ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Վ. Ա. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ, Հ. Հ. ՕՀՆԻԿՅԱՆ

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Դասագիրք

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Վ. Ա. ՓԻԼԻՊՊՈՍՅԱՆ, Հ. Հ. ՕՀՆԻԿՅԱՆ

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

(դասագիրք)

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2018

ՀՏԴ 514.12(076.1)
ԳՄԴ 22.151.5ց7
Փ 553

*ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից հաստատվել է
որպես բուհական դասագիրք*

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի
ֆակուլտետի խորհուրդը*

Վ. Ա. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ, Հ. Հ. ՕՀՆԻԿՅԱՆ

Փ 553 Վերլուծական երկրաչափության դասագիրք/ Վ. Փիլիպոսյան, Հ. Օհնիկյան. -Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2018 թ., 224 էջ:

Դասագիրքը կազմվել է Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի հանրահաշվի և երկրաչափության ամբիոնում «Վերլուծական երկրաչափություն» առարկայի դասավանդման գործող ծրագրին համապատասխան և նախատեսված է ՀՀ բուհերի բնագիտական ֆակուլտետներում սովորող ուսանողների համար:

ՀՏԴ 514.12(076.1)
ԳՄԴ 22.151.5ց7

ISBN 978-5-8084-2330-5

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Նախաբան 5
Գլուխ առաջին: Վեկտորական հաշիվ
§ 1. Վեկտորներ, ազատ վեկտորներ.. 8
§ 2. Երկրաչափական ձևափոխություններ: Ազատ վեկտորը որպես զուգահեռ տեղափոխություն.. 11
§ 3. Վեկտորների գումարումն ու բազմապատկումը թվով 19
§ 4. Վեկտորների գծորեն կախյալ և անկախ համակարգեր 25
§ 5. Գծային բազմաձևություններ, բազիս, չափողականություն 32
§ 6. Վեկտորի պրոյեկցիան և նրա հանրահաշվական արժեքը 37
§ 7. Վեկտորների սկալյար բազմապատկումը... 42
§ 8. Վեկտորների վեկտորական բազմապատկումը...................................... 47
§ 9. Վեկտորների խառը բազմապատկումը 51
Գլուխ երկրորդ: Կոորդինատային համակարգեր
§ 10. Հարթության և տարածության աֆինական կոորդինատային համակարգեր: Հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ.............. 57
§ 11. Աֆինական կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերը 62
§ 12. Հարթության ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերը.. 67
Գլուխ երրորդ: Ուղիղը հարթության վրա
§ 13. Երկրաչափական պատկերի հավասարման հասկացությունը: Հանրահաշվական կորեր.. 75
§ 14. Ուղղի պարամետրական, կանոնական և ընդհանուր հավասարումները հարթության վրա.. 79
§ 15. Երկու ուղիղների փոխադարձ դիրքը հարթության վրա 84
§ 16. Ուղիղների փունջ, փնջի հավասարումը 85
§ 17. Ուղղով որոշվող կիսահարթությունները 87
§ 18. Երկու ուղիղների կազմած անկյունները, մի ուղղից մինչև մյուս ուղիղն ընկած անկյունը.. 90
§ 19. Ուղղի նորմավորված հավասարումը, կետի հեռավորությունն ուղղից.. 94
Գլուխ չորրորդ: Երկրորդ կարգի կորերի տարրական տեսություն
§ 20. Կոմպլեքս հարթությունը, իրական և կեղծ կորեր.................................. 97
§ 21. Երկրորդ կարգի կորերի տեսակավորումն ըստ կանոնական հավասարումների.. 105
§ 22. Էլիպս, տեսքը, կիզակետային հատկությունը......................................113
§ 23. Էլիպսի էքսցենտրիսիտետը, դիրեկտորյալ հատկությունը................ 117
§ 24. Հիպերբոլ, տեսքը, ասիմպտոտները...122
§ 25. Հիպերբոլի կիզակետային և դիրեկտորյալ հատկությունները 125

§ 26. Պարաբոլ, տեսքը, դիրեկտորյալ հատկությունը 131
§ 27. Էլիպսի, հիպերբոլի և պարաբոլի հավասարումները գագաթին կից կորդինատային համակարգում 135
§ 28. Էլիպսի, հիպերբոլի և պարաբոլի հավասարումները բևեռային կորդինատային համակարգում 138
§ 29. Էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը որպես կոնական հատույթներ 142
Գլուխ հինգերորդ: Երկրորդ կարգի կորերի ընդհանուր տեսություն
§ 30. Երկրորդ կարգի կորի հատումն ուղղի հետ 146
§ 31. Երկրորդ կարգի կորերի ասիմպտոտական ուղղությունները 148
§ 32. Երկրորդ կարգի կորերի շոշափողները.. 151
§ 33. Էլիպսի, հիպերբոլի և պարաբոլի շոշափողների կիսորդային հատկությունները 155
§ 34. Երկրորդ կարգի կորերի կենտրոնները 160
§ 35. Երկրորդ կարգի կորերի տրամագծերը...165
§ 36. Փոխադարձաբար համալուծ ուղղություններ, փոխադարձաբար համալուծ տրամագծեր 169
§ 37. Կորի տրամագծի և այդ տրամագծի ծայրակետով տարված շոշափողի ուղղությունների համալուծությունը 173
§ 38. Երկրորդ կարգի կորերի կանոնական հավասարումները և նրանց փոխադարձաբար համալուծ տրամագծերը 175
§ 39. Երկրորդ կարգի կորերի նույնականացման պայմանը 180
§ 40. Գծային համասեռ հավասարումների համակարգեր.........................184
§ 41. Թեորեմ երկրորդ կարգի կորի գոյության և միակության մասին........192
§ 42. Երկրորդ կարգի կորի գլխավոր ուղղության և գլխավոր տրամագծի հասկացությունները... 195
§ 43. Կորերի գլխավոր ուղղությունների որոշումը 198
§ 44. Գլխավոր տրամագծերի հավասարումները 202
§ 45. Երկրորդ կարգի կորերի օրթոգոնալ ինվարիանտները...................... 204
§ 46. Երկրորդ կարգի կորերի կիսաինվարիանտը 212
§ 47. Միակենտրոն կորերի տեսակի և կանոնական հավասարման գործակիցների որոշումը ինվարիանտներով 215
§ 48. Պարաբոլական կորերի տեսակի և կանոնական հավասարման գործակիցների որոշումը ինվարիանտներով 217
Լրացուցիչ գրականություն 223

ՆԱԽԱԲԱՆ

Պատմականորեն վերլուծական երկրաչափությունը առաջացել է որպես երկրաչափության բաժին, որի հիմնական հասկացությունները պարզագույն երկրաչափական պատկերներն են՝ կետեր, ուղիղներ, հարթություններ, երկրորդ կարգի կորեր, երկրորդ կարգի մակերևույթներ: Երկրաչափական պատկերների ուսումնասիրման հիմնական միջոցները եղել են կորդինատների մեթոդը և տարրական հանրահաշիվը: Ժամանակի ընթացքում այս ամենը ենթարկվել է որոշակի փոփոխությունների: Մասնավորապես, այժմ դժվար է պատկերացնել վերլուծական երկրաչափության դասընթաց առանց վեկտորական հաշիվ, երկրաչափական ձևափոխություններ, ինվարիանտների տեսություն բաժինների:

Վերլուծական երկրաչափության վերաբերյալ բազմաթիվ դասագրքերից, նյութի բազմազան և լիարժեք ընդգրկման տեսանկյունից կարելի է առանձնացնել երկուսը՝ Պ. Ս. Ալեքսանդրովի [1] և Մ. Մ. Պոստնիկովի [2] մենագրությունները: Չնայած երկուսն էլ ունեն տպավորիչ ծավալներ, յուրաքանչյուրում կան բաժիններ, որոնք չկան մյուսում: Նկատենք, որ թե՛ մեկը և թե՛ մյուսը նախատեսված չեն որպես դասագիրք միջին պատրաստվածության սկսնակ ուսանողի համար: Մեջ բերենք մի հատված [2] գրքի նախաբանից.

«… Настоящая книга не является учебником аналитической геометрии, следующим той или иной определенной программе. Она не предназначена также ни для первоначального изучения аналитической геометрии, ни для самообразования. Наибольшую пользу от нее получит способный и любознательний студент, уже прослушавший курс аналитической геометрии и желающий углубить и систематизировать свои знания, (а не заинтересованный только в сдаче экзамена) ...»

Վերջին ժամանակներս նկատվում է միտում միավորելու վերլուծական երկրաչափությունը գծային հանրահաշվի հետ մի դասընթացում: Այս մոտեցումն արդարացված է այն դեպքում, երբ խոսքը գնում է բազմաչափ (3-ից մեծ չափողականությունով) տարածություններում երկրաչափություն կառուցելու մասին, քանի որ այս դեպքում էապես մեծանում է գծային հանրահաշվի դերը: Միջին կամ փոքր ժամաքանակի դեպքում այս մոտեցումը չի արդարացնում իրեն, քանի որ վերոհիշյալ միավորումը փաստորեն կրում է մեխանիկական բնույթ, և գործնականում, որպես կանոն, երկրաչափությունը ստորադասվում է հանրահաշվին: Արդյունքում դասընթացի ավարտին ստացվում է մի իրավիճակ, երբ ուսանողը չի ունենում անգամ մի որոշ պատկերացում տարրականից տարբերվող երկրաչափություն-ների գոյության, նրանց առանձնահատկությունների և կիրառություն-ների վերաբերյալ:

Մեր կողմից առաջարկվող ձեռնարկը փորձ է ստեղծել մի-ջանկյալ դասագիրք, որը, համապատասխանելով Մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետում ներկայումս գործող ծրագրին, լինի մատչելի և ընթերցվող: Ենթադրվում է, որ այն յուրացնելու դեպքում ուսանողն այլևս հնարավորություն կունենա ինքնուրույն կողմնորոշ-վելու և խորանալու վերլուծական երկրաչափության այլ, ավելի բարդ բաժինների ուսումնասիրության մեջ:

Դասընթացը նախատեսված է առաջին կուրսի առաջին կիսամ-յակի համար (շաբաթական մի դասախոսություն և մի գործնական պարապմունք՝ յուրաքանչյուրը երկուական ժամով) և բաղկացած է հինգ գլխից՝ վեկտորական հաշիվ, կորդինատային համակարգեր, ուղիղը հարթության վրա, երկրորդ կարգի կորերի տարրական տե-սություն, երկրորդ կարգի կորերի ընդհանուր տեսություն: Բնական է, որ կարող է առաջանալ որոշ լարվածություն նյութը դասախոսու-թյունների տեսքով նշված ժամանակահատվածում բաշխելու տե-սանկյունից: Հաշվի առնելով սա՝ դասագրքում շարադրանքը կատա-րել ենք այնպես, որ դասախոսը, գրատախտակի վրա բացատրելով տվյալ հարցի հիմնական մասը, կարողանա դետալները թողնել ուսանողին ինքնուրույն ընթերցման համար: Օրինակ՝ դասագրքում բերված են վեկտորների գումարման և թվով բազմապատկման բոլոր 1-8 հատկությունների մանրամասն ապացուցումները: Դասախոսը կարող է իր հայեցողությամբ ապացուցել դրանցից մեկ-երկուսը՝ մյուսները թողնելով ուսանողին որպես ինքնուրույն աշխատանք: Կամ բացատրելով էլիպսի կիզակետային և դիրեկտորյալ հատկու-թյունները՝ հիպերբոլի դեպքում կարող է սահմանափակվել համա-պատասխան հատկությունների ձևակերպումներով՝ մնացածը թող-նելով ուսանողին:

Հաշվի առնելով, որ առաջին կիսամյակում ուսանողը դեռ չունի անհրաժեշտ գիտելիքներ զուգահեռաբար կարդացվող գծային հան-րահաշվի դասընթացից, ձգտել ենք ապահովել դասագրքի ամբողջա-կանությունն ու անկախությունը: Այդ նպատակով հրաժարվել ենք որոշ խրթին տեխնիկական միջոցների օգտագործումից՝ փոխարի-նելով դրանք տարրական և հեշտ յուրացվող միջոցներով, կամ էլ անհրաժեշտ կողմնակի նյութը շարադրել ենք հնարավորինս պարզեցված տարբերակով: Օրինակ՝ գծային հավասարումների համակարգերի լուծումների ուսումնասիրությունը շարադրելիս սահմանափակվել ենք միայն համասեռ գծային հավասարումների համակարգերի դեպքով՝ խուսափելով այն ամենից, ինչը կապված է մատրիցի ռանգի կամ գծային տարածության հասկացությունների հետ: Կամ երկրորդ կարգի կորերի օրթոգոնալ ինվարիանտների տեսությունը շարադրելիս նպատակահարմար գտանք (առայժմ) խուսափել քառակուսային ձևերի տեսության օգտագործումից՝ ապացուցումները կատարելով տարրական միջոցներով: Սա արդարացված է նրանով, որ տվյալ դեպքում հիմնականը ինվարիանտի հասկացությունն է, իսկ ապացուցման եղանակը՝ երկրորդական:

Մենք կարևորում ենք երկրաչափական ձևափոխությունների դերը վերլուծական երկրաչափության դասընթացում և դրանք ներմուծում ենք քայլ առ քայլ հենց սկզբից: Իսկ դրանց տեսության համակարգված շարադրմանը կանդրադառնանք դասագրքի երկրորդ մասում, որը լույս կտեսնի, երբ դրա համար անհրաժեշտ և բավարար հիմքեր լինեն:

Անշուշտ մեր մոտեցումներում առկա են որոշ տարրեր, որոնք կարող են լինել վիճելի: Այնպես որ՝ առաջարկվող դասագիրքը պետք է դիտել որպես տարբերակ և ոչ թե պարտադրանք: Արդյո՞ք մեր տարբերակը լավ է, թե վատ, վերջնական գնահատականը պատկանում է ուսանողին:

Նրանց համար, ովքեր վերլուծական երկրաչափությունը ինքնուրույն ուսումնասիրելու նպատակով կընտրեն մեր դասագիրքը, տեքստում բերված են ոչ մեծ քանակությամբ խնդիրներ, որոնք կամ լրացնում են այն, կամ ունեն ստուգողական բնույթ: Առաջարկում ենք ձեռքի տակ ունենալ հեղինակների վերլուծական երկրաչափության [4] խնդրագիրքը, որտեղ բերված են բազմաթիվ խնդիրների լուծումներ և լուծման եղանակներ:

Որոշ հարցերի ավելի մանրամասն ծանոթանալու նպատակով դասագրքի վերջում առաջարկվում է լրացուցիչ գրականության ցանկ:

ԳԼՈՒԽ ԱՌԱՋԻՆ

ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՀԱՇԻՎ

§ 1. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ, ԱԶԱՏ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ

Վեկտորական հաշվի հիմքում ընկած են ազատ վեկտորները և նրանց հետ կատարվող գործողությունները: Հիմնական գործողությունները չորսն են՝ վեկտորների գումարումը, բազմապատկումը թվով, սկալյար և վեկտորական արտադրյալները:

Սահմանում: Տարածության կետերի կամայական կարգավորված կետազույգը, որոնցից մեկը համարվում է առաջինը, իսկ մյուսը՝ երկրորդը, կոչվում է ***վեկտոր:*** Այդ կետերից առաջինն անվանում են վեկտորի ***սկզբնակետ***, իսկ երկրորդը՝ ***վերջնակետ***:

Միացնելով սկզբնակետը վերջնակետին՝ վեկտորին կարելի է տալ ուղղորդված հատվածի տեսք:

Վեկտորների համար գործածվում են (A,B), $\overrightarrow{AB}$ կամ $\overline{AB}$ նշանակումները, որտեղ A-ն վեկտորի սկզբնակետն է, իսկ B-ն՝ վերջնակետը: ***Վեկտոր*** $\overrightarrow{AB}$-ի ***երկարություն*** կոչվում է AB հատվածի երկարությունը և նշանակվում է AB-ով, $|\overrightarrow{AB}|$-ով կամ $|\overline{AB}|$-ով: Եթե վեկտորի սկզբնակետն ու վերջնակետը նույնն են, այսինքն՝ $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, ... տեսքի է, ապա այդպիսի վեկտորի երկարությունը համարվում է 0:

Վեկտորների հետ որոշակի հատկություններով գործողություններ սահմանելու նպատակով ներմուծվում է ազատ վեկտորի հասկացությունը: Ազատ վեկտորի սահմանման համար կա երկու մոտեցում:

Առաջին եղանակի դեպքում, ինչպես դպրոցական գործող դասագրքերում է, *երկու վեկտորներ համարվում են հավասար, եթե համապատասխանաբար նրանց սկզբնակետերն ու վերջնակետերը միացնելիս ստացվում է* ***զուգահեռագիծ****, և կամ էլ նրանք գտնվում են մի ուղղի վրա, ունեն հավասար երկարու-*

*թյուններ և ուղղված են **նույն կողմը**:* Այն, ինչ ստացվում է այս նույնացումների արդյունքում, կոչվում է ***ազատ վեկտոր***:

Այս մոտեցումը վեկտորի հասկացության հիմնավորման տեսանկյունից այնքան էլ հաջող չէ:

Երկրորդ եղանակի հիմքում ընկած է վեկտորների համարժեքության հասկացությունը: Եթե երկու ոչ զրոյական վեկտորներ այնպիսին են, ինչպես նշված է վերը, ապա դրանք համարվում են ***համարժեք*** (հավասար համարվում են միայն միմյանց հետ համընկած վեկտորները): Այս դեպքում ազատ վեկտորը սահմանվում է որպես միմյանց համարժեք բոլոր հնարավոր վեկտորների համախմբություն (համարժեքության դաս): Իրենք՝ վեկտորները (ուղղորդված հատվածները), կոչվում են տվյալ ազատ վեկտորի ***ներկայացուցիչներ***: Ազատ վեկտորները արդեն չունեն սկզբնակետ և վերջնակետ: Այդ իսկ պատճառով նրանց համար գործածվում են $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... նշանակումները: Մասնավորապես $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, ... տեսքի բոլոր վեկտորները նույնպես համարվում են համարժեք: Դրանցով որոշվող դասը կոչվում է ***զրոյական ազատ վեկտոր*** և նշանակվում է $\vec{0}$ -ով:

Նշենք, որ ազատ վեկտորը կարելի է սահմանել նաև որպես զուգահեռ տեղափոխության ձևափոխություն:

Ազատ վեկտորը լիովին որոշվում է իր որևէ ներկայացուցչով: Հաճախ հանդիպող ***«տրված է $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ վեկտորը»*** արտահայտությունը պետք է կարդալ՝ ***«տրված է $\vec{a}$ ազատ վեկտորն իր $\overrightarrow{AB}$ ներկայացուցչով»***: Այնուհետև ***«կիրառենք $\vec{a}$ վեկտորն A կետից»*** արտահայտությունը նշանակում է՝ ***«դիտարկենք $\vec{a}$ ազատ վեկտորի այն ներկայացուցիչը, որի սկզբնակետը A -ն է»***:

Նկատենք, որ ցանկացած ազատ վեկտոր կարող է կիրառվել ցանկացած կետից:

Երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ազատ վեկտորներ հավասար են միմյանց (նույնն են), եթե նրանք կազմված են միևնույն ներկայացուցիչներից:

Դիտողություն: Գործնականում $\vec{a}=\vec{b}$ հավասարությունը ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն ունեն որևէ ընդհանուր ներկայացուցիչ:

Ընթերցողին առաջարկում ենք ապացուցել վերը ձևակերպվածը:

Մի քանի վեկտորներ կոչվում են ***համագիծ*** (***համահարթ***), եթե մի կետից կիրառելիս նրանք գտնվում են մի որևէ ուղղի (մի որևէ հարթության) վրա:

Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ապա գրում ենք $\vec{a}\parallel\vec{b}$:

Զրոյական վեկտորը համարվում է համագիծ ցանկացած վեկտորին:

Այսուհետև $[AB)$ ճառագայթ ասելով՝ կհասկանանք AB ուղղի վրա ընկած, A սկզբնակետով (գագաթով) այն ճառագայթը, որը պարունակում է B կետը:

Պարզ է, որ նույն սկզբնակետով երկու $[AB)$ և $[AC)$ ճառագայթները կհամընկնեն այն և միայն այն դեպքում, երբ $C\in[AB)$, կամ $B\in[AC)$:

Ոչ զրոյական $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ և $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ երկու համագիծ վեկտոր կոչվում են ***համուղղված*** (նշանակվում է $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), եթե $[AB)$ և $[AC)$ ճառագայթները նույնն են, և կոչվում են ***հակուղղված*** (նշանակվում է $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$) հակառակ դեպքում:

§ 2. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ԱԶԱՏ ՎԵԿՏՈՐԸ ՈՐՊԵՍ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆ

Վերադառնանք § 1-ում քննարկված ազատ վեկտորի հասկացությանը, որտեղ նշվեց, որ ազատ վեկտորը կարող է սահմանվել նաև որպես զուգահեռ տեղափոխության ձևափոխություն: Սա պարզաբանելու համար գանք մի փոքր հեռվից:

Երկրաչափության դպրոցական դասընթացը կազմված է երկու բաժնից՝ հարթաչափություն և տարածաչափություն, որտեղ ուսումնասիրվում են երկրաչափական պատկերներն ու նրանց հատկությունները: *Երկրաչափական պատկեր* ասելով՝ հասկանում ենք հարթության կամ տարածության կետերի որոշակի բազմություն, որն առանձնացվում է մյուս կետերից որոշակի հատկանիշներով, որոնց անվանում են *երկրաչափական հատկություններ*: Հաճախ այդ հատկությունները ձևակերպվում են կետերի միջև հեռավորության միջոցով: Օրինակ՝ O կենտրոնով և r շառավղով շրջանագիծը, որպես երկրաչափական պատկեր, սահմանվում է որպես հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք գտնվում են միևնույն r հեռավորության վրա O կետից:

Առաջին կարևորագույն խնդիրը, որն առաջանում է երկրաչափություն կառուցելիս, երկրաչափական *պատկերների հավասարության* հասկացության ներմուծումն է: Երկրաչափության դպրոցական դասընթացում երկու երկրաչափական պատկերներ (օրինակ՝ եռանկյուններ) համարվում են նույնականացված (հավասար), եթե դրանցից մեկը կարելի է վերադրումով համընկեցնել մյուսի հետ: Վերադրումով համընկեցնել նշանակում է պատկերներից մեկը, տեղափոխելով հարթության կամ տարածության մեջ, տեղադրել մյուս պատկերի վրա այնպես, որ մի պատկերի կետերը դառնան կետեր նաև մյուս պատկերի համար և հակառակը: Ընդ որում՝ ենթադրվում է, որ տեղափոխության ողջ ընթացքում տեղափոխվող պատկերի ցանկացած երկու կետերի միջև հեռավորությունը մնում է անփոփոխ: Այս գործողության հստակեցումը մեզ բերում է *իզոմետրիկ ձևափոխության* հասկացությանը:

Դիցուք X-ը հարթության (կամ տարածության) բոլոր կետերի բազմությունն է, իսկ f-ը մի գործողություն է, որը X-ի ամեն մի x կետի մի որոշակի կանոնով համապատասխանեցնում է նորից X-ի մի որոշակի կետ, որը նշանակվում է $f(x)$-ով և կոչվում է x կետի կերպար: Այս դեպքում ասում են, որ ունենք X բազմության f ձևափոխություն, և գրառում են այն $f: X \to X$: Եթե x կետն այնպիսին է, որ $f(x) = x$, ապա ասում են, որ x կետը մնում է անշարժ f ձևափոխության դեպքում: Եթե A-ն X-ի որոշ կետերի ենթաբազմություն է, ապա $f(A)$-ով նշանակվում է X-ի բոլոր այն կետերի ենթաբազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրը A ենթաբազմության գոնե մի կետի կերպար է: Այդ $B = f(A)$ ենթաբազմությունը կոչվում է A ենթաբազմության կերպար f ձևափոխության դեպքում: Ասում են նաև, որ f ձևափոխությունը A ենթաբազմությունը արտապատկերում է B ենթաբազմության վրա:

Սահմանում: $f: X \to X$ ձևափոխությունը կոչվում է X-ի *իզոմետրիկ ձևափոխություն*, եթե այն պահպանում է X-ի ցանկացած երկու կետերի միջև հեռավորությունը:

Այսինքն՝ եթե $\rho(x_1, x_2)$-ով նշանակենք x_1 և x_2 կետերի միջև հեռավորությունը, ապա իզոմետրիկ ձևափոխության դեպքում պահանջվում է, որ միշտ տեղի ունենա

$$\rho(x_1, x_2) = \rho\big(f(x_1), f(x_2)\big)$$

հավասարությունը:

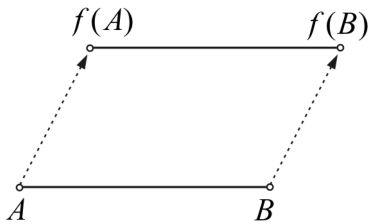
Այժմ կարելի է ճշտել երկրաչափական պատկերների հավասարության հասկացությունը հետևյալ կերպ. հարթության (կամ տարածության) մեջ երկու երկրաչափական պատկերներ կոչվում են *հավասար*, եթե գոյություն ունի հարթության (տարածության) այնպիսի իզոմետրիկ ձևափոխություն, որն այդ պատկերներից մեկն արտապատկերում է մյուսի վրա:

Այս սահմանման իմաստով, արդեն իսկ երկու եռանկյուն-ների հավասարության հայտանիշներն արտածելիս հարց է առաջանում՝ իսկ որո՞նք են և որքա՞ն են հարթության իզոմետ-րիկ ձևափոխությունները:

Ստորև կնկարագրենք հարթության հիմնական իզոմետրիկ ձևափոխությունները:

1. Հարթության (ինչպես նաև տարածության) զուգահեռ տեղափոխություն կոչվում է այն f ձևափոխությունը, որի ըն-թացքում հարթության (տարածության) բոլոր կետերը տեղա-փոխվում են միևնույն չափով և միևնույն ուղղությամբ:

Այսինքն՝ կամայական երկու A և B կետերի համար, եթե $A_1 = f(A)$, և $B_1 = f(B)$, ապա $AA_1 = BB_1$, $AA_1 \parallel BB_1$:

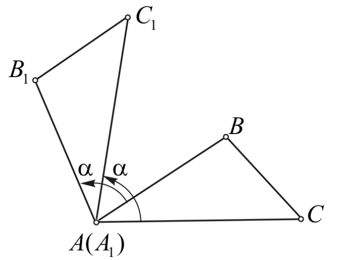


Պարզ է, որ այս դեպքում միշտ $\rho(A,B) = \rho\big(f(A), f(B)\big)$, և հետևաբար զուգահեռ տեղափոխությունը իզոմետրիկ ձևափո-խություն է:

Հեշտ է նկատել, որ զուգահեռ տեղափոխությունը ուղղակի առնչություն ունի ազատ վեկտորի հետ: Իրոք, եթե ունենք $\vec{a}$ ազատ վեկտոր, ապա հարթության (տարածության) ամեն մի M կետի համապատասխանեցնելով $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ վեկտորի N ծայրակետը՝ ստանում ենք հարթության (տարածության) զու-գահեռ տեղափոխություն: Ճիշտ է նաև հակառակը՝ հարթու-թյան (տարածության) ամեն մի զուգահեռ տեղափոխություն միարժեքորեն որոշում է հարթության (տարածության) ազատ վեկտոր որևէ $\overrightarrow{AA_1}$ ներկայացուցչով, որտեղ $A_1 = f(A)$:

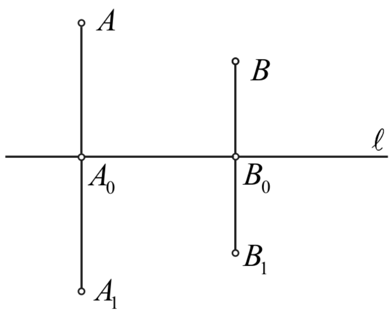
2. Հարթության հաջորդ հիմնական իզոմետրիկ ձևափո-խությունները հարթության պտույտներն են իր կետերի շուրջ:

Հարթության որևէ A կետի շուրջ որևէ α անկյունով պտույտը ժամսլաքի պտույտի կամ նրան հակառակ ուղղությամբ մի ձևափոխություն է, որի ընթացքում A կետը մնում է անշարժ, իսկ ցանկացած այլ B կետի B_1 կերպարը ստացվում է AB շառավղի պտտումով A կենտրոնի շուրջ նշված ուղղությամբ α անկյունով:



Քանի որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, ուստի $\rho(B,C) = \rho(B_1,C_1)$ ցանկացած B և C կետերի համար: Հետևաբար կետի շուրջ պտույտը իզոմետրիկ ձևափոխություն է:

3. Հարթության մյուս կարևոր տեսակի իզոմետրիկ ձևափոխությունները համաչափություններն են ուղիղների նկատմամբ: Եթե հարթության վրա սևեռած է ինչ որ ℓ ուղիղ, ապա հարթության համաչափությունը այդ ուղղի նկատմամբ մի ձևափոխություն է, որի արդյունքում ℓ-ի բոլոր կետերը մնում են անշարժ, իսկ ցանկացած այլ A կետի A_1 կերպարը A-ի համաչափ կետն է ℓ-ի նկատմամբ՝ $AA_1 \perp \ell$, $AA_1 \cap \ell = A_0$ և $AA_0 = A_0A_1$ (տե՛ս նկարը):



Ընթերցողին առաջարկում ենք ապացուցել, որ ցանկացած երկու A և B կետերի համար $\rho(A,B)=\rho(A_1,B_1)$, որից հետևում է, որ հարթության համաչափությունը ուղղի նկատմամբ իզոմետրիկ ձևափոխություն է:

Անդրադառնալով հարթության բոլոր իզոմետրիկ ձևափոխությունները նկարագրելու խնդրին՝ նկատենք, որ դրանք չեն սպառվում վերը թվարկած երեք տեսակի իզոմետրիկ ձևափոխություններով, բայց կարող են ներկայացվել դրանց համադրույթներով: Ասվածը հասկանալի դարձնելու համար նախ պարզաբանենք երկու *ձևափոխությունների համադրույթի* հասկացությունը:

Եթե ունենք X բազմության երկու ձևափոխություններ՝ $f:X\to X$ և $g:X\to X$, նախ կիրառելով $x\in X$ կետի նկատմամբ f ձևափոխությունը և ապա $f(x)$ կետի նկատմամբ g ձևափոխությունը՝ կստանանք $g(f(x))\in X$ կետը: Համադրելով x կետին $g(f(x))$ կետը՝ կստանանք մի նոր ձևափոխություն, որը նշանակվում է $f\circ g$ սիմվոլով և կոչվում է f և g ձևափոխությունների համադրույթ (գումար): Այսպիսով՝ $(f\circ g):X\to X$ համադրույթը ցանկացած $x\in X$ կետին համապատասխանեցնում է $g(f(x))$ կետը:

ԹԵՈՐԵՄ 1: Եթե f-ը և g-ն X բազմության իզոմետրիկ ձևափոխություններ են, ապա նրանց $f\circ g$ համադրույթը ևս իզոմետրիկ ձևափոխություն է:

Իրոք, կամայական $x_1,x_2\in X$ կետերի համար ունենք

$$\rho\big((g\circ f)(x_1),(g\circ f)(x_2)\big)=\rho\big(g(f(x_1)),g(f(x_2))\big)=$$

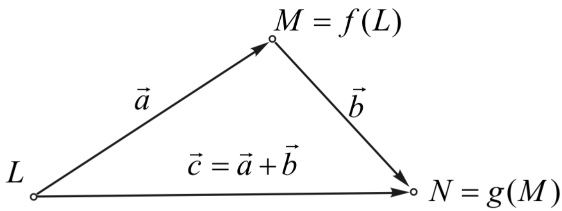
$$=\rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)=\rho(x_1,x_2):\square$$ [1]

Ապացուցված թեորեմը հնարավորություն է տալիս արդեն հայտնի իզոմետրիկ ձևափոխությունների համադրույթներով ստանալու նոր իզոմետրիկ ձևափոխություններ:

---

[1] Այսուհետև □ սիմվոլը նշանակելու է ապացուցման ավարտը:

Որպես օրինակ դիտարկենք երկու զուգահեռ տեղափոխություններ, որոնցից առաջինը՝ f-ը, որոշված է $\vec{a}$ ազատ վեկտորով, իսկ երկրորդը՝ g-ն, որոշված է $\vec{b}$ ազատ վեկտորով: Հարթության (տարածության) կամայական L կետի համար նշանակենք $M = f(L)$ և $N = g(M) = g(f(L)) = (g \circ f)(L)$:



Կարելի է ցույց տալ (տե՛ս ապացուցումը § 3-ում), որ տարբեր L կետերով առաջացած բոլոր $\overrightarrow{LN}$ վեկտորները համարժեք են միմյանց և որոշում են միևնույն $\vec{c} = \overrightarrow{LN}$ ազատ վեկտորը: Այսպիսով՝ f և g զուգահեռ տեղափոխությունների $g \circ f$ համադրույթը (գումարը) նույնպես զուգահեռ տեղափոխություն է՝ որոշված $\vec{c}$ ազատ վեկտորով: Ուստի բնական է $\vec{c}$ վեկտորն անվանել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումար, իսկ գործողությունը, որով $\vec{c}$-ն ստացվում է $\vec{a}$-ի և $\vec{b}$-ի միջոցով՝ *վեկտորների գումարման եռանկյան կանոն*:

Ամփոփելով այս ամենը՝ կարող ենք ասել, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք (մեկը մեկի) համապատասխանություն հարթության (տարածության) բոլոր զուգահեռ տեղափոխությունների և հարթության (տարածության) բոլոր ազատ վեկտորների միջև: Ընդ որում՝ զուգահեռ տեղափոխությունների համադրույթին (գումարին) համապատասխանում է դրանց համապատասխանող ազատ վեկտորների գումարը: Արդյունքում, մեզ թույլ տալով որոշ ազատություն, կարող ենք նույնացնել ազատ վեկտորները զուգահեռ տեղափոխությունների հետ:

Վերադառնալով հարթության բոլոր իզոմետրիկ ձևափոխությունների նկարագրման խնդրին՝ նշենք, որ հարթության վերը թվարկած երեք տեսակի իզոմետրիկ ձևափոխությունները հիմնական իզոմետրիկ ձևափոխություններն են հետևյալ իմաստով:

Հարթության ցանկացած իզոմետրիկ ձևափոխություն կարող է ներկայացվել (ոչ միակ եղանակով) կամ որպես զուգահեռ տեղափոխության և կետի շուրջ պտույտի, կամ էլ որպես զուգահեռ տեղափոխության, կետի շուրջ պտույտի և ուղղի նկատմամբ համաչափության համադրույթ:

Սա մենք կապացուցենք ավելի ուշ՝ դասագրքի 2-րդ մասում:

Նկատենք, որ ի տարբերություն զուգահեռ տեղափոխությունների՝ հարթության կամայական երկու պտույտների համադրույթը կարող է արդեն չլինել հարթության պտույտ: Ինչպես նաև կամայական երկու ուղիղների նկատմամբ համաչափությունների համադրույթը այլևս համաչափություն չէ որևէ ուղղի նկատմամբ: Սրա հետ կապված՝ ընթերցողին առաջարկում ենք ապացուցել, որ՝

ա) հարթության երկու զուգահեռ ուղիղների նկատմամբ համաչափությունների համադրույթը հարթության զուգահեռ տեղափոխություն է,

բ) հարթության երկու հատվող ուղիղների նկատմամբ համաչափությունների համադրույթը հարթության պտույտ է այդ ուղիղների հատման կետի շուրջ:

Ավարտելով երկրաչափական ձևափոխությունների տեսության այս ներածականը՝ կանգ առնենք իզոմետրիկ ձևափոխությունների մի կարևոր հատկության վրա:

Լեմմա: Դիցուք f-ը հարթության կամ տարածության իզոմետրիկ ձևափոխություն է: Եթե A, B, C կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա, ընդ որում՝ B-ն գտնվում է A և C կետերի միջև, ապա $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$, $C_1 = f(C)$ կետերը նույնպես գտնվում են մի ուղղի վրա, և B_1 կետը գտնվում է A_1 և C_1 կետերի միջև: Բացի դրանից՝ ինչ հարաբերությամբ որ B կետը բաժանում է AC հատվածը, նույն հարաբերությամբ B_1 կետը բաժանում է A_1C_1 հատվածը:

Իրոք, քանի որ $\rho(A,B)+\rho(B,C)=\rho(A,C)$, ուստի

$$\rho\big(f(A),f(B)\big)+\rho\big(f(B),f(C)\big)=\rho\big(f(A),f(C)\big),$$

որից էլ հետևում է լեմմայի պնդումը:

ԹԵՈՐԵՄ 2: Հարթության կամ տարածության իզոմետրիկ ձևափոխության դեպքում ցանկացած ուղղի կերպարը նորից ուղիղ է, հատվածի կերպարը՝ հատված: Զուգահեռ ուղիղների կերպարները նորից զուգահեռ ուղիղներ են, հատվող ուղիղների կերպարները՝ հատվող ուղիղներ:

Թեորեմի առաջին մասն ապացուցվում է լեմմայի օգնությամբ: Ինչ վերաբերում է զուգահեռ ուղիղների կերպարներին, ապա դրանք չեն կարող հատվել: Հակառակ դեպքում այդ ուղիղների վրա կգտնվեն մեկական կետեր, որոնք կարտապատկերվեն այդ ուղիղների կերպարների հատման կետին: Մինչդեռ իզոմետրիկ ձևափոխության դեպքում տարբեր կետերի կերպարները միշտ տարբեր են:

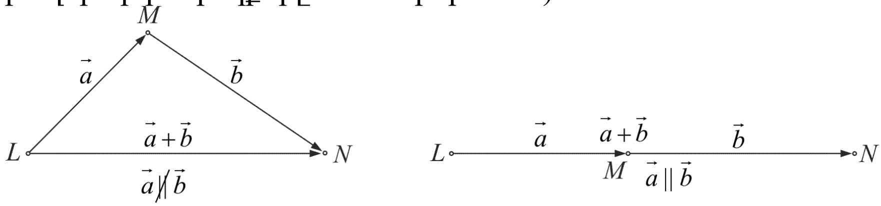
Որպես հետևություն այս թեորեմից ստանում ենք, որ իզոմետրիկ ձևափոխությունը վեկտորը արտապատկերում է վեկտորի՝ պահպանելով նրա երկարությունը: Բացի դրանից՝ կոռեկտ ձևով սահմանվում է ազատ վեկտորի կերպարը, որը նույնպես ազատ վեկտոր է:

§ 3. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄՆ ՈՒ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ ԹՎՈՎ

Երկու վեկտորների գումարը սահմանվում է հետևյալ կերպ:

Սահմանում: Երկու՝ $\vec{a}=\overrightarrow{LM}$ և $\vec{b}=\overrightarrow{MN}$ ***վեկտորների գումար*** կոչվում է $\vec{c}=\overrightarrow{LN}$ վեկտորը:

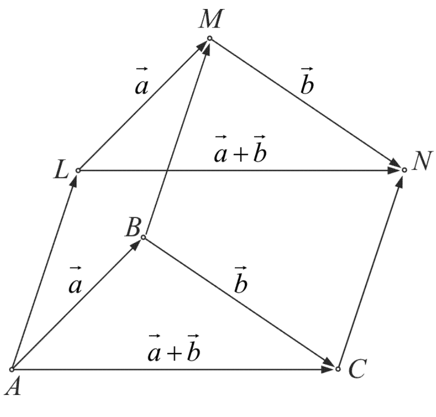
$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումարը նշանակվում է $\vec{a}+\vec{b}$-ով (հնարավոր երկու դեպքերը տե՛ս նկար 1-ում):



Նկար 1

Սահմանումը կոռեկտ է այն իմաստով, որ $\vec{a}+\vec{b}$-ն կախված չէ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ազատ վեկտորների ներկայացուցչների ընտրությունից:

Իրոք, դիցուք մի դեպքում $\vec{a}=\overrightarrow{LM}$, $\vec{b}=\overrightarrow{MN}$, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{LN}$, իսկ մյուս դեպքում $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ (տե՛ս հնարավոր դեպքերից մեկը նկար 2-ում):



Նկար 2

Ցույց տանք, որ $\overrightarrow{LN}$-ը և $\overrightarrow{AC}$-ն համարժեք են:

Ունենք $\vec{a} = \overrightarrow{LM}$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ և $\vec{b} = \overrightarrow{MN}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$: Ըստ վեկտորների համարժեքության սահմանման՝ $ALMB$-ն և $BMNC$-ն զուգահեռագծեր են: Այստեղից՝ $ALNC$-ն ևս զուգահեռագիծ է: Հետևաբար $\overrightarrow{LN}$-ը և $\overrightarrow{AC}$-ն ներկայացնում են նույն՝ $\vec{a}+\vec{b}$ ազատ վեկտորը:

Սահմանման կոռեկտության ապացուցումը մնացած հնարավոր դեպքերում՝ կախված L, M, N, A, B, C կետերի փոխադարձ դիրքերից, թողնում ենք ընթերցողին:

Ամեն մի $\vec{a} = \overrightarrow{LM}$ ազատ վեկտորի համար սահմանվում է նրա ***հակադիր վեկտորը,*** որը նշանակվում է $-\vec{a}$-ով և ներկայացվում է $\overrightarrow{ML}$ վեկտորով: Այսինքն՝ $-\vec{a} = \overrightarrow{ML}$:

Սահմանում: Որևէ $k \in R$ իրական ***թվի և*** $\vec{a}$ ***վեկտորի արտադրյալ*** կոչվում է այն վեկտորը, որի երկարությունը հավասար է k թվի բացարձակ արժեքի և $\vec{a}$ վեկտորի երկարության արտադրյալին, այն՝

ա) համուղղված է $\vec{a}$-ին, երբ $k>0$ և $\vec{a} \neq \vec{0}$,

բ) հակուղղված է $\vec{a}$-ին, երբ $k<0$ և $\vec{a} \neq \vec{0}$,

գ) համարվում է զրոյական վեկտոր, երբ $k=0$ կամ $\vec{a} = \vec{0}$:

k թվի և $\vec{a}$ վեկտորի արտադրյալը նշանակվում է $k\vec{a}$-ով:

Սահմանումից մասնավորապես հետևում է, որ $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$:

ԹԵՈՐԵՄ: Վեկտորների գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունները օժտված են հետևյալ հատկություններով՝

1) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, **2)** $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$,

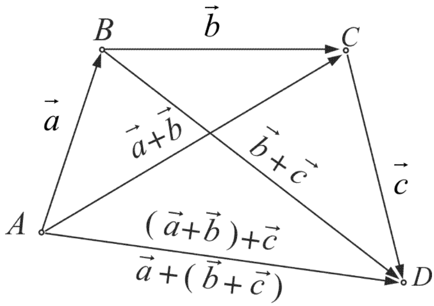
3) $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$, **4)** $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$,

5) $k_1(k_2\vec{a}) = (k_1k_2)\vec{a}$, **6)** $(k_1+k_2)\vec{a} = k_1\vec{a}+k_2\vec{a}$,

7) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a}+k\vec{b}$, **8)** $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$, կամայական $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների և կամայական k_1, k_2, k իրական թվերի համար:

Ապացուցում:

1) Դիցուք $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ (տե՛ս նկար 3-ը):



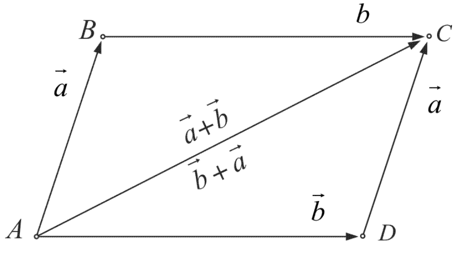
Նկար 3

Ունենք $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$,

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}:$$

Հետևաբար՝ $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$՝ ըստ էջ 8-ի դիտողության:

2) Ապացույցն ակնհայտ է, երբ այդ վեկտորները համագիծ են: Երբ $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, դիտարկելով $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ վեկտորների վրա կառուցված $ABCD$ զուգահեռագիծը, ինչպես պատկերված է նկար 4-ում, մի կողմից կունենանք



Նկար 4

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, մյուս կողմից՝ $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$: Այսպիսով՝ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$:

Ապացուցված հատկությունից որպես հետևություն ստացվում է, որ միևնույն կետից կիրառված $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ և $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ երկու վեկտորների գումարը այդ վեկտորներով կառուցված $ABCD$ զուգահեռագծի $\overrightarrow{AC}$ անկյունագծային վեկտորով ներկայացվող ազատ վեկտորն է՝ $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$:

Այս հետևությունն անվանում են *«վեկտորների գումարման զուգահեռագծի կանոն»*:

3) Դիցուք $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$: Վերցնելով $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$՝ կստանանք՝

$$\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}:$$

4) Եթե $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, ապա $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ և հետևաբար՝

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}:$$

5) Եթե k_1, k_2 թվերից մեկնումեկը զրո է, կամ էլ $\vec{a}=\vec{0}$, ապա կունենանք $\vec{0}=\vec{0}$: Հակառակ դեպքում, երբ $k_1\neq 0,\ k_2\neq 0$ և $\vec{a}\neq\vec{0}$, ապա նախ համոզվենք, որ այս հավասարության աջ և ձախ մասում գրված վեկտորների երկարությունները նույնն են, այնուհետև ցույց տանք, որ նշված վեկտորներն ունեն նույն ուղղությունը, այսինքն՝ համուղղված են: Ունենք

$$|k_1(k_2\vec{a})|=|k_1|\cdot|(k_2\vec{a})|=|k_1|\cdot(|k_2|\cdot|\vec{a}|)=(|k_1|\cdot|k_2|)\cdot|\vec{a}|=|(k_1k_2)\vec{a}|:$$

Ցույց տանք, որ $k_1(k_2\vec{a})\uparrow\uparrow(k_1k_2)\vec{a}$:

Երբ, օրինակ, $k_1>0$, իսկ $k_2<0$, ապա

$$\begin{cases} k_2\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a} \\ k_1(k_2\vec{a})\uparrow\uparrow k_2\vec{a} \end{cases} \Rightarrow\ k_1(k_2\vec{a})\uparrow\downarrow\vec{a}:$$

Մյուս կողմից՝ $k_1k_2<0\Rightarrow(k_1k_2)\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$:

Հետևաբար՝ $k_1(k_2\vec{a})\uparrow\uparrow(k_1k_2)\vec{a}$:

Մնացած երեք դեպքերում ապացուցումը կատարվում է նույն ձևով:

6) Եթե $\vec{a}=\vec{0}$, կամ k_1 և k_2 թվերից մեկն ու մեկը զրո է, ապա ապացույցն ակնհայտ է: Դիտարկենք $\vec{a}\neq\vec{0}$ և $k_1>0$, $k_2<0$, $|k_1|>|k_2|$ դեպքերը:

Ունենք $k_1+k_2>0$, $|k_1+k_2|=|k_1|-|k_2|$: Հետևաբար՝

$|(k_1+k_2)\vec{a}|=|k_1+k_2|\cdot|\vec{a}|=(|k_1|-|k_2|)\cdot|\vec{a}|=$

$=|k_1|\cdot|\vec{a}|-|k_2|\cdot|\vec{a}|=|k_1\vec{a}|-|k_2\vec{a}|$, բացի դրանից՝ $(k_1+k_2)\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$:

Մյուս կողմից՝ $\begin{cases} k_1>0\Rightarrow k_1\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a} \\ k_2<0\Rightarrow k_2\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}, \end{cases}$ և քանի որ $|k_1\vec{a}|>|k_2\vec{a}|$,

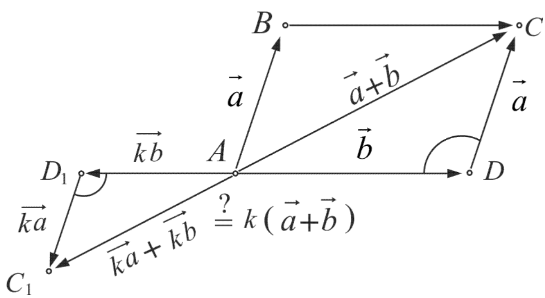
ապա $|k_1\vec{a}+k_2\vec{a}|=|k_1\vec{a}|-|k_2\vec{a}|$: Բացի դրանից՝ $(k_1\vec{a}+k_2\vec{a})\uparrow\uparrow\vec{a}$, հետևաբար՝ $(k_1+k_2)\vec{a}=k_1\vec{a}+k_2\vec{a}$:

Մնացած դեպքերում ապացուցումը կատարվում է նույն ձևով:

7) Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ապա 7-ի ապացույցը հետևում է 6-ից:

Եթե $k=0$, ապա ապացույցն ակնհայտ է:

Դիցուք $k<0$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ և $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, ինչպես պատկերված է նկար 5-ում:



Նկար 5

Կիրառենք A կետում $\overrightarrow{kb}$ վեկտորը՝ $\overrightarrow{kb} = \overrightarrow{AD_1}$, իսկ D_1 կետում $\overrightarrow{ka}$ վեկտորը՝ $\overrightarrow{ka} = \overrightarrow{D_1C_1}$, և ցույց տանք, որ $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \overrightarrow{AC_1}$ ։ Դիտարկենք $\Delta\, ADC$-ն և $\Delta\, AD_1C_1$-ը։ Ունենք $\dfrac{AD_1}{AD} = \dfrac{D_1C_1}{DC} = |\,k\,|$ և $CD \parallel C_1D_1$ ։ Քանի որ $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD_1}$ և կիրառված են միևնույն կետից, ապա D_1, A, D կետերն ընկած են մի ուղղի վրա, այսինքն՝ D_1D-ն CD և C_1D_1 զուգահեռ ուղիղների հատող է, հետևաբար՝ $\angle ADC = \angle AD_1C_1$ ։ Այսպիսով՝ $\Delta\, ADC$-ն նման է $\Delta\, AD_1C_1$-ին։

Այստեղից՝ $\dfrac{AC_1}{AC} = |\,k\,|$ և $\angle CAD = \angle C_1AD_1$ ։

Այսպիսով՝

$$\angle C_1AC = \angle C_1AD + \angle DAC = \angle C_1AD + \angle D_1AC_1 = \angle D_1AD = 180^0 :$$

Ստացանք՝ C_1, A, C կետերն ընկած են մի ուղղի վրա և $\dfrac{AC_1}{AC} = |\,k\,|$։ Ուրեմն՝ $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \overrightarrow{AC_1}$ ։ Մյուս կողմից՝ $k\vec{a} + k\vec{b} = \overrightarrow{AC_1}$, հետևաբար՝ $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ ։

Մյուս՝ $k > 0$ դեպքում ապացույցը կատարվում է նույն ձևով։

8) Այս հատկությունն ակնհայտ է։ □

Ապացուցված 1-8 հատկությունները վեկտորների գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունների հիմնական հատկություններն են։ Գծային հանրահաշվի դասընթացում դրանք դրված են գծային (վեկտորական) տարածության սահմանման հիմքում։

§ 4. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԳԾՈՐԵՆ ԿԱԽՅԱԼ ԵՎ ԱՆԿԱԽ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Դիցուք $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$-ը որևէ վեկտորներ են, իսկ $k_1, k_2, ..., k_n$-ը կամայական թվեր են:

Սահմանում: Հետևյալ՝ $k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + ... + k_n\overrightarrow{a_n}$ վեկտորը կոչվում է $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ վեկտորների ***գծային զուգակցություն*** $k_1, k_2, ..., k_n$ գործակիցներով:

Այսուհետ վեկտորների համակարգ ասելով՝ կհասկանանք վեկտորների ամեն մի վերջավոր, համարակալված բազմություն: Համակարգում հնարավոր է որևէ վեկտորի կամ վեկտորների կրկնություն:

Վեկտորների համակարգի ցանկացած մասը կանվանենք նրա ենթահամակարգ:

Սահմանում: Վեկտորների որևէ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ համակարգ $n > 1$ դեպքում կոչվում է ***գծորեն անկախ համակարգ***, եթե համակարգի վեկտորներից ոչ մեկը հնարավոր չէ ներկայացնել որպես այդ համակարգի մյուս վեկտորների գծային զուգակցություն: Մի վեկտորից բաղկացած համակարգը համարվում է անկախ համակարգ, եթե այն ոչ զրոյական վեկտոր է:

Սահմանում: Վեկտորների համակարգը կոչվում է ***գծորեն կախյալ համակարգ***, եթե այն անկախ չէ, այսինքն՝ եթե այդ համակարգի վեկտորներից գոնե մեկը ներկայացվում է որպես այդ համակարգի մյուս վեկտորների գծային զուգակցություն: Մի վեկտորից կազմված համակարգը կախյալ է, եթե այդ վեկտորը զրոյական վեկտոր է:

ԹԵՈՐԵՄ 1: Վեկտորների $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ համակարգը գծորեն կախյալ համակարգ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն $k_1, k_2, ..., k_n$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ, և

$$k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + ... + k_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}:$$

Ապացույցն ակնհայտ է $n=1$ դեպքում: Դիցուք $n>1$, և վեկտորների $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ համակարգը գծորեն կախյալ համակարգ է: Ուրեմն նրանցից ինչ-որ մեկը, օրինակ՝ $\overrightarrow{a_j}$ -ն, արտահայտվում է մյուսների գծային զուգակցությամբ՝

$$\vec{a}_j = k_1\vec{a}_1 + ... + k_{j-1}\vec{a}_{j-1} + k_{j+1}\vec{a}_{j+1} + ... + k_n\vec{a}_n:$$

Այս հավասարության երկու մասերին գումարելով $(-1)\overrightarrow{a_j}$ վեկտորը՝ կստանանք

$$k_1\vec{a}_1 + ... + k_{j-1}\vec{a}_{j-1} + (-1)\vec{a}_j + k_{j+1}\vec{a}_{j+1} + ... + k_n\vec{a}_n = \vec{0},$$

որտեղ $\overrightarrow{a_j}$ վեկտորի գործակիցը $\neq 0$:

Այժմ ցույց տանք հակառակը:

Դիցուք $k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + ... + k_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ և օրինակ՝ $k_j \neq 0$: Այստեղից ստանում ենք

$$-k_j\vec{a}_j = k_1\vec{a}_1 + ... + k_{j-1}\vec{a}_{j-1} + k_{j+1}\vec{a}_{j+1} + ... + k_n\vec{a}_n,$$

կամ

$$\vec{a}_j = \beta_1\vec{a}_1 + ... + \beta_{j-1}\vec{a}_{j-1} + \beta_{j+1}\vec{a}_{j+1} + ... + \beta_n\vec{a}_n,$$

որտեղ $\beta_i = -k_i/k_j$, $i = 1, ..., j-1, j+1, ..., n$: Այսինքն՝ $\overrightarrow{a_j}$ վեկտորն արտահայտվեց մյուսների գծային զուգակցությամբ: Հետևաբար վեկտորների $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ համակարգը գծորեն կախյալ համակարգ է: □

Դիտողություն: Եթե վեկտորների $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ համակարգը գծորեն կախյալ համակարգ է, ապա ամեն մի $k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + ... + k_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ հավասարություն, որտեղ $k_1, k_2, ..., k_n$ թվերից գոնե մեկը զրո չէ, կոչվում է *գծային հարաբերակցություն* այդ վեկտորների միջև: Նկատենք, որ այն կարող է միակը չլինել: Օրինակ՝ $\vec{0}, \vec{a}, 2\vec{a}$ վեկտորների համակարգը գծորեն կախյալ է, և նրա համար գծային հարաբերակցություններ են $1\cdot\vec{0}+0\cdot\vec{a}+0\cdot 2\vec{a}=\vec{0}$ և $0\cdot\vec{0}+2\cdot\vec{a}+(-1)\cdot 2\vec{a}=\vec{0}$ հավասարությունները:

Հետևություն թեորեմ 1-ից: *Վեկտորների* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ *համակարգը գծորեն անկախ համակարգ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ վեկտորների միջև գոյություն չունի գծային հարաբերակցություն: Այսինքն՝* $k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+...+k_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$ *հավասարությունը հնարավոր է միայն* $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ *դեպքում:*

Նշենք վեկտորների համակարգերի կախվածության (անկախության) մի քանի հատկություններ:

Հատկություն 1: Եթե վեկտորների համակարգը պարունակում է զրոյական վեկտոր, ապա այն գծորեն կախյալ համակարգ է:

Ապացուցում: Դիցուք ունենք զրոյական վեկտոր պարունակող $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_i=\vec{0}, \vec{a}_{i+1}, ..., \vec{a}_n$ համակարգը:

Ակնհայտ է, որ $0\cdot\vec{a}_1+...+0\cdot\vec{a}_{i-1}+1\cdot\vec{0}+0\cdot\vec{a}_{i+1}+...+0\cdot\vec{a}_n=\vec{0}$ հավասարությունը գծային հարաբերակցություն է: Հետևաբար, ըստ թեորեմ 1-ի, նշված համակարգը գծորեն կախյալ համակարգ է: □

Հատկություն 2: Եթե վեկտորների համակարգը պարունակում է գծորեն կախյալ ենթահամակարգ, ապա այն ևս գծորեն կախյալ համակարգ է:

Ապացուցում: Դիցուք համակարգի վեկտորները համարակալված են $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ այնպես, որ առաջին j հատ վեկտորներից կազմված $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_j}$, $j<n$ ենթահամակարգը գծորեն կախյալ է: Ըստ թեորեմ 1-ի՝ գոյություն ունեն $k_1, k_2, ..., k_j$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ և $k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+...+k_j\overrightarrow{a_j}=\vec{0}$:

Այստեղից կարող ենք գրել՝

$$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+...+k_j\vec{a}_j+0\cdot\vec{a}_{j+1}+...+0\cdot\vec{a}_n=\vec{0}:$$

Հետևաբար, դարձյալ ըստ թեորեմ 1-ի, $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ համակարգը գծորեն կախյալ համակարգ է: □

Հատկություն 3: Եթե վեկտորների համակարգը գծորեն անկախ համակարգ է, ապա նրա ցանկացած ենթահամակարգ ևս գծորեն անկախ համակարգ է:

Ապացույց: Կատարենք հակասող ենթադրություն: Այն է՝ վեկտորների գծորեն անկախ համակարգը պարունակում է գծորեն կախյալ ենթահամակարգ: Այդ դեպքում, ըստ հատկություն 2-ի, վեկտորների համակարգը կլինի գծորեն կախյալ համակարգ, ինչը հակասում է խնդրի պայմանին: □

Հատկություն 4: Դիցուք $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ վեկտորների համակարգը գծորեն անկախ է, իսկ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}, \vec{b}$ վեկտորների համակարգը՝ գծորեն կախյալ: Ապա $\vec{b}$ վեկտորը ներկայացվում է $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ, ընդ որում՝ միակ ձևով:

Ապացույց: Քանի որ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}, \vec{b}$ համակարգը գծորեն կախյալ է, ապա համաձայն թեորեմ 1-ի՝ գոյություն ունի որևէ

$$k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + ... + k_n\overrightarrow{a_n} + k_{n+1}\vec{b} = \vec{0}$$

գծային հարաբերակցություն, որտեղ $k_1, ..., k_n, k_{n+1}$ թվերից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից: Ցույց տանք, որ $k_{n+1} \neq 0$:

Իրոք, եթե $k_{n+1} = 0$, ապա

$$\begin{cases} k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + ... + k_n\overrightarrow{a_n} + k_{n+1}\vec{b} = \vec{0} \\ k_{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + ... + k_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0} \\ k_{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 = ... = k_n = 0 \\ k_{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_2 = ... = k_n = k_{n+1} = 0:$$

Ստացվեց հակասություն: Ուրեմն՝ $k_{n+1} \neq 0$: Հետևաբար՝ $\vec{b} = \beta_1\overrightarrow{a_1} + \beta_2\overrightarrow{a_2} + ... + \beta_n\overrightarrow{a_n}$, որտեղ $\beta_i = -\dfrac{k_i}{k_{n+1}}, i = 1, ..., n$:

Ցույց տանք, որ այս ներկայացումը միակն է: Դիցուք $\vec{b} = \beta_1'\overrightarrow{a_1} + \beta_2'\overrightarrow{a_2} + \ldots + \beta_n'\overrightarrow{a_n}$ մեկ այլ ներկայացում է: Այդ դեպքում

$$(\beta_1 - \beta_1')\overrightarrow{a_1} + (\beta_2 - \beta_2')\overrightarrow{a_2} + \ldots + (\beta_n - \beta_n)\overrightarrow{a_n} = \vec{0}:$$

Քանի որ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ վեկտորների համակարգը գծորեն անկախ է, ապա $(\beta_1 - \beta_1') = (\beta_2 - \beta_2') = \ldots = (\beta_n - \beta_n') = 0$, որտեղից էլ՝ $\beta_1 = \beta_1',\ \beta_2 = \beta_2',\ \ldots,\ \beta_n = \beta_n'$: Այսինքն՝ $\vec{b}$ վեկտորը միակ ձևով է ներկայացվում $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ: □

Վեկտորների $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ համակարգի գծորեն կախվածությունը, ինչպես նաև գծորեն անկախությունը $n = 1, 2, 3, 4$ դեպքերում երկրաչափորեն մեկնաբանվում են հետևյալ կերպ:

Ըստ սահմանման՝ մի վեկտորից բաղկացած համակարգը գծորեն կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ վեկտորը զրոյական վեկտոր է, և գծորեն անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն ոչ զրոյական վեկտոր է:

ԹԵՈՐԵՄ 2: Երկու վեկտորից կազմված համակարգը գծորեն կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ վեկտորները համագիծ են:

Ապացուցում: Վեկտորների համագծության սահմանումից հետևում է, որ երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներ համագիծ են այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի k թիվ այնպես, որ $\vec{a} = k\vec{b}$ կամ $\vec{b} = k\vec{a}$: Սա էլ նշանակում է, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են: □

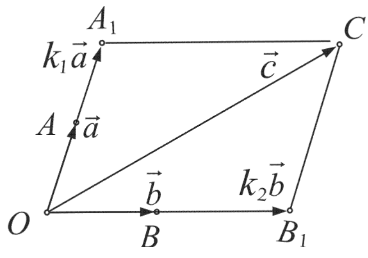
Հետևություն: Երկու վեկտորից կազմված համակարգը գծորեն անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ վեկտորները համագիծ չեն:

ԹԵՈՐԵՄ 3: Երեք վեկտորից կազմված համակարգը գծորեն կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ վեկտորները համահարթ են:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են: Եթե $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն գծորեն անկախ են, ապա ըստ հատկություն 4-ի՝ $\vec{c}$-ն արտահայտվում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ՝ $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$: Որևէ O կետից կիրառենք $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ վեկտորները: Քանի որ $\alpha\vec{a}$ և $\beta\vec{b}$ վեկտորներն ընկած են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով որոշված AOB հարթության մեջ, ապա $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ վեկտորը ևս ընկած կլինի այդ նույն հարթության մեջ: Եթե $\vec{a},\vec{b}$ համակարգը գծորեն կախյալ է, ապա $\vec{a}\,||\,\vec{b}$՝ ըստ թեորեմ 2-ի: Այս դեպքում $\overrightarrow{OA}$ և $\overrightarrow{OB}$ վեկտորները գտնվում են մի ուղղի վրա, հետևաբար $\vec{a},\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները, գտնվելով մի ուղղի վրա, կգտնվեն նաև այդ ուղղով անցնող որևէ հարթության մեջ:

Այժմ հակառակը: Դիցուք $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ վեկտորները համահարթ են: Եթե նրանցից որևէ երկուսը լինեն համագիծ, ապա կլինեն գծորեն կախյալ, և հետևաբար, ըստ հատկություն 2-ի, երեք վեկտորները ևս կլինեն գծորեն կախյալ:

Դիցուք այժմ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները զույգ առ զույգ համագիծ չեն: Այդ դեպքում, C կետից տանելով OA-ին և OB-ին զուգահեռ ուղիղներ, կստանանք OA_1CB_1 զուգահեռագիծը (տե՛ս նկար 6-ը):



Նկար 6

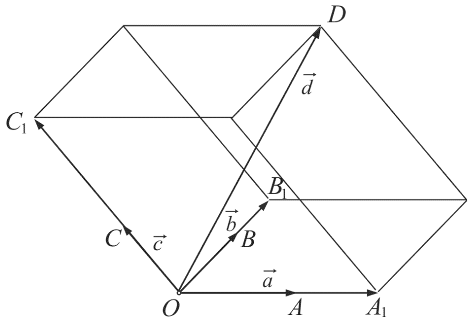
Այստեղից՝ $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$:

Այսինքն՝ վեկտորները գծորեն կախյալ են: □

Հետևություն: Երեք վեկտորից կազմված համակարգը գծորեն անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ վեկտորները համահարթ չեն:

ԹԵՈՐԵՄ 4: Տարածության չորս և ավելի վեկտորներից կազմված կամայական համակարգ գծորեն կախյալ է:

Ապացուցում: Դիցուք տրված են $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ և $\vec{d}$ վեկտորները: Եթե նրանցից որևէ երեքը համահարթ են, ապա նրանք գծորեն կախյալ են՝ ըստ թեորեմ 3-ի: Այդ դեպքում այդպիսին են նաև տրված չորս վեկտորները՝ ըստ հատկություն 2-ի: Իսկ եթե նրանցից ոչ մի երեքը համահարթ չեն, ապա տարածության որևէ O կետից կիրառենք $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ և $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ վեկտորները: Այդ դեպքում D կետից տարված OBC, OAC, OAB հարթություններին զուգահեռ հարթությունները հատելով՝ համապատասխանաբար OA, OB, OC ուղիղները ինչ-որ A_1, B_1, C_1 կետերում կառաջացնեն զուգահեռանիստ (տե՛ս նկար 7-ը):



Նկար 7

Այստեղից՝ $\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c}$:

Այսինքն՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են: □

§ 5. ԳԾԱՅԻՆ ԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ, ԲԱԶԻՍ, ՉԱՓՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Սահմանում: Վեկտորների որևէ V համախմբություն կոչվում է ***գծային*** *(վեկտորական)* ***բազմաձևություն,*** եթե այն իր կամայական երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների հետ պարունակում է նաև բոլոր հնարավոր $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ տեսքի վեկտորները, որտեղ $\alpha,\beta\in R$:

Բերենք վեկտորական բազմաձևությունների օրինակներ:

Օրինակ 1: Միայն զրոյական վեկտորից կազմված համախումբը՝ $V_0=\{\vec{0}\}$: Ակնհայտ է, որ այն գծային բազմաձևություն է:

Սահմանում: Կասենք, որ $\vec{a}$ վեկտորը համագիծ է l ուղղին (գրվում է $\vec{a}\parallel l$), եթե $\vec{a}$-ն l ուղղի որևէ կետից կիրառելիս նրա ծայրակետը ևս կգտնվի այդ ուղղի վրա:

Սահմանում: Կասենք, որ $\vec{a}$ վեկտորը համագիծ է P հարթությանը (գրվում է $\vec{a}\parallel P$), եթե այն համագիծ է այդ հարթության մեջ ընկած որևէ ուղղի, այսինքն՝ $\vec{a}$-ն P հարթության որևէ կետից կիրառելիս նրա ծայրակետը ևս կգտնվի այդ հարթության վրա:

Հեշտ է տեսնել, որ՝

Հատկություն 1: Եթե $\vec{a}$ վեկտորը համագիծ է l ուղղին (P հարթությանը), ապա $k\vec{a}$-ն ևս համագիծ է l ուղղին (P հարթությանը):

Հատկություն 2: Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են l ուղղին (P հարթությանը), ապա $\vec{a}+\vec{b}$-ն ևս համագիծ է l ուղղին (P հարթությանը):

Օրինակ 2: Դիտարկենք տարածության որևէ l ուղղին համագիծ բոլոր վեկտորների համախմբությունը՝

$$V_l=\{\vec{a}\mid \vec{a}\parallel l\}\ :$$

Օրինակ 3: Դիտարկենք տարածության որևէ P հարթությանը համագիծ բոլոր վեկտորների համախմբությունը՝ $V_P = \{\vec{a} \mid \vec{a} \parallel P\}$:

Հատկություն 1-ից և հատկություն 2-ից հետևում է, որ $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V_l$ ($\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V_p$) վեկտորների և $\forall \alpha, \beta \in R$ թվերի համար

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in V_l \;\; (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in V_p):$$

Սա նշանակում է, որ V_l-ը ինչպես նաև V_p-ն գծային բազմաձևություն են: Դրանք կանվանենք համապատասխանաբար l ***ուղղին*** (P ***հարթությանը***) ***կից գծային բազմաձևություն:***

Նկատենք, որ զուգահեռ ուղիղներին կից գծային բազմաձևությունները նույնն են: Այսինքն՝ եթե $l_1 \parallel l_2$, ապա $V_{l_1} = V_{l_2}$:

Նմանապես, նույնն են զուգահեռ հարթություններին կից գծային բազմաձևությունները:

Հետևաբար կարող ենք ասել, որ V_l (V_p) տեսակի գծային բազմաձևություններն այնքան են, որքան տարածության որևէ սևեռած O կետով անցնող ուղիղները (հարթությունները):

Օրինակ 4: Դիցուք V-ն տարածության բոլոր ազատ վեկտորների բազմությունն է: Ակնհայտ է, որ V-ն գծային բազմաձևություն է: Այս բազմաձևությունը կանվանենք ***տարածության կից գծային բազմաձևություն***:

ԹԵՈՐԵՄ 1: Վերը թվարկված 1-4 օրինակներով սպառվում են բոլոր հնարավոր գծային բազմաձևությունները:

Իրոք, սահմանումից հետևում է, որ ցանկացած W գծային բազմաձևություն պարունակում է $\vec{0}$ վեկտորը: Եթե W-ն ուրիշ վեկտոր չի պարունակում, ապա այն համընկնում է V_0-ի հետ: Իսկ եթե W-ն պարունակում է որևէ $\vec{a} \neq \vec{0}$ վեկտոր, ապա այն պարունակում է V_l-ը, որտեղ l-ը O կետով անցնող $\vec{a}$ վեկտորին զուգահեռ ուղիղն է: Ընթերցողին առաջարկում ենք այստեղ ևս դիտարկել երկու դեպք և նմանատիպ դատողություններով ավարտին հասցնել ապացույցը:

Այսպիսով՝ ըստ թեորեմ 1-ի՝ ցանկացած գծային բազմաձևություն լիովին որոշվում է իր *հենարանով*, որը O կետն է V_0-ի համար, l ուղիղը՝ V_l-ի համար, P հարթությունը՝ V_p-ի համար և տարածությունը՝ V-ի համար:

Կասենք, որ V վեկտորական բազմաձևության $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ գծորեն անկախ վեկտորների համակարգը ***գծորեն անկախ վեկտորների առավելագույն համակարգ*** է, եթե ցանկացած $\vec{a} \in V$ վեկտորի համար, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}, \vec{a}$ համակարգը գծորեն կախյալ է:

Սահմանում: Գծային բազմաձևության ***բազիս*** (***հենք***) կոչվում է նրա ամեն մի կարգավորված, գծորեն անկախ վեկտորների առավելագույն համակարգ:

Խնդիր 1-ից և թեորեմներ 2, 3, 4-ից հետևում է, որ ցանկացած վեկտորական բազմաձևության բոլոր բազիսները պարունակում են միևնույն թվով վեկտորներ: Այդ թիվը կոչվում է գծային բազմաձևության ***չափողականություն***:

Պարզենք 1-4 օրինակներում նշված վեկտորական բազմաձևությունների չափողականությունը:

<u>Օրինակ 1</u>-ում $V_0 = \{\vec{0}\}$ բազմաձևությունը ոչ մի բազիս չունի: Նրա չափողականությունը 0 է:

<u>Օրինակ 2</u>-ում V_l բազմաձևության ցանկացած բազիս կազմված է ճիշտ մեկ ոչ զրոյական վեկտորից: Այսինքն՝ V_l-ի չափողականությունը 1 է:

<u>Օրինակ 3</u>-ում V_p բազմաձևության ցանկացած բազիս կազմված է ճիշտ երկու ոչ համագիծ վեկտորներից: Հետևաբար V_p-ի չափողականությունը 2 է:

<u>Օրինակ 4</u>-ում V բազմաձևության ցանկացած բազիս կազմված է ճիշտ երեք ոչ համահարթ վեկտորներից: Այսինքն՝ V-ի չափողականությունը 3 է:

Եթե $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$-ը որևէ գծային բազմաձևության բազիս է $1 \le n \le 3$, ապա համաձայն հատկություն 4-ի՝ նրա ամեն մի $\vec{a}$

վեկտոր ներկայացվում է որպես բազիսային վեկտորների գծային զուգակցություն՝ $\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+...+a_n\overrightarrow{e_n}$, այն էլ միակ ձևով:

Այդ զուգակցության $a_1, a_2, \cdots, a_n$ գործակիցները կոչվում են $\vec{a}$ ***վեկտորի կոորդինատներ տվյալ բազիսի նկատմամբ***: Այս փաստը գրառվում է այսպես՝ $\vec{a}=\{a_1;\ a_2;\ ...\ ;\ a_n\}$:

Վերը նշվածից հետևում է, որ վեկտորի կոորդինատները տվյալ բազիսի նկատմամբ որոշվում են միարժեքորեն:

Սա նշանակում է, որ եթե $\vec{a}=\{a_1;\ a_2;...;\ a_n\}$, $\vec{b}=\{b_1;\ b_2;...;\ b_n\}$ նույն բազիսի նկատմամբ, ապա

$$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,...,\ a_n=b_n:$$

ԹԵՈՐԵՄ 2: Կամայական $\vec{a}=\{a_1;a_2;...;a_n\}$, $\vec{b}=\{b_1;b_2;...;b_n\}$ վեկտորների և $\forall k\in R$ թվի համար՝

1) $k\vec{a}=\{ka_1;\ ka_2;...;\ ka_n\}$,

2) $\vec{a}+\vec{b}=\{a_1+b_1;\ a_2+b_2;...;\ a_n+b_n\}$:

Ապացուցում:

1) Դիցուք $\vec{a}=\{a_1;\ a_2;...;\ a_n\}$, և k-ն կամայական թիվ է: Նշանակում է $\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+...+a_n\overrightarrow{e_n}$ և հետևաբար՝

$$\overrightarrow{ka}=k(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+...+a_n\overrightarrow{e_n})=k(a_1\overrightarrow{e_1})+k(a_2\overrightarrow{e_2})+...+k(a_n\overrightarrow{e_n})=$$
$$=(ka_1)\overrightarrow{e_1}+(ka_2)\overrightarrow{e_2}+...+(ka_n)\overrightarrow{e_n}:$$

Այստեղից էլ՝ $k\vec{a}=\{ka_1;\ ka_2;...;\ ka_n\}$:

2) Եթե $\vec{a}=\{a_1;\ a_2;...;\ a_n\}$ և $\vec{b}=\{b_1;\ b_2;...;\ b_n\}$, ապա $\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+...+a_n\overrightarrow{e_n}$, $\vec{b}=b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+...+b_n\overrightarrow{e_n}$, հետևաբար՝

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+...+a_n\overrightarrow{e_n})+(b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+...+b_n\overrightarrow{e_n})=$$
$$=(a_1+b_1)\overrightarrow{e_1}+(a_2+b_2)\overrightarrow{e_2}+...+(a_n+b_n)\overrightarrow{e_n}:$$

Այսինքն՝

$$\vec{a}+\vec{b}=\{a_1+b_1;\ a_2+b_2;...;\ a_n+b_n\}:\square$$

Մինչև հաջորդ թեորեմի ձևակերպումը պարզաբանենք թվերի $(a_1, a_2,...,a_n)$ և $(b_1, b_2,..., b_n)$ երկու հաջորդականությունների համեմատականության հասկացությունը:

Կասենք, որ թվերի երկու $(a_1, a_2,...,a_n)$ և $(b_1, b_2,..., b_n)$ հաջորդականություններ, որոնք տարբեր են $(0, 0,...,0)$ հաջորդականությունից, համեմատական են, և գրառելու ենք դա $a_1:b_1=a_2:b_2=...=a_n:b_n$ տեսքով, եթե գոյություն ունի այնպիսի $k\neq 0$ թիվ, որ $a_1=kb_1$, $a_2=kb_2$, ... , $a_n=kb_n$ (կամ $b_1=ka_1$, $b_2=ka_2$, ... , $b_n=ka_n$): Նկատենք, որ եթե որևէ $a_i=0$, ապա նաև $b_i=0$ և հակառակը: Օրինակ՝ $(0, 0, 1,0,-\sqrt{2})$ և $(0, 0, -3,0,3\sqrt{2})$ հաջորդականությունները համեմատական են: Այսպիսով՝ $a_1:b_1=a_2:b_2=...=a_n:b_n$ համեմատության գոյությունը ընդհանուր դեպքում չի ենթադրում, որ յուրաքանչյուր i-ի դեպքում իմաստ ունի $a_i:b_i$ հարաբերություն՝ որպես $\dfrac{a_i}{b_i}$ թիվ:

ԹԵՈՐԵՄ 3: Եթե միևնույն բազիսի նկատմամբ

$$\vec{a}=\{a_1;\ a_2;...;\ a_n\},\ \vec{b}=\{b_1;\ b_2;...;\ b_n\},$$

ապա $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$a_1:b_1=a_2:b_2=...=a_n:b_n:$$

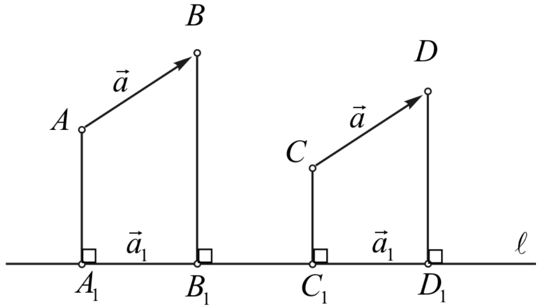
Ապացույց: Ինչպես գիտենք, երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներ համագիծ են այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $k\in R$ թիվ այնպես, որ $\vec{a}=k\vec{b}$ կամ $\vec{b}=k\vec{a}$: Սա էլ համարժեք է

$$a_1:b_1=a_2:b_2=...=a_n:b_n$$

պայմանին: □

§ 6. ՎԵԿՏՈՐԻ ՊՐՈՅԵԿՑԻԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔԸ

Եթե հարթության վրա (տարածության մեջ) տրված է որևէ ℓ ուղիղ, ապա կամայական $\vec{a}$ վեկտորի համար կարող ենք սահմանել նրա պրոյեկցիան ℓ ուղղի վրա:



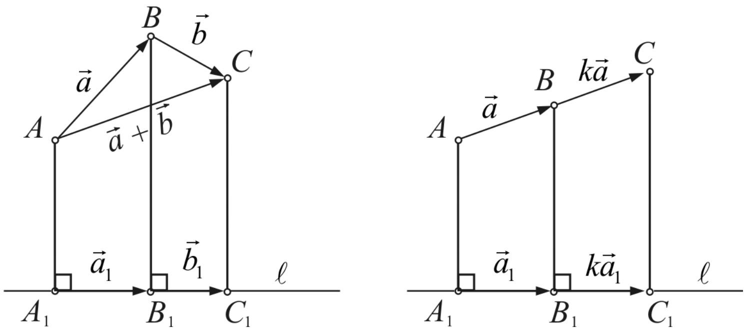
Նկար 8

Եթե $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, ապա A և B կետերով տանենք ℓ ուղղին ուղղահայաց ուղիղներ, որոնք ℓ ուղիղը հատում են համապատասխանաբար A_1 և B_1 կետերում: Ստացված A_1B_1 հատվածը կոչվում է AB *հատվածի պրոյեկցիա* ℓ ուղղի վրա և նշանակվում է՝ $A_1B_1 = \text{պր}_\ell AB$-ով, իսկ $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ վեկտորն անվանում են $\vec{a}$ *վեկտորի պրոյեկցիա* ℓ ուղղի վրա և գրառում են՝ $\vec{a}_1 = \text{պր}_\ell\, \vec{a}$: Հեշտ է համոզվել, որ վեկտորի պրոյեկցիայի սահմանումը կոռեկտ է: Այսինքն՝ ստացված $\vec{a}_1$ վեկտորը կախված չէ $\vec{a}$ վեկտորի ներկայացուցչի ընտրությունից (տե՛ս նկար 8-ը): Նկատենք, որ ℓ և ℓ' զուգահեռ ուղիղների դեպքում $\text{պր}_\ell\, \vec{a} = \text{պր}_{\ell'}\, \vec{a}$:

Պրոյեկտման գործողությունն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

ա) $\text{պր}_\ell\,(\vec{a}+\vec{b}) = \text{պր}_\ell\, \vec{a} + \text{պր}_\ell\, \vec{b}$,

բ) $\text{պր}_\ell\,(k\vec{a}) = k\cdot \text{պր}_\ell\,\vec{a}$, $\forall k \in R$ թվի և կամայական $\vec{a},\vec{b}$ վեկտորների համար:



Նկար 9

Իրոք, նկար 9-ից տեսնում ենք, որ A,B,C կետերի կամայական դասավորության դեպքում՝

ա) $\text{պր}_\ell\,(\vec{a}+\vec{b}) = \text{պր}_\ell\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} =$

$$= \text{պր}_\ell\,\vec{a} + \text{պր}_\ell\,\vec{b},$$

բ) $\text{պր}_\ell\,(k\vec{a}) = \text{պր}_\ell\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1} = k\cdot\overrightarrow{A_1B_1} = k\cdot \text{պր}_\ell\,\vec{a}$:

Ներմուծենք ***առանցք*** հասկացությունը:

Ամեն մի ուղղի վրա կարելի է նշել շարժման հնարավոր երկու ուղղություն՝ աջից դեպի ձախ և ձախից դեպի աջ:

Առանցք կոչվում է այն ուղիղը, որի վրա նշված է նրա վրա շարժման հնարավոր երկու ուղղություններից մեկը: Շարժման ուղղությունը նշելու համար բավական է ուղղի վրա ընտրել որևէ $\vec{e}$, $|\vec{e}|=1$ միավոր վեկտոր:

Այսպիսով՝ ամեն մի ուղղից կարելի է ստանալ երկու առանցք՝ $(\ell;\vec{e})$ և $(\ell;-\vec{e})$:

Դիցուք սևեռած է ինչ-որ $(\ell;\vec{e})$ առանցք: Պարզ է, որ $\text{պր}_\ell\,\vec{a}$-ն համագիծ է $\vec{e}$-ին:

Սահմանում: Կամայական $\vec{a}$ վեկտորի համար $\text{պր}_\ell\,\vec{a} = x\cdot\vec{e}$ վերլուծության x գործակիցը կոչվում է $(\ell;\vec{e})$ ***առանցքի վրա*** $\vec{a}$ ***վեկտորի պրոյեկցիայի հանրահաշվական արժեք***:

Այն գրառվում է այսպես՝ $x = \text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}\,\vec{a}$:

Այսպիսով՝ $\text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}\,\vec{a} = x \;\Leftrightarrow\; \text{պր}_{\ell}\,\vec{a} = x\vec{e}$:

ԹԵՈՐԵՄ 1: Պրոյեկցիայի հանրահաշվական արժեքն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1) $\text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}\,\vec{a} + \text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}\,\vec{b}$,

2) $\text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}(k\cdot\vec{a}) = k\cdot\text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}\,\vec{a}$:

Ապացուցում: 1) Եթե $\text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}\,\vec{a} = x$, $\text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}\,\vec{b} = y$, ապա $\text{պր}_{\ell}\,\vec{a} = x\vec{e}$, $\text{պր}_{\ell}\,\vec{b} = x\vec{e}$: Համաձայն պրոյեկցիայի **ա)** հատկության՝ ունենք

$$\text{պր}_{\ell}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{պր}_{\ell}\,\vec{a} + \text{պր}_{\ell}\,\vec{b} = x\vec{e} + y\vec{e} = (x+y)\vec{e}:$$

Ուստի $x + y = \text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}(\vec{a}+\vec{b})$, հետևաբար՝

$$\text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}\,\vec{a} + \text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}\,\vec{b} = \text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}(\vec{a}+\vec{b}):$$

2-ն ապացուցվում է նույն ձևով՝ օգտագործելով պրոյեկցիայի **բ)** հատկությունը: □

Վերադառնալով վեկտորի պրոյեկցիայի հանրահաշվական արժեքի վերը բերված սահմանմանը՝ նկատենք, որ եթե ունենք երկու առանցքներ՝ որոշված ℓ և ℓ' զուգահեռ ուղիղներով և միևնույն $\vec{e}$, $|\vec{e}|=1$ վեկտորով, ապա $\text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}\,\vec{a} = \text{h.ա.պր}_{(\ell';\vec{e})}\,\vec{a}$ կամայական $\vec{a}$ վեկտորի համար: Սա նշանակում է, որ վեկտորի պրոյեկցիայի հանրահաշվական արժեքը լիովին որոշվում է $\vec{e}$ միավոր վեկտորով և կախված չէ ℓ ուղղից: Այդ պատճառով այսուհետև $\text{h.ա.պր}_{(\ell;\vec{e})}\,\vec{a}$ թիվը պարզապես կգրենք $\text{h.ա.պր}_{\vec{e}}\,\vec{a}$ տեսքով: Այժմ վերը նշված թեորեմ 1-ը կընդունի այսպիսի տեսք՝

1) $\text{h.ա.պր}_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{h.ա.պր}_{\vec{e}}\,\vec{a} + \text{h.ա.պր}_{\vec{e}}\,\vec{b}$,

2) $\text{h.ա.պր}_{\vec{e}}(k\cdot\vec{a}) = k\cdot\text{h.ա.պր}_{\vec{e}}\,\vec{a}$:

Հետագայում մեզ պետք են գալու երկու վեկտորների կազմած անկյուն և վեկտորի օրթ հասկացությունները: Պարզաբանենք դրանք:

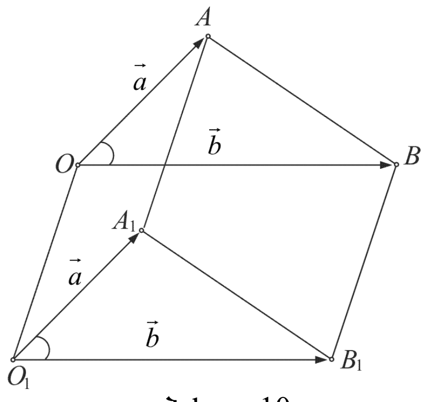
Սահմանում: Երկու ***ոչ զրոյական*** $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ***վեկտորների կազմած անկյուն,*** նշանակվում է $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$-ով, կոչվում է $\angle AOB$-ն, որտեղ A, O, B-ն որևէ երեք կետեր են այնպես, որ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$:

Այսպիսով՝ վեկտորների կազմած անկյունը որոշելու համար անհրաժեշտ է դրանք կիրառել մի կետից:

Սահմանումից հետևում է, որ $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = (\widehat{\vec{b},\vec{a}})$ և $0 \le (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \le \pi$:

Եթե $\vec{a}$-ն կամ $\vec{b}$-ն զրոյական վեկտոր է, ապա նրանցով կազմված անկյուն <u>չենք սահմանում</u>:

Սահմանումը կոռեկտ է այն իմաստով, որ կախված չէ կիրառման կետի ընտրությունից: Իրոք, եթե դիտարկենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ազատ վեկտորների այլ՝ $\overrightarrow{O_1A_1}$ և $\overrightarrow{O_1B_1}$ ներկայացուցիչներ (տե՛ս նկար 10-ը), ապա $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$՝ որպես համուղղված կողմերով անկյուններ:



Նկար 10

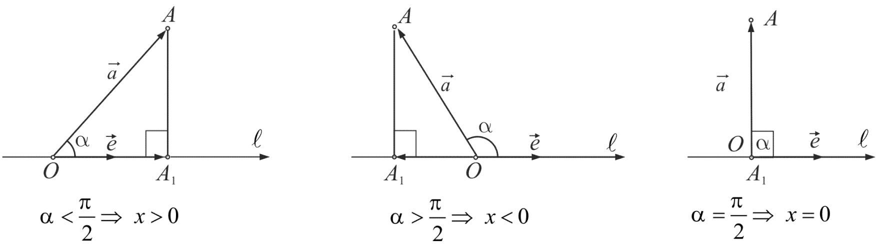
Երբեմն հարկ է լինում դիտարկել տվյալ ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորին համուղղված միավոր վեկտորը: Այն կոչվում է այդ վեկտորի օրթ և նշանակվում է $\vec{a}^{\,0}$-ով: Հեշտ է տեսնել, որ $\vec{a}^{\,0} = \dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$: Ակնհայտ է, որ եթե $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$, ապա

$$(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = (\vec{a}^{\,0} \hat{,} \vec{b}) = (\vec{a}, \hat{\vec{b}}^{0}) = (\vec{a}^{\,0} \hat{,} \vec{b}^{\,0}) :$$

Հետևյալ թեորեմը պարզաբանում է վեկտորի պրոյեկցիայի հանրահաշվական արժեքի երկրաչափական իմաստը:

ԹԵՈՐԵՄ 2: Յանկացած $\vec{a} \neq \vec{0}$ վեկտորի և $\vec{e}$ միավոր վեկտորի համար $\text{հ.ա.պր}_{\vec{e}}\, \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \hat{,} \vec{e})$:

Ապացուցում: Կախված $\alpha = (\vec{a} \hat{,} \vec{e})$ անկյան մեծությունից (սուր, բութ կամ ուղիղ)՝ դիտարկենք հետևյալ երեք հնարավոր դեպքերը՝



Նկար 11

Նկար 11-ից ակնհայտ է, որ բոլոր երեք դեպքերում

$$\text{պր}_{\vec{e}}\, \vec{a} = \overrightarrow{OA_1} = x\vec{e}, \text{ որտեղ } x = OA \cdot \cos\alpha :$$

Այսպիսով՝ $\text{հ.ա.պր}_{\vec{e}}\, \vec{a} = x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$:□

Հետևություն: Եթե $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն կամայական ոչ զրոյական վեկտորներ են, ապա $\text{հ.ա.պր}_{\vec{b}^0}\, \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \hat{\vec{b}}^{0}) = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \hat{,} \vec{b})$:

§ 7. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՍԿԱԼՅԱՐ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ

Սահմանում: Ոչ զրոյական կամայական $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների ***սկալյար արտադրյալ*** կոչվում է $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$ թիվը: Եթե $\vec{a}=\vec{0}$ կամ $\vec{b}=\vec{0}$, ապա նրանց սկալյար արտադրյալը զրո է:

Սկալյար արտադրյալի համար գործածվում են $(\vec{a},\vec{b})$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, ինչպես նաև $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ նշանակումները:

Սահմանումից ունենք

$$(\vec{a},\vec{b})=\begin{cases}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}), \text{ երբ } \vec{a}\neq\vec{0} \text{ և } \vec{b}\neq\vec{0} \\ 0, \text{ երբ } \vec{a}=\vec{0} \text{ կամ } \vec{b}=\vec{0}\end{cases}:$$

Նկատի ունենալով § 6-ի թեորեմ 2-ի հետևությունը՝ $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$ դեպքում երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը կարող ենք գրել նաև

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=|\vec{a}|\cdot \text{հ.ա.պր}_{\vec{a}^0}\,\vec{b}=|\vec{b}|\cdot \text{հ.ա.պր}_{\vec{b}^0}\,\vec{a} \quad (1)$$

տեսքերով:

ԹԵՈՐԵՄ 1: W գծային բազմաձևության վեկտորների սկալյար բազմապատկումը, որպես $W\times W\to R$ երկտեղ գործողություն, օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$, **2)** $(k\vec{a},\vec{b})=k(\vec{a},\vec{b})$,

3) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$, **4)** $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$,

5) $\left(f(\vec{a}),f(\vec{b})\right)=(\vec{a},\vec{b})$,

կամայական $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորների, կամայական $k\in R$ թվի և տվյալ W գծային բազմաձևության հենարանի ցանկացած f իզոմետրիկ ձևափոխության համար:

Ապացուցում: Եթե $\vec{a}=\vec{0}$, կամ $\vec{b}=\vec{0}$, կամ $\vec{c}=\vec{0}$, ապա 1-5 հատկություններն ակնհայտ են:

Դիցուք այժմ $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$:

1-ը հետևում է $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$ հավասարությունից:

2) Օգտվելով (1)-ից՝ կստանանք

$$(\overrightarrow{ka},\vec{b})=(\vec{b},\overrightarrow{ka})=|\vec{b}|\cdot \text{h.ա.պր}_{\vec{b}^0}(\overrightarrow{ka})=|\vec{b}|\cdot k\cdot(\text{h.ա.պր}_{\vec{b}^0}\vec{a})=$$

$$=k\cdot\left(|\vec{b}|\cdot \text{h.ա.պր}_{\vec{b}^0}\vec{a}\right)=k\cdot(\vec{a},\vec{b})$$

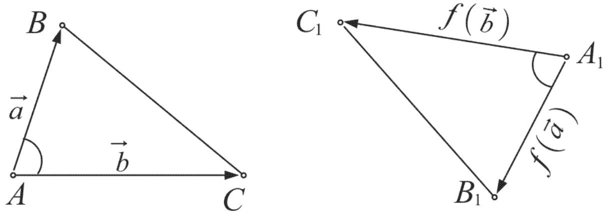
3) Ինչպես նախորդ դեպքում, օգտվելով (1)-ից, կստանանք

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=|\vec{c}|\cdot \text{h.ա.պր}_{\vec{c}^0}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\cdot(\text{h.ա.պր}_{\vec{c}^0}\vec{a})+|\vec{c}|\cdot(\text{h.ա.պր}_{\vec{c}^0}\vec{b})=$$

$$=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c}):$$

4) Ունենք $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{a}})=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0=|\vec{a}|^2$:

5) Դիցուք f-ը W գծային բազմաձևության հենարանի որևէ իզոմետրիկ ձևափոխություն է, A,B,C կետերը W-ի հենարանի մի ուղղի վրա չգտնվող կետեր են, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $f(A)=A_1$, $f(B)=B_1$, $f(C)=C_1$ (տե՛ս նկար 12-ը):



Նկար 12

Հարթության իզոմետրիկ ձևափոխության սահմանումից ունենք

$$AB=A_1B_1,\ \ AC=A_1C_1 \text{ և } BC=B_1C_1:$$

Այստեղից՝ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, որտեղից էլ՝ $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$:

Մյուս կողմից՝ $f(\vec{a})=\overrightarrow{A_1B_1}, f(\vec{b})=\overrightarrow{A_1C_1}$: Այնպես որ՝ $\left(f(\vec{a}),f(\vec{b})\right)=$

$$=|f(\vec{a})|\cdot|f(\vec{b})|\cdot\cos(\widehat{f(\vec{a}),\ f(\vec{b})})=A_1B_1\cdot A_1C_1\cdot\cos(\angle B_1A_1C_1)=$$

$$= AB\cdot AC\cdot\cos(\angle BAC) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = (\vec{a},\vec{b}):$$

1-5 հատկությունները հեշտությամբ ապացուցվում են նաև, երբ $\vec{a}\,||\,\vec{b}$:□

Ապացուցված հատկությունները կոչվում են հիմնական, քանի որ նրանք լիովին որոշում են սկալյար արտադրյալը: Այդ մասին է վկայում հետևյալ թեորեմը:

ԹԵՈՐԵՄ 2 (***սկալյար բազմապատկման միակության մասին***): Ենթադրենք՝ ինչ-որ մի եղանակով տվյալ վեկտորական բազմաձևության վեկտորների ցանկացած $(\vec{a};\vec{b})$ կարգավորված զույգին համապատասխանեցված է մի թիվ, որը նշանակված է $\vec{a}*\vec{b}$-ով, ընդ որում՝ ունենք հետևյալ հատկությունները՝

1) $\vec{a}*\vec{b}=\vec{b}*\vec{a}$, 2) $(\vec{a}+\vec{b})*\vec{c}=(\vec{a}*\vec{c})+(\vec{b}*\vec{c})$,

3) $(k\cdot\vec{a})*\vec{b}=k(\vec{a}*\vec{b}), \forall k\in R,$ 4) $\vec{a}*\vec{a}=|\vec{a}|^2$,

5) $f(\vec{a})*f(\vec{b})=\vec{a}*\vec{b},$ որտեղ f -ը գծային բազմաձևության հենարանի ցանկացած իզոմետրիկ ձևափոխություն է:

Այս նշված համապատասխանությունը համընկնում է սկալյար բազմապատկման հետ, այսինքն՝

$$\vec{a}*\vec{b}=\begin{cases}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}), \text{ երբ } \vec{a}\neq\vec{0} \text{ և } \vec{b}\neq\vec{0}\\ 0, \text{ երբ } \vec{a}=\vec{0} \text{ կամ } \vec{b}=\vec{0}\end{cases}:$$

Ապացուցում կատարենք երեք փուլով հարթությանը կից V_p և տարածությանը կից V բազմաձևությունների համար: Որոշ դրվագների կրկնություններից խուսափելու նպատակով այս երկու դեպքերի ապացուցումները կկատարենք միաժամանակ:

ա) Նախ ցույց տանք, որ եթե $\vec{a}=\vec{0}$ կամ $\vec{b}=\vec{0}$, ապա $\vec{a}*\vec{b}=0$: Իրոք, եթե $\vec{a}=\vec{0}$, իսկ $\vec{b}$-ն կամայական վեկտոր է, ապա, օգտվելով հատկություն 2-ից, կստանանք

$$\vec{0}*\vec{b}=(\vec{0}+\vec{0})*\vec{b}=(\vec{0}*\vec{b})+(\vec{0}*\vec{b})=2(\vec{0}*\vec{b}),$$

որտեղից՝ $\vec{0}*\vec{b}=0$: Իսկ եթե $\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{a}$-ն կամայական է, ապա ըստ հատկություն 1-ի և նախորդ դեպքի՝ $\vec{a}*\vec{0}=\vec{0}*\vec{a}=0$:

բ) Ենթադրենք՝ $\vec{a}\perp\vec{b}$, ցույց տանք, որ $\vec{a}*\vec{b}=0$:

Դիցուք $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$: Նշանակենք f-ով (AOB) հարթության համաչափության ձևափոխությունը OB ուղղի նկատմամբ, երբ դիտարկվում է այդ հարթությանը կից գծային բազմաձևությունը: Այդ նույն f-ով նշանակենք նաև տարածության համաչափության ձևափոխությունը OB ուղղով անցնող և OA-ին ուղղահայաց հարթության նկատմամբ, երբ դիտարկվում է տարածությանը կից վեկտորական բազմաձևությունը: Երկու դեպքում էլ $f(\vec{a})=-\vec{a},\ f(\vec{b})=\vec{b}$: Հաջորդաբար օգտվելով հատկություն **5**-ից, այնուհետև հատկություն **3**-ից՝ կստանանք

$$\vec{a}*\vec{b}=f(\vec{a})*f(\vec{b})=(-\vec{a})*\vec{b}=((-1)\vec{a})*\vec{b}=-(\vec{a}*\vec{b}),$$

որտեղից էլ՝ $\vec{a}*\vec{b}=0$:

գ) Այժմ ենթադրենք՝ $\vec{a}\neq\vec{0}$ և $\vec{b}\neq\vec{0}$ երկու կամայական վեկտորներ են: Ներկայացնենք $\vec{a}$ վեկտորը $\vec{a}=\vec{a'}+\vec{a''}$ տեսքով, որտեղ $\vec{a'}\parallel\vec{b},\ \vec{a''}\perp\vec{b}$: Քանի որ $\vec{a'}\parallel\vec{b}$, ապա $\vec{a'}$ վեկտորը կարող ենք ներկայացնել $\vec{a'}=k\cdot\vec{b^0}$ տեսքով, որտեղ $k=|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, իսկ $\vec{b^0}$-ն $\vec{b}$ վեկտորի օրթն է՝ $\vec{b^0}=\vec{b}/|\vec{b}|$, $|\vec{b^0}|=1$: Հետևաբար, հաջորդաբար օգտվելով **2), բ)**, **3), 4)** հատկություններից, կարող ենք գրել

$$\vec{a}*\vec{b}=(\vec{a'}+\vec{a''})*\vec{b}=(\vec{a'}*\vec{b})+(\vec{a''}*\vec{b})=\vec{a'}*\vec{b}=(k\cdot\vec{b^0})*(|\vec{b}|\cdot\vec{b^0})=$$

$$=k\cdot|\vec{b}|\cdot(\vec{b^0}*\vec{b^0})=(|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}))\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{b^0}|^2=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}):\square$$

Այն դեպքը, երբ դիտարկվում է ուղղին կից վեկտորական բազմաձևությունը, թողնում ենք ընթերցողին՝ որպես խնդիր ինքնուրույն ապացուցելու համար:

Այժմ անցնենք սկալյար արտադրյալի հաշվման բանաձևերի արտածմանը, երբ վեկտորները տրված են կոորդինատներով տարածության որևէ $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$ բազիսում: Դիցուք $\vec{a}=\{a_1;\ a_2;\ a_3\}$ և $\vec{b}=\{b_1;\ b_2;\ b_3\}$ նշված բազիսում: Հաշվենք նրանց սկալյար արտադրյալը՝ օգտվելով սկալյար արտադրյալի 1)-4) հատկություններից:

Ունենք՝

$$(\vec{a},\vec{b})=(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3},b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+b_3\overrightarrow{e_3})=(a_1\overrightarrow{e_1},b_1\overrightarrow{e_1})+$$
$$+(a_1\overrightarrow{e_1},b_2\overrightarrow{e_2})+(a_1\overrightarrow{e_1},b_3\overrightarrow{e_3})+(a_2\overrightarrow{e_2},b_1\overrightarrow{e_1})+(a_2\overrightarrow{e_2},b_2\overrightarrow{e_2})+(a_2\overrightarrow{e_2},b_3\overrightarrow{e_3})+$$
$$+(a_3\overrightarrow{e_3},b_1\overrightarrow{e_1})+(a_3\overrightarrow{e_3},b_2\overrightarrow{e_2})+(a_3\overrightarrow{e_3},b_3\overrightarrow{e_3})=a_1b_1(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1})+a_1b_2(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})+$$
$$+a_1b_3(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3})+a_2b_1(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1})+a_2b_2(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2})+a_2b_3(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})+a_3b_1(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_1})+$$
$$+a_3b_2(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_2})+a_3b_3(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_3})=a_1b_1(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1})+a_2b_2(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2})+a_3b_3(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_3})+$$
$$+(a_1b_2+a_2b_1)(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})+(a_2b_3+a_3b_2)(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})+(a_3b_1+a_1b_3)(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_1}):$$

Այսպիսով՝ կամայական $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հաշվելու համար անհրաժեշտ է և բավարար ունենալ $(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_j})$; $i,j=1,2,3$ արժեքները:

Մասնավոր դեպքում, երբ տարածության $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$ բազիսը ***օրթոնորմավորված բազիս*** է, այսինքն՝ $|\overrightarrow{e_1}|=|\overrightarrow{e_2}|=|\overrightarrow{e_3}|=1$, $\overrightarrow{e_1}\perp\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1}\perp\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_2}\perp\overrightarrow{e_3}$, կամ որ նույնն է՝ $(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_j})=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$, ապա ստանում ենք՝

ա) $(\vec{a},\vec{b})=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$,

բ) $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}$,

գ) $\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}\sqrt{b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+b_3^{\ 2}}}$,

դ) $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3=0$:

§ 8. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ

Վեկտորների վեկտորական բազմապատկումը գործողություն է, որը սահմանվում է տարածությանը կից V գծային բազմաձևությունում:

Նախ սահմանենք վեկտորների աջ եռյակ, ձախ եռյակ հասկացությունները:

Սահմանում: Տարածության մի կետից կիրառված ոչ համահարթ վեկտորների $\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}, \vec{c}=\overrightarrow{OC}$ կարգավորված եռյակը կոչվում է ***աջ եռյակ***, եթե $\vec{c}$ վեկտորի ծայրակետում գտնվող դիտորդը O, A, B կետերով անցնող հարթության մեջ $\overrightarrow{OA}$ վեկտորի կարճագույն պտույտը O կետի շուրջ մինչև $\overrightarrow{OB}$ -ին համուղղված դառնալը տեսնում է ժամսլաքի պտույտին հակառակ ուղղությամբ: Հակառակ դեպքում, երբ $\overrightarrow{OA}$ -ից դեպի $\overrightarrow{OB}$ կարճագույն պտույտի ուղղությունը համընկնում է ժամսլաքի պտույտի ուղղության հետ, եռյակը կոչվում է ***ձախ եռյակ***:

Սահմանումից ակնհայտ հետևում է.

Հատկություն 1. Եթե $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ եռյակն աջ եռյակ է, ապա $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ և $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ եռյակները ևս աջ եռյակ են, իսկ $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$; $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$; $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$; ինչպես նաև $-\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; $\vec{a}, -\vec{b}, \vec{c}$ և $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$ եռյակները ձախ եռյակներ են:

Հատկություն 2. Եթե $\vec{c_1}$ և $\vec{c_2}$ վեկտորների ծայրակետերը գտնվում են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով անցնող հարթության նկատմամբ միևնույն կիսատարածությունում, ապա $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_1}$ և $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_2}$ եռյակները միաժամանակ կամ երկուսն էլ աջ, կամ երկուսն էլ ձախ եռյակներ են:

Եթե $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ եռյակը աջ (ձախ) եռյակ է, նաև ասում են, որ այն ունի *դրական (բացասական) կողմնորոշում*:

Սահմանում: Տարածության կամայական ոչ համագիծ, կարգավորված երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների ***վեկտորական արտադրյալ*** կոչվում է այն $\vec{c}$ վեկտորը, որն ուղղահայաց է այդ վեկտորներից յուրաքանչյուրին, ուղղված է այնպես, որ վեկտորների $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ կարգավորված եռյակը աջ եռյակ է, իսկ նրա երկարությունը հավասար է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների երկարությունների և նրանց կազմած անկյան սինուսի արտադրյալին:

Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ապա նրանց վեկտորական արտադրյալ սահմանվում է զրոյական վեկտորը:

Երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը նշանակում են $[\vec{a},\vec{b}]$-ով կամ $\vec{a}\times\vec{b}$-ով:

Այսպիսով՝ եթե $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$, ապա $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{a}$, $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{b}$: Բացի դրանից՝ $(\vec{a}; \vec{b}; [\vec{a},\vec{b}])$ կարգավորված եռյակը աջ եռյակ է և $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$: Իսկ եթե $\vec{a}\parallel\vec{b}$, ապա $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}$:

Դիցուք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ոչ համագիծ վեկտորները կիրառված են մի կետից: Նրանցով որոշվում է զուգահեռագիծ, որի մակերեսը կնշանակենք $S(\vec{a},\vec{b})$-ով:

Պարզ է, որ $S(\vec{a},\vec{b})=S(\vec{b},\vec{a})$ և $S(k\vec{a},\vec{b})=|k|\cdot S(\vec{a},\vec{b})$:

Նկատենք, որ երկու ոչ համագիծ վեկտորների վեկտորական արտադրյալի երկարությունը թվապես հավասար է նրանցով որոշված զուգահեռագծի մակերեսին՝

$$\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = S(\vec{a},\vec{b}):$$

ԹԵՈՐԵՄ: Վեկտորների վեկտորական բազմապատկումը, որպես $V\times V\to V$ երկտեղ գործողություն, օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1) $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$, 2) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$,

3) $[k\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},k\vec{b}]=k[\vec{a},\vec{b}]$, 4) $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|^2=(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})-(\vec{a},\vec{b})^2$:

Ապացուցում: Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ապա ըստ սահմանման՝ ունենք $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0},\ [\vec{b},\vec{a}]=\vec{0}$: Հետևաբար այս դեպքում 1-ը ճիշտ է: Մյուս՝ $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ դեպքում 1-ը ապացուցելու համար ցույց տանք, որ այդ հավասարության աջ և ձախ մասերում գրված վեկտորները համուղղված են և ունեն նույն երկարությունը:

Կիրառելով $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները մի կետից՝ կստանանք, որ $[\vec{a},\vec{b}]$-ն և $-[\vec{b},\vec{a}]$-ն ուղղահայաց են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով որոշված հարթությանը և հետևաբար համագիծ են՝ $-[\vec{b},\vec{a}]\ ||\ [\vec{a},\vec{b}]$: Ցույց տանք, որ նրանք նաև համուղղված են:

$(\vec{a};\vec{b};[\vec{a},\vec{b}])$-ն և $(\vec{b};\vec{a};[\vec{b},\vec{a}])$-ն աջ եռյակներ են, որից հետևում է, որ $(\vec{b};\vec{a};[\vec{a},\vec{b}])$-ն և $(\vec{b};\vec{a};-[\vec{b},\vec{a}])$-ն կլինեն ձախ եռյակներ: Հետևաբար ստանում ենք $-[\vec{b},\vec{a}]\uparrow\uparrow[\vec{a},\vec{b}]$:

Մյուս կողմից ունենք

$$\left|-[\vec{b},\vec{a}]\right|=\left|[\vec{b},\vec{a}]\right|=S(\vec{b},\vec{a})=S(\vec{a},\vec{b})=\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|:$$

Համադրելով այս հետևությունները՝ կստանանք $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$:

2-ը նպատակահարմար է ապացուցել ավելի ուշ՝ § 9-ում:

3) Երբ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն կամայական են, իսկ $k=0$, կամ էլ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, իսկ k-ն կամայական թիվ է, ապա ըստ սահմանման՝ ստանում ենք $\vec{0}=\vec{0}$:

Դիցուք այժմ $k>0$ և $\vec{a}\nparallel\vec{b}$: Ուրեմն՝ $k\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, ինչպես նաև $k[\vec{a},\vec{b}]\uparrow\uparrow[\vec{a},\vec{b}]$: $(\vec{a};\vec{b};[\vec{a},\vec{b}])$-ն և $(\overrightarrow{ka};\vec{b};[\overrightarrow{ka},\vec{b}])$-ն աջ եռյակներ են, որից հետևում է, որ $(\vec{a};\vec{b};k[\vec{a},\vec{b}])$-ն և $(\vec{a};\vec{b};[\overrightarrow{ka},\vec{b}])$-ն ևս աջ եռյակներ են: Այստեղից, քանի որ $[k\vec{a},\vec{b}]$-ն և $k[\vec{a},\vec{b}]$-ն ուղղահայաց են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով որոշված հարթությանը, հետնում է, որ նրանք, լինելով համագիծ, նաև համուղղված են՝ $[\overrightarrow{ka},\vec{b}]\uparrow\uparrow k[\vec{a},\vec{b}]$:

Մյուս կողմից՝ $|[\overrightarrow{ka},\vec{b}]| = S(\overrightarrow{ka},\vec{b}) = kS(\vec{a},\vec{b}) = k|[\vec{a},\vec{b}]| = |k[\vec{a},\vec{b}]|$: Հետևաբար՝ $k[\vec{a},\vec{b}]=[k\vec{a},\vec{b}]$: Նման ձևով ստանում ենք $k[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},k\vec{b}]$:

Մյուս՝ $k<0$ և $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ դեպքում, օգտվելով $k=-|k|$ հավասարությունից և 1) հատկությունից, կարող ենք գրել

$$[\overrightarrow{ka},\vec{b}]=[-|k|\vec{a},\vec{b}]=-[|k|\vec{a},\vec{b}]=-|k|[\vec{a},\vec{b}]=k[\vec{a},\vec{b}]:$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք արդեն ապացուցված նախորդ դեպքից և $[-\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{a},\vec{b}]$ հավասարությունից, որն առաջարկում ենք ապացուցել ընթերցողին՝ որպես օգտակար, ոչ դժվար խնդիր:

3) Ունենք

$$|[\vec{a},\vec{b}]|^2=\left(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\right)^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=$$

$$=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot(1-\cos^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}}))=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cos^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=$$

$$=(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})-(\vec{a},\vec{b})^2:\square$$

Ապացուցված 1)-4) հատկությունները վեկտորական բազմապատկման հիմնական հատկություններ են հետևյալ իմաստով: Կարելի է ցույց տալ, որ տարածության ընտրված կողմնորոշման նկատմամբ գոյություն ունի միայն մի $V\times V\to V$ արտապատկերում, որը բավարարում է 1-4 հատկություններին:

Խնդիր: Ապացուցել, որ տարածության կամայական $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորների համար.

ա) $\vec{b},\vec{c}$ և $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$ վեկտորները համահարթ են,

բ) տեղի ունի $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})$ հավասարություն («բաց մինուս ցաբ» բանաձև):

§ 9. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԽԱՌԸ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ

Սահմանում: Տարածության կամայական երեք $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ կարգավորված վեկտորների ***խառը արտադրյալ*** կոչվում է $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$ թիվը:

Վեկտորների խառը արտադրյալը նշանակում են $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$-ով կամ $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ -ով, և սահմանումից ունենք $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$:

Դիցուք $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները կիրառված են մի կետից:

ԹԵՈՐԵՄ 1 (*վեկտորների խառը արտադրյալի երկրաչափական մեկնաբանումը*): Եթե $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են, ապա $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ խառը արտադրյալը հավասար է 0-ի: Եթե $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները համահարթ չեն, ապա $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ խառը արտադրյալը հավասար է նրանցով որոշված զուգահեռանիստի $V(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ ծավալին՝ վերցված դրական նշանով, երբ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ կարգավորված եռյակը աջ եռյակ է, և վերցված բացասական նշանով, երբ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ կարգավորված եռյակը ձախ եռյակ է:

Ապացույց: Դիցուք $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են: Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ապա $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}$, հետևաբար սահմանումից ստանում ենք

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=(\vec{0},\vec{c})=0:$$

Երբ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ չեն, ապա $[\vec{a},\vec{b}]$-ն, ուղղահայաց լինելով $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներն ընդգրկող հարթությանը, կլինի ուղղահայաց նաև $\vec{c}$ վեկտորին, հետևաբար՝

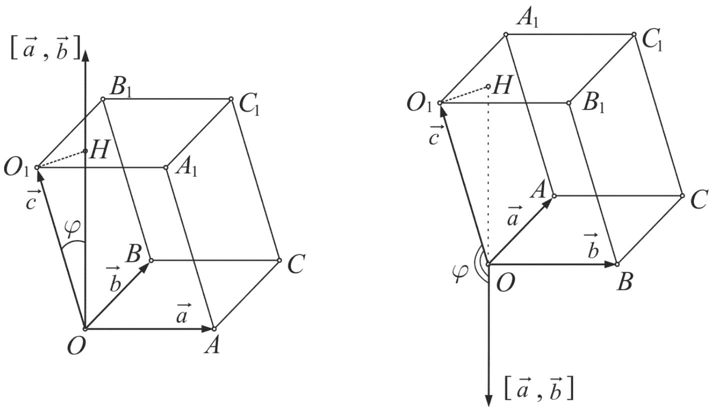
$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=0:$$

Դիցուք $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները համահարթ չեն: Այս դեպքում $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ վեկտորը համագիծ չէ $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ և $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ վեկտորներն ընդգրկող AOB հարթությանը: Հետևաբար՝ $[\vec{a},\vec{b}]\not\perp\vec{c}$ և

$\varphi = ([\vec{a},\vec{b}],\widehat{\ \vec{c}})$ անկյունը կամ սուր է, կամ բութ: Այնպես որ՝

$$|\vec{c}|\cdot\cos\varphi = \begin{cases} OH, & \text{երբ } \varphi < \dfrac{\pi}{2} \\ -OH, & \text{երբ } \varphi > \dfrac{\pi}{2} \end{cases},$$

որտեղ OH-ը $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորներով որոշված $OABCAO_1A_1B_1C_1$ զուգահեռանիստի բարձրությունն է (տե՛ս նկար 13-ը):



Նկար 13

Երկու դեպքում էլ՝ $|\vec{c}|\cdot|\cos\varphi| = OH$: Օգտվելով այս փաստից՝ կարող ենք գրել

$$|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = |([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})| = \left|\,|[\vec{a},\vec{b}]|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos([\vec{a},\vec{b}],\widehat{\ \vec{c}})\right| =$$
$$= |[\vec{a},\vec{b}]|\cdot|\vec{c}|\cdot|\cos\varphi| = S(\vec{a},\vec{b})\cdot OH = V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}):$$

$$\text{Հետևաբար՝ } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{cases} V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}), & \text{երբ } \varphi < \dfrac{\pi}{2} \\ -V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}), & \text{երբ } \varphi > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}:$$

Այժմ նկատենք, որ $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$ դեպքում O կետից կիրառված $[\vec{a},\vec{b}]$ և $\vec{c}$ վեկտորները գտնվում են զուգահեռանիստի $OACB$ հիմքի հարթության նկատմամբ միևնույն կիսատարածությունում, իսկ $\varphi > \dfrac{\pi}{2}$ դեպքում նրանք գտնվում են տարբեր կիսատարածություններում: Քանի որ $\vec{a},\vec{b},[\vec{a},\vec{b}]$ եռյակն աջ եռյակ է, ապա առաջին դեպքում $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ եռյակը նույնպես կլինի աջ եռյակ, իսկ երկրորդ դեպքում արդեն այն կլինի ձախ եռյակ: Հետևաբար՝

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{cases} V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}), \text{ երբ } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ եռյակն աջ եռյակ է,} \\ -V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}), \text{ երբ } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ եռյակը ձախ եռյակ է} \end{cases} :\square$$

Հետևություն: Երեք՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորներ համահարթ են այն և միայն այն դեպքում, երբ $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$:

ԹԵՈՐԵՄ 2: Վեկտորների խառը բազմապատկումը, որպես եռատեղ $V \times V \times V \to R$ գործողություն, օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b})$

$= -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a})$,

2) $(k\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = (\vec{a},k\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{kc}) = k \cdot (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$,

3) $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c}) = (\overrightarrow{a_1},\vec{b},\vec{c}) + (\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c})$,

$(\vec{a},\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2},\vec{c}) = (\vec{a},\overrightarrow{b_1},\vec{c}) + (\vec{a},\overrightarrow{b_2},\vec{c})$,

$(\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{c_1} + \overrightarrow{c_2}) = (\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{c_1}) + (\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{c_2})$,

կամայական $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորների և կամայական k թվի համար:

Ապացույց:

1-ը անմիջապես ստացվում է վեկտորների աջ և ձախ եռյակների § 8-ի հատկություն 1-ից և նախորդ թեորեմից:

2. Օգտվելով սկալյար բազմապատկման և վեկտորական բազմապատկման հատկություններից՝ կարող ենք գրել

$$k\cdot(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=k\cdot([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=(k\cdot[\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=([k\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=(\overrightarrow{ka},\vec{b},\vec{c}):$$

3) Օգտվելով 1-ից և սկալյար բազմապատկման բաշխական հատկությունից՝ ունենք

$$(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})=([\vec{b},\vec{c}],\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})=$$
$$=([\vec{b},\vec{c}],\overrightarrow{a_1})+([\vec{b},\vec{c}],\overrightarrow{a_2})=(\vec{b},\vec{c},\overrightarrow{a_1})+(\vec{b},\vec{c},\overrightarrow{a_2})=(\overrightarrow{a_1},\vec{b},\vec{c})+(\overrightarrow{a_2}\vec{b},\vec{c}):$$

Մյուս երկու հավասարությունների ապացուցումը թողնում ենք ընթերցողին՝ որպես օգտակար վարժություն:□

Այժմ անդրադառնանք § 8-ում ձևակերպված վեկտորական բազմապատկման բաշխական հատկության ապացույցին:

Նշանակենք $\vec{m}=[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]-[\vec{a},\vec{c}]-[\vec{b},\vec{c}]$ և ցույց տանք, որ $\vec{m}=\vec{0}$: Օգտվելով սկալյար բազմապատկման բաշխական հատկությունից և թեորեմ 2-ից՝ ստանում ենք

$$|\vec{m}|^2=(\vec{m},\vec{m})=([\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]-[\vec{a},\vec{c}]-[\vec{b},\vec{c}],\vec{m})=([\vec{a}+\vec{b},\vec{c}],\vec{m})-$$
$$-([\vec{a},\vec{c}],\vec{m})-([\vec{b},\vec{c}],\vec{m})=(\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{m})-(\vec{a},\vec{c},\vec{m})-(\vec{b},\vec{c},\vec{m})=$$
$$=(\vec{a},\vec{c},\vec{m})+(\vec{b},\vec{c},\vec{m})-(\vec{a},\vec{c},\vec{m})-(\vec{b},\vec{c},\vec{m})=0:$$

Այստեղից էլ՝ $\vec{m}=\vec{0}$, կամ որ նույնն է՝ $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$:

Այժմ վեկտորական և խառը արտադրյալների համար արտածենք հաշվման բանաձևեր կորդինատային տեսքով:

ԹԵՈՐԵՄ 3: Եթե տարածության կից V գծային բազմաձևության $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$ բազիսը օրթոնորմավորված աջ բազիս է, այսինքն՝ $|\overrightarrow{e_1}|=|\overrightarrow{e_2}|=|\overrightarrow{e_3}|=1$, $\overrightarrow{e_1}\perp\overrightarrow{e_2}$, $[\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}]=\overrightarrow{e_3}$, ապա կամայական $\vec{a}=\{a_1;\,a_2;\,a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1;\,b_2;\,b_3\}$, $\vec{c}=\{c_1;\,c_2;\,c_3\}$ վեկտորների համար

$$[\vec{a},\vec{b}]=\{a_2b_3-a_3b_2\,;\,a_3b_1-a_1b_3;\,a_1b_2-a_2b_1\},$$
$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2:$$

Ապացուցում: Քանի որ $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$-ը աջ եռյակ է, ապա $\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_1}$ և $\vec{e_3},\vec{e_1},\vec{e_2}$ եռյակները նույնպես աջ եռյակներ են: Հետևաբար՝ $[\vec{e_2},\vec{e_3}]=\vec{e_1}$, $[\vec{e_3},\vec{e_1}]=\vec{e_2}$:

Օգտվելով վեկտորական բազմապատկման հատկություններից և կատարելով ձևափոխություններ՝ ստանում ենք

$$[\vec{a},\vec{b}]=[a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3},b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+b_3\vec{e_3}]=[a_1\vec{e_1},b_1\vec{e_1}]+$$
$$+[a_1\vec{e_1},b_2\vec{e_2}]+[a_1\vec{e_1},b_3\vec{e_3}]+[a_2\vec{e_2},b_1\vec{e_1}]+[a_2\vec{e_2},b_2\vec{e_2}]+[a_2\vec{e_2},b_3\vec{e_3}]+$$
$$+[a_3\vec{e_3},b_1\vec{e_1}]+[a_3\vec{e_3},b_2\vec{e_2}]+[a_3\vec{e_3},b_3\vec{e_3}]=a_1b_2[\vec{e_1},\vec{e_2}]-a_1b_3[\vec{e_3},\vec{e_1}]-$$
$$-a_2b_1[\vec{e_1},\vec{e_2}]+a_2b_3[\vec{e_2},\vec{e_3}]+a_3b_1[\vec{e_3},\vec{e_1}]-a_3b_2[\vec{e_2},\vec{e_3}]=$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)[\vec{e_1},\vec{e_2}]+(a_2b_3-a_3b_2)[\vec{e_2},\vec{e_3}]+(a_3b_1-a_1b_3)[\vec{e_3},\vec{e_1}]=:$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)\vec{e_3}+(a_2b_3-a_3b_2)\vec{e_1}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{e_2}:$$

Այսինքն՝

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left\{a_2b_3-a_3b_2\,;\ a_3b_1-a_1b_3;\ a_1b_2-a_2b_1\right\}:$$

Իսկ խառը արտադրյալի համար ստանում ենք

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3=$$
$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2:\square$$

Օգտվելով 2-րդ և 3-րդ կարգի որոշիչներից՝ $[\vec{a},\vec{b}]$-ի և $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$-ի կոորդինատային արտահայտությունները կարելի է ներկայացնել նաև

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right\} \text{ և } (\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

տեսքերով:

<u>Հետևություն</u>: $\vec{a}=\{a_1;\,a_2;\,a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1;\,b_2;\,b_3\}$, $\vec{c}=\{c_1;\,c_2;\,c_3\}$, վեկտորները համահարթ են այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 :$$

Այս բանաձևերն ունեն կիրառություններ երկրաչափական պատկերների մակերեսները և երկրաչափական մարմինների ծավալները հաշվելիս: Մասնավորապես $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով որոշված զուգահեռագծի մակերեսի համար ստանում ենք

$$S(\vec{a},\vec{b}) = |[\vec{a},\vec{b}]| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2} :$$

Իսկ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորներով որոշված զուգահեռանիստի $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ծավալի համար ունենք

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right| :$$

Խնդիր: Դիցուք $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ -ն տարածության ինչ-որ վեկտորներ են:

ա) Օգտվելով «բաց մինուս ցաբ» բանաձևից՝ ապացուցել

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{d} - (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})\vec{a} + (\vec{c}, \vec{d}, \vec{a})\vec{b} - (\vec{d}, \vec{a}, \vec{b})\vec{c} = 0$$

հավասարությունը:

բ) Օգտվելով այդ հավասարությունից՝ ապացուցել, որ կամայական $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ վեկտորներով կազմված համակարգը միշտ գծորեն կախյալ համակարգ է:

գ) Ապացուցել, որ եթե $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ վեկտորներից ոչ մի երեքը համահարթ չեն, ապա բազմապատկչի ճշտությամբ վերը բերված հավասարությունը նրանց միջև միակ գծային հարաբերակցությունն է:

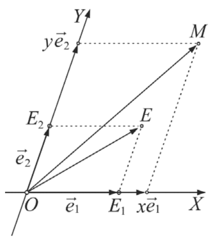
ԳԼՈՒԽ ԵՐԿՐՈՐԴ
ԿՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

§ 10. ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԱՖԻՆԱԿԱՆ ԿՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ: ՀԱՏՎԱԾԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ ՏՐՎԱԾ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅԱՄԲ

Վերլուծական երկրաչափությունը, որպես երկրաչափության բաժին, առաջացել է 17-րդ դարում, երբ Ռ. Դեկարտը 1637 թվին հրատարակված իր «Երկրաչափություն» գրքում ներմուծեց կորդինատային համակարգ հասկացությունը:

Կասենք, որ հարթության վրա տրված է $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ ***աֆինական կորդինատային համակարգ***, եթե սևեռած են որևէ O կետ (***սկզբնակետ***) և այդ կետից կիրառված որևէ երկու ոչ համագիծ $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$ վեկտորների կարգավորված զույգ (հարթության կից գծային բազմաձևության ***բազիս***):

Սկզբնակետով և համապատասխանաբար $\overrightarrow{e_1}$ և $\overrightarrow{e_2}$ վեկտորներով անցնող ուղիղները կոչվում են OX կամ ***աբսցիսների*** և OY կամ ***օրդինատների առանցքներ:*** Եթե M-ը հարթության կամայական կետ է, ապա նրա $\overrightarrow{OM}$ շառավիղ վեկտորի կորդինատները $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ բազիսի նկատմամբ, այսինքն՝ $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ վերլուծության x և y գործակիցները, կոչվում են M ***կետի կորդինատներ*** (համապատասխանաբար ***աբսցիս*** և ***օրդինատ***) տվյալ աֆինական կորդինատային համակարգի նկատմամբ:



Նկար 14

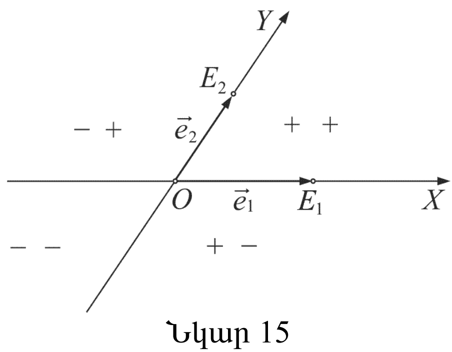
Կետի կոորդինատները նշանակվում են $M(x;\ y)$-ով կամ $M=(x;\ y)$-ով: Օրինակ՝ O սկզբնակետի համար $\overrightarrow{OO}=0\cdot\overrightarrow{e_1}+$ $+0\cdot\overrightarrow{e_2}$, այսինքն՝ $O=(0;\ 0)$: Իսկ $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$ շառավիղ վեկտորի E ծայրակետի կոորդինատներն են՝ $E=(1;\ 1)$: Այդ կետը ընդունված է անվանել տվյալ կոորդինատային համակարգի ***միավոր կետ*** (տե՛ս նկար 14-ը):

Հարթության կետերի կոորդինատները և վեկտորի կոորդինատները միմյանց հետ կապված են հետևյալ բանաձևով՝ եթե $M_1=(x_1;\ y_1)$ և $M_2=(x_2;\ y_2)$, ապա

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1\}:$$

Իրոք $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2})-(x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2})=$ $=(x_2-x_1)\overrightarrow{e_1}+(y_2-y_1)\overrightarrow{e_2}$, որտեղից $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1\}$:

Կոորդինատային OX և OY առանցքները հարթությունը տրոհում են չորս տիրույթի, որոնց անվանում են ***քառորդներ:*** Այդ քառորդներից ***առաջին քառորդն*** այն է, որում ընկած կետերի երկու կոորդինատներն էլ դրական են: ***Երկրորդ քառորդում*** ընկած կետերի աբսցիսները բացասական են, իսկ օրդինատները՝ դրական: ***Երրորդ քառորդում*** ընկած կետերի երկու կոորդինատներն էլ բացասական են: ***Չորրորդ քառորդում*** ընկած կետերի աբսցիսները դրական են, իսկ օրդինատները՝ բացասական (տե՛ս նկար 15-ը):



Նկար 15

Տարածության $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ ***աֆինական կորդինատային համակարգը*** կազմված է O կետից (***սկզբնակետից***) և այդ կետից կիրառված երեք ոչ համահարթ $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ վեկտորների կարգավորված եռյակից (այսինքն՝ տարածությանը կից գծային բազմաձևության ***բազիսից***)։ Սկզբնակետով և համապատասխանաբար $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ և $\overrightarrow{e_3}$ վեկտորներով անցնող ուղիղները կոչվում են OX, OY և OZ ***կորդինատային առանցքներ***, իսկ OX և OY, OY և OZ, OX և OZ առանցքներով անցնող հարթությունները՝ համապատասխանաբար OXY, OYZ, OXZ ***կորդինատային հարթություններ***։ Ինչպես և հարթության դեպքում, կամայական M կետի $\overrightarrow{OM}$ շառավիղ վեկտորի կորդինատները, այսինքն՝ $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ վերլուծության x, y և z գործակիցները, կոչվում են M կետի կորդինատներ (համապատասխանաբար ***աբսցիս***, ***օրդինատ*** և ***ապլիկատ***) տվյալ կորդինատային համակարգի նկատմամբ։

Տարածության կետերի կորդինատները և վեկտորի կորդինատները միմյանց հետ կապված են հետևյալ բանաձևով՝ եթե $M_1 = (x_1; y_1; z_1)$ և $M_2 = (x_2; y_2; z_2)$, ապա

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}:$$

Կորդինատային OXY, OYZ և OXZ հարթությունները տարածությունը տրոհում են ութ տիրույթի, որոնց անվանում են ***օկտանտներ:*** Այդ օկտանտները բնութագրվում են իրենց կետերի կորդինատների նշաններով, առաջին օկտանտում՝ $(+; +; +)$, երկրորդ օկտանտում՝ $(-; +; +)$, երրորդ օկտանտում՝ $(-; -; +)$, չորրորդ օկտանտում՝ $(+; -; +)$, հինգերորդ օկտանտում՝ $(+; +; -)$, վեցերորդ օկտանտում՝ $(-; +; -)$, յոթերորդ օկտանտում՝ $(-; -; -)$, ութերորդ օկտանտում՝ $(+; -; -)$:

Երկրաչափության մեջ կորդինատային մեթոդը կայանում է հետևյալում. կետերը փոխարինվում են իրենց կորդինատներով մի թվով ուղղի կետերի դեպքում, կարգավորված թվազույգով հարթության կետերի դեպքում և թվերի կարգավորված եռյակով տարածության կետերի դեպքում: Գծերն ու մակերևույթները փոխարինվում են հավասարումներով կամ հավասարումների համակարգերով, որոնցում որպես փոփոխականներ հանդես են գալիս տվյալ երկրաչափական պատկերը կազմող կետերը: Այնուհետև տվյալ պատկերի երկրաչափական հատկությունները դուրս են բերվում՝ ուսումնասիրելով համապատասխան հավասարումն ու հավասարումների համակարգերը հանրահաշվական կամ վերլուծական միջոցներով: Որպես այդ մեթոդի ցուցադրում՝ սկզբի համար դիտարկենք մի պարզ, բայց կարևոր խնդիր՝ հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ:

Դիտարկենք որևէ A, B, C կետեր $(A \neq B)$ սևեռած ուղղի կամ հարթության վրա և կամ էլ տարածության մեջ:

Սահմանում: Կասենք, որ C կետը AB հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ, եթե $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$:

Նկատելով, որ $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB}$ հավասարությունը հնարավոր չէ, այսուհետև համարելու ենք, որ $\lambda \neq -1$:

Դիցուք հարթության որևէ $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ աֆինական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$: Մեր խնդիրն է գտնել C կետի $(x; y)$ կոորդինատները այդ նույն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ:

Նախ գտնենք A, B և C կետերի շառավիղ վեկտորների կապը: Ունենք

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB} \end{cases}:$$

Այստեղից՝ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB} =$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}:$$

Այսպիսով՝ $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA} + \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}$:

Քանի որ $\overrightarrow{OA} = \{x_1;\ y_1\}$, $\overrightarrow{OB} = \{x_2;\ y_2\}$, ապա

$$\overrightarrow{OC} = \left\{\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\right\},$$

որտեղից էլ՝ $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$:

Նույն կերպ, եթե տարածության $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ աֆինական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ $A = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B = (x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C = (x;\ y;\ z)$,

ապա $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$:

Այստեղից մասնավորապես վերցնելով $\lambda = 1$՝ ստանում ենք AB հատվածի միջնակետի կոորդինատները՝

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2};\ \frac{y_1 + y_2}{2};\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right):$$

Ուղղի վրա դիտարկվող $(O; \vec{e}\,)$ աֆինական կոորդինատային համակարգի դեպքը թողնում ենք ընթերցողին:

§ 11. ԱՖԻՆԱԿԱՆ ԿՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

Երբեմն որոշ երկրաչափական հասկացությունների ներմուծումը կատարվում է նախապես ընտրված կորդինատային համակարգի միջոցով: Քանի որ երկրաչափական հասկացությունը իրականում կախված չէ ո՛չ դիտարկվող կորդինատային համակարգից, ո՛չ էլ նրա ընտրությունից, ապա անհրաժեշտություն է առաջանում ապացուցել այդ անկախությունը կամ, ինչպես ընդունված է ասել, ստուգել *<u>սահմանման կոռեկտությունը</u>*: Դա կատարվում է կորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերի միջոցով, որոնք կապ են հաստատում նույն կետի երկու տարբեր կորդինատային համակարգերում ունեցած կորդինատների միջև: Արտածենք այդ բանաձևերը:

Դիցուք $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$-ը և $(O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'})$-ը հարթության երկու աֆինական կորդինատային համակարգեր են, ընդ որում՝ հայտնի է դրանցից երկրորդի դիրքն առաջինի նկատմամբ:

Ենթադրենք՝ $O' = (c_1; c_2)$, $\vec{e_1'} = \{c_{11}; c_{21}\}$, $\vec{e_2'} = \{c_{12}; c_{22}\}$, կամ որ նույնն է՝

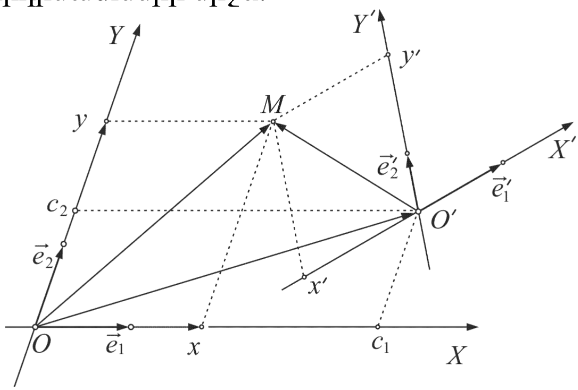
$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2}\,,\ \vec{e_1'} = c_{11}\vec{e_1} + c_{21}\vec{e_2}\,;\ \vec{e_2'} = c_{12}\vec{e_1} + c_{22}\vec{e_2}\,:$$

Բազիսային՝ $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}$ վեկտորների կորդինատներից կազմված $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$ մատրիցն անվանում են $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ բազիսից $(\vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ բազիսին անցման մատրից:

Քանի որ $\vec{e_1'} \nparallel \vec{e_2'}$, ապա $c_{11} : c_{12} \neq c_{21} : c_{22}$ հետևաբար՝ $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$: Այս վերջին պայմանին բավարարող C մատրիցը կոչվում է չվերասերված մատրից:

Դիցուք հարթության M կետն ունի $(x;\ y)$, (անվանենք M-ի հին) և $(x';\ y')$ (անվանենք M-ի նոր) կորդինատներ համապատասխանաբար $(O;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ և $(O';\ \overrightarrow{e_1'},\ \overrightarrow{e_2'})$ աֆինական կորդինատային համակարգերի նկատմամբ:

Ունենք $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ և $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{e_1'} + y'\overrightarrow{e_2'}$ (տե՛ս նկար 16-ը): Մեր նպատակն է գտնել կապը կամայական կետի հին և նոր կորդինատների միջև:



Նկար 16

Ունենք նաև

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = (c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2}) + (x'\overrightarrow{e_1'} + y'\overrightarrow{e_2'}) = c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2} +$$

$$+ x'(c_{11}\overrightarrow{e_1} + c_{21}\overrightarrow{e_2}) + y'(c_{12}\overrightarrow{e_1} + c_{22}\overrightarrow{e_2}) = (c_1 + x'c_{11} + y'c_{12})\overrightarrow{e_1} +$$

$$+(c_2 + x'c_{21} + y'c_{22})\overrightarrow{e_2}:$$

Քանի որ տվյալ բազիսի նկատմամբ վեկտորի կորդինատները միակն են, ապա այստեղից ստանում ենք, որ նշված աֆինական կորդինատային համակարգերի նկատմամբ հարթության կամայական M կետի $(x;\ y)$ և $(x';\ y')$ կորդինատները միմյանց հետ կապված են

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2 \end{cases} \qquad (2)$$

բանաձևերով, որոնք անվանում են ***կորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևեր***:

Հետևյալ՝ $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \end{pmatrix}$ մատրիցն անվանում են $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ ***աֆինական կորդինատային համակարգից*** $(O'; \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'})$ ***աֆինական կորդինատային համակարգին անցման մատրից:***

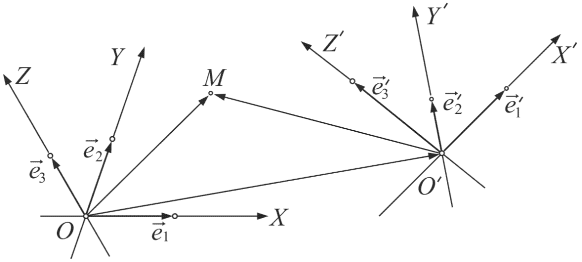
Դիտողություն: Դիցուք հարթության վրա ունենք երեք (աֆինական) կորդինատային համակարգեր՝ $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, $(O'; \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'},)$ և $(O''; \overrightarrow{e_1''}, \overrightarrow{e_2''})$: Դիտարկենք մի կորդինատային համակարգից մյուսին երեք անցումներ՝ առաջինից երկրորդ, երկրորդից երրորդ և առաջինից երրորդ: Դիցուք այդ անցումներին համապատասխանող կորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերն են համապատասխանաբար

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2 \end{cases} \quad \text{(I)}, \qquad \begin{cases} x' = d_{11}x'' + d_{12}y'' + d_1 \\ y' = d_{21}x'' + d_{22}y'' + d_2 \end{cases} \quad \text{(II)} \quad \text{և}$$

$$\begin{cases} x = b_{11}x''' + b_{12}y''' + b_1 \\ y = b_{21}x''' + b_{22}y''' + b_2 \end{cases}$$

(III): Եթե (I) բանաձևերում x'-ի և y'-ի փոխարեն տեղադրենք նրանց արտահայտությունները (II) բանաձևերից և կատարենք նման անդամների միացում, ապա կստանանք անցում առաջինից երրորդ: Ընթերցողին առաջարկում ենք պարզել՝ ինչպե՞ս են միմյանց հետ կապված $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix}$ և $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$ մատրիցները:

Դիցուք $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$-ը և $(O'; \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'})$-ը տարածության երկու աֆինական կորդինատային համակարգեր են, և հայտնի է (տե՛ս նկար 17-ը) նոր՝ $(O'; \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'})$ համակարգի դիրքը հին՝



Նկար 17

$(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ համակարգի նկատմամբ՝ $O' = (c_1; c_2; c_3)$, $\vec{e_1'} = \{c_{11}; c_{21}; c_{31}\}$, $\vec{e_2'} = \{c_{12}; c_{22}; c_{32}\}$, $\vec{e_3'} = \{c_{13}; c_{23}; c_{33}\}$:

Բազիսային $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}$ վեկտորների կոորդինատներից կազմված $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{33} & c_{33} \end{pmatrix}$ մատրիցը կոչվում է հին բազիսից նոր բազիսին անցման մատրից: Համաձայն § 9-ի թեորեմ 3-ի հետևության՝ այն չվերասերված մատրից է՝ $|C| \neq 0$:

Տարածության կամայական M կետի $(x; y; z)$ և $(x'; y'; z')$ կոորդինատներն այդ համակարգերի նկատմամբ, մեկը մյուսով արտահայտվում են (2) բանաձևերին նման՝

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + c_1 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + c_2 \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + c_3 \end{cases} \quad (3)$$

բանաձևերով, որոնք անվանում են ***տարածության*** $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ և $(O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'})$ ***աֆինական կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևեր***:

Հետևյալ՝ $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_3 \end{pmatrix}$ մատրիցն անվանում են $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ ***աֆինական կոորդինատային համակարգից*** $(O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'})$ ***աֆինական կոորդինատային համակարգին անցման մատրից:***

Քանի որ (3) բանաձևերի արտածումը կատարվում է (2) բանաձևերի արտածման նմանությամբ և որևէ բարդություն չի պարունակում, ապա այն թողնում ենք ընթերցողին՝ որպես օգտակար վարժություն:

§ 12. ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԿՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

Եթե $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ կոորդինատային համակարգում $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ բազիսն օրթոգոնալ է՝ $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1$ և $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$, ապա այդպիսի համակարգը կոչվում է ***ուղղանկյուն կոորդինատային*** կամ ***դեկարտյան կոորդինատային համակարգ:*** Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $M_1(x_1;\, y_1)$ և $M_2(x_2;\, y_2)$ կետերի միջև հեռավորությունը որոշվում է սկալյար արտադրյալի միջոցով՝

$$M_1M_2 = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_2})} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

բանաձևով:

Տարածության ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $\left(\vec{e_1} \perp \vec{e_2},\quad \vec{e_1} \perp \vec{e_3},\quad \vec{e_2} \perp \vec{e_3},\quad |\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = |\vec{e_3}| = 1\right)$ երկու $M_1 = (x_1;\, y_1;\, z_1)$ և $M_2 = (x_2;\, y_2;\, z_2)$ կետերի միջև հեռավորությունը որոշվում է

$$M_1M_2 = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

բանաձևով:

Ենթադրենք՝ հարթության վրա տրված են երկու՝ $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ և $(O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգեր:

Դիցուք α-ն այն ամենափոքր անկյունն է, որով պետք է պտտել $\vec{e_1}$ վեկտորը ժամսլաքի պտույտի հակառակ ուղղությամբ, մինչև որ այն համընկնի $\vec{e_1'}$-ի հետ: Նկատենք, որ $0^0 \le \alpha < 360^0$:

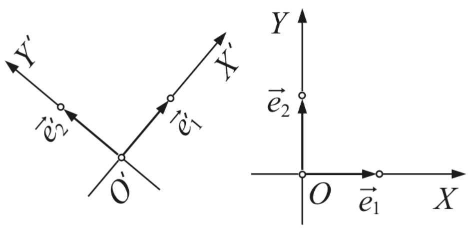
Պարզվում է, որ (2) ձևափոխության (տե՛ս § 10) բոլոր c_{ij} գործակիցները կարող են արտահայտվել մի պարամետրով, այն է՝ α -ով:

Եթե $\overrightarrow{e'_1}=c_{11}\overrightarrow{e_1}+c_{21}\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e'_2}=c_{12}\overrightarrow{e_1}+c_{22}\overrightarrow{e_2}$ հավասարություններից յուրաքանչյուրը հաջորդաբար սկալյարապես բազմապատկենք $\overrightarrow{e_1}$ և $\overrightarrow{e_2}$ վեկտորներով և հաշվի առնենք, որ $|\overrightarrow{e_1}|=|\overrightarrow{e_2}|=1,\ \overrightarrow{e_1}\perp\overrightarrow{e_2},\ |\overrightarrow{e'_1}|=|\overrightarrow{e'_2}|=1,\ \overrightarrow{e'_1}\perp\overrightarrow{e'_2}$, ապա կստանանք

$$c_{ij}=(\vec{e}_i,\vec{e'}_j)=\cos(\widehat{\vec{e}_i,\vec{e'}_j}),\ i,j=1,2:$$

Մեր նպատակն է c_{ij} գործակիցներն արտահայտել α -ի միջոցով, որի համար դիտարկելու ենք երկու դեպք:

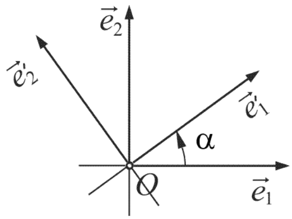
1. Երբ հնարավոր է O կետում կիրառված $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ վեկտորները, զուգահեռ տեղափոխելով O' կետ, այնուհետև պտտել O կետի շուրջ այնպիսի α անկյունով, որ արդյունքում $\overrightarrow{e_1}$ վեկտորը համընկնի $\overrightarrow{e'_1}$ վեկտորի հետ, և միաժամանակ $\overrightarrow{e_2}$ -ը համընկնի $\overrightarrow{e'_2}$ -ի հետ: Այս դեպքում ասում են, որ $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ և $(\overrightarrow{e'_1},\overrightarrow{e'_2})$ բազիսներն ունեն նույն կողմնորոշումը (տե՛ս նկար 18-ը):



Նկար 18

Գտնենք բազիսային վեկտորների կազմած $(\widehat{\vec{e}_i,\vec{e'}_j})$, $i,j=1,2$ անկյունները՝ դիտարկելով չորս ենթադեպք.

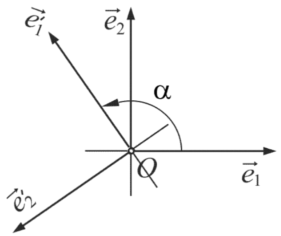
ա) Երբ $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$, ապա ունենք



$$(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}\,'_1})=\alpha\,,\quad (\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}\,'_2})=\frac{\pi}{2}+\alpha\,,$$

$$(\widehat{\vec{e}_2,\vec{e}\,'_1})=\frac{\pi}{2}-\alpha\,,\quad (\widehat{\vec{e}_2,\vec{e}\,'_2})=\alpha\,:$$

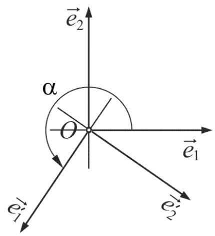
բ) Երբ $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$, ապա ունենք



$$(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}\,'_1})=\alpha\,,\quad (\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}\,'_2})=\frac{3\pi}{2}-\alpha\,,$$

$$(\widehat{\vec{e}_2,\vec{e}\,'_1})=\alpha-\frac{\pi}{2},\quad (\widehat{\vec{e}_2,\vec{e}\,'_2})=\alpha\,:$$

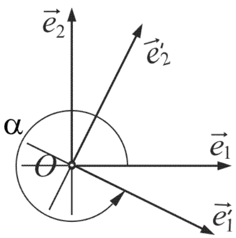
գ) Երբ $\pi\le\alpha\le\frac{3\pi}{2}$, ապա ունենք



$$(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}\,'_1})=2\pi-\alpha\,,\quad (\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}\,'_2})=\frac{3\pi}{2}-\alpha\,,$$

$$(\widehat{\vec{e}_2,\vec{e}\,'_1})=\alpha-\frac{\pi}{2},\quad (\widehat{\vec{e}_2,\vec{e}\,'_2})=2\pi-\alpha\,:$$

դ) Երբ $\frac{3\pi}{2}\le\alpha\le 2\pi$, ապա ունենք



$$(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}\,'_1})=2\pi-\alpha\,,\quad (\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}\,'_2})=\alpha-\frac{3\pi}{2}\,,$$

$$(\widehat{\vec{e}_2,\vec{e}\,'_1})=\frac{5\pi}{2}-\alpha\,,\quad (\widehat{\vec{e}_2,\vec{e}\,'_2})=2\pi-\alpha\,:$$

Բոլոր չորս ենթադեպքերում, c_{ij} գործակիցների համար ստանում ենք միևնույն արտահայտությունները՝

$$c_{11} = \cos(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}'_1}) = \cos\alpha, \quad c_{12} = \cos(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}'_2}) = -\sin\alpha,$$

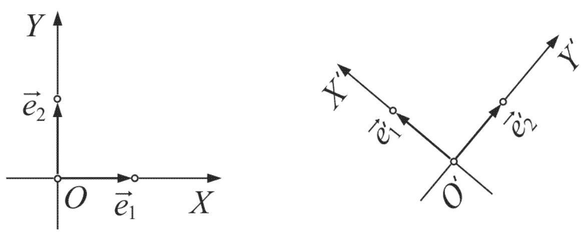
$$c_{21} = \cos(\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}'_1}) = \sin\alpha. \quad c_{22} = \cos(\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}'_2}) = \cos\alpha:$$

Այսպիսով՝ **1-ին** դեպքում (2) բանաձևերն ընդունում են

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + c_1 \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + c_2 \end{cases}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi \quad (4)$$

տեսքը: Այս դեպքում $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ օրթոնորմալ բազիսից $(\vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ օրթոնորմալ բազիսին անցման մատրիցն ունի $C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ տեսքը և $|C| = 1$:

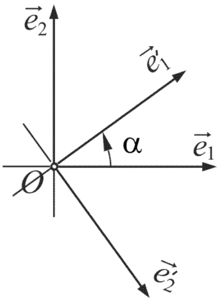
2. Երբ հնարավոր չէ $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ բազիսը, զուգահեռ տեղափոխելով և պտտելով, համընկեցնել $(\vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ բազիսի հետ այնպես, որ $\vec{e_1}$-ը համընկնի $\vec{e_1'}$-ի և $\vec{e_2}$-ը $\vec{e_2'}$-ի հետ: Այս դեպքում ասում են, որ $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ և $(\vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ բազիսներն ունեն տարբեր կողմնորոշումներ (տե՛ս նկար 19-ը):



Նկար 19

Գտնենք բազիսային վեկտորների կազմած անկյունները՝ դարձյալ դիտարկելով չորս դեպք:

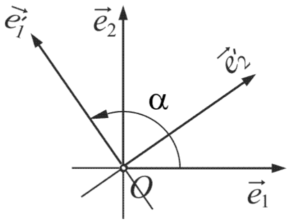
ա) Երբ $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$, ապա ունենք



$$(\vec{e}_1 \,\widehat{,}\, \vec{e}\,'_1) = \alpha\,, \quad (\vec{e}_1 \,\widehat{,}\, \vec{e}\,'_2) = \frac{\pi}{2} - \alpha\,,$$

$$(\vec{e}_2 \,\widehat{,}\, \vec{e}\,'_1) = \frac{\pi}{2} - \alpha\,, \quad (\vec{e}_2 \,\widehat{,}\, \vec{e}\,'_2) = \pi - \alpha :$$

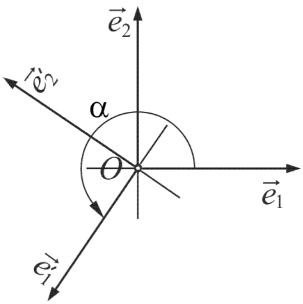
բ) Երբ $\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$, ապա ունենք



$$(\vec{e}_1 \,\widehat{,}\, \vec{e}\,'_1) = \alpha\,, \quad (\vec{e}_1 \,\widehat{,}\, \vec{e}\,'_2) = \alpha - \frac{\pi}{2}\,,$$

$$(\vec{e}_2 \,\widehat{,}\, \vec{e}\,'_1) = \alpha - \frac{\pi}{2}\,, \quad (\vec{e}_2 \,\widehat{,}\, \vec{e}\,'_2) = \pi - \alpha :$$

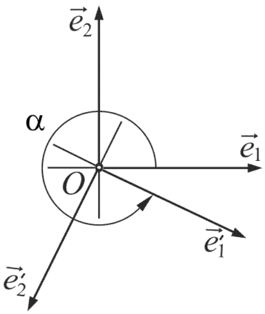
գ) Երբ $\pi \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{2}$, ապա ունենք



$$(\vec{e}_1 \,\widehat{,}\, \vec{e}\,'_1) = 2\pi - \alpha\,, \quad (\vec{e}_1 \,\widehat{,}\, \vec{e}\,'_2) = \alpha - \frac{\pi}{2}\,,$$

$$(\vec{e}_2 \,\widehat{,}\, \vec{e}\,'_1) = \alpha - \frac{\pi}{2}\,, \quad (\vec{e}_2 \,\widehat{,}\, \vec{e}\,'_2) = \alpha - \pi :$$

դ) Երբ $\dfrac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$, ապա ունենք



$$(\vec{e}_1,\widehat{\ }\vec{e}\,'_1) = 2\pi - \alpha, \quad (\vec{e}_1,\widehat{\ }\vec{e}\,'_2) = \frac{5\pi}{2} - \alpha,$$

$$(\vec{e}_2,\widehat{\ }\vec{e}\,'_1) = \frac{5\pi}{2} - \alpha, \quad (\vec{e}_2,\widehat{\ }\vec{e}\,'_2) = \alpha - \pi :$$

Հետևաբար՝ $c_{11} = \cos(\vec{e}_1,\widehat{\ }\vec{e}\,'_1) = \cos\alpha$,

$c_{12} = \cos(\vec{e}_1,\widehat{\ }\vec{e}\,'_2) = \sin\alpha$,

$$c_{21} = \cos(\vec{e}_2,\widehat{\ }\vec{e}\,'_1) = \sin\alpha, \; c_{22} = \cos(\vec{e}_2,\widehat{\ }\vec{e}\,'_2) = -\cos\alpha :$$

Այս դեպքում $C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, $|C| = -1$:

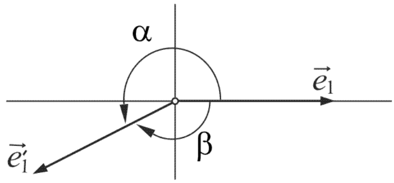
Այսպիսով՝ **2-րդ** դեպքում (2) բանաձևերն ընդունում են

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha + c_1 \\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + c_2 \end{cases}, 0 \le \alpha < 2\pi \quad (5)$$

տեսքը:

Նկատենք, որ այս դեպքում $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ օրթոնորմալ բազիսից $(\vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ օրթոնորմալ բազիսին անցման մատրիցն ունի $C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ տեսքը և $|C| = -1$:

Երբեմն հարմար է լինում պտույտը $\vec{e_1}$ վեկտորից մինչև $\vec{e_1'}$ վեկտորը կատարել ժամսլաքի ուղղությամբ: Այս դեպքում պտույտի β անկյան մեծությանը վերագրում են բացասական նշան:



Նկար 20

Ակնհայտ է (տե՛ս նկար 20-ը), որ $\alpha + (-\beta) = 2\pi$, որտեղից ունենք $\alpha = \beta + 2\pi$, $\cos\alpha = \cos\beta$, $\sin\alpha = \sin\beta$: Հետևաբար (4) և (5) բանաձևերը պահպանում են իրենց տեսքը նաև α-ի բացասական արժեքների դեպքում:

Դիտողություն: Վերը մենք տեսանք, որ մի օրթոգոնալ բազիսից մեկ այլ օրթոգոնալ բազիսին անցման մատրիցներն ունեն $C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ կամ $C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ տեսք, որտեղ $2\pi > \alpha \geq 0$: Այսպիսի մատրիցները կոչվում են 2×2 չափսերի <u>օրթոգոնալ մատրիցներ</u> և կարող են ներկայացվել մի ընդհանուր՝ $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ տեսքով, որի c_{ij} տարրերը բավարարում են $c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1$, $c_{21}^2 + c_{22}^2 = 1$, $c_{11} \cdot c_{21} + c_{12} \cdot c_{22} = 0$ պայմաններին: Այդ հավասարությունները կոչվում են <u>մատրիցի օրթոգոնալության հարաբերակցություններ</u> տողերի համար և մեկնաբանվում են այսպես. մատրիցի յուրաքանչյուր տողի, դիտարկված որպես վեկտոր, սկալյար քառակուսին հավասար է 1-ի, իսկ տարբեր տողերի սկալյար արտադրյալը հավասար է 0-ի: Այսինքն՝ մատրիցի «տող վեկտորները» փոխուղղահայաց միավոր վեկտորներ են:

Նկատենք, որ օրթոգոնալ մատրիցի սյուները նույնպես բավարարում են օրթոգոնալության հարաբերակցությունների՝ $c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1$, $c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1$, $c_{11} \cdot c_{12} + c_{21} \cdot c_{22} = 0$:

Հակառակը նույնպես ճիշտ է. եթե 2×2 չափսերի որևէ $C = (c_{ij})$ մատրիցի տողերը (կամ սյուները) բավարարում են օրթոգոնալության հարաբերակցություններին, ապա այն օրթոգոնալ մատրից է:

Ապացուցենք սա՝ ենթադրելով, որ մատրիցի սյուները բավարարում են օրթոգոնալության հարաբերակցություններին (տողերի դեպքում ապացուցվում է նման ձևով): Հեշտ է տեսնել, որ եթե $c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1$, ապա գոյություն ունի միակ α անկյուն այնպես, որ $2\pi > \alpha \geq 0$ և $c_{11} = \cos\alpha$, $c_{21} = \sin\alpha$: Քանի որ c_{11} և c_{21} թվերից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից, ապա $c_{11} \cdot c_{12} + c_{21} \cdot c_{22} = 0$, $c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1$, $c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1$ պայմաններից հետևում է, որ իմաստ ունեն $c_{12} : c_{21}$ և $c_{22} : c_{11}$ հարաբերությունները: Նշանակելով $-c_{12} : c_{21} = c_{22} : c_{11} = k$՝ ստանում ենք

$$c_{12} = -k\sin\alpha, \; c_{22} = k\cos\alpha :$$

Այժմ $c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1$ պայմանից ստանում ենք $k = \pm 1$: Նշանակում է, որ C մատրիցն ունի $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ կամ $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ տեսքը:

ԳԼՈՒԽ ԵՐՐՈՐԴ
ՈՒՂԻՂԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

§ 13. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՊԱՏԿԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ: ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿՈՐԵՐ

Դիցուք $(O;\, \vec{e_1},\, \vec{e_2})$-ը հարթության որևէ աֆինական կոորդինատային համակարգ է, L-ը՝ հարթության վրա ինչ-որ ***երկրաչափական պատկեր*** (օրինակ՝ ***գիծ***), և ունենք

$$F(x, y) = 0 \quad (6)$$

x և y փոփոխականների որևէ հավասարում: Այդ հավասարումը կոչվում է L ***պատկերի հավասարում*** հարթության տվյալ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ, եթե այդ հավասարմանը բավարարում են միայն և միայն L պատկերի բոլոր կետերի $(x;\, y)$ կոորդինատները:

Օրինակ՝ $x = 0$ և $y = 0$ հավասարումները համապատասխանաբար OY և OX առանցքների, իսկ $xy = 0$ հավասարումը $OX \bigcup OY$-ի հավասարումն է:

Եթե հարթության վրա տրված է մեկ այլ՝ $(O';\, \vec{e_1'},\, \vec{e_2'})$ աֆինական կոորդինատային համակարգ, ապա ինչպես գիտենք, հարթության կամայական M կետի $(x';\, y')$ կոորդինատները այդ համակարգի նկատմամբ կապված են այդ նույն կետի $(O;\, \vec{e_1},\, \vec{e_2})$-ի նկատմամբ $(x;\, y)$ կոորդինատների հետ հետևյալ բանաձևերով՝

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2 \end{cases}$$

(տե՛ս (2) բանաձևը § 11-ում):

Այս բանաձևերը թույլ են տալիս ստանալ L պատկերի $F'(x', y') = 0$ տեսքի հավասարում $(O';\, \vec{e_1'},\, \vec{e_2'})$ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ: Դրա համար բավական է (6) հավասարման մեջ x-ը և y-ը փոխարինել իրենց արտահայտություններով՝

$$F'(x', y') = F(c_{11}x' + c_{12}y' + c_1,\ c_{21}x' + c_{22}y' + c_2) = 0:$$

Քանի որ $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ պայմանի շնորհիվ x'-ը և y'-ը միարժեքորեն արտահայտվում են x-ով և y-ով, ապա կարող ենք $F'(x', y') = 0$ հավասարումից գնալ ետ, վերադառնալ (6) հավասարմանը:

Հետևաբար հարթության $(O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ հարթության կամայական M կետի $(x';\ y')$ կոորդինատները բավարարում են

$$F'(x', y') = 0$$

հավասարմանը այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ նույն կետի $(x;\ y)$ կոորդինատները $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ աֆինական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ բավարարում են (6) հավասարմանը:

Սահմանում: Հարթության $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ աֆինական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ հետևյալ՝

$$\sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j = 0 \quad (7)$$

տեսքի հավասարումով տրվող պատկերը, որտեղ $a_{ij} \in R$ թվեր են, կոչվում է ***հանրահաշվական կոր:***

Սահմանում: Հանրահաշվական ***կորի կարգ*** կոչվում է նրա (7) հավասարման մեջ $F(x, y) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ բազմանդամի աստիճանը, այսինքն՝ $a_{ij} x^i y^j$, $(a_{ij} \neq 0)$ միանդամների $i + j$ աստիճաններից ամենամեծը:

Եթե որևէ հանրահաշվական կոր տրված է իր (7) հավասարումով հարթության $(O;\ \vec{e_1},\ \vec{e_2})$ կորդինատային համակարգի նկատմամբ, ապա մեկ այլ $(O';\ \vec{e_1'},\ \vec{e_2'})$ կորդինատային համակարգի նկատմամբ այդ նույն կորը կարող է տրվել

$$F'(x',y') = \sum_{i,j} a_{ij}(c_{11}x' + c_{12}y' + c_1)^i (c_{21}x' + c_{22}y' + c_2)^j =$$

$$= \sum_{i,j} a'_{ij} x'^i y'^j = 0 \quad (8)$$

հավասարումով:

Այստեղից, մասնավորապես, եզրակացնում ենք, որ կորի հանրահաշվական լինելը կախված չէ դիտարկվող կորդինատային համակարգից:

ԹԵՈՐԵՄ: Հանրահաշվական կորի կարգը չի փոխվում մի աֆինական կորդինատային համակարգից ցանկացած այլ աֆինական կորդինատային համակարգի անցնելիս:

Ապացուցում: Պետք է ցույց տանք, որ հանրահաշվական կորի (7) հավասարման աստիճանը հավասար է նրա (8) հավասարման աստիճանին: Դրա համար նախ համոզվենք, որ $F(x,y)$ բազմանդամի ցանկացած $a_{ij}x^i y^j$ միանդամի աստիճանը չի մեծանում x և y փոփոխականները (2)-ով փոխարինելիս: Իրոք, $F(x,y)$ բազմանդամի՝ $a_{ij}x^i y^j$ միանդամի մեջ վերը նշված տեղադրումից հետո ստանում ենք

$$a_{ij}(c_{11}x' + c_{12}y' + c_1)^i \cdot (c_{21}x' + c_{22}y' + c_2)^j :$$

Փակագծերը բացելուց և նման անդամների միացումից հետո կստանանք $b_{ij}x'^i y'^j$ տեսքի միանդամների գումար, որոնցից յուրաքանչյուրի աստիճանը չի գերազանցում $i+j$-ն, այսինքն՝ $a_{ij}x^i y^j$ միանդամի աստիճանին: Հետևաբար $(O;\ \vec{e_1},\ \vec{e_2})$ կորդինատային համակարգից մեկ այլ՝ $(O';\ \vec{e_1'},\ \vec{e_2'})$ կորդինատային համակարգի անցնելիս $F(x, y)$ բազմանդամի աստի-ճանը չի մեծանում: Մյուս կողմից՝ այն չի էլ կարող փոքրանալ, քանի որ հակառակ դեպքում $(O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ կորդինատային համա-կարգից $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ կորդինատային համակարգին անցնելիս կմեծանա:

Հետևաբար $F(x, y)$ բազմանդամի աստիճանը մնում է նույնը: □

Սույն դասընթացում ուսումնասիրվելու են միայն առաջին և երկրորդ կարգի հանրահաշվական կորերը: Սահմանումից հետևում է, որ առաջին կարգի հանրահաշվական կորերը տրվում են $Ax + By + C = 0$ տեսքի հավասարումներով, որտեղ $A \neq 0$ կամ $B \neq 0$:

§ 14 . ՈՒՂՂԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ, ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ԵՎ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Սահմանում: Ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորը կոչվում է տվյալ ***ուղղի ուղղորդ վեկտոր,*** եթե այն համագիծ է այդ ուղղին:

Սահմանումից հետևում է, որ տրված ուղղի ուղղորդ վեկտորը միակը չէ: Բացի դրանից՝ կամայական երկու ուղղորդ վեկտորներ համագիծ են:

Դիցուք հարթության վրա ընտրված է $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ աֆինական կոորդինատային համակարգ:

ԹԵՈՐԵՄ 1: Եթե ուղիղը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին, իսկ $\vec{a} = \{a_1;\ a_2\}$ -ը նրա կամայական ուղղորդ վեկտոր է, ապա $k = a_2 : a_1$ հարաբերությունը հաստատուն է:

Ապացուցում: Իրոք, եթե $\vec{a} = \{a_1; a_2\}$ և $\vec{b} = \{b_1; b_2\}$ տրված ուղղի երկու ուղղորդ վեկտորներ են, ապա $\vec{a} \| \vec{b}$, այսինքն՝ $\vec{a} = \lambda \vec{b},\ \lambda \neq 0$: Այստեղից՝ $a_1 = \lambda b_1$ և $a_2 = \lambda b_2$, որտեղից էլ՝

$$a_2 : a_1 = \lambda b_2 : \lambda b_1 = b_2 : b_1 :$$

Հետևաբար՝ $a_2 : a_1 = b_2 : b_1 = k = const$: □

Այս k հաստատունը կոչվում է տվյալ ուղղի ***անկյունային գործակից:***

Եթե ուղիղը զուգահեռ է օրդինատների առանցքին, ապա նրա համար անկյունային գործակից չի սահմանվում:

ԹԵՈՐԵՄ 2: Հարթության վրա ցանկացած աֆինական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ հարթության ցանկացած ուղիղ տրվում է

$$Ax + By + C = 0 \tag{9}$$

առաջին աստիճանի հավասարումով, և հակառակը՝ ամեն մի այդպիսի հավասարում ինչ-որ ուղղի հավասարում է:

Ապացուցում: Ինչպես գիտենք, իրարից տարբեր ցանկացած երկու կետով անցնում է մեկ և միայն մեկ ուղիղ: Մյուս կողմից՝ իրարից տարբեր ցանկացած երկու կետով որոշվում է ոչ զրոյական վեկտոր, ուղղի ուղղորդ վեկտոր: Հետևաբար տրված $M_1 \neq M_2$ կետերով որոշված ուղիղը կարելի է բնութագրել որպես այնպիսի M կետերի բազմություն, որ $\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$: Համարժեքորեն, ուղիղը տրվում է նաև իր որևէ M_0 կետով և որևէ $\vec{a}$ ուղղորդ վեկտորով՝ $\ell = (M_0;\, \vec{a})$: Այս դեպքում՝ $M \in \ell \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$:

Դիցուք հարթության վրա տրված է մի $\ell = (M_0;\, \vec{a})$ ուղիղ: Ստանանք նրա հավասարումը:

Եթե հարթության տվյալ աֆինական կորդինատային համակարգի նկատմամբ $M_0 = (x_0;\, y_0)$, իսկ $\vec{a} = \{p;\, q\}$, ապա ցանկացած $M = (x;\, y)$ կետ պատկանում է այդ ուղղին այն և միայն այն դեպքում, երբ $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$, ինչ-որ $t \in R$ թվի դեպքում:

Գրելով այն կորդինատներով՝ ստանում ենք $x - x_0 = tp$, $y - y_0 = tq,\ t \in R$, կամ որ նույնն է՝

$$x = x_0 + pt\,,\ y = y_0 + qt\,,\ t \in R:$$

Այս հավասարումները կոչվում են ***ուղղի պարամետրական հավասարումներ,*** որտեղ t-ն կոչվում է ***պարամետր***: Դրանցում կետի x, y կորդինատները ներկայացված են որպես գծային ֆունկցիաներ t անկախ փոփոխականից (պարամետրից):

Ուղղի պարամետրական հավասարումներից արտաքսելով t-ն՝ ստանում ենք

$$qx - py = qx_0 - py_0\,,$$

կամ որ նույնն է՝

$$qx - py + py_0 - qx_0 = 0: \quad (10)$$

Նշանակելով $A = q,\ \ B = -p,\ \ C = py_0 - qx_0$՝ ստանում ենք

$$Ax + By + C = 0\,,$$

որտեղ ակնհայտորեն $A \neq 0$ կամ $B \neq 0$:

Այսպիսով՝ ապացուցեցինք, որ հարթության վրա աֆինական կորդինատային համակարգի նկատմամբ հարթության կամայական ուղիղ տրվում է (9) տեսքի առաջին աստիճանի հավասարումով:

Այժմ՝ հակառակը: Դիցուք տրված է առաջին աստիճանի (9) տեսքի հավասարում, որտեղ որոշակիության համար են-թադրենք՝ $A \neq 0$: Ցույց տանք, որ այն հարթության մեջ ինչ-որ ուղղի հավասարում է:

Վերը բերված (9) և (10) հավասարումների համեմատումը հուշում է որպես որոնելի ուղղի ուղղորդ վեկտոր վերցնել $\vec{a} = \{-B;\, A\}$ վեկտորը:

Որպես որոնելի ուղղի M_0 կետ վերցնենք $M_0 = \left(-C/A;0\right)$ կետը:

Համոզվենք, որ (9)-ը $(M_0;\, \vec{a})$ ուղղի հավասարումն է:

Իրոք, (10)-ում տեղադրելով $p=-B$, $q=A$, $x_0=-C/B$, $y_0=0$, կստանանք $Ax+By+C=0$:□

Այսպիսով՝ հարթության վրա առաջին կարգի հանրահաշ-վական կորերը ***ուղիղներն*** են, որոնցից յուրաքանչյուրը տրվում է (9) տեսքի հավասարումով: Այդ հավասարումն անվանում են ***ուղղի ընդհանուր հավասարում:***

Վերադառնանք ուղղի $x=x_0+pt$, $y=y_0+qt$, $t\in R$ պարամետրական հավասարումներին: Պարամետրի արտաք-սումով ստանում ենք

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q},$$

որն անվանում են ***ուղղի կանոնական հավասարում:***

Նշենք, որ այս հավասարումը դիտարկվում է նաև, երբ p և q թվերից մեկը (ոչ երկուսը) հավասար է 0-ի:

Օրինակ՝ $\frac{x+1}{0}=\frac{y}{3}$ հավասարումը $M_0=(-1;\,0)$ կետով անցնող և OY առանցքին զուգահեռ ուղղի կանոնական հավա-սարում է: Այն համարժեք է $x+1=0$ հավասարմանը:

Մասնավորապես $M_1=(x_1;\ y_1)$ և $M_2=(x_2;\ y_2)$ իրարից տարբեր երկու կետերով անցնող $(M_1;\ \overrightarrow{M_1M_2})$ ուղղի կանոնական հավասարում է

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

հավասարումը, որը կարող ենք գրել նաև պարամետրական տեսքով՝ $x=x_1+t(x_2-x_1)$, $y=y_1+t(y_2-y_1)$, $t\in R$:

Հեշտ է նկատել, որ երբ $t\in(0;\ 1)$, ապա ստանում ենք M_1-ի և M_2-ի միջև ընկած կետերը և հակառակը: Իրոք, ակնհայտ է, որ $M(x;y)\in[M_1;\ M_2]$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\overrightarrow{M_1M}\uparrow\uparrow\overrightarrow{MM_2}$: Ունենք $\overrightarrow{M_1M}=\{t(x_2-x_1);t(y_2-y_1)\}$ և $\overrightarrow{MM_2}=\{(1-t)(x_2-x_1);(1-t)(y_2-y_1)\}=\dfrac{1-t}{t}\overrightarrow{M_1M}$, ընդ որում՝ $\dfrac{1-t}{t}>0\Leftrightarrow t\in(0;1)$: Այստեղից $[M_1;\ M_2]$ հատվածի համար ստանում ենք $x=x_1+t(x_2-x_1)$, $y=y_1+t(y_2-y_1)$, $t\in[0;\ 1]$ պարամետրական հավասարումները:

Դիցուք $Ax+By+C=0$ հավասարումը հարթության որևէ (ℓ) ուղղի հավասարում է, իսկ $\vec{a}=\{a_1;\ a_2\}$-ը ինչ-որ վեկտոր է:

Հետևություններ թեորեմից:

1) $\vec{a}=\{B;\ -A\}$ վեկտորը համագիծ է $Ax+By+C=0$ ուղղին,

2) $\vec{a}=\{a_1;a_2\}\neq\vec{0}$ վեկտորը համագիծ է (ℓ) ուղղին այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$Aa_1+Ba_2=0: \qquad (11)$$

Իրոք, (11) պայմանը համարժեք է $\{a_1;a_2\}$ և $\{B;\ -A\}$ վեկտորների համագծությանը:

3) Եթե հարթության վրա տրված է ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ, ապա

$$Aa_1 + Ba_2 = 0 \Leftrightarrow \{a_1;\ a_2\} \perp \{A;\ B\}:$$

Այսինքն՝ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգում $\vec{n} = \{A;\ B\}$ <u>վեկտորն ուղղահայաց է</u> $Ax + By + C = 0$ ուղղին:

Եթե ուղղի $Ax + By + C = 0$ հավասարման մեջ $B = 0$, ապա նրա հավասարումը կարող է ներկայացվել $x = -C/A$ կամ $x = a$ տեսքով: Այդպիսի ուղիղը զուգահեռ է OY առանցքին: Իսկ եթե $B \neq 0$, ապա հավասարումը կարող է ներկայացվել $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ տեսքով: Թեորեմ 1-ից և նրա հետևություն 1-ից ստանում ենք, որ $-\frac{A}{B}$ գործակիցը ուղղի k անկյունային գործակիցն է: Նշանակելով նաև $b = -\frac{C}{B}$՝ ուղղի հավասարումը բերվում է $y = kx + b$ տեսքին: Նկատենք, որ b-ն որոշում է այն հատվածը, որն ուղիղը անջատում է OY առանցքից:

Խնդիրներ լուծելիս հաճախ հարկ է լինում կազմել ուղղի հավասարում նրա մի կետով և անկյունային գործակցով: Ընթերցողին ենք թողնում համոզվել, որ տրված $M_0 = (x_0;\ y_0)$ կետով անցնող և k անկյունային գործակցով ուղղի հավասարումն է՝

$$y - y_0 = k(x - x_0):$$

§ 15. ԵՐԿՈՒ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԴԻՐՔԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Հարթության վրա տրված երկու ուղիղների համար հնարավոր են փոխադարձ դասավորության երեք դեպք՝ ***հատվում են***, ***զուգահեռ են*** կամ ***համընկած են***: Դրանք համապատասխանում են հետևյալ դեպքերին՝ ուղիղներն ունեն մի ընդհանուր կետ, չունեն ընդհանուր կետ կամ նույնն են: Դիցուք հարթության վրա տրված են $A_1x+B_1y+C_1=0$ (ℓ_1) և $A_2x+B_2y+C_2=0$ (ℓ_2) ուղիղները ինչ-որ աֆինական կորդինատային համակարգի նկատմամբ:

ԹԵՈՐԵՄ: Հարթության վրա տրված (ℓ_1) և (ℓ_2) ուղիղները՝ **ա)** ***հատվում են*** $\Leftrightarrow$ $A_1:A_2\neq B_1:B_2$,

բ) ***զուգահեռ են*** $\Leftrightarrow$ $A_1:A_2=B_1:B_2\neq C_1:C_2$,

գ) ***համընկնում են*** $\Leftrightarrow$ $A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2$:

Ապացուցում: Դիտարկենք

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \qquad (12)$$

համակարգը: Ինչպես հայտնի է հանրահաշվի դպրոցական դասընթացից,

ա) եթե $A_1:A_2\neq B_1:B_2$, ապա (12) համակարգն ունի միակ լուծում: Հետևաբար (ℓ_1) և (ℓ_2) ուղիղները հատվում են:

բ) Եթե $A_1:A_2=B_1:B_2\neq C_1:C_2$, ապա (12) համակարգը չունի լուծում: Հետևաբար (ℓ_1) և (ℓ_2) ուղիղները զուգահեռ են:

գ) Եթե $A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2$, ապա (12) համակարգի հավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծումները նաև լուծումներ են մյուսի համար: Հետևաբար (ℓ_1) և (ℓ_2) ուղիղները համընկած են:

Այսպիսով՝ **ա)**, **բ)**, **գ)** դեպքերից յուրաքանչյուրում պայմանի բավարարությունն ապացուցված է, անհրաժեշտությունն ապացուցվում է հակասող ենթադրությամբ: □

§ 16. ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ՓՈՒՆՋ, ՓՆՋԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ

Սահմանում: Հարթության տրված կետով անցնող բոլոր ուղիղների բազմությունը կոչվում է ***ուղիղների փունջ***, իսկ այդ կետը՝ ***փնջի կենտրոն:***

Յուրաքանչյուր փունջ միարժեքորեն որոշվում է այդ փնջի կենտրոնով, որը կարող է տրվել այդ փնջին պատկանող իրարից տարբեր երկու ուղիղներով:

ԹԵՈՐԵՄ: Դիցուք ℓ_1-ը և ℓ_2-ը փնջին պատկանող երկու տարբեր ուղիղներ են՝ համապատասխանաբար $A_1x+B_1y+C_1=0$ և $A_2x+B_2y+C_2=0$ հավասարումներով: Հետևյալ՝

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \quad (13)$$

հավասարումը, որտեղ α-ն և β-ն կամայական թվեր են և միաժամանակ զրո չեն, փնջի որևէ ուղղի հավասարում է, և հակառակը՝ փնջի ամեն մի ուղղի հավասարում կարող է ներկայացվել (13) տեսքով:

Ապացուցում: Նախ ցույց տանք, որ (13)-ը x և y փոփոխականների առաջին աստիճանի հավասարում է:

Վերախմբավորելով (13)-ը ըստ x և y փոփոխականների՝ ստանում ենք

$$(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+\alpha C_1+\beta C_2=0 \qquad (14):$$

Ենթադրենք հակառակը՝ (14)-ը x և y փոփոխականների առաջին աստիճանի հավասարում չէ: Այսինքն՝ $\alpha A_1+\beta A_2=0$, $\alpha B_1+\beta B_2=0$: Քանի որ α և β թվերը միաժամանակ զրո չեն, այստեղից ստանում ենք $A_1:A_2=B_1:B_2\ (=-\beta:\alpha)$: Հետևաբար, ըստ նախորդ թեորեմի, ℓ_1-ը և ℓ_2-ը զուգահեռ են կամ համընկած, ինչը հակասում է պայմանին:

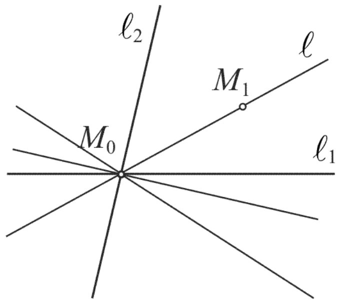
Այսպիսով՝ (14)-ը x և y փոփոխականների առաջին աստիճանի հավասարում է և հետևաբար պատկերում է ուղիղ: Համոզվենք, որ այդ ուղիղն անցնում է փնջի $M_0(x_0;y_0)$ կենտրոնով: Ունենք

$$\begin{cases} M_0 \in \ell_1 \\ M_0 \in \ell_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0 \quad \Rightarrow M_0 \in (13):$$

Այժմ ցույց տանք, որ փնջին պատկանող ամեն մի ℓ ուղղի հավասարում կարող է ներկայացվել (13) տեսքով:

Վերցնենք M_0-ից տարբեր $M_1 = (x_1;\, y_1) \in \ell$ կետ (տե՛ս նկար 21-ը):



Նկար 21

Քանի որ $M_1 \neq M_0$, ապա $\alpha = -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2)$ և $\beta = (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) \neq 0$ թվերը միաժամանակ զրո չեն: Հետևաբար, ըստ վերը բերված ապացույցի,

$$-(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2)(A_1x + B_1y + C_1) +$$
$$+(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

հավասարումը x և y փոփոխականների առաջին աստիճանի հավասարում է, որին բավարարում են M_0 և M_1 կետերի կոր-դինատները: Այսինքն՝ այս հավասարումը պատկերում է փնջին պատկանող ℓ ուղիղը: □

Այս թեորեմի իմաստով (13) հավասարումը կոչվում է ***ուղիղների փնջի հավասարում***:

§ 17. ՈՒՂՂՈՎ ՈՐՈՇՎՈՂ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիցուք Ρ հարթության վրա տրված է ℓ ուղիղը $Ax+By+C=0$ հավասարումով: Ինչպես գիտենք, հարթության $M(x;y)$ կետը պատկանում է այդ ուղղին այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ կետի կորդինատները բավարարում են ուղղի հավասարմանը՝ $M\in\ell \Leftrightarrow F(M)=Ax+By+C=0$:

Նշանակենք $\mathrm{P}(+)$-ով և $\mathrm{P}(-)$-ով համապատասխանաբար $Ax+By+C>0$ և $Ax+By+C<0$ անհավասարումների բոլոր $(x;\ y)$ լուծումների բազմությունները՝

$$\mathrm{P}(+)=\left\{M(x;\ y)\in\mathrm{P}\,\middle|\,F(M)=Ax+By+C>0\right\},$$

$$\mathrm{P}(-)=\left\{M(x;\ y)\in\mathrm{P}\,\middle|\,F(M)=Ax+By+C<0\right\}:$$

Սահմանում: $\mathrm{P}(+)$-ը և $\mathrm{P}(-)$-ը կոչվում են համապատասխանաբար դրական և բացասական կիսահարթություններ՝ տրված $Ax+By+C=0$ ուղղի նկատմամբ:

Քանի որ բոլոր $k(Ax+By+C)=0$, $k\neq 0$ հավասարումները պատկերում են միևնույն ℓ ուղիղը, ապա որպես կետերի բազմություններ՝ $\mathrm{P}(+)$-ը և $\mathrm{P}(-)$-ը կախված չեն ուղղի հավասարման, այսինքն՝ k թվի ընտրությունից և կոչվում են պարզապես կիսահարթություններ:

Նկատենք նաև, որ բացասական k-ի դեպքում նախկին դրական կիսահարթությունը փոխակերպվում է բացասական կիսահարթության, իսկ բացասականը՝ դրականի:

ԹԵՈՐԵՄ: Եթե որևէ երկու կետ պատկանում են միևնույն կիսահարթությանը, ապա այդ կետերը միացնող հատվածն ամբողջությամբ գտնվում է այդ նույն կիսահարթության մեջ: Տարբեր կիսահարթություններին պատկանող ցանկացած երկու կետերը միացնող հատվածի վրա գոյություն ունի միակ կետ, որը պատկանում է ℓ ուղղին:

Ապացուցում: Դիցուք $M_1=(x_1;\ y_1),\ M_2=(x_2;\ y_2)$ և $M=(x;\ y)$-ը $[M_1;M_2]$ հատվածի որևէ կետ է: Այսինքն՝ $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + t(y_2 - y_1)$, որտեղ $t \in [0;\, 1]$: Այդ դեպքում $F(M) =$

$$= A(x_1 + t(x_2 - x_1)) + B(y_1 + t(y_2 - y_1)) + C = (1-t)F(M_1) + tF(M_2):$$

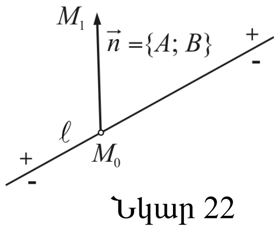
Նկատենք, որ t և $1-t$ թվերը ոչ բացասական են և միաժամանակ 0 չեն:

Եթե $M_1, M_2 \in P(+)$, ապա $F(M_1) > 0$, $F(M_2) > 0$ և ուրեմն $F(M) > 0$: Սա նշանակում է, որ $M \in \mathrm{P}(+)$: Այժմ ենթադրենք՝ $M_1 = (x_1;\, y_1) \in \mathrm{P}(+)$, $M_2 = (x_2;\, y_2) \in \mathrm{P}(-)$: Ցույց տանք, որ $[M_1; M_2]$ հատվածի վրա գոյություն ունի միակ M_0 կետ, որը պատկանում է ℓ ուղղին: Բավական է ցույց տալ, որ $(1-t)(Ax_1 + By_1 + C) + t(Ax_2 + By_2 + C) = 0$ հավասարումն ունի միակ $t_0 \in (0;\, 1)$ լուծում: Ունենք $t\big(F(M_1) - F(M_2)\big) = F(M_1)$:

Քանի որ $F(M_1) - F(M_2) > F(M_1) > 0$ ուստի հավասարումն ունի $t_0 = \dfrac{F(M_1)}{F(M_1) - F(M_2)}$ միակ լուծումը, ընդ որում՝ $t_0 \in (0;\, 1)$:□

Բերենք այս կիսահարթությունները որոշելու եղանակ:

I. Դիցուք ուղիղը տրված է $Ax + By + C = 0$ ընդհանուր հավասարումով: Պարզվում է, որ եթե այդ ուղղին պատկանող կամայական $M_0(x_0;\, y_0)$ կետից կիրառենք $\vec{n} = \{A;\, B\}$ վեկտորը՝ $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{n}$, ապա նրա $M_1(x_1;\, y_1)$ ծայրակետը կպատկանի դրական կիսահարթությանը: Այլ կերպ ասած՝ $\vec{n}$ վեկտորը միշտ ուղղված է դեպի դրական կիսահարթությունը (տե՛ս նկար 22-ը):

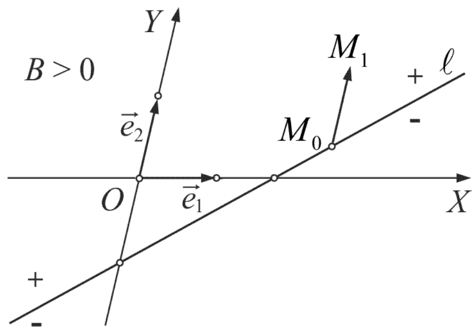


Նկար 22

Իրոք, $\overrightarrow{M_0M} = \vec{n} \Rightarrow M = (x_0 + A;\ y_0 + B)$: Այստեղից ունենք

$$F(M) = A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C = (Ax_0 + By_0 + C) + (A^2 + B^2) =$$
$$= 0 + (A^2 + B^2) = A^2 + B^2 > 0 :$$ Հետևաբար՝ $M \in \mathrm{P}(+)$:

II. Եթե ուղղի $Ax + By + C = 0$ ընդհանուր հավասարման մեջ $B > 0$, ապա կորդինատային համակարգի OY առանցքն ուղղված է դեպի դրական կիսահարթությունը (տե՛ս նկար 23-ը):



Նկար 23

Իրոք, եթե ուղղին պատկանող $M_0(x_0;\ y_0)$ կետից կիրառենք $\overrightarrow{e_2} = \{0;\ 1\}$ վեկտորը, ապա նրա M_1 ծայրակետի համար կունենանք $M_1 = (x_0;\ y_0 + 1)$: Այստեղից էլ

$$F(M_1) = Ax_0 + B(y_0 + 1) + C = (Ax_0 + By_0 + C) + B = B > 0 :$$

Այս դեպքում նույնպես $M_1 \in \mathrm{P}(+)$:

Նույն կերպ հեշտ է համոզվել, որ եթե $B < 0$, ապա կորդինատային համակարգի OY առանցքն ուղղված է դեպի բացասական կիսահարթությունը:

Խնդիր: Ապացուցել, որ $M_0(x_0; y_0)$ կետը գտնվում է $Ax + By + C_1 = 0$ և $Ax + By + C_2 = 0$, $C_1 \neq C_2$ զուգահեռ ուղիղներով սահմանափակված շերտում այն և միայն այն դեպքում, երբ $(Ax_0 + By_0 + C_1)(Ax_0 + By_0 + C_2) < 0$:

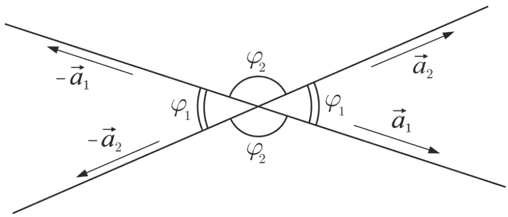
§ 18. ԵՐԿՈՒ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԿԱԶՄԱԾ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԸ, ՄԻ ՈՒՂՂԻՑ ՄԻՆՉԵՎ ՄՅՈՒՍ ՈՒՂԻՂՆ ԸՆԿԱԾ ԱՆԿՅՈՒՆԸ

Սահմանում: ***Երկու ուղիղներով կազմված անկյուն*** կոչվում է նրանց որևէ ուղղորդ վեկտորներով կազմված անկյունը:

Սահմանումից հետևում է, որ եթե ուղիղների ուղղորդ վեկտորներն ուղղահայաց են միմյանց, ապա ուղիղների կազմած անկյունների մեծությունը հավասար է $\pi/2$: Հակառակ դեպքում ուղիղները կազմում են φ_1 և φ_2 մեծություններով անկյուններ, որոնք միմյանց լրացնում են մինչև π:

Ինչպես գիտենք, եթե ուղիղները տրված են $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ հավասարումներով, ապա նրանց ուղղորդ վեկտորներ են համապատասխանաբար $\overrightarrow{a_1} = \{B_1; -A_1\}$ և $\overrightarrow{a_2} = \{B_2; -A_2\}$ վեկտորները:

Պարզ է, որ $-\overrightarrow{a_1}$ և $-\overrightarrow{a_2}$ վեկտորները նույնպես ուղղորդ վեկտորներ են այդ ուղիղների համար և եթե, օրինակ, $\varphi_1 = (\overrightarrow{a_1}, \overset{\wedge}{} \overrightarrow{a_2}) = (-\overrightarrow{a_1}, \overset{\wedge}{} -\overrightarrow{a_2})$, ապա $\varphi_2 = (-\overrightarrow{a_1}, \overset{\wedge}{} \overrightarrow{a_2}) = (\overrightarrow{a_1}, \overset{\wedge}{} -\overrightarrow{a_2})$:



Հետևաբար՝ $\cos\varphi_{1,2} = \pm \dfrac{(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})}{|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_1}|} = \pm \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$:

Նշված ուղիղները փոխուղղահայաց են այն և միայն այն դեպքում, երբ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$: Մասնավորապես, եթե ուղիղները տրված են $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ տեսքի հավասարումներով, ապա $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ պայմանն ընդունում է $k_1k_2 + 1 = 0$ տեսք:

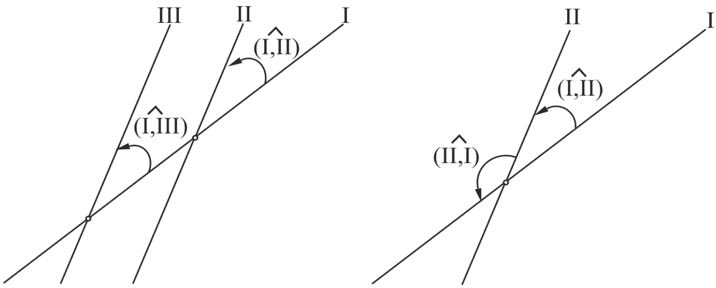
Հետևաբար նրանք փոխուղղահայաց են այն և միայն այն դեպքում, երբ $k_1k_2=-1$: Եթե այդ ուղիղները փոխուղղահայաց չեն, ապա $tg\varphi_{1,2}=\pm\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$:

Դիցուք հարթության վրա տրված են երկու ուղիղներ, որոնցից մեկը պայմանավորվենք անվանել առաջին ուղիղ և նշանակենք I-ով, իսկ մյուսը՝ երկրորդ ուղիղ և նշանակենք II-ով:

Սահմանում: ***Մի ուղղից մինչև մյուս ուղիղն ընկած անկյուն,*** նշանակվում է $(\mathrm{I},\widehat{\ }\mathrm{II})$ սիմվոլով, կոչվում է այն ամենափոքր անկյունը, որով պետք է պտտել առաջին ուղիղը նրանց հատման կետի շուրջը ժամսլաքի պտույտի հակառակ ուղղությամբ, որպեսզի այն համընկնի երկրորդ ուղղի հետ:

Եթե ուղիղները զուգահեռ են կամ համընկած, ապա մի ուղղից մինչև մյուս ուղիղն ընկած անկյունը սահմանվում է զրոյի հավասար:

Սահմանումից հետևում է (տե՛ս նկար 24-ը)՝



Նկար 24

Հատկություն 1. Եթե $\mathrm{II}\parallel\mathrm{III}$, ապա $(\mathrm{I},\widehat{\ }\mathrm{II})=(\mathrm{I},\widehat{\ }\mathrm{III})$:

Հատկություն 2. Եթե I և II ուղիղները զուգահեռ կամ համընկած չեն, ապա $(\mathrm{I},\widehat{\ }\mathrm{II})+(\mathrm{II},\widehat{\ }\mathrm{I})=\pi$:

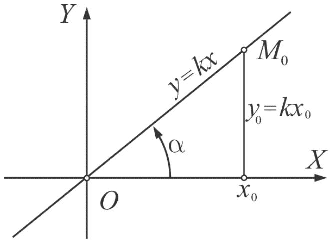
ԹԵՈՐԵՄ *(ուղղի անկյունային գործակցի երկրաչափական իմաստը):* Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $y=kx+b$ ուղղի անկյունային գործակիցը՝ k-ն, հավասար է

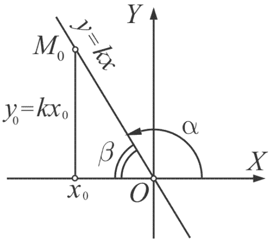
OX առանցքից մինչև այդ ուղիղն ընկած α անկյան տանգեն-սին:

Ապացուցում: Ճնորհիվ վերը նշված հատկութուն 1-ի՝ բավական է ապացուցումը կատարել կորդինատների սկզբնակետով անցնող և $y = kx + b$ ուղղին զուգահեռ $y = kx$ ուղղի համար:

Երբ $k = 0$, պնդումն ակնհայտ է:

Դիցուք այժմ $k \neq 0$: Ուղղի վրա ընտրենք O-ից տարբեր որևէ $M_0(x_0; y_0)$ կետ (տե՛ս նկար 25-ը):



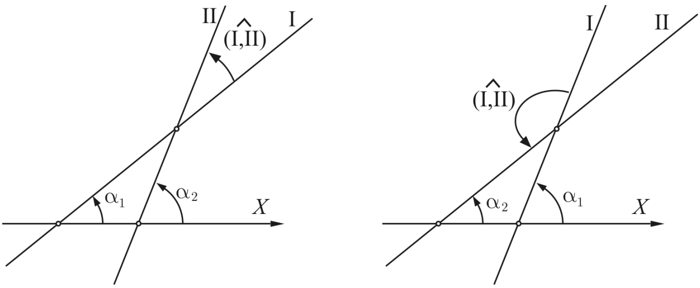


ա) Նկար 25 բ)

Երբ $k > 0$, ապա x_0 և y_0 թվերն ունեն նույն նշանը, և հետևաբար ուղիղն անցնում է I և III քառորդներով: Ինչպես երևում է նկար 25-ի ա-ից, $tg\alpha = \dfrac{y_0}{x_0} = k$:

Մյուս դեպքում, երբ $k < 0$, ապա ուղիղն անցնում է II և IV քառորդներով, և ինչպես երևում է նկար 25-ի բ-ից, $tg\alpha = -tg\beta = -\dfrac{y_0}{|x_0|} = -\dfrac{y_0}{-x_0} = k$:□

Այժմ դիտարկենք հարթության վրա տրված երկու հատվող ուղիղներ՝ $y = k_1x + b_1$ (I), $y = k_2x + b_2$ (II): Պարզվում է, որ նրանցից մեկից մինչև մյուսն ընկած անկյան տանգենսը միարժեքորեն որոշվում է նրանց անկյունային գործակիցներով: Կախված դիտարկվող ուղիղների դիրքերից՝ հնարավոր է երկու դեպք, որոնք պատկերված են նկար 26-ում:



Նկար 26

Առաջին դեպքում $(\widehat{\mathrm{I},\mathrm{II}})=\alpha_2-\alpha_1$, իսկ երկրորդ դեպքում $(\widehat{\mathrm{I},\mathrm{II}})=\alpha_2+(\pi-\alpha_1)=(\alpha_2-\alpha_1)+\pi$: Երկու դեպքում էլ, եթե ուղիղները փոխուղղահայաց չեն, ապա

$$tg(\widehat{\mathrm{I},\mathrm{II}})=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1 tg\alpha_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}:$$

Այսպիսով՝ եթե $k_1k_2\neq-1$, ապա $tg(\widehat{\mathrm{I},\mathrm{II}})=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, իսկ եթե $k_1k_2=-1$, ապա $(\widehat{\mathrm{I},\mathrm{II}})=\frac{\pi}{2}$:

Եթե ուղիղները տրված են $A_1x+B_1y+C_1=0$ (I) և $A_2x+B_2y+\ +C_2=0$ (II) հավասարումներով, փոխուղղահայաց չեն, ապա հեշտ է համոզվել, որ $tg(\widehat{\mathrm{I},\mathrm{II}})=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$:

Խնդիր: Տրված են եռանկյուն կազմող երեք համարակալ-ված ուղիղներ՝ I, II, III:

ա) Ցույց տալ, որ $(\widehat{\mathrm{I},\mathrm{II}})$, $(\widehat{\mathrm{II},\mathrm{III}})$, $(\widehat{\mathrm{III},\mathrm{I}})$ անկյունները կամ եռանկյան ներքին անկյուններն են, կամ՝ արտաքին:

բ) Հիմնվելով ա-ի վրա՝ առաջարկել եռանկյան ներքին անկյունները գտնելու եղանակ, եթե հայտնի են նրա կողմերի հավասարումները:

§ 19. ՈՒՂՂԻ ՆՈՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ, ԿԵՏԻ ՀԵՌԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆ ՈՒՂՂԻՑ

Ինչպես գիտենք, ուղղանկյուն կորդինատային համակարգում $\vec{n}=\{A;\ B\}$ վեկտորն ուղղահայաց է $Ax+By+C=0$ ուղղին (տե՛ս հետևություն 2-ը § 14-ում): Այն կոչվում է այդ ուղղի ***նորմալ վեկտոր***:

Եթե ուղղի նորմալ վեկտորը միավոր վեկտոր է, այսինքն՝ $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}=1$, ապա $Ax+By+C=0$ հավասարումը կոչվում է ուղղի ***նորմավորված հավասարում:***

Ուղղի ցանկացած հավասարում կարելի է նորմավորել՝

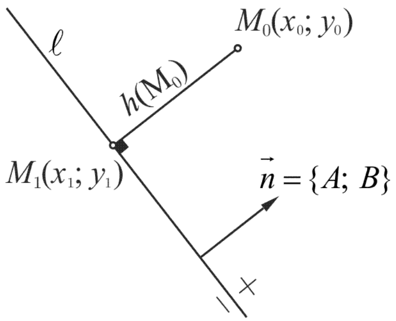
$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0:$$

ԹԵՈՐԵՄ: Եթե $Ax+By+C=0$ հավասարումը ուղղի նորմավորված հավասարում է, ապա հարթության ցանկացած $M_0=(x_0;\ y_0)$ կետի $h(M_0)$ հեռավորությունն այդ ուղղից որոշվում է

$$h(M_0)=|Ax_0+By_0+C|$$

բանաձևով:

Ապացուցում: M_0 կետից տանենք $M_0M_1\perp\ell$, (տե՛ս նկար 27-ը):



Նկար 27

Դիցուք $M_1(x_1;\ y_1)$-ը այդ ուղղահայացի հիմքն է՝ $M_1 \in \ell$: Հետևաբար՝ $Ax_1 + Bx_1 + C = 0$:

Քանի որ $\vec{n} = \{A;\ B\} \perp \ell$, ապա $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \vec{n}$:

Հաշվի առնելով, որ $|\vec{n}| = 1$, կստանանք

$$h(M_0) = |\overrightarrow{M_1M_0}| = \left|\left(\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{n}\right)\right| = \left|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)\right| =$$

$$= \left|(Ax_0 + By_0 + C) - (Ax_1 + By_1 + C)\right| = |Ax_0 + By_0 + C| : \square$$

Հետևություն: Ուղղի $Ax + By + C = 0$ ընդհանուր հավասարման դեպքում հարթության ցանկացած $M_0 = (x_0;\ y_0)$ կետի $h(M_0)$ հեռավորությունն այդ ուղղից որոշվում է

$$h(M_0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (15)$$

բանաձևով:

Այս բանաձևից մասնավորապես հետևում է, որ կորդինատների սկզբնակետի p հեռավորությունն ուղղից որոշվում է $p = \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ բանաձևով: Այժմ վերադառնալով ուղղի՝ վերը բերված երկու նորմավորված հավասարումներին՝ նկատենք, որ դրանք կարող ենք գրել

$$\left|\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y\right| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

կամ

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y = \pm p$$

տեսքերով:

Քանի որ տվյալ A և B թվերի համար գոյություն ունի միակ φ անկյուն, որ $0 \le \varphi < 2\pi$ և

$\cos\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \sin\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, ուստի ուղղի նորմավորված հավասարումներն ընդունում են

$$\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y \pm p = 0$$

տեսքերը: Նկատենք, որ այս հավասարումներում վերը նշված φ անկյունը ուղղի $\vec{n} = \{A;\, B\}$ նորմալի և OX առանցքի $\vec{i} = \{1;\, 0\}$ օրթի կազմած անկյունն է:

Երբեմն որոշակիության համար գերադասում են ուղղի նորմավորված հավասարումներից գործածել միայն մեկը՝

$$\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y - p = 0:$$

Նկատենք, որ եթե ուղիղը չի անցնում կոորդինատների O սկզբնակետով, ապա O կետն այս վերջին հավասարումով տրվող ուղղի նկատմամբ գտնվում է բացասական կիսահարթությունում:

ԳԼՈՒԽ ՉՈՐՐՈՐԴ
ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐԻ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

§ 20. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ, ԻՐԱԿԱՆ ԵՎ ԿԵՂԾ ԿՈՐԵՐ

Ինչպես ցույց տրվեց § 14-ում, առաջին կարգի հանրահաշվական կորերը ուղիղներն են և տրվում են $Ax+By+C=0$ ($A\neq 0$ կամ $B\neq 0$) հավասարումներով: Ընդ որում՝ երկու այդպիսի $A_1x+B_1y+C_1=0$ և $A_2x+B_2y+C_2=0$ հավասարումներ որոշում են նույն ուղիղը այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ հավասարումների ձախ մասերը տարբերվում են միմյանցից թվային բազմապատկչով՝ $A_1x+B_1y+C_1=k(A_2x+B_2y+C_2)$, $k\neq 0$:

Երկրորդ կարգի հանրահաշվական կորերի տեսակներն արդեն շատ են: Օրինակ՝ $xy=0$ և $x^2+y^2=1$ հավասարումները պատկերում են երկու տարբեր տեսակի կորեր: Դրանցից առաջինը պատկերում է հատվող ուղիղների զույգ (OX և OY առանցքների կետերի բազմությունը), իսկ երկրորդը՝ 1 շառավղով շրջանագիծ, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է: Երկրորդ կարգի կորերի բոլոր տեսակները մենք կորոշենք հաջորդ՝ § 21-ում:

Այժմ հստակեցնենք երկրորդ կարգի կորերի նույնականացման խնդիրը: Ըստ սահմանման՝ երկրորդ կարգի կորը տրվում է $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ տեսքի հավասարումով, որտեղ a, b, c գործակիցներից գոնե մեկը զրո չէ:

Հարց է ծագում՝ ի՞նչ անհրաժեշտ և բավարար պայմանի դեպքում երկու այդպիսի

$$F_1(x,y)=a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$$

և

$$F_2(x,y)=a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$$

հավասարումներ կպատկերեն միևնույն երկրորդ կարգի կորը:

Պարզ է, որ եթե հավասարումների ձախ մասերը տարբերվեն թվային բազմապատկչով՝ $F_1(x,y)=k\cdot F_2(x,y)$, $k\neq 0$, ապա դրանցով պատկերվող կորերը նույնն են: Մինչդեռ հակառակը միշտ չէ, որ ճիշտ է:

Իրոք, $x^2+y^2+1=0$ և $x^2+1=0$ հավասարումների համար վերը գրված պայմանը տեղի չունի, սակայն դրանք պատկերում են նույն «կորը», այն է՝ դատարկ բազմություն:

Այսպիսով՝ ունենք երկու անհաջող պահ: Նախ՝ նույնականացման համար առաջարկվող $F_1(x,y)=k\cdot F_2(x,y)$ պայմանը բավարար է, բայց անհրաժեշտ չէ: Բացի դրանից՝ դատարկ բազմությունը հանդես է գալիս որպես կոր, ինչը հակասում է գծի մեր պատկերացմանը:

Պարզվում է, որ այս անհաջողությունները հաղթահարվում են, եթե մենք հավասարումները և նրանց լուծումների բազմությունները դիտարկում ենք ոչ թե իրական, այլ կոմպլեքս թվերի դաշտում:

Իրոք, $x'^2+y'^2=1$ հավասարմանը բավարարող ամեն մի $(x';y')$ թվազույգի համար $(x;y)=(x'\cdot i;y'\cdot i)$ թվազույգը, որտեղ $i^2=-1$, բավարարում է $x^2+y^2+1=0$ հավասարմանը: Հետևաբար, եթե մենք պայմանավորվենք «կետեր» անվանել ոչ միայն իրական թվերից կազմված $(x;y)$ թվազույգերը, այլ նաև ցանկացած z_1, z_2 կոմպլեքս թվերից կազմված $(z_1;z_2)$ թվազույգերը, ապա $x^2+y^2+1=0$ հավասարումով պատկերվող «կորն» այլևս դատարկ բազմություն չէ: Դեռ ավելին, այն իր մեջ պարունակում է մաս, որի «կետերը» փոխմիարժեք (մեկը մեկի) համապատասխանում են իրական $x^2+y^2=1$ շրջանագծի կետերին: Առաջ անցնելով՝ ասենք, որ այս իմաստով $x^2+y^2+1=0$ կորն անվանվում է <u>կեղծ (երևակայական) շրջանագիծ</u>: Նման դատողություններ կարելի է կատարել նաև $x^2+1=0$ հավասարումով պատկերվող կորի համար: Քանի որ x^2+1 բազմանդամը կոմպլեքս թվերի դաշտում ներկայացվում է

$x^2+1=(x+i)(x-i)$ արտադրյալի տեսքով, ուստի ունենք հավասարումների $x^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+i=0 \\ x-i=0 \end{array}\right.$ համարժեքություն: Հետևաբար այս կորը ևս, որպես կետերի բազմություն, այլևս դատարկ չէ: Նկատենք, որ $x'=-1$ իրական ուղղի ամեն մի $(-1;y')$ կետի համար $(x;y)=(-i;y')$ «կետի» կորդինատները բավարարում են $x+i=0$ հավասարմանը, իսկ $x'=1$ իրական ուղղի ամեն մի $(1;y')$ կետի համար $(x;y)=(-i;y')$ «կետի» կորդինատները բավարարում են $x-i=0$ հավասարմանը: Հետևաբար $x^2+1=0$ հավասարումով պատկերվող կորը, որպես կետերի բազմություն, բաղկացած է երկու չհատվող ենթաբազմություններից, որոնցից յուրաքանչյուրը ներկայացվում է որպես $x+1=0$ և $x-1=0$ զուգահեռ իրական ուղիղների կետերի բազմությունների կրկնօրինակ (իհարկե չնույնացվելով դրանց հետ): Ուստի բնական կլինի $x+i=0$ և $x-i=0$ հավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծումների բազմությունն անվանել կեղծ ուղիղ, իսկ $x^2+1=0$ կորը՝ <u>զուգահեռ կեղծ ուղիղների զույգ</u>:

Ավարտելով օրինակների այս նախնական քննարկումը՝ սկսենք տեսության մանրամասն և համակարգված շարադրումը:

Դիցուք հարթության վրա սևեռած է մի որևէ OXY կորդինատային համակարգ O սկզբնակետով և $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ բազիսով: Ինչպես գիտենք, հարթության ամեն մի կետին համապատասխանում է իրական թվերի $(x;y)$ կարգավորված թվազույգ՝ կազմված այդ կետի կորդինատներից, և հակառակը՝ ամեն մի այդպեսի թվազույգի համապատասխանում է հարթության մի որոշակի կետ:

Լրացնենք բոլոր իրական կարգավորված թվազույգերի $\{(x;y)\}$ բազմությունը $(z_1;z_2)$ կարգավորված թվազույգերով, որտեղ z_1-ը և z_2-ը կոմպլեքս թվեր են, որոնցից գոնե մեկը իրական թիվ չէ: Հասկանալի է, որ ի տարբերություն $(x;y)$ իրական թվազույգի՝ $(z_1;z_2)$ թվազույգերը չեն առաջանում տեսողաբար ընկալվող կետերից:

Վերադառնալով հարթության կետ հասկացությանը՝ այսուհետև ***կոմպլեքս կետ*** ասելով կհասկանանք ամեն մի $(z_1;z_2)$ կարգավորված թվազույգ՝ կազմված z_1, z_2 կոմպլեքս թվերից՝ անվանելով դրանք $(z_1;z_2)$ ***կետի կորդինատներ*** OXY համակարգի նկատմամբ: Կասենք, որ $M=(z_1;z_2)$ կետը իրական կետ է, եթե նրա z_1 և z_2 կորդինատները իրական թվեր են, հակառակ դեպքում կասենք, որ այն ***կեղծ կետ*** է (ավելի ճիշտ կլինի անվանել այն ***մտացածին*** կամ ***երևակայական կետ***):

Դիտողություն: Հիշենք, որ $M=(x;y)$ իրական կետի կորդինատները OXY կորդինատային համակարգում սահմանվում են որպես նրա $\overrightarrow{OM}$ շառավիղ վեկտորի $\overrightarrow{OM}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$ վերլուծության գործակիցներ: Նկատենք, որ $(z_1;z_2)$ կեղծ կետի համար նման վերլուծություն գոյություն չունի:

Կոմպլեքս հարթություն ասելով՝ կհասկանանք բոլոր (թե՛ իրական, թե՛ կեղծ) կոմպլեքս կետերի $\{(z_1;z_2)\}$ բազմությունը:

Այսպիսով՝ իրական հարթությունը (կազմված բոլոր իրական կետերից) կարելի է դիտարկել որպես կոմպլեքս հարթության մաս, իսկ կոմպլեքս հարթությունը՝ որպես իրական հարթության ընդլայնում:

Կոմպլեքս հարթության մեջ $M_1=(z_1';z_2')$ սկզբնակետով և $M_2=(z_1'';z_2'')$ վերջնակետով ***վեկտոր*** կոչվում $(M_1;M_2)$ կարգավորված կետազույգը: Իրական հարթության վեկտորների նմանությամբ $(M_1;M_2)$ կարգավորված կետազույգը (վեկտորը) կնշանակենք $\overrightarrow{M_1M_2}$-ով: Այնուհետև $\overrightarrow{M_1M_2}$ ***վեկտորի կորդինատներ*** կանվանենք $u=z_1''-z_1'$, $v=z_2''-z_2'$ կոմպլեքս թվերը և կգրառենք դա $\overrightarrow{M_1M_2}=\{u;v\}$ տեսքով: Երկու վեկտորներ կոչվում են համարժեք, եթե նրանք ունեն նույն կորդինատները:

Ինչպես իրական, այնպես էլ կոմպլեքս հարթության դեպքում սահմանվում է ***ազատ վեկտորը***՝ որպես միմյանց համարժեք բոլոր վեկտորների բազմություն:

Երկու $\overrightarrow{M_1M_2} = \{u_1; v_1\}$ և $\overrightarrow{N_1N_2} = \{u_2; v_2\}$ վեկտորներ կոչվում են ***համագիծ***, եթե համեմատական են նրանց կորդինատները՝ $u_1 : u_2 = v_1 : v_2$:

Այնուհետև սահմանվում է կոմպլեքս հարթության մեջ ուղղի հասկացությունը: Դիցուք սևեռած են կոմպլեքս հարթության մի $M_0 = (z_1^0; z_2^0)$ կետ և մի ոչ զրոյական $\vec{a} = \{u; v\}$ ազատ վեկտոր: Կոմպլեքս հարթության մեջ M_0 կետով անցնող և $\vec{a}$ ուղղորդ վեկտորով ***ուղիղ*** կոչվում է այն բոլոր $M = (z_1; z_2)$ կետերի բազմությունը, որտեղ $\overrightarrow{M_0M}$ և $\vec{a}$ վեկտորները համագիծ են, այսինքն՝ համեմատական են նրանց կորդինատները, կամ որ նույնն է՝ գոյություն ունի այնպիսի t կոմպլեքս թիվ, որ $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}$:

Ճիշտ այնպես, ինչպես § 14-ում, արտածվում են ուղղի պարամետրական, կանոնական և ընդհանուր հավասարումները, և ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

ԹԵՈՐԵՄ 1: Կոմպլեքս հարթության ամեն մի ուղիղ տրվում է z_1, z_2 կոմպլեքս փոփոխականների առաջին աստիճանի $Az_1 + Bz_2 + C = 0$ տեսքի հավասարումով, որտեղ A-ն, B-ն և C-ն կոմպլեքս թվեր են, $A \neq 0$ կամ $B \neq 0$, և հակառակը՝ ամեն մի այդպիսի հավասարում ինչ-որ ուղղի հավասարում է:

Կոմպլեքս հարթության երկու ուղիղներ կոչվում են զուգահեռ (հատվող) ուղիղներ, եթե նրանց ընդհանուր կետերի բազմությունը դատարկ է (բաղկացած է մի կետից): Հեշտությամբ ապացուցվում է, որ.

ԹԵՈՐԵՄ 2: Երկու ուղիղներ՝

$$A_1z_1 + B_1z_2 + C_1 = 0 \text{ և } A_2z_1 + B_2z_2 + C_2 = 0,$$

ա) հատվում են այն և միայն այն դեպքում, երբ $A_1 : A_2 \neq B_1 : B_2$, բ) զուգահեռ են այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 \neq C_1 : C_2,$$

գ) համընկնում են այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 :$$

Կոմպլեքս հարթության մեջ ***հանրահաշվական կորը*** սահմանվում է որպես բոլոր այն $(z_1; z_2)$ կոմպլեքս կետերի բազմությունը, որոնց z_1 և z_2 կոորդինատները բավարարում են

$$\sum_{i,j} a_{ij}(z_1)^i (z_2)^j = 0 \qquad (16)$$

բազմանդամային հավասարմանը, որտեղ a_{ij} գործակիցները սևեռված կոմպլեքս թվեր են:

Ինչպես իրական կորերի դեպքում, այս դեպքում ևս սահմանվում է կորի կարգը որպես $\max\{i+j\}$, երբ $a_{ij} \neq 0$:

Պարզ է, որ առաջին կարգի հանրահաշվական կորերը վերը սահմանված ուղիղներն են:

Հանրահաշվական կորը կոչվում է ***իրական կոր***, եթե նրա համար գոյություն ունի (16) տեսքի հավասարում, որտեղ բոլոր a_{ij} գործակիցները իրական թվեր են: Հակառակ դեպքում կորը կոչվում է ***կեղծ կոր***: Նշենք, որ ընդհանրապես իրական կորը պարունակում է նաև կեղծ կետեր, իսկ կեղծ կորը կարող է պարունակել նաև իրական կետեր:

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ՝ z_1-ի և z_2-ի փոխարեն գործածելով x և y նշանակումները:

1) $5(2-3i)x + 3(2-3i)y - (2-3i) = 0$ կորը իրական ուղիղ է, քանի որ այն կարող է տրվել նաև իրական գործակիցներով $5x + 3y - 1 = 0$ հավասարումով:

2) Ի տարբերություն նախորդ օրինակի՝ $(2+3i)x + (3+4i)y + 1 - 5i = 0$ հավասարումը պատկերում է կեղծ ուղիղ, որն իր մեջ պարունակում է մի իրական կետ՝ $(19; -13)$:

Ընդհանրապես ուղղի

$$(a_1+a_2i)x+(b_1+b_2i)y+(c_1+c_2i)=0$$

հավասարումը ներկայացնելով

$$(a_1x+b_1y+c_1)+(a_2x+b_2y+c_2)i=0$$

տեսքով՝ պարզ է դառնում, որ այդ ուղղի իրական $(x;y)$ կետերը որոշվում են որպես $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ համակարգի լուծումներ: Հետևաբար կեղծ ուղղի իրական կետերի բազմությունը կամ դատարկ է, կամ պարունակում է ճիշտ մեկ կետ:

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ հավասարումով տրվող կորը, որտեղ a-ն և b-ն իրական թվեր են, երկրորդ կարգի իրական կոր է, որը կարող է ներկայացվել նաև որպես երկու առաջին կարգի՝ $\dfrac{x}{a}+i\dfrac{y}{b}=0$ և $\dfrac{x}{a}-i\dfrac{y}{b}=0$ կեղծ կորերի (ուղիղների) միավորում: Դրանք հատվում են $(0;0)$ իրական կետում: Ընդունված է այդ կորն անվանել <u>հատվող կեղծ ուղիղների զույգ</u>:

4) $y^2+a^2=0$ հավասարումը, որտեղ $a\neq 0$-ն իրական թիվ է, պատկերում է երկրորդ կարգի իրական կոր: Այն կարող է ներկայացվել նաև որպես երկու չհատվող՝ $y-ai=0$ և $y+ai=0$ ուղիղների միավորում և կոչվում է <u>զուգահեռ կեղծ ուղիղների զույգ</u>:

Այժմ պարզաբանենք կորդինատային համակարգի հասկացությունը կոմպլեքս հարթության համար:

Վերը մենք կոմպլեքս հարթությունը սահմանեցինք իրական հարթության մեջ նախապես սևեռած մի OXY աֆինական կորդինատային համակարգի միջոցով: Եթե ունենք իրական հարթության մի ուրիշ $O'X'Y'$ աֆինական կորդինատային համակարգ, ապա, ինչպես գիտենք, իրական հարթության ցանկացած կետի $(x;y)$ և $(x';y')$ կորդինատներն այդ համակարգերում միմյանց հետ կապված են

$$x=c_{11}x'+c_{12}y'+c_1\,,\ \ y=c_{21}x'+c_{22}y'+c_2$$

բանաձևերով: Այժմ կոմպլեքս հարթության կամայական $M=(z_1;z_2)$ կետի համար, որտեղ z_1-ը և z_2-ը կոմպլեքս թվեր են, սահմանենք նրա $(z_1';z_2')$ կոորդինատները $O'X'Y'$ համակարգում՝ որոշելով z_1'-ը և z_2'-ը հավասարումների

$$z_1 = c_{11}z_1' + c_{12}z_2' + c_1,\ z_2 = c_{21}z_1' + c_{22}z_2' + c_2$$

համակարգից: Սահմանման կոռեկտությունն ակնհայտ է:

Այսպիսով՝ իրական հարթության բոլոր աֆինական կոորդինատային համակարգերը կարող են դիտարկվել որպես կոորդինատային համակարգեր նաև կոմպլեքս հարթության համար:

Իհարկե, կոմպլեքս հարթության համար կարող ենք սահմանել նաև այլ կոորդինատային համակարգեր: Սակայն մենք սահմանափակվելու ենք միայն իրական հարթության կոորդինատային համակարգերից գոյացող կոորդինատային համակարգերով: Այս դեպքում կարևոր հանգամանք է այն, որ կոորդինատային ձևափոխության բանաձևերում բոլոր c_{ij}, c_i գործակիցներն իրական թվեր են:

Սրա շնորհիվ կոմպլեքս հարթության իրական կետերն ու իրական կորերը մնում են այդպիսիք նաև մյուս կոորդինատային համակարգերում:

Օգտվելով կոորդինատային ձևափոխության բանաձևերից՝ ճիշտ այնպես, ինչպես § 13-ում, ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

ԹԵՈՐԵՄ 3: Կոմպլեքս հարթության (16) հանրահաշվական կորը բոլոր կոորդինատային համակարգերում տրվում է նույն աստիճանի բազմանդամային հավասարումով:

Հետևաբար հանրահաշվական կորի կարգը նույնն է բոլոր կոորդինատային համակարգերում:

§ 21. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐԻ ՏԵՍԱԿԱՎՈՐՈՒՄԸ ԸՍՏ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ

Ինչպես նշվեց § 20-ում, որևէ OXY կոորդինատային համակարգի նկատմամբ երկրորդ կարգի կորերի ընդհանուր հավասարումն ունի $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ տեսքը, որտեղ a, b, c գործակիցներից գոնե մեկը զրո չէ: Հետագայում արտածվող բանաձևերի տեսքի ներդաշնակության և դրանք հեշտ հիշելու տեսանկյունից նպատակահարմար է կորի ընդհանուր հավասարումը գրել

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0 \quad (17)$$

տեսքով, որտեղ a_{11}, a_{12} և a_{22} գործակիցներից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից: Այս կորի տեսակը և հատկությունները պարզելիս ցանկալի է OXY կոորդինատային համակարգն ընտրել այնպես, որ կորի հավասարումն այդ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ պարունակի հնարավորինս քիչ թվով միանդամներ: Այդպիսի որոշ հավասարումներ անվանում են կորի *կանոնական հավասարումներ*, իսկ համապատասխան կոորդինատային համակարգը՝ *կանոնական կոորդինատային համակարգ*:

Ցույց տանք, որ եթե (17) հավասարման մեջ $a_{12}\neq 0$, ապա O սկզբնակետի շուրջ մի որոշակի φ անկյունով կոորդինատային համակարգի պտտումով կարելի է ստանալ նոր՝ $OX'Y'$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ կորի նոր հավասարումը չի պարունակի $a'_{12}x'y'$ տեսքի միանդամ, այսինքն՝ $a'_{12}=0$:

Այդ նպատակով կատարենք կոորդինատային համակարգի պտույտ O կետի շուրջ առայժմ անհայտ φ անկյունով (տե՛ս (4) բանաձևը § 12-ում)՝

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\ y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi:$$

Տեղադրելով x-ի և y-ի արտահայտությունները (17)-ի մեջ՝ ստանում ենք

$$F(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,\ x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) =$$
$$= a_{11}(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2 + 2a_{12}(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) +$$
$$+a_{22}(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2 + 2a_1(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi) +$$
$$+2a_2(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) + a_0 = 0:$$

Կամ

$$F'(x', y') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a_0 = 0,$$

որտեղ

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi,$$
$$a'_{12} = -a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi,$$
$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\cos^2\varphi,$$
$$a'_1 = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi,\ a'_2 = -a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi:$$

Այժմ պարզենք, թե հնարավո՞ր է ընտրել պտույտի φ անկյուն այնպես, որ լինի $a'_{12} = 0$: Այսինքն՝ պահանջենք, որ φ-ն բավարարի

$$-a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi = 0$$

կամ

$$a_{12}tg^2\varphi + (a_{11} - a_{22})tg\varphi - a_{12} = 0$$

հավասարմանը:

Այստեղից, քանի որ $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 > 0$, ստանում ենք

$$tg\varphi = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}},$$

հետևաբար այդպիսի անկյուն միշտ կարելի է գտնել:

Այսպիսով, կատարելով վերը նշված պտույտի ձևափոխությունը, ստանում ենք նոր՝ $OX'Y'$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ $\vec{e'_1} = \{\cos\varphi; \sin\varphi\}$, $\vec{e'_2} = \{-\sin\varphi; \cos\varphi\}$ բազիսային վեկտորներով, որի նկատմամբ կորի հավասարումն ընդունում է ավելի պարզ՝ $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a_0 = 0$ (18) տեսք:

Հավասարման հետագա պարզեցումները կարելի է կատարել՝ դիտարկելով երկու դեպք:

I հիմնական դեպք, երբ $a'_{11} \neq 0$, $a'_{22} \neq 0$: Այս դեպքում անջատելով լրիվ քառակուսիներ ըստ x'-ի և y'-ի՝ (18) հավասարումը կարելի է բերել $a'_{11}\left(x' + \frac{a'_1}{a'_{11}}\right)^2 + a'_{22}\left(y' + \frac{a'_2}{a'_{22}}\right)^2 + \quad + a'_0 = 0$ տեսքի, որտեղ $a'_0 = a_0 - \frac{a'^2_1}{a'_{11}} - \frac{a'^2_2}{a'_{22}}$:

Այնուհետև ընտրելով որպես նոր՝ $O'X''Y''$ կորդինատային համակարգի սկզբնակետ $O'\left(-\frac{a'_1}{a'_{11}};\ -\frac{a'_2}{a'_{22}}\right)$ կետը և կատարելով կորդինատային համակարգի զուգահեռ տեղափոխություն՝

$$x'' = x' + \frac{a'_1}{a'_{11}},\quad y'' = y' + \frac{a'_2}{a'_{22}},$$

ստանում ենք կորի հավասարումը $O'X''Y''$ համակարգում՝

$$a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a'_0 = 0 \qquad (19):$$

Ստացված հավասարման համար դիտարկենք երկու ենթադեպք:

I^{ա}. Երբ $a'_0 \neq 0$, ապա (19)-ը կարելի է գրել

$$\frac{x''^2}{-\frac{a'_0}{a'_{11}}} + \frac{y''^2}{-\frac{a'_0}{a'_{22}}} = 1$$

տեսքով: Նշանակելով $a^2 = \left|-\frac{a'_0}{a'_{11}}\right|$, $b^2 = \left|-\frac{a'_0}{a'_{22}}\right|$՝ կարող ենք գրել

$-\dfrac{a_0'}{a_{11}'}=\varepsilon_1 a^2$, $-\dfrac{a_0'}{a_{22}'}=\varepsilon_2 b^2$, որտեղ $\varepsilon_1, \varepsilon_2=\pm 1$ արտադրիչները փոխարինում են $-\dfrac{a_0'}{a_{11}'}$ և $-\dfrac{a_0'}{a_{22}'}$ թվերի $\pm$ նշաններին: Հաշվի առնելով սա՝ կորի հավասարումը կարող ենք գրել

$$\frac{x''^2}{\varepsilon_1 a^2}+\frac{y''^2}{\varepsilon_2 b^2}=1 \tag{20}$$

տեսքով:

Այժմ դիտարկենք ε_1-ի և ε_2-ի բոլոր հնարավոր տարբերակները:

1. Երբ $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, ապա (20) հավասարումն ընդունում է

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1$$

կանոնական տեսք: Այս հավասարումով տրվող կորը կոչվում է *էլիպս*:

2. Երբ $\varepsilon_1=\varepsilon_2=-1$, ապա (20) հավասարումն ընդունում է

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=-1$$

կանոնական տեսք: Այս հավասարումով տրվող կորը կոչվում է *կեղծ էլիպս*: Այն չունի ոչ մի իրական կետ:

3. Երբ $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=-1$, ապա (20) հավասարումն ընդունում է

$$\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1$$

կանոնական տեսք: Այս հավասարումով տրվող կորը կոչվում է *հիպերբոլ*: Մյուս՝ $\varepsilon_1=-1$, $\varepsilon_2=1$ դեպքում ունենք

$$\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=-1$$

կանոնական հավասարում, որը նույնպես պատկերում է հիպերբոլ, քանի որ կորդինատային առանցքների $x''=y'''$,

$y'' = x'''$ վերանվանումով հավասարումը բերվում է նախորդ տեսքին՝

$$\frac{x'''^2}{a^2} - \frac{y'''^2}{b^2} = 1:$$

Վերադառնանք (19) հավասարման ուսումնասիրությանը մյուս դեպքում:

I[բ]. Երբ $a'_0 = 0$, ապա (19)-ը կարելի է գրել

$$\frac{x''^2}{\frac{1}{a'_{11}}} + \frac{y''^2}{\frac{1}{a'_{22}}} = 0$$

տեսքով: Նշանակելով $a^2 = \left|\frac{1}{a'_{11}}\right|, b^2 = \left|\frac{1}{a'_{22}}\right|$՝ կարող ենք գրել $\frac{1}{a'_{11}} = \varepsilon_1 a^2, \frac{1}{a'_{22}} = \varepsilon_2 b^2$, որտեղ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$: Արդյունքում կորի հավասարումը կարող ենք գրել

$$\frac{x''^2}{\varepsilon_1 a^2} + \frac{y''^2}{\varepsilon_2 b^2} = 0 \qquad (21)$$

տեսքով: Կախված ε_1-ի և ε_2-ի հնարավոր արժեքներից՝ ստանում ենք՝

4. Երբ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ կամ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, ապա (21) հավասարումն ընդունում է

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0$$

կանոնական տեսք: Նկատենք, որ

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x''}{a} + i\frac{y''}{b} = 0 \\ \frac{x''}{a} - i\frac{y''}{b} = 0 \end{array}\right., \ (i^2 = -1):$$

Ինչպես արդեն ասել ենք § 20-ում, այս հավասարումով տրվող կորը կոչվում է *հատվող կեղծ ուղիղների զույգ*:

5. Երբ $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$ կամ $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$, ապա (21) հավասարումն ընդունում է

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0$$

կանոնական տեսք: Նկատենք, որ

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x''}{a} + \dfrac{y''}{b} = 0 \\ \dfrac{x''}{a} - \dfrac{y''}{b} = 0 \end{array}\right. :$$

Այս հավասարումով տրվող կորը կոչվում է *հատվող իրական ուղիղների զույգ*:

II հիմնական դեպք, երբ a'_{11} և a'_{22} գործակիցներից որևէ մեկը 0 է: Դիցուք $a'_{11} = 0$, $a'_{22} \neq 0$: Այս դեպքում (18) հավասարումն ընդունում է $a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a_0 = 0$ տեսքը: Անջատելով լրիվ քառակուսի y'-ի նկատմամբ՝ կստանանք

$$a'_{22}\left(y' + \frac{a'_2}{a'_{22}}\right)^2 + 2a'_1x' + a'_0 = 0, \tag{22}$$

որտեղ $a'_0 = a_0 - \dfrac{(a'_2)^2}{a'_{22}}$: Այս հավասարման հետագա պարզեցման նպատակով նույնպես կդիտարկենք երկու ենթադեպք:

II$^{\text{ա}}$. Երբ $a'_1 = 0$:

Կատարենք $OX'Y'$ կորդինատային համակարգի զուգահեռ տեղափոխություն՝ $x' = x''$, $y' = y'' - \dfrac{a'_2}{a'_{22}}$: Նոր՝ $O'X''Y''$ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգի նկատմամբ (22) հավասարումը կընդունի

$$a'_{22}y''^2 + a'_0 = 0 \tag{23}$$

տեսք:

Այստեղից ստանում ենք կորերի երեք հնարավոր կանոնական հավասարումներ հետևյալ հերթականությամբ:

6. Երբ $a_0' = 0$, ապա (23) հավասարումից ստանում ենք $y''^2 = 0$ կանոնական հավասարումը, որը պատկերում է ուղիղ՝ $O'X''$ առանցքը: Ընդունված է այն անվանել *կրկնակի ուղիղ* կամ *համընկած ուղիղների զույգ* (հավասարման աստիճանի պատճառով):

7. Երբ $a_0' \neq 0$ և $\dfrac{a_0'}{a_{22}'} < 0$, ապա (23) հավասարումը կարելի է ներկայացնել $y''^2 - a^2 = 0$ կանոնական տեսքով, որտեղ $a^2 = \left|\dfrac{a_0'}{a_{22}'}\right|$: Այս հավասարումը համարժեք է $\left[\begin{array}{l} y'' - a = 0 \\ y'' + a = 0 \end{array}\right.$ համախմբին, որը պատկերում է *զուգահեռ իրական ուղիղների զույգ*:

8. Երբ $a_0' \neq 0$ և $\dfrac{a_0'}{a_{22}'} > 0$, ապա (23) հավասարումը կարելի է ներկայացնել $y''^2 + b^2 = 0$ կանոնական տեսքով, որտեղ $b^2 = \dfrac{a_0'}{a_{22}'}$: Այս հավասարումը համարժեք է $\left[\begin{array}{l} y'' - bi = 0 \\ y'' + bi = 0 \end{array}\right.$ համախմբին, որը, ինչպես անվանել ենք § 18-ում, պատկերում է *զուգահեռ կեղծ ուղիղների զույգ*:

Այժմ անցնենք II$^{\text{բ}}$ ենթադեպքին, երբ $a_1' \neq 0$: Ներկայացնենք (22) հավասարումը $a_{22}'\left(y' + \dfrac{a_2'}{a_{22}'}\right)^2 + 2a_1'\left(x' + \dfrac{a_0'}{2a_1'}\right) = 0$ տեսքով և կատարենք $OX'Y'$ կորդինատային համակարգի զուգահեռ տեղափոխություն՝ $x' = x'' - \dfrac{a_0'}{2a_1'}$, $y' = y'' - \dfrac{a_2'}{a_{22}'}$ բանաձևերով: Նոր՝ $O'X''Y''$ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգի նկատմամբ (22) հավասարումը կընդունի

$$a'_{22}y''^2 + 2a'_1x'' = 0 \tag{24}$$

տեսք: Նշանակելով $p' = -\dfrac{a'_1}{a'_{22}}$՝ կստանանք $y''^2 = 2p'x''$ հավասարումը, որտեղ $p' \neq 0$: Եթե $p' < 0$, ապա կատարելով $O'X''Y''$ կորդինատային համակարգի ևս մի ձևափոխություն $x'' = -x'''$, $y'' = y'''$ բանաձևերով՝ կստանանք նոր՝ $O'X'''Y'''$ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ (24) հավասարումը կընդունի վերջնական կանոնական տեսքը՝

9. $y'''^2 = 2p'x'''$, $p' > 0$: Այդպիսի կորը կոչվում է *պարաբոլ*:

Արդյունքում ապացուցվեց հետևյալը:

ԹԵՈՐԵՄ (*երկրորդ կարգի կորերի տեսակավորման մասին*): Ամեն մի երկրորդ կարգի կոր իրենից ներկայացնում է վերը նշված 1-9 տեսակի կորերից մեկն ու մեկը՝ էլիպս, կեղծ էլիպս, հիպերբոլ, պարաբոլ կամ էլ ուղիղների զույգ՝ իրական կամ կեղծ, հատվող, զուգահեռ կամ համընկած:

Ինչպես տեսնում ենք, այս կորերից 5 տեսակները ուղիղների զույգեր են: Ստորև առանձին-առանձին կուսումնասիրենք մյուս կորերը՝ էլիպսները, հիպերբոլներն ու պարաբոլները:

§ 22. ԷԼԻՊՍ, ՏԵՍՔԸ, ԿԻԶԱԿԵՏԱՅԻՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Էլիպսը սահմանվեց որպես հարթության OXY ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{25}$$

տեսքի հավասարումով տրվող երկրորդ կարգի կոր:

Հեշտ է համոզվել, որ եթե $(x;y)$ կետը պատկանում է էլիպսին, ապա $(x;-y)$, $(-x;y)$ և $(-x;-y)$ կետերը ևս պատկանում են նրան: Այսինքն՝ էլիպսը համաչափ է կոորդինատային OX և OY առանցքների, ինչպես նաև կոորդինատների O սկզբնակետի նկատմամբ: Հավասարումից հետևում է, որ $|x|\le a$, $|y|\le b$: Ուստի էլիպսը նաև սահմանափակ կոր է և գտնվում է $-a\le x\le a$, $-b\le y\le b$ ուղղանկյան ներսում: Այն կոչվում է էլիպսի *հիմնական ուղղանկյուն*: Այդ ուղղանկյան եզրագծի հետ էլիպսն ունի չորս ընդհանուր կետեր՝ $A(a;0)$, $B(-a;0)$, $C(0;-b)$, $D(0;b)$, որոնք կոչվում են ***էլիպսի գագաթներ***: Կոորդինատների O սկզբնակետը կոչվում է ***էլիպսի կենտրոն***, իսկ $AB=2a$ և $CD=2b$ հատվածները՝ ***էլիպսի առանցքներ***:

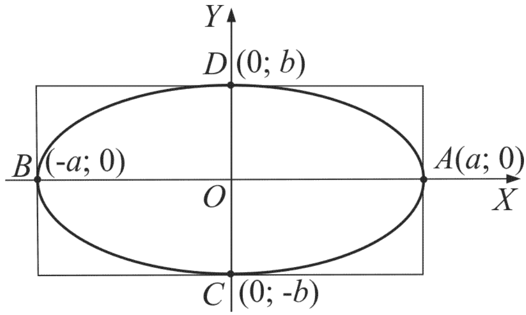
Համաչափության շնորհիվ բավական է էլիպսի տեսքն ուսումնասիրել $-a\le x\le a$ և $y\ge 0$ պայմաններին բավարարող կետերի համար: Այս դեպքում (25) հավասարումից կարող ենք y-ը արտահայտել որպես x-ի ֆունկցիա՝

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ :$$

Այստեղից $y'=-\dfrac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, $-a<x<a$: Այսինքն՝ էլիպսը նշված տիրույթում ողորկ կոր է:

Քանի որ $y'(0)=0$, ուրեմն $(0;a)$ գագաթում էլիպսը շոշափում է հիմնական ուղղանկյան $y=b,\ -a\le x\le a$ կողմին:

Համաչափության շնորհիվ էլիպսն իր մյուս գագաթներում ևս շոշափում է հիմնական ուղղանկյան համապատասխան կողմերին, ինչպես պատկերված է նկար 28-ում:



Նկար 28

Մասնավոր դեպքում, երբ $a=b$, (25)-ը ընդունում է $x^2+y^2=a^2$ տեսք, որը պատկերում է $O(0;0)$ կենտրոնով և a շառավղով շրջանագիծ:

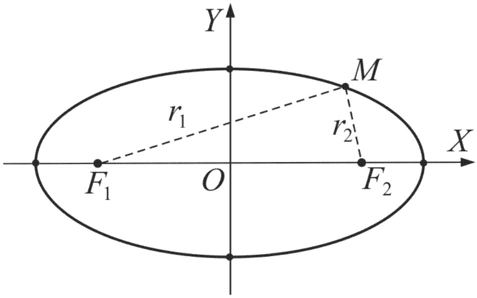
Երբ $a>b$, նշանակելով $c=\sqrt{a^2-b^2}$՝ դիտարկենք $F_1=(-c;\,0)$ և $F_2=(c;\,0)$ կետերը: Դրանք գտնվում են էլիպսի մեծ առանցքի վրա և կոչվում են էլիպսի ***կիզակետեր***:

Հարթության որևէ $M(x;y)$ կետի համար MF_1 և MF_2 հատվածները կոչվում են $M(x;y)$ կետի ***կիզակետային շառավիղներ***: Դրանց երկարությունները են համապատասխանաբար $r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ և $r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$:

ԹԵՈՐԵՄ (*էլիպսի կիզակետային հատկությունը*):

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսը հարթության այն բոլոր կետերի բազմությունն է, որոնց կիզակետային շառավիղների երկարությունների r_1+r_2 գումարը հաստատուն է և հավասար է $2a$-ի:

Ապացուցում: Դիցուք $M(x;y)$ կետը (25) էլիպսի որևէ կետ է: Ցույց տանք, որ $r_1+r_2=2a$:



(25) -ից ունենք $y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, հետևաբար

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 + b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2} =$$

$$= \left|a+\frac{c}{a}x\right|:$$

Նման ձևով ստանում ենք $r_2 = \left|a-\frac{c}{a}x\right|$:

Քանի որ $-a \le x \le a$, ուստի $-c \le \frac{c}{a}x \le c$: Բայց $0 < c < a$, հետևաբար $-a < \frac{c}{a}x < a$: Այստեղից՝ $a+\frac{c}{a}x > 0$, $a-\frac{c}{a}x > 0$ և ուրեմն $r_1 = a+\frac{c}{a}x$, $r_2 = a-\frac{c}{a}x$, որտեղից էլ՝ $r_1 + r_2 = 2a$:

Այժմ ապացուցենք հակառակը:

Դիցուք $M(x;y)$ -ը հարթության որևէ կետ է: Ունենք

$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$: Ցույց տանք, որ $r_1+r_2=2a$ պայմանին բավարարող ցանկացած M կետ պատկանում է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսին: Իրոք,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

պայմանից ունենք

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2:$$

Պարզեցնելով այն՝ ստանում ենք

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

որտեղից էլ՝ $x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$:

Քանի որ $b^2=a^2-c^2$, ուստի

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

որտեղից էլ ստանում ենք

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1:$$

Այսինքն՝ M կետը պատկանում է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսին: □

§ 23. ԷԼԻՊՍԻ ԷՔՍՑԵՆՏՐԻՍԻՏԵՏԸ, ԴԻՐԵԿՏՈՐՅԱԼ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Էլիպսի ***էքսցենտրիսիտետ*** կոչվում է $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ թիվը: Պարզ է, որ $0 \le \varepsilon < 1$, ընդ որում՝ $\varepsilon = 0$ միայն և միայն շրջանագծերի համար: Էքսցենտրիսիտետի երկրաչափական իմաստը պարզաբանվում է հետևյալ թեորեմով:

ԹԵՈՐԵՄ 1: Երկու էլիպսներ նման են միմյանց այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանք ունեն նույն էքսցենտրիսիտետը:

Նախքան թեորեմի ապացուցումը պարզաբանենք այն:

Երկրաչափական պատկերների նմանության հասկացությունը հիմնված է նմանության ձևափոխության հասկացության վրա: Երկու պատկերներ կոչվում են նման, եթե գոյություն ունի նմանության ձևափոխություն, որն այդ պատկերներից մեկն արտապատկերում է մյուսի վրա: Ինքը՝ նմանության ձևափոխությունը, կարող է սահմանվել որպես իզոմետրիկ ձևափոխության և հոմոտետիայի համադրույթ:

Սահմանում: Հարթության *հոմոտետիա* O կենտրոնով և $k > 0$ գործակցով կոչվում է հարթության կետերի այն ձևափոխությունը, որն ամեն մի M կետի համապատասխանեցնում է որոշակի M^* կետ այնպես, որ՝

1. անշարժ է թողնում O կետը՝ $O^* = O$,
2. ցանկացած M կետի համար $\overrightarrow{OM^*} = k \cdot \overrightarrow{OM}$:

Նկատենք, որ $k = 1$ դեպքում հոմոտետիան հարթության նույնական ձևափոխությունն է:

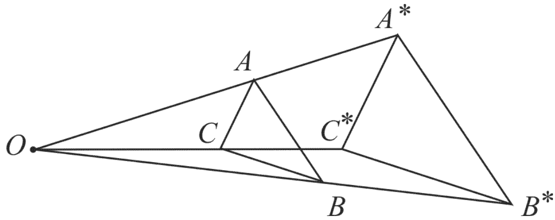
Եթե O-ն կորդինատների սկզբնակետն է, ապա $\overrightarrow{OM^*} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ պայմանից հետևում է, որ $M(x; y)$ և $M^*(x'; y')$ կետերի կորդինատները կապված են $x' = k \cdot x$, $y' = k \cdot y$ բանաձևերով:

Հեշտ է համոզվել, որ հոմոտետիայի արդյունքում՝

ա) ցանկացած ուղղի կերպարը կամ իրեն զուգահեռ ուղիղ է, կամ էլ համընկնում է իր հետ,

բ) ցանկացած MN հատվածի կերպարը M^*N^* հատվածն է, ընդ որում՝ $|M^*N^*| = k \cdot |MN|$,

գ) ցանկացած ABC եռանկյուն և նրա $A^*B^*C^*$ կերպարը նման եռանկյուններ են:



Ապացուցենք ա-ն: Եթե ℓ ուղղի հավասարումն է $Ax + By + C = 0$, ապա $x = \dfrac{x'}{k}$ և $y = \dfrac{y'}{k}$-ից հետևում է, որ $Ax' + By' + kC = 0$: Այսինքն՝ ℓ^*-ը պատկերվում է $Ax + By + kC = 0$ հավասարումով: Հետևաբար այն համընկնում է ℓ-ի հետ, երբ $C = 0$ կամ $k = 1$, և զուգահեռ է ℓ-ին մնացած դեպքերում: Մյուս՝ բ), գ) պնդումների ապացուցումը թողնում ենք ընթերցողին:

Այժմ ապացուցենք վերը ձևակերպված թեորեմը: Դիցուք ունենք միևնույն էքսցենտրիսիտետով երկու էլիպս: Տեղաշարժի և պտույտի միջոցով կարող ենք նրանց կենտրոնները համընկեցնել կորդինատների O սկզբնակետի հետ այնպես, որ էլիպսների մեծ առանցքները գտնվեն, օրինակ OX, առանցքի վրա: Դիցուք այս երկու էլիպսների հավասարումներն են

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ և } \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1:$$

Եթե նրանց էքսցենտրիսիտետները նույնն են, ապա

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1}$$

հավասարությունից ստանում ենք $\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{b_1}{b}$: Նշանակելով $k=\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{b_1}{b}$՝ կստանանք $a_1=k\cdot a,\ b_1=k\cdot b$:

Դիտարկենք հարթության հոմոտետիա O կենտրոնով և $k=\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{b_1}{b}$ գործակցով: Հարթության կամայական $M(x;y)$ կետի և նրա $M^*(x';y')$ կերպարի համար կունենանք

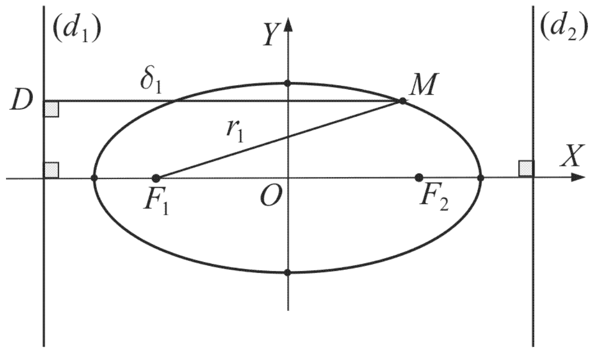
$$x'=\frac{a_1}{a}x\ ,\ \ y'=\frac{b_1}{b}y:$$

Այժմ տեսնում ենք, որ M-ը պատկանում է $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսին այն և միայն այն դեպքում, երբ M^*-ը պատկանում է $\dfrac{x'^2}{a_1^{\,2}}+\dfrac{y'^2}{b_1^{\,2}}=1$ էլիպսին: Հետևաբար $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսի կերպարը $\dfrac{x'^2}{a_1^{\,2}}+\dfrac{y'^2}{b_1^{\,2}}=1$ էլիպսն է:

Հակառակն ակնհայտ է. եթե երկու էլիպսներ նման են, ապա նրանց կիսաառանցքները համեմատական են, ուստի ունեն նույն էքսցենտրիսիտետը: □

Էլիպսն ունի ևս մի բնութագրիչ հատկություն՝ դա նրա ***դիրեկտորյալ հատկությունն է***:

Էլիպսի կիզակետային առանցքին ուղղահայաց, նրա կենտրոնից a/ε հեռավորության վրա գտնվող ուղիղներն անվանում են էլիպսի ***դիրեկտրիսներ***: Կանոնական կոորդինատային համակարգում դրանք d_1 և d_2 ուղիղներն են (տե՛ս նկար 29-ը)՝ համապատասխանաբար $x=-a/\varepsilon$ և $x=a/\varepsilon$ հավասարումներով, ընդ որում՝ ասում են, որ դրանցից d_1-ը համապատասխանում է F_1 կիզակետին, իսկ d_2-ը՝ F_2 կիզակետին:



Նկար 29

ԹԵՈՐԵՄ 2 (*էլիպսի դիրեկտորյալ հատկությունը*)*:* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսը հարթության այն կետերի բազմությունն է, որոնցից յուրաքանչյուրի համար որևէ կիզակետից ունեցած հեռավորության հարաբերությունը այդ կիզակետին համապատասխան դիրեկտրիսից ունեցած հեռավորությանը հաստատուն է և հավասար է էլիպսի էքսցենտրիսիտետին:

Ապացուցումը կատարենք, օրինակ, F_1 կիզակետի և նրան համապատասխան (d_1) դիրեկտրիսի համար:

Նշանակենք M կետի հեռավորությունը (d_1) դիրեկտրիսից δ_1-ով: Նախ ցույց տանք, որ $\dfrac{r_1}{\delta_1}=\varepsilon$:

Դիցուք M-ը էլիպսի կամայական կետ է: Ըստ նախորդ՝ § 22-ի՝ ունենք

$$r_1=a+\frac{c}{a}x=a+\varepsilon x,\ \delta_1=MD=h(M)=\frac{|\,x+a/\varepsilon\,|}{\sqrt{1+0}}=x+\frac{a}{\varepsilon}=\frac{x\varepsilon+a}{\varepsilon}:$$

Հետևաբար՝ $\dfrac{r_1}{\delta_1}=\varepsilon$:

Այժմ ապացուցենք հակառակը: Դիցուք հարթության որևէ $M(x;y)$ կետի համար $\frac{r_1}{\delta_1}=\varepsilon$, կամ որ նույնն է՝ $r_1=\varepsilon\cdot\delta_1$: Ցույց տանք, որ այդ կետը պատկանում է էլիպսին:

Ունենք $r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, իսկ $M(x;y)$ կետի հեռավորությունը $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ ուղղից կարող ենք գտնել § 19-ում բերված (15) բանաձևով՝ $\delta_1=h(M)=\frac{|x+a/\varepsilon|}{\sqrt{1+0}}=\left|x+\frac{a^2}{c}\right|$:

Կորդինատների տեսքով $r_1=\varepsilon\cdot\delta_1$ պայմանը համարժեք է

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\frac{c}{a}\cdot\left|x+\frac{a^2}{c}\right|=\left|a+\frac{c}{a}x\right|$$

պայմանին:

Այս հավասարման երկու մասը քառակուսի բարձրացնելով՝ ստանում ենք

$$x^2+2xc+c^2+y^2=a^2+2xc+\frac{c^2}{a^2}x^2,$$

այսինքն՝

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2,$$

կամ որ նույնն է՝ $\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2$, որտեղից էլ՝ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: Այսինքն՝ $M(x;y)$ կետը պատկանում է էլիպսին: □

§ 24. ՀԻՊԵՐԲՈԼ, ՏԵՍՔԸ, ԱՍԻՄՊՏՈՏՆԵՐԸ

Հիշեցնենք, որ ***հիպերբոլ*** կոչվում է հարթության OXY ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ

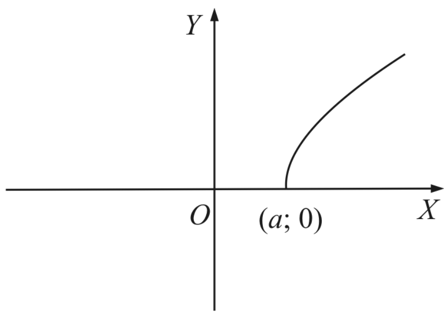
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (26)$$

տեսքի հավասարումով տրվող երկրորդ կարգի կորը:

Ինչպես և էլիպսի դեպքում, նույն դատողություններով ստանում ենք, որ հիպերբոլը համաչափ է կոորդինատային OX և OY առանցքների, ինչպես նաև կոորդինատների O սկզբնակետի նկատմամբ: Կոորդինատների O սկզբնակետը կոչվում է ***հիպերբոլի կենտրոն***: Հիպերբոլի հավասարումից հետևում է, որ $|x|\geq a$, իսկ y-ի արժեքների տիրույթն է՝ $(-\infty;+\infty)$: Ուստի հիպերբոլը անսահմանափակ կոր է և գտնվում է $-a\leq x\leq a$ շերտից դուրս: Այդ շերտի եզրագծի հետ հիպերբոլն ունի երկու ընդհանուր կետեր՝ $(a;0)$-ն և $(-a;0)$-ն, որոնք կոչվում են ***հիպերբոլի գագաթներ***:

Համաչափության շնորհիվ բավական է հիպերբոլի տեսքը ուսումնասիրել կոորդինատային առաջին քառորդում: Այս դեպքում (26) հավասարումից կարող ենք y-ը արտահայտել որպես x-ի ֆունկցիա՝ $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$; $x\geq a$ տեսքով:

Սա մոնոտոն աճող ֆունկցիա է, և նրա գրաֆիկն ունի հետևյալ տեսքը.



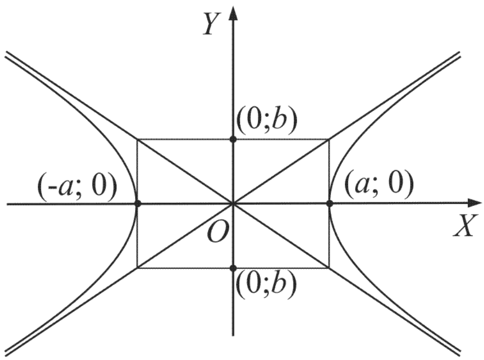
Հիպերբոլը չի հատում OY առանցքը իրական կետերում, իսկ OX-ը հատում է իր գագաթներում: Այդ իսկ պատճառով OX-ը և OY-ը կոչվում են $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլի համապատասխանաբար իրական և կեղծ առանցքներ, իսկ $2a$ և $2b$ թվերը կոչվում են համապատասխանաբար հիպերբոլի իրական և կեղծ առանցքների երկարություններ:

Ինչպես և էլիպսի դեպքում, սահմանվում է հիպերբոլի ***հիմնական ուղղանկյունը***՝ $-a\le x\le a$, $-b\le y\le b$: Հիպերբոլի հիմնական ուղղանկյան անկյունագծերն ընդգրկող $y=\pm\frac{b}{a}x$ ուղիղները կոչվում են նրա ***ասիմպտոտներ***: Դրանք չեն հատում հիպերբոլը (հիմնավորեք ինքնուրույն): Ապացուցենք, որ երբ $M(x;y)$ կետն անընդհատ շարժվում է հիպերբոլով այնպես, որ $|x|\to\infty$, ապա նրա հեռավորությունը մի ասիմպտոտից ձգտում է զրոյի: Համոզվենք դրանում $bx-ay=0$ ասիմպտոտի և կորդինատային առաջին քառորդում գտնվող $M_0\left(x_0;\frac{b}{a}\sqrt{x_0{}^2-a^2}\right)$ կետի համար: Այդ կետի հեռավորությունը նշված ասիմպտոտից (տե՛ս (15) բանաձևը § 19-ում) կլինի

$$h(M_0)=\frac{\left|bx_0-b\sqrt{x_0{}^2-a^2}\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{ba^2}{\sqrt{b^2+a^2}\left(x_0+\sqrt{x_0{}^2-a^2}\right)}:$$

Հետևաբար՝ $\lim\limits_{x_0\to\infty}h(M_0)=\lim\limits_{x_0\to\infty}\frac{ba^2}{\sqrt{b^2+a^2}\left(x_0+\sqrt{x_0{}^2-a^2}\right)}=0$:

Այժմ կատարելով համաչափություններ OX և OY առանցքների նկատմամբ՝ հիպերբոլի համար ստանում ենք նկար 30-ում պատկերված տեսքը:



Նկար 30

§ 25. ՀԻՊԵՐԲՈԼԻ ԿԻԶԱԿԵՏԱՅԻՆ ԵՎ ԴԻՐԵԿՏՈՐՅԱԼ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ինչպես էլիպսը, հիպերբոլը նույնպես օժտված է կիզակետային հատկությամբ: Նշանակելով $c = \sqrt{a^2 + b^2}$՝ դիտարկենք $F_1 = (-c;\ 0)$ և $F_2 = (c;\ 0)$ կետերը: Դրանք գտնվում են հիպերբոլի իրական առանցքի վրա և կոչվում են հիպերբոլի ***կիզակետեր***:

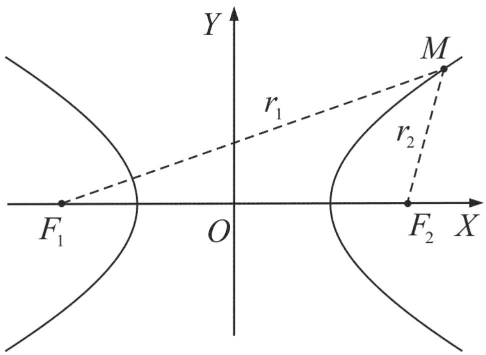
Հարթության որևէ $M(x; y)$ կետի համար MF_1 և MF_2 հատվածները՝ համապատասխանաբար

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ և } r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

երկարություններով, կոչվում են M կետի ***կիզակետային շառավիղներ***:

ԹԵՈՐԵՄ (*հիպերբոլի կիզակետային հատկությունը*)*:* Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ հիպերբոլը հարթության այն կետերի բազմությունն է, որոնցից յուրաքանչյուրի համար $|r_1 - r_2|$-ը հաստատուն է և հավասար է $2a$-ի:

Ապացույց: Դիցուք $M(x; y)$ կետը հիպերբոլի որևէ կետ է: Ցույց տանք, որ $|r_1 - r_2| = 2a$:



Ունենք $y^2 = b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2} - 1\right)$, հետևաբար՝ $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} =$

$$= \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 - b^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x + a\right| :$$

Նման ձևով ստանում ենք $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} =$

$$= \sqrt{(x-c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2xc + c^2 - b^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2xc + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x - a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x - a\right| :$$

Քանի որ $c > a$ և $|x| \geq a$, ուստի

$$r_1 = \begin{cases} \dfrac{c}{a}x + a, \text{ երբ } x \geq a \\ -\dfrac{c}{a}x - a, \text{ երբ } x \leq -a \end{cases}, \quad r_2 = \begin{cases} \dfrac{c}{a}x - a, \text{ երբ } x \geq a \\ -\dfrac{c}{a}x + a, \text{ երբ } x \leq -a \end{cases} :$$

Այստեղից՝ $r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a, \text{ երբ } x \geq a \\ -2a, \text{ երբ } x \leq -a \end{cases}$: Հետևաբար՝ $|r_1 - r_2| = 2a$:

Այժմ ապացուցենք հակառակը: Դիցուք $M = (x; y)$-ը հարթության որևէ կետ է, $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$: Ցույց տանք, որ եթե $|r_1 - r_2| = 2a$, ապա M-ը պատկանում է $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ հիպերբոլին: Իրոք, $\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$ պայմանից ունենք

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a\,,$$

հետևաբար՝

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2:$$

Պարզեցնելով այն՝ ստանում ենք

$$4cx-4a^2=\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,,$$

որտեղից էլ՝ $x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$:

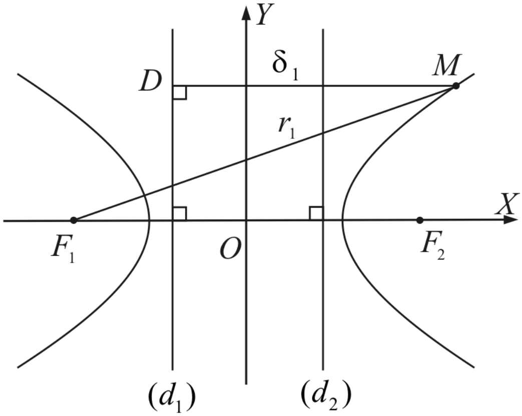
Քանի որ $c^2-a^2=b^2$, ուստի $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, որտեղից էլ ստանում ենք $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$:

Այսինքն՝ M կետը պատկանում է հիպերբոլին: □

Հիպերբոլի ***էքսցենտրիսիտետ*** կոչվում է $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$ թիվը:

Խնդիր: Ապացուցել, որ երկու հիպերբոլ նման են այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանք ունեն նույն էքսցենտրիսիտետը:

Հիպերբոլի կիզակետային առանցքին ուղղահայաց, նրա կենտրոնից a/ε հեռավորության վրա գտնվող ուղիղներն անվանում են հիպերբոլի ***դիրեկտրիսներ***: Կանոնական կոորդինատային համակարգում դրանք d_1 և d_2 ուղիղներն են՝ համապատասխանաբար $x=-a/\varepsilon$ և $x=a/\varepsilon$ հավասարումներով: Ընդ որում՝ ասում են, որ դրանցից d_1-ը համապատասխանում է F_1 կիզակետին, իսկ d_2-ը՝ F_2 կիզակետին (տե՛ս նկար 31-ը):



Նկար 31

ԹԵՈՐԵՄ 2 (*հիպերբոլի դիրեկտրիսային հատկությունը*):

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլը հարթության այն կետերի բազմությունն է, որոնցից յուրաքանչյուրի համար որևէ կիզակետից ունեցած հեռավորության հարաբերությունը այդ կիզակետին համապատասխան դիրեկտրիսից ունեցած հեռավորությանը հաստատուն է և հավասար է հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետին:

Ապացուցումը կատարենք, օրինակ, F_1 կիզակետի և նրան համապատասխան (d_1) դիրեկտրիսի համար (տե՛ս նկար 31-ը):

Նշանակենք M կետի հեռավորությունը (d_1) դիրեկտրիսից δ_1-ով: Նախ ցույց տանք, որ $\frac{r_1}{\delta_1}=\varepsilon$:

Դիցուք M-ը հիպերբոլի կամայական կետ է: Ունենք

$$r_1=\left|\frac{c}{a}x+a\right|=\left|a+\varepsilon x\right|,\ \delta_1=MD=h(M)=\frac{\left|x+\frac{a}{\varepsilon}\right|}{\sqrt{1+0}}=\left|x+\frac{a}{\varepsilon}\right|=\frac{\left|x\varepsilon+a\right|}{\varepsilon}:$$

Հետևաբար՝ $\frac{r_1}{\delta_1}=\varepsilon$:

Այժմ ապացուցենք հակառակը: Դիցուք հարթության որևէ $M(x;y)$ կետի համար $\dfrac{r_1}{\delta_1}=\varepsilon$, կամ որ նույնն է՝ $r_1=\varepsilon\cdot\delta_1$: Ցույց տանք, որ այդ կետը պատկանում է հիպերբոլին:

Ունենք

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ \delta_1=MD=h(M)=\frac{\left|x+\dfrac{a}{\varepsilon}\right|}{\sqrt{1+0}}=\left|x+\frac{a^2}{c}\right|:$$

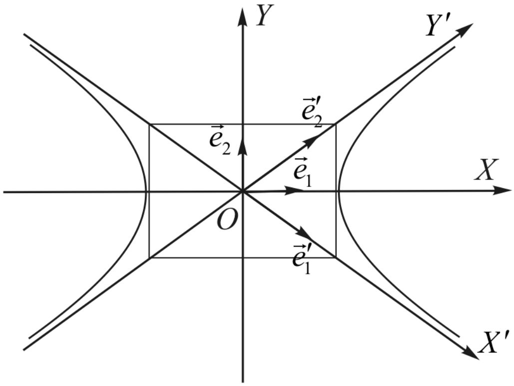
Այժմ $r_1=\varepsilon\cdot\delta_1$ պայմանը կընդունի $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\dfrac{c}{a}\cdot\left|x+\dfrac{a^2}{c}\right|$ տեսքը:

Այս հավասարման երկու մասը քառակուսի բարձրացնելով՝ ստանում ենք $x^2+2xc+c^2+y^2=a^2+2xc+\dfrac{c^2}{a^2}x^2$, այսինքն՝ $\left(\dfrac{c^2}{a^2}-1\right)x^2-y^2=c^2-a^2$, կամ որ նույնն է՝ $\dfrac{b^2}{a^2}x^2-y^2=b^2$, որտեղից էլ՝ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$:

Այսինքն՝ նշված հատկությամբ օժտված M կետը պատկանում է հիպերբոլին: □

Հիպերբոլի համար, բացի վերը սահմանված կանոնական կոորդինատային համակարգից, գոյություն ունեն այլ կոորդինատային համակարգեր, որոնց նկատմամբ ևս հիպերբոլն ունի պարզ հավասարումներ:

Որպես օրինակ կազմենք $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլի հավասարումը կոորդինատային $(O;\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'})$ համակարգում, որի առանցքները համընկնում են հիպերբոլի ասիմպտոտների հետ: Որպես բազիսային վեկտորներ վերցնենք $\overrightarrow{e_1'}=\{a;-b\}$, $\overrightarrow{e_2'}=\{a;\,b\}$:



OXY և $OX'Y'$ կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերից ունենք $\begin{cases} x = ax' + ay' \\ y = -bx' + by' \end{cases}$: Տեղադրելով դրանք $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ հավասարման մեջ՝ կստանանք $x'y' = 1/4$, որը փաստորեն հիպերբոլի հավասարումն է կոորդինատային $OX'Y'$ համակարգում:

Հիպերբոլը կոչվում է ***հավասարակողմ***, եթե $a = b$: Այն տրվում է $x^2 - y^2 = a^2$ հավասարումով:

Հեշտ է համոզվել, որ հիպերբոլը հավասարակողմ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա ասիմպտոտները փոխուղղահայաց են: Մասնավորապես, $x^2 - y^2 = a^2$ հավասարակողմ հիպերբոլի դեպքում, վերցնելով $\overrightarrow{e_1'} = \left\{1/\sqrt{2}\,; -1/\sqrt{2}\right\}$ և $\overrightarrow{e_2'} = \left\{1/\sqrt{2}\,;\, 1/\sqrt{2}\right\}$, ստանում ենք $(O;\, \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'})$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ նրա հավասարումն է՝ $x'y' = a^2/2$: Այստեղից, քանի որ հավասարակողմ հիպերբոլի ասիմպտոտները փոխուղղահայաց են, նկատում ենք, որ տվյալ հավասարակողմ հիպերբոլը ոչ այլ ինչ է, քան $y' = k/x'$, $k = a^2/2$ հակադարձ համեմատականության գրաֆիկը $OX'Y'$ կոորդինատային համակարգում:

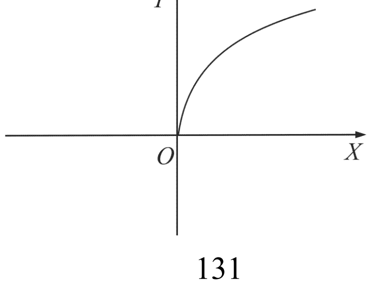
§ 26. ՊԱՐԱԲՈԼ, ՏԵՍՔԸ, ԴԻՐԵԿՏՈՐՅԱԼ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Պարաբոլը սահմանվում է որպես կոր, որը հարթության OXY ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրվում է

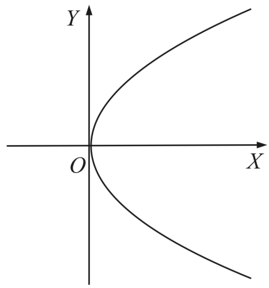
$$y^2 = 2px, \;\; p > 0 \tag{27}$$

տեսքի հավասարումով: Դա դպրոցական դասընթացից լավ հայտնի $y = ax^2$ պարաբոլն է (փոխված են x-ի և y-ի տեղերը և գործակցի տեսքը): Ակնհայտ է, որ եթե $(x; y)$ կետը պատկանում է պարաբոլին, ապա $(x; -y)$ կետը ևս պատկանում է նրան: Այսինքն՝ պարաբոլը համաչափ է կոորդինատային OX առանցքի նկատմամբ: Հավասարումից հետևում է, որ $x \geq 0$, իսկ y-ի արժեքների տիրույթն է՝ $(-\infty; +\infty)$: Ուստի պարաբոլը անսահմանափակ կոր է և գտնվում է $x \geq 0$, $y \in (-\infty; +\infty)$ կիսահարթությունում: Կոորդինատների O սկզբնակետը կոչվում է պարաբոլի գագաթ, OX առանցքի $F = \left(\dfrac{p}{2};\, 0\right)$ կետը կոչվում է պարաբոլի կիզակետ, OX առանցքը՝ կիզակետային առանցք, իսկ $p > 0$ թիվը՝ ***պարաբոլի բնութագրիչ***:

Համաչափության շնորհիվ բավական է պարաբոլի տեսքն ուսումնասիրել կոորդինատային առաջին քառորդում: Այս դեպքում (27) հավասարումից կարող ենք y-ը արտահայտել որպես x-ի ֆունկցիա՝ $y = \sqrt{2px}$: Սա մոնոտոն աճող ֆունկցիա է, և նրա գրաֆիկն ունի այսպիսի տեսք՝

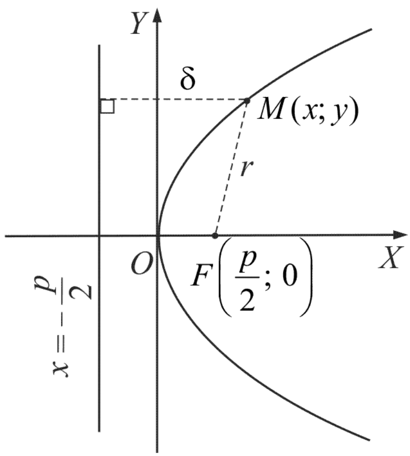


Դիտարկելով $x = y^2/2p$ ֆունկցիան և նրա ածանցյալը՝ կունենանք $x' = y/p$, $x'(0) = 0$: Այստեղ, շեղվելով ընդունված սովորույթից, y-ն է համարվել անկախ, իսկ x-ը՝ կախյալ փոփոխական: Հետևաբար պարաբոլը O կետում շոշափում է OY առանցքը: Արդյունքում պարաբոլի համար ստանում ենք նկար 32-ում պատկերված տեսքը:



Նկար 32

Պարաբոլի կիզակետային առանցքին ուղղահայաց, նրա կենտրոնից $p/2$ հեռավորության վրա գտնվող $x = -\dfrac{p}{2}$ ուղիղն անվանում են պարաբոլի ***դիրեկտրիս*** (տե՛ս նկար 33-ը):



Նկար 33

ԹԵՈՐԵՄ (*պարաբոլի դիրեկտորյալ հատկությունը*):

$y^2=2px$ պարաբոլը հարթության այն կետերի բազմությունն է, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասարահեռ է կիզակետից և դիրեկտրիսից:

Ապացուցում: Նախ ցույց տանք, որ եթե $M(x;y)$ կետի համար $r=\delta$, ապա M-ը պատկանում է պարաբոլին:

Ունենք $r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, $\delta=\left|x+\frac{p}{2}\right|$: Հետևաբար $r=\delta$ պայմանից հետևում է՝

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right| \Leftrightarrow \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2=2px:$$

Ցույց տանք հակառակը՝ եթե $M(x;y)$ կետը պատկանում է $y^2=2px$ պարաբոլին, ապա $r=\delta$: Ձևափոխենք r-ը՝ նրա արտահայտության մեջ տեղադրելով $y^2=2px$.

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=$$

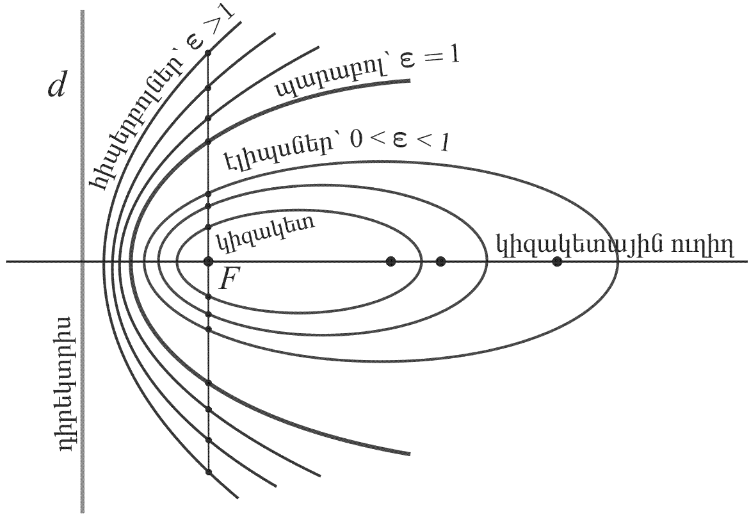
$$=\left|x+\frac{p}{2}\right|=x+\frac{p}{2}=\delta:\square$$

Ապացուցված հատկությունը ցույց է տալիս, որ պարաբոլի համար ևս կարելի է սահմանել էքսցենտրիսիտետ՝ համարելով այն հավասար 1-ի:

<u>Խնդիր:</u> Ապացուցել, որ ցանկացած երկու պարաբոլ նման են միմյանց:

Համեմատելով էլիպսի, հիպերբոլի և պարաբոլի դիրեկտորյալ հատկությունները՝ տեսնում ենք, որ դրանք կարող են սահմանվել մի ընդհանուր մոտեցումով: Ընտրելով F կետ, նրանով չանցնող d ուղիղ և $\varepsilon>0$ թիվ՝ դիտարկենք հարթության այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար F կետից նրա ունեցած հեռավորության հարաբերությունը d ուղղից ունեցած հեռավորությանը հաստատուն է և հավասար

ε-ի: Էլիպսի, հիպերբոլի և պարաբոլի դիրեկտորյալ հատկություններից հետևում է, որ $0<\varepsilon<1$ դեպքում նշված կետերի երկրաչափական տեղը էլիպս է, $\varepsilon>1$ դեպքում՝ հիպերբոլ, իսկ $\varepsilon=1$ դեպքում՝ պարաբոլ (տե՛ս նկար 34-ը):



Նկար 34

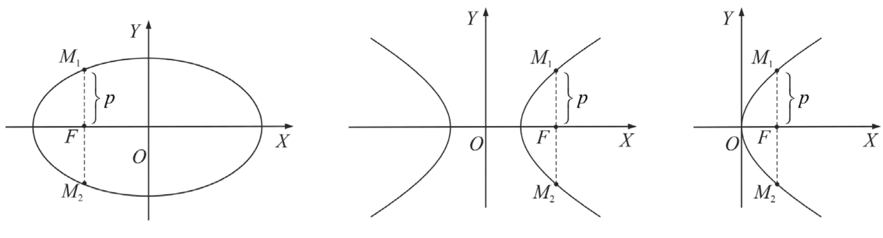
Գծագրից երևում է, որ պարաբոլը մի ընդհանուր F կիզակետով և ընդհանուր d դիրեկտրիսով էլիպսների ընտանիքը սահմանազատում է նույն F կիզակետով և d դիրեկտրիսով հիպերբոլների ընտանիքից: Նկար 34-ի իմաստով երբեմն ասում են նաև, որ պարաբոլը էլիպս է, որի երկրորդ կիզակետը գտնվում է անվերջությունում:

§ 27. ԷԼԻՊՍԻ, ՀԻՊԵՐԲՈԼԻ ԵՎ ՊԱՐԱԲՈԼԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԳԱԳԱԹԻՆ ԿԻՑ ԿՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՒՄ

Էլիպս, հիպերբոլ և պարաբոլ կորերից յուրաքանչյուրի համար կիզակետով անցնող և կիզակետային ուղղին ուղղահայաց լարի երկարության կեսը կոչվում է կորի *կիզակետային պարամետր* և նշանակվում է p-ով: Այդ երեք կորերի համար ներմուծվում է ևս մի պարամետր՝ $q=\varepsilon^2-1$ բանաձևով, որտեղ ε-ը կորի էքսցենտրիսիտետն է:

ԹԵՈՐԵՄ: Էլիպս, հիպերբոլ, պարաբոլ կորերից յուրաքանչյուրի համար գոյություն ունի այնպիսի $O'X'Y'$ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ այդ կորը տրվում է $y'^2=2px'+qx'^2$ տեսքի հավասարումով:

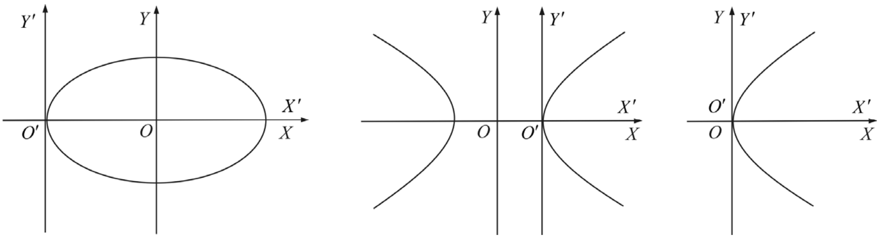
Ապացուցում: Նախ էլիպսի և հիպերբոլի դեպքում, դիտարկելով նրանց հավասարումները կանոնական կորդինատային համակարգում, կիզակետային պարամետրն արտահայտենք a և b կիսառանցքներով:



Էլիպսի դեպքում, տեղադրելով $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ հավասարման մեջ $x=-c$, կստանանք $y=\pm b\sqrt{1-\dfrac{c^2}{a^2}}=\pm\dfrac{b^2}{a}$: Հետևաբար M_1 և M_2 կետերի կորդինատներն են համապատասխանաբար $\left(-c;\dfrac{b^2}{a}\right)$ և $\left(-c;-\dfrac{b^2}{a}\right)$, որտեղից էլ՝ $p=\dfrac{M_1M_2}{2}=\dfrac{b^2}{a}$: Նույն զործողությունները կատարելով $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլի դեպքում՝ p -ի համար նորից ստանում ենք $\frac{b^2}{a}$ արժեքը:

Պարաբոլի դեպքում, տեղադրելով նրա $y^2=2px$ հավասարման մեջ $x=\frac{p}{2}$, գտնում ենք M_1 և M_2 կետերի կորդինատները՝ համապատասխանաբար $\left(\frac{p}{2};\ p\right)$ և $\left(\frac{p}{2};\ -p\right)$: Նշանակում է՝ պարաբոլի դեպքում կորի $\frac{M_1M_2}{2}=p$ կիզակետային պարամետրը նրա $y^2=2px$ հավասարման բնութագրիչն է:

Այժմ այս երեք կորերից յուրաքանչյուրի համար դիտարկենք $O'X'Y'$ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգ՝ O' սկզբնակետը տեղադրելով տվյալ կորի համար ընտրված գագաթում, ինչպես ցույց է տրված նկար 35-ում:



Նկար 35

Էլիպսի դեպքում, կատարելով կորդինատային համակարգի ձևափոխություն $x=x'-a,\ y=y'$ բանաձևերով, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ կանոնական հավասարումից ստանում ենք նրա հավասարումը $O'X'Y'$ համակարգում՝ $\frac{(x'-a)^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$: Այստեղից՝

$$y'^2 = b^2\left(1-\frac{(x'-a)^2}{a^2}\right) = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x'^2 + 2\frac{b^2}{a}x' - b^2 = 2px' - \frac{b^2}{a^2}x'^2 =$$

$$= 2px' + \left(\frac{-b^2}{a^2}\right)x'^2 = 2px' + \left(\frac{c^2-a^2}{a^2}\right)x'^2 = 2px' + \left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)x'^2 =$$

$$= 2px' + \left(\varepsilon^2 - 1\right)x'^2 = 2px' + qx'^2 :$$

Հիպերբոլի դեպքում, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ հավասարման մեջ տեղադրելով $x = x' + a,\ \ y = y'$ և կատարելով նույնանման գործողություններ, կստանանք

$$y'^2 = b^2\left(\frac{(x'+a)^2}{a^2} - 1\right) = 2px' + \frac{b^2}{a^2}x'^2 = 2px' + \frac{c^2-a^2}{a^2}x'^2 =$$

$$= 2px' + qx'^2 :$$

Նկատենք, որ պարաբոլի դեպքում $O'X'Y'$-ը համընկնում է OXY-ի հետ, և քանի որ $q = 0$, այս դեպքում ևս թեորեմը ճիշտ է: □

§ 28. ԷԼԻՊՍԻ, ՀԻՊԵՐԲՈԼԻ ԵՎ ՊԱՐԱԲՈԼԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԲԵՎԵՌԱՅԻՆ ԿՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՒՄ

Սահմանում: Կասենք, որ հարթության վրա տրված է ***բևեռային կորդինատային*** $(O;\ \ell)$ ***համակարգը,*** եթե՝

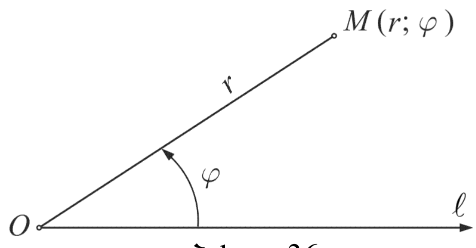
ա) սևեռած է մի կետ՝ O-ն, որն անվանում են ***բևեռ***,

բ) այդ կետից կիրառված է ℓ ճառագայթ, որը կոչվում է ***բևեռային առանցք***,

գ) այդ ճառագայթի վրա ընտրված է չափման միավոր,

դ) նշված է O կետի շուրջ ℓ ճառագայթի պտույտի երկու հնարավոր ուղղություններից մեկը՝ համարելով այն ***պտույտի դրական ուղղություն*** (օրինակ՝ O կետի շուրջ ժամսլաքի պտույտի հակառակ ուղղությունը):

Բևեռից տարբեր ցանկացած M կետի բևեռային կորդինատները սահմանվում են որպես $(r;\ \varphi)$ կարգավորված թվազույգ, որտեղ r-ը OM հատվածի երկարությունն է, իսկ φ-ն այն անկյունն է $(0 \le \varphi < 2\pi)$, որով պետք է պտտել ℓ-ը O կետի շուրջը ընտրված դրական ուղղությամբ, մինչև որ այն համընկնի OM ճառագայթի հետ (տե՛ս նկար 36-ը):

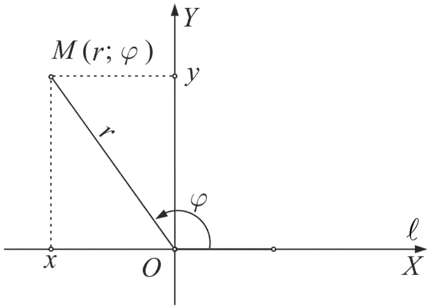


Նկար 36

Բևեռի, այսինքն՝ O կետի համար սահմանվում է միայն մի բևեռային կորդինատ՝ $r = 0$, իսկ անկյունային կորդինատ չի սահմանվում: Տվյալ $(O;\ \ell)$ բևեռային կորդինատային համակարգի համար սահմանվում է նրան ***կից*** OXY ***ուղղանկյուն կորդինատային համակարգ***, որի OX առանցքն անցնում է ℓ

ճառագայթով և ուղղված է նույն կողմը, ինչ և ℓ-ը, իսկ նրան ուղղահայաց OY առանցքն ընտրվում է այնպես, ինչպես պատկերված է նկար 37-ում:

Ակնհայտ է, որ կամայական $M \neq O$ կետի $(r;\ \varphi)$ բևեռային կոորդինատները և նրա $(x;\ y)$ ուղղանկյուն կոորդինատները կապված են հետևյալ բանաձևերով՝ $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$:



Նկար 37

Ինչպես տեսանք նախորդ պարագրաֆում, էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը կորի գագաթին կից կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրվում են նույն տեսքի հավասարումներով:

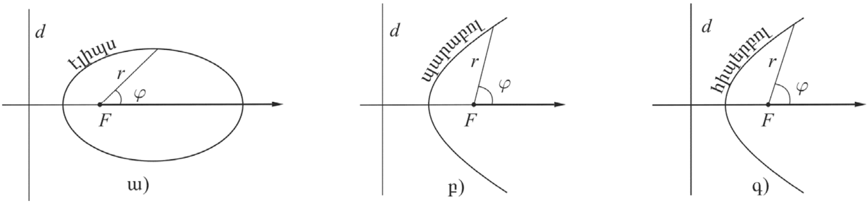
Պարզվում է, որ այդ կորերն ունեն նույն տեսքի հավասարումներ նաև բևեռային կոորդինատային համակարգում, եթե դիտարկվող կորերից յուրաքանչյուրի համար հատուկ ընտրված են բևեռը և բևեռային ճառագայթը: Դիցուք որպես բևեռ ընտրված է՝

ա) էլիպսի դեպքում նրա ձախակողմյան կիզակետը,

բ) պարաբոլի դեպքում նրա միակ կիզակետը,

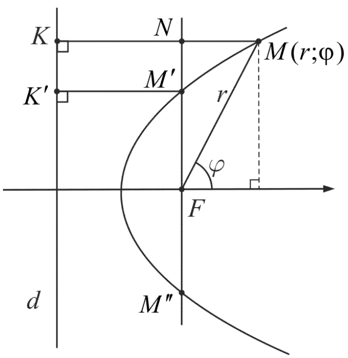
գ) հիպերբոլի դեպքում նրա աջակողմյան կիզակետը,

իսկ բևեռային առանցքն ընկած է կիզակետային ուղղի վրա և չի հատում տվյալ կիզակետին համապատասխանող դիրեկտրիսը: Ընդ որում՝ հիպերբոլի դեպքում սահմանափակվելու ենք նրա միայն մի՝ աջակողմյան ճյուղի դիտարկումով:



Բևեռային կոորդինատային համակարգի վերոհիշյալ ընտրությունը թույլ է տալիս բոլոր երեք կորերի հավասարումների արտածումը կատարել միաժամանակ:

Հավասարումներն արտածելիս օգտվելու ենք դիտարկվող կորերի դիրեկտորյալ հատկությունից: Ստորև՝ նկար 38-ում պատկերված կորը խորհրդանշում է դիտարկվող երեք տեսակի կորերից ցանկացածը:



Նկար 38

Դիցուք d-ն ընտրված կիզակետին համապատասխանող դիրեկտրիսն է, $M(r;\varphi)$-ն կորի կամայական կետ է, $M''M'$ հատվածը կորի կիզակետային լարն է, իսկ $p=|M''M'|/2$ և ε մեծությունները՝ համապատասխանաբար կորի կիզակետային պարամետրը և էքսցենտրիսիտետը:

Ըստ կորի դիրեկտորյալ հատկության՝ M և M' կետերի համար $\dfrac{MF}{MK}=\dfrac{M'F}{M'K'}=\varepsilon$, որտեղ $MF=r$, $MK=\delta$, $M'F=p$:

Հետևաբար՝ $\dfrac{r}{\delta}=\dfrac{p}{M'K'}=\varepsilon$: Այստեղից՝ $M'K'=p/\varepsilon$:

Մյուս կողմից՝ ինչպես տեսնում ենք նկար 38-ում,

$$\delta = MK = MN + NK = MN + K'M' = r\cos\varphi + p/\varepsilon :$$

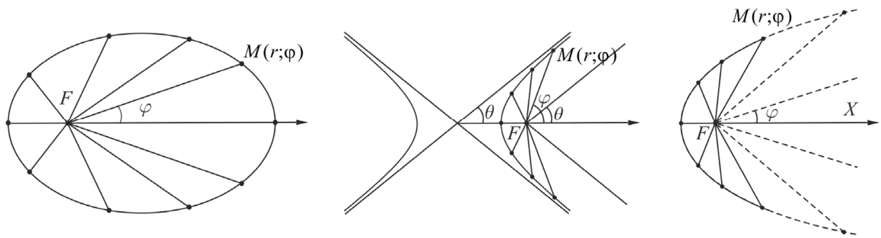
Ուրեմն՝ $r = \varepsilon\delta = \varepsilon r\cos\varphi + p$:

Ստացված հավասարումից r-ը կարելի է ներկայացնել որպես ֆունկցիա φ-ից՝

$$r = p/(1-\varepsilon\cos\varphi) \tag{28}$$

տեսքով:

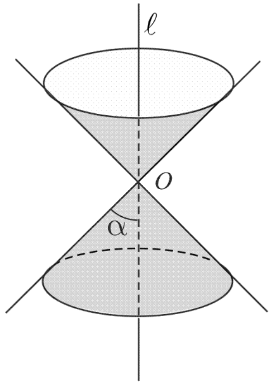
Անհրաժեշտ է նշել, որ չնայած միօրինակ տեսքին՝ (28) հավասարումը էլիպս, հիպերբոլ և պարաբոլ կորերից յուրաքանչյուրի դեպքում կտարբերվի մյուսներից ոչ միայն ε-ի արժեքով, այլև բևեռային φ անկյան փոփոխման տիրույթով: Նկատի ունենալով, որ $r > 0$, (28) հավասարումից ստանում ենք $1-\varepsilon\cos\varphi > 0$: Էլիպսի դեպքում, քանի որ $0 < \varepsilon < 1$, այստեղից ստանում ենք, որ φ-ն անկյան փոփոխման տիրույթն է՝ $0 \le \varphi < 2\pi$: Հիպերբոլի դեպքում նրա աջակողմյան ճյուղի համար ստանում ենք $\cos\varphi < \dfrac{1}{\varepsilon} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, ինչը համարժեք է նրան, որ $\theta < \varphi < 2\pi - \theta$, որտեղ $\theta = arctg(b/a)$, իսկ պարաբոլի դեպքում ունենք $\cos\varphi < 1$ և հետևաբար $0 < \varphi < 2\pi$:



Ստացված հավասարումները կիրառվում են երկնային մեխանիկայում մոլորակների շարժման Կեպլերի օրենքներն արտածելիս:

§ 29. ԷԼԻՊՍԸ, ՀԻՊԵՐԲՈԼԸ ԵՎ ՊԱՐԱԲՈԼԸ ՈՐՊԵՍ ԿՈՆԱԿԱՆ ՀԱՏՈՒՅԹՆԵՐ

Էլիպսը, հիպերբոլը, պարաբոլը, նրանց կիզակետային և դիրեկտորյալ հատկությունները հայտնի են վաղուց՝ դեռ մինչև մաթեմատիկայում տառային սիմվոլիկայի և անալիտիկ մեթոդների ստեղծումը:



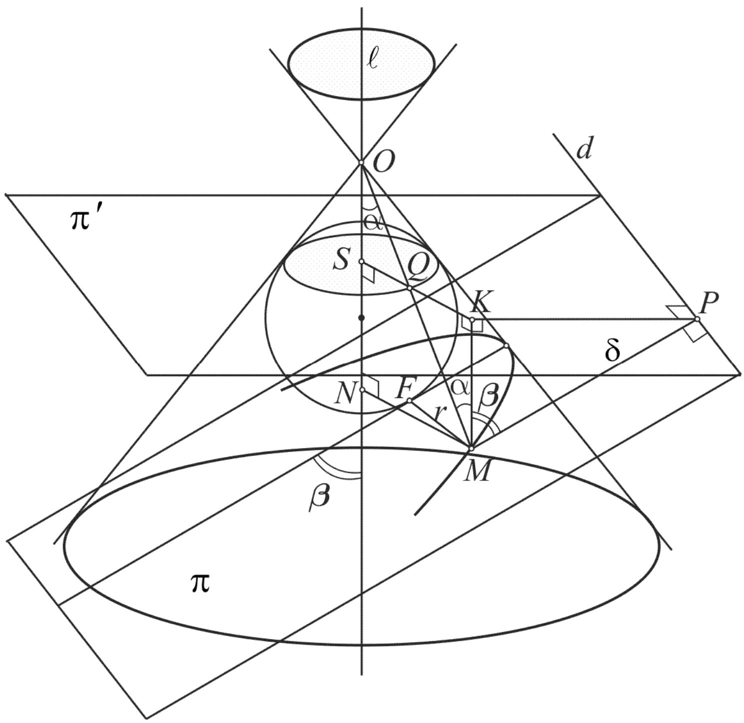
Դիցուք տրված են O կետում հատվող երկու ուղիղ, որոնք միմյանց հետ կազմում են α անկյուն, $0<\alpha<\pi/2$: Եթե այդ ուղիղներից մեկը պտտենք տարածության մեջ մյուսի շուրջն այնպես, որ նրանցով կազմված անկյունը մնա անփոփոխ, ապա առաջանում է մի մակերևույթ, որը կոչվում է կոնական մակերևույթ կամ կոն: Նկատենք, որ կոնական մակերևույթը, ի տարբերություն դպրոցական դասընթացում դիտարկվող կոնի, երկկողմանի «անվերջ տարածվող» մակերևույթ է: Անշարժ ուղիղը կոչվում է ***կոնի առանցք***, շարժական ուղղի դիրքերը պտույտի ընթացքում՝ ***կոնի ծնորդներ***, α անկյունը՝ ***կոնի բացվածք***, O կետը՝ ***կոնի գագաթ***:

Սահմանում: ***Կոնական հատույթ*** կոչվում է այն գիծը, որն առաջանում է կոնական մակերևույթը նրա գագաթով չանցնող որևէ հարթությամբ հատելիս:

Դիցուք ℓ առանցքը դիտարկվող π հարթության հետ կազմում է β անկյուն:

Թ Ե Ո Ր Ե Մ: Կոնական հատույթը $\beta > \alpha$ դեպքում էլիպս է, $\beta < \alpha$ հիպերբոլ է, իսկ $\beta = \alpha$ դեպքում` պարաբոլ:

Ապացուցում: Դիտարկենք այն խոռոչը, որը սահմանափակված է կոնական մակերևույթով և π հարթությամբ: Պատկերացնենք այդ խոռոչում տեղադրված մի գունդ, որը շոշափում է կոնական մակերևույթը շրջանագծով, իսկ π հարթությունը` ինչ-որ F կետում: Շոշափման շրջանագծով տանենք π' հարթություն, որը բնականաբար կլինի ուղղահայաց ℓ առանցքին: Դիցուք d-ն π և π' հարթությունների հատման ուղիղն է: Վերցնենք կամայական M կետ կոնական հատույթի վրա, միացնենք այն F կետին և M-ից իջեցնենք MP ուղղահայացը d ուղղին: Նշանակենք Q-ով MO ծնորդի հատման կետը շոշափման շրջանագծի հետ (տե՛ս նկար 42-ը):



Նկար 42

Քանի որ P և Q կետերը գտնվում են π' հարթության մեջ, որն ուղղահայաց է ℓ առանցքին, ուստի նրանց պրոյեկցիաները ℓ առանցքի վրա կհամընկնեն ℓ-ի և π'-ի հատման S կետի հետ: Հետևաբար MP-ի և MQ-ի պրոյեկցիաները ℓ առանցքի վրա կլինեն հավասար միմյանց՝

$$\text{պր}_{\ell} MP = \text{պր}_{\ell} MQ = SN:$$

Քանի որ $MP \perp d$, ուստի $\angle(MP, \ell) = \angle(\pi, \ell) = \beta$: Մյուս կողմից՝ $\angle(MQ, \ell) = \alpha$, հետևաբար՝

$$MP\cos\beta = MQ\cos\alpha = MK = SN,\ MK \perp \pi':$$

Ունենք նաև $MQ = MF$՝ որպես M կետից գնդին տարված շոշափողներ: Այստեղից ստանում ենք

$$\frac{r}{\delta} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} (= const), \text{ որտեղ } r = MF:$$

Այսպիսով՝ F-ը և d-ն ծառայում են համապատասխանաբար որպես կիզակետ և դիրեկտրիս կոնական հատույթի համար: Հետևաբար այն կամ էլիպս է, կամ հիպերբոլ, կամ պարաբոլ՝ կախված $\varepsilon = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ էքսցենտրիսիտետի արժեքներից:

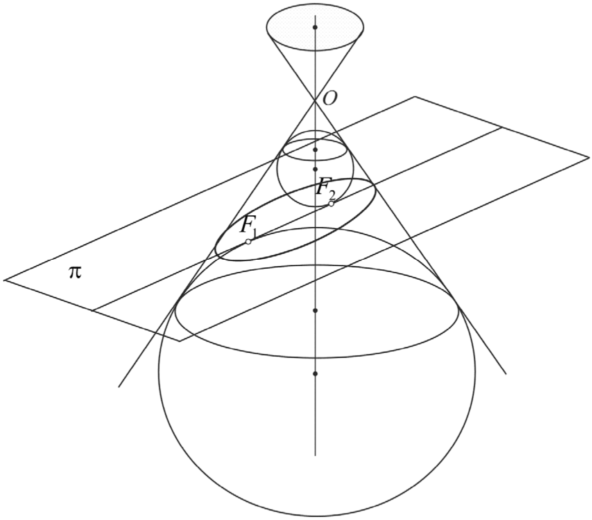
Եթե $\beta > \alpha$, ապա $\cos\beta < \cos\alpha$, հետևաբար $\varepsilon < 1$, և ուրեմն հատույթն էլիպս է:

Եթե $\beta < \alpha$, ապա $\cos\beta > \cos\alpha$, հետևաբար $\varepsilon > 1$, և ուրեմն հատույթը հիպերբոլ է:

Եթե $\beta = \alpha$ (այս դեպքում π հարթությունը զուգահեռ է կոնի ծնորդներից մեկին), ապա $\cos\beta = \cos\alpha$, հետևաբար $\varepsilon = 1$, և ուրեմն հատույթը պարաբոլ է:

Խնդիր: Հիմնվելով էլիպսի կիզակետային հատկության վրա՝ ապացուցել, որ $\beta > \alpha$ դեպքում կոնական հատույթը էլիպս է:

<u>Ցուցում</u>: Դիտարկել կոնին ներգծված և π հարթությունը F_1, F_2 կետերում շոշափող երկու գնդեր, ինչպես ցույց է տրված նկար 43-ում:



Նկար 43

Խնդիր: Ապացուցել, որ ուղիղ շրջանային գլանի հատումը ցանկացած հարթությամբ կամ էլիպս է, կամ էլ զուգահեռ, կամ համընկած ուղիղների զույգ է:

ԳԼՈՒԽ ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ
ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

§ 30. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԻ ՀԱՏՈՒՄՆ ՈՒՂՂԻ ՀԵՏ

Դիտարկենք երկրորդ կարգի կորի ընդհանուր հավասարումը՝

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0: \quad (29)$$

Այդ հավասարումը կարճ կարելի է գրառել

$$\varphi(x,y)+2\ell(x,y)+a_0=0$$

տեսքով, որտեղ $\varphi(x,y)=a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{21}yx+a_{22}y^2$, $a_{12}=a_{21}$-ը քառակուսային, իսկ $\ell(x,y)=a_1x+a_2y$-ը գծային բազմանդամներ են:

Օգտագործվելու են նաև

$$F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_1 \text{ և } F_2(x,y)=a_{21}x+a_{22}y+a_2$$

նշանակումները:

Նկատենք, որ կորի հավասարումը կարող ենք ներկայացնել նաև մի տեսքով՝

$$F(x,y)=x\cdot F_1(x,y)+y\cdot F_2(x,y)+a_1x+a_2y+a_0=0: \quad (30)$$

Պարամետրական տեսքով տրված

$$x=x_0+\alpha t\,,\ y=y_0+\beta t \quad (31)$$

ուղղի հատումը երկրորդ կարգի կորի հետ ուսումնասիրելու համար հետազոտենք (29) և (31) հավասարումներով կազմված համակարգը: Տեղադրելով (31)-ը (29)-ի մեջ՝ ստանում ենք t-ի նկատմամբ

$$At^2+2Bt+C=0 \quad (32)$$

հավասարումը, որտեղ

$$A=\varphi(\alpha,\beta)=a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2,$$

$$B=F_1(x_0,y_0)\alpha+F_2(x_0,y_0)\beta=$$

$=(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)\alpha+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_2)\beta$,

$C=F(x_0,y_0)=a_{11}{x_0}^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}{y_0}^2+2a_1x_0+2a_2y_0+a_0$:

Այսպիսով՝ ուղղի հատումը կորի հետ որոշվում է (32) հավասարման լուծումներով, ընդ որում՝ այդ լուծումները կախված են կորի նկատմամբ ուղղի դիրքից:

Սահմանում: Հարթության վրա (տարածության մեջ) ***ուղղություն*** կոչվում է միմյանց համագիծ բոլոր ոչ զրոյական վեկտորների ամեն մի բազմություն:

Պարզ է, որ ուղղությունը լիովին որոշվում է այդ բազմությունը ներկայացնող ցանկացած վեկտորով:

Ուղղի ուղղություն կոչվում է նրա որևէ ուղղորդ վեկտորով որոշվող ուղղությունը:

Հարց է ծագում, թե որքա՞ն ուղղություններ կան հարթության վրա (տարածության մեջ): Յուրաքանչյուր ուղղի համապատասխանեցնելով իր ուղղությունը՝ հեշտ է տեսնել, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն հարթության վրա (տարածության մեջ) բոլոր ուղղությունների և հարթության վրա (տարածության մեջ) որևէ սևեռված կետով անցնող բոլոր ուղիղների միջև:

Սահմանում: Կասենք, որ $\vec{a}=\{\alpha;\ \beta\}$ ուղղությունը տվյալ կորի համար ***ասիմպտոտական ուղղություն*** է, եթե $\varphi(\alpha,\beta)=0$, և ***ոչ ասիմպտոտական ուղղություն*** է, եթե $\varphi(\alpha,\beta)\neq 0$:

Սահմանման կոռեկտությունը հետևում է $\varphi(k\alpha,k\beta)=$ $=k^2\varphi(\alpha,\beta)$ հավասարությունից:

Այժմ (32)-ից հետևում է, որ ոչ ասիմպտոտական ուղղության ուղիղը կորը հատում է երկու կետում, որոնք իրարից տարբեր են կամ համընկած, իրական են կամ կեղծ: Ասիմպտոտական ուղղության ուղիղը կամ հատում է կորը մի կետում, կամ չի հատում կորը (այս դեպքում այդ ուղիղը կոչվում է *կորի ասիմպտոտ*), կամ էլ ամբողջովին մտնում է կորի կազմի մեջ:

§ 31. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԱԿԱՆ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Նկատենք, որ § 30-ում կորի ասիմպտոտական ուղղությունը սահմանվեց կորի հավասարման միջոցով, դիտարկվող կորդինատային համակարգի նկատմամբ:

ԹԵՈՐԵՄ: Կորի նկատմամբ տվյալ $\vec{a}=\{\alpha;\ \beta\}$ ուղղության ասիմպտոտական լինելը կախված չէ կորդինատային համակարգի ընտրությունից:

Նախ ապացուցենք օժանդակ լեմմա: Ենթադրենք՝ տրված են երկու $(O;\ \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ և $(O';\ \overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'})$ կորդինատային համակարգեր հարթության վրա: Ինչպես գիտենք, ցանկացած M կետի $(x;y)$ և $(x';y')$ կորդինատներն այդ համակարգերի նկատմամբ միմյանց հետ կապված են $x=c_{11}x'+c_{12}y'+c_1$, $y=c_{21}x'+c_{22}y'+c_2$ բանաձևերով:

Լեմմա: Եթե $\vec{a}$ վեկտորը դիտարկվող $(O;\ \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ և $(O';\ \overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'})$ կորդինատային համակարգերի նկատմամբ ունի համապատասխանաբար $\{\alpha;\ \beta\}$ և $\{\alpha';\ \beta'\}$ կորդինատներ, ապա

$$\alpha=c_{11}\alpha'+c_{12}\beta',\ \beta=c_{21}\alpha'+c_{22}\beta':$$

Դիցուք $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$, ընդ որում՝ M_1, M_2 կետերը $(O;\ \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ համակարգի նկատմամբ ունեն համապատասխանաբար $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, իսկ $(O';\ \overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'})$ համակարգի նկատմամբ՝ $(x_1';y_1')$, $(x_2';y_2')$ կորդինատներ: Հետևաբար $\alpha=x_2-x_1$, $\beta=y_2-y_1$, $\alpha'=x_2'-x_1'$, $\beta'=y_2'-y_1'$: Կորդինատների ձևափոխության բանաձևերից ունենք

$$x_i=c_{11}x_i'+c_{12}y_i'+c_1,\ y_i=c_{21}x_i'+c_{22}y_i'+c_2,\ i=1,2:$$

Այստեղից ստանում ենք

$$x_2-x_1=c_{11}(x_2'-x_1')+c_{12}(y_2'-y_1'),$$

$$y_2-y_1=c_{21}(x_2'-x_1')+c_{22}(y_2'-y_1'):$$

Այսինքն՝ $\alpha = c_{11}\alpha' + c_{12}\beta'$, $\beta = c_{21}\alpha' + c_{22}\beta'$:□

Այժմ ապացուցենք թեորեմը:

Դիցուք կորը $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ կորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված է

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

հավասարումով, և $\vec{a} = \{\alpha; \beta\}$ ուղղությունը տրված կորի նկատմամբ ասիմպտոտական ուղղություն է, այսինքն՝

$$\varphi(\alpha,\beta) = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0 :$$

Ստանանք այդ կորի հավասարում $(O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ կորդինատային համակարգի նկատմամբ՝

$$F'(x',y') = F(c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, c_{21}x' + c_{22}y' + c_2) =$$
$$= a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 :$$

Ակնհայտ է, որ

$$\varphi'(x',y') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a_{22}y'^2 = \varphi(c_{11}x' + c_{12}y', c_{21}x' + c_{22}y') :$$

Հետևաբար, ըստ լեմմայի, ստանում ենք

$$\varphi'(\alpha',\beta') = \varphi(c_{11}\alpha' + c_{12}\beta', c_{21}\alpha' + c_{22}\beta') = \varphi(\alpha,\beta) = 0 :$$

Այսպիսով՝ $\vec{a} = \{\alpha; \beta\}$ ուղղությունը ասիմպտոտական ուղղություն է կորի նկատմամբ նաև $(O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ կորդինատային համակարգում: □

Այս թեորեմը հնարավորություն է տալիս ուսումնասիրելու կորի ասիմպտոտական ուղղությունները՝ դիտարկելով կորի հավասարումը ցանկացած հարմար կորդինատային համակարգում: Պարզության տեսակետից ամենահարմարն իհարկե կանոնական կորդինատային համակարգերն են:

Օրինակ 1: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ և $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ կորերի ասիմպտոտական ուղղությունները որոշվում են միևնույն

$\varphi(\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}=0$ հավասարումով: Այստեղից երևում է, որ այդ կորերը չունեն ասիմպտոտական ուղղություն:

Օրինակ 2: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ և $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ կորերի դեպքում $\varphi(\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha^2}{a^2}-\dfrac{\beta^2}{b^2}=0$ հավասարումից ստանում ենք ճիշտ երկու ասիմպտոտական ուղղություն՝ $\{b;\, a\}$ և $\{b;\, -a\}$:

Այսպիսով՝ հիպերբոլն ունի երկու ասիմպտոտական ուղղություն, և դրանք նրա ասիմպտոտների ուղղություններն են: Իսկ հատվող իրական ուղիղների զույգի ասիմպտոտական ուղղությունները նրա կազմի մեջ մտնող ուղիղների ուղղություններն են:

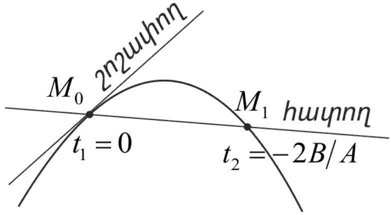
Օրինակ 3: $y^2=\pm a^2,\ y^2=0,\ y^2=2px$ կորերի դեպքում $\varphi(\alpha,\beta)=\beta^2=0$ հավասարումից ստանում ենք միայն մի ասիմպտոտական ուղղություն՝ $\{1;\, 0\}$:

Պարաբոլն ունի մի ասիմպտոտական ուղղություն, և այն նրա համաչափության առանցքի ուղղությունն է:

Խնդիր: Ապացուցել, որ երկրորդ կարգի կորերից ասիմպտոտներ ունեն միայն հիպերբոլները, զուգահեռ իրական կամ զուգահեռ կեղծ ուղիղների զույգերը և համընկած ուղիղների զույգերը: Դրանցից յուրաքանչյուրի համար նկարագրեք բոլոր ասիմպտոտները:

§ 32. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐԻ ՇՈՇԱՓՈՂՆԵՐԸ

Ինչպես գիտենք, ոչ ասիմպտոտական ուղղության ուղիղը հատում է կորը երկու կետում՝ իրական կամ կեղծ, իրարից տարբեր կամ համընկած: Այս վերջին դեպքում ուղիղը կոչվում է ***երկրորդ կարգի կորի շոշափող*** տվյալ կետում: Եթե ոչ ասիմպտոտական ուղղություն ունեցող ուղղի պարամետրական հավասարումներն են $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$, ապա այդ ուղղի և կորի հատման երկու կետերի կորդինատները որոշվում են $At^2 + 2Bt + C = 0$, $A = \varphi(\alpha, \beta) \neq 0$ քառակուսի հավասարման t_1, t_2 արմատներով: Եթե ուղղի $M_0(x_0; y_0)$ կետը վերցնենք կորի վրա, ապա $C = F(x_0, y_0) = 0$: Հետևաբար այս դեպքում ուղղի և կորի հատման կետերի համար պարամետրի t_1, t_2 արժեքները որոշվում են $At^2 + 2Bt = 0$ թերի քառակուսի հավասարման արմատներով, ընդ որում՝ $t_1 = 0$ արմատին համապատասխանում է կորի M_0 կետը:



Այսպիսով՝ կորին պատկանող $M_0(x_0; y_0)$ կետով անցնող և ոչ ասիմպտոտական ուղղություն ունեցող ուղիղը հանդիսանում է կորի շոշափող, եթե $At^2 + 2Bt = 0$ քառակուսի հավասարման արմատները համընկնում են՝ $t_1 = t_2 = 0$, որն էլ համարժեք է $B = 0$, այսինքն՝ $F_1(x_0, y_0)\alpha + F_2(x_0, y_0)\beta = 0$ պայմանին: Այստեղից էլ, եթե $F_1(x_0, y_0)$ և $F_2(x_0, y_0)$ թվերը միաժամանակ զրո չեն, ապա որոնելի շոշափողի համար գտնում ենք ուղղորդ վեկտոր՝

$$\{\alpha;\ \beta\}=\{-F_2(x_0,y_0);\ F_1(x_0,y_0)\}:$$

Այսպիսով՝ կորի $M_0(x_0;y_0)$ կետով նրան տարված շոշափողի հավասարումն է $\dfrac{x-x_0}{-F_2(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_1(x_0,y_0)}$ կամ համարժեք

$$(x-x_0)F_1(x_0,y_0)+(y-y_0)F_2(x_0,y_0)=0 \qquad (33)$$

հավասարումը: Հաշվի առնելով (30)-ը՝ ստանում ենք $F(x_0,y_0)=x_0\cdot F_1(x_0,y_0)+y_0\cdot F_2(x_0,y_0)+a_1x_0+a_2y_0+a_0=0$ և (33) հավասարումից շոշափողի համար ստանում ենք նաև

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)y+a_1x_0+a_2y_0+a_0=0 \qquad (34)$$

հավասարումը:

Որպես կիրառություն, կանոնական կորդինատային համակարգերում կազմենք $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսի, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլի և $y^2=2px$ պարաբոլի շոշափողների հավասարումները՝ տարված կորին պատկանող $M_0=(x_0;\ y_0)$ կետով: Էլիպսի դեպքում $a_{11}=\dfrac{1}{a^2}$, $a_{22}=\dfrac{1}{b^2}, a_0=1$, իսկ $a_{12}=a_1=a_2=0$: Օգտվելով (34) հավասարումից՝ ստանում ենք $\dfrac{x_0}{a^2}x+\dfrac{y_0}{b^2}y-1=0$: Նման ձևով հիպերբոլի և պարաբոլի շոշափողների համար ստացվում են համապատասխանաբար $\dfrac{x_0}{a^2}x-\dfrac{y_0}{b^2}y-1=0$ և $yy_0-p(x+x_0)=0$ հավասարումներրը:

Եթե $F_1(x_0,y_0)$ և $F_2(x_0,y_0)$ թվերից գոնե մեկը զրո չէ, ապա վերը գրված (33) հավասարումը, որպես ուղղի հավասարում, իմաստ ունի՝ անկախ այն բանից՝ ասիմպտոտական է, թե ոչ նրա ուղղությունը տվյալ կորի նկատմամբ: Այդ իսկ պատճառով, <u>լայն իմաստով</u> երկրորդ կարգի կորին շոշափող նրա $M_0(x_0;\ y_0)$ կետում կոչվում է (34) հավասարումով պատկերվող ուղիղը:

Դիտարկենք մի օրինակ: Դիցուք M_0 կետը պատկանում է $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ հատվող ուղիղների զույգին: Եթե M_0-ն չի համընկնում նրանց հատման կետի հետ, ապա այդ կետով կորին տարված շոշափողի հավասարումը, որն ստացվում է (33)-ից, համընկնում է $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ ուղիղների հավասարումներից նրա հետ, որին պատկանում է M_0-ն: Նկատենք, որ այդ ուղիղները շոշափողներ չեն սկզբում բերված սահմանման տեսանկյունից, բայց համարվում են շոշափողներ արդեն լայն իմաստով:

Իսկ եթե M_0-ն նշված ուղիղների զույգի հատման $M_0=(0;\,0)$ կետն է, ապա (33) հավասարումը իմաստազրկվում է, քանի որ $F_1(0,0)=F_2(0,0)=0$: Այսինքն՝ կորի այդպիսի կետով նրան տարված շոշափող գոյություն չունի, անգամ լայն իմաստով:

Չտրոհվող երկրորդ կարգի կորերի դեպքում, որոնց համար $F_1(x_0,y_0)$-ն և $F_2(x_0,y_0)$-ն միաժամանակ զրո չեն, (33) հավասարումով որոշվող շոշափողը համընկնում է մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում դիտարկվող $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետում տարված $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ շոշափողի հետ:

Ստորև բերվող ապացուցումը դուրս է գալիս առաջին կուրսի առաջին կիսամյակի ծրագրային շրջանակներից, և դեռևս անպատրաստ ուսանողը կարող է առայժմ շրջանցել այն:

Նկատենք, որ

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$$

երկրորդ կարգի կորի համար, քանի որ $F_1(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, $F_2(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$, ապա $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ և $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ թվերը միաժամանակ զրո չեն: Հետևաբար, ըստ անբացահայտ ֆունկցիայի մասին թեորեմի, $M_0(x_0; y_0)$ կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում կորը թույլ է տալիս $y = f(x)$ բացահայտ տրում: Հետևաբար M_0 կետի նշված շրջակայքում $F(x, f(x)) \equiv 0$: Այստեղից, հաշվելով դիֆերենցիալը, ստանում ենք $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f'(x) = 0$: Այսինքն՝ $f'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$, որտեղից էլ

$$f'(x_0) = -\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} : \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = -F_1(x_0, y_0) : F_2(x_0, y_0):$$

Տեղադրելով $f'(x_0)$-ի այս արժեքը $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ հավասարման մեջ՝ ստանում ենք $y = \frac{-F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)}(x - x_0) + y_0$, կամ որ նույնն է՝

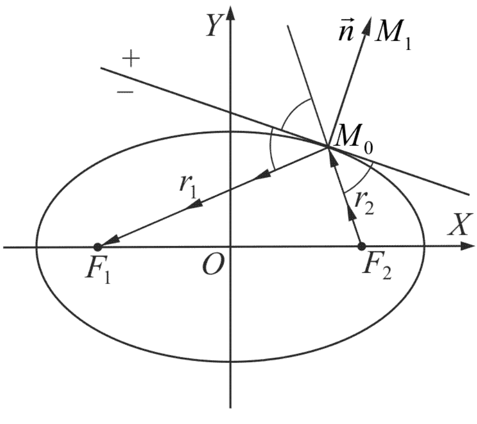
$$(x - x_0)F_1(x_0, y_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0) = 0:$$

Խնդիր: Ապացուցել, որ $Ax + By + c = 0$ ուղիղը շոշափում է $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ էլիպսին այն և միայն այն դեպքում, երբ $a^2 A^2 + b^2 B^2 = C^2$:

§ 33. ԷԼԻՊՍԻ, ՀԻՊԵՐԲՈԼԻ ԵՎ ՊԱՐԱԲՈԼԻ ՇՈՇԱՓՈՂՆԵՐԻ ԿԻՍՈՐԴԱՅԻՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

ԹԵՈՐԵՄ 1: Էլիպսի ցանկացած կետով տարված շոշափողը կիսում է շոշափման կետի կիզակետային շառավիղներով կազմված անկյան կից անկյունը:

Ապացուցում: Դիտարկենք $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսը, նրա $M_0(x_0;y_0)$ կետով տարված $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y-1=0$ շոշափողը և շոշափողի $\vec{n}=\left\{\frac{x_0}{a^2};\frac{y_0}{b^2}\right\}$ նորմալ վեկտորը (տե՛ս նկար 39-ը):



Նկար 39

Նկատենք, որ $\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{n}$ վեկտորի M_1 ծայրակետը գտնվում է շոշափողի նկատմամբ դրական կիսահարթության մեջ, իսկ $O(0;0)$ կետը գտնվում է բացասական կիսահարթության մեջ, ուստի $\vec{n}$-ը արտաքին նորմալ է: Այս հանգամանքը դեր չի խաղում հետագա դատողություններում, և մենք այն նշում ենք համենայն դեպս:

Ցույց տանք, որ $\angle\left(\overrightarrow{M_0F_1}, -\vec{n}\right) = \angle\left(\overrightarrow{M_0F_2}, -\vec{n}\right)$:

Ունենք $\overrightarrow{M_0F_1} = \{-c - x_0; -y_0\}$, $\overrightarrow{M_0F_2} = \{c - x_0; -y_0\}$:

Օգտվելով էլիպսի համար § 22-ում արտածված r_1-ի և r_2-ի արտահայտություններից՝ կարող ենք ձևափոխել այսպես՝

$$\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{M_0F_1}, -\vec{n}\right)\right) = \frac{(c + x_0)\dfrac{x_0}{a^2} + y_0\dfrac{y_0}{b^2}}{|-\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M_0F_1}|} = \frac{\dfrac{cx_0}{a^2} + \left(\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}\right)}{|\vec{n}| \cdot r_1} =$$

$$= \frac{\dfrac{cx_0}{a^2} + 1}{|\vec{n}| \cdot r_1} = \frac{\dfrac{cx_0}{a^2} + 1}{|\vec{n}| \cdot \left(a + \dfrac{c}{a}x_0\right)} = \frac{1}{a \cdot |\vec{n}|}:$$

Նման ձևով՝

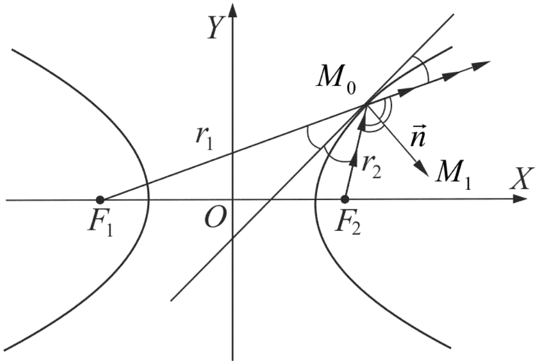
$$\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{M_0F_2}, -\vec{n}\right)\right) = \frac{\dfrac{(x_0 - c)x_0}{a^2} + y_0\dfrac{y_0}{b^2}}{|-\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M_0F_2}|} = \frac{\left(\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}\right) - \dfrac{cx_0}{a^2}}{|\vec{n}| \cdot r_2} =$$

$$= \frac{1 - \dfrac{cx_0}{a^2}}{|\vec{n}| \cdot r_2} = \frac{1 - \dfrac{cx_0}{a^2}}{|\vec{n}| \cdot \left(a - \dfrac{c}{a}x_0\right)} = \frac{1}{a \cdot |\vec{n}|}: \square$$

Թեորեմն ունի այսպիսի ֆիզիկական իմաստ: Էլիպսի կիզակետերից մեկում տեղադրված լույսի աղբյուրից արձակվող ճառագայթները, անդրադառնալով էլիպսից, հավաքվում են նրա մյուս կիզակետում (տե՛ս նկար 39-ը):

ԹԵՈՐԵՄ 2: Հիպերբոլի ցանկացած կետով տարված շոշափողը կիսում է շոշափման կետի կիզակետային շառավիղներով կազմված անկյունը:

Ապացուցում: Դիտարկենք $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլի $M_0(x_0;y_0)$ կետով տարված $\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y-1=0$ շոշափողը և նրա $\vec{n}=\left\{\frac{x_0}{a^2};-\frac{y_0}{b^2}\right\}$ նորմալ վեկտորը (տե՛ս նկար 40-ը):



Նկար 40

Բավական է ցույց տալ, որ $\angle\left(\overrightarrow{F_1M_0},\vec{n}\right)=\angle\left(\overrightarrow{M_0F_2},\vec{n}\right)$, կամ որ նույնն է՝

$$\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{F_1M_0},\vec{n}\right)\right)=\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{M_0F_2},\vec{n}\right)\right):$$

Օգտվելով հիպերբոլի համար § 25-ում արտածված r_1-ի և r_2-ի արտահայտություններից, երբ M_0 կետը գտնվում է նրա աջակողմյան ճյուղի վրա (մյուս դեպքում, երբ M_0 կետը գտնվում է հիպերբոլի ձախակողմյան ճյուղի վրա, ապացուցումը կատարվում է նման ձևով), կարող ենք գրել

$$\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{F_1M_0},\vec{n}\right)\right)=\frac{(c+x_0)\frac{x_0}{a^2}+y_0\left(-\frac{y_0}{b^2}\right)}{|\overrightarrow{F_1M_0}|\cdot|\vec{n}|}=$$

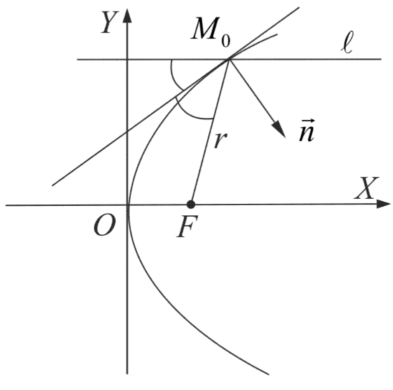
$$=\frac{\frac{cx_0}{a^2}+\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)}{r_1\cdot|\vec{n}|}=\frac{\frac{cx_0}{a^2}+1}{\left(\frac{c}{a}x+a\right)\cdot|\vec{n}|}=\frac{1}{a\cdot|\vec{n}|}:$$

$$\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{M_0F_1},\vec{n}\right)\right)=\frac{(c-x_0)\frac{x_0}{a^2}+(-y_0)\left(-\frac{y_0}{b^2}\right)}{|\overrightarrow{F_1M_0}|\cdot|\vec{n}|}=$$

$$=\frac{\frac{cx_0}{a^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)}{r_1\cdot|\vec{n}|}=\frac{\frac{cx_0}{a^2}-1}{\left(\frac{c}{a}x-a\right)\cdot|\vec{n}|}=\frac{1}{a\cdot|\vec{n}|}:\square$$

Թեորեմին կարելի է տալ այսպիսի մեկնաբանություն: Հիպերբոլի կիզակետերից մեկում տեղադրված լույսի աղբյուրից արձակվող ճառագայթները, անդրադառնալով հիպերբոլից, տարածվում են այնպես, կարծես թե լույսի աղբյուրը գտնվում է հիպերբոլի մյուս կիզակետում (տե՛ս նկար 40-ը):

ԹԵՈՐԵՄ 3: Պարաբոլի շոշափողը կիսում է շոշափման կետի կիզակետային շառավղով և այդ կետով անցնող OX առանցքին զուգահեռ ℓ ուղղով կազմված անկյունը (տե՛ս նկար 41-ը):



Նկար 41

Ապացուցում: Դիտարկենք $y^2 = 2px$ պարաբոլի $M_0(x_0; y_0)$ կետով տարված $px - y_0 y + px_0 = 0$ շոշափողը և նրա $\vec{n} = \{p; -y_0\}$ ներքին նորմալը:

Քանի որ $\vec{e_1} = \{1;\ 0\}$ վեկտորը ℓ-ի ուղղորդ վեկտոր է, ապա $\angle(\ell, \vec{n}) = \angle(\vec{e_1}, \vec{n})$: Ցույց տանք, որ $\angle(\vec{e_1}, \vec{n}) = \angle(\overrightarrow{M_0F}, \vec{n})$, որտեղ $\overrightarrow{M_0F} = \left\{\frac{p}{2} - x_0; -y_0\right\}$:

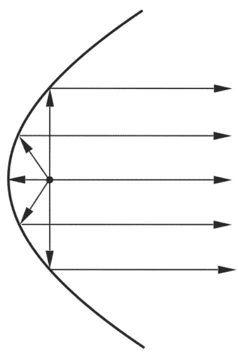
Ունենք $\cos\left(\angle(\vec{e_1}, \vec{n})\right) = \frac{p}{|\vec{n}|}$:

Մյուս կողմից՝

$$\cos\left(\angle(\overrightarrow{M_0F}, \vec{n})\right) = \frac{p\left(\frac{p}{2} - x_0\right) + y_0^2}{|\overrightarrow{M_0F}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\frac{p^2}{2} + px_0}{\left(\frac{p}{2} + x_0\right) \cdot |\vec{n}|} = \frac{p}{|\vec{n}|} \ :\square$$

Թեորեմն ունի այսպիսի ֆիզիկական իմաստ: Պարաբոլի կիզակետում տեղադրված լույսի աղբյուրից արձակվող ճառագայթները, անդրադառնալով պարաբոլից, տարածվում են պարաբոլի առանցքին զուգահեռ ուղղությամբ:

Պարաբոլի այս հատկությունը կիրառվում է տեխնիկայում լուսարձակներ և ալեհավաքներ պատրաստելիս:



§ 34. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐԻ ԿԵՆՏՐՈՆՆԵՐԸ

Սահմանում 1: M_0 կետը կոչվում է երկրորդ կարգի կորի ***համաչափության կենտրոն***, եթե կորի ցանկացած կետի համաչափ կետը M_0-ի նկատմամբ նույնպես պատկանում է կորին:

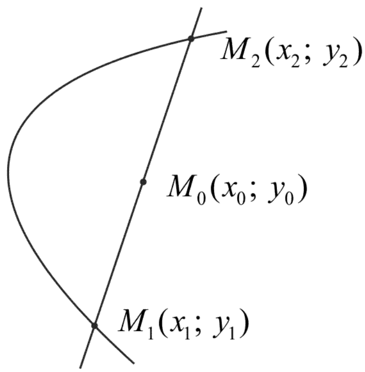
Սահմանում 2: M_0 կետը կոչվում է երկրորդ կարգի կորի ***կենտրոն***, եթե այն կիսում է այդ կետով անցնող բոլոր ոչ ասիմպտոտական ուղղության լարերը:

Համեմատելով այս սահմանումները՝ տեսնում ենք, որ կորի համաչափության կենտրոնն իհարկե հանդիսանում է կորի կենտրոն: Քիչ ավելի ուշ կհամոզվենք, որ հակառակը նույնպես ճիշտ է, այսինքն՝ կորի ամեն մի կենտրոն նաև համաչափության կենտրոն է, և կսովորենք գտնել դրանք:

Դիցուք ունենք կոր, որն ինչ-որ OXY աֆինական կորդինատային համակարգում տրված է

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$$

հավասարումով, և $M_0(x_0;\,y_0)$ կետով անցնող ոչ ասիմպտոտական ուղղության ուղիղ՝ տրված $x=x_0+\alpha t$, $y=y_0+\beta t$ պարամետրական հավասարումներով:



Դիցուք M_1-ը և M_2-ը ուղղի և կորի հատման կետերն են՝ իրական կամ կեղծ: Այսուհետև M_1M_2 հատվածը կանվանենք հատումից ստացված լար ($M_1=M_2$ դեպքը չի բացառվում): Նախ պարզենք, թե ի՞նչ պայմանի դեպքում $M_0(x_0;\,y_0)$ կետը կլինի M_1M_2 լարի միջնակետը: Դիցուք $M_1(x_1;\,y_1)$ և $M_2(x_2;\,y_2)$ կետերը համապատասխանում են պարամետրի համապատասխանաբար t_1 և t_2 արժեքներին, որոնք, ինչպես գիտենք, $At^2+2Bt+C=0$, $A=\varphi(\alpha,\beta)\neq 0$ քառակուսի հավասարման արմատներն են: Այսինքն՝ $x_1=x_0+\alpha t_1$, $y_1=y_0+\beta t_1$ և $x_2=x_0+\alpha t_2$, $y_2=y_0+\beta t_2$: Ըստ հատվածի միջնակետի կորդինատների բանաձևի՝

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=x_0+\frac{t_1+t_2}{2}\alpha,\ y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=y_0+\frac{t_1+t_2}{2}\beta:$$

Այստեղից, քանի որ α և β թվերից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից, ստանում ենք $t_1+t_2=0$: Մյուս կողմից, ըստ Վիետի թեորեմի, $t_1+t_2=-\dfrac{B}{A}$: Ուստի որպեսզի M_0-ն լինի այդ կետով անցնող ոչ ասիմպտոտական $\{\alpha;\beta\}$ ուղղության լարի միջնակետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$B=F_1(x_0,y_0)\alpha+F_2(x_0,y_0)\beta=0: \tag{35}$$

ԹԵՈՐԵՄ 1: $M_0(x_0;\,y_0)$ կետը երկրորդ կարգի կորի կենտրոն է այն և միայն այն դեպքում, երբ $F_1(x_0,y_0)=0$, $F_2(x_0,y_0)=0$:

Ապացույց: Պայմանի բավարարությունն ակնհայտ է, ցույց տանք անհրաժեշտությունը: Վերցնենք տվյալ կորի համար ցանկացած երկու տարբեր ոչ ասիմպտոտական $\{\alpha_1;\beta_1\}$ և $\{\alpha_2;\beta_2\}$ ուղղություններ: Այդպիսիք կան, քանի որ (տե՛ս § 30) հարթության վրա ուղղությունները անթիվ են, իսկ ինչպես գիտենք (տե՛ս § 31), կորը կարող է ունենալ ոչ ավելի, քան երկու ասիմպտոտական ուղղություն: Համաձայն (35)-ի՝ այդ ուղղությունների համար ունենք

$$\begin{cases}F_1(x_0,y_0)\alpha_1+F_2(x_0,y_0)\beta_1=0\\ F_1(x_0,y_0)\alpha_2+F_2(x_0,y_0)\beta_2=0\end{cases}:$$

Այստեղից, քանի որ $\alpha_1:\beta_1\neq\alpha_2:\beta_2$, ստանում ենք

$$F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0:\square$$

Հետևություն: Կորի կենտրոնները ոչ այլ ինչ են, քան
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0 \end{cases} \quad (36)$$

գծային հավասարումների համակարգի լուծումները:

Մասնավորապես, երբ $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, ապա կորն ունի մի կենտրոն: Այդպիսի կորերը կոչվում են ***միակենտրոն կորեր***: Մնացած կորերի համար $\delta = 0$, և դրանք կոչվում են ***պարաբոլական կորեր***:

Այժմ ավարտենք կորի կենտրոնի և կորի համաչափության կենտրոնի՝ վերը բերված սահմանումների համարժեքության ապացուցումը:

ԹԵՈՐԵՄ 2: Երկրորդ կարգի կորի ցանկացած կենտրոն կորի համաչափության կենտրոն է:

Ապացուցում: Դիցուք $M_0(x_0;\ y_0)$-ն
$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$
կորի կենտրոն է: Կատարենք կորդինատային համակարգի զուգահեռ տեղափոխություն՝ որպես նոր՝ $O'X'Y'$ համակարգի սկզբնակետ ընտրելով M_0-ն: Ըստ կորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերի՝ ունենք $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$: Հետևաբար կորի հավասարումը նոր համակարգում պարզեցումներից հետո ընդունում է հետևյալ տեսքը.
$$F'(x', y') = F(x' + x_0, y' + y_0) = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 +$$
$$+2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x' + 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y' + a_{11}x_0{}^2 + 2a_{12}x_0y_0 +$$
$$+a_{22}y_0{}^2 + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a_0 = 0:$$

Քանի որ M_0-ն կորի կենտրոն է, այստեղից, համաձայն (36)-ի, ստանում ենք
$$F'(x', y') = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a_0' = 0, \quad (37)$$
որտեղ նշանակել ենք

$$a_0' = a_{11}x_0^{\ 2} + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^{\ 2} + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a_0 :$$

Այժմ (37)-ից հեշտ է նկատել, որ ցանկացած (x', y') կետի համար, եթե $F'(x', y') = 0$, ապա նաև $F'(-x', -y') = 0$: Հետևաբար նոր համակարգի $(0;0)$ սկզբնակետը, այսինքն՝ M_0 կետը, կորի համաչափության կենտրոնն է: □

Նկատենք, որ կորի համաչափության կենտրոնի սահմանումը զուտ երկրաչափական է, և հետևաբար այն անկախ է կորդինատային համակարգից: Ուստի կորի կենտրոնները գտնելիս կարելի է օգտվել ցանկացած հարմար կորդինատային համակարգից:

Օրինակ 1: $\dfrac{x^2}{a^2} + \varepsilon\dfrac{y^2}{b^2} + \lambda = 0$ հավասարումները, որտեղ $\varepsilon = \pm 1$, իսկ $\lambda = \pm 1$ կամ 0, ներկայացնում են իրական և կեղծ էլիպսները, հիպերբոլը, հատվող իրական և հատվող կեղծ ուղիղների զույգերը: Այս կորերից յուրաքանչյուրի համար (36) համակարգն ընդունում է $\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}x + 0\cdot y = 0 \\ 0\cdot x + \varepsilon\dfrac{1}{b^2}y = 0 \end{cases}$ տեսքը, որտեղից $x = y = 0$: Հետևաբար վերը թվարկված կորերը միակենտրոն կորեր են, իսկ ինքը՝ կենտրոնը, կանոնական կորդինատային համակարգի սկզբնակետն է:

Օրինակ 2: Մյուս՝ պարաբոլական կորերից իրական կամ կեղծ զուգահեռ ուղիղների զույգերը, ինչպես նաև համընկած ուղիղների զույգերը կանոնական կորդինատային համակարգում տրվում են $y^2 + c = 0$ միացյալ հավասարումով: Նրանք բոլորն էլ ունեն անթիվ կենտրոններ, որոնք կազմում են մի ամբողջ ուղիղ: Իրոք, այս կորերից յուրաքանչյուրի համար (36) համակարգն ընդունում է $\begin{cases} 0\cdot x + 0\cdot y = 0 \\ 0\cdot x + 1\cdot y = 0 \end{cases}$ տեսքը, որի լուծումները կազմում են $y = 0$ ուղիղը:

Օրինակ 3: Ցույց տանք, որ պարաբոլական կորերից վեր-ջինը, այն է՝ պարաբոլը, միակ երկրորդ կարգի կորն է, որը կենտրոն չունի: Իրոք, $y^2 - 2px = 0$ հավասարման համար (36)-ն ընդունում է $\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y - p = 0 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y = 0 \end{cases}$ տեսքը, որն իհարկե ան-համատեղելի համակարգ է:

§ 35. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐԻ ՏՐԱՄԱԳԾԵՐԸ

Երկրորդ կարգի կորի համաչափության առանցքների ուսումնասիրման և որոնման խնդիրը լուծվում է կորի տրամագծի հասկացության միջոցով, որի ներմուծման համար հիմք է ծառայում շրջանագծի տրամագծի հատկությունը, ըստ որի՝ այն միմյանց զուգահեռ բոլոր լարերի միջնակետերի երկրաչափական տեղն է:

Եթե $F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ երկրորդ կարգի կորի համար $\{\alpha;\ \beta\}$-ն սևեռած որևէ ոչ ասիմպտոտական ուղղություն է, ապա այդ ուղղությանը զուգահեռ բոլոր լարերի միջնակետերի երկրաչափական տեղը կոչվում է ***կորի տվյալ ուղղությանը համալուծ տրամագիծ***:

Կազմենք կորի տրված ուղղությանը համալուծ տրամագծի հավասարումը: Ինչպես գիտենք, ոչ ասիմպտոտական ուղղության $x=x_0+\alpha t$, $y=y_0+\beta t$ ուղղի և կորի հատումից առաջացած լարի համար $M_0(x_0;\ y_0)$ կետը միջնակետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $B=F_1(x_0,y_0)\alpha+F_2(x_0,y_0)\beta=0$: Հետևաբար սևեռած $\{\alpha;\ \beta\}$ ուղղությանը զուգահեռ բոլոր լարերի միջնակետերի բազմությունը տրվում է

$$F_1(x,y)\alpha+F_2(x,y)\beta=0,$$

այսինքն՝

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_1)\alpha+(a_{21}x+a_{22}y+a_2)\beta=0$$

հավասարումով, որը վերախմբավորելով՝ կարող ենք գրել

$$(a_{11}\alpha+a_{12}\beta)x+(a_{21}\alpha+a_{22}\beta)y+a_1\alpha+a_2\beta=0 \quad (38)$$

տեսքով: Ցույց տանք, որ կորի տրամագիծը ուղիղ է: Դրա համար համոզվենք, որ (38) հավասարման մեջ x և y փոփոխականների գործակիցներից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից: Ենթադրենք հակառակը՝

$$a_{11}\alpha+a_{12}\beta=0,\quad a_{21}\alpha+a_{22}\beta=0:$$

Սրանցից առաջինը բազմապատկելով α -ով, իսկ երկրորդը՝ β-ով և ստացված արտահայտությունները գումարելով՝ կստանանք

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0,$$

որը հակասում է $\varphi(\alpha,\beta) \neq 0$ պայմանին:

Տրամագծի հատկությունները:

1. Տվյալ կորի ցանկացած տրամագիծ անցնում է նրա բոլոր կենտրոններով:

2. Զուգահեռ կամ համընկած ուղիղների զույգն ունի մի տրամագիծ, և այն համընկնում է կորի կենտրոնների ուղղի հետ:

3. $y^2 = 2px$ պարաբոլի տրամագծերը OX առանցքը և նրան զուգահեռ բոլոր ուղիղներն են:

Իրոք, (38) հավասարումն այս դեպքում ընդունում է $\beta y - p\alpha = 0$ տեսք, որտեղ $\beta \neq 0$ շնորհիվ $\varphi(\alpha,\beta) \neq 0$ պայմանի:

Խնդիր: Հիմնվելով տրամագծի հատկությունների վրա՝ ապացուցել, որ պարաբոլը կենտրոն չունի:

Այժմ նկարագրենք միակենտրոն կորերի տրամագծերը:

ԹԵՈՐԵՄ: Միակենտրոն կորի կենտրոնով անցնող բոլոր ոչ ասիմպտոտական ուղղության ուղիղները, և միայն դրանք, այդ կորի տրամագծերն են:

Ապացուցում: Դիցուք

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

հավասարումը պատկերում է միակենտրոն կոր, այսինքն՝ $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ և $M_0(x_0;\, y_0)$ կետը նրա կենտրոնն է՝

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0,\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0:$$

Կենտրոնով անցնող ցանկացած ուղղի հավասարում կարող է ներկայացվել $m(x - x_0) + n(y - y_0) = 0$, կամ որ նույնն է՝

$$mx + ny - mx_0 - ny_0 = 0 \qquad (39)$$

տեսքով: Դիցուք այդ ուղղի ուղղությունը ոչ ասիմպտոտական է, այսինքն՝ $\varphi(n,-m)\neq 0$:

Որպեսզի (39) հավասարումը պատկերի կորի տրամագիծ, այսինքն՝ ներկայացվի (38) տեսքով, բավական է, որ գոյություն ունենա այնպիսի ոչ ասիմպտոտական $\{\alpha;\ \beta\}$ ուղղություն, որ

$$m=a_{11}\alpha+a_{12}\beta\,,\ n=a_{21}\alpha+a_{22}\beta\,,\ -mx_0-ny_0=a_1\alpha+a_2\beta:$$

Նկատենք, որ $\delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2\neq 0$ պայմանի շնորհիվ առաջին երկու հավասարումներից α-ն և β-ն որոշվում են միարժեքորեն: Ստուգենք երրորդ հավասարությունը և ցույց տանք, որ գտնված $\{\alpha;\ \beta\}$ ուղղությունը ոչ ասիմպտոտական ուղղություն է:

Ունենք $-mx_0-ny_0=(a_{11}\alpha+a_{12}\beta)x_0+(a_{21}\alpha+a_{22}\beta)y_0=$

$=-(a_{11}x_0+a_{21}y_0)\alpha-(a_{12}x_0+a_{22}y_0)\beta=(a_1\alpha+a_2\beta)$:

Այժմ համոզվենք, որ $\varphi(\alpha,\beta)\neq 0$: Ենթադրենք հակառակը՝ $\varphi(\alpha,\beta)=0$: Այդ դեպքում $\begin{cases} m=(a_{11}\alpha+a_{12}\beta) \\ n=(a_{21}\alpha+a_{22}\beta) \end{cases}$ համակարգից ստանում ենք

$$m\alpha+n\beta=(a_{11}\alpha+a_{12}\beta)\alpha+(a_{21}\alpha+a_{22}\beta)\beta=$$

$$=(a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2)=\varphi(\alpha,\beta)=0:$$

Հետևաբար՝ $\alpha:\beta=n:(-m)$: Իսկ սա նշանակում է, որ $\{n;\ -m\}\,||\,\{\alpha;\ \beta\}$, այսինքն՝ (39) ուղղի $\{n;\ -m\}$ ուղղությունը նույնպես ասիմպտոտական է, ինչը հակասում է պայմանին:

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է համոզվել, որ միակենտրոն կորի կենտրոնով անցնող ասիմպտոտական ուղղության ուղիղը չի կարող լինել տրամագիծ:

Էլիպսի, կեղծ էլիպսի և հատվող կեղծ ուղիղների զույգի դեպքում դա ակնհայտ է, քանի որ նրանք չունեն ասիմպտոտական ուղղություն:

Դիտարկենք $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլը և $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ հատվող իրական ուղիղների զույգը: Երկու դեպքում էլ կորի կենտրոնով անցնող ասիմպտոտական ուղղության ուղիղները $bx \pm ay=0$ ուղիղներն են: Իսկ տրամագծի (37) հավասարումն ընդունում է $\frac{\alpha}{a^2}x-\frac{\beta}{b^2}y=0$ տեսքը: Ցույց տանք, օրինակ, որ $bx+ay=0$ ուղիղը տրամագիծ չէ: Ենթադրելով հակառակը՝ տրամագծի և $bx+ay=0$ ուղղի համընկնելիության պայմանից ստանում ենք $\alpha:\beta=-a:b$, հետևաբար $\{-a;\, b\}\,\|\,\{\alpha;\, \beta\}$: Ստացվեց, որ $\{\alpha;\, \beta\}$-ն ասիմպտոտական ուղղության վեկտոր է: Իսկ սա հակասում է տրամագծի սահմանմանը: Մյուս՝ $bx-ay=0$ ուղղի դեպքը դիտարկվում է նույն կերպ: □

Որպես թեորեմի կիրառություն՝ ընթերցողին առաջարկում ենք լուծել հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր: Հարթության վրա գծված է էլիպս, որի կենտրոնը չի նշված: Կարկինի և քանոնի օգնությամբ կառուցել (գտնել) այդ էլիպսի կենտրոնը:

§ 36. ՓՈԽԱԴԱՐՁԱԲԱՐ ՀԱՄԱԼՈՒԾ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ, ՓՈԽԱԴԱՐՁԱԲԱՐ ՀԱՄԱԼՈՒԾ ՏՐԱՄԱԳԾԵՐ

Դիտարկենք կորի $\{\alpha;\, \beta\}$ ոչ ասիմպտոտական ուղղության համալուծ տրամագիծը՝

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)y + a_1\alpha + a_2\beta = 0\,,$$

և նրա համար որպես ուղղորդ վեկտոր վերցնենք $\{\alpha';\, \beta'\}$-ը, որտեղ

$$\alpha' = a_{21}\alpha + a_{22}\beta,\quad \beta' = -(a_{11}\alpha + a_{12}\beta):$$

Եթե այս հավասարումներից առաջինը բազմապատկենք β'-ով, երկրորդը՝ $(-\alpha')$-ով և գումարենք միմյանց, ապա կստանանք

$$a_{11}\alpha\alpha' + a_{12}(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + a_{22}\beta\beta' = 0 \qquad (40)$$

հավասարությունը: Այսինքն՝ կորի $\{\alpha;\, \beta\}$ ոչ ասիմպտոտական ուղղությունը և նրա համալուծ տրամագծի ուղղությունը բավարարում են (40) հավասարությանը: Այս փաստը հիմք է ծառայում հետևյալ սահմանման համար:

Սահմանում: Տվյալ OXY կոորդինատային համակարգում երկու $\{\alpha;\, \beta\}$ և $\{\alpha';\, \beta'\}$ ուղղություններ կոչվում են տվյալ երկրորդ կարգի կորի նկատմամբ ***փոխադարձաբար համալուծ ուղղություններ***, եթե տեղի ունի (40) հավասարությունը:

Սահմանումը կոռեկտ է: Այսինքն՝ եթե $\{\alpha;\, \beta\}$ և $\{\alpha';\, \beta'\}$ երկու վեկտորներ բավարարում են (40) պայմանին, ապա $k\cdot\{\alpha;\, \beta\},\, k \neq 0$ և $l\cdot\{\alpha';\, \beta'\},\, l \neq 0$ վեկտորները ևս բավարարում են (40) պայմանին:

Նկատենք նաև, որ եթե որևէ OXY կոորդինատային համակարգում $\{\alpha;\, \beta\}$ և $\{\alpha';\, \beta'\}$ ուղղությունները փոխադարձաբար համալուծ են, ապա դրանք փոխադարձաբար համալուծ են նաև ցանկացած այլ՝ $O'X'Y'$ կոորդինատային համակարգում:

Այստեղ մենք չենք բերի այդ փաստի ուղղակի ապացույց: Նշենք միայն, որ միակենտրոն կորերի դեպքում այն ուղղակի հետևում է ստորև տրված թեորեմ 3-ից, որում երկու ուղղությունների համալուծությունը դրսևորվում է որպես զուտ երկրաչափական հատկություն և հետևաբար անկախ է կորդինատային համակարգի ընտրությունից:

Քանի որ (40)-ի տեսքը համաչափ է նրանում α, β և α', β' թվազույգերի մասնակցության տեսակետից, ապա նկատի ունենալով երկու ուղղությունների փոխադարձաբար համալուծությունը՝ հաճախ պարզապես կասենք, որ տվյալ ուղղություններից մեկը (ցանկացածը) համալուծ է մյուս ուղղությանը:

Սահմանումից հետևում է, որ ցանկացած $\{\alpha; \beta\}$ ոչ ասիմպտոտական ուղղություն համալուծ է իրենով որոշվող տրամագծի ուղղությանը:

Ինքն իրեն համալուծ ուղղությունը կոչվում է ***ինքնահամալուծ ուղղություն***: Վերցնելով $\alpha = \alpha'$ և $\beta = \beta'$՝ (40)-ից ստանում ենք $a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$: Այսինքն՝ ուղղությունը ինքնահամալուծ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն ասիմպտոտական ուղղություն է:

Այժմ տրված $\{\alpha; \beta\}$ ուղղության համար գտնենք նրան համալուծ բոլոր $\{\alpha'; \beta'\}$ ուղղությունները: Այդ նպատակով (40)-ը ներկայացնենք

$$\alpha'(a_{11}\alpha + a_{12}\beta) + \beta'(a_{21}\alpha + a_{22}\beta) = 0 \tag{41}$$

տեսքով:

Այն մասնավոր դեպքում, երբ

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta = 0 \end{cases}, \tag{42}$$

$\{\alpha; \beta\}$ ուղղությունը կոչվում է ***հատուկ ուղղություն***: Իսկ (41)-ից հետևում է, որ հատուկ ուղղությանը համալուծ ուղղությունը միարժեքորեն չի որոշվում, այսինքն՝ ցանկացած ուղղություն համալուծ է հատուկ ուղղությանը:

Եթե $\{\alpha;\ \beta\}$ ուղղությունը հատուկ չէ, այսինքն՝ $a_{11}\alpha + a_{12}\beta$ և $a_{21}\alpha + a_{22}\beta$ թվերը միաժամանակ զրո չեն, ապա

$$\alpha' : \beta' = -(a_{21}\alpha + a_{22}\beta) : (a_{11}\alpha + a_{12}\beta)$$

հարաբերությունը, հետևաբար նաև $\{\alpha;\ \beta\}$-ին համալուծ $\{\alpha';\ \beta'\}$ ուղղությունը որոշվում են միարժեքորեն:

ԹԵՈՐԵՄ 1: Հատուկ ուղղություն ունեն միայն պարաբոլական կորերը, ընդ որում՝ դա նրանց (միակ) ասիմպտոտական ուղղությունն է:

Ապացուցում: Դիցուք $\{\alpha;\ \beta\} \neq \{0;\ 0\}$ վեկտորը ներկայացնում է կորի հատուկ ուղղությունը: Ապա (42) համակարգից հետևում է, որ $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$: Այսինքն՝ հատուկ ուղղություն կարող են ունենալ միայն պարաբոլական կորերը: Մյուս կողմից, բազմապատկելով (42)-ի առաջին հավասարությունը α-ով իսկ երկրորդը՝ β-ով և գումարելով միմյանց, ստանում ենք

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0:$$

Այսինքն՝ ամեն մի հատուկ ուղղություն ասիմպտոտական ուղղություն է:

Մնում է ցույց տալ, որ պարաբոլական կորի միակ ասիմպտոտական ուղղությունը հատուկ ուղղություն է: Իրոք, քանի որ պարաբոլական կորի համար $\delta = 0$, ուստի $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$ համակարգն ունի ոչ զրոյական $(x,\ y)$ լուծում: Այստեղից՝ $x(a_{11}x + a_{12}y) + y(a_{21}x + a_{22}y) = 0$, հետևաբար՝

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0:$$

Այսինքն՝ $\{x;\ y\}$ հատուկ ուղղությունը ասիմպտոտական է: □

Թեորեմ 1-ից որպես հետևանք ստանում ենք.

ԹԵՈՐԵՄ 2: Միակենտրոն կորի դեպքում ցանկացած ուղղության համալուծը որոշվում է միարժեքորեն: Ընդ որում՝ ասիմպտոտական ուղղության համալուծը հենց ինքն է, իսկ ոչ ասիմպտոտական ուղղության համալուծի համալուծը սկզբնական ուղղությունն է:

Սահմանում: Միակենտրոն կորի երկու տրամագծեր կոչվում են ***փոխադարձաբար համալուծ տրամագծեր***, եթե նրանց ուղղությունները փոխադարձաբար համալուծ են:

Այս սահմանումից և թեորեմ 2-ից նախ հետևում է, որ ցանկացած միակենտրոն կորի համար գոյություն ունեն անթիվ քանակությամբ փոխադարձաբար համալուծ տրամագծերի զույգեր: Բացի դրանից՝

ԹԵՈՐԵՄ 3: Միակենտրոն կորի փոխադարձաբար համալուծ տրամագծերից յուրաքանչյուրը կիսում է մյուսին զուգահեռ լարերը:

Բերենք թեորեմ 3-ի կիրառության մի օրինակ խնդրի տեսքով:

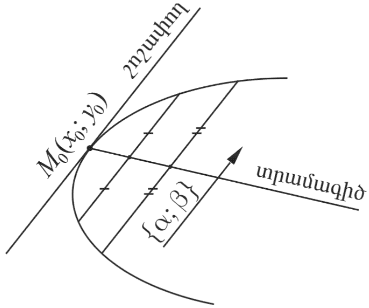
Խնդիր: Ապացուցել, որ էլիպսին ներգծած ցանկացած զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են էլիպսի կենտրոնում:

§ 37. ԿՈՐԻ ՏՐԱՄԱԳԾԻ ԵՎ ԱՅԴ ՏՐԱՄԱԳԾԻ ԾԱՅՐԱԿԵՏՈՎ ՏԱՐՎԱԾ ՇՈՇԱՓՈՂԻ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. ինչպե՞ս կարելի է կարկինի և քանոնի օգնությամբ էլիպսի, հիպերբոլի կամ պարաբոլի որևէ կետով տանել կորին շոշափող:

Նախ ապացուցենք հետևյալը:

ԹԵՈՐԵՄ: Երկրորդ կարգի չտրոհվող կորի որևէ կետով տարված շոշափողի ուղղությունը համալուծ է այդ կետով անցնող տրամագծի ուղղությանը (տե՛ս նկար 44-ը):



Նկար 44

Ապացուցում: Գրենք կորի $M_0(x_0;\ y_0)$ կետով տարված շոշափողի և այդ կետով անցնող որևէ $\{\alpha;\ \beta\}$ ուղղությանը համալուծ տրամագծի հավասարումները՝

$$(x-x_0)F_1(x_0,y_0)+(y-y_0)F_2(x_0,y_0)=0\,,$$

$$F_1(x,y)\alpha+F_2(x,y)\beta=0:$$

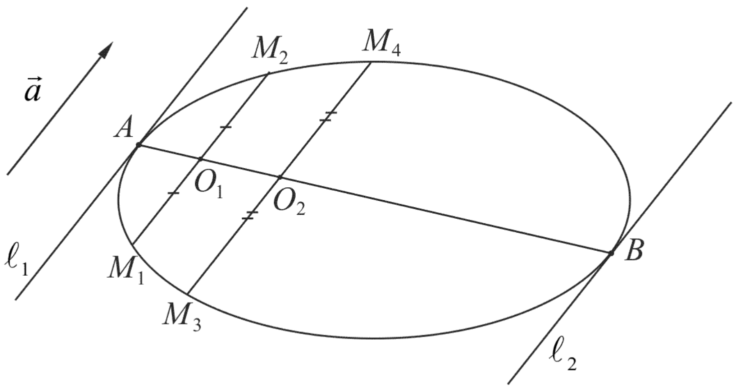
Քանի որ տրամագիծն անցնում է $M_0(x_0;\ y_0)$ կետով, ուստի $F_1(x_0,y_0)\alpha+F_2(x_0,y_0)\beta=0$, որտեղից հետևում է, որ

$$\{-F_2(x_0,y_0):F_1(x_0,y_0)\}\parallel\{\alpha;\ \beta\}:$$

Մյուս կողմից՝ շոշափողի հավասարումից գիտենք, որ $\{-F_2(x_0,y_0);F_1(x_0,y_0)\}$ վեկտորը շոշափողի ուղղորդ վեկտոր է:

Այսպիսով՝ շոշափողի ուղղությունը համընկնում է $\{\alpha; \beta\}$ ուղղության հետ: □

Որպես թեորեմի կիրառություն՝ ցույց տանք, թե ինչպես կարկինի և քանոնի օգնությամբ կարելի է էլիպսին տանել տրված $\vec{a}$ ուղղությանը զուգահեռ շոշափող ուղիղ (տե՛ս նկար 45-ը):



Նկար 45

Նախ տանենք էլիպսի տրված ուղղությանը զուգահեռ որևէ երկու՝ M_1M_2 և M_3M_4 լարեր և գտնենք այդ լարերի O_1 և O_2 միջնակետերը: Այնուհետև տանենք O_1O_2 ուղիղը (տրամագիծը), որը դիցուք էլիպսը հատում է A և B կետերում: Դրանից հետո A և B կետերով տանենք M_1M_2 լարին զուգահեռ ℓ_1 և ℓ_2 ուղիղները: Դրանք էլ, համաձայն թեորեմի, կլինեն որոնելի շոշափողները:

Որպես թեորեմի մեկ այլ կիրառություն՝ ընթերցողին առաջարկում ենք լուծել հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր: Էլիպսին արտագծված է զուգահեռագիծ, որի AB, BC, CD, DA կողմերը էլիպսին շոշափում են համապատասխանաբար P, Q, R, S կետերում: Ապացուցել, որ PR և QS լարերը հատվում են էլիպսի կենտրոնում:

§ 38. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐԻ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՓՈԽԱԴԱՐՁԱԲԱՐ ՀԱՄԱԼՈՒԾ ՏՐԱՄԱԳԾԵՐԸ

Ինչպես գիտենք, էլիպսի, հիպերբոլի և պարաբոլի համար գոյություն ունեն ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգեր, որոնց նկատմամբ այդ կորերի հավասարումներն ունեն պարզագույն տեսքեր՝ համապատասխանաբար

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ և } y^2=2px:$$

Նկատենք, որ այդ համակարգերում կոորդինատային առանցքների ուղղությունները փոխուղղահայաց են և փոխադարձաբար համալուծ: Պարզվում է, որ բացի նշված կոորդինատային համակարգերից՝ գոյություն ունեն այլ (ոչ ուղղանկյուն) կոորդինատային համակարգեր, որոնց նկատմամբ նշված կորերը տրվում են նշված տեսքի հավասարումներով: Ընդ որում՝ կոորդինատային առանցքների ուղղությունները դարձյալ փոխադարձաբար համալուծ են:

Այժմ նկարագրենք բոլոր այդպիսի կոորդինատային համակարգերը:

Դիցուք ունենք երկրորդ կարգի կոր, որն ինչ-որ OXY կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված է (29) ընդհանուր հավասարումով՝ $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$:

Կազմենք կորի այն տրամագծերի հավասարումները, որոնք համալուծ են OX և OY առանցքների ուղղություններին:

Տրամագծի $(a_{11}\alpha+a_{12}\beta)x+(a_{12}\alpha+a_{22}\beta)y+a_1\alpha+a_2\beta=0$ հավասարման մեջ $\{\alpha;\beta\}$-ի փոխարեն հերթով վերցնելով $\{1;0\}$ և $\{0;1\}$, այսինքն՝ OX և OY առանցքների ուղղությունները՝ կստանանք համապատասխանաբար $a_{11}x+a_{12}y+a_1=0$ և $a_{12}x+a_{22}y+a_2=0$ ուղիղները:

Դիցուք OXY կոորդինատային համակարգը նախապես ընտրված է այնպես, որ OY առանցքն ունի կորի նկատմամբ ոչ ասիմպտոտական ուղղություն, իսկ OX-ն այդ ուղղությանը համալուծ տրամագիծն է: Քանի որ ցանկացած 2-րդ կարգի կոր ունի գոնե մի տրամագիծ, ուստի այդպիսի կորդինատային համակարգ միշտ գոյություն ունի: Այս դեպքում OX-ի համար ունենում ենք երկու հավասարում՝ $y=0$ և $a_{12}x+a_{22}y+a_2=0$: Հետևաբար՝ $a_{22}\neq 0$, $a_{12}=0$, $a_2=0$: Սա նշանակում է, որ նշված կորդինատային համակարգում կորի (29) հավասարումն ընդունում է ավելի պարզ տեսք՝

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x+a_0=0: \tag{43}$$

Շարունակենք՝ դիտարկելով երկու դեպք.

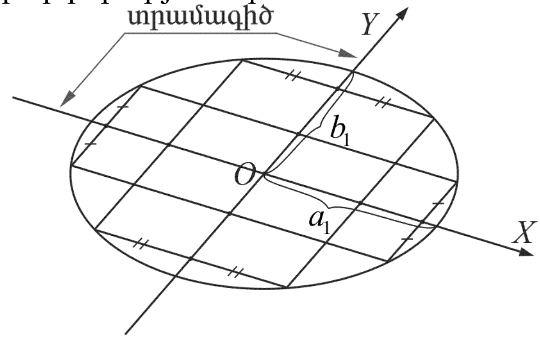
1) Դիցուք կորը միակենտրոն է՝ $\delta\neq 0$: Այս դեպքում OY առանցքը զուգահեռ է OX առանցքի ուղղությանը համալուծ տրամագծին: Եթե որպես կորդինատային համակարգի սկզբնակետ վերցնենք կորի կենտրոնը, ապա OY առանցքը կդառնա OX առանցքի ուղղությանը համալուծ տրամագիծ: Այժմ OY-ի համար ևս ունենք երկու հավասարում՝ $x=0$ և $a_{11}x+a_{12}y+a_1=0$, որտեղից էլ ստանում ենք $a_{11}\neq 0$, $a_{12}=0$, $a_1=0$: Հետևաբար այդպիսի կորդինատային համակարգի նկատմամբ կորի (43) հավասարումն ընդունում է

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_0=0 \tag{44}$$

տեսքը: Այսպիսով՝ ապացուցեցինք հետևյալ թեորեմը:

ԹԵՈՐԵՄ 1: Եթե կորդինատային համակարգի սկզբնակետը համընկնում է միակենտրոն կորի կենտրոնի հետ, իսկ կորդինատային առանցքները կորի մի զույգ փոխադարձաբար համալուծ տրամագծեր են, ապա այդ (աֆինական) կորդինատային համակարգի նկատմամբ միակենտրոն կորը տրվում է $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_0=0$, $a_{11}\neq 0, a_{22}\neq 0$ տեսքի հավասարումով: Մասնավորապես, եթե կորը էլիպս է, ապա նրա (44) հավասարումը կարելի է ներկայացնել $\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1$ տեսքով, որտեղ

a_1-ը և b_1-ը փոխադարձաբար համալուծ տրամագծերի կիսառանցքների երկարություններն են:



§ 34-ում տեսանք, որ միակենտրոն կորի, մասնավորապես էլիպսի համար, գոյություն ունեն անթիվ քանակությամբ համալուծ տրամագծերի զույգեր: Դրանք օժտված են նաև այլ հատկություններով, որոնցից երկուսը բերում ենք ստորև:

ԹԵՈՐԵՄ (Ապոլլոնի I թեորեմ): Եթե a_1-ը և b_1-ը $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսի որևէ փոխադարձաբար համալուծ տրամագծերի կիսառանցքներն են, ապա $a_1^2+b_1^2=a^2+b^2$:

ԹԵՈՐԵՄ (Ապոլլոնի II թեորեմ): Եթե $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսին արտագծած զուգահեռագծի կից կողմերն ունեն փոխադարձաբար համալուծ ուղղություններ, ապա այդպիսի զուգահեռագծի մակերեսը հավասար է $4ab$-ի:

Այս թեորեմները կարելի է ապացուցել անմիջական հաշվումներով՝ օգտվելով համալուծ տրամագծերի հավասարումներից (Ապոլլոնի I թեորեմի դեպքում), ինչպես նաև տրամագծի և նրա ծայրակետով տարված շոշափողի ուղղությունների համալուծության փաստից (Ապոլլոնի II թեորեմի դեպքում):

Ընթերցողին առաջարկում ենք ինքնուրույն ապացուցել այս թեորեմները:

Դրանց ուրիշ, ավելի կարճ և գեղեցիկ ապացույցներ կարելի է տալ աֆինական ձևափոխությունների տեսության շրջանակում, որը շարադրվելու է դասընթացի II մասում:

2) Դիցուք այժմ կորը պարաբոլական կոր է՝ $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$:

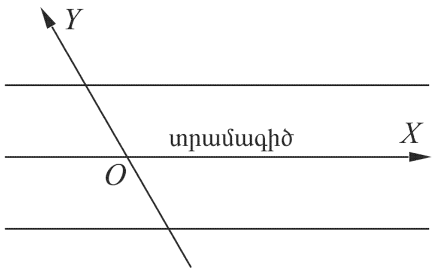
Քանի որ $a_{12} = 0$ և $a_{22} \neq 0$, ապա ստանում ենք, որ $a_{11} = 0$: Ուստի կորի հավասարումը ընդունում է

$$a_{22}y^2 + 2a_1x + a_0 = 0,\ a_{22} \neq 0 \tag{45}$$

տեսքը:

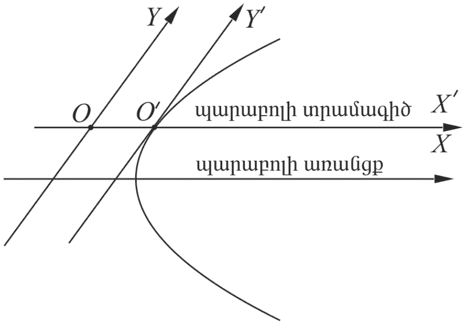
Դիտարկենք հնարավոր երկու ենթադեպքեր.

ա) Երբ $a_1 = 0$: Այս դեպքում (45) կորի հավասարումն ընդունում է $a_{22}y^2 + a_0 = 0$, $a_{22} \neq 0$, կամ որ նույնն է՝ $y^2 + a_0/a_{22} = 0$ տեսքը: Սա նշանակում է, որ կորը զուգահեռ կամ համընկած ուղիղների զույգ է, իսկ OX և OY կորդինատային առանցքները այնպիսին են, ինչպես գծագրում:



Այսպիսով՝ եթե կորը զուգահեռ կամ համընկած ուղիղների զույգ է, ապա նրա հավասարումն ունի $y^2 \pm a^2 = 0$ տեսք այն և միայն այն կորդինատային համակարգերում, որտեղ OX-ը կորի տրամագիծն է (կենտրոնագիծը), իսկ OY-ը՝ նրան հատող որևէ ուղիղ:

բ) Երբ $a_1 \neq 0$: Այս դեպքին համապատասխանում են մի տեսակի կորեր՝ պարաբոլներ: Կատարելով կորդինատային համակարգի $y=y'$, $x=x'-\frac{a_0}{2a_1}$ զուգահեռ տեղափոխությունը՝ նոր՝ $O'X'Y'$ համակարգի նկատմամբ (45) հավասարումից ստանում ենք կորի $a_{22}y'^2+2a_1x'=0$ հավասարումը կամ նրան համարժեք՝ $y'^2=2p'x'$, $p'=-\frac{a_1}{a_{22}}\neq 0$ հավասարումը: Այս հավասարումը տեսքով նման է պարաբոլի կանոնական հավասարմանը ուղղանկյուն կորդինատային համակարգում: Հեշտ է համոզվել, որ կորդինատների $O'\left(-\frac{a_0}{2a_1};\,0\right)$ սկզբնակետը գտնվում է պարաբոլի վրա: Բացի դրանից՝ $O'X'$-ը կորի տրամագիծ է, իսկ $O'Y'$ առանցքի ուղղությունը համալուծ է $O'X'$-ի ուղղությանը: Սա, ըստ § 37-ի թեորեմի, նշանակում է, որ $O'Y'$-ը շոշափում է պարաբոլին O' կետում (տե՛ս գծագիրը):



Այսպիսով՝ ապացուցեցինք հետևյալը:

ԹԵՈՐԵՄ 2: Եթե կորդինատային համակարգի սկզբնակետը գտնվում է պարաբոլի վրա, աբսցիսների առանցքը տրամագիծ է, իսկ օրդինատների առանցքը՝ շոշափող, ապա այդ (աֆինական) կորդինատային համակարգի նկատմամբ պարաբոլը տրվում է $y'^2=2p'x'$ տեսքի հավասարումով:

Ինքնին հասկանալի է, որ և՛ ա) և՛ բ) ենթադեպքերում տվյալ կորի համար գոյություն ունեն անթիվ քանակությամբ՝ վերը նկարագրված տիպերի կորդինատային համակարգեր:

§ 39. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐԻ ՆՈՒՅՆԱԿԱՆԱՑՄԱՆ ՊԱՅՄԱՆԸ

Ինչպես գիտենք, առաջին աստիճանի երկու հավասարումներ՝ $A_1x+B_1y+C_1=0$ և $A_2x+B_2y+C_2=0$, որոշում են նույն ուղիղը այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $k\neq 0$ թիվ, որ $A_1=kA_2, B_1=kB_2, C_1=kC_2$, այսինքն՝ $A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2$:

Երկրորդ կարգի կորերի դեպքում դրա նմանակը հետևյալն է:

ԹԵՈՐԵՄ: Տվյալ OXY կորդինատային համակարգում երկու՝

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0 \quad (46)$$

և

$$G(x,y)=b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+b_0=0 \quad (47)$$

հավասարումներ որոշում են նույն երկրորդ կարգի կորը այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $k\neq 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$F(x,y)=k\cdot G(x,y):$$

Այսինքն՝ երկու՝ (46) և (47) կորեր համընկնում են այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$a_{11}:b_{11}=a_{12}:b_{12}=a_{22}:b_{22}=a_1:b_1=a_2:b_2=a_0:b_0:$$

Մինչ թեորեմի ապացուցումը նախ ձևակերպենք և ապացուցենք լեմմա:

Դիտարկենք մեկ այլ՝ $O'X'Y'$ կորդինատային համակարգ: Կորդինատային համակարգերի ձևափոխության

$$x=c_{11}x'+c_{12}y'+c_1,\ y=c_{21}x'+c_{22}y'+c_1$$

բանաձևերից տեղադրելով x-ի և y-ի արտահայտությունները (46) և (47) հավասարումների մեջ՝ պարզեցումներից հետո կստանանք կորի երկու՝

$$F'(x',y')=F(c_{11}x'+c_{12}y'+c_1,c_{21}x'+c_{22}y'+c_1)=$$
$$=a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_1x+2a'_2y+a'_0=0 \quad (48)$$

և

$$G'(x',y') = G(c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, c_{21}x' + c_{22}y' + c_1) =$$
$$= b'_{11}x'^2 + 2b'_{12}x'y' + b'_{22}y'^2 + 2b'_1x + 2b'_2y + b'_0 = 0 \quad (49)$$

հավասարումներ $O'X'Y'$ համակարգում:

Լեմմա: Եթե $F(x,y)$ և $G(x,y)$ բազմանդամները տարբերվում են միայն թվային բազմապատկչով՝ $F(x,y) = k\cdot G(x,y)$, ապա $F'(x',y')$ և $G'(x',y')$ բազմանդամները ևս տարբերվում են նույն թվային բազմապատկչով՝ $F'(x',y') = k\cdot G'(x',y')$:

Իրոք, նկատենք, որ (48) և (49) հավասարումներում a'_{ij}, a'_i և b'_{ij}, b'_i գործակիցները ներկայացվում են համապատասխանաբար (46) և (47) հավասարումների a_{ij}, a_i և b_{ij}, b_i գործակիցներով՝ որպես առաջին աստիճանի համասեռ բազմանդամներ: Օրինակ՝ $a'_{11} = c_{11}^2\cdot a_{11} + 2c_{11}c_{21}\cdot a_{12} + c_{21}^2\cdot a_{22}$ և $b'_{11} = c_{11}^2\cdot b_{11} + 2c_{11}c_{21}\cdot b_{12} + c_{21}^2\cdot b_{22}$: Այստեղից, քանի որ $a_{11} = kb_{11}$, $a_{12} = kb_{12}$, $a_{22} = kb_{22}$, ստանում ենք $a'_{11} = kb'_{11}$: Նման ձևով ստացվում են մնացած բոլոր՝ $a'_{ij} = kb'_{ij}$, $a'_i = kb'_i$ հավասարությունները:

Այժմ թեորեմի ապացուցման համար, համաձայն լեմմայի, բավական է ցույց տալ, որ ցանկացած 2-րդ կարգի կորի համար գոյություն ունի այնպիսի $O'X'Y'$ կորդինատային համակարգ, որի $F'(x',y')$ և $G'(x',y')$ բազմանդամները տարբերվում են թվային բազմապատկչով: Այդ նպատակով դիտարկենք երկու դեպք.

1. Կորը միակենտրոն է, այսինքն՝ էլիպս է, հիպերբոլ կամ հատվող ուղիղների զույգ:

Ինչպես գիտենք (տե՛ս § 36-ի թեորեմ 1-ը), այս դեպքում կորի համար գոյություն ունի (ոչ միակ) $O'X'Y'$ կորդինատային համակարգ, որի O' սկզբնակետը կորի կենտրոնն է, իսկ $O'X'$ և $O'Y'$ առանցքները կորի մի զույգ փոխադարձաբար համալուծ տրամագծեր են: Որևէ այդպիսի համակարգում (տե՛ս § 38) կորի (46) և (47) հավասարումներն ունեն համապատասխանաբար $a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_0=0,\ a'_{11}\neq 0, a'_{22}\neq 0$ և $b'_{11}x'^2+b'_{22}y'^2+$ $+b'_0=0$, $b'_{11}\neq 0, b'_{22}\neq 0$ տեսքեր:

Պարզ է, որ եթե $a'_0\neq 0$, ապա և $b'_0\neq 0$: Կորի, իրական կամ կեղծ, հատման կետերը $O'X'$ և $O'Y'$ առանցքների հետ որոշվում են ինչպես $y'^2=-\dfrac{a'_0}{a'_{22}}$, $x'^2=-\dfrac{a'_0}{a'_{11}}$ հավասարումներից, այնպես էլ $y'^2=-\dfrac{b'_0}{b'_{22}}$, $x'^2=-\dfrac{b'_0}{b'_{11}}$ հավասարումներից: Հետևաբար $a'_0:a'_{22}=b'_0:b'_{22}$ և $a'_0:a'_{11}=b'_0:b'_{11}$, որտեղից էլ $a'_0:b'_0=a'_{11}:b'_{11}=a'_{22}:b'_{22}$:

Այն դեպքում, երբ $a'_0=0$, ապա և $b'_0=0$: Նշանակում է՝ կորը հատվող ուղիղների զույգ է: Դիտարկելով կորի հատման կետերը $x'=1$ ուղղի հետ՝ կստանանք

$$\begin{cases} x'=1 \\ y'^2=-\dfrac{a'_{11}}{a'_{22}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=1 \\ y'^2=-\dfrac{b'_{11}}{b'_{22}} \end{cases}, \text{որտեղից } a'_{11}:b'_{11}=a'_{22}:b'_{22}:$$

2. Կորը պարաբոլական է: Ինչպես գիտենք, պարաբոլական կորերի դեպքում կորի համար գոյություն ունի (ոչ միակ) այնպիսի $O'X'Y'$ կորդինատային համակարգ, որի $O'Y'$ առանցքի ուղղությունը կորի համար ոչ ասիմպտոտական է, իսկ $O'X'$-ը այդ ուղղության համալուծ տրամագիծ է: Ապացուցումը շարունակենք երկու ենթադեպքով:

ա) Զուգահեռ կամ համընկած ուղիղների զույգի դեպքում (46) և (47) հավասարումներն ունեն համապատասխանաբար $a'_{22}y'^2+a'_0=0,\ a'_{22}\neq 0$ և $b'_{22}y'^2+b'_0=0,\ b'_{22}\neq 0$ տեսքերը:

Դիտարկելով կորի հատման կետերը $O'Y'$ առանցքի հետ՝ ստանում ենք $\begin{cases} x' = 0 \\ y'^2 = -\dfrac{a'_0}{a'_{22}} \end{cases}$ և $\begin{cases} x' = 0 \\ y'^2 = -\dfrac{b'_0}{b'_{22}} \end{cases}$ համարժեք համակարգերը, որտեղից $a'_{22} : b'_{22} = a'_0 : b'_0$:

բ) Պարաբոլի դեպքում (46) և (47) հավասարումներն ունեն համապատասխանաբար $a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' = 0,\ a'_{22} \neq 0, a'_1 \neq 0$, $b'_{22}y'^2 + 2b'_1y' = 0,\ b'_{22} \neq 0, b'_1 \neq 0$ տեսքերը: Դիտարկելով պարաբոլի հատման կետերը $x' = 1$ ուղղի հետ՝ կստանանք $a'_{22} : b'_{22} = a'_1 : b'_1$:□

§ 40. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Ստորև մենք կապացուցենք մի քանի թեորեմներ, որոնք մեզ պետք են գալու հաջորդ՝ § 41-ում:

Դիցուք ունենք n անհայտով m քանակի գծային հավասարումների համակարգ՝

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = b_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n = b_m \end{cases}:$$

Համակարգը կոչվում է համատեղելի, եթե այն ունի գոնե մի լուծում, և կոչվում է անհամատեղելի, եթե այն լուծում չունի:

Հավասարումների երկու համակարգեր կոչվում են համարժեք, եթե նրանք համատեղելի են և ունեն նույն լուծումները, կամ երկուսն էլ անհամատեղելի են:

Հետևյալ երեք ձևափոխությունները թույլ են տալիս գծային հավասարումների մի համակարգից անցնել իրեն համարժեք գծային հավասարումների մի այլ համակարգի: Դրանք են՝

1. Համակարգի որևէ երկու հավասարումների տեղափոխություն իրենց տեղերով:

2. Համակարգի որևէ հավասարման անդամ առ անդամ բազմապատկում 0-ից տարբեր որևէ թվով:

3. Համակարգի որևէ հավասարման գումարում համակարգի մեկ այլ հավասարմանը՝ պահպանելով մյուս բոլոր հավասարումները:

Եթե համակարգում $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, ապա այդպիսի համակարգը կոչվում է ***համասեռ գծային հավասարումների համակարգ***:

Այսպիսով՝ համասեռ գծային հավասարումների համակարգի տեսքը հետևյալն է՝

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = 0 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n = 0 \end{cases} : \qquad (50)$$

Այս համակարգը միշտ համատեղելի է, քանի որ ունի, օրինակ, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (զրոյական) լուծում:

Եթե առաջին հավասարման մեջ $c_{11} = c_{12} = \ldots = c_{1m} = 0$, ապա (50)-ը համարժեք է

$$\begin{cases} c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

համակարգին, որտեղ հավասարումների քանակը նախկինի համեմատ մեկով պակաս է:

Իսկ եթե, օրինակ, $c_{11} \neq 0$, ապա համակարգի առաջին հավասարումը բազմապատկելով հաջորդաբար $-\dfrac{c_{21}}{c_{11}}$, $-\dfrac{c_{31}}{c_{11}}$, ..., $-\dfrac{c_{m1}}{c_{11}}$ թվերով և ստացված հավասարումները համապատասխանաբար գումարելով (50)-ի 2-րդ, 3-րդ, ..., m-րդ հավասարումներին, կստանանք (50)-ին համարժեք համակարգ՝

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\quad d_{22}x_2 + \ldots + d_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad d_{m2}x_2 + \ldots + d_{mn}x_n = 0 \end{cases} : \qquad (51)$$

Այս դեպքում (50) համակարգը լուծելու խնդիրը նախ և առաջ հանգում է

$$\begin{cases} d_{22}x_2 + \ldots + d_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + \ldots + d_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{52}$$

համակարգի լուծման խնդրին, որտեղ (50)-ի համեմատ թե՛ անհայտների, թե՛ հավասարումների քանակը մեկով պակաս է:

Դիտողություն: Եթե (50) համակարգի առաջին հավասարման մեջ $c_{11} = c_{12} = \ldots = c_{1k-1} = 0$ և $c_{1k} \neq 0$, ապա x_k անհայտով միանդամները, տեղափոխելով հավասարումների սկիզբ, կստանանք այդ նույն համակարգի նոր՝

$$\begin{cases} c_{1k}x_k + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k-1}x_{k-1} + c_{1k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{2n}x_n = 0 \\ c_{2k}x_k + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k-1}x_{k-1} + c_{2k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{mk}x_k + c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mk-1}x_{k-1} + c_{mk+1}x_{k+1} + \ldots + c_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

տեսք: Հետևաբար այս դեպքում ևս կարող ենք կատարել վերը բերված ձևափոխությունը՝ 2-րդ, 3-րդ, … , m-րդ հավասարումներում արտաքսելով x_k անհայտը:

Ստորև թեորեմների ապացույցներում մենք ամեն անգամ լռելյայն ի նկատի կունենանք վերոհիշյալ հանգամանքը՝ համապատասխան տեղերում դիտարկելով միայն $c_{11} \neq 0$ դեպքը:

Այժմ ներմուծենք անկախ համակարգի հասկացությունը:

Սահմանում: Եթե $m > 1$, ապա ասում են, որ (50) համակարգի որևէ հավասարում գծորեն կախյալ է համակարգի մյուս հավասարումներից, եթե այն կարող է ստացվել մյուսներից՝ վերջիններս բազմապատկելով որոշ թվերով և գումարելով միմյանց: Այս դեպքում ինքը՝ (50) համակարգը, կոչվում է ***կախյալ համակարգ***: Հակառակ դեպքում համակարգը կոչվում է ***անկախ համակարգ***: Մեկ հավասարում պարունակող համակարգը կոչվում է անկախ համակարգ, եթե այդ հավասարման գործակիցներից որևէ մեկը զրո չէ:

Օրինակ՝ եթե (50)-ի առաջին հավասարման մեջ $c_{11}=c_{12}=...=c_{1n}=0$, ապա համակարգը կախյալ համակարգ է, քանի որ այս դեպքում նրա առաջին հավասարումը ստացվում է մյուսներից՝ վերջիններս բազմապատկելով զրոներով և գումարելով միմյանց:

Լեմմա: Եթե (50)-ը անկախ համակարգ է, իսկ (51)-ը և (52)-ը ստացվել են նրանից վերը նշված եղանակով, ապա (52) համակարգը նույնպես անկախ համակարգ է:

Ապացույց: Ենթադրենք՝ (52)-ը անկախ չէ, և նրա, օրինակ, առաջին հավասարումը գծորեն կախյալ է համակարգի մյուս հավասարումներից: Ուրեմն գոյություն ունեն $\alpha_3,...,\alpha_m$ թվեր այնպես, որ

$$d_{22}x_2+...+d_{2n}x_n=\alpha_3(d_{32}x_2+...+d_{3n}x_n)+...+\alpha_m(d_{m2}x_2+...+d_{mn}x_n):$$

Այսինքն՝

$$c_{21}x_1+c_{22}x_2+...+c_{2n}x_n-\frac{c_{21}}{c_{11}}(c_{11}x_1+c_{12}x_2+...+c_{1n}x_n)=$$

$$=\alpha_3(c_{21}x_1+c_{22}x_2+...+c_{2n}x_n-\frac{c_{21}}{c_{11}}(c_{11}x_1+c_{12}x_2+...+c_{1n}x_n))+...+$$

$$+\alpha_m(c_{m1}x_1+c_{m2}x_2+...+c_{mn}x_n-\frac{c_{m1}}{c_{11}}(c_{11}x_1+c_{12}x_2+...+c_{1n}x_n)):$$

Այստեղից ստանում ենք

$$c_{21}x_1+c_{22}x_2+...+c_{2n}x_n=$$

$$=\frac{c_{21}-\alpha_3c_{31}-...-\alpha_mc_{m1}}{c_{11}}(c_{11}x_1+c_{12}x_2+...+c_{1n}x_n)+$$

$$+\alpha_3(c_{31}x_1+c_{32}x_2+...+c_{3n}x_n)+...+\alpha_m(c_{m1}x_1+c_{m2}x_2+...+c_{mn}x_n):$$

Ստացվեց, որ (50) համակարգի 2-րդ հավասարումը գծորեն կախյալ է այդ համակարգի 1-ին, 3-րդ, … , m-րդ հավասարումներից, ինչը հակասում է լեմմայի պայմանին:□

ԹԵՈՐԵՄ 1: Եթե գծային համասեռ հավասարումների (50) համակարգում անհայտների քանակն ավելի է հավասարումների քանակից $(n > m)$, ապա համակարգն ունի գոնե մեկ ոչ զրոյական լուծում:

Ապացուցումը կատարենք ինդուկցիայի եղանակով՝ ըստ հավասարումների քանակի: Երբ $m=1$, ապա ունենք միայն մի հավասարում՝ $c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n = 0$, որտեղ $n>1$: Ընդ որում՝ եթե $c_{11} = c_{12} = ... = c_{1n} = 0$, ապա համակարգն ունի, օրինակ, $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$ ոչ զրոյական լուծում: Իսկ եթե $c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n}$ գործակիցներից որևէ մեկը, օրինակ՝ c_{11}-ը, հավասար չէ 0-ի, ապա համակարգն ունի $x_1 = -c_{12}$, $x_2 = c_{11}$, $x_3 = ... = x_n = 0$ ոչ զրոյական լուծում:

Այժմ ենթադրենք, որ թեորեմի պնդումը ճիշտ է $m-1$ հավասարումներից կազմված բոլոր համակարգերի համար, և ցույց տանք, որ այն ճիշտ է նաև m հավասարումներից կազմված կամայական համակարգի համար:

Դիցուք (50)-ը մի քանի m հավասարումներից կազմված որևէ համակարգ է: Եթե այդ համակարգի առաջին հավասարման մեջ $c_{11} = c_{12} = ... = c_{1n} = 0$, ապա այն համարժեք է

$$\begin{cases} c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + ... + c_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

համակարգին, որում հավասարումների քանակը $m-1$ է: Ուստի այն, ըստ ինդուկցիայի ենթադրության, ունի ոչ զրոյական լուծում: Իսկ եթե $c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n}$ գործակիցներից որևէ մեկը, օրինակ՝ c_{11}-ը, հավասար չէ 0-ի, ապա (50) համակարգը, ըստ լեմմայի, համարժեք է (51) համակարգին: Մյուս կողմից, քանի որ

(52) համակարգում հավասարումների քանակը $m-1$ է, ապա այն, ըստ ինդուկցիայի ենթադրության, ունի գոնե մեկ ոչ զրոյական՝ $x_2, x_3, \ldots, x_n$ լուծում: Դրա միջոցով (51) համակարգի առաջին հավասարումից գտնելով նաև

$$x_1 = -\frac{c_{12}}{c_{11}} x_2 - \frac{c_{13}}{c_{11}} x_3 - \ldots - \frac{c_{1n}}{c_{11}} x_n$$

արժեքը՝ կունենանք (50) համակարգի ոչ զրոյական՝ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ լուծում:□

ԹԵՈՐԵՄ 2: Եթե գծային համասեռ հավասարումների (50) անկախ համակարգում անհայտների և հավասարումների քանակը նույնն է $(n = m)$, ապա համակարգն ունի միայն մի՝ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (զրոյական) լուծում:

Ապացուցումը կատարենք ինդուկցիայի եղանակով՝ ըստ հավասարումների քանակի: Երբ $n = 1$, ապա ունենք միայն մի հավասարում՝ $c_{11}x_1 = 0, c_{11} \neq 0$, որտեղից $x_1 = 0$:

Ենթադրենք՝ թեորեմի պնդումը ճիշտ է $n-1$ հավասարումներից կազմված բոլոր համակարգերի համար, և ցույց տանք, որ այն ճիշտ է նաև n հավասարումներից կազմված կամայական համակարգի համար:

Դիցուք (50) -ը այդպիսի կամայական համակարգ է: Պարզ է, որ $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}$ գործակիցներից գոնե մեկը զրո չէ, քանի որ հակառակ դեպքում, ինչպես նշվեց վերևում, համակարգը կլինի կախյալ: Պարզության համար ենթադրենք՝ $c_{11} \neq 0$, և դիտարկենք (51) և (52) համակարգերը, որոնք ստացվել են (50) -ից վերը նկարագրված եղանակով, $n = m$ դեպքում: Լեմմայից հետևում է, որ (52) համակարգն անկախ համակարգ է: Եվ քանի որ դրանում հավասարումների և անհայտների քանակները հավասար են $n-1$-ի, ուստի այն, ըստ ինդուկցիայի ենթադրության, ունի միայն մեկ՝ $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ լուծումը: Այժմ (51) -ի առաջին հավասարումից ստանում ենք նաև, որ $x_1=0$: Հետևաբար (50) համակարգն ունի միայն մեկ՝ զրոյական լուծում:□

ԹԵՈՐԵՄ 3: Եթե (50) գծային համասեռ հավասարումների անկախ համակարգում անհայտների քանակը մեկով ավելի է հավասարումների քանակից $(n=m+1)$, ապա համակարգի ցանկացած երկու ոչ զրոյական $x_1', x_2', ..., x_n'$ և $x_1'', x_2'', ..., x_n''$ լուծումներ համեմատական են միմյանց: Այսինքն՝ գոյություն ունի $k\neq 0$ թիվ այնպես, որ $x_1'=kx_1''$, $x_2'=kx_2''$, ..., $x_n'=kx_n''$:

Ապացուցումը այս անգամ էլ կկատարենք ինդուկցիայի եղանակով՝ ըստ հավասարումների m քանակի:

Երբ $m=1$, ապա $n=2$, և ունենք միայն մի հավասարում՝ $c_{11}x_1+c_{12}x_2=0$, որտեղ $c_{11}\neq 0$ կամ $c_{12}\neq 0$: Ենթադրելով, օրինակ, $c_{12}\neq 0$, կստանանք, որ այդ հավասարումն ունի $x_1'=c_{12}$, $x_2'=-c_{11}$ ոչ զրոյական լուծում: Եթե x_1'', x_2''-ը նույնպես այդ հավասարման ոչ զրոյական լուծում է, ապա $c_{11}x_1''+c_{12}x_2''=0$: Այսինքն՝ գոյություն ունի $k\neq 0$ թիվ այնպես, որ $c_{11}x_1'':c_{12}=-x_2'':c_{11}=k$: Հետևաբար $x_1'=kx_1''$, $x_2'=kx_2''$:

Այժմ ենթադրենք՝ թեորեմի պնդումը ճիշտ է m անհայտով $m-1$ անկախ հավասարումներից կազմված բոլոր համակարգերի համար, և դիտարկենք $n=m+1$ անհայտներով m անկախ հավասարումներից կազմված որևէ (50) համակարգ: Քանի որ $c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n}$ գործակիցներից գոնե մեկը զրո չէ, և պարզության համար ենթադրելով $c_{11}\neq 0$, կարող ենք անցնել (51) և (52) համակարգերին: Համաձայն լեմմայի՝ (52)-ը անկախ համակարգ է: Նկատենք, որ եթե $x_1, x_2, ..., x_{m+1}$-ը (50)-ի որևէ ոչ զրոյական լուծում է, ապա $x_2, ..., x_{m+1}$ թվերից գոնե մեկը տարբեր է 0-ից: Իրոք, եթե $x_2=x_3=...=x_{m+1}=0$, ապա $x_1\neq 0$: Բայց այդ դեպքում (50)-ի առաջին հավասարումից կհետևի, որ $c_{11}=0$, ինչը հակասում է մեր ենթադրությանը:

Դիցուք այժմ $x_1', x_2', ..., x_{m+1}'$-ը և $x_1'', x_2'', ..., x_{m+1}''$-ը (50) համակարգի որևէ երկու ոչ զրոյական լուծումներ են: Համաձայն քիչ առաջ ասվածի՝ $x_2', ..., x_{m+1}'$-ը և $x_2'', ..., x_{m+1}''$-ը կլինեն ոչ զրոյական լուծումներ (52) համակարգի համար: Քանի որ այդ համակարգում անհայտների քանակը m է և մեկով ավելի է համակարգի հավասարումների քանակից, ուստի համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության՝ գոյություն ունի $k \neq 0$ թիվ այնպես, որ $x_2' = kx_2''$, ..., $x_{m+1}' = kx_{m+1}''$: Հաշվի առնելով սա՝ (50) համակարգի առաջին հավասարումից ստանում ենք նաև

$$x_1' = -\frac{1}{c_{11}}(c_{12}x_2' + ... + c_{1m+1}x_{m+1}') = -\frac{k}{c_{11}}(c_{12}x_2'' + ... + c_{1m+1}x_{m+1}'') = kx_1'' : \square$$

§ 41. ԹԵՈՐԵՄ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐ Ի ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ինչպես գիտենք, առաջին կարգի կորերի, այսինքն՝ ուղիղների դեպքում հարթության ցանկացած երկու իրարից տարբեր կետերով անցնում է ուղիղ, և այն միակն է: Նման բնույթի հարաբերակցություն կետերի և կորերի միջև տեղի ունի նաև 2-րդ կարգի կորերի դեպքում:

ԹԵՈՐԵՄ: Հարթության ցանկացած հինգ կետերով, որոնցից ոչ մի չորսը չեն գտնվում մի ուղղի վրա, անցնում է 2-րդ կարգի կոր, և այն միակն է:

Դիցուք հարթության վրա ունենք իրարից տարբեր հինգ՝ $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$, $M_4(x_4;y_4)$, $M_5(x_5;y_5)$ կետեր, որոնցից ոչ մի չորսը չեն գտնվում մի ուղղի վրա: Դրանցով անցնող 2-րդ կարգի կորի գոյությունը ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ գոյություն ունի 2-րդ աստիճանի

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0 \tag{53}$$

հավասարում, որին բավարարում են այդ կետերի կորդինատները:

Տեղադրելով կետերի կորդինատները (53) հավասարման մեջ՝ կստանանք վեց անհայտով հինգ գծային համասեռ հավասարումների համակարգ $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0$ անհայտների նկատմամբ

$$\begin{cases} x_1^2\cdot a_{11}+2x_1y_1\cdot a_{12}+y_1^2\cdot a_{22}+2x_1\cdot a_1+2y_1\cdot a_2+a_0=0\\ x_2^2\cdot a_{11}+2x_2y_2\cdot a_{12}+y_2^2\cdot a_{22}+2x_2\cdot a_1+2y_2\cdot a_2+a_0=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_5^2\cdot a_{11}+2x_5y_5\cdot a_{12}+y_5^2\cdot a_{22}+2x_5\cdot a_1+2y_5\cdot a_2+a_0=0 \end{cases}: \tag{54}$$

Ըստ § 40-ի թեորեմ 1-ի՝ այն ունի ոչ զրոյական a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0 լուծում: Մնում է ցույց տալ, որ a_{11}, a_{12}, a_{22} գործակիցներից գոնե մեկը զրո չէ:

Ենթադրենք՝ $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$: Եթե $a_1 \neq 0$ կամ էլ $a_2 \neq 0$, ապա (53) հավասարումը պատկերում է ուղիղ, որն անցնում է բոլոր $M_1, M_2, ..., M_5$ կետերով, ինչը հակասում է թեորեմի պայմանին: Պարզ է, որ մյուս՝ $a_1 = a_2 = 0$ դեպքում արդեն $a_0 \neq 0$: Իսկ դա հնարավոր չէ, քանի որ (53)-ը կպատկերի դատարկ բազմություն:

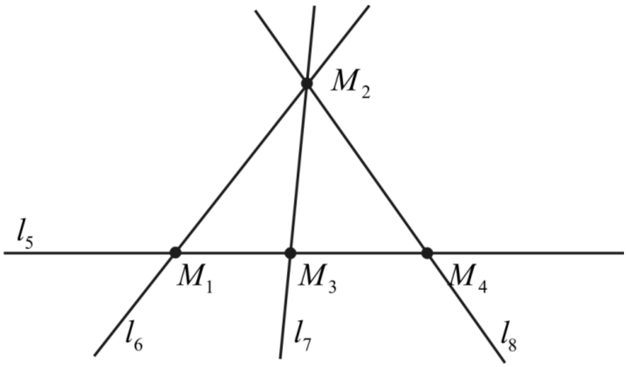
Սկսելով թեորեմի երկրորդ մասի՝ կորի միակության ապացուցումը՝ նկատենք, որ բավական է ցույց տալ (54) համակարգի անկախությունը, քանի որ դրանից, ըստ § 40-ի թեորեմ 3-ի, կհետևի, որ (54) համակարգի լուծումը միակն է բազմապատկչի ճշտությամբ, որից էլ արդեն կհետևի կորի միակությունը:

Կատարենք հակասող ենթադրություն: Դիցուք, օրինակ, (54)-ի 5-րդ հավասարումը կախյալ է 1-4 հավասարումներից: Սա նշանակում է, որ ցանկացած 2-րդ կարգի կոր, որն անցնում է M_1, M_2, M_3, M_4 կետերով, անցնում է նաև M_5 կետով: Դատողությունները շարունակենք երկու դեպքով:

1. Ենթադրենք՝ M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 կետերից ոչ մի երեքը ընկած չեն մի ուղղի վրա: Դիտարկենք $l_1 = M_1M_2, l_2 = M_3M_4$ ուղիղների զույգը: Այն 2-րդ կարգի կոր է, ուստի $M_5 \in l_1$ կամ $M_5 \in l_2$: Այժմ, դիտարկելով նաև $l_3 = M_1M_3$, $l_4 = M_2M_4$ ուղիղներով կազմված 2-րդ կարգի կորը, կստանանք $M_5 \in l_3$ կամ $M_5 \in l_4$: Կախված M_5 կետի պատկանելիությունից այս կամ այն ուղղին՝ գոյություն ունի չորս հնարավորություն, օրինակ՝ եթե $\begin{cases} M_5 \in l_1 \\ M_5 \in l_3 \end{cases}$, ապա $\begin{cases} M_2 \in M_1M_5 \\ M_3 \in M_1M_5 \end{cases}$: Սա նշանակում է, որ M_1, M_2, M_3, M_4 կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա, ինչը հակասում է թեորեմի պայմանին: Հեշտ է տեսնել, որ մյուս երեք հնարավորություններից՝

$\begin{cases} M_5 \in l_1 \\ M_5 \in l_4 \end{cases}$, $\begin{cases} M_5 \in l_2 \\ M_5 \in l_3 \end{cases}$, $\begin{cases} M_5 \in l_2 \\ M_5 \in l_4 \end{cases}$ յուրաքանչյուրը նույնպես բերում է հակասության:

2. Ենթադրենք, օրինակ, M_1, M_3, M_4 կետերը պատկանում են մի ուղղի՝ l_5-ին, և բնականաբար $M_2 \notin l_5$, $M_5 \notin l_5$: Դիտարկենք $l_6 = M_1M_2$, $l_7 = M_3M_2$, $l_8 = M_4M_2$ ուղիղները: Քանի որ M_5-ը պատկանում է $(l_5, l_6), (l_5, l_7), (l_5, l_8)$ ուղիղների զույգերից յուրաքանչյուրին, ուստի $M_5 \in l_6, l_7, l_8$: Նշանակում է՝ M_5-ը համընկնում է M_2-ի հետ, ինչը հակասում է թեորեմի պայմանին:



Դիտողություն: Նկատենք, որ թեորեմի ապացուցման ընթացքում մենք ևս մի անգամ ստացանք 2-րդ կարգի կորերի նույնականացման պայմանը արդեն այլ եղանակով: Բայց եթե § 39-ում արտածումը կատարվեց սոսկ 2-րդ կարգի կորերի տեսության շրջանակում, ապա երկրորդ դեպքում օգտագործվեց լրացուցիչ գործիք գծային հանրահաշվից:

§ 42. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԻ ԳԼԽԱՎՈՐ ՈՒՂՂՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԼԽԱՎՈՐ ՏՐԱՄԱԳԾԻ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

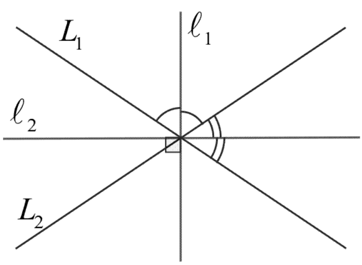
Ստորև դիտարկելու ենք հետևյալ խնդիրը՝ ամեն մի երկրորդ կարգի կորի համար գտնել նրա համաչափության բոլոր առանցքները:

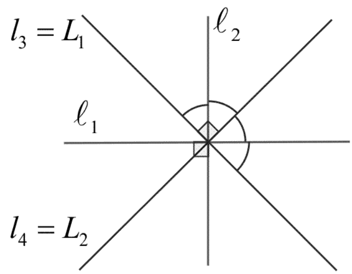
Դիցուք ℓ-ը կորի համաչափության առանցք է: Սա նշանակում է, որ կորին պատկանող ցանկացած A կետի համաչափ A' կետը ℓ-ի նկատմամբ նույնպես պատկանում է այդ կորին: Այստեղ հնարավոր է երկու դեպք:

I. Եթե AA' լարի ուղղությունը ասիմպտոտական է, ապա AA' ուղիղն ընկած է կորի կազմի մեջ, և հետևաբար կորը ուղիղների զույգ է՝ տրոհվող կոր:

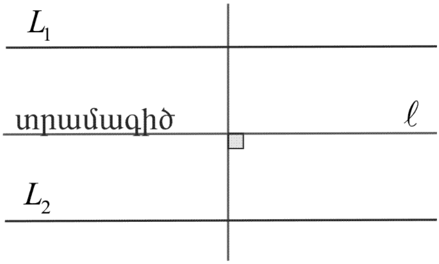
Քանի որ ուղղի համաչափը որևէ ուղղի նկատմամբ դարձյալ ուղիղ է, ուստի տրոհվող կորերի համար խնդրի լուծումը դժվարություն չի ներկայացնում: Հեշտ է տեսնել, որ հատվող միմյանց ոչ ուղղահայաց L_1 և L_2 ուղիղների զույգն ունի ճիշտ երկու համաչափության առանցք. դրանք այդ ուղիղներով կազմված անկյունների ℓ_1 և ℓ_2 կիսորդներն են:

Եթե ուղիղները փոխուղղահայաց են, ապա նրանցով կազմված անկյունների կիսորդներից բացի՝ համաչափության առանցք են նաև իրենք՝ այդ ուղիղները: Արդյունքում ունենում ենք համաչափության ճիշտ չորս՝ ℓ_1, ℓ_2, L_1, L_2 առանցք:





Զուգահեռ իրական ուղիղների զույգի համար համաչափության առանցքներ են միայն նրա միակ ℓ տրամագիծը և այդ տրամագծին ուղղահայաց բոլոր ուղիղները:



II. Եթե AA' լարի ուղղությունը ասիմպտոտական չէ, ապա կորի ℓ համաչափության առանցքը, կիսելով իրեն ուղղահայաց բոլոր լարերին, համարվում է տրամագիծ՝ համալուծ իրեն ուղղահայաց ուղղությանը: Այդպիսի տրամագիծը կոչվում է կորի ***գլխավոր տրամագիծ***:

Այսպիսով՝ չտրոհվող կորի համաչափության առանցքները որոնելիս անհրաժեշտ է նախ գտնել այն ուղղությունները, որոնք համալուծ են իրենց ուղղահայաց ուղղությանը: Ամեն մի այդպիսի ուղղություն կոչվում է կորի ***գլխավոր ուղղություն***:

Նկատենք հետևյալը.

Հատկություն 1: Գլխավոր ուղղությանն ուղղահայաց ուղղությունը գլխավոր ուղղություն է (հետևում է սահմանումից):

Հատկություն 2: Կորի հատուկ ուղղությունը (եթե այդպիսին կա) գլխավոր ուղղություն է:

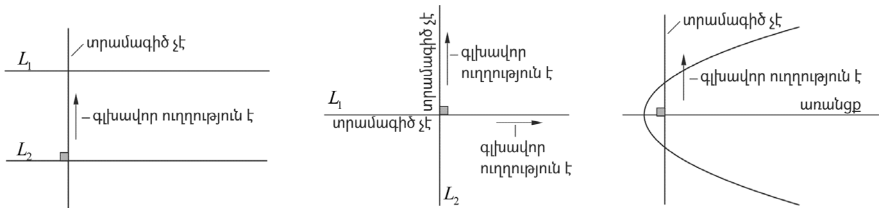
Հատկություն 3: Ցանկացած կորի կամայական գլխավոր տրամագծի ուղղությունը գլխավոր է:

Հակառակ պնդումը միշտ չէ, որ ճիշտ է, այսինքն՝ գլխավոր ուղղությունը կարող է չլինել գլխավոր տրամագծի ուղղություն:

Օրինակ 1: Զուգահեռ ուղիղների զույգի դեպքում այդ ուղիղներին ուղղահայաց ուղղությունը գլխավոր ուղղություն է նրա համար, սակայն այդ ուղիղներին ուղղահայաց ոչ մի ուղիղ տրամագիծ չէ:

Օրինակ 2: Ուղղահայաց ուղիղների զույգի համար այդ ուղիղների ուղղությունները գլխավոր ուղղություններ են, սակայն այդ ուղիղներըտրամագծեր չեն:

Օրինակ 3: Պարաբոլի համար նրա առանցքին ուղղահայաց ուղղությունը գլխավոր ուղղություն է: Բայց քանի որ պարաբոլի առանցքի ուղղությունը նրա համար ասիմպտոտական ուղղություն է, ապա առանցքին ուղղահայաց ոչ մի ուղիղ չի կարող լինել պարաբոլի տրամագիծ:



Օրինակ 1 Օրինակ 2 Օրինակ 3

Ամփոփելով վերը շարադրվածը՝ գալիս ենք հետևյալ եզրակացության: Չտրոհվող կորի համաչափության առանցքները գտնելու համար պետք է գտնել նրա գլխավոր ուղղությունները և դրանցից ընտրել նրանք, որոնք կարող են լինել տրամագծի ուղղություն:

§ 43. ԿՈՐԵՐԻ ԳԼԽԱՎՈՐ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Դիցուք $\{\alpha;\ \beta\}$ և $\{\alpha';\ \beta'\}$ ուղղությունները փոխադարձաբար համալուծ են՝

$$a_{11}\alpha\alpha' + a_{12}(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + a_{22}\beta\beta' = 0$$

և փոխուղղահայաց՝ $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$ ։

Քանի որ կորը կարող է ունենալ ոչ ավելի, քան մեկ հատուկ ուղղություն, ուստի դիտարկվող ուղղություններից գոնե մեկը հատուկ չէ։ Դիցուք դա $\{\alpha;\ \beta\}$-ն է։

Ունենք $-\alpha' : \beta' = \beta : \alpha$ և

$$-\alpha' : \beta' = (a_{21}\alpha + a_{22}\beta) : (a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\,,$$

որտեղից՝ $\beta : \alpha = (a_{21}\alpha + a_{22}\beta) : (a_{11}\alpha + a_{12}\beta)$ ։

Սա նշանակում է, որ գոյություն ունի λ թիվ այնպիսին, որ

$$a_{21}\alpha + a_{22}\beta = \lambda\beta,\ \ a_{11}\alpha + a_{12}\beta = \lambda\alpha$$

կամ

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)\alpha + a_{12}\beta = 0\\ a_{21}\alpha + (a_{22}-\lambda)\beta = 0\end{cases} \qquad (55)$$

Քանի որ (55) համակարգն ունի $(\alpha,\ \beta)$ ոչ զրոյական լուծում, ապա $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$, այսինքն՝

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0, \qquad (56)$$

որտեղ նշանակել ենք $S = a_{11} + a_{22}$, $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ ։ Ստացված (56) հավասարումը կոչվում է երկրորդ կարգի կորի ***բնութագրիչ հավասարում*** (այս անվանումը կպարզաբանվի ավելի ուշ՝ § 45-ում)։

Այսպիսով՝ կորի գլխավոր ուղղությունները գտնելու համար նախ գտնում ենք բնութագրիչ հավասարման բոլոր լուծումները, ապա ամեն մի լուծման համար (55) համակարգից գտնում ենք տվյալ լուծմանը համապատասխանող $\{\alpha; \beta\}$ գլխավոր ուղղությունները:

Պարզվում է, որ բնութագրիչ հավասարման արմատները միշտ իրական են: Իրոք, (56) հավասարումից գտնում ենք

$$\lambda_{1,2} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4\delta}}{2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2}}{2} =$$

$$= \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}$$

և քանի որ $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$, ուստի (56) հավասարումը միշտ ունի մեկ կամ երկու իրական արմատ:

Այժմ քննարկենք (55) համակարգի լուծումները: Այդ նպատակով դիտարկենք երկու դեպք.

ա) Բնութագրիչ հավասարումն ունի մի լուծում, ինչի համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$: Այս դեպքում $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22}$, և (55) համակարգն ընդունում է $\begin{cases} 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta = 0 \\ 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta = 0 \end{cases}$ տեսք: Այսինքն՝ կորի համար բոլոր ուղղությունները գլխավոր են: Հակառակ պնդումը նույնպես ճիշտ է, եթե կորի համար բոլոր ուղղությունները գլխավոր են, ապա $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$: Իրոք, (55) համակարգում որպես $\{\alpha; \beta\}$ դիտարկելով $\{0; 1\}$ և $\{1; 0\}$ ուղղությունները՝ կստանանք պահանջը: Այսպիսով՝ կորի համար բոլոր ուղղությունները գլխավոր են այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$:

Պարզվում է, որ այս հատկությամբ օժտված է միայն մի տեսակի 2-րդ կարգի կոր:

ԹԵՈՐԵՄ: Որևէ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում կորի հավասարման մեջ $a_{11} = a_{22} \neq 0$ և $a_{12} = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ կորը շրջանագիծ է:

Իրոք, եթե $a_{11}=a_{22}\neq 0,\ a_{12}=0$, ապա կորի (29) հավասարումն ընդունում է $a_{11}x^2+a_{11}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ տեսք:

Բաժանելով երկու մասերը $a_{11}\neq 0$ թվի վրա և անջատելով լրիվ քառակուսիներ ըստ x-ի և y-ի՝ կստանանք $\left(x+\dfrac{a_1}{a_{11}}\right)^2+\left(y+\dfrac{a_2}{a_{11}}\right)^2=a_0'$, որտեղ $a_0'=\dfrac{a_1^2+a_2^2}{a_{11}^2}-a_0$:

Ստացված հավասարումը պատկերում է իրական կամ կեղծ շրջանագիծ համապատասխանաբար $a_0'>0$ կամ $a_0'<0$ դեպքերում: Իսկ $a_0'=0$ դեպքում հավասարումը պատկերում է մի կետ՝ $\left(-\dfrac{a_1}{a_{11}};-\dfrac{a_2}{a_{11}}\right)$, որը կարելի է դիտարկել որպես զրո շառավղով շրջանագիծ:

Հակառակը, եթե կորը շրջանագիծ է, ապա նրա հավասարումը, ըստ սահմանման, ունի $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ տեսք, որտեղից $a_{11}=a_{22}=1,\ a_{12}=0$:□

Հետևություն: Ցանկացած ուղղություն կարող է լինել գլխավոր ուղղություն միայն և միայն շրջանագծերի համար:

բ) <u>Բնութագրիչ հավասարումն ունի երկու լուծում</u>՝ $\lambda_1\neq\lambda_2$:

Տվյալ λ_i արմատի դեպքում, քանի որ $a_{11}-\lambda_i$, $a_{22}-\lambda_i$, a_{12} թվերից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի, (55) համակարգից գտնվում է միակ $\{\alpha;\ \beta\}$ գլխավոր ուղղություն՝ որոշված

$$\alpha:\beta=(-a_{12}):(a_{11}-\lambda_i)\ \text{կամ}\ \alpha:\beta=(a_{22}-\lambda_i):(-a_{12})$$

հարաբերության տեսքով:

Այսպիսով՝ եթե երկրորդ կարգի կորը շրջանագիծ չէ, ապա այն ունի ճիշտ երկու գլխավոր ուղղություն, որոնք կարող են ներկայացվել $\{-a_{12};\ a_{11}-\lambda_i\}$, $i=1,2$ կամ $\{a_{22}-\lambda_1;-a_{12}\}$, $i=1,2$ վեկտորներով: Նկատենք, որ եթե տվյալ կորի համար $a_{12}=0$ և

λ_1, λ_2 արմատներից մեկն ու մեկը, օրինակ՝ λ_1-ը, համընկնում է a_{11}-ի հետ, ապա վերը բերված հարաբերություններից առաջինը դառնում է անորոշ, իսկ $\{-a_{12};\, a_{11}-\lambda_1\}$ վեկտորը դառնում է զրոյական: Այս դեպքում λ_1 արմատին համապատասխանող $\{\alpha;\, \beta\}$ գլխավոր ուղղությունը գտնում ենք երկրորդ հարաբերությունից՝ $\{a_{22}-\lambda_1; -a_{12}\}$, որտեղ արդեն $a_{22}-\lambda_1 \neq 0$:

Նշենք նաև, որ բ) դեպքում կորի երկու գլխավոր ուղղությունները միշտ փոխուղղահայաց են, քանի որ $\{-a_{12};\, a_{11}-\lambda_1\}$ և $\{-a_{12};\, a_{11}-\lambda_2\}$ վեկտորները, ինչպես նաև $\{a_{22}-\lambda_1; -a_{12}\}$ և $\{-a_{12}; a_{11}-\lambda_2\}$ վեկտորները ուղղահայաց են միմյանց:

§ 44. ԳԼԽԱՎՈՐ ՏՐԱՄԱԳԾԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Վերադառնանք § 42-ի սկզբում ձևակերպված խնդրին՝ ամեն մի երկրորդ կարգի չտրոհվող կորի համար գտնել նրա համաչափության բոլոր առանցքները:

Այստեղ անհրաժեշտ է դիտարկել երկու դեպք՝ կախված նրանից՝ կորը միակենտրոն է, թե պարաբոլական:

1. <u>Կորը միակենտրոն է</u>: Եթե այն շրջանագիծ չէ, ապա կորն ունի ճիշտ երկու գլխավոր ուղղություն: Միակենտրոն կորը չունի հատուկ ուղղություն, նշանակում է՝ դիտարկվող ուղղություններից յուրաքանչյուրը համալուծ է միայն և միայն մյուսին: Ուստի այդ ուղղություններից ոչ մեկը ասիմպտոտական չէ և հետևաբար որոշում է տրամագծի ուղղությունը: Այսպիսով՝ նշված դեպքում կորն ունի ճիշտ երկու գլխավոր տրամագիծ, որոնց հավասարումներն են

$$a_{12} \cdot F_1(x,y) - (a_{11} - \lambda_i) \cdot F_2(x,y) = 0, \ i = 1,2,$$

կամ

$$(a_{22} - \lambda_i) \cdot F_1(x,y) - a_{12} \cdot F_2(x,y) = 0, \ i = 1,2 :$$

Եթե կորը շրջանագիծ չէ, ապա λ_1, λ_2 արմատներից յուրաքանչյուրի դեպքում a_{12}, $(a_{11} - \lambda_i)$, $(a_{22} - \lambda_i)$ թվերը միաժամանակ զրո չեն: Հետևաբար տվյալ λ_i արմատի համար գրված երկու հավասարումներից մեկն ու մեկը միշտ իմաստ ունի:

Իսկ շրջանագծի դեպքում նրա բոլոր տրամագծերը (կենտրոնով անցնող բոլոր ուղիղները) գլխավոր տրամագծեր են:

Այսպիսով՝ ապացուցեցինք հետևյալը.

ԹԵՈՐԵՄ 1: Եթե չտրոհվող կորը միակենտրոն է և շրջանագիծ չէ, ապա այն ունի ճիշտ երկու համաչափության առանցք, որոնք նրա գլխավոր տրամագծերն են:

2. <u>Կորը պարաբոլական է</u>՝ $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$: Նրա բնութագրիչ հավասարումն ունի $\lambda^2 - S\lambda = 0$ տեսք, որտեղ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = S = a_{11} + a_{22}$: Ընդ որում՝ $\lambda_1 = 0$ դեպքում (55) համակարգն

ընդունում է $\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta = 0 \end{cases}$ տեսք, որից հետևում է, որ $\{\alpha; \beta\}$ գլխավոր ուղղությունը, լինելով հատուկ ուղղություն, ասիմպտոտական է (տե՛ս § 36-ի թեորեմ 1-ը) և չի որոշում տրամագիծ: Իսկ $\lambda_2 = S$ դեպքում (55) համակարգն ունի $\begin{cases} -a_{22}\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{12}\alpha - a_{11}\beta = 0 \end{cases}$ տեսք, որտեղից $\alpha : \beta = a_{12} : a_{22} = a_{11} : a_{12}$:

Այս գլխավոր ուղղությունն արդեն ասիմպտոտական չէ և որոշում է գլխավոր տրամագիծ: Հետևաբար պարաբոլական կորերն ունեն միայն մի գլխավոր տրամագիծ: Այստեղից մասնավորապես ստանում ենք.

ԹԵՈՐԵՄ 2: Չտրոհվող պարաբոլական կորերը, այսինքն՝ պարաբոլներն ունեն <u>միայն մի համաչափության առանցք</u>, որի հավասարումն է $a_{12} \cdot F_1(x, y) + a_{22} \cdot F_2(x, y) = 0$,

կամ $a_{11} \cdot F_1(x, y) + a_{12} \cdot F_2(x, y) = 0$:

Ընդ որում՝ դրանցից մեկն ու մեկը միշտ իմաստ ունի:

§ 45. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ԻՆՎԱՐԻԱՆՏՆԵՐԸ

Ինչպես գիտենք (տե՛ս § 21), երկրորդ կարգի նույն կորը տարբեր աֆինական կոորդինատային համակարգերում կարող է տրվել միմյանցից էապես տարբերվող բազմանդամային հավասարումներով: Հարց է առաջանում՝ գոյություն ունե՞ն այնպիսի հանրահաշվական մեծություններ, որոնց արժեքները հաշվվում են ցանկացած կորի ցանկացած հավասարման գործակիցներով, իսկ ստացվող արդյունքները լինում են նույնը (անփոփոխ են) տվյալ կորի բոլոր հավասարումների համար: Այդպիսի մեծությունները կոչվում են կորի ***ինվարիանտներ*** և օգնում են կորի որոշակի հատկությունների բացահայտմանը: Մասնավորապես, ինչպես կտեսնենք հաջորդ պարագրաֆներում, ելնելով կորի ցանկացած հավասարումից, դրանց միջոցով կարելի է շատ արագ, չդիմելով մեծածավալ հաշվումների, որոշել կորի տեսակն ու նրա մյուս պարամետրերը: Նախ հստակեցնենք ***կորի օրթոգոնալ ինվարիանտ*** հասկացությունը:

Դիցուք երկրորդ կարգի կորը OXY ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված է ընդհանուր (29) հավասարումով՝ $F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$:

Մեկ այլ՝ $O'X'Y'$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ այդ կորի հավասարում կարելի է ստանալ (29) հավասարումից, եթե նրա մեջ x-ի և y-ի փոխարեն տեղադրենք իրենց արժեքները կոորդինատային համակարգի ձևափոխության $\begin{cases} x=c_{11}x'+c_{12}y'+c_1 \\ y=c_{21}x'+c_{22}y'+c_2 \end{cases}$ բանաձևերից: Այնուհետև կատարելով պարզեցումներ՝ կստանանք

$$F'(x',y')=F(c_{11}x'+c_{12}y'+c_1, c_{21}x'+c_{22}y'+c_2)=$$
$$=a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+a'_0=0$$

տեսքի հավասարում:

Նկատենք, որ այս եղանակով $F'(x',y')=0$ հավասարումը կազմելիս մենք պետք է զերծ մնանք նրա բոլոր գործակիցները որևէ $k\neq 1$ արտադրիչով կրճատելուց: Այս սահմանափակումը հնարավորություն է տալիս, ելնելով կորի մի որևէ $F(x,y)=0$ հավասարումից (մի որևէ սևեռած OXY ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ), ստանալ այդ կորի միարժեքորեն որոշված հավասարում հարթության յուրաքանչյուր ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում:

Կորի հավասարում ստանալու այս եղանակը այսուհետև կանվանենք բնական եղանակ: Նշենք այդ եղանակի երկու առանձնահատկություն:

1. Եթե $F'(x',y')=0$ հավասարումը ստացվել է $F(x,y)=0$ հավասարումից բնական եղանակով, ապա իր հերթին $F(x,y)=0$ հավասարումը ստացվում է $F'(x',y')=0$ հավասարումից նույնպես բնական եղանակով:

2. Եթե $F'(x',y')=0$ հավասարումը ստացվել է $F(x,y)=0$ հավասարումից բնական եղանակով, իսկ $F''(x'',y'')=0$ հավասարումը՝ $F'(x',y')=0$ հավասարումից բնական եղանակով, ապա $F''(x'',y'')=0$ հավասարումը ստացվում է $F(x,y)=0$ հավասարումից բնական եղանակով:

Սրանցից 1-ը հետևում է նրանից, որ $c_{11}:c_{21}\neq c_{12}:c_{22}$ պայմանի շնորհիվ x'-ը և y'-ը միարժեքորեն որոշվում են գծային հավասարումների (2) համակարգից՝ որպես գծային ֆունկցիաներ x-ից և y-ից: Չնայած x'-ի և y'-ի արտահայտությունները x-ից և y-ից բացահայտ տեսքով մեզ պետք չեն գալու, առաջարկում ենք ընթերցողին, որպես օգտակար վարժություն, օգտվելով $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$ մատրիցի օրթոգոնալության պայմաններից (տե՛ս § 12), արտածել

$$x'=c_{11}x+c_{21}y-(c_1c_{11}+c_2c_{22}),\;\; y'=c_{12}x+c_{22}y-(c_1c_{12}+c_2c_{22})$$

հավասարությունները:

Ինչ վերաբերում է 2-ին, ապա այն հետևում է § 11-ի դիտողությունից:

Սահմանում: Երկրորդ կարգի կորերի (29) ընդհանուր հավասարման $a_{11}, a_{12}, a_{22}, \ a_1, a_2, a_0$ գործակիցներից կախված որևէ $\mathrm{I} = \mathrm{I}(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0)$ ֆունկցիա կոչվում է երկրորդ կարգի կորերի *օրթոգոնալ ինվարիանտ ֆունկցիա* (կամ պարզապես *օրթոգոնալ ինվարիանտ*), եթե այն ամեն մի երկրորդ կարգի կորի համար չի փոխում իր արժեքը մի ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգից ցանկացած այլ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի անցնելիս: Այսինքն՝ եթե տվյալ կորի $F(x, y) = 0$ և $F'(x', y') = 0$ հավասարումներից մեկը ստացվել է մյուսից բնական եղանակով, ապա

$$\mathrm{I}(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0) = \mathrm{I}(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_1, a'_2, a'_0):$$

ԹԵՈՐԵՄ: Հետևյալ՝ $S = a_{11} + a_{22}$, $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$ ֆունկցիաները երկրորդ կարգի կորերի օրթոգոնալ ինվարիանտ ֆունկցիաներ են:

Մինչև թեորեմի ապացուցումը նախապես ապացուցենք երկու լեմմա:

Լեմմա 1: Դիցուք $OX'Y'$ կոորդինատային համակարգն ստացվել է OXY կոորդինատային համակարգից OX առանցքի նկատմամբ համաչափության ձևափոխությամբ: Եթե կորի $F'(x', y') = 0$ հավասարումն ստացվել է կորի $F(x, y) = 0$ հավասարումից բնական եղանակով, ապա S, δ և Δ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրի արժեքները՝ հաշված մի դեպքում $F(x, y) = 0$ հավասարման, իսկ մյուս դեպքում $F'(x', y') = 0$ հավասարման գործակիցներով, նույնն են, այսինքն՝ $S' = S$, $\delta' = \delta$, $\Delta' = \Delta$:

Ապացույց: Տեղադրելով կոորդինատային համակարգի ձևափոխության $x = x'$, $y = -y'$ բանաձևերը $F(x, y) = 0$ հավասարման մեջ` կստանանք

$F'(x', y') = F(x', -y') = a_{11}x'^2 - 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_1x' - 2a_2y' + a_0 = 0,$

որտեղից $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{12} = -a_{12}$, $a'_{22} = a_{22}$, $a'_1 = a_1$, $a'_2 = -a_2$, $a'_0 = a_0$:

Այժմ ակնհայտ է, որ $S = a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22} = S'$,

$$\delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta,$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a'_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_1 \\ -a_{21} & a_{22} & -a_2 \\ a_1 & -a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \Delta :$$

Լեմմա 2: Ենթադրենք` ունենք երկրորդ կարգի կոր և այնպիսի OXY ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ այդ կորը ունի

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

տեսքի հավասարում: Դիցուք ունենք կամայական $O'X'Y'$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ դիտարկվող կորի

$$F'(x', y') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 = 0$$

հավասարումն ստացվել է $F(x, y) = 0$ հավասարումից բնական եղանակով: Այս S, δ և Δ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրի արժեքները` հաշված մի դեպքում $F(x, y) = 0$ հավասարման, իսկ մյուս դեպքում $F'(x', y') = 0$ հավասարման գործակիցներով, նույնն են, այսինքն` $S = a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22} = S'$,

$$\delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = \delta, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a'_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_1 \\ 0 & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \Delta :$$

Ապացույց: Նկատենք, որ կարելի է կատարել անցում OXY կոորդինատային համակարգից $O'X'Y'$ կոորդինատային համակարգ հետևյալ երկու փուլերով: Սկզբում OXY կոորդինատային համակարգը տեղափոխենք ինքն իրեն զուգահեռ այնպես, որ տեղափոխված կոորդինատային համակարգի սկզբնակետը համընկնի O'-ի հետ: Այնուհետև ստացված կոորդինատային համակարգը կարելի է համընկեցնել $O'X'Y'$-ի հետ կամ կատարելով միայն պտույտ O'-ի շուրջ որոշ α անկյունով, կամ էլ, բացի պտույտից, կատարելով նաև համաչափություն պտտված առանցքներից մեկի նկատմամբ: Սա նշանակում է, որ կարելի է կատարել անցում $F(x,y)=0$ հավասարումից $F'(x',y')=0$ հավասարում երկու քայլով, որոնք համապատասխանում են նշված երկու փուլերին: Հետևաբար, լեմման ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ յուրաքանչյուր քայլում S, δ և Δ ֆունկցիաները չեն փոխում իրենց արժեքները:

Նախ, հաշվելով S, δ և Δ արժեքները $F(x,y)=0$ հավասարման համար, ստանում ենք

$$S = a_{11} + a_{22}\,,\ \delta = a_{11}a_{22}\,,\ \Delta = a_{11}a_{22}a_0 - a_{11}a_2^2 - a_{22}a_1^2 :$$

Իսկ S', δ' և Δ' արժեքները $F'(x',y')=0$ հավասարման համար հաշվելու նպատակով դիտարկենք երկու դեպք:

I. Ենթադրենք՝ $O'X'Y'$ կոորդինատային համակարգը ստացվել է OXY կոորդինատային համակարգից զուգահեռ տեղափոխությամբ՝ $x = x' + c_1$, $y = y' + c_2$: Տեղադրելով այս արժեքները $F(x,y)=0$ հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$F'(x',y') = F(x'+c_1, y'+c_2) = a_{11}(x'+c_1)^2 + a_{22}(y'+c_2)^2 + 2a_1(x'+c_1) +$$

$$+2a_2(y'+c_2) + a_0 = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 = 0\,,$$

որտեղ $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{12} = 0$, $a'_{22} = a_{22}$, $a'_1 = a_{11}c_1 + a_1$, $a'_2 = a_{22}c_2 + a_2$,

$$a'_0 = F(c_1, c_2) = a_{11}c_1^2 + a_{22}c_2^2 + 2a_1c_1 + 2a_2c_2 + a_0 :$$

Հետևաբար՝

$$S' = a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} = S\,,\ \delta' = a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = a_{11}a_{22} = \delta :$$

Հաշվենք Δ'-ի արժեքը: Ունենք

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a'_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c_1 + a_1 \\ 0 & a_{22} & a_{22}c_2 + a_2 \\ a_{11}c_1 + a_1 & a_{22}c_2 + a_2 & F(c_1, c_2) \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}F(c_1, c_2) - a_{11}(a_{22}c_2 + a_2)^2 - a_{22}(a_{11}c_1 + a_1)^2 =$$

$$= a_{11}a_{22}(F(c_1, c_2) - a_{11}c_1^2 - a_{22}c_2^2 - 2a_1c_1 - 2a_2c_2) - a_{11}a_2^2 - a_{22}a_1^2 =$$

$$= a_{11}a_{22}a_0 - a_{11}a_2^2 - a_{22}a_1^2 = \Delta :$$

II. Այժմ ենթադրենք՝ $O'X'Y'$ և OXY կոորդինատային համակարգերի սկզբնակետերը նույնն են: Այս դեպքում կոորդինատային ձևափոխության բանաձևերն ունեն $x = c_{11}x' + c_{12}y'$, $y = c_{21}x' + c_{22}y'$ տեսքը:

Ինչպես գիտենք (տե՛ս § 12-ը), ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգերի դեպքում այս բանաձևերը համընկնում են

ա) $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$ կամ **բ)** $\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha \end{cases}$

բանաձևերից որևէ մեկի հետ:

Սկզբում դիտարկենք **ա)** ենթադեպքը: Տեղադրելով x-ի և y-ի արժեքները $F(x, y) = 0$ հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$F'(x', y') = F(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) =$$

$$= a_{11}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + a_{22}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 +$$

$$+2a_1(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 2a_2(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + a_0 =$$

$$= a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 = 0,$$

որտեղ $a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha$, $a'_{12} = (a_{22} - a_{11})\sin\alpha\cos\alpha$,

$a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha$, $a'_1 = a_1\cos\alpha + a_2\sin\alpha$,

$a'_2 = -a_1\sin\alpha + a_2\cos\alpha$, $a'_0 = a_0$:

Այստեղից ստանում ենք

$$S' = a'_{11} + a'_{22} = a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha + a_{11}\sin^2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha =$$

$$= a_{11} + a_{22} = S,$$

$$\delta' = a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = (a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha)(a_{11}\sin^2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha) -$$
$$-(a_{22} - a_{11})^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = a_{11}a_{22}(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) =$$
$$= a_{11}a_{22} = \delta :$$

Հաշվենք Δ'-ը՝

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a'_0 \end{vmatrix} = a'_1(a'_{21}a'_2 - a'_{22}a'_1) + a'_2(a'_{12}a'_1 - a'_{11}a'_2) + a'_0(a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}) :$$

Պարզեցնելով աջ մասի առաջին երկու գումարելիների գումարը՝ ստանում ենք

$$a'_1(a'_{21}a'_2 - a'_{22}a'_1) + a'_2(a'_{12}a'_1 - a'_{11}a'_2) = 2a'_1a'_2a'_{12} - a'^2_1a'_{22} - a'^2_2a'_{11} =$$
$$= 2(a_1\cos\alpha + a_2\sin\alpha)(-a_1\sin\alpha + a_2\cos\alpha)(a_{22} - a_{11})\sin\alpha\cos\alpha -$$
$$-(a_1\cos\alpha + a_2\sin\alpha)^2(a_{11}\sin^2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha) - (-a_1\sin\alpha + a_2\cos\alpha)^2 \cdot$$
$$\cdot(a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha) = -a_{11}a_2^2 - a_{22}a_1^2 :$$

Օգտվելով վերը ապացուցված $a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = a_{11}a_{22}$ հավասարությունից՝ երրորդ գումարելիի համար ստանում ենք
$a'_0(a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}) = a_0a_{11}a_{22}$:

Այսպիսով՝ $\Delta' = a_0a_{11}a_{22} - a_{11}a_2^2 - a_{22}a_1^2 = \Delta$:

Այժմ դիտարկենք **բ)** ենթադեպքը, երբ $x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha$, $y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha$: Այս անցումը OXY կոորդինատային համակարգից $O'X'Y'$ կոորդինատային համակարգ կարող ենք ներկայացնել որպես երկու՝ $x = x''\cos\alpha + y''\sin\alpha$, $y = x''\sin\alpha - y''\cos\alpha$ և $x'' = x'$, $y'' = -y'$ կոորդինատային ձևափոխությունների համադրույթ: Դրանցից առաջինին համապատասխանում է OXY կոորդինատային համակարգի պտույտ O սկզբնակետի շուրջ α անկյունով, որի արդյունքում ստացվում է նոր՝ $OX''Y''$ կոորդինատային համակարգ: Երկրորդ ձևափոխությունը իրականացնում է համաչափություն OX'' առանցքի նկատմամբ, որի արդյունքում ստացվում է $OX'Y'$ համակարգը:

Այժմ $S' = S$, $\delta' = \delta$ և $\Delta' = \Delta$ հավասարությունները ստացվում են արդեն ապացուցված **ա)** ենթադեպքից և լեմմա 1-ից:□

Թեորեմի ապացուցումը: Ունենք երկու կամայական $O'X'Y'$ և $O''X''Y''$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգեր, որոնց նկատմամբ երկրորդ կարգի կորն ունի համապատասխանաբար $F'(x', y') = 0$ և $F''(x'', y'') = 0$ հավասարումներ, ընդ որում՝ դրանք ստացվել են մեկը մյուսից բնական եղանակով: Դիցուք այդ հավասարումների համար S, δ և Δ ֆունկցիաների արժեքներն են համապատասխանաբար S', δ', Δ' և S'', δ'' Δ'': Ապացուցենք, որ $S' = S$, $\delta' = \delta$, $\Delta' = \Delta$:

Ինչպես գիտենք (տե՛ս § 21-ը), դիտարկվող կորի $F'(x', y') = 0$ հավասարման համար գոյություն ունի OXY ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ կորի հավասարումն ունի $F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$ տեսք: Պարզության համար S, δ և Δ ֆունկցիաների արժեքները $F(x, y) = 0$ հավասարման համար նշանակենք նույն S, δ և Δ տառերով: Քանի որ $F(x, y) = 0$ հավասարումը ստացվել է $F'(x', y') = 0$ հավասարումից բնական եղանակով, ապա ըստ լեմմա 2-ի՝ $S' = S$, $\delta' = \delta$, $\Delta' = \Delta$: Բայց $F''(x'', y'') = 0$ հավասարումը նույնպես ստացվում է $F(x, y) = 0$ հավասարումից բնական եղանակով, ուստի $S = S''$, $\delta = \delta''$, $\Delta = \Delta''$: Հետևաբար $S' = S''$, $\delta' = \delta''$, $\Delta' = \Delta''$:□

Հետևություն: Ապացուցված թեորեմից հետևում է, որ տվյալ կորի համար որոշ իմաստով S, δ և Δ մեծությունները անկախ են ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգերից: Հետևաբար $\lambda^2 - S\lambda + \delta$ քառակուսային եռանդամը, ինչպես նաև կորի $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$ բնութագրիչ հավասարման արմատները, լինելով անկախ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգերից, որոշ իմաստով բնութագրում են իրեն՝ կորին: Թե ինչ չափով են դրանք բնութագրում կորին, կտեսնենք § 47-ում:

§ 46. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐԻ ԿԻՍԱԻՆՎԱՐԻԱՆՏԸ

Հետագայում մեզ պետք է գալու ևս մի ֆունկցիա՝

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}:$$

Ի տարբերություն S, δ և Δ ֆունկցիաների՝ այն բոլոր երկրորդ կարգի կորերի օրթոգոնալ ինվարիանտ չէ: Կարելի է ցույց տալ, որ K-ն չի փոխում իր արժեքը ցանկացած երկրորդ կարգի կորի համար մի OXY ուղղանկյուն կորդինատային համակարգից <u>նույն</u> O <u>սկզբնակետով</u> մեկ այլ՝ $OX'Y'$ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգի անցնելիս: Բայց կարելի է ցույց տալ նաև, որ այն, ընդհանրապես ասած, չի պահպանում իր արժեքը <u>ցանկացած</u> երկրորդ կարգի կորի համար ուղղանկյուն կորդինատային համակարգերի զուգահեռ տեղափոխությունների դեպքում: Այդուհանդերձ՝

ԹԵՈՐԵՄ: Եթե կորն այնպիսին է, որ նրա համար $\delta = \Delta = 0$, ապա $K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$ ֆունկցիան չի փոխում իր արժեքը մի ուղղանկյուն կորդինատային համակարգից բնական եղանակով ցանկացած այլ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգի անցնելիս:

Այս թեորեմի իմաստով K-ն կոչվում է երկրորդ կարգի կորերի <u>կիսաինվարիանտ</u>:

Ապացույց: Ըստ պայմանի՝ $\delta = 0$, ուստի կորը պարաբոլական կոր է: Ինչպես գիտենք (տե՛ս § 21-ը), այս դեպքում գոյություն ունի $O'X'Y'$ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ կորը տրվում է $\lambda_2 y'^2 + 2a_1'x' + a_0' = 0,\ \lambda_2 \neq 0$ տեսքի հավասարումով: Ընդ որում՝ անցումը սկզբնական հավասարումից դեպի այս հավասարում կատարվել էր բնական եղանակով:

Հետևաբար ունենք $\Delta = \Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1' \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ a_1' & 0 & a_0' \end{vmatrix} = -a_1'^2 \lambda_2 :$

Այժմ $\Delta = 0$ պայմանից ստանում ենք $a_1' = 0$:

Այսպիսով՝ $\delta = \Delta = 0$ պայմանը համարժեք է նրան, որ $O'X'Y'$ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգի նկատմամբ կորը տրվում է $F'(x', y') = \lambda_2 y'^2 + a_0' = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ տեսքի հավասարումով: Իսկ սա նշանակում է, որ դիտարկվող կորը զուգահեռ կամ համընկած ուղիղների զույգ է:

Փաստորեն թեորեմը պնդում է, որ զուգահեռ կամ համընկած ուղիղների զույգի համար K-ի արժեքը նույնն է ցանկացած երկու ուղղանկյուն կորդինատային համակարգերում:

Կատարելով նույնպիսի դատողություններ, ինչպես § 45-ում թեորեմի ապացուցման ընթացքում, գալիս ենք եզրակացության, որ այս թեորեմի ապացուցման համար բավական է ցույց տալ $K' = K$ հավասարությունը կորի ցանկացած $F(x, y) = 0$ հավասարման համար, որն ստացվում է $F'(x', y') = \lambda_2 y'^2 + a_0'$, $\lambda_2 \neq 0$ հավասարումից բնական եղանակով:

Նախ $O'X'Y'$ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգում գտնում ենք

$$K' = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_0' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & a_0' \end{vmatrix} = \lambda_2 a_0' :$$

Այնուհետև, օգտվելով $O'X'Y'$ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգից որևէ OXY ուղղանկյուն կորդինատային համակարգին անցման $x' = c_{11}x + c_{12}y + c_1$, $y' = c_{21}x + c_{22}y + c_2$ բանաձևերից, կազմենք կորի հավասարումը OXY կորդինատային համակարգում՝

$$F(x, y) = F'(c_{11}x + c_{12}y + c_1, c_{21}x + c_{22}y + c_2) =$$

$$= \lambda_2 \left(c_{21}x + c_{22}y + c_2\right)^2 + a_0' = \lambda_2 c_{21}^2 x^2 + \lambda_2 c_{22}^2 y^2 + 2\lambda_2 c_{21} c_{22} xy +$$

$$+ 2\lambda_2 c_{21} c_2 x + 2\lambda_2 c_{22} c_2 y + \lambda_2 c_2^2 + a_0' :$$

Քանի որ $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ մատրիցն օրթոգոնալ մատրից է, ուստի $c_{21}^2 + c_{22}^2 = 1$ (տե՛ս § 12-ի դիտողությունը):

Այժմ ուղղակի հաշվումով ստանում ենք

$$K = \begin{vmatrix} \lambda_2 c_{21}^2 & \lambda_2 c_{21} c_2 \\ \lambda_2 c_{21} c_2 & \lambda_2 c_2^2 + a_0' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2 c_{22}^2 & \lambda_2 c_{22} c_2 \\ \lambda_2 c_{22} c_2 & \lambda_2 c_2^2 + a_0' \end{vmatrix} = \lambda_2 (c_{21}^2 + c_{22}^2) a_0' = K' :$$

§ 47. ՄԻԱԿԵՆՏՐՈՆ ԿՈՐԵՐԻ ՏԵՍԱԿԻ ԵՎ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԻՆՎԱՐԻԱՆՏՆԵՐՈՎ

Դիցուք OXY ուղղանկյուն կորդինատային համակարգի նկատմամբ $F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ հավասարումով տրված կորը միակենտրոն կոր է, և դիցուք $S,\delta,\ \Delta$ -ն օրթոգոնալ ինվարիանտների արժեքներն են՝ հաշված այդ հավասարման գործակիցներով:

Ինչպես գիտենք, միակենտրոն կորի համար գոյություն ունի $O'X'Y'$ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ կորը տրվում է (20)

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_0=0,\ a'_{11}\neq 0,\ a'_{22}\neq 0$$

հավասարումով: Այս հավասարման համար S', δ' և Δ' ինվարիանտների արժեքներն են

$$S'=a'_{11}+a'_{22}\,,\ \delta'=\begin{vmatrix} a'_{12} & 0 \\ 0 & a'_{22}\end{vmatrix}=a'_{11}a'_{22}\,,\ \Delta'=\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_0\end{vmatrix}=a'_{11}a'_{22}a'_0:$$

Քանի որ $S=S'$, $\delta=\delta'$, $\Delta=\Delta'$, ուստի բնութագրիչ եռանդամի համար ստանում ենք

$$\lambda^2-S\lambda+\delta=\lambda^2-S'\lambda+\delta'=$$
$$=\lambda^2-(a'_{12}+a'_{22})\lambda+a'_{11}a'_{22}=(\lambda-a'_{11})(\lambda-a'_{22})$$

տեսքը: Այսինքն՝ (20) հավասարման մեջ a'_{11} և a'_{22} գործակիցները կորի $\lambda^2-S\lambda+\delta=0$ բնութագրիչ հավասարման արմատներն են, իսկ $a'_0=\dfrac{\Delta'}{\delta'}=\dfrac{\Delta}{\delta}$: Այսպիսով՝ ստացանք, որ (20) հավասարման, հետևաբար նաև կորի կանոնական հավասարման բոլոր գործակիցները կարելի է որոշել կորի սկզբնական հավասարման գործակիցների միջոցով S,δ և Δ ինվարիանտների օգնությամբ:

Կորի տեսակը նույնպես կարելի է որոշել ինվարիանտների միջոցով:

Իրոք, (20) հավասարումը իրական էլիպսի հավասարում է այն և միայն այն դեպքում, երբ λ_1-ը և λ_2-ը ունեն նույն նշանը, և այդ նշանը հակադիր է a_0'-ի նշանին: Այս պայմանը կարելի է գրառել $\lambda_1\lambda_2 > 0$ և $\lambda_1 \dfrac{\Delta}{\delta} < 0$ համակարգի տեսքով, որը համարժեք է $\delta > 0$, $S \cdot \dfrac{\Delta}{\delta} < 0$ պայմաններին:

Վերջնականապես՝

1) կորը էլիպս է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\delta > 0,\ S \cdot \Delta < 0$:

Նման դատողություններով ստանում ենք, որ կորը՝

2) կեղծ էլիպս է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\delta > 0,\ S \cdot \Delta > 0$,

3) հիպերբոլ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\delta < 0,\ \Delta \neq 0$,

4) հատվող իրական ուղիղների զույգ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\delta < 0,\ \Delta = 0$,

5) հատվող կեղծ ուղիղների զույգ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\delta > 0,\ \Delta = 0$:

§ 48. ՊԱՐԱԲՈԼԱԿԱՆ ԿՈՐԵՐԻ ՏԵՍԱԿԻ ԵՎ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԻՆՎԱՐԻԱՆՏՆԵՐՈՎ

Դիցուք OXY ուղղանկյուն կորդինատային համակարգի նկատմամբ $F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ հավասարումով տրված կորը պարաբոլական կոր է, և դիցուք S,δ,Δ-ն օրթոգոնալ ինվարիանտների, իսկ K-ն կիսաինվարիանտի արժեքներն են՝ հաշված այդ հավասարման գործակիցներով:

Ինչպես գիտենք, պարաբոլական կորերի համար (տե՛ս § 21-ը) գոյություն ունի $O'X''Y''$ ուղղանկյուն կորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ այդ կորերը տրվում են կամ

$$a'_{22}y''^2+2a'_1x''=0,\ \ a'_{22}\neq 0, a'_1\neq 0, \tag{57}$$

կամ էլ

$$a'_{22}y''^2+a'_0=0,\ \ a'_{22}\neq 0 \tag{58}$$

տեսքի հավասարումներով:

Սրանցից առաջինը պատկերում է պարաբոլ: Այդ հավասարման համար հաշվելով S'', δ'' և Δ'' ինվարիանտների արժեքները՝ ստանում ենք

$$S''=0+a'_{22}=a'_{22}\,,\ \delta''=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & a'_{22}\end{vmatrix}=0\,,\ \Delta''=\begin{vmatrix}0 & 0 & a'_1\\ 0 & a'_{22} & 0\\ a'_1 & 0 & a'_0\end{vmatrix}=-a'_{22}a'^2_1:$$

Այսպիսով՝ $a'_{22}=S''=S$, $a'_1=\pm\sqrt{-\dfrac{\Delta''}{S''}}=\pm\sqrt{-\dfrac{\Delta}{S}}$, և (57) հավասարումն ընդունում է $Sy''^2\pm 2\sqrt{-\dfrac{\Delta}{S}}\,x''=0$ կամ $y''^2=\pm 2\sqrt{-\dfrac{\Delta}{S^3}}x''$ տեսքը: Անհրաժեշտության դեպքում փոխելով x'' առանցքի ուղղությունը՝ այստեղից կարելի է ստանալ նաև պարաբոլի կանոնական հավասարումը՝ $y''' = 2px'''$, որտեղ $p = \sqrt{-\Delta/S^3}$: Նաև ստանում ենք՝

6) կորը պարաբոլ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\delta = 0,\ \Delta \neq 0$:

Զուգահեռ կամ համընկած ուղիղների զույգերի դեպքում $a'_{22} = S$, $\delta = \Delta = 0$, և (58) հավասարումն ընդունում է $Sy'^2 + a'_0 = 0$ տեսքը: Պարզվում է, որ այս դեպքում a'_0-ը կարող ենք գտնել արդեն K կիսաինվարիանտի օգնությամբ (S, δ և Δ ինվարիանտներով a'_0-ը չի գտնվում): Նախորդ պարագրաֆում ստացել ենք $K' = \lambda_2 a'_0 = S' a'_0$, որտեղից գտնում ենք, որ $a'_0 = K'/S' = K/S$: Այսպիսով՝ զուգահեռ կամ համընկած ուղիղների զույգերի դեպքում (58) հավասարումն ընդունում է $y'^2 + K/S^2 = 0$ կանոնական տեսքը: Ուստի կորը՝

7) զուգահեռ իրական ուղիղների զույգ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\delta = \Delta = 0,\ K < 0$,

8) զուգահեռ կեղծ ուղիղների զույգ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\delta = \Delta = 0,\ K > 0$,

9) համընկած ուղիղների զույգ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\delta = \Delta = K = 0$:

Ստորև աղյուսակներում ամփոփված են բոլոր կորերի տեսակներն ու դրանց հայտանիշները, ինչպես նաև նրանց կանոնական հավասարումների գործակիցները՝ որոշված ինվարիանտներով և կիսաինվարիանտով:

Կորի տեսակը որոշվում է հետևյալ աղյուսակով.

№	Տեսակը	Հայտանիշը
1.	Էլիպս	$\delta > 0$, $S \cdot \Delta < 0$
2.	Կեղծ էլիպս	$\delta > 0$, $S \cdot \Delta > 0$
3.	Հատվող կեղծ ուղիղների զույգ	$\delta > 0$, $\Delta = 0$
4.	Հիպերբոլ	$\delta < 0$, $\Delta \neq 0$
5.	Հատվող իրական ուղիղների զույգ	$\delta < 0$, $\Delta = 0$
6.	Պարաբոլ	$\delta = 0$, $\Delta \neq 0$
7.	Զուգահեռ իրական ուղիղների զույգ	$\delta = \Delta = 0, K < 0$
8.	Զուգահեռ կեղծ ուղիղների զույգ	$\delta = \Delta = 0, K > 0$
9.	Համընկած ուղիղների զույգ	$\delta = \Delta = K = 0$

Բոլոր խմբերում λ_1-ը և λ_2-ը $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$ բնութագրիչ հավասարման արմատներն են			
	միակենտրոն կորեր	պարաբոլական կորեր	
	$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0' = 0$	$\lambda_2 y''^2 + 2a_1' x'' = 0$	$\lambda_2 y''^2 + a_0' = 0$
δ	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$	0	0
Δ	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot a_0'$	$-\lambda_2 \cdot a_1'^2 \neq 0$	0
K	—	—	$\lambda_2 \cdot a_0'$
	$a_0' = \Delta/\delta$	$a_1' = \pm\sqrt{-\Delta/S}$	$a_0' = K/S$

Վերջում դիտարկենք կորի տեսակի և կանոնական հավասարման որոշման մի քանի օրինակ:

Օրինակ 1: Պարզենք $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$ կորի տեսակը և գտնենք նաև կանոնական հավասարումը:

Ունենք $S=3+3=6,\ \delta=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=8,\ \Delta=\begin{vmatrix}3 & 4 & -2\\ 1 & 3 & -2\\ -2 & -2 & 0\end{vmatrix}=16$:

Քանի որ $\delta>0$ և $S\cdot\Delta<0$, ապա կորը էլիպս է:

Այնուհետև $\lambda^2-6\lambda+8=0$ բնութագրիչ հավասարումից գտնում ենք $\lambda_1=2,\ \lambda_2=4$, իսկ $a_0=\dfrac{\Delta}{\delta}=-2$: Հետևաբար կորի (20) հավասարումն է $2x'^2+4y'^2-2=0$, իսկ կանոնական հավասարումը՝ $x'^2+\dfrac{y'^2}{0,5}=1$:

Օրինակ 2: Պարզենք $4x^2+4xy+y^2-2x+14y+7=0$ կորի տեսակը և գտնենք նրա կանոնական հավասարումը:

Ունենք $S=4+1=5$, $\delta=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0$, $\Delta=\begin{vmatrix}4 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 7\\ -1 & 7 & 7\end{vmatrix}=-225$:

Քանի որ $\delta=0,\ \Delta\neq 0$, ուստի կորը պարաբոլ է: Գտնենք նրա կիզակետային պարամետրը՝ $p=\sqrt{-\dfrac{\Delta}{S}}=\sqrt{\dfrac{225}{125}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$:

Հետևաբար կանոնական հավասարումն է $y'^2=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}x'$:

Մինչև հաջորդ օրինակին անցնելը պարզենք, թե ի՞նչ անհրաժեշտ և բավարար պայմանների դեպքում է հնարավոր 2-րդ աստիճանի $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0$ բազմանդամը ներկայացնել գծային արտադրիչների արտադրյալի տեսքով: Սա համարժեք է նրան, որ

$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ հավասարումով պատկերվող 2-րդ կարգի կորը լինի տրոհվող կոր, այսինքն՝ ուղիղների զույգ: Իսկ դրա համար, ինչպես հետևում է վերևում բերված աղյուսակից, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\Delta=0$:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ $3x^2 - xy - 2y^2 - 5x - 5y - 2 = 0$ կորը տրոհվող կոր է, և գտնենք նրա կազմի մեջ մտնող բաղադրիչ ուղիղների հավասարումները:

Նկատենք, որ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -2 & -5/2 \\ -5/2 & -5/2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \ \delta = \begin{vmatrix} 3 & -1/2 \\ -1/2 & -2 \end{vmatrix} < 0,$$

հետևաբար կորը հատվող իրական ուղիղների զույգ է:

Նկատենք նաև, որ $3x^2 - xy - 2y^2 = 0$ կորը և տրված կորը, ունենալով S, δ, Δ ինվարիանտների նույն արժեքները, նույն տեսակի կորեր են: Նույնն են նաև նրանց ասիմպտոտական ուղղությունները:

Քանի որ $3x^2 - xy - 2y^2 = (x - y)(3x + 2y) = 0$, $3x^2 - xy - 2y^2$, ուստի կորը $x - y = 0$ և $3x + 2y = 0$ հատվող ուղիղների զույգն է: Հետևաբար սկզբնական կորի բաղադրիչները, լինելով զուգահեռ այդ ուղիղներին, ունեն $x - y + c_1 = 0$ և $3x + 2y + c_2 = 0$ տեսքի հավասարումներ:

Այստեղից ստանում ենք

$$3x^2 - xy - 2y^2 - 5x - 5y - 2 = (x - y + c_1)(3x + 2y + c_2)$$

և այդ հավասարությունից ստանում ենք

$$3c_1 + c_2 = -5, \ 2c_1 - c_2 = -5, \ c_1 c_2 = -2,$$

որտեղից էլ $c_1 = -2, \ c_2 = 1$:

Այսպիսով՝ որոնելի ուղիղների հավասարումներն են

$$x - y - 2 = 0 \text{ և } 3x + 2y + 1 = 0:$$

Դիտողություն: Վերոհիշյալ օրինակներում մենք դիտարկեցինք միայն կորի տեսակի և կանոնական հավասարումը որոշելու խնդիրը: Իսկ ինչպե՞ս գտնել կորի դիրքը, այսինքն՝ կորի կանոնական կորդինատային համակարգի դիրքը սկզբնական կորդինատային համակարգի նկատմամբ: Գոյություն ունի այս խնդրի լուծման երկու եղանակ: Առաջին եղանակի դեպքում հարկավոր է նախ կատարել կորդինատային համակարգի պտույտ՝ գտնելով պտույտի φ անկյուն § 21-ում բերված բանաձևով, այնուհետև կատարել կոորդինատային համակարգի զուգահեռ տեղափոխություն: Իր պարզության հետ մեկտեղ այս եղանակը բավական աշխատատար է: Երկրորդ եղանակի դեպքում անհրաժեշտ է գտնել կորի գլխավոր ուղղությունները ու գլխավոր տրամագծերը, ինչպես նաև կորի կենտրոնը: Մենք այստեղ չենք բերում համապատասխան օրինակներ: Ընթերցողը կարող է ծանոթանալ այդպիսի օրինակների՝ լուծված թե՛ առաջին և թե՛ երկրորդ եղանակով [4] խնդրագրքում:

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии, Москва, 1968.
2. Постников М. М., Аналитическая геометрия, Москва 1973.
3. Энциклопедия элементарной математики, книга четвертая, Геометрия, 1963.
4. Վ. Ա. Փիլիպոսյան, Հ. Հ. Օհնիկյան, Վերլուծական երկրաչափության խնդրագիրք, առաջին մաս, Երևան, 2012:

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Վ. Ա. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ, Հ. Հ. ՕՀՆԻԿՅԱՆ

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

(դասագիրք)

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Համակարգչային գծապատկերները՝ Վ. Փիլիպոսյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Հ. Ասլանյանի

Տպագրված է «Վարդան Մկրտչյան» ԱՁ-ում:
ք. Երևան, Հր. Ներսիսյան 1/125

Ստորագրված է տպագրության՝ 06.12.2018:
Չափսը՝ 60x84 $^{1}/_{16}$: Տպ. մամուլը՝ 14:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.am

ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2018
publishing.ysu.am