևով՝ նաև մաթեմատիկական կրթության մակարդակը:

«Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի վերջին մի քանի տասնամյակների պատմությունը ցույց է տալիս, որ ինչպես այդ բնագավառը ներկայացնող ուսումնական առարկաների ծրագրերի միջուկներում, այնպես էլ թաղանթներում տեղի են ունեցել լուրջ փոփոխություններ.

Ներկայումս ուսումնական ծրագրերը 12-ամյա կրթության շրջանակում նախատեսում են մաթեմատիկայի ուսուցման հետևյալ աստիճանները՝

1. Մաթեմատիկայի տարրական դասընթաց (1-4-րդ դաս.),
2. Մաթեմատիկա (5-6-րդ դաս.),
3. Հանրահաշիվ (7-8-րդ դաս.),
4. Հանրահաշիվ և մաթ. անալիզի տարրեր (10-12-րդ դաս.),
5. Երկրաչափություն (7-12-րդ դաս.):

Արևմտյան երկրներում հիմնականում տարրական՝ սկզբնական դպրոցը ընդգրկում է 1-6-րդ դասարանները: Այդ դասարանների մաթեմատիկայի հանրակրթական դասընթացը ենթադրում է մաթեմատիկական մի շարք առարկաների՝ բնական և ռացիոնալ թվերի թվաբանության ուսուցում, հանրահաշվի և երկրաչափության տարրերի նախաուսուցում, վիճակագրության, հավանականության և կոմբինատորիկայի տարրերի նախաուսուցում (խնդիրների լուծման օրինակների միջոցով), **յուրահատուկ խառնուրդ՝ կոնգլումերատ**: Ընդ որում՝ 1-4-րդ դասարաններում այդ բոլորը ծառայում են հիմնականում մեկ՝ թվաբանության ուսուցման նպատակի: Այսինքն, օրինակ, երկրաչափական նյութի կիրառությունը հանդես է գալիս որպես թվաբանության ուսուցման գննական միջոց: Սա ակնհայտորեն դրսևորվում է դասանյութում: Էապես այլ է հանրահաշվի տարրերի նախաուսուցման հիմնահարցի լուծումը: Իրականում թվաբանության ուսուցմանը զուգընթաց աներևույթ կատարվում է նաև հանրահաշվի տարրերի նախաուսուցում, և շատ դժվար է դասվարի համար նման պարագայում զանազանել հանրահաշիվը թվաբանությունից: Ասվածը մեկնաբանենք մեկ օրինակով:

Դիտարկենք մաթեմատիկայի տարրական դասընթացի հետևյալ խնդրի լուծումը. «Գոռը գնեց 5 տետր, յուրաքանչյուրը՝ 40 դրամով, 5 գրիչ, յուրաքանչյուրը՝ 30 դրամով: Որքա՞ն գումար վճարեց Գոռը գնումների համար»:

Համաձայն մաթեմատիկայի տարրական դասընթացի ուսուցման մեթոդիկայի՝ պահանջվում է այս և նման տեքստային այլ խնդիրներ լուծելիս պարտադիր կատարել մեթոդական հետևյալ պահանջները.

- ա. առանձնացնել խնդրի պայմանն ու պահանջը,
- բ. համառոտագրել (մոդելավորել) խնդրային իրավիճակը,
- գ. լուծել խնդիրը երկու եղանակով,
- դ. յուրաքանչյուր եղանակով լուծման վերջում կազմել խնդրի լուծման արտահայտությունը:

Այս խնդրի լեզվաքերականական ձևակերպումն ունի ստանդարտ ձև, որի պայմանի և պահանջի առանձնացումը ոչ մի դժվարության հետ կապված չէ, քանի որ առաջին նախադասությունում ամփոփված է պայմանը, իսկ երկրորդում՝ պահանջը:

Համառոտագրելուց հետո աշակերտների մեծ մասը սովորաբար խնդիրը լուծում է երեք հարցով՝

- 1) $5 \cdot 40 = 200$,
- 2) $5 \cdot 30 = 150$,
- 3) $200 + 150 = 350$,

և կազմում է խնդրի լուծման արտահայտությունը՝ $5 \cdot 40 + 5 \cdot 30$:

Որոշ աշակերտներ, հատկապես բարձր առաջադիմություն ունեցողները, խնդիրը լուծում են երկու հարցով՝

1) $40 + 30 = 70$,

2) $5 \cdot 70 = 350$,

և կազմում են խնդրի լուծման իրենց եղանակի արտահայտությունը՝ $5(40+30)$: Ընդ որում, եթե սովորողներից ոչ մեկը չի փորձում խնդիրը լուծել երկրորդ եղանակով, ապա միջամտում է ուսուցիչը և ցուցադրում լուծման երկրորդ եղանակը:

Թվաբանական բովանդակությամբ այս և նման տեքստային այլ խնդիրները լուծումը, բացի **խնդրի պայմանի ու պահանջի առանձնացման և մոդելավորման** համաուսումնական կարողությունների ձևավորման ու թվաբանության ուսուցման գլխավոր նպատակներից, ունի նաև այլ՝ հանրահաշվի որոշակի տարրերի նախա-ուսուցման նպատակ: Մասնավորապես, յուրաքանչյուր տեքստային խնդրի լուծման վերջում խնդրի լուծման արտահայտության կազմումն ունի խնդրի պայմանի մեջ մտնող ենթապայմանների միջոցով **թվաբանական արտահայտություն կազմելու կարողության ձևավորման նպատակ**: Միաժամանակ ենթադրվում է, որ այդպես սովորողները նաև կընկալեն, որ լուծման արտահայտությունը հենց խնդրի լուծման ալգորիթն է:

Ինչ վերաբերում է նման խնդիրները երկու եղանակով լուծելու պահանջին, նշենք, որ բազմաթիվ անգամներ հետևողականորեն իրականացնելով նշված մեթոդիկան և ամեն անգամ համեմատելով արդյունքները՝ ի վերջո նրանք կհանգեն **գումարի նկատմամբ բազմապատկման բաշխական օրենքին**: Սա նաև բաշխական օրենքի (աքսիոմի) ճանաչմանն ուղղված հիանալի հնարք է:

Այսպիսով՝ տարրական դասարանների մաթեմատիկայի դասընթացում լիարժեք ուսուցման մասին խոսք կարող է լինել միայն այն դեպքում, երբ ուսուցիչն ամեն անգամ թվաբանության ուսուցմանը զուգընթաց կատարի նաև երկրաչափության և հանրահաշվի տարրերի բացահայտ նախաուսուցում: Միայն այսպես կարելի է ապահովել միջին դպրոցի հանրահաշվի և երկրաչափության դասընթացների նախաուսուցումը:

Մաթեմատիկայի 1-4-րդ դասարանների կոնգլոմերատիվ դասընթացի տրամաբանական շարունակությունը միջին դպրոցի 5-6-րդ դասարանների մաթեմատիկայի դասընթացն է, որում հետևողականորեն, գծային եղանակով շարունակվում է թվաբանության ուսուցումը և ավարտվում ռացիոնալ թվերի թվային համակարգի (դաշտի) կառուցմամբ: Այն դարձյալ ինդուկտիվ հիմունքներով կառուցված կոնգլոմերատիվ դասընթաց է, միայն այն տարբերությամբ, որ 5-րդ դասարանի դասընթացում արդեն բացահայտորեն հանդես են գալիս մաքուր երկրաչափական բովանդակությամբ առանձին ենթագլուխներ (դասեր), իսկ 6-րդ դասարանում՝ նաև առանձին թեմատիկ միավորի (գլխի) տեսքով:

Համաձայն հանրակրթության պետական կրթակարգի՝ տարրական դպրոցի հիմնական խնդիրը ուսումնական գործունեություն իրականացնելուն ունակ (սովորելու կարողություն ունեցող) երեխայի ձևավորումն է: Մակայն մաթեմատիկայի

բնագավառում այդ գերխնդիրը, ինչպես նշեցինք, միայն տարրական դպրոցով չի սահմանափակվում: Այն շարունակվում է 5-6-րդ դասարանների մաթեմատիկայի դասընթացում՝ ռացիոնալ թվերի թվաբանության կառուցմամբ: Իրականում միջնակարգ մաթեմատիկական կրթության այս ենթաաստիճանը յուրահատուկ անցումային օղակի դեր է կատարում՝ ապահովելով ռացիոնալ թվերի թվաբանությունից դեպի միջին դպրոցի հանրահաշվի և երկրաչափության կիսադեդուկտիվ դասընթացներ սահուն անցումը:

Հաշվի առնելով, որ բնական, ամբողջ և ռացիոնալ թվերի համակարգերի ուսումնասիրությունը հիմնականում ավարտվում է 6-րդ դասարանում և միջին դպրոցի ավելի բարձր դասարաններում, դրանց ուսուցմանն այլևս չենք անդրադառնալու. դրանք հիմնականում ներառված են ուսուցման ամփոփիչ (չափորոշչային) արդյունքների շրջանակներում և այդ իսկ պատճառով հենքային են ինչպես ավարտական, այնպես էլ բուհական ընդունելության քննությունների համար:

Անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, որ կրթության այս փուլի թերությունները չեն կարող վերացվել, վերականգնվել հաջորդ փուլերի ուսուցմամբ, ինչպես բազմիցս նշվել է, դրանք, աստիճանաբար խորանալով, **«ձնագնդի էֆեկտով»** ունենում են անցանկալի ազդեցություն սովորողների մաթեմատիկական պատրաստվածության վրա: Հետևաբար հարկ է առանձնակի հոգատարությամբ, զգուշությամբ և ջանադրաբար իրականացնել բնական, ամբողջ և ռացիոնալ թվերի թվաբանության ուսուցումը: Դրանց բավականաչափ բարձր մակարդակի ապահովումը, ինչպես նաև այդ դասընթացներում ներառված հանրահաշվի նախագիտելիքների և երկրաչափության տարրերի նախաուսուցումը միայն հնարավորություն կընձեռի սովորողներին պատշաճ մակարդակով նախապատրաստելու «Մաթեմատիկա» բնագավառի առարկաների հետագա «դեդուկտիվ» դասընթացների ուսուցումը:

Արդեն միջին դպրոցի հաջորդ ենթաաստիճանում «Մաթեմատիկա» բնագավառը ներկայացվում է երկու առարկաների՝ «Հանրահաշվի» և «Երկրաչափության», իսկ ավագ դպրոցում՝ «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» և «Երկրաչափություն» առարկաների միջոցով: Նկատենք, որ 7-9-րդ դասարանների զուտ հանրահաշվի դասընթաց գոյություն չունի, քանի որ իրականում այդ դասարաններում հանրահաշվի ուսուցումն առանց **«ֆունկցիա»** հասկացության և դրա հատկությունների ուսումնասիրության ոչ միայն հնարավոր չէ, այլև նպատակահարմար էլ չէ: Նույն պատկերը նկատվում է նաև ավագ դպրոցի «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» դասընթացում, միայն թե այստեղ ավելանում են նաև դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի տարրերը, ինչպես նաև, ինչպես այստեղ, այնպես էլ 5-9 դասարանների դասընթացներում՝ նաև վիճակագրության, միացությունների և հավանականությունների տեսությունների տարրերը:

1.1.3. Միջնակարգ դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակները

Մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակները բխում են ուսուցման և դաստիարակման ընդհանուր նպատակներից, որոնք ներկայումս ձևակերպված են «Հանրակրթության պետական կրթակարգում».

մաթեմատիկական հասկացություններով աշխատելու, խնդիրներ և վարժություններ լուծելու միջոցով խթանել սովորողի մտավոր ունակությունների զարգացումը, բարձրակարգ մտածողության ձևավորումը, սովորեցնել հստակ ձևակերպել մտքերը, կատարել գրագետ դատողություններ և արագ կողմնորոշվել տարբեր իրավիճակներում:

Միջնակարգ դպրոցի մաթեմատիկայի նպատակները 3-ն են՝ հանրակրթական, դաստիարակչական և պրակտիկ (գործնական):

1. Հանրակրթական նպատակներն են՝

- սովորողներին փոխանցել մաթեմատիկական գիտելիքների, ունակությունների և հմտությունների համակարգ,

- օգնել սովորողներին տիրապետել իրականության ճանաչման մաթեմատիկական մեթոդներին,

- սովորողներին նախապատրաստել մաթեմատիկական բանավոր և գրավոր խոսքին վերջինիս հատուկ որակներով (պարզություն, հստակություն, ամբողջականություն, սեղմություն և այլն),

- օգնել սովորողներին տիրապետել մաթեմատիկական գիտելիքների նվազագույն պաշարին, որը թույլ կտա նրանց իրենց ունեցած մաթեմատիկական պատրաստվածությունը կիրառել ճանաչողական ակտիվ գործունեության ընթացքում (ուսուցման կամ ինքնաուսուցման գործընթացներում):

2. Դաստիարակչական նպատակներն են՝

- լեզվատրամաբանական մտածողության ձևավորում և սովորողների մաթեմատիկական կուլտուրայի դաստիարակում,

- սովորողների մոտ մաթեմատիկական կայուն հետաքրքրությունների դաստիարակում,

- սովորողների բարոյական, գեղագիտական և այլ արժեքների դաստիարակում (արժեքային համակարգի դաստիարակում):

3. Գործնական (պրակտիկ) նպատակներն են՝

- ձեռք բերած գիտելիքներն ու կարողությունները առօրյա կյանքի և այլ ուսումնական առարկաների (ֆիզիկա, քիմիա, ինֆորմատիկա, գծագրություն և այլն) ուսուցման ընթացքում ծառայած պարզագույն խնդիրների լուծման գործընթացներում կիրառելու կարողություններ,

- մաթեմատիկական գործիքներով, սարքերով և համակարգիչներով աշխատելու կարողություններ,

-
- գիտելիքներն ինքնուրույն ձեռք բերելու կարողություններ,
 - սոցիալական հմտությունների ձևավորում:

Մաթեմատիկայի, ինչպես նաև ցանկացած ուսումնական այլ առարկայի ուսուցման նպատակները մշտապես ենթակա են որոշակի փոփոխությունների՝ կախված այն խնդիրներից, որոնք անընդհատ դրվում են հանրակրթական դպրոցի առաջ պետության և հասարակության կողմից:

1.2. Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի բնութագրումը

1.2.1. «Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկան» որպես գիտական բնագավառ: Նրա առարկան և բնութագրումը

«Մեթոդիկա» բառն ունի հունական ծագում («մեթոդ» հունարեն նշանակում է *ճանապարհ, ուղի*): Մաթեմատիկայի մեթոդիկան (դիդակտիկան կամ մանկավարժությունը) մանկավարժագիտության բաժին է, որն ուսումնասիրում է մաթեմատիկայի դասավանդման օրինաչափությունները նրա զարգացման որոշակի մակարդակում հասարակության և պետության կողմից դրված ուսուցման նպատակներին համապատասխան:

Այսպիսով՝ մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի (այսուհետ՝ ՄԴՄ) առարկան մաթեմատիկայի դասավանդումն է: ՄԴՄ-ի սահմանումը՝ որպես մաթեմատիկայի ուսուցման մասին գիտություն, դեռևս չի ապացուցում նման գիտության գոյության իրավունքը: Այդ իրավունքը պայմանավորվում է մաթեմատիկայի ուսուցմամբ առաջ քաշված գիտական առանձնահատուկ հիմնախնդիրների առկայությամբ:

Նախ և առաջ փորձենք հասկանալ, թե ինչ է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը:

Մաթեմատիկայի ուսուցումը ուսուցչի կողմից իրականացվող բարդ գործընթաց է, որի ընթացքում նա օգտագործում է մի շարք ուսումնամեթոդական ու տեխնիկական ուսուցման միջոցներ՝ ***դասագրքեր, մեթոդական ձեռնարկներ, դիդակտիկ նյութեր, ուսումնական տեխնիկական միջոցներ՝ համակարգիչ, միկրոհաշվիչ, ֆիլմ, դիաֆիլմ*** և այլն:

Օգտվելով կիբեռնետիկայում կիրառվող կառավարման գործընթացի վերլուծությունից՝ փաստենք, որ ուսուցումը՝ որպես կառավարման գործընթաց, ներառում է տեղեկատվության ***ընկալումը, մշակումը, պահպանումն ու փոխանցումը:***

Նախ ուսուցիչը մշակում է այն տեղեկատվությունը, որը ստացվում է ծրագրից, գիտական, ուսումնամեթոդական գրականությունից, ինչպես նաև սովորողի մտավոր գործունեության մակարդակի ու հնարավորությունների մասին տեղեկու-

թյուններից և օգտվելով որոշակի միջոցներից՝ ուսուցման մեթոդներից՝ այդ ուսումնական տեղեկատվությունը փոխանցում է սովորողներին:

Սովորողն ընկալում և մշակում է ուսուցչից, դասագրքերից և այլ աղբյուրներից ստացած տեղեկատվությունը և ուսուցչի պահանջով, հակառակը, նորից ուսուցչին է վերադարձնում ստացած ուսումնական նյութի յուրացման մակարդակի և այդ միջոցով ձեռք բերած մտավոր գործունեության զարգացման մասին տեղեկություններ՝ հարցերի պատասխանների, վարժությունների և խնդիրների լուծման տեսքով:

Այսպիսով՝ ուսուցման գործընթացում տեղի է ունենում տեղեկատվության փոխանցում երկու ուղղություններով՝ ուսուցչից աշակերտին՝ **ուղիղ կապ** և, հակառակը, աշակերտից ուսուցչին՝ **հետադարձ կապ**:



Հետադարձ կապն ուսուցման գործընթացի կարևորագույն բաղկացուցիչ մասն է: Առանց հաշվառելու, պարզելու ուսուցման գործընթացի յուրաքանչյուր փուլում աշակերտի մտավոր գործունեության, նրա մոտ մտածողության որոշակի կառույցների զարգացման, որոշակի հասկացությունների ձևավորման և նախորդ թեմաների յուրացման որակի մակարդակը՝ անհնար և անիմաստ է դառնում արդյունավետ ուսուցման կազմակերպումը: Դա վերաբերում է ուսուցմանը ընդհանրապես և առավելապես՝ մաթեմատիկային վերջինիս մի շարք առանձնահատկությունների պատճառով:

Բուն «**մաթեմատիկա**» հասկացությունը կարելի է ընկալել և որպես **որոշակի մտավոր գործունեություն (մաթեմատիկական գործունեություն)** կամ էլ՝ **այդ գործունեության արդյունքում ստացվող տեսություն**:

Երկրորդ դեպքում մենք գործ ունենք մի բնագավառի հետ, որը զբաղված է մաթեմատիկական որոշակի տեսության կամ նրա հիմունքների ուսուցմամբ, իսկ առաջին դեպքում դա մի բնագավառ է, որի առարկան մտավոր գործունեության որոշակի ասպեկտների ուսուցումն է, այսինքն՝ «**մաթեմատիկական գործունեություն**» հասկացության կիրառումը ուսումնական գործընթացում: Ավանդաբար այդ հասկացություններն օգտագործվում են միայն գիտնական մաթեմատիկոսների (հայտնագործողների) պարագայում: Սակայն, երբ աշակերտն իր համար ինքնուրույն «հայտնագործում է» մի բան, որը չնայած գիտության մեջ վաղուց հայտնագործված (ապացուցված) է, ապա նա նույնպես դատում (մտածում) է ինչպես գիտնական հայտնագործողը: Եվ մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի խնդիրն էլ հենց այն է, որ սովորողների մոտ ձևավորվեն ու զարգացնան մտավոր գործունեության կառույցները, որոնք բնութագրական են մաթեմատիկական (կամ

մաթեմատիկոսների) գործունեությանը և նպաստում են մաթեմատիկայում հայտնագործությունների կատարմանը:

Մենք, **մաթեմատիկայի ուսուցում** ասելով, այսուհետև պետք է հասկանանք բուն **մաթեմատիկական գործունեության ուսուցում**:

Մաթեմատիկայի ուսուցման մյուս առանձնահատկությունն այն է, որ մաթեմատիկական ուսուցանվում է ոչ թե որպես փաստերի շարան (ինչպես դա աշխարհագրությունում կամ պատմության մեջ է), այլ որոշակի խնդիրների համակարգի միջոցով:

Բացի նշված առանձնահատկություններից՝ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը կառուցելիս, անշուշտ, հաշվի են առնվում ճանաչողության ընդհանուր տեսության, դիդակտիկայի և մանկավարժական հոգեբանության տեսությունները: Օրինակ՝ դիդակտիկայի սկզբունքները՝ գիտականությունը, ուսուցման համակարգվածությունն ու հաջորդականությունը, սովորողի գիտակցականությունն ու ակտիվությունը, ուսուցման դիտողականությունն ու մատչելիությունը, գիտելիքների ամրությունն ու անհատական մոտեցման սկզբունքը:

1.2.2. ՄԴՄ-ի կապերը գիտական այլ բնագավառների հետ:

ՄԴՄ-ի մեթոդական հիմունքները

ՄԴՄ-ն, կոչված լինելով բացահայտելու մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի օրինաչափությունները, մեծ դժվարությունների է հանդիպում այն պատճառով, որ հանդիսանում է սահմանային գիտություն փիլիսոփայության, մաթեմատիկայի, տրամաբանության, հոգեբանության, կենսաբանության, տարիքային ֆիզիոլոգիայի, կիբեռնետիկայի և արվեստի համար:

ՄԴՄ-ն սնվում է նշված գիտություններից՝ հաշվի առնելով բոլոր այն արդյունքները, որոնք վերաբերում են սովորողների կրթադաստիարակչական հարցերին, նրանց տարիքային և ֆիզիոլոգիական առանձնահատկություններին, լեզվամտածողությանը, նաև առնչվում է կառավարմանը, հետևաբար այն սերտ կապ ունի նաև կիբեռնետիկա գիտության հետ: **Կիբեռնետիկան, ինչպես գիտենք, գիտություն է կառավարման արվեստի մասին**, այս իմաստով էլ ՄԴՄ-ն օգտվում է նրա տվյալներից:

ՄԴՄ-ն պայմանականորեն բաժանվում է երեք բաժինների՝

1. **մաթեմատիկայի դասավանդման ընդհանուր մեթոդիկա** (օրինակ՝ ուսմունք ուսուցման մեթոդների մասին),

2. **հատուկ մեթոդիկա** (օրինակ՝ դպրոցական մաթեմատիկայի «ֆունկցիա» հասկացության ուսուցման մեթոդիկա),

3. **կոնկրետ մեթոդիկա՝**

ա. ընդհանուր մեթոդիկայի մասնակի հարցերի ուսումնասիրություն (կամ մասնակի մեթոդիկա),

բ. հատուկ մեթոդիկայի մասնակի հարցերի ուսումնասիրություն (օրինակ՝ «Քառանկյունները» թեմայի ուսուցման մեթոդիկա):

ՄԴՄ-ի բովանդակության հիմնական մասը *«Ինչպե՞ս ուսուցանել մաթեմատիկան»* հարցի պատասխանն է: *«Ի՞նչ ուսուցանել մաթեմատիկայից»* հարցի պատասխանը տրվում է մաթեմատիկայի պետական ծրագրերի և դասագրքերի միջոցով:

ՄԴՄ-ն կոչված է պատասխանելու հետևյալ երեք հիմնահարցերին.

1. *ինչո՞ւ ուսուցանել մաթեմատիկա,*
2. *ի՞նչ ուսուցանել մաթեմատիկայից,*
3. *ինչպե՞ս ուսուցանել մաթեմատիկան:*

Այդ իմաստով մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում Ա. Ա. Ստոյարն առանձնացնում է հետևյալ չորս բաղադրիչները.

1. *ուսուցման նպատակը (ինչո՞ւ ուսուցանել),*
2. *ուսուցման օբյեկտը (ո՞ւմ ուսուցանել),*
3. *ուսուցման բովանդակությունը (ի՞նչ ուսուցանել),*
4. *ուսուցման մեթոդները (ինչպե՞ս ուսուցանել):*

Մաթեմատիկայի արդյունավետ ուսուցման նկատառումներից ելնելով՝ շատ կարևոր է՝ *«Ինչո՞ւ ուսուցանել մաթեմատիկա»* հիմնահարցի պարզաբանումն ամեն անգամ, երբ դրա կարիքը զգացվում է: Յուրաքանչյուր նոր թեորեմ, բանաձև անցնելիս նախևառաջ սովորողները պետք է ընկալեն, հասկանան, թե ինչու է կարևորվում այդ փաստի իմանալն ու այն կիրառել կարողանալը, և որ այդ փաստով զինվելով՝ իրենք ավելի ուժեղ ու հզոր են դառնում:

Այսինքն՝ յուրաքանչյուր նոր թեմա անցնելիս նախևառաջ անհրաժեշտ է պարզաբանել այդ թեմայի ուսուցման շարժառիթները, կիրառական և սոցիալական արժեքը, մոտիվացիան: Սովորաբար դասագրքերի հեղինակները շրջանցում են այս հարցի քննարկումը, քանի որ այն ուսուցման մեթոդիկայի խնդիրն է:

Մաթեմատիկայի դասավանդման մնացած հիմնախնդիրները պայմանականորեն բաժանվում են երկու դասի՝

- *«ի՞նչ ուսուցանել մաթեմատիկայից»* հիմնահարցի հետ կապված՝ մաթեմատիկայի բովանդակության ընտրման հիմնախնդիրներ,
- *«ինչպե՞ս ուսուցանել մաթեմատիկա»* հիմնահարցով պայմանավորված՝ մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդի ընտրության հիմնախնդիրներ:

Նշենք, որ մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի հիմնախնդիրները միայն պայմանականորեն կարող են բաժանվել նշված երկու խմբերի, քանի որ, ինչպես գիտենք, ուսուցման գործընթացի բաղկացուցիչ մասերը սերտորեն փոխ-

կապակցված են միմյանց հետ, և դրանցից որևէ մեկին վերաբերող ցանկացած հիմնախնդրի լուծումը անհնար է առանց մյուսների հաշվառման:

Ուսուցման յուրաքանչյուր մեթոդի մշակումն ու ցուցադրումը անհնար է կատարել վերացական մակարդակում՝ առանց կոնկրետ բովանդակության կիրառության, և համապատասխանաբար որևէ բովանդակային թեմատիկ միավորի ուսուցումն անհնար է կատարել առանց ուսուցման որևէ կոնկրետ մեթոդի կիրառության: Ասվածը հրաշալի կարելի է ցուցադրել որևէ դասի թեմայի ուսուցումը պլանավորելիս: Իր հերթին, օրինակ, փոխներգործուն (ինտերակտիվ) մեթոդներ մշակելիս անհրաժեշտ է ստեղծել նոր բովանդակությամբ նյութ՝ անհրաժեշտ քանակությամբ փոխներգործուն այնպիսի առաջադրանքների հավաքածու, որոնք մեծ մասամբ բացակայում են դպրոցական դասագրքերում:

Այսպիսով՝ ուսուցման նոր բովանդակությունը ենթադրում է ուսուցման նոր մեթոդների կիրառության պահանջարկ, իսկ նոր մեթոդների կիրառությունն իր հերթին ենթադրում է նոր բովանդակության անհրաժեշտություն:

Որպես գիտություն՝ առաջին անգամ ՄԴՄ-ն առանձնացավ մանկավարժությունից և ձևավորվեց որպես ինքնուրույն գիտություն շվեդարացի մանկավարժ Յ. Հ. Պեստալոցիի (1746-1827) աշխատանքներում: Վերջինս 1803 թ. հրապարակեց «Զննական ուսմունք թվի մասին» և «Զննականության այբուբեն կամ զննական ուսմունք չափման մասին» աշխատությունները:

Հայտնի է, որ ցանկացած ուսումնական ձեռնարկի հեղինակը կոչված է լուծելու մեթոդական մի շարք խնդիրներ, այս իմաստով մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի ծնունդը հայ իրականության մեջ վստահորեն կարելի է կապել 7-րդ դարի նշանավոր հայ գիտնական, մաթեմատիկոս Անանիա Շիրակացու հեղինակած թվաբանության դասագրքի հետ, իսկ ռուսական իրականության մեջ՝ Լ. Ֆ. Մագնիցկու (1703) թվաբանության դասագրքի հետ, որում արդեն առաջին անգամ Ռուսաստանում թվերը գրվում էին արաբական-հնդկական թվանշաններով:

Ականավոր մաթեմատիկոս Լեոնարդ Էյլերը (1707-1783) հրատարակեց «Թվաբանության ուղեցույց» (1738-1740) և «Հանրամատչելի թվաբանություն» (1768-1769) աշխատությունները, որոնք հետագայում հանդիսացան թվաբանության և հանրաշվի համակարգված դասընթացների դասագրքերի նախատիպեր:

Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկան առանձնապես բուռն զարգացում ապրեց խորհրդային շրջանում, և լիովին բնական է համարել, որ մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկան՝ որպես լիարժեք ինքնուրույն գիտություն, ձևավորվել է միայն XX դարում:

Միջնակարգ դպրոցի **մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի ավանդական համակարգը** ներառում էր մաթեմատիկայի դասավանդման ընդհանուր մեթոդիկան և մասնավոր մեթոդիկաները՝ մաթեմատիկայի տարրական դաս-

ընթացի, մաթեմատիկայի (5-6), հանրահաշվի, երկրաչափության և հանրահաշվի և մաթեմատիկական անալիզի տարրերի համակարգված դասընթացների մեթոդիկաներ: Ընդ որում՝ մաթեմատիկական առարկաների այդ մասնավոր մեթոդիկաներում ներառված էին նաև կոնկրետ մեթոդիկային բնորոշ մեթոդական խորհուրդներ ինչպես դասընթացի տեսական նյութի յուրացման, այնպես էլ վարժությունների ու խնդիրների լուծման վերաբերյալ: Սակայն այդ մեթոդիկաները հիմնականում ունեին նորմատիվ բնույթ, և այդ պատճառով էլ դրանց անվանում էին նաև դեդատոմսային (рецептурный), քանի որ դրանցում տրվում էին առարկայի կոնկրետ հարցերին վերաբերող և ուսուցիչներին ուղղված «դեդատոմսեր»: Մաթեմատիկայի դասավանդման ընդհանուր մեթոդիկան առավելապես տեսական, հայեցակարգային բնույթ ուներ, և նրանում ուսումնասիրվում էին ցանկացած մաթեմատիկական առարկայի ուսուցմանն առնչվող այնպիսի ընդհանուր հարցեր, ինչպիսիք են մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակները, մաթեմատիկական հասկացությունները և պնդումները, թեորեմներն ու դրանց ապացուցման մեթոդները, խնդիրներն ու դրանց լուծման մեթոդիկան, ուսուցման ձևերը, եղանակներն ու մեթոդները, մաթեմատիկայի դասը, կառուցվածքը, տիպերը և այլն:

Երբ 1970-ական թվականներին հանրակրթական դպրոցն անցավ մաթեմատիկական կրթության նոր բովանդակության, մաթեմատիկայի դասավանդման ընդհանուր մեթոդիկան ընդլայնեց իր ուսումնասիրության շրջանակները, իսկ մասնավոր մեթոդիկաներում, հակառակը, նկատվեց բովանդակության որոշակի կրճատում: Դա բացատրվում էր նրանով, որ այդ տարիներից սկսած՝ յուրաքանչյուր նոր դասագիրք ուղեկցվում էր նաև ուսուցիչների համար նախատեսված մեթոդական համապատասխան ձեռնարկով, որը պարունակում էր դասագրքի ծրագրային յուրաքանչյուր կետի ուսուցման վերաբերյալ դիտողություններ և մեթոդական խորհուրդներ: Եվ, բնականաբար, այդ ձեռնարկները կատարում էին նաև մասնավոր մեթոդիկաների գործառույթներ: Ինչնիցե, այդ մեթոդական ձեռնարկները վերջին հաշվով կատարեցին որոշակի դեր՝ որոշ չափով բարձրացնելով ԽՍՀՄ-ի և սոցիալիստական երկրների մաթեմատիկայի ուսուցիչների հսկա բանակի մեթոդական պատրաստվածության մակարդակը:

Հետխորհրդային շրջանի նորանկախ պետությունների կրթական համակարգերը, այդ թվում՝ նաև մաթեմատիկական կրթությունը, արդեն չէին կարող առաջնորդվել խորհրդային դպրոցի համար հստակ պատվերով ստեղծված և որոշակիորեն քաղաքականացված մեթոդական ձեռնարկներով: Նախնառաջ անհրաժեշտ էր հստակ ձևակերպել հանրակրթական դպրոցի առաջ դրվելիք պետական-հասարակական պատվերը, ապա դրա հիման վրա ապաքաղաքականացնել մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդիկաները՝ հաշվի առնելով նաև այն առանձնահատկությունները, որոնք հատուկ են, օրինակ, Հայաստանի Հանրապետությանը:

1.3. Հանրակրթական դպրոցի «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի առարկայական չափորոշիչները

1980-ականների սկզբում պարզվեց, որ ուսուցիչների կողմից աշակերտների ստուգողական կամ քննական գրավոր աշխատանքները գնահատվում են ոչ թե ըստ սովորողների իմացության ու կարողության քանակի (որն ավելի բնական է ու հումանիստական), այլ ըստ նրանց չիմացածի ու չկարողացածի քանակի (ինչը սխալ է և ոչ հումանիստական)՝ այդ նպատակով օգտագործելով գնահատման, այսպես կոչված, «**հանման մեթոդը**»: Առանձնապես այդ իրավիճակը առավել ակնհայտորեն երևան է գալիս մայրենի լեզվի գրավոր աշխատանքները ստուգելիս. ուսուցչը աշակերտի գրավոր աշխատանքի տողերի վրայով «սահելիս» հայտնաբերում է սովորողի սխալներն ու անճշտությունները և նշում լուսանցքում համապատասխան բացասական («5»-ից, «10»-ից կամ «20»-ից հանվող) միավորները՝ -1; -0,5; -0,25 և այլն: Այնուհետև աշխատանքի ընդհանուր՝ ակնկալվող գնահատականից հանվում է այդ բացասական նիշերի (չիմացությունների) գումարի մոդուլը, և արդյունքում ստացված գնահատականը իրականում նշանակում է, որ սովորողն ունի որոշակի թերություններ (չիմացություններ) տվյալ առարկայից: Օրինակ՝ հինգմիավորային համակարգում «5» գնահատականը նշանակում է, որ չիմացություն չկա (կամ՝ գրեթե չկա), ուստի սովորողը տվյալ թեմայից ամեն ինչ գիտի: «5-1» = «4» նշանակում է, որ մի քիչ չգիտի, «5-2» = «3» գնահատականը իրականում նշանակում է, որ սովորողը ահագին չգիտի կամ շատ չգիտի, իսկ եթե «5-3» = «2», ապա սովորողը շատ-շատ չգիտի և այլն: Սակայն ամբողջ զավեշտն այն է, որ այդ գնահատականները համապատասխանաբար անվանվում են «գերազանց», «լավ», «բավարար» և «անբավարար»: Թե ինչ լավ բան կա, երբ այդ ձևով սովորողի ստացած «լավը» միաժամանակ փաստում է, որ նրա գիտելիքներում և կարողություններում «անհանգստացնող» թերություն կա, կամ ինչ-որ բան իր տեղում չէ: Դժվար է գուշակել, թե ում է բավարարում, ասենք, գրավոր աշխատանքից «3-բավարար» ստացած սովորողը՝ ուսուցչի՞ն, ծնողի՞ն, իրեն՞, թե՞ պետությանն ու հասարակությանը. միանշանակ՝ ո՛չ մեկին:

Ահա նման բացահայտումների լույսի ներքո 1984 թ. ԽՍՀՄ-ում անցկացված «Հանրակրթական ու մասնագիտական դպրոցի բարեփոխումների (ռեֆորմի)» փաստաթղթերում արձանագրվեց «յուրաքանչյուր առարկայի և յուրաքանչյուր դասարանի համար սահմանել ունակությունների ու հմտությունների այն օպտիմալ ծավալը, որը պարտադիր է սովորողների կողմից տիրապետման համար» [91; 45]: Այս փաստաթղթում խոսվող «օպտիմալ ծավալ» հասկացությունն ըստ, Յու. Բաբանսկու, «ուսուցման պարտադիր մակարդակ (արդյունքներ)» հասկացության հոմանիշն է, այդ մակարդակը գերազանցող պահանջների համակարգը կոչվեց

«ցանկալի մակարդակ», իսկ այդ մակարդակների հստակ առանձնացման գործընթացը՝ «ուսուցման արդյունքների պլանավորում (ՈԻԱՊ)» [95] :

1981 թ. Մոսկվայում՝ ԽՍՀՄ ՄԳԱ ուսուցման բովանդակության և մեթոդների գիտահետազոտական ինստիտուտում տեղի ունեցած «Մաթեմատիկական կրթության» II խորհրդա-անգլիական սեմինարում ([120]) Վ. Վ. Ֆիրսովի ներկայացրած «Արդի փուլում խորհրդային դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցման կատարելագործման հիմնական ուղղությունները» զեկույցում հստակորեն ուրվագծվեցին ուսուցման արդյունքների պլանավորման հիմնահարցի էությունը, բացահայտվեցին սովորողների մաթեմատիկական պատրաստվածության ստուգման ու գնահատման, ողջ աշխարհում տարածված «հանման մեթոդի» կործանարար ազդեցությունը միջնակարգ կրթության վրա, և առաջարկվեց այդ մեթոդը փոխարինել «գումարման մեթոդով» [95] (*այսքան գիտես ու կարող ես՝ «3», դրանից այսքան ավել գիտես, կարող ես՝ «4», ավելին գիտես, կարող ես՝ «5» բանաձևով*):

Հետագայում ուսուցման պարտադիր և ցանկալի արդյունքների պլանավորման գործընթացը լայն տարածում գտավ աշխարհի շատ երկրներում և հիմք դարձավ կարևորագույն պետական փաստաթղթի՝ *միջնակարգ կրթության չափորոշիչի* ստեղծման համար (Անգլիա՝ 1985 թ., Լատվիա՝ 1998 թ., Ռուսաստան՝ 2004 թ., Հայաստան՝ 2005 թ. և այլն):

«ՀՀ կրթության զարգացման 2001-2005 թթ. պետական ծրագիրը» արձանագրելով, որ ՀՀ կրթության համակարգի միջազգային ինտեգրացմանը խոչընդոտում է նաև կրթության բոլոր մակարդակների համար պետական չափորոշիչների միասնական համակարգի բացակայությունը, մատնանշում է պետական կրթական չափորոշիչների ստեղծում, դրանց համապատասխանեցում միջազգային չափորոշիչներին և այդ չափորոշիչների միասնական համակարգի ներդրում [1; 13]:

Արդեն հաստատվել է «ՀՀ միջնակարգ (լրիվ) ընդհանուր կրթության պետական չափորոշիչ» փաստաթուղթը ([4; 24-46]) 2000 թ.¹, 2001 թ. ստեղծվել է հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշիչ նախագիծը [5], իսկ 2004 թ. հաստատվել են «Հանրակրթության պետական կրթակարգ» և «Միջնակարգ կրթության պետական չափորոշիչ» (ներկայումս այն կոչվում է «Հանրակրթության պետական չափորոշիչ») փաստաթղթերը ([6]): 2007 թ. հաստատվել են նաև տասներկուամյա դպրոցի մաթեմատիկայի չափորոշիչները ([7]): Ներկայումս ավարտվել են նաև տասներկուամյա միջնակարգ (լրիվ) ընդհանուր կրթության մնացած առարկայական չափորոշիչների ստեղծման ու բարեփոխման աշխատանքները:

Բոլոր այդ չափորոշիչներում չափորոշման ենթակա մաթեմատիկական նյութի ընտրության, չափորոշման չափանիշների ընտրության նկատմամբ մոտեցումները խիստ տարբեր են: Օրինակ՝ Լատվիայի «Պարտադիր կրթության պետա-

¹ Խոսքը 10-ամյա կրթության պետական չափորոշիչ մասին է:

կան չափորոշչում» պարտադիր արդյունքները ավելի ընդհանուր՝ «պարտադիր կրթության» (ՊԿ) մաս են կազմում: Այդ ՊԿ-ն բաղկացած է յոթ բաղադրիչներից՝

1. ստեղծագործություն և ինքնաարտահայտում,
2. վերլուծական և քննադատական մտածելակերպի հմտություններ,
3. գնահատման (բարոյական և գեղագիտական) կարողություններ,
4. հասարակական (համագործակցային) կարողություններ,
5. հաղորդակցական կարողություններ,
6. մաթեմատիկական կարողություններ,
7. սովորելու կարողություններ և գործնական կիրառություններ

և *կրթական չորս ասպարեզներից*՝ 1) լեզու, 2) անձ և հասարակություն, 3) արվեստ, 4) տեխնոլոգիայի և (բնագիտամաթեմատիկական) գիտությունների հիմունքներ [132; 4]:

Լատվիայի չափորոշչում տրվում են ուսուցման արդյունքները 3-րդ, 6-րդ և 9-րդ դասարանները ավարտող աշակերտների համար՝ ըստ կրթական ոլորտների, աշակերտների կրթական արդյունքների գնահատման հիմունքներն ու ընթացակարգը, գնահատման չափանիշները՝ ըստ տասմիավորային համակարգի: Ընդ որում՝ աշակերտները վաստակում են 9-10 միավոր (բարձր կամ գերազանց մակարդակ), եթե ունակ են նաև տրամաբանորեն հիմնավորելու ու պաշտպանելու իրենց դիրքորոշումները:

Աշակերտները վաստակում են 4-5 միավոր («բավարար» մակարդակ), եթե նրանք ծանոթ են հանձնարարված նյութին, ի վիճակի են տարբերել էականն ու ոչ էականը, գիտեն ու կարող են սահմանել հիմնական հասկացությունները, կանոններն ու տեսությունները, կարող են վերարտադրել նյութը պարզ ու հակիրճ ձևով, ինչպես նաև գնահատել այն ու կատարել տրամաբանական եզրակացություններ և այլն [132; 59]:

Նշված մակարդակից բարձր և գերազանց մակարդակից ցածր մակարդակն (6-8 միավոր) ըստ էության ցանկալի մակարդակի առաջին շերտն է և կոչվում է օպտիմալ մակարդակ, որը համապատասխանում է հինգմիավորային համակարգի «լավ» («4») գնահատականին: «Բավարար»-ից ցածր արդյունքների դեպքում աշակերտը գնահատվում է 1-3 միավոր (անբավարար մակարդակ):

Ինչպես երևում է վերոհիշյալ չափանիշներից, Լատվիայի ՊԿՊԶ-ում առանձնացված (պլանավորված) են ինչպես ուսուցման պարտադիր (ՈԻՊԱ), այնպես էլ ցանկալի բազմաշերտ մակարդակները, որոնք բերված են հետևյալ աղյուսակում: Համեմատության համար աղյուսակում նշվում են նաև հինգմիավորային համակարգի համապատասխան գնահատականները:

Գնահատական	10 «բացառիկ»	9 «գերազանց»	8 «շատ լավ»	7 «լավ»	6 «բավարարից վեր»	5 «բավարար»	4 «բավարարից ցածր»	3 «անբավարար»	2 «թույլ»	1 «շատ թույլ»
Ձեռք բերման մակարդակ	բարձր գերազանց («5»)		օպտիմալ («4» լավ)			բավարար («3»)		անբավարար («1») կամ («2»)		

Նշենք, որ գնահատման տասնիավորային համակարգը նկատելիորեն մեղմացնում է հինգնիավորային համակարգի գնահատման ավանդական այն թերությունը, որը կապված է իրականում տարբեր «բավարար»-ների, «լավ»-երի կամ «գերազանց»-ների տարբերակման անհնարինության հետ:

Ռուսաստանի Դաշնության ընդհանուր միջնակարգ կրթության պետական կրթական չափորոշիչների ստեղծման ելակետային հիմքերը «Շրջանավարտների պատրաստվածության մակարդակին ներկայացվող պահանջները» և «Կրթության բովանդակության պարտադիր նվազագույնը» փաստաթղթերի նախագծերն են, որոնք պատրաստվել են ՌԴ կառավարության պատվերով 2001 թ. (տե՛ս [121]): Այդ նախագծի փաստաթղթերի մեջ առաջնորդողը «Շրջանավարտների պատրաստվածության մակարդակին ներկայացվող պահանջներ» փաստաթուղթն է, իսկ «Կրթության բովանդակության պարտադիր նվազագույնը» փաստաթուղթը արձանագրում է կրթության բովանդակության դիդակտիկական միավորների ցանկը, որոնք պարտադիր կերպով ենթակա են ուսումնասիրման տարրական, հիմնական և միջնակարգ դպրոցում: «Փաստաթղթերի այս հավաքածուն սահմանում է կրթության բովանդակության այն մակարդակն ու ծավալը, որոնք պետությունը պարտավորվում է երաշխավորված տրամադրել սովորողներին իրենց սահմանադրական իրավունքը իրականացնելու համար: Այլ կերպ ասած՝ «Պահանջներն» ու «Պարտադիր նվազագույնը» նկարագրում են, թե ինչ մակարդակի և ինչ ծավալի կրթություն է առաջարկվում աշակերտներին անվճար» [121; 5]:

«ՀՀ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկա ուսումնական բնագավառի առարկայական չափորոշիչը» ներառում է մաթեմատիկայի՝

- ա) բացատրագիրը,
- բ) դասընթացի հայեցակարգը,
- գ) ուսումնական ընդհանուր նպատակները,
- դ) բովանդակային պարտադիր միջուկը,
- ե) ուսումնական գործունեության տեսակները,
- զ) սովորողներին ներկայացվող նվազագույն պարտադիր պահանջները,
- է) ուսուցման արդյունքների ստուգման և գնահատման կարգը,
- ը) առաջարկվող գրականության ցանկը:

Առարկայական չափորոշիչի հիման վրա մշակվում են ուսումնական բնագավառի պետական ծրագրերը, որոնք հիմք են ծառայում դասագրքերի, ձեռնարկների և ուսումնական այլ նյութերի ստեղծման համար: Դրանց հիման վրա նաև կարող

են ստեղծվել մաթեմատիկայի այլընտրանքային առարկայական ծրագրեր և դասագրքեր, որոնք նույնպես հաստատվում են ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից:

Ըստ ՀՀ «Մաթեմատիկա» բնագավառի հանրակրթական հիմնական դպրոցի «առարկայական չափորոշի»՝ մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակներից առաջինը աշակերտների լեզվատրամաբանական և ալգորիթմական մտածողության ձևավորումն է [4], իսկ մաթեմատիկայի դասավանդման հիմնական սկզբունքը՝ յուրաքանչյուր աշակերտի համար հասանելիության ապահովումը [5]: «Մաթեմատիկա» առարկայի բովանդակային հիմնական գծերից մեկը «Տրամաբանության և ինֆորմատիկայի տարրեր» գիծն է, որը սովորողներին նախնական գաղափար է տալիս բազմությունների, ասույթի, դատողությունների, խնդրի բաղադրիչների՝ պայմանի և պահանջի առանձնացման, դրանց միջև եղած կապերի բացահայտման, խնդրի լուծման ալգորիթմի ու պլանի կազմման, պատահույթի և այլնի մասին [7; 6]:

Չափորոշի «Սովորողներին ներկայացվող պահանջներ» բաժնում գիտելիքներին, կարողություններին և հմտություններին ներկայացվող պահանջները զետեղված են ըստ Ա՝ նվագագույն, Բ՝ միջին կամ առաջին ցանկալի և Գ՝ բարձր կամ երկրորդ ցանկալի մակարդակների: Բերենք օրինակ երկրաչափության չափորոշից [7; 67]:

Գործնական և ուսումնական խնդիրներ լուծելիս կարողանա աշխատել ինքնուրույն և համագործակցել խմբում, գաղափար ունենա հասկացության, դատողության, մտահանգման, ապացուցման և հերքման մասին, կարողանա նկարագրել կատարած քայլերն ու գործողությունները, դրանց վերաբերյալ տալ պարզաբանումներ և հիմնավորումներ, օգտվել տեղեկատվության աղբյուրներից, կատարել համեմատություններ, վերլուծություններ, ստուգումներ և ճշգրտումներ, հաղորդակցվել երկրաչափության լեզվի և պայմանանշանների օգտագործմամբ:	Հասկանա ինչ է սահմանումը, աքսիոմը, թեորեմը, ապացուցումը, հերքումը, կարողանա բերել օրինակներ, որոշել մի քանի պարզ դատողություններից կազմված պնդումների ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը, կատարել անմիջական և ոչ բարդ միջնորդավորված մտահանգումներ, ըստ անհրաժեշտության բերել փաստարկներ, կատարել անհրաժեշտ վերլուծություններ, տարբեր եղանակներով ստուգումներ և ճշգրտումներ, երկրաչափության լեզվի և պայմանանշանների օգտագործմամբ արտահայտվել հստակ և հասկանալի:	Հասկանա երկրաչափության աքսիոմատիկ կառուցման իմաստը, իմանա ուղղակի և անուղղակի ապացուցումների եղանակները, կարողանա ապացուցման խնդիրներ լուծելիս բերել անհրաժեշտ և բավարար փաստարկներ, պահպանել մտահանգման կանոնները, գրավոր և բանավոր արտահայտվել ճշգրիտ և հստակ՝ տեղին օգտագործելով երկրաչափական հասկացությունները, գծապատկերները, պայմանանշանները:
--	---	---

1.4. Հանրակրթական դպրոցի «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի առարկայական ծրագրերը, դասագրքերը և ուսուցչի ձեռնարկները

«Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի ուսումնամեթոդական փաթեթ կամ կոմպլեկտ (ՈւՄՓ) կոչվում է <Զ;Ծ;Դ;ՄԶ> կարգավորված քառյակը, որտեղ, ըստ կարևորության, առաջին փոստաթուղթը չափորոշիչն է, որին նվիրված էր նախորդ ենթագլուխը: ՈւՄՓ-ի՝ իր կարևորությամբ երկրորդ փոստաթուղթը մաթեմատիկայի առարկայական ծրագիրն է: Ի՞նչ է ծրագիրը:

1. Առարկայական կամ ուսումնական ծրագիրը մաթեմատիկայի ուսումնամեթոդական փաթեթի երկրորդ բաղադրիչն է և կրթակարգից և չափորոշիչից հետո իր կարևորությամբ հաջորդ նորմատիվային փաստաթուղթն է: Ծրագիրը մշակվում է առարկայական չափորոշիչի հիման վրա և հանդիսանում է չափորոշիչային պահանջներին համապատասխան ուսուցում անցկացնելու համար անհրաժեշտ հիմնական նորմատիվային փաստաթուղթը:

Առարկայական ծրագրերն իրենց հերթին կազմում են մաթեմատիկայի դասընթացի բովանդակությունը կոնկրետացնող հիմնական փաստաթղթերի՝ դասագրքերի և ուսումնամեթոդական և ուսումնաօժանդակ ձեռնարկների ստեղծման հիմքերը:

Մաթեմատիկայի ուսումնական ծրագիրը ներառում է բացատրագիրը, բովանդակային միջուկը, թաղանթը, թեմատիկ պլանավորումը, «Մաթեմատիկա» բնագավառի առարկաների ուսուցման նպատակները, ուսումնական գործունեության տեսակները, կրթական ընդհանուր և հիմնական խնդիրները, յուրաքանչյուր թեմայի ուսուցման ակնկալիքները:

Ծրագրի բովանդակային միջուկը կամ կորիզը կոչվում է գիտական տվյալ բնագավառի (առարկայի) հիմունքների առանցքային այն թեմաների ամբողջությունը, որոնք ավանդաբար դասավանդվել են միջնակարգ դպրոցում, և առանց դրանց խմացության՝ անհնար կլիներ տվյալ առարկայի գիտական բնագավառի մասին անգամ տարրական պատկերացումներ ունենալ:

Ծրագրի թաղանթն իրենց նշանակությամբ ծրագրի միջուկում ընդգրկված թեմաներին զիջող, բայց տվյալ բնագավառի (մաթեմատիկայի) մասին ամբողջական պատկերացումներ ապահովող մնացած թեմաների ամբողջությունն է:

Քանի որ ծրագրից առաջ ստեղծվում է մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշիչը, ուստի հասկանալի պատճառներով ծրագրի բովանդակային միջուկը տեղակայված է առարկայական չափորոշիչներում և բացված է ըստ «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի բովանդակային գծերի: Իսկ ի՞նչ է բովանդակային գիծը:

Մաթեմատիկայի բովանդակային գիծը տվյալ առարկայի այն հիմնական՝ ինվարիանտ հասկացություններն (մաթեմատիկայի տեսության շարադրման այն

պարույրներն) են, որոնք գործում են նրա բոլոր բաժիններում, և որոնց շուրջ հյուսվում (փաթաթվում) է մնացած ողջ բովանդակությունը:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի բովանդակային գծերն են՝ արտահայտություններն ու դրանց նույնական ձևափոխությունները, ֆունկցիաները, բանաձևերը, տրամաբանության և ինֆորմատիկայի տարրերը, երկրաչափական պատկերներն ու դրանց հատկությունները, մեծությունները, մաթեմատիկական անալիզի տարրերը, միացությունների, հավանականությունների տեսությունների և վիճակագրության տարրերը:

Ցանկացած առարկայի, այդ թվում՝ նաև մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդիկան, ինչպես արդեն նշել ենք, նախնառաջ կոչված է պատասխանելու **«Ի՞նչ ուսուցանել»** գլխավոր հիմնահարցին: Այս հարցի պատասխանի փնտրտուքը հավերժական է, որովհետև ցանկացած քաղաքակրթության առաջ ծառացած կարևորագույն հիմնահարցերից մեկը անընդհատ կրթության համակարգից մշտապես պահանջում է պարբերաբար լուծել այն հիմնախնդիրը, թե հանրակրթական դպրոցում ուսուցանվող բնագավառներից յուրաքանչյուրի, մասնավորապես մաթեմատիկայի գծով մարդկության նախորդ սերունդների կողմից այդ բնագավառում կուտակված մշակույթի ահռելի շտեմարանի ո՞ր կտորները, ի՞նչը վերցնել ու տրամադրել հանրակրթական դպրոցին որպես ուսումնական նյութ: Հենց այդ՝ **«Ի՞նչ ուսուցանել մաթեմատիկայից»** հիմնահարցի պատասխանը կոչված է տալու առարկայական, այս պարագայում՝ մաթեմատիկայի պետական ծրագիրը:

2. Արդեն նշել ենք, որ առարկայական ծրագրերը կազմում են մաթեմատիկայի դասընթացի բովանդակությունը կոնկրետացնող հիմնական փոստաթղթերի՝ դասագրքերի և ուսումնամեթոդական և ուսումնաօժանդակ ձեռնարկների ստեղծման հիմքերը:

Ավելին, դասագրքերը շարունակում են ոչ միայն բացել, կոնկրետացնել **«Ի՞նչ ուսուցանել մաթեմատիկայից»** հիմնահարցի պատասխանը, այլև յուրաքանչյուրը յուրովի՝ դասագրքի հեղինակների սուբյեկտիվ մեկնաբանմամբ են լուծում այն հարցը, թե յուրաքանչյուր դասարանում, յուրաքանչյուր թեման կամ ենթաթեման շարադրելիս ի՞նչ հարաբերակցությամբ պետք է համադրել, զուգակցել ծրագրի միջուկի բովանդակային գծերը: Այս դժվարագույն հիմնախնդիրը լուծելիս դասագրքերի հեղինակները անխուս պետք է ելնեն տվյալ տարիքի սովորողների տարիքային սոցիալական մանկավարժության և հոգեբանության տրամադրած առանձնահատկություններից:

Հերթական դասը պլանավորելիս ուսուցիչը օգտվում է նաև դասագրքից, սակայն դասագիրքը հիմնականում աշակերտի ուսումնական գլխավոր ձեռնարկն է և ուղղված է հենց աշակերտին, այդ իսկ պատճառով պետք է բավարարի վերջինիս բոլոր պահանջներին: Հետևաբար դասագիրքը պետք է պարունակի ինչպես բոլոր սովորողներին ուղղված ուսուցման նվազագույն պատրաստվածության՝

պարտադիր մակարդակին համապատասխան, այնպես էլ բարձր պատրաստվածություն ենթադրող ցանկալի մակարդակն ապահովող ուսումնական նյութ:

3. Ուսումնամեթոդական փաթեթի չորրորդ բաղադրիչը **մեթոդական ձեռնարկն** է: ՄՁ-ն առաջին հերթին դասագրքին կից ուսուցչի ձեռնարկն է, որում համառոտ նկարագրված են տվյալ դասարանում տվյալ առարկայի դասավանդման առանձնահատկությունները, դասերի վարման մասին մեթոդական խորհուրդները, ըստ դասերի՝ օրինակելի թեմատիկ պլանավորումը, թեմատիկ և կիսամյակային գրավոր աշխատանքների տարբերակները, թեմաների համար նախատեսված դժվարագույն խնդիրների լուծումների նմուշօրինակներ և մեթոդական ցուցումներ: ՄՁ-ի տակ ենթադրվում է նաև մաթեմատիկայի դասավանդման ընդհանուր, կոնկրետ և մասնակի մեթոդիկաներին նվիրված մեթոդական գրականությունը (օրինակ՝ սույն ձեռնարկը) և այլն:

1.5. Դաստիարակության իրականացումը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում

Դաստիարակությունը մանկավարժության այն հիմնական հասկացություններից է, որը, ըստ ճանաչված մանկավարժ Յու. Բաբանսկու, դրված է հենց բուն «Մանկավարժություն» առարկայի սահմանման հիմքում. «Մանկավարժության՝ որպես գիտական ճանաչողության ոլորտի առարկան հասարակության առանձնահատուկ գործառույթն է **դաստիարակությունը**»: Այդ պատճառով էլ մանկավարժությունը կարելի է անվանել նաև գիտություն դաստիարակության մասին:

Մաթեմատիկան, որին հանրակրթական դպրոցում ուսումնական պլաններով հատկացված է ընդհանուր ուսումնական ժամերի շուրջ 16-22 %-ը, չի կարող գտնվել հանրակրթական դպրոցի առաջ ծառացած մատաղ սերնդի դաստիարակության խնդիրներից հեռու:

Առաջին գլխի 1.3. ենթագլխում սահմանվել են մաթեմատիկայի ուսուցման դաստիարակչական նպատակները.

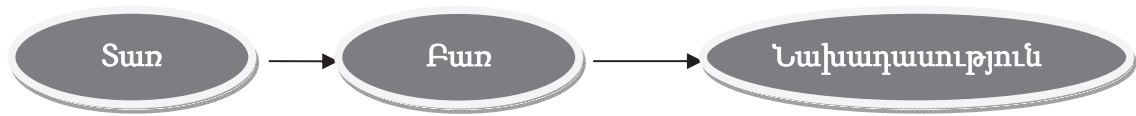
1. լեզվատրամաբանական մտածողության ձևավորում և սովորողների մաթեմատիկական կուլտուրայի դաստիարակում,

2. սովորողների մոտ մաթեմատիկական կայուն հետաքրքրությունների դաստիարակում,

3. սովորողների բարոյական, գեղագիտական և այլ արժեքների դաստիարակում (արժեքային համակարգի ձևավորում):

1.5.1. Սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության ձևավորման համար, սկսած 7-րդ դասարանից, նախնառաջ պետք է բացահայտել, որ մաթեմա-

տիկայի «շենքի» կառուցումը կատարվում է ճիշտ նույն սխեմայով, նույն հաջորդականությամբ, ինչպես իրենք սկսել են, օրինակ, ուսումնասիրել հայոց լեզուն.



Միայն թե մաթեմատիկայի լեզվում «տառերը» 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 թվանշաններն ու լատինական և հունական այբուբենների տառերն են, «բառը» մաթեմատիկայում կոչվում է «արտահայտություն», իսկ «նախադասությունը»՝ նույնպես «նախադասություն» կամ «թեորեմ»: Այսպիսով՝ վերոհիշյալ գծապատկերը մաթեմատիկայի լեզվի համար կլինի այսպես.



Շատ կարևոր դաստիարակչական նշանակություն ունի մաթեմատիկական պնդման ներկայացման լեզվաքերականական և տրամաբանական ձևերի համադրումն ու սովորողների մոտ դրանց հետ աշխատելու կուլտուրայի դաստիարակումը: Հաջորդիվ (տե՛ս կետ 5.2.3-ը) մենք մանրամասն կանդրադառնանք այդ հարցերի հանգամանալից դիտարկմանը: Այսպես, օրինակ, ցույց կտանք, որ մաթեմատիկական պնդման ցանկացած լեզվաքերականական ձևում պնդման պայմանի և եզրակացության (պահանջի) առանձնացման հարցը առավելապես մայրենի լեզվի հարց է, քան դպրոցական մաթեմատիկայի լեզվի:

Իրոք, ըստ սահմանման՝ ենթական ցույց է տալիս գործողություն կատարող առարկան կամ անձը, ուստի նաև խնդրային իրավիճակի մեջ մտնող այն օբյեկտները, որոնք պետք է գործողության մեջ մտցվեն: Հետևաբար, ենթակայի և նրա որոշիչի (կամ լրացման) տակ «թաքնված» է հենց խնդրի (պնդման) պայմանը:

Ստորոգյալը ցույց է տալիս, թե ինչ է անում, ինչ է լինում ենթական: Այլ կերպ ասած՝ ստորոգյալը ցույց է տալիս ենթակայի (պայմանի) կատարած գործողությունը: Հետևաբար, ստորոգյալն էլ իր մեջ պարունակում է խնդրի պահանջը (եզրակացությունը):

[12] աշխատանքում քննարկված է ապացուցման նպատակահարմար մեթոդի ընտրության հարցում «կամ» շաղկապի անսպասելի դերը:

Ընդհանրապես սովորողների տրամաբանական մտածողության ձևավորման առումով մաթեմատիկայի դաստիարակչական դերը անգնահատելի է: Աշակերտներին պետք է բացատրել, որ ապացուցելու, հերքելու, սահմանելու և դասակարգելու կարողությունների ու հմտությունների ձևավորմամբ այս կամ այն չափով զբաղվում են գրեթե բոլոր, ինչպես բնագիտամաթեմատիկական, այնպես էլ՝

հումանիտար առարկաները: Օրինակ՝ հումանիտար բնագավառներում համոզմունքների ու աշխարհայացքի ձևավորման գործում շատ կարևոր է ապացուցման ու հերքման մեթոդների դերը: Իսկ [17] աշխատանքում ապացուցված է, որ պատմության դասընթացի տրամաբանական սպասարկման համար սովորողների համապատասխան՝ մաթեմատիկական պատրաստվածության տրամաբանական բաղադրիչն ունի հենքային նշանակություն:

Սակայն տրամաբանական կարողությունների ձևավորումն ավելի բնական է կատարել մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով, քանի որ, ինչպես նշում են մասնագետները, տրամաբանական ձևերն ու հարաբերությունները, մասնավորապես ապացուցման մեթոդներն ու մտահանգման կանոնները (մեթոդների քայլերը) մաթեմատիկայում հանդես են գալիս ամենամաքուր, անբիծ տեսքով: Այս իմաստով անգնահատելի է ՀՀ հանրակրթական դպրոցի 5-12-րդ դասարանների մաթեմատիկայի դասագրքերում ներդրված ապացուցման խնդիրների համակարգի, հատկապես ավագ դպրոցի 11-րդ դասարանի մաթեմատիկայի խորացված ուսուցման դասագրքում «Տրամաբանության տարրեր» գլխի դերը սովորողների տրամաբանական պատրաստվածության պատշաճ մակարդակ ապահովելու գործում:

1.5.2. Սովորողների մոտ մաթեմատիկայի նկատմամբ կայուն հետաքրքրություններ ձևավորելու գործում անգնահատելի դաստիարակչական արժեք ունի հետաքրքրաշարժ առաջադրանքների տեղին ու հաջողված ընտրությունը: Այդ իմաստով անգնահատելի են փոխներգործուն խնդիրները: Օրինակ՝ երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի բանաձևի արտաձման դասի մուտքը «Հանրահաշիվ 7-9» նախկին դասագրքերում ապահովվել է շախմատի ստեղծման վերաբերյալ հայտնի պատմությամբ, իսկ ամրապնդումը՝ թուղթը 40 անգամ ծալելու վերաբերյալ հետևյալ փոխներգործուն խնդրի լուծմամբ:

«Դիցուք՝ A_4 ձևաչափի թուղթը, որի հաստությունը 0,4 մմ է, ծալում ենք մեկ անգամ, կտրում ծալվածքով, և տանում 4-էջանոց տետր, որի հաստությունը, բնականաբար, կլինի 0,8 մմ: Ապա կրկնում ենք այդ գործողությունը ևս մեկ անգամ: Կստանանք 8-էջանոց 4 թուղթ, ստացված տետրը կունենա 1,6 մմ հաստություն:

Ի՞նչ եք կարծում, եթե յուրաքանչյուր թուղթը հաջորդաբար ծալենք ու կտրենք այդ ծալվածքով 40 անգամ, ապա ստացված տետրի հաստությունը կարո՞ղ է հասնել Երկրից մինչև Լուսին» (Ջոն Բերի, Լոնդոնի համալսարանի պրոֆեսոր):

Սովորողների մոտ մաթեմատիկայի նկատմամբ կայուն հետաքրքրություններ ձևավորելու և դաստիարակելու համար անհրաժեշտ է, որ նրանք նախևառաջ ճիշտ հասկանան մաթեմատիկական փաստերը: Օրինակ՝ ճիշտ չէ 7-րդ դասարանի երկրաչափության դասընթացը միանգամից սկսել այն պնդումներից, որ կետը չափսեր չունի, գիծը հաստություն չունի և այլն: Անհրաժեշտ է սովորողների հետ կատարել որոշակի նախապատրաստական աշխատանք առ այն, որ կետի, ուղղի և

շատ ուրիշ մաթեմատիկական հասկացություններին մարդիկ հանգել են պրակտիկ առարկայական գործունեության արդյունքում: Օրինակ՝ բնության մեջ երկարությունների չափման ժամանակ մարդիկ աստիճանաբար համոզվել են, որ թելի կամ պարանի հաստությունը, որի օգնությամբ չափում ենք երկարությունները, նշանակություն չունի, որտեղից էլ պարզ վերացարկմամբ մարդը հանգել է հաստություն չունեցող ուղղի գաղափարին: Հանգումորեն հողաչափության ժամանակ հողի մեջ մտցրած սեպը ցույց է տալիս, թե որտեղից է սկսվել երկարության հաշվարկը: Շինարար վարպետները շատ լավ գիտեն՝ որքան բարակ լինի այդ սեպը, այնքան ճշգրիտ կլինի չափման արդյունքը: Այսկերպ, դարձյալ վերացարկելով բնական օբյեկտները, մարդիկ հանգել են չափսեր չունեցող երկրաչափական կետի հասկացությանը: Օգտակար կլինի 7-րդ դասարանի աշակերտներին պատմել, թե ինչպես է առաջացել երկրաչափությունը Եգիպտոսում, Բաբելոնում, Ասորեստանում և Հայաստանում:

Շատ կարևոր է նաև պարզել, թե աշակերտների մոտ ինչպիսի վերաբերմունք կա մաթեմատիկական ընդհանուր պնդումների՝ թեորեմների և մասնավոր պնդումների նկատմամբ: Ուսուցիչը աշակերտների ուշադրությունը մշտապես պետք է հրավիրի այն իրողության վրա, որ որևէ իրավիճակի մասին նույնիսկ շատ մեծ թվով դեպքերի քննարկման հիման վրա արված պնդումը մաթեմատիկայում կարող է և հավաստի չլինել: Դիտարկենք օրինակներ՝

ա) Գտնենք տրված պարզ թվից փոքր բոլոր պարզ թվերի արտադրյալը և դրան գումարենք 1:

$$2 + 1 = 3,$$

$$2 \cdot 3 + 1 = 7,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311.$$

Այս 5 դեպքերը դիտարկելուց հետո միտք է հղանում, որ ցանկացած՝

$$P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot k + 1$$

տեսքի թիվը, որտեղ k –ն պարզ թիվ է, նույնպես պարզ թիվ է:

Սակայն հաջորդ երկու նման թվերը բաղադրյալ են: Իրոք,

$$P_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509 \quad \text{և} \quad P_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 = 510511 = 19 \cdot 26869$$

թվերը բաղադրյալ են:

բ) Դիտարկնք $x^2 + x + 41$ եռանդամը: Եթե x -ին հերթով տանք 1; 2; 3; ...; 39 արժեքները, ապա կստանանք պարզ թվեր: Դարձյալ կարելի է առաջ քաշել վարկած, որ այդ եռանդամը x -ի կամայական բնական արժեքների դեպքում «արտադրում է» պարզ թվեր: Սակայն դա ճիշտ չէ. երբ $x = 40$, կստանանք բաղադրյալ թիվ՝ $40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41^2$:

Այսքանից հետո անհրաժեշտ է հայտարարել, որ մաթեմատիկական գիտության առանձնահատկությունն էլ հենց այն է, որ մաթեմատիկայում հավաստի է միայն ու միայն այն պնդումը, որը հիմնավորվում, ապացուցվում է մինչ այդ փաստն եղած այլ հավաստի փաստերի միջոցով: Այսինքն՝ մաթեմատիկա գիտությունում փորձին առանձնակի նշանակություն չի տրվում: Սակայն մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում հաճախ փորձի կիրառությունը շատ արդյունավետ է լինում: Նման կիրառության օրինակներ կոդիտարկվեն 3-րդ գլխում՝ գիտական ճանաչողության դիտման, փորձի և համեմատության մեթոդները նկարագրելիս:

1.5.3. Ինչպես վերևում նշել ենք, մաթեմատիկայի ուսուցման կարևորագույն նպատակներից մեկը սովորողների բարոյագեղագիտական և այլ արժեքների դաստիարակումն է: Սովորողների արժեքային կողմնորոշումն ապահովում են նրա ունեցած նյութական, հոգեկան, կրթական, գեղագիտական, բարոյական, կրոնական, սոցիալական, ազգային, համամարդկային և այլ արժեքների միջոցով: «Կրթական ավտորիտար համակարգերին հատուկ է այդ (կրթական-ակադեմիական – Է. Ա.) արժեքների բացարձականացումը: Ժամանակակից ժողովրդավարական կրթական համակարգերը միտված են դեպի արժեքներ. դրանց հիմնական խնդիրը ապագա քաղաքացուն անհրաժեշտ արժեհամակարգի և արժեքային կողմնորոշման ձևավորումն է:

Անկախությունը, մեզանում արմատավորվող հասարակական ու տնտեսական նոր փոխհարաբերությունները թելադրեցին նաև կրթական մոտեցումների, դիրքորոշումների փոփոխություն. ակադեմիական գիտելիքի տիրապետմանն ուղղված կրթությանը փոխարինելու էր գալիս մարդասիրական կամ հումանիստական արժեքների ձևավորմանն ուղղված կրթությունը: Պետք է նշել, որ անցումը բավականին ցավազին էր և շարունակում է մնալ դժվար իրականանալի: Կային և կան մանկավարժական մոտեցումների, նոր կրթական տեխնոլոգիաների ներդրման, արևմտյան փորձի օգտագործման, ազգային արժեքների ձևավորման և իմաստավորման հետ կապված դժվարություններ» (տե՛ս [32; 4]):

Իհարկե, բարոյական արժեքների ձևավորման հետ կապված խնդիրներ ունեն նաև արևմտյան զարգացած երկրների կրթական համակարգերը:

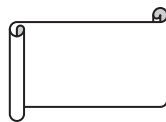
Բոլորն էլ փնտրտունքների մեջ են: Օրինակ, ինչպես նշում է Հ. Միքայելյանը, քննարկվում է դաստիարակության հիմնախնդրի նկատմամբ առկա մոտեցումների ընտրության հետևյալ հարցը. բարոյական վարքագծի սկզբունքների ձևավորման հարցը թողնել ընտանիքի՞ն, եկեղեցու՞ն, հասարակությա՞նը, թե՞ գործի մեջ ներգրավել նաև հանրակրթական դպրոցը, բավարա՞ր է սոսկ վարքային սովորույթների ձևավորումը, թե՞ անհրաժեշտ է նաև բարոյական արժեքների նկատմամբ գիտակցական վերաբերմունք: Հանրաճանաչ մանկավարժ Չ. Ուայթը գտնում է, որ վերջին հարցում անհրաժեշտ է գտնել ոսկե միջինը, իսկ սովորողների

բարոյական դաստիարակության իրականացման գործում մեծ դեր վերապահել նաև հանրակրթությանը [32;5]:

Նշենք, որ վերջին տարիներին պետական չափորոշիչներով և ծրագրերով որոշակի ուշադրություն է դարձվում նաև սովորողների արժեքային համակարգի ձևավորման խնդիրներին: Այդ իմաստով արժեքների ձևավորումը կազմում է հանրակրթական դպրոցի յուրաքանչյուր, այդ թվում նաև՝ «Մաթեմատիկա» առարկայի կրթական ներուժի կարևոր մասը:

Մաթեմատիկայի միջոցով իրականացվող կրթական գործընթացն այսօր ոչ միայն մաթեմատիկայի ուսուցումն է: Այն ոչ միայն մաթեմատիկական գիտելիքների, կարողությունների և հմտությունների, այլև արժեհամակարգի ձևավորման գործընթաց է: Եվ մաթեմատիկան այս տեսակետից ունի կրթական մեծ ներուժ և ի գործ է իր վճռական խոսքն ասել ասպագա քաղաքացու արժեքային ողջ համակարգի ձևավորման գործում:

Անշուշտ, սովորողների բարոյական արժեքների ձևավորման գործում, ըստ Հ. Միքայելյանի, հումանիտար ցիկլի առարկաների հնարավորություններն անհամեմատ մեծ են, քան մաթեմատիկայինը: Մինչդեռ մաթեմատիկայի ուսումնական նյութը նման լայն հնարավորություններ չի տալիս: Այնուամենայնիվ, մաթեմատիկան նույնպես ունի բարոյական արժեքների ձևավորման հսկայական ներուժ, որին նվիրված է հեղինակի [32; 7] աշխատանքը:



ԳԼՈՒԽ ԵՐԿՐՈՐԴ. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԴԻԴԱԿՏԻԿԱԿԱՆ ՄԿՁԲՈՒՆՔՆԵՐԸ

2.1. Ուսուցման հիմնական դիդակտիկական սկզբունքները

Մանկավարժական մտքի պատմության մեջ առաջադրվել են բազմաթիվ սկզբունքներ, որոնց մի մասը ներկայումս կորցրել են իրենց նշանակությունը: Մանկավարժագիտության զարգացումն անհրաժեշտաբար վերանայել է դրանք, մերժել կամ ներառել այլ սկզբունքների կազմում: Օրինակ՝ Յ. Ա. Կոմենսկու առաջ քաշած բնահարմարության սկզբունքը պարզապես մերժվեց, տարիքային և անհատական մոտեցման սկզբունքը ներառվեց մատչելիության սկզբունքի կառուցվածքում, իսկ զննականության սկզբունքը էապես վերաիմաստավորվեց և այլն: Ընդհանուր առմամբ սկզբունքների զարգացումը դիդակտիկական տեսություններում կարևոր և անընդհատություն ենթադրող խնդիր է:

Դիդակտիկական սկզբունքը կարելի է ներկայացնել որպես կենդանի և բնական մի ծառ, որի բունը ուսուցման սկզբունքն է, արմատներն ուսուցման օրինաչափություններն են, իսկ ճյուղերը, տերևները, ծաղիկներն ու պտուղները՝ կանոնները:

Ժամանակակից դիդակտիկայում առավել հիմնավորված և ընդհանուր ճանաչում ստացած սկզբունքներն են.

- յուրացման գիտականության սկզբունքը,
- յուրացման գիտակցականության սկզբունքը,
- ակտիվ ուսուցման կամ սովորողների ակտիվության սկզբունքը,
- ուսուցման զննականության սկզբունքը,
- գիտելիքների ամրության սկզբունքը,
- անհատական ուսուցման սկզբունքը,
- մատչելիության սկզբունքը:

2.2. Յուրացման գիտականությունը

Գիտականության սկզբունքը ելնում է իմացաբանական այն կարևոր դրույթից, որ աշխարհը ճանաչելի է: Մարդը, ճանաչելով իրականությունը և ըմբռնելով օբյեկտիվ ճշմարտությունը, իշխանություն է ձեռք բերում բնության օբյեկտիվ ուժերի նկատմամբ և կարողանում է դրանք ծառայեցնել իր շահերին:

Գիտությունը հասարակական կյանքում ավելի ու ավելի մեծ տեղ է գրավում ոչ միայն որպես իրականությունն արտացոլելու կատարյալ միջոց, այլև որպես մարդու գործունեության, այդ թվում՝ ուսումնական գործունեության կազմակերպման առավել օպտիմալ և արդյունավետ ուղի: **Առանց ուսումնական աշխատանքի գիտական կազմակերպման, անհնարին կլինեք տիրապետել գիտությունների համակարգին անհրաժեշտ խորությամբ՝ միաժամանակ պահպանելով սովորողի առողջությունը և ձևավորելով նրա անձնավորության կարևոր գծերն ու որակները:**

Մանկավարժական պրակտիկայում տարածված է այն կարծիքը, ըստ որի՝ ուսուցման գիտականության սկզբունքը կիրառելի է միայն գիտությունների հատուկ ուսումնասիրման դեպքում՝ բարձր դասարաններում, բուհերում: Այս թյուրիմացությունը պատճառ է դառնում ուսուցման ֆունկցիաների աղավաղման ինչպես տարրական, այնպես էլ մյուս դասարաններում: ***Գիտականության սկզբունքը պետք է կիրառվի յուրաքանչյուր դեպքում, երբ երեխային որևէ բան ենք սովորեցնում՝ սկսած մանկապարտեզից: Այն նաև կարևոր պահանջներ է ներկայացնում կրթության բովանդակությանը:***

Գիտականության սկզբունքի ամենակարևոր պահանջը ճշմարտացիության պահանջն է: Երբեք չի կարելի թույլ տալ դասավանդվող գաղափարների պարզունակացում, աղավաղում, չի կարելի կամայական մեկնաբանություն տալ ուսումնասիրվող հասկացություններին: Գիտական գաղափարները պետք է հնարավորինս ձևակերպված լինեն գիտական միարժեք ու արդիական հասկացություններով: Հնացած հասկացությունները չեն կարող լիարժեք և ճշգրիտ արտացոլել գիտության նորագույն նվաճումները: **Գաղափարները պետք է ապացուցողական լինեն:** Կրթության բովանդակությունը կարող են կազմել միայն գիտության և պրակտիկայի կողմից ստուգված և հիմնավորված, հստակորեն ձևակերպված գիտական գիտելիքներն ու գաղափարները:

Գիտականության սկզբունքի ամենակարևոր պահանջը գիտական օրինաչափությունների, օրենքների և եզրակացությունների հստակ ձևակերպումն է:

Միաժամանակ անհրաժեշտ է սովորողների մեջ դաստիարակել երևույթների նկատմամբ արժեքային մոտեցում: Գիտությունը ինքնանպատակ մտավարժանք չէ. գիտության նպատակը մարդու կյանքը բարելավելն է, իրեն՝ մարդուն և նրա միջավայրը գեղեցիկ ու կատարյալ դարձնելը:

Գիտականության սկզբունքից բխում է ուսուցման գործընթացի գիտական կազմակերպման պահանջը, որն առաջին հերթին կապված է ուսուցման տեսության և տեխնոլոգիայի, սովորողի հոգեբանաֆիզիոլոգիական հնարավորությունների հիմնալի ճանաչման և այն ուսումնական գործունեության ընթացքում հաշվի առնելու հետ: Գիտականության սկզբունքը պահանջում է ճիշտ պլանավորել ուսումնական աշխատանքը, դրա բոլոր կողմերը, ներառյալ՝ առողջապահական պահանջները:

Բազմաթիվ են այնպիսի փաստերը, երբ յուրաքանչյուր առարկայի մասնագետ, գերագնահատելով «իր առարկան», անհարկի ծանրաբեռնում է սովորողներին և նպաստում այլ առարկաների նկատմամբ անտարբեր, անպատասխանատու վերաբերմունք ձևավորելուն՝ մոռանալով, որ գլխավոր խնդիրը ոչ թե «իր առարկան», այլ քաղաքացի, մարդ դաստիարակելն է:

Օրինակ՝ տարածված թյուրիմացություն է տարրական դասարաններում արվեստի առարկաների փոխարեն մաթեմատիկա, մայրենի լեզու պարապելը: Երեխաներին ստիպում են հսկայական ջանքեր գործադրել գեղեցիկ գրելու՝ վայելչագրության համար և այլն: Որոշ ուսուցիչներ սովորողներին ծանրաբեռնում են հանգստյան, տոն օրերին և արձակուրդներին: Նման մոտեցումը ոչ միայն հակաառողջապահական է, այլև ոչ մարդասիրական, անբարոյական և մարդու իրավունքների կոպիտ ոտնահարում:

Անկասկած է, որ իրավագիտության զարգացումը մեզանում կրերի երեխաների և սովորողների իրավունքների իրավական պաշտպանվածության բարձրացում՝ նրանց մանկավարժական նման «տեռորից» և եսամոլությունից պաշտպանելու համար: Անհրաժեշտ է մեկնընդմիջտ հասկանալ, գիտակցել, որ աշակերտը, ուսանողը նույնպես մարդ է, նա ևս ունի հանգստի իրավունք, որ նա, ինչպես յուրաքանչյուր քաղաքացի, ապրում է ժողովրդական սովորույթների միջավայրում և շաբաթ, կիրակի ու տոն օրերին կարող է հյուր ընդունել, հյուր գնալ, տոնակատարությունների մասնակցել:

Լավ ուսուցիչը նա է, ով լավագույն արդյունքի է հասնում սովորելուն հատկացված, գիտականորեն հիմնավորված ժամանակի ընթացքում:

Գիտականության սկզբունքի կարևոր պահանջ է նաև գիտական հետազոտության մեթոդների պարբերաբար կիրառումը ուսուցման գործընթացում:

Գիտականության սկզբունքը պահանջում է, որ դպրոցում ուսուցանվող նյութը լինի գիտական, ինչ-որ ձևով համապատասխանի մաթեմատիկայի գիտական զարգացման արդի փուլի արդյունքներին, սակայն դա մեզ ոչ միշտ է հնարավոր լինում ապահովել՝ կապված սովորողների տարիքային առանձնահատկությունների հետ: Բոլոր դեպքերում, երբ դասագրքերի հեղինակները, փորձելով նյութը շարադրել խիստ գիտականորեն, հիմնավորված, մեծ մասամբ թույլ են տալիս կոպիտ սխալ, և նմանօրինակ նյութերը անմատչելի են դառնում տվյալ տարիքի սովորողների համար: Այդ պատճառով հաճախ դասագրքերի հեղինակները խուսափում են խիստ գիտականությունից: Օրինակ՝ ֆունկցիայի սահմանի դասական սահմանումը տալու փոխարեն ՀՄԱՏ գործող դասագրքի հեղինակները տալիս են ֆունկցիայի արժեքների հաջորդականության սահմանը n -ը անվերջի ձգտելիս:

2.3. Յուրացման գիտակցականությունը

Յուրացման գիտակցականությունն ասելով՝ հասկացվում է սովորողների կողմից գիտելիքների այնպիսի տիրապետում, որը ենթադրում է յուրացված նյութի խորը ըմբռնում և նոր, կոնկրետ իրավիճակներում դրա կիրառման կարողություն:

Նշված սկզբունքն իրականացնելու դժվարությունները շատ-շատ են: Ըստ էության մանկավարժագիտությունը, ինչպես ենթադրում է Ա. Ա. Ստոլյարը, դեռևս ճշգրտորեն չգիտի, թե ինչ է նշանակում «հասկանալ» (ըմբռնել): Այս հիմնահարցի պատասխանը մասնագետները գտնում են ինտուիտիվ մակարդակում, մոտավորապես հետևյալ կերպ. հորինվում է, որ «եթե աշակերտը հասկացել (ըմբռնել) է տվյալ նյութը, ապա նա պետք է կարողանա պատասխանել ինչ-որ հարցերի և (կամ) կարողանա լուծել ինչ-որ տիպի խնդիրներ: Եվ այստեղից էլ իբր թե հեշտ է պարզել, թե ինչ է նշանակում՝ աշակերտը չի հասկացել նյութը»: Եթե աշակերտը չի կարողանում պատասխանել այդ հարցերին կամ լուծել այդ խնդիրները, ապա նա չի հասկացել: Նույնիսկ չի պարզաբանվում, թե խոսքը բոլոր հարցերի (խնդիրների) մասին է, և, եթե անգամ այդ հարցերից (խնդիրներից) մեկին էլ չպատասխանի, ապա դարձյալ չի «հասկացել»: Նման պարագայում, ըստ Ա. Ա. Ստոլյարի, հասկանալու կամ չհասկանալու մասին եզրակացություն անելը լոկ ճշմարտանման է, բայց ոչ հավաստի:

Մեր կարծիքով՝ այդ հարցը առանձին դեպքերում ունի ճշգրիտ լուծում, և այդ մասին մենք կխոսենք առաջիկայում՝ սահմանումների և թեորեմների ուսուցման մեթոդիկաներում:

Ուսուցման գործընթացում հետադարձ կապի օգնությամբ մենք անընդհատ պետք է տեղեկություններ ստանանք սովորողների կողմից ուսուցանվող նյութի յուրացման որակի մասին և պարզենք՝ սովորողը անգի՞ր է արել դասագրքային նյութը կամ ուսուցչի պատմածը, թե՞ նրա գիտելիքները հիմնված են հասկանալու վրա: Այս վերջինը պարզելու համար անհրաժեշտ է հարցերի, վարժությունների և խնդիրների մանկավարժորեն նպատակահարմար դրում և համակարգ:

Ա. Ա. Ստոլյարը նշում է, որ կհամարենք «մանկավարժորեն նպատակահարմար» է դրված հարցը, եթե աշակերտին մղում է «ակտիվ մտավոր գործունեության», ոչ թե դասագիրքը պատճենահանելուն: Ըստ Ստոլյարի՝ «Որքա՞ն շրջանագիծ կարելի է տանել մի ուղղի վրա չգտնվող երեք կետերով» հարցը մանկավարժորեն նպատակահարմար չէ դնել, որովհետև պատասխանը մաքուր դասագրքային է՝ «մեկ»: Իսկ եթե ձևակերպենք այնպես, որ չունենա միարժեք դասագրքային պատասխան, օրինակ՝ «Քանի՞ շրջանագիծ կարելի է տանել երեք կետերով», ապա այս հարցի պատասխանը դասագրքում չկա, և աշակերտը ինքնուրույն պետք է կազմի բոլոր հնարավոր կոմբինացիաները (կետերի փոխդասավորու-

թյունները) և նոր պատասխանի հարցին: Այսկերպ դրված հարցն արդեն կլինի մանկավարժորեն նպատակահարմար:

Այն, թե որ դեպքում է դրված հարցը նպատակահարմար և որ դեպքում՝ ոչ, կախված է հարցի մեջ պարունակվող էնտրոպիաների (անորոշությունների) օպտիմալ քանակից: Եթե հարցը էնտրոպիա չի պարունակում, ապա նրա պատասխանը դասագրքային է և մանկավարժորեն նպատակահարմար չէ (այսինքն՝ պատկանում է «անգիրի» շարքին): Եթե հարցը շատ էնտրոպիա է պարունակում, ապա այն կարող է սովորողի ուժերից վեր լինել և նույնիսկ համարվել մանկավարժորեն ոչ նպատակահարմար կա՛մ բոլոր սովորողների համար, կա՛մ էլ որոշ մասի համար: Կարճ ասած՝ յուրաքանչյուր երեխայի համար պետք է գտնել էնտրոպիաների օպտիմալ քանակությունը, որը, սակայն, անչափ դժվար է և մինչև օրս մանկավարժական չլուծված հիմնախնդիր է:

Գիտակցական յուրացումը սկզբունքորեն բացառում է դոգմատիկ դասավանդումը, որի արդյունքը «ձևական (ֆորմալ) գիտելիքներն» են: Ձևական ուսուցումը գիտակցականի հակադիրն է և, ցավոք սրտի, հաճախ է հանդիպում մաթեմատիկայում՝ պայմանավորված վերջինիս բնույթով: Ձևական գիտելիքների առաջացման պատճառը մաթեմատիկային հատուկ լեզվի ձևականացումն է: Եվ երբ միակողմանի և ոչ ճիշտ ուսուցման արդյունքում մաթեմատիկայի լեզուն ուսուցանելիս ձևը կտրվում է բովանդակությունից, ուսուցման մեջ առաջանում է ֆորմալիզմ:

Ձևական ուսուցման հիմնախնդրով զբաղվել է խորհրդային հայտնի մաթեմատիկոս և մանկավարժ Ա. Յա. Խինչինը: Նա նշված հարցում առանձնացնում էր երկու թերություն՝

ա) ձևական ուսուցում (ֆորմալիզմ),

բ) տեսության խզումը պրակտիկայից, որն առաջանում է մաթեմատիկայի որոշակի աստիճանների միջև եղած կապերի խզումից:

Ասվածը պատկերենք հետևյալ աղյուսակով.

Մաթեմատիկայի «շենքը»	Ֆորմալիզմ	Տեսության խզումը պրակտիկայից
3-րդ աստիճան: Լեզու (մաթեմատիկայի բովանդակային հասկացությունների և հարաբերությունների տրամաբանորեն կարգավորման և հետազոտման համար անհրաժեշտ նշանային միջոցների հավաքածու):	2-րդ և 3-րդ աստիճանների միջև եղած ճիշտ կապերի խզումներ	

2-րդ աստիճան: Առարկա (նյութական իրականությունից վերացված բովանդակային մաթեմատիկական հասկացություններ և օրինաչափություններ):		1-ին և 2-րդ աստիճանների միջև եղած ճիշտ կապերի խզումներ
1-ին աստիճան: Աղբյուր (օբյեկտիվ նյութական իրականություն):		

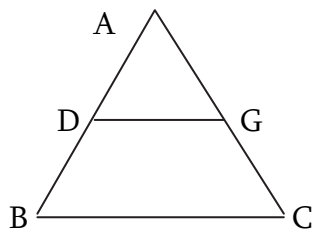
Դիտարկենք ձևական (ֆորմալ) ուսուցման օրինակներ:

1. Աշակերտները հեշտությամբ են լուծում x և y անհայտներ պարունակող հավասարումները, իսկ դժվարանում են, օրինակ, եթե անհայտները նշանակված են այլ տառերով՝ a, b, s, t և այլն:

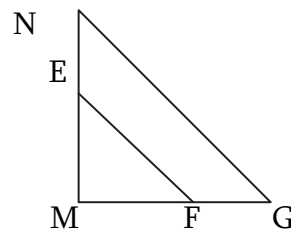
2. Կարողանում են կառուցել $y = k/x$ տիպի ֆունկցիաների գրաֆիկը, իսկ ասիա դժվարանում են կառուցել $xy = k$ տիպի հավասարման գրաֆիկը:

3. Կարողանում են կառուցել $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, սակայն դժվարանում են կառուցել $S = at^2$ տիպի ֆունկցիայի գրաֆիկը:

4. Ապացուցում են եռանկյան միջին գծի հատկության մասին թեորեմը, եթե գծագիրը դասագրքային է (նկ. 1), և դժվարանում են, եթե այն շրջված է, և տառերը փոխված են (նկ. 2):



Նկ. 1



Նկ. 2

5. Աշակերտը կառուցել է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, բայց դժվարանում է գծագրի վրա $x = x_0$ արժեքի դեպքում գտնել $y_0 = f(x_0)$ -ն, և հակառակը:

6. Աշակերտը հստակ սահմանում է $\log_a b$ -ն, բայց չի կարողանում հաշվել $\log_2 8$ -ը:

7. Աշակերտը հստակ ձևակերպում է երեք ուղղահայացների թեորեմը, բայց չի կարողանում հիմնավորել, որ կանոնավոր եռանկյուն բուրգի խաչվող կողմերը փոխուղղահայաց են:

8. Աշակերտը պնդում է, որ « $-x$ »-ը բացասական թիվ է, քանի որ x -ի առաջ առկա է « $-$ » նշանը:

9. Աշակերտը «գիտի» մոդուլի սահմանումը, բայց չի կարողանում լուծել $|a|=2$ հավասարումը կամ $|a|>2$, $|a|<2$ անհավասարումները և այլն:

Մանկավարժական կարևոր խնդիր է վերացնել նման ձևական ուսուցման հետևանքները, ինչպես նաև այն, ինչն ավելի կարևոր է՝ կազմակերպել ուսուցում, որը չի հանգում ձևական ուսուցման:

2.4. Ակտիվ ուսուցում կամ սովորողների ակտիվությունը

Ուսուցման գիտակցականության սկզբունքը, ինչպես տեսանք, ենթադրում է ուսուցման գործընթացում սովորողների ակտիվ մասնակցությունը: Առանց ակտիվ մտավոր գործունեության՝ խոսք անգամ չի կարող գնալ գիտակցված ուսուցման մասին:

Մեթոդիկայում զանազանվում են ակտիվ ուսուցման երկու տեսակ՝ լայն իմաստով և նեղ իմաստով:

Լայն իմաստով ակտիվ ուսուցումն այն է, երբ սովորողը ակտիվ մտավոր գործունեություն է ծավալում ընդհանրապես, այսինքն՝ մյուս բոլոր առարկաների ուսուցման ընթացքում:

Նեղ իմաստով ակտիվությունը առանձնահատուկ ակտիվություն է, որը սովորողը ցուցաբերում է մաթեմատիկական գործունեության ընթացքում և յուրահատուկ է մաթեմատիկային:

Եթե աշակերտը ցուցաբերում է նեղ իմաստով ակտիվություն, ապա նա կարող է նաև լայն իմաստով ակտիվ լինել: Հակառակը ոչ միշտ է ճիշտ: Երեխան կարող է լայն իմաստով ակտիվ լինել (օրինակ՝ գերազանցիկների զգալի մասը), բայց նրա մտավոր գործունեությունը ոչ միշտ կարող է լինել առանձնահատուկ մաթեմատիկական, այսինքն՝ նեղ իմաստով ակտիվ լինել: Դա է պատճառը, որ մաթեմատիկայից առաջադիմող երեխաները, որպես կանոն, առաջադիմում են նաև հանրակրթական մյուս առարկաներից (իհարկե, ցանկության դեպքում):

Ակտիվ ուսուցման հիմնախնդիրը նոր չէ, սակայն մշտապես արդիական է, որովհետև նախևառաջ այն դեռևս հեռու է լուծված համարվելուց, մյուս կողմից՝ մաթեմատիկայի ուսուցման ամեն մի բարեփոխման արդյունքում ակտիվ ուսուցման հիմնախնդիրը կրկին ստանում է նոր երանգ և դառնում արդիական:

2.5. Ուսուցման զննականությունը

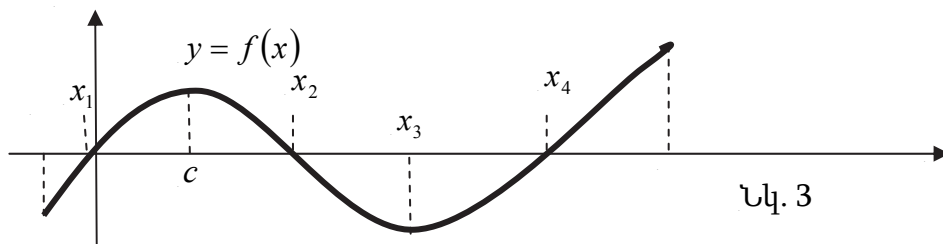
Հայտնի ռուս մանկավարժ Կ. Դ. Ուշինսկու կարծիքով՝ զննական ուսուցումը այնպիսի ուսուցում է, որը հիմնված է ոչ թե սովորողի վերացարկված պատկերացումների, այլ նրա կողմից անմիջապես ընկալվող կոնկրետ (առարկայական) կերպարների վրա:

Իմացական գործընթացի առաջին աստիճանը կենդանի հայեցողությունն է, որը իրականացվում է զննական ուսուցման միջոցով: Չննականությունը ապահովում է կապը կոնկրետի ու վերացականի միջև և իրականացնում է անցումը կենդանի հայեցողությունից դեպի վերացական մտածողություն: Այդ իմաստով զննականությունը համարվում է մտածողության հիմքը:

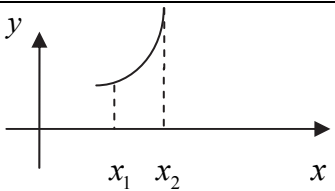
Չննականությունը առանձնապես կարևոր է մաթեմատիկայի ուսուցման շրջանակներում հենց այն պատճառով, որ այստեղ պահանջվում է ապահովել վերացարկման ավելի մեծ աստիճան, քան մնացած առարկաների պարագայում:

Չննականության տարբեր տեսակներից՝ բնական, պատկերային, սիմվոլային, մաթեմատիկայի ուսուցման մեջ լայն կիրառություն ունի սիմվոլային զննականությունը (գծագիր, գրաֆիկ, սխեմա, աղյուսակ): Սիմվոլային զննական միջոցը պայմանական նշանների մի համակարգ է, որի միջոցով առարկաների, երևույթների և գործընթացների ուսումնասիրվող կողմը առանձնանում է մյուս հատկություններից և ներկայանում է մաքուր տեսքով: Օրինակ՝ **երկրաչափական խնդրի գծագիրը այս տեսակ զննականության միջոց է, քանի որ տարածական ռեալ մարմնի (առարկայի) որևէ հատկություն՝ երկրաչափական ձևը, առանձնանում է այդ առարկայի մյուս բոլոր հատկանիշներից և մեզ է ներկայանում մաքուր տեսքով (առանց մատերիականության, համի, հոտի, գույնի, արժեքի և այլն):**

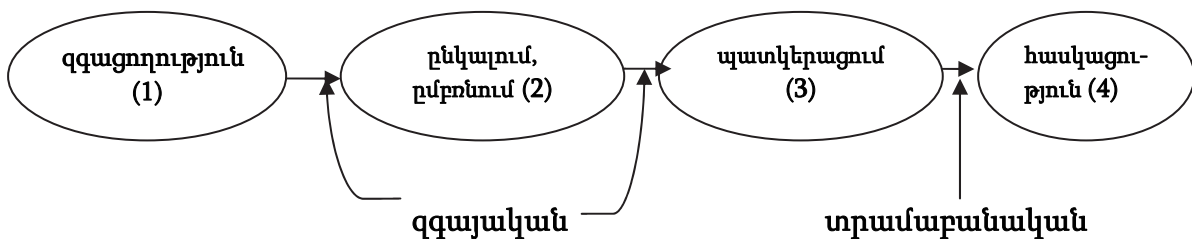
Սակայն ոչ բոլոր մարդկանց է միանգամից հասկանալի սիմվոլային զննականությունը: Իրենից որոշակի նշանային համակարգ ներկայացնող սիմվոլային զննականությունն ըստ էության յուրահատուկ լեզու է, և, ինչպես ցանկացած լեզու, անհրաժեշտ է հատուկ ուսումնասիրել այն, որպեսզի հասկանալի (թարգմանելի) լինի: Օրինակ՝ ավանդական մեթոդիկան չի ապահովում սովորողների կողմից գրաֆիկների լեզվի տիրապետումը: Դպրոցի շատ շրջանավարտներ չեն կարողանում կարդալ գրաֆիկները: Որպես օրինակ՝ քննարկենք հետևյալ գրաֆիկը.



Գրաֆիկ կարդալու գրագիտությունն ապահովելու նպատակով նպատակահարմար է օգտագործել հետևյալ տիպի հատուկ բառարաններ.

Բառային արտահայտությունը (հայոց լեզվով)	Անալիտիկ (բանաձևային) արտահայտությունը	Գրաֆիկական (սիմվոլիկ) արտահայտությունը
f -ը աճող ֆունկցիա է	$x_1 = x_2 \in D(f)$ և $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	

Այժմ պարզենք զննականության դերը մաթեմատիկական հասկացություններին ձևավորման գործում: Հասկացության ձևավորումը բարդ հոգեբանական գործընթաց է, որն սկսվում է իմացության պարզագույն ձևերից՝ **զգացողություններից, և ընթանում է հետևյալ սխեմայով.**



Սովորաբար զանազանվում են այս գործընթացի երկու աստիճաններ՝ զգայական և տրամաբանական:

Զգայական՝ անցումը (1) → (2) և (2) → (3), տրամաբանական՝ անցումը (3) → (4)

Զգայական աստիճանը իմացության առաջին աստիճանն է և համապատասխանում է կենդանի հայեցողությանը: Այդ պատճառով էլ այդ աստիճանի իրականացումը զարգացվում է զննական միջոցների կիրառմամբ: Մինչև աշակերտը չտեսնի խորանարդը կամ գունդը, ինչքան էլ նրա մասին պատմեք, նրա մոտ այն զգայական աստիճանով չի ձևավորվի, և արդյունքը նման կլինի *այնչտայնյան այն կույր բզեզին, որն անվերջ պտտվում է գնդակի վրայով և չի ընկալում, որ դա գնդային մակերևույթ է, և այն էլ՝ վերջավոր:* Իմացության առաջին աստիճանի ձևավորումը սկսվում է մանկապարտեզից՝ նախադպրոցական հասակից և շարունակվում է 1-6-րդ դասարաններում: Իրականում երկրաչափության նախկին դասընթացներում տարածական պատկերների ձևավորման դեռևս մանկապարտեզում սկսած գործընթացը հանրակրթական դպրոցի 1-8-րդ դասարաններում կտրվում է և շարունակվում 9-10-րդ դասարաններում, որն էլ հենց այն հիմնական բովանդա-

կային թերությունն է, որը տարածաչափության ուսուցման դժվարությունների առաջացման պատճառ է դառնում: Նշենք, որ ներկայումս այս թերությունը մասամբ վերացվել է:

Հարկ է նկատել, որ մաթեմատիկական հասկացությունների ձևավորման գործընթացը ոչ միշտ է ընթանում վերոհիշյալ սխեմայով, այսինքն՝ ոչ միշտ է սկսվում զգայություններից: Մասնավորաբար, երբ ձևավորվող հասկացությունը այս կամ այն ձևով կախված է անվերջության հասկացությունից (օրինակ՝ ուղիղ, հարթություն, ռացիոնալ թվերի բազմության խտություն, սահման և այլն), ապա նման գործընթացում զգայական աստիճանը բացակայում է, քանի որ հնարավոր չէ ընկալել կամ ըմբռնել անվերջությունը և նման պարագայում զննականությունը ձևավորմանը նպաստող միջոցից կարող է, հակառակը, վերածվել արգելակող ու խանգարող միջոցի:

Օրինակ՝ երկու ռացիոնալ թվերի՝ $\frac{1}{3}$ -ի և $\frac{1}{2}$ -ի միջև եղած ռացիոնալ թվերի բազմության անվերջության (կամ $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ հատվածի թվերի անվերջության) ձևավորման համար $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ հատվածի դիտարկումը, հակառակը, խանգարում է, այլ ոչ թե նպաստում անվերջության ընկալմանը: Այլ կերպ ասած՝ **ռացիոնալ թվերի բազմության խտության հատկությունը անհնար է հայտնագործել փորձական ճանապարհով. այն հաստատվում է ոչ թե զննական, երկրաչափական պատկերացումներով, այլ՝ միայն տրամաբանորեն:**

Այս և նման օրինակները ցույց են տալիս, որ, ինչպես գտնում են հոգեբանները, զննական պարագայի ընկալումը, հաճախ վերջինիս օբյեկտիվ առանձնահատկությունների պատճառով կարող է ոչ միայն օգնել, այլ նաև խանգարել հասկացության ձևավորմանը: Հիշենք երկրաչափական խնդրի գծագրի դերը. խնդրի լրիվ (ամբողջական) գծագիրը ոչ թե օգնում, այլ հաճախ խանգարում է սովորողին լուծել խնդիրը:

Հայտնի է, որ զննականությունը շատ օգնում է 1-9-րդ դասարաններում և հաճախ խանգարում է ավագ դպրոցում:

Զննականության նոր միջոց (տեխնոլոգիա) է **գրաֆը**, որը կարող է շատ արդյունավետորեն կիրառվել վերջավոր բազմությունների երկտեղ (բինար) շատ հարաբերությունների, ֆունկցիաների ներկայացման համար:

Հաջորդ առանձնահատուկ զննական միջոցը տրամաբանամաթեմատիկական լեզվի կիրառությունն է: *Ճիշտ այնպես, ինչպես գծագիրը «մերկացնում է» առարկայի երկրաչափական ձևը (ստրուկտուրան) և նրան ներկայացնում մաքուր տեսքով, այնպես էլ տրամաբանամաթեմատիկական լեզվով ներկայացվող նախադասության և պնդման սիմվոլիկ գրառումը մերկացնում է (բաց է անում) այդ նա-*

խաղասությունն ու պնդումը և նրան ներկայացնում մաքուր տեսքով: Այդ պատճառով էլ այն նույնպես համարվում է զննականության յուրահատուկ միջոց: Որպես օրինակ՝ կարելի է դիտարկել մաթեմատիկական պնդման ապացուցման մեթոդի ընտրության կապն այդ պնդման տրամաբանական և լեզվաքերականական ձևերի հետ (տե՛ս 6.5-ը, էջ 164):

2.6. Գիտելիքների ամրությունը

Գիտելիքների ամրության սկզբունքը պահանջում է, որ սովորողների մոտ երկար ժամանակ պահպանվի յուրացված գիտելիքների ունակությունների և հմտությունների համակարգը: Դա հնարավոր չէ ապահովել պարզագույն սերտման ճանապարհով:

Հետևաբար **գիտելիքների ամրության անհրաժեշտ պայմաններից մեկը յուրացվածի գիտակցականությունն է**, որն էլ իր հերթին ապահովում է սովորողների ակտիվ մտավոր գործունեությունը: **Հետևաբար գիտելիքների ամրության անհրաժեշտ պայմաններից մեկը դրանց ակտիվ եղանակով ձեռքբերումն է:** Սակայն դա դեռ բավարար չէ:

Կտրտված, կցկտուր, չհամակարգված և միմյանց հետ կապ չունեցող գիտելիքները չեն կարող ամուր լինել: Սակայն համակարգայնությունն ապահովվում է ուսուցման գիտականությամբ: Այսպիսով՝ **գիտելիքների ամրության հաջորդ անհրաժեշտ պայմանը ուսուցման գիտականությունն է:** Սակայն դիտականությունն ու համակարգայնությունը միասին դարձյալ բավարար չեն գիտելիքների ամրության համար, որովհետև հակառակ դեպքում կարիք չի լինի գիտելիքների ամրությունն առանձնացնելու որպես առանձին սկզբունք: **Գիտելիքների ամրությունն ապահովելու համար անհրաժեշտ է կազմակերպել այնպիսի ուսուցում, որը հաշվի կառնի նաև հիշելու մեխանիզմի հետազոտման արդյունքները:**

Մանկավարժության մեջ մենք մասնավորաբար օգտվում ենք հետևյալ դրույթներից.

- ա) հիշելն ուղիղ համեմատական է կրկնությանը,
- բ) հիշողությունն ունի ընտրովի բնույթ. մենք միշտ հիշում ենք այն, ինչը մեզ հետաքրքրում է, էական է և կարևոր,
- գ) նյութը լավ է հիշվում, երբ նրա մոտիվը գործնականում դրա կիրառելն է,
- դ) հիշելը հեշտանում է, երբ հիշման ենթակա նյութը տրոհվում է ըստ իմաստի առանձին մասնաբաժինների՝ առանձին ենթավերնագրերով,
- ե) զգացմունքներով համեմված նյութն ավելի լավ է հիշվում:

Առաջին հերթին հարց է առաջանում, թե իրականում ինչ պետք է հիշի սովորողը: Սա միարժեք պատասխան չունի: Ինտուիտիվորեն հարցն ավելի կամ պակաս հասկանալի է որևէ մեկին:

Ակնհայտ է, որ ամեն ինչ հիշելու կարիք չկա, դեռ ավելին՝ հնարավոր էլ չէ: Օրինակ՝ երկար ժամանակ չեն պահպանվում մաթեմատիկական փաստերի (սահմանումների, աքսիոմների և թեորեմների) ճշգրիտ ձևակերպումները, բայց դրանք անհետ չեն կորչում, եթե դրանք ժամանակին ձևավորվել են աշակերտի մոտ՝ հենքում ունենալով դրանց ինտուիտիվորեն հասկանալի լինելը: Օրինակ՝ աշակերտների մեծ մասն արագ մոռանում է սահմանի կամ ածանցյալի սահմանումը, սակայն նրանց հիշողության մեջ կմնան դրանց ինտուիտիվ՝ իմաստային մեկնաբանությունները (ֆիզիկական և երկրաչափական իմաստները), եթե ուսուցիչը նախապես այդ հասկացությունները ձևավորել է ինտուիտիվ մակարդակում հենց այդպես՝ վերջում տալով դրանց ճշգրիտ ձևակերպումները: Այստեղից էլ հետևություն՝ ցանկացած մաթեմատիկական հասկացություն նախ պետք է ձևավորվի ինտուիտիվ մակարդակում:

Չեն հիշվում, բնականաբար, նաև թեորեմների ապացուցումները: Այո՛, կարևոր չէ, որ սովորողը չի հիշում թեորեմի ապացուցումը: *Կարևորն այդ թեորեմի ապացուցման հիմքում դրված ապացուցման մեթոդը հիշելն է:*

Գիտելիքների ամրությունը հիմնականում ապահովվում է նաև խելամիտ և բազմատեսակ, նպատակային կրկնության միջոցով:

2.7. Անհատական մոտեցում

Եթե հաշվի առնենք, որ ուսուցման գործընթացը կառավարվող գործընթաց է, ապա բնական է, որ ակտիվ ուսուցում կազմակերպելու համար անհրաժեշտ է հաշվի առնել ուսուցանվող օբյեկտի (անհատի) առանձնահատկությունները, այսինքն՝ յուրաքանչյուր աշակերտի մտածողության, հիշողության, նույնիսկ, առանձին զգայարանների (տեսողության, լսողության) առանձնահատկությունները, ինչպես նաև բնավորությունն ու կամքը: **Առանց հաշվի առնելու այդ առանձնահատկությունները՝ մենք չենք կարող ապահովել ուսուցման մատչելիությունը:**

Ուսուցման հոգեբանությունում առանձնացված են սովորողների առանձնահատկությունների մի քանի բնութագրիչներ: Դրանցից են՝ ա) յուրացման արագությունը (տեմպը), բ) վերլուծություն, համադրում և դրանց հետ կապված ընդհանրացում և վերացարկում կատարելու լրիվությունն ու ճշգրտությունը, գ) մտածողության արդյունավետությունը և այլն:

Նույնիսկ նույն տարիքի երեխաների առանձնահատկությունները խիստ տարբեր են: Այդ պատճառով էլ միևնույն ուսումնական նյութը մեկը յուրացնում է շատ արագ, մյուսը՝ մի քիչ պակաս արագ, իսկ երրորդը՝ էապես դանդաղ: Հենց այս փաստն էլ հիմնավորում է ուսուցման անհատական մոտեցման անհրաժեշտությունը:

Եթե նախկինում ուսուցման գործընթացում պլանավորվում էր, այսպես կոչված, միջին մակարդակը, որը անբարո էր, ճիշտ և հումանիստական չէր, ապա ներկայումս պլանավորվում է ուսուցման պարտադիր՝ չափորոշչային մակարդակը, որը համապատասխանում է դրական գնահատականի նվազագույն եզրին, և որը բարոյական է, հումանիստական և ճիշտ, որովհետև սովորողների գերակշռող մեծամասնության ուժերից վեր չէ հաղթահարել այդ ցուցանիշը: Այստեղից էլ ստեղծվում են սովորողների հետ անհատական ուսուցում կազակերպելու մեծ հնարավորություններ: Եթե նախկինում հնարավոր չէր 25-30 աշակերտ ունեցող դասարանի բոլոր սովորողների մոտ ապահովել այդ միջինացված արդյունքները, ապա չափորոշչահեն կրթության պայմաններում պարտադիր արդյունքների միջոցով նորմալացնելով (պակասեցնելով) թույլ սովորողների ուսումնական ծանրաբեռնվածությունը՝ ժամանակ է ստեղծվում մնացած սովորողների հետ անհատական աշխատանք կատարելու համար: Այդպես, փաստորեն, իրականացվում է նաև տարբերակված ուսուցման պահանջը:

Անհատական ուսուցման սկզբունքի իրականացման հիմնական միջոցը աշակերտների համար նախատեսված անհատական ինքնուրույն աշխատանքներն են:

2.8. Համակարգայնության և հաջորդայնության սկզբունքը

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում **համակարգայնության և հաջորդայնության սկզբունքի** կիրառումը պայմանավորված է ինչպես «Մաթեմատիկա» բնագավառի տրամաբանությամբ, այնպես էլ սովորողների մտավոր ու ֆիզիկական զարգացման առանձնահատկություններով պայմանավորված ճանաչողական և պրակտիկ գործունեության օրինաչափություններով: «Ուսուցման համակարգայնության և հաջորդայնության սկզբունքն ընկած է ուսումնական պլանների կառուցման հիմքում, որով էլ սահմանվում է ուսուցման գործընթացում ուսուցչի աշխատանքի և սովորողների գործունեության համակարգը», - նշված է «Մանկավարժական հանրագիտարանում» (հատոր 1, էջ 733):

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում **համակարգայնությունը** ենթադրում է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի փաստերի քննարկման և

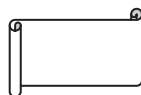
ուսումնասիրման, ինչպես նաև հիմնական հասկացությունների ու դրույթների տիրապետման որոշակի կարգի պահպանում:

«Միայն առարկաների բուն էությունից բխող խելամիտ համակարգն է տալիս մեզ մեր գիտելիքներին տիրապետելու լիարժեք իշխանություն: Կցկտուր, չկապակցված գիտելիքներով լցված գլուխը նման է պահոցի, որում այնպիսի խառնաշփոթ է, որ տերն անգամ ոչինչ չի փնտրում, իսկ առանց գիտելիքների՝ դատարկ համակարգ ունեցող գլուխը նման է առևտրի կրպակի, որում բոլոր արկղները գրություններ են պարունակում, սակայն դատարկ են», - նշում է հայտնի մանկավարժ Կ. Դ. Ուշինսկին (Աշխատ. ժողովածու, հ. 5, 1949, էջ 355):

Որոշակի, հստակ համակարգով ձևավորված մաթեմատիկական գիտելիքներում ու կարողություններում տարբերելով գլխավորն ու երկրորդականը՝ աշակերտը հեշտությամբ կարող է վերհիշել այն ամենը, ինչը մոռացվել է (չգիտես կամ մոռացել ես՝ արտածի՛ր) և ազատորեն կիրառել ստացված գիտելիքներն ըստ պահանջի:

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում **հաջորդայնությունը** նշանակում է, որ ուսուցումն ընթանում է՝ ա) պարզից դեպի բարդը, բ) պատկերացումներից դեպի հասկացությունը, գ) հայտնիից դեպի անհայտը, դ) գիտելիքներից դեպի կարողությունը, իսկ դրանից էլ՝ դեպի հմտությունը:

Ուսուցիչն իրականացնում է այդ սկզբունքը, եթե մաթեմատիկայի ուսուցումը քայլերի այնպիսի հաջորդականություն է, որոնցից յուրաքանչյուր աշակերտների ունեցած գիտելիքներն ու կարողությունները լրացնում է նոր գիտելիքների և կարողությունների խելամիտ չափաքանակով, որոնք, իրենց հերթին, վերածվում են դպրոցականների կողմից նոր՝ այլ գիտելիքներ ու կարողություններ ձեռք բերելու գործիքակազմի:



ԳԼՈՒԽ ԵՐՐՈՐԴ. ԳԻՏԱԿԱՆ ՃԱՆԱԶՈՂՈՒԹՅԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅՈՒՄ ԵՎ ՆՐԱ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՅՈՒՄ

3.1. Գիտական հետազոտման մեթոդների բնութագրումը

Հայտնի է, որ մաթեմատիկական զբաղվում է որոշակի «իդեալականացված» օբյեկտներով: Սակայն այդ մաթեմատիկական օբյեկտներն արտացոլում են նյութական առարկաների և նյութական աշխարհի հատկությունները, օրինաչափությունները. դրանց իդեալական բնույթը պարզապես նշանակում է հետազոտման գործընթացում մեզ ոչ պետքական, ոչ անհրաժեշտ հատկություններից ժամանակավորապես հրաժարում, ինչի հետևանքով մենք հնարավորություն ենք ստանում տվյալ նյութական (իրական) օբյեկտը քննարկելու հնարավորինս մաքուր վիճակում: Այդ պատճառով մաթեմատիկական հասկացություններն ու դրույթները պարունակում են ռեալ իրականության հատկությունների ավելի խոր և ընդհանուր իմացություն:

Բնության օրենքների ճանաչման գործընթացում մաթեմատիկոս-գիտնականը օգտվում է մաթեմատիկական հատուկ միջոցներից՝ հետազոտման գիտական մեթոդներից: Ուսուցման գործընթացում սովորողները միաժամանակ գտնվում են նաև «առաջին հայտնագործողի» կարգավիճակում: Մաթեմատիկական հետազոտման հիմնական միջոցներն են՝ 1. դիտում և փորձ, 2. համեմատում, 3. վերլուծություն (անալիզ) և համադրում (սինթեզ), 4. ընդհանրացում և մասնավորեցում, 5. վերացարկում և կոնկրետացում, 6. ինդուկցիա և դեդուկցիա, 7. անալոգիա:

Այժմ փորձենք բացահայտել այս մեթոդներից յուրաքանչյուրի էությունն ու դերը ուսուցման գործընթացում:

3.2 Դիտում և փորձ

Դիտում կամ զննում կոչվում է հետազոտման այն մեթոդը, որը արձանագրում է շրջակա աշխարհի, առանձին առարկաների և երևույթների հատկությունները իրենց բնական վիճակում, որում իրենք սովորաբար գոյություն ունեն:

Անհրաժեշտ է զանազանել դիտումը սովորական պարզ ընկալումից: Ընկալումը մարդու գիտակցության մեջ առարկայի արտացոլումն է, երբ այն անմիջականորեն ազդում է մարդու զգայական օրգանների վրա: Օբյեկտների դիտումը ներառում է ընկալումը, բայց չի ավարտվում դրանով: Դիտումը անհնար է առանց դի-

տողի հիշողության մեջ սևեռվելու և առանց դիտման հետագա բառային (կամ բանաձևային, սիմվոլային) արդյունքների սևեռման:

Փորձը (եքսպերիմենտը) ուսումնասիրման այնպիսի մեթոդ է, որի միջոցով հետազոտողը միջամտում է օբյեկտի կամ երևույթի բնական վիճակին և զարգացմանը՝ առաջացնելով վերջինիս համար արհեստական իրավիճակ, պայմաններ, արհեստականորեն մասնատելով այն մասերի և միացնելով դրանք այլ առարկաների ու երևույթների հետ այլ հարաբերակցությամբ:

Յուրաքանչյուր փորձ կապված է դիտման հետ: Փորձարկողը դիտում է փորձի ընթացքը, զննում և հետևում է դրա ընթացքին, փոփոխություններին և զարգացմանը նոր, իր կողմից ստեղծած արհեստական պայմաններում:

Նշված մեթոդները հիմնականում կիրառվում են փորձարարական գիտություններում (ֆիզիկա, քիմիա, կենսաբանություն): Մաթեմատիկան, ինչպես գիտենք, փորձարարական գիտություն չէ, և նրանում ճշմարտությունները հաստատվում են ոչ թե փորձի, այլ ապացուցման (դեդուկտիվ) ճանապարհով: Այդ պատճառով էլ դիտումն ու փորձը մաթեմատիկայի ուսումնասիրման առաջատար մեթոդներից չեն: Սակայն այլ է պատկերը 1-6-րդ դասարաններում: Սկսած նախադպրոցական տարիքից՝ մաթեմատիկան մատուցվում է ոչ թե դեդուկտիվ, այլ ինդուկտիվ ճանապարհով: Այդ պատճառով էլ մինչև 6-րդ դասարանը այս մեթոդները առաջատար դեր ունեն: Հաճախ է փորձը կիրառվում նաև 7-9-րդ դասարաններում:

Բերենք օրինակներ:

1. (Պոյա) Փորձենք հաշվել $\sqrt{2}-1$ արտահայտության առաջին չորս աստիճանները.

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^1 &= \sqrt{2}-1 = \sqrt{2}-\sqrt{1}, & 2-1 &= 1: \\(\sqrt{2}-1)^2 &= 3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8}, & 9-8 &= 1: \\(\sqrt{2}-1)^3 &= 5\sqrt{2}-7 = \sqrt{50}-\sqrt{49}, & 50-49 &= 1: \\(\sqrt{2}-1)^4 &= (3-2\sqrt{2})^2 = 17-12\sqrt{2} = \sqrt{289}-\sqrt{288}, & 289-288 &= 1:\end{aligned}$$

Այսքանից հետո սովորողները նկատում են, որ միշտ ստացվում է երկու բնական թվերի քառակուսի արմատների տարբերություն, որոնց տարբերությունը դարձյալ հավասար է 1-ի: Այստեղից էլ ձևակերպվում է ինդուկտիվ ենթադրություն, որ.

$$\forall n \in N \exists m \in N \left((\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m+1} - \sqrt{m} \right):$$

Նման ձևով դիտարկելով $(\sqrt{2}-1)^n$, $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^n$, $(2-\sqrt{3})^n$ և այլ օրինակներ՝ կարող ենք հանգել ընդհանուր թեորեմի՝

$$\forall a, b, n \in N \exists m \in N \left(a-b=1 \Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^n = \sqrt{m+1} - \sqrt{m} \right):$$

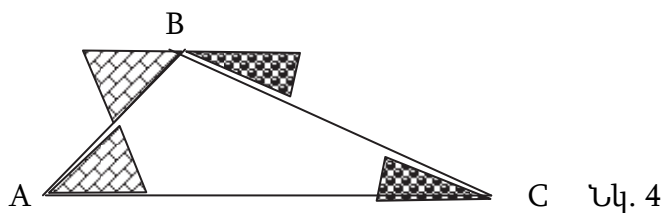
Դիտելու և փորձի միջոցով կարելի է հանգել ավելի ընդհանուր թեորեմի՝

$$\forall a, b, n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \left(a - b = p \Rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^n = \sqrt{m + p^n} - \sqrt{m} \right):$$

2. Մինչև եռանկյան ներքին անկյունների գումարի վերաբերյալ դասական թեորեմի ապացուցումը կարելի է առաջարկել երեխային հետևյալ փորձը:

Առանձին թղթի վրա նկարել որևէ եռանկյուն, գազաթները նշանակել A, B, C տառերով, փոխադրիչով չափել գծած եռանկյան ներքին անկյունները և հաշվել դրանց գումարը: Արդյունքում կստանան կա՛մ 180° , կա՛մ էլ դրան շատ մոտ թիվ: Այստեղից էլ բխում է վարկած, որ այդ գումարը մոտավորապես 180° է:

Այնուհետև անհրաժեշտ է առաջարկել հետևյալ փորձը: Յուրաքանչյուր աշակերտ մկրատով նրբորեն կտրատում է եռանկյան A և C անկյունները, դրանք վերադասավորում B անկյան մոտ այնպես, ինչպես ցուցադրված է նկար 4-ում:



Արդյունքում երեխաները կստանան փոված անկյուն, որն էլ նշանակում է, որ իրականում՝

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ:$$

Այս տիպի փորձն արդեն ապացուցման արժեք ունի:

3.3 Համեմատում

Իմացության տեսությունում համեմատման մեթոդի դերի մասին առավել հստակորեն է ակնարկվում հետևյալ հայտնի աֆորիզմում. «Ողջ իմացությունը համեմատում է»: Մաթեմատիկայում համեմատական մեթոդը լայնորեն կիրառվում է ոչ միայն մաթեմատիկական օբյեկտների հատկությունների ուսումնասիրման, այլև բուն այդ հատկությունների հաստատման գործընթացներում: Այսպես՝ համեմատման մեթոդը օգտակար է կիրառել պրոգրեսիաների, բազմանիստերի, ուղղահայացության և հիմքերի ուսումնասիրման ժամանակ: Վերոհիշյալ օրինակ 1-ում համեմատման միջոցով են սովորողները հայտնաբերում $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^n, n \in \mathbb{N}$ տեսքի արտահայտությունների հատկությունը:

Համեմատման մեթոդի կիրառությունը ենթադրում է հետևյալ սկզբունքների պահպանումը:

ա) **Համեմատել կարելի է այն օբյեկտները, որոնք որոշակի կապ (ընդհանրություն) ունեն միմյանց հետ:** Այսինքն՝ համեմատումը պետք է իմաստ ունենա: Օրինակ՝ մենք կարող ենք համեմատել երկու ֆունկցիաներ, բազմանիստեր,

բազմանկյուններ, ամբողջ թվեր, երկու համասեռ մեծություններ և այլն: Բայց չենք կարող (իմաստ չունի) համեմատել երկու ոչ համասեռ մեծություններ, օրինակ՝ 3 մ-ը և 3,5 կգ-ը, եռանկյան մակերեսը և պարագիծը, բազմանիստի մակերևույթի մակերեսը և զանգվածը և այլն:

բ) **Համեմատումը պետք է կատարել պլանավորված**, այսինքն՝ հստակ պետք է առանձնացվեն համեմատվող առարկաների այն հատկությունները, որոնցով կատարվում է համեմատումը: Օրինակ՝ բազմանկյունների համեմատումն ըստ մակերեսների, ըստ կողմերի թվի, ըստ պարագծի և այլն:

գ) **Համեմատումը պետք է լինի լրիվ**, այսինքն՝ միևնույն հատկությունների գծով համեմատումը պետք է հասցվի իր ավարտին:

Կ. Դ. Ուշինսկին գտնում էր, որ «*դիդակտիկայում համեմատումը պետք է լինի հիմնական եղանակը*»:

3.4 Վերլուծություն և համադրում (անալիզ և սինթեզ)

Վերլուծությունն ու համադրումը մեծ դեր են կատարում մաթեմատիկական հետազոտություններում: Մեծ է դրանց դերը նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում:

Նախնական իմաստով վերլուծության տեսակ է *ամբողջից դեպի նրա մասերը (մանրություններ) գնալը, իսկ համադրումը, հակառակը, մասերից դեպի ամբողջը*:

Վերլուծությունն ու համադրումը միմյանցից անջատ հանդես չեն գալիս: Վերլուծության պարզագույն օրինակը, որին ցանկացած երեխա բազմիցս հանդիպել է, այն է, երբ երեխան սկսում է քանդել իր ձեռքն ընկած նոր խաղալիքը: Բավարարելով իր հետաքրքրությունը՝ երբ նա սկսում է, հակառակը, հավաքել խաղալիքը, գործ է ունենում համադրման հետ:

Վերլուծությունն ու համադրումը լավագույնս համագործակցում են ապացուցման վերլուծական - համադրման մեթոդում:

Վերլուծությունը մտածողության տեսակ է, երբ դատողությունները ընթանում են հետևանքից դեպի պատճառը, օրինակ՝ խնդրի պահանջից (եզրակացությունից) դեպի պայմանը, իսկ համադրման ժամանակ, հակառակը, դատողությունները ընթանում են պատճառից դեպի հետևանք (խնդրի պայմանից դեպի պահանջը):

Ռ. Դեկարտը իր «Տրամաբանություն» գրքում մանրակրկիտ հետազոտել է վերլուծության ու համադրման իմաստները և բերել հետևյալ պարզագույն օրինակը. «Խնդիր դնենք պարզելու՝ ազգակցակա՞ն եմ ես Կարլ Մեծ թագավորին, թե՞ ոչ: Այս խնդրի լուծմանը կարելի է մոտենալ երկու եղանակով: Օգտվելով տոհմաճառից և սկսելով ինձանից՝ կարելի է գնալ դեպի անցյալը՝ Կարլ Մեծը, կամ էլ, հակառակը, սկսելով անցյալից՝ Կարլ Մեծից՝ տոհմաճառով գալ մինչև ներկան և

հասնել ինձ: Երկու դեպքում էլ, եթե մենք հայտնենք միևնույն տոհմաձառի վրա, ապա մենք ազգականներ ենք»:

Այստեղ առաջին դեպքում Դեկարտը մեկնաբանում է, թե ինչ է վերլուծությունը, իսկ երկրորդ դեպքում՝ համադրումը:

Վերլուծության ու համադրման լավագույն օրինակներ են տեքստային խնդիրների լուծման թվաբանական և հանրահաշվական եղանակները, ընդ որում՝ թվաբանական լուծումը հիմնված է համադրման վրա, իսկ հանրահաշվականը՝ վերլուծության վրա:

Օրինակ 1. Հասմիկն ու Շուշանիկը միասին ունեն 12 կոնֆետ: Հասմիկն ունի 7 կոնֆետ: Քանի՞ կոնֆետ ունի Շուշանիկը:

1. $12 - 7 = 5$ (համադրում)
2. $x + 7 = 12 \Leftrightarrow x = 12 - 7 \Leftrightarrow x = 5$ (վերլուծություն)

Օրինակ 2. Ապացուցել, որ եթե $a \geq 0$ և $b \geq 0$, ապա $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$:

Վերլուծություն

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0:$$

Համադրում

Վերլուծական - համադրման մեթոդին ենք դիմում, երբ մեզ հայտնի չեն խնդրի լուծման առաջին քայլն ու հետագա ընթացքը: Բերենք վերլուծական-համադրման մեթոդով երկրաչափական խնդրի լուծման օրինակ:

Դիցուք պահանջվում է ապացուցել, որ հավասարասրուն եռանկյան գագաթից հիմքին տարած բարձրությունը նաև կիսորդ է:

Ապացուցում: 1. **Վերլուծություն:**

Իսկ ինչ՞ է նշանակում, որ BD -ն կիսորդ է:

Պատ.: Այն, որ $\angle ABD = \angle CBD$:

Իսկ ինչպիսի՞ն են այդ անկյունները:

Ինչպե՞ս կարելի է ցույց տալ դրանց

հավասարությունը:

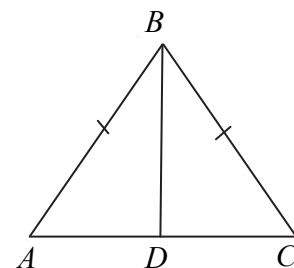
Պատ.: $\angle ABD$ -ն $\triangle ABD$ -ի անկյուն է, իսկ

$\angle CBD$ -ն՝ $\triangle CBD$ -ի: Հետևաբար անհրաժեշտ է

ցույց տալ, որ դրանք հավասար եռանկյուններ են:

Այսպիսով՝ նախևառաջ անհրաժեշտ է ցույց տալ,

որ՝ $\triangle ABD = \triangle CBD$:



Նկ.5

Տրված է $\triangle ABC$, որտեղ

$AB = BC$ և $BD \perp AC$

Ապացուցել, որ BD -ն կիսորդ է:

Ապացուցում:

1. $\triangle ABD = \triangle CBD$ ՝ ըստ ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության համապատասխան հայտանիշի: Քանի որ $\angle ADB = \angle CDB$, և $AB = BC$, ըստ պայմանի և BD -ն ընդհանուր է:

2. Հետևաբար հավասար են այդ եռանկյունների համապատասխան՝ ABD և CBD անկյունները:

3. Ուստի, համաձայն անկյան կիսորդի սահմանման, BD -ն $\angle B$ -ի կիսորդն է:

3.5. Ընդհանրացում և մասնավորեցում: Վերացարկում և կոնկրետացում:

Ինդուկցիա և դեդուկցիա

Անցումը մեկ բազմությունից դեպի վերջինս ընդգրկող, ավելի «մեծ» բազմության կոչվում է ընդհանրացում, իսկ հակառակը՝ մտքի ընթացքը բազմությունից դեպի ենթաբազմությունը (ավելի նեղ բազմությունը)՝ մասնավորեցում: Ընդհանրացման ձևերից մեկը ինդուկցիան է՝ անցում մասնավոր դեպքերից դեպի ընդհանուրը: Հակառակը՝ ընդհանուրից դեպի մասնակի ընթացքը, կոչվում է դեդուկցիա:

Օրինակ 1. Թվաբանական պրոգրեսիայի ընդհանուր անդամի բանաձևի ստացումը (թերի ինդուկցիա):

ընդհանրացում, ինդուկցիա	$a_2 = a_1 + d$	մասնավորեցում, դեդուկցիա
	$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$	
	$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$	

	$a_n = (a_1 + (n-1)d)$	

Օրինակ 2. $a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + nd - d = nd + (a_1 - d)$: Ուստի վերջինս $y = ax + b$ տեսքի գծային ֆունկցիայի, երբ $x \in \mathbb{N}$: Սա ևս **ընդհանրացում** է:

Օրինակ 3. Երբ հաշվում են $f(x) = \sqrt{x}$ ֆունկցիայի արժեքն արգումենտի $x = 9$ արժեքի դեպքում, ապա x փոփոխականը $\sqrt{x}$ արտահայտությունում փոխարինում են 9 հաստատունով՝ $f(9) = \sqrt{9} = 3$: Այս դեպքում գործ ունենք **մասնավորեցման** հետ:

Վերացարկումը այնպիսի մտավոր գործընթաց է, երբ մենք պայմանականորեն վերանում ենք դիտարկվող օբյեկտի բոլոր հատկություններից՝ բացի մեկից, օրինակ՝ երկրաչափականից: **Կոնկրետացումը** վերացարկման հակառակ ընթացքն է:

Օրինակ 1. Վերացարկման մակարդակում ցանկացած իրական թվի համար $a+b=b+a$: Կոնկրետ $a=5,2$ և $b=7,3$ թվերի համար այդ հատկությունը մեկնաբանվում է $5,2+7,3=7,3+5,2$ օրինակով:

Օրինակ 2. Պնդելով, որ $\overline{abcabc}$ վեցանիշ թիվը բաժանվում է 13-ի՝ կարելի է ստուգել այն կոնկրետ օրինակով՝ $591591:13=591\cdot 77$: Սա կոնկրետացում է:

Օրինակ 3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, ուստի՝

$$\sqrt{\frac{81^2 - 63^2}{2}} = \sqrt{\frac{(81-63)(81+63)}{2}} = \sqrt{\frac{18 \cdot 144}{2}} = 36:$$

Դպրոցական մաթեմատիկայի դասագրքերի ցանկացած երկրաչափական թեորեմի ապացուցման ժամանակ փոխանակ ապացուցվի ընդհանուր թեորեմը, գծվում է մի կոնկրետ (մասնավոր) գծագիր և առանց օգտվելու այդ մասնավոր գծագրի (պատկերի) առանձնահատուկ հատկություններից՝ ապացուցվում է թեորեմը: Այնուհետև հայտարարվում է, որ թեորեմը ճիշտ է բոլոր նման պատկերների համար: Բերել կոսինուսների թեորեմի օրինակը: Այս օրինակում մենք նախ գործ ունենք մասնավորեցման մեթոդի հետ, իսկ ապա ինտուիտիվորեն՝ նաև ընդհանրացման հետ: Ինդուկցիայի լավագույն օրինակներն են լրիվ ինդուկցիան և մաթեմատիկական ինդուկցիան:

3.6. Անալոգիա (համաբանություն)

«Անալոգիա» (հունարեն՝ analogia, հայերեն՝ համապատասխանություն, համաբանություն) հասկացությունը փիլիսոփայական բառարանում սահմանվում է որպես ոչ նույնական օբյեկտների միանմանություն՝ ըստ որոշակի կողմերի, որակների, հարաբերությունների: Անալոգիայով կատարվող մտահանգումը որոշակի հայտանիշների գծով օբյեկտների նմանության առկայության պնդումն է, նախապես սկեռված այլ հայտանիշների գծով արդեն հաստատված նմանությունների հիման վրա:

Անալոգիայով կատարվող մտահանգման սխեման հետևյալն է:

B օբյեկտն օժտված է a, b, c, d, e հայտանիշներով:

C օբյեկտն օժտված է b, c, d, e հայտանիշներով:

Հետևաբար, C օբյեկտը հավանաբար օժտված է a հայտանիշով [119; 13]:

Անալոգիան կատարում է կարևոր դեր վարկածների առաջադրման, խնդրի պարզաբանման և դրա լուծման ուղղվածության որոշման գործում: Օրինակ՝ Ք. Հյուգենսը ձայնի և լույսի հատկությունների անալոգիայի միջոցով հանգեց լույսի ալիքային բնույթի հետևությանը, Ջ. Կ. Մաքսվելը այդ եզրակացությունը անալո-

գիայի օգնությամբ տարածեց էլեկտրամագնիսական դաշտի բնութագրի վրա և այլն:

Այնուամենայնիվ, առանձին վերցված անալոգիան ապացուցողական մեծ ուժ չունի ոչ միայն նրա համար, որ նրա միջոցով արված հետևությունը ընդամենը հավանական է, այլև այդ հետևությունը կամ եզրակացությունը կարող է կատարվել նաև օբյեկտների ոչ էական հայտանիշների համեմատման միջոցով:

Անալոգիայով կատարվող հետևությունների հավանականությունը մեծացնելու նպատակով փիլիսոփայությունում առաջադրվում են հետևյալ պահանջները:

1) Անալոգիան պետք է հիմնվի համեմատվող օբյեկտների էական և հնարավորինս նրանց մեծ թվով նմանակ հայտանիշների վրա:

2) Այն հայտանիշի կապը մյուսների հետ, ըստ որի կատարվել է եզրակացությունը, պետք է լինի հնարավորինս սերտ:

3) Անալոգիան չպետք է հանգի օբյեկտների բոլոր հայտանիշներն նմանության վերաբերյալ եզրակացության:

4) Անալոգիայով կատարվող եզրակացությունը պետք է լրացվի նաև տարբերությունների հետազոտմամբ և այն իրողության ապացուցմամբ, որ այդ տարբերությունների առկայությունը չի կարող հիմք հանդիսանալ անալոգիայով եզրահանգումներ անելուց հրաժարվելու համար:

Փամանակակից գիտությունում անալոգիայի համակարգված կիրառության զարգացած տիրույթ է, այսպես կոչված, նմանությունների տեսությունը: Այն լայն կիրառություն ունի նաև մաթեմատիկական **մոդելավորման** տեսությունում [119; 14]:

Նշենք նաև, որ անալոգիան, ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ նրա դասավանդման մեջ մեծ մասամբ հանդես է գալիս գիտական ճանաչողության այլ՝ համեմատման, ինդուկցիայի և դեդուկցիայի մեթոդների զուգակցմամբ: Մտածողության և ուսուցման գործընթացներում դրանք գործում են սերտ համագործակցության մեջ: Դրանց միասնությունը արծարծված է մտահանգումների դասակարգմանը նվիրված տրամաբանության շատ աշխատանքներում: Միայն թե անալոգիայով կատարվող մտահանգումները էապես տարբերվում են ճանաչողության մնացած մեթոդներով կատարվող մտահանգումներից: Այդ տեսանկյունից հետաքրքրական է Ա. Ի. Ուեմովի [115] աշխատանքը, որում նա բոլոր մտահանգումները ստորաբաժանում է երկու խմբի: Դրանցից մեկում առարկայական դասերը, որոնց պատկանում են նախադրյալներն ու եզրակացությունը, համատեղելի են: Դեռ ավելին՝ այդ դասերից մեկը մյուսի ենթադասն է: Մտահանգումների այդ տիպերին են պատկանում դեդուկցիան և ինդուկցիան, որոնք կարելի է սահմանել հետևյալ կերպ:

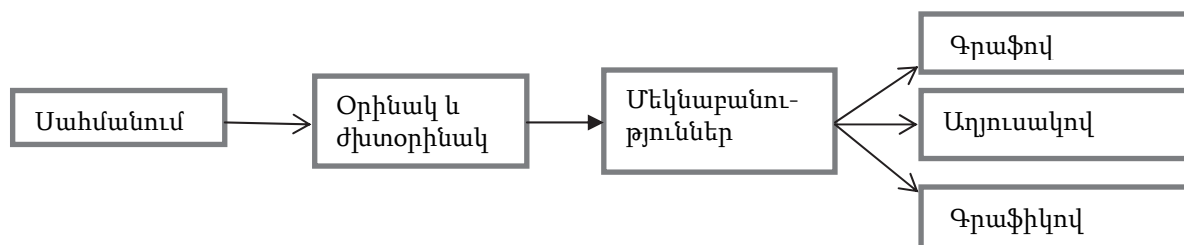
ա) **Դեղուկցիա** – մտահանգում, որի եզրակացությունը վերաբերում է այնպիսի առարկաների, որոնք պատկանում են առարկաների այն դասին, որոնց մասին խոսք է գնում մտահանգման նախադրյալներում:

բ) **Ինդուկցիա** – մտահանգում, որի եզրակացությունը վերաբերում է առարկաների ավելի մեծ շրջանակի, քան այն առարկաները, որոնց մասին խոսք է գնում մտահանգման նախադրյալներում:

Մտահանգումների մյուս տեսակում առարկաների տեսակները, որոնց վերաբերում են նախադրյալներն ու եզրակացությունը, տարբեր են: Հենց այդպիսին է անալոգիայով կատարվող արտածումների բնույթը: Այսպիսով՝

գ) **անալոգիա** – մտահանգում, որի եզրակացությունը վերաբերում է այլ առարկայի, քան այն, որի մասին խոսվում է մտահանգման նախադրյալներում [115; 19]:

1. Անալոգիան մաթեմատիկայում: Սովորաբար մաթեմատիկական տեսություններ շարադրելիս անալոգիայից չեն օգտվում: Սակայն փորձը ցույց է տալիս, որ անալոգիայից օգտվելու պարագայում էապես հեշտանում է տեսության շարադրանքը, այն առավել մատչելի է դառնում սովորողների համար: Այդ իմաստով շատ ուսանելի է Հ. Ս. Միքայելյանի հեղինակած բուհական «Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց - 1» [32] դասագիրքը: Օրինակ՝ այդ աշխատանքում առանձին թեմաների շարադրանքները կառուցվածքով միմյանց նման են: Օրինակ՝ «Անդրադարձելիություն և հակաանդրադարձելիություն» թեման շարադրվել է նույն սխեմայով ինչ մյուսները [32; 31]: Այն է՝



Նման հանգումն շարադրանքը, ինչպես ցույց է տալիս այդ առարկայի դասավանդման փորձը, էապես հեշտացնում է տվյալ առարկայի յուրացումը:

Անալոգիան՝ որպես էվրիստիկ մեթոդ, կարող է նաև խաղալ որոշակի դեր մաթեմատիկական գործունեության գործընթացում: Անալոգիան կարող է հուշել նաև որևէ նոր պնդման գոյությունը, որը, սակայն, դեռևս վարկած է և կարիք ունի հաստատման՝ ապացուցման: Անալոգիան կարող է նաև հուշել ապացուցման եղանակը, լուծման ուղին և այլն:

Մաթեմատիկական տեսությունները սովորաբար շարադրվում են այնպես, որ ընթերցողին անտեսանելի է այն ստեղծագործական ուղին, որով շարժվել է այդ տեսության հեղինակը, այն մտահղացումներն ու մեթոդները, որոնց կիրառության արդյունքում հեղինակը հանգել է այդ նոր տեսությանը, նոր արդյունքներին:

Չնայած դրան՝ մաթեմատիկայի պատմության մեջ կան բազմաթիվ օրինակներ, որոնք փաստում են անալոգիայի կիրառության մասին: Օրինակ՝ «կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիայի» հասկացությունը ստեղծվել է «իրական փոփոխական ֆունկցիայի» հասկացության անալոգիայով, «n-չափանի տարածության» հասկացությունը ստեղծվել է երկչափ և եռաչափ տարածությունների անալոգիայով և այլն:

Նշենք, սակայն, որ գոյություն ունի անալոգիայի մի տեսակ, որ, այնուամենայնիվ, վստահելի է, ունի ապացուցողական արժեք և մեծ կիրառություն մաթեմատիկայում: Չնայած «անալոգիա» հասկացության դասական սահմանման հիմքում դրված է սովորական իմաստով «նմանություն» հասկացությունը, որը ինքնին պարզաբանման, սահմանման կարիք ունի, այնուամենայնիվ հանրահաշվում, այդ ոչ կոռեկտ հասկացության փոխարեն օգտագործվում է «կառուցվածքային նմանություն» հասկացությունը, որն արդեն ունի ճշգրիտ մաթեմատիկական մեկնաբանություն **«իզոմորֆիզմ»** հասկացության շնորհիվ և ընկած է հավաստի եզրակացությունների հանգեցնող հատուկ տեսակի անալոգիայի հիմքում:

Օրինակ՝ կոորդինատային մեթոդի հիմքում ընկած է ուղղի (հարթության կամ տարածության) կետերի և իրական թվերի (դրանց զույգերի կամ եռյակների) միջև եղած փոխմիարժեք համապատասխանության գաղափարը: Այդ փոխմիարժեք համապատասխանությունը թույլ է տալիս ուղղի (հարթության կամ տարածության) կետերի բազմության կառուցվածքային հատկությունների լեզվից անցնել (թարգմանել) դրանց հանգուն R (R^2 կամ R^3) թվային բազմությունների կառուցվածքային հատկությունների լեզվին և հակառակը:

Օրինակ՝ համոզվելով, որ $(T, <)$ և $(R, <)$ կառուցվածքները, որտեղ T -ն ուղղի կետերի բազմությունն է, իսկ « $<$ » - ն «նախորդում է» առնչությունն է, իզոմորֆ են, մենք կարող ենք T ուղղի կետերի վերոհիշյալ կառուցվածքի ցանկացած հատկություն անալոգիայով փոխարինել իրական թվերի $(R, <)$ կառուցվածքային հանգուն և, որ ամենակարևորն է, հավաստի հատկությամբ:

Այսպես, եթե $A(a)$ կետը նախորդում է $B(b)$ կետին, ապա մենք հավաստիորեն կարող ենք պնդել, որ $a < b$: Նմանապես, եթե $M(m)$ կետը պատկանում է 2 երկարությամբ և $A(a)$ կենտրոնով հատվածին, ապա այդ կետերի համապատասխան m և a կոորդինատները բավարարում են $|m - a| < 1$ առնչությանը և հակառակը:

Դիտարկենք $y'(t) = -ky(t)$ (1) պարզագույն դիֆերենցիալ հավասարումը և նրա $y = y_0 \cdot e^{-kt}$ (2) լուծումը: Մաթեմատիկական այս մոդելով կարող են նկարագրվել բազմաթիվ երևույթներ. 1) ժամանակի t_0 պահին y_0 զանգված ունեցող ռադիումի y զանգվածի կախվածությունը t ժամանակից, 2) մթնոլորտային ճնշման փոփոխության գործընթացի կախվածությունը օվկիանոսից ունեցած t բարձրությունից (այդ դեպքում (2)-ը բարոմետրական բանաձևն է), 3) ազգաբնակ-

չության քանակի փոփոխությունը ժամանակից, եթե ազգաբնակչության փոփոխությունը համեմատական է տվյալ պահին բնակչության քանակին, 4) շրջակա միջավայրի հաստատուն ջերմաստիճանի դեպքում մարմնի ջերմաստիճանի սառեցման գործընթացի կախվածությունը ժամանակից և այլն:

Վերոնշյալ բոլոր երևույթներն օժտված են բացառիկ նմանությամբ, որ, անկախ արտաքին տարբերություններից, դրանց մաթեմատիկական մոդելները պատկանում են միևնույն (1) դասին. այդ իմաստով էլ այդ երևույթները անալոգ են միմյանց: **Այս իմաստով անալոգիան հրաշալի հնար է բնագիտության ինտեգրված դասընթացների շարադրման համար:**

2. Անալոգիան մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Մանկավարժական գործընթացում անալոգիայի դերը երկակի է, ինչպես նշում է հայտնի մեթոդիստ Վ. Վ. Ռեայովը. կա՛մ այն հանդես է գալիս որպես դրական էվրիստիկ ֆակտոր, կա՛մ էլ այն թեթևամիտ օգտագործման պարագայում աշակերտին հանգեցնում է ոչ ճշմարիտ հետևությունների, որոնք չեն հիմնավորվում, չեն ստուգվում, սակայն կիրառվում են գործնականում [101;69]:

Որպես էվրիստիկ տեխնոլոգիա (մեթոդ)՝ անալոգիան դասավանդման գործընթացում կարող է օգտակար լինել հետևյալ երեք դեպքերում՝ մղել սովորողներին դեպի նոր պնդման հայտնագործմանն ու օգնել վերջինիս ձևակերպմանը, ցուցում տալ պնդման ապացուցման մեթոդի կամ եղանակի ընտրության, օգնել խնդրի կամ վարժության լուծման ուղիների որոնման հարցերում:

Դիտարկենք օրինակ՝ 1) Պյութագորասի թեորեմին նվիրված ամրապնդման դասերից մեկի ժամանակ ուսուցիչը առաջարկում է աշակերտներին, հենվելով անալոգիայի վրա, հետազոտել ուղղանկյուն եռանկյան էջերի և ներքնաձիգի վրա կառուցված կամայական այլ կանոնավոր բազմանկյունների մակերեսների միջև եղած կապը: Սովորողները նախ հանգում են մի շարք՝ Պյութագորասի թեորեմին հանգուն վարկածների. ա) ուղղանկյուն եռանկյան a և b էջերի վրա կառուցված համապատասխանաբար a և b կողմեր ունեցող կանոնավոր եռանկյունների մակերեսների գումարը հավասար է c ներքնաձիգի վրա կառուցված c կողմով կանոնավոր եռանկյան մակերեսին, բ) եթե ուղղանկյուն եռանկյան կողմերը հանդիսանում են շրջանագծերի տրամագծեր, ապա այդպիսի եռանկյան էջերի վրա կառուցված շրջանների մակերեսների գումարը հավասար է ներքնաձիգի վրա կառուցված շրջանի մակերեսին, գ) ուղղանկյուն եռանկյան էջերի վրա կառուցված և այդ էջերին հավասար կողմ ունեցող կանոնավոր հնգանկյան (վեցանկյան, բազմանկյան) մակերեսների գումարը հավասար է ներքնաձիգի վրա այդպիսի կառուցված պատկերի մակերեսին, դ) ուղղանկյուն եռանկյան էջերի՝ որպես տրամագծի վրա կառուցված գնդային մակերևույթների մակերեսների գումարը հավասար է ներքնաձիգի վրա այդպիսի կառուցված գնդային մակերևույթի մակերեսին:

2) Հատած կոնի ծավալի արտածման եղանակը համարվում է հատած բուրգի ծավալի արտածման անալոգ՝ հանգուն եղանակը:

3) Որոշ տարածաչափական թեորեմներ համարվում են համապատասխան հարթաչափական թեորեմների հանգույնը: Այդպիսիք են, օրինակ, տրված կետից հարթությանը և ուղղին տարված ուղղահայացի և թեքի մասին թեորեմները, միևնույն ուղղին ուղղահայաց հարթությունների և ուղիղների զուգահեռության մասին թեորեմները:

Բերված բոլոր օրինակներում անալոգիան էվրիստիկ նպատակներով կիրառվող օգտակար մեթոդ է, որը հանգեցնում է ճշմարիտ եզրակացության: Սակայն նաև հայտնի է, որ սովորողների կողմից թույլ տրված մաթեմատիկական բազմաթիվ շփոթություններ ու սխալներ բացատրվում են հենց անալոգիայով կատարված ոչ ճիշտ եզրակացությամբ:

1. Ոչ ճշմարիտ անալոգիայի արդյունքում ծնված կայուն սխալներից մեկը, որ հաճախ են կիրառում սովորողները, կոտորակների կրճատման գործողությունն է: 6-րդ դասարանում թվային կոտորակների հետ նման գործողություն կատարելիս սովորաբար այդ տիպի սխալ աշակերտները չեն կատարում: Իսկ ահա հաջորդ՝ 7-8-րդ դասարաններում հանրահաշվական կոտորակների հետ աշխատելիս նրանք հաճախ թույլ են տալիս հետևյալ տիպի սխալներ.

$$\frac{a \cdot b}{a \cdot c + 2a} = \frac{b}{c + 2a}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}, \quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}:$$

2. Հաճախ հանդիպող $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ տիպի սխալը արտադրյալից արմատ հանելու հետևյալ՝ $\sqrt{a^2 b^2} = |ab|$ հատկությանից ոչ ճիշտ անալոգիայով կատարված տիպիկ սխալ հետևություն է:

3. Հավանաբար ոչ ճիշտ անալոգիաները սովորողների կողմից թույլ տրված նաև այլ տիպի կայուն սխալների պատճառ են դառնում: Օրինակ՝ միանդամը բազմանդամով բազմապատկելու անալոգիայով որոշ սովորողների կողմից թույլ են տրվում հետևյալ սխալները.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta,$$

$$\lg(a + b) = \lg a + \lg b:$$

4. Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում մի շատ տարածված կայուն սխալի մասին ակնարկել է հայտնի հոգեբան Ն. Ա. Մենչինսկայան. «Աշակերտները 96-ը 16-ի բաժանելիս թույլ են տալիս սխալ, որի հիմքում ընկած է անալոգիայով կատարված հետևյալ սխալ մտահանգումը՝ $96 : 16 = 10$, քանի որ $90:10=9$ և $6:6=1$, իսկ $9+1=10$ [73; 114]»: Բերված օրինակում մենք գործ ունենք գումարը թվի վրա բաժանելու կանոնը $\frac{90+6}{10+6}$ տեսքի բաժանման ժամանակ սխալ անալոգիայով տարածելու հետ:

5. Նկատելով մասնակի անալոգիաներ հարթաչափության և տարածաչափության հասկացությունների ու պնդումների միջև՝ աշակերտները հաճախ տարածում են դրանք այնպիսի իրավիճակների վրա, որոնցում դրանք բացարձակապես

ճիշտ չեն: Դրանով է բացատրվում, օրինակ, երբ 10-12-րդ դասարանների աշակերտները շատ հաճախ թույլ են տալիս հետևյալ տիպի կայուն սխալներ:

- Հարթությունից դուրս գտնվող կետից այդ հարթությանը կարելի է տանել նրան ուղղահայաց մեկ և միայն մեկ հարթություն:

Այս սխալ մտահանգման համար հարմար առիթ կարող է ստեղծել, օրինակ, հետևյալ խնդրի լուծումը. «Գոյություն ունի՞ արդյոք քառանկյուն բուրգ, որի երկու հանդիպակաց կողմնային նիստերն ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը»:

- Ուղղի տրված կետից տարածության մեջ կարելի է տանել այդ ուղղին ուղղահայաց միայն մեկ ուղիղ:

- Տարածության մեջ ուղղին ուղահայաց երկու ուղիղները միշտ զուգահեռ են միմյանց:

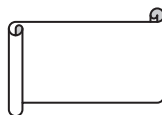
- Միևնույն հարթությանն ուղղահայաց երկու հարթությունները զուգահեռ են միմյանց և այլն:

- Ուղղանկյուն եռանկյան էջերի՝ որպես տրամագծի վրա կառուցված գնդերի ծավալների գումարը հավասար է ներքնաձիգի վրա այդպիսով կառուցված գնդի ծավալին:

6. Անալոգիայով կատարված սխալները հատուկ են ոչ միայն դպրոցականներին, այլև մեծահասակներին, նույնիսկ՝ մաթեմատիկոսներին: Մաթեմատիկայի պատմությանը հայտնի է, օրինակ, մաթեմատիկոսները երկար ժամանակ որոշակի թվով գումարելիների գումարի հատկությունները անալոգիայով տարածում էին նաև շարքերի գումարի վրա, տարրական ֆունկցիաների օրինակին հանգունորեն ենթադրում էին, որ բոլոր անընդհատ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են, հանրահայտ մաթեմատիկոս Լեոնարդ Էյլերը $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ բանաձևը հանգունորեն տարածում էր նաև կեղծ թվերի վրա և ստանում $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a \cdot b}$ ոչ ճշմարիտ բանաձևը և այլն [101;70]:

Այսպիսով, քանի որ անալոգիայով կատարվող հետևությունները որոշ դեպքերում հանգեցնում են նաև սխալ հետևությունների, ուստի ուսուցիչը մշտապես պետք է իր առաջ խնդիր դնի պայքարելու նման սխալների դեմ, արմատախիլ անելու դրանք, երբ պետք է, կամ էլ, որ ավելի նպատակահարմար է, հնարավորության դեպքում նախազգուշացնի աշակերտներին զերծ մնալ նման սխալներից:

Այդ գործում ուսուցիչներին էական մեթոդական օգնություն կլինի, եթե բացահայտվեն «Մաթեմատիկա» բնագավառի դպրոցական բոլոր դասընթացների ուսուցման գործընթացում աշակերտների՝ անալոգիայով թույլ տված կայուն տիպային սխալները, և մշակվի դրանց կանխարգելման մեթոդիկան:



ԳԼՈՒԽ ԶՈՐՐՈՐԴ. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈւՍՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ

4.1. «Մեթոդ», «ուսուցման մեթոդ» հասկացությունները

Մեթոդ (metodos – ուղի, ճանապարհ) բառը տրամաբանական տեղեկատվությունում սահմանվում է որպես բնության, հասարակության, մտածողության երևույթների ու օրինաչափությունների ուսումնասիրությանն ուղղված կանոնների ու հնարքների համակարգ, ճանաչողությունում և պրակտիկայում որոշակի արդյունքների հասնելու եղանակ, ճանապարհ, օբյեկտիվ իրականության և հետազոտության առարկայի, երևույթի, գործընթացի զարգացման օրինաչափությունների իմացության հիման վրա կատարվող տեսական հետազոտության կամ ինչ-որ բանի իրականացման եղանակ և այլն [74; 348]:

Ցանկացած մեթոդ օբյեկտիվի և սուբյեկտիվի միասնություն է, քանի որ նրանում գուցողվում են արդեն իսկ ճանաչված օբյեկտիվ օրինաչափություններ ու դրանց իմացության վրա հիմնված աշխարհի հետազոտման ու ձևափոխման եղանակները:

Հեգելն ասում էր. «*Մեթոդը գործիք է սուբյեկտի ձեռքին, որի միջոցով վերջինս հարաբերվում է օբյեկտի հետ*» [նույն տեղում]:

Ի. Պ. Պավլովը գիտական մեթոդի էությունը տեսնում էր նրանում, որ *այն մարդկային մտածողության շարժման ներքին օրինաչափությունն է՝ որպես օբյեկտիվ աշխարհի սուբյեկտիվ արտացոլում* [նույն տեղում]:

Մեթոդը գործընթաց է, և որպես գործընթաց՝ այն վերածվում է աշխարհի գիտական բացատրության՝ նպատակամետ փոփոխության միջոցով: Ելնելով «մեթոդ» հասկացության վերոհիշյալ մեկնաբանություններից՝ փաստենք, որ մեթոդը նախևառաջ ուղղված է որոշակի տիպի (հասարակական, մարդկային մտածողության, բնության ուսումնասիրության և այլն) խնդիրների լուծմանը, և, որ շատ կարևոր է, այն մարդու կողմից կատարվող գործընթաց է, հետևաբար ունի սկիզբ, ընթացք և վերջ, նաև կարգավորված գործընթաց է: Այսպիսով՝ կարելի է ձևակերպել «մեթոդ» հասկացության հետևյալ աշխատանքային սահմանումը. **«Մեթոդը որոշակի տիպի խնդիրների լուծմանն ուղղված գործողությունների վերջավոր, կարգավորված բազմություն (հաջորդականություն) է»:**

Օրինակ, եթե որպես խնդիրների տիպ դիտարկենք մաթեմատիկական պրն-դումների ապացուցումները, ապա մենք կհանգենք «**ապացուցման մեթոդ**» հասկացությանը, իսկ եթե որպես խնդիրների տիպ դիտարկենք գիտական հետազոտության եղանակները, ապա կհանգենք գիտական հետազոտության մեթոդներին: Իսկ եթե որպես խնդիրների տիպ՝ այս պահին մեզ հետաքրքրում են ուսուցման գործընթացը կանոնակարգող խնդիրները, ապա մենք գործ ունենք «ուսուցման մեթոդի» հետ:

Այսպիսով՝ ուսուցման մեթոդ կոչվում է ուսուցչի և սովորողի փոխկապակցված, կարգավորված գործընթացը, որն ուղղված է ուսուցման գործընթացում կրթության, դաստիարակության և զարգացման խնդիրների լուծմանը:

4.2. Ուսուցման մեթոդների «դասակարգումը» (թվարկումը)

Խորհրդային, արևմտյան և հետխորհրդային մանկավարժությունում հավաքվել է ուսուցման մեթոդների տեսության շատ հարուստ պաշար: Ուսուցման մեթոդների դասակարգմամբ զբաղվել են շատ-շատ մանկավարժներ՝ Բաբանսկի, Պողձասի, Սկատկին, Լերներ, Դանիլով, Եսիպով, Պետրովսկի, Մախմուտով, Պանամարչուկ և այլն: Նրանցից ոմանք թվարկել են 5 մեթոդ (Մ. Ն. Սկատկին, Ի. Յա. Լերներ), մյուսները՝ մոտ երկու տասնյակ: Գործից անտեղյակ մարդը, ծանոթանալով այդ դասակարգումներին և չգտնելով դրանցում միասնականություն, ընկնում է տարակուսանքի մեջ և արդյունքում թերահավատությամբ է լցվում նաև մանկավարժության հանդեպ: Բերենք մեկ օրինակ: Եթե երկրագնդի մարդկային բազմության մեջ ներմուծենք «ազգային պատկանելիություն» հարաբերությունը, ապա մարդկությունը կտրոհվի այնքան դասերի՝ ազգերի, որքան ազգ, ազգություն կա այժմ երկրի երեսին (շուրջ 3000 դաս), իսկ եթե այդ նույն բազմության մեջ ներմուծենք «միևնույն երկրի քաղաքացին լինելու» առնչությունը (ենթադրենք երկքաղաքացիությունը բացառվում է), ապա այս դեպքում մարդկությունը կդասակարգվի ըստ պետությունների (մոտ 230 պետություն): Առաջին դեպքում՝ Շառլ Ագնավուրը պատկանում է հայերի դասին, իսկ մյուս դեպքում՝ Ֆրանսիայի դասին:

Այսպիսով՝ M բազմության տարրերը «դասակարգելու» համար մաթեմատիկայում M -ի մեջ ներմուծում են համարժեքության որևէ R հարաբերությունը, որը M -ը տրոհում է $\{M \setminus R\}$ դասերի, որոնք պետք է լինեն ոչ դատարկ, զույգ առ զույգ հատում չունենան, և որոնց միավորումը լինի M -ը՝ $\cup \{M \setminus R\} = M$:

Բնագիտամաթեմատիկական գիտություններում առարկաների դասակարգումը նորմալ երևույթ է և ամբողջությամբ ենթարկվում է վերոհիշյալ տեսությանը: Օրինակ՝ կանոնավոր բազմանիստերը կարելի է դասակարգել ըստ նիստերի քանակի (քառանիստ, վեցանիստ, ութանիստ, տասներկուանիստ և քսանանիստ): Իսկ ինչ վերաբերվում է հումանիտար ոլորտի հասարակական գիտություններին, ապա այստեղ առաջանում են լուրջ խնդիրներ:

Այժմ բերենք ուսուցման մեթոդների այն թվարկումը, որը պատկանում է ժամանակակից հանրահայտ մանկավարժներ Մ. Ն. Սկատկին և Ի. Յա. Լերներ զույգին:

Ավանդական
մեթոդներ

- 1. բացատրացուցադրական մեթոդ,
2. վերաբրտադրողական (ռեպրոդուկտիվ) մեթոդներ,
3. մասնակի վերաբրտադրողական (էվրիստիկ զրույցի) մեթոդ,
4. պրոբլեմային ուսուցանման մեթոդ,
- 5. հետազոտական մեթոդ,

Ժամ. մեթ.

- 6. ինտերակտիվ մեթոդներ,
- 7. համագործակցային ուսուցման մեթոդներ:

Ժամանակակից մեթոդների՝ 6-րդ և 7-րդ խմբերը վերոհիշյալ հեղինակների արած թվարկմանը ավելացվել է մեր կողմից (Է. Ա.):

Նախևառաջ կանգ առնենք «ակտիվ, ոչ ակտիվ ուսուցում» և «դասի արդյունավետություն» հասկացությունների վրա: Ակտիվ կոչվում է այն մեթոդը, որն ապահովում է դասարանի բոլոր աշակերտների ակտիվ մասնակցությունը դասին: Դասի արդյունավետությունը այն գիտելիքների, կարողությունների և արժեքների համակարգն է, որը պետք է պահպանվի տևական ժամանակ հետո:

4.3 Բացատրացուցադրական մեթոդ

Նշված մեթոդը հիմնականում կիրառվում է 1-6-րդ դասարաններում, այսինքն՝ այնտեղ, որտեղ տեսական դասանյութ, որպես այդպիսին, գոյություն չունի: Առարկան շարադրվում է ինդուկտիվ եղանակով, կանոնների տեսքով, սակայն հաճախ մեթոդը կիրառվում է նաև բարձր դասարաններում, օրինակ՝ նպատակահարմար է այս մեթոդով վարել **«Ֆունկցիաների գրաֆիկների ձևափոխություններ»** թեման 10-րդ դասարանում:

Բացատրացուցադրական մեթոդը քիչ արդյունավետ մեթոդ է, և չի կարող ապահովել ակտիվ ուսուցում. աշակերտները պասիվ դիտողի դերում են: Մեթոդը ենթադրում է մի շարք ուսուցման միջոցների առկայություն (պաստառներ, նկարներ, աղյուսակներ, մոդելներ, դիաֆիլմեր, ֆիլմեր, դրանք ցուցադրելու համար սարքեր, համակարգիչ, միկրոհաշվիչ և այլն):

Այժմ բերենք բացատրացուցադրական մեթոդով ուսուցանվող դասի պլանի երկու օրինակ:

Դասի պլան N 1

Ուսուցիչը՝

Առարկան՝ Մաթեմատիկա

Դպրոցը՝

Թեման՝ Գումարում: Գումարման օրենքները

Դասարան՝ 5-րդ

Ամսաթիվը՝

Դասի նպատակը՝ Ուսուցանել նշված թեման և հասնել այն բանին, որ սովորողներն ըմբռնեն բնական թվերի գումարման գործնական եղանակները, իմանան գումարման տեղափոխական և զուգորդական օրենքները, կարողանան դրանք ցուցադրել բնական թվերի շարքի և քանոնների միջոցով:

Մեթոդը՝ բացատրացուցադրական

Դասի փուլեր	Մեթոդիկա		Ուսուցման միջոցները	Գնահատում	Ժամանակը
	Ուսուցիչը	Սովորողները			
I փուլ Դասի մուտքը՝ խթանում	Աշակերտներին առաջարկում է լուծել հետևյալ խնդիրը. «Բազմաձևարկ, երկու մուտք ունեցող շենքի 1-ին մուտքն ունի 27, իսկ 2-րդ մուտքը՝ 18 բնակարան: Ընդամենը քանի բնակարան կա այդ շենքում»: Լուծելուց հետո զրուցում է, թե գործնականում որքան դժվար կլինե՞ր մարդու վիճակը, եթե նա թվերը գումարել չկարողանար:	Ինքնուրույն լուծում են առաջադրված խնդիրը, լսում են ուսուցչին, հայտնում են կարծիքներ:		Ուսուցիչը խրախուսում է կատարողներին կամ էլ գնահատում նրանց:	5 ր
II փուլ	1. Խնդիր է դնում գումարել 5 և 3 թվերը: Նախ այդ գումարման գործողությունը ցուցադրում է բաժանմունքներ ունեցող քանոնների միջոցով. 1-ին քանոնի վրա գտնում ենք 5 թվի բաժանմունքը, ապա 2-րդի սկզբնակետը: 0-ն դնում ենք 1-ին քանոնի 5-ի բաժանմունքի վրա և դասավորում նույն ուղղությամբ (ձախից աջ): Ապա 2-րդ (վերևի) քանոնի վրա՝ 3-ին համապատասխան բաժանմունքի տակ, 1-ին քանոնի վրա կարդում ենք 5 և 3	Ասում են պատասխանը: Դիտում են ուսուցչի ցուցադրումները, լսում՝ բացատրությունները և արձանագրում են, որ երկու դեպքում էլ ստացվում է նույն օրինաչափությունը՝ $5+3=3+5=8$: Համատեղ ուժերով ձևակերպում են, որ «Գումարելիներ	Բաժանմունքներով քանոններ, բնական թվերի շարքի պլակատ		25 ր

	թվերի գումարման արդյունքը՝ 8: 2. Այնուհետև, հետևելով, որ բոլոր սովորողները կարողանան կատարել նույնը, առաջարկում է այդպեղյա գումարել 3 և 5 թվերը: Առաջարկում է արձանագրել ստացված արդյունքը: Նույն գործողությունը՝ $5+3$ և $3+5$-ը, ցուցադրում է նաև բնական թվերի շարքի վրա՝ օգտագործելով հատուկ պատրաստված պլակատ՝ The diagram shows a horizontal sequence of numbers: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... Above the numbers 3 and 4, there is a bracket with a downward arrow pointing to 7. Above the numbers 5 and 6, there is a bracket with a downward arrow pointing to 11. Below the numbers 3 and 4, there is a bracket with an upward arrow pointing to 7. Below the numbers 5 and 6, there is a bracket with an upward arrow pointing to 11. դարձյալ արձանագրում են արդյունքը: 3. Առաջարկում է փորձել բառերով ձևակերպել ստացված արդյունքը: 4. Առաջարկում է գումարել 3, 2 և 4 թվերը՝ նախ՝ $(3+2)+4$, ապա՝ $3+(2+4)$ արտահայտությամբ: 5. Առաջարկում է ձևակերպել ստացված արդյունքը: 6. Նույնը ցուցադրում է բնական թվերի հաջորդականության նրկարով պաստառի վրա: 7. Առաջարկում է բառերով ձևակերպել ստացված արդյունքը: 8. Վերջում ուսուցիչը ձևակերպում է մի քանի գումարելիների գումարման կանոնը:	րի տեղափոխությունից գումարը չի փոխվում» $a + b = b + a$: Ինքնուրույն կատարում են առաջադրանքներ քանոնների օգնությամբ: Ձևակերպում են, որ $(3+2)+4=$ $=3+(2+4)=9$: Սովորողների ուժերով ձևակերպում են գումարման գուգորդական օրենքը՝ $(a+b)+c=a+(b+c)$, և կրկնում այն:			
--	---	--	--	--	--

III փուլ՝ ամրա- պնդում	1. Առաջարկում է գրա- տախտակին գրել տե- ղափոխական և զու- գորդական օրենքները: 2. Լուծում են համա- պատասխան վարժու- թյուններ:	Գրատախտա- կի մոտ հրա- վիրված սովո- րողները պա- տասխանում են ուսուցչի հար- ցերին, մյուսնե- րը դիտում են և գրառում լու- ծումները:		Գնահա- տում է ա- ռաջադրանք- ները ճիշտ կատարող- ներին կամ էլ խրախուսում նրանց:	10 ր
IV փուլ	Հանձնարարում է տնային աշխատանք, տալիս մեկնաբանու- թյուններ:	Նշում են տնա- յին հանձնարա- րությունը և լսում ուսուցչին:			5 ր

Դասի պլան N 2

Ուսուցիչը՝

Դասարան՝ 10-րդ

Առարկան՝ Հանրահաշիվ և մաթ. անալիզի տարրեր

Դպրոցը՝

Թեման՝ ֆունկցիաների գրաֆիկների ձևափոխություններ Ամսաթիվը՝

Դասի նպատակը՝ ուսուցանել նշված թեման և հասնել այն բանին, որ

ա) սովորողներն ըմբռեն, թե ինչպե՞ս են $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից
ստացվում $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = f(ax)$, $y = af(x)$, $y = f|x|$, $y = |f(x)|$

գրաֆիկները, բ) կարողանան մեկնաբանել այդ ձևափոխությունները:

Մեթոդը՝ բացատրացուցադրական

Դասի փուլերը	Մեթոդիկա		Ուսուցման միջոցները	Գնահատում	Ժամա նակը
	Ուսուցիչը	Սովորողները			
I փուլ՝ խթանում	Կյանքից վերցված օրինակների միջո- ցով (սրտի աշխա- տանքի կարդիո- գրամ և այլն) մատ- նանշում է ֆունկ- ցիայի գրաֆիկի կիրառական նշանակությունը և գրաֆիկների ձևա- փոխությունների ու գրաֆիկական գրագիտության (գրաֆիկ կարդա- լու) հմտություն-	Լսում են, դի- տում և անհրա- ժեշտության դեպքում պա- տասխանում ուսուցչի հար- ցադրումներին:	Դիապրո- յեկտոր, համակար- գիչ, պլա- կատներ	Կարևորվում են ֆունկ- ցիայի գրա- ֆիկի դերը և դրա հետ ձևափոխու- թյուններ կատարելու կարողու- թյունները:	5 ր

	ների խիստ կարե- վորությունն ամե- նատարբեր բնա- գավառների մաս- նագետների համար:				
II փուլ	Եթե առկա է, ցու- ցադրում է ֆիլմ՝ ֆունկցիաների գրաֆիկների ձևա- փոխությունների մասին: Հարկ եղած դեպքում ընդհա- տում է ցուցադրու- մը և տալիս մեկ- նաբանություններ ու բացատրու- թյուններ:	Դիտում են ֆիլ- մը, լսում ու- սուցչի մեկնա- բանություն- ները և ուսուցչի պահանջով տալիս են սե- փական մեկնա- բանություններ:	Կինոխցիկ, ֆիլմ կամ համակար- գիչ, պրո- յեկցիոն ապարատ, պլակատ- ներ		25 ը
III փուլ՝ ամրա- պնդում	1. Հարցերով դի- մում է դասարա- նին, թե ելնելով $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրա- ֆիկից՝ ինչպես կարելի է ստանալ $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = f(ax)$, $y = af(x)$, $y = f x $, $y = f(x) $ ֆունկցիաների գրաֆիկները: 2. Լուծում են N 195ա, 198ա, 199ա վարժությունները:	Պատասխա- նում են ուսուց- չի հարցերին և ուսուցչի օգնու- թյամբ կատա- րում առաջա- դրված վար- ժությունները:			9 ը

IV փուլ՝ արժևորում	Դիմում է դասա- րանին «Ի՞նչ սովո- րեցինք», «Ի՞նչ իմացանք» բնույթի հարցերով:	Պատասխա- նում են ուսուց- չի հարցերին:		Գնահատում են նոր նյու- թի կարևո- րությունը և արժևորում այն սեփա- կան օրինակ ներով: Ուսուցիչը խրախուսում է աչքի ըն- կած սովո- րողներին:	3 ր
V փուլ՝ տնային հանձնարա- րություններ	Հանձնարարում է տնային առաջա- դրանքներ՝ գլ. 3, §4-ն ուսումնասի- րել, լուծել NN 195բ, գ, 198 բ, դ, 199 բ: Տալիս է ցուցում- ներ:	Լսում են ու- սուցչին և նը- շումներ անում տետրերում:			3 ր

Ծանոթություն. Ֆիլմի բացակայության պարագայում կարելի է օգտվել հա-
մակարգչային և պրոյեկցիոն տեխնիկաներից:

4.4. Վերարտադրողական (ռեպրոդուկտիվ) մեթոդներ

Վերարտադրողական մեթոդը նույնպես քիչ արդյունավետ, ոչ ակտիվ մեթոդ է, այն հաճախակի կիրառվում է պատմողական առարկաներում (պատմություն, աշխարհագրություն) և, ցավոք, բուհական համակարգի ուսուցման հիմնական մեթոդն է:

Նշված մեթոդի տարատեսակներից է դասախոսությունը, ինչպես նաև դրպ-
րոցում՝ պատմելու մեթոդը: Առաջին երկու մեթոդների արդյունավետությունը,
ըստ Դեյլի Բուրգի, հավասար է 0-20 %-ի՝ սովորական շարքային ուսուցիչների
մոտ, իսկ Ս. Մերգելյանի, Լ. Լանդաուի նման բարձրակարգ դասախոսների մոտ՝
մինչև 50 %-ի, իսկ դա նշանակում է, որ ընդհանրապես սովորողների դասից
ստացած գիտելիքների 50-ից 100 %-ը անհետ կորչում է:

4.5. Մասնակի որոնողական (Էվրիստիկ գրույցի) մեթոդ

Էվրիստիկա (հունարեն *heurisko` բացահայտում, հայտնագործում էմ*) նշանակում է ստեղծագործական գործունեությունն ուսումնասիրող գիտություն, ուսուցման ընթացքում նորը հայտնագործելուն նվիրված մեթոդներ: Էվրիստիկ մեթոդները թույլ են տալիս արագացնել խնդրի լուծման գործընթացը: Դրանց հետազոտման նկատմամբ նշանակալից հետաքրքրություն առաջացավ այնպիսի խնդիրների (օբյեկտի ճանաչում, թեորեմների ապացուցում և այլն) լուծման հնարավորությունների հետ կապված, որոնցում մարդը չի կարող տալ լուծման ճշգրիտ ալգորիթմը նույնիսկ տեխնիկական սարքավորումների օգնությամբ:

Էվրիստիկայի նշանակությունը որևէ տիպի նոր խնդրի լուծման գործընթացի մոդելի կառուցումն է: Գոյություն ունեն նման մոդելների հետևյալ տեսակները. ա) կույր որոնման մոդել, որը հենվում է, այսպես կոչված, փորձի և սխալի մեթոդի վրա, բ) լաբիրինթային մոդել, որում լուծվելիք խնդիրը դիտարկվում է որպես լաբիրինթ, իսկ լուծման որոնման գործընթացը՝ որպես թափառում լաբիրինթում, գ) կառուցվածքախմաստաբանական մոդել, որը ներկայումս համարվում է ամենաբովանդակայինը, և որը արտացոլում է խնդրի որոշման տիրույթը կազմող օբյեկտների միջև գոյություն ունեցող իմաստաբանական առնչությունները: Էվրիստիկան կապված է հոգեբանության, բարձրագույն նյարդային գործունեության ֆիզիոլոգիայի, կիբեռնետիկայի հետ և այլն: Մեթոդամանկավարժական գրականությունում Էվրիստիկան հաճախ շփոթում են վերջինիս իր բնույթով շատ նման մեկ այլ համանման հասկացության՝ «Էրիստիկայի» հետ: Էրիստիկան հունարեն «*eristikos*» բառն է, որը նշանակում է *երկխոսություն (բանավեճ) վարելու արվեստ*: Առանձնապես Էրիստիկան իր ծաղկմանը հասավ հույն անտիկ սոփեստների կողմից: Այն ծնվեց որպես վեճի՝ երկխոսության միջոցով ճշմարտությունը գտնելու միջոց: Սակայն շուտով տրոհվեց դիալեկտիկայի և սոփեստության: Դիալեկտիկական իմաստով Էրիստիկայի հիմնադիրը հույն մեծ փիլիսոփա Սոկրատեսն է: Վերջինս ստեղծեց Էրիստիկ դիալեկտիկական գրույց վարելու իր հայտնի մեթոդը, որը այսօր մեթոդամանկավարժական գրականությունում անվանվում է ոչ թե Էրիստիկ, այլ Էվրիստիկ մեթոդ: Ճիշտ է՝ մեթոդի ողջ ընթացքը Էրիստիկ գրույցն է, սակայն այն ավարտվում է Էվրիստիկ հայտնագործմամբ և հենց այդ պատճառով էլ անվանվում է Էվրիստիկ մեթոդ:

Ուսուցման մասնակի որոնողական կամ Էվրիստիկ (ասում են նաև՝ հայտնագործության) մեթոդը նեղ իմաստով ընկալվում է որպես Էրիստիկ գրույց՝ ուսուցման երկխոսության (հարց ու պատասխանի) ձև, որի ընթացքում ուսուցիչը սովորողներին պատրաստի գիտելիքներ չի հաղորդում, այլ հմտորեն ընտրված Էրիստիկ հարցերի միջոցով, հենվելով նրանց նախկինում ձեռք բերած գիտելիքների, կարողությունների, հմտությունների, դիտումների և փորձի վրա, մղում է

սովորողներին նոր հասկացությունների, կանոնների, ապացուցումների և լուծումների ինքնուրույն հանգեցում:

Լայն իմաստով էվրիստիկ մեթոդը, սակայն, միայնակ հանդես չի գալիս, այլ սերտորեն համագործակցելով մյուս ակտիվ ուսուցման մեթոդների՝ պրոբլեմային ուսուցման և հետազոտական մեթոդի հետ՝ ստեղծում է լիարժեք պայմաններ, որպեսզի աշակերտն ինքնուրույն կատարի պրոբլեմի (խնդրի) հետազոտումն ու լուծումը: Հենց այս իմաստով էլ այն կոչվում է նաև մասնակի որոնողական կամ հայտնագործության մեթոդ:

Էվրիստիկ գրույցի մեթոդը դասվում է ակտիվ մեթոդների թվին և ճիշտ կիրառելու դեպքում կարող է նաև դառնալ արդյունավետ մեթոդ: Սա դոգմատիկ ուսուցման և անգիր սերտելու դեմ պայքարում ծնված մեթոդ է, որն ուղղված է սովորողների հետազոտական-ճանաչողական գործունեության կազմակերպմանն ու կանոնակարգմանը, նրանց մտածողության ինքնուրույնության զարգացմանը: Մեթոդի հիմնադիրները հույն անտիկ փիլիսոփաներն էին: Օրինակ՝ Սոկրատեսն ուներ գեղեցիկ պարտեզ և իր աշակերտների հետ դասը անցկացնում էր այդ պարտեզում՝ ճեմելով (հավանաբար այստեղից էլ հետագայում առաջացել է «ճեմարան» անվանումը): Նա նախապես ընտրում էր գրույցի թեման և մտածում էր էվրիստիկ հարցադրումների շղթա: Նա տալիս էր հարցը աշակերտներին և, առանց սպասելու պատասխանին, ճեմում: Վերջին հարցերը տալիս նա աստիճանաբար բարձրանում էր ժայռի գագաթը, սովորաբար, երբ հասնում էր գագաթին, տալիս էր այն վերջին «վտանգավոր» հարցը, որի պատասխանը աշակերտները չունեին. այդ հարցը տարակուսանք, շփոթմունք ու զարմանք էր առաջացնում սովորողների մոտ:

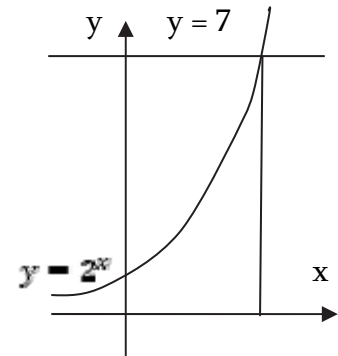
Հարմար է էվրիստիկ մեթոդին դիմել ՀՄՄՏ դասընթացի «Լոգարիթմներ» թեման ուսուցանելիս: Նոր նյութի մատուցման սկզբում ուսուցիչը գրատախտակի մոտ է հրավիրում նախորդ թեման՝ «Ցուցային հավասարումների և անհավասարումների լուծումը» լավ յուրացրած չորս աշակերտի և որպես անցածի կրկնություն՝ առաջարկում լուծել 1) $2^x = 16$, 2) $2^x = 1/8$, 3) $2^x = 1$ և 4) $2^x = 7$ պարզագույն հավասարումները:

$2^x = 16$	$2^x = 1/8$	$2^x = 1$	$2^x = 7$
$2^x = 2^4$	$2^x = 2^{-3}$	$2^x = 2^0$	
$x = 4$	$x = -3$	$x = 0$	$x = ?$

Առաջին երեք աշակերտները հաջողությամբ կատարում են 1-3 հավասարումները և արժանանալով ուսուցչի գովասանքին՝ զբաղեցնում են իրենց տեղերը: Իսկ ահա չորրորդ սովորողը, որը, չնայած դասարանի մաթեմատիկայից առաջադիմող սովորողներից մեկն է, անօգնական վիճակում սպասում է իր հերթին: Ուսուցիչը դիմում է այդ աշակերտին և հարցնում, թե ինչու ինքը ոչինչ չի գրել: Աշակերտը պատասխանում է, որ համեմատած նախորդ օրինակներին՝ իր մոտ 7-

ը անհաջող թիվ է և չի ներկայացվում 2-ի և ոչ մի հայտնի աստիճանի տեսքով: Ուսուցիչը առարկում է՝ ասելով, որ «7-ը շատ լավ թիվ» է, սակայն, իրոք» այն չի ներկայացվում 2-ի որևէ ռացիոնալ ցուցիչ ունեցող աստիճանով: «Ինչպե՞ս վարվենք», - հարցնում է ուսուցիչը և հիշեցնում, որ նման դեպքերում, երբ հավասարման լուծման որևէ անալիտիկ եղանակ չի նշմարվում, դիմում են հավասարումների լուծման, այսպես կոչված, գրաֆիկական եղանակին ու առաջարկում է սովորողներին կոորդինատական միևնույն համակարգում կառուցել $y = 2^x$ և $y = 7$ ֆունկցիաների գրաֆիկները (նկ. 3):

Նկար 3-ից երևում է, որ այդ գրաֆիկները հատվում են մի կետում, որի աբսցիսը գտնվում է 2-ի և 3-ի միջև, այսինքն՝ $2^x = 7$ հավասարման լուծումը (2 ; 3) միջակայքին պատկանող իռացիոնալ թիվ է, որին էլ մաթեմատիկայում անվանում են $\log_2 7$: Այսպիսով՝ $2^x = 7$ հավասարման լուծումը $x = \log_2 7$ իռացիոնալ թիվն է: Հանգունորեն ներմուծվում է $\log_a b$, $a > 0$, $a \neq 1$ հասկացությունը:



Նկար 3

Մեջբերվածը էվրիստիկ գրույցի

և պրոբլեմային ուսուցման մեթոդների համատեղ կիրառության օրինակ է:

4.6. Պրոբլեմային ուսուցման մեթոդներ

Պրոբլեմային ուսուցման մեթոդը ժամանակակից դիդակտիկայում ուսուցման առաջավոր մեթոդներից մեկն է, քանի որ, ինչպես նշում է ժամանակակից հայ մանկավարժ Յու. Ա. Ամիրջանյանը, այն ներառում է մանկավարժական բազմաթիվ արժեքավոր մեթոդների ու հնարների օգտագործման հնարավորություններ, ենթադրում սովորողների ինքնուրույն մտածողության զարգացման լայն հեռանկարներ: Այդ մասին են վկայում պրոբլեմային ուսուցման հարցերին նվիրված՝ Ն. Գ. Դայրիի, Ա. Ն. Լեոնտևի, Ի. Յա. Լերների, Ա. Մ. Մատյուշկինի, Յու. Ա. Ամիրջանյանի և ուրիշների հետազոտությունները:

Պրոբլեմային ուսուցման **հույությունը**, ինչպես իրավացիորեն նշում է Յու. Ա. Ամիրջանյանը, **պրոբլեմային իրավիճակի ստեղծումն է**: Այն պահին, երբ մասնակի որոնողական՝ էվրիստիկ գրույցի մեթոդը, առաջացնելով սովորողների զարմանքն ու տարակուսանքը, ավարտում է իր «առաքելությունը», այդ պահին առաջանում է մի իրավիճակ, որն ընդունված է անվանել **պրոբլեմային**:

Էվրիստիկ գրույցը արդիականացնում է սովորողների գիտելիքները, կատարում իր դերը՝ մեծացնելով նրանց հետաքրքրությունը տվյալ թեմայի նկատմամբ,

առաջացնելով անդունդ իմացածի և չիմացածի միջև ու, որ ամենակարևորն է՝ զարմանք: Ոչ մի առաջընթաց, հայտնագործություն առանց զարմանքի տեղի չի ունենում: Կարճ ասած՝ վերոհիշյալ օրինակում մեծ փիլիսոփան, զրուցելով աշակերտների հետ, «քարը գցում էր փոսը»՝ ավարտելով այդ կերպ էվրիստիկ մեթոդի առաքելությունը, որից հետո գործելու իրավունքը՝ էստաֆետը, փոխանցվում է մի այլ արդյունավետ մեթոդի, որը մանկավարժական գրականության մեջ կոչվում է **պրոբլեմային ուսուցման մեթոդ**:

Ըստ Յու. Ա. Ամիրջանյանի՝ զանազանվում են պրոբլեմային ուսուցման **պրոբլեմային շարադրանքի, խթանող, մասնակի որոնողական** կամ **էվրիստիկական և հետազոտական** առաջատար մեթոդներ և դրանց օժանդակող մեթոդներ՝ **բացատրացուցադրական, վերարտադրողական, ծրագրավորված** և այլն [10; 207]:

Չնայած պրոբլեմային ուսուցման մեթոդի գաղափարն իր ժամանակին արծարծվել է դեռևս Ժ. Ժ. Ռուսոյի կողմից, այնուամենայնիվ դրա գիտական մշակումը կատարվել է միայն 20-րդ դարի 60-ական թվականներից սկսած: Այդ տարիներին զուգահեռաբար ընթանում էին ուսուցման մի այլ արդյունավետ տեխնոլոգիայի՝ **ծրագրավորված ուսուցման մեթոդական** մշակման աշխատանքները: Եվ եթե «ծրագրավորված ուսուցման հիմքում ընկած է ալգորիթմական, տրամաբանական մտածողության տեսակը, ապա պրոբլեմային ուսուցումը հիմնականում հենվում է ստեղծագործական, էվրիստիկ մտածողության վրա», - նշում է հայտնի մեթոդիստ Ն. Վ. Մետելսկին իր «Մաթեմատիկայի դիդակտիկա» ձեռնարկում: Հենց այդպիսի մտածողություն է պետք կիրառել ոչ ստանդարտ մաթեմատիկական խնդիրներ լուծելիս: Բացի դրանից՝ պրոբլեմային ուսուցումը շատ արդյունավետ է նաև մաթեմատիկական տեսությունների ուսումնասիրման ժամանակ, քանի որ այդկերպ սովորողները ծանոթանում են նաև մաթեմատիկական գործունեությանը: Այստեղից հետևություն, որ «պրոբլեմային ուսուցումը հեռանկարում պետք է դառնա միջնակարգ դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցման հիմնական մեթոդներից մեկը», - նշում է Ն. Վ. Մետելսկին [85]:

Պրոբլեմային ուսուցման տեսության մշակմամբ զբաղվել են լեհ պրոֆեսոր Վ. Օկոնը, Ա. Մատյուշկինը, Ի. Յա. Լերները, Մ. Ն. Սկատկինը և ուրիշներ: Այդ տեսության կարևորագույն գաղափարները **ուսումնական պրոբլեմի** և **պրոբլեմային իրավիճակի** գաղափարներն են: Վերջինս բնութագրվում է որպես օբյեկտի և սուբյեկտի միջև մտավոր փոխազդեցության հատուկ տեսակ, որը ճանաչողական պահանջմունքներ է առաջացնում սուբյեկտի մոտ՝ մղելով նրան ձեռք բերել (բացահայտել կամ յուրացնել) նոր գիտելիքներ կամ գործունեության տեսակներ: Առանձնապես կարևոր է նշել, որ ճանաչման ենթակա օբյեկտը չնայած պետք է մշտապես գտնվի սուբյեկտի մտավոր կարողությունների սահմաններում, սակայն միաժամանակ առաջացնի որոշակի ինտելեկտուալ դժվարության հոգեվիճակ:

Ուսումնական մաթեմատիկական խնդիրը (հարցը) կարող է առաջացնել պրոբլեմային իրավիճակ հետևյալ երկու դեպքերում. ա) եթե նրա պայմանի և պահանջի հարաբերակցության մեջ մասնակցում է մտածողության սուբյեկտը՝ մարդը, 2) եթե այդ մարդը նաև չգիտի, թե ինչպես լուծի տրված խնդիրը: Բոլոր դեպքերում ցանկացած դժվարության խնդիրը կարող է առաջացնել պրոբլեմային իրավիճակ բոլոր նրանց համար, ովքեր դեռևս չգիտեն, թե ինչպես լուծեն այն: Սակայն այդ նույն խնդիրը չի կարող պրոբլեմային լինել նրանց համար, ովքեր գիտեն լուծել այն: Նույնիսկ անցած, բայց արդեն մոռացված նյութի վերադարձության վերաբերյալ հարցը կարող է դառնալ պրոբլեմատիկ բոլոր նրանց համար, ովքեր ցանկություն են հայտնում դատողությունների միջոցով վերականգնելու հարցի ճիշտ պատասխանը, որն արդեն իրենց համար կարծես թե դառնում է նոր գիտելիք: Օրինակ՝ շատ հաճախ եռանկյունաչափական առաջադրանքներ լուծելիս մենք մոռանում ենք $\sin 3\alpha$ -ի կամ $\cos 3\alpha$ -ի բանաձևերը: Նման դեպքում առաջացած պրոբլեմը լուծում ենք այդ բանաձևերը կրկին «հայտնագործելով»՝ արտածելով: Պրոբլեմային իրավիճակ կարող է առաջանալ նաև որևէ խնդրի լուծման ընթացքում:

Ընդհանրապես պրոբլեմ ասելով՝ հասկացվում է խնդիր, որը ենթակա է լուծման, հետազոտման: Իր հերթին ուսումնական պրոբլեմի լուծման համար անհրաժեշտ են գիտությանն ու մարդկությանը հայտնի, բայց լուծողին՝ անհատին (աշակերտին) դեռևս անհայտ նոր գիտելիքներ, կարողություններ ու հմտություններ: Ուսումնական պրոբլեմը պրոբլեմային իրավիճակի այն բաղկացուցիչ տարրն է, որը առաջացրել է որոշակի դժվարություններ, տարակուսանք ու զարմանք, և որն էլ հենց սահմանվում, որոշակիացվում է պրոբլեմային իրավիճակի վերլուծության ընթացքում: Այստեղ ամենակարևորը պրոբլեմի արձանագրումն է, որի համար նախնառաջ անհրաժեշտ է ձևակերպել՝ որոշակիացնել առաջացած դժվարության բնույթը: Ընդհանրապես պրոբլեմ դնելը (արձանագրելը) մեթոդաբանությունում համարվում է ստեղծագործական մտածողության առաջին փուլը: Հաճախ հենց այս փուլում էլ ծնվում է ուսումնական պրոբլեմի լուծման մասին առաջին վարկածը: Ակադեմիկոս Ն. Ն. Լուզինը գիտության ոլորտում նշված իրողությունը նկարագրում է հետևյալ կերպ. «Սովորաբար պրոբլեմի դրվածքից պարզ է դառնում նրա լուծման ուղու ընտրությունը, սակայն եթե պրոբլեմի դրվածքում նրա լուծման ուղու մասին որևէ ցուցում չի պարունակվում, ապա այդ պրոբլեմը թվում է անհուսալի և կարող է տասնյակ տարիներ սպասել իր լուծմանը» [82; 589]:

Ցավոք, հեղինակների մոտ «պրոբլեմային ուսուցում» հասկացության մասին միասնական կարծիք գոյություն չունի: Վ. Օկոնը ([92]) առանձնացնում է պրոբլեմային ուսուցման երեք հիմնական փուլ՝ 1) պրոբլեմի արձանագրում, 2) պրոբլեմի լուծում, 3) լուծման ստուգում: Պրոբլեմային ուսուցման մասին հնարավորինս լայն

մեկնաբանություն կա Մ. Ի. Մախմուտովի «Պրոբլեմային ուսուցման տեսություն և պրակտիկա» (Կազան, 1972) մենագրությունում, որում հեղինակը առանձնացնում է պրոբլեմային ուսուցում կազմակերպելու վեց դիդակտիկական եղանակներ: Իսկ Մ. Ն. Սկատկինը առանձնացնում է պրոբլեմային ուսուցման երեք տեսակներ՝ 1) գիտելիքների պրոբլեմային մատուցում, 2) պրոբլեմային մատուցման տարբեր փուլերում սովորողների մասնակցություն որոնողական աշխատանքներին, 3) ուսուցման հետազոտական մեթոդ:

Պրոբլեմային ուսուցման մասին համապարփակ տեղեկություններ հայ ընթերցողը կարող է գտնել Յու. Ա. Ամիրջանյանի «Պրոբլեմային իրավիճակները ուսուցման պրոցեսի ակտիվացման միջոցներ» (Երևան, 1975) գրքում:

4.7. Հետազոտական մեթոդ

Հետազոտական մեթոդը ակտիվ ու արդյունավետ ավանդական մեթոդ է: Այն կարելի է կիրառել մաթեմատիկայի դասերի գրեթե բոլոր փուլերում, ինչպես նաև արտադասարանական աշխատանքների ժամանակ:

Ի. Յա. Լերները «Советская педагогика» ամսագրի 1963 թ. N 10-ի «Գիտության մեթոդներին աշակերտներին ծանոթացնելը որպես ուսուցման և կյանքի կապի միջոց» հոդվածում այն միտքն է հայտնում, որ հետազոտական մեթոդը ոչ թե մեթոդ պետք է համարել, այլ սկզբունք, որովհետև ցանկացած այլ մեթոդի կիրառության դեպքում էլ ուսուցմանը կարելի տալ հետազոտական բնույթ:

Դեռևս Յ. Ա. Կոմենսկին, Ժ. Ժ. Ռուսսոն, Է. Պեստալոցին և Ա. Դիստերվեգը բազմիցս ընդգծել են ուսուցման ընթացքում աշակերտների դիտողականությունն ու ինքնուրույնությունը զարգացնելու անհրաժեշտությունը: Հետագա շատ մանկավարժներ տարբեր առիթներով ակնարկել են միջնակարգ հանրակրթական դպրոցում հետազոտական մեթոդի կիրառման օգտին: Դա ավելի ցայտուն է զգացվում ներկայումս, և պատահական չէ, որ այնպիսի գիտնականներ, ինչպիսիք են՝ Վավիլովը, Կոլմոգորովը, Մարկուշևիչը և ուրիշներ, դպրոցի խնդիրներին վերաբերող իրենց հոդվածներում բազմիցս նշել են հետազոտական մեթոդի կիրառման հնարավորությունների մասին: Մարկուշևիչի կարծիքով՝ աշակերտների ստեղծագործական ունակությունները կարելի է զարգացնել՝ միայն նրանց ներգրավելով անմիջական ստեղծագործական գործունեության մեջ:

Իհարկե, ոչ բոլոր դպրոցականներն են դառնալու գիտնականներ: «Բայց պետք է ձգտել այն բանին, որ յուրաքանչյուրին ծանոթ լինի նորի հայտնագործման բերկրանքը, կյանքի ստեղծագործական իմաստավորման հրճվանքը», - նշում է մեթոդիստ Գ. Վ. Հակոբյանը:

Հայ մանկավարժական միտքը ևս տարբեր ժամանակներում, նույնիսկ վաղ անցյալում, արժարժեղ է առաջադեմ մանկավարժների կարծիքները: Նրանցից շատերը (Բ. Նուրիջանյան, Ս. Խապայանց, Պ. Ատրունի, Մ. Մամուրյան, Ա. Բահաթրյանց, Գ. Հակոբյան, Է. Այվազյան և այլն) առաջարկում են ինքնուրույն աշխատանք կազմակերպելու նպատակով սովորողներին ծանոթացնել հետազոտական մեթոդին: Օրինակ՝ Ա. Մամուրյանը գրել է. «Ես համոզված եմ, թե ուսուցման մեթոդը, որ ամենեն ավելի կմոտենա **խուզարկության** մեթոդին, անհամեմատ շատ ավելի ընտիր է» («Արևելյան մամուլ», 1881, էջ 381), իսկ Ա. Բահաթրյանը գրել է. «Ուսուցիչը միշտ պիտի աշխատի զարգացնել աշակերտի **ինքնագործունեությունը**: Նա երբեք չպիտի ինքը գործե, ինքը ասե, ինքը նկարե կամ գրե այն, ինչ որ կարող է անել աշակերտը» (Ա. Բահաթրյանց, Ուղեցույց հայ ուսուցչի, ընդհանուր մեթոդիկա և առաջին տարվա նյութի մշակությունը, Թիֆլիս, 1882, էջ 37): Հետաքրքիր է, որ Ատրունին իր կազմած թվաբանության դասագրքում որպես նշանաբան գրել է. «Պետք է կարելի եղածի չափ քիչ ուսուցանել և կարելի եղածին չափ շատ գտնել տալ»: Իր հերթին Գ. Հակոբյանը մշակել է հետազոտական մեթոդը ֆիզիկայի ուսուցման գործընթացում կիրառելու մեթոդիկան (տե՛ս [26]), իսկ Է. Այվազյանը ուսումնասիրել է հետազոտական մեթոդը մաթեմատիկայի դասի տարբեր փուլերում կիրառելու հնարավորությունների հարցը: Ի դեպ, նույն միտքն ավելի ուշ արտահայտել է ամերիկյան նշանավոր գիտնական Ջ. Պոյան:

Տ. Ռաշմաճյանը գրում է. «Դպրոցականը դասատուի ղեկավարող հարցերի օգնությամբ, ինքնուրույն կերպով աստիճանաբար զարգանում, գյուտեր է անում, ինչպես գրեթե մարդկությունն է արել» (տե՛ս «Նոր դպրոց», 1909, էջ 11):

Այժմ տեսնենք, թե ինչպես է սահմանվում հետազոտական մեթոդը առաջավոր մանկավարժների կողմից: «Գիտական մտածողության ունակություններին տիրապետելուն համընթաց աշակերտները հետզհետե ավելի ու ավելի բարդ ճանաչողական խնդիրներ լուծելու հնարավորություններ են ստանում, և, ի վերջո, նրանց մտավոր զարգացումը հասնում է մի մակարդակի, որ նրանց ուժերին համապատասխան են դառնում որոնողական գործունեության բոլոր փուլերը: Գիտակցելով պրոբլեմը՝ աշակերտները իրենք են կազմում որոնման պլանը, ենթադրություններ են անում, արտահայտում են վարկածներ, մտածում են նրանց ստուգման եղանակների մասին, անց են կացնում դիտումներ, փորձեր, արձանագրում են փաստեր, համեմատում են և եզրակացությունների հանգում:

Ուսուցման նման մեթոդը դիդակտիկայում ստացել է հետազոտական անունը. աշակերտների ճանաչողական գործունեությունն այստեղ արդեն մոտենում է գիտնականի հետազոտական գործունեությանը, որը գիտական ճշմարտություններ է հայտնաբերում» (Սկատկին Մ. Ն., Ուսուցման հետազոտական մեթոդը, Ե., 1972, էջ 43):

Իհարկե, աշակերտի հայտնագործած ճշմարտությունը գիտական ճշմարտությունից տարբերվում է նրանով, որ այն գիտության համար նորություն չէ, բայց նորություն է իր՝ աշակերտի համար:

Ուսուցման համակարգում, որպես առանձին մեթոդ, հետազոտական մեթոդը ծագել է 19-րդ դարի վերջին, սակայն 20-րդ դարի 20-ական թվականներին այն ծավալուն զարգացում է ապրել առանձնապես ԽՍՀՄ-ում: Այդ տարիներին լույս են տեսել նաև հետազոտական մեթոդին նվիրված բազմաթիվ գրքեր ու հոդվածներ:

Ոգևորված այդ մեթոդով՝ շատ ուսուցիչներ սկսեցին ակտիվորեն ներդնել այդ մեթոդն ուսուցման գործընթացում: Սակայն շուտով, ինչպես Մ. Ն. Սկատկինն է նշում, այդ աշխատանքներում նկատվեցին աղաղակող թերություններ: Արդյունքում ուռճացրին այն, դարձրին համընդհանուր և միակ թույլատրելի մեթոդ խորհրդային դպրոցում: Եվ փոխանակ ուղղելու սխալն ու հետազոտական մեթոդին տալու ուսուցման համակարգում իր պատշաճ տեղն ու դերը, հակառակը, վարվեցին ոչ դիալեկտիկորեն, ուղղակի հրաժարվեցին նրանից, և, ինչպես ասում են, «կեղտաջրի հետ միասին դուրս շաքտեցին նաև նորածին երեխային»:

Արդյունքը եղավ այն, որ մի քանի տասնյակ տարիներ խորհրդային մանկավարժական գրականության և մամուլի էջերում երբեք չէր հիշատակվում «հետազոտական» մեթոդ անվանումը: Սկսած 1970-ական թվականներից մի շարք հանրահայտ, հիմնականում խորհրդային, մանկավարժ գիտնականների (Մ. Ն. Սկատկին, Ի. Յա. Լերներ, Վ. Վ. Կրասնկի և ուրիշներ) կողմից նկատելի աշխատանքներ տարվեցին՝ վերականգնելու այդ արժեքավոր մեթոդն իր իրավունքներում:

Գ. Վ. Հակոբյանը նշում է. «...Անհրաժեշտ է ուսուցման ընթացքում հաճախակի դիմել հետազոտական մեթոդին և դասի բոլոր փուլերում բարձր մակարդակի վրա պահել սովորողների ակտիվությունն ու ինքնուրույնությունը» [39ա; 5]:

4.7.1. Հետազոտական մեթոդի կիրառության մասին

Հետազոտական մեթոդի կիրառության շրջանակներում լուծվող խնդիրները որոշ իմաստով խիստ տարբեր պետք է լինեն դասագրքային ակադեմիական խնդիրներից: Հասկանալի է, որ շատ բան է կախված նաև խնդրի ընտրությունից: Այստեղ, հետևելով Զ. Պոյային, նշենք հատկապես հետևյալ պահերը:

ա) Սովորաբար աշակերտն իր խնդիրը ստանում է պատրաստի վիճակում՝ դասագրքից կամ ուսուցչից: Ընդ որում՝ սովորաբար ո՛չ դասագրքի հեղինակը, ո՛չ էլ ուսուցիչը այնքան էլ չեն մտախոգվում, թե աշակերտներին իրականում հետաքրքրում է արդյոք իրեն մատուցված խնդիրը, թե ոչ: Իսկ մաթեմատիկոսի համար խնդրի ընտրությունը ամենից կարևոր քայլն է նրա հետագա ստեղծագործական աշխատանքի ընթացքում: Նա նախ մտածում, փնտրում և գտնում է այն խնդիրը,

որն իրեն ամենից շատ է հետաքրքրում, և երկրորդ՝ որի լուծումն իր ուժերից վեր չէ: Ստորև դիտարկված խնդիրներում ուսուցիչը գործում է այնպես, որ հնարավորության դեպքում իրենք՝ սովորողները, նույնպես մասնակցեն խնդրի ձևակերպմանը՝ գիտակցելով, որ այն գործնականորեն օգտակար է իրենց: Բնական է, որ այդ դեպքում երեխաները նաև շահագրգռված կլինեն խնդիրը լուծելու հարցում:

բ) Դասագրքերում և խնդրագրքերում եղած խնդիրների մեծ մասը թեմատիկ առումով իրար հետ քիչ են կապված: Դրանք հիմնականում ծառայում են այս կամ այն որոշակի կանոնի կամ բանաձևի մեկնաբանմանը, յուրացմանը կամ ամրապնդմանը: Այդ կանոնը կամ բանաձևը սովորելուց հետո նման խնդիրները շուտ մոռացվում են: Դրանց հակառակ՝ հետազոտական մեթոդով լուծվող խնդիրներից շատերը, որպես կանոն, հարուստ են բովանդակային ենթատեքստերով: Դրանք ծնում են հետաքրքրական այլևայլ հարցեր, որոնցից էլ առաջանում են նոր խնդիրներ: Աշակերտի մտածողությունն այսպես շարունակվում է այնքան ժամանակ, մինչև որ խնդիրների ճյուղավորված այդ ցանցն ընդարձակվելով՝ ներկայանում է որպես խնդիրների մի ընդհանուր դաս:

գ) Ստորև դիտարկվելիք բոլոր խնդիրներում էլ առաջնակարգ դեր են կատարում դիտարկումները, ենթադրությունները, ինդուկտիվ և դեդուկտիվ մտահանգումներն ու պրոբլեմային իրավիճակները:

4.7.1.1. Բերենք նոր նյութի հաղորդման ժամանակ հետազոտական մեթոդի կիրառության մեկ օրինակ:

Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքերի 10-րդ դասարանում երկրաչափությունից անցնում են «Գաղափար կանոնական բազմանիստերի մասին» թեման: Բոլոր հինգ կանոնական (ասում են նաև պլատոնական՝ ի պատիվ հույն փիլիսոփա Պլատոնի, որը հանգամանալից ուսումնասիրել է այդ մարմինները) բազմանիստերի թվարկումից հետո առաջարկվում է սովորողներին գրատախտակին կամ պլակատների վրա նկարված բազմանիստերից յուրաքանչյուրի համար հաշվել այդ բազմանիստերի նիստերի, գագաթների և կողերի թիվը: Երբ աշակերտները կատարում են այդ աշխատանքը, ցուցադրվում է նախապես գծված, բայց չլրացված աղյուսակը և պահանջվում, որ աշակերտները լրացնեն այն՝ հիմք ընդունելով իրենց հետազոտության արդյունքները, որտեղ **Г** տառով նշանակված է բազմանիստի նիստերի թիվը (ռուսերեն *грань* բառից), **В**-ով՝ գագաթների (ռուսերեն *вершины* բառից) և **Р**-ով՝ կողերի (ռուսերեն *ребро* բառից) թիվը: Աշակերտների կողմից լրացված աղյուսակն ունի հետևյալ տեսքը.

N	Բազմանիստի տեսակը	Г	В	P	Նկատված օրինաչափությունը
1	քառանիստ՝ տետրաէդր	4	4	6	
2	խորանարդ՝ հեկսաէդր	6	8	12	
3	ութանիստ՝ օկտաէդր	8	6	12	
4	12-անիստ՝ դոդեկաէդր	12	20	30	
5	20-անիստ՝ իկոսաէդր	20	12	30	

Այնուհետև ուսուցիչը դիմում է էվրիստիկ գրույցին.

- Ի՞նչ թվաբանական օրինաչափություն եք նկատում աղյուսակի 1-5 տողերից յուրաքանչյուրում **Г**, **В** և **P** սյունակների թվերի միջև:

- Կա՞ արդյոք որևէ թվաբանական առնչություն յուրաքանչյուր տողի՝ **Г**, **В** և **P** թվերի միջև:

Այս հարցերից հետո, որոնք ստիպում են սովորողներին համեմատել այդ թվերը, վերլուծել ու ընդհանրացնել, աշակերտները կնկատեն, որ յուրաքանչյուր տողի **Г** և **В** թվերի գումարը 2-ով ավելի մեծ է նույն տողի **P**-ի համապատասխան թվից՝ $4+4=6+2$, $6+8=12+2$ և այլն: Առաջանում է աշխուժություն դասարանում. իսկապես, աղյուսակի բոլոր տողերում էլ պատկերը նույնն է:

- Ո՞վ կարող է ձևակերպել նկատված երևույթը:

«Ցանկացած կանոնավոր բազմանիստի նիստերի և գագաթների թվերի գումարը երկուսով մեծ է կողերի թվից», - լինում է սովորողների պատասխանը:

Մնում է լրացնել աղյուսակի վերջին սյունակը, վերացարկել ստացված արդյունքը և տառերով ձևակերպել նկատված պնդումը՝

$$\Gamma + B = P + 2 : \quad (1)$$

Այնուհետև աշակերտների ուշադրությունը հրավիրվում է այն հանգամանքի վրա, որ (1) բանաձևին հանգեցինք՝ դիտարկելով միայն կանոնական բազմանիստերը: Ուստի բնական է, որ աշակերտները կառաջարկեն այդ բանաձևը ստուգել նաև այլ՝ ոչ կանոնական բազմանիստերի համար: Այդ նպատակով առաջարկվում է նրանց կազմել ինքնուրույն հետազոտման պլան: Նախապես սեղանին դրված բազմանիստների մոդելներից նրանք կառանձնացնեն եռանկյուն, քառանկյուն, հնգանկյուն, վեցանկյուն բուրգեր, եռանկյուն, քառանկյուն, հնգանկյուն, վեցանկյուն պրիզմաներ, ուսուցչի կողմից ավելացվում են նաև ունանկյուն բուրգ, ունանկյուն պրիզմա, եռանկյուն, քառանկյուն աշտարակներ, եռանկյուն, քառանկյուն երկբուրգեր:

Աշակերտները ինքնուրույն կատարում են հետազոտական աշխատանքը, գրանցում տվյալները և լրացնում համապատասխան աղյուսակը:

Աշակերտները գոհ են մնում իրենց կատարած աշխատանքի արդյունքից, քանի որ (1) բանաձևը ճշմարիտ էր նաև ոչ կանոնական բազմանիստերի համար:

Ուսուցիչը շարունակում է գրույցը.

- Ինչպես տեսնում եք, (1) բանաձևը բավականին վստահելի է: Կարելի՞ է արդյոք սահմանափակվել դիտարկված բազմանիստերով, թե՞ առաջարկում եք...

- Ապացուցել, - ավելացնում են աշակերտները:

Ուսուցչին մնում է ավելացնել, որ (1) բանաձևը համարյա նման եղանակով է հայտնագործել գերմանացի հանճարեղ մաթեմատիկոս Լեոնարդ Էյլերը, ով, սակայն, չի կարողացել այն ապացուցել: Սակայն Էյլերից ավելի շուտ նույն եզրակացությանն է հանգել նշանավոր ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ռենե Դեկարտը: Վերջինս, հավանաբար զբաղված լինելով ավելի կարևոր հարցերով, ժամանակ չի տրամադրել հրապարակելու այն՝ իր ապացույցով հանդերձ: Միայն Էյլերի մահից հետո Դեկարտի չհրապարակած ձեռագրերում գտան Էյլերի բանաձևի (այն արդեն այդպես էր կոչվում) ապացույցը և հրապարակեցին:

4.7.1.2. Էվրիստիկ գրույցի, պրոբլեմային և հետազոտական մեթոդների կիրառությունը ամփոփիչ կրկնություններ կազմակերպելիս:

Գործնականում Էվրիստիկ, պրոբլեմային և հետազոտական ակտիվ մեթոդները հիմնականում հանդես են գալիս համատեղ, մեկ միասնական ճակատով, միևնույն խնդրի լուծման ընթացքում:

Այժմ բերենք 3-5 մեթոդների համատեղ կիրառության մեկ օրինակ: 9-րդ դասարանում, երբ ավարտվում է հարթ պատկերների մակերեսների ուսումնասիրությունը, նպատակահարմար է կրկնել «Մակերեսներ» թեման՝ լուծելով հետևյալ խնդիրը. «100 մ պարագծով հարթ պատկերներից որի՞ մակերեսն է ամենամեծը»: Սա իզոպերիմետրիկ խնդիր է և հայտնի է որպես Դիդո թագուհու խնդիր: Այս խնդիրն ունի պատմական հետաքրքիր նախապատմություն, որից էլ պետք է սկսի ուսուցիչը.

- Միջին դարերում Անգլիայում կալվածատերը տալիս էր գյուղացիներին 100 յարդ լար և պահանջում, որ վերջիններս դրանով գծանշեն և ցանկապատեն իրենց համար հողամաս: Գյուղացիներից ոմանք ցանկապատում էին եռանկյունաձև հողամաս, մյուսները՝ քառանկյունաձև և այլն: Մեծ էր լինում նրանց զարմանքը, երբ աշնանը, այդ՝ միևնույն պարագիծ (ցանկապատի երկարություն), բայց տարբեր երկրաչափական տեսք ունեցող հողամասերից հավաքում էին իրարից խիստ տարբեր քանակությամբ, նույնիսկ 10-12 անգամ շատ բերք: Փորձենք օգնել գյուղացուն, որպեսզի նա հնարավորություն ունենա հավաքելու հողամասից հնարավորինս շատ քանակությամբ բերք: Կախվա՞ծ է արդյոք հողամասի մակերեսը նրա երկրաչափական տեսքից: Եթե այո՞, ապա ի՞նչ տեսք էք առաջարկում հողամասի համար գյուղացուն:

Ապա ուսուցիչն անցնում է «100 մ պարագծով հարթ պատկերներից որի՞ մակերեսն է ամենամեծը» խնդրի լուծմանը և դիմում Էվրիստիկ գրույցին և պրոբլեմային ուսուցմանը:

- Ի՞նչ եք կարծում՝ իրականում կարո՞ղ են միևնույն պարագծով հողամասերի մակերեսները լինել տարբեր:

Այս խնդրի լուծման դասերից մեկի ժամանակ ուսուցչի այս հարցին որոշ աշակերտներ տվեցին բացասական պատասխան. «Ո՛չ, չե՛ն կարող»: Ուսուցիչը դիմեց դասարանի մաթեմատիկայից առաջադիմող աշակերտներից մեկին.

- Հասմի՛կ, դու ի՞նչ կարծիքի ես: Արձագանքի՛ր այս պատասխանին:

Հասմիկը անմիջապես դիմեց նման պատասխան տվող աշակերտներից մեկին:

- Անուշի՛կ ջան, եթե իմ հայրը իր հողամասը ցանկապատեր 20 x 30 (մ) չափսերի ուղղանկյան տեսքով, իսկ քո հայրը՝ 49 x 1 (մ) չափսերի ուղղանկյան տեսքով, ապա իմ հայրը իր 6 ար մակերեսով հողամասից ավելի քան 12 անգամ շատ բերք կհավաքեր, քան քո հայրն իր 49 մ² կամ մոտավորապես 0,5 ար մակերեսով հողամասից: Այս օրինակից հետո աշակերտների մոտ առաջացած տարակուսանքը փոխարինվում է զարմանքի: Նրանք ուզում են, իրոք, արագ ստանալ այդ հիմնախնդրի ճշգրիտ պատասխանը:

Ուսուցիչը աշակերտների օգնությամբ կրկին ձևակերպում է «100 մ պարագծով հարթ պատկերներից որի՞ մակերեսն է ամենամեծը» պրոբլեմը և անցնում քարտային աշխատանքի: Նա նախապես քարտերի վրա գրի է առել թվով 14 խնդիրներ, որոնցից չորսը նվիրված են 100 մ պարագծով անհավասարակողմ, հավասարասրուն, ուղղանկյուն և կանոնավոր եռանկյան մակերեսը գտնելուն, հինգը՝ ուղղանկյուն, զուգահեռագիծ, սեղան և քառակուսի քառանկյուններին, երկուսը՝ անկանոն և կանոնավոր հնգանկյուններին, երկուսը՝ անկանոն և կանոնավոր վեցանկյուններին և մեկը 100 մ շրջանագծի երկարություն ունեցող շրջանի մակերեսը գտնելուն:

Նախապես խնդիրները դասակարգվում են, որպեսզի յուրաքանչյուր աշակերտ ստանա իրեն համահունչ քարտ (իմա՝ խնդիր): Նախապես խնդիրները պետք է դասակարգվեն հեշտ, միջին և դժվար խմբերի (դրա համար ուսուցիչը քարտի հակառակ կողմում՝ քարտի համարի կողքը, նշում է անում՝ համապատասխանաբար **թ** (թույլ), **մ** (միջակ) կամ **ու** (ուժեղ) տառերով: Ուսուցիչը արագ բաժանում է քարտերը և աշակերտներին տալիս 15-20 րոպե ժամանակ, որպեսզի ինքնուրույն կատարեն առաջադրանքը:

Նախապես ծավլող գրատախտակի վրա, եթե այն առկա է դասարանում կամ պլակատի վրա, պատկերում է հետևյալ աղյուսակը, որի վերջին՝ մակերեսների սյունակը դատարկ է:

Խն	Խնդիր	պատկեր	Բանա- ձև	Մակե- րես
11	18 մ, 34 մ և 48 մ կողմերով եռանկյուն			226 մ ²
22	29 մ, 29 մ և 42 մ կողմերով եռանկյուն			420 մ ²
33	20 մ, 37,5 մ և 42.5 մ կողմերով եռանկյուն			375 մ ²
44	100/3 կողմերով հավասարակողմ եռանկյուն			481 մ ²
55	10 մ և 40 մ կողմերով ուղղանկյուն			400 մ ²
66	30 մ և 20 մ կողմերով ուղղանկյուն			600 մ ²
77	30 մ և 20 մ կողմերով և մեծ կողմին տա- րած h=16 մ բարձրությամբ զուգահեռագիծ			480 մ ²
88	42 մ և 32 մ հիմքերով և h=12 մ բարձրու- թյամբ սեղան			444 մ ²
99	25 մ կողմով քառակուսի			625 մ ²
110	ABCDE հնգանկյուն, որի AB=CD=26 մ, BC=8 մ, AE=DE=20 մ, AD=28 մ և BC//AD:			528 մ ²
111	20մ կողմով կանոնավոր հնգանկյուն			687 մ ²
112	Գտնել 13 մ, 24 մ, 13 մ, 13 մ, 24 մ, 13 մ կողմերով և 34 մ անկյունագծով վեցանկյան մակերեսը, որտեղ AD//BC, AD//EF:			502 մ ²
113	100 մ պարագծով կանոնավոր վեցանկյուն			721 մ ²
114	100 մ պարագծով շրջան			796 մ ²

Աշակերտները լուծում են խնդիրը, ստուգում պատասխանը և շտապում են լրացնել աղյուսակի համապատասխան դատարկ սյունակը: Քանի որ յուրաքանչյուր քարտից բաժին է հասել 2-3 աշակերտի, ապա ով շուտ լրացրեց աղյուսակը, նաև գնահատվում է: Աղյուսակը ամբողջովին լրացվելուց հետո ուսուցիչը նորից դիմում է էվրիստիկ հարցադրումներին:

- Միևնույն՝ 100 մ պարագծով եռանկյուններից որի՞ մակերեսն է ամենամեծը:

- Միևնույն՝ 100 մ պարագծով քառանկյուններից որի՞ մակերեսն է ամենամեծը:
- Միևնույն՝ 100 մ պարագծով հնգանկյուններից որի՞ մակերեսն է ամենամեծը:
- Միևնույն՝ 100 մ պարագծով վեցանկյուններից որի՞ մակերեսն է ամենամեծը:
- Միևնույն՝ 100 մ պարագծով բազմանկյուններից որի՞ մակերեսն է ամենամեծը:
- Միևնույն՝ 100 մ պարագծով պատկերներից որի՞ մակերեսն է ամենամեծը:
- Այսպիսով՝ ի՞նչ տեսք էք առաջարկում գյուղացուն հողամասը ցանկապատելու համար:

Այս հարցերին հերթով պատասխանելուց հետո դասարանը վերջապես հանգում է ճիշտ և միակ պատասխանին. «Հողամասը ամենամեծ մակերեսը կունենա, եթե այն ցանկապատվի շրջանաձև»։ Այսինքն՝ միևնույն պարագծերով բոլոր հարթ պատկերների մեջ ամենամեծ մակերեսն ունի շրջանը:

Ամփոփելով նյութը՝ ուսուցիչը նշում է, որ սովորողների ակտիվ մասնակցությամբ և իրենց ջանքերով հենց նոր լուծված խնդիրը պատկանում է խնդիրների մի յուրահատուկ դասի, որոնք մաթեմատիկայում և նրա կիրառություններում կոչվում են ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքները գտնելու կամ պարզապես մինիմալի խնդիրներ, և սովորողների հետ քննարկում է այդ տիպի խնդիրների լուծման տնտեսական մեծ նշանակությունը: Վերջում ուսուցիչը տեղեկացնում է, որ լուծված խնդիրը առնչվում է նաև մաթեմատիկայի պատմությանից շատ լավ հայտնի պրոբլեմի՝ հարթությունը միևնույն հարթ պատկերներով ծածկելու (լցնելու) կամ ինչպես ընդունված է ասել՝ «մանրահատակի» խնդրին: Սակայն հայտնի է, որ հարթությունը միայն շրջաններով ծածկել հնարավոր չէ:

Ավելացնենք, որ դիտարկված խնդրի խիստ մաթեմատիկական լուծումը հնարավոր է միայն բարձրագույն դպրոցում դիֆերենցիալ հաշվի տարրերի կիրառմամբ:

4.8. Ծրագրավորված ուսուցման մեթոդներ

Պրակտիկայում հաճախ պրոբլեմահարուց ուսուցման հիմնական խնդիրը լուծելու ընթացքում (օրինակ՝ ցանկապատի միևնույն երկարությունն ունեցող հողամասերից մեծագույն մակերես ունեցողի երկրաչափական տեսքը պարզելու) զգալի դեր է խաղում ծրագրավորված (լուծումը բաժիններով, քայլերով կատարելու) ուսուցման կիրառումը:

«Ծրագրավորված ուսուցում» հասկացությունը փոխառված է ԷՀՄ-ների համար ստեղծված ծրագրավորման տերմինաբանությունից: Եվ ինչպես ԷՀՄ-ների ծրագրերում, այնպես էլ ծրագրավորված ուսուցման ոլորտում, խնդրի լուծումը ներկայացվում է տարրական գործողությունների խիստ հաջորդականությամբ, որում ուսումնական նյութը ներկայացվում է կադրերի հաջորդականությամբ:

տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրը, որպես կանոն, պարունակում է նոր նյութի մասնաբաժին և ստուգիչ հարց կամ առաջադրանք:

Ծրագրավորված ուսուցումը չի բացառում դասական մանկավարժության՝ դիդակտիկայի սկզբունքները: Ճիշտ հակառակը, այն առաջացել է հենց այդ սկզբունքների լավագույն իրականացման նպատակով ուսուցման գործընթացի կատարելագործման ուղիների փնտրտուքի ընթացքում: Հենց այդ նպատակով այն ենթադրում է.

1. ուսումնական նյութի և այն մասնաբաժինների ճիշտ ընտրություն ու տրոհում,

2. գիտելիքների հաճախակի ստուգում. որպես կանոն՝ յուրաքանչյուր մասնաբաժինը ավարտվում է ստուգիչ հարցերով և առաջադրանքով,

3. հաջորդ մասնաբաժինն անցումը կատարվում է աշակերտներին նախորդի ճիշտ պատասխանին կամ սովորողի թույլ տված սխալներին ծանոթացնելուց հետո միայն,

4. յուրաքանչյուր աշակերտին իրեն հատուկ՝ անհատական, արագությամբ աշխատելու հնարավորության ստեղծում (այսինքն՝ գործնականում ուսուցման անհատական մոտեցման իրականացում), որը հանդիսանում է սովորողի՝ նոր նյութի յուրացման համար ակտիվ ինքնուրույն գործունեության անհրաժեշտ պայմանը:

Թվարկված այս չորս առանձնահատկություններն էլ բնութագրում են ծրագրավորված ուսուցման մեթոդը:

Ծրագրավորված ուսուցումն իրականացվում է ուսուցանող ծրագրի միջոցով, որը սովորական դասագրքից տարբերվում է նրանով, որ այն ոչ միայն որոշակիացնում է բովանդակությունը, այլև ուսուցման գործընթացը:

Մանկավարժության մեջ որոշ մասնագետներ առանձնացնում են ծրագրավորված ուսուցման երեք տեսակ՝ տեղեկատվություն հաղորդելու, ծրագրավորված առաջադրանքներ կատարելու և վերահսկման ու ուղղման (կոռեկցիայի) մեթոդներ:

Ծրագրավորված ուսուցման գաղափարը առաջինը ծագեց ԱՄՆ-ում դեռևս 50-ական թվականների սկզբին և մեծ տարածում գտավ: Հենց այնտեղ էլ մշակվեցին ուսուցանող ծրագրերի երկու տիպ՝ Բ. Սկինների **գծային ծրագրավորման համակարգը**, որում բոլոր սովորողների համար նախատեսվում է յուրացման մեկ գիծ (երթուղի – Է. Ա.), և Ն. Կրաուդերի **ճյուղավորված համակարգը**, որում հերթական հարցի պատասխանը, որպես կանոն, ոչ թե տրվում կամ կառուցարկվում է աշակերտի կողմից, այլ ընտրվում է պատրաստի այլընտրանքային պատասխանների համակարգից, որոնցից միայն մեկն է ճիշտ: Հնարավոր է նաև **ուսուցանող ծրագրավորված կոմբինացված համակարգ**, որը հանդիսանում է այդ երկու մեթոդների զուգորդումը:

Փոքր-ինչ ավելի ուշ ԽՍՀՄ-ում կարելի է նշել Բ. Պ. Բեսպալկոյի [85; 209] մենագրությունը, որում տրված է ծրագրավորված ուսուցման տեսությունը և Վ. Գ. Բոլտյանսկու [նույն տեղում] հոդվածը, որում դիտարկված են ծրագրավորված ուսուցման հարցերը, և բերվում են ուսուցանող ծրագրերի օրինակներ:

Գծային ծրագրում ուսումնական նյութը ներկայացվում է ոչ մեծ մասնաբաժինների՝ կադրերի տեսքով, որը, որպես կանոն, պարունակում է այդ կադրում ուսուցանվող նյութի վերաբերյալ պարզ հարց: Ենթադրվում է, որ աշակերտը, ուշադիր ընթերցելով այդ նյութը, կարող է անսխալ պատասխանել առաջադրված հարցին: Համաձայն ծրագրավորված ուսուցման վերոհիշյալ չորս դրույթներից երրորդ պահանջի՝ աշակերտը կարող է անցնել հաջորդ կադրին միայն այն դեպքում, երբ նա համոզվել է, որ ինքը ճիշտ է պատասխանել նախորդ կադրի հարցին կամ էլ ծանոթացել է ճիշտ պատասխանին և ուղղել իր կողմից թույլ տված սխալը: Դա լիովին հնարավոր է, քանի որ յուրաքանչյուր կադր, ինչպես արդեն նշել ենք, պարունակում է նոր նյութի ոչ մեծ չափաբաժին:

Ճյուղավորված համակարգի դեպքում ուսումնական նյութը, գծայինի հետ համեմատած, տրոհվում է ավելի ծավալուն բաժինների: Յուրաքանչյուր կադրից հետո տրվում է հարց, որի պատասխանը ոչ թե տալիս է աշակերտը, այլ ինչպես նշել ենք, ընտրվում է այլընտրանքային պատրաստի պատասխանների համակարգից, որոնցից միայն մեկն է ճշմարիտ: Ոչ ճիշտ պատասխանները ընտրվում են ծրագիրը կազմողների կողմից ոչ պատահականորեն, այլ հաշվի առնելով սովորողների կողմից թույլ տրվելիք առավել հավանական՝ կայուն սխալները: Ճիշտ պատասխանն ընտրած աշակերտը անցնում է այն էջին կամ կադրին, որում գետեղված է ուսումնական նյութի հաջորդ չափաբաժինը: Միայն պատասխանը ընտրած աշակերտը անդրադառնում է այն էջին, որում պարզաբանվում է թույլ տրված սխալը և առաջարկվում է կրկին անդրադառնալ՝ վերադառնալ նախորդ կադրին, որպեսզի ևս մեկ անգամ ուշադիր ընթերցելով այն՝ կարողանա ընտրել ճիշտ պատասխանը, կամ էլ, կախված թույլ տրված սխալից, բացի այն էջը, որում տրվում է անհասկանալի նյութի լրացուցիչ պարզաբանում:

Համեմատելով ծրագրավորված ուսուցման այս երկու համակարգերը՝ կարող ենք նշել, որ գծային ծրագրավորման դեպքում աշակերտը ստուգիչ հարցերի պատասխանները ձևակերպում է ինքնուրույն, իսկ ճյուղավորվածի դեպքում միայն պատրաստի մի քանի (ինչ-որ մեկի կողմից ձևակերպված) պատասխաններից ընտրում է մեկը: Առաջին դեպքում կիրառվում է «կառուցարկված» պատասխանների համակարգը, երկրորդում, այսպես կոչված, «բազմակի ընտրության» համակարգը: Այդ իմաստով ակնհայտորեն բացահայտվում է գծային ծրագրավորման որոշակի առավելությունը, քանի որ որևէ բնագավառում ծագած հարցերին սովորաբար նախապես պատասխաններ չեն նախապատրաստվում: Սովորողները, որոնք փորձում են պատասխանել նման հարցերին, պետք է կա-

րողանան ինքնություն ձևակերպել դրանց պատասխանները, այլ ոչ թե ընտրել արդեն ձևակերպված այլընտրանքներից մեկը:

Մյուս կողմից, ճյուղավորված ծրագրերը կազմվում են՝ հաշվի առնելով աշակերտների հնարավոր, կայուն սխալ պատասխանները, և այդ տեսանկյունից այն ավելի մոտ է իրական գործընթացին: Գյուղավորված ծրագրերում առավել կարևոր է այն, որ տարբեր սովորողների այն տանում է դեպի նոր նյութի յուրացումը տարբեր ճանապարհներով՝ հաշվի առնելով նրանց հնարավորություններն ու կարիքները լրացուցիչ պարզաբանումների և ցուցումների առումով: Աշակերտներից մեկը ուղղակի մեկ չափաբաժնից անցնում է մյուսին, իսկ մյուսը օգտվում է լրացուցիչ բացատրություններից, իր կողմից թույլ տրված սխալների պարզաբանումներից և ցուցումներից, որոնք արտացոլում են իր կողմից ուսումնական նյութի չհասկացվածության պատճառները: Արդյունքում էլ հենց ստացվում է, որ տարբեր աշակերտներ, ուսումնական նյութը յուրացնում են անհատական տարբեր արագություններով: Հենց ծրագրավորված ուսուցմանը հատուկ յուրացման այդ անհատական արագություններն էլ ավանդաբար հաշվի չեն առնվում ոչ ծրագրավորված ուսուցումների ժամանակ: Դրանով միաժամանակ ծրագրավորված ուսուցումը իրականացնում է նաև անհատական ուսուցման կարևորագույն դիդակտիկական սկզբունքը:

Ծրագրավորված ուսուցումը կարող է իրականացվել, այսպես կոչված, ուսուցանող մեքենայական ծրագրերի և առանց մեքենայի՝ օգտագործելով ծրագրավորված ուսուցման դասագրքերը:

Ոչ մեքենայական ծրագրավորման հիմնական թերությունը նրա մեծածավալության և միակերպության մեջ է: Բացի դրանից՝ որոշ աշակերտներ, ունենալով ծրագրավորված դասագիրքն ազատ թերթելու հնարավորություն, կարող են խախտել հրահանգներն ու ընթերցել էջերը ոչ այն հերթականությամբ, որը համապատասխանում է ընտրված պատասխանին (ճյուղավորված ծրագրավորման դեպքում), կամ էլ կարող են նայել պատասխանը մինչ այն ինքնություն ձևակերպելը (գծային ծրագրավորման դասագրքի դեպքում): Փորձը ցույց է տալիս, որ ոչ մեքենայական ծրագրավորումը ընկալվում է հիմնականում աշխատասեր սովորողների կողմից, որոնք քիչ ծրագրավորված ուսուցման ժամանակ էլ ցուցաբերում են ոչ վատ արդյունքներ:

Ներկայումս ԷՀՄ-ների բազայի վրա ստեղծվում են ուսուցանող մեքենաներ կամ ուսուցման ավտոմատացված համակարգեր (ՈւԱՀ), որոնք ավտոմատ կերպով ապահովում են ուսուցանող ծրագրի կատարումը. «բացում» են պատասխանը միայն այն բանից հետո, երբ աշակերտը «հայտնում» է իր պատասխանը, «մատակարարում» են անհրաժեշտ էջը, կախված աշակերտի կողմից ընտրված պատասխանից՝ փոխում են դրանց հաջորդականությունը, այսինքն՝ ապահովում են ուսուցանող ծրագրի տարբեր սովորողների համար տարբեր իրականացումներ և այլն:

Հաճախ ծրագրավորված ուսուցումը սխալմամբ նույնացնում են մեքենայական ուսուցման կամ առանց ուսուցչի ուսուցման հետ, որը ճիշտ չէ, քանի որ յուրաքանչյուր մեքենայական ուսուցում ուսուցման միայն լրացուցիչ միջոց է, այլ ոչ թե ուսուցչին փոխարինող միջոց:

Արդեն նշեցինք, որ ծրագրավորված ուսուցումը պարունակում է մի շարք առավելություններ՝ կապված անհատական ուսուցման մոտեցման լիարժեք իրականացնելու և հետադարձ՝ ուսուցիչ-աշակերտ կապը ժամանակին ապահովելու հետ: Սակայն դրա մասսայական ներդրման համար դեռևս չկան համապատասխան փորձարարական հավաստի տվյալներ, հետազոտական լուրջ արդյունքներ, լիարժեք կառուցարկված ուսուցանող մեքենաներ և ՈւԱՀ-ներ, ոացիոնալ ուսուցանող ծրագրեր: Անբավարար չափով են հետազոտված նաև ծրագրավորված ուսուցման և ուսուցման մյուս մեթոդների զուգորդման հնարավորությունները, ծրագրավորված ուսուցման կիրառությունը մաթեմատիկայից ուժեղ, միջին և թույլ առաջադիմություն ունեցող սովորողների անհատական արագությունների լավագույնս հաշվառման հարցերում:

Որպես ասվածի մեկնաբանություն՝ բերենք գծային և ճյուղավորված ծրագրավորման մեկական օրինակ՝ օգտվելով Մ. Բ. Գելֆանդի «Ամբողջ ցուցիչով աստիճան» (Կիև, 1964) գրքից:

Հանրահաշվից գծային ծրագրավորման օրինակ:

Բնական ցուցիչով աստիճանի սահմանումը:

1. Մենք արդեն ծանոթացել ենք աստիճան բարձրացնելու գործողությանը: Վերհիշեք ոացիոնալ թվի բնական աստիճանի սահմանումը (էջ 1):

k հատ արտադրիչների արտադրյալը, որոնցից յուրաքանչյուրը a է, կարճ նշանակում են a^k և անվանում **a -ի k -րդ աստիճան**:

$$a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_k \text{ հատ}$$

Օրինակներ՝

1. $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$,

2. $(3/5)^3 =$ պատ. $27/125$,

3. $(2,5)^2 =$ պատ. $6,25$:

Էջ 2

2. Վերհիշեք, թե ինչ է «**աստիճանի հիմք**», «**աստիճանի ցուցիչ**» և «**աստիճան**»:

a թիվը, որը բարձրացվում է աստիճան, կոչվում է **աստիճանի հիմք**, k -ն, որը ցույց է տալիս, թե ինչ աստիճան պետք է բարձրացվի a -ն, կոչվում է **աստիճա-**

նացույց, a -ն k անգամ ինքն իր հետ բազմապատկելու արդյունքը կոչվում է a թվի k -րդ աստիճան՝ a^k :

Օրինակ՝ b^k արտահայտությունում՝

- | | |
|------------------------|----------------------|
| 1. b թիվը _____ | 1) աստիճանի հիմքն է, |
| 2. k թիվն է, _____ | 2) աստիճանացույցն է, |
| 3. b^k թիվն է, _____ | 3) աստիճանն է: |
-

3. Աստիճանները ներկայացնել նույն արտադրիչների արտադրյալի տեսքով (էջ 3).

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------|
| 1) $(2a)^3 = 2a \cdot 2a \cdot 2a :$ | 2) <input type="text"/> |
| 2) $(2a/3)^4 = \dots$ | |
| 3) $(3b/5)^5 = \dots$ | 3) <input type="text"/> |
-

Ճյուղավորված ծրագրավորման օրինակ:

Առնչություններ եռանկյան անկյունների միջև (էջ 1):

ABC եռանկյան անկյունների մեծությունները իրար հետ կապված են $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ առնչությամբ:

Պատասխանե՛ք հետևյալ հարցին.

1. Կարելի՞ է արդյոք համարել, որ եռանկյան անկյունների մեծությունները միմյանցից անկախ են:

Ընտրե՛ք հետևյալ պատասխաններից մեկը. Անդրադարձե՛ք էջ ...

1. Եռանկյան բոլոր անկյունների մեծությունները միմյանցից անկախ են (էջ 6):
2. Յուրաքանչյուր անկյան մեծությունը կախված է մյուս երկուսի մեծություններից (էջ 2):

3. Չգիտեմ (էջ 5):

Էջ 2

Ձեր պատասխանը՝ «եռանկյան յուրաքանչյուր անկյան մեծությունը կախված է մյուս անկյունների մեծություններից», ճիշտ է:

Կատարե՛ք վարժությունները:

4. $\triangle ABC$ – ում տրված են $\angle A$ – ի և $\angle C$ – ի մեծությունները: Գտե՛ք $\angle B$ – ն: Ընտրե՛ք ստորև տրված պատասխաններից մեկը: Անդրադարձե՛ք էջ ...

- 1) $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$ կամ $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$ (էջ 3):
 - 2) $\angle B = 180^\circ - \angle A + \angle C$ (էջ 4):
 - 3) $\angle B = 180^\circ - \angle C + \angle A$ (էջ 7):
-

Էջ 3

Ձեր պատասխանը՝ « $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$ կամ $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$ », ճիշտ է: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ հավասարումից եռանկյան ցանկացած անկյունը միարժեքորեն որոշվում է մյուս երկու՝ տրված անկյունների միջոցով.

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C),$$

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C),$$

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B):$$

Էջ 4

Ձեր պատասխանը՝ « $\angle B = 180^\circ - \angle A + \angle C$ », ճիշտ չէ:

Դուք մոռացել եք, թե ինչպես կարելի է թվից հանել գումարը: Էջ 3-ից ընտրեք ճիշտ պատասխանը:

Դուք հավանաբար չհասկացաք հարցը: Այն կարելի է ձևակերպել նաև այսպես. եթե եռանկյան երկու անկյունների մեծությունները հայտնի են, ապա երրորդ անկյան մեծությունը հնարավոր չէ ընտրել կամայականորեն:

Կրկին անդրադարձե՛ք էջ 1-ին և ընտրե՛ք ճիշտ պատասխանը:

Էջ 6

Ձեր պատասխանը ճիշտ չէ: Կենտրոնացե՛ք եռանկյան անկյունների մեծությունների միջև գոյություն ունեցող $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ առնչության վրա, և Դուք անմիջապես կըմբռնեք՝ որն է Ձեր սխալը:

Վերադարձե՛ք էջ 1 և ընտրե՛ք առաջին պատասխանը:

Էջ 7

Դուք պատասխանը ընտրել եք պատահականորեն: Այլևս այդպես չվարվեք, որովհետև այդպես Դուք կկաշկանդեք ձեզ ուսումնասիրել նյութը: Վերադարձե՛ք էջ 2, ուշադի՛ր վերլուծեք այնտեղ բերված բոլոր ճիշտ պատասխանները՝ ընտրելով դրանցից ճիշտը:

4.9 Փոխներգործուն (ինտերակտիվ) ուսուցման մեթոդներ

Նախորդ ավանդական մեթոդներն ունեն մեկ ընդհանուր թերություն, որ դրանց ոչ բոլոր դեպքերում է հաջողվում ակտիվացնել ողջ դասարանին: Սա նաև դաս-դասարանային համակարգի թերությունն է: Իրար հետևողականորեն նստարաններով դասարանը նրա համար է, որ աշակերտները, իրար հետևում թաքնվելով, նաև խուսափեն ակտիվ մասնակցելուց: Հաջորդ թերությունն այն է, որ ավանդական ուսուցման ընթացքում սովորողները միմյանց հետ չեն համագործակցում, չեն աջակցում, այլ միայն ու միայն գտնվում են մրցակցության պայմաններում: Հիշենք, որ պետական կարևոր խորհրդակցությունները միշտ կլոր սեղանի շուրջ են ընթա-

նում (Քամելոտ՝ Անգլիա, Սենատ՝ Հունաստան, Հռոմ, ազգային ժողովի նիստերի դահլիճ՝ ողջ աշխարհում): Այդպիսի ստեղծվեց, այսպես կոչված, փոխներգործող (ինտերակտիվ) մեթոդների ընտանիքը: Անգլերենում inter բառը նշանակում է *փոխադարձ*, իսկ act-ը՝ *գործողություն* է, ինտերակտիվ նշանակում է *փոխանցել* կամ *զրույցի*, երկխոսության մեջ գտնվել ինչ-որ մեկի կամ համակարգչի հետ, այսպիսով՝ ինտերակտիվ ուսուցումը առաջին հերթին ուսուցում է երկխոսության միջոցով: Այն ուսուցման նոր տեխնոլոգիա է՝ հիմնված խմբի անդամների փոխազդեցության և ուսումնառության խնդիրների լուծման ու սովորողի ազատության վրա:

Ինտերակտիվ ուսուցման հիմնական բնութագրիչները

Այդ բնութագրիչներից առաջինը **ուսուցման համապատասխան միջավայրն է**, որտեղ երեխան զգում է իր մասնակցության և անձի կարևորությունը, ինչն էլ և ուսուցման գործընթացը դարձնում է խիստ արդյունավետ: **Ինտերակտիվ ուսուցման էությունն այն է, որ բոլոր սովորողները ընդգրկվում են ուսումնառության մեջ:** Ընդ որում՝ յուրաքանչյուրն իր անհատական ներդրումն է ունենում իր հնարավորությունների չափով: Տեղի է ունենում գիտելիքների ու մտքերի փոխանակում իրար մեջ, ի դեպ՝ դա ընթանում է բացարձակապես բարյացակամության և փոխօգնության մեջ, որը նպաստում է ոչ միայն նոր գիտելիքներ ստանալուն, այլև զարգացնում է իմացական գործընթացը՝ այն բերելով ավելի բարձր մակարդակի՝ համագործակցային ձևի:

Երկրորդ՝ **ինտերակտիվ մեթոդով աշխատող դասարանը նույնպես նստում է կլոր սեղանի սկզբունքով**: Ինտերակտիվ ուսուցումը բացառում է որևէ մեկի առաջնությունը, գերակայությունը մյուսների, ինչպես նաև տեսակետների նկատմամբ: Այսպիսի ուսուցման դեպքում աշակերտները սովորում են քննադատաբար մտածել, քննարկել և մասնակցել բանավեճերի ու կշռադատված որոշումներ ընդունել, կազմակերպվում են անհատական, խմբային, զույգերով աշխատանքներ, կիրառվում են հետազոտական ծրագրեր, դերային խաղեր, աշխատանք փաստաթղթերի և սկզբնաղբյուրների հետ:

Ինտերակտիվ ուսուցման սկզբունքները

1. Փոխներգործություն, փոխուսուցում:
2. Սովորողի ակտիվություն:
3. Համագործակցություն:
4. Ինքնաարտահայտման խրախուսում:
5. Հետադարձ կապի ապահովում և այլն:

Ինտերակտիվ մեթոդով աշխատող ուսուցիչը «**մտքերի տարափ**» մեթոդով մշակում է դասարանի հետ աշխատանքային կանոններ, որոնց պետք է ենթակվեն բոլորը:

Օրինակ՝

1. Մի խելքը լավ է, երկուսը՝ ավելի:
2. Ուշացողը կամ բացական չի կարող կողմնորոշվել հաջորդ ժամին (դասին, օրը):
3. Ընդունվում են բոլոր մտքերը:
4. Միտք արտահայտողը (խոսողն) արդեն իսկ արժանի է խրախուսման:
5. Ասողին լսող է պետք:
6. Բոլոր մտքերը գրանցվում են:
7. Սովորողի արտահայտած միտքը չի խմբագրվում:
8. Արտահայտված ոչ ճիշտ մտքերը անմիջապես չեն ճշգրտվում և այլն:

Ինտերակտիվ ուսուցման հնարներից մեկը «**մտքերի տարափն**» (**մտագրոհն**) է: Մտագրոհը (brainstorming) խմբային (թիմային) աշխատանքի պարզագույն, բայց շատ արդյունավետ մեթոդներից մեկն է, որա գլխավոր գործառույթը մտքերի գենե-րացիան է: Այս մեթոդը խմբի անդամների առջև կոնկրետ խնդիր է դնում, որ նրան-ցից յուրաքանչյուրն արտահայտի իր սեփական տեսակետները՝ առանց որևէ մեկ-նաբանման կամ գնահատման փորձի: Բոլոր մտքերն ու գաղափարները գրանց-վում են մաքուր թղթի կամ գրատախտակի վրա:

Նաև բոլոր մտքերն ու գաղափարներն ընդունելի են (այս փուլում), «սխալ» չկա: Մտքերի տարափը մեծապես նպաստում է դասի արդյունավետության բարձ-րացմանը, ինչպես նաև.

1. մեթոդը նպաստում է նոր գաղափարների ի հայտ գալուն,
2. խումբը համատեղ աշխատանքում կարող է ավելի բարձր որակի մտքեր ծնել, քան նույն պայմաններում անհատապես աշխատելիս:

Այս փուլը կոչվում էր **մտքերի գեներացիա**:

Հաջորդ փուլը կոչվում է **մտքերի վերլուծության և գնահատման փուլ**: Այս փուլում ուսուցումը անդրադառնում է նախորդ փուլում գրանցված մտքերից յուրաքանչյուրին, վերլուծության է ենթարկում դասարանի հետ միասին, պարզում է նրա ճշգրիտ կամ ոչ ճիշտ, թերի լինելը և իրեն (ինտերակտիվ ուսուցմանը) հատուկ տակտով «ուղղում» է թույլ տված սխալը մոտավորապես հետևյալ կերպ. «Արամիկ ես քո փոխարեն այդ միտքը կձևակերպեի այսպես...»:

Ապա ուղղելով բոլոր սխալները՝ ուսուցիչը երրորդ փուլում կատարում է այդ **մտքերի կիրառում կոնկրետ իրավիճակներում**, եթե դրանց կարիքը կա:

Մտքերի տարափով աշխատելու 5 կանոններն են՝

1. ցանկացած քննադատության բացակայություն,
2. գաղափարների խրախուսում,

-
3. մասնակիցների հավասարություն,
 4. սառցիացիաների (զուգորդումների) ազատություն,
 5. բոլոր մտքերի գրառում (գրանցում):

Մաթեմատիկայի դասերին մտադրոհ մեթոդի կիրառման լավագույն հնարավորություններից մեկը որևէ թեմատիկ միավորի ամփոփիչ՝ կրկնության դասի կազմակերպումն է: Օրինակ՝ այս մեթոդով նպատակահարմար է կազմակերպել երկրաչափության հիմնական դպրոցի դասընթացի «Զուգահեռագիծ» թեմայի ամփոփիչ կրկնությունը:

Ինտերակտիվ մեթոդով աշխատող ուսուցիչը դասարանում ունենում է 2-3 սրամիտ աշակերտներ, որոնք ստանձնում են **«սատանայի փաստաբանի»** դերը՝ ստեպ-ստեպ արտահայտելով ոչ ճիշտ, բայց հետաքրքիր (ճշմարտանման) մտքեր, որոնց ճշգրտումը ինքնին ճանաչողական կարևոր գործընթաց է:

Ինտերակտիվ մեթոդի տեսակ են նաև երկայուն (**T-աձև**) կամ եռայուն (**m-աձև**) աղյուսակները, **հասկացությունների քարտեզը** (քարտեզագրում), **վենի դիագրամը**, **պրիզմայի մեթոդը**, **քառաբաժանումը**, **խորանարդումը** և այլն:

4.10. ՀԱՄԱԳՈՐԾԱԿՑԱՅԻՆ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿԸ

4.10.1. Համագործակցային ուսուցում

Ինտերակտիվ մեթոդի մի առանձին տարատեսակ է, որն իր որոշակի առանձնահատկությունների շնորհիվ ի սկզբանե առանձնացել և ստացել է **համագործակցային ուսուցում անվանումը**:

«Իմ խորին համոզմամբ՝ ապագան համագործակցային գաղափարախոսությանն ու համագործակցային ապրելակերպինն է», - նշում է ուսուցման կոլեկտիվ եղանակի հայտնի գաղափարախոս Մ. Մկրտչյանը [57ա ; 3]:

Համագործակցային ուսուցումը մեթոդ չէ. այն ուսուցման եղանակ է, ինչպես դաս-դասարանայի համակարգը, կոլեկտիվ ուսուցման համակարգը և այլն: Սա ուսուցման այն եղանակն է, որը ի սկզբանե կոչված է վերացնելու բոլորին միաժամանակ սովորեցնելու առումով ավանդական ուսուցման հիմնական թերությունը: Կարճ ասած՝ շատ դժվար է և մեծ մասամբ անհնարին, որ ուսուցիչը կարողանա 30-35 հոգանոց դասարանին միաժամանակ ընդգրկել ակտիվ ուսուցման գործընթացում:

Սահմանում

Համագործակցային ուսուցումը համատեղ սովորելու եղանակ է, երբ խմբի յուրաքանչյուր անդամ կամ ամբողջ դասարանը ներգրավված են ակտիվորեն, և գիտելիքը մշակվում ու հարմարեցվում է վերափոխման միջոցով: Եթե համառոտ

սահմանենք, համագործակցային ուսուցումը սովորելն է՝ խոսելու միջոցով, երբ մեկը մյուսին օգնում է ըմբռնելու նյութը:

Համագործակցային ուսուցման մեջ էական են ոչ միայն ակադեմիական գիտելիքներ և հմտություններ ունենալը, այլև կարևորվում է խմբային զարգացման (մշակման) միջոցով հմուտ համագործակցողներ (**համագործակցային հմտություններ**) և գիտելիքների ակտիվ կիրառողներ (**մտածողության հմտություններ**) դառնալը: Համագործակցային ուսուցումը մեծացնում է նաև սովորողների ինքնուրույնությունը և պատասխանատվությունը (**ինքնաձանաչման և ինքնուղղորդման հմտություններ**):

Համագործակցային ուսուցման նպատակն է՝ **յուրաքանչյուր անհատի դարձնել ուժեղ անձնավորություն ժանամանակակից հասարակության մեջ, ինչպես նաև՝ խմբի ակտիվ և համագործակցելուն պատրաստ անդամ:**

Համաձայն հետազոտությունների՝ համագործակցային ուսուցումը ուժեղացնում է՝

- ✓ համագործակցային հմտությունները (թիմային աշխատանք, սոցիալական հմտություններ),

- ✓ տեղեկատվության մշակման հմտությունները (մտածողության հմտություններ),

- ✓ բազմազանության (բազմակարծության) ըմբռնումն ու ընդունումը,

- ✓ անհատականությունը՝ ինքնավստահությունը և ակտիվ քաղաքացիությունը,

- ✓ ստեղծագործական կարողությունները և գործնականությունը:

Վերը նշված հմտությունները և ակադեմիական բովանդակությունը (առարկան և թեմաները) սովորելու միջոցներ են:

Հետազոտություն. *Համագործակցային ուսուցումը առավել արդյունավետ է միայն այն դեպքում, եթե այն իրապես համագործակցային է և ոչ թե պարզապես ավանդական խմբային աշխատանք կամ միայն ինտերակտիվ (փոխներգործուն) վարժություն:*

Համագործակցային ուսուցման մեթոդներից են՝

1. խճանկարը,
2. դասախոսությունը,
3. բանավեճը,
4. դերային խաղը,
5. զբոսանքը պատկերասրահում,
6. խմբային հետազոտությունը,
7. աշակերտների թիմային առաջադիմությունը:

Այս մեթոդներից յուրաքանչյուրի հիմքում ընկած է խմբային ուսուցումը՝ աշխատանք խմբերով: Խումբը կարող է ունենալ 2,3,4 կամ 5 անդամ:

Այն դեպքում, երբ խմբի անդամների թիվը նվազագույնը՝ 2-ն է, ստանում ենք ուսուցման կազմակերպման գույքային ձևը՝ **հաստատուն կազմով համագործակցային** հաղորդակցություն կամ ուսուցման կազմակերպման **կոլեկտիվ ձև՝ հաղորդակցություն ուսուցիչ-աշակերտ կամ աշակերտ-աշակերտ փոփոխական կազմով գույքերում**: Ընդ որում՝ յուրաքանչյուր սովորող հերթով հաղորդակցվում է մյուսների հետ, և արդյունքը լինում է այն, որ բոլորը հաղորդակցվում են բոլորի հետ (ուսուցման կոլեկտիվ եղանակի մասին առավել մանրամասն տե՛ս [57ա] աշխատանքում):

Ժամանակ պահողը.

- հետևում է, որ աշխատանքը ավարտվի տրված ժամկետներում,
- քաջալերում է բոլորին սկսել և անել առավելագույնը,
- հանդես է բերում նախաձեռնություն, եթե ուրիշ ոչ ոք այն չի ցուցաբերում,
- հետևում է, որ խումբը աշխատի առաջադրանքի վրա:

1. Օգնականը.

- ապահովում է, որ բոլորը իրազեկ լինեն, թե ինչ է ակնկալվում իրենցից,
- օգնում է նրանց, ովքեր օգնության կարիք ունեն,
- տարբեր առաջակություններ է անում:

2. Ստուգողը / գնահատողը.

• ապահովում է, որ բոլորը հասկանան և ի վիճակի լինեն փոխանցելու ստեղծված տեղեկությունները,

- ապահովում է, որ բոլորը կատարեն իրենց առաջադրանքները,
- տալիս է քննադատող, բայց կարևոր հարցեր:

3. Խրախուսողը.

• Խխրախուսում է բոլորին անել առավելագույնը,
• միավորներ է տալիս լավ գաղափարների կամ լավ աշխատանքների համար,

- ամաչկոտ կամ լռակյաց անձանց հրավիրում է մասնակցել:

4. Կազմակերպիչը.

• տրամադրում և ապահովում է անհրաժեշտ բոլոր նյութերը և գործիքները,
• ստեղծում է թիմային աշխատանքի համար հարմար և արդյունավետ միջավայր,

- ապահովում է, որ բոլորը կատարեն աշխատանքի իրենց բաժինը:

Դասարանը բաժանում ենք խմբերի: Ուսուցիչները երկուսն են լինելու: Խմբերը կարող են լինել՝ 1) հիմնական և 2) փորձագիտական:

Համագործակցային ուսուցման ժամանակ **խոսելը հանգեցնում է մտածելու, իսկ մտածելը՝ սովորելու**:

Ուսուցիչը պետք է դասը կազմակերպի և կառուցի՝ օգտագործելով համագործակցային ուսուցման հետևյալ տարրերը.

1. Դրական փոխկապվածության ստեղծում:

• Խմբի բոլոր անդամներն ունեն փոխկապվածության զգացում՝ ընդհանուր առաջադրանքը կատարելու նպատակով:

• Խմբի հաջողության համար անհրաժեշտ է խմբի յուրաքանչյուր անդամի աշխատանքը:

• Խմբի յուրաքանչյուր անդամ ունի իր կարողություններին, դերին, պատասխանատվությանը և ռեսուրսներին համապատասխան ներդրում առաջադրանքի կատարման համատեղ ջանքերում:

• Խմբի անդամները անհատապես չեն կարող հաջողության հասնել, քանի դեռ խումբը չի հասել հաջողության:

• Խումբն ունի ընդհանուր (միասնական) նպատակներ բոլոր անդամների համար:

• Ընդունվել են ընդհանուր համաձայնություններ (կանոններ):

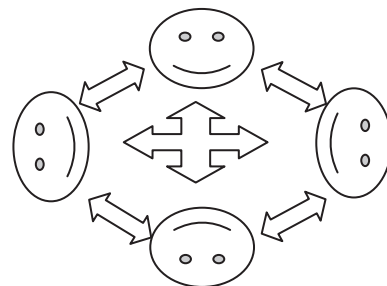
• Պարզևստրույմ. խմբում տոնվում է դրական փոխկապվածությունը:

• Դրական ռեսուրսային փոխկախվածություն. յուրաքանչյուր անդամ ունի նյութի կամ տեղեկատվության մի մասը:

• Դերային փոխկախվածություն. տարբեր դերերը ապահովում են արդյունավետ և բարձրորակ ուսումնասիրություն:

• Չկան «ազատ շրջողներ»:

• Մեկը՝ բոլորի, բոլորը՝ մեկի համար:



2. Դեմ առ դեմ փոխազդեցություն:

• Խմբերի կազմում «դեմ առ դեմ» սկզբունքով (ոչ թե մի շարքով): Մա նշանակում է, որ աշակերտները (մասնակիցները) նստած են իրար շատ մոտ: Հաճախ սա անվանվում է «համագործակցային դիրք»:

• Խմբին մեկ նյութի տրամադրում (համագործակցելու հնարավորության ստեղծում):

• Պատասխանատվության հավասար կիսում:

• Քաջակերում:

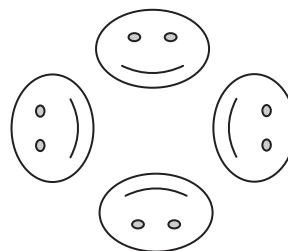
• Օգնություն (աջակցում):

• Մեկը մյուսին ուսուցում:

• Մյուսներին բացատրում:

• Միասին խորհրդածում:

• Թիմերի կազմում:

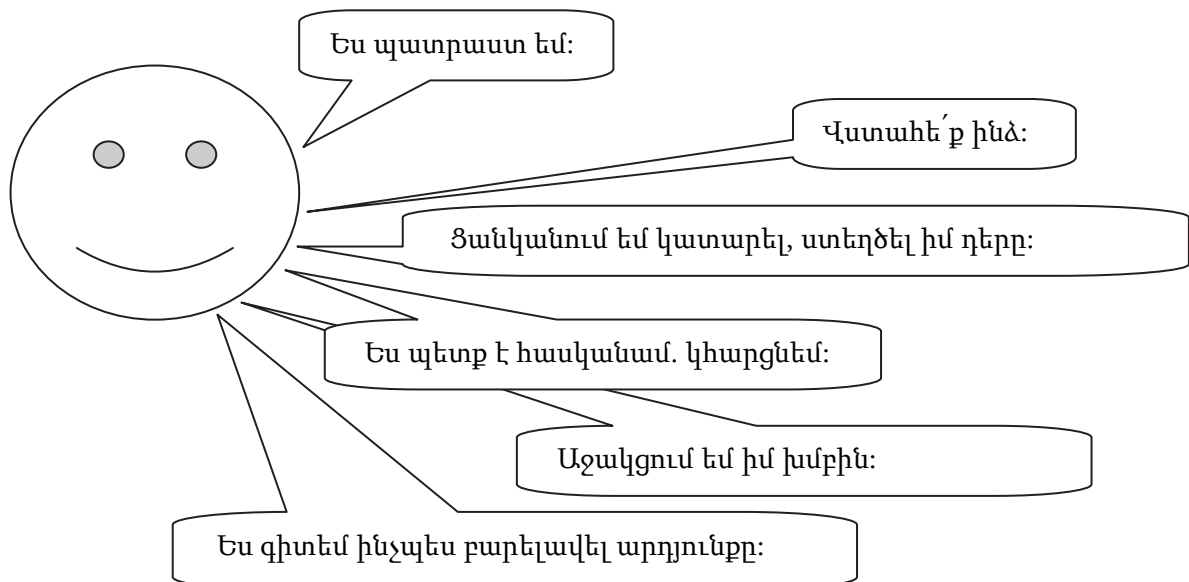


3. Անհատական հաշվետվություն և պատասխանատվություն:

• Խմբի յուրաքանչյուր անդամ ի վիճակի է պատասխանել կամ արդյունքների վերաբերյալ մտքեր փոխանակել: Խմբի յուրաքանչյուր անդամ պատասխանատու է ուսուցման արդյունքները ներկայացնելու առումով:

• Ամեն մեկը խմբի մաս է. Յուրաքանչյուրը պետք է ունենա իր առանձնահատուկ մասը:

- Յուրաքանչյուրը կարիք ունի կարծիքներ փոխանակելու մյուսների հետ:
- Արդյունքները խմբին են:
- Յուրաքանչյուրը կարող է լինել խմբի ներկայացուցիչը:
- Գնահատվելու է յուրաքանչյուրի առաջընթացը:
- Պատրաստ եղիր:



4. Միջանձնային կամ փոքր խմբերով աշխատանքի սոցիալական և համագործակցային հմտություններ:

Խմբի անդամներն իրար հետ են և անընդհատ երկխոսում են: Խմբի համագործակցության համար սովորողներին պետք է սովորեցնել հմտություններ, որոնք, բացի ուսուցանվելուց, պետք է անընդհատ կրկնվեն: Դրանք են՝

- թիմային աշխատանքի հմտություններ,
- լսելու, ինքնուրույն արտահայտվելու և խմբի հետ մնալու հմտություններ,
- բանակցություններ, ընդհանուր նպատակի ձևավորում,
- առաջնորդում,
- որոշումների կայացում,
- վստահության կառուցում,
- վեճերի լուծում,

- խնդիրների լուծում (ստեղծագործականություն, բազմաթիվ լուծումներ /մեկ լուծում),

- օգնություն,

- քաջալերում:

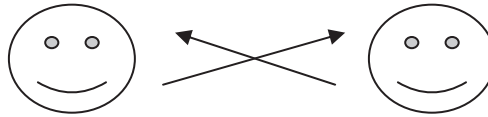
Հմտությունների չորս մակարդակներն են՝

1. **ձևավորում,**

2. **գործունեություն,**

3. **ձևակերպում:**

4. **խմորում:**



Խմբային գործընթաց՝ մշակույթ

- Խմբի անդամները գնահատում են իրենց համագործակցային ջանքերը և նպատակների բարելավումները:

- Խմբի անդամները հանդիսանում են հետադարձ կապի աղբյուր:

- Խմբի անդամները բարելավում են պլանները և համաձայնությունները (կանոնները):

- Խմբի անդամները սովորում են՝

- տեսնել ամենակարևորները,

- կայացնել համատեղ որոշումներ աշխատանքի եղանակների և փոփոխությունների վերաբերյալ,

- ըմբռնել շարունակական գնահատումը և մշակումը,

- քննադատաբար գնահատել և արժևորել արդյունքները,

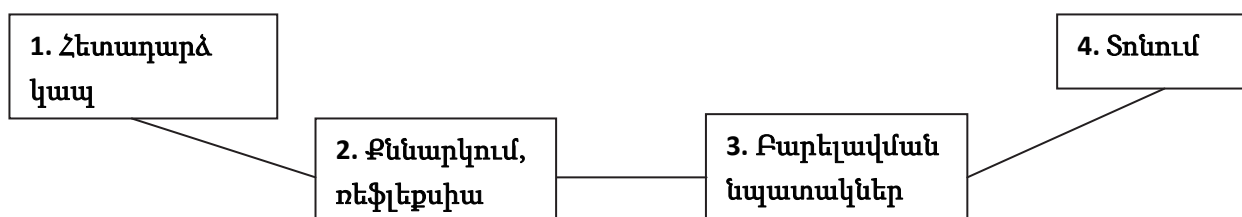
- տալ և ստանալ հետադարձ կապ:

Ձևերն են՝

- Ինքնագնահատում՝ գույգերով, հետադարձ կապ խմբի անդամներին: Խմբային գնահատում՝ ինչպիսի՞ն ենք մենք՝ որպես խումբ, ի՞նչը պետք է բարելավենք: Ուսուցիչը տալիս է հետադարձ կապ խմբերին և հակառակը:

- Ինչպե՞ս բարելավենք խմբի աշխատանքի արդյունավետությունը և սովորելը:

Խմբային գործընթաց (մշակույթ)



5. Փոխներգործուն (ինտերակտիվ) առաջադրանք

Էական է, թե ինչպես է առաջադրանքը մշակված:

Առաջադրանքի մշակումը և ուսուցչի հրահանգավորումը պետք է ներառեն համագործակցային ուսուցման վերոնշյալ 5 սկզբունքները:

Առաջադրանքը պետք է.

- ստեղծի դրական փոխկապվածություն աշակերտների (գույգերի կամ խմբերի) միջև,
- զինի դասարանի յուրաքանչյուր անդամին անհատական հաշվետվությամբ և պատասխանատվությամբ,
- լինի կազմակերպված «դեմ առ դեմ» փոխազդեցության օգտագործմամբ (նստարանների դասավորություն դերերի օգտագործում),
- ներառի սոցիալական հմտությունների կիրառումը,
- ավարտվի խմբային մշակմամբ:

Կատարյալ առաջադրանքն ուղղված է՝

- ակադեմիական գիտելիքների ուսուցմանը,
- տեղեկատվության մշակման հմտությունների ձևավորմանն ու զարգացմանը,
- սոցիալական հմտությունների բարելավմանը,
- ինքնագնահատման մշակույթի ստեղծմանը:

4.10.2. Համագործակցային խմբին տրվող խնդրի նմուշներ

1. Դիոֆանտուսի կյանքը

Պատմությունը մեզ շատ քիչ տեղեկություններ է տալիս Հին աշխարհի հրաշալի մաթեմատիկոս Դիոֆանտուսի մասին: Այն ամենը, ինչ հայտնի է Դիոֆանտուսի մասին, արձանագրված է նրա գերեզմանաքարին: Ահա այդ գրառումը.

«Ճանապարհո՛րդ, այստեղ ամփոփված է Դիոֆանտուսի մարմինը: Եվ եթե թվերը թույլ են տալիս տեսնել, թե որքան երկար է ապրել նա:

Նրա երջանիկ մանկությունը տևել է կյանքի վեցերորդ մասը:

Անցավ կյանքի ևս տասներկուերորդ մասը, և նրա ծնոտը պատվեց թավշյա մորուքով: Կյանքի յոթերորդ մասը Դիոֆանտուսն անցկացրեց անպտուղ ամուսնության մեջ:

Անցավ հինգ տարի, և նա երջանկացավ առաջնեկ տղայի ծնունդով:

Որդուն ճակատագրով վիճակված էր ապրել հոր կյանքի միայն կեսը:

Որդուն կորցնելուց հետո ծերունին ապրեց ընդամենը չորս տարի խորը սգի մեջ»:

Ասա տեսնեմ՝ քանի տարեկանում իր մահկանացուն կնքեց Դիոֆանտոսը:

Պարզաբանումներ

Ուսուցիչը «Դիոֆանտոսի կյանքը»՝ վերը շարադրված բաշխման նյութը, նախապես բազմացնում է, նշված գծերով կտրտում է յուրաքանչյուր օրինակը շերտերի, ապա դասարանի աշակերտներին բաժանելով 5 հոգանոց խմբերի՝ խմբերից յուրաքանչյուրի սեղանին (հակառակ երեսով) դնում է մեկական հնգաշերտ փաթեթ: Խմբի անդամները վերցնում են մեկական շերտ, որից հետո, քանի որ խմբի անդամներից յուրաքանչյուրը տիրապետում է Դիոֆանտոսի կյանքի մասին որոշակի տեղեկության, որին մյուսներից և ոչ մեկը չի տիրապետում, խմբի անդամները սկսում են միացնել շերտիկները, որպեսզի ստանան ամբողջական տեղեկություններ Դիոֆանտոսի մասին: Ապա նրանցից մեկը՝ կազմակերպիչը, կարդում է ամբողջական խնդիրը: Ճշտում են խնդրի պահանջը:

Այնուհետև ուսուցիչը խմբերին տալիս է մեկական թուղթ ու գրիչ: Խմբի որևէ անդամ բարձրաձայն կարդում է իր շերտի բովանդակության յուրաքանչյուր նախադասությունը, գրում դրա մաթեմատիկական արտահայտությունը և թուղթը փոխանցում իրենից աջ նստած անդամին: Վերջինս իր հերթին կատարում է նույն բանը և թուղթը փոխանցում իրենից աջ նստածին: Այսպես շարունակ, մինչև բոլոր նախադասությունները հերթով մոդելավորվեն և գրվեն թղթի վրա: Այդպես խմբովի կազմվում է խնդրի լուծման հետևյալ հավասարումը.

$$x = x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4 :$$

Ապա խմբերն անցնում են ստացված հավասարման լուծմանը, որից հետո խմբերը քննարկում են իրենց լուծումները և ողջ դասարանին ներկայացնում իրենց կատարած աշխատանքները և պատասխանը՝ $x = 84$:

Վերջում կատարվում է գնահատում (հետադարձ կապ) կամ ինքնագնահատում:

2.Քանի՞ քառակուսի կա

Սա համագործակցային ուսուցումը սկսելու դասական վարժություն է: Այն կիրառելի է և՛ մեծահասակների, և՛ դպրոցահասակների հետ աշխատելիս:

Նպատակն է.

- սովորողին հնարավորություն տալ համագործակցելու և ցույց տալ համագործակցության հզորությունը:

Նյութերը՝

- յուրաքանչյուր աշակերտի համար՝ «Քառակուսիների» մեկական քարտ:

Ընթացքը՝

1. հանձնարարե՛ք աշակերտներին ինքնուրույն հաշվել քառակուսիների քանակը՝ առանց պատասխանը բարձրաձայն ասելու:

2. Աշակերտներին բաժանե՛ք 3-4 հոգանոց խմբերի:

3. Խնդրե՛ք խմբերին պլանավորել, թե ինչպես են պատրաստվում աշխատել:

4. Հրահանգե՛ք աշխատել և համատեղ գտնել լուծումը, ստեղծել քառակուսիների քանակը հաշվելու մաթեմատիկական ռազմավարությունը:

5. Հիշեցրե՛ք նրանց, որ խմբի յուրաքանչյուր անդամ պետք է կարողանա ներկայացնել խմբի աշխատանքի արդյունքը:

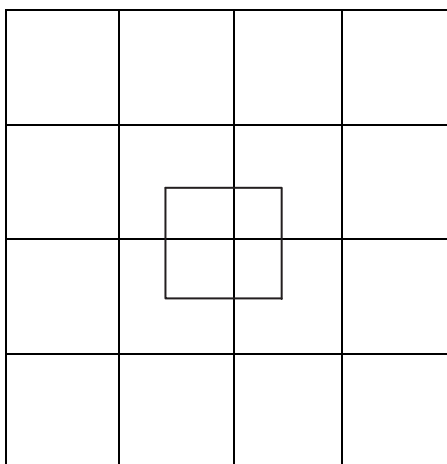
6. Պատահականորեն ընտրե՛ք որևէ մասնակցի, որը կներկայացնի, թե ինչպես իրենք գտան բոլոր քառակուսիները, և որն էր իրենց ռազմավարությունը: Նա նաև պետք է ցույց տա բոլոր քառակուսիները: Քանի որ ներկայացնողը միաժամանակ խմբի խոսնակն է, նրա հաջողությունը վկայում է այն մասին, թե ինչքանով է լավ աշխատել ողջ խումբը և օգնել խմբի բոլոր անդամներին հասկանալ լուծումը:

7. Մյուս խմբերի առաջադրանքն է քննարկել, թե ինչքանով էր իրենց ռազմավարությունը տարբեր:

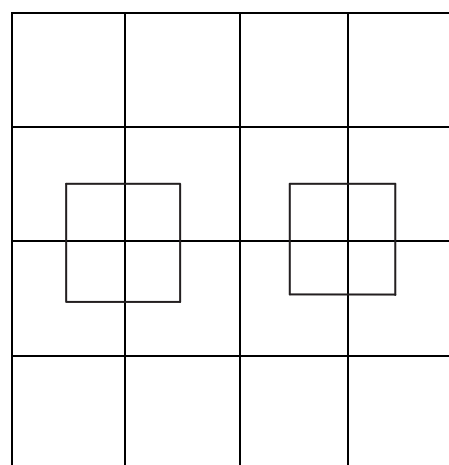
8. Ավելի ուշ կարելի է տեսնել նաև մյուս խմբերի ռազմավարությունները:

9. Խնդրե՛ք աշակերտներին նշել իրենց խմբի աշխատանքը բարելավելու մի քանի հմտություններ:

10. Քաջալերե՛ք այն աշակերտներին, որոնք այդ հմտությունները կիրառում են:



Նկար 1

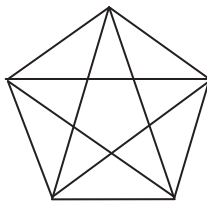


Նկար 2

Նկար 2-ում պատկերված է այս խնդրի ևս մեկ տարբերակ:

3. Քանի՞ եռանկյուն կա

- Քանի՞ եռանկյուն եք տեսնում նկարում:
- Գտե՛ք այնպիսի պատասխան, որին համաձայն է ողջ խումբը: Ձեր պատասխանը գրե՛ք թղթի վրա:
- Փորձե՛ք պարզել՝ արդյոք խմբի բոլոր անդամներն են պատրաստ մյուս խմբերին հայտնելու ձեր որոշած պատասխանը, ինչպես նաև՝ պատրա՞ստ են բացատրելու, թե ինչպես գտաք այդ պատասխանը:



Խնդիրը լուծելուց հետո քննարկեք հետևյալ երեք հարցերը.

1. ինչպե՞ս էիք զգում խնդիրը լուծելու ընթացքում,
2. Ձեր կարծիքով՝ խումբն ինչպե՞ս օգնեց գտնելու լուծումը,
3. ինչպե՞ս էիք աշխատում՝ որպես թիմ,
4. սովորական A4 չափսի թուղթը ունի 2 էջ, այն մեկ անգամ ծալելով՝ ստացվում է 4 էջ, երեք անգամ ծալելով՝ 8 էջ: Եթե այդ թղթի հաստությունը 0.3 մմ է, ապա կարո՞ղ է արդյոք 40 անգամ ծալելուց հետո ստացված գրքի հաստությունը հասնի Երկրից մինչև Լուսին:
5. Միջին դարերում Անգլիայում կալվածատերը տալիս էր գյուղացիներին 100 յարդ լար և պահանջում, որ վերջիններս դրանով ցանկապատեն իրենց համար հողամաս: Գյուղացիներից ոմանք ցանկապատում էին եռանկյունաձև հողամաս, մյուսները՝ քառանկյունաձև և այլն: Մեծ էր լինում նրանց զարմանքը, երբ աշնանը, այդ միևնույն պարագիծ (ցանկապատի երկարություն), բայց տարբեր երկրաչափական տեսք ունեցող հողամասերից հավաքում էին իրարից խիստ տարբեր քանակությամբ, հաճախ նույնիսկ 10-12 անգամ քիչ բերք: Փորձենք օգնել գյուղացուն, որ նա հնարավորություն ունենա հավաքելու հողամասից հնարավորինս շատ քանակությամբ բերք: Կախվա՞ծ է արդյոք հողամասի մակերեսը նրա երկրաչափական տեսքից: Եթե այո՛, ապա ի՞նչ տեսք եք առաջարկում հողամասի համար գյուղացուն:

4.10.3. ՀԱՄԱԳՈՐԾԱԿՑԱՅԻՆ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Ստորև ներկայացնենք համագործակցային ուսուցման աշակերտների թիմային առաջադիմություն, խճանկար, շրջագայություն պատկերասրահում և խմբային հետազոտություն մեթոդները:

4.10.3.1. Աշակերտների թիմային առաջադիմություն

Համագործակցային ուսուցման այս մեթոդը մշակվել է Ջոն Հոփկինսի համալսարանի պրոֆեսոր Ռոբերտ Սլավինի կողմից:

Նկարագրություն

Այն համարվում է առավել հեշտ կիրառվող մեթոդներից մեկը և առանձնապես օգտակար է համագործակցային ուսուցման մեթոդները կիրառող սկսնակ ուսուցիչների համար: Այն խթանում է սովորողների համագործակցությունը և մասնակցությունը: Մեթոդի կիրառության շրջանակներում կիրառվում է գնահատման այնպիսի համակարգ, որի պարագայում աշակերտը շահագրգռված է ոչ միայն իր, այլև խմբի բոլոր անդամների ուսումնառությամբ:

Ընթացքը

Դաս-դասարանային ավանդական մեթոդով նոր թեման բացատրելուց հետո դասարանը բաժանել 4-5 հոգանոց տարասեռ խմբերի՝ յուրաքանչյուր խմբում ընդգրկելով գերազանց, միջին և ցածր առաջադիմությամբ աշակերտների, ապահովելով նաև տղա-աղջիկ հավասարությունը (հնարավորության դեպքում):

Խմբերին տրվում է նոր թեմային առնչվող հանձնարարություն՝ նշելով, որ հանձնարարության կատարումը համարվում է ավարտված, երբ խմբի յուրաքանչյուր անդամ յուրացրել է նյութը: Ապա ստուգվում է նյութի յուրացման աստիճանը: Այս ընթացքում, սակայն, թիմի անդամներն արդեն չեն կարող օգնել միմյանց, յուրաքանչյուրն ինքնուրույն է կատարում առաջադրանքը: Առաջադրանքի կատարման ստուգման համար կիրառվող գնահատման համակարգն այնպիսին է, որ յուրաքանչյուր աշակերտ իր գնահատականով իր ներդրումն է անում խմբի ընդհանուր ցուցանիշում: Ստորև ներկայացնենք գնահատման մի նմուշ:

Ա խմբի ցուցանիշներն ըստ 100 միավորանոց համակարգի

Աշակերտ	Բազային նախորդ ստուգման ցուցանիշը	Նոր ցուցանիշը	Թիմի միավորները
Դևորգյան Ա.	57	64	7
Սարգսյան Լ.	63	55	0
Արամյան Ս.	40	55	10
Պետրոսյան Ռ.	83	88	5
Մարգարյան Ս.	95	100	10
Ընդամենը		32	

Աղյուսակից բխում է, որ գնահատման հիմնական ցուցանիշն աշակերտի նախորդ ցուցանիշի համեմատ ցուցաբերած փոփոխության չափն է: Եթե նախորդ ցուցանիշն ավելի բարձր է (օրինակ՝ Լ. Մարգարյանի մոտ), ապա աշակերտը 0 է ստանում, քանի որ աճ չի արձանագրվել: Եթե աշակերտը մինչև 10 բալ ավել է վաստակել, քան իր նախորդ ցուցանիշը, ապա նա թիմին բերում է համապատասխան միավոր: Օրինակ՝ աշակերտ Ա. Գևորգյանը 7 միավորով բարելավել է իր ցուցանիշը և թիմին բերել 7 միավոր: Նույն սկզբունքով 5 միավոր է վաստակել աշակերտ Ռ. Պետրոսյանը: Եթե աշակերտը 10 և ավելի միավորով է (օրինակ՝ Ս. Արամյանը) բարելավել իր ցուցանիշը, ապա նա թիմին բերում է 10 միավոր, քանի որ մեր օրինակում 10 միավորը առավելագույնն է: Աշակերտը 10 միավոր է վաստակում նաև այն դեպքում, երբ առավելագույն ցուցանիշի է հասնում: Օրինակ՝ Ս. Մարգարյանը թեև ընդամենը 5 միավոր է ավել հավաքել իր նախորդ ցուցանիշից, այնուամենայնիվ նա վաստակել է 10 միավոր, քանի որ առավելագույն՝ 100 միավոր է հավաքել: Ի դեպ, գնահատման միավորների սանդղակի ընտրությունը ուսուցչի հայեցողության տակ է:

Համագործակցային ուսուցման այս մեթոդը խթանում է աշակերտների ուսումնառությունը: Այստեղ էական է այն հանգամանքը, որ գնահատվում է սովորողների առաջընթացը: Այս մեթոդը լուրջ խթան է ցածր առաջադիմությամբ սովորողների համար, քանի որ նույնիսկ չնչին առաջընթացի պարագայում նրանք կարող են որոշակի ներդրում ունենալ թիմի արդյունքում: Իսկ միջին և բարձր առաջադիմություն ունեցող աշակերտները պետք է մի կողմից աջակցեն իրենց դասընկերներին բարելավելու իրենց ցուցանիշները, մյուս կողմից՝ կարողանան պահպանել ու բարելավել իրենց նախորդ ցուցանիշները: Այսպիսով՝ խմբի յուրաքանչյուր աշակերտ ունի սովորելու և դասընկերներին օգնելու խթան:

4.10.3.2. Խճանկար (Ջիկսոն, Jigsaw)

Խճանկարը համագործակցային ուսուցման մեթոդ է, որի կիրառության ժամանակ սովորողները խորամուխ են լինում ուսումնական նյութի որոշակի հատվածի, որոշակի ասպեկտի, որոշակի հիմնախնդիրների մեջ և դրանք ուսուցանում դասընկերներին:

Խճանկարը *աշակերտների թիմային առաջադիմության* մեթոդից տարբերվում է նրանով, որ սովորողները խորամուխ են լինում նյութի որոշակի ասպեկտի մեջ:

Խճանկարի փուլերը

Հարմարության համար *խճանկար* մեթոդի փուլերը ներկայացնենք աղյուսակի տեսքով:

Փուլը	Նկարագրությունը
Նյութի ուսումնասիրություն և տեղեկատվության հավաքում	Սովորողները բաժանվում են հենակետային խմբերի: Խմբի յուրաքանչյուր անդամ դառնում է որևէ ենթաթեմայի «փորձագետ»: Փորձագետները ուսումնասիրում են իրենց ենթաթեման, հավաքում տեղեկատվություն:
Աշխատանք փորձագիտական խմբում	Փ-կան խմբերի սովորողները համեմատում են և հարստացնում իրենց նյութերը:
Աշխատանք ուսումնական խմբում	Յուրաքանչյուր «փորձագետ» հենակետային խմբի մյուս անդամներին սովորեցնում է իր ենթաթեման:
Ավարտական աշխատանք	Սովորողները անհատական թեմատիկ աշխատանք են հանձնում ամբողջ թեմայից:
Ամփոփում	Արդյունքներն ամփոփվում են ըստ անհատական և խմբային ցուցանիշների:

Վերոնշյալ փուլերով անցնելիս ուսուցիչը պետք է կատարի հետևյալ քայլերը:

Քայլ 1. Հենակետային խմբերի ձևավորումը

Խմբեր ձևավորելիս անհրաժեշտ է առաջնորդվել *աշակերտների թիմային առաջադիմության* մեթոդի մոտեցմամբ: Այդպես կձևավորվեն ինչպես առաջադիմությամբ, այնպես էլ աղջիկ-տղա իմաստով տարասեռ խմբեր: Խմբերի ձևավորումից հետո հայտարարվում են խմբային աշխատանքի կանոնները: Օրինակ՝

- առաջադրանքի իրենց հանձնարարված հատվածն ավարտելուց հետո սովորողները պետք է մնան խմբի հետ այնքան ժամանակ, մինչև բոլորն ավարտեն,

- խմբի յուրաքանչյուր անդամ պատասխանատու է, որ բոլորը հասկանան և կարողանան կատարել առաջադրանքը,

- եթե կան հարցեր, անհասկանալի հատվածներ, ապա աշակերտը նախևառաջ դիմում է իր թիմակիցների օգնությանը, հետո, եթե դրա կարիքը կա, նաև՝ ուսուցչին:

Կանոններն ընդունելուց հետո ուսուցիչը ձևակերպում է առաջադրանքը: Հիմնական խմբերի անդամները, միմյանց աջակցելով, ընթերցում են ամբողջ նյութը, ապա քննարկում անհասկանալի հասկացությունները, հատվածները:

Քայլ 2. Փորձագիտական խմբերի ձևավորումը

Երբ աշակերտները ծանոթանում են ամբողջ նյութին, հիմնական (մայր) խմբի յուրաքանչյուր անդամի տրվում է առաջադրանքը և փորձագիտական թերթիկը: Առաջադրանքը կարող է լինել նյութի առանձին հատվածի ուսումնասիրություն, խնդրի որոշակի ասպեկտի վրա կենտրոնացում:

Առաջադրանքը ստանալուց հետո սովորողները հավաքում են նյութեր իրենց ենթաթեմայի վերաբերյալ: Ապա փորձագիտական խմբի անդամների հետ կիսում են իրենց նյութերը, կատարում ճշգրտումներ: Փորձագիտական խմբի անդամները նաև որոշում են, թե ինչ մեթոդներ, մատուցման եղանակներ, աղյուսակներ, դիագրամներ են օգտագործելու իրենց մայր խմբերի անդամներին սովորեցնելու ընթացքում:

Փորձագիտական խմբերում նույնպես պետք է ընդգրկել առաջադիմությամբ տարասեռ աշակերտների: Ստորև բերվող աղյուսակներից պարզորոշ երևում է, թե ինչպես պետք է ձևավորվեն հենակետային՝ մայր և փորձագիտական խմբերը:

Հենակետային կամ մայր ուսումնական խմբեր

1-ին խումբ	2-րդ խումբ	3-րդ խումբ	4-րդ խումբ
Արմեն (բ. ա.)	Արուսյակ (բ. ա.)	Դավիթ (բ. ա.)	Սոնա (բ. ա.)
Լուսինե (մ. ա.)	Գևորգ (մ. ա.)	Գոհար (մ. ա.)	Սահակ (մ. ա.)
Գոռ (մ. ա.)	Աննա (մ. ա.)	Գագիկ (մ. ա.)	Անի (մ. ա.)
Անահիտ (գ. ա.)	Մկրտիչ (գ. ա.)	Հայկանուշ (գ. ա.)	Բագրատ (գ. ա.)

(բ.ա. – բարձր առաջադիմություն, մ. ա. – միջին առաջադիմություն, գ. ա. – ցածր առաջադիմություն)

Փորձագիտական խմբեր

1-ին խումբ	2-րդ խումբ	3-րդ խումբ	4-րդ խումբ
Արմեն	Արուսյակ	Դավիթ	Սոնա
Աննա	Լուսինե	Գևորգ	Գոռ
Սահակ	Աննա	Անի	Գոհար
Հայկանուշ	Բագրատ	Անահիտ	Մկրտիչ

Կարևոր է նաև փորձագիտական թերթիկների մշակումը: Դրանք աշակերտներին կօգնեն կենտրոնանալ հիմնական հարցերի վրա: Օրինակ՝ ենթադրենք երկրաչափության դասընթացի շրջանակներում ուսումնասիրում ենք հինգ տեսակի բազմանիստ՝ քառանիստ, վեցանիստ, ութանիստ, տասներկուանիստ և քսանանիստ: Յուրաքանչյուր փորձագիտական խմբի հանձնարարվում է ուսում-

նասիրել մեկ տեսակի բազմանիստ: Բոլոր խմբերին տրվում է փորձագիտական հետևյալ թերթիկը.

Փորձագիտական թերթիկի նմուշ՝

1. նիստերի քանակը՝ Γ,

2. գազաթների քանակը՝ Β,

3. կողերի քանակը՝ Ρ,

4. փորձեք գտնել որևէ մաթեմատիկական օրինաչափություն բազմանիստի նիստերի, գազաթների և կողերի քանակն արտահայտող թվերի միջև:

Հիմք ընդունելով այս թերթիկը՝ փորձագիտական բոլոր խմբերը բազմանիստերն ուսումնասիրում են ըստ փորձագիտական վերոհիշյալ թերթիկի չափանիշների:

Քայլ 3. Փորձագետները սովորեցնում են հենակետային խմբի անդամներին

Փորձագիտական խմբերում աշխատանքն ավարտելուց հետո աշակերտները վերադառնում են հենակետային խմբեր: Յուրաքանչյուր փորձագետ սովորեցնում է իր ենթաթեման, պարզում, թե որքանով են իր դասընկերները յուրացրել այն:

Քայլ 4. Գնահատում

Խճանկարի ժամանակ գնահատումը պետք է իրականացնել երեք մակարդակներով: Առաջին՝ պարզել, թե որքանով են խմբերը արդյունավետ գործում, որքանով են բարելավվել սովորողների համագործակցային աշխատանք կատարելու հմտությունները: Երկրորդ՝ որքանով են աշակերտները առաջադիմել առանձին խնդիրներ ուսումնասիրելու և դրանք իրենց դասընկերներին սովորեցնելու առումներով: Երրորդ՝ որքանով է յուրաքանչյուր աշակերտ յուրացրել ուսումնական նյութը, առաջադիմել:

Խմբային գործընթացի գնահատում

Խմբային գործընթացը գնահատելիս անհրաժեշտ է պարզել, թե որքանով են սովորողները արդյունավետ գործել որպես խմբի անդամներ: Սա ներառում է խոսելու, լսելու, մտքերը կիսելու, խմբին օգնելու, աջակցելու հմտությունները: Օրինակ՝ այդ նպատակով կարելի է տալ հետևյալ հարցերը.

- արդյոք խմբի բոլոր անդամներն էին մասնակցում աշխատանքին,
- խմբում կային գերիշխող աշակերտներ (կեղծ լիդերներ),
- խմբային հաղորդակցումը աջակցող էր:

Փորձագիտական աշխատանքի գնահատում

Այս դեպքում գնահատվում են աշակերտների փորձագիտական աշխատանք կատարելու հմտությունները: Օրինակ՝ ուսումնական նյութերի, սկզբնաղբյուր-

ների, մոդելների հետ աշխատելու, չափումներ, նշումներ կատարելու, աղյուսակներ, դիագրամներ, գրաֆիկներ կազմելու միջոցով ձեռքի տակ եղած նյութը մշակելու և դասընկերներին սովորեցնելու հմտությունները:

Նյութի բովանդակության յուրացման գնահատում

Գնահատման այս ձևը կիրառելիս անհրաժեշտ է օգտագործել *աշակերտների թիմային առաջադիմության* մեթոդում ներկայացված գնահատման նմուշը: Գնահատվում են և՛ առանձին աշակերտները, և՛ խմբերը: Վերջում անհրաժեշտ է ամփոփել արդյունքները, խրախուսել առաջադիմած աշակերտներին ու խմբերին:

Խճանկար մեթոդի կիրառության ժամանակացույց

ՄԵԹՈԴԸ	Դաս 1	Դաս 2	Դաս 3	Դաս 4	Դաս 5
Խճանկար	Նոր թեմայի ներկայացում, հիմնական խմբերի ձևավորում, ենթաթեմաների բաժանում, լրացուցիչ նյութերի ձեռքբերում	Նյութերի մշակում	Աշխատանք փորձագիտական խմբերում	Աշխատանք հենակետային խմբերում	Ավարտական աշխատանք, ամփոփում

4.10.3.3. Շրջագայություն պատկերասրահում

Մեթոդի ընդհանուր նկարագրությունը

Սա *խճանկար* մեթոդի տարատեսակ է, որի նպատակն է փոխանակել տեղեկություններ, մշակել գաղափարներ և կատարել անդրադարձ, ինչպես նաև զարգացնել լսելու, ինքնուրույն աշխատելու, քննադատաբար և ստեղծագործաբար մտածելու, ցածրաձայն (գրադարանային ձայնով) խոսելու, կատարած աշխատանքի արդյունքը ներկայացնելու հմտություններ:

Ընթացքը

1. Ուսուցիչն ուսումնական նյութը բաժանում է 4-6 մասերի և յուրաքանչյուր խմբին տալիս դրանցից մեկը՝ ինքնուրույն ուսումնասիրելու: Խմբերի թիվը կարող է մեծ լինել նյութի մասերի թվից: Այդ դեպքում նյութի նույն մասը կուսումնասիրի երկու խումբ:

2. Չորս հոգուց բաղկացած խմբերն աշխատում են ուսումնական նյութի իրենց տրված մասի վրա (ցանկալի է, որ առաջադրանքի կատարման տարբեր մո-

տեցումներ առաջարկվեն) և ստացված արդյունքները մշակում նկարի, կոլաժի, աղյուսակի, դիագրամի կամ գրաֆիկի տեսքով:

3. Պատրաստի աշխատանքները փակցվում են դասասենյակի կամ միջանցքի պատերին՝ ստեղծելով «պատկերասրահ»:

4. Խմբերի ներսում աշակերտները հաշվում են մինչև 4-ը և կազմում չորս նոր խումբ՝ ըստ իրենց խմբի ներսում ունեցած համարների (դասարանի բոլոր «1» համարի աշակերտները՝ մեկ խումբ, «2»-ները՝ ուրիշ խումբ և այլն):

5. Այս նոր խմբերը շրջում են պատկերասրահում՝ կանգ առնելով յուրաքանչյուր ցուցանմուշի մոտ, և տվյալ խմբի այն անդամը, որը մասնակցել է այդ իսկ ցուցանմուշի ստեղծմանը՝ կատարելով գիդի դեր, մանրամասն ներկայացնում է իրենց աշխատանքը, պատասխանում հարցերին և մասնակիցների առաջարկությունների համաձայն՝ կատարում լրացումներ կամ ուղղումներ: Շրջագայությունն ավարտվում է, երբ բոլոր խմբերը, միևնույն ուղղությամբ «սահելով» ցուցանմուշների մոտով, ծանոթանում են բոլոր աշխատանքներին:

6. Պատկերասրահում շրջագայությունից հետո հիմնական (մայր) խմբերն իրենց աշխատանքները նորից քննության են ենթարկում՝ այս անգամ արդեն համեմատելով մյուս աշխատանքների հետ և վերլուծելով առաջացած հարցերը:

Մեկնաբանություններ

Կրտսեր տարիքի աշակերտների հետ աշխատելիս խմբերին կարելի է տալ նույն առաջադրանքը կամ խնդիրը: Աշխատանքը վերջացնելուց հետո, համեմատելով մյուս խմբերի աշխատանքների հետ, աշակերտները հետադարձ կապ են ապահովում:

Օրինակ՝ Գառնիի թիվ 2 դպրոցում կատարած մշտադիտարկման ժամանակ դպրոցի 3-րդ դասարանում դասվարը «Աշուն» թեմայով դասը վարեց *շրջագայություն պատկերասրահում* մեթոդով: Դասարանի աշակերտներին բաժանելով վեց խմբի և նախապես ստեղծելով խմբային ուսուցման համապատասխան միջավայր՝ դասվարը առաջին խմբին առաջարկեց գրել շարադրություն՝ «Վաղ աշուն», երկրորդին՝ «Միջին աշուն», երրորդին՝ «Ուշ աշուն» թեմաներով, չորրորդ, հինգերորդ և վեցերորդ խմբերին առաջարկվեց կոլաժի տեսքով պատկերել «Վաղ աշունը», «Միջին աշունը» և «Ուշ աշունը»:

Բարձր դասարաններում նպատակահարմար է խմբերին առաջադրել թեմայի տարբեր մասեր:

Օրինակ՝ նպատակահարմար է այս մեթոդով վարել «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» առարկայի «Համակցված հավասարումներ և անհավասարումներ» թեմային նվիրված դասը:

4.10.3.4. Խմբային հետազոտության մեթոդ

Համագործակցային ուսուցման մյուս մեթոդների նման խմբային հետազոտությունը հիմնվում է աշակերտների փոխօգնության և համագործակցության վրա: Ի տարբերություն մյուս մեթոդների՝ խմբային հետազոտության հիմնական նպատակը կոնկրետ խնդրի ուսումնասիրությունն է: Թեև այս մեթոդի հեղինակը Թել-Ավիվի համալսարանի պրոֆեսոր Շարոնն է, բայց մեթոդի ակունքները սկիզբ են առնում 20-րդ դարի սկզբի հայտնի փիլիսոփա Ջոն Դյուիի տեսությունից: Դյուին գտնում էր, որ դպրոցը պետք է աշակերտներին սովորեցնի միասին աշխատել՝ նրանց ներգրավելով իմաստալից ուսումնական ծրագրերում, որպեսզի հետագայում այդ ամենը կիրառեն կյանքում:

Խմբային հետազոտություն կիրառող ուսուցիչը կարող է հետապնդել 3 փոխկապակցված նպատակ.

- խմբային հետազոտությամբ աշակերտներին սովորեցնել համակարգված և վերլուծականորեն հետազոտել կոնկրետ խնդիրները,
- պայմաններ ստեղծել, որպեսզի աշակերտները խորությամբ յուրացնեն ուսումնական նյութի բովանդակությունը,
- սովորեցնել համագործակցել խնդրի լուծման հետազոտման ընթացքում:

Այսպիսով՝ այս նպատակների իրականացման արդյունքում խմբային հետազոտություն կատարող աշակերտները խորությամբ յուրացնում են ուսումնական նյութի բովանդակությունը, զարգանում են իրենց հետազոտելու և համագործակցելու հմտությունները:

Ընթացքը

Քայլ 1. Խմբերի ձևավորումը և թեմայի ընտրությունը

Խմբերի ձևավորման և թեմայի ընտրության հերթականությունը կարելի է փոխել: Որոշ դեպքերում ուսուցիչը կարող է ընտրել թեմաներ, ապա նոր, ըստ աշակերտների հետաքրքրության, ձևավորել խմբեր: Այլընտրանքն այն է, երբ նախ ձևավորում են խմբերը, ապա սովորողներն իրենք են ընտրում հետազոտության թեման: Այս տարբերակը նրանց հնարավորություն է տալիս զարգացնելու դասընկերների հետ բանակցելու և փոխզիջումների գնալու հմտությունները:

Երբ խմբերը ձևավորված են ու հետազոտության թեմաներն ընտրված, անհրաժեշտ է անցկացնել թիմ (խումբ) ձևավորող վարժություն, որոնք կարևոր միջոց են համագործակցային ուսուցումը արդյունավետ դարձնելու ճանապարհին: Ստորև ներկայացնենք թիմ ձևավորող վարժությունների օրինակներ:

Վարժություն	Նկարագրություն
Միրած զբաղմունք	Խմբի անդամները միմյանց հարցնում են իրենց սիրած երաժշտության, սպորտի, նախասիրության մասին:
Կենսագրություն	Խմբի անդամները միմյանց հարցնում են կենսագրական տվյալների մասին:
Մասնագիտություն	Խմբի անդամները միմյանց հարցնում են իրենց ապագա մասնագիտության մասին:
Հետաքրքրող թեմաներ	Խմբի անդամները միմյանց հարցնում են հետաքրքրող թեմաների մասին:

Քայլ 2. Խմբային աշխատանքի պլանավորումը

Աշակերտները որոշում են իրենց աշխատանքի բովանդակային ընդգրկումը, նախանշում են ռեսուրսները, մշակում գործողությունների պլան, որոշում խմբի անդամների պարտականությունները: Եթե խմբի բոլոր անդամներն ուսումնասիրում են ամբողջական թեման, ապա պարտականությունների բաժանումը հեշտ է կատարել՝ ընդամենը որոշելով, թե ով ինչ ռեսուրսներ է ուսումնասիրելու: Իսկ երբ խումբը բաժանվում է ենթախմբերի և յուրաքանչյուր ենթախումբ ուսումնասիրում է որևէ ենթաթեմա, ապա անհրաժեշտ է նաև որոշել, թե ով է համակարգելու ենթախմբերի աշխատանքները, ով է պատրաստելու թեմայի ամբողջական ներկայացումը:

Քայլ 3. Հետազոտության իրականացումը

Սա խմբային հետազոտության ամենակարևոր փուլն է: Այս փուլում են աշակերտները փնտրում ռեսուրսներ, հավաքում տեղեկատվություն: Այս ընթացքում ուսուցիչը, պարբերաբար շրջելով (սահելով) խմբերում, պետք է պարզի, թե ինչ են անում աշակերտները, ինչ աջակցության կարիք ունեն:

Քայլ 4. Արդյունքների ամփոփում և ներկայացման նախապատրաստում

Աշակերտները այս փուլում վերլուծում և գնահատում են իրենց ձեռքի տակ եղած տեղեկատվությունը, իսկ ուսուցիչը շրջում է խմբերում և աջակցում նրանց: Առաջին հերթին անհրաժեշտ է սովորողների ուշադրությունը կենտրոնացնել հետազոտվող թեմայի վրա, թույլ չտալ շեղվել թեմայից: Ոչ պակաս արդյունավետ է նաև աջակցության ամենահումանիստական ձևը՝ աջակցել խրախուսելով: Կարելի է նաև խորհուրդ տալ աշակերտներին իրենց ստացած արդյունքները ներկայացնելիս պարբերաբար օգտվել աղյուսակներից, դիագրամներից և գրաֆիկներից:

Քայլ 5. Հետազոտության արդյունքների ներկայացում

Այս փուլն ունի երկու հիմնական նպատակ՝

- լուսաբանել կատարված հետազոտությունը,
- և կարողանալ հետաքրքիր ու հասկանալի ձևով ներկայացնել այն:

Հետազոտության արդյունքները կարելի է ներկայացնել բանավոր, գրավոր, բանավոր-գրավոր, պատկերային ձևով (օրինակ՝ համակարգչային մշակմամբ, ցուցապաստառներով, աբստրակտ նկարով կամ կոլաժով): Նշենք, որ նախընտրելի է բազմազան ձևերի օգտագործումը:

Խմբային հետազոտության գնահատումը

Խմբային հետազոտության գնահատումը պետք է իրականացվի այս մեթոդի երեք նպատակների հասանելիության ստուգման առումով՝

- հետազոտական հմտությունների,
- խմբային (համագործակցային) հմտությունների,
- բովանդակության յուրացման:

Ստորև ներկայացնենք գնահատման այս երեք տեսակների մեկական նմուշ:

Խմբի հետազոտական հմտությունների գնահատման սանդղակ

	Ունի բարելավման կարիք	Բավարար	Լավ	Շատ լավ	Գերազանց
Հստակ դրված խնդիր	1	2	3	4	5
Հստակ ձևակերպված վարկած	1	2	3	4	5
Արդյունավետ հավաքագրված տվյալներ	1	2	3	4	5
Տվյալների հստակ վերլուծություն	1	2	3	4	5
Տրամաբանական եզրահանգումներ	1	2	3	4	5
Աշխատանքի հետազոտական որակը	1	2	3	4	5

Խմբային համագործակցության գնահատման սանդղակ

	Հազվադեպ	Երբեմն	Հաճախ	Մեծ մասամբ	Միշտ
Խմբի անդամները լսում էին միմյանց:	1	2	3	4	5
Խմբի անդամները կիսվում էին իրենց գաղափարներով ու տեղեկատվությամբ:	1	2	3	4	5

Խմբի անդամները օգնում էին միմյանց հասկանալ նյութը:	1	2	3	4	5
Խմբի անդամները տալիս էին մտածո- ղությունը խթանող հարցեր:	1	2	3	4	5
Խմբի անդամները պարբերաբար հետադարձ կապ էին կիրառում:	1	2	3	4	5

Բովանդակության յուրացման գնահատումը

Ավանդական մեթոդներով աշխատող ուսուցիչների հիմնական գործունեությունը սովորողների յուրացրած նյութի բովանդակության յուրացման աստիճանի ստուգումն ու գնահատումն է: Համագործակցային եղանակով աշխատող ուսուցչի համար նույնպես շատ կարևոր է պարզել, թե որքանով են աշակերտները յուրացրել իրենց հետազոտած նյութը: Ուսուցիչը դա կարող է գնահատել՝ հիմնվելով աշակերտների ներկայացման վրա: Կարելի է նաև նրանց հարցաթերթիկ տալ, հանձնարարել թեմատիկ (ստուգողական) աշխատանք, ռեֆերատ կամ շարադրություն: Ստորև ներկայացվող գնահատման սանդղակը (ռուբրիկ) կարելի է օգտագործել համագործակցային ուսուցման բոլոր մեթոդները կիրառելիս:

Խմբային գործընթացի գնահատման սյունակաշար (ռուբրիկ)

	Բացառիկ	Օրինակելի	Ընդունելի	Անընդունելի
Խմբի անդամների մասնակցության աստիճանը	Բոլոր աշակերտները ոգևորված մասնակցում էին:	Խմբի անդամների մեծ մասնակցությունը մասնակցում էր:	Խմբի անդամների կեսնակցությունը մասնակցում էր:	Ընդամենը 1-2 աշակերտ էր մասնակցում կամ ոչ մեկը:
Պատասխանատվությունը ունենալը	Առաջադրանքը կատարելու պատասխանատվություն հավասարապես էր բաշխված:	Խմբի անդամների մեծ մասը ստանձնեցին առաջադրանքը կատարելու պատասխանատվությունը:	Խմբի անդամների կեսը ստանձնեց առաջադրանքը կատարելու պատասխանատվությունը:	Ամբողջ պատասխանատվությունը խմբի մեկ անդամի վրա էր:
Հաղորդակցման որակը	Խմբի անդամները դրսևորեցին լսելու և առաջնոր-	Խմբի անդամները հմտորեն էին հաղոր-	Խմբի անդամները դրսևորեցին հաղորդակցման	Նվազ հաղորդակցում, կարճատև քննար-

	դրության գերազանց կարողություններ: Քննարկման ժամանակ հաշվի էին առնում իրենց ընկերների կարծիքները:	դակցվում, աշխույժ բանավեճ էր ծավալում առաջադրանքի շուրջ:	որոշակի կարողություններ, ծավալեցին բանավեճ:	կում, մի մասի մոտ հետաքրքրության բացակայություն:
Դերերը խմբի ներսում	Յուրաքանչյուր աշակերտ որոշակի դեր էր կատարում: Նրանք իրենց դերերը արդյունավետ էին կատարում:	Յուրաքանչյուր աշակերտ որոշակի դեր ուներ, բայց նրանք հետևողական չէին իրենց դերերը կատարելու հարցում:	Աշակերտները սահմանեցին որոշակի դերեր, բայց հետամուտ չեղան իրենց դերերի կատարմանը:	Ոչ մի ջանք չգործադրեցին դերեր սահմանելու հարցում:

Խմբային հետազոտության մեթոդի կիրառության ինտերակտիվ խնդրի օրինակ կարող է ծառայել 9-րդ դասարանում հետազոտական մեթոդը ամփոփիչ կրկնության ժամանակ կիրառելու վերաբերյալ՝ միևնույն պարագծով հարթ պատկերներից մեծագույն մակերես ունեցող պատկերը գտնելու պատմական խնդիրը:



ԳԼՈՒԽ ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԿԱՅՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՌԻՍՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

5.1. Հասկացության ծավալ և բովանդակություն

Տրամաբանությունն գիտության կամ, ինչպես ասում են, ֆորմալ-տրամաբանական (փիլիսոփայական) հետազոտության օբյեկտը մտածողության հիմնական ձևերն են՝ հասկացություն, դատողություն և մտահանգում: Մտածողության ֆորմալ-տրամաբանական հետազոտության խնդիրը այդ ձևերի առանձնացումն է, նրանց համակարգումը և դասակարգումը: Տրամաբանությունը գործ ունի առաջին հերթին միայն անհատական աշխատանքի արդյունքի հետ, նրան հետաքրքրում է միայն ճիշտ, ճշմարիտ մտածողությունը: Դրան հակառակ՝ «հոգեբանությունը ուսումնասիրում է, թե ինչպես է իրականում ընթանում մտածողությունը, որը պարտադիր չէ, որ ճիշտ լինի» [116;11]:

«Վերջին տարիներին մտածողությունը բուռն կերպով ուսումնասիրվում է նաև կիրառական տեսանկյունից, հատկապես կապված կիրառական տեսանկյան, այսպես կոչված, «արհեստական ինտելեկտ» բնագավառի հետ: Կիրառական տեսանկյունից մտածողությունը դիտում է որպես տեղեկատվական գործընթաց՝ ամրագրելով այն ընդհանուր, որը կա էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի աշխատանքի և մարդու մտածողության միջև:

Հոգեբանությանը հետաքրքրում են առաջին հերթին մարդկային մտածողության առանձնահատկությունները, նրա և տեղեկատվական այն գործընթացների տարբերությունը, որոնք իրականացվում են ժամանակակից բարձր տեխնոլոգիաներում» [116; 12]:

Ահա նաև հենց այս բնագավառների՝ տրամաբանության, հոգեբանության և կիրառական տեսանկյան փոխհարաբերությունների բացահայտման միջոցով է մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկան լուծելու կրթության հիմնական առաքելությունը՝ մատաղ սերնդի տրամաբանական մտածողության ձևավորման հիմնահարցը:

Գիտական ցանկացած բնագավառի, այդ թվում՝ մաթեմատիկական յուրաքանչյուր տեսության զարգացումը ներառում է նաև նրանում դիտարկվող հասկացությունների որոշակի համակարգի ներմուծում: Դրանից զերծ չէ նաև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացը: Նրանում անընդհատ նորանոր հասկացություններ են ներմուծվում: Այս փաստը պահանջների տեսքով որոշակիորեն արտացոլվում է նաև հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ծրագրերում:

Յուրաքանչյուր հասկացություն իր մեջ ներառում է օբյեկտների կամ հարաբերությունների որոշակի բազմություն (որը կոչվում է այդ **հասկացության ծավալ**) և այդ բազմության բոլոր տարրերին ու միայն նրանց ներհատուկ բնութագրիչ

հատկություն (հասկացության բովանդակություն): Օրինակ՝ «գուգահեռագիծ» հասկացության ծավալը բոլոր հնարավոր գուգահեռագծերը, ուղղանկյունները, շեղանկյուններն ու քառակուսիներն են, իսկ բովանդակությունը հանդիպակաց գույգատ գույգ գուգահեռ կողմերով քառանկյունն է, կամ մեկ գույգ գուգահեռ և հավասար հանդիպակաց կողմերով քառանկյունը, կամ հատվող և հատման կետում կիսվող անկյունագծերով քառանկյունը և այլն: «Համարժեքության հարաբերություն» հասկացության ծավալը բոլոր հնարավոր այն հարաբերությունների (թվերի կամ բազմությունների հավասարություն, ասույթների տրամաբանական համարժեքություն, պատկերների հավասարություն, նմանություն, ուղիղների գուգահեռություն և այլն) բազմությունն է, որոնք օժտված են անդրադարձության, համաչափության և փոխանցականության հատկություններով:

Հասկացության բովանդակությունը բացահայտվում է նրա սահմանմամբ, իսկ ծավալը՝ դասակարգմամբ, այսինքն՝ համարժեքության դասերով: Օրինակ՝ «*ռազիոնալ թիվ*» հասկացության բովանդակությունը նրա սահմանումն է՝ « m/n տեսքի կոտորակների բազմություն, որտեղ $m \in \mathbb{Z}$ իսկ $n \in \mathbb{N}$ », իսկ ծավալը՝ բոլոր հնարավոր անկրճատելի սովորական կոտորակների կամ վերջավոր և անվերջ տասնորդական պարբերական կոտորակների բազմությունը:

Սահմանման և դասակարգման միջոցով առանձին հասկացությունները կազմում են փոխկապակցված հասկացությունների համակարգ:

Յուրաքանչյուր նոր հասկացության ներմուծումից (սահմանումից) անմիջապես հետո բնական պահանջ է առաջանում ուսումնասիրել այդ նույն հասկացության հատկությունները:

Լեհ հայտնի մաթեմատիկոս Գ. Շտեյնհաուզը այդ առումով նշում է. «Սահմանումն ըստ էության նրա համար է, որպեսզի հին նշանների որոշակի կոմբինացիայի փոխարեն օգտագործվի մեկ նոր պայմանանշան (սիմվոլ): Դա հնարավորություն է տալիս կրճատելու թեորեմների և այլ պնդումների ձևակերպումները, որոնք հակառակ դեպքում կլինեն դժվար մեկնաբանվող...([107;215]): Մաթեմատիկական մեթոդի ֆորմալիզմ էլ հենց նրանում է, որ դատողություններում թույլատրվում է հասկացություններն օգտագործել միայն այն իմաստով, որը դրված է նրա սահմանման մեջ: Գաղափարին մեկ այլ սահմանման մեջ չպարունակվող իմաստի վերագրումն անթույլատրելի է: Դեռ ավելին՝ բուն սահմանումից հնարավորին չափ հեռացվում է այն ամենը, ինչը կարող է հանգեցնել ոչ միարժեք մեկնաբանության:

5.2. Սահմանումների տեսակները

Գիտամեթոդական գրականության մեջ հանդիպում են սահմանումների մի շարք տեսակներ՝ անվանական (նումինալ) և իրական (ռեալ), դիսկրիպտիվ, աքիո-

մատիկ, ծագումնաբանական, անդրադարձ կամ ինդուկտիվ, ըստ սեռի ու տեսակային տարբերության, աբստրակտ սահմանումներ և այլն:

Միևնույն սահմանումը միաժամանակ կարող է լինել և՛ **անվանական**, և՛ **իրական**, և՛ **ըստ սեռի ու տեսակային տարբերության**: Օրինակ՝ զուգահեռագծի՝ «այն քառանկյունը, որի հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են, կոչվում է զուգահեռագիծ» սահմանումը անվանական է, քանի որ «զույգ առ զույգ հանդիպակաց կողմերով քառանկյուն» բառակապակցության փոխարեն սահմանամբ առաջարկում է նոր անուն «զուգահեռագիծ»: Այն միաժամանակ իրական է, որովհետև մեզ շրջապատող իրականությունում բազմաթիվ են զուգահեռագծի տեսք ունեցող իրական առարկաները: Այն նաև ըստ սեռի և տեսակային տարբերության սահմանում է, որտեղ սեռը «քառանկյուն» հասկացությունն է, իսկ տեսակային տարբերությունը այն քառանկյունն է, որի «հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են»:

Դեկրիպտիվ սահմանումները շատ հաճախ են օգտագործվում գեղարվեստական գրականությունում: Օրինակ՝ «Նա, ով գրել է «Թմբկաբերդի առումը» պոեմը, չէր կարող անձամբ չլինել Ջավախքում» բառակապակցությունը «Հովհաննես Թումանյան» հասկացության դիսկրիպցիան է: «Թիվ, որը հավասար է շրջանագծի երկարության հարաբերությանը նրա տրամագծին» բառակապակցությունը π թվի դիսկրիպցիան է:

Աքսիոմատիկ սահմանում մաթեմատիկայում տրվում է այն դեպքում, երբ հասկացությունը հիմնական՝ դասական իմաստով չսահմանվող է: Օրինակ՝ այդպես «բնական թիվ» հասկացությունը սահմանվում է Պեանոյի չորս աքսիոմներով, «ուղիղ» կամ «կետ» հասկացությունները երկրաչափությունում սահմանվում են ուղղի և կետի հիլբերտյան աքսիոմներով:

Ծագումնաբանական կամ **գենետիկ** կոչվում են այն սահմանումները, որոնցում կա ցուցում հասկացության ծագման մասին: Մաթեմատիկայում, այդպիսիք են, այսպես կոչված, երկրաչափական տեղերի մեթոդով կատարված սահմանումները: Օրինակ՝ «շրջանագիծը հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնք այդ հարթության տրված կետից գտնվում են տրված հեռավորության վրա» սահմանումը շրջանագծի գենետիկ սահմանումն է:

Անդրադարձ կամ **ինդուկտիվ** սահմանումները կիրառվում են այն դեպքերում, երբ մաթեմատիկական հասկացությունը այլ եղանակներով դժվար կամ անհնար է սահմանել: Օրինակ՝ ինդուկտիվ եղանակով «Ֆիբոնաչիի թիվ» հասկացությունը սահմանվում է հետևյալ անդրադարձ բանաձևերով.

հաջորդականություն, որի՝

1) $a_1 = a_2 = 1$,

2) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, որտեղ $n > 2$:

Աբստրակցիայի միջոցով է տրվել «բնական թիվ» հասկացության հետևյալ սահմանումը. «Բնական թիվը իրար համարժեք վերջավոր բազմությունների բնութագրիչ հատկությունն է կամ այն ընդհանուրը, որը կա նրանց միջև»:

5.3. Սահմանվողը և սահմանողը

Սահմանումներում սովորաբար բացահայտ կամ ոչ բացահայտ ձևով խոսք է գնում երկու հասկացությունների՝ սահմանվողի (definiendum-այն, ինչը սահմանվում է, կարճ՝ Dfd) և «սահմանողի» (definiens-կարճ՝ Dfn) մասին: Նշված հասկացությունների միջև դրվում է $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ նշանը, որը կարդացվում է. «համարժեք է ըստ սահմանման» կամ պարզապես «նշանակում է», «կոչվում է»: Անվանական սահմանման ընդհանուր տրամաբանական կառուցվածքը հետևյալն է՝

$$Dfd \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} Dfn : \quad (1)$$

Ըստ սեռի և տեսակային տարբերության՝ սահմանումներն ունեն հետևյալ տրամաբանական ձևը՝

$$\forall x \in X (A(x) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} B(x)), \quad (2)$$

որտեղ X բազմությունը ցույց է տալիս մերձավոր սեռը, $A(x)$ - ը՝ սահմանվող, իսկ $B(x)$ - ը՝ սահմանող հասկացություններ են, $\forall$ նշանը անգլերեն All («բոլոր») բառի առաջին տառի շրջված ձևն է ու փոխարինում է «ցանկացած», «բոլոր», «կամայական», «յուրաքանչյուր» բառերին և կոչվում է ընդհանրության քվանտոր:

Բոլոր դեպքերում «սահմանվող» և «սահմանող» հասկացությունները փաստորեն նույն հասկացություններ են. պարզապես մեկը չբացահայտված է, մյուսը՝ բացահայտված:

5.4. Կոռեկտ և ոչ կոռեկտ սահմանումներ

Սահմանումը սովորական գիտելիք չէ. հատուկ գիտելիք է, որը պետք է բավարարի ավելի շատ պահանջների, քան սովորական գիտելիքները:

Թվարկենք այն կարևորագույն պահանջները, որոնք ավանդաբար «Տրամաբանություն» գիտության մեջ դրվում են սահմանումների վրա:

Չնայած սահմանումների նկատմամբ չի դրվում ճշմարտության հարց, այնուամենայնիվ նրանց համար պահանջվում է մի շարք կանոնների բավարարում: Եթե որևէ սահմանում բավարարում է այդ կանոններին, ապա ասում են, որ այն **կոռեկտ** է: Նշենք այդ կանոններից կարևորագույնը:

Առաջին և ամենակարևոր պահանջը արատավոր շրջանի (կրկնաբանության) և վերջինիս հետ կապված՝ նոր տերմինների ներմուծման (էլիմինացիայի) հնարավորության բացառումն է: Այս պահանջի անտեսումը հանգեցնում է նրան, որ սահմանվողը կարող է պարունակվել սահմանողի մեջ: Օրինակ՝ «հավասարման լուծումը մի թիվ է, որը նրա լուծումն է» ձևակերպման մեջ այդ պահանջը խախտված է:

Արատավոր շրջանը կարող է վերաբերել ոչ միայն առանձին սահմանմանը, այլ նաև սահմանումների հաջորդական շղթային: Օրինակ՝ չի կարելի ասել, որ «շրջանագիծ կոչվում է շրջանի եզրը», իսկ «շրջան կոչվում է հարթության շրջանագծով սահմանափակված մասը»:

Երկրորդ պահանջն այն է, որ սահմանման մեջ հանդիպող յուրաքանչյուր տերմին պետք է կիրառվի միայն մեկ իմաստով: Եթե այս պահանջը չի պահպանվում, ապա անհնար է ապահովել սահմանվող տերմինի միարժեքությունը: Օրինակ՝ նախկինում $\sqrt{9}$ պայմանանշանի տակ հասկացվում էր ինչպես 3, այնպես էլ՝ -3: Այսինքն՝ ընդունվում էր, որ $\sqrt{9} = \pm 3$: Սակայն թվաբանական քառակուսի արմատի ներմուծմամբ այդ թերությունը վերացված է:

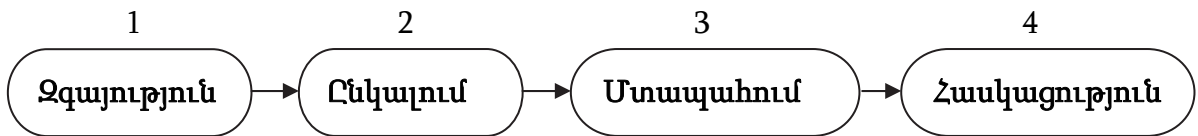
Ուշագրավ է հետևյալ փաստը. դպրոցական երկրաչափության կոլմոգորովյան ծրագրի շրջանակներում $[AB]$ սիմվոլը նշանակում է « $[AB]$ հատվածը», $|AB|$ -ն՝ « $[AB]$ հատվածի երկարությունը»: Իսկ այժմ հակառակը, տուրք տալով դպրոցական մաթեմատիկայի լեզվի պարզեցմանը՝ գիտակցաբար և որոշակի պայմանավորվածությամբ թույլ է տրվում վերոհիշյալ սխալը՝ AB ասելով հասկացվում է ինչպես « $[AB]$ հատված», այնպես էլ « $[AB]$ հատվածի երկարություն»: Այդ առումով լեզվական նշանի նույնացումը չպետք է շփոթել հասկացությունների նույնացման հետ:

Երրորդ պահանջն այն է, որ սահմանումը պետք է լինի *հստակ* և *հսկիրճ* (լակոնիկ). սահմանման մեջ չպետք է լինեն լրացուցիչ բացատրություններ, երկիմաստ, հուզական, պատկերավոր արտահայտություններ, վերաբերմունք արտահայտող բառեր:

5.5. Սահմանումների ուսուցման մեթոդիկայի մասին

Մաթեմատիկայի դպրոցական ծրագրերում ավանդաբար պահանջվում է, որ սովորողները տիրապետեն մաթեմատիկայի դասընթացի հիմնական հասկացություններին:

Հասկացությունների ձևավորումը և տիրապետումը հոգեբանական բարդ գործընթաց է, որն սկսվում է ճանաչողության պարզագույն ձևերից՝ զգայություններից և ընթանում է հետևյալ սխեմայով՝



Սովորաբար այդ ընթացքը տրոհվում է երկու փուլի՝ **զգայական**՝ անցումը 1-ից 2 և 2-ից 3, ու **տրամաբանական**՝ անցումը 3-ից 4:

Իսկ ի՞նչ է նշանակում «տիրապետել այս կամ այն հասկացությանը», կամ որ նույնն է՝ «յուրացնել սահմանումը»: Դա նշանակում է.

1) սովորողը կարողանում է հստակ ձևակերպել սահմանումը և գիտակցում է դրա իմաստը,

2) կարողանում է գործնականում կիրառել այդ սահմանումը, այսինքն՝ օգտվել սահմանումից:

Իսկ մեթոդապես ի՞նչ է նշանակում «կիրառել հասկացության սահմանումը»: Ցանկացած կիրառության հիմքում ընկած է տրամաբանական մի գործողություն, որը կոչվում է **փաստի տակ տանել** կամ **փաստին հանգեցնել**: Կոնկրետ մեր օրինակում գործ ունենք սահմանման տակ տանելու գործողության հետ: Իր հերթին այս գործողությունը տրոհվում է երկու տիպի գործողությունների՝ փաստի (մեր օրինակում՝ հասկացության) ճանաչում և հետևանքների որոնում: Ընդ որում՝ վերջիններից յուրաքանչյուրը ներկայացվում է երկու տեսքով:

1) Ճանաչում.

$$1ա) \frac{x_o \in X - \text{ի համար տեղի ունի } B(x_o) - \text{ն} :}{\text{Հետևաբար տեղի ունի } A(x_o) - \text{ն} :} \quad \text{Կարճ՝ } \frac{x_o \in X, B(x_o)}{A(x_o)} :$$

$$1բ) \frac{x_o \in X - \text{ի համար } B(x_o) - \text{ն տեղի չունի} :}{\text{Հետևաբար տեղի չունի նաև } A(x_o) - \text{ն} :} \quad \text{Կարճ՝ } \frac{x_o \in X, \text{նչ } B(x_o)}{\text{նչ } A(x_o)} :$$

2) Հետևանքների որոնում.

$$2ա) \frac{x_o \in X - \text{ի համար տեղի ունի } A(x_o) :}{\text{Հետևաբար՝ } B(x_o) :} \quad \text{Կարճ՝ } \frac{x_o \in X, A(x_o)}{B(x_o)} :$$

$$2բ) \frac{x_o \in X - \text{ի համար } \text{նչ } A(x_o) :}{\text{Հետևաբար՝ } \text{նչ } B(x_o) :} \quad \text{Կարճ՝ } \frac{x_o \in X, \text{նչ } A(x_o)}{\text{նչ } B(x_o)} ,$$

որտեղ $A(x)$ - ը՝ սահմանվող, իսկ $B(x)$ - ը՝ սահմանող հասկացություններն են,

Այսպես՝ սովորողը տիրապետում է հասկացության սահմանմանը, նշանակում է.

1. նա գիտի տվյալ հասկացության սահմանումը,
2. նա կարողանում է լուծել հետևյալ չորս տիպի խնդիրները կամ գործնականում կարողանում է կատարել հետևյալ տիպի մտահանգումներ.

$$\text{ա) } \frac{x_o \in X, B(x_o)}{A(x_o)}, \quad \text{բ) } \frac{x_o \in X, n \geq B(x_o)}{n \geq A(x_o)} \quad (\text{ա, բ - ճանաչում}):$$

$$\text{գ) } \frac{x_o \in X, A(x_o)}{B(x_o)}, \quad \text{դ) } \frac{x_o \in X, n \geq A(x_o)}{n \geq B(x_o)} \quad (\text{գ, դ - հետևանքների որոնում}):$$

Ասվածը ցուցադրենք կոնկրետ օրինակի վրա՝ դիտարկելով երկրաչափության գործող դասընթացի «գուգահեռագիծ» հասկացության սահմանումը:

Չուգահեռագիծ կոչվում է այն քառանկյունը, որի հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են:

Այն բանից հետո, երբ ուսուցիչը համոզվում է, որ սովորողները գիտեն այս սահմանումը, նա ձեռնամուխ է լինում հետևյալ չորս տիպի խնդիրների լուծմանը.

ա) $MNPQ$ -ն զուգահեռագիծ է: Թվարկեք $MNPQ$ պատկերի հատկություններն ըստ սահմանման:

Այս խնդրի լուծումը ենթադրում է հետևյալ պատասխանը:

Քանի որ $MNPQ$ -ն զուգահեռագիծ է, ապա 1) քառանկյուն է, 2) բայց այնպիսի քառանկյուն, որի հանդիպակաց կողմերը զուգահեռ են՝ $MN \parallel PQ$ և $NP \parallel MQ$:

բ) Հայտնի է, որ Φ -ն զուգահեռագիծ չէ: Օգտվելով սահմանումից՝ ի՞նչ հետևություններ կարող եք անել: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

գ) Հայտնի է, որ $MNPQ$ քառանկյան մեջ $MN \parallel PQ$ և $NP \parallel MQ$: Ի՞նչ պատկեր է քառանկյունը: Պարզեք այդ քառանկյան տեսակը:

Կարելի է առաջադրել նաև հետևյալ գործնական խնդիրը. պարզել, թե ինչ պատկեր է ստացվում երկու զույգ զուգահեռ ուղիղների հատումից:

Բնութագրել $MNPQ$ քառանկյունը (պարզել նրա տեսակը):

Լուծում: $MNPQ$ -ն զուգահեռագիծ է, որովհետև նախ այն քառանկյուն է, ապա նրա հանդիպակաց կողմերը, ըստ պայմանի, զուգահեռ են:

դ) Ապացուցել, որ $ABCD$ ($BC \parallel AD$) սեղանը զուգահեռագիծ չէ:

Ապացույց: $ABCD$ սեղանը զուգահեռագիծ չէ, որովհետև հակառակ դեպքում կբխեր, որ $AB \parallel CD$ և $BC \parallel AD$, որը հնարավոր չէ ըստ պայմանի:

Կարելի է առաջադրել նաև հետևյալ խնդիրը՝ «ապացուցել, որ կանոնավոր վեցանկյունը զուգահեռագիծ չէ:

Անհրաժեշտ է սովորողների ուշադրությունը հրավիրել այն հանգամանքի վրա, որ վերջին օրինակներում կիրառվում է **հակասության** կամ, ինչպես ընդուն-

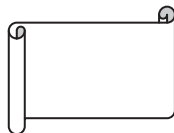
ված է ասել, **հակասող ենթադրության** մեթոդը: Փաստորեն այդ խնդիրները նաև սովորողների մոտ հակասող ենթադրության մեթոդից օգտվելու ունակությունների ձևավորմանն ուղղված հիմնական օրինակներ են:

Հաճախ սովորողների գիտելիքները «գուգահեռագիծ» հասկացության շրջանակներում ամրապնդելու համար ուսուցիչը միտումնավոր հետևյալ հարցադրումն է անում. «Ո՞ր պատկերն է կոչվում գուգահեռագիծ»: Առաջին հայացքից «անմեղ» հարց է: Սովորաբար այս հարցին հետևում է հետևյալ տիպի պատասխան. «Այն պատկերը, որի...»: Այստեղ է, որ շատ սովորողներ սայթաքում են:

Բանն այն է, որ դեռևս տարրական դասարաններում սովորողների մոտ մշակվել է հարցին պատասխանելու մի հատուկ տեխնիկա, համաձայն որի՝ պատասխանի սկզբնական մասը պարունակվում է բուն հարցի մեջ: Հետևելով այդ սխեմային՝ նրանք սխալմամբ պատասխանը սկսում են «այն պատկերը, որի» բառերից: Նման դեպքում ուսուցիչը բերում է կանոնավոր վեցանկյան հակաօրինակը, որպեսզի ցուցադրի աշակերտի կատարած սխալը: Չէ՞ որ համաձայն նման պատասխանի՝ կանոնավոր վեցանկյունը մի պատկեր է, որի հանդիպակաց կողմերը գուգահեռ են, ուստի այն գուգահեռագիծ կլինի:

Վերոհիշյալ աշխատանքները կատարելուց հետո միայն ուսուցիչը կարող է եզրակացնել՝ յուրացրել են սովորողները տվյալ հասկացությունը, թե ոչ:

Այսքանից հետո կարելի կլինի անցնել հասկացության այն հատկությունների և հայտանիշների ուսումնասիրմանը, որոնք ձևակերպված են թեորեմների կամ խնդիրների տեսքով:



ԳԼՈՒԽ ՎԵՑԵՐՈՐԴ. ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ՄՏԱԾՈՂՈՒԹՅԱՆ ՁԵՎԱՎՈՐՄԱՆ ՀԻՄՆԱԽՆԴԻՐԸ

6.1. Տրամաբանական մտածողության ձևավորումն ու զարգացումը որպես դաստիարակչական կարևորագույն արժեք

Հայտնի է, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի դաստիարակչական նպատակներից հիմնականը սովորողների տրամաբանական մտածողության ձևավորումն ու զարգացումն է, որին հասնելու հնարավորությունների հարցում մաթեմատիկան շահեկանորեն տարբերվում է մնացած բոլոր հանրակրթական առարկաներից:

Միջնակարգ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացի հայրենական և արտասահմանյան բազմաթիվ երկրների տարբեր տարիների պետական ծրագրերի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ նրանցում միշտ էլ այս կամ այն չափով կարևորվել և ընդգծվել է սովորողների տրամաբանական մտածողության և նրա կարևորագույն բաղադրիչի՝ ապացուցելու ունակության ձևավորման անհրաժեշտությունը: Այդ ծրագրերին համապատասխան մաթեմատիկայի դասընթացները այս կամ այն հաջողությամբ մշտապես փորձել են լուծել այդ կարևորագույն հիմնահարցը, որը մաթեմատիկայի դասընթացի կարևորագույն նպատակի՝ մտածել սովորեցնելու հենքային բաղադրիչներից մեկն է:

Սակայն իրականում այդ հիմնախնդրի լուծման հիմնական ծանրությունը մինչև վերջին տարիները արհեստականորեն վերագրվել էր 7-9-րդ դասարանների երկրաչափության դասընթացին: Դեռ ավելին, եթե ավանդաբար երկրաչափության դասընթացի հիմնական նպատակները սովորողների տարածական պատկերացումների ու տրամաբանական մտածողության ձևավորումն է, ապա նույնիսկ երկրաչափության որոշ, օրինակ՝ Ա. Վ. Պոգորելովի դասընթացի առաքելությունն ըստ հեղինակի, լոկ սովորողների տրամաբանական մտածողության ձևավորումն է:

Հիմնական դպրոցի հանրահաշվի ինչպես խորհրդային, այնպես էլ հետխորհրդային՝ ՌԴ դասընթացները հիմնականում նպատակաուղղված էին մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի «արտահայտությունների նույնական ձևափոխություններ», «հավասարումներ», «ֆունկցիա» բովանդակային գծերի շրջանակներում սովորողների վարժանքաօպերատիվ ունակությունների և հմտությունների ձևավորմանը: Ոչ ոք չի կարող ժխտել մաթեմատիկայի՝ այդ տարիների հանրակրթական դասընթացների ակնհայտ հաջողությունները նշված, օրինակ, առաջին երկու բովանդակային գծերը պարուրաձև զարգացնելու ուղղությամբ: Սակայն մաթեմատիկայի մյուս՝ «ապացուցումների», «երկրաչափական պատկերների», «մեծությունների» և «ֆունկցիաների» գծերի առումով պատկերը տրամա-

գծորեն հակադիր է առաջին երկու գծերի զարգացմանը. դրանց, ինչպես հորիզոնական, այնպես էլ ուղղագիծ զարգացումն ու ինտեգրումը մաթեմատիկայի և հարակից առարկաների դասընթացներին հանրահաշվի վերոհիշյալ դասագրքերում էապես զիջում էին «արտահայտությունների ձևափոխություններ» և «հավասարումներ» գծերի ձևավորվածության մակարդակին:

Ինչպես նշեցինք, դպրոցական մաթեմատիկայի նախկին դասընթացներում ապացուցումների ուսուցման հիմնական բեռը արհեստականորեն դրված էր երկրաչափության դասընթացի վրա: Դրա հիմնական պատճառը ոչ թե երկրաչափության դասընթացի ավելի ապացուցելի լինելն էր հանրահաշվի նկատմամբ, այլ այն, որ այդ ժամանակների հանրահաշվի դասընթացները, չունենալով որոշակի աքսիոմատիկ կառուցվածք (շարադրանք), չունեին նաև հստակ տրամաբանական ապարատ և լուծում էին հիմնականում վարժանքաօպերատիվ հարցեր, այլ ոչ թե, ինչպես երկրաչափությունում, նաև սովորողների տրամաբանական մտածողության ձևավորման հիմնախնդիրը: Նոր իրադրությունում, որ հայտնվեցին նախկին Խորհրդային Միության հանրապետությունները, այդ դասագրքերն արդեն կտրուկ բարեփոխումների կարիք ունեին: Եվ բնական է, որ նորանկախ Հայաստանի Հանրապետությունում մաթեմատիկայի դպրոցական դասագրքերի ստեղծման գործընթացը 20-րդ դարավերջին սկսվեց 6-8-րդ դասարանների հանրահաշվի դասընթացից: 1998 թ. ստեղծվեց 6-8-րդ դասարանների հանրահաշվի նոր ծրագիրը ([30]), 1999 թ. ուսուցման գործընթաց մուտք գործեցին Հ. Ս. Միքայելյանի հեղինակած «Հանրահաշիվ 6, 7, 8» դասագրքերը ([31]), 2000 թվականին՝ Գ. Գ. Գևորգյանի, Ա. Ա. Սահակյանի հեղինակած «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» [21] դասագրքերը, որոնցում արդեն ներդրված հստակ տրամաբանական՝ ապացուցողական ապարատի շնորհիվ «կշեռքի նժարը» երկրաչափության դասընթացից տեղափոխվեց նաև հանրահաշվի դասընթաց:

Ավագ դպրոցի նոր դասագրքերով որոշակիորեն բարելավվեց նաև «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» առարկայի ապացուցողական կառույցը: Շարունակվում է աշխատանքը սովորողների տրամաբանական մտածողության հետագա զարգացման ուղղությամբ: Դրան նպաստում են «Տրամաբանության տարրերը» և «Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը» թեմաների ուսուցումը, ապացուցման մեծաթիվ խնդիրների լուծումները, ինչպես նաև ուսուցչի կողմից սովորողների ապացուցողական ունակությունների ձևավորման նպատակով մաթեմատիկական տեքստերի հետ կատարվող հատուկ աշխատանքը: Մաթեմատիկական տեքստերի (ապացուցումների ու լուծումների) այդ «թաքնված» հնարավորությունները վեր հանելու լավագույն ձևը նրանցում կիրառված ապացուցողական կառույցների՝ ապացուցման մեթոդների բացահայտումն է: Մաթեմատիկայի ուսուցչին և աշակերտներին մեթոդական օգնություն ցույց տալու նպատակով այդ առարկայի 11-րդ դասարանի դասագրքի «Տրամաբանության տարրերը»

թեմայում, «Ուսուցչի մեթոդական ձեռնարկում» և «Լուծումների ուղեցույցներում» բերված են անհրաժեշտ տեղեկություններ և օրինակներ միջնակարգ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում կիրառվող ապացուցման մեթոդների մասին:

Այսպիսով՝ ՀՀ միջնակարգ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացն իր հստակ ապացուցողական կառույցով և համապատասխան մեթոդական սպասարկմամբ ուղղված է լուծելու սովորողների՝ ՀՀ ապագա քաղաքացիների տրամաբանական մտածողության ձևավորման խնդիրը: Իսկ մտածողության զարգացման բաղադրիչներից մեկը, ինչպես նշել ենք, տրամաբանական այն ունակությունների ձևավորումն ու զարգացումն է, որը կապված է փաստարկված դատողություններ կատարելու, ապացուցելու և հերքելու ունակությունների հետ:

6.2. Մաթեմատիկական դատողությունների հիմնական տեսակները

6.2.1. Աքսիոմներ

Բարդ դատողությունների կարևորագույն տեսակներից մեկը աքսիոմն է: **Աքսիոմը** (հունարեն *axiōma* – *հուսալի, ընդունելի և վստահելի նախադասություն*) դատողություն է, որն ընդունվում է առանց ապացուցման: Որոշակի թվով աքսիոմները կազմում են որևէ գիտական տեսության էլակետային, նախնական դրույթների համակարգը, որոնք ընկած են այդ տեսության այլ դրույթների (թեորեմների) ապացուցման հիմքում, որի սահմաններում էլ հենց յուրաքանչյուր աքսիոմ ընդունվում է առանց ապացուցման: Այդպիսին է, օրինակ, Էվկլիդեսի երկրաչափության ուղիղների գուգահեռության՝ «երկու կետերով անցնում է մեկ և միայն մեկ ուղիղ» աքսիոմը: Աքսիոմներն ու նախնական (չսահմանվող) հասկացությունները կազմում են մաթեմատիկական ցանկացած տեսության հիմքը: Ինչպես հայտնի է մաթեմատիկական տրամաբանության դասընթացից, որոշակի գիտական տեսությունը բնութագրող աքսիոմների համակարգի նկատմամբ ներկայացվում են երեք հայտնի պահանջներ. աքսիոմները պետք է լինեն.

- **իրարից անկախ**, այսինքն՝ դրանցից որևէ մեկը չպետք է արտածվի մյուսներից,
- **անհակասական**, այսինքն՝ դրանցից չպետք է արտածվի որևէ պնդում, որը հակասում է մինչ այդ արտածված որևէ այլ պնդման,
- **լրիվ**, այսինքն՝ այդ աքսիոմատիկ տեսության ցանկացած ճշմարիտ բանաձև՝ տավտալոգիա, այդ տեսության թեորեմ է:

6.2.2. Պոստուլատներ

«Պոստուլատ» բառը ծագում է լատիներեն *postulatum* բառից, որը նշանակում է *պահանջ*:

Պոստուլատը նախադասություն (պնդում) է, որում արտահայտված է որոշակի պահանջ (պայման), որին պետք է բավարարի որևէ հասկացություն կամ հասկացությունների միջև եղած որևէ հարաբերություն: Հաճախ պոստուլատը որևէ հասկացության կամ հասկացությունների որևէ համակարգի սահմանման մաս է կազմում: Օրինակ՝ համարժեքության հարաբերությունը սահմանվում է անդրադարձության, համաչափության և փոխանցականության երեք պոստուլատների միջոցով.

Ա բազմության վրա տրված ρ հարաբերությունը կոչվում է համարժեքության հարաբերություն, եթե տեղի ունեն հետևյալ հատկությունները (պոստուլատները).

- 1) ρ -ն անդրադարձելի է, այսինքն՝ $\forall a \in A(a \rho a)$,
- 2) ρ -ն համաչափելի է, այսինքն՝ $\forall a, b \in A(a \rho b \Rightarrow b \rho a)$,
- 3) ρ -ն փոխանցական է, այսինքն՝ $\forall a, b, c \in A(a \rho b \& b \rho c \Rightarrow a \rho c)$:

6.2.3. Թեորեմ: Թեորեմների լեզվաքերականական և տրամաբանական կառուցվածքային ձևերը

Ամենատարբեր մաթեմատիկական օբյեկտների (թվաբանությունում՝ թվերի, երկրաչափությունում՝ պատկերների ու մարմինների, հանրահաշվում՝ բանաձևերի) հատկություններն ուսումնասիրելիս հաճախ անհրաժեշտ է լինում կատարել այս կամ այն հետևությունը, այսինքն՝ մաթեմատիկայի այս կամ այն բաժնի հասկացությունների հիման վրա կառուցվում են նախադասություններ, որոնց ճշմարիտ լինելը անհրաժեշտ է հիմնավորել, ապացուցել:

Մաթեմատիկական այն նախադասությունը (պնդումը), որի ճշմարտացիությունը հաստատվում է կշռադատման՝ ապացուցման միջոցով, կոչվում է **թեորեմ** (հունարեն *theōrēma* – *կշռադատում, գնահատում էմ*):

Թեորեմը մաթեմատիկական դատողությունների այն հիմնական տեսակն է, որի ուսուցմանն էլ հենց հիմնականում նվիրված է դպրոցական մաթեմատիկայի, մասնավորապես երկրաչափության դասընթացը: Որպես բացառություն՝ նույնը կարելի է պնդել նաև Հ. Ս. Միքայելյանի «Հանրահաշիվ 7-9» դասընթացի մասին, որն իր տեսական մասում ընդգրկված թեորեմների՝ հատկությունների և ապացուցման խնդիրների քանակով չի զիջում երկրաչափության դասընթացին:

Ապացուցել թեորեմը նշանակում է տրամաբանական դատողությունների միջոցով ապացուցվելիք պնդման պայմանից գնալ դեպի եզրակացությունը՝ հեն-

վելով այդ ընթացքում նախկինում հաստատված պնդումների (աքսիոմների, թեորեմների, հետևանքների) վրա...» կամ «եղևելով եզրակացությունից և հենվելով հայտնի պնդումների վրա՝ ցույց է տրվում, որ պնդման եզրակացությունը հանդիսանում է պայմանի տրամաբանական հետևանքը» [101; 105]: Այդ պատճառով ամենից առաջ անհրաժեշտ է առանձնացնել թեորեմի (խնդրի) պայմանն ու եզրակացությունը (պահանջը):

Իրոք, հայտնի է, որ ցանկացած խնդրի¹ լուծումը սկսվում է նրա ուշադիր ընթերցմամբ, խնդրային իրավիճակի ընկալմամբ և պայմանի ու պահանջի առանձնացմամբ: Դա, փաստորեն, խնդրի լուծման առաջին քայլն է: Պարզ է, որ եթե դպրոցականը ճիշտ չի առանձնացնում լուծվելիք խնդրի պայմանն ու պահանջը, չի կարողանա նաև լուծել այն: Այդ իմաստով սովորողների մեջ նշված գործողության ձևավորման խնդիրն անչափ կարևորություն է ստանում:

Փորձը ցույց է տալիս, որ սովորողների զգալի մասն իրոք դժվարանում է ճիշտ առանձնացնել լուծվելիք խնդրի պայմանն ու պահանջը (եզրակացությունը): Այդ հարցում հաճախ կոպիտ սխալներ են թույլ տալիս անգամ բարձր դասարանների լավ սովորող աշակերտները: Միջնակարգ դպրոցի մաթեմատիկայի դասավանդման փորձի ուսումնասիրությունը ցույց է տալիս, որ սովորողները ինչպես դասագրքերից, այնպես էլ ուսուցիչներից շատ քիչ տեղեկություններ են ստանում խնդրո առարկա հարցի վերաբերյալ:

Ավանդաբար, ինչպես մաթեմատիկական, այնպես էլ ոչ մաթեմատիկական խնդիրները դասագրքերում շարադրված են մայրենի լեզվի միջոցներով: Օրինակ՝ մաթեմատիկական թեորեմների ու խնդիրների համար օգտագործվում են հետևյալ լեզվաքերականական ձևակերպումները (ստրուկտուրաները)։

«Եթե ..., ապա ...», (I)

«Տրված է ...: Ապացուցել (գտնել, հաշվել) ...», (II)

«Ապացուցել (գտնել, հաշվել), որ ... , եթե...» և այլն: (III)

Կան նաև այնպիսի ձևակերպումներ, որոնցում ո՛չ «եթե» կա, ո՛չ «ապա», ո՛չ «տրված է» և ո՛չ էլ «ապացուցել (գտնել, հաշվել)» բառերը: Օրինակ՝ այդպիսի ձևակերպում ունի ընթերցողին քաջ հայտնի՝ հակադիր անկյունների հետևյալ հատկությունը. «Հակադիր անկյունները հավասար են»: (IV)

(I) և (II) ձևակերպումները կոչվում են պնդման ձևակերպման (ստանդարտ) ձևեր, և, ինչպես ցույց է տալիս փորձը, ամենից պարզ ու մատչելի ձևակերպումներն են: Իրոք, ինչպես ցույց տվեցին Երևան քաղաքի մի շարք դպրոցներում անցկացրած զրավոր և բանավոր հարցումները, սովորողների գերակշռող մասը (մոտ 93-95 %-ը) կարողանում է ճիշտ առանձնացնել հիմնականում (I) և (II) ստանդարտ ձևակեր-

¹ Այսուհետև խնդիր ասելով՝ կհասկանանք մաթեմատիկական ցանկացած թեորեմ, առաջադրանք:

պումներ ունեցող պնդումների պայմանն ու եզրակացությունը (պահանջը), իսկ ոչ ստանդարտ ձևակերպումների դեպքում՝ միայն 35-48 %-ը:

Այսինքն՝ մաթեմատիկայից թույլ առաջադիմություն ունեցող սովորողների համար ամենամատչելին (I) և (II) տիպի ստանդարտ ձևակերպումներն են, այն էլ՝ այն վերապահամբ, որ երկուսում էլ պահանջը միակ, իսկ պայմանը կոնյուկտիվ պրեդիկատ է: Մնացած լեզվական ձևակերպումների դեպքում սովորողները հաճախ են թույլ տալիս սխալներ:

Հարց է առաջանում՝ արդյոք այդ ձևակերպումներն այդքան բարդ են սովորողների համար: Պարզվում է՝ ոչ: Պատճառը ոչ այնքան այդ ձևակերպումների բարդությունն է, որքան սովորողներին ավանդաբար տրվող թերի և կցկտուր հրահանգները (տեղեկությունները): Չարմանալ կարելի է միայն, թե ինչու բոլոր դասագրքերը մեկնաբանում են (I) կառուցվածքով ձևակերպումը (որը դրա կարիքը այնքան էլ չունի), իսկ մյուս ձևակերպումների մասին ոչ մի տեղ խոսք չկա: Բացառություն է կազմում միայն «Երկրաչափություն» (հեղ. Ա. Դ. Ալեքսանդրով և ուրիշներ) փորձնական դասագրքում առաջադրված մեթոդական հետևյալ հնարքը. «Եթե ..., ապա ...» տեսքի ձևակերպման վերաբերյալ որոշակի տեղեկատվությունից հետո առաջարկվում է այլ ձևակերպումներ ունեցող պնդումները նախքան ապացուցումը բերել «Եթե ..., ապա ...» տեսքի: Խնդրո առարկա պրոբլեմը կարծես թե լուծված է: Սակայն դա միայն թվում է: Իրականում հեղինակները ինչ-որ ուզում են ձևավորել սովորողների մոտ, անուղղակիորեն ենթադրում են, որ նրանց մոտ այդ ունակությունն արդեն ձևավորված է: Իրոք, որպեսզի սովորողը կարողանա այլ ձևակերպմամբ պնդումը վերաշարադրել և բերել (I) կամ (II) տեսքի, նա արդեն պետք է կարողանա ճիշտ առանձնացնել այդ ձևակերպման պայմանն ու պահանջը: Իսկ եթե սովորողը կարող է դա անթերի կատարել, ապա այդ աշխատանքը դառնում է ավելորդ:

Ամենայն հավանականությամբ հեղինակները ենթադրում են, որ նման աշխատանքը պետք է կատարվի ուսուցչի անմիջական ղեկավարությամբ: Իսկ ահա տանը ինքնուրույն աշխատելիս սովորողը մնում է անօգնական: Այնուամենայնիվ, վերոհիշյալ մեթոդական հրահանգին հաճախակի դիմելը օգտակար է միջին դասարաններում:

Այսպիսով՝ քննարկվելիք խնդիրը դեռևս մնում է չլուծված: Պարզ է նաև, որ հարցին պետք է մոտենալ համակողմանիորեն՝ ամենից առաջ հրաժարվելով սովորողներին թերի տեղեկություն-հրահանգներ տալուց:

Ուսուցիչներից և դասագրքերից ուսումնասիրվող հարցի վերաբերյալ սովորողների ստացած տեղեկությունները մոտավորապես հանգում են հետևյալին. թեորեմների մեծ մասն ունի «Եթե..., ապա...» ձևակերպումը: «Եթե» բառից մինչև ստորակետը գրվածը թեորեմի պայմանն է, իսկ «ապա» բառից հետո՝ եզրակացությունը: Խնդիրները սովորաբար ձևակերպվում են նաև «Տրված է...: Ապացուցել (գտնել,

հաշվել)...» տեսքով: «Տրված է բառից հետո մինչև «Ապացուցել (գտնել, հաշվել)» բառը գրվածը խնդրի պայմանն է, իսկ «Ապացուցել» բառից հետո գրվածը՝ պահանջը:

Ընդ որում՝ խնդրի ձևակերպման վերաբերյալ վերոհիշյալ թերի տեղեկությունն անգամ ոչ բոլոր աշակերտներն ունեն: Բանից պարզվում է, որ այդ տեղեկությունը բացակայում է ինչպես նախկին, այնպես էլ ներկայումս գործող շատ դասագրքերում, և որոշ ուսուցիչներ իրենք են այդ մասին տեղեկացնում սովորողներին, իսկ որոշ մասն էլ այդ մասին որևէ տեղեկություն չի հաղորդում: Նման հրահանգավորում ստացած աշակերտի թեկուզ և տրամաբանորեն սխալ պատասխանը իրավամբ կարելի է համարել լիովին հասկանալի:

Եթե պնդումն ունի «գուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են և հատման կետով կիսվում» տեսքը ((4) ձև), ապա սովորողներից ոմանք պատասխանում են, որ «այստեղ ո՛չ պայման կա, ո՛չ էլ պահանջ, որովհետև ո՛չ «եթե» կա, ո՛չ էլ՝ «ապա»: Բսկ երբ այն վերաձևակերպվեց «Ապացուցել, որ գուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են և հատման կետով կիսվում» տեսքով, ապա նույն աշակերտները պատասխանեցին, որ «այժմ էլ պայման չկա, միայն պահանջ է»:

Այժմ կրկին անդրադառնանք «հակադիր անկյունները հավասար են» ձևակերպման քննարկմանը: Ասվածից հետևում է, որ մաթեմատիկայի լեզվի և ոչ մի միջոցով հնարավոր չէ նշված պնդման պայմանն ու պահանջը առանձնացնելու կանոն մշակել: Ելքը մեկն է. դիմում ենք մետալեզվին, այսինքն՝ մեր դեպքում՝ հայոց լեզվին: Բանն այն է, որ վերոհիշյալ (IV) պնդումը ոչ միայն մաթեմատիկայի օբյեկտ է, այլև հայոց լեզվի պարզ ընդարձակ նախադասություն, որն ունի իր գլխավոր անդամները՝ ենթակա («անկյուններ»), ստորոգյալ («հավասար են») և դրանցից մեկի՝ ենթակայի իմաստը լրացնող երկրորդական անդամ (որոշիչ՝ «հակադիր»): Բավական է հիշել ենթակայի և ստորոգյալի սահմանումները, և ամեն ինչ պարզ կլինի:

Իրոք, ըստ սահմանման, ենթական ցույց է տալիս գործողություն կատարող առարկան կամ անձը, ուստի նաև խնդրային իրավիճակի մեջ մտնող այն սուբյեկտները, որոնք պետք է գործողության մեջ մտցվեն: Հետևաբար ենթակայի և նրա որոշիչի (կամ լրացման) տակ «թաքնված» է հենց խնդրի (պնդման) պայմանը:

Ստորոգյալը ցույց է տալիս, թե ինչ է անում, ինչ է լինում ենթական: Այլ կերպ ասած՝ ստորոգյալը ցույց է տալիս ենթակայի (պայմանի) կատարած գործողությունը: Հետևաբար ստորոգյալն էլ ներառում է խնդրի պահանջը (եզրակացությունը):

Այսպիսով՝ պայմանի և պահանջի առանձնացման հարցը ավելի շատ մայրենի լեզվի, քան դպրոցական մաթեմատիկայի լեզվի հարց է: Նշված մեթոդական հնարքը զերծ է մյուս հնարքներից հատուկ միակողմանիությունից ու թերի լինելուց և անկախ է մաթեմատիկական խնդրի ձևակերպման ձևից: Այն նաև մաթեմատիկայի և հայոց լեզվի միջառարկայական կապի (ինտեգրման) հիանալի օրինակ է: Բացի հարուստ լեզվաքերականական վերոհիշյալ ձևակերպումներից՝ պնդումն ունի նաև տրամաբանական ձև, որը, սակայն, մեկն է:

Հայտնի է, որ մաթեմատիկական թեորեմների մեծ մասն ունի (1) տեսքը՝

$$\forall x \in X(A(x) \Rightarrow B(x)), \quad (1)$$

որի բացատրամասում նշված է, թե կոնկրետ որ X բազմությունից է վերցված x փոփոխականը, և պետք է ճշգրիտ ձևակերպվի, թե ինչ է $A(x)$ պրեդիկատը՝ պնդումը (**պայմանը**) և $B(x)$ պնդումը (**եզրակացությունը**):

Դպրոցական դասագրքերի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ավանդաբար գործում են հետևյալ տիպերի տրամաբանական ձև ունեցող պնդումներ.

1) $A(x)$ -ը պարզ նախադասություն (բանաձև) է կամ պարզ նախադասությունների կոնյունկցիա, իսկ $B(x)$ -ը պարզ նախադասություն է (ձև (1.1))՝

$$\forall x(A_1 \& A_2 \Rightarrow B), \quad (1.1)$$

2) $A(x)$ -ը ցանկացած նախադասություն է, իսկ $B(x)$ -ը՝ պարզ նախադասությունների կոնյունկցիա՝

$$\forall x(A \Rightarrow B_1 \& B_2), \quad (1.2)$$

3) $A(x)$ -ը ցանկացած նախադասություն է, իսկ $B(x)$ -ը՝ պարզ նախադասությունների դիզյունկցիա՝

$$\forall x(A \Rightarrow B_1 \vee B_2), \quad (1.3)$$

4) $A(x)$ -ը պարզ նախադասությունների դիզյունկցիա է, իսկ $B(x)$ -ը՝ ցանկացած նախադասություն՝

$$\forall x(A_1 \vee A_2 \Rightarrow B), \quad (1.4)$$

5) $A(x)$ -ը ցանկացած նախադասություն է, իսկ $B(x)$ -ը երկու պարզ նախադասությունների իմպլիկացիա՝ «եթե B_1 , ապա B_2 » կամ $B_1 \Rightarrow B_2$ ՝

$$\forall x(A \Rightarrow (B_1 \Rightarrow B_2)), \quad (1.5)$$

6) $A(x)$ -ը երկու պարզ նախադասությունների իմպլիկացիա՝ «եթե A_1 , ապա A_2 » կամ $A_1 \Rightarrow A_2$ է, իսկ $B(x)$ -ը՝ ցանկացած նախադասություն՝

$$\forall x((A_1 \Rightarrow A_2) \Rightarrow B), \quad (1.6)$$

7) գոյության թեորեմի տրամաբանական ձև՝

$$\forall x \exists y(A(x; y) \Rightarrow B(x; y)), \quad (1.7)$$

որտեղ $\exists$ նշանը անգլերեն Exist («գոյություն ունենալ, լինել») բառի առաջին տառի շրջված ձևն է,

8) գոյության և միակության թեորեմի տրամաբանական ձև՝

$$\forall x \exists ! y(A(x; y) \Rightarrow B(x; y)): \quad (1.8)$$

Այս տրամաբանական ձևերից ամենակիրառականը (1.1) – ն է. այդ ձևն ունեն մաթեմատիկայի դպրոցական դասագրքերի 54-85 %-ը և (1.2) ձևը՝ 12-26 %-ը: Մնացած ձևերին տարբեր տարիների տարբեր հեղինակների հիմնական դպրոցի

երկրաչափության և հանրահաշվի դասագրքերին բաժին է հասնում դասագրքային թեորեմների և խնդիր-առաջադրանքների 10-20 %-ը:

Բացի այս ութ ձևերից՝ մաթեմատիկայի դասընթացում հանդիպում են նաև, այսպես կոչված, անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ արտահայտող հետևյալ տրամաբանական ձևն ունեցող թեորեմները՝

$$\forall x \in X (A(x) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} B(x)), \quad (1.9)$$

որը երկու (1.1) տեսքի թեորեմների կոնյունկցիա է:

Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայում զանազանվում են նաև թեորեմների հետևյալ տեսակները՝ ուղիղ թեորեմ, հակադարձ թեորեմ, հակադիր թեորեմ և հակադիրի հակադարձ կամ հակադարձի հակադիր թեորեմ: Դիցուք տրված է.

Ա. եթե $A(x)$, ապա $B(x)$ կամ $A(x) \Rightarrow B(x)$ մաթեմատիկական պնդումը, որն անվանենք ուղիղ թեորեմ: Այս պնդումից որպես ածանցյալ ստացվում են հետևյալ նոր պնդումները՝

Բ. եթե $B(x)$, ապա $A(x)$ կամ $B(x) \Rightarrow A(x)$ - հակադարձ,

Գ. եթե ոչ $A(x)$, ապա ոչ $B(x)$ կամ $\neg A(x) \Rightarrow \neg B(x)$ - հակադիր,

Դ. եթե ոչ $B(x)$, ապա ոչ $A(x)$ կամ $\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)$ - հակադիրի հակադարձ:

Այժմ դիտարկենք հետևյալ օրինակները՝

1) **Ա.** $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$: 2) $a = b \Rightarrow a^3 = b^3$ - ուղիղ պնդում,

Բ. $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$: $a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$ - հակադարձ պնդում,

Գ. $x \neq 3 \Rightarrow x^2 \neq 9$: $a \neq b \Rightarrow a^3 \neq b^3$ - հակադիր պնդում,

Դ. $x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq 3$: $x^3 \neq b^3 \Rightarrow a \neq b$ - հակադիրի հակադարձ պնդում:

Բերված օրինակներից առաջինում ճշմարիտ են **Ա** և **Դ** հետևությունները, և կեղծ են **Բ** և **Գ** հետևությունները, իսկ երկրորդում բոլորն էլ ճշմարիտ են: Ընդհանրապես մաթեմատիկական տրամաբանության դասընթացից հայտնի է, որ վերոհիշյալ **Ա** և **Դ**, ինչպես նաև **Բ** և **Գ** պնդումները տրամաբանորեն համարժեք են իրար, այսինքն՝

$$A(x) \Rightarrow B(x) \Leftrightarrow \neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)$$

բանաձևը ասույթների հաշվի տավտոլոգիա է, իսկ մնացած զույգերը, օրինակ՝ **Ա**-ն և **Բ**-ն, տրամաբանորեն իրար համարժեք չեն, հետևաբար, եթե **Ա** պնդումը ճշմարիտ պնդում է, ապա ճշմարիտ է նաև **Դ**-ն, իսկ **Բ**, **Գ** պնդումները կարող են, ինչպես առաջին օրինակում, նաև ճշմարիտ չլինել: Դա պայմանավորված է այն հանգամանքով, թե ուղիղ թեորեմի դեր կատարող **Ա** ճշմարիտ պնդումը իրականում անհրաժեշտ ու բավարար պայման է հանդիսանում, թե ոչ: Իրոք, օրինակ 1-ում **Ա** պնդումը ճշմարիտ է, իսկ դրա հակադարձը՝ ոչ, հետևաբար՝ **Ա**-ն անհրաժեշտ ու բավարար պայման չէ, իսկ օրինակ 2-ում, հակառակը, ճշմարիտ են նաև **Ա**-ն, և՛ **Բ**-ն, այսինքն՝ **Ա**-ն իրականում անհրաժեշտ ու բավարար պայման է, այսինքն՝ $A(x) \Leftrightarrow B(x)$:

Թեորեմի ուսուցման փուլերը

Թեորեմների ուսուցումը կատարվում է հետևյալ փուլերով՝

- 1) թեորեմի ուսումնասիրման շարժառիթը,
- 2) ծանոթացում թեորեմում արտացոլված փաստին,
- 3) թեորեմի լեզվաքերականական և տրամաբանական ձևակերպումները,
- 4) թեորեմի ձևակերպման յուրաքանչյուր բառի իմաստի պարզաբանում,
- 5) թեորեմի բովանդակության ըմբռնում՝ գիտակցում,
- 6) թեորեմի ձևակերպման մտապահում,
- 7) թեորեմի ապացուցման նպատակահարմար մեթոդի ընտրություն և ծանոթացում այդ մեթոդին,
- 8) թեորեմի ապացուցում,
- 9) թեորեմի կիրառություններ,
- 10) նախկինում ուսումնասիրած այլ թեորեմների հետ տվյալ թեորեմի կապերի հաստատում:

Նշված փուլերում արտացոլված են թեորեմի գործառական բնույթը, կրթության հումանացման և հումանիտարացման իդեաները, մաթեմատիկական գիտելիքի և նրա յուրացման առանձնահատկությունները: Այստեղից էլ թեորեմների ուսուցման գլխավոր կռիվներն ոչ թե դրանց և դրանց ապացույցների ուսումնասիրումն է, այլ դպրոցականների կողմից բուն թեորեմի, դրա ապացուցման մեթոդի բացահայտումն է, ապացուցման ինքնուրույն կառուցարկումը, ամենատարբեր իրավիճակներում թեորեմի կիրառումը և այլ թեորեմների հետ տվյալ թեորեմի կապերի հաստատումը:

Առաջին երկու փուլերը իրականացվում են գծագրի կառուցման, չափումների, դրան հաջորդող ընդհանրացումների, իրավիճակի վերլուծության և հատուկ գործնական վարժությունների միջոցով: Օրինակ՝ եռանկյան ներքին անկյունների գումարի մասին թեորեմի ապացուցման շարժառիթը և ծանոթացումը ապահովվում է երկու գործնական աշխատանքների կատարմամբ, որին մասին հանգամանալից անդրադարձ ենք կատարել էջ 55-ում՝ փորձի գիտական հետազոտության մեթոդի նկարագրման ընթացքում: Կատարելով չափումներ, հաշվելով իրենց տետրի թղթի վրա նկարած եռանկյան անկյունների գումարը և կտրման միջոցով վերադասավորելով անկյունները՝ աշակերտները հանգում են բուն թեորեմի ձևակերպմանն ու դրա ապացուցման անհրաժեշտությանը, ինչպես նաև ծանոթանում են թեորեմում արձարծված փաստին:

Երրորդ և չորրորդ փուլերին նվիրված է նախորդ՝ 5.2.3 պարագրաֆը:

Հաջորդ փուլի՝ թեորեմի բովանդակության գիտակցման համար կարելի է օգտագործել պնդման պայմանին եզրակացության առանձնացման վերաբերյալ վարժություններ, որոնց մասին դարձյալ խոսվել է նախորդ կետում:

Թեորեմի ձևակերպման մտապահման համար սովորաբար օգտագործվում է թեորեմի՝ գործնականում շատ տարածված ձևակերպումը մի քանի անգամ կրկնելու մեթոդիկան, ինչպես նաև, օրինակ, «Եթե երկու իրար զուգահեռ ուղիղներով տարված են հատվող հարթություններ, ապա այդ հարթությունների հատման գիծը զուգահեռ է այդ ուղիղներից յուրաքանչյուրին» թեորեմի ձևակերպման մտապահմանը նպաստում են խորանարդի կամ ուղղանկյուն զուգահեռանիստի մոդելի կամ նկարի վրա նման պատկերների որոնումը: Ընդհանրապես կարելի է ասել, որ գծագրերի միջոցով կարելի է բացահայտել շատ փաստեր և «համոզվել» դրանց ճշմարիտ լինելու մեջ:

Մեծածավալ ձևակերպումներ ունեցող թեորեմի ձևակերպումը մտապահելն առավել արդյունավետ դարձնելու համար նպատակահարմար է կիրառել թեորեմի բովանդակության ձևակերպումը մաս առ մաս՝ յուրացնելու այն մեթոդիկան, որը առաջարկում է հայտնի մեթոդիստ Գ.Ի. Սարանցը: Այդ նպատակով թեորեմը ձևակերպում, տրոհվում է առանձին տարրերի՝ մասերի՝ օգտագործելով ուղղակի գծիկներ՝ |. Օրինակ՝ երկանդամի քառակուսու մասին թեորեմի ձևակերպումը տրոհվում է հետևյալ տարրերի. «Երկանդամի քառակուսին հավասար է երեք արտահայտությունների գումարին. |առաջին անդամի քառակուսուն, |առաջին և երկրորդ անդամների կրկնապատիկ արտադրյալին |և երկրորդ անդամի քառակուսուն»: Այնուհետև կատարվում են յուրաքանչյուր տարրի յուրացմանն ուղղված վարժություններ ([103]):

Ճշմարիտ են արդյոք հավասարությունները.

$$\text{ա) } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ բ) } (a - 7)^2 = a^2 - 14a + 49, \text{ գ) } (3 + x)^2 = 9 + 3x + x^2,$$

$$\text{դ) } (-x + 5)^2 = x^2 - 10x + 25, \text{ ե) } (a - 2b)^2 = a^2 - 4ab + 2b^2:$$

Աշակերտներից մեկը հրավիրվում է գրատախտակի մոտ, իսկ մյուսը կարդում է տեքստը, մնացած աշակերտները աշխատում են իրենց տետրերում՝ նաև հետևելով գրատախտակի մոտ գտնվող աշակերտի գրառումներին:

(Թեորեմի ապացուցման նպատակահարմար մեթոդի ընտրության հարցի մասին տե՛ս [12] և [13] աշխատանքները):

Թեորեմի ապացուցման 8-րդ փուլին են նվիրված հաջորդ երկու ենթագլուխները:

Մեթոդապես անչափ կարևոր է, որ ամեն մի թեորեմի ուսուցումն ավարտվի թեորեմի կիրառության օրինակների լուծմամբ: Այդ նպատակով ուսուցիչը պետք է դասին նախապատրաստվելիս խնամքով պլանավորի այդ փուլի իրականացման համար անհրաժեշտ վարժությունների ու խնդիրների ընտրությունը: Անպայման պետք է սկսել պարզագույն՝ միաքայլ, երկքայլ խնդիրների լուծումից: Որպես կանոն՝ նման խնդիրները երկրաչափության դասագրքերում կա՛մ քիչ են, կա՛մ էլ բացակայում են: Ուստի ուսուցիչը պետք է բժախնդիր լինի, և ինքը լրացնի այդ բացը: Հանրահաշվում պատկերը այդ իմաստով էապես բարվոք է:

Այլ թեորեմների ու փաստերի հետ տվյալ թեորեմի կապը պետք է բացահայտվի թեորեմի բուն ապացուցման գործընթացում՝ հատուկ ընդգծելով բոլոր այն մաթեմատիկական փաստերի կարևորությունը, որոնք այդ ապացուցման ընթացքում օգտագործվում են որպես փաստարկ:

6.3. «Ապացուցում, «ապացուցման քայլ» և «ապացուցման մեթոդ» հասկացությունների բովանդակությունը

Տրամաբանությունն ինչ-որ ընդհանուր բան ունի մտածողության հետ. երբ մենք մտածողության ընթացքը դարձնում ենք մեր իսկ մտածողության առարկան, ապա այն անվանում ենք տրամաբանություն:
(Գ. Ֆրոյդենտալ [123;159])

Հայտնի մաթեմատիկոս Ռ. Դեկարտն ասում էր. **«Ես մտածում եմ, ուրեմն ես գոյություն ունեմ»**: Ըստ հոգեբան Օ. Կ. Տիխոմիրովի՝ «այս բանաձևը մարդու հոգեկան կյանքում առաջին պլան է մղում մտածողությունը՝ համարելով այն մարդու գոյության հայտանիշ: Ոչինչ, ըստ Դեկարտի, այդպես համոզիչ կերպով չի կարող ապացուցել մարդու գոյությունը, ինչպես մտածողության փաստը (ակտը)» [116; 8]: Հետևաբար ցանկացած մարդու՝ որպես բանական էակի դրսևորման լավագույն միջոցը սեփական մտածողության կարգավորումն է:

Հոգեբանության մեջ առանձնացվում են մտածողության ինտուիտիվ և տրամաբանական տեսակները: Կան, իհարկե, նաև այլ «դասակարգումներ», օրինակ՝ տեսողաշարժողական մտածողություն, պատկերային մտածողություն և խոսքատրամաբանական (լեզվատրամաբանական) մտածողություն:

Առաջին տրոհման հիմքում դրված է պրոցեսի ընթացքի տևողության՝ ժամանակային հայտանիշը, որը բնութագրվում է ընթացքի մակարդակով (գիտակցված կամ չգիտակցված) և կառուցվածքով (պրոցեսի տրոհումը փուլերի):

Տրամաբանական մտածողությունը բացված է ըստ ժամանակի, ունի հստակորեն ընդգծված փուլեր և որոշակիորեն ներկայացված է մտածող մարդու գիտակցությունում: Ինտուիտիվ մտածողությունը բնութագրվում է արագ (շատ արագ) ընթացքով, հստակ (ընդգծված) փուլերի բացակայությամբ, նվազագույն գիտակցվածությամբ [116;10]:

Տրամաբանական մտածողության ձևավորման կարևորագույն բաղադրիչը սովորողների ապացուցողական ունակությունների ձևավորումն է:

Գիտամեթոդական գրականությունում տարբերվում են **ոչ ձևական (բովանդակային)** և **ձևական ապացուցումներ**, որոնք համապատասխանաբար կիրառ-

վում են ոչ ձևական (կիսաձևական) և ձևական մաթեմատիկական տեսություններում [107; 226]:

Ձևական իմաստով ապացուցել A բանաձևը (թեորեմը) նշանակում է կառուցել բանաձևերի $A_1, A_2, \dots, A_n$ այնպիսի հաջորդականություն, որտեղ A_n -ը A -ն է, իսկ յուրաքանչյուր i -ի ($1 \leq i \leq n$) համար A_i -ն կա՛մ տրված ձևական տեսության աքսիոմ է, կա՛մ էլ որոշ նախորդ բանաձևերի անմիջական հետևանքն է՝ ըստ որևէ արտածման կանոնի [84; 36]:

Բովանդակային (ոչ ձևական) իմաստով «ապացուցումը տրամաբանական գործողությունն է, որի ընթացքում ինչ-որ մտքի ճշմարտություն հիմնավորվում է այլ մտքերի օգնությամբ: Այս տրամաբանական գործողությունն ունի հսկայական պրակտիկ նշանակություն շրջակա աշխարհի ճանաչողության ընթացքում ...: Բոլոր գիտություններում էլ ապացուցելու հարկ կա: Ընդ որում՝ այն մտքերի բովանդակությունը, որոնց ճշմարիտ լինելը պահանջվում է հիմնավորել, յուրաքանչյուր գիտությունում տարբեր է: Տրամաբանությունն էլ հենց գտնում է այն ընդհանուրը, որը բնութագրական է բոլոր այդ ապացուցումների համար՝ անկախ այս կամ այն ապացուցման կոնկրետ բովանդակությունից» [74; 159]:

Այսուհետև «ապացուցում» հասկացությունը տեքստում մեծ մասամբ օգտագործվելու է ոչ ձևական, ավելի ճիշտ՝ «*դպրոցական մաթեմատիկական պնդումների ապացուցում*» իմաստով:

Դպրոցական մաթեմատիկայի դասընթացը ներառում է բովանդակային շարադրանքով որոշ մաթեմատիկական տեսությունների հիմունքներ կամ տարրեր. թվաբանություն, հանրահաշիվ, մաթեմատիկական անալիզ, տարրական (էվկլիդեսյան) երկրաչափություն, անալիտիկ երկրաչափություն, եռանկյունաչափություն, միացությունների տեսություն և այլն: Այդ պատճառով էլ դպրոցական մաթեմատիկայում ապացուցումները բովանդակային դատողություններով կառուցված ոչ ձևական ապացուցումներ են:

Տրամաբանությունը յուրաքանչյուր ոչ ձևական ապացուցումում առանձնացնում է նրա երեք կառուցվածքային տարրերը՝ **թեզիս**, **հիմք** (փաստարկ, արգումենտ) և **կշռադատություն** (փաստարկում, արգումենտացիա, հիմնավորում, ցուցադրում) [54; 347-348], [74; 159], [28; 245]:

Թեզիս (հունարեն՝ *thesis* - *դրույթ, պնդում*) տրամաբանությունում կոչվում է այն պնդումը, որի ճշմարիտ լինելը պահանջվում է ապացուցել, հաստատել:

Հիմք կամ **փաստարկ** կոչվում է այն առաջադրությունը (պնդումը), որի ճշմարիտ լինելն արդեն նախկինում ստուգված կամ ապացուցված է, և որը կարող է օգտագործվել թեզիսի ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը հիմնավորելիս:

Կշռադատությունը կամ **փաստարկումը** այն եղանակն է, որի միջոցով թեզիսի ճշմարիտ լինելը բխում է ապացուցման հիմքերից, փաստարկներից [46], կամ՝ այն տրամաբանական դատողությունն է, որի ընթացքում փաստարկներից ար-

տածվում է թեզիսի ճշմարիտ (կեղծ) լինելը [74; 139], կամ տրամաբանական կանոնների այն հավաքածուն է, որոնք օգտագործվել են ապացուցման մեջ [85]:

Ինչպես դպրոցական երկրաչափության, այնպես էլ հանրահաշվի դասընթացների ուսումնասիրման ընթացքում տրամաբանական արտածման կանոնները սովորաբար չեն դառնում հատուկ ուսումնասիրության առարկա. նրանց ձևավորումը լավագույն դեպքում կատարվում է ինտուիտիվ մակարդակում:

Օրինակ՝ տրամաբանության դասընթացից հայտնի

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Եթե՝ } p, \text{ ապա՝ } q: \\ \text{Իրականում՝ } p: \end{array}}{\text{Հետևաբար՝ } q:} \quad \text{և} \quad \frac{\begin{array}{l} \text{Եթե՝ } p, \text{ ապա՝ } q: \\ \text{Եթե՝ } q, \text{ ապա՝ } s: \end{array}}{\text{Հետևաբար՝ եթե՝ } p, \text{ ապա՝ } s:}$$

արտածման՝ *MP* (*modus ponens*) և իմպլիկացիայի (սիլոգիզմի) կանոնները դպրոցական մաթեմատիկայի դասընթացներում գործում են աներևույթ¹, ոչ բացահայտ ձևով: Իսկ ահա *MT* (*modus tollens*).

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Եթե՝ } p, \text{ ապա՝ } q: \\ \text{Բայց իրականում՝ ոչ } q: \end{array}}{\text{Հետևաբար՝ ոչ } p:} \quad \text{կամ} \quad \frac{\begin{array}{l} \text{Եթե՝ ոչ } p, \text{ ապա՝ } q: \\ \text{Բայց իրականում՝ ոչ } q: \end{array}}{\text{Հետևաբար՝ } p:}$$

և փաստի տակ տանելու՝

$$\frac{\begin{array}{l} \forall x \in X (A(x) \Rightarrow B(x)) : \\ x_0 \in X, \quad A(x_0): \end{array}}{\text{Հետևաբար՝ } B(x_0):}$$

կանոնները չնայած գործում են ամենուրեք և կիսաբացահայտ, բայց հատուկ ուշադրության առարկա գրեթե չեն դառնում. *MT*-ն բացահայտ գործում է հակասող ենթադրությամբ ապացուցումներում, իսկ փաստի տակ տանելու գործողությունը, որն ունի կիրառության շատ մեծ շրջանակ, ինչպես 1-10-րդ դասարանների մաթեմատիկայի, այնպես էլ ցանկացած այլ առարկայի դասընթացներում, գործում է որևէ փաստ (կանոն, սահմանում, աքսիոմ, թեորեմ) կիրառելիս: Օրինակ՝ « $\Delta ABD = \Delta CBD$ ՝ ըստ III հայտանիշի: Քանի որ $AB = BC$, $AD = CD$, ըստ պայմանի՝ BD -ն ընդհանուր է» բացահայտ (շրջված) տեսքով կամ էլ «Հետևաբար՝ $\angle ABD = \angle CBD$ » կրճատ տեսքով:

Ապացուցումներ կատարելիս որպես թեզիս հանդես են գալիս ապացուցվելիք թեորեմը կամ խնդիրը: Ապացուցման հիմքերը մինչ այդ ուսումնասիրած մաթեմատիկական փաստերն են՝ թեորեմները, աքսիոմները, սահմանումները:

¹ Ի տարբերություն դպրոցական մաթեմատիկայի՝ [18] աշխատանքում հիմնավորված է, որ պատմության դպրոցական դասընթացներում այդ կանոնները գործում են բացահայտորեն:

Վերջապես կշռադատությունը կիրառված ապացուցման մեթոդն է, որն էլ պարզագույն (տարրական) ապացուցողական քայլերի (մտահանգումների) որոշակի կարգավորված հավաքածու է (հաջորդականություն):

«Մաթեմատիկական ապացուցում» հասկացության հետ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում իրար հետ սերտորեն կապված են նրա հետևյալ երեք բաղադրիչները՝ **ապացուցվելիք պնդումը** (թեորեմը կամ խնդիրը), **ապացուցման մեթոդը** և նրա **բովանդակային բաղադրիչը** (հիմքերի՝ փաստարկների հավաքածուն):

«Փիլիսոփայական հանրագիտարանային բառարանում» մեթոդը սահմանվում է որպես «իրականության պրակտիկ և տեսականորեն յուրացնելու համար անհրաժեշտ հնարքների և գործողությունների հավաքածու» ([118; 364]), իսկ ապացուցումը՝ «ճշմարտության հաստատման ընթացք (մեթոդ), դատողության ճշմարտացիության հիմնավորում» ([118; 173]): Այդ իսկ պատճառով էլ, որպես աշխատանքային սահմանում, այսուհետև **մաթեմատիկական պնդման ապացուցման մեթոդ** ասելով, կհասկանանք մաթեմատիկական պնդման ճշմարտացիությունը հաստատելու համար անհրաժեշտ հաջորդական, տրամաբանական գործողությունների (մտահանգումների) վերջավոր հավաքածու:

«Ապացուցում կատարելու կարողությունը» կամ որ նույնն է՝ «ապացուցելու կարողությունը» տարրալուծվում է կարողությունների (ունակությունների) մի շղթայի, որոնցից յուրաքանչյուրին հետագայում կանվանենք **տարրական ապացուցողական ունակություններ**: Ընդհանուր՝ «ապացուցելու ունակության» տրոհումը տարրական՝ այլևս չտրոհվող, ատոմական ունակությունների (ապացուցման քայլերի) լիովին համապատասխանում է ապացուցելու ունակության՝ որպես տրամաբանական մտածողության հնարքի հոգեբանական մեկնաբանությանը: Ինչպես նշում է Ն. Ֆ. Տալիզինան, հոգեբանությունում ցանկացած հնարք (մտավոր գործողություն) ընդունված է տրոհել այդ գործունեության որոշակի «միավորների»՝ գործողությունների ([114; 63]): Մեր դեպքում որպես նման «միավորներ» (աղյուսիկներ) հանդես են գալիս ապացուցողական տարրական ունակությունները:

Այսուհետև մենք երկու իմաստով էլ կիրառելու ենք «ապացուցողական ունակություն» հասկացությունը: Ընդ որում՝ ամեն անգամ միայն ենթատեքստից պարզ կլինի, թե որ իմաստով է այն օգտագործված՝ լա¹յն, թե² նեղ:

Ապացուցման մեթոդների դասակարգմամբ զբաղվել են շատ տրամաբաններ՝ Արիստոտել, Մ. Ի. Կորինսկի, Վ. Ֆ. Ասմուս, Գ. Ա. Բրուտյան և ուրիշներ: Տրամաբանությունում ընդունված է ապացուցման մեթոդները դասակարգել ըստ տարբեր հատկանիշների՝ «ըստ տանելու եղանակի», «ըստ մտահանգման ձևի, որով եզրափակվում է ապացուցումը», «ըստ բովանդակության ճշմարտացիության և հիմքերի ու թեզիսի միջև տրամաբանական կապի ճշտության» և այլն: Ըստ ապացուցումը

տանելու եղանակի՝ զանազանվում են **ուղիղ** (ուղղակի) և **անուղղակի** ([20], [22], [54], [74] և այլն), ըստ եզրափակիչ մտահանգման ձևի՝ **ինդուկտիվ** և **դեդուկտիվ** ([20], [74] և այլն) ապացուցումներ: Հանդիպում են նաև **ըստ էության և գենետիկ** ապացուցումներ:

Տրամաբանությունում ընդունված այս դասակարգումներն իրենց արտացոլումն են գտնում նաև գիտամեթոդական գրականության մեջ: Օրինակ՝ մի շարք մեթոդիստներ իրենց աշխատանքներում առանձնացնում են նաև անալիտիկ և սինթետիկ ապացուցումներ ([54], [85], [100] և ուր.):

Սույն հետազոտության համար հիմք է ծառայում ապացուցման մեթոդների դասակարգումն ըստ տանելու եղանակի: *Ապացույցը, որը հիմնված է ինչ-որ անտարակուսելի սկզբի վրա, որից անմիջականորեն արտածվում է թեզիսի ճշմարիտ լինելը, կոչվում է ուղիղ ապացույց: Ապացույցը կոչվում է անուղղակի (ոչ ուղիղ), եթե թեզիսի ճշմարիտ լինելը հիմնավորվում է թեզիսին հակադիր պնդման ճշմարտացիության հերքման միջոցով* ([54; 24], [85;148]):

Ապացուցման մեթոդների այս դասակարգման մեջ նման հիմքի ընդունումը արդարացված է նրանով, որ ինչպես երկրաչափության, այնպես էլ հանրահաշվի գործող դասընթացներում ուսումնական նյութի դեդուկտիվ շարադրման պայմաններում ապացուցումը տանելու եղանակը ձեռք է բերում առանձնահատուկ կարևորություն ([54;24]): Օրինակ՝ լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով թեորեմների ապացուցումներում լրիվ ինդուկցիան միայն սկսում է և ավարտում ապացույցը, իսկ առանց յուրաքանչյուր մասնավոր դեպքի՝ ենթաթեորեմների ապացուցման եղանակները ընկալելու, անհնար է համարել, որ ապացույցն ընկալված է ամբողջությամբ:

Գիտամեթոդական գրականության վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ հետազոտողները որպես ուղիղ ապացուցման տարատեսակներ նշում են համադրման և վերլուծական-համադրման մեթոդները, իսկ որպես անուղղակի ապացուցումներ՝ հակասության (հակասող ենթադրության) և բացառության մեթոդները:

Համադրման կոչվում է ապացուցման այն մեթոդը, որի հիմքում ընկած է մի դատողություն, որը ելնում է նրանից, ինչ արդեն տրված (հայտնի) է և ավարտում նրանով, ինչը պահանջվում է հաստատել, ապացուցել:

Վերլուծական-համադրման մեթոդը ապացուցման այնպիսի եղանակ է, երբ նախ պնդման (խնդրի) եզրակացությունը (պահանջը) այնքան է մոտեցվում պայմանին, մինչև որ հստակ երևում է դատողությունների շղթայի՝ համադրման մեթոդի առաջին քայլը (սկիզբը): Դրանից հետո միանում է համադրման մեթոդը և հակառակ կարգով շարադրելով վերլուծությունը՝ ավարտում ապացուցումը ([54; 25-26]):

Անուղղակի ապացուցման ամենատարածված տեսակը **հակասության մեթոդն** է, որը հաճախ գիտամեթոդական գրականության մեջ անվանվում է հակասող ենթադրության մեթոդ, ապագոգիկ անուղղակի ապացուցում, կամ ապա-

ցուցում՝ անհեթեթության հանգեցմամբ ([54; 26]): Սա «ոչ ուղիղ կամ ասես մի կողմ ուղղված ապացուցում է. որևէ պնդման ճշմարիտ լինելը ուղիղ և դրականորեն հաստատող փաստերի փոխարեն ժամանակավորապես ընդունվում է հակադիր պնդման ճշմարտությունը, որից արտածվում է հետևանք, որի արդյունքում մենք հանգում ենք հակասության: Դրա հիման վրա արվում է հետևություն, որ հակադիր պնդումը կեղծ է, և, հետևաբար ճշմարիտ է ապացուցվելիք պնդումը» ([74; 46]):

Այսպիսով՝ «հակասության մեթոդն ապացուցման այնպիսի եղանակ է, երբ ուղիղ ճանապարհով պայմանից պահանջը գնալու փոխարեն ենթադրվում է պահանջի հակադիր պնդման (ժխտման) ճշմարիտ լինելը, այստեղից այնուհետև արտածվում է հակասություն, որի հիման վրա հայտարարվում է, թե ճշմարիտ է ապացուցվելիք պնդումը» ([13; 33]):

Ինչպես հայտնի է, ուղիղ ապացույցը հենված է մի ենթադրության վրա, ըստ որի՝ պնդման պայմանը պարունակում է բավարար տեղեկություններ՝ եզրակացությանը հանգեցնող և տրամաբանորեն իրար հետ կապված քայլերի վերջավոր շղթա (հաջորդականություն) կառուցելու համար: Սակայն առանձին պնդումներն ապացուցելիս հաճախ մեզ չի հաջողվում գտնել ուղիղ ճանապարհով պնդման պայմանից դեպի եզրակացությունը ընթացող դատողությունների շղթան: Նման բան կարող է լինել ոչ թե այն պատճառով, որ մենք պարզապես անկարող ենք դա կատարել, այլ այն պատճառով, որ մարդկությանը պնդման A պայմանից դեպի B եզրակացությունը գնացող ուղիղ ճանապարհի դեռևս հայտնի չէ կամ էլ պարզապես հնարավոր չէ գտնել: Օրինակ, դիցուք, պահանջվում է ապացուցել, որ «Եթե x -ը ռացիոնալ թիվ է, իսկ y -ը՝ իռացիոնալ, ապա նրանց $x + y$ գումարը իռացիոնալ թիվ է» թեորեմը: Առանձնացնելով թեորեմի պայմանը կամ ենթադրությունը և եզրակացությունը՝ կստանանք՝

A. Տրված են x ռացիոնալ և y իռացիոնալ թվերը (ոչ բացահայտ տեղեկություն):

B. $x + y$ գումարը իռացիոնալ թիվ է:

Եթե այժմ մենք ցանկանում ենք ուղիղ ճանապարհով ստուգել այս պնդումը, ապա մենք, օրինակ, ստիպված պետք է դիտարկենք ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի բոլոր հնարավոր գումարները, ինչը հնարավոր չէ: Գոյություն ունի՞ արդյոք ավելի կարճ ճանապարհ: Իռացիոնալ է արդյոք $x + y$ գումարը:

Ապացույց: Ենթադրենք B եզրակացությունը ճշմարիտ չէ, այսինքն՝ ճշմարիտ է նրա ոչ B ժխտումը: Այսպիսով՝ մենք ենթադրում ենք, որ $x + y$ թիվը իռացիոնալ չէ: Սակայն իրական թիվը կարող է լինել կա՛մ ռացիոնալ, կա՛մ իռացիոնալ: Հետևաբար $x + y$ թիվը ռացիոնալ է: Ուստի համաձայն ռացիոնալ թվի սահմանումներից մեկի՝ $x + y = m/n$, որտեղ $n \in \mathbb{N}$ և $m \in \mathbb{Q}$:

Քանի որ, ըստ ենթադրության, x -ը նույնպես ռացիոնալ է, ուստի՝ $x = a/b$, $b \neq 0$:

Լուծելով a, b, m, n պարամետրերով $a/b + y = m/n$ հավասարումը y -ի նկատմամբ՝ կստանանք՝ $y = (mb - an)/nb$, որտեղ $nb \neq 0$, քանի որ $b \neq 0$ և $n \neq 0$: Իսկ քանի որ $y = mb - an$ և nb թվերը ամբողջ թվեր են, ուստի y -ը նույնպես ռացիոնալ թիվ է: Այսինքն՝ ճշմարիտ է ոչ A պնդումը: Այսպիսով՝ մենք ապացուցեցինք, որ ճշմարիտ է ոչ $B \Rightarrow$ ոչ A պնդումը, որն էլ, ինչպես նշել ենք, համարժեք է $A \Rightarrow B$ պնդմանը: Ապացույցն ավարտված է:

Անուղղակի ապացուցման հաջորդ տեսակը **բաժանարար** կամ **բացառության** մեթոդով կատարած ապացուցումն է: Այն կիրառվում է այն դեպքում, երբ հայտնի է, որ ապացուցվելիք թեզը, օրինակ, « B_1 կամ B_2 կամ B_3 » ճշմարիտ բաժանարար պնդման բաղադրիչներից մեկն է (օրինակ՝ B_1 -ը): Մեթոդի կառուցվածքը հետևյալն է. նախ որոնվում է վերոհիշյալ բաժանարար ճշմարտությունը, ապա հակասության մեթոդով մեկ առ մեկ բացառվում են բոլոր՝ (B_2 և B_3) դեպքերը՝ բացի մեկից՝ B_1 -ից: Սրա հիման վրա եզրակացվում է, որ ճշմարիտ է B_1 -ը ([13; 33]):

Ինչպես նշում է Գ. Բրուսյանը, «բաժանարար անուղղակի ապացուցման դեպքում քննարկվող հարցի վերաբերյալ սովորաբար գոյություն են ունենում մի շարք ենթադրություններ, որոնցից մեկն էլ ապացուցվող թեզն է: Մեկ առ մեկ ժխտվում են, ապացուցվող թեզից բացի, մյուս ենթադրությունները, մնում է միակ ենթադրությունը՝ ապացուցվող թեզը, որը և համարվում է ապացուցված՝ որպես միակ հնարավոր ենթադրություն տվյալ հարցի վերաբերյալ» ([20; 262]):

Բաժանարար դատողությունն այնպիսի «դատողություն է, որում ասվում է, որ տրված առարկային վերագրվում է (կամ չի վերագրվում) այդ դատողության մեջ նշված հայտանիշներից միայն մեկը» ([74; 507]):

Բացառության մեթոդի հիմքում ընկած է **բացառության կանոնը**, որն ունի հետևյալ տրամաբանական կառուցվածքը ([214; 27]).

$$\frac{B_1 \vee B_2 \vee B_3, \neg B_2, \neg B_3}{B_1} :$$

Բացի վերոհիշյալ՝ ուղիղ և անուղղակի մեթոդներից՝ տրամաբանությունում և ուսումնամեթոդական գրականությունում կիրառվում են նաև երկու մեթոդներ, որոնք հավասար իրավունքով հաճախ դասվում են ինչպես ուղիղ, այնպես էլ անուղղակի մեթոդների թվին: Դրանք **լրիվ ինդուկցիայի** և **կառուցարկման** մեթոդներն են:

Լրիվ ինդուկցիան ինդուկտիվ մտահանգման տեսակ է, որի արդյունքում ընդհանուր պնդում է արվում ինչ-որ առարկաների ողջ բազմության մասին, այդ բազմության, առանց բացառության, բոլոր առարկաների մասին ունեցած գիտելիքների հիման վրա միայն: Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդը հիմնված է **լրիվ ինդուկցիայի կանոնի** վրա, որի բանաձևը հետևյալն է ([54; 27]).

S_1 -ը P է, S_2 -ը P է, S_3 -ը P է:

Բայց S_1, S_2, S_3 -ը ամբողջովին սպառում են S -ը:

Հետևաբար՝ S -ը P է:

Տրամաբանությունում զանազանվում է լրիվ ինդուկցիայի երկու տեսակ.
1. *լրիվ ինդուկցիա նմուշներից (վերջավոր բազմության տարրերից) դեպի դասը (բազմությունը):* Լրիվ ինդուկցիայի այս տեսակը կիրառվում է, երբ դասի նմուշների կամ բազմության տարրերի քանակը մեծ չէ: 2. *Լրիվ ինդուկցիա տեսակներից (ենթաբազմություններից) դեպի դասը (բազմությունը):* Ինդուկցիայի այս տեսակը հաճախ է կիրառվում մաթեմատիկայում, երբ բազմության տարրերի քանակը շատ մեծ է, կամ բազմությունն անվերջ է [54; 28]:

Այն դեպքում, երբ ապացուցվելիք առնչության որոշման տիրույթը N -ն է, կիրառվում է լրիվ ինդուկցիայի մի այլ տեսակ՝ **լրիվ մաթեմատիկական** կամ պարզապես **մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը**: Այս մեթոդը հիմնված է **մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի** վրա. «*n* բնական պարամետրից կախված $A(n)$ պնդումը համարվում է ապացուցված, եթե ապացուցված է $A(1)$ -ը և ցանկացած n բնական թվի համար այն ենթադրությունից, որ $A(n)$ -ը ճշմարիտ է, արտածվում է, որ $A(n+1)$ -ը» [83; 338]:

Կառուցարկման (կոնստրուկտիվության) մեթոդը կիրառվում է օբյեկտի (հարաբերության) գոյության ապացույցներում: Այն ունի անչափ մեծ կիրառության շառավիղ ոչ միայն երկրաչափությունում, այլև մնացած՝ մաթեմատիկական, բնական, հասարակական գիտություններում ([54; 29]): Կառուցարկման մեթոդը չունի որոշակի տրամաբանական կառուցվածք: Որոշակիորեն, կարելի է ասել, որ այս մեթոդով կատարված ապացուցումներն ունեն երկու փուլ՝ ա) *որոնելի օբյեկտի կառուցարկում («կառուցում» և բ) ապացուցում (որ այդպես «կառուցված» օբյեկտը այն է, ինչի գոյությունը պահանջվում էր ապացուցել):*

Բացի ապացուցման վերոհիշյալ մեթոդներից՝ հաճախ հանդիպում է ապացուցման ևս մեկ տեսակ, որը որոշակիորեն տարբերվում է թվարկված մեթոդներից: Ապացուցման այդ տեսակը որևէ թեզի սխալ կամ անհիմն լինելու ապացուցումն է՝ **հերքումը**:

Ըստ Գ. Բրուսյանի՝ տրամաբանությունում զանազանվում է հերքման երեք հիմնական ձև:

1. Թեզը հերքելու ժամանակ այդ թեզին հակադրում են այնպիսի փաստեր, որոնցից ուղղակի բխում է հերքվող թեզի սխալ լինելը: Հերքման այս ձևը կոչվում է **հերքում փաստերի միջոցով**:

2. Ապացուցում են հերքվող թեզին հակասող թեզի՝ հակաթեզի ճշմարիտ լինելը և երրորդի բացառման օրենքի համաձայն՝ սխալ համարում հերքվող թեզը:

3. Այս դեպքում ենթադրում ենք հերքվող թեզի ճշմարիտ լինելը և ուսումնասիրում, թե ինչ հետևանքներ են բխում այդ թեզից: Նկատելով, որ տվյալ հետևանքները հակասում են գոյություն ունեցող հայտնի ճշմարտություններին,

եզրակացնում ենք այդ հետևանքների սխալ լինելը: Իսկ հետևանքների սխալ լինելուց էլ բխեցնում ենք հիմքի, այսինքն՝ հերքվող թեզի սխալ լինելը [20; 264]:

Ըստ Գ. Բրուսյանի՝ հերքումը կարող է ուղղված լինել ապացուցման բաղկացուցիչ տարրերի՝ հիմքերի, փաստարկման և թեզի դեմ: Հերքումն ուղղված է հիմքերի դեմ, երբ ապացուցվելիք թեզը ճշմարիտ է, բայց նրա ապացուցման համար բերված փաստարկները (հիմքերը) անհաջող են և չեն կարող հիմնավորել ապացուցվող թեզը: «Այս երևույթը հատկապես նկատելի է թույլ աշակերտների կամ ուսանողների պատասխաններում: Նրանք հիշում են, թե ինչ պետք է ապացուցեն, ճիշտ են ձևակերպում ապացուցվող թեզը, սակայն չեն կարողանում առաջադրված թեզն ապացուցելու համապատասխան փաստարկներ բերել» [34ա; 266]: Նման դեպքերում հերքվում են սովորողի կողմից բերված ոչ ճիշտ հիմքերը, այսինքն՝ հերքումն ուղղում են հիմքերի դեմ:

Կարող է պատահել նաև, որ ապացուցվելիք ճշմարիտ թեզի և նրա հիմնավորման համար անհրաժեշտ հիմքերի առկայության պարագայում անգամ սխալ է այդ հիմքերից թեզի բխեցման ձևը՝ փաստարկումը: Այս դեպքում հերքումն ուղղում են փաստարկման (մեթոդի) դեմ: Սակայն, ինչպես նշում է Գ. Բրուսյանը, անհրաժեշտ է հիշել, որ փաստարկները կամ փաստարկումը հերքելը բոլորովին էլ չի նշանակում ապացուցվող թեզի հերքում: *«Ապացուցվող թեզը հերքվում է միայն այն դեպքում, երբ հերքումը այս կամ այն եղանակով ուղղված է լինում հենց իր՝ բուն թեզի դեմ»* [20; 266]:

6.4. Միջնակարգ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացի ապացուցման մեթոդները

Հիմնական դպրոցի 6-8-րդ դասարանների հանրահաշվի և երկրաչափության նախկին և գործող դասագրքերի ինչպես տեսական նյութերի, այնպես էլ խնդիրների համակարգերի տրամաբանական վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ ավանդաբար մաթեմատիկայի դասընթացում բացահայտ կամ կիսաբացահայտ տեսքով գործում են ապացուցման համադրման, վերլուծական-համադրման, հակասության, բացառության, լրիվ ինդուկցիայի, կառուցարկման մեթոդները, ինչպես նաև փաստի հերքման հակաօրինակի և թերի մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդները:

Հանրահաշվի գործող դասագրքերում այդ մեթոդները հանդես են գալիս ինչպես ավանդական, այնպես էլ ոչ ավանդական ձևերով: Ընդ որում, բացի հակասության մեթոդից, ՀՀ նախկին՝ «Հանրահաշիվ 6-8(7-9)» դասընթացում կիրառվում է նաև *հակասող ենթադրության* մեթոդի մի տարատեսակ, որը կիրառվում է միակության ապացուցումներում և չի հանգեցնում հակասության, այլ ենթադրե-

լով, որ որոնելի օբյեկտը (հարաբերությունը) միակը չէ, օրինակ, երկուսն է, ցույց է տրվում, որ իրականում դրանք իրար հավասար են:

Հայտնի է, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասագրքերի դասանյութերում գետեղված մաթեմատիկական պնդումների ապացուցումներն ու խնդիրների լուծումները յուրահատուկ ցուցանմուշի դեր են կատարում: Հեղինակային այդ ապացուցումներն ու լուծումները ցուցադրում են նաև, թե սովորողները ինչպես (ինքնուրույն) պետք է կատարեն դասանյութի վերջում գետեղված վարժություններն ու խնդիրները: Հետևաբար, եթե որևէ ապացուցման մեթոդ դասանյութի տեսական մասում մեկնաբանված ու ցուցադրված չէ, անտրամաբանական է մտածել, որ տնային ու դասարանական հանձնարարությունները կատարելիս սովորողները դրանք կկարողանան կիրառել:

Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայում ավանդաբար պահանջվում է, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասագրքի խնդիրների հավաքածուն լինի հավակարգված: Դա անչափ կարևոր չափանիշներից մեկն է, որով սովորաբար պարզում են մաթեմատիկայի ցանկացած նոր դասագրքի ու խնդրագրքի պիտանելիության հարցը: Սակայն հազվադեպ են հանդիպում դասանյութի տեսական մասի շարադրմանը վերաբերող նման պահանջ-չափանիշներ: Մեր կարծիքով՝ լավ դասագիրքը ոչ միայն ունի համակարգված խնդիրների ու վարժությունների հավաքածու, այլև տեսական նյութի բացատրությունում պետք է անհրաժեշտ համամասնությամբ գետեղված լինեն բոլոր այն տրամաբանական կառույցները (մեթոդները, արտածման կանոնները), որոնք անհրաժեշտ են դասագրքի խնդիրներն ու վարժությունները լուծելու համար:

Նշենք, որ ոչ ավանդական արտածումները, որոնք հանդիպում են ՀՀ միջնակարգ դպրոցի նախկին և արտասահմանյան որոշ դասագրքերում, էապես նպաստում են հիմնական դպրոցի շրջանավարտների փաստարկման կարողությունների ու ալգորիթմական մտածողության ձևավորմանը, որն էլ իր հերթին նպաստում է նրանց ճանաչողական ունակությունների և տրամաբանական մտածողության ձևավորմանը:

Մաթեմատիկայի դասավանդման ավանդական մեթոդիկան հիմնականում ի գործ է ածել ձևավորել սովորողների գերակշռող մեծամասնության տրամաբանական մտածողությունը, մասնավորապես ապացուցողական ունակությունները: Ավանդական մեթոդիկայով մատուցված (ավանդական) ապացուցումները հնարավորություն չէին տալիս սովորողներին տեսնելու այդ արտածումներում կիրառված տրամաբանական կառույցները և դրանք ընկալելու որպես տրամաբանական (ապացուցողական) որոշակի քայլերի հաջորդականություն («ալգորիթմ») և հետևաբար նաև ճանաչելու կիրառված ապացուցման մեթոդը, որի անունն անգամ մեծ մասամբ չի հիշատակվում դասագրքերում: Բացառություն են կազմում միայն

հակասող ենթադրության (հակասության) և մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդները:

Մաթեմատիկական ապացուցումների ուսուցման մեթոդիկային նվիրված գրականությունում նշվում է, որ դպրոցական մաթեմատիկայի ամենակիրառական ապացուցման մեթոդը՝ համադրումը, ունի մեկ դժվարություն՝ ապացուցման առաջին, ինչպես նաև, ցանկացած հաջորդ քայլի ընտրությունը: Ինչպես գրում է Վ. Վ. Ռեպյովը, «այդ իմաստով մեթոդն ունի առանձնահատուկ թերություն: Ապացուցումը որոնողի տրամադրության տակ չկա ճանապարհի ընտրության որևէ չափանիշ. նա չգիտի՝ որ ճանապարհով պետք է գնա, որպեսզի պնդման պայմանը մոտեցնի եզրակացությանը: Ապացուցողի տրամաբանության տակ չկա նաև այն բանի չափանիշը, թե որպես ելակետային ինչ պնդումներ ընտրել, ինչպիսի հետևություններ կատարել դրանցից և այլն: Այնուամենայնիվ, այն ունի որոշակի նշանակություն՝ արժեք, հատկապես այն դեպքերում, երբ թեորեմի պայմանը եզրակացությանը կապող տրամաբանական իրավիճակները բարդ չեն» [101; 109]:

Իրականում լրիվ ինդուկցիան միայն սկսում է և ավարտում ապացուցումը, իսկ ապացուցման հիմնական ծանրությունը ընկնում է այն ուղիղ կամ անուղղակի ապացուցման մեթոդների վրա, որոնցով կատարվում է թեորեմի ապացուցումը յուրաքանչյուր դեպքում: Այս պատճառով մեթոդական գրականությունում սխալմամբ լրիվ ինդուկցիայով կատարված ապացուցումները հաճախ դասվում են ուղիղ կամ անուղղակի ապացուցումների թվին՝ կախված այն բանից՝ ուղիղ մեթոդով են ապացուցված ենթաթեորեմները, թե անուղղակի մեթոդով:

Լրիվ ինդուկցիայով կատարված ապացուցումների ամենադժվար պահերն են՝ ա) ճշմարիտ բաժանարար դատողության ընտրությունը, բ) օբյեկտների Q բազմության տրոհումը զույգ առ զույգ չհատվող, ոչ դատարկ դասերի (դեպքերի) և գ) այն բանի հիմնավորումը, որ սպառվել (քննարկվել) են բոլոր դեպքերը: Բացի դրանից՝ կարելի է նշել հիմնական դպրոցում այդ մեթոդի կիրառության ևս մի առանձնահատկություն՝ դատողությունների բազմափուլությունը:

Գրեթե նույն դժվարություններն են ուղեկցում նաև բացառության մեթոդին: Հենց այդ դժվարություններն են պատճառը, որ ավանդաբար այդ մեթոդները դասվում են մաթեմատիկայի դասընթացի ամենաբարդ մեթոդների շարքին, իսկ այդ մեթոդներով կատարված ապացուցումները անմատչելի են հիմնական դպրոցի շատ սովորողների համար:

Ավանդաբար դժվար մեթոդների շարքին է դասվում նաև կառուցարկման մեթոդը: Համենայն դեպս, երկրաչափությունում դա այդպես է (որպես օրինակ՝ տե՛ս [43] աշխատանքի էջ 30-ում բերված խնդրի լուծումը կառուցարկման մեթոդով. երկու փուլ՝ կառուցարկում, ապացուցում և տասը տրամաբանական քայլ):

Ուսումնասիրությունները ցույց են տալիս, որ երկրաչափության և հանրահաշվի դպրոցական դասընթացների ապացուցման առաջատար մեթոդը համա-

դրումն է: Միաժամանակ այն ցանկացած այլ մեթոդով կատարված ապացուցումների բաղկացուցիչ մաս է: Օրինակ՝ հակասության մեթոդի էությունը բացահայտվում է հետևյալ թեորեմով.

« $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B$, եթե որպես տրամաբանական հետևություն $A_1, A_2, \dots, A_m$ և $\neg B$ բանաձևերից կարելի է արտածել հակասություն» [102; 104]: Եթե այստեղ $A_1, A_2, \dots, A_m$ բանաձևերի տակ հասկանանք ապացուցվելիք պնդման պայմանը, իսկ B -ի տակ՝ եզրակացությունը, ապա որպեսզի $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ պայմանից արտածենք B -ն, բավական է A -ից և $\neg B$ -ից արտածել հակասություն, այսինքն՝

$$A, \neg B \vdash C \ \& \ \neg C, \quad (\alpha)$$

որն էլ դպրոցական մաթեմատիկայում կատարվում է համադրման մեթոդով:

Այսպիսով՝ հակասության մեթոդով ապացուցման էական մասը (α) արտածման ստացումն է համադրման մեթոդով: Իսկ դա նշանակում է, որ հակասության մեթոդով իրականացված ապացուցումներում կիրառվում են հակասության կառույցը և համադրման մեթոդը:

Վերլուծական-համադրման մեթոդի էությունից բխում է, որ այդ մեթոդով իրականացված ապացուցումներում կիրառվում են պնդման եզրակացության վերլուծությունը և համադրումը: Ընդ որում, եթե վերլուծության ընթացքում ամենուրեք պահպանվում է բանաձևերի համարժեքությունը, ապա համադրումն ավելորդ է:

Անուղղակի ապացուցման մյուս տեսակի՝ բացառության մեթոդի էությունից բխում է, որ այդ մեթոդով իրականացված անուղղակի ապացուցումները հանգում են բացառության կառույցի կիրառմանը¹ և հակասության մեթոդով մնացած այլընտրանքների (դեպքերի) բացառմանը՝ հերքմանը:

Մաթեմատիկական ապացուցումների վերլուծությունը ցույց տվեց նաև, որ կառուցարկման մեթոդով կատարված ապացուցումը սկսվում է այն օբյեկտի (հարաբերության) կառուցարկումից, որի գոյությունը պահանջվում է ապացուցել, և ավարտվում է ապացուցումով, այսինքն՝ այն փաստի հիմնավորմամբ, որ այդպես կառուցարկված օբյեկտը (հարաբերությունը) իսկապես պատկանում է թեորեմի (լեմմայի) պայմանով որոշվող օբյեկտների դասին: Ընդ որում՝ սովորաբար այդ փաստի ապացուցումը կատարվում է «փաստի տակ տանելու» գործողությամբ (համադրման մեթոդով տրված հասկացությունը բնութագրող հատկանիշների իրականացման ստուգում):

Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդը կիրառվում է $\forall x \in X (A(x) \Rightarrow B(x))$ տիպի տրամաբանական ձև ունեցող թեորեմներ ապացուցելիս, որտեղ այդ պնդման ընդհան-

¹ Բացառության կառույցն ենթադրում է հետևյալ ունակությունների կիրառությունը.

- կարողանալ գտնել ակնհայտ կամ արդեն ապացուցված ճշմարիտ, բաժանաբար դատողություն, որի բաժանաբար անդամներից մեկը ապացուցվելիք պնդումն (պահանջն) է,
- կարողանալ հերքել (բացառել) բոլոր դեպքերը բացի մեկից,
- կարողանալ օգտվել բացառության կանոնից:

րության շնորհիվ սովորողներին հայտնի բաժանարար դատողության միջոցով ընդհանրության քվանտորի որոշման տիրույթը տրոհվում է չհատվող և ոչ դատարկ դասերի (դեպքերի): Այդ պատճառով լրիվ ինդուկցիայի կառույցը ենթադրում է.

- 1) սովորողներին հայտնի ճշմարիտ բաժանարար դատողության որոնում,
- 2) թեորեմի բացատրամասում խոսվող օբյեկտների բազմության տրոհում դեպքերի (դասերի),
- 3) ուղիղ կամ անուղղակի մեթոդներով թեորեմի ապացուցում յուրաքանչյուր դեպքում,
- 4) լրիվ ինդուկցիայի կանոնի կիրառում:

Պնդման հերքման հակօրինակի մեթոդով իրականացված ապացուցումները, որպես կանոն, սկսվում են այն օբյեկտի՝ հակաօրինակի որոնմամբ, որի համար՝

$$\forall x \in X(A(x) \Rightarrow B(x))$$

ընդհանրական պնդման $A(x)$ պայմանը ճշմարիտ է, իսկ, հակառակը, $B(x)$ եզրակացությունը՝ կեղծ:

Հաջորդ փուլում ապացուցվում (ստուգվում) է, որ ճշմարիտ են $A(x_0)$ և $\neg B(x_0)$ բանաձևերը:

Մեծ մասամբ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպող հերքման առաջադրանքներում որոնվող $x_0 \in X$ օբյեկտը թիվ է կամ երկրաչափական պատկեր, որը գտնելը առանձնապես մեծ դժվարություն չի ներկայացնում: Սակայն հաճախ այդ օբյեկտի որոնումը միանգամից հնարավոր չէ. այն անհրաժեշտ է կառուցարկել այնպես, որ ճշմարիտ լինի $A(x_0)$ & $\neg B(x_0)$ բանաձևը: Նման իրավիճակի մենք հանդիպում ենք մաթեմատիկայի պատմությունում: Որպես օրինակ՝ կարելի է նշել Էվկլիդեսի կողմից պարզ թվերի անվերջության ապացուցումը, որտեղ «պարզ թվերի բազմությունը վերջավոր է, և դրանք $p_1 = 2, p_2, p_3, \dots, p_n$ թվերն են» պնդումը հերքելու համար կառուցարկվում է $X_0 = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ թիվը, որը ակնհայտորեն չի բաժանվում $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ պարզ թվերից և ոչ մեկի վրա, ուստի այն ևս պարզ է:

Այսպիսով՝ կատարած վերլուծությունները թույլ են տալիս եզրակացնել, որ ապացուցման գործընթացներում, բացի համադրման մեթոդից, ապացուցման մնացած մեթոդներից և ոչ մեկը «մաքուր» վիճակում, միայնակ չի գործում, այլ դրանք կիրառվում են որոշակի հավաքածուներով՝ միակցություններով: Ընդ որում՝ յուրաքանչյուր ապացուցումում կարելի է առանձնացնել ապացուցման առաջատար մեթոդը և նշել օժանդակ մեթոդները: Առաջատար մեթոդը սկսում է և ավարտում ապացուցումը, տանում է ապացուցման ընդհանուր գիծը՝ մարտավարությունը, իսկ օժանդակ մեթոդները կատարում են միջանկյալ աշխատանք՝ իրենց վրա վերցնելով առանձին դեպքերի հիմնավորումը կամ հերքումը և այլն:

Ավանդաբար ապացուցման եղանակը բնութագրելիս անվանվում է միայն առաջատար մեթոդը, օրինակ՝ «ապացուցում հակասության մեթոդով» կամ «ապացուցում լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով» և այլն:

Հենց այս իմաստով էլ կարելի է խոսել ոչ թե առանձին մեթոդի, այլ մեթոդների միակցության (կոմպլեքսի) մասին՝ ավանդաբար շարունակելով դրանք անվանել յուրաքանչյուրն ըստ իր առաջատար մեթոդի:

Այսպիսով՝ միջնակարգ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում գործում են ապացուցման մեթոդների հետևյալ միակցությունները (կոմպլեքսները).

1. համադրման մեթոդ,
2. վերլուծական-համադրման մեթոդ = [վերլուծություն] + [համադրման մեթոդ],
3. հակասության մեթոդ = [հակասության կառույց] + [համադրման մեթոդ],
4. բացատրության մեթոդ = [բացատրության կառույց] + [հակասության մեթոդ]
5. հերքում հակաօրինակի մեթոդով = [օբյեկտի կառուցարկում, որոնում] + [համադրման մեթոդ]:
6. կառուցարկման մեթոդ = [օբյեկտի կառուցարկում] + [համադրման մեթոդ],
7. լրիվ ինդուկցիայի մեթոդ = [լրիվ ինդուկցիայի կառույց] + [համադրման մեթոդ] կամ [հակասության մեթոդ],
8. մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդ = [մաթ.ինդուկցիայի սկզբունք] + [համադրման մեթոդ]:

Վերոհիշյալ հավաքածուների մեջ մտնող մեթոդների տարրերը մաթեմատիկական պնդումների ապացուցման ընթացքում հանդես են գալիս որպես մի ամբողջական համակարգի տարրեր: Դեռ ավելին՝ կոնկրետ իրավիճակներում, այսինքն՝ կոնկրետ թեորեմների ապացուցումներում կամ խնդիրների լուծումներում սովորողների կողմից հաճախ չեն ընկալվում, չեն գիտակցվում առանձին՝ ինչպես առաջատար, այնպես էլ՝ օժանդակ մեթոդների կիրառությունը: Նույնիսկ մեթոդական գրականությունում որոշ հեղինակներ, օրինակ՝ բացատրության մեթոդով կատարված ապացուցումները անվանում են *հակասող ենթադրության* մեթոդ: Այդ պատճառով էլ «յուրաքանչյուր կոնկրետ ապացուցումում կիրառված մեթոդների ողջ միակցության ու նրանց տարրերի ընդհանուր հավաքածուն ընկալվում է որպես մի ամբողջություն կազմող գիտելիքների ու ունակությունների հավաքածու, այսինքն՝ ապացուցողական գիտելիքների ու ունակությունների կոմպլեքս» [58; 585]:

Ասվածից հետևում է, որ ապացուցման մեթոդների ուսուցման պարտադիր արդյունքների մեջ համադրման մեթոդի հետ միասին պետք է քննարկել նաև սովորողների կողմից ապացուցման մեթոդների հետևյալ հիմնական կառույցների յուրացումը՝ հակասության, բացատրության, լրիվ ինդուկցիայի և կառուցարկման: Ընդ որում՝ սովորողները պետք է հասկանան ապացուցման ընթացքում այդ կառույցների և համադրման մեթոդի համագործակցության եղանակը:

Կառուցարկումը, ինչպես արդեն նշել ենք, գոյության փաստի ապացուցման առաջին փուլն է: Սակայն որոշ հետազոտողներ կառուցարկումը համարում են նաև համադրման մեթոդով կատարված երկրաչափական ապացուցումների պարտադիր մասը, կառուցարկում ասելով՝ հասկանում են երկրաչափական թեորեմի (խնդրի) գծագրի կառուցումը՝ որպես օժանդակ միջոց:

Գիտամեթոդական գրականությունում խնդրի գծագրի դերի հարցը մինչ օրս համարվում է վիճելի և լուծված չէ: Որոշ մաթեմատիկոսներ (Ժ. Դեդոնե) գտնում են, որ գծագիրը միայն վնասում է երկրաչափությանը [66], իսկ մյուսները (Ա. Դ. Ալեքսանդրով և ուրիշներ), հակառակը, գտնում են, որ «երկրաչափական մեթոդն էլ հենց այն է, որում տրամաբանական ապացուցումը կամ խնդրի լուծումը ուղղորդվում է զննական ներկայացմամբ, ամենից լավը այն է, երբ ապացուցումը կամ լուծումը, կարելի է ասել, բխում է զննական նկարից: (Հին հնդկական հետազոտություններում պատահում է այնպես, որ ապացուցումը հանգեցվում է գծագրին, որը ուղեկցվում է մեկ բառով «Տե՛ս»... Այս մոտեցումը պետք է սովորեցնել նաև աշակերտին՝ սկսելով գծագրից, ուրվագծից, զննական նկարագրից)» [51; 58]: Այս իմաստով գծագրի հարցը պատկանում է զննականության պրոբլեմներին և՛ ոչ թե մեր հետազոտության առարկային:

Հետագայում օբյեկտի կառուցարկումը և համապատասխան մեթոդը մենք կմեկնաբանենք լայն իմաստով, որպես որևէ փաստի գոյության ապացուցման մաս: Այս իմաստով կառուցարկման մեկնաբանման կարևորության մասին նշում է Ֆ. Ասմուսը. «Որպեսզի սահմանումը գիտության համար պիտանի լինի, անհրաժեշտ է, որ սահմանվող առարկան իրականում գոյություն ունենա: Այդ պատճառով և՛ բնագիտությունում, և՛ հասարակական գիտություններում սահմանման ընդունումը ենթադրում է, որ կարող է և պետք է ապացուցվի այդ սահմանմամբ բնութագրվող առարկայի գոյությունը... Պետք է ապացուցվի նաև սահմանման համապատասխանությունը սահմանվող առարկային» [54; 22]:

Այսպիսով՝ ապացուցման մեթոդների ուսուցման արդյունքները պլանավորելիս անհրաժեշտ է քննարկել սովորողների կողմից համադրման մեթոդի, հակա-սության, բացառության և լրիվ ինդուկցիայի կառույցների յուրացման, ինչպես նաև կառուցարկման մեթոդի և հերքման հակաօրինակի մեթոդի էությունը հասկանալու հարցերը:

6.5. Ապացուցումների տեսության պատմությունից

Ապացուցումը և նրա եղանակները մշտապես եղել են գրեթե բոլոր տրամաբանների, բազմաթիվ մաթեմատիկոսների և մեթոդիստների ուշադրության կենտրոնում, որովհետև այդ տրամաբանական գործողությունը հսկայական պրակտիկ նշանակություն ունի շրջակա աշխարհի ճանաչման գործընթացում:

Արիստոտելը (384–322 մ. թ. ա.) ապացուցելու ունակությունը համարում էր մարդու ամենաբնութագրիչ հատկանիշը: «...Չի կարող ամոթալի չլինել ինքն իրեն խոսքով (մտքով) -Է. Ա.) օգնելու անկարողությունը, - գրում է Արիստոտելը իր «Ճարտասանությունում», - քանի որ մարդկային բնույթին ավելի հատկանշական է ավելի շատ խոսքից, քան մարմնից օգտվելը» [74; 158]:

Մաթեմատիկական պնդումների ապացուցման ակունքները սկսվում են հին Բաբելոնից և Եգիպտոսից: Մաթեմատիկայի պատմությունից հայտնի է, որ մ. թ. ա. երրորդ հազարամյակի վերջում Բաբելոնում գոյություն է ունեցել մեծ մասամբ երկրաչափական լեզվով ձևակերպված և լավ զարգացած տարրական թվաբանություն և հանրահաշիվ: Ենթադրվում է, որ Բաբելոնում մաթեմատիկայով զբաղվել են քրմերը, [123; 10]: Համաձայն բաբելոնական հայտնի կավե արձանագրությունների՝ տաճարներին կից դպրոցների սաներին երկու հազար տարիների ընթացքում առաջարկվում էին ոչ միայն զուտ պրակտիկ բովանդակությամբ խնդիրառաջադրանքներ: Այդ խնդիրների մեջ հանդիպում էին տեքստային խնդիրներ, կատակ - (տրամաբանական) խնդիրներ, զուտ երկրաչափական բովանդակությամբ խնդիրներ, որոնց լուծումը ակնհայտորեն պահանջում էր որոշակի փաստերի իմացություն և ապացուցողական ունակությունների տիրապետում: Օրինակ՝ խնդիրներից մեկում պահանջվում է «65 ոսկուց բաղկացած ժառանգությունը բաժանել հինգ եղբայրների միջև այնպես, որ, ըստ տարիքի, յուրաքանչյուր հաջորդ եղբայրն ստանար 3 ոսկի պակաս, քան նախորդը», մի այլ կատակ-խնդրում խոսվում է «քարի մասին, որը կշռում է 1 ֆունտ և ևս քարի կշռի կեսը», երրորդում ասվում է. «Ես բազմապատկեցի երկարությունն ու լայնությունը և ստացա մակերեսը: Երկարության՝ լայնության նկատմամբ ավելցուկին գումարած մակերեսը հավասար է 183-ի, իսկ երկարության և լայնության գումարը 27 է: Գտնել երկարությունը, լայնությունը և մակերեսը»: Մի այլ խնդրում խոսվում է «նիզակի մասին, որը պատի կողքին, ցցված վիճակում պատից բարձր է մեկ կանգուն (մոտ 0,5 մ), իսկ եթե թեքենք այնպես, որ հիմքը 3 կանգուն հեռու լինի պատից, ապա մյուս ծայրը կհավասարվի պատին»:

Հազարավոր այսպիսի խնդիրներ են հայտնաբերվել բաբելոնական աղյուսակներում: «Սակայն,- ինչպես գրում է Գ. Ֆրոյդենտալը,- դժբախտաբար, մեզ գրեթե չի հասել տեսական և ուսումնական գրականություն, կանոններ, որոնցով բաբելոնացիները լուծել են այդ խնդիրները» [123; 10]:

Ավելի քիչ տեղեկություններ են մեզ հասել եգիպտական մաթեմատիկայի պատմությունից: Դրա պատճառն այն է, որ, ի տարբերություն բաբելոնացիների, որոնք գրում էին կավածեփ պատերին, և վերջիններս պահպանվել են մինչև մեր օրերը, եգիպտացիները գրում էին պապիրուսի վրա, որոնցից քչերն են պահպանվել մինչև մեր օրերը: Սակայն այստեղ նույնպես պատկերը նույնն է. մաթեմատիկան, հիմնականում ծառայելով գործնական պահանջներին, արագորեն դուրս է եկել նրա սահմաններից: «Մի՞թե կատարելապես բնական չէ, որ հաշվողներին և հողագործներին հրապուրում էր այն թվերի նկատմամբ ունեցած հետաքրքրությունը, որոնց հետ նրանք գործ ունեին ամեն օր, որ նրանք կարծես թե խաղում էին այդ թվերով և պատկերներով, ձգտում էին տիրապետել այդ թվերի և պատկերների գաղտնիքներին և ջանադրաբար փորձում էին պահպանել այդ գաղտնիքները կողմնակի անձանցից: Սա անհրաժեշտ է ընդգծել. հաճախ են պնդում, որ մինչհունական մաթեմատիկան մաքուր կիրառական մաթեմատիկա է» [123; 11]:

Հասկանալի է, որ բաբելոնական և եգիպտական մաթեմատիկայից հետո եկող հունական մաթեմատիկան հենց սկզբից էապես տարբերվում էր նրանցից: Մաթեմատիկայի պատմությունը վկայում է, որ «մոտ մ.թ.ա. VI դարում հույները պետք է ուսումնասիրած լինեին բաբելոնական մաթեմատիկան ու աստղագիտությունը. այն, ինչ մեզ հայտնի է Թալեսի մասին, վկայում է բաբելոնական աստղագիտության ազդեցությունների մասին, իսկ այն, ինչ մենք մինչև օրս ավանդաբար վերագրում ենք Պյութագորասին և նրա աշակերտներին, վկայում են բաբելոնական մաթեմատիկայի ազդեցությունների մասին: Ո՞վ չգիտի Պյութագորասի թեորեմի մասին: Բայց չէ՞ որ այն հայտնի էր Բաբելոնում Պյութագորասից 2000 տարի առաջ: Միգուցե Պյութագորասն է առաջին անգամ այն ապացուցել: Ո՞չ, դա էլ այդպես չէ, քանի որ այդ ամենին ոչ ակնհայտ թեորեմը կարող էր հայտնագործվել միայն ու միայն ապացուցման ճանապարհով. այն անհնար է հայտնագործել պրակտիկորեն՝ չափելով գործնականում եռանկյան կողմերը ($c^2 = a^2 + b^2$ առնչությունը ոչ թե անմիջապես ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի միջև է, այլ նրանց երկարությունների քառակուսիների միջև - Է. Ա.): Այնուամենայնիվ, նշում է Գ. Ֆրոյդենտալը, մենք ընդունում ենք, որ այն հայտնագործել են հույները [123; 11]:

«Ապացուցումները միանգամից չեն հայտնվել հունական երկրաչափությունում: Արքիմեդը (III դ. մ.թ.ա.) խոսում էր նախկինում «գտնված», բայց չապացուցված արդյունքների մասին: Մ.թ.ա. V դարի փիլիսոփաները, Պարմենիդից և նրա աշակերտ Զենոնից սկսած, ամեն ինչով հետևելով հոռետորներին, առանձնացնում են մեկ ճշմարիտ մտքից մյուսներին անցնելու տարբեր կանոններ: Պարմենիդը ձևակերպում էր երրորդի բացառման օրենքը (երկու հակադիր պնդումներից մեկը և միայն մեկն է ճշմարիտ), իսկ Զենոնը օգտագործում էր անհեթեթության (հակասության) հանգեցման մեթոդը: Սակայն այս կանոնները միանգամից չէ, որ թափանցել են մաթեմատիկայի մեջ. ըստ երևույթին՝ դեռևս Դեմոկրիտը, որ ապրում էր մ.թ.ա. V-IV դարերում, աշխատում էր առանց ապացուցումների:

Մ.թ.ա. IV դարում տրամաբանությունը նվաճում է մաթեմատիկան: Անտարակույս է, որ սկզբնական շրջանում ապացուցումը ոչ ակնհայտ պնդումները ակնհայտների կամ արդեն հայտնիներին տրամաբանորեն հանգեցնելն է» [125; 109]:

Այսպիսով՝ հույների արածն էլ հենց այն է, որ նրանք համակարգել են ապացուցումները: Ենթադրվում է, որ որպես տեսական գիտության՝ մաթեմատիկայի համակարգված (դեդուկտիվ) շարադրման տարրերը հավանաբար սկսվում են Թալես Միլեթացուց, որն ապացուցել է մի շարք երկրաչափական թեորեմներ, որոնք ավանդաբար մտնում են երկրաչափության դպրոցական դասընթաց (Թալեսի թեորեմը, հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առնթեր անկյունների հավասարության մասին թեորեմը, հակադիր անկյունների հավասարության մասին թեորեմը և այլն):

«Առաջին անգամ դեդուկցիայի տեսությունը հանգամայից մշակվել է Արիստոտելի կողմից: Նա պարզեց այն պահանջները, որոնց պետք է բավարարեն դեդուկտիվ մտահանգման կազմի մեջ մտնող առանձին մտքերը, որոշեց հասկացությունների նշանակությունը և բացահայտեց դեդուկտիվ մտահանգման որոշ տեսակների կանոնները» [74; 134]: Արիստոտելի մոտ մենք գտնում ենք երկրաչափության՝ որպես դեդուկտիվ համակարգի էության հետևյալ մեկնաբանությունը. «Յուրաքանչյուր ճշմարիտ գիտություն ելնում է իր հիմքում ընկած այն ավանդույթներից և սկզբունքներից, որոնցից այն զարգանում է: Էվկլիդեսի մոտ դրանք մի համակարգի բերված սահմանումներն են, պոստուլատներն ու աքսիոմները, ուրիշների մոտ դրանք ձևակերպված են այլ կերպ, սակայն նման սկզբունքներով երկրաչափության կառուցման սովորույթը առնվազն մի ամբողջ դար հին է, քան Էվկլիդեսի «Սկզբունքները»: Հավանաբար այդպես է վարվել երկրաչափության մեզ հասած առաջին համակարգված աշխատության հեղինակ Հիպոկրատը» [123; 12]:

Հունական մաթեմատիկայի խոշորագույն նվաճումներից մեկը Էվկլիդեսի կողմից աքսիոմատիկ մեթոդի հայտնագործումն է:

Չնայած «մեր ժամանակակիցները դժվարանում են ճշգրտորեն վերականգնել այն պատկերը, թե ինչպես է ծագել այն ակնհայտ պնդումների (աքսիոմների) թիվը մաքսիմալ սահմանափակելու մտահղացումը, որոնց ճշմարտության մասին կնքվում է պայմանավորվածություն, և որոնցից մաքուր տրամաբանորեն արտածվում են մնացած պնդումները», այնուամենայնիվ «Էվկլիդեսի (մ.թ.ա. III դար) «Սկզբունքներ»-ում ամբողջությամբ լուծվեց երկրաչափության աքսիոմատացման հսկայական ծրագիրը: Ըստ Էվկլիդեսի՝ պնդումների ապացուցումները պետք է լինեն մաքուր տրամաբանական արտածումներ աքսիոմներից...»:

Այդ ընթացքում Արիստոտելը կատարեց մտահանգման կանոնների ձևականացում (ֆորմալացում) և ցուցակագրում: Նրա պնդումը դրանց վերջավոր և շրջահայելի լինելու մասին ոչ պակաս ապշեցուցիչ է, քան աքսիոմների բազմության վերջավոր լինելու մասին պնդումը» [125; 110]:

Էվկլիդեսի «Սկզբունքներում» կան այնպիսի հատվածներ, որոնք անգամ ժամանակակից տեսանկյունից մասնագետների մոտ հիացմունք ու նմանակելու ցանկություն են առաջացնում նյութի դեղուկտիվ և աքսիոմատիկ հիմունքներով շարադրման իմաստով: Այդպիսին է, օրինակ, 5-րդ և 6-րդ գրքերում Եվդոքսին վերագրվող՝ համեմատականության ու նմանության մասին ուսմունքը, որը մենք երևի այսօր կանվանենք իրական թվերի տեսություն: Չնայած «Սկզբունքներում» կան նաև շարադրանքներ, որոնց դեղուկտիվ համակարգը շատ թույլ է, այնուամենայնիվ «Սկզբունքների» դեղուկտիվ համակարգը 2000 տարիների ընթացքում օրինակ է ծառայել և հիացրել մաթեմատիկոսներին: Էվկլիդեսի «Սկզբունքներով» տարված շատ գիտնականներ փորձում էին գիտության այլ բնագավառներում նույնպես կիրառել նման շարադրանք: Իհարկե, քչերին էր դա հաջողվում, բայց նրանց շարքերում կարելի է հիշատակել հետևյալ դեպքերը. Սպինոզան փորձում էր երկրաչափության նմանությամբ շարադրել փիլիսոփայությունը (էթիկան), Գ. Լայբնիցը, աքսիոմատիկորեն շարադրեց իրավագիտությունը և քաղաքատնտեսությունը, Պ. Ս. Լապլասը, որը փորձում էր աքսիոմատիկ համակարգը ներդնել իրավաբանության մեջ, և Ի. Նյուտոնը «Սկզբունքների» նման շարադրեց մեխանիկան և այլն:

Վերջապես, «ի՞նչ է աքսիոմատիկան» և «ինչպե՞ս պետք է ձևակերպել աքսիոմները» հարցերին առաջին անգամ կարողացավ պատասխանել Պաշլ միայն XIX դարում: Հետագայում այդ հարցերի պատասխանները ավելի հոկեց Պաշլի աշակերտ Դ. Հիլբերտը:

Նյութի շարադրման աքսիոմատիկ մեթոդ և դեղուկտիվություն. ահա այն ամենակարևորը, որը նվիրել է մարդկությանը հունական մաթեմատիկան:

Ապացուցման պրոցեսը հանգամանորեն ուսումնասիրում էին նաև մ.թ.ա. IV-V դարերի հին հնդկական տրամաբանները: Նրանք առանձնացրին ապացուցման հետևյալ բաղադրիչները՝ առաջադրություն (թեզիս), հիմք, օրինակ, միանմանություն, տարասեռություն, ընկալում, եզրակացություն: Արաբալեզու փիլիսոփա Ալ-Ֆարաբին (870-950 թթ.) ապացուցման մասին ուսմունքը համարում էր տրամաբանության հիմքը [74; 158]:

Հունական մաթեմատիկայի հաջորդ ծառայությունը իռացիոնալության՝ քառակուսու կողմի և անկյունագծի անհամաչափելիության հայտնագործումն է: Սակայն այս հարցում հույներն ավելի առաջ գնացին: Թվերը վտարվեցին երկրաչափությունից: Իրական թվերը դեռևս չէին հայտնագործվել, իսկ ռացիոնալ թվերը արգելված էին: Դրա կողքին պյութագորյան մաթեմատիկոսները սրբացրել էին բնական թվերը: Պլատոնը նույնիսկ խիստ անհանգստանում էր, երբ որևէ մեկը փորձում էր մասերի տրոհել միավորը: Այս պայմաններում հույները ոչ թե ընդհանրապես հրաժարվեցին հանրահաշվից, այլ այն փոխարինեցին երկրաչափական հանրահաշվով: Եթե պյութագորյան դպրոցի ներկայացուցիչների համար ամբողջ թիվը համարվում էր բոլոր սկիզբների սկիզբը, ապա Էվկլիդեսի 5-րդ և 6-րդ

գրքերում արդեն շարադրվեցին նաև իրական թվի սահմանման համար անհրաժեշտ դեդեքինդյան հատույթների նման ժամանակակից մաթեմատիկական անալիզի « $\varepsilon - \delta$ » լեզվով ապացուցման մեթոդին հանգումն՝ Եվդոքսի «սպառման» մեթոդով տրամաբանական ապացուցման տեսությունը: Այնուամենայնիվ, հունական մաթեմատիկոսները ռացիոնալիստներ էին և առաջնությունը տվել էին իրականության ճանաչման հենց տրամաբանական ապացույցի մեթոդին և ոչ թե փորձին, դիտարկմանը:

Սակայն նշենք, որ «տրամաբանություն» գիտությունը դեռ նոր էր սաղմնավորվում, և, բնականաբար, հույն մաթեմատիկոսների ապացույցներում հաճախ հանդիպում էին տրամաբանական կոպիտ սխալներ: Որպես օրինակ՝ կարելի է հիշել Ջենոնին, որը փորձում էր «ապացուցել», որ երկարատուն Աքիլլեսը չի կարող հասնել կրիային (այս փաստը տրամաբանության դասընթացում հայտնի է որպես Ջենոնի պարադոքս): Ինքը՝ Արիստոտելը, այնպես էր բացարձակացրել դեդուկցիան, որ այն բարձր էր դասում փորձից: Ընդհանրապես հույն մաթեմատիկոսները շատ ավանդապահ էին, ինչն էլ հաճախ խանգարում էր բուն մաթեմատիկայի զարգացմանը: Այս երևույթը շատ հետազոտողներ բնութագրում են որպես «լճացում»: Օրինակ, ըստ Գ. Ֆրոյդենտալի, տիպիկ ռացիոնալիստ էր Արիստոտելը: Վերջինիս ապացուցումների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ նրա դատողությունները ոչ թե մեխանիկամաթեմատիկական էին, այլ հոգեբանակենսաբանական: Օրինակ՝ տիեզերքի վերջավորության ապացույցը սխալ է ոչ թե այն պատճառով, որ նման բան անհնար է ապացուցել, այլ այն պատճառով, որ այդ ապացույցը կատարվել է տրամաբանական սխալներով [123; 16]:

Հետհունական մաթեմատիկայի զարգացման վրա շատ մեծ ազդեցություն ունեցավ թվարկության տասական համակարգի հայտնագործումը, արաբների ու միջնադարյան հոգևորականների կողմից այդ գյուտի տարածումն ու զարգացումը: Նշված գյուտի արդյունքում բարեփոխված մաթեմատիկական արդեն նախկին ազատ մաթեմատիկան չէր. այն ավելի գործնական ուղղվածություն ուներ:

Այս շրջանի մաթեմատիկայի զարգացման կարևոր փուլերից է Ռ. Դեկարտի կողմից երկրաչափության հանրահաշվականացման խնդրի լուծումը: Ապացուցման «ունիվերսալ» մեթոդի փնտրտուքի մեջ Դեկարտը հայտնագործեց կոորդինատային մեթոդը, որը, իհարկե, բոլորովին էլ այն չէր, ինչ նա փնտրում էր, բայց այդ հրաշալի ապարատի միջոցով, փաստորեն, հիմք դրվեց «Անալիտիկ երկրաչափություն» առարկային: Նույնիսկ ներկայումս շատ մասնագետներ ապացուցման մեթոդների շարքում սխալմամբ նշում են նաև կոորդինատային մեթոդը, որը, իհարկե մաթեմատիկական հզոր կառույց (մեթոդ) է, բայց ոչ տրամաբանական ապացուցման մեթոդ: Այդպիսին են նաև մյուս ոչ պակաս կարևոր մաթեմատիկական կառույցները՝ վեկտորական և ձևափոխությունների մեթոդները:



ԳԼՈՒԽ ՅՈԹԵՐՈՐԴ. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՁԵՎԵՐԸ

7.1. Դասը որպես մաթեմատիկայի ուսուցման կազմակերպման հիմնական ձև

Հանրակրթական դպրոցում ուսուցման գործընթացի և դաստիարակության կազմակերպման հիմքում սովորաբար դրվում է Յա. Ա. Կոմենսկու կողմից ավելի քան 300 տարի առաջ հայտնագործված ուսուցման դաս-դասարանային եղանակը կամ համակարգը, որի հիմնական կազմակերպչական օղակը **դասն** է: Դասի էությունը բացահայտվում է դիդակտիկայում:

«Դասը տրամաբանորեն ավարտուն, ամբողջական, ուսումնադաստիարակչական գործընթացի որոշակի սահմանափակումներ ունեցող ժամանակահատված է: Նրանում բարդ փոխհարաբերությամբ ներկայացվում են ուսումնադաստիարակչական գործընթացի բոլոր հիմնական տարրերը՝ նպատակները, բովանդակությունը, միջոցները, մեթոդները, կազմակերպումը: Դասի որակը կախված է այդ բաղադրիչներից յուրաքանչյուրի ճշգրիտ սահմանումից ու դրանց ռացիոնալ հարաբերակցությունից: Ինչպես նշում են հայտնի դիդակտներ Մ. Ն. Սկատկինը և Ի. Յա. Լերները ցանկացած անհատական մեթոդական մոտեցման դեպքում պետք է պահպանվեն մանկավարժական գիտության կողմից բացահայտված և ուսումնադաստիարակչական գործընթացի օրինաչափություններից բխող որոշակի հիմնական պահանջներ [99; 4]:

Եվ այսպես՝ «դաս» հասկացությունն ունի հետևյալ բնութագրիչները՝ **նպատակ, բովանդակություն, ուսուցման միջոցներ և մեթոդներ, սովորողների ուսումնական գործունեության կազմակերպում:** Դասի նշված հիմնական բնութագրիչների մեջ հիմնական դերը պատկանում է հանրակրթական, դաստիարակչական և գործնական նպատակներին: Այդ պատճառով շատ կարևոր է, որ դասին նախապատրաստվելիս ուսուցիչը ճիշտ ձևակերպի դասի նպատակը:

Դասավանդման փորձի ուսումնասիրությունները ցույց են տալիս, որ ուսուցիչներից ոմանք դասի նպատակը ձևակերպում են հետևյալ կերպ՝ «Ուսուցանել ... թեման»: Նման ձևակերպումը ինքնանպատակ է, որովհետև չի ընդգրկում ամենակարևորը՝ ուսումնադաստիարակչական գործընթացի արդյունքը: Հետևաբար դասի նպատակի ձևակերպման մեջ պետք է հստակորեն պլանավորվի արդյունքը:

Հաճախ հանդիպում են նաև դասի նպատակի այնպիսի ձևակերպումներ, որոնցում չնայած ձևակերպված է արդյունքը, բայց այն պարունակում է այնքան շատ պահանջներ, որոնց դասարանի աշակերտների մեծամասնությունը, բնականաբար, հասնել չի կարող: Հետևաբար նպատակը ձևակերպելիս պետք է զգույշ լինել և ներկայացնել պահանջներ, որոնք անխտրականորեն հասցեագրված են

դասարանի բոլոր աշակերտներին: Այդ նպատակով դասի պլանավորմանը նախապատրաստվելիս ուսուցիչը, օգտվելով մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշիչի «Պահանջներ սովորողների մաթեմատիկական պատրաստվածությանը» բաժնից, պետք է նպատակի մեջ տեղադրի միայն այդ թեմային առնչվող չափորոշչային Ա սյունակի՝ բոլոր սովորողների համար պարտադիր պահանջները:

Դասի նպատակն ունի որոշակի կառուցվածք. «**Ուսուցանել ... թեման և հասնել այն բանին, որ սովորողները՝ 1) իմանան ... , 2) կարողանան ...**», որտեղ տվյալ դասի թեմային համապատասխան գիտելիքներն ու կարողությունները խնամքով ընտրված են «Մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշիչի»՝ սովորողների առարկայական պատրաստվածության նվազագույն շեմին համապատասխան Ա սյունակից:

Ըստ նշանակության՝ նպատակները լինում են՝ **ակադեմիական և սոցիալական**: Ակադեմիական նպատակները մաթեմատիկական այն գիտելիքները, կարողություններն ու հմտություններն են, որոնք՝ որպես հանրակրթական նպատակներ, պետք է ձևավորվեն տվյալ թեմայի ուսուցման արդյունքում: Սակայն պետք է ձևավորվեն ոչ միայն ակադեմիական գիտելիքները, կարողություններն ու հմտությունները, այլև ընդհանուր ուսումնական այն կարողություններն ու հմտությունները, որոնք վերաբերում են սովորողների այնպիսի սոցիալական որակների ձևավորմանը, ինչպիսիք են, օրինակ, լսելը, հաղորդակցվելը, համագործակցելը, աջակցելը և այլն:

Ուսումնական ծրագրերն ու չափորոշիչները նախատեսում են նաև դաստիարակչական որոշակի խնդիրների (օրինակ՝ ապացուցելու և հերքելու, հայրենասիրության) լուծում: Ուսուցման դաստիարակչական ուղղվածությունը ուժեղացնելու նպատակով ուսուցիչը պետք է խնամքով վերլուծի դասի տվյալ թեմայի դաստիարակչական հնարավորությունները և առանձնացնի յուրաքանչյուր դասի դաստիարակչական նպատակը:

Հայտնի է, որ մաթեմատիկական (ակադեմիական) որոշակի պատրաստվածություն ձեռք բերելու համար աշակերտը պետք է ունենա նաև որոշակի գործնական կարողություններ և հմտություններ: Հետևաբար պետք է առանձնացվեն նաև սովորողների գործնական հմտությունների ձևավորմանն ուղղված նպատակները:

Բնականաբար, նախնառաջ ընտրվում է հերթական դասի թեման, ապա առաջադրվում են այդ թեմայի ուսուցման նպատակները: Իր հերթին արդեն ընտրված նպատակներին համապատասխան ուսուցիչը ընտրում է տվյալ դասի բովանդակությունը: Այս հարցում ուսուցչին օգնում են չափորոշիչը, ուսումնական ծրագիրը, դասագիրքը, մեթոդական ձեռնարկները, դիդակտիկ պարագաները և այլն: «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի առանձնահատկությունն այն է, որ դասի բովանդակության մաթեմատիկական նյութի շարադրանքը սովորաբար

կատարվում է դասագրքում այդ թեմայի շարադրման տրամաբանությանը համապատասխան ձևով:

Դասի բովանդակության և նրա ուսուցման նպատակների ընտրությունից հետո հաջորդ քայլը ուսուցման նպատակահարմար մեթոդի կամ մեթոդների ընտրության հարցն է: Սա ամենադժվար լուծվող մեթոդական հարցերից մեկն է: Չնայած գոյություն ունեն այդ խնդրի վերաբերյալ մեթոդական բազմաթիվ խորհուրդներ, այնուամենայնիվ այդ հիմնահարցի լուծման որոշակի համընդհանուր դեղատոմս գոյություն չունի և չի էլ կարող լինել:

Բերենք մեթոդական նման խորհրդի մեկ օրինակ (ըստ Յու. Կ. Բաբանսկու):

«Մեթոդի ընտրությունը օպտիմալ չէ, եթե ընտրված մեթոդը չի բավարարում այն պայմաններից թեկուզ և մեկին, որոնցից ինքը կախված է.

- 1) դասի (ուսուցանող, դաստիարակող և զարգացնող) նպատակը,
- 2) ուսումնասիրման ենթակա նյութի բովանդակության առանձնահատկությունները (բարդությունը, նորույթը, բնույթը),
- 3) դասարանի աշակերտների առանձնահատկությունները (մտածողության զարգացման մակարդակը, գիտելիքների, կարողությունների մակարդակը, ուսումնական աշխատանք կատարելու հմտությունների ձևավորվածությունը, աշակերտների դաստիարակվածության մակարդակը և այլն),
- 4) դիդակտիկ նյութերով և ուսուցման տեխնիկական միջոցներով կաբինետի (նկատի ունի՝ դասասենյակի – Է. Ա.) կահավորվածությունը,
- 5) էրգոնիկան (ըստ դասացուցակի՝ դասի անցկացման ժամանակը, դասարանի խտությունը և այլն),
- 6) ուսուցչի անհատական առանձնահատկությունները (բնավորության գծերը, այս կամ այն մեթոդին տիրապետելու մակարդակը, դասարանի հետ նրա ունեցած հարաբերությունները և այլն)» [56; 20]:

Ուսումնական գործընթացը ենթադրում է ուսուցման միջոցների, մեթոդների և հնարների օրգանական միասնությունը ուսուցման կազմակերպչական եղանակների հետ: Ուսուցման յուրաքանչյուր մեթոդին, հնարին համապատասխանում է ուսուցման կազմակերպչական իր եղանակը, որը սահմանում է ուսուցիչ-աշակերտ և աշակերտ-աշակերտ ուրույն հարաբերություններ:

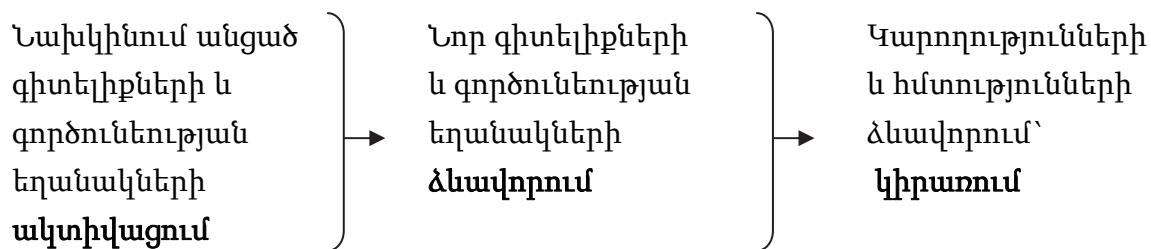
Ուսուցիչը կառավարում է դասի ուսումնական ողջ գործընթացը՝ այդ ընթացքում օգտագործելով ուսուցման ինչպես ընդհանուր (աշխատանք ողջ դասարանի հետ), այնպես էլ խմբային (համագործակցային ուսուցման դեպքում) և անհատական եղանակներ: Ուսուցման գործընթացի կազմակերպման վերնում նշված եղանակները դասի ընթացքում հանդես են գալիս ինչպես առանձին-առանձին, այնպես էլ տարբեր համամասնություններով և տարբեր հաջորդականություններով:

Ուսուցման ժամանակակից պայմաններում բավականին հստակորեն է դրվում դասի կազմակերպչական այնպիսի եղանակների ու ձևերի օգտագործման

հարցը, որոնք ապահովում են ոչ միայն սովորողների ակադեմիական գիտելիքներով, կարողություններով ու հմտություններով զինումը, այլև նպաստում են սոցիալական և արժեքային համակարգի հմտություններով օժտելու կարողություններին: Այս հարցում մեծ առաքելություն ունեն ուսուցման համագործակցային, փոխներգործուն և կոլեկտիվ եղանակները:

7.2. Մաթեմատիկայի դասի կառուցվածքի մասին

Դիտարկելով դասը ուսուցման գործընթացի տրամաբանության տեսանկյունից՝ մենք կհանգենք «դասի կառուցվածք» հասկացությանը: Ըստ հայտնի դիդակտ Մ.Ի. Մախմուտովի՝ դիդակտիկայում ուսումնասիրվում է «դասի ընդհանուր դիդակտիկական կառուցվածք» հասկացությունը, որի էությունն ու բաղադրիչները բերված են ստորև.



Ընդհանուր կառուցվածքի դիդակտիկական բաղադրիչների քանակը անփոփոխ է. դրանք միշտ երեքն են: Այժմ խոսենք մաթեմատիկայի կոնկրետ դասի բաղադրիչների մասին: Նշենք, որ մաթեմատիկայի մեթոդիկայում դասի բաղադրիչների առանձնացման հարցում մասնագետների մոտեցումները տարբեր են: Օրինակ՝ Ն. Վ. Մետելսկին առանձնացնում է դասի հետևյալ բաղադրիչները [153; 228].

- 1) նոր թեմայի նյութի ճանաչում կամ ծանոթացում նոր նյութին,
- 2) նոր նյութի ամրապնդում,
- 3) խնդիրների և վարժությունների լուծում,
- 4) անցած նյութի կրկնություն,
- 5) տնային հանձնարարությունների ստուգում,
- 6) տնային աշխատանքների հանձնարարում,
- 7) սովորողների կողմից մաթեմատիկայի գործնական կիրառություններ,
- 8) սովորողների գիտելիքների և հմտությունների վերահսկում և հաշվառում:

Նշված բաղադրիչներից ոչ բոլորը կարող են հանդես գալ մաթեմատիկայի դասերին, սակայն ցանկացած ավանդական դաս ներկայանում է որպես այդ տարրերի տարբեր համակցություններ:

Սովորողների կողմից նոր նյութի հետ **ծանոթացումը** կամ **ճանաչումը** պետք է տեղի ունենա նրանց ակտիվ ուսումնասիրության գործընթացում՝ հենվելով նրանց ինքնուրույն մտածողության վրա: Պատրաստի գիտելիքների հաղորդումը պետք է հասցվի նվազագույնի, և դասվանդման գործառույթը հիմնականում պետք է հանգեցվի ակտիվ, զարգացնող ուսուցման կազմակերպմանն ու կառավարմանը: Դրան ուսուցիչը կարող է հասնել ստեղծագործական աշխատանքի շնորհիվ՝ հաշվի առնելով արդյունավետ դիդակտիկական ոչ ավանդական մշակումներ:

Ամրապնդման կազմակերպման անհրաժեշտությունը պայմանավորված է նոր գիտելիքի կամ գործունեության նոր եղանակի յուրացման հոգեբանական օրինաչափություններով: Դասի ընթացքում սովորաբար նոր նյութի ճանաչման գործընթացը բնականոն կերպով վերածվում է դրա ամրապնդման աշխատանքների: Օրինակ՝ ուսուցանող ծրագրով ամրապնդումը սովորաբար նախապես ծրագրավորված է: Պրոբլեմային ուսուցման կամ էվրիստիկ գրույցի դեպքում ամրապնդումը իրականացվում է պրոբլեմի ինքնուրույն լուծման և նրա արդյունքի ստուգման ու քննարկման գործընթացում: Պրոբլեմային կամ դասախոսության տեսքով նյութի շարադրման դեպքում ամրապնդումը վերածվում է թեմայի առավել դժվար մասերի վերաշարադրման:

Բոլոր դեպքերում նոր նյութի ամրապնդմանն է առնչվում հիմնականում նաև մաթեմատիկական առաջադրանքների կատարումը: Արդեն այստեղ ինքնուրույն լուծումների որոնմանն ու իրականացմանը պետք է տալ ուսուցման հիմնական մեթոդի կարգավիճակ, հատկապես վարժանքային դասերի ժամանակ:

Մարդկային հոգեբանության՝ անցած նյութը աստիճանաբար մոռանալու բնական հատկությունը պահանջում է այն հարցերի մշտական ու պարբերաբար **կրկնություն**, որոնք մոռանալ չի կարելի: Յուրաքանչյուր դասարանում նոր նյութի ուսումնասիրմանը զուգահեռ կատարվում է նաև տրված առարկայի հիմնական նյութի համակարգված կրկնություն՝ խոշոր թեմաների, կիսամյակների կամ տարվա կտրվածքներով: Յուրաքանչյուր խոշոր թեմայի կամ բաժնի վերջում նպատակահարմար է անցկացնել ընդհանրացնող կրկնության դաս: Ավանդաբար ուսպլանով հատկացվում է որոշակի և շոշափելի ժամաքանակ, ինչպես նաև կրկնության դասագրքային համապատասխան նյութ, հատկապես ավարտական՝ 9-րդ և 12-րդ դասարաններում: Դեռ ավելին՝ 12-րդ դասարանի ամբողջ երկրորդ կիսամյակը նվիրված է հենց նախորդ՝ 5-12-րդ դասարաններում անցած նյութի և խնդիրների ու առաջադրանքների լուծման կրկնությանն ու ավարտական ու միասնական քննություններին նախապատրաստվելուն: Ավելացնենք, որ պետք չէ անցկացնել կրկնություն հանուն կրկնության, այլ յուրաքանչյուր կրկնություն պետք է լինի

ստեղծագործական, հետաքրքիր և նպատակաուղղված լինի կիրառական փոխ-
ներգործուն նոր խնդիրների լուծմանը, որից աշակերտները բավականություն
պետք է ստանան:

Որոշ հեղինակներ էլ առանձնացնում են դասի կառուցվածքի հետևյալ
փուլերը.

- 1) դասի նպատակադրում,
- 2) ծանոթացում նոր նյութի հետ,
- 3) նոր նյութի ամրապնդում՝

ա) տեղեկատվության և գործունեության եղանակների վերաբրտադրության
մակարդակով,

բ) գիտելիքները ստեղծագործաբար ձեռք բերելու և կիրառելու մակարդակով,

4) գիտելիքների, կարողությունների և հմտությունների ստուգում,

5) ուսումնասիրվող նյութի համակարգում և ընդհանրացում (ըստ թեմայի,
բաժնի և այլն):

7.3. Մաթեմատիկայի դասի տիպերը

Յուրաքանչյուր դաս հետապնդում է դիդակտիկական մի քանի նպատակներ,
որոնցից մեկը գլխավորն է:

Ժամանակակից դիդակտիկայում և մեթոդիկայում հաճախ օգտագործվում է
«դասի տիպերի դասակարգում՝ ըստ հիմնական դիդակտիկական նպատակի»
հասկացությունը:

Դիցուք դասի դիդակտիկական հիմնական նպատակը սովորողներին նոր
նյութին ծանոթացնելն է: Այդ նպատակին համապատասխան դասի կենտրոնական
փուլը սովորողներին նոր նյութին ծանոթացնելն է: Մնացած փուլերը կամ կարող
են բացակայել, կամ էլ կարող են, հիմնականի հետ համեմատած, ունենալ ավելի
պակաս նշանակություն:

Եթե դիդակտիկական հիմնական նպատակը ուսումնասիրած նյութի ամրա-
պնդումն է, ապա դասը կարելի է դասել գիտելիքների ամրապնդման տիպին և
այլն: Նման ճանապարհով վերլուծելով խնդրո առարկա հիմնահարցը՝ մենք կհան-
գենք դասի տիպերի հետևյալ տեսակների թվարկմանը.

- 1) նոր նյութի հետ հաղորդման (ծանոթացման) դաս,
- 2) գիտելիքների ամրապնդման դաս,
- 3) գիտելիքների, կարողությունների և հմտությունների ստուգման դաս,
- 4) ուսումնասիրվող նյութի համակարգման և ընդհանրացման դաս:

Մաթեմատիկական առարկաների դասերի գրեթե կեսը կազմում են նոր նյու-
թի հաղորդման դասերը: Նման դասերը իրենց հերթին տրոհվում են երկու

ենթատիպի՝ «նոր գիտելիքների հաղորդման դաս» և «կոմբինացված կամ խառը տիպի դաս»:

Եթե, օրինակ, նախորդ դասը եղել է գիտելիքների, կարողությունների և հմտությունների ստուգման դաս, ապա հաջորդ դասն արդեն նոր նյութի հաղորդման դաս է, իսկ եթե նախորդ դասը նոր նյութի հաղորդման դաս է եղել, և հաջորդ դասին նույնպես նոր նյութ պետք է ուսումնասիրվի, ապա այդ դասն արդեն կոմբինացված է: Խառը տիպի դասն անպայմանորեն պետք է սկսվի տնային հանձնարարությունների ստուգումից: Պարզելով տնային հանձնարարությունների կատարման ճշտությունն ու գիտակցվածությունը՝ հաջորդ քայլում ուսուցիչը անցնում է անցած (հին) դասի նյութի յուրացման ստուգմանը՝ առանձին աշակերտներին ստուգելով անհատական առաջադրանքների կամ ֆրոնտալ հարցումների միջոցով (առաջին փուլ): Ապա ամփոփելով հին դասը՝ անցնում է նոր նյութի ուսումնասիրմանը (երկրորդ փուլ) և, վերջապես, նրա ամրապնդմանն ու տնային աշխատանքների հանձնարարմանը (երրորդ փուլ):

Բավականին հագեցվածությունը այս տիպի դասի և՛ առավելությունն է, և՛, միաժամանակ, նրա թերության հիմնական պատճառը. այդ դասերին հաճախ չի բավականացնում ժամանակը, ընդ որում՝ դրանից, որպես կանոն, տուժում է դասի հիմնական նպատակը՝ նոր նյութի նախնական յուրացումը: Տնային հանձնարարությունների և հարցումների ձգձգվածությունը հաճախ ստիպում է ուսուցչին կիրառել նոր նյութի հաղորդման քիչ արդյունավետ՝ պատրաստի գիտելիքների հաղորդման՝ պատմելու կամ դասախոսության ավանդական մեթոդները: Արդյունքում նոր նյութի ամրապնդումը և տնային աշխատանքների հանձնարարումը կատարվում է շտապելով կամ էլ պատշաճ չի կատարվում: Այդ պատճառով կոմբինացված դասերի դիմում են միայն այն դեպքում, երբ նոր նյութի տեսական մասի ծավալը և դասարանում կատարվելիք համապատասխան ամրապնդող վարժությունների քանակը քիչ են և չեն կարող դժվարությունների հանգեցնել տվյալ դասարանում:

Իր հերթին նոր նյութի ամրապնդման դասը տրոհվում է երկու ենթատիպի՝ վարժանքային բնույթի կամ վարժանքի դաս և գիտելիքները ստեղծագործաբար կիրառելու դաս: Նման տրոհման հիմքում ընկած է այն հարցը, թե գիտելիքների կիրառման ինչ մեթոդ է որդեգրել ուսուցիչը՝ ռեպրոդուկտիվ (վերարտադրողական), թե՞ պրոդուկտիվ (արդյունավետ): Սակայն դա ամենևին չի նշանակում, որ վարժանքային բնույթի դասի ընթացքում բացառվում է ուսուցման արդյունավետ մեթոդների ու հնարների կիրառությունը, իսկ գիտելիքները ստեղծագործաբար կիրառելու դասին բացառվում է ռեպրոդուկտիվ որևէ միջոցի կիրառություն:

«Մաթեմատիկա» բնագավառի առանձնահատկություններից մեկն էլ այն է, որ գիտելիքներն ու կարողությունները հիմնականում ձեռք են բերվում խնդիրների

լուծման միջոցով, այդ պատճառով էլ հաճախ գիտելիքների ամրապնդման դասերն անվանում են նաև խնդիրների լուծման դասեր:

Մեթոդական գրականությունում հանդիպում են նաև դասերի տիպերի այլ անվանումներ, օրինակ՝ դաս-դասախոսություն, աշակերտների ինքնուրույն աշխատանքի դաս, դաս-լաբորատոր աշխատանք կամ գործնական աշխատանքի դաս և այլն:

Դիտարկելով դասերի այդ տիպերը նրանց հիմնական դիդակտիկական նպատակի տեսանկյունից՝ մենք կտեսնենք, որ դրանք դարձյալ պատկանում են վերոհիշյալ դասակարգման տիպերից մեկին: Օրինակ՝ դաս-դասախոսությունը ինքնին նոր նյութի հաղորդման դաս է, իսկ ինքնուրույն աշխատանքի դասը պարզապես ամրապնդման դաս է: Կախված դիդակտիկական նպատակից՝ լաբորատոր աշխատանքի կամ գործնական աշխատանքի դասը կարող է լինել և՛ նոր նյութի հաղորդման դաս, ամրապնդման դաս, և՛ գիտելիքները գործնականում կիրառելուն ուղղված գնահատման դաս:

Մաթեմատիկական գիտելիքների, կարողությունների և հմտությունների ստուգման դասերի տիպին առաջին հերթին պատկանում են թեմատիկ (ստուգողական) աշխատանքների դասերը: Սովորաբար նման աշխատանքի առաջադրանքները տրվում են նվազագույնը չորսական տարբերակներով, որոնք, ինչպես նաև ինքնուրույն աշխատանքների հավաքածուները, ընդգրկված են մաթեմատիկայի «Դիդակտիկ նյութերի» ժողովածուներում: Թեմատիկ աշխատանքները լինում են կարճատև՝ մինչև 20-25 րոպե տևողությամբ և ծավալուն՝ մեկ դասաժամի համար նախատեսված: Թեմատիկ աշխատանքները կարող են լինել ավանդական ստուգողական աշխատանքի կամ էլ թեստային աշխատանքի տեսքով:

Պարբերաբար կիրառվում են նաև սովորողների մաթեմատիկական պատրաստվածության ստուգման կիսամյակային ամփոփիչ աշխատանքներ յուրաքանչյուր կիսամյակի վերջում ծավալուն թեստի կամ ստուգարքի տեսքով: Վերջինս ունենում է դրական գնահատական ապահովելու համար նախատեսված պարտադիր մաս և լրացուցիչ մաս (7-10 միավոր ապահովելու համար):

Նշենք, որ ըստ դիդակտիկական նպատակների դասերի տիպերի առանձնացման վերոնշյալ դասակարգումը գերծ չէ նաև թերություններից: Օրինակ՝ դասերի հիմնական տիպերի անվանումները ոչինչ չեն ասում ուսումնական գործընթացի իրական կազմակերպման և դասի վարման եղանակների մասին: Ահա թե ինչու պրակտիկայում դասերի բնութագրման համար օգտագործվում են նաև այլ դասակարգումներ կամ հավաքածուներ: Օրինակ՝ գործնականում տարածված է նաև մաթեմատիկայի դասերի տիպերի դասակարգումն ըստ *վարման եղանակների*:

Այդկերպ առանձնացվում են, օրինակ, կրկնության դաս, դաս-գրույց, թեմատիկ աշխատանքի դաս, գործնական աշխատանքի դաս, խառը տիպի դաս և

այլն: Ամենից հաճախ, բնութագրելով որևէ դաս, ելնում են այդ երկու դասակարգումներից՝ ըստ դասի դիդակտիկական նպատակի և ըստ վարման եղանակի կամ մեթոդի: Օրինակ՝ «դաս-դասախոսություն» կամ «դաս-գործնական աշխատանք» անվանումներում ամփոփված են դասի և՛ դիդակտիկական նպատակը՝ գիտելիքների հաղորդումը, և՛ վարման մեթոդը՝ դասախոսությունը:

Վերջում նշենք, որ վերևում «դասակարգում» հասկացությունը կիրառվել է որոշակի վերապահումով, քանի որ բերված դասակարգումները տրամաբանամաթեմատիկական իմաստով խիստ հեռու են դասակարգում լինելուց, և դրանցից ոչ մեկը չի կարող սպառել պրակտիկայում գոյություն ունեցող դասերի բոլոր տիպերը:

7.4. Սովորողների ինքնություն աշխատանքի կազմակերպումը

Սովորողներին ուսումնական նյութի հետ (տանը կամ դասից դուրս) աշխատել սովորեցնելու հիմնական եղանակը նրանց ինքնություն աշխատանքի կազմակերպումն է: Դրա հաջողությունից նկատելիորեն կախված է ուսուցման ողջ գործընթացի հաջողությունը: Այդ նպատակով, ինչպես նաև ապագա աշխատանքային կյանքին և ինքնակրթությանը նախապատրաստելու համար անհրաժեշտ է արդեն դպրոցի մաթեմատիկայի դասերին աշակերտներին սովորեցնել գրքի՝ ուսումնական նյութի հետ ինքնություն աշխատելու եղանակներին: Այդ աշխատանքները պետք է կատարվեն հաճախ և համակարգված ձևով:

Մաթեմատիկայի դասերին աշակերտների ինքնություն աշխատանքը առաջին հերթին նրանց ինքնություն մտածողությունն է, որը դրսևորվում է աշակերտակենտրոն, արդյունավետ ուսուցման ավանդական և ժամանակակից մեթոդների կիրառության ժամանակ: Դիտարկենք օրինակ: Եթե 5-6-րդ դասարաններում մաթեմատիկայի նոր դասի թեման գումարի նկատմամբ բազմապատկման բաշխական օրենքն է, ապա ուսուցիչը կարող է դիմել ուսուցման ավանդական հետազոտական մեթոդին, կամ, որ ավելի արդյունավետ է, խմբային հետազոտության մեթոդին և նախապես պատրաստած քարտային աշխատանքների միջոցով կազմակերպել սովորողների ինքնություն հետազոտական աշխատանքը: Աշակերտները կատարում են իրենց քարտում նշված պարզագույն առաջադրանքները, օրինակ՝

կատարել գործողությունները.

$$\begin{array}{ll} 1) 23 \cdot (18 + 37) = & 2) 47 \cdot 56 + 47 \cdot 44 = \\ = 23 \cdot 18 + 23 \cdot 37 = & = 47 \cdot (56 + 44) = \end{array}$$

Ի՞նչ ընդհանրացում կարող եք կատարել:

Այնուհետև հետևություններ են անում՝ նախ անհատապես աշխատելով, ապա ստուգում են իրենց ստացած արդյունքը զույգերով և խմբով քննարկելու միջոցով և խմբի խոսնակի միջոցով հայտնում ուսուցչին՝ դասարանին:

Սակայն հարկ է նկատել, որ աշակերտների ինքնուրույն աշխատանքը դասի ընթացքում կատարվում է նաև առանձին՝ առանց օգտագործելու պրոբլեմային ուսուցում, էվրիստիկ զրույց, քննադատական մտածողություն կամ խմբային հետազոտության մեթոդ: Օրինակ՝ եթե միջին դասարաններում դասի թեման խիստ անձանոթ չէ աշակերտներին, բարդ չէ, բայց ծավալուն է, ապա ուսուցիչը կարող է այն բաժանել փոքր մասերի, օրինակ՝ պարբերությունների՝ յուրաքանչյուրը հանձնարարելով առանձին աշակերտների կամ խմբերի: Աշակերտները ծանոթանում են ուսումնական նյութին, վերնագրում են այն, կոնսպեկտավորում տեքստում եղած մաթեմատիկական նյութը, գծում գծագրերը, նշում բանաձևերը, և ուսուցչի պահանջով յուրաքանչյուր մասի մեկական ներկայացուցիչ ներկայացնում է ողջ նյութը դասարանին: Մնացած աշակերտները հետևում են իրենց ընկերոջ ներկայացնելուն և աշխատում են վերացնել իրենց մոտ եղած թերությունները:

Ավելի հաճախ սովորողների ինքնուրույն աշխատանքը օգտագործվում է դասարանում վարժությունների կամ խնդիրների լուծման ժամանակ, քանի որ միայն այդպես կարելի է ամբողջ դասարանին նախապատրաստել տնային աշխատանքների արդյունավետ ու հաջող կատարմանը: Նկատենք, որ ինքնուրույն աշխատանքի կատարմանը այդ դեպքում նախորդում է ուսուցչի կողմից նմուշային վարժությունների կամ խնդիրների լուծումը:

Վերջապես, ինքնուրույն աշխատանքների դասական օրինակը դիդակտիկ նյութերի ժողովածուներում ընդգրկված աշխատանքներն են, և շատ պարզունակ կլինեք սահմանափակվել միայն դրանցով:

Ինքնուրույն աշխատանքների ժամանակ ուսուցիչը չպետք է աչքաթող անի թույլ սովորողներին, ամեն կերպ ինքը կամ էլ խմբային աշխատանքի ժամանակ խմբի ուժեղ աշակերտներից մեկը պետք է աջակցի նրան՝ կազմակերպելու վերջիններիս ինքնուրույն աշխատանքը:

Ինքնուրույն աշխատանքների մի շատ կարևոր ու օգտակար տեսակ է բանավոր վարժությունների լուծումը: Դրանք ունեն դիդակտիկական մեծ նշանակություն, քանի որ նպաստում են աշակերտների գիտելիքների գիտակցաբար, խորը և ամուր յուրացմանը, նրանց ինքնուրույն և ստեղծագործական մտածողության ձևավորմանը:

7.5. Մաթեմատիկայի ուսուցման առանձնահատկությունները տարբերակված ուսուցմամբ հոսքերում և մասնագիտացված դպրոցներում

7.5.1. Տարբերակված ուսուցման պատմությունից

Նախորդ դարի կեսերին մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի բուռն զարգացումը չէր կարող որոշակի ազդեցություններ չթողնել սովորող երիտասարդության զարգացման և հետաքրքրությունների ուղղվածության վրա: Երիտասարդության հետաքրքրությունները տեխնիկայի, ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի նկատմամբ սկսեցին կրել մասսայական բնույթ: Մաթեմատիկայով հետաքրքրվող առավել հետաքրքասեր սովորողների համար, չնայած ստեղծվել էին տեղեկատվության համարամատչելի միջոցներ (համապատասխան մասնագիտական գրականություն, հեռուստատեսություն), սակայն աշակերտների համար, առանց հատուկ «ուղղորդող ձեռքի», այդ տեղեկատվական հեղեղից գլուխ հանել շատ դժվար էր:

Քանի որ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի խմբակների պարապմունքներն անցկացվում էին ամսական երկու անգամ, ուստի աշակերտների համար հետաքրքիր աշխատանքի այդ ոչ մեծ ծավալը, բնականաբար, չէր կարող բավարարել նրանցից շատերին: Բացի՝ դրանից, աշակերտներին հետաքրքրող հարցերի այն շրջանակը, որոնք մաթեմատիկայի դպրոցական ծրագրից դուրս են, և որոնց ուսուցիչը տիրապետում է կատարելապես, սովորաբար շատ մեծ չէ: Դա, իհարկե, կիսանգարի խմբակի կամ ֆակուլտատիվ պարապմունքներն անցկացնել գիտամեթոդական այնպիսի մակարդակով, որը կբավարարի և՛ ուսուցչին, և՛ աշակերտին:

Սյուս կողմից՝ 70-80-ական թվականներին գիտության և տեխնիկայի մաթեմատիկացիայի պայմաններում առաջացավ մաթեմատիկական լավ պատրաստվածություն և ստեղծագործական գործունեության որոշակի ընդունակություններ ունեցող երիտասարդության անընդհատ հոսքի կարիք ժողովրդական տնտեսության ամենատարբեր բնագավառներ:

Այսպիսով՝ աշակերտների հետ արտադասարանական աշխատանքի առավել արդյունավետ ձևերի փնտրտուքի շարժումը համարվում էր երկկողմանի գործընթաց՝ աշակերտների և հասարակության (բուհերի) կողմից:

Այդ պատճառով, սկսած 60-ական թվականներից, ԽՍՀՄ-ում աստիճանաբար առաջ եկան մաթեմատիկայից աշակերտների արտադասարանական աշխատանքների կազմակերպման նոր, զանազան ձևեր՝ մասսայական դասախոսություններ աշակերտների համար, պատանեկան մաթեմատիկական դպրոցներ, հատուկ՝ ծրագրավորողների դպրոցներ, երեկոյան և հեռակա մաթեմատիկական դպրոցներ, ինտերնետ-դպրոցներ, ամառային և ձմեռային մաթեմատիկական դպրոցներ:

Առաջին պատանի մաթեմատիկոսների դպրոցները (ՊՄԴ) կազմավորվեցին 1959/1960 ուսումնական տարում Իվանովոյի և Քիշինևի մանկավարժական ինստիտուտներին կից, իսկ 1960/1961 ուստարուց՝ Տամբովի և Մոսկվայի մարզային մանկավարժական ինստիտուտներին կից: Նման դպրոցների բացումը երկրի խոշոր քաղաքների բուհերում դարձավ ավանդույթ: Սակայն գյուղական դպրոցների աշակերտները դրանցից դեռևս օգտվել չէին կարողանում: Եվ ահա չուշացավ նման դպրոցների աշակերտների ցանկությունը. «Ուզում ենք սովորել ձեր բուհում, բայց համապատասխանորեն պատրաստվել դրա համար մեզ համար շատ դժվար է. չկա համապատասխան գրականություն, ուսուցիչ: Օգնեցե՛ք», - գրում էին գյուղական դպրոցների աշակերտները: Եվ այդ օգնությունը չուշացավ: Արդեն 1964 թվականին ստեղծվեցին Հեռակա մաթեմատիկական դպրոցներ (ՀՄԴ): Արդեն 1963 թվականից սկսած՝ երկրի խոշոր քաղաքների պետական համալսարաններին կից բացվեցին ֆիզիկամաթեմատիկական թեքումով առանձին դպրոց-ինտերնատներ Մոսկվա (ՄՊՀ-ին կից, 1963 թ.), Լենինգրադ, Նովոսիբիրսկ, Երևան և այլ քաղաքներում: Երևանում նման դպրոց բացվեց 1965 թ. ակադեմիկոս Ա. Շահինյանի նախաձեռնությամբ: Դպրոցը, ի պատիվ այդ մեծ մանկավարժ մաթեմատիկոսի, այժմ կոչվում է հենց իր անունով:

7.5.2. Մաթեմատիկայի մասնագիտացված ուսուցմամբ դպրոցների մասին

Հիմնական խնդիրը, որն իրենց առաջ դնում են մաթեմատիկական այդ դպրոցները, հետևյալումն է.

- 1) աշակերտության շրջանում մաթեմատիկայի մասսայականացում,
- 2) մաթեմատիկայի նկատմամբ աշակերտների հետաքրքրությունների բացահայտում,
- 3) աշակերտների մաթեմատիկական մտածողության և մաթեմատիկական ընդունակությունների զարգացում,
- 4) աշակերտների հետազոտական գործունեության ճաշակի և հմտությունների ձևավորում,
- 5) աշակերտներին մատչելի մաթեմատիկայի կիրառությունների շրջանակի ընդլայնում,
- 6) դպրոցական մաթեմատիկայի ծրագրով սովորողների գիտելիքների ընդլայնում և խորացում և այլն:

Նշված դպրոցների «Մաթեմատիկայի ընդհանուր դասընթացի» ծրագիրը ներառում էր հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ծրագիրը և որոշակի լրացուցիչ հարցեր մաթեմատիկական անալիզից, հանրահաշվից և մաթեմատիկական

այլ տեսություններից: Այն բաղկացած էր երեք բաժնից՝ **մաթեմատիկական անալիզ, հանրահաշիվ և երկրաչափություն:**

Հայաստանի Հանրապետությունում ներկայումս գործում են ակադ. Ա. Շահինյանի անվան ֆիզիկամաթեմատիկական թեքումով դպրոց-ինտերնատը, նրա՝ ԼՂՀ Ստեփանակերտի մասնաճյուղը, Երևանի «Քվանտ» մասնավոր վարժարանը, միջազգային բակալավրիատի ծրագիր իրականացնող «Անանիա Շիրակացի» ճեմարանը, «ԱՅԲ» վարժարանը և այլն:

7.5.3. Մաթեմատիկայի խորացված ուսուցմամբ դպրոցներում և դասարաններում մաթեմատիկայի ուսուցման առանձնահատկությունների մասին

Սկսած 2009 թվականից՝ Հայաստանի Հանրապետությունում 12-ամյա կրթական ծրագրերով գործում է միջնակարգ կրթության եռաստիճան համակարգ՝

1^o. տարրական դպրոց (1-4-րդ դասարաններ),

2^o. միջին դպրոց (5-9-րդ դասարաններ),

(առաջին և երկրորդ կրթական ծրագրեր իրականացնող դպրոցը կոչվում է հիմնական դպրոց՝ 1-9-րդ դասարաններ) և

3^o. ավագ դպրոց (10-12-րդ դասարաններ):

(Առաջին, երկրորդ և երրորդ աստճանների կրթական ծրագրեր իրականացնող դպրոցը կոչվում է միջնակարգ հանրակրթական դպրոց՝ 1-12-րդ դասարաններ):

Ընդ որում՝ իրավաբանական անձի կարգավիճակ ունեն տարրական դպրոցը, հիմնական դպրոցը և ավագ դպրոցը:

2009 թվականին ստեղծված մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշիչներով հիմք դրվեց ՀՀ հանրակրթական ավագ դպրոցներում իրականացվող հոսքային ուսուցմանը: «Հանրակրթական ավագ դպրոցի չափորոշիչի» համաձայն՝ ավագ դպրոցներում կարող են գործել հետևյալ հոսքերը՝ տարբերակված (հանրակրթական) հոսք, ընդհանուր հոսք, ընդհանուր հարակից՝ բնագիտական հոսք, խորացված ուսուցման հոսք:

Ավագ դպրոցի «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» և «Երկրաչափություն» առարկաների հայեցակարգային դրույթներն ու ուսուցման հիմնական նպատակները շարադրված են «Մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշչում» (տե՛ս [7], [8]):

**7.6.Սովորողների գիտելիքների, կարողությունների և
հմտությունների ստուգումն ու գնահատումը**
(5-12-րդ դասարաններ)

Բացատրագիր: Ուսումնառության ընթացքում իրականացվող **գնահատմամբ** բացահայտվում և վերլուծությունների միջոցով վերահսկվում են ուսուցման արդյունքների որակը և դրանց համապատասխանությունը հանրակրթության պետական և առարկայական չափորոշիչների պահանջներին:

Գնահատման նոր համակարգի ներդրման անհրաժեշտությունը պայմանավորված է «Հանրակրթական պետական կրթակարգի» այն պահանջով, համաձայն որի՝ հանրակրթության որակը բարելավելու և ազգային արժեքներ կրող, ժողովրդավարական հասարակության քաղաքացի ձևավորելու համար անհրաժեշտ է, ի թիվս այլ միջոցառումների, նաև մշակել և ներդրել հանրակրթական դպրոցի գործունեության, ուսումնական գործընթացի կազմակերպման և ուսուցման արդյունքների գնահատման նոր համակարգ:

Համաձայն «Սովորողների ընթացիկ գնահատման մեթոդաբանության»՝ ընթացիկ գնահատումը բաղկացած է երկու՝ իրար փոխլրացնող ձևերից՝

1. ուսուցանող (ձևավորող) որակական գնահատում,
2. միավորային (ամփոփիչ) գնահատում:

Միավորային գնահատման արդյունքներն արտահայտվում են միավորներով՝ գնահատականով, իսկ ուսուցանող կամ ձևավորող գնահատման ժամանակ սովորողների առաջադիմության մասին տրվում են լոկ որակական՝ բառային նկարագրություններ և արժևորումներ:

2009-2010 ուսումնական տարում ՀՀ հանրակրթական դպրոցներում ներդրվեց սովորողների ընթացիկ գնահատման միայն միավորային գնահատման բաղադրիչը, իսկ հաջորդ ուսումնական տարուց՝ նաև ուսուցանող գնահատումը:

Ընդհանուր առմամբ՝ **գնահատականն** ինչ-որ օբյեկտների կամ արժևորման բնութագրությունն է:

Գնահատման հիմնական նպատակը սովորողի գիտելիքների, կարողությունների ու հմտությունների մակարդակի, անձնային որակների ստուգումը և դրա հիման վրա ուսումնական գործընթացի կատարելագործման և ուսման որակի վերահսկումն է:

Միջին և ավագ դպրոցների «մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառը ներկայացվում է «Մաթեմատիկա 5-6», «Հանրահաշիվ», «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» և «Երկրաչափություն» առարկաներով: Այս առարկաներից ուսումնառության արդյունքները միավորային (ամփոփիչ) գնահատմամբ պարզելու համար առաջարկվում են ստուգումներ՝ հետևյալ բաղադրիչների տեսքով.

1. բանավոր հարցում,
2. գործնական աշխատանք,
3. թեմատիկ գրավոր հարցում,
4. կիսամյակային ամփոփիչ գրավոր աշխատանք:

Նշված այս չորս տեսակների կիրառման նպատակները և հաճախականությունները տարբեր են: Գնահատումը կատարվում է 10 միավորային սանդղակով: Յուրաքանչյուր բաղադրիչն իր ընդհանուր ծավալով պետք է ընդգրկի մաթեմատիկական վերոնշյալ առարկաների կիսամյակային ամբողջ ծրագրային ուսումնական նյութը:

7.6.1. Գնահատման առաջադրանքների բարդության բնութագրերը

Ըստ բարդության՝ առաջադրանքները բնութագրվում են հետևյալ հատկանիշներով:

ա) **1-ին կարգի** բարդության առաջադրանքները պահանջում են արդեն ուսումնասիրված ծրագրային նյութի բովանդակությանը վերաբերող չափորոշչային գիտելիքների *իմացություն, պարզ և ծանոթ* իրադրություններում դրանք կիրառելու կարողություն, կողմնորոշման և կատարման համար *չեն պահանջում ինքնատիպ (ոչ ստանդարտ) մոտեցումներ, միջնորդավորված քայլեր ու հիմնավորումներ:*

բ) **2-րդ կարգի** բարդության առաջադրանքները պահանջում են արդեն ուսումնասիրված ծրագրային նյութի բովանդակությանը վերաբերող չափորոշչային գիտելիքների *կայուն իմացություն, ոչ բարդ և ծանոթ* իրադրություններում դրանք կիրառելու կարողություն, կողմնորոշման և կատարման համար ենթադրում են *որոշակի հայտնի մեթոդներ, միջնորդավորված քայլեր, ոչ բարդ հիմնավորումներ և չեն պահանջում ինքնատիպ մոտեցումներ:*

գ) **3-րդ կարգի** բարդության առաջադրանքները պահանջում են արդեն ուսումնասիրված ծրագրային նյութի բովանդակությանը վերաբերող չափորոշչային գիտելիքների *հիմնավոր իմացություն, բարդ կամ լրիվ ծանոթ* իրադրություններում դրանք կիրառելու կարողություն, կողմնորոշման և կատարման համար ենթադրում են *ինքնատիպ մոտեցումներ, հատուկ մեթոդներ, միջնորդավորված քայլեր, կառուցումներ, արտածումներ, հիմնավորումներ:*

դ) **Դժվարավուն** առաջադրանքները պահանջում են արդեն ուսումնասիրված ծրագրային նյութի բովանդակության վերաբերող չափորոշչային գիտելիքների *հիմնավոր և խորը իմացություն, բարդ կամ անծանոթ* իրադրություններում դրանք կիրառելու կարողություն, կողմնորոշման և կատարման համար ենթադրում են

բազմակողմանի վերլուծություն, ստեղծագործական մոտեցում, հատուկ մեթոդներ, օժանդակ կառուցումներ, արտածումներ, հիմնավորումներ, կռահումներ:

7.6.2. Հարցումների գնահատման 10 միավորային սանդղակ

Բանավոր և գրավոր հարցումների գնահատման չափանիշներ կազմելու համար հաշվի են առնվում գնահատման նպատակը, առաջադրանքի տեսակը, բովանդակությունը, դրա կատարման համար գնահատվողից ակնկալվող պատաստվածությունը և հետևյալ սանդղակը.

1 միավոր («շատ վատ») – 1-ին կարգի բարդության առաջադրանքներ կատարելու համար պատրաստվածություն բոլորովին չի ցուցաբերում,

2 միավոր («վատ») – 1-ին կարգի բարդության առաջադրանքներ կատարելու համար ցուցաբերում է մասնակի պատրաստվածություն և թույլ է տալիս էական սխալներ,

3 միավոր («անբավարար») – 1-ին կարգի բարդության առաջադրանքներ կատարելու համար ցուցաբերում է պատրաստվածություն, սակայն թույլ է տալիս անճշտություններ, թերություններ և բացթողումներ,

4 միավոր («բավարար») – 1-ին կարգի բարդության առաջադրանքներ կատարելու համար ցուցաբերում է անհրաժեշտ պատրաստվածություն, չի բացառվում, որ կարող է թույլ տալ ոչ էական թերություն կամ վրիպում, որն ուշադրություն հրավիրելու դեպքում կարող է ինքնուրույն վերացնել,

5 միավոր («միջին») – 1-ին կարգի բարդության առաջադրանքներ կատարելու համար ցուցաբերում է անհրաժեշտ պատրաստվածություն կամ 2-րդ կարգի բարդության առաջադրանքներ կատարելու համար ցուցաբերում է պատրաստվածություն, սակայն թույլ է տալիս անճշտություն, թերություններ և բացթողումներ,

6 միավոր («միջինից բարձր») – 2-րդ կարգի բարդության առաջադրանքներ կատարելու համար ցուցաբերում է անհրաժեշտ պատրաստվածություն, չի բացառվում, որ կարող է թույլ տալ ոչ էական թերություն կամ վրիպում, որն ուշադրություն հրավիրելու դեպքում կարող է ինքնուրույն վերացնել,

7 միավոր («լավ») – 2-րդ կարգի բարդության առաջադրանքներ կատարելու համար ցուցաբերում է անհրաժեշտ պատրաստվածություն կամ 3-րդ կարգի բարդության առաջադրանքներ կատարելու համար ցուցաբերում է պատրաստվածություն, սակայն թույլ է տալիս անճշտություն, թերություններ և բացթողումներ,

8 միավոր («շատ լավ») – 3-րդ կարգի բարդության առաջադրանքներ կատարելու համար ցուցաբերում է անհրաժեշտ պատրաստվածություն, չի բացառվում,

որ կարող է թույլ տալ ոչ էական թերություն կամ վրիպում, որն ուշադրություն հրավիրելու դեպքում կարող է ինքնուրույն վերացնել,

9 միավոր («գերազանց») – 3-րդ կարգի բարդության առաջադրանքներ կատարելու համար ցուցաբերում է անհրաժեշտ պատրաստվածություն կամ դժվարավուն բարդության առաջադրանքներ կատարելու համար ցուցաբերում է պատրաստվածություն, սակայն թույլ է տալիս անճշտություն, թերություններ և բացթողումներ,

10 միավոր («բացառիկ») – դժվարավուն բարդության առաջադրանքներ կատարելու համար ցուցաբերում է անհրաժեշտ պատրաստվածություն, չի բացառվում, որ կարող է թույլ տալ ոչ էական թերություն կամ վրիպում, որն ուշադրություն հրավիրելու դեպքում կարող է ինքնուրույն վերացնել:

7.6.3. Բանավոր հարցում

Բանավոր հարցումը գնահատման մի ձև է, որի ժամանակ աշակերտն իր յուրացրած մաթեմատիկական նյութը գիտելիքների, կարողությունների և հմտությունների տեսքով ներկայացնում, ուսուցչին է վերադարձնում բանավոր (հետադարձ կապ):

Բանավոր հարցման հիմնական առավելությունն այն է, որ դրանով ստուգվում են սովորողի ոչ միայն մաթեմատիկական նյութի մտապահման ու վերարտադրման ռեպրոդուկտիվ ընդունակությունները, այլ նաև նյութի գիտակցված ընկալման մակարդակը:

Առաջարկվում է հարցման այս բաղադրիչը ենթաբաղադրիչների չբաժանել:

«Մաթեմատիկայի» դասապրոցեսում բանավոր հարցումն իրականացվում է **1-5** րոպե տևողությամբ:

Բանավոր հարցման միջոցով բացահայտվում են սովորողների ձեռքբերումները՝

- մաթեմատիկական փաստերի (գիտելիքների) յուրացման,
 - մաթեմատիկական բանավոր խոսքի ձևավորման,
 - լեզվամտածողության ձևավորման,
 - վերարտադրման կարողությունների ձևավորման,
 - տրամաբանական մտածողության ձևավորման,
 - մաթեմատիկական գործունեություն ցուցաբերելու (մոդելավորելու) կարողությունների ձևավորման,
 - ստեղծագործական կարողությունների ձևավորման առումներով:
- Բանավոր հարցումը կարելի է իրականացվել.

- առանձին սովորողների՝ տեղում կամ գրատախտակի մոտ բանավոր հարցման տեսքով,

- աշակերտներին ուղղված բանավոր հարցերի տեսքով,
- տնային աշխատանքների ստուգմամբ,
- համագործակցային (խմբային) կամ փոխներգործուն տեխնոլոգիաների կիրառմամբ աշխատանքների միջոցով:

Բանավոր հարցումից սովորողի կիսամյակային միավորն ընթացիկ բոլոր բանավոր հարցումների միավորների միջին թվաբանականն է:

7.6.4. Գործնական աշխատանք

«Գործնական աշխատանք» անվանումը տալիս ենք սովորողների կողմից կատարվող այն աշխատանքների տեսակներին, որոնք վերաբերում են սովորողի կողմից ձեռք բերված գիտելիքների ու հմտությունների գործնական կիրառությանը (ենթադրվում է չափիչ սարքերի կիրառություն):

Մաթեմատիկական կրթության դերը պայմանավորված է նրա գործնական-կիրառական նշանակությամբ: Այն անհրաժեշտ է մյուս ուսումնական առարկաների դասավանդման համար: Մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակներից մեկն է սովորեցնել աշակերտներին ձեռք բերած գիտելիքներն ու կարողությունները կիրառել գործնական տարբեր խնդիրներ լուծելիս:

Կարևոր է նկատի ունենալ, որ սովորողների սոցիալական հմտությունների զարգացումն ու արժեքային համակարգի ձևավորումը դիտարկվում են որպես բոլոր թեմաների ուսուցմանն ուղեկցող խնդիրներ:

Գործնական աշխատանքների հիմնական նպատակներն ու խնդիրներն են.

- ձևավորել և զարգացնել սովորողների սոցիալական հմտությունները,
- մատուցել գործնականում կիրառման համար անհրաժեշտ տեսական և գործնական նյութ,

- նպաստել անհատի ինքնադրսևորմանը, գոյատևմանը և կրթության շարունակականության ապահովմանն ուղղված հմտությունների զարգացմանը:

Հանրահաշվից գործնական աշխատանք չի նախատեսվում: Ըստ «Մաթեմատիկա» և «Երկրաչափություն» առարկաների սովորողներին ներկայացվող չափորոշչային և ծրագրային պահանջների՝ նախատեսվում են տարբեր բնույթի ու տիպի գործնական աշխատանքներ՝

1. երկրաչափական պատկերների կառուցումներ (ուղիղ, հատված, ճառագայթ, անկյուն, ուղղանկյուն, քառակուսի, շրջան և այլն),

2. չափման գործիքների (մետր, քանոն, անկյունաքանոն, փոխադրիչ, կարկին, ժամացույց, ջերմաչափ, կշեռք, չափերիզ, էկկեր, աստրոլյափա և տելսնիկական այլ սարքեր) օգտագործում,

3. մեծությունների չափում՝ երկարություն, մակերես, ծավալ, զանգված, տարողություն, ժամանակ, արժողություն,

4. երկրաչափական պատկերի կամ մարմնի բաժանում մասերի,

5. տրված պատկերներից կամ մարմիններից նոր պատկերների կամ մարմինների ստացում,

6. հարցումների, դիտարկումների միջոցով տվյալների հավաքագրում և օգտագործում աղյուսակների և դիագրամների տեսքով,

7. չափման արդյունքում ստացված տվյալներին համապատասխան տեղանքի, շինությունների քարտեզագրում և հատակագծում,

8. մոդելների, ձևանմուշների և մակետների պատրաստում,

9. «Մաթեմատիկա» առարկայի դասավանդման համար անհրաժեշտ ուսումնական նյութերի ստեղծում (պաստառներ, վահանակներ, տեսաֆիլմեր, էլեկտրոնային ներկայացումներ և այլն):

Սովորողները կատարած գործնական աշխատանքի համար գնահատվում են միավորներով: Գործնական աշխատանքները կարող են հանձնարարվել կատարելու ինչպես տանը, այնպես էլ դպրոցում:

Գործնական աշխատանքները հիմնականում անցկացվում են երկու ձևով: Առաջին ձևի գործնական աշխատանքի դեպքում հարցվող աշակերտը դասարանի մյուս աշակերտների ներկայությամբ կատարում է գործնական ինչ-որ առաջադրանք, որն ուղեկցվում է բացատրություններով: Դասարանի մյուս աշակերտները հետևում են բացատրությանը և անհրաժեշտության դեպքում կատարում համապատասխան շտկումներ կամ մեկնաբանություններ: Երկրորդ ձևի գործնական աշխատանքների դեպքում սովորողների կարողությունների ու հմտությունների ստուգումը կատարվում է միաժամանակ՝ յուրաքանչյուր աշակերտին տալով անհատական կամ տարբերակված առաջադրանք: Այս դեպքում նախընտրելի է, որ աշխատանքները կատարվեն այդ աշխատանքների համար նախատեսված առանձին տետրում, որն ուսուցիչը ստուգում և գնահատում է դասի ընթացքում կամ դասերից հետո:

Տեղանքում իրականացվող գործնական աշխատանքներն անցկացվում են խմբային մեթոդների կանոններով:

Գործնական աշխատանքների անցկացման տևողությունը սահմանվում է 5-15 րոպե: Կիսամյակի ընթացքում 5-6-րդ դասարանների «մաթեմատիկա» և «երկրաչափություն» առարկաներից նախատեսվում է մեկական գործնական աշխատանք:

Գործնական աշխատանքները գնահատելիս հաշվի են առնվում.

- տրված գործնական առաջադրանքին բնորոշ ընդհանրացումների, գաղափարների ու փաստերի ըմբռնման աստիճանը,
- նորովի կամ ստեղծագործական մոտեցումը,
- առաջադրանքի համար անհրաժեշտ հաշվարկներ կատարելու կարողությունները,
- ճիշտ հաշվարկներ անելու կարողությունը,
- գործողությունների արդյունքները հաղորդելու կարողությունը:

Գործնական աշխատանքի գնահատման սանդղակ

1 միավոր – աշակերտը գործնական աշխատանք կատարելու համար պատրաստվածություն չի ցուցաբերում:

2 միավոր – աշակերտը գործնական աշխատանքը կատարելու համար ցուցաբերում է թույլ պատրաստվածություն: Աշակերտը լուրջ դժվարություններ ունի տվյալ առաջադրանքին բնորոշ գործողությունները կատարելու, գաղափարներն ու փաստերն ըմբռնելու հարցում:

3 միավոր – աշակերտը գործնական աշխատանքը կատարելու համար ցուցաբերում է որոշակի պատրաստվածություն: Աշակերտն ունի դժվարություններ տվյալ առաջադրանքին բնորոշ գործողությունները կատարելու, գաղափարներն ու փաստերն ըմբռնելու հարցում:

4 միավոր – աշակերտը գործնական աշխատանքը կատարելու համար ցուցաբերում է բավարար պատրաստվածություն: Կարողանում է որոշ չափով կատարել գործողությունները: Աշակերտն ունի դժվարություններ տվյալ առաջադրանքին բնորոշ ընդհանրացումները, գաղափարներն ու փաստերն ըմբռնելու հարցում:

5 միավոր – աշակերտը գործնական աշխատանքը կատարելու համար ցուցաբերում է բավարար պատրաստվածություն: Կարողանում է կատարել գործողությունները, հաշվարկներում թույլ է տալիս թեթև անճշտություններ: Աշակերտն ունի որոշ դժվարություններ տվյալ առաջադրանքին բնորոշ ընդհանրացումները, գաղափարներն ու փաստերն ըմբռնելու հարցում:

6 միավոր – աշակերտը գործնական աշխատանքը կատարելու համար ցուցաբերում է բավարար պատրաստվածություն: Կարողանում է կատարել գործողությունները, հաշվարկներում թույլ է տալիս ոչ էական անճշտություններ: Աշակերտն ըմբռնում է տվյալ առաջադրանքին բնորոշ գաղափարներն ու փաստերը, սակայն դժվարանում է ընդհանրացումների ըմբռնման հարցում:

7 միավոր – աշակերտը գործնական աշխատանքը կատարելու համար ցուցաբերում է լավ պատրաստվածություն: Կարողանում է կատարել գործողությունները, հաշվարկներն ու գործնական աշխատանքի քայլերը կատարում է

առանց թերությունների: Աշակերտն ըմբռնում է տվյալ առաջադրանքին բնորոշ գաղափարներն ու փաստերը, կարողանում է կատարել ընդհանրացումներ:

8 միավոր - աշակերտը գործնական աշխատանքը կատարելու համար ցուցաբերում է լավ պատրաստվածություն: Կարողանում է կատարել գործողությունները, հաշվարկներն ու գործնական աշխատանքի քայլերը կատարում է առանց թերությունների: Աշակերտն ըմբռնում է տվյալ առաջադրանքին բնորոշ ընդհանրացումները, գաղափարներն ու փաստերը: Առկա են ոչ էական բացթողումներ:

9 միավոր - աշակերտը գործնական աշխատանքը կատարելու համար ցուցաբերում է գերազանց պատրաստվածություն: Նախատեսված գործողությունները, հաշվարկներն ու գործնական աշխատանքի քայլերը կատարում է անթերի: Աշակերտը լիարժեք ըմբռնում է տվյալ առաջադրանքին բնորոշ ընդհանրացումները, գաղափարներն ու փաստերը:

10 միավոր - աշակերտը գործնական աշխատանքը կատարելու համար ցուցաբերում է գերազանց պատրաստվածություն: Նախատեսված գործողությունները, հաշվարկներն ու գործնական աշխատանքի քայլերը կատարում է անթերի: Աշակերտը խորապես ըմբռնում է տվյալ առաջադրանքին բնորոշ ընդհանրացումները, գաղափարներն ու փաստերը կամ նորովի մոտեցում է ցուցաբերում տրված տեղեկատվության որոշ կողմերի նկատմամբ:

7.6.5. Թեմատիկ գրավոր աշխատանք

Թեմատիկ գրավոր աշխատանքը գնահատման բաղադրիչի մի տեսակ է, որի ընթացքում սովորողն իր ուսանած ուսումնական նյութը ներկայացնում է գրավոր ձևով: Այդ աշխատանքները տրվում են ծրագրային նյութի բովանդակային գծերում ներառված որոշակի թեմաներից հետո: Դրանցում պետք է ընդգրկվեն սովորողներին ներկայացվող չափորոշչային պահանջներին համապատասխան առաջադրանքներ դրանց յուրացման աստիճանը բացահայտելու նպատակով:

Թեմատիկ գրավոր աշխատանքի տևողությունը պետք է լինի 25-45 րոպե:

Առաջադրանքները կարող են տրվել.

ա) հարցարաններով, որոնցում ներառված են ծրագրում առկա տարաբնույթ օրինակներ, մասնավորապես նաև ապացուցում պահանջող օրինակներ, խնդիրներ, գործնական, կիրառական նշանակություն ունեցող հարցադրումներ, ստեղծագործական մոտեցում ակնկալող առաջադրանքներ,

բ) թեստերով, որոնցում ընդգրկված առաջադրանքները կարող են լինել.

- մեկ ճիշտ պատասխանի ընտրությամբ հարցով,
- համապատասխանեցման հարցով,
- բաց թողնվածը լրացնելու հարցով,

- կարճ պատասխաններ պահանջող հարցով,
- ստեղծագործական մոտեցում պահանջող հարցով:

Թեմատիկ ծավալուն գրավոր աշխատանքներում պետք է ներառվեն 1-ին, 2-րդ, 3-րդ կարգի բարդության առաջադրանքներ, ինչպես նաև դժվարավուն առաջադրանքներ, որոնք պահանջում են նյութի խորքային յուրացում, բարդ և անձանոթ իրադրություններում կողմնորոշելու կարողություն, գիտելիքներն ստեղծագործաբար կիրառելու հմտություն:

Այդ գրավոր աշխատանքները գնահատվում են 10 միավորային համակարգին համապատասխան:

Կարելի է տալ նաև կարճ ժամանակի համար նախատեսված գրավոր աշխատանքներ, որոնց տևողությունը 10-20 րոպե է:

Այդպիսի աշխատանքի տրաման նպատակն արդեն ուսումնասիրված թեմաներից սովորողների կողմից ձեռք բերված գիտելիքների, կարողությունների ու հմտությունների մակարդակը որոշելն է, դրա հիման վրա համապատասխան եզրահանգումների գալը և անհրաժեշտ գործունեություն ծավալելը:

Նշված գրավոր աշխատանքները ևս գնահատվում են 10 միավորային համակարգին համապատասխան:

Եթե բոլոր առաջադրանքների առավելագույն միավորների գումարը գերազանցում է 10 միավորը, ապա վերջնական արդյունքը պետք է հաշվել $N = \frac{n}{p} \cdot 10$

բանաձևով, որտեղ p -ն առավելագույն միավորների գումարն է, իսկ n -ը՝ հավաքած միավորների քանակը: Այս բանաձևի կիրառման շնորհիվ ցանկացած թեստի արդյունք բերվում է 10 միավորային սանդղակի:

Թեմատիկ գրավոր աշխատանքների քանակը կիսամյակի ընթացքում ոչ պակաս, քան տվյալ առարկայից շաբաթական ժամերի քանակն է:

7.6.6. Կիսամյակային ամփոփիչ աշխատանք

Կիսամյակային ամփոփիչ գրավոր աշխատանքի նպատակն է պարզել կիսամյակի ընթացքում աշակերտի ձեռք բերած գիտելիքի և կրթության բովանդակության «կարողություններ և հմտություններ» բաղադրիչի մակարդակը, ինչպես նաև պարզել կիսամյակի վերջում աշակերտի մնացորդային գիտելիքները:

Կիսամյակային ամփոփիչ աշխատանքին տրվող ժամանակը պետք է լինի թեմատիկ աշխատանքին տրվող ժամանակից առնվազն երկու անգամ շատ:

«Մաթեմատիկա», «Հանրահաշիվ» և «Երկրաչափություն» առարկաների կիսամյակային ամփոփիչ աշխատանքը՝ գրավոր թեստը, պետք է պարունակի բոլոր բարդության առաջադրանքներ և ընդգրկի ամբողջ կիսամյակի ընթացքում անցած

նյութը: Ընդ որում՝ թեստը պետք է պարունակի յուրաքանչյուր ստուգվող թեմայի առաջին և երկրորդ բարդության աստիճանի առաջադրանքներ, իսկ երրորդ և չորրորդ բարդության աստիճանի առաջադրանքների ընտրությունը, կախված թեստի ծավալից և թեմաներից, թողնվում է թեստը կազմողին:

Թեստը պետք է ապահովի աշակերտի առավելագույն միավոր ստանալու, և չափորոշչային նվազագույն գիտելիքներ ունեցող աշակերտի անցումային միավոր ստանալու հնարավորությունը:

Չորրորդ բարդության առաջադրանքը պետք է լինի ընդարձակ պատասխան պահանջող:

Թեստը կարող է պարունակել միաժամանակ թե՛ բազմակի ընտրությամբ պատասխան, թե՛ կարճ պատասխան և թե՛ ընդարձակ պատասխան, այդ թվում՝ նաև ապացույց պահանջող հարցեր:

Թեստի յուրաքանչյուր առաջադրանքի կատարման համար տրվում է առանձին միավոր, նշվում է գնահատման քայլը: Յուրաքանչյուր առաջադրանք գնահատվում է մյուսներից անկախ:

Թեստի առաջադրանքների կատարման համար տրվող գումարային առավելագույն միավորը կարող է տարբեր լինել 10-ից: Այդ դեպքում գումարային միավորը պետք է բերել 10 միավորային համակարգի՝ օգտվելով հետևյալ բանաձևից.

$$\frac{\text{Աշակերտի ստացած միավոր} \cdot 10}{\text{Թեստի առավելագույն միավոր}} = \text{աշակերտի միավորը՝ 10 միավ. համակարգում:}$$

Թեստից աշակերտի ստացած վերջնական միավորը պետք է մոտարկել, եթե այն ամբողջ թիվ չէ:

Կիսամյակային ամփոփիչ գրավոր աշխատանքների ստուգման և գնահատման չափանիշները տրված են «Մեթոդական ցուցումներ հանրակրթական ուսումնական հաստատություններում սովորողների ուսուցման ընթացիկ արդյունքների ստուգման և գնահատման 10 միավորային սանդղակի անցման» փաստաթղթում, որը ներկայացվում է այստեղ:

Գրավոր աշխատանքների ստուգման և գնահատման չափանիշներ կազմելու համար հաշվի են առնվում աշխատանքի տեսակը, բովանդակությունը, կատարման նպատակը (հարցարանի միջոցով կարող է ստուգվել կրթության բովանդակության տարբեր բաղադրիչներ) և հետևյալ ընթացակարգը.

ա) յուրաքանչյուր հարցարանի համար մշակվում են 10 միավորային սանդղակին համապատասխանող գնահատման չափանիշներ: Հարցարանում ընդգրկված բարդության տարբեր աստիճանի առաջադրանքների համար սահմանվում են համապատասխան միավորներ: Հարցարանն պահովում է չափորոշչային

նվազագույն պահանջներին բավարարող պատրաստվածություն ունեցող սովորողի անցումային միավոր ստանալը,

բ) առաջադրանքի կատարման համար տրվում է սահմանված առավելագույն միավորը, եթե այն կատարված է ճիշտ, բոլոր դատողություններն ու քայլերը հիմնավոր և ավարտուն են, կատարված են անհրաժեշտ գծագրերը, և աշխատանքը շարադրված է գրագետ,

գ) առաջադրանքի կատարման համար տրվում է սահմանված առավելագույն միավորից մինչև 20 %-ով պակաս միավոր, եթե այն ըստ էության ճիշտ է կատարված, դատողություններն ու քայլերը հիմնավոր և ավարտուն են, սակայն շարադրանքում թույլ է տրված թերություն, վրիպում կամ բացթողում, որը չի վերաբերում առաջադրանքի հիմնական բովանդակությանը,

դ) առաջադրանքի կատարման համար տրվում է սահմանված առավելագույն միավորից մինչև 50 %-ով պակաս միավոր, եթե կատարված են հիմնական քայլերը, սակայն դրանք ավարտուն չեն, կամ շարադրանքում թույլ է տրված սխալ, որը վերաբերում է առաջադրանքի հիմնական բովանդակությանը,

ե) առաջադրանքի կատարման համար տրվում է սահմանված առավելագույն միավորի մինչև 30 %-ը, եթե թույլ են տրված էական բացթողումներ և սխալներ, սակայն կատարված աշխատանքում առկա են ճիշտ քայլեր, որոնք վկայում են, որ գնահատվողն ունի առաջադրանքի բովանդակությանը վերաբերող անհրաժեշտ գիտելիքներ կամ կարողություններ,

զ) գրավոր աշխատանքի գնահատականը որոշվում է դրա պարունակած առաջադրանքների կատարման համար ստացված գումարային միավորով:

Ստորև ներկայացվում է ըստ գնահատվող բաղադրիչների՝ աշակերտի կիսամյակային գնահատականի ձևավորման մեկ օրինակ, որը մեջբերված է ԿԳ նախարարի 11.12.09 թ.-ի՝ ՀՀ մարզպետներին և Երևանի քաղաքապետին ուղղված մեթոդական ցուցումներից:

Դիցուք սովորողը «Երկրաչափություն» առարկայից մեկ կիսամյակում, ըստ գնահատվող բաղադրիչների, ստացել է հետևյալ գնահատականները՝

1. կիսամյակային ամփոփիչ աշխատանք /Կ/ - 7,
2. թեմատիկ գրավոր աշխատանք /Թ/ - 4; 6; 7; 8,
3. բանավոր հարցում /Բ/ - 5; 5; 4; 7; 6; 5; 6; 8,
4. գործնական աշխատանք /Գ/ - 5; 6:

Ըստ յուրաքանչյուր բաղադրիչի՝ ուսուցչի նշանակած կիսամյակային գնահատականների միջին թվաբանականը կլինի.

$$Կ = 7,$$

$$Թ = (4+6+7+8):4 = 6,25,$$

$$Բ = (5+5+4+7+6+5+6+8):8 = 5,75,$$

$$Գ = (5+6):2 = 5,5:$$

Աշակերտի կիսամյակային գնահատականը հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով.

$ԿԳ$ (կիսամյակային գնահատական) = $(Կ+Թ+Բ+Գ):4 = (7+6,5+5,75+5,5):4 \approx 6,1 \approx 6$:

Աշակերտի կիսամյակային գնահատականը ստացվեց «6»:

Աշակերտի տարեկան գնահատականը ձևավորվում է երկու կիսամյակային գնահատականների միջինով: Եթե անհրաժեշտություն է առաջանում գնահատականի մոտարկման, ապա մոտարկումը կատարելիս առավելությունը տրվում է երկրորդ կիսամյակում ստացած գնահատականին: Օրինակ՝ եթե I կիսամյակի գնահատականը «6» է, իսկ II-ը՝ «7», ապա S (տարեկան) = $(I Կ+ II Կ):2 = (6+7):2 = 6,5 \approx 7$: Եթե I կիսամյակը «7» է, II-ը՝ «6», ապա տարեկանը կլինի «6»:

Գնահատման չափանիշները պետք է հայտնի լինեն աշակերտին:

7.7. Մաթեմատիկայի ուսուցչի նախապատրաստվելը դասին

7.7.1. Ուսուցչի դասին նախապատրաստվելու համակարգը

Հայտնի մանկավարժներ Ի. Յա. Լերները և Մ. Ն. Սկատկինը նշում են, որ ոչ մի դաս չի կարող լուծել ուսուցման բոլոր խնդիրները: Այն ընդամենը թեմայի, դասընթացի, ուսումնական առարկայի մի մասն է: Այդ պատճառով անհրաժեշտ է մշտապես գիտակցել, թե այն ինչպիսի տեղ է զբաղեցնում ուսումնական առարկայի դասերի համակարգում, դասընթացի ուսումնադաստիարակչական խնդիրներին համեմատ ինչպիսին են նրա դիդակտիկական նպատակները: Դասը պետք է լինի թեմայի, բաժնի, դասընթացի տրամաբանական միավորը [180; 10]:

Այսպիսով՝ մաթեմատիկայի դասը ոչ միայն ավարտուն ամբողջականություն է, այլ նաև ըստ ուսումնական թեմայի և ըստ ուսումնական առարկայի՝ մի ամբողջություն կազմող դասերի համակարգի միանգամայն որոշակի օղակը:

Դիդակտիկային նվիրված որոշ աշխատանքներում նշվում է, որ պրակտիկայում ընդունված է, որ ուսուցչի դասերին նախապատրաստվելու համակարգը բաղկացած է երեք փուլերից՝

- 1) ուսուցչի նախապատրաստվելը ուսումնական տարուն,
- 2) ուսումնական թեմայի դասերի համակարգի նախապատրաստումը,
- 3) հերթական դասին նախապատրաստվելը:

Նկատենք, որ ներկայումս, բացի դասագրքից, ուսուցչի տրամադրության տակ կա ուսուցման յուրաքանչյուր տարվա համար նախատեսված ուսումնամեթոդական ձեռնարկների հատուկ հավաքածու՝ առարկայական չափորոշիչ և ծրագիր, ուսուցչի ձեռնարկ, դիդակտիկ նյութերի ժողովածու, լուծումների ուղեցույցներ, լրացուցիչ խնդրագրքեր: Այդ նյութերից առանձնապես կարևոր են չա-

փորձել են ու ծրագիրը, որոնցում սահմանված են դասագրքի յուրաքանչյուր թեմայի համար մաթեմատիկական պատրաստվածության բոլոր սովորողների համար **պարտադիր մակարդակը** և առարկայից բարձր գնահատականների հավակնողների համար նախատեսված **ցանկալի մակարդակը**: Ուսուցչի ձեռնարկում նշված են դասերի վարման համար կոնկրետ մեթոդական ցուցումներ, տրվում են ուսումնական նյութի օրինակելի թեմատիկ պլանավորումը, դասի պլանների նմուշներ, թեմատիկ գրավոր ու ինքնուրույն աշխատանքների և կիսամյակային ամփոփիչ աշխատանքների տեքստեր, դասագրքի առավել դժվար առաջադրանքների լուծումների նմուշներ և այլն:

Ուսուցչի դասին նախապատրաստվելը սկսվում է դասի թեմայի և դրա դիդակտիկական նպատակի ձևակերպումից: Ուշադրությամբ ընթերցելով դասի դասագրքային տեքստը և ծանոթանալով համապատասխան վարժություններին և խնդիրներին, ինչպես նաև մտածելով դրանց լուծման եղանակների մասին՝ ուսուցիչը անդրադառնում է մեթոդական ցուցումներին և լրացուցիչ գրականությանը, եթե վերջինիս անհրաժեշտությունը կա:

Ապա ընտրելով դասի տիպը և մտածելով դասի հնարավոր կառուցվածքի մասին՝ ուսուցիչը ձեռնամուխ է լինում նախապատրաստական ամենապատասխանատու հարցի լուծմանը. ինչպիսի մեթոդներ են նպատակահարմար կիրառել տվյալ թեման առավել արդյունավետ ուսուցանելու համար: Առաջին հերթին ասվածը վերաբերում է ուսուցման նպատակահարմար մեթոդների ընտրությանը: Ստեղծագործաբար աշխատող ուսուցիչը, ելնելով դասի թեմայի և նպատակի ձևակերպումներից, վճռում է, թե ինչ ուսուցման մեթոդ է նպատակահարմար գտնում տվյալ թեման հաջողությամբ ուսուցանելու համար: Ապա նա բացահայտում է նաև այն ապացուցման մեթոդները, որոնց հիման վրա կատարվելու են դասագրքային ապացուցումները և խնդիրների լուծումները, ինչպես նաև ընտրում է գիտական հետազոտության մեթոդները, որոնք, եթե անհրաժեշտ է, պետք է կիրառվեն դասի ընթացքում սովորողների ինքնուրույն ստեղծագործական աշխատանքները կազմակերպելու համար: Հաջորդ քայլում ուսուցիչը ընտրում է, թե ինչ առաջադրանքներ պետք է լուծվեն դասարանում, և որոնք պետք է հանձնարարվեն աշակերտներին որպես տնային հանձնարարություն:

7.7.2. Դասի պլանը պետք է գրվի բավականին մանրակրկիտ. հարմար է աղյուսակի տեսքով՝ հստակ առանձնացնելով դասի փուլերը, սահմանելով ոչ միայն ուսուցչի կատարելիք աշխատանքը, այլև այն աշխատանքները, որոնք պետք է կատարեն աշակերտները դասի յուրաքանչյուր փուլում: Դասի փուլերը հարմար է համարակալել հոմեական թվանշաններով, իսկ յուրաքանչյուր փուլը նկարագրելիս հարմար է օգտագործել արաբական թվանշաններ կամ հայկական տառեր: Յուրաքանչյուր փուլի համար հատուկ սյունակում պետք է սահմանվեն դրանց

կատարման ժամանակները: Առանձնակի կարևոր է նոր նյութի խթանման փուլին պատշաճ նախապատրաստվելը: Սովորողների մոտիվացիան ապահովելու նպատակով խիստ կարևոր է նոր նյութի թեման զուգորդել հետաքրքրաշարժ պատմական այլ ինտերակտիվ խնդրով, որը կմեծացնի սովորողների հետաքրքրությունները թեմայի նկատմամբ, կուղղորդի նրանց ուսումնասիրելու այդ իրենց համար կարևոր, հետաքրքրաշարժ ու կիրառական նյութը: Սովորաբար դասագրքերում խթանման փուլի համար հետաքրքրաշարժ նման միջոցները բացակայում են, սակայն ՀՀ հանրահաշվի նախորդ (Հ. Ս. Միքայելյանի) դասագրքերում հեղինակային նման հրաշալի լուծումներ շատ կան: Օրինակ՝ կարելի է բերել երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի վերաբերյալ դասանյութի սկզբում շախմատի ստեղծման վերաբերյալ պատմական հրաշալի պատմության շարադրանքը, ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների վերաբերյալ «Գինեսի գրքի» ստեղծման վերաբերյալ պատմությունը և այլն: Ընդհանրապես այս նպատակով այդ դասագրքերը անփոխարինելի օժանդակ օգնություն կարող են տալ ուսուցիչներին նոր նյութի խթանման փուլը մշակելիս:

Եթե դասի ուսուցման մեթոդը էվրիստիկ գրույցն է, ապա դասը պլանավորելիս ուսուցիչը պետք է պլանում գրի առնի լավ մտածված էվրիստիկ հարցերի համակարգ: Պրոբլեմային ուսուցման մեթոդ կիրառելիս պետք է պլանում նշվի, թե ինչպես է ստեղծելու պրոբլեմային իրավիճակը, ինչպես և ով (ովքեր) են ձևակերպելու պրոբլեմը, պրոբլեմը լուծելիս և լուծումը ստուգելիս ինչպիսի մասնակցություն ունեն աշակերտները, ինչպիսին պետք է լինի ուսուցչի դերը և այլն: Հետագոտական մեթոդ կիրառելիս խնդիրը ինչպիսի ենթախնդիրների պետք է տրոհվի, ինչպես և ովքեր պետք է կատարեն ենթախնդիրները, ինչպես պետք է կազմակերպվի ստացված արդյունքների մշակումը, ինչպիսին պետք է լինի ուսուցչի օգնությունը և այլն: Խմբային հետազոտման մեթոդ կիրառելիս ինչպես պետք է ստեղծվեն խմբերը, ինչպես պետք է ներկայացվեն խմբերի աշխատանքները, ինչպես պետք է կահավորվի դասարանը և այլն: Բոլոր դեպքերում պետք է պլանավորվի նաև, թե ինչպես պետք է ամրապնդվի նոր նյութը: Եթե դասը խառը տիպ դաս է, ապա պլանում պետք է նշվի, թե ինչպես, ինչ առաջադրանքներով պետք է կատարվի հին դասի հարցումը:

Նշենք նաև, որ պետք է պլանից պարզ լինի, թե տնային աշխատանքներից որ առաջադրանքը երբ և ինչպես պետք է ստուգվի: Տնային աշխատանքների լրիվ ստուգումը դասի ընթացքում նպատակահարմար չէ: Ընդհանրապես ընդունված է շատ մեթոդիստների կողմից, որ տնային աշխատանքների ստուգումը պետք է կատարվի դասերից դուրս և պետք է զբաղեցնի ուսուցչի դպրոցում գտնվելու ժամանակի 50 %-ից ոչ շատ ժամանակ: Նշենք նաև, որ տնային աշխատանքների ստուգման արդյունքները կարող են մատյանում գրանցվել որպես բանավոր հարցման գնահատական: Իհարկե, բոլոր տնային աշխատանքները պետք է ստուգվեն և

սխալներն ուղղվեն, սակայն մատչանում գրանցելիս կարելի է կիրառել պատահական ընտրության եղանակը. այս դասին գրանցվում են 4-5 աշակերտի գնահատականները, մյուս դասին՝ այլ 4-5 հոգու գնահատականները և այլն:

7.7.3. Ուսուցչի նախապատրաստվելը հերթական դասին

Դասի պլանը ուսուցիչը կազմում է թեմատիկ պլանին համապատասխան՝ հենվելով աշակերտների առանձնահատկությունների և զարգացման վերաբերյալ իր գիտելիքների, նրանց ընդհանուր և մաթեմատիկական պատրաստվածության մակարդակի և պարապմունքների անցկացման դասարանային պայմանների վրա:

Դասի պլանը սկսնակ ուսուցչի համար պարտադիր փաստաթուղթ է: Համընդհանուր տեսքի պլան գոյություն չունի: Մեթոդական գրականությունում տրվում է միայն դասի համառոտ պլան կամ ընդարձակ՝ պլան-կոնսպեկտ կազմելու օրինակելի սխեմաներ, կամ էլ ներկայացվում են կոնկրետ դասի պլան նմուշօրինակներ:

Շարադրենք ավանդական դասի պլան կազմելու մեկ օրինակ:

6-րդ դասարան

Դասի թեման. **Տարբեր նշաններով երկու թվերի գումարումը**

Դասի տիպը. **Նոր նյութի հաղորդման դաս**

Դասի թեմայի բնութագրումը

Թեմայի տեսական մասը ծավալով մեծ չէ. փաստացի այն միայն տարբեր նշաններով երկու թվերի գումարման կանոնն է: Հաշվի առնելով վեցերորդ դասարանցիների տարիքային առանձնահատկությունները և նրանց մաթեմատիկական պատրաստվածության փաստացի մակարդակը, ինչպես նաև այն փաստը, որ 1-6-րդ դասարանների մաթեմատիկայի դասընթացն ունի ինդուկտիվ շարադրանք՝ մինչև նոր կանոնի ձևակերպումը դիտարկվում են այդ կանոնի կիրառության նպատակահարմարությունը մեկնաբանող կոնկրետ խնդիրներ: Նշենք նաև, որ կանոնը սովորողների համար դժվարըմբռնելի է և անսովոր:

Դասի **դիդակտիկական նպատակների** ձևակերպումը

1. Աշակերտներին ծանոթացնել տարբեր նշաններով թվերի գումարման կանոնի հետ և հասնել այն բանին, որ նրանք կարողանան կատարել գործողություններ այդ կանոնով:

2. Նպաստել կանոնը կիրառելիս սովորողների մոտ ուշադրության և ճշտապահության դաստիարակությանը:

3. Նպաստել, որ ձևավորվեն սովորողների՝
- ա) նախորդ դասի իրավիճակներին համապատասխան իրենց գործունեությունը պլանավորելու կարողություններ,
 - բ) մաթեմատիկական նախադասություններն (պնդումներն) ըստ թվերի գումարման կանոնի վերլուծելու կարողություններ:

Ուսումնական նյութի **հիմնական բովանդակության** ընտրությունը

1. Դասի ընթացքում պետք է դառնան գործուն, առաջնահերթ հետևյալ գիտելիքները:

Խոսքն առաջին հերթին վերաբերում է միևնույն նշանով երկու թվերի գումարման մասին գիտելիքներին, քանի որ նոր նյութը դրա տրամաբանական շարունակությունն է: Նոր կանոնը պետք է յուրացվի երկու բացասական թվերի գումարման կանոնի համեմատությամբ: Նոր նյութը պահանջում է նաև գործողությունների ազատ կատարում մոդուլի գաղափարի հետ (մոդուլի էությունը, թվի մոդուլը գտնելը և մոդուլների համեմատումը):

Նշված գիտելիքների արդիականացումը պետք է իրականացվի հետևյալ տիպի խնդիրների միջոցով:

1. Տրված են երկու թվեր.

ա) համեմատել նրանց մոդուլները,

բ) գումարել նրանց մոդուլները,

գ) մեծ մոդուլից հանել փոքր մոդուլը:

2) Տրված են երկու բացասական թվեր: Գտնել դրանց գումարը:

2. Գումարման նոր կանոնի ներմուծման նպատակահարմարությունը կարելի է ցուցադրել կյանքից վերցված խնդիրների միջոցով, որոնց լուծումը գրառվում է հետևյալ տիպի արտահայտություններով՝ ա) $8 + (-5)$ և բ) $4 + (-7)$: Այս տիպի խնդիրների լուծումների վերլուծությունը թույլ է տալիս «ձևակերպել» նոր կանոնը:

3. Գումարման նոր կանոնի յուրացման աշխատանքը պետք է ընթանա հետևյալ տիպի վարժությունների կատարմամբ. «Տրված են երկու տարբեր նշաններով թվեր: Գտնել դրանց գումարը»:

Դասի կահավորումը

1. Կոորդինատային ուղղի՝ շարժվող կետով ցուցադրական մոդել:

2. Համակարգիչ կամ կոդոսկոպ, կոդոպոզիտիվներ:

Ուսուցման մեթոդների ընտրությունը

Որպես հիմնական՝ տանող մեթոդ, ընտրվում են էվրիստիկ զրույցի մասնակի որոնողական և պրոբլեմային ուսուցման մեթոդները:

Դասի կառուցվածքը

I. Դասի նպատակադրումը (2 թույլ):

II. Կարողությունների ստուգում.

ա) գումարել երկու բացասական թվեր,

բ) համեմատել թվերի մոդուլները ֆրոնտալ (համընդհանուր) հարցման և կարճատև թեմատիկ աշխատանքի միջոցով (10 թույլ):

III. Նոր նյութի հաղորդում և դրա ամրապնդում (28 թույլ):

ա) Ուսումնական հիմնախնդրի առադրում և դրա լուծում՝ տարբեր նշաններ ունեցող թվերի գումարման կանոնի «որոնում»:

(Էվրիստիկ գրույցի և պրոբլեմային ուսուցման մեթոդներ: Գիտական հետազոտության անալոգիայի մեթոդի կիրառում):

բ) Աշխատանք դասագրքի հետ: Դասագրքում ձևակերպված կանոնի վերլուծություն: Դրանում գործողությունների կատարման երկու քայլերի առանձնացում:

գ) Կանոնի յուրացման նախնական աշխատանք (վարժությունների լուծում):

դ) Ուսուցանող բնույթի ինքնուրույն աշխատանք (վերաբրտադրողական տիպի):

(Տարբերակված մոտեցում սովորողների նկատմամբ: Օգնություն թույլ սովորողներին: Արդյունքների ինքնաստուգում):

IV. Դասի հիմնական աշխատանքների արդյունքների ամփոփում (3 թույլ):

V. Տնային հանձնարարություններ (2 թույլ):

Այս դասի ընթացքի պլանավորումը առանձնակի դժվարություն չի ներկայացնում:

Ժամանակակից՝ փոխներգործուն կամ համագործակցային դասի պլանների օրինակներ մեր կողմից բերվել են ուսուցման համապատասխան մեթոդների վերաբերյալ պարագրաֆներում (տե՛ս գլուխ 5-ի 5.7 և 5.8 ենթագլուխներում):

Նշենք նաև, որ միևնույն դասը կարելի է պլանավորել տարբեր կերպ՝ առանց խախտելու դասի օպտիմալ նպատակների, նպատակահարմար մեթոդների, բովանդակության և գործունեության կազմակերպման ընտրությունները:

7.7.4. Դասի վերլուծությունը

Դիցուք կազմվել է վերոհիշյալ դասի վերոշարադրյալ պլանը: Որպես կազմված պլանի ստուգում՝ այժմ, օգտվելով այդ դասի վերևում նկարագրված կառուցվածքից, կարելի է անցնել նրա վերլուծությանը:

Ըստ այդ պլանի՝ դասը վարելուց հետո ուսուցիչը մտովի վերլուծության է ենթարկում իր վարած դասը՝ վեր հանելով և ընդգծելով առավել հաջողված պահերը կամ նրա հիմնական թերություններն ու դրանց պատճառները: Օգտակար կլինի այդ նպատակով որոշակի ճշգրտումներ կատարել հենց դասի պլանում:

Դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցիչների մեթոդախաղարհումը մշտապես կազմակերպում է հատուկ նպատակներ հետապնդող փոխադարձ դասալսումներ: Այս պարագայում դասի վերլուծությունը կարող է հանդիսանալ դասավանդման որակի բարելավման և առաջավոր փորձի փոխանակման միջոց, նպաստել նոր և առաջադիմական փորձը պրակտիկայում ներդնելուն:

Մյուս կողմից յուրաքանչյուր մանկավարժական պրակտիկայի ժամանակ ուսանողները մանկավարժի, ուսուցիչ-մեթոդիստի ղեկավարությամբ կամ ինքնուրույն իրականացնում են նպատակամղված դիտում-դասալսումներ: Այս պարագայում դասի վերլուծությունները կարող են վերածվել ապագա ուսուցչի մեթոդամանկավարժական պատրաստվածության գործուն դպրոցի:

Վերջապես դպրոցի ղեկավարությունը նույնպես իրականացնում է վերահսկում, որի ամենագործուն միջոցը դարձյալ դասալսումն է, որի միջոցով էլ նրանք փորձում են գործնական օգնություն ցուցաբերել ուսուցիչներին:

Առանձնակի կարևոր դասալսում-ստուգումներ են անցկացվում ՀՀ ԿԳՆ հանրապետական տեսչության տեսչական խմբերի կողմից:

Դասալսումների նշված բոլոր տեսակների համար խիստ կարևոր է, որ դրանք կատարվեն պատշաճ մակարդակով՝ պահապանելով դասալսողի և դասալսման գործընթացի հոգեբանկավարժական ու էթիկայի կանոնները:

Եվ այսպես՝ ի՞նչ է դասալսումը: Ի՞նչ նպատակներ է այն հետապնդում:

Նախևառաջ դասալսողը պետք է դասալսման ողջ գործընթացում ապահովի բացահայտ չեզոքություն՝ չմիջամտելով դասին, չխախտելով ուսուցչի պլանավորած դասի կառուցվածքը: Սկսած դասալսման թույլատրությունից, վերջացրած դասարանին կամ որևէ աշակերտին դիմելուց՝ ամեն ինչ պետք է կատարվի ուսուցչի համաձայնությամբ: Հիշենք՝ դասի տերը միայն ու միայն դասը վարող ուսուցիչն է, և ոչ ոք իրավունք չունի անհարկի միջամտելու դասին:

Երկրորդ՝ դասալսումը սովորաբար ունենում է կոնկրետ նպատակ կամ նպատակներ, որոնք սովորաբար բացահայտվում են լսած դասի վերլուծության ժամանակ:

Վերլուծությունը կարող է լինել համակողմանի և վերաբերել մի ամբողջության մեջ գտնվող դասի դիդակտիկական նպատակներին, սոցիալական հմտությունների զարգացմանը, կիրառված ուսուցման մեթոդների նպատակահարմարությանը, բովանդակության ուսուցման արդյունավետությանը, ուսուցչի մանկավարժական պատրաստվածությանը, սովորողների աշխատանքի կազմա-

կերպմանը, դասը վարելու ուսուցչի հոգեբանամանկավարժական հմտությանը և այլն: Նման վերլուծությունը կոչվում կոմպլեքսային:

Կարելի է նաև առանձնացնել դասալսման նշված ասպեկտներից որևէ մեկը: Նման դասալսումը կոչվում է ասպեկտային:

Դասի վերլուծության ասպեկտները բազմազան են: Բերենք որոշ օրինակներ:

1. Դասի նպատակի իրականացում (հանրակրթական, դաստիարակչական, սոցիալական, զարգացնող):

2. Դասի մաթեմատիկական բովանդակության գիտական մակարդակը:

3. Դասի ընդհանուր կառուցվածքի վերլուծություն:

4. Ուսուցման մեթոդների կիրառությունը՝ նպատակադրումը:

5. Աշակերտների ինքնուրույն աշխատանքի կազմակերպման մակարդակը:

6. Սովորողների ուսումնական կարողությունների և հմտությունների ձևավորման մակարդակը:

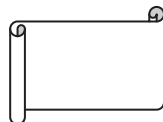
7. Սովորողների սոցիալական հմտությունների ձևավորման մեթոդիկան:

8. Սովորողների մոտ արժեքային համակարգի առանձին տարրերի ձևավորման և զարգացման իրավիճակը:

9. Կարելի է առանձնացնել նաև դասի հոգեբանական, բարոյագիտական, գեղագիտական, հիգենիկ և այլ ասպեկտները և այլն:

Սակայն մաթեմատիկայի դասում ամենագլխավորը նրա մաթեմատիկական և դաստիարակչական որակների ձևավորման բովանդակությունն է:

Բոլոր դեպքերում դասի ընդհանուր գնահատականը տրվում է ըստ գործունեության կոնկրետ արդյունքների և ոչ թե ըստ արտաքին դրսևորումների:



ՀԱՎԵԼՎԱԾ

1. Մաթեմատիկայի ծրագրերի և ուսումնամեթոդական գրականության վերլուծություն (տե՛ս [13], էջ 37-84):

2. Ապացուցման նպատակահարմար մեթոդի ընտրության մասին (տե՛ս [29], 268-277 էջեր կամ [12], 9-16 էջեր):

3. Կուրսային և ավարտական (թեզերի) աշխատանքների օրինակելի թեմաներ.

- Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ավանդաբար կիրառվող ապացուցման մեթոդները:

- Երկրաչափության դասընթացի սահմանումների ուսուցման մասին:

- Ուսուցման փոխներգործուն մեթոդների կիրառությունը հանրահաշվի (երկրաչափության) դասընթացում:

- Համագործակցային ուսուցման մեթոդների կիրառությունը հանրահաշվի (երկրաչափության) դասընթացում:

- Ուսուցչի նախապատրաստվելը մաթեմատիկայի դասին:

- Ապացուցման նպատակահարմար մեթոդի ընտրության մասին:

- Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ավանդաբար կիրառվող գիտական ճանաչողության մեթոդները:

- Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում դիդակտիկական ... սկզբունքի կիրառության մասին:

- Մաթեմատիկայի ուսուցման ... մեթոդի կիրառության մեթոդիկայի մասին:

- Ապացուցման ... մեթոդի ուսուցման մեթոդիկայի մասին:

- Գիտական ճանաչողության ... մեթոդի կիրառության մեթոդիկայի մասին և այլն:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. «ՀՀ կրթության զարգացման 2001-2005 թթ. պետական ծրագիր»:
2. «ՀՀ կրթության զարգացման 2011-2015 թթ. պետական ծրագիր»:
3. «Բարձրագույն և հետբուհական մասնագիտական կրթության մասին» ՀՀ օրենք:
4. «Միջնակարգ (լրիվ) ընդհանուր կրթության պետական չափորոշիչ»: ՀՀ ԿԳՆ «Տեղեկագիր», 2000 թ., N2, էջ 24-46:
5. «Մաթեմատիկա: Հանրակրթական դպրոցի առարկայական չափորոշիչ (նախագիծ)», ՀՀ ԿԳՆ ԿԲԿ, -Ե., 2001, 64 էջ:
6. «Հանրակրթության պետական կրթակարգ: Միջնակարգ կրթության պետական չափորոշիչ», Ե., 2004, 72 էջ:
7. «Մաթեմատիկա: Հանրակրթական հիմնական դպրոցի առարկայական, չափորոշիչ և ծրագիր», Ե., 2007, 84 էջ:
8. «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, Երկրաչափություն: Հանրակրթական ավագ դպրոցի չափորոշիչներ և ծրագրեր», Ե., «Տիգրան Մեծ», 144 էջ:
9. Աթանասյան Լ. Ս. և ուրիշներ, Երկրաչափություն 6, 7, 8, Ե., «Աստղիկ 59», 2000, 6, 7 127 էջ, 8, 142 էջ:
10. Ամիրջանյան Յու. Ա., Ժամանակակից դիդակտիկա: Ե., «Լույս», 1990, 328 էջ:
11. Այվազյան Է. Ի., Մաթեմատիկայի ուսուցման արդյունքների պլանավորման մասին, «Սովետական մանկավարժ», 1988, N12, 16-20 էջեր:
12. Այվազյան Է. Ի., Ապացուցման մեթոդի ընտրության մասին, «Մաթեմատիկական դպրոցում», 1998, N 3, 9-16 էջեր:
13. Այվազյան Է. Ի., «Մաթեմատիկական ապացուցումների ուսուցման մեթոդաբանական հիմունքները», Ե., 2013, 306 էջ:
14. Այվազյան Է. Ի., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր 10-12: Ուսուցչի մեթոդական ձեռնարկ, ընդհանուր և հումանիտար հոսքեր, Ե., «Էդիթ Պրինտ», 2009, 80 էջ:
15. Այվազյան Է. Ի., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր 10-12: Ուսուցչի մեթոդական ձեռնարկ, բնագիտամաթեմատիկական հոսքեր, Ե., «Տիգրան Մեծ», 2009, 104 էջ:
16. Այվազյան Է. Ի., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր 10, 11, 12: Լուծումների ուղեցույց, (երեք գրքով), բնագիտամաթեմատիկական, ընդհանուր և հումանիտար հոսքեր, Ե., «Էդիթ Պրինտ», 2009-2011, 10-112 էջ, 11-198 էջ, 12-260 էջ:
17. Այվազյան Է. Ի., Ապացուցումների ուսուցման պարտադիր պահանջների

միջառարկայական՝ ինտեգրող բնույթը: ԵՊՀ միջազգային գիտաժողով, Ծաղկաձոր, «Մանկավարժական միտք», N 2015, 6 էջ:

18. Առաքելյան Հ. Ս., Համանմանությունը երկրաչափության որոշ հարցերում (I, II): «Մաթեմատիկայի դասավանդման արդի հիմնահարցերը», գիտա-մեթոդական հոդվածների ժողովածու: Պրակ 4, 5, Ե., 2003, N 4, 37-48 էջեր, 5, 27-40 էջեր:

19. Արնաուդյան Ա., Գյուլբուդադյան Ա. և ուրիշներ, Մասնագիտական զարգացման ձեռնարկ (ուսուցիչների համար), Ե., 2004, 178 էջ:

20. Բրուսյան Գ. Ա., Տրամաբանության դասընթաց, -Ե., ԵՊՀ հրատարակչություն, 1976, 507 էջ:

21. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր-9,10, Ե., «Էդիթ Պրինտ», 2001, 9-214 էջ, 10-191 էջ:

22. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր - 10, 11, 12 (երեք գրքով): Ընդհանուր և հումանիտար հոսքեր, Ե. «Էդիթ Պրինտ», 2009, 136 էջ, 2010, 128 էջ, 2011, 128 էջ:

23. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր - 10, 11, 12 (երեք գրքով): Բնագիտամաթեմատիկական հոսքեր, Ե., «Տիգրան Մեծ», 2009, 208 էջ, 2010, 200 էջ, 2011, 206 էջ:

24. Գևորգյան Հ. Ա., Բաղդասարյան Վ. Խ., Տրամաբանություն 9-10, Ե., «Լույս», 1994, 264 էջ:

25. Կոլմոգորով Ա. Ն., Աբրամով Ա. Մ. և ուրիշներ, Հանրահաշիվ և անալիզի հիմունքներ 9-10, Ե., «Լույս», 1995, 352 էջ:

26. Հակոբյան Գ., Սովորողների հետազոտական ունակությունների զարգացումը ֆիզիկայի դասերին, Ե., 1977:

27. Հակոբյան Ս. Է., Երկրաչափություն 10, 11, 12, ավագ դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի դասագրքեր, Ե., «Տիգրան Մեծ», 2009-2011:

28. Մակարիչև Յու. Ն. և ուրիշներ, Հանրահաշիվ 6, 7, 8, Ե., «Լույս», (երեք գրքով), 1983:

29. Միքայելյան Հ. Ս., Այվազյան Է. Ի. և ուրիշներ, ՀՀ Հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի 1-10-րդ դասարանների հայեցակարգ և ծրագիր, Ե., 1996, 88 էջ:

30. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրակրթական դպրոցի 6-8 դասարանների հանրահաշվի ծրագիր, «Մաթեմատիկական դպրոցում (ՄԴ)», N3-4, 1999, 3-15 էջեր:

31. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 6, 7, 8, Ե., «Հայ Էդիթ», 1999:

32. Միքայելյան Հ. Ս., Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց, բուհական դասագիրք, Ե., «Էդիթ Պրինտ», 2004, 352 էջ:

33. Միքայելյան Հ. Ս., Բարոյական արժեքները և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը, Ե., «Էդիթ Պրինտ», 2011, 182 էջ:

-
34. Միքայելյան Օ., Աշակերտի ընդհանրական գիտելիքների գնահատման փորձ «Մաթեմատիկա» առարկայից միջին դպրոցում, «Մաթեմատիկան դպրոցում», 2002, N4, 23-29 էջեր:
35. Մկրտչյան Մ. Ա., Կրթության ոլորտի նշանակությունը ազգային ինքնության ապահովման և պետականության ամրապնդման խնդիրներում, «Մանկավարժություն», 2003, N1, 6-14 էջեր:
36. Մկրտչյան Մ. Ա., Ուսուցման կոլեկտիվ եղանակի իրականացման մեթոդաբանական, տեսական և գործնական հարցերը, Ե., 2011, 146 էջ:
37. Նահապետյան Բ., Աբրահամյան Ա., Մաթեմատիկա-4, Ե.: «Մակմիլան-Արմենիա», 2000, 239 էջ:
38. Նահապետյան Բ., Աբրահամյան Ա., Մաթեմատիկա-5, Ե., «Մակմիլան-Արմենիա», 2000, 207 էջ:
39. Վեսա Պուրոկուրու, Համագործակցային ուսուցում, Ե., «Անտարես», 2006, էջ:
40. Ռաշմաճյան Տ., Նոր դպրոց, 1909, էջ 11:
41. Ստոյար Ա. Ա., Մաթեմատիկայի ուսուցումը և սովորողների տրամաբանական զարգացումը: «Մաթեմատիկան դպրոցում», N1, 2002, 19-31 էջեր:
42. Քլայն Մ., Մաթեմատիկայի ծագումը և նրա դերը իմացության մեջ: «Մաթեմատիկան դպրոցում», N2, 2002, 9-18 էջեր:
43. Айвазян Э. И., Планирование обязательного уровня усвоения методов доказательств геометрических утверждений. 13.00.02, дисс. на соиск. уч. к.п.н., М., 1986, 153 л.
44. Айвазян Э. И., О доказательствах существования объекта (отношения). “Научная сокровищница образования Донетчины” (Донецк, Украина), Научно-методический журнал, N 2(15), 2013, стр. 44-47.
45. Айвазян Э. И., Роль словесно-грамматической и логической формы утверждения в процессе выбора целесообразного метода доказательства, “Вектор науки ТГУ” (Тольятти, Россия), Научно-методический журнал, N 1(23), 2013, стр. 289-292.
46. Айвазян Э. И., О методике обучения определением, “Вестник Черкасского университета”, Серия –Педагогические науки, N 12 (265), 2013, стр. 146-149.
47. Айвазян Э. И., О рабочих определениях общедидактических понятий “метод”, “умение”, “Вестник Черкасского университета”, Серия –Педагогические науки, N 13 (266), 2013, стр. 8-11.
48. Айвазян Э. И., Мышление и жизнь. Аналогия продолжительности, “Вестник Балтийской педагогической академии” (Санкт-Петербург, Россия), Вып. 110- 2013, стр. 86-90.

49. Айвазян Э. И., О проблеме выделения условия и заключения утверждения, Міністерство освіти і науки України, Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Актуальні питання природничо-математичної освіти, Збірник наукових праць, Випуск 3, 2014, Суми ВВП «Мрія», стр. 12-15.

50. Айвазян Э. И., Разработка дидактических требований к сложности задач, характеризующих обязательные результаты обучения математике, Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, II (16), Issue: 33, Budapest, 2014, стр. 26-30, [www. Seanewdim.com](http://www.Seanewdim.com).

51. Александров А. Д., О геометрии. “Математика в школе”, N 3, 1980, стр. 56-63.

52. Ананченко К. О., Обучение индуктивным и дедуктивным умозаключениям: в кн. “Преподавание алгебры в 6-8 классах. М., “Просвещение”, 1980, стр. 186-203.

53. Асмус В. Ф., Учение логики о доказательстве и опровержении. М., “Госполитиздат”, 1954, 88 стр.

54. Асмус В. Ф., Логика. “Госполитиздат”, 1947, -387 стр.

55. Бабанский Ю. К., Оптимизация учебно-воспитательного процесса (Методические основы). –М., “Просвещение”, 1982, 190 стр.

56. Бабанский Ю. К., Оптимизация обучения в современной школе. В кн. “Педагогика”/ Под ред. Ю. К. Бабанского/. М., “Просвещение”, 1983, стр. 237-268.

57. Болтянский В. Г., Как устроена теорема. “Математика в школе”, N1, 1973, стр. 41-49.

58. Большая советская энциклопедия, т. 12, 3-е изд. М., “Советская энциклопедия”, 1973, 623 стр.

59. Большая советская энциклопедия, т. 34, 2-е изд. М., “Советская энциклопедия”, 1955, 656 стр.

60. Гальперин П. Я., Основные результаты исследований по проблеме “Формирование умственных действий и понятий”, Доклад, обобщающий исследования П.Я. Гальперина, представл. на соиск. уч. ст. д-ра пед. наук (по психологии) по совокупности работ, представленных на тему этого доклада, М., 1965, 52 стр.

61. Геометрия /Моиз Э. Э и Даунс Ф. Л. мл./ пер. с англ. И. А. Вайнштейна. Под ред. И. М. Яглома, М., “Просвещение”, 1972, 622 стр.

62. Гнеденко Б. В., Политехнические аспекты преподавания математики в средней школе, В кн.: На путях обновления школьного курса математики. Сборник статей и материалов, Пособие для учителей, М., “Просвещение”, 1987, стр. 121-132.

63. Гусев В. А., Методика обучения геометрии. Изд-во: “Академия”, 2004, 369 стр.

-
64. Далингер В. А., Методика обучения учащихся доказательству математических предложений, “Просвещение”, 2006. 256 стр.
65. Дубнов Я. С., Ошибки в геометрических доказательствах, М., “Наука”, 1969, 64 стр.
66. Дъедонне Ж., Линейная алгебра и элементарная геометрия. Пер. с франц. Г. В. Дорофеева. Под ред. И. М. Яглома, М., “Наука”, 1972, 335 стр.
67. Ершев А., ЭВМ в классе. Школа на путях реформы, Правда, 1985, 6.03.
68. Журавлев И. К., Через доказательства к убеждениям, М., “Знание”, 1980, 96 стр.
69. Киселев А. П., Элементарная геометрия. Книга для учителя, М., “Просвещение”, 1980, 287 стр.
70. Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, М., 1987, 416 стр.
71. Клини С., “Введение в метаматематику”, Пер. с англ. /Под ред. В. А. Успенского./ М., Изд-во иностр. лит., 1957, 526 стр.
72. Колмогоров А. Н., Яглом И. М., О содержании школьного курса математики, “Математика в школе”, N 4, 1965, стр. 3-10.
73. Колягин Ю. М., Оганисян В. А. и др., Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика, М., “Просвещение”, 1975, 462 стр.
74. Кондаков М. И., Логический словарь-справочник. 2-е изд., испр. и доп, М., “Наука”, 1975, 717 стр.
75. Коринский М. И., Классификация выводов, СПб, 1880, 276 стр.
76. Краевкский В. В., Лернер И. Я., Процесс обучения и его закономерности, В кн., “Дидактика средней школы”, /Под ред. М. Н. Скаткина/, М., “Просвещение”, 1982, стр. 129-180.
77. Крутецкий В. А., Психология математических способностей школьников. М., 1976, 431 стр.
78. Кузнецова Л. В., Решетников Н. Н., Фирсов В. В., Обязательные результаты обучения. “Математика в школе”, N2, 1985, стр. 14-17.
79. Купиллари А., Трудности доказательств, М., “Техносфера”, 2002, 304 стр.
80. Левитин Е. С. Математическое образование и математика в современной цивилизации. Т. 1, URSS, -2011, 32 печ. л.
81. Лернер И. Я., Развитие мышления учащихся в процессе обучения истории, М., “Просвещение”, 1982, 191 с.
82. Лузин Н. Н., Собрание сочинений, т. 2.
83. Математический энциклопедический словарь, М., 1983, 847 стр.
84. Мендельсон Э., Введение в математическую логику, М., “Наука”, 1971, 320 стр.

-
85. Метельский Н. В., “Дидактика математики”, Минск., изд-во БГУ, 1982, 256 стр.
86. Методика преподавания математики в средней школе. Общая Методика. /Составители: Р. С. Черкасов, А. А. Столяр/, М., “Просвещение”, 1985, 336 стр.
87. Никольская И. Л., Привитие логической грамотности при обучении математике. Дисс....к.п.н., М., 1972, 186 л.
88. Никольская И. Л., Об изучении некоторых логических понятий на уроках математики: в сб. “Из опыта преподавания математики (6-8)”, М., “Просвещение”, 1977, стр. 153-169.
89. Никольская И. Л., Воспитание логической культуры при обучении алгебре в 6-8 классах. В.кн. “Преподавание алгебры в 6-8 классах, М., “Просвещение”, 1980, стр. 168-185.
90. Новиков П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., “Наука”, 1977, 328 стр.
91. О реформе общеобразовательной и профессиональной школы: Сборник документов и материалов, М.: Политиздат, 1984, 111 стр.
92. Оконь В., Основы проблемного обучения, М., 1968:
93. Пиаже Ж., Инельдер Б., Генезис элементарных логических структур. Классификация и сериация, М., “Иностранная литература”, 1963, 448 стр.
94. Пиаже Ж., Избранные психологические труды: Психология интеллекта. Генезис числа у ребенка. Логика и психология, М., “Просвещение”, 1969, 659 стр.
95. Планирование обязательных результатов обучения математике. Сост., В. В. Фирсов, М., “Просвещение”, 1989, 237 стр.
96. Погорелов А. В., “Геометрия 6-10”, М., “Просвещение”, 1984, 287 стр.
97. Пойа Д., Как решать задачи, М., “Наука”, 1959, 207 стр.
98. Пойа Д., Математическое открытие, М., “Наука”, 1970, 452 стр.
99. Пойа Д., Математика и правдоподобные рассуждения, М., “Наука”, 1975, 462 стр.
100. Ревуцкас Ю. И., Система упражнений как средство обучения доказательству теорем в курсе геометрии 6 классов. Дисс. насоиск. уч. ст. к.п.н., М., НИИ СиМО АПН СССР, 1978, 289 л.
101. Репьев В. В., Общая методика преподавания математики, М., “Учпедгиз”, 1958, 223 стр.
102. Роберт Р. Столл, Множество. Логика. Аксиоматические теории, М., “Просвещение”, 1968, 290 стр.
103. Саранцев Г. И., Обучение математическим доказательствам в школе, М., “Просвещение”, 2000, 173 стр.

-
104. Саранцев Г. И., Методика обучения математике в средней школе, М., “Просвещение”, 2002, 224 стр.
105. Скаткин М. Н., Совершенствование процесса обучения, М., “Педагогика”, 1971, 206 стр.
106. Слепкан З. И., Психолого-педагогические основы обучения математике, Киев., “Рад. школа”, 1983, 132 стр.
107. Современные основы школьного курса математики: Пособие для студентов пед. ин-тов., М., “Просвещение”, 1980, 240 стр.
108. Столяр А. А., Воспитание логического мышления на уроках геометрии. Дисс. на соиск. уч. ст. к.п.н., М., 1951, 326 л.
109. Столяр А. А., Как мы рассуждаем? М., “Народная асвета”, 1968, 112 стр.
110. Столяр А. А., Педагогика математики. Курс лекций, изд-во “Вышейшая школа”, Минск, 1974, 383 стр.
111. Столяр А. А., Как математика ум в порядок приводит, 2-ое изд.: Мн.: Вышеэйшая школа, 1991, 207 стр.
112. Талызина Н. Ф., Кочерова Э. И., “Перенос” приема подведения под понятие одного вида понятия на другие, Изв. АПН РСФСР, вып. 138. Новые исследования в педагогических науках, М., “Просвещение”, 1965, т. III, стр. 86-91.
113. Талызина Н. Ф., Теоретические проблемы программированного обучения, М., “Изд-во МГУ”, 1969, 133 стр.
114. Талызина Н. Ф., Управление процессом усвоений знаний, М., “Изд-во МГУ”, 1975, 343 стр.
115. Тимофеева И. Л., Как устроено доказательство, «Математика в школе», 2004, N 8,
116. Тихомиров О. К., Психология мышления, М., “Изд-во МГУ”, 1984, 230 стр.
117. Уемов А. И., Аналогия в практике научного исследования, М., 1970.
118. Философский энциклопедический словарь, М., “Советская энциклопедия”, 1983, 840 стр.
119. Философский словарь, М., изд-во Политической литературы, 1981, 445 стр.
120. Фирсов В. В., Основные направления совершенствования обучения математике в советской школе на современном этапе. Доклады. II советско-английский семинар по математическому образованию (21 сентября), М., 1982, стр. 15-21.
121. Фирсов В. В. и др., Эксперимент: Требования к уровню выпускников. Обязательный минимум содержания образования: Проект МО РФ, М.: Просвещение, 2001, 272 стр.
122. Фридман Л. М., Психолого-педагогические основы обучения математике в школе, М., “Просвещение”, 1983, 160 стр.

-
123. Фройденталь Г., Математика как педагогическая задача. Книга для учителя. /Под ред. Н. Я. Виленкина. Сокр. пер. с нем. А. Я. Халамайзера, ч.1, М., “Просвещение”, 1982, 208 стр.
124. Фройденталь Г., Математика как педагогическая задача. Книга для учителя. /Под ред. Н. Я. Виленкина. Сокр. пер. с нем. А. Я. Халамайзера, ч.2, М., “Просвещение”, 1982, 192 стр.
125. Энциклопедический словарь юного математика, М.: “Просвещение”, 1989. 350 стр.
126. Энциклопедия элементарной математики, т.4 Геометрия. /Под- ред. В. Г. Болтянского, И. М. Яглома, М., “Изд-во ФМ литературы”, 1963, 576 стр.
127. Bolt Brian, Mathematical Activities: a resource book for teachers Cambridge University Press. 2011, 224 p.
128. Brahier Daniel I., Teaching Secondary and Middle School Mathematics. 4 th ed. –Pearson, 2010, 452 p.
129. Bu L., Schoen R. /eds./ Model – Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using Geo Cebra. Sense Publishers, 2011, 258 p.
130. Iones I.C. Visualizing Elementary and Middle School Mathematics Methods. John Wiley & Sons, Inc., 2011. 512 p.
131. National standards of Compulsory Education. Ministry of Education and Science, Latvia, Centre for Curriculum Development and Examination. Approved by the Ministry of Education and Science: on April 30, 1998, 1998, 35 s.
132. National standards of Compulsory Education. Ministry of Education and Science, Latvia, Centre for Curriculum Development and Examination. Approved by the Ministry of Education and Science: on April 30, 1998, 1998, 35s.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԱԽԱԲԱՆ	3
ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ	6
ԳԼՈՒԽ ԱՌԱՋԻՆ. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴԱՍԱՎԱՆԴՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱՅԻ ԱՌԱՐԿԱՆ	
1.1. Մաթեմատիկա գիտության և միջնակարգ դպրոցի «Մաթեմատիկա» բնագավառի բնութագրումը.....	10
1.1.1. «Մաթեմատիկա» գիտության զարգացման մասին	10
1.1.2. Միջնակարգ դպրոցի «Մաթեմատիկա» բնագավառի ուսումնական առարկաների բնութագրումը.....	14
1.1.3. Միջնակարգ դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակները.....	20
1.2. Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի (ՄԴՄ) բնութագրումը.....	21
1.2.1. ՄԴՄ-ն որպես գիտական բնագավառ: Նրա առարկան և բնութագրումը.....	21
1.2.2. ՄԴՄ-ի կապերն գիտական այլ բնագավառների հետ: ՄԴՄ-ի մեթոդական հիմունքները.....	23
1.3. Հանրակրթական դպրոցի «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի առարկայական չափորոշիչները	27
1.4. Հանրակրթական դպրոցի «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի առարկայական ծրագրերը, դասագրքերը և ուսուցչի ձեռնարկները.....	32
1.5. Դաստիարակության իրականացումը մաթեմատիկայի ուցման ուսուցման գործընթացում	34
ԳԼՈՒԽ ԵՐԿՐՈՐԴ. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԴԻԴԱԿՏԻԿԱԿԱՆ ՄԿՋԲՈՒՆՔՆԵՐԸ	
2.1. Ուսուցման հիմնական դիդակտիկական սկզբունքները	40
2.2. Յուրացման գիտականությունը.....	40
2.3. Յուրացման գիտակցականությունը	43
2.4. Ակտիվ ուսուցում կամ սովորողների ակտիվությունը	46
2.5. Ուսուցման գննականությունը.....	47
2.6. Գիտելիքների ամրությունը.....	50
2.7. Անհատական մոտեցումը.....	51
2.8. Համակարգայնության և հաջորդայնության սկզբունքը.....	52
ԳԼՈՒԽ ԵՐՐՈՐԴ. ԳԻՏԱԿԱՆ ՃԱՆԱԶՈՂՈՒԹՅԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅՈՒՄ ԵՎ ՆՐԱ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՈՒՄ	
3.1. Գիտական հետազոտման մեթոդների բնութագրումը	54
3.2. Դիտում և փորձ.....	54
3.3. Համեմատում	56
3.4. Վերլուծություն և համադրում (անալիզ և սինթեզ)	57
3.5. Ընդհանրացում և մասնավորեցում: Վերացարկում և կոնկրետացում: Ինդուկցիա և դեդուկցիա	59
3.6. Անալոգիա (համաբանություն)	60
ԳԼՈՒԽ ՉՈՐՐՈՐԴ. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ	
4.1. «Մեթոդ», «ուսուցման մեթոդ» հասկացությունները	67
4.2. Ուսուցման մեթոդների «դասակարգումը» (թվարկումը).....	68
4.3. Բացատրացուցադրական մեթոդ	69
4.4. Վերարտադրողական (ռեպրոդուկտիվ) մեթոդներ	74
4.5. Մասնակի որոնողական (էվրիստիկ զրույցի) մեթոդներ.....	75
4.6. Պրոբլեմային ուսուցման մեթոդներ	77
4.7. Հետազոտական մեթոդ.....	80

4.7.1. Հետազոտական մեթոդի կիրառության մասին	82
4.8. Ծրագրավորված ուսուցման մեթոդներ	88
4.9. Փոխներգործուն (ինտերակտիվ) ուսուցման մեթոդներ.....	94
4.10. Համագործակցային ուսուցման եղանակը	97
4.10.1. Համագործակցային ուսուցում.....	97
4.10.2. Համագործակցային խմբին տրվող խնդիրների նմուշներ	103
4.10.3. Համագործակցային ուսուցման մեթոդներ	107
4.10.3.1. Աշակերտների թիմային առաջադիմություն.....	107
4.10.3.2. Խճանկար (Ջիկսո, Jigsaw).....	108
4.10.3.3. Շրջակայություն պատկերասրահում	112
4.10.3.4. Խմբային հետազոտության մեթոդ.....	114

ԳԼՈՒԽ ՀԻՆԳԵՐՈՂ. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈՂԻԿԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

5.1. Հասկացության ծավալ և բովանդակություն	119
5.2. Սահմանումների տեսակները	120
5.3. Սահմանվողը և սահմանողը	122
5.4. Կոռեկտ և ոչ կոռեկտ սահմանումներ	122
5.5. Սահմանումների ուսուցման մեթոդիկայի մասին	123

ԳԼՈՒԽ ՎԵՑԵՐՈՂ. ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ՄՏԱԾՈՂՈՒԹՅԱՆ ՁԵՎԱՎՈՐՄԱՆ ՀԻՄՆԱԽՐԴԻՐԸ

6.1. Տրամաբանական մտածողության ձևավորումն ու զարգացումը որպես դաստիարակչական կարևորագույն արժեք.....	127
6.2. Մաթեմատիկական դատողությունների հիմնական տեսակները.....	129
6.2.1. Աքսիոմներ	129
6.2.2. Պոստուլատներ	130
6.2.3. Թեորեմ: Թեորեմների լեզվաքերականական և տրամաբանական կառուցվածքային ձևերը..	130
6.3. «Ապացուցում», «ապացուցման քայլ» և «ապացուցման մեթոդ» հասկացությունների բովանդակությունը	138
6.4. Միջնակարգ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացի ապացուցման մեթոդները.....	146
6.5. Ապացուցումների տեսության պատմությունից.....	153

ԳԼՈՒԽ ՅՈԹԵՐՈՂ. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՁԵՎԵՐԸ

7.1. Դասը որպես մաթեմատիկայի ուսուցման կազմակերպման հիմնական ձև	158
7.2. Մաթեմատիկայի դասի կառուցվածքի մասին.....	161
7.3. Մաթեմատիկայի դասի տիպերը.....	163
7.4. Սովորողների ինքնուրույն աշխատանքի կազմակերպումը.....	166
7.5. Մաթեմատիկայի ուսուցման առանձնահատկությունները տարբերակված ուսուցմամբ հոսքերում և մասնագիտացված դպրոցներում	168
7.5.1. Տարբերակված ուսուցման պատմությունից	168
7.5.2. Մաթեմատիկայի մասնագիտացված ուսուցմամբ դպրոցների մասին	169
7.5.3. Մաթեմատիկայի խորացված ուսուցմամբ դպրոցներում և դասարաններում մաթեմատիկայի ուսուցման առանձնահատկությունների մասին	170
7.6. Սովորողների գիտելիքների, կարողությունների և հմտությունների ստուգումն ու գնահատումը	171
7.6.1. Գնահատման առաջադրանքների բարդության բնութագրերը.....	172

7.6.2. Հարցումների գնահատման 10 միավորային սանդղակ	173
7.6.3. Բանավոր հարցում	174
7.6.4. Գործնական աշխատանք	175
7.6.5. Թեմատիկ գրավոր աշխատանք.....	178
7.6.6. Կիսամյակային ամփոփիչ աշխատանք.....	179
7.7. Մաթեմատիկայի ուսուցչի նախապատրաստվելը դասին	182
7.7.1. Ուսուցչի դասին նախապատրաստվելու համակարգը.....	182
7.7.2. Դասի պլանը	183
7.7.3. Ուսուցչի նախապատրաստվելը հերթական դասին	185
7.7.4. Դասի վերլուծությունը	187
Հավելված.....	190
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ.....	191

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՅՎԱԶՅԱՆ ԷԴՎԱՐԴ ԻՇԽԱՆԻ

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա Յ Ի
Դ Ա Ս Ա Վ Ա Ն Դ Մ Ա Ն
Մ Ե Թ Ո Դ Ի Կ Ա

(ընդհանուր մեթոդիկա)

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Սրբագրումը՝ Լ. Հովհաննիսյանի

Տպագրված է «Արման Ասմանգույան» ԱԶ-ում:
ք. Երևան, Հր. Ներսիսյան 1/125

Չափսը՝ 60x84 ¹/₁₆: Տպ. մամուլը՝ 12,625:
Տպաքանակը՝ 100 օրինակ:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1



ՆՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2016