

**Ս.Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ
Ա.Կ. ԹԱՍԼԱՔՅԱՆ**

**ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ
ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ
ՏՆՏԵՍԱԳԵՏՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ
ՄԱՍ I**

ԵՐԵՎԱՆ

**ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2013**

ՀՏԴ 517 (076.1)
 ԳՄԴ 22.161 ց7
 Թ 283

Հրատարակության են երաշխավորել
 ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի,
 տնտեսագիտության ֆակուլտետների
 գիտական խորհուրդները

Խմբագիր՝ Ֆիզմաթ. գիտ. թեկն., դոցենտ Ռ.Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ
 Գրախոս՝ Ֆիզմաթ. գիտ. թեկն., դոցենտ Գ.Կ. ՄԻՋԱՅԵԼՅԱՆ

ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ Ս.Մ., ԹԱՍԼԱՔՅԱՆ Ա.Կ.
 Թ 283 Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք տնտեսագետ-
 ների համար. Մաս I / Ս.Մ. Հովհաննիսյան, Ա.Կ. Թասլաքյան.
 յան. – Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2013. – 184 էջ:

Խնդրագիրքը կազմվել է Երևանի պետական համալսա-
 րանի տնտեսագիտության ֆակուլտետում դասավանդվող
 «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկայի ծրագրին համապա-
 տասխան: Նախատեսվում է տնտեսագիտություն մասնագի-
 տության առկա և հեռակա ուսուցման ուսանողների համար:

ՀՏԴ 517 (076.1)
 ԳՄԴ 22.161 ց7

ISBN 978-5-8084-1717-5

© Ս.Մ. Հովհաննիսյան, 2013
 © Ա.Կ. Թասլաքյան, 2013
 © ԵՊՀ հրատարակչություն, 2013

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Խմբագրի կողմից	4
ԳԼՈՒԽ I	
1. Թվային բազմություններ: Թվային հաջորդականություններ: Հաջորդականության սահմանը: Թվային շարքեր	5
2. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը	8
3. Թվային բազմության եզրերը	14
4. Հաջորդականության սահմանի սահմանումը, երկրաչափական մեկնաբանությունը	16
5. Անվերջ մեծ հաջորդականություն	23
6. Անվերջ փոքր հաջորդականություն	24
7. Սահմանափակ և ոչ սահմանափակ հաջորդականություններ	25
8. Վերջավոր սահմանի գոյության հայտանիշներ	31
9. Մասնակի սահման	36
10. Թվաբանական գործողություններ զուգամետ հաջորդականությունների հետ	42
11. Վերին և ստորին սահմաններ	46
12. Ֆունդամենտալ հաջորդականություն, Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը	50
13. Թվային շարք: Թվային շարքի զուգամիտություն, հատկությունները	55
14. Դրական շարքերի բաղդատման հայտանիշներ	57
<i>Խնդիրներ</i>	71
ԳԼՈՒԽ II	
1. Թվային ֆունկցիայի գաղափարը	99
2. Սահմանափակ և ոչ սահմանափակ ֆունկցիաներ	104
3. Ֆունկցիայի սահման, երկրաչափական մեկնաբանությունը	113
4. Ֆունկցիայի միակողմյան սահմաններ, մասնակի սահմաններ	114
5. Մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանը	115
6. Վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների և նրանց սահմանների հատկությունները	125
7. Անվերջ փոքր ֆունկցիաներ, բաղդատումը, համարժեք անվերջ փոքրեր	126
8. Թվաբանական գործողություններ վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների հետ	128
9. Ֆունկցիայի անընդհատություն	141
10. Հիմնական թեորեմներ անընդհատ ֆունկցիաների վերաբերյալ	142
<i>Խնդիրներ</i>	153
<i>Պատասխաններ</i>	177

ԽՄԲԱԳՐԻ ԿՈՂՄԻՑ

Խնդրագիրքը կազմված է տնտեսագիտության ֆակուլտետում դասավանդվող «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկայի ծրագրին խիստ համապատասխան: «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկայի վերաբերյալ այլ խնդրագրքերից այս ծեռնարկը շահեկանորեն տարբերվում է նրանով, որ տեսական նյութի հակիրճ շարադրանքից բացի պարունակում է մեծ թվով խնդիրների լուծումներ:

Հեղինակները օգտագործելով իրենց երկարամյա դասախոսական փորձը, այդ խնդիրների լուծումները ուսանողի համար մատչելի ձևով են շարադրել՝ միաժամանակ հաշվի առնելով նաև ապացույցների խստությունը: Այդ իսկ պատճառով խնդրագիրքը կարող է օգտակար լինել ինչպես ԵՊՀ-ի, այնպես էլ այլ բուհերի այն ուսանողների համար, որոնք սկսում են ուսումնասիրել «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկան:

Ռ.Ա. Ավետիսյան

Գ Լ ՈՒ Խ Ի

1. ԹՎԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ԹՎԱՅԻՆ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԸ: ԹՎԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ:

Բազմությունները հիմնականում նշանակվում են լատիներենի մեծատառերով:

Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացի շարադրման ընթացքում, գրելաձևի կարծության համար, օգտագործվում են հետևյալ նշանները՝ $\forall, \exists, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, \cup, \cap$, որոնց իմաստը տրված է հետևյալ աղյուսակում:

նշան	անվանումը	բացատրություն
$\forall$	ընդհանրության նշան	փոխարինում է կամայական, յուրաքանչյուր, բոլոր բառերին
$\exists$	գոյության նշան	փոխարինում է կգտնվի, գոյություն ունի բառակապակցություններին
$\Rightarrow$	հետևելու նշան	$A \Rightarrow B$ գրելաձևը նշանակում է, որ A -ից հետևում է B -ն, այլ կերպ ասած B պայմանը անհրաժեշտ է A -ի համար կամ A պայմանը բավարար է B -ի համար
$\Leftrightarrow$	համարժեքության նշան	$A \Leftrightarrow B$ գրելաձևը նշանակում է, որ A -ից հետևում է B -ն և B -ից հետևում է A -ն, այլ կերպ ասած A -ն համարժեք է B -ին, B -ն անհրաժեշտ և բավարար պայման է A -ի համար, A -ն տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի B -ն
$\in$	պատկանելիության նշան	$a \in A$ գրելաձևը նշանակում է a -ն A բազմության տարրն է կամ a -ն պատկանում է A -ին
$\notin$	չպատկանելու նշան	$a \notin A$ գրելաձևը նշանակում է a -ն A բազմության տարր չէ կամ a -ն չի պատկանում A -ին
$\cup$	միավորման նշան	
$\cap$	հատման նշան	

Եթե A բազմության յուրաքանչյուր a տարր պատկանում է նաև B բազմությանը, ապա A -ն անվանում են B բազմության ենթաբազմություն և գրում են $A \subset B$ կամ $B \supset A$ (A -ն ընկած է B -ի մեջ, A -ն պարունակվում է B -ում կամ B -ն պարունակում է A -ն):

A և B բազմությունների միավորումը $(A \cup B)$ բազմություն է, որը կազմված է այն տարրերից, որոնք պատկանում են A և B բազմություններից գոնե մեկին:

A և B բազմությունների հատումը $(A \cap B)$ բազմություն է, որը կազմված է այն տարրերից, որոնք պատկանում են թե՛ A -ին և թե՛ B -ին:

A և B բազմությունների տարբերությունը (A/B) բազմություն է, որը կազմված է A բազմության այն տարրերից, որոնք չեն պատկանում B -ին:

Ոչ մի տարր չպարունակող բազմությունը կոչվում է դատարկ բազմություն և նշանակվում՝ $\emptyset$:

Եթե $A \subset B$, ապա B/A բազմությանը անվանում են A բազմության լրացում մինչև B բազմությունը, և նշանակում՝ A'_B :

Այն դեպքերում, երբ դիտարկվում են որևէ հիմնական C բազմության ենթաբազմությունները, M ենթաբազմության լրացումը մինչև C բազմությունը նշանակվում է ուղղակի M' -ով:

A և B բազմությունները կոչվում են հավասար, եթե նրանք կազմված են միևնույն տարրերից:

A և B բազմությունները հավասար են այն և միայն այն դեպքում, եթե ճշմարիտ են հետևյալ ներդրումները՝ $A \subset B$ և $B \subset A$:

Լրացման սահմանումից անմիջապես հետևում է $M \cup M' = C$, $M \cap M' = \emptyset$, $(M')' = M$:

A բազմության այն տարրերի ենթաբազմությունները, որոնք բավարարում են P պայմանին, նշանակվում է՝ $B = \{x \in A : P\}$: Օրինակ՝

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}:$$

Բազմությունը, որի տարրերը թվեր են, կոչվում է թվային բազմություն:

Մաթեմատիկական անալիզում առավել հաճախ հանդիպող թվային բազմություններից են՝

$$R = (-\infty; +\infty) \text{ (իրական թվեր)}$$

$$N = \{1; 2; \dots; n; \dots\} \text{ (բնական թվեր)}$$

$$Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm n; \dots\} \text{ (ամբողջ թվեր)}$$

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z, q \in N \right\} \text{ (ռացիոնալ թվեր)}$$

$$I = R/Q \text{ (իրացիոնալ թվեր)}$$

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

ա) գտնել A և B բազմությունների միավորումը.

$$A = \{-6; -5; -3; 1; 3; 7\}, B = \{-4; -3; 1; 2; 7; 8\}$$

Δ – ըստ A և B բազմությունների միավորում բազմության սահմանման՝ $A \cup B$ բազմությունը ստանալու համար բավական է վերցնել A բազմության տարրերը և նրանց ավելացնել B բազմության այն տարրերը, որոնք չեն պատկանում A -ին:

$$\text{Այնպես որ՝ } A \cup B = \{-6; -5; -4; -3; 1; 2; 3; 7; 8\} \quad \nabla^*$$

բ) գտնել A և B բազմությունների հատումը.

$$A = \{-7; -5; -4; -1; 2; 3; 4\}, B = \{-8; -5; -3; -1; 2; 5\}$$

Δ – ըստ հատում բազմության սահմանման՝ $A \cap B$ բազմությունը ստանալու համար հարկավոր է վերցնել այն տարրերը, որոնք ընդհանուր են A և B բազմությունների համար: Այնպես որ՝ $A \cap B = \{-5; -1; 2\}$: ∇

գ) Ապացուցել, որ ցանկացած A , B և C բազմությունների համար ճշմարիտ է $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$:

Δ – Նշանակենք I -ով և II -ով համապատասխանաբար հավասարության ծախս և աջ մասերը: Ցույց տանք, որ ճշմարիտ են հետևյալ ներդրումները՝ $I \subset II$ և $II \subset I$:

Ենթադրենք $a \in I$: Այստեղից հետևում է, որ $a \in$ կամ $A \cap B$ -ին, կամ C -ին, կամ երկուսին էլ միաժամանակ: Եթե $a \in A \cap B \Rightarrow a \in A$, $a \in B \Rightarrow a \in A \cup C$ և $a \in B \cup C \Rightarrow a \in II$:

Եթե $a \in C$, ապա $a \in A \cup C$ և $a \in B \cup C \Rightarrow a \in II$: Այսպիսով $I \subset II$:

Ենթադրենք $a \in II$: Այստեղից հետևում է $a \in A \cup C$ և $a \in B \cup C$: $a \in A \cup C \Rightarrow a \in A$ և C բազմություններից գոնե մեկին: Նույն ձևով՝ $a \in B \cup C \Rightarrow a \in B$ և C բազմություններից գոնե մեկին: Եթե a -ն պատկանում է C -ին, ապա $a \in I$ -ին: Եթե a -ն C -ին չի պատկանում, ապա այն պատկանում է և A -ին և B -ին, հետևաբար $a \in A \cap B \Rightarrow a \in I$ -ին, նշանակում է $II \subset I$: Երկու ներդրումներից հետևում է, որ $I = II$: ∇

դ) Ապացուցել հավասարությունը.

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Δ – Նշանակենք I -ով և II -ով. համապատասխանաբար հավասարության ծախս և աջ մասերը:

* Δ –ն նշանակում է ապացույցի սկիզբը, ∇ –ն նշանակում է ապացույցի վերջը:

Ենթադրենք $a \in I: \Rightarrow a \notin A \cap B$: Չնարավոր է երեք դեպք՝ 1) $a \in A$, $a \notin B$, 2) $a \notin A$, $a \in B$, 3) $a \notin A$, $a \notin B$: 1-ին դեպքում $a \in B': \Rightarrow a \in II$: 2-րդ դեպքում $a \in A': \Rightarrow a \in II$: 3-րդ դեպքում $a \in A'$, $a \in B': \Rightarrow a \in II$: Այնպես որ $I \subset II$:

Ցույց տանք, որ ճիշտ է $II \subset I$:

Ենթադրենք $a \in II \Rightarrow a \in A'$ կամ $a \in B'$ կամ էլ $a \in A'$, $a \in B'$: Բոլոր երեք դեպքերում էլ ստացվեց $a \notin A \cap B$ -ից $\Rightarrow a \in I$ -ին: Չետևաբար $I = II$: ∇

2. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԻՆՊՈՒԿՑԻԱՅԻ ՄԿՁԲՈՒՆՔԸ

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ պնդումներից յուրաքանչյուրը համարվում է ապացուցված, եթե

ա) A_1 -ը ճշմարիտ է

բ) $k \geq 1$ պայմանին բավարարող ցանկացած բնական թվի համար ցույց է տրվում, որ A_k պնդման ճշտությունից հետևում է A_{k+1} պնդման ճշտությունը:

Ընդունված նշանակումներ են՝

$0! = 1$, $1! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = (n-1)!n$, $n \in N$ (n ֆակտորիալ)

$2!! = 2$, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n$, $n \in N$, $n > 1$
 $1!! = 1$, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$, $n \in N$ } կիսաֆակտորիալներ

$C_n^0 = 1$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n, k \in N$, $k \leq n$ (զուգորդություն n -ից k -ական)

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

ա) **Մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով ապացուցել, որ ցանկացած $n \in N$ թվի համար ճշմարիտ է հետևյալ հավասարությունը՝**

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2} \quad (1)$$

$\Delta - n = 1$ դեպքում (1)-ը ճիշտ է $\left(\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\right)$:

Ցույց տանք, որ այն ենթադրությունից, որ (1)-ը ճիշտ է որևէ $n \geq 1$ համար, հետևում է, որ այն ճիշտ է հաջորդ $(n+1)$ -ի համար, այսինքն՝

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) = \frac{n+3}{2n+4} \quad (2)$$

Իրոք՝

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) =$$

$$= \frac{n+2}{2n+2} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{n^2+4n+3}{(n+2)^2} = \frac{(n+1)(n+3)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n+3}{2n+4}$$

Հետևաբար (1)-ը ճիշտ է ցանկացած $n \in N$ թվի համար: ∇

բ) Ապացուցել, որ ցանկացած $n \in N$ թվի համար $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ արտահայտությունը առանց մնացորդի բաժանվում է 19-ի:

$\Delta - n=1$ դեպքում արտահայտությունը բաժանվում է 19-ի

$$(5 \cdot 2 + 3^2 = 19:19)$$

Ենթադրենք որևէ $n \geq 1$ թվի համար $(5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}):19$ (1)

Ցույց տանք, որ $(5 \cdot 2^{3(n+1)-2} + 3^{3(n+1)-1}):19$ (2)

$$\text{Իրոք՝ } 5 \cdot 2^{3(n+1)-2} + 3^{3(n+1)-1} = 5 \cdot 2^3 \cdot 2^{3n-2} + 3^3 \cdot 3^{3n-1} = 8 \cdot 5 \cdot 2^{3n-2} + 8 \cdot 3^{3n-1} +$$

$$+ 19 \cdot 3^{3n-1} = 8(5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}) + 19 \cdot 3^{3n-1}$$

Քանի որ աջ մասում երկու գումարելիներն էլ բաժանվում են 19-ի, (առաջինը՝ ըստ ենթադրության, երկրորդը՝ ունի 19 արտադրիչը), ապա ամբողջ գումարը ևս բաժանվում է 19-ի: Այնպես որ (2)-ը ճշմարիտ է: Հետևաբար ըստ մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի տրված արտահայտությունը ցանկացած $n \in N$ համար բաժանվում է 19-ի: ∇

գ) Ապացուցել, որ ցանկացած $n \geq 1$ բնական թվի համար ճշմարիտ է անհավասարությունը.

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1 \quad (1)$$

$\Delta -$ ստուգենք (1)-ի ճշմարտացիությունը $n=1$ -ի համար

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} > 1$$

Ենթադրենք (1)-ը ճիշտ է որևէ $n \geq 1$ բնական թվի համար: Ցույց տանք, որ այն ճիշտ է հաջորդ՝ $(n+1)$ -ի համար:

Ունենք

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} =$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n+1} \right) + \left(\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Քանի որ առաջին փակագիծը ըստ ենթադրության մեծ է 1-ց, ապա մեզ բավական է ցույց տալ, որ ցանկացած $n \geq 1$ բնական թվի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը

$$\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1} > 0 \quad (2)$$

Ունենք

$$\begin{aligned} \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1} &= \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+4} - \frac{2}{3n+3} = \\ &= \frac{9n^2 + 21n + 12 + 9n^2 + 15n + 6 - 18n^2 - 36n - 16}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)} = \frac{2}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)} > 0 \end{aligned}$$

Հետևաբար (1)-ը ճիշտ է ցանկացած $n \geq 1$ բնական թվի համար: ∇

դ) Ապացուցել, որ ցանկացած $n \in \mathbb{N}$ և ցանկացած $x \geq -1$ թվի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը (Բեռնուլիի անհավասարություն)

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (1)$$

$\Delta - n=1$ -ի համար (1)-ը ճիշտ է ($1+x=1+x$): Ենթադրենք, որ (1)-ը ճիշտ է որևէ $n \geq 1$ բնական և ցանկացած $x \geq -1$ թվերի համար, ցույց տանք, որ այն ճիշտ է նաև $n+1$ թվի համար

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \quad (2)$$

Քանի որ (1)-ը ճիշտ է $x \geq -1$, ապա նրա երկու մասն էլ բազմապատկելով $1+x \geq 0$ արտահայտությամբ, կստանանք ճիշտ անհավասարություն՝

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

քանի որ $nx^2 \geq 0$:

Այսպիսով, երբ $x \geq -1$ (2)-ը ճիշտ է: Հետևաբար (1)-ը, ըստ մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի, ճիշտ է: ∇

ե) Ապացուցել, որ ցանկացած a և b թվերի և ցանկացած $n \in \mathbb{N}$ թվի համար ճիշտ է Նյուտոնի երկանդամի բանաձևը

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1)$$

$\Delta -$ Օգտվենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքից՝ $n=1$ համար (1)-ը ճիշտ է, որովհետև նրա աջ մասը հավասար է $C_1^0 a + C_1^1 b = a+b$:

Ենթադրենք (1)-ը ճիշտ է որևէ $n \geq 1$ բնական թվի համար, ապացուցենք, որ այն ճիշտ է նաև $(n+1)$ -ի համար, այն է

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k \quad (2)$$

$\Delta -$ (1)-ի երկու մասն էլ բազմապատկելով $(a+b)$ -ով կստանանք

$$(a+b)^{n+1} = A_n + B_n,$$

որտեղ

$$A_n = a^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^k a^{n+1-k} b^k$$

$$B_n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

(B_n -ի արտահայտության մեջ գումարման k ինդեքսը փոխարինեցինք $(k-1)$ -ով և վերջին գումարելին էլ առանձնացրեցինք):

Այսպիսով ստացանք՝

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) \cdot a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \quad (3)$$

Հետևաբար (1)-ը ապացուցված կլինի, եթե ցույց տանք, որ ցանկացած $n \geq 1$ բնական թվի համար ճիշտ է

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \quad (k \leq n) \quad (4)$$

Իրոք, օգտվելով $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ բանաձևից, կունենանք

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} &= \\ = \frac{n!(n+1-k+k)}{k!(n+1-k)!} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k \end{aligned}$$

▽

Գումարում

Եթե $a_1, a_2, \dots, a_n$ տրված թվեր են, ապա նրանց գումարը նշանակում են

$$\sum_{k=1}^n a_k \text{ սիմվոլով, այնպես որ } \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

k թիվն անվանում են գումարման ինդեքս, նկատենք, որ գումարի թվային մեծությունը կախում չունի նրանից, թե ինչ տառով ենք նշանակել գումարման ինդեքսը: Գումարման գործողությունը օժտված է գծային հատկությամբ, այն է՝ ցանկացած A և B թվերի համար ճիշտ է

$$\sum_{k=1}^n (A \cdot a_k + B \cdot b_k) = A \cdot \sum_{k=1}^n a_k + B \cdot \sum_{k=1}^n b_k$$

հավասարությունը:

$$\sum_{k=1}^n a_{k+m} = \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k$$

բանաձևն անվանում են գումարման ինդեքսի փոխարինման բանաձև:

Դիցուք տրված է $\{a_n\}$ թվային հաջորդականությունը:

Որոշ դեպքերում (կախված $\{a_n\}$ հաջորդականության կառուցվածքից)

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ գումարի համար հնարավոր է ստանալ հարմար բանաձև:}$$

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

ա) Դիցուք $\{b_n\}$ հաջորդականությունն այնպիսին է, որ յուրաքանչյուր $k \in N$ թվի համար $a_k = b_{k+1} - b_k$, $k = 1; 2; \dots$: Պահանջվում է յուրաքանչյուր $n \in N$ թվի համար գտնել

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ գումարի համար հարմար բանաձև:}$$

Δ – Ունենք

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + b_4 - b_3 + \dots + b_{n+1} - b_n \Rightarrow$$

որտեղից կստանանք

$$S_n = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1 \quad (1) \quad \nabla$$

բ) Դիցուք $\{a_n\}$ -ը թվաբանական պրոգրեսիա է, որի բոլոր անդամները և տարբերությունը՝ d -ն 0-ից տարբեր են: Գտնենք S_n գումարի բանաձևը, որտեղ

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}}, \quad n = 1; 2; \dots \quad (2)$$

Δ – Քանի որ $a_{k+1} - a_k = d$, $k \in N$, ապա

$$\frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \cdot \frac{1}{d}$$

Կիրառենք (1) բանաձևը, որտեղ $b_k = -\frac{1}{d \cdot a_k}$, $k \in N$ կստանանք

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{d \cdot a_1} - \frac{1}{d \cdot (a_1 + nd)}, \quad \nabla$$

զ) Դիցուք $a_k(x) = \sin kx$, $k = 1; 2; \dots$:

Գտնել $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$ գումարը հաշվելու բանաձևը:

$\Delta - S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$ հավասարության երկու մասը բազմապատկենք

$2 \sin \frac{x}{2}$ -ով և օգտվենք

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin kx = \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x, \quad k \in N$$

և (1) բանաձևից, որտեղ $b_k = -\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x$, կստանանք

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot S_n(x) = \cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x = 2 \sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x$$

$$\text{որտեղից՝ } S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n}{2} x \cdot \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \quad (3)$$

(3) բանաձևը ճիշտ է, երբ $\sin \frac{x}{2} \neq 0$: Եթե $\sin \frac{x}{2} = 0$, ապա հետևությանը կարելի է համոզվել, որ ցանկացած $n \in N$ և ցանկացած $x \in R$ համար $S_n(x) \equiv 0$: ∇

դ) Գտնել $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$ գումարը հաշվելու բանաձևը:

$$\Delta - \text{Օգտվենք հետևյալ նույնությունից՝ } (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \quad (4)$$

(4)-ի մեջ տեղադրելով հաջորդաբար $x = 1; 2; \dots; n$ և գումարելով ստացված հավասարությունները կստանանք

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3] = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n \quad (5)$$

Օգտվելով (1) բանաձևից, որտեղ $b_k = k^3$, $k = 1; 2; \dots$ կստանանք, որ (5)-ի ձախ մասը հավասար է $(n+1)^3 - 1$: Նկատի ունենալով, որ

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(որպես թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումար), վերջնականապես կստանանք

$$3S_n = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) = (n+1)\left(n^2 + 2n + 1 - 1 - \frac{3}{2}n\right) = \\ = \frac{n+1}{2}(2n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

որտեղից՝
$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (6)$$

Նկատենք, որ (6) բանաձևը կարելի է ստանալ կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը:

3. ԹՎԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ԵԶՐԵՐԸ

$X = \{x\}$ թվային բազմությունը կոչվում է վերևից (ներքևից) սահմանափակ, եթե գոյություն ունի $M(m)$ թիվ այնպիսին, որ X բազմության ցանկացած x տարրի համար տեղի ունի $x \leq M$ ($x \geq m$) անհավասարությունը: $M(m)$ թիվը կոչվում է X բազմության վերին (ստորին) եզր: Եթե X բազմությունը ունի գոնե մեկ $M(m)$ վերին (ստորին) եզր, ապա այն ունի անթիվ բազմությամբ վերին (ստորին) եզրեր: Որպես այդպիսին կծառայի M -ից (m -ից) մեծ (փոքր) ցանկացած իրական թիվ:

Վերևից (ներքևից) սահմանափակ ոչ դատարկ X բազմության բոլոր վերին (ստորին) եզրերից ամենափոքրը (ամենամեծը) գոյություն ունի և կոչվում է այդ բազմության ճշգրիտ վերին (ստորին) եզր: Նշանակվում է՝

$$M_0 = \sup\{x\}, \quad (m_0 = \inf\{x\}):$$

Կարդացվում է սուպրեմում (ինֆիմում):

M_0 -ն (m_0 -ն) ճշգրիտ վերին (ճշգրիտ ստորին) եզր է X բազմության համար, եթե բավարարված են հետևյալ պայմանները.

ա) $\forall x \in X, x \leq M_0$ ($x \geq m_0$)

բ) $\forall \varepsilon > 0, \exists x'_\varepsilon \in X \quad x'_\varepsilon \in M_0 - \varepsilon \quad (x'_\varepsilon < m_0 + \varepsilon)$

X թվային բազմությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե այն սահմանափակ է և վերևից և ներքևից: Այսինքն գոյություն ունեն m և M թվեր այնպիսին, որ $m \leq x \leq M$, $x \in X$: Եթե բազմությունը սահմանափակ չէ վերևից (ներքևից), ապա պայմանավորվում ենք ընդունել $\sup\{x\} = +\infty$, $(\inf\{x\} = -\infty)$:

սր), վերջ-

$\left. \varepsilon \right) =$

սթեմատի-

) սահմա-
թյան ցան-
րությունը:

i X բազ-
մի անթիվ
 M -ից (m -
բոլոր վե-
կ կոչվում

յզմության

սահմանա-
եր այնպի-
րկից (ներ-
= $-\infty$):

ճշգրիտ վերին (ստորին) եզրը կարող է պատկանել X բազմությանը, կարող է նաև չպատկանել:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

(6)

ա) Դիցուք $X = \{x: 0 \leq x < 2\}$: **Ցույց տալ որ** $\sup X = 2$:

Δ – ցույց տանք, որ 2 թիվը բավարարում է ճշգրիտ վերին եզրի երկու բնութագրիչ պայմաններին:

1) $\forall x \in X, x \leq 2$

2) $\forall 0 < \varepsilon < 2$ որպես x' վերցնենք $x' = \frac{2-\varepsilon+2}{2}$ թիվը: Այն պատկա-

նում է X բազմությանը (մեծ է $2-\varepsilon$ թվից և փոքր է 2-ից: Հետևաբար $\sup X = 2$, որն իրեն չի պատկանում:

Եթե որպես X_1 բազմություն վերցնենք $X \cup \{3\}$ բազմությունը, ապա տառացիորեն նույն ձևով կապացուցենք, որ $\sup X_1 = 3$, որը պատկանում է X_1 -ին: ▽

բ) Դիցուք $X \subset R$ և $-X = \{x: -x \in X\}$:

Ապացուցել, որ $\sup\{-X\} = -\inf\{X\}$:

Δ – Ենթադրենք, որ X բազմությունը ներքևից սահմանափակ է: Այդ դեպքում $-X$ -ը կլինի վերևից սահմանափակ: Հետևաբար $\sup\{-X\}$ -ը և $\inf\{X\}$ -ը կլինեն վերջավոր թվեր:

Նշանակենք $\sup\{-X\} = M_0$:

Ըստ ճշգրիտ վերին եզրի առաջին բնութագրիչ հատկության, ցանկացած $x \in -X$ տարրի համար տեղի ունի

$x \leq M_0 \Leftrightarrow -x \geq -M_0$ (1)

Ըստ երկրորդ բնութագրիչ հատկության՝ ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $x' \in -X$ այնպիսին, որ

$x' > M_0 - \varepsilon \Leftrightarrow -x' < -M_0 + \varepsilon$ (2)

Բայց յուրաքանչյուր $x \in -X$ համար $-x \in X$: Այնպես որ (1)-ից և (2)-ից կհետևի, որ ցանկացած $x \in X$ տարրի համար տեղի ունի

$x \geq -M_0$ (3)

և ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $x' \in X$ այնպիսին, որ

$x' < -M_0 + \varepsilon$ (4)

(3)-ից (4)-ից կհետևի, որ $\inf\{X\} = -M_0$ և հետևաբար

$$\sup\{-X\} = -\inf\{X\} \quad \nabla$$

գ) Դիցուք $X \subset R$, $Y \subset R$ և $Z = \{z : z = x + y, x \in X, y \in Y\}$

Ապացուցել որ $\sup Z = \sup X + \sup Y$

Δ – Ենթադրենք X և Y բազմությունները վերևից սահմանափակ բազմություններ են: Նշանակենք M_1 -ով և M_2 -ով համապատասխանաբար

X և Y բազմությունների ճշգիրտ վերին եզրերը՝ $M_1 = \sup X$; $M_2 = \sup Y$

Ըստ ճշգիրտ վերին եզրի երկու բնութագրիչ հատկությունների ունենք.

$$1) \forall x \in X, x \leq M_1; \quad \forall y \in Y, y \leq M_2$$

Գումարելով նույնական անհավասարությունները՝ կունենանք՝ $\forall x \in X$ և $\forall y \in Y$ տեղի ունի $x + y \leq M_1 + M_2$ անհավասարությունը, որտեղից հետևում է, որ $\forall z \in Z$ տեղի ունի $z \leq M_1 + M_2$ անհավասարությունը: Սյուս կողմից

$$2) \forall \varepsilon > 0 \exists x' \text{ և } y'; x' \in X; y' \in Y \text{ այնպիսին, որ}$$

$$x' > M_1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad y' > M_2 - \frac{\varepsilon}{2}$$

Գումարելով նույնական անհավասարությունները՝ կստանանք՝

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z = x' + y' \in Z \text{ այնպիսին, որ } z = x' + y' > M_1 + M_2 - \varepsilon$$

1)-ից և 2)-ից կհետևի, որ

$$\sup Z = \sup X + \sup Y \quad \nabla$$

4. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ, ԵՐԿՐԱՇԱՓԱԿԱՆ ՄԵԿՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Եթե յուրաքանչյուր n բնական թվին համապատասխանեցված է որոշակի x_n թիվ, ապա կասենք, որ տրված է թվային հաջորդականություն կամ պարզապես հաջորդականություն: Հաջորդականությունը նշանակվում է $\{x_n\}$ կամ պարզապես x_n սիմվոլներով:

a թիվը կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության սահման, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ այնպիսին, որ $\forall n \geq n_0$ թվի համար տեղի $|x_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in N, \forall n_0 \in N, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Հաջորդականության բոլոր անդամները կարելի է դիտարկել որպես կետերի բազմություն թվային ուղղի վրա: Ծիշտ նույն ձևով a թիվը կարելի է դիտարկել որպես թվային ուղղի կետ: Քանի որ $|x_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը համարժեք է $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ անհավասարությանը, ապա սահմանի սահմանումը կարելի է ձևակերպել այսպես՝ a կետը կոչվում է $\{x_n\}$ կետային հաջորդականության սահման, եթե ինչպիսին էլ լինի a կետի $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ շրջակայքը, գոյություն ունի $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ այնպիսին, որ $\{x_n\}$ հաջորդականության այն անդամները, որոնց համարները (ինդեքսները) մեծ են կամ հավասար $n_0(\varepsilon)$ -ից ($n \geq n_0$) գտնվեն այդ շրջակայքում: Այլ կերպ ասած՝ a թիվը $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանն է, եթե a կետի ցանկացած շրջակայքից դուրս կարող են գտնվել $\{x_n\}$ հաջորդականությունից ամենաշատը վերջավոր քանակությամբ անդամներ:

Սահմանի սահմանումից հետևում է, որ a թիվը $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը չէ, եթե գոյություն ունի գոնե մեկ $\varepsilon_0 > 0$ թիվ, որ ինչպիսին էլ լինի m բնական թիվը, կգտնվի $n' \geq m$ բնական թիվ այնպիսին, որ $|x_{n'} - a| \geq \varepsilon_0$: Այլ կերպ ասած՝ a կետը $\{x_n\}$ կետային հաջորդականության սահմանը չէ, եթե գոյություն ունի a կետի գոնե մեկ $(a - \varepsilon_0; a + \varepsilon_0)$ շրջակայք, որից դուրս ընկած են անվերջ քանակությամբ կետեր $\{x_n\}$ հաջորդականությունից:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Ելնելով հաջորդականության սահմանի սահմանումից՝ ապացուցել, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a :$$

$$\text{ա) } x_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2}, \quad a = 2$$

$$\Delta - \text{Քանի որ } x_n = 2 - \frac{1}{n^2}, \text{ ապա } |x_n - 2| = \frac{1}{n^2}, \quad n = 1; 2; \dots: \text{ Վերցնենք}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ թիվը: } |x_n - 2| < \varepsilon \text{ անհավասարությունը տեղի կունենա, եթե } \frac{1}{n^2} < \varepsilon,$$

որը համարժեք է $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$ անհավասարությանը: Որպես $n_0(\varepsilon)$ վերցնենք կամայական բնական թիվ, որը գերազանցում է $1/\sqrt{\varepsilon}$ թվին, օրինակ $n_0(\varepsilon) = \left[1/\sqrt{\varepsilon}\right] + 1$, (որտեղ $[x]$ -ը x թվի ամբողջ մասն է, այսինքն այն ամենամեծ ամբողջ թիվը, որը չի գերազանցում x թվին): Այդ դեպքում բոլոր $n \geq n_0(\varepsilon)$ բնական թվերի համար տեղի կունենա

$$|x_n - 2| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0^2} < \varepsilon, \quad \left(n_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

անհավասարությունը: Ըստ սահմանի սահմանման սա նշանակում է, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \nabla$$

բ) $x_n = \frac{c}{\sqrt[m]{n}}$, $a = 0$, որտեղ $c \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$

Δ – Քանի որ $|x_n| = \frac{|c|}{\sqrt[m]{n}}$, ապա $\frac{|c|}{\sqrt[m]{n}} < \varepsilon$ անհավասարությունը համարժեք

է $n > \left(\frac{|c|}{\varepsilon}\right)^m$ անհավասարությանը: Հետևաբար, եթե որպես $n_0(\varepsilon)$ վերցնենք

$$n_0(\varepsilon) = \left\lceil \left(\frac{|c|}{\varepsilon}\right)^m \right\rceil + 1$$

թիվը, ապա բոլոր բնական թվերի համար տեղի կունենա

$|x_n| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Իսկ սա, ըստ սահմանման, նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$:

գ) $x_n = q^n$ (որտեղ $|q| < 1$, $a = 0$)

Δ – եթե $q = 0$, ապա $x_n = 0$, $n = 1; 2; \dots$ և հետևաբար $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$: Ենթադրենք $q \neq 0$: Նշանակենք $c = 1/|q|$: Քանի որ $|q| < 1$, ապա $c > 1$ և հետևաբար $c = 1 + a$, որտեղ $a > 0$: Օգտվենք Բեռնուլիի անհավասարությունից (կետ 2-ի դ-ն): Ըստ այդ անհավասարության՝

$$\frac{1}{|q|^n} = c^n = (1+a)^n \geq 1 + na > na, \text{ հետևաբար } |x_n| = |q^n| = \frac{1}{|q|^n} < \frac{1}{n \cdot a}:$$

Վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ: $|x_n| < \varepsilon$ անհավասարությունը տեղի կունենա բոլոր այն n բնական թվերի համար, որոնց համար ճիշտ է $\frac{1}{n \cdot a} < \varepsilon$ անհա-

վասարությունը կամ որ նույնն է, որոնք բավարարում են $n > \frac{1}{a \cdot \varepsilon}$ անհավասարությանը:

Որպես $n_0(\varepsilon)$ վերցնենք $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{a\varepsilon} \right] + 1 = \left[1 / \left(\frac{1}{|q| - 1} \right) \varepsilon \right] + 1$ թիվը:

Քանի որ $n_0(\varepsilon) > \frac{1}{a \cdot \varepsilon}$, ապա բոլոր $n \geq n_0(\varepsilon)$ թվերի համար տեղի կունենա

$$|x_n| = |q^n| = |q|^n < \frac{1}{n \cdot a} \leq \frac{1}{n_0(\varepsilon) \cdot a} < \varepsilon \text{ անհավասարությունը: Իսկ սա նշանա-}$$

կում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$:

▽

Այս օրինակը լուծենք մեկ այլ եղանակով:

Δ – Քանի որ $|x_n| = |q^n| = |q|^n$, ապա գտնելու համար այն բնական n թվերը, որոնք համար ճիշտ է $|q|^n < \varepsilon$ անհավասարությունը, այդ անհավասարության երկու մասերի լոգարիթմները ըստ 10 հիմքի: Կունենանք

$$n \cdot \lg |q| < \lg \varepsilon$$

Քանի որ $\lg |q| < 0$, ($0 < |q| < 1$), ապա վերը գրած անհավասարությունը համարժեք է $n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$ անհավասարությանը: Որպես $n_0(\varepsilon)$ վերցնենք

$$n_0 = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \right] + 1 \text{ թիվը, եթե } \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} > 0 \text{ և } n_0 = 1, \text{ եթե } \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \leq 0:$$

դ) $x_n = \sqrt[n]{b}$, (որտեղ $b > 1$, $a = 1$)

Δ – Քանի որ $b > 1$, ապա $\sqrt[n]{b} > 1$, $n = 1; 2; \dots$: Հետևաբար՝ նշանակելով $\sqrt[n]{b} - 1 = \alpha_n$, $n = 1; 2; \dots$ կունենանք $\alpha_n > 0$ ($n = 1; 2; \dots$) և $b = (1 + \alpha_n)^n$: Ըստ Բեռնուլիի անհավասարության $b > 1 + n \cdot \alpha_n$, $n = 1; 2; \dots$ որտեղից կունենանք՝ $0 < \alpha_n < \frac{b-1}{n}$, ($n = 1; 2; \dots$): Վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ: $|\sqrt[n]{b} - 1| < \varepsilon$ անհավասարությունը համարժեք է $|\alpha_n| < \varepsilon$ անհավասարությանը: $\alpha_n < \varepsilon$ անհավասարությանը կբավարարեն բոլոր այն բնական n թվերը, որոնք համար ճիշտ է $\frac{b-1}{n} < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Իսկ վերը գրած անհավասարությանը ճիշտ է բոլոր $n \geq n_0(\varepsilon)$ բնական թվերի համար, որտեղ $n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{b-1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$:

Հետևաբար ըստ սահմանի սահմանման $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$: ▽

ե) $x_n = \sqrt[n]{n}$, $a = 1$

Δ - Քանի որ $\sqrt[n]{n} > 1$, ($n = 1; 2; \dots$), ապա նշանակելով $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, ($n = 1; 2; \dots$), կունենանք $\alpha_n > 0$ և $n = (1 + \alpha_n)^n$, $n = 1; 2; \dots$

Օգտվելով Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից (տե՛ս կետ 2-ի ե)-ն) կունենանք՝

$$n = 1 + n \cdot \alpha_n + \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2 + \dots +$$

Քանի որ մնացած բոլոր գումարելիները դրական են, ապա վերը գրված հավասարությունից կհետևի $n > \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2$ անհավասարությունը: Քանի որ

$n-1 > \frac{n}{2}$, $n = 3; 4; \dots$ և նկատի ունենալով, որ վերջավոր քանակությամբ անդամներ դեն նետելուց հաջորդականության սահմանը չի փոխվի, վերջնականապես կունենանք

$$n > \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2 > \frac{n^2}{4} \alpha_n^2, \quad n = 3; 4; \dots$$

անհավասարությունը: Որտեղից (հաշվի առնելով $\alpha_n > 0$) կհետևի

$$0 < \alpha_n < \frac{2}{\sqrt{n}}$$

անհավասարությունը: Այժմ վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ: $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ անհավասարությունը համարժեք է $|\alpha_n| = \alpha_n < \varepsilon$ անհավասարությանը: Իսկ $\alpha_n < \varepsilon$ անհավասարությանը կբավարարեն բոլոր այն n բնական թվերը, որոնց համար

ճիշտ է $\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ անհավասարությունը կամ որ միևնույն է, որոնց համար

ճիշտ է $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$ անհավասարությունը: Հետևաբար, եթե որպես $n_0(\varepsilon)$ վերց-

նենք $n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rceil + 4$, ապա ցանկացած $n \geq n_0(\varepsilon)$ տեղի ունի $|\sqrt[n]{n-1}| < \varepsilon$

անհավասարությունը: Իսկ սա նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$: ∇

$$\text{գ) } x_n = \frac{\log_b n}{n}, \quad b > 1, \quad a = 0$$

Δ – Վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ: Քանի որ $b > 1$, ապա $b^\varepsilon > 1$: Նշանակենք $b^\varepsilon = 1 + \delta$, որտեղ $\delta > 0$:

Ունենք $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$: Հետևաբար վերը նշված $\delta > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n'_0(\delta)$ բնական թիվ այնպիսին, որ բոլոր $n \geq n'_0(\delta)$ բնական թվերի համար տեղի ունի $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \delta = b^\varepsilon$ անհավասարությունը:

Լոգարիթմելով ըստ $b > 1$ հիմքի վերը գրած անհավասարությունը կունենանք $0 < \frac{\log_b n}{n} < \varepsilon$, հենց որ $n \geq n'_0(\delta) = n'_0(b^\varepsilon - 1) = n_0(\varepsilon)$: Իսկ սա նշանա-

կում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n} = 0$: ∇

Ապացուցել, որ նշված a թիվը տրված $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը չէ:

$$\text{ե) } x_n = \frac{3n-1}{4n+1}, \quad a = \frac{4}{5}$$

Δ – Ցույց տանք, որ գոյություն ունի $\varepsilon_0 > 0$ թիվ այնպիսին, որ $\left| x_n - \frac{4}{5} \right| \geq \varepsilon_0$ անհավասարությունը ճիշտ է անվերջ քանակությամբ n բնական թվերի համար: Ունենք

$$\left| x_n - \frac{4}{5} \right| = \left| \frac{3n-1}{4n+1} - \frac{4}{5} \right| = \left| \frac{15n-5-16n-4}{5(4n+1)} \right| = \frac{n+9}{5(4n+1)}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Գտնենք մի որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ, որի համար $\frac{n+9}{5(4n+1)} \geq \varepsilon$ անհավասարությունն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ: $\frac{n+9}{5(4n+1)} \geq \varepsilon$ անհավասարությունը համարժեք է $(1-20\varepsilon)n \geq 5\varepsilon - 9$ անհավասարությանը:

Որպեսզի վերը գրված անհավասարությանը բավարարեն անվերջ քանակությամբ n բնական թվեր, բավական է պահանջել, որ n -ի գործակիցը՝ $(1-20\varepsilon)$ -ը լինի դրական՝ $1-20\varepsilon > 0$, որտեղից հետևում է, որ $0 < \varepsilon < 1/20$: Այսպիսով, եթե որպես $\varepsilon_0 > 0$ թիվ վերցնենք $1/20$ -ից փոքր ցանկացած դրական թիվ, ապա կունենանք, որ $\left|x_n - \frac{4}{5}\right| \geq \varepsilon_0$ անհավասարությունը ճիշտ է անթիվ բազմությամբ n բնական թվերի համար: Հետևաբար $4/5$ -ը չի կարող $x_n = \frac{3n-1}{4n+1}$, $n=1;2;\dots$ հաջորդականության սահմանը լինել: Նկատենք, որ $1/20$ թիվը $3/4$ և $4/5$ կետերի միջև եղած հեռավորությունն է: ∇

$$\text{ը) } x_n = \frac{5n^2 + 20n + 3}{6n^2 + 1}, \quad a = \frac{6}{7}$$

Δ – Յուրաքանչյուր n բնական թվի համար կազմենք՝

$$\begin{aligned} |x_n - a| &= \left| \frac{5n^2 + 20n + 3}{6n^2 + 1} - \frac{6}{7} \right| = \left| \frac{35n^2 + 140n + 21 - 36n^2 - 6}{7(6n^2 + 1)} \right| = \\ &= \left| \frac{-n^2 + 140n + 15}{7(6n^2 + 1)} \right| = \frac{n^2 - 140n - 15}{7(6n^2 + 1)}, \quad \text{երբ } n \geq 141 \end{aligned}$$

Կատարելով կոտորակների սովորական բաժանում, կստանանք՝

$$\frac{n^2 - 140n - 15}{7(6n^2 + 1)} = \frac{1}{42} - \frac{140n + \frac{91}{6}}{42n^2 + 7}$$

$$\text{և քանի որ } \frac{140n + \frac{91}{6}}{42n^2 + 7} < \frac{140n + 20n}{40n^2} = \frac{4}{n}, \text{ ապա եթե օրինակ } \frac{4}{n} < \frac{1}{81}, \text{ ապա}$$

$$\left|x_n - \frac{6}{7}\right| > \frac{1}{42} - \frac{1}{81} = \frac{1}{84}:$$

Այսինքն $n > 336$ դեպքում $\{x_n\}$ հաջորդականության անդամները գտնվում են $\frac{6}{7}$ թվի $\varepsilon_0 = \frac{1}{84}$ շրջակայքից դուրս: Ուստի $\frac{6}{7}$ թիվը $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը չէ: ∇

5. ԱՆՎԵՐՋ ՄԵԾ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ մեծ հաջորդականություն կամ անվերջ մեծ, եթե կամայական $E > 0$ թվի համար գոյություն ունի n_0 բնական թիվ այնպիսին, որ $|x_n| > E$ բոլոր n բնական թվերի համար, որոնք բավարարում են $n \geq n_0$ անհավասարությանը:

$$\forall E > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| > E$$

Այս փաստի սիմվոլիկ գրելաձևն է՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$:

Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը անվերջ մեծ է և սկսած ինչ որ համարից հաջորդականության անդամները պահպանում են որոշակի նշան (+ կամ -), ապա նշանին համապատասխան ասում են, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունն ունի $+\infty$ կամ $-\infty$ սահմանը և գրում են այսպես՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ կամ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը անվերջ մեծ հաջորդականություն է:

ա) $x_n = 4n - 7\sqrt{n}$, $n = 1; 2; \dots$

Δ - Ունենք $|x_n| = |4n - 7\sqrt{n}| = 4n - 7\sqrt{n}$, երբ $n \geq 4$: Վերցնենք, որևէ $E > 0$ թիվ և ցույց տանք, որ գոյություն ունի $n_0(E)$ բնական թիվ այնպիսին, որ բոլոր $n \geq n_0(E)$ թվերի համար ճիշտ է $|x_n| > E$ անհավասարությունը:

Քանի որ $7\sqrt{n} < 3n$, երբ $n \geq 6$, ապա $|x_n| > 4n - 3n = n$, $n \geq 6$:

Որպես $n_0(E)$ բնական թիվ վերցնենք $n_0(E) = \max[6; [E] + 1]$: Այդ դեպքում բոլոր $n \geq n_0(E)$ բնական թվերի համար ճիշտ է $|x_n| > E$ անհավասարությունը: Նշանակում է x_n հաջորդականությունն անվերջ մեծ հաջորդականություն է: ▽

բ) $x_n = \frac{4^n + 3^n}{3^n}$, $n = 1; 2; \dots$

Δ – Ունենք $x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n + 1$ $n = 1; 2; \dots$ ըստ Բեռնուլիի անհավասարության $\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n > \frac{n}{3}$: Վերցնենք որևէ $E > 0$ թիվ և լուծենք $\frac{n}{3} > E$ անհավասարությունը: Եթե որպես $n_0(E)$ թիվ վերցնենք $n_0(E) = [3E] + 1$ թիվը, ապա բոլոր n բնական թվերի համար, որոնք բավարարում են $n \geq n_0(E)$ անհավասարությանը, տեղի ունի

$$|x_n| = \left(\frac{4}{3}\right)^n + 1 > \left(\frac{4}{3}\right)^n > \frac{n}{3} \geq \frac{n_0(E)}{3} > \frac{3E}{3} = E$$

անհավասարությունը: Նշանակում է x_n հաջորդականությունը անվերջ մեծ հաջորդականություն է: ∇

6. ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փոքր հաջորդականություն կամ պարզապես անվերջ փոքր, եթե նրա սահմանը հավասար է 0-ի: Որպեսզի $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ունենա a վերջավոր սահմանը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\{x_n - a\}$ հաջորդականությունը լինի անվերջ փոքր հաջորդականություն:

Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը անվերջ փոքր է և $x_n \neq 0$ ($n = 1; 2; \dots$), ապա $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ հաջորդականությունը անվերջ մեծ է:

Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը անվերջ մեծ է, ապա սկսած ինչ-որ n_0 համարից իմաստ ունի $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ հաջորդականությունը, որը կլինի անվերջ փոքր հաջորդականություն:

Վերջավոր թվով անվերջ փոքր հաջորդականությունների հանրահաշվական գումարը անվերջ փոքր հաջորդականություն է:

Անվերջ փոքր հաջորդականության և սահմանափակ հաջորդականության արտադրյալը անվերջ փոքր հաջորդականություն է:

Վերջավոր թվով անվերջ փոքր հաջորդականությունների արտադրյալը անվերջ փոքր հաջորդականություն է:

7. ՍԱՀՄԱՆԱԺԱԿ ԵՎ ՈՉ ՍԱՀՄԱՆԱԺԱԿ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է վերևից (ներքևից) սահմանափակ, եթե գոյություն ունի M թիվ (m թիվ) այնպիսին, որ $x_n \leq M$; $n = 1; 2; \dots$ ($x_n \geq m$, $n = 1; 2; \dots$):

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե այն սահմանափակ է և՛ վերևից, և՛ ներքևից, այսինքն՝ գոյություն ունեն m և M թվեր այնպիսին, որ $m \leq x_n \leq M$, $n = 1; 2; \dots$, կամ որ նույն է, եթե գոյություն ունի $A > 0$ թիվ այնպիսին, որ $|x_n| \leq A$, $n = 1; 2; \dots$:

Սահմանումից հետևում է, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կլինի վերևից (ներքևից) ոչ սահմանափակ, եթե ցանկացած $E > 0$ թվի համար գոյություն ունի գոնե մեկ n_0 բնական թիվ այնպիսին, որ $x_{n_0} > E$ ($x_{n_0} < -E$):

Հաջորդականությունը կոչվում է ոչ սահմանափակ, եթե այն կամ վերևից, կամ ներքևից, կամ միաժամանակ և՛ վերևից, և՛ ներքևից սահմանափակ չէ:

Համադրելով անվերջ մեծ հաջորդականության և ոչ սահմանափակ հաջորդականության սահմանումները՝ կստանանք՝

Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը անվերջ մեծ է, ապա այն ոչ սահմանափակ է: Հակառակը ընդհանրապես ասած ճիշտ չէ:

Հաջորդականության անդամների արժեքներից կազմված թվային բազմության վերին և ստորին ճշգրիտ եզրերը կոչվում են այդ հաջորդականության վերին և ստորին ճշգրիտ եզրեր և նշանակվում $\sup\{x_n\}$ և $\inf\{x_n\}$ սիմվոլներով:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Ելնելով սահմանի սահմանումից՝ ապացուցել, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը անվերջ փոքր հաջորդականություն է:

$$\text{ա) } x_n = \frac{5 - \sqrt{n}}{n}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Δ – Օգտվելով մոդուլի հատկությունից, կստանանք

$$|x_n - 0| = \left| \frac{5 - \sqrt{n}}{n} - 0 \right| = \left| \frac{5 - \sqrt{n}}{n} \right| \leq \frac{5}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{5}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{n}}$$

Վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ և լուծենք $(6/\sqrt{n}) < \varepsilon$ անհավասարությունը՝

$$\frac{6}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{6}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{36}{\varepsilon^2}: \text{ Որպես վերցնենք } n_0(\varepsilon) \text{ վերցնենք}$$

$$n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{36}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1: \text{ Այսպիսով } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ պայմանից կհետևի } |x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$$

անհավասարությունը: Նշանակում է $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$:

▽

$$p) x_n = \frac{4 \sin 3n + 5 \cos 7n^2}{n^p}, \quad (n = 1; 2; \dots, p > 0)$$

Δ – Ունենք

$$|x_n - 0| = \left| \frac{4 \sin 3n + 5 \cos 7n^2}{n^p} - 0 \right| \leq \frac{4 |\sin 3n|}{n^p} + \frac{5 |\cos 7n^2|}{n^p} \leq \frac{9}{n^p}$$

(քանի որ $\forall n \in N \quad |\sin 3n| \leq 1$ և $|\cos 7n^2| \leq 1$):

Վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ և լուծենք $(9/n^p) < \varepsilon$ անհավասարությունը՝

$$\frac{9}{n^p} < \varepsilon \Leftrightarrow n^p > \frac{9}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left(\frac{9}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}}:$$

$$\text{Որպես } n_0(\varepsilon) \text{ վերցնենք՝ } n_0(\varepsilon) = \left\lceil \left(\frac{9}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}} \right\rceil + 1 \text{ թիվը: } n \geq n_0(\varepsilon)$$

պայմանից կհետևի $|x_n - 0| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Նշանակում է $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$: ▽

$$q) x_n = \frac{a^n}{n!}, \quad n = 1; 2; \dots, |a| > 1, a \in R$$

Δ – Նշանակենք m - ով այն ամենափոքր բնական թիվը, որը գերազանցում է $|a|$ -ին և q -ով՝ $q = \frac{|a|}{m+1}$ թիվը: Գնահատենք $|x_n|$ -ը, երբ $n > m$

$$0 < |x_n| = \left| \frac{a^n}{n!} \right| = \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|a|}{m} \cdot \frac{|a|}{m+1} \cdot \dots \cdot \frac{|a|}{n} < \frac{|a|^m}{m!} \cdot \left(\frac{|a|}{m+1} \right)^{n-m} = \frac{(m+1)^m}{m!} q^n$$

$n > m$, քանի որ m -ը ֆիքսած է, իսկ $0 < q < 1$, ապա $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար

գոյություն ունի $n'_0(\varepsilon)$ համար այնպիսին, որ $\frac{(m+1)^m}{m!} q^n < \varepsilon, n \geq n'_0(\varepsilon)$:

Հետևաբար $0 < |x_n| < \varepsilon, n \geq \max\{m; n'_0(\varepsilon)\} = n_0(\varepsilon)$:

Իսկ սա նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$:

▽

վերցնենք

$$\eta) x_n = \frac{n^k}{2^n}, n = 1; 2; \dots, k \in N$$

$$)| = |x_n| < \varepsilon$$

Δ – Օգտվելով Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից կարող ենք գրել.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i$$

∇

որտեղից կհետևի $2^n > C_n^{k+1}$ ($n > k+1$) անհավասարությունը: Այժմ ցույց տանք, որ ցանկացած $k \in N$ թվի համար, գոյություն ունի $n_0(k)$ բնական թիվ և $B(k) > 0$ թիվ այնպիսին, որ $C_n^{k+1} > B(k) \cdot n^{k+1}$, $n \geq n_0(k)$: Իրոք՝

$$\frac{9}{n^p}$$

$$C_n^{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{(k+1)!} > n \cdot \frac{n^k}{2^k \cdot (k+1)!}$$

ությունը՝

Բոլոր այն n -երի համար, որոնք բավարարում են $n-k > \frac{n}{2}$ կամ որ նույնն է $n > 2k$ անհավասարությանը: Նշանակելով $n_0(k) = 2k$ և $B(k) = \frac{1}{2^k \cdot (k+1)!}$ կունենանք $C_n^{k+1} > B(k) \cdot n^{k+1}$, $n \geq n_0(k)$ պահանջվելիք անհավասարությունը: Օգտվելով այս անհավասարությունից, կունենանք

$$n \geq n_0(\varepsilon)$$

$$0 < \frac{n^k}{2^n} < \frac{n^k}{C_n^{k+1}} < \frac{n^k}{B(k) \cdot n^{k+1}} = \frac{1}{B(k)} \cdot \frac{1}{n}, \quad n \geq n_0(k)$$

նակում է

Դիցուք $\varepsilon > 0$ որևէ թիվ է: Լուծենք n -ի նկատմամբ $\frac{1}{B(k)} \cdot \frac{1}{n}$

անհավասարությունը: Որպես $n_1(\varepsilon)$ վերցնենք $n_1(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{B(k) \cdot \varepsilon} \right\rceil + 1$ թիվը:

գերազան-

$n \geq \max \{n_0(k), n_1(\varepsilon)\} = N_0$ պայմանից կհետևի $0 < \frac{n^k}{2^n} < \frac{1}{B(k)} \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon$ անհա-

• m

վասարությունը: Իսկ սա նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$:

∇

$$\frac{m+1)^m}{m!} q^n$$

**Օրինակներ սահմանափակ և ոչ սահմանափակ
հաջորդականությունների վերաբերյալ**

վի համար

Ելնելով հաջորդականության սահմանափակության սահմանումից՝ ապացուցել $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանափակությունը:

$$n \geq n'_0(\varepsilon):$$

Այսպիսի խնդիրներ լուծելիս երբեմն կօգտվենք հետևյալ փաստից՝ $\frac{a}{b}$ կոտորակը, որտեղ a -ն և b -ն դրական թվեր են, կմեծանա (կփոքրանա), եթե

∇

ա) a -ն մեծացնենք (փոքրացնենք)՝ b -ն թողնելով անփոփոխ:
 բ) a -ն թողնելով անփոփոխ՝ b -ն փոքրացնենք (մեծացնենք):
 գ) միաժամանակ a -ն մեծացնենք (փոքրացնենք), b -ն փոքրացնենք (մեծացնենք):

$$\text{ա) } x_n = \frac{9 \cdot n^8 + 5}{(3n^3 - 2n^2)(8n^5 - 3n^4)}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Δ – Նկատենք, որ բոլոր բնական թվերի համար $x_n > 0$: Չնահատենք յուրաքանչյուր n -ի համար x_n -ը վերևից: Օգտվենք վերը նշված փաստի գ) դեպքից՝ պահպանելով n -ի ամենաբարձր աստիճանների կարգերը:

$$x_n = \frac{9 \cdot n^8 + 5}{(3n^3 - 2n^2)(8n^5 - 3n^4)} \leq \frac{9 \cdot n^8 + 5}{(3n^3 - 2n^3)(8n^5 - 3n^5)} = \frac{14n^8}{n^3 \cdot 5n^5} = \frac{14}{5}, \quad n \geq 1$$

$$\text{Ստացվեց՝ } 0 < x_n \leq \frac{15}{5}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Իսկ սա նշանակում է, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ հաջորդականություն է: ∇

$$\text{բ) } x_n = \left(\sqrt{n^4 + 3n} - \sqrt{n^4 - n} \right) \cdot n, \quad n = 1; 2; \dots$$

Δ – Նկատենք, որ բոլոր x_n -երը դրական են ($x_n > 0$): Յուրաքանչյուր n բնական թվի համար x_n -ը գնահատենք վերևից: Բազմապատկենք և բաժանենք փակագծի մեջ եղած արտահայտության լծորդով: Կստանանք

$$x_n = \frac{(n^4 + 3n - n^4 + n) \cdot n}{\left(\sqrt{n^4 + 3n} + \sqrt{n^4 - n} \right)} = \frac{4n^2}{\left(\sqrt{n^4 + 3n} + \sqrt{n^4 - n} \right)} \leq \frac{4n^2}{\sqrt{n^4}} = 4, \quad n = 1; 2; \dots$$

Չետևաբար $0 < x_n \leq 4$, $n = 1; 2; \dots$ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է: ∇

$$\text{գ) } x_n = \frac{5^{n+1} + 6^n}{6^{n+2} - 6^{n+1}}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Δ – Նախ $x_n > 0$, $n = 1; 2; \dots$

Մյուս կողմից

$$x_n < \frac{6^{n+1} + 6^n}{6^{n+2} - 6^{n+1}} = \frac{7 \cdot 6^n}{5 \cdot 6 \cdot 6^n} = \frac{7}{30}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Հետևաբար $0 < x_n \leq \frac{7}{30}$, $n = 1; 2; \dots$: Իսկ սա նշանակում է, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է: ▽

$$\eta) \ x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$$

Δ – Քանի որ $(4k+1) - (4k-3) = 4$, $k = 1; 2; \dots$, ապա՝

$$\frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right), \quad k = 1; 2; \dots$$

Օգտվելով վերը գրված նույնությունից՝ կստանանք

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right)$$

(Օգտվեցինք 2 կետի համապատասխան բանաձևից, որտեղ $b_k = \frac{1}{4k-3}$, $k = 1; 2; \dots$):

Ստացված արտահայտությունից հետևում է, որ $0 < x_n < \frac{1}{4}$, $n = 1; 2; \dots$:

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է: ▽

Ապացուցել, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ չէ, սակայն անվերջ մեծ չէ:

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \cdot n, \quad n = 1; 2; \dots$$

Δ – Նախ ցույց տանք, որ հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ չէ:

Դիցուք $E > 0$ ցանկացած դրական թիվ է: n_0 բնական թիվը վերցնենք այնքան մեծ, որ $2n_0 > E$: Այդ դեպքում $x_{2n_0} = \frac{1 + (-1)^{2n_0}}{2} \cdot 2n_0 = 2n_0 > E$: Իսկ սա նշանակում է, որ $\{x_n\}$ -ը վերևից սահմանափակ չէ: Այժմ ցույց տանք, որ $\{x_n\}$ -ը անվերջ մեծ չէ: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ գոյություն ունի $E_0 > 0$ դրական թիվ այնպիսին, որ ինչպիսին էլ լինի n_0 բնական թիվը, միշտ կարելի է գտնել n' բնական թիվ այնպիսին, որ $n' > n_0$ և $|x_{n'}| \leq E_0$: Որպես $E_0 > 0$ թիվ վերցնենք $E_0 = 1$ թիվը: Դիցուք n_0 -ն կամայական բնական թիվ է: Որպես n' բնական թիվ վերցնենք n_0 -ին գերազանցող կամայական կենտ բնական թիվ ($n' > n_0$ և $n' = 2k-1$), այս դեպքում՝

$$x'_n = \left| \frac{1 + (-1)^{n'}}{2} \right| \cdot n' = 0 \cdot n' = 0 < 1$$

Հետևաբար $\{x_n\}$ հաջորդականությունը անվերջ մեծ է: ▽

բ) $x_n = n^{\sin \frac{\pi}{2} n}$, $n = 1; 2; \dots$

Δ – Հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է: Իրոք, դիցուք E -ն որևէ դրական թիվ է: k բնական թիվը վերցնենք այնքան մեծ, որ $4k + 1 > E$: Այդ k -ի համար՝ կունենանք

$$x_{4k+1} = (4k+1)^{\sin \frac{\pi}{2}(4k+1)} = (4k+1)^{\sin \frac{\pi}{2}} = 4k+1 > E$$

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը անվերջ մեծ է:

Որպես $E_0 > 0$ թիվ վերցնենք $E_0 = 2$ թիվը: Ինչպիսին էլ լինի n_0 բնական թիվը որպես n' վերցնենք n_0 -ին գերազանցող որևէ $n' = 2k$ զույգ թիվ:

Այդպիսի n' -ի համար

$$x'_n = (2k)^{\sin \frac{\pi}{2} 2k} = (2k)^{\sin \pi k} = (2k)^0 = 1 < 2$$
 ▽

գ) $x_n = \frac{n^2 + 2}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{4} n$, $n = 1; 2; \dots$

Δ – Հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է:

Իրոք: Դիցուք $E_0 > 0$ որևէ դրական թիվ է: k բնական թիվը ընտրենք այնքան մեծ, որ $4k > E$: Այդպիսի k -ի համար՝

$$|x_{4k}| = \left| \frac{(4k)^2 + 2}{4k} \cdot \cos \frac{\pi}{4} 4k \right| = \frac{(4k)^2 + 2}{4k} = 4k + \frac{1}{2k} > 4k > E$$

Հաջորդականությունը անվերջ մեծ է: Որպես $E_0 > 0$ թիվ վերցնենք $E_0 = 1$ թիվը: Այդ դեպքում ինչպիսին էլ լինի n_0 բնական թիվը գոյություն ունի $n = 8k + 2$ տեսքի բնական թիվ, որը գերազանցում է n_0 -ին և

$$|x_{8k+2}| = \left| \frac{(8k+2)^2 + 2}{8k} \cdot \cos \left(2\pi k + \frac{\pi}{2} \right) \right| = 0 < 1$$
 ▽

դ) Դիցուք $\{x_n\}$ -ը սահմանափակ հաջորդականություն է, իսկ $\{y_n\}$ -ը անվերջ մեծ: Ցույց տալ, որ $\{x_n + y_n\}$ հաջորդականություն անվերջ մեծ հաջորդականություն է:

Δ – Քանի որ $\{x_n\}$ -ը սահմանափակ է, ապա գոյություն ունի $c > 0$ թիվ այնպիսին, որ $|x_n| \leq c$, $n = 1; 2; \dots$

Վերցնենք որևէ $E > 0$ թիվ: $E + c$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(E)$ բնական թիվ այնպիսին, որ $|y_n| > E + c$, $n > n_0$:

Օգտվելով $|a + b| \geq |a| - |b|$, ($a, b \in R$) անհավասարությունից գնահատենք $\{y_n + x_n\}$ -ը:

Ունենք՝

$$|y_n + x_n| \geq |y_n| - |x_n| \geq |y_n| - c \geq E + c - c = E$$

Հետևաբար $\{y_n + x_n\}$ -ը անվերջ մեծ հաջորդականություն է:

8. ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՍԱՀՄԱՆՆԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

ա) Եթե $x_n \leq y_n \leq z_n$, $n \in N$ և եթե $\{x_n\}$ ու $\{z_n\}$ հաջորդականությունները ունեն միևնույն a սահմանը, ապա $\{y_n\}$ հաջորդականությունը կունենա սահման և այդ սահմանը հավասար կլինի a -ին (երեք հաջորդականությունների վերաբերյալ թեորեմը):

բ) $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է աճող (չնվազող, նվազող, չաճող), եթե $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$, $n \in N$ և (համապատասխանաբար $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$, $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$, $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$):

Չնվազող կամ չաճող հաջորդականություններին անվանում են մոնոտոն հաջորդականություններ: Եթե հաջորդականությունը չնվազող կամ չաճող հաջորդականություն է ինչ որ n_0 ($n \geq n_0 > 1$) համարից սկսած, ապա այդպիսի հաջորդականությանը անվանում են ի վերջո չնվազող, ի վերջո չաճող հաջորդականություն: Նկատենք, որ ցանկացած մոնոտոն հաջորդականություն մեկ կողմից սահմանափակ է: Եթե հաջորդականությունը չնվազող է, ապա այն ներքևից սահմանափակ է առաջին անդամով $x_1 \leq x_n$, $n = 1; 2; \dots$: Եթե հաջորդականությունը չաճող է, ապա այն վերևից սահմանափակ է առաջին անդամով $x_1 \geq x_n$, $n = 1; 2; \dots$:

Մոնոտոն և սահմանափակ հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման: Ընդ որում, եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը չնվազող է և վերևից սահմանափակ, ապա նրա սահմանը հավասար է $\{x_n\}$ հաջորդականության

ճշգրիտ վերին եզրին: Նույն ձևով, եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը չաճող է և ներքևից սահմանափակ, ապա նրա սահմանը հավասար է $\{x_n\}$ հաջորդականության ճշգրիտ ստորին եզրին:

Եթե հաջորդականությունը չնվազող (չաճող) է և վերևից (ներքևից) սահմանափակ չէ, ապա այն ձգտում է $+\infty$ -ի ($-\infty$ -ի):

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

ա) Դիցուք $x_n \geq -1$, $n = 1; 2; \dots$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$:

Ապացուցել, որ ցանկացած k բնական թվի համար $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{1+x_n} = 1$:

Δ – Ենթադրենք k -ն որևէ բնական թիվ է: Նախ ապացուցենք, որ՝

$$1 - |x_n| \leq \sqrt[k]{1+x_n} \leq 1 + |x_n|, \quad n = 1; 2; \dots \quad (1)$$

Իրոք, եթե $x_n \geq 0$, ապա

$$1 \leq \sqrt[k]{1+x_n} \leq \left(\sqrt[k]{1+x_n}\right)^k \leq 1+x_n = 1+|x_n|$$

Իսկ եթե $-1 \leq x_n < 0$, ապա $0 \leq 1+x_n < 1$ և հետևաբար

$$1 \geq \sqrt[k]{1+x_n} \geq \left(\sqrt[k]{1+x_n}\right)^k = 1+x_n = 1-|x_n|$$

Այնպես որ (1)-ը ճիշտ է ցանկացած n բնական թվի համար: Օգտվելով երեք հաջորդականությունների վերաբերյալ թեորեմից և հաշվի առնելով, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-|x_n|) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+|x_n|) = 1$, կստանանք $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{1+|x_n|} = 1$: ∇

բ) Ապացուցել, որ

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, \quad n = 1; 2; \dots$$

հաջորդականությունը զուգամետ է և գտնել նրա սահմանը:

Δ – Քանի որ գումարելիները նվազում են

$$\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+j}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+i}}; i \leq j \leq n \right) \text{ ապա } \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

կամ որ նույնն է, $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} < x_n < \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$, $n = 1; 2; \dots$

(x_n -ի արտահայտության մեջ բոլոր գումարելիները փոխարինեցինք ամենափոքրով և ամենամեծով):

Օգտվելով նախորդ խնդրից և երեք հաջորդականությունների վերաբերյալ թեորեմից, կստանանք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը զուգամետ է և նրա սահմանը 1 թիվն է: $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = 1$ ▽

գ) Օգտվելով մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմից՝ ապացուցել $\{x_n\}$ հաջորդականության զուգամիտությունը.

$$\text{ա) } x_n = \frac{4n-5}{6n-7}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Δ – Ընդհանրապես որևէ $\{x_n\}$ հաջորդականության մոնոտոնության բնույթը պարզելու համար դիտարկում են կամ հաջորդ և նախորդ անդամների՝ $x_{n+1} - x_n$, $n = 1; 2; \dots$ տարբերությունը կամ, եթե նախապես հայտնի է, որ $x_n > 0$, $n = 1; 2; \dots$ հաջորդ և նախորդ անդամների $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $n = 1; 2; \dots$ հարաբերությունը: Եթե $x_{n+1} - x_n > 0$, $n \geq n_0$ ապա $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ի վերջո աճող է n_0 համարից սկսած, եթե $x_{n+1} - x_n < 0$, $n \geq n_0$, ապա $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ի վերջո նվազող է n_0 համարից սկսած:

Եթե $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, $n \geq n_0$, ապա $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ի վերջո աճող է սկսած n_0 համարից, եթե $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, $n \geq n_0$, ապա $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ի վերջո նվազող է սկսած n_0 համարից:

Լուծենք ավելի ընդհանուր խնդիր:

Տրված է $x_n = \frac{an+b}{cn+d}$, $n = 1; 2; \dots$ հաջորդականությունը: Ապացուցել, որ եթե

ա) $ad - bc > 0$ ապա $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ի վերջո աճող է սկսած ինչ-որ n_0 համարից:

բ) $ad - bc < 0$ ապա $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ի վերջո նվազող է սկսած n_0 համարից:

Δ – Դիտարկենք $x_{n+1} - x_n$, $n = 1; 2; \dots$ տարբերությունը:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(an+b)+a}{(cn+d)+c} - \frac{an+b}{cn+d} = \frac{ad-bc}{((cn+d)+c)(cn+d)} = \frac{ad-bc}{c^2 \left(n + \frac{d+c}{c} \right) \left(n + \frac{d}{c} \right)}$$

Քանի որ հայտարարը n -ի նկատմամբ քառակուսի եռանդամ է, որի ավագ անդամի գործակիցը՝ $c^2 > 0$, ապա մեծ արմատից մեծ բոլոր n բնական թվերի համար հայտարարը դրական է: Հետևաբար կոտորակը դրական կլինի, եթե տեղի ունի ա)-ն և կլինի բացասական, եթե տեղի ունի բ)-ն: Որպես n_0 համար կարող ենք վերցնել մեծ արմատին գերազանցող առաջին բնական թիվը:

Վերադառնալով մեր սկզբնական օրինակին՝ ունենք $a = 4$, $b = -5$, $c = 6$, $d = -7$, $ad - bc = -28 + 30 = 2 > 0$: Հետևաբար մեր հաջորդականությունը աճող է սկսած $n_0 = 2$ համարից՝ $((6(n+1)-7)(6n-7))$ եռանդամի մեծ արմատը $7/6$ թիվն է):

$x_n < x_{n+1}$, $n = 2; 3; \dots$: Մյուս կողմից $x_n > 0$, $n = 1; 2; \dots$ և

$$x_n < \frac{4n+5n}{6n-4n} = \frac{9}{2}, \quad 0 < x_n < \frac{9}{2}, \quad n = 2; 3; \dots:$$

Հաջորդականությունը ի վերջո աճող է և վերևից սահմանափակ: Հետևաբար ըստ մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմի այն կլինի զուգամետ: ∇

բ) $x_n = \frac{1}{6+1^2} + \frac{1}{6^2+2^2} + \frac{1}{6^3+3^2} + \dots + \frac{1}{6^n+n^2}$, $n = 1; 2; \dots$

Δ - Ունենք $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6^{n+1} + (n+1)^2}$, $n = 1; 2; \dots$

Քանի որ $\frac{1}{6^{n+1} + (n+1)^2} > 0$, $n = 1; 2; \dots$, ապա x_n -ը աճող է: Մյուս կողմից

$$x_n < \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \dots + \frac{1}{6^n} = \frac{\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6^n} \right)}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{6^n} \right) < \frac{1}{5}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Հետևաբար x_n -ը վերևից սահմանափակ է, ըստ մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմի x_n -ը զուգամետ հաջորդականություն է: ∇

գ) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, $n = 1; 2; \dots$

$$\Delta - \text{Ունենք } x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)^2}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Քանի որ $\frac{1}{(n+1)^2} > 0, \quad n = 1; 2; \dots$, ապա x_n հաջորդականությունը աճող

է: Ցույց տանք, որ $\{x_n\}$ -ը վերևից սահմանափակ է:

Օգտվենք $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{(n-1)n}, \quad n = 2; 3; \dots$ անհավասարությունից՝
գնահատենք

$$\begin{aligned} x_n &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}\right) = \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2, \quad n = 1; 2; \dots \end{aligned}$$

Ստացվեց $\{x_n\}$ -ը աճող և վերևից սահմանափակ հաջորդականություն է, հետևաբար այն զուգամետ է: ∇

$$\eta) \quad x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, \quad n = 1; 2; \dots$$

$\Delta -$ Պարզենք $\{x_n\}$ հաջորդականության մոնոտոնության բնույթը՝

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0, \quad n = 1; 2; \dots$$

$\{x_n\}$ -ը աճող է: Մյուս կողմից քանի որ x_n -ի արտահայտության մեջ գու-

մարելիները նվազող են, ապա $x_n < \frac{n}{n+1} < 1, \quad n = 1; 2; \dots$

Հետևաբար $\{x_n\}$ -ը զուգամետ հաջորդականություն է: ∇

$$\text{ե) } x_n = \frac{8^n}{(2n+1)!}, \quad n = 1; 2; \dots$$

$$\Delta - \text{Ունենք } x_{n+1} = \frac{8}{(2n+2)(2n+3)} \cdot x_n = \frac{4}{(n+1)(2n+3)} \cdot x_n, \quad n = 1; 2; \dots$$

և $x_n > 0, \quad n = 1; 2; \dots$, որտեղից $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{4}{(n+1)(2n+3)} < 1, \quad n = 1; 2; \dots$

$\{x_n\}$ -ը նվազող և ներքևից սահմանափակ հաջորդականություն է, հետևաբար այն զուգամետ է: Ի միջիայլոց այս օրինակում կարող ենք գտնել այն

թիվը, որին զուգամիտում է $\{x_n\}$ -ը: Իրոք նշանակենք $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ և փորձենք անցնենք սահմանի $x_{n+1} = \frac{4}{(n+1)(2n+3)} \cdot x_n$ անդրադարձ բանաձևում՝ օգտվելով համապատասխան թեորեմներից: Կունենանք

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{(n+1)(2n+3)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Որտեղից կհետևի $a = 0 \cdot a = 0$, հետևաբար $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$:

▽

9. ՄԱՍՆԱԿԻ ՄԱՅՄԱՆ

Դիցուք տրված է $\{x_n\}$ հաջորդականությունը և բնական թվերից կազմված $\{k_n\}$ աճող հաջորդականությունը: $\{x_{k_n}\}$ հաջորդականությունը կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության ենթահաջորդականություն:

a թիվը կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության մասնակի սահման, եթե գոյություն ունի այդ հաջորդականության $\{x_{k_n}\}$ ենթահաջորդականություն, որը զուգամիտում է a -ին: $+\infty$ -ը ($-\infty$)-ը կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության մասնակի սահման, եթե գոյություն ունի $\{x_n\}$ հաջորդականության $\{x_{k_n}\}$ ենթահաջորդականություն, որն ունի $+\infty$ ($-\infty$) սահման:

ա) Բոլցանո–Վայերշտրասսի թեորեմը

Ցանկացած սահմանափակ հաջորդականություն ունի զոնե մեկ մասնակի սահման, ընդ որում, եթե մասնակի սահմանը միակն է, ապա այն կլինի $\{x_n\}$ հաջորդականության սահման:

բ) Ցանկացած ոչ սահմանափակ հաջորդականությունից կարելի է անջատել որոշակի նշանով անվերջ մեծ $\{x_{k_n}\}$ ենթահաջորդականություն:

գ) Որպեսզի $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա ցանկացած ենթահաջորդականություն ունենա վերջավոր սահման:

դ) Անվերջ մեծ հաջորդականության ցանկացած ենթահաջորդականություն ևս անվերջ մեծ հաջորդականություն է:

ա) Ապացուցել հետևյալ պնդումը.

Որպեսզի a թիվը հանդիսանա $\{x_n\}$ հաջորդականության մասնակի սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ a -ի կամայական շրջակայք պարունակի $\{x_n\}$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ:

Δ – **Անհրաժեշտություն** – Անհրաժեշտությունը անմիջապես հետևում է մասնակի սահմանի սահմանումից և սահմանի երկրաչափական մեկնաբանությունից:

Իրոք՝ ենթադրենք a -ն $\{x_n\}$ -ի մասնակի սահմանն է: Ըստ սահմանի երկրաչափական մեկնաբանության a -ի կամայական $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ շրջակայք պարունակում է $\{x_{k_n}\}$ հաջորդականության բոլոր անդամները սկսած ինչ-որ n_0 համարից: Սակայն $\{x_{k_n}\}$ հաջորդականության բոլոր անդամները $\{x_n\}$ հաջորդականության անդամներ են: Այսպիսով a -ի կամայական $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ շրջակայք պարունակում է $\{x_n\}$ հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ:

Բավարարություն – վերցնենք a -ի՝ $(a-\varepsilon_n; a+\varepsilon_n)$ շրջակայքերի հաջորդականություն այնպիսին, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, $(a-\varepsilon_1; a+\varepsilon_1)$ շրջակայքում կան x_n -ից անվերջ թվով անդամներ: Վերցնենք նրանցից որևիցե մեկը և նշանակենք այն x_{k_1} -ով: $(a-\varepsilon_2; a+\varepsilon_2)$ շրջակայքը ըստ պայմանի պարունակում է անվերջ թվով անդամներ x_n -ից: Հետևաբար այդ շրջակայքում գոյություն կունենա $\{x_n\}$ հաջորդականությունից առնվազն մեկ անդամ, որի ինդեքսը մեծ է k_1 -ից: Նշանակենք այն x_{k_2} -ով ($k_2 > k_1$): Եթե $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ ինդեքսներն արդեն ընտրված են, ապա հաջորդ k_n ինդեքսը ընտրելու համար վերցնենք a -ի $(a-\varepsilon_n; a+\varepsilon_n)$ շրջակայքը: Այդ շրջակայքը ըստ պայմանի պարունակում է x_n -ից անվերջ թվով անդամներ: Հետևաբար այդ շրջակայքում գոյություն կունենա $\{x_n\}$ հաջորդականությունից առնվազն մեկ անդամ, որի ինդեքսը մեծ է k_{n-1} -ից: Նշանակենք այն x_{k_n} -ով ($k_n > k_{n-1}$):

Եվ այսպես շարունակ: Պրոցեսը շարունակելով անվերջ արդյունքում կստանանք $\{x_n\}$ հաջորդականության $\{x_{k_n}\}$ ենթահաջորդականություն, որը բավարարում է $a - \varepsilon_n < x_{k_n} < a + \varepsilon_n$, $n = 1; 2; \dots$ պայմանին:

Քանի որ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a - \varepsilon_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + \varepsilon_n) = a$, ապա ըստ երեք հաջորդականությունների վերաբերյալ թեորեմի $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$: ∇

բ) Ապացուցել, որ եթե $\{x_n\}$ հաջորդականության $\{x_{2k-1}\}$ և $\{x_{2k}\}$ ենթահաջորդականությունները զուգամիտում են միևնույն a թվին, ապա $\{x_n\}$ -ը զուգամիտում է a -ին:

Δ – Հաջորդականության սահմանի սահմանման համաձայն ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն կունենան $k_1(\varepsilon)$ և $k_2(\varepsilon)$ բնական թվեր այնպիսին, որ

$$|x_{2k-1} - a| < \varepsilon, (k > k_1) \text{ և } |x_{2k} - a| < \varepsilon, (k > k_2)$$

$k_0(\varepsilon)$ -ով նշանակենք՝ $k_0(\varepsilon) = \max\{k_1(\varepsilon); k_2(\varepsilon)\}$: Այդ դեպքում ցանկացած $k > k_0$ թվի համար տեղի ունեն $|x_{2k-1} - a| < \varepsilon$ և $|x_{2k} - a| < \varepsilon$ անհավասարությունները:

Վերցնենք կամայական $n \geq 2k_0$ բնական թիվ: Այն կամ կենտ է կամ զույգ: Եթե $n = 2k - 1$ թվին, ապա $2k - 1$ -ը մեծ կամ հավասար կլինի $2k_0$ զույգ թվին հաջորդող $2k_0 + 1$ թվից և հետևաբար $k > k_0$, որտեղից կհետևի, որ $|x_n - a| = |x_{2k-1} - a| < \varepsilon$: Եթե $n = 2k$, ապա նորից $k > k_0$ և հետևաբար $|x_n - a| = |x_{2k} - a| < \varepsilon$: Այսպիսով ցանկացած $n \geq 2k_0$ թվի համար ունենք $|x_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը, որտեղից կհետևի, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

Այս խնդիրը կարելի է լուծել օգտվելով սահմանի երկրաչափական մեկնաբանությունից: Վերցնենք a կետի որևէ $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ շրջակայք: Քանի որ a -ն $\{x_{2k-1}\}$ հաջորդականության սահմանն է, ապա այդ շրջակայքից դուրս ընկած կլինեն $\{x_{2k-1}\}$ հաջորդականությունից ամենաշատը վերջավոր քանակությամբ անդամներ: Նույն ձևով քանի որ նույն a -ն սահմանն է, $\{x_{2k}\}$ -ի, ապա $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ շրջակայքից դուրս ընկած կլինեն $\{x_{2k}\}$ հաջորդականությունից ամենաշատը վերջավոր քանակությամբ անդամներ, մյուս կողմից $\{x_{2k-1}\}$ և $\{x_{2k}\}$ հաջորդականությունների անդամների միավորումը $\{x_n\}$ հաջորդականությունն է: Ստացվեց, որ a կետի կամայական $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ շրջակայքից դուրս ընկած են ամենաշատը վերջավոր քանակությամբ անդամներ $\{x_n\}$ հաջորդականությունից: Իսկ սա նշանակում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

գ) Ապացուցել, որ եթե $\{x_n\}$ հաջորդականության $\{x_{2k-1}\}$, $\{x_{2k}\}$ և $\{x_{7k+1}\}$ ենթահաջորդականությունները զուգամետ են, ապա $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ևս զուգամետ է:

Δ – Տրված է $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = a$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = b$ և $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{7k+1} = c$: Նախ ցույց տանք, որ $a = c$ և $b = c$, որտեղից կհետևի $a = b$ և խնդիրը բերվում է նախորդ դեպքին:

Իրոք, քանի որ $7k+1$ թիվը կենտ k -երի համար զույգ թիվ է, զույգ k -երի համար կենտ, ապա $\{x_{14k+8}\}$ հաջորդականությունը և $\{x_{7k+1}\}$ և $\{x_{2k}\}$ հաջորդականությունների համար ենթահաջորդականություն է: Հետևաբար

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{14m+8} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = b \text{ և } \lim_{m \rightarrow \infty} x_{14m+8} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{7k+1} = c$$

որտեղից կհետևի $b = c$ հավասարությունը: Նույն ձևով $\{x_{14m+1}\}$ հաջորդականությունը ենթահաջորդականություն է և $\{x_{7k+1}\}$ և $\{x_{2k-1}\}$ հաջորդականությունների համար: Որտեղից կհետևի $a = c$ հավասարությունը:

$a = c$, $b = c$ հավասարություններից կհետևի $a = b$ հավասարությունը և խնդիրը բերվում է նախորդ դեպքին: ∇

դ) Ապացուցել, որ եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ չէ, ապա նրանից կարելի է անջատել $+\infty$ -ի ձգտող ենթահաջորդականություն:

Δ – Նկատենք, որ եթե վերևից ոչ սահմանափակ հաջորդականությունից դեն նետենք ցանկացած վերջավոր քանակությամբ առաջին անդամները, ապա այդպիսի նետումից հետո մնացած հաջորդականությունը նորից կլինի վերևից ոչ սահմանափակ: Իրոք, հակառակ ենթադրության դեպքում կստացվեր, որ սկզբնական հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է:

Օգտվելով վերևից ոչ սահմանափակ լինելու սահմանումից, առաջին քայլում գտնենք $\{x_n\}$ հաջորդականության x_{n_1} անդամը այնպիսին, որ $x_{n_1} > 1$: Դիտարկենք մեր հաջորդականությունը $n_1 + 1$ համարից սկսած՝ $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots, x_{n_1+m}, \dots$: Այդ հաջորդականությունը ըստ սկզբում արված դիտողության վերևից սահմանափակ չէ: 2 թվի համար գտնենք այդ հաջորդականությանը պատկանող x_{n_2} անդամ այնպիսին, որ $x_{n_2} > 2$ և $n_2 > n_1$: Ենթադրենք $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$ ինդեքսները արդեն կառուցված են: n_k ինդեքսը կառուցենք հետևյալ դատողություններից ելնելով: Դեն նետենք $\{x_n\}$ հաջորդականությունից առաջին $x_1, x_2, \dots, x_{n_{k-1}}$ անդամները: Մնացած՝ $x_{n_{k-1}+1}, x_{n_{k-1}+2}, \dots, x_{n_{k-1}+m}$ հաջորդականությունը կլինի վերևից ոչ սահմանափակ

և հետևաբար k թվի համար ընտրենք այդ հաջորդականությունից x_{n_k} անդամը այնպիսին, որ $x_{n_k} > k$, $n_k > n_{k-1}$: Եվ այսպես շարունակ: Պրոցեսը կատարելով յուրաքանչյուր k բնական թվի համար $\{x_n\}$ հաջորդականությունից կանջատենք $\{x_{n_k}\}$ ($n_k > n_{k-1}$, $k = 2; 3; \dots$) ենթահաջորդականություն այնպիսին, որ $x_{n_k} > k$, $k = 1; 2; \dots$: Քանի որ $\lim_{k \rightarrow \infty} k = +\infty$, ապա $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$: ∇

ե) Ապացուցել, որ եթե մոնոտոն հաջորդականության որևէ ենթահաջորդականության զուգամետ է, ապա ինքը՝ հաջորդականությունը զուգամետ է:

Δ – Ապացուցենք $\{x_n\}$ չնվազող հաջորդականության համար: Քանի որ $\{x_{n_k}\}$ հաջորդականությունը ևս չնվազող է և $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$, ապա $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ այնպիսին, որ $k \geq k_0$ պայմանից կհետևի $a - \varepsilon < x_{n_k} \leq a$ անհավասարությունը: Մասնավորապես

$$a - \varepsilon < x_{n_{k_0}} \leq a$$

$\{x_n\}$ հաջորդականության չնվազող լինելուց կհետևի՝ երբ $n \geq n_{k_0}$ $x_n \geq x_{n_{k_0}} > a - \varepsilon$: Մյուս կողմից ցանկացած $n \geq n_{k_0}$ թվի համար գոյություն ունի n_m այնպիսին, որ $n_m > n$: Հետևաբար $x_n \leq x_{n_m} \leq a$: Արդյունքում ստացվեց, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ թիվ այնպիսին, որ ցանկացած $n \geq n_{k_0}$ թվի համար տեղի ունի

$$a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon:$$

Քանի որ $\varepsilon > 0$ թիվը կամայական էր, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

զ) Կառուցել հաջորդականություն, որի համար տրված $\{a_n\}$ հաջորդականության յուրաքանչյուր անդամ լինի մասնակի սահման: Ուրիշ ի՞նչ մասնակի սահմաններ է պարտավոր ունենալ կառուցած հաջորդականությունը, եթե a_n -երը իրարից տարբեր են:

Δ – Տրված $\{a_n\}$ հաջորդականության էլեմենտներից կազմենք տուփեր հետևյալ ձևով. առաջին տուփը թող կազմված լինի a_1 -ից, երկրորդը՝ $a_1; a_2$, երրորդը՝ $a_1; a_2; a_3$ և այլն, n -րդը՝ $a_1; a_2; a_3 \dots a_n$ և այսպես շարունակ: Այնուհետև ստացված տուփերը հաջորդաբար իրար հետ կցագրենք: Կստացվի հետև-

յալ տեսքի հաջորդականություն՝ $a_1; a_1; a_2; a_1; a_2; a_3; \dots a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; a_1; \dots$ ։
 Հեշտ է տեսնել, որ կառուցված հաջորդականության համար յուրաքանչյուր a_{i_0} -ն մասնակցում է i_0 -րդ և նրան հաջորդող բոլոր տուփերում, իսկ տուփերի քանակը անվերջ է։ Կառուցված հաջորդականության համար a_{i_0} թիվը որպես անդամ անվերջ թվով տեղերում մասնակցում է։ Հետևաբար a_{i_0} -ն ըստ ա) խնդրի կլինի կառուցված հաջորդականության մասնակի սահման, եթե այն գոյություն ունի։ Կառուցված հաջորդականության համար մասնակի սահման կհանդիսանա $\{a_n\}$ հաջորդականության յուրաքանչյուր մասնակի սահմանը։ Իրոք, ենթադրենք a -ն $\{a_n\}$ հաջորդականության մասնակի սահմանն է։ Վերցնենք a կետի որևէ $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ շրջակայք։ Այդ շրջակայքում ընկած են $\{a_n\}$ -ից անվերջ քանակությամբ անդամներ որոնցից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է կառուցած հաջորդականության անդամ։ Ստացվեց, որ a -ի կամայական $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ շրջակայք պարունակում է կառուցած հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ։ Ըստ ա) խնդրի a -ն կհանդիսանա կառուցած հաջորդականության մասնակի սահման։ Եթե $a = +\infty (-\infty)$, ապա գոյություն ունի $\{x_n\}$ հաջորդականության $\{x_{k_n}\}$ ենթահաջորդականություն այնպիսին, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = +\infty$$

Քանի որ $\{x_n\}$ հաջորդականության յուրաքանչյուր ենթահաջորդականություն կհանդիսանա նաև կառուցած հաջորդականության ենթահաջորդականություն, ապա մասնավորապես $\{x_{k_n}\}$ հաջորդականությունը որպես կառուցած հաջորդականության ենթահաջորդականություն կձգտի $+\infty$ -ի։ Իսկ դա նշանակում է, որ $+\infty$ -ը կառուցած հաջորդականության մասնակի սահման է։ ∇

Է) Ապացուցել, որ $x_n = \frac{4^n + (-4)^n}{4^n}$, $n = 1; 2; \dots$ հաջորդականությունը

սահման չունի, իսկ $y_n = \frac{4^n + (-4)^n}{5^n}$, $n = 1; 2; \dots$ հաջորդականությունն ունի

սահման։

Գտնել այդ սահմանը.

$$\Delta - \text{Ունենք } x_n = 1 + (-1)^n, \quad n = 1; 2; \dots$$

Քանի որ $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 2$ և $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = 0$ և ապա $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահման ունենալ չի կարող: Իրոք հակառակ դեպքում և $\{x_{2k}\}$ և $\{x_{2k-1}\}$ հաջորդականությունները պետք է ձգտեին նույն սահմանին:

$$y_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n (1 + (-1)^n), \quad n = 1; 2; \dots$$

Քանի որ $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{2k} = 2 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{2k} = 0$ և $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0$ ապա ըստ բ)

խնդրի $\{x_n\}$ հաջորդականությունն ունի սահման և այն հավասար է 0-ի: ∇

10. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԶՈՒԳԱՄԵՏ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏ

Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ ապա

ա) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b$

բ) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b$

գ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}$ եթե $b \neq 0$

Օրինակներ հաջորդականության սահմանը գտնելու վերաբերյալ.

Հաշվել հաջորդականության սահմանը.

ա) $x_n = \frac{8n^3 - 5n^2 + 3n - 7}{4n^2 - 6n^3 + 5}, \quad n = 1; 2; \dots$

Δ – Նկատենք, որ և՛ համարիչում, և՛ հայտարարում n -ի ամենաբարձր աստիճանը n^3 -ն է: Համարիչը և հայտարարը բաժանելով n^3 -ի վրա և օգտվելով հաջորդականությունների գումարի, քանորդի սահմանի վերաբերյալ թեորեմներից, կունենանք՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 5n^2 + 3n - 7}{4n^2 - 6n^3 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{7}{n^3}}{\frac{4}{n} - 6 + \frac{5}{n^3}} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 8 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 6 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^3}} = -\frac{4}{3} \quad \nabla$$

$$\text{բ) } x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 8} - n}{\sqrt{n^2 + 7} - \sqrt{n^2 + 3}}$$

Δ – Եվ համարիչում և հայտարարում ունենք $\infty - \infty$ տեսքի անորոշություն: Համարիչն ու հայտարարը բազմապատկելով և բաժանելով իրենց լծորդների վրա կստանանք՝

$$x_n = \frac{(n^2 + 8 - n^2)(\sqrt{n^2 + 7} + \sqrt{n^2 + 3})}{(n^2 + 7 - n^2 - 3)(\sqrt{n^2 + 8} + n)} = 2 \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 7} + \sqrt{n^2 + 3}}{\sqrt{n^2 + 8} + n}$$

Համարիչը և հայտարարը բաժանելով n -ի վրա և օգտվելով 10-րդ կետի ա) խնդրից, կունենանք՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 7} + \sqrt{n^2 + 3}}{\sqrt{n^2 + 8} + n} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{7}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}}{\sqrt{1 + \frac{8}{n^2}} + 1} = 2 \quad \nabla$$

$$\text{գ) } x_n = \frac{5^{n+1} + 6^{n+2}}{3 \cdot 6^n + 2 \cdot 5^n}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Δ – Համարիչն ու հայտարարը 6^n -ի կարգի անվերջ մեծեր են: (6^n անվերջ մեծը ավելի բարձր կարգի անվերջ մեծ է, քան 5^n անվերջ մեծը՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{5} \right)^n = +\infty$$

Բաժանելով համարիչն ու հայտարարը 6^n -ի վրա և անցնելով սահմանի,

$$\text{երբ } n \rightarrow \infty, \text{ կստանանք } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot (5/6)^n + 36}{3 + 2 \cdot (5/6)^n} = \frac{36}{3} = 12: \quad \nabla$$

$$\text{դ) } x_n = \frac{3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1)}{n + 3} - \frac{6n + 5}{3}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Δ – Նկատի ունենալով, որ առաջին գումարելիի համարիչը թվաբանական պրոգրեսիա է $a_1 = 3$ և $d = 4$ տարբերությամբ (համարիչում գրված է այն առաջին n բնական թվերի գումարը, որոնք 4-ի վրա բաժանելիս տալիս են երեք մնացորդ) ձևափոխենք x_n -ը:

$$x_n = \frac{n(3+4n-1)/2}{n+3} - \frac{6n+5}{3} = \frac{n(2n+1)}{n+3} - \frac{6n+5}{3} =$$

$$= \frac{6n^2 + 3n - 6n^2 - 18n - 5n - 15}{3(n+3)} = \frac{-20n-15}{3(n+3)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-20n-15}{3(n+3)} = -\frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n+15}{3(n+3)} = -\frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20+15/n}{1+3/n} = -\frac{20}{3}$$

$$\text{ե) } x_n = \frac{4 \sin 5n + 5 \cos 6n}{\sqrt{n+2}} + \frac{4n^2 - 5n + 1}{3n - 2n^2}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Δ – Քանի որ $4 \sin 5n + 5 \cos 6n$, $n = 1; 2; \dots$ հաջորդականությունը սահմանափակ հաջորդականություն է

$$|4 \sin 5n + 5 \cos 6n| \leq 4|\sin 5n| + 5|\cos 6n| \leq 9, \quad n = 1; 2; \dots,$$

իսկ $\sqrt{n+2}$, $n = 1; 2; \dots$ հաջորդականությունը անվերջ մեծ, ապա առաջին գումարելիին անվերջ փոքր հաջորդականությունը է (որպես, անվերջ փոքր և սահմանափակ հաջորդականությունների արտադրյալ): Ինչ մնում է երկրորդ գումարելիին, ապա նրա սահմանը հեշտությամբ հաշվվում է՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 5n + 1}{3n - 2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{5}{n} - 2} = -2$$

Վերջնականապես կունենանք՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 \sin 5n + 5 \cos 6n}{\sqrt{n+2}} + \frac{4n^2 - 5n + 1}{3n - 2n^2} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \sin 5n + 5 \cos 6n}{\sqrt{n+2}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 5n + 1}{3n - 2n^2} = 0 - 2 = -2 \quad \nabla$$

զ) $\{a_n\}$ հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է, որի բոլոր անդամները դրական են և տարբերությունը հավասար չէ 0-ի:
Գտնել՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \right)$$

Δ – Ունենք $a_n - a_{n-1} = d$, $n = 2; 3; \dots$ և $a_{n+1} = a_1 + nd$, $n = 1; 2; \dots$

Օգտվելով $\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{1}{d}(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k})$, $k = 1; 2; \dots$ նույնությունից՝

ծևափոխենք տրված հաջորդականությունը՝

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \right) = \\ &= \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \left[(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}) + \dots + (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) \right] = \\ &= \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}) = \frac{1}{d} \left(\sqrt{d + \frac{a_1}{n}} - \sqrt{\frac{a_1}{n}} \right) \end{aligned}$$

Հետևաբար $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{d} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{d + \frac{a_1}{n}} - \sqrt{\frac{a_1}{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{d}}$ ▽

է) Դիցուք $\{a_n\}$ հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է, որի բոլոր անդամները և տարբերությունը հավասար չեն 0-ի: Գտնել՝

$$x_n = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}, \quad n = 1; 2; \dots$$

հաջորդականության սահմանը:

Δ – Չևափոխենք $\{x_n\}$ -ը՝ օգտվելով $\frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$, $k = 1; 2; \dots$

նույնությունից:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{d} \left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \right] = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + nd} \right) = \\ &= \frac{1}{a_1 \cdot d} - \frac{1}{(a_1 + nd)d}, \quad n = 1; 2; \dots \end{aligned}$$

Հետևաբար $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1 \cdot d} - \frac{1}{(a_1 + nd)d} \right) = \frac{1}{a_1 \cdot d}$ ▽

ը) Ապացուցել, որ եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 0$

Δ – Վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ: Քանի որ x_n -ը ձգտում է 0-ի, կգտնվի այն-

պիսի $n_1(\varepsilon)$ բնական թիվ այնպիսին, որ $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $n \geq N_1$

$$\text{Նշանակենք՝ } y_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad n = 1; 2; \dots$$

$$|y_n| = \frac{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|}{n} = \frac{|x_1 + x_2 + \dots + x_{N_1} + x_{N_1+1} + \dots + x_n|}{n} \leq \frac{|x_1 + x_2 + \dots + x_{N_1}|}{n} + \frac{|x_{N_1+1}| + |x_{N_1+2}| + \dots + |x_n|}{n} < \frac{|x_1 + x_2 + \dots + x_{N_1}|}{n} + \frac{\varepsilon \cdot (n - N_1)}{2n}, \quad n \geq N_1 \quad (1)$$

Քանի որ N_1 -ը ֆիքսատ է, ապա N_2 -ը ընտրենք այնքան մեծ, որ բոլոր $n \geq N_2$ թվերի համար տեղի ունենա՝

$$\frac{|x_1 + x_2 + \dots + x_{N_1}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N_2 \quad (2)$$

Նշանակենք $N_0 = \max\{N_1; N_2\}$ և պահանջենք $n \geq N_0$ -ից: Այդպիսի n -երի համար տեղի կունենա (1)-ը և (2)-ը միաժամանակ: Հետևաբար՝

$$|y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{n - n_1}{n} \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad n \geq N_0$$

Նշանակում է $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$:

▽

11. ՎԵՐԻՆ ԵՎ ՍՏՈՐԻՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ

Ցանկացած $\{x_n\}$ հաջորդականություն ունի զոնե մեկ մասնակի սահման (վերջավոր, $+\infty$ կամ $-\infty$):

Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա պարզվում է, որ նրա մասնակի սահմաններից կազմված թվային բազմությունը և սահմանափակ է, ընդ որում այն ունի ամենափոքր և ամենամեծ տարրերը, որոնք համապատասխանաբար նշանակում են $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ և $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ սիմվոլներով ու կոչվում

են $\{x_n\}$ հաջորդականության ստորին և սահմաններ:

Եթե հաջորդականությունը վերևից (ներքևից) սահմանափակ չէ, ապա նրա համար $+\infty$ կամ $(-\infty)$ սիմվոլը մասնակի սահման է և այդ դեպքում պայմանավորվում են ընդունել $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$):

Որպեսզի $\{x_n\}$ սահմանափակ հաջորդականությունը ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$:

Գտնել $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ -ը և $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ -ը

$$\text{ա) } x_n = \frac{5n-3}{7n+4} \cdot \sin \frac{\pi}{2} n, \quad n=1; 2; \dots$$

Δ – Նախ գտնենք $\{x_n\}$ հաջորդականության բոլոր մասնակի սահմանները: Նկատենք, որ $\left\{ \frac{5n-3}{7n+4} \right\}$ հաջորդականությունը զուգամետ է և նրա սահմանը $5/7$ -ն է:

Հետևաբար նրա ցանկացած ենթահաջորդականություն ևս զուգամետ է և զուգամիտում է $5/7$ -ին: $y_n = \sin \frac{\pi}{2} n$, $n=1; 2; \dots$ հաջորդականությունը սահմանափակ և տարամետ հաջորդականություն է, ընդ որում $\{y_n\}$ հաջորդականության անդամները 4 թվին հավասար պարբերությամբ կրկնվում են: Դա հիմք է տալիս դիտարկելու $\{y_n\}$ հաջորդականության $\{y_{4k}\}$, $\{y_{4k+1}\}$, $\{y_{4k+2}\}$ և $\{y_{4k+3}\}$ ենթահաջորդականությունները:

$$y_{4k} = \sin \frac{\pi}{2} \cdot 4k = \sin 2\pi k = 0, \quad k=1; 2; \dots \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_{4k} = 0$$

$$y_{4k+1} = \sin \frac{\pi}{2} (4k+1) = \sin \left(2\pi k + \frac{\pi}{2} \right) = 1, \quad k=1; 2; \dots \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_{4k+1} = 1$$

$$y_{4k+2} = \sin \frac{\pi}{2} (4k+2) = \sin (2\pi k + \pi) = 0, \quad k=1; 2; \dots \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_{4k+2} = 0$$

$$y_{4k+3} = \sin \frac{\pi}{2} (4k+3) = \sin \left(2\pi k + \frac{3}{2}\pi \right) = -1, \quad k=1; 2; \dots \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_{4k+3} = -1$$

Հետևաբար -1 -ը, 0 -ն և 1 -ը կհանդիսանան $\{y_n\}$ հաջորդականության մասնակի սահմանները:

Այլ մասնակի սահմաններ չունի, որովհետև $\{y_n\}$ հաջորդականության ցանկացած այլ ենթահաջորդականություն կլինի կամ դիտարկված ենթահաջորդականությունների ենթահաջորդականություն (ինչ որ տեղից սկսած), կամ կպարունակի դիտարկված ենթահաջորդականություններից առնվազն երկուսից անվերջ թվով անդամներ: Երկրորդ տիպի ենթահաջորդականությունները կլինեն տարամետ:

Յետևաբար.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k} = \frac{5}{7} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} y_{4k} = 0 \qquad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k+1} = \frac{5}{7} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} y_{4k+1} = +\frac{5}{7}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k+2} = \frac{5}{7} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} y_{4k+2} = 0 \qquad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k+3} = \frac{5}{7} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} y_{4k+3} = -\frac{5}{7}$$

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը այլ մասնակի սահման չունի: Յետևաբար.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{5}{7}, \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{5}{7}: \qquad \nabla$$

բ) $x_n = -2 + (-1)^{n+1} \cdot 3 - (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot 4, \quad n = 1; 2; \dots$

Δ - Քանի որ $(n+1)$ -ը զույգ n -երի համար կենտ է, կենտ n -երի համար՝ զույգ, իսկ $n(n+1)/2$ -ը զույգ է (կենտ է) ինչպես կենտ, այնպես էլ զույգ n -երի համար, ապա այն հիմք է տալիս դիտարկելու $\{x_n\}$ հաջորդականության՝

$x_{4k-3}, x_{4k-2}, x_{4k-1}, x_{4k}$ ենթահաջորդականությունները.

$$x_{4k-3} = -2 + (-1)^{4k-2} \cdot 3 - (-1)^{\frac{(4k-3)(4k-2)}{2}} \cdot 4 = 5, \qquad k = 1; 2; \dots$$

$$x_{4k-2} = -2 + (-1)^{4k-1} \cdot 3 - (-1)^{\frac{(4k-2)(4k-1)}{2}} \cdot 4 = -1, \qquad k = 1; 2; \dots$$

$$x_{4k-1} = -2 + (-1)^{4k} \cdot 3 - (-1)^{\frac{4k(4k-1)}{2}} \cdot 4 = -3, \qquad k = 1; 2; \dots$$

$$x_{4k} = -2 + (-1)^{4k+1} \cdot 3 - (-1)^{\frac{4k(4k+1)}{2}} \cdot 4 = -9, \qquad k = 1; 2; \dots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k-3} = 5, \qquad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k-2} = -1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k-1} = -3, \qquad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k} = -9$$

Յետևաբար՝ $\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -9, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 5:$ ∇

Գտնել $\inf\{x_n\}$ -ը և $\sup\{x_n\}$ -ը.

Ընդհանուր դեպքում այսպիսի խնդիրները դժվար լուծելի են: Սակայն որոշ դեպքերում հեշտությամբ կարող ենք գտնել հաջորդականության ստորին և վերին ճշգրիտ եզրերը: Օրինակ, եթե նախապես հայտնի է, որ հաջորդականությունը մոնոտոն է, կամ ի վերջո մոնոտոն է, ապա այդպիսի հաջորդականության համար $\inf$ -ը և $\sup$ -ը գտնելը իրենից ոչ մի դժվարություն չի ներկայացնում: Ասվածը հիմնավորենք օրինակներով.

ա) $x_n = \frac{2n-7}{3n-8}, \quad n = 1; 2; \dots$

Նախ պարզենք հաջորդականության մոնոտոնության բնույթը.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{2n-5}{3n-5} - \frac{2n-7}{3n-8} = \frac{6n^2 - 16n - 15n + 40 - 6n^2 + 10n + 21n - 35}{(3n-5)(3n-8)} = \\ &= \frac{5}{(3n-5)(3n-8)} > 0, \quad n \geq 3 \end{aligned}$$

Հետևաբար $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ի վերջո աճող է սկսած երրորդ անդամից: Իսկ աճող հաջորդականության համար առաջին անդամը կլինի ամենափոքրը և հետևաբար $\inf$ -ը, իսկ $\sup$ -ը այդ հաջորդականության սահմանն է: Այնպես որ.

$$\inf_{n \geq 3} \{x_n\} = x_3 = \frac{2 \cdot 3 - 7}{3 \cdot 3 - 8} = -1, \quad \sup_{n \geq 3} \{x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-7}{3n-8} = \frac{2}{3}$$

Հաշվենք x_1 -ը և x_2 -ը և այդ թվերը բաղդատենք -1 և $2/3$ թվերի հետ.

$$x_1 = \frac{2 \cdot 3 - 7}{3 \cdot 3 - 8} = 1, \quad x_2 = \frac{2n-7}{3n-8} = \frac{3}{2}$$

Հետևաբար $\inf \{x_n\} = -1$ -ը և $\sup \{x_n\} = 3/2$

բ) $x_n = \frac{4^n}{(n+2)!}, \quad n = 1; 2; \dots$

Δ – Պարզենք $\{x_n\}$ հաջորդականության մոնոտոնյան բնույթը

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{4^{n+1} \cdot (n+2)!}{4^n \cdot (n+3)!} = \frac{4}{n+3} < 1, \quad \text{երբ } n \geq 2$$

Հետևաբար $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ի վերջո նվազող է երկրորդ անդամից սկսած: Նշանակում է

$$\inf_{n \geq 2} \{x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \sup_{n \geq 2} \{x_n\} = \max_{n \geq 2} \{x_n\} = x_2 = 2/3$$

Քանի որ $\{x_n\}$ -ը ի վերջո նվազող է և ներքևից սահմանափակ՝ $x_n > 0$, $n = 2; 3; \dots$ ապա այն ունի վերջավոր սահման:

Նշանակենք $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ և փորձենք այն գտնել:

Օգտվենք $x_{n+1} = \frac{4}{n+3} \cdot x_n, \quad n = 2; 3; \dots$ բանաձևից:

Անցնելով այդ բանաձևում սահմանի, երբ $n \rightarrow \infty$ կստանանք՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n+3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{կամ որ միևնույնն է } a = 0 \cdot a = 0$$

Հաշվենք x_1 -ը և այն բաղդատենք 0 և $2/3$ թվերի $x_1 = \frac{4}{3!} = \frac{2}{3}$ հետևաբար $\inf\{x_n\} = 0$ -ը և $\sup\{x_n\} = 2/3$: ∇

12. ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ, ԿՈՇԻԻ ՉՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՍԿՋԲՈՒՆԸ

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է ֆունդամենտալ, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ այնպիսին, որ ցանկացած $n \geq n_0(\varepsilon)$ և ցանկացած $m \geq n_0(\varepsilon)$ բնական թվերի համար տեղի ունի $|x_n - x_m| < \varepsilon$ անհավասարությունը կամ որ նույնն է $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon), \forall n \geq n_0(\varepsilon)$, և $\forall p \in \mathbb{N}$ բնական թվերի համար տեղի ունի $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ անհավասարություն:

Որպեսզի $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ֆունդամենտալ:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Օգտվելով Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից՝ ապացուցել $\{x_n\}$ հաջորդականության զուգամիտությունը.

$$\text{ա) } x_n = \frac{\sin 1!}{4 \cdot 9} + \frac{\sin 2!}{9 \cdot 14} + \dots + \frac{\sin n!}{(5n-1)(5n+4)}, \quad n=1; 2; \dots$$

Δ - Վերցնենք $\forall \varepsilon > 0$ դրական թիվ և գնահատենք $|x_{n+p} - x_n|$ արտահայտությունը.

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)!}{(5n+4)(5n+9)} + \frac{\sin(n+2)!}{(5n+9)(5n+14)} + \dots + \frac{\sin(n+p)!}{(5(n+p)-1)(5(n+p)+4)} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(5n+4)(5n+9)} + \frac{1}{(5n+9)(5n+14)} + \dots + \frac{1}{(5(n+p)-1)(5(n+p)+4)} = \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{1}{5n+4} - \frac{1}{5n+9} + \frac{1}{5n+9} - \frac{1}{5n+14} + \dots + \frac{1}{5n+5p-1} - \frac{1}{5n+5p+4} \right] = \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{1}{5n+4} - \frac{1}{5n+5p+4} \right] < \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5n+4}, \quad \forall n \text{ և } \forall p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Լուծենք $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5n+4} < \varepsilon$ անհավասարությունը. $n > \frac{1}{25\varepsilon} - \frac{4}{5}$: Որպես

$n_0(\varepsilon)$ վերցնենք $n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{25\varepsilon} - \frac{4}{5} \right\rceil + 2$ թիվը:

Այդ դեպքում ցանկացած $n \geq n_0$ և $\forall p \in N$ բնական թվերի համար տեղի կունենա $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ անհավասարությունը: $\{x_n\}$ -ը ֆունդամենտալ հաջորդականություն է: Հետևաբար ըստ Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի այն կլինի զուգամետ: ∇

բ) $x_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}, \quad n = 1; 2; \dots$

Δ - Գնահատենք $|x_{n+p} - x_n|$ արտահայտությունը, օգտվելով $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}},$

$n \geq 3$ անհավասարություններից:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{n+1}{(n+2)!} + \frac{n+2}{(n+3)!} + \dots + \frac{n+p}{(n+p+1)!} \right| < \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+p)!} < \\ < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p-1}} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1-1/2^p}{1-1/2} = \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) < \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 2; 3; \dots \\ p &= 1; 2; \dots \end{aligned}$$

Վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ ($0 < \varepsilon < 1$) և որպես $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ վերցնենք.

$n_0(\varepsilon) = \left\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rceil + 3$ թիվը:

$\forall n \geq n_0$ և $\forall p \in N$ տեղի ունի $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ անհավասարությունը: $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է և հետևաբար զուգամետ: ∇

գ) $x_n = \frac{\sin 1!}{1^2} + \frac{\sin 2!}{2^2} + \dots + \frac{\sin n!}{n^2}, \quad n = 1; 2; \dots$

Δ - Գնահատենք $|x_{n+p} - x_n|$ -ը, օգտվելով $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}, \quad k = 2; 3; \dots$ և

$|\sin k!| \leq 1, \quad k = 1; 2; \dots$ անհավասարություններից:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)!}{(n+1)^2} + \frac{\sin(n+2)!}{(n+2)^2} + \dots + \frac{\sin(n+p)!}{(n+p)^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \\ &+ \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \\ &+ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \quad n = 2; 3; \dots \\ p &= 1; 2; \dots \end{aligned}$$

Վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ և որպես $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ վերցնենք.

$$n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \text{ թիվը:}$$

Այդ դեպքում ցանկացած $n \geq n_0$ և ցանկացած p բնական թվի համար տեղի ունի $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ անհավասարությունը: $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է և հետևաբար զուգամետ:

Կասենք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ունի վերջավոր փոփոխություն, եթե գոյություն ունի $c > 0$ թիվ այսպիսին, որ

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_n - x_{n-1}| = \sum_{k=1}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| < c, \quad n = 2; 3; \dots$$

դ) Ապացուցել, որ ցանկացած վերջավոր փոփոխություն ունեցող հաջորդականություն զուգամետ է:

Կառուցել հաջորդականություն, որը լինի զուգամետ, սակայն չունենա վերջավոր փոփոխություն.

Δ – Եթադրենք $\{x_n\}$ -ն ունի վերջավոր փոփոխություն: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի $c > 0$ թիվ այսպիսին, որ

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_n - x_{n-1}| < c, \quad n = 2; 3; \dots$$

Նշանակենք $y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_{n+1} - x_n|$, $n = 1; 2; \dots$ հաջորդականությունը:

$\{y_n\}$ -ը կլինի չնվազող և ըստ պայմանի, վերևից սահմանափակ: Հետևաբար այն կլինի զուգամետ, որտեղից էլ կհետևի, որ $\{y_n\}$ -ը ֆունդամենտալ է:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon), \forall n \geq n_0(\varepsilon), \text{ և } \forall p \in \mathbb{N}$$

$$|y_{n+p} - y_n| = |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p+1} - x_{n+p}| < \varepsilon$$

Δ – Գնահատենք $|x_{n+p} - x_n|$ արտահայտությունը $\forall n \geq n_0$, և $\forall p \in \mathbb{N}$ բնական թվերի համար.

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |(x_{n+1} - x_n) + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+3} - x_{n+2}) + \dots + (x_{n+p} - x_{n+p-1})| \leq \\ &\leq |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+3} - x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| = |y_{n+p} - y_n| < \varepsilon \end{aligned}$$

Հետևաբար $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է և ըստ Կոշիի սկզբունքի կլինի զուգամետ:

Δ – Նախ ապացուցենք, որ ցանկացած n բնական թվի համար տեղի ունի $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ անհավասարությունը:

Իրոք, քանի որ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ և $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ հաջորդականությունները համապատասխանաբար աճելով և նվազելով ձգտում են e թվին, ապա

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad n = 1; 2; \dots$$

Լոգարիթմելով այս անհավասարությունը, կստանանք՝

$$n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < (n+1) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

որտեղից էլ կհետևի

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

անհավասարությունը:

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը չի ունենա վերջավոր փոփոխություն, եթե ցանկացած $c > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_1(c)$ բնական թիվ այնպիսին, որ տեղի ունի

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_{n_1} - x_{n_1-1}| > c, \text{ անհավասարությունը:}$$

Դիտարկենք հետևյալ հաջորդականությունը.

$$x_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2n}, \quad n = 1; 2; \dots \quad 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots, 0, \frac{1}{2n}, \dots$$

Ակնհայտ է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$: Սակայն

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_3| + \dots + |x_{2n+1} - x_{2n}| &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \\ &+ \dots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) \end{aligned}$$

Վերցնենք որևէ $c > 0$ թիվ և լուծենք $\ln(n+1) > c$ անհավասարությունը:

Որպես n_1 թիվ կարող ենք վերցնել $n > e^c - 1$ թվից մեծ ցանկացած բնական թիվ: Հետևաբար $\{x_n\}$ հաջորդականությունը չունի վերջավոր փոփոխություն: ∇

Օգտվելով Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից՝ ապացուցել x_n հաջորդականության տարամիտությունը:

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը ըստ Կոշիի սկզբունքի կլինի տարամետ, եթե գոյություն ունի զոնե մեկ $\varepsilon_0 > 0$ թիվ այնպիսին, որ ցանկացած k բնական թվի համար կգտնվեն $n_0 \geq k$ և p_0 բնական թվեր այնպիսին, որ

$$|x_{n_0+p_0} - x_{n_0}| \geq \varepsilon_0$$

$$\omega) x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Δ – Կամայական n և կամայական p բնական թվերի համար գնահատենք $|x_{n+p} - x_n|$ արտահայտությունը ներքևից

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2p-1} > \frac{p}{2n+2p-1}$$

մասնավորապես վերը գրած անհավասարությունում վերցնելով $p = n$ -ի,

$$\text{կստանանք } |x_{2n} - x_n| > \frac{n}{4n-1} > \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}, \quad \forall n \in N$$

Հետևաբար, որպես $\varepsilon_0 > 0$ թիվ կարելի է վերցնել $\varepsilon_0 = 1/4$ (կամ $1/4$ -ից փոքր ցանկացած դրական թիվ): Ինչպիսի էլ լինի k բնական թիվը, որպես n_0 կարելի է վերցնել k -ին գերազանցող ցանկացած բնական թիվ, իսկ որպես p_0 վերցնել $p_0 = n_0$ Այդ դեպքում

$$|x_{2n_0} - x_{n_0}| > \frac{1}{4} :$$

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը տարամետ է:

▽

$$\rho) x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n}, \quad n = 1; 3; \dots$$

Եւոյն ձևով, ինչպես վերը բերված խնդրում

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} > \frac{p}{\ln(n+p)} > \frac{p}{n+p}, \quad n, p \in N$$

մասնավորապես, եթե $p = n$, ապա $|x_{2n} - x_n| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը տարամետ է:

▽

$$q) x_n = \frac{n \cos n\pi - 1}{2n} = \frac{1}{2} \cos n\pi - \frac{1}{2n}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Ցանկացած n բնական թվի համար գնահատենք $|x_{n+1} - x_n|$ -ը

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \left| \frac{1}{2} (\cos(n+1)\pi - \cos n\pi) - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} \right| \geq \\ &\geq \frac{1}{2} |\cos(n+1)\pi - \cos n\pi| - \frac{1}{2n(n+1)} > \frac{1}{2}, \quad \forall n \in N \end{aligned}$$

քանի որ $|\cos(n+1)\pi - \cos n\pi| = 2$ ցանկացած n բնական թվի համար:

Որպես $\varepsilon_0 > 0$ վերցնենք $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$: Ցանկացած k բնական թվի համար որպես $n \geq k$ թիվ կարող ենք վերցնել k -ին գերազանցող ցանկացած n բնական թիվ, իսկ $p_0 = 1$: Այդ դեպքում $|x_{n_0+1} - x_{n_0}| > \frac{1}{2}$:

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը տարամետ է:

▽

13. ԹՎԱՅԻՆ ՀԱՐՔ: ԹՎԱՅԻՆ ՀԱՐՔԻ ՉՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆ, ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Տրված է $\{a_n\}$, $n = 1; 2; \dots$ հաջորդականությունը

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

սիմվոլը կոչվում է թվային շարք: Առանձին գումարելիները՝ a_n -երը կոչվում են (1) շարքի անդամներ: Շարքի առաջին n անդամների գումարը կանվանենք շարքի n -րդ մասնակի գումար և կնշանակենք S_n -ով

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Մասնակի գումարների $\{S_n\}$ հաջորդականության S սահմանը (վերջավոր, $+\infty$ կամ $-\infty$) կանվանենք (1) շարքի գումար և կգրենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Եթե շարքի գումարը վերջավոր է, ապա շարքը կոչվում է գումարաւոր:

Եթե շարքի գումարը անվերջ է, կամ գոյություն չունի, ապա շարքը կոչվում է տարամետ:

Եթե (1) շարքը զուգամետ է, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Այս պայմանը բավարար չէ: Շարքի համար կարող է $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, սակայն շարքը լինի տարամետ:

Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը զուգամետ են, ապա ցանկացած α և β

թվերի համար զուգամետ է $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ շարքը, ընդ որում՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

մասնավորապես, եթե $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ ապա վերևի հավասարությունից կհետևի

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Եթե (1) շարքից հեռացնենք առաջին m անդամները, ապա ստացված՝

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

շարքը կոչվում է (1) շարքի m -րդ մնացորդային շարք:

Եթե (1) շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ է այդ շարքի ցանկացած մնացորդային շարք:

Եթե զուգամետ է (1) շարքի որևէ m -րդ մնացորդային շարք, ապա զուգամետ է (1) շարքը:

Դիցուք տրված է (1) շարքը և բնական թվերի որևէ $\{n_k\}$ աճող հաջորդականություն:

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j$$

շարքը, որտեղ $b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$, $b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$,

$b_j = a_{n_{j-1}+1} + a_{n_{j-1}+2} + \dots + a_{n_j}$, $j = 1; 2; \dots$ կոչվում է (1) շարքի խմբավորված շարք:

Եթե (1) շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ է այդ շարքի ցանկացած խմբավորված շարք, ընդ որում խմբավորված շարքի գումարը հավասար է շարքի գումարին: Եթե շարքի որևէ խմբավորված շարք զուգամետ է, ապա այդտեղից դեռ չի հետևում շարքի զուգամիտությունը:

Եթե $a_n \geq 0$, ($n = 1; 2; \dots$) ապա շարքը կոչվում է դրական:

Դրական շարքերի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար նրա մասնակի գումարների հաջորդականության սահմանափակությունը:

14. ԴՐԱԿԱՆ ՇԱՐՔԵՐԻ ԲԱՂԴԱՏՄԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) շարքերը դրական են:

ա) Եթե $a_n \leq b_n$, ($n \geq n_0$), n_0 -ն որևէ բնական թիվ է, ապա

(2) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (1) շարքի զուգամիտությունը, կամ որ նույնն է (1) շարքի տարամիտությունից հետևում է (2) շարքի տարամիտությունը:

բ) Եթե $a_n > 0$, $b_n > 0$, $0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ($n \geq n_0$), ապա (2) շարքի զուգամի-

տությունից հետևում է (1) շարքի զուգամիտությունը, կամ որ նույնն է (1) շարքի տարամիտությունից հետևում է (2) շարքի տարամիտությունը:

գ) Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, $0 < c < \infty$,

ապա (1) և (2) շարքերը միաժամանակ զուգամետ են կամ միաժամանակ տարամետ:

դ) Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = c$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

շարքը զուգամետ է, եթե $p > 1$ և $0 \leq c < +\infty$, տարամետ է, եթե $p \leq 1$ և $0 < c \leq +\infty$:

ե) ԴՄԱՄԲԵՐԻ ԽԱՅՏԱՆԻՇՆ

Եթե $a_n > 0$, $n = 1; 2; \dots$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է,

եթե $L < 1$, տարամետ է, եթե $L > 1$

զ) ԿՈՇԻԻ ԽԱՅՏԱՆԻՇՆ

Եթե $a_n \geq 0$, $n = 1; 2; \dots$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է,

եթե $L < 1$, տարամետ է, եթե $L > 1$:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Հաշվել շարքի գումարը

$$\text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-1)(5n+4)}$$

Δ – նշանակենք շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը՝

$$S_n\text{-ով, } n=1; 2; \dots \text{ և օգտվելով } \frac{1}{(5k-1)(5k+4)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5k-1} - \frac{1}{5k+4} \right),$$

$k=1; 2; \dots$ նույնությունից հաշվենք S_n -ը յուրաքանչյուրի $n \in N$ համար:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(5k-1)(5k+4)} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{5k-1} - \frac{1}{5k+4} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5n+4} \right), \quad n=1; 2; \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5n+4} \right) = \frac{1}{20};$$

$$S = \frac{1}{20}$$

▽

$$\text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 + 24n - 5}$$

$$\Delta - \text{նկատենք, որ } 36n^2 + 24n - 5 = 36 \left(n - \frac{1}{6} \right) \left(n + \frac{5}{6} \right) = (6n-1)(6n+5),$$

$$n=1; 2; \dots: \text{ Հետևաբար } a_n = \frac{1}{36n^2 + 24n - 5} = \frac{1}{(6n-1)(6n+5)}, \quad n=1; 2; \dots:$$

$$\text{Այնպես որ } S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(6k-1)(6k+5)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6n+5} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6n+5} \right) = \frac{1}{30}; \quad S = \frac{1}{30}$$

▽

$$\text{գ) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}} \right)$$

$$\Delta - \text{դիտարկենք } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ և } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}}$$

շարքերը: Նշանակենք համապատասխանաբար A_n -ով և B_n -ով այդ շարքերի n -րդ մասնակի գումարները.

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k, \quad n=1;2;\dots$$

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{5^{k-1}} = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1} \quad n=1;2;\dots$$

Եվ A_n -ը և B_n -ը հանդիսանում են համապատասխանաբար $q_1 = \frac{1}{3}$ և $q_2 = -\frac{1}{5}$ հայտարարներ ունեցող նվազող երկրաչափական պրոգրեսիաների առաջին n անդամների գումար:

$$A_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right), \quad n=1;2;\dots$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{5}{6} \left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right), \quad n=1;2;\dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{6} \left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right) = \frac{5}{6}$$

Քանի որ տրված շարքը իրենից ներկայացնում է դիտարկված զուգամետ շարքերի տարբերություն շարք, ապա այն ևս զուգամետ է և նրա S գումարը հավասար է.

$$S = \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{3}: \quad \nabla$$

դ) Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ շարքը տարամետ է:

$$\Delta - \text{Նշանակենք } a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad n=1;2;\dots$$

Քանի որ $\{a_n\}$ հաջորդականությունը նվազող է, ապա

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}, \quad n=1;2;\dots$$

Որտեղից հետևում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ շարքը տարամետ է:

Նկատենք, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$:

Այնպես, որ շարքի ընդհանուր անդամի 0-ի ձգտելուց չի հետևում շարքի զուգամիտությունը: ∇

ե) Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \sin na$, $a \neq \pi m$, $m \in Z$ շարքը տարամետ է:

Δ – Ցույց տանք, որ խախտվում է շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը, այն է ցույց տանք, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin na \neq 0$:

Ենթադրենք հակառակը $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin na = 0$:

Այդ դեպքում $\sin(n+1)a$ ևս կձգտի 0-ի երբ $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n+1)a = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin na \cdot \cos a + \cos na \cdot \sin a) = 0$$

Քանի որ $\sin a \neq 0$, ապա $\cos na = \frac{\sin(n+1)a - \sin na \cdot \cos a}{\sin a}$, $n = 1; 2; \dots$,

որտեղից էլ կհետևի, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos na = 0$:

Եկանք հակասության, որովհետև ցանկացած n բնական թվի համար

$$\sin^2 na + \cos^2 na = 1, \quad n = 1; 2; \dots$$

Անցնելով սահմանի, կունենանք $0 + 0 = 1$:

Հետևաբար $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin na \neq 0$: Խախտվում է շարքի զուգամիտության ան-

հրաժեշտ պայմանը: Շարքը տարամետ է: Նկատենք, որ $a = 1$ դեպքում կունենանք $a_n = \sin n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n \neq 0$: ∇

զ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

Δ – Շարքը տարամետ է: Իրոք $a_n = (-1)^{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \neq 0$: Խախտվում է շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը:

Դիտարկենք այս շարքի բնական $n_k = 2k$, $k = 1; 2; \dots$ թվերին համապատասխանող $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ խմբավորված շարքը.

$$b_1 = a_1 + a_2 = 1 - 1 = 0, \quad b_2 = a_3 + a_4 = 1 - 1 = 0, \quad b_j = a_{2j-1} + a_{2j} = 1 - 1 = 0$$

Այնպես որ $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{j=1}^{\infty} 0 = 0$:

Տրված շարքի $n_k = 2k$, $k = 1; 2; \dots$ խմբավորված շարքը զուգամետ է, սակայն ինքը՝ շարքը տարամետ է: ∇

ա) Ապացուցել, որ եթե $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$, ($n \in N$) ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և

$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ շարքերը կզուգամիտեն կամ կտարամիտեն միաժամանակ.

Δ – Նախ ապացուցենք հետևյալ պնդումը.

Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը դրական է ($a_n \geq 0$), $n = 1; 2; \dots$, ապա այդ շարքի զուգամիտությունը կամ տարամիտությունը համարժեք է իր որևէ խմբավորված շարքի զուգամիտությանը, կամ տարամիտությանը:

Իրոք, ենթադրենք $\{n_k\}$, $k = 1; 2; \dots$ բնական թվերի որևէ խիստ աճող հաջորդականություն է:

Դիտարկենք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ խմբավորված շարքը, որտեղ

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \dots + a_{n_k}, \quad (n_0 = 0, \quad k = 1; 2; \dots)$$

Եթե այս շարքի m -րդ մասնակի գումարը նշանակենք B_m -ով, ապա

$$B_m = \sum_{k=1}^m b_k = \sum_{k=1}^{n_m} a_k = S_{n_m}, \quad m = 1; 2; \dots$$

որտեղ՝ $\{S_n\}$ -ը $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունն է:

Ստացվեց, որ խմբավորված շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը հանդիսանում է սկզբնական շարքի մասնակի գումարների հաջորդականության ենթահաջորդականություն: Քանի որ $\{S_n\}$ հաջորդականությունը չնվազող է, ապա նրա զուգամիտությունը կամ տարամիտությունը համարժեք է իր որևէ ենթահաջորդականության զուգամիտության կամ տարամիտության, մասնավորապես՝ $\{S_{n_m}\}$ ենթահաջորդականության: Պնդումը ապացուցվեց: Այժմ անցնենք խնդրի լուծմանը:

Դիտարկենք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ խմբավորված շարքը, որտեղ

$$b_k = (a_{2^k} + a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \dots + a_{2^{k+1}-1}), \quad k = 1; 2; \dots$$

Քանի որ $\{a_n\}$ -ը նվազող է, ապա գնահատելով b_k -ն ($k = 0; 1; 2; \dots$) ներքևից և վերևից, կստանանք

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{k+1} \cdot a_{2^{k+1}} \leq b_k \leq 2^k \cdot a_{2^k}, \quad k = 0; 1; 2; \dots \quad (1)$$

(քանի որ b_k -ի գումարելիների քանակը $2^{k+1} - 2^k = 2^k$ է):

Այս անհավասարություններից հետևում է անդաման ճշմարտացիությունը:

Իրոք ենթադրենք $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ շարքը զուգամետ է: Այդ դեպքում ըստ (1)-ի աջ

մասի անհավասարության և ըստ բաղդատման առաջին հայտանիշի կհետևի

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ խմբավորված շարքի զուգամիտությունը և հետևաբար $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի

զուգամիտությանը: Եթե $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ շարքը տարամետ է, ապա տարամետ է

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot 2^{k+1} \cdot a_{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} \cdot a_{2^{k+1}}$$

շարքը, որը հաստատուն դրական գործակցով և մեկ անդամով է տարբերվում տված շարքից:

Ըստ (1)-ի ձախ մասի անհավասարության և բաղդատման առաջին հայտանիշի տարամետ կլինի $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ խմբավորված շարքը և հետևաբար ըստ նա-

խորդ խնդրի տարամետ կլինի $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը: ▽

բ) Հետազոտել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ շարքի զուգամիտությունը կախված p պարամետրից:

Δ – Եթե $p \leq 0$, ապա շարքը ակնհայտորեն տարամետ է՝ $a_n = \frac{1}{n^p}$ (որտեղ $p \leq 0$ 0-ի չի ձգտում): Խախտվում է շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը:

Դիտարկենք $p > 0$ դեպքը: Քանի որ $a_n = \frac{1}{n^p}$, հաջորդականությունը նվազող է, ապա կարող ենք օգտվել նախորդ խնդրից:

Դիտարկենք $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ շարքը.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^k$$

Եթե $p-1 > 0$, ապա (1) շարքը զուգամետ է, որպես $q = \frac{1}{2^{p-1}}$ հայտարարով անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումար: Եթե $p-1 \leq 0$ ապա շարքը տարամետ է, որովհետև խախտվել է շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը:

Այսպիսով՝ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ շարքը զուգամետ է, եթե $p > 1$ և տարամետ է, եթե $p \leq 1$: Մասնավորապես, երբ $p = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ շարքը, որն անվանում են հարմոնիկ շարք տարամետ է: ▽

գ) Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \cdot \ln^{\beta} n}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) շարքի զուգամիտությունը կախված α և β պարամետրից:

$$\Delta - \text{Եռանակներ } a_n = \frac{1}{n^{\alpha} \cdot \ln^{\beta} n}, n = 2; 3; \dots$$

Եթե $\alpha > 1$, ապա ցանկացած $\beta > 0$ թվի համար շարքը զուգամետ է ըստ բ) խնդրի և բաղդատման առաջին հայտանիշի

$$\frac{1}{n^{\alpha} \cdot \ln^{\beta} n} < \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad n = 2; 3; \dots$$

Ենթադրենք $0 < \alpha \leq 1$ և $\beta > 0$

Այդ դեպքում a_n -ը նվազող է և հետևաբար կարող ենք կիրառել ա) խնդրի արդյունքը: Դիտարկենք՝

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{k\alpha} \cdot k^{\beta} \ln^{\beta} 2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2^{1-\alpha})^k}{k^{\beta}} \cdot \frac{1}{\ln^{\beta} 2} \quad (1)$$

(1)-ը տարամետ է, եթե $1-\alpha > 0$ և β -ն կամայական դրական թիվ է:

Որովհետև $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2^{1-\alpha})^k}{k^{\beta}} = +\infty$ (ուրեմնք, եթե $\alpha > 1$, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^m} = +\infty$, $m \in \mathbb{N}$), եթե $1-\alpha > 0$ ապա (1) շարքը զուգամետ է, եթե $\beta > 1$ և տարամետ, եթե $\beta \leq 1$: Այսպիսով ըստ ա) խնդրի $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \cdot \ln^{\beta} n}$ շարքը զուգամետ է $\alpha > 1$, $\beta > 0$ կամայական

- տարամետ է $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ կամայական
- զուգամետ է $\alpha = 1$, $\beta > 1$
- տարամետ է $\alpha = 1$, $0 < \beta \leq 1$

▽

դ) Ապացուցել, որ եթե $a_n \geq 0, (n \in N)$ և $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է,

ապա զուգամետ է նաև $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ շարքը: Ճիշտ է արդյոք հակառակ պնդումը.

Δ – Ըստ շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանի $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$: Հետևաբար գոյություն ունի n_0 համար այնպիսին, որ $a_n < 1 (n \geq n_0)$ որտեղից կհետևի $a_n^2 < a_n, n = n_0 + 1; n_0 + 2; \dots$ անհավասարությունը: Ըստ բաղդատման առաջին հայտանիշի՝ զուգամետ կլինի $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ շարքի n_0 -րդ մնացորդային շարքը և հետևաբար, ըստ մնացորդային շարքի զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմի, զուգամետ կլինի $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ շարքը:

Հակառակը ճիշտ չէ:

Վերցնենք $a_n = \frac{1}{n}, n = 1; 2; \dots$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty, (p = 2 > 1)$: Սակայն $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ հարմոնիկ շարքը տարամետ է: ▽

ե) Ապացուցել, որ եթե $a_n \geq 0, (n \in N)$ և $\{n \cdot a_n\}$ հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ շարքը զուգամետ է: ▽

Δ – Գոյություն ունի $M > 0$ թիվ այնպիսին, որ

$$n \cdot a_n \leq M, \quad n = 1; 2; \dots$$

Որտեղից կհետևի $a_n \leq \frac{M}{n}, n = 1; 2; \dots$ և հետևաբար $a_n \leq \frac{M^2}{n^2}, n = 1; 2; \dots$:

Ըստ բաղդատման առաջին հայտանիշի $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ շարքը զուգամետ է: ▽

զ) Ապացուցել, որ եթե $a_n \geq 0, (n \in N)$ և գոյություն ունի $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = a, a \neq 0$ վերջավոր կամ անվերջ սահմանը, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը տարամետ է: ▽

Ենթադրենք a -ն վերջավոր է: Քանի որ $a \neq 0$, ապա $a > 0$: $\varepsilon > 0$ թիվը ընտրենք այնպիսին, որ $a - \varepsilon > 0$.

Δ – Գոյություն ունի $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ այնպիսին, որ $n \cdot a_n > a - \varepsilon$, $n \geq n_0$: Կամ որ նույնն է $a_n > \frac{a - \varepsilon}{n}$, $n \geq n_0$:

Այստեղից, ըստ բաղդատման առաջին հայտանիշի, կհետևի, որ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի n_0 -րդ մնացորդային շարքը տարամետ է ($\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a - \varepsilon}{n}$ շարքը տարամետ է) և հետևաբար տարամետ է $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը:

Եթե $a = +\infty$, ապա օգտվելով անվերջ մեծի սահմանումից, գտնենք n_0 բնական թիվն այնպիսին, որ $n \cdot a_n > 1$, $n \geq n_0$ կամ որ նույնն է $a_n > 1/n$, $n \geq n_0$:

Շարունակությունը նույն ձևով ինչպես վերևի դեպքի համար: ∇

ե) Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ շարքերը զուգամետ են $a_n \geq 0$,

$b_n \geq 0$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ շարքերը զուգամետ են: ∇

Δ – $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ շարքի զուգամիտությունը հետևում է $0 \leq a_n \cdot b_n \leq \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$,

$n = 1; 2; \dots$ անհավասարությունից, զուգամետ թվային շարքերի համապատասխան հատկություններից և բաղդատման առաջին հայտանիշից:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ շարքի զուգամիտությունը հետևում է մախորդից, որպես b_n վերցնելով $b_n = \frac{1}{n}$, $n = 1; 2; \dots$ հաջորդականությունը:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty, \quad (p = 2 > 1)$$

Քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ շարքերը զուգամետ են, ապա ըստ զուգամետ շարքերի համապատասխան հատկության, զուգամետ կլինի նրանց գումար շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \quad \nabla$$

ը) Ապացուցել, որ եթե $a_n > 0$ և $a_{n+1} \leq a_n$, $n = 1; 2; \dots$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի զուգամիտությունից հետևում է $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$: Ճիշտ է արդյոք հակառակ պնդումը: ∇

$$\Delta - \text{Նշանակենք՝ } S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad n = 1; 2; \dots$$

Ունենք $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, որտեղից կհետևի $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$ կամ, որ նույնն է՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = 0$$

$$\text{Քանի որ} \quad \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geq n \cdot a_{2n} > 0$$

քանի որ գումարելիների թիվը n է և դրանցից ամենափոքրը a_{2n} -ը), ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_{2n} = 0$: Որտեղից կհետևի $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \cdot a_{2n} = 0$: Սյուս կողմից՝

$$0 < (2n+1)a_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = 2n \cdot a_{2n} + a_{2n} \rightarrow 0$$

երբ n -ը ձգտում է $+\infty$: Ստացվեց՝ $\{n \cdot a_n\}$ հաջորդականության զույգ և կենտ համարներով ենթահաջորդականությունները զուգամիտում են 0-ի:

$$\text{Հետևաբար՝ } \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0:$$

$$\text{Հակառակը ճիշտ չէ. օրինակ՝ } a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}, \quad n = 2; 3; \dots, \quad a_n > 0, \quad a_{n+1} < a_n,$$

$$n = 2; 3; \dots \text{ և } \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0, \text{ սակայն } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \text{ շարքը տարամետ է:}$$

$$\text{Օգտվելով } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^p} \quad (c > 0) \text{ շարքից և շարքերի բաղդատման հայտանիշ-}$$

ներից, հետազոտել հետևյալ շարքերի զուգամիտությունը:

$$\text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{9n+1} - \sqrt{4n-1}}{\sqrt[4]{n^3+3}}$$

Δ - Նշանակենք

$$a_n = \frac{\sqrt{9n+1} - \sqrt{4n-1}}{\sqrt[4]{n^3+3}}, \quad n = 1; 2; \dots$$

$$a_n = \frac{\sqrt{9n+1} - \sqrt{4n-1}}{\sqrt[4]{n^3+3}} = \frac{5n+2}{\sqrt[4]{n^3+3}(\sqrt{9n+1} + \sqrt{4n-1})}, \quad n=1;2;\dots$$

Հետո է տեսնել, որ $\left\{n^{\frac{1}{4}} \cdot a_n\right\}$ հաջորդականությունն ունի վերջավոր 0-ից

տարբեր սահման: Իրոք

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{4}} \cdot a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{4}} \cdot n \left(5 + \frac{2}{n}\right)}{n^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{3}{n^3}} \cdot n^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{9 + \frac{1}{n}} + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{2}{n}}{\sqrt[4]{1 + \frac{3}{n^3}} \left(\sqrt{9 + \frac{1}{n}} + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}\right)} = \frac{5}{1 \cdot (3+2)} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Քանի որ $p = \frac{1}{4} < 1$, ապա ըստ վերը գրած պայմանի շարքը տարամետ

է: Հետագոտենք նույն շարքի տարամիտությունը օգտվելով բաղդատման ա) հայտանիշից

$$a_n = \frac{5n+2}{\sqrt[4]{n^3+3}(\sqrt{9n+1} + \sqrt{4n-1})}, \quad n=1;2;\dots$$

Գնահատենք a_n -ը ներքևից

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{5n+2}{\sqrt[4]{n^3+3}(\sqrt{9n+1} + \sqrt{4n-1})} \geq \frac{5n}{\sqrt[4]{n^3+15n^3}(\sqrt{9n+7n} + \sqrt{4n})} = \\ &= \frac{5n}{2\sqrt[4]{n^3}(4\sqrt{n} + 2\sqrt{n})} = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{n^{1/4}}, \quad n=1;2;\dots \end{aligned}$$

Քանի որ $b_n = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{n^{1/4}}$ -ը ընդհանուր անդամ ունեցող շարքը տարամետ է,

ապա ըստ բաղդատման առաջին հայտանիշի տարամետ է $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը: ∇

$$բ) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+5n^2} - \sqrt{n^3+4n^2}}{\sqrt{n^3+1} \cdot \ln n}$$

$$\Delta - \text{Նշանակենք } a_n = \frac{\sqrt{n^3 + 5n^2} - \sqrt{n^3 + 4n^2}}{\sqrt{n^3 + 1} \cdot \ln n}, \quad n = 2; 3; \dots \quad \text{և այն}$$

գիմնահատենք ներքևից

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3 + 5n^2} - \sqrt{n^3 + 4n^2}}{\sqrt{n^3 + 1} \cdot \ln n} = \frac{n^2}{\sqrt{n^3 + 1} \cdot \ln n (\sqrt{n^3 + 5n^2} + \sqrt{n^3 + 4n^2})} \geq$$

$$\geq \frac{n^2}{\ln n \cdot \sqrt{4n^3 + 5n^3} (\sqrt{n^3 + 8n^3} + \sqrt{n^3 + 8n^3})} = \frac{n^2}{3\sqrt{n^3} \cdot 6\sqrt{n^3} \cdot \ln n} = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{n \ln n},$$

$n = 2; 3; \dots$

Քանի որ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ շարքը ըստ 19-ի գ) կետի տարամետ է, ապա տրված

շարքը ըստ բաղդատման առաջին հայտանիշի և տարամետ է: ∇

$$բ) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 5n^2} - \sqrt{n^3 + 4n^2}}{\sqrt{4n^3 + 1} \cdot \sqrt{\ln^3 n + 1}}$$

$$\Delta - \text{Նշանակենք } a_n = \frac{\sqrt{n^3 + 5n^2} - \sqrt{n^3 + 4n^2}}{\sqrt{4n^3 + 1} \cdot \sqrt{\ln^3 n + 1}}, \quad n = 1; 2; \dots$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3 + 5n^2} - \sqrt{n^3 + 4n^2}}{\sqrt{4n^3 + 1} \cdot \sqrt{\ln^3 n + 1}} = \frac{n^2}{\sqrt{4n^3 + 1} \cdot \sqrt{\ln^3 n + 1} (\sqrt{n^3 + 5n^2} + \sqrt{n^3 + 4n^2})}$$

Հետևելով նկատել, որ $\{a_n\}$ -ը և $b_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$, ($n = 2; 3; \dots$) հաջորդական-

ությունները միևնույն կարգի անվերջ փոքր հաջորդականություններ են: (Երկու $\{\alpha_n\}$ և $\{\beta_n\}$ անվերջ փոքրերը կոչվում են միևնույն կարգի անվերջ փոքր, եթե նրանց հարաբերության սահմանը 0-ից տարբեր վերջավոր թիվ է): Իրոք՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n^3}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\ln^3 n}}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{5}{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{n}} \right)} = \frac{1}{4} \neq 0$$

Քանի որ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{3/2} n}$ շարքը ըստ 19-ի գ) կետի զուգամետ է ($\alpha = 1$,

$\beta = \frac{3}{2} > 1$), ապա տրված շարքը ըստ 20-ի գ) կետի և զուգամետ է: ∇

$$\eta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{3^n}}{\sqrt[5]{4n^5 - 3}}$$

$$\Delta - \text{Նշանակենք } a_n = \frac{\cos \frac{\pi}{3^n}}{\sqrt[5]{4n^5 - 3}}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Գնահատենք a_n -ը ներքևից: Քանի որ $\cos x$ ֆունկցիան նվազող է $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ -ում, ապա

$$\cos \frac{\pi}{3^n} \geq \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad n = 1; 2; \dots$$

$$a_n \geq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[5]{4n^5 + 28n^5}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}$ շարքը տարամետ է ($p = 1$), ապա տրված շարքը ըստ

բաղդատման I հայտանիշի տարամետ է:

▽

Օգտվելով Դ'Ալամբերի հայտանիշից, շարքը հետազոտել զուգամի-տության տեսակետից

$$\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(3n)!}{(4n)!}$$

$$\Delta - \text{Նշանակենք } a_n = \frac{n!(3n)!}{(4n)!}, \quad n = 1; 2; \dots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(3(n+1))!}{(4(n+1))!} \cdot \frac{(4n)!}{n!(3n)!} = \frac{(n+1)(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} =$$

$$= \frac{n^3 \left(3 + \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{2}{n}\right) \left(3 + \frac{3}{n}\right)}{4 \cdot n^3 \left(3 + \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{2}{n}\right) \left(3 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{4} \frac{\left(3 + \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{2}{n}\right) \left(3 + \frac{3}{n}\right)}{\left(3 + \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{2}{n}\right) \left(3 + \frac{3}{n}\right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 + \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{2}{n}\right) \left(3 + \frac{3}{n}\right)}{\left(3 + \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{2}{n}\right) \left(3 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{27}{256} < 1$$

շարքը զուգամետ է:

▽

$$բ) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{2^n \cdot (n+1)!}$$

$$\Delta - \text{սշանակենք } a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{2^n \cdot (n+1)!}, \quad n = 1; 2; \dots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)(3n+1) \cdot 2^n \cdot (n+1)!}{2^{n+1} \cdot (n+2)! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} = \frac{(3n+1)}{2(n+2)} = \frac{3+1/n}{2+4/n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+1/n}{2+4/n} = \frac{3}{2} > 1 \text{ շարքը տարամետ է:}$$

▽

Օգտվելով Կոշիի հայտանիշից, շարքը հետազոտել զուգամիտության տեսակետից

$$ա) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot \left(\frac{4n}{4n+1} \right)^{4n^2}$$

$$\Delta - \text{սշանակենք } a_n = 3^n \cdot \left(\frac{4n}{4n+1} \right)^{4n}, \quad n = 1; 2; \dots$$

$$\sqrt[n]{a_n} = 3^n \cdot \left(\frac{4n}{4n+1} \right)^{4n^2} = 3^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{4n+1}{4n} \right)^{4n}} = \frac{3}{(1+1/4n)^{4n}}$$

Քանի որ $(1+1/4n)^{4n}$ հաջորդականությունը $(1+1/n)^n$ հաջորդականության ենթահաջորդականություն է, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/4n)^{4n} = e$: Հետևաբար

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(1+1/4n)^{4n}} = \frac{3}{e} > 1 \text{ շարքը տարամետ է:}$$

▽

$$բ) \sum_{n=1}^{\infty} 6^n \cdot \left(\frac{4n}{4n+1} \right)^{9n^2}$$

$$\Delta - \text{սշանակենք } a_n = 6^n \cdot \left(\frac{4n}{4n+1} \right)^{9n^2}, \quad n = 1; 2; \dots$$

$$\sqrt[n]{a_n} = 6 \cdot \left(\frac{4n}{4n+1} \right)^{9n} = \frac{6}{\left(\frac{4n+1}{4n} \right)^{9n}} = \frac{6}{\left[(1+1/4n)^{4n} \right]^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\left[(1+1/4n)^{4n} \right]^2} = \frac{6}{e^2} < 1, \text{ շարքը զուգամետ է:}$$

▽

Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը՝ ապացուցել, որ ցանկացած $n \in \mathbb{N}$ թվի համար ճշմարիտ են հետևյալ հավասարությունները

$$1. \quad 1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \quad 1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

$$3. \quad 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$4. \quad 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$5. \quad 1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$6. \quad 1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

$$7. \quad 1 \cdot 2+2 \cdot 3+3 \cdot 4+\dots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$8. \quad 1 \cdot 2+2 \cdot 5+3 \cdot 8+\dots+n(3n-1)=n^2(n+1)$$

$$9. \quad 2 \cdot 2^0+3 \cdot 2^1+4 \cdot 2^2+\dots+(n+1) \cdot 2^{n-1}=n \cdot 2^n$$

$$10. \quad 1 \cdot 2^2+2 \cdot 3^2+3 \cdot 4^2+\dots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

$$11. \quad 1 \cdot 2 \cdot 3+2 \cdot 3 \cdot 4+3 \cdot 4 \cdot 5+\dots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$12. \quad \frac{1}{1 \cdot 3}+\frac{1}{3 \cdot 5}+\frac{1}{5 \cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

$$13. \quad \frac{1}{1 \cdot 6}+\frac{1}{6 \cdot 11}+\frac{1}{11 \cdot 16}+\dots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{n}{5n+1}$$

$$14. \quad \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right) \dots \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$$

$$15. \quad \left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right) \dots \left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$$

$$16. \quad \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$17. \quad \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

$$18. \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$$

$$19. \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

$$20. \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{3} + \dots + \sin \frac{n\pi}{3} = 2 \cdot \sin \frac{n\pi}{6} \cdot \sin \frac{(n+1)\pi}{6}$$

$$21. \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$22. \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$23. \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (\text{ծախս մասում } n \text{ հատ արմատ})$$

24. Ստուգել, որ ցանկացած $m, n \in N$ ($m \leq n$) թվերի համար

$$\text{ա) } C_n^m = C_n^{n-m}; \quad \text{բ) } C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$$

25. Ապացուցել Նյուտոնի երկանդամի բանաձևը

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} \cdot b^k \quad (n \in N)$$

26. Օգտվելով Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից՝ ապացուցել

$$\text{ա) } \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n; \quad \text{բ) } \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot C_n^k = 0;$$

$$\text{գ) } (1+x)^n \geq \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} \cdot x^k \quad (x \geq 0);$$

$$\text{դ) } \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}};$$

27. Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը՝ ապացուցել, որ ցանկացած $n \in N$ թվի համար

$$\text{ա) } n^3 + 5n - \text{ը առանց մնացորդի բաժանվում է 6-ի};$$

$$\text{բ) } n^5 - n - \text{ը առանց մնացորդի բաժանվում է 30-ի};$$

$$\text{գ) } 12^n + 10 - \text{ը առանց մնացորդի բաժանվում է 11-ի};$$

$$\text{դ) } 5^{2n+1} + 4^{n+2} - \text{ը առանց մնացորդի բաժանվում է 21-ի};$$

- ե) $6^{2n+1} + 5^{n+2}$ -ը առանց մնացորդի բաժանվում է 31-ի;
 գ) $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ -ը առանց մնացորդի բաժանվում է 13-ի;
 է) $2^{3n+3} - 7n + 41$ -ը առանց մնացորդի բաժանվում է 49-ի;
 ը) $10^n - 9n - 1$ -ը առանց մնացորդի բաժանվում է 31-ի;
 թ) $n(2n^2 - 3n + 1)$ -ը առանց մնացորդի բաժանվում է 6-ի;
 ժ) $(6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1})$ -ը առանց մնացորդի բաժանվում է 11-ի;
 ի) $(5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1})$ -ը առանց մնացորդի բաժանվում է 19-ի;
 լ) $(11^{n+2} + 12^{2n+1})$ -ը առանց մնացորդի բաժանվում է 133-ի;
 խ) $(3^{2n+1} + 40n - 67)$ -ը առանց մնացորդի բաժանվում է 64-ի;
 ծ) $(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$ -ը առանց մնացորդի բաժանվում է 9-ի;

Ապացուցել, որ նշված բնական թվերի համար ճշմարիտ է անհավասարությունը

28. $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}; \quad n > 1$
 29. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}; \quad n > 1$
 30. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1; \quad n > 1$
 31. $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n; \quad n > 1$
 32. $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad n > 1$
 33. $2^n > 2n + 1; \quad n > 2$
 34. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} > n!; \quad n \geq 3$
 35. $n^{n+1} > (n+1)^n; \quad n \geq 3$
 36. $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n; \quad n \geq 6$
 37. $\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n; \quad (a, b > 0)$
 38. $|\sin(x_1 + x_2 + \dots + x_n)| \leq \sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n; \quad (0 \leq x_k \leq \pi),$
 $k = 1; 2; \dots, n$

39. $|\sin nx| \leq n |\sin x|; n \geq 1$

40. Ապացուցել Բեռնուլիի անհավասարությունները

ա) ցանկացած $x > -1$ թվի և ցանկացած n բնական թվի համար

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Ստուգել, որ երբ $n > 1$, հավասարությունը տեղի ունի միայն $x = 0$ դեպքում:

բ) եթե $x_1, x_2, \dots, x_n$ թվերը միևնույն նշանի են և մեծ են (-1) -ից, ապա

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n$$

41. Օգտվելով Բեռնուլիի անհավասարությունից՝ ապացուցել, որ ցանկացած $n > 1$ բնական թվի համար

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$$

42. Տրված են $x_1, x_2, \dots, x_n$ դրական թվերը: Մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով ապացուցել, որ

ա) եթե $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$, ապա $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$;

բ) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$;

գ) $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$;

դ) $\left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}\right)^{-1} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$;

ե) նախորդ կետերից յուրաքանչյուրում հավասարությունը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $x_1 = x_2 = \dots = x_n$:

43-45 խնդիրներում ենթադրվում է դիտարկվող բազմությունների սահմանափակ լինելը

43. Դիցուք $X \subset R$ և $-X = \{x : -x \in X\}$: Ապացուցել, որ

ա) $\sup(-X) = -\inf X$; բ) $\inf(-X) = -\sup X$:

44. Դիցուք $X \subset R$, $Y \subset R$ և $Z = \{z : z = x + y, x \in X, y \in Y\}$: Ապացուցել, որ

ա) $\sup Z = \sup X + \sup Y$;

բ) $\inf Z = \inf X + \inf Y$:

45. Դիցուք $X \subset (0; +\infty)$, $Y \subset (0; +\infty)$ և $Z = \{z : z = x \cdot y, x \in X, y \in Y\}$:
 Ապացուցել, որ
 ա) $\sup Z = \sup X \cdot \sup Y$; բ) $\inf Z = \inf X \cdot \inf Y$:
46. Ապացուցել, որ $X \subset R$ ոչ դատարկ բազմությունը սահմանափակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $A > 0$ թիվ այնպիսին, որ ցանկացած $x \in X$ տարրի համար տեղի ունի $|x| \leq A$ անհավասարությունը:
47. Դիցուք A -ն սահմանափակ բազմություն է: Ապացուցել, որ
 ա) A -ի ցանկացած ենթաբազմություն սահմանափակ է;
 բ) Ցանկացած B բազմության համար $A \cap B$ և $A \setminus B$ բազմությունները սահմանափակ են:
 գ) Եթե B -ն սահմանափակ բազմություն է, ապա $A \cup B$, $A + B$ և $A \cdot B$ բազմություններից յուրաքանչյուրը սահմանափակ է:
48. Ապացուցել, որ
 ա) $\sup \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in N \right\} = 1$; բ) $\inf \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in N \right\} = 0$;
 գ) $\sup \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in N \right\} = \frac{1}{2}$; դ) $\inf \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in N \right\} = -1$;
 ե) $\sup \left\{ \frac{n}{n+1} \cdot \sin \frac{2\pi n}{3} : n \in N \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 զ) $\inf \left\{ \frac{n}{n+1} \cdot \sin \frac{2\pi n}{3} : n \in N \right\} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:
49. Ապացուցել, որ ցանկացած $X \subset R$ և $Y \subset R$ ոչ դատարկ բազմությունների համար
 ա) $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X; \sup Y\}$;
 բ) $\inf(X \cup Y) = \min\{\inf X; \inf Y\}$:

Ապացուցել x_n հաջորդականության սահմանափակությունը

$$50. x_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$52. x_n = 2 \sin n! + 3 \cos n$$

$$54. x_n = \frac{2n^2 - 1}{2 + 3n^2}$$

$$56. x_n = \frac{10n - 7}{\sqrt[4]{25n^4 - 9}}$$

$$51. x_n = \frac{1 - n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$53. x_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n - 5}$$

$$55. x_n = \frac{3n^2 + 4n + 5}{(2n + 1)^2}$$

$$57. x_n = \frac{7n + 8}{\sqrt[3]{15n^3 - 7}}$$

$$58. x_n = \frac{5n^6 + 6}{(n^4 + 1)(n^2 - 5)}$$

$$60. x_n = \frac{\sqrt{5n^3 + 4}}{\sqrt{4n + 1}(5n - 2)}$$

$$62. x_n = \frac{\sqrt[3]{n^6 + 2n} - \sqrt{n^3 + 2}}{3n - 2n^2}$$

$$64. x_n = \frac{\sqrt{n^3 + 5}}{(2n + 3)(\sqrt{n} + 1)}$$

$$66. x_n = n(\sqrt{n^4 + n} - \sqrt{n^4 - n})$$

$$68. x_n = \frac{n}{3^n}$$

$$70. x_n = \frac{4^{n+1} + 5^n}{5^{n+2} - 3^n}$$

$$72. x_n = \frac{\lg^2 n + 10}{3 \lg^2 n + 7}$$

$$74. x_n = \lg(\sqrt{4n^2 + 1} - n) - \lg n$$

$$76. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$78. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(2k+1)} - \frac{1}{2(n+1)}$$

$$80. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$$

$$59. x_n = \frac{7n^7 + 9}{(3n^3 - 2)(5 - 8n^4)}$$

$$61. x_n = \frac{\sqrt[5]{4n^8 + 3}}{(3n - 2)\sqrt[5]{2n^3 - 1}}$$

$$63. x_n = \frac{\sqrt[3]{2n^6 + 6n} - \sqrt{4n^3 + 5n}}{2n - 3n^2}$$

$$65. x_n = \sqrt{n^2 + n} - n$$

$$67. x_n = \sqrt[3]{9n - n^3} + \sqrt[3]{9n + n^3}$$

$$69. x_n = \frac{n^5}{2^n}$$

$$71. x_n = \frac{5^{2n+3} + 3^n}{1 - 25^n}$$

$$73. x_n = \frac{n \lg n + \lg(n+1)}{n^2 + n \cdot \lg(n+3)^2}$$

$$75. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$77. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$$

$$79. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(a + (k-1)d)(a + kd)}$$

Ինչպիսի՞ p, q , $0 \leq q < p$ արժեքների համար հաջորդականությունը կլինի սահմանափակ

$$81. x_n = \sqrt{n^p + n^q + 1} - \sqrt{n^p - n^q + 1}$$

$$82. x_n = \sqrt[3]{n^p - n^q + 1} - \sqrt[3]{n^p + 1}$$

$$83. x_n = \sqrt[4]{n^p + an^q + 1} - \sqrt[4]{n^p + bn^q + 1}, (a \neq b)$$

$$84. x_n = \sqrt{n^2 - n + 1} - p \cdot n - q$$

$$85. x_n = \frac{3n^2 + 5n - 1}{2n + 1} - p \cdot n - q$$

86. Ապացուցել, որ եթե x_n և y_n հաջորդականությունները սահմանափակ են, ապա սահմանափակ են նաև հետևյալ հաջորդականությունները՝
ա) $a \cdot x_n + b \cdot y_n$, ($a, b \in R$); բ) $x_n \cdot y_n$

87. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, իսկ y_n հաջորդականությունը բավարարում է $|y_n| \geq C$ պայմանին ($C > 0$), ապա $\frac{x_n}{y_n}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը սահմանափակ չէ

$$88. x_n = (-1)^n \sqrt{n}$$

$$89. x_n = 2n^2 - n + 1$$

$$90. x_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$$

$$91. x_n = \frac{2-n}{\sqrt{n+3}}$$

$$92. x_n = n^{(-1)^n}$$

$$93. x_n = (n+1)^{\cos \frac{\pi}{2} n}$$

$$94. x_n = (n+2)^{\sin \frac{\pi}{2} n}$$

$$95. x_n = 3^{(-1)^n \cdot n}$$

$$96. x_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n + 5}$$

$$97. x_n = \frac{2^n}{n^{10}}$$

$$98. x_n = \frac{4^n - 3^n}{3^n + 2}$$

$$99. x_n = \frac{n \cdot \lg n + 3}{5 + \sqrt{n} \cdot \lg n^3}$$

$$100. x_n = \sqrt{n^4 + n^3 + 1} - \sqrt{n^4 - n^3 + 1}$$

$$101. x_n = \sqrt[3]{3n^3 + 5n^2 + 7} - \sqrt[3]{2n^3 + 5n^2 - 9}$$

$$102. x_n = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$$

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը մոնոտոն (ի վերջո մոնոտոն) է և պարզել մոնոտոնության բնույթը

$$103. x_n = \frac{3n+4}{n+2}$$

$$104. x_n = \frac{n+1}{2n-1}$$

$$105. x_n = \frac{100n}{n^2 + 16}$$

$$106. x_n = \frac{n^2 + 24}{n+1}$$

$$107. x_n = n^3 - 6n^2$$

$$108. x_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$$

$$109. x_n = \frac{n^3}{n^2 - 3}$$

$$110. x_n = \frac{n^2}{n^3 + 32}$$

$$111. x_n = \sqrt{3n-2}$$

$$112. x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

$$113. x_n = \sqrt[3]{n^3-1} - n$$

$$114. x_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

$$115. x_n = 2^n - 100n$$

$$116. x_n = 3^n - 2^n$$

$$117. x_n = \frac{6^{n+1} - 5^{n+1}}{6^n + 5^n}$$

$$118. x_n = \frac{2^n}{n}$$

$$119. x_n = \ln(n+1) - \ln n$$

$$120. x_n = \ln(n^2 + 9n) - 2 \ln n$$

121. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականությունը մոնոտոն է, ապա

$$y_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \text{ հաջորդականությունը նույնպես մոնոտոն է}$$

122. Ապացուցել, որ եթե $x > 0$, ապա $x_n = (1 + x/n)^n$ հաջորդականությունը աճող է

123. Ապացուցել, որ

ա) $x_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ հաջորդականությունը աճող է

բ) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ հաջորդականությունը նվազող է

124. Ի՞նչ առնչության պետք է բավարարեն a, b, c, d թվերը, որպեսզի

ա) $x_n = \frac{an+b}{cn+d}$ հաջորդականությունը լինի ի վերջո աճող

բ) $x_n = \frac{an+b}{cn+d}$ հաջորդականությունը լինի ի վերջո նվազող

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը մոնոտոն չէ

$$125. x_n = (-1)^n$$

$$126. x_n = n + (-1)^n$$

$$127. x_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2} n$$

$$128. x_n = \sin n$$

129. Դիցուք $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, $y_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)}$,

$n \in N$: Ապացուցել, որ

ա) $y_n \geq x_n$, $n \geq 2$; բ) x_n հաջորդականությունը աճող է ($n \geq 2$);

գ) y_n հաջորդականությունը նվազող է ($n \geq 2$);

դ) $|y_{n+1} - x_{n+1}| \leq \frac{|b-a|}{4^n}$:

130. Ապացուցել, որ եթե $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$,

$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, $n \in N$, ապա

ա) x_n հաջորդականությունը աճում է, իսկ y_n հաջորդականությունը նվազում է; բ) x_n և y_n հաջորդականությունները սահմանափակ են;

գ) $|y_{n+1} - x_{n+1}| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$

Ելնելով հաջորդականության սահմանի սահմանումից՝ ապացուցել հաճախարությունը

131. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+4} = \frac{2}{3}$

132. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-5n}{6n-1} = -\frac{5}{6}$

133. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+(-1)^n}{2n-5} = 2$

134. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n+(-1)^n}{5-3n} = -3$

135. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+2} = 0$

136. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 0$

137. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n} + 1}{2\sqrt[3]{n} + 3} = \frac{1}{2}$

138. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3n + 1}{7 - 2n - 10n^2} = -\frac{1}{2}$

139. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n^2+1} - 1}{5n-2} = \frac{3}{5}$

140. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, $|q| < 1$

141. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_{n+1} 3 = 0$

142. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_5 \frac{25n+1}{n} = 2$

143. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n \cdot \sin(n!) + 1}{2n^2 + 5n + 1} = 0$

144. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5n^2+2}}{\sqrt{10n^2+7n+1}} = 0$

Ապացուցել, որ նշված a թիվը տրված հաջորդականության սահմանը չէ

$$145. x_n = \frac{5n-1}{4n+1}, a = \frac{6}{5}$$

$$147. x_n = \frac{8n+5}{9n-4}, a = \frac{9}{10}$$

$$149. x_n = \frac{6n-5}{3-7n}, a = -\frac{8}{9}$$

$$151. x_n = \frac{5-7n}{6n+2}, a = -\frac{9}{8}$$

$$153. x_n = \frac{5 \lg n + 2}{6 \lg n + 7}, a = 1$$

$$155. x_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+5}, a = -1$$

$$157. x_n = \frac{n^2}{2^n}, a = 1$$

$$146. x_n = \frac{2n^2-3}{3n^2+1}, a = \frac{3}{4}$$

$$148. x_n = \frac{11n^2-4}{3-n^2}, a = -10$$

$$150. x_n = \frac{2n^2-5}{5-3n^2}, a = -\frac{4}{5}$$

$$152. x_n = \frac{5n-1}{7n^2+1}, a = \frac{1}{3}$$

$$154. x_n = \frac{2 \cdot 3^n - 1}{4 + 3^n}, a = \frac{3}{2}$$

$$156. x_n = \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt{n}}{2\sqrt{n}}, a = -\frac{1}{3}$$

$$158. x_n = \frac{3n^2 + \sin n!}{5n^2 + 3 \cos n!}, a = 0$$

Ապացուցել հավասարությունը

$$159. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \sqrt{n}}{n} = 0$$

$$161. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n} = 0$$

$$163. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

$$165. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$167. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, (a > 1)$$

$$169. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\lg n} = 1$$

$$160. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

$$162. \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n 4 = 0$$

$$164. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, (a > 1, k \in \mathbb{N})$$

$$166. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, (a > 1)$$

$$168. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$170. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

171. Բերել երկու անվերջ փոքր x_n և y_n հաջորդականությունների օրինակներ, որոնց համար

$$\text{ա) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0,$$

$$\text{գ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a, (a \neq 0);$$

$$\text{բ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty;$$

$$\text{դ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \text{ -ը գոյություն չունի:}$$

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը անվերջ մեծ է

172. $x_n = (-1)^n n$

173. $x_n = 3n - 2\sqrt{n}$

174. $x_n = \frac{n^2 + 3}{2n + 1}$

175. $x_n = q^n \ (|q| > 1)$

176. $x_n = \frac{2^n(n+1)}{2n+1}$

177. $x_n = \frac{3^n + 2}{2^n + 5}$

178. $x_n = \lg(n^2 + n + 1)$

179. $x_n = n(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1})$

180. Բերել երկու անվերջ մեծ x_n և y_n հաջորդականությունների օրինակներ, որոնց համար

ա) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$,

բ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$;

գ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$, ($a \neq 0$);

դ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ -ը գոյություն չունի:

181. Ապացուցել, որ եթե $x_n \neq 0$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, ապա $\frac{1}{x_n}$ հաջորդականություն-

ըն անվերջ մեծ է:

182. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականությունը անվերջ մեծ է, ապա

սկսած որոշ համարից կարելի է սահմանել $\frac{1}{x_n}$ հաջորդականություն,

որը կլինի անվերջ փոքր հաջորդականություն:

183. Ապացուցել, որ վերջավոր քանակությամբ անվերջ փոքր հաջորդականությունների գումարը, արտադրյալը անվերջ փոքր հաջորդականություն է:

184. Ապացուցել, որ զուգամետ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

185. Ապացուցել, որ ի վերջո հաստատուն հաջորդականությունը զուգամետ է:

186. Ապացուցել, որպեսզի a թիվը հանդիսանա x_n հաջորդականության սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $x_n - a$ հաջորդականությունը լինի անվերջ փոքր:

187. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականության երկու ենթահաջորդականություններ ձգտում են տարբեր սահմանների, ապա x_n հաջորդականությունը զուգամետ չէ:

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, բայց զուգամետ չէ:

188. $x_n = (-1)^n$

189. $x_n = \begin{cases} 2 + \frac{1}{n}, & \text{երբ } n\text{-ը գույգ է} \\ 3 - \frac{1}{n}, & \text{երբ } n\text{-ը կենտ է} \end{cases}$

190. $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{4}$

191. $x_n = \frac{5^n + (-5)^n}{5^n}$

192. $x_n = \frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$

193. $x_n = 4 \left(1 - \frac{1}{n} \right) + (-1)^n$

194. $x_n = \frac{n \cos n\pi - 1}{2n}$

195. $x_n = \frac{1}{n} + \cos \frac{n\pi}{2}$

196. $x_n = 2 + \frac{n^2}{n^2 + 1} \cdot \cos \frac{n\pi}{3}$

197. $x_n = -1 + \frac{n^2}{n^2 + 2} \cdot \sin \frac{\pi}{2}$

198. $x_n = \sin n$

199. $x_n = \cos n$

200. $x_n = 2^{\sin \frac{\pi}{2} n}$

201. $x_n = 3^{\cos \frac{\pi}{2} n}$

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը սահմանափակ չէ, բայց անվերջ մեծ չէ:

202. $x_n = n^{(-1)^n}$

203. $x_n = n(1 - (-1)^n)$

204. $x_n = n^{\cos n\pi}$

205. $x_n = n^{\sin \frac{\pi}{2} n}$

206. $x_n = n^2 \cos \frac{\pi}{4} n$

207. $x_n = n^2 \sin \frac{\pi}{3} n$

208. $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \lg n$

209. $x_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1} \sin \frac{\pi}{2} n$

Օգտվելով մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմից՝ ապացուցել հաջորդականության զուգամիտությունը

210. $x_n = \frac{n+1}{3n+7}$

211. $x_n = \frac{1-3n}{5n+3}$

212. $x_n = \frac{3n}{n^2 + 7n + 1}$

213. $x_n = \frac{2-5n}{n^2 + 3n + 2}$

$$214. x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$$

$$215. x_n = \frac{n^3}{10^n}$$

$$216. x_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$217. x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}$$

$$218. x_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1}$$

$$219. x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \frac{1}{3^3+3} + \dots + \frac{1}{3^n+n}$$

$$220. x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$221. x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$222. x_n = \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{n \text{ հաստ}}}$$

$$223. x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$224. x_n = \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$225. x_n = 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$226. x_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$$

$$227. x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$228. x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$229. x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

230. Ապացուցել, որ եթե մոնոտոն հաջորդականությունը սահմանափակ չէ, ապա անվերջ մեծ է:

231. Օգտվելով նրանից, որ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ հաջորդականությունը մոնոտոն

աճելով, իսկ $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ հաջորդականությունը մոնոտոն նվազելով

ծգտում են e թվին, ապացուցել $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, $n \in N$ անհավասարությունը, որտեղ նշանակված է $\ln x = \log_e x$:

Չաշվել հաջորդականության սահմանը

$$232. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - 2}{4n^2 + 5n + 1}$$

$$233. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n + 1} - \frac{3n^2 + 1}{6n + 1} \right)$$

$$234. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 - 3n + 4}{4 - 4n - 5n^2} \right)^5$$

$$235. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{\left[(n^2 + 1)^2 - (n^2 - 1)^2 \right] (n+1)}$$

$$236. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$$

$$237. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{n+2} - \frac{3n+5}{2} \right)$$

$$238. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 7}{1+2+\dots+n}$$

$$239. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-\dots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$240. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{3n^2+2}$$

$$241. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-\dots+(2n-1)-2n}{\sqrt[3]{8n^3+2n+3+3n}}$$

$$242. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3+1}$$

$$243. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^2} - \frac{n}{3} \right)$$

$$244. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2}{2n^3+5n^2+3n-1}$$

$$245. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^{15} + 7n^{15}}{(4n^7+7)(5n^8+3)+n^{12}}$$

$$246. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(a + \frac{1}{n} \right)^2 + \left(a + \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left(a + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right)$$

$$247. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n(n+4)} - n \right)$$

$$248. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \right)$$

$$249. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n} \right) \cdot \sqrt{2n+1}$$

$$250. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt{4 + \frac{3}{n^2}} - 2 \right)$$

$$251. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$252. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n} - n - 1}$$

$$253. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3} - n}$$

$$254. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{9n^2+6n+2} - 3n - 1}$$

$$255. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4} - n}{\sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 + 1}}$$

$$257. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - \sqrt{9n^2 - 4}}{\sqrt{4n^2 + 2} - 2n}$$

$$259. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 5} - n}{\sqrt[3]{n^3 + 4n} - n}$$

$$261. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 9} - n}{\sqrt[3]{n^3 + 2n} - n}$$

$$263. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{\sqrt{n^3 + 1} - n\sqrt{n}}$$

$$265. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{5n^2 - n^3} + n \right)$$

$$267. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n \right)$$

$$269. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n \right)$$

$$271. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+2}}{3^{n+1} + 2^{n+2}}$$

$$273. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n - 4 \cdot 5^{n+2}}{10 \cdot 2^n + 16 \cdot 5^{n+1}}$$

$$275. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{5^n}}$$

$$277. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n}{1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n}$$

$$256. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n - 1}$$

$$258. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^4 + n} - \sqrt{n}}$$

$$260. \lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 3) \left(\sqrt[3]{8 + \frac{3n+1}{n^2 + n}} - 2 \right)$$

$$262. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6 \cos n^2 + 3n}{2n - 1} - \frac{3n^2 + 4n}{7 - 8n^2} \right)$$

$$264. \lim_{n \rightarrow \infty} (5n - 4) \left(\sqrt[3]{1 - \frac{4n-3}{5-n^2}} - 1 \right)$$

$$266. \lim_{n \rightarrow \infty} (3 - 4n) \left(\sqrt[3]{\frac{2n+1}{4n^2 + 5n}} - 27 + 3 \right)$$

$$268. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - 5n) \sqrt{1 + 6 + 11 + \cdots + (5n - 4)}}{7 + 4n^2}$$

$$270. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin 3n + \cos 3n}{\sqrt{2n + 1}} - \frac{4n^2 + 3n}{9 - 5n^2} \right)$$

$$272. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$274. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} \right)$$

$$276. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$$

$$278. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \right)$$

$$279. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right)$$

$$280. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{12}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{5n-3} + \sqrt{5n+2}} \right)$$

$$281. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \frac{133}{1000} + \dots + \frac{5^n + 2^n}{10^n} \right)$$

$$282. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{3n}$$

$$283. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n} \right)^{2n}$$

$$284. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+5}{3n+2} \right)^{2n}$$

$$285. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n} \right)^{n+1}$$

$$286. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \right)^n$$

$$287. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right]^{2\sqrt{n}}$$

$$288. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n+1} + 3}{\sqrt{n+1}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}}$$

$$289. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4 + 1}{n^3 - 2} - \frac{an^2}{5n + 2} \right)$$

$$290. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 \cdot n^p + a_1 \cdot n^{p-1} + \dots + a_{p-1} \cdot n + a_p}{b_0 \cdot n^q + b_1 \cdot n^{q-1} + \dots + b_{q-1} \cdot n + b_q} \quad (p, q \in \mathbb{N}, a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$$

$$291. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi \sqrt{n^2 + 1}$$

$$292. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi \sqrt{n^2 + n}$$

$$293. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \pi \sqrt{n^2 + 1}$$

$$294. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \pi \sqrt{n^2 + n}$$

$$295. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi \sqrt{36n^2 + 2n}$$

$$296. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \pi \sqrt{9n^2 + 2n}$$

$$297. \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \pi \sqrt{4n^2 + n}$$

Օգտվելով Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից, ապացուցել հաջորդականության զուգամիտությունը

$$298. x_n = \frac{2n+1}{3n+2}$$

$$299. x_n = \frac{n + \sin n}{n + 7}$$

$$300. x_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n, \quad (|q| < 1)$$

$$301. x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$302. x_n = \frac{1}{4 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 19} + \dots + \frac{1}{(5n-1)(5n+4)}$$

$$303. x_n = \frac{\sin 1}{4} + \frac{\sin 2}{4^2} + \dots + \frac{\sin n}{4^n}$$

$$304. x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 4} + \frac{\cos 2!}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{\cos n!}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$305. x_n = \frac{\sin 1!}{3-1} + \frac{\sin 2!}{3^2+2} + \dots + \frac{\sin n!}{3^n+n}$$

$$306. x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$307. x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

Օգտվելով Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից, ապացուցել հաջորդականության տարամիտությունը

$$308. x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$309. x_n = \sin \frac{\pi n}{4}$$

$$310. x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$311. x_n = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$312. x_n = \frac{n \cdot \cos n\pi - 1}{2n}$$

$$313. x_n = \frac{(-1)^n \cdot 4n + 3}{2n}$$

Պտնել $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ -ը և $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ -ը

$$314. x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi}{2} n$$

$$315. x_n = 3 - \frac{2n+1}{n+3} \sin \frac{\pi}{2} n$$

$$316. x_n = (-1)^{n+1} \cdot 7 - \sin \frac{\pi}{2} n$$

$$317. x_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$318. x_n = (-1)^{n+1} \cdot 5 + \cos \frac{\pi}{2} n$$

$$319. x_n = -3 + 4 \cdot (-1)^{n+2} - 5 \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$320. x_n = \frac{2n-1}{3n+2} \cos \frac{2\pi n}{3}$$

$$321. x_n = (-1)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin \frac{\pi}{2} n$$

$$322. x_n = \frac{5n+3}{6n+1} \sin^2 \frac{\pi n}{4}$$

$$324. x_n = \frac{n+1}{n+2} \sin \frac{\pi}{3} n$$

$$326. x_n = \frac{1-3n}{2n+1} \cos^2 \frac{\pi n}{4}$$

$$328. x_n = \frac{4-3n^2}{5n^2+2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} n$$

$$323. x_n = (-1)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n} + \cos \frac{\pi}{2} n$$

$$325. x_n = \sqrt[n]{1+2^{(-1)^n n}}$$

$$327. x_n = \frac{5n-3}{3-2n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} n$$

$$329. x_n = (n)^{\sin \frac{\pi}{2} n}$$

400661 $\inf x_n$ - η $\wedge$ $\sup x_n$ - η

$$330. x_n = \frac{3n-4}{4n-13}$$

$$332. x_n = \frac{3n+5}{2n-9}$$

$$334. x_n = \frac{13-3n}{2n-15}$$

$$336. x_n = \frac{3-2n}{5n-11}$$

$$338. x_n = \frac{4n+17}{7n-12}$$

$$340. x_n = \frac{3n-10}{5n-16}$$

$$342. x_n = \frac{4n-15}{3n-10}$$

$$344. x_n = \frac{3n-13}{4n-15}$$

$$346. x_n = \frac{3^n}{n!}$$

$$348. x_n = \frac{5^n}{(n+2)!}$$

$$350. x_n = \frac{7^n}{(n+3)!}$$

$$331. x_n = \frac{2n-7}{3n-8}$$

$$333. x_n = \frac{4n-10}{2n-11}$$

$$335. x_n = \frac{5-4n}{7n-18}$$

$$337. x_n = \frac{4-5n}{8n-15}$$

$$339. x_n = \frac{4n-9}{4n+5}$$

$$341. x_n = \frac{3-5n}{2n-9}$$

$$343. x_n = \frac{5-7n}{5n-16}$$

$$345. x_n = \frac{3n-5}{4n-13}$$

$$347. x_n = \frac{4^n}{(n+1)!}$$

$$349. x_n = \frac{6^n}{(n+2)!}$$

$$351. x_n = \frac{8^n}{(2n+1)!}$$

352. Ապացուցել, որ եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, ապա հաջորդականության տարրերի մեջ կա ամենափոքրը:
353. Ապացուցել, որ եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, ապա հաջորդականության տարրերի մեջ կա ամենամեծը:
354. Ապացուցել, որ եթե մոնոտոն հաջորդականության որևէ ենթահաջորդականություն զուգամետ է, ապա հաջորդականությունը զուգամետ է:
355. Ապացուցել, որ եթե մոնոտոն հաջորդականության որևէ ենթահաջորդականություն ֆունդամենտալ է, ապա հաջորդականությունը զուգամետ է:
356. Ապացուցել, որ եթե մոնոտոն հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա հաջորդականությունը սահմանափակ է:
357. Ապացուցել, որ եթե մոնոտոն հաջորդականության որևէ ենթահաջորդականություն ֆունդամենտալ է, ապա հաջորդականությունը ևս ֆունդամենտալ է:
358. Ապացուցել, որ ցանկացած հաջորդականություն ունի մոնոտոն ենթահաջորդականություն:
359. Ապացուցել, որ եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$: ճշմարիտ է արդյոք հակառակը: Բերել համապատասխան օրինակ:
360. Ապացուցել, որ եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$:
361. Բերել հաջորդականության օրինակ, որի մասնակի սահմանները նախապես տրված $a_1, a_2, \dots, a_n$ թվերն են:
362. Կառուցել հաջորդականություն, որի համար տրված $\{a_n\}$ հաջորդականության յուրաքանչյուր անդամ լինի մասնակի սահման: Ուրիշ ի՞նչ մասնակի սահմաններ է պարտավոր ունենալ կառուցած հաջորդականությունը, եթե a_n -երը իրարից տարբեր են:
363. Ապացուցել, որ եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ունի 0-ից տարբեր սահման, իսկ $\{y_n\}$ հաջորդականությունը տարամետ է, ապա $\{x_n y_n\}$ հաջորդականությունը տարամետ է:
364. Հայտնի է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, իսկ $\{y_n\}$ հաջորդականությունը տարամետ է: Ի՞նչ կարելի է ասել $\{x_n \cdot y_n\}$ հաջորդականության զուգամիտության մասին: Բերել համապատասխան օրինակներ:
365. Հայտնի է, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը զուգամետ է, $\{y_n\}$ հաջորդականությունը՝ տարամետ: Ի՞նչ կարելի է ասել $\{x_n y_n\}$ հաջորդականության զուգամիտության մասին:
366. Հայտնի է, որ $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականությունները տարամետ են: Ի՞նչ կարելի է ասել $\{x_n y_n\}$ հաջորդականության զուգամիտության մասին: Բերել համապատասխան օրինակներ:

367. Ապացուցել, որ եթե $x_n \neq 0 \quad n=1, 2, \dots$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (a \neq 0)$, ապա $\{1/x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է:
368. Ապացուցել, որ եթե $\{x_n\}$ հաջորդականության $\{x_{2k-1}\}$ և $\{x_{2k}\}$ ենթահաջորդականությունները զուգամիտում են միևնույն a թվին, ապա $\{x_n\}$ -ը զուգամիտում է a -ին:
369. Ապացուցել, որ եթե $\{x_n\}$ հաջորդականության $\{x_{2k-1}\}$ և $\{x_{2k}\}$ ենթահաջորդականությունները զուգամիտում են համապատասխանաբար a և b թվերին ($a \neq b$), ապա $\{x_n\}$ -ը հաջորդականությունը տարամետ է:
370. Դիցուք $\{x_n\}$ հաջորդականության համար $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{3k+1} = a$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = b$:
Ապացուցել, որ $a = b$:
371. Դիցուք $\{x_n\}$ հաջորդականության ցանկացած ենթահաջորդականություն զուգամետ է:
Ապացուցել, որ
ա) բոլոր ենթահաջորդականությունները զուգամիտում են միևնույն թվին
բ) x_n հաջորդականությունը զուգամետ է և զուգամիտում է այդ թվին:
372. Ապացուցել, որ որպեսզի a թիվը հանդիսանա տրված հաջորդականության մասնակի սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ a -ի ցանկացած $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ շրջակայքում գտնվեն անվերջ թվով անդամներ x_n հաջորդականությունից:
373. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ չէ, ապա նրանից կարելի է անջատել $+\infty$ ձգտող ենթահաջորդականություն:
374. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականությունը ներքևից սահմանափակ չէ, ապա նրանից կարելի է անջատել $-\infty$ ձգտող ենթահաջորդականություն:
375. Ապացուցել, որ եթե մոնոտոն հաջորդականությունը սահմանափակ չէ, ապա անվերջ մեծ է:
376. Դիցուք x_n հաջորդականությունը այնպիսին է, որ $y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $n = 1; 2; \dots$ հաջորդականությունը զուգամետ է: Ապացուցել, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$:
377. Դիցուք a_n հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է, որի բոլոր անդամները դրական են և տարբերությունը հավասար չէ 0-ի: Գտնել

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \right):$$

378. Դիցուք a_n հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է, որի բոլոր անդամները և տարբերությունը հավասար չեն 0-ի: Գտնել

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} \right) :$$

379. Հայտնի է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = 0$: Հետևում է արդյոք $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$:

380. Հայտնի է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = 0$: Հետևում է արդյոք, որ x_n և y_n հաջորդականություններից գոնե մեկը անվերջ փոքր է:

381. Ապացուցել, որ x_n հաջորդականության ֆունդամենտալ լինելու համար անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_N| < \varepsilon :$$

382. Ապացուցել, որ երկու ֆունդամենտալ հաջորդականությունների գումարը, տարբերությունը և արտադրյալը ֆունդամենտալ հաջորդականություններ են:

383. Ապացուցել, որ եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 0$:

384. Ապացուցել, որ $x_n = \frac{4^n + (-4)^n}{4^n}$ հաջորդականությունը սահման չունի,

իսկ $y_n = \frac{4^n + (-4)^n}{5^n}$ հաջորդականությունն ունի սահման: Գտնել այդ սահմանը:

385. Դիցուք x_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, իսկ y_n հաջորդականությունը՝ անվերջ մեծ: Ապացուցել, որ $x_n + y_n$ հաջորդականությունը անվերջ մեծ է:

386. Ապացուցել, որ զուգամետ հաջորդականությունն ունի կամ ամենափոքր, կամ ամենամեծ անդամ, կամ երկուսն էլ միաժամանակ:

387. Ապացուցել, որ եթե a -ն $X = \{x\}$ ոչ դատարկ թվային բազմության ստորին ճշգրիտ եզրն է, ապա գոյություն ունի այնպիսի x_n հաջորդականություն, որ $x_n \in X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

388. Ապացուցել, որ եթե b -ն $Y = \{y\}$ ոչ դատարկ թվային բազմության վերին ճշգրիտ եզրն է, ապա գոյություն ունի այնպիսի y_n հաջորդականություն, որ $y_n \in Y$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$:

389. Դիցուք $x_n \geq 0$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$: Ապացուցել, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$, ($k \in \mathbb{N}$):

390. Դիցուք x_n ; ε_n հաջորդականությունները և a թիվը այնպիսին են, որ $|x_n - a| < \varepsilon_n$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$: Ապացուցել, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:
391. α պարամետրի n° արժեքների համար $x_n = \sqrt{n^2 + n^\alpha} - n$ հաջորդականությունը ա) կծգտի $+\infty$, բ) կծգտի վերջավոր սահմանի: Գտնել այդ սահմանը:
392. Ապացուցել, որ $x_n = \sin n$, $y_n = \cos n$ հաջորդականությունները տարամետ են:
393. Հայտնի է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$: Ի՞նչ կարելի է ասել $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ -ի մասին:
394. Դիցուք x_n հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից և բավարարում է $x_{n+1} - x_n > -\frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ պայմանին: Ապացուցել, որ x_n -ը զուգամետ է:
395. Դիցուք x_n հաջորդականության համար $\lim(x_{n+2} - x_n) = 0$: Ապացուցել, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$:
396. Հայտնի է, որ $\{x_n\}$ հաջորդականության $\{x_{2k-1}\}$, $\{x_{2k}\}$ և $\{x_{7k+1}\}$ ենթահաջորդականությունները զուգամետ են: Ապացուցել, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ևս զուգամետ է:
397. Կասենք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունն ունի վերջավոր փոփոխություն, եթե գոյություն ունի $C > 0$ թիվ այնպիսին, որ $|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_n - x_{n-1}| < C$, ($n = 2; 3; \dots$):
Ապացուցել, որ ամեն մի վերջավոր փոփոխություն ունեցող հաջորդականություն զուգամետ է: Կառուցել զուգամետ հաջորդականության օրինակ, որը չունի վերջավոր փոփոխություն:
398. Ապացուցել, որ եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն է և $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, ապա $y_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x_k$, ($n = 1; 2; \dots$) հաջորդականությունը զուգամետ է:

Չաշվել շարքի գումարը

399. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ($|q| < 1$)

400. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} \right)$

$$401. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^n}{6^n} \right)$$

$$402. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n} + \frac{2}{10^{n+1}} + \frac{5}{10^{n+2}} \right)$$

$$403. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$404. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$405. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$$

$$406. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

$$407. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n-3}$$

$$408. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-3}$$

$$409. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-15}$$

$$410. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2+5n-6}$$

$$411. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2+12n-35}$$

$$412. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2+7n-12}$$

$$413. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$414. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

$$415. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{(n+1)(n+2)} - 2\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n-1)})$$

$$416. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n} - \frac{n-1}{2^{n-1}} \right)$$

$$417. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$$

$$418. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} \cdot \cos \frac{3}{2^n}$$

$$419. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

420. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի a_n ընդհանուր անդամն ունի

$a_n = b_{n+1} - b_n$, $n = 1; 2; \dots$ տեսքը, որտեղ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ (b -ն վերջավոր է),

ապա շարքը զուգամետ է և նրա գումարը հավասար է $b - b_1$ -ի:

Ստուգել, որ հետևյալ շարքերում բացակայում է զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը:

$$421. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

$$422. \sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$$

$$423. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3}{4n^2 + 5n + 1}$$

$$425. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4n+5}{9n+7}}$$

$$427. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3} n$$

$$429. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n$$

$$424. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3+4n^2}}$$

$$426. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt[3]{8n^3+5n^2+2}}$$

$$428. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n$$

$$430. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Ստուգել, որ շարքի ընդհանուր անդամը ձգտում է 0-ի, բայց շարքը տարամետ է:

$$431. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$433. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+4}$$

$$435. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(3n-1)(3n+1)}}$$

$$432. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$434. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n^2+3) \cdot \sqrt[3]{n}}$$

$$436. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+2}}$$

Ելնելով Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը

$$437. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{10^n} \quad (|a_n| \leq 10)$$

$$439. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$$

$$441. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$438. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n!}{n^2}$$

$$440. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$442. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n + n}$$

Ելնելով Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից՝ ապացուցել շարքի տարամիտությունը

$$443. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$445. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$444. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$446. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3}$$

$$447. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n(n+3)}}$$

$$448. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (0 < p < 1)$$

Կիրառելով բաղդատման հայտանիշները՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը

$$449. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n-2}$$

$$450. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(5n+2)(n+3)}$$

$$451. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$$

$$452. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{\sqrt[5]{4+3n^{13}}}$$

$$453. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^2+3}-\sqrt{4n^2-3}}{\sqrt[3]{2n^2+5}}$$

$$454. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^3+5n^2}-\sqrt{2n^3+n^2}}{\sqrt{5n^3+9n}}$$

$$455. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2+7n}-\sqrt{2n^2-n}}{\sqrt{3n^2+4}}$$

$$456. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3+7n}}$$

$$457. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n+1}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^3+2}}$$

$$458. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[5]{n^3+3}}$$

$$459. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\sin n}{\sqrt[3]{5n^3-2n}}$$

$$460. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$461. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{3n}}{(7n-5)\sqrt[3]{4n-3}}$$

$$462. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{4n}}{\sqrt[4]{5n^4-3}}$$

$$463. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$$

$$464. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{n+2}{n^2+3}$$

$$465. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5(1+\sin \sqrt{n})}{2^n+n}$$

$$466. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+3}{n^2+1}$$

$$467. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\ln \left(1 + \frac{2}{n}\right)} \cdot \ln \frac{n+3}{n+2}$$

$$468. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)}{n + \ln^2 n}$$

Օգտվելով ԴԱլամբերի հայտանիշից՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը:

$$469. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(n+1)!}$$

$$470. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a^n}{n^n} \quad (a > 0, a \neq e)$$

$$471. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$$

$$472. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}$$

$$473. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$$

$$474. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{3^n \cdot (n!)^2}$$

$$475. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$$

$$476. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 \cdot 4^{3n}}$$

$$477. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}{2^n \cdot (n+1)!}$$

$$478. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!}$$

$$479. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}{(n+1)!} \arcsin \frac{1}{2^n}$$

$$480. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \cdots (a+(n-1))}{(2n-1)!!} \quad (a > 0)$$

$$481. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(2,7)^{n+1}}$$

$$482. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}$$

Օգտվելով Կոչիի հայտանիշից՝ շարքը հետազոտել զուգամիտության տեսակետից:

$$483. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$484. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}} \right)^{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$485. \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n(n-1)}$$

$$486. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n^2}$$

$$487. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$488. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n^2}$$

$$489. \sum_{n=2}^{\infty} 4^n \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n(n-1)}$$

$$490. \sum_{n=1}^{\infty} 7^n \cdot \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^{6n^2}$$

$$491. \sum_{n=1}^{\infty} 8^n \cdot \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{4n^2}$$

$$492. \sum_{n=1}^{\infty} 6^n \cdot \left(\frac{4n}{4n+1} \right)^{8n^2}$$

$$493. \sum_{n=1}^{\infty} 9^n \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n^2}$$

$$494. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a \cdot n}{n+2} \right)^n, \quad a > 0$$

$$495. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{\sqrt{n^4+3n+1}}$$

$$496. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{\frac{n+3}{2}}}$$

$$497. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n+1}{5n-3} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^{\frac{2n}{3}}$$

$$498. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$$

499. Ապացուցել, որ ոչ բացասական անդամներով շարքը կլինի զուգամետ այն և միայն այն դեպքում, եթե նրա մասնակի գումարների հաջորդականության որևէ ենթահաջորդականություն վերևից սահմանափակ է:

500. Ապացուցել, որ եթե $a_n \geq 0$, $(n \in N)$ և $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ շարքը: Ճիշտ է արդյոք հակառակ պնդումը:

501. Ապացուցել, որ եթե $a_n \geq 0$, $(n \in N)$ և $n \cdot a_n$ հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ շարքը զուգամետ է:

502. Ապացուցել, որ եթե $a_n > 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ $(n \in N)$ և $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$:

503. Ապացուցել, որ եթե $a_n \geq 0$, $(n \in N)$ և գոյություն ունի $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = a$, $(a \neq 0)$ վերջավոր կամ անվերջ սահմանը, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը տարամետ է:

504. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ շարքերը զուգամետ են, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ շարքերը զուգամետ են:

505. Ապացուցել, որ եթե $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ $(n \in N)$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2k}$ շարքերը կզուգամիտեն կամ կտարամիտեն միաժամանակ:

506. Ի՞նչ կարելի է ասել $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ շարքի զուգամիտության մասին, եթե՝

ա) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը զուգամետ են:

բ) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքը՝ տարամետ:

ա) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը տարամետ են:

Բերել համապատասխան օրինակներ

507. Ապացուցել,

ա) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$ շարքը զուգամետ է

բ) ստանալ $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + C + \alpha_n$ ասիմպտոտիկ բանաձևը, որտեղ C -ն

Էյլերի հաստատունն է, $\alpha_n \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$:

508. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ ($a_n \geq 0$) շարքը զուգամետ է և $a_{n+1} \leq a_n$

($n \in \mathbb{N}$), ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ շարքը ևս զուգամետ է:

509. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$ և $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^3$ դրական շարքերը զուգամետ

են, ապա զուգամետ է նաև $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$ շարքը:

510. Ապացուցել,

ա) որ եթե $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ բոլոր $n \geq n_0$ համար, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքը զուգա-

մետ է և $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը ևս զուգամետ է:

բ) որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքը տարամետ է և $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը ևս տարամետ է:

ԹՎԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ, ՍԱՀՄԱՆ, ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆ

1. ԹՎԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳԱՂԱԺԱՐԸ

Դիցուք X -ը և Y -ը թվային բազմություններ են: Եթե X բազմության յուրաքանչյուր x տարրի համապատասխանեցվում է Y բազմության մեկ որոշակի y տարր, ապա ասում են, որ տրված է $f: X \rightarrow Y$ ֆունկցիա: x -ը կոչվում է ֆունկցիայի արգումենտ կամ անկախ փոփոխական, իսկ նրան համապատասխանեցված y -ը՝ ֆունկցիայի արժեք x կետում, գրում են $y = f(x)$ (f տառի փոխարեն կարելի է օգտագործել այլ տառեր՝ օրինակ g, φ, ψ, u, v և այլն): X բազմությանը անվանում են ֆունկցիայի որոշման տիրույթ: Շատ հաճախ այն նշանակում են $X = D(f)$ -ով, իսկ $E(f) = \{f(x) : x \in X\} \subset Y$ բազմությունը՝ ֆունկցիայի արժեքների բազմություն:

$f: X \rightarrow Y$ ֆունկցիան կոչվում է աճող (նվազող, չաճող) եթե կամայական $x_1, x_2 \in X$ զույգի համար $x_1 < x_2$ պայմանից հետևում է, որ $f(x_1) < f(x_2)$ (համապատասխանաբար՝ $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_1) \leq f(x_2)$, $f(x_1) \geq f(x_2)$): Ընդհանուր առմամբ այդ բոլոր տեսակի ֆունկցիաները կոչվում են մոնոտոն ֆունկցիաներ: Դեկարտյան հարթության $\{(x; f(x)) : x \in X\}$ կետերի բազմությունը կոչվում է ֆունկցիայի գրաֆիկ կամ գծապատկեր:

$f: X \rightarrow Y$ ֆունկցիան կոչվում է զույգ, եթե ցանկացած $x \in X$ տարրի համար տեղի ունի $-x \in X$ և $f(-x) = f(x)$ պայմանը: $f: X \rightarrow Y$ ֆունկցիան կոչվում է կենտ, եթե ցանկացած $x \in X$ տարրի համար տեղի ունի $-x \in X$ և $f(-x) = -f(x)$ պայմանը:

Զույգ ֆունկցիաներ են օրինակ՝ $y = x^6$, $y = \cos x$, $y = \ln |x|$, $y = \frac{\sin x}{x}$, կենտ են՝ $y = \frac{1}{x^5}$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x$, $y = \arcsin(\sin x)$ ֆունկցիաները: Զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է օրդինատների առանցքի նկատմամբ, իսկ կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ: f և g ֆունկցիաները կոչ-

վում են հավասար, եթե նրանք որոշված են միևնույն X բազմության վրա և յուրաքանչյուր $x \in X$ տարրի համար տեղի ունի $f(x) = g(x)$ հավասարությունը: Ֆունկցիաների համար բնական ձևով մտցվում են թվաբանական գործողություններ: Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված են միևնույն X բազմության վրա: Այդ դեպքում այն ֆունկցիաները, որոնց արժեքները յուրաքանչյուր $x \in X$ տարրի համար հավասար են $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$ ցանկացած $x \in X$ համար), կոչվում են համա-

պատասխանաբար f և g ֆունկցիաների գումար, տարբերություն, արտադրյալ և քանորդ ֆունկցիաներ և նշանակվում են՝ $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/g :

Բարդ ֆունկցիա: Դիցուք $y = \varphi(x)$, $z = f(y)$ ֆունկցիաները որոշված են համապատասխանաբար X և Y բազմությունների վրա, ընդ որում y ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը պարունակվում է (ընկած է) f ֆունկցիայի որոշման տիրույթում: Այդ դեպքում այն F ֆունկցիան, որը յուրաքանչյուր $x \in X$ կետում ընդունում է $F(x) = f(\varphi(x))$ արժեքը, կոչվում է բարդ ֆունկցիա կամ φ և f ֆունկցիաների սուպերպոզիցիա և նշանակվում է $f(\varphi)$:

Հիմնական տարրական ֆունկցիաներ կոչվում են նույնաբար հաստատուն, աստիճանային, ցուցչային, լոգարիթմական, եռանկյունաչափական և հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները: Իսկ այն ֆունկցիաները, որոնք ստացվում են հիմնական տարրական ֆունկցիաներից վերջավոր քանակությամբ թվաբանական և սուպերպոզիցիա գործողությունների միջոցով, կոչվում են ուղղակի տարրական ֆունկցիաներ:

Հակադարձ ֆունկցիա: Դիցուք տրված է $y = f(x)$, $x \in D(f)$: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $x_0 \in D(f)$ f օրենքով կհամապատասխանեցվի ճիշտ մեկ $y_0 = f(x_0) \in E(f)$: Հաճախ հարկ է լինում ֆունկցիայի տրված y_0 արժեքի համար գտնել արգումենտի այն արժեքը կամ արժեքները, որոնց համար $f(x_0) = y_0$: Այլ կերպ ասած x արգումենտի համար լուծել $f(x) = y_0$, $y_0 \in E(f)$ հավասարումը:

Այս հավասարումը ունի գոնե մեկ լուծում: Դա ակնհայտ է, որովհետև y_0 ֆունկցիայի արժեք է: Սակայն հնարավոր է, որ հավասարումը ունենա մեկից ավել և նույնիսկ անվերջ քանակությամբ լուծումներ: Տրված հավասարման լուծումները կլինեն բոլոր այն կետերի արեքսիաները, որոնք ստացվում են $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի և $y = y_0$ ուղղի հատումից:

Եթե f ֆունկցիան այնպիսին է, որ յուրաքանչյուր $y_0 \in E(f)$ արժեք ընդունում է ճիշտ մեկ $x_0 \in D(f)$ կետում, ապա այդպիսի ֆունկցիան կոչվում է **հակադարձելի**: Հակադարձելի ֆունկցիայի համար յուրաքանչյուր $y \in E(f)$ համապատասխանում է ճիշտ մեկ $x \in D(f)$ այնպիսին, որ $y = f(x)$:

Եթե յուրաքանչյուր $y \in E(f)$ -ին համապատասխանեցնենք այն $x \in D(f)$ միակ արժեքը, որի համար $f(x) = y$, ապա դրանով $E(f)$ բազմության վրա տված կլինենք $x = g(y)$ ֆունկցիա, որին անվանում են f ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիա:

Շատ հաճախ հակադարձ ֆունկցիայի արգումենտը ևս նշանակում են x -ով և գրում $y = g(x)$, որտեղ g -ն f -ի հակադարձ ֆունկցիան է: Նշենք ուղիղ և հակադարձ ֆունկցիաների մի քանի հատկություններ.

Եթե g ֆունկցիան f ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է, ապա f ֆունկցիան g ֆունկցիայի հակադարձն է, ընդ ուրում՝

$$D(g) = E(f), \quad E(g) = D(f):$$

1) Ցանկացած $x \in D(f)$ համար ճիշտ է $g(f(x)) = x$ հավասարությունը և ցանկացած $x \in E(f)$ համար ճիշտ է $f(g(x)) = x$ հավասարությունը:

2) $y = g(x)$ ֆունկցիայի և $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկները սիմետրիկ են $y = x$ ուղղի նկատմամբ:

3) Եթե f -ը խիստ աճող է (նվազող է), ապա այն հակադարձելի է, ընդ որում հակադարձ g ֆունկցիան ևս կլինի խիստ աճող (նվազող):

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Ապացուցել, որ f ֆունկցիան աճող է X բազմության վրա՝

ա) $f(x) = x^3$, $X = R$

Δ – վերցնենք կամայական x_1 և x_2 կետեր X բազմությունից, որոնք բավարարում են $x_1 < x_2$ պայմանին: Հնարավոր է երեք դեպք՝

1) $0 \leq x_1 < x_2$;

2) $x_1 < x_2 \leq 0$;

3) $x_1 < 0$, $x_2 > 0$

Եթե տեղի ունի 1)-ը, ապա $f(x_1) = x_1^3 < f(x_2) = x_2^3$

Եթե $x_1 < x_2 \leq 0$, ապա $0 \leq -x_2 < -x_1$ և հետևաբար $(-x_2)^3 < (-x_1)^3$, որտեղից կհետևի (x^3 ֆունկցիան կենստ ֆունկցիա է) $-x_2^3 < -x_1^3$ անհավասարությունը, որը համարժեք է $x_1^3 < x_2^3$ անհավասարությանը: Եվ վերջապես, եթե $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ ապա $x_1^3 < 0$ և $x_2^3 > 0$ և հետևաբար $x_1^3 < x_2^3$:

Այսպիսով $x_1^3 < x_2^3$ անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած x_1, x_2 կետերի համար, որոնք բավարարում են $x_1 < x_2$ պայմանին: ∇

բ) Ապացուցել, որ $[-a; a]$ սիմետրիկ միջակայքում որոշված ցանկացած $f(x)$ ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել զույգ և կենստ ֆունկցիաների գումարի տեսքով:

$$\Delta - \text{Նշանակենք՝} \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

$x \in [-a; a]$: Չեշտ է տեսնել, որ $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաները կենստ և զույգ ֆունկցիաներ են:

$$\text{Իրոք՝} \quad \varphi(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -\varphi(x), \quad x \in [-a; a]$$

$$\psi(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \psi(x)$$

Չաշվենք $\varphi(x) + \psi(x)$, $x \in [-a; a]$ գումարը.

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \psi(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(x)}{2} - \\ &- \frac{f(-x)}{2} + \frac{f(-x)}{2} = f(x), \quad x \in [-a; a] \end{aligned}$$

$$\text{գ) Դիցուք } f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{(n \text{ անգամ})}:$$

$$\text{Գտնել } f_n\text{-ը, եթե } f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}:$$

Δ - Գտնենք $f(f(x))$ -ը

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

Օգտվելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից՝ ցույց տանք, որ

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}, \quad n = 1; 2; \dots$$

Ենթադրենք $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}, \quad k \geq 1$

$$f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

Հետևաբար $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

▽

դ) Գտնել $f(x)$ -ը, եթե $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}, \quad (x > 0)$

Δ- երբ $x > 0, \quad \frac{1}{x} > 0$: Հետևաբար փոխարինելով $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$

հավասարության մեջ x -ը $\frac{1}{x}$ -ով կուներենանք՝

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$$

▽

Գտնել $y = f(x)$ ֆունկցիայի $x = g(y)$ հակադարձ ֆունկցիան և նրա որոշման տիրույթը.

ա) $y = 3x - 4, \quad (-\infty < x < +\infty)$

Δ- Ֆունկցիան ածող է $(-\infty; +\infty)$ միջակայքում և արժեքների բազմությունը լցնում է $(-\infty; +\infty)$ միջակայքը. յուրաքանչյուր $y_0 \in (-\infty; +\infty)$ թվի

համար գոյություն ունի ճիշտ մեկ $x_0 = \frac{y_0 + 4}{3}$ կետ այնպիսին, որ

$$y_0 = 3 \cdot \frac{y_0 + 4}{3} - 4 = y_0: \text{ Ֆունկցիան հակադարձելի է և նրա հակադարձ}$$

ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը $x = \frac{y+4}{3}, \quad (-\infty < y < +\infty)$ կամ փոխելով

$$x\text{-ի և } y\text{-ի տեղերը կուներենանք հակադարձ ֆունկցիայի } y = \frac{x+4}{3},$$

$(-\infty < x < +\infty)$ տեսքը:

▽

$$y = \log_3(x^2 - 8x + 17), \quad x \in [4; +\infty)$$

$t = x^2 - 8x + 17 = (x-4)^2 + 1$ ֆունկցիան ածող է $[4; +\infty)$ միջակայքում և արժեքների բազմությունը համընկնում է $[1; +\infty)$ միջակայքի հետ: Յուրա-

քանչյուր $t_0 \in [1; +\infty)$ թվի համար գոյություն ունի ճիշտ մեկ $x_0 \in [4; +\infty)$ միջակայքին այնպիսին, որ $t_0 = x_0^2 - 8x_0 + 17$:

Իրոք, լուծենք $t_0 = x^2 - 8x + 17$ հավասարումը:

$$t_0 = x^2 - 8x + 17 = (x - 4)^2 + 1$$

$$(x - 4)^2 = t_0 - 1$$

Քանի որ $t_0 - 1 \geq 0$, ապա հավասարումն ունի ճիշտ մեկ արմատ՝ $x_0 = \sqrt{t_0 - 1} + 4$, որը պատկանում է $[4; +\infty)$ միջակայքին (հավասարման մյուս արմատը՝ $x_0 = -\sqrt{t_0 - 1} + 4 < 4$ և չի պատկանում $[4; +\infty)$ միջակայքին): Մյուս կողմից $y = \log_3 t$, $[1; +\infty)$ միջակայքում աճող է և արժեքների բազմությունը համընկնում է $[0; +\infty)$ միջակայքի հետ: Վերջնականապես ստացվեց, որ $y = \log_3(x^2 - 8x + 17)$ ֆունկցիան աճող է $[4; +\infty)$ միջակայքում և նրա արժեքների բազմությունը համընկնում է $[0; +\infty)$ միջակայքի հետ: Տրված ֆունկցիան հակադարձելի է և հետևաբար $[0; +\infty)$ միջակայքում գոյություն ունի հակադարձ ֆունկցիա, որն ունի հետևյալ տեսքը՝ $x = 4 + \sqrt{3^y - 1}$, $(0 \leq y < +\infty)$ կամ $y = 4 + \sqrt{3^x - 1}$, $(0 \leq x < +\infty)$:

2. ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ԵՎ ՈՇ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

f ֆունկցիան իր որոշման $D(f)$ տիրույթում կոչվում է ներքևից (վերևից) սահմանափակ, եթե գոյություն ունի c_1 (c_2) թիվ այնպիսին, որ ցանկացած $x \in D(f)$ համար տեղի ունի $f(x) \geq c_1$ ($f(x) \leq c_2$) անհավասարությունը: f ֆունկցիան իր որոշման $D(f)$ տիրույթում կոչվում է **սահմանափակ**, եթե այն միաժամանակ սահմանափակ է և՛ ներքևից և՛ վերևից, այսինքն գոյություն ունեն c_1 , c_2 թվեր այնպիսին, որ $c_1 \leq f(x) \leq c_2$, $x \in D(f)$:

f ֆունկցիան իր որոշման տիրույթին պատկանող՝ $x_0 \in D(f)$ կետում կոչվում է սահմանափակ, եթե գոյություն ունեն $c_1(x_0)$ և $c_2(x_0)$ թվեր և x_0 կետի շրջակայք (շրջակայքը նույնպես կարող է կախված լինել x_0 -ից) այնպիսին, որ $c_1(x_0) \leq f(x) \leq c_2(x_0)$ բոլոր այն x կետերի համար, որոնք պատկանում են այդ շրջակայքի և որոշման տիրույթի ընդհանուր մասին: Սովորաբար այդպիսի դեպքերում ասում են, որ ֆունկցիան լոկալ (տեղային) սահմանափակ է x_0 կետում:

f ֆունկցիան սահմանափակ է $D(f)$ -ում այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի $c > 0$ թիվ այնպիսին, որ տեղի ունի $|f(x)| \leq c$, $x \in D(f)$:

Երկրաչափորեն f ֆունկցիայի սահմանափակությունը նշանակում է, որ նրա գրաֆիկը ընկած է $-c \leq y \leq c$ շերտում:

Դիցուք $E(f)$ -ը ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է: Այդ դեպքում $E(f)$ թվային բազմության ճշգրիտ ստորին (ճշգրիտ վերին) եզրը անվանում են f ֆունկցիայի ճշգրիտ ստորին (ճշգրիտ վերին) եզր և նշանակում են

$$\inf_{x \in D(f)} \{f(x)\} \quad \left(\sup_{x \in D(f)} \{f(x)\} \right)$$

Այն դեպքում, երբ թվային բազմությունը սահմանափակ չէ ներքևից (վերևից), պայմանավորում ենք ընդունել

$$\inf_{x \in D(f)} \{f(x)\} = -\infty \quad \left(\sup_{x \in D(f)} \{f(x)\} = +\infty \right):$$

Դիցուք գոյություն ունի $x_0 \in D(f)$ կետ այնպիսին, որ բոլոր x կետերի համար $D(f)$ -ից տեղի ունի $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) անհավասարությունը: Այդ դեպքում ասում են, որ f ֆունկցիան x_0 կետում ընդունում է իր ամենափոքր (փոքրագույն) (ամենամեծ (մեծագույն)) արժեքը և գրում են՝

$$f(x_0) = \min_{x \in D(f)} \{f(x)\} \quad \left(f(x_0) = \max_{x \in D(f)} \{f(x)\} \right):$$

Պարզ է, որ եթե $f(x_0) = \min_{x \in D(f)} \{f(x)\}$ ($f(x_0) = \max_{x \in D(f)} \{f(x)\}$), ապա

$$\inf_{x \in D(f)} \{f(x)\} = f(x_0) \quad \left(\sup_{x \in D(f)} \{f(x)\} = f(x_0) \right)$$

Սահմանումից հետևում է, որ f ֆունկցիան կոչվում է $D(f)$ -ում կլինի վերևից (ներքևից) ոչ սահմանափակ, եթե ցանկացած $c > 0$ թվի համար գոյություն ունի $x_c \in D(f)$ կետ այնպիսին, որ տեղի ունի $f(x_c) > c$ ($f(x_c) < -c$) անհավասարությունը: Ֆունկցիան կլինի ոչ սահմանափակ, եթե ցանկացած $c > 0$ թվի համար գոյություն ունի $x_c \in D(f)$ կետ այնպիսին, որ տեղի ունի $|f(x_c)| > c$ անհավասարությունը:

Երկրաչափորեն ֆունկցիայի անսահմանափակությունը նշանակում է հետևյալը. ինչպիսին էլ լինի կոորդինատական հարթության $-c \leq y \leq c$ շերտը, անպայմանորեն ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա կգտնվի առնվազն մեկ $M_c(x_c, f(x_c))$ կետը, որը դուրս է ընկած այդ շերտից:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Ապացուցել ֆունկցիայի սահմանափակությունը

ա) $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$, $x \in [0; +\infty)$

բ) $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x^4}$

ա) Δ – Օգտվենք $0 \leq \frac{2|a| \cdot |b|}{a^2 + b^2} \leq 1$, $a \in R$, $b \in R$, $a^2 + b^2 \neq 0$ անհավասարությունից: Նախ $f(x) \geq 0$, $x \in [0; +\infty)$: Այնպես որ f -ը ներքևից սահմանափակ է: Երբ $x \in [0; 1]$, $x^3 \leq x^2$: Որտեղից կհետևի $0 \leq \frac{x^3}{1+x^4} \leq \frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$ (օգտվեցինք նշված անհավասարությունից): Երբ $x \in [1; +\infty)$ միջակայքին, $x^3 \leq x^4$: Հետևաբար այդպիսի x -երի համար

$$0 \leq \frac{x^3}{1+x^4} \leq \frac{x^4}{1+x^4} < 1:$$

Միավորելով ստացված արդյունքները կունենանք՝

$$0 \leq \frac{x^3}{1+x^4} \leq 1, \quad x \in [0; +\infty):$$

f -ը սահմանափակ է:

▽

բ) Δ – $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x^4}$, $x \in R$

Նախ $f(x) \geq 0$, $x \in R$: Այնպես, որ f -ը ներքևից սահմանափակ է: Ցույց տանք, որ այն սահմանափակ է նաև վերևից: Քանի որ $\frac{1}{1+x^4}$ ֆունկցիան ամենամեծ արժեքն ընդունում է $x=0$ կետում, ապա $\frac{1}{1+x^4} \leq \frac{1}{1+0} = 1$, $x \in R$: $\frac{x^2}{1+x^4}$ ֆունկցիան ոչ բացասական է և ըստ ապացուցած անհավասարության ($a=1$, $b=x^2$) փոքր կամ հավասար է $\frac{1}{2}$ -ից: Այնպես որ

$$f(x) = \frac{1+x^3}{1+x^4} = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^3}{1+x^4} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad x \in R$$

Ստացվեց $0 \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$, $x \in R$: f -ը սահմանափակ է:

▽

Ապացուցել $f(x)$ ֆունկցիայի ոչ սահմանափակությունը.

$$\text{ա) } f(x) = x^3 - 3x, \quad x \in [2; +\infty)$$

Δ – Ցույց տանք, որ f ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ: Իրոք, նախ՝ $f(x) = x^3 - 3x \geq x$, $x \in [2; +\infty)$: Վերցնենք ցանկացած $M > 0$ թիվ և որպես $x_M \in [2; +\infty)$ կետ վերցնենք $\max\{2; M\}$ թվին գերազանցող կամայական կետ՝ $x_M > \max\{2; M\}$: Այդ դեպքում

$$f(x_M) = x_M^3 - 3x_M \geq x_M > M$$

Քանի որ $M > 0$ թիվը կամայական է, ապա f -ը վերևից սահմանափակ չէ. ∇

$$\text{բ) } f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad x \in R$$

Δ – Ցույց տանք, որ f ֆունկցիան $x = 0$ կետի ոչ մի շրջակայքում սահմանափակ չէ:

Իրոք, վերցնենք $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $n = 1; 2; \dots$ հաջորդականությունը:

Ունենք $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ և

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) = +\infty$$

Հետևաբար 0 կետի ինչպիսի շրջակայք էլ վերցնելու լինենք ինչ-որ n_0 համարից սկսած $\{x_n\}$ հաջորդականության բոլոր անդամները ընկած կլինեն այդ շրջակայքում և հետևաբար ինչքան էլ մեծ լինի նախապես տրված $M > 0$ թիվը, այդ n_0 համարը կարող ենք այնքան մեծ վերցնել, որը օրինա-

կի համար x_{n_0} -ն պատկանի այդ շրջակայքին և $f(x_{n_0}) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n_0 > M$ -ից: ∇

Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է և լուրջ սահմանափակ է $(a; b)$ ինտերվալի յուրաքանչյուր կետում: Հետևում է, որ ֆունկցիան $(a; b)$ -ում սահմանափակ է:

Ոչ չի հետևում: Օրինակ՝

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0; 1)$$

Այս ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ: Իրոք, ենթադրենք $M > 1$ թի-

վը կամայական թիվ է: Վերցնենք $x_M = \frac{1}{2M} \in (0;1)$ կետը: Այդ դեպքում

$$f(x_M) = \frac{1}{\frac{1}{2M}} = 2M > M$$

Ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ: Սակայն այն լոկալ սահմանափակ է $(0;1)$ ինտերվալի յուրաքանչյուր x_0 կետում: Իրոք, յուրաքանչյուր $x_0 \in (0;1)$ կետի համար վերցնենք $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ շրջակայքը, որտեղ

$0 < \varepsilon < \min\left(\frac{x_0}{2}; 1 - x_0\right)$: Քանի որ $\frac{1}{x}$ ֆունկցիան նվազող է, ապա

$$f(x_0 + \varepsilon) < f(x) < f(x_0 - \varepsilon), \quad x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon):$$

Որպես c_1 և c_2 թվեր վերցնենք

$$c_1 = f(x_0 + \varepsilon) = \frac{1}{x_0 + \varepsilon}, \quad c_2 = f(x_0 - \varepsilon) = \frac{1}{x_0 - \varepsilon}$$

$f(x)$ ֆունկցիան լոկալ սահմանափակ է $\forall x_0 \in (0;1)$ կետում: ∇

Ցույց տալ, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան լոկալ սահմանափակ է $[a;b]$ հատվածի յուրաքանչյուր $x_0 \in [a;b]$ կետում, ապա այն սահմանափակ է $[a;b]$ հատվածում:

Δ – Ապացույցը կատարենք հակասող ընդունելության եղանակով: Ենթադրենք ֆունկցիան սահմանափակ չէ: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ այն սահմանափակ չէ վերևից: Այդ դեպքում $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a;b]$ այնպիսին, որ

$$f(x_n) > n, \quad n = 1; 2; \dots \quad (1)$$

(1)-ից կհետևի՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$: Մյուս կողմից, քանի որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է $(a \leq x_n \leq b, n = 1; 2; \dots)$, ապա ըստ Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմի, նրանից կարելի է անջատել $\{x_{n_k}\}$, $k = 1; 2; \dots$ զուգամետ ենթահաջորդականություն՝ $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$: Ըստ սահմանների վերաբերյալ հայտնի թեորեմի, կհետևի $a \leq c \leq b$: Քանի որ f -ը լոկալ սահմանափակ է $[a;b]$ հատվածի յուրաքանչյուր կետում, ապա այն լոկալ սահմանափակ կլինի նաև c կետում: Գոյություն ունեն M_1 և M_2 թվեր և $(c - \delta; c + \delta)$ շրջակայք այնպիսին, որ $(c - \delta; c + \delta) \subset [a;b]$ (եթե c -ն ներքին կետ է, եթե c -ն

ծայրակետ է, ապա համապատասխանաբար աջակողմյան և ձախակողմյան շրջակայքեր) և

$$M_1 \leq f(x) \leq M_2, \quad x \in (c - \delta; c + \delta) \quad (2)$$

Իսկ սա հակասություն է: Որովհետև նախ $f(x_{n_k}) \rightarrow +\infty$ և սկսած ինչ-որ k_0 համարից բոլոր x_{n_k} կետերը կպատկանեն $(c - \delta; c + \delta)$ շրջակայքին և $f(x_{n_k}) > n_k$: Հակասությունը բխեց նրանից, որ ենթադրել էինք, թե ֆունկցիան սահմանափակ չէ վերևից: ∇

Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և արժեքների բազմությունը.

$$a) f(x) = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$$

Δ – Քանի որ $4 + x^2 \neq 0$, $x \in R$, ապա $D(f) = R$: Գտնենք $E(f)$ -ը:

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{4 + x^2} = \frac{8 - (4 + x^2)}{4 + x^2} = -1 + \frac{8}{4 + x^2}$$

Քանի որ $\frac{8}{4 + x^2}$ ֆունկցիան կնդունի իր ամենամեծ արժեքը, երբ հայտարարը՝ $(4 + x^2)$ -ին ընդունում է իր ամենափոքր արժեքը, ապա f ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքը ընդունում է $x = 0$ կետում՝ $f(0) = 1$: Ֆունկցիան ամենափոքր արժեք չունի: Սակայն հեշտ է նկատել, որ $\inf_{x \in R} \{f(x)\} = -1$: Իրոք, նախ՝

$$1) f(x) = -1 + \frac{8}{4 + x^2} > -1, \quad x \in R$$

$$2) \forall \varepsilon > 0, \exists x' \in R, f(x') < -1 + \varepsilon$$

Վերցնենք $0 < \varepsilon < 2$ դրական թիվ և լուծենք $-1 + \frac{8}{4 + x^2} < -1 + \varepsilon$ անհավասարությունը:

$$-1 + \frac{8}{4 + x^2} < -1 + \varepsilon$$

$$\frac{8}{4 + x^2} < \varepsilon \Leftrightarrow 4 + x^2 > \frac{8}{\varepsilon} \Rightarrow x^2 > \frac{8}{\varepsilon} - 4 \Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{8}{\varepsilon} - 4}$$

Հետևաբար, եթե որպես $x' \in R$ վերցնենք օրինակի համար $x' = 2\sqrt{\frac{8}{\varepsilon} - 4}$ կետը, ապա այդ կետում $f(x') < -1 + \varepsilon$:

Հետագայում, օգտագործելով f -ի անընդհատության գաղափարը, կհիմնավորենք, որ f ֆունկցիայի համար $E(f) = (-1; 1]$ ∇

$$p) f(x) = \log_3(5 + 4x - x^2)$$

$$\Delta - D(f) = \{x : x \in R, 5 + 4x - x^2 > 0\} = (-1; 5)$$

Քանի որ $\log_3 t$ ֆունկցիան աճող է, ապա $f(x)$ -ը իր ամենամեծ արժեքը կնդունի այն $x_0 \in (-1; 5)$ կետում, որում $5 + 4x - x^2$ եռանդամն է ընդունում իր ամենամեծ արժեքը՝

$$5 + 4x - x^2 = 9 - (x - 2)^2$$

Այստեղից կհետևի, որ $\max_{x \in (-1; 5)} \{-x^2 + 4x + 5\} = 9$: Հետևաբար

$$\max_{x \in (-1; 5)} f(x) = \log_3 9 = 2$$

Ֆունկցիան փոքրագույն արժեք չունի, սակայն նույն ձևով ինչպես նախորդ խնդրում կարելի է ցույց տալ, որ $\inf_{x \in (-1; 5)} \{f(x)\} = -\infty$:

Հետագայում կհիմնավորենք, որ $E(f) = (-\infty; 2]$ ∇

Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի $\sup f$ -ը $\inf f$ -ը և $\max f$ -ը, $\min f$ -ը, եթե նրանք գոյություն ունեն:

Դիտողություն: Եթե E ոչ դատարկ թվային բազմությունն ունի ամենամեծ (ամենափոքր) տարրը, ապա այն կհանդիսանա այդ բազմության համար վերին (ստորին) եզր և հետևաբար բոլոր վերին (ստորին) եզրերից ամենափոքրը (ամենամեծը): Այնպես որ այս դեպքում $\sup f = \max f$ ($\inf f = \min f$) :

$$a) f(x) = \frac{2x}{x^2 + 9}, \quad x \in [-4; 5]$$

$$\Delta - \text{Օգտվենք } -1 \leq \frac{2ab}{a^2 + b^2} \leq 1, \quad a, b \in R \text{ անհավասարությունից, ընդ}$$

որում հավասարության նշանը տեղի ունի, երբ $a = -b$, կամ $a = b$ դեպքում:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3x}{x^2 + 9} : \text{ Քանի որ } -1 \leq \frac{2 \cdot 3x}{9 + x^2} \leq 1, \quad x \in [-4; 5], \text{ ապա}$$

$$-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3x}{9 + x^2} = \frac{2x}{9 + x^2} \leq \frac{1}{3}, \quad x \in [-4; 5],$$

$$\min f = f(-3) = -\frac{1}{3}, \quad \max f = f(3) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Հետևաբար, ըստ դիտողության } \sup f = \max f = \frac{1}{3}, \quad \inf f = \min f = -\frac{1}{3} \quad \nabla$$

$$p) f(x) = \cos^2 x + \cos x + 3$$

$$\Delta - f(x) = \cos^2 x + \cos x + 3 = \left(\cos x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{11}{4}$$

Հետևաբար $\min f$ ֆունկցիան կընդունի այն x կետերում, որոնցում $\cos x = -\frac{1}{2}$ և $\max f$ -ը ֆունկցիան կընդունի այն կետերում, որոնցում $\cos x = 1$:

$$x_n = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \text{ միմիմունի կետերը}$$

$$x_k = 2k\pi, \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \text{ մաքսիմունի կետերը}$$

$$\min f = \frac{11}{4}, \quad \max f = \frac{9}{4} + \frac{11}{4} = 5$$

Հետևաբար, ըստ դիտողության

$$\sup f = \max f = 5, \quad \inf f = \min f = \frac{11}{4} \quad \nabla$$

$$q) f(x) = 2^{-|x+2|}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 2^x, & \text{եթե } x < -2 \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^x}, & \text{եթե } x \geq -2 \end{cases}$$

Քանի որ 2^x ֆունկցիան աճող է, իսկ $1/2^x$ ֆունկցիան նվազող, $-\infty < x < +\infty$, ապա f -ը աճող է $(-\infty; -2]$ և նվազող է $[-2; +\infty)$ միջակայքում: Հետևաբար $x = -2$ կետում ֆունկցիան կընդունի իր մեծագույն արժեքը: $\sup f = \max f = 1$:

Ֆունկցիան փոքրագույն արժեք չունի, սակայն $\inf f = 0$: Իրոք՝

$$1) \forall x \in R \quad 2^{-|x+2|} > 0$$

$$2) \text{ վերցնենք } \forall \varepsilon > 0 \text{ թիվ և գտնենք } x' \in R \text{ այնպիսին, որ } 2^{-|x'+2|} < \varepsilon:$$

Լուծենք $2^{-|x+2|} < \varepsilon$ անհավասարությունը.

$$2^{-|x+2|} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x+2| > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 + \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \\ x < -2 - \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

որպես x' կարող ենք վերցնել կամայական թիվ լուծումների բազմությունից:

Այսպիսով՝ $\sup f = \max f = 1$, $\inf f = 0$, $\min f$ -ը գոյություն չունի: Նման ձևով կարող ենք ցույց տալ, որ f ֆունկցիան ամենափոքր արժեք չունի: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ ինչպիսիք էլ $m_0 > 0$ թիվը, գոյություն ունի $x' \in R$ այնպիսին, որ $f(x') < m_0$:

Իսկ այդպիսի $x' \in R$ գոյությունը հետևում է վերը բերված դատողություններից, եթե $\varepsilon > 0$ թիվը փոխարինենք $m_0 > 0$ թվով: ∇

$$\eta) f(x) = \frac{3-4x}{2x-3}, \quad x \in (-\infty; -1]$$

Δ – Պարզենք f ֆունկցիայի մոնոտոնության բնույթը:

$$f(x) = \frac{3-4x}{2x-3} = \frac{-4x+6-3}{2x-3} = -2 - \frac{3}{2x-3} \quad (1)$$

Վերցնենք x_1 և $x_2 \in (-\infty; -1]$ և $x_1 < x_2$ պայմանին բավարարող կետեր:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{3}{2x_1-3} - \frac{3}{2x_2-3} = \frac{6(x_1-x_2)}{(2x_1-3)(2x_2-3)}$$

Քանի որ $2x_1-3 < 0$, $2x_2-3 < 0$ և $x_1-x_2 < 0$ ապա $f(x_1) - f(x_2) < 0$: Որտեղից հետևում է, որ f ֆունկցիան աճող է $(-\infty; -1]$ միջակայքում: Հետևաբար $\sup f = \max f = f(-1) = 1$, $\min f$ -ը գոյություն չունի: Իրոք՝ նախ

$f(x) = \frac{-4x+3}{2x-3} = -2 - \frac{3}{2x-3} > -2$, $x \in (-\infty; -1]$: Ցույց տանք, որ ինչպիսիք էլ m_0 թիվը $-2 < m_0 < 1$ թիվը գոյություն ունի $x' \in (-\infty; -1]$ այնպիսին, որ

$$-2 - \frac{3}{2x'-3} < m_0 \quad (1)$$

լուծելով (1) անհավասարումը x' -ի նկատմամբ կունենանք $x' < \frac{3(m_0+1)}{2(m_0+2)}$:

Այնպես որ f -ը ամենափոքր արժեք չունի: ∇

Ցույց տանք, որ $\inf f = -2$: Իրոք (1)-ից հետևում է $f(x) \geq -2$, $x \in (-\infty; -1]$: Վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ և լուծենք $-2 - \frac{3}{2x-3} < -2 + \varepsilon$ անհավասարությամբ:

$$-\frac{3}{2x-3} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{3-2x} < \varepsilon \Leftrightarrow 3-2x > \frac{3}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \left(3 - \frac{3}{\varepsilon} \right):$$

Որպես x' վերցնենք $(-\infty; -1]$ միջակայքին պատկանող և $\frac{1}{2}\left(3 - \frac{3}{\varepsilon}\right)$ թվից փոքր ցանկացած կետ: Այդ դեպքում $f(x') < -2 + \varepsilon$: Հետևաբար $f(x) \geq -2$, $x \in (-\infty; -1]$ և $f(x') < -2 + \varepsilon$, $x' \in (-\infty; -1]$ պայմաններից, կհետևի՝ $\inf f = -2$:

Այսպիսով՝ $\sup f = \max f = -1$ $\inf f = -2$ $\min f$ -ը գոյություն չունի: ∇

3. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆ, ԵՐԿՐԱՇԱՓԱԿԱՆ ՄԵԿՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է a կետի $\dot{U}_{\delta_0}(a)$ ծակ շրջակայքում: b թիվը կոչվում է f ֆունկցիայի սահման, երբ x -ը ձգտում է a -ին (կամ a կետում), եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ ($\delta < \delta_0$) թիվ այնպիսին, որ ցանկացած կետի համար, որը բավարարում է $0 < |x - a| < \delta$ պայմանին, տեղի ունի $|f(x) - b| < \varepsilon$ անհավասարությունը (ֆունկցիայի սահման ըստ Կոշիի): Այս դեպքում գրում են $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ կամ $f(x) \rightarrow b$, երբ $x \rightarrow a$:

Տրամաբանական սիմվոլների միջոցով այս սահմանումը կարելի է գրել հետևյալ կերպ $\left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (\delta < \delta_0):$

$$\forall x: 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

կամ օգտագործելով շրջակայքի հասկացությունը՝ կարելի է այն գրել հետևյալ կերպ.

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (\delta < \delta_0): \forall x \in \dot{U}_{\delta}(a) \Rightarrow f(x) \in \dot{U}_{\varepsilon}(b)$$

b թիվը կոչվում է f ֆունկցիայի սահման, երբ x -ը ձգտում է a -ին (կամ a կետում), եթե ցանկացած $\{x_n\}$ հաջորդականության համար, որի բոլոր անդամները պատկանում են a կետի δ_0 շրջակայքին և տարբեր են a -ից ($x_n \neq a; n = 1; 2; \dots$) և որը ձգտում է a -ին ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$), ֆունկցիայի համապատասխան արժեքներից կազմված $\{f(x_n)\}$ թվային հաջորդականությունը ձգտում է b -ին ($\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$): (Ֆունկցիայի սահման ըստ Հայնեի):

Սահմանի Կոշիի և Ջայնեի սահմանումները համարժեք են:

b թիվը կոչվում է f ֆունկցիայի սահման, երբ $x \rightarrow a$ -ին (կամ a կետում), եթե b կետի ցանկացած ցանկացած $U_\varepsilon(b)$ շրջակայքի համար գոյություն ունի a կետի $\dot{U}_\delta(a)$ ծակ շրջակայք, այնպիսին, որ $\forall x \in \dot{U}_\delta(a)$ կետի համար $f(x) \in U_\varepsilon(b)$:

Օգտվելով սահմանի երկրաչափական մեկնաբանությունից և շրջակայքերի տերմիններից, սահմանի գաղափարը կարող ենք ընդհանրացնել այն դեպքերի համար, երբ a կամ b թվերից գոնե մեկը, կամ երկուսն էլ միաժամանակ հավասար են $\infty, +\infty, -\infty$ սիմվոլներից որևէ մեկին:

b թիվը կամ սիմվոլը կոչվում է f ֆունկցիայի սահման, երբ x -ը ձգտում է a թվին կամ սիմվոլին, եթե b կետի կամ սիմվոլի $\forall U_\varepsilon(b)$ ($U_{\Delta_1}(b)$) շրջակայքի համար գոյություն ունի a կետի կամ սիմվոլի $\dot{U}_\delta(a)$ ($U_{\Delta_2}(a)$) շրջակայք այնպիսին, որ $\forall x \in \dot{U}_\delta(a)$ ($x \in U_{\Delta_2}(a)$) կետի համար $f(x) \in U_\varepsilon(b)$ ($f(x) \in U_{\Delta_1}(b)$):

4. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԻԱԿՈՂՄԱՆԻ ՍԱՅՄԱՆՆԵՐ, ՄԱՍՆԱԿԻ ՍԱՅՄԱՆՆԵՐ

Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է a կետի աջակողմյան՝ $a < x < a + \delta_0$ (ծախակողմյան՝ $a - \delta_0 < x < a$) շրջակայքում:

b թիվը կոչվում է f ֆունկցիայի աջակողմյան (ծախակողմյան) սահման, երբ x -ը ձգտում է a -ի (կամ a կետում), եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ ($\delta < \delta_0$) թիվ այնպիսին, որ կամայական x կետի համար, որը բավարարում է $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) պայմանին, տեղի ունի $|f(x) - b| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Նշանակվում է $b = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$:

* a կետի $\dot{U}_\delta(a)$ ծակ շրջակայքը, դա a կետի $(a - \delta, a + \delta)$ շրջակայքն է առանց a կետի
 ∞ սիմվոլի $U_\Delta(\infty)$ շրջակայքը ($\Delta > 0$), դա $U_\Delta(\infty) = \{x: |x| > \Delta\}$ բազմությունն է
 $+\infty$ սիմվոլի $U_\Delta(+\infty)$ շրջակայքը $U_\Delta(+\infty) = \{x: x > \Delta\}$ բազմությունն է
 $-\infty$ սիմվոլի $U_\Delta(-\infty)$ շրջակայքը $U_\Delta(-\infty) = \{x: x < -\Delta\}$ բազմությունն է:

Տրամաբանական սիմվոլների միջոցով այս սահմանումը գրվում է հետևյալ կերպ.

$$\left\{ b = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\delta < \delta_0) : \\ \forall x : a < x < a + \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Երբ f ֆունկցիան որոշված է a կետի երկկողմանի $\dot{U}_{\delta_0}(a)$ ծակ շրջակայքում, ապա a կետում ֆունկցիայի սահմանի գոյությունը համարժեք է $f(a-0)$ և $f(a+0)$ սահմանների գոյությանը և հավասարությանը:

Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է a կետի $\dot{U}_{\delta}(a)$ ծակ շրջակայքում:

b թիվը կոչվում է f ֆունկցիայի մասնակի սահման, երբ x -ը ձգտում է a -ին, եթե գոյություն ունի $\{x_n\}$ $x_n \neq a$, $(n=1;2;\dots)$ հաջորդականություն այնպիսին, որ $x_n \rightarrow a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$:

Նույն ձևով սահմանվում են անվերջ և միակողմանի մասնակի սահմանները: f ֆունկցիայի ամենափոքր և ամենամեծ մասնակի սահմաններին անվանում են այդ ֆունկցիայի ստորին և վերին սահմաններ և նշանակում են $\liminf_{x \rightarrow a} f(x)$ և $\limsup_{x \rightarrow a} f(x)$ սիմվոլներով:

5. ՄՈՆՈՏՈՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԱՅՄԱՆԸ

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան աճող է և սահմանափակ $(a;b)$ միջակայքում, ապա յուրաքանչյուր $x_0 \in (a;b)$ կետում գոյություն ունեն ձախակողմյան՝ $f(x_0-0)$ և աջակողմյան՝ $f(x_0+0)$ վերջավոր սահմաններ, ընդ որում $f(x_0-0) \leq f(x_0) \leq f(x_0+0)$: Մասնավորապես գոյություն ունեն a և b կետերում համապատասխանաբար աջակողմյան և ձախակողմյան վերջավոր սահմաններ, որոնք հավասար են՝ $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f$:

Եթե $f(x)$ -ը նվազող է և սահմանափակ, ապա յուրաքանչյուր $x_0 \in (a;b)$ ներքին կետում գոյություն ունեն ձախակողմյան՝ $f(x_0-0)$ և աջակողմյան՝ $f(x_0+0)$ վերջավոր սահմաններ, ընդ որում $f(x_0-0) \geq f(x_0) \geq f(x_0+0)$: Մասնավորապես a և b կետերում գոյություն ունեն համապատասխանաբար աջակողմյան և ձախակողմյան վերջավոր սահմաններ, որոնք հավասար են՝ $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f$:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Օգտվելով սահմանի Կոշիի սահմանումից՝ ապացուցել հավասարությունը.

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 9x + 4}{x + 7} = -2$$

Δ – Ֆունկցիան դիտարկենք $x_0 = -2$ կետի $\delta_0 = 1$ ծակ շրջակայքում՝

$$\dot{U}_1(-2) = (-3; -1) \quad x \neq -2$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 + 9x + 4}{x + 7} - (-2) \right| &= \left| \frac{x^2 + 9x + 4 + 2x + 14}{x + 7} \right| = \left| \frac{x^2 + 11x + 18}{x + 7} \right| = \\ &= |x + 2| \cdot \frac{|x + 9|}{|x + 7|} < \frac{8}{4} \cdot |x + 2| = 2|x + 2|, \quad x \in \dot{U}_1(-2) \end{aligned}$$

Վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ և լուծենք, $2|x + 2| < \varepsilon$ անհավասարումը

$|x + 2| < \frac{\varepsilon}{2}$: Որպես $\delta(\varepsilon) > 0$ վերցնենք $\delta(\varepsilon) = \min \left\{ 1; \frac{\varepsilon}{2} \right\}$: Այդ դեպքում

$0 < |x + 2| < \delta$ կիստևի $\left| \frac{x^2 + 9x + 4}{x + 7} + 2 \right| < \varepsilon$ անհավասարությունը: ▽

$$\text{բ) } \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 - 5x + 29} = 5$$

Δ – Դիտարկենք ֆունկցիան $x_0 = 4$ կետի $\delta_0 = 1$ ծակ շրջակայքում

$$\dot{U}_1(4) = \{x : 3 < x < 5, x \neq 4\}$$

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{x^2 - 5x + 29} - 5 \right| &= \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x^2 - 5x + 29} + 5} \right| = \\ &= |x - 4| \cdot \frac{|x - 1|}{\sqrt{x^2 - 5x + 29} + 5} < \frac{4}{5} |x - 4|, \quad x \in \dot{U}_1(4) \end{aligned}$$

Վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ և լուծենք $\frac{4}{5}|x - 4| < \varepsilon$ անհավասարումը:

Որպես $\delta(\varepsilon)$ թիվ վերցնենք՝ $\delta(\varepsilon) = \min \left\{ 1; \frac{5}{4}\varepsilon \right\}$: ▽

$$\text{գ) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}-0} \frac{3x + 4}{3x - 1} = -\infty$$

Ապացուցելու համար բավական է յուրաքանչյուր $\Delta > 0$ թվի համար գտնել $\delta(\Delta) > 0$ թիվ այնպիսին, որ բոլոր x -երի համար, որոնք բավարա-

րում են $\frac{1}{3} - \delta < x < \frac{1}{3}$ պայմանին, տեղի ունենա $\frac{3x+4}{3x-1} < -\Delta$ անհավասար

րություը: Քանի որ $x < \frac{1}{3}$ ապա, $3x-1 < 0$ հետևաբար

$$\frac{3x+4}{3x-1} < -\Delta \Leftrightarrow 3x+4 > -\Delta(3x-1) = -3\Delta x + \Delta \Leftrightarrow 3(1+\Delta)x > \Delta-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{\Delta-4}{3(1+\Delta)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1+\Delta-5}{1+\Delta} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{5}{1+\Delta} \right)$$

Այսպիսով, հենց որ $\frac{1}{3} - \frac{5}{3(1+\Delta)} < x < \frac{1}{3}$, ապա տեղի կունենա

$\frac{3x+4}{3x-1} < -\Delta$ անհավասարություը, որպես $\delta(\Delta) > 0$ թիվ վերցնենք

$$\delta(\Delta) = \frac{5}{3(1+\Delta)} :$$

▽

$$\eta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-8x}{2x+7} = -4$$

Յույց տաը, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություը ունի $\Delta(\varepsilon) > 0$ թիվ այնպիսին, որ $x < -\Delta$ պայմանին բավարարող $\forall x$ -ի համար

տեղի ունի $\left| \frac{5-8x}{2x+7} + 4 \right| < \varepsilon$ անհավասարություը:

$$\left| \frac{5-8x}{2x+7} + 4 \right| = \left| \frac{5-8x+8x+28}{2x+7} \right| = \frac{33}{|2x+7|} < \frac{33}{|2x|-7} < \frac{33}{|x|}$$

բոլոր այն x -երի համար, որոնք բավարարում են $|x| > 7$ պայմանին:

Վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ և լուծենք $\frac{33}{|x|} < \varepsilon$ անհավասարություը:

$$|x| > \frac{33}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < -\frac{33}{\varepsilon}, \quad x > \frac{33}{\varepsilon} :$$

Որպես $\Delta(\varepsilon) > 0$ թիվ վերցնենք՝ $\Delta(\varepsilon) = \max \left\{ 7; \frac{33}{\varepsilon} \right\} :$

▽

$$\text{ե) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-9}{3+x} = -\infty$$

Δ – Ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ ցանկացած $\Delta_1 > 0$ թվի համար գոյություը ունի $\Delta_2(\Delta_1) > 0$ թիվ այնպիսին, որ $x < -\Delta_2$ պայմա-

նին բավարարող բոլոր x -երի համար տեղի ունի $\frac{x^2-9}{3+x} < -\Delta_1$ անհավասարությունը:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք ենթադրել, որ $x < -3$:

$$\frac{x^2-9}{3+x} < -\Delta_1 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+3)}{3+x} < -\Delta_1 \Leftrightarrow x-3 < -\Delta_1 \Leftrightarrow x < 3-\Delta_1$$

Հաշվի առնելով նաև $x < -3$, որպես $\Delta_2(\Delta_1)$ թիվ վերցնենք

$$\Delta_2(\Delta_1) = \max\{3; \Delta_1 - 3\} \quad \nabla$$

զ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [3x+1] = +\infty$

Ցույց տանք, որ ցանկացած $\Delta_1 > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\Delta_2(\Delta_1) > 0$ թիվ այնպիսին, որ $x > \Delta_2$ պայմանին բավարարող բոլոր x -երի համար տեղի ունի $[3x+1] > \Delta_1$ անհավասարությունը:

Օգտվենք $[3x+1] \leq 3x+1 < [3x+1]+1$, կունենանք

$$[3x+1] > 3x > \Delta_1 \Leftrightarrow x > \frac{\Delta_1}{3}$$

հետևաբար, եթե որպես $\Delta_2(\Delta_1) > 0$ թիվ վերցնենք $\Delta_2(\Delta_1) = \frac{\Delta_1}{3}$, ապա $x > \Delta_2$ պայմանին բավարարող բոլոր x -երի համար տեղի կունենա

$$[3x+1] > 3x > 3 \cdot \frac{\Delta_1}{3} = \Delta_1 \text{ անհավասարությունը:} \quad \nabla$$

Օգտվելով սահմանի Հայնեի սահմանումից, ցույց տալ, որ հետևյալ սահմանը գոյություն չունի:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \cos \frac{\pi}{3x+2}$$

Ապացուցելու համար բավական է գտնել $\{x_n\}$, $n=1;2;\dots$ հաջորդականության, որը ձգտում է $-\frac{2}{3}$ -ին, սակայն ֆունկցիայի համապատասխան արժեքներից կազմված $\{f(x_n)\}$ հաջորդականությունը սահման չունի, կամ գտնել երկու տարբեր $\{x'_n\}$ և $\{x''_n\}$ ($n=1;2;\dots$) հաջորդականություններ, որոնք

ծգտում են $-\frac{2}{3}$ թվին, սակայն $\{f(x'_n)\}$ և $\{f(x''_n)\}$ ($n=1;2;\dots$) հաջորդականությունները ունեն տարբեր սահմաններ: Առաջին դեպքում որպես $\{x_n\}$ հաջորդականություն վերցնենք՝ $x_n = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3n}$, ($n=1;2;\dots$) հաջորդականությունը:

$$\text{Այդ դեպքում } f(x_n) = \cos \frac{\pi}{3x_n + 2} = \cos \frac{\pi}{-2 + 1/n + 2} = \cos \pi n = (-1)^n,$$

$n=1;2;\dots$ $\{f(x_n)\}$ -ը սահման չունի:

Երկրորդ դեպքում ելնում ենք հետևյալ դատողություններից: Քանի որ $\cos x = a$ հավասարումը ($|a| \leq 1$) ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ, ապա $\{x'_n\}$ և $\{x''_n\}$ ($n=1;2;\dots$) հաջորդականությունները գտնենք հետևյալ կերպ՝

$$\cos \frac{\pi}{3x'_n + 2} = 1, \quad n=1;2;\dots$$

$$\cos \frac{\pi}{3x''_n + 2} = -1, \quad n=1;2;\dots$$

$$\frac{\pi}{3x'_n + 2} = 2\pi n, \quad (n=1;2;\dots) \Rightarrow x'_n = -\frac{2}{3} + \frac{1}{6n}, \quad n=1;2;\dots$$

$$\frac{\pi}{3x''_n + 2} = \pi(2n-1), \quad (n=1;2;\dots) \Rightarrow x''_n = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3(2n-1)}, \quad n=1;2;\dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = -\frac{2}{3}$$

Սակայն $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = -1$: $-1 \neq 1$: Ֆունկցիան սահման չունի:

բ) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} 4^{\frac{1}{2x-3}}$

Վերցնենք $x'_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2n}$ և $x''_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$, $n=1;2;\dots$ հաջորդականություն-

ները: Ունենք $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = \frac{3}{2}$

Հաշվենք $\{f(x'_n)\}$ և $\{f(x''_n)\}$ -ը յուրաքանչյուր $n \in N$ համար

$$f(x'_n) = 4^{\frac{1}{2(\frac{3}{2} + \frac{1}{2n}) - 3}} = 4^n, \quad n = 1; 2; \dots$$

$$f(x''_n) = 4^{\frac{1}{2(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n}) - 3}} = 4^{-n}, \quad n = 1; 2; \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} = 0 \quad \text{ֆունկցիան սահման}$$

չունի, երբ $x \rightarrow \frac{3}{2}$ -ի:

Օգտվելով Սահմանի Հայնեի սահմանումից, ցույց տալ որ $f(x)$ ֆունկցիան ունի սահման միայն նշված կետերում:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 5, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ 17 + 4x, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases} \quad x_1 = -3; \quad x_2 = 4:$$

Δ – Հեշտ է նկատել, որ նշված կետերը $y = x^2 + 3x + 5$ և $y = 4x + 17$ ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետերի արագիսներն են: Հատման կետերում օրդինատները իրար հավասար են:

Իրոք $x^2 + 3x + 5 = 4x + 17 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 4: \quad x_1\text{-ից և } x_2\text{-ից տարբեր մնացած բոլոր կետերում } x^2 + 3x + 5 \neq 4x + 17:$

Ցույց տանք, որ f ֆունկցիան $x_1 = -3$ կետում ունի սահման: Դիտարկենք կամայական հաջորդականություն, որը ձգտում է -3 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -3, \quad x_n \neq -3, \quad n = 1; 2; \dots$$

Հնարավոր են միայն հետևյալ երեք դեպքերը:

I. $\{x_n\}$ -ի բոլոր անդամները սկսած մի որոշ ($n \geq n_0$) համարից՝ ռացիոնալ թվեր են: Այդ դեպքում $f(x_n) = x_n^2 + 3x_n + 5$, $n \geq n_0$ և հետևաբար (նկատի ունենալով, որ վերջավոր թվով անդամների հեռացումը չի փոխում սահմանը)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + 3x_n + 5) = 9 - 9 + 5 = 5:$$

II. $\{x_n\}$ -ի բոլոր անդամները սկսած մի որոշ ($n \geq n_1$) համարից՝ իռացիոնալ թվեր են: Այդ դեպքում $f(x_n) = 4x_n + 17$, $n \geq n_1$ և

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (4x_n + 17) = -12 + 17 = 5:$$

III. $\{x_n\}$ -ը պարունակում է անվերջ քանակությամբ թե՛ ռացիոնալ և թե՛ իռացիոնալ թվեր:

Եթե $\{x_{k_n}\}$ -ը և $\{x_{j_m}\}$ -ը այդ հաջորդականության ռացիոնալ և իռացիոնալ քվերից բաղկացած ենթահաջորդականություններն են, ապա ըստ վերը ապացուցածի $f(x_{k_n}) \rightarrow 5$, $f(x_{j_m}) \rightarrow 5$: Այսինքն 5 թվի ցանկացած $\varepsilon > 0$ շրջակայքից դուրս կարող են գտնվել այդ հաջորդականությունների գուցե միայն վերջավոր թվով անդամներ և հետևաբար $\{f(x_n)\}$ հաջորդականության վերջավոր թվով անդամներ, հետևաբար

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 5:$$

Նույն ձևով ցույց կտանք, որ $x_2 = 4$ կետում ֆունկցիան ունի սահման և

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 33$$

Մնացած բոլոր կետերում ֆունկցիան սահման չունի: Իրոք, ենթադրենք $x_0 \in R$ և $x_0 \neq -3$, $x_0 \neq 4$: Մոտենալով x_0 -ին մի դեպքում իռացիոնալ քվերից բաղկացած $\{x'_n\}$ հաջորդականությունով, մեկ այլ դեպքում ռացիոնալ քվերից բաղկացած $\{x''_n\}$ հաջորդականությունով, կունենանք

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x'^2_n + 3x'_n + 5) = x_0^2 + 3x_0 + 5$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (4x''_n + 17) = 4x_0 + 17$$

Սակայն $x_0^2 + 3x_0 + 5 \neq 4x_0 + 17$: Ֆունկցիան x_0 կետում սահման չունի: ▽

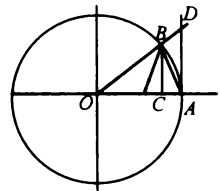
Չաշվել $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ սահմանը:

Նախ ապացուցենք երկու կարևոր անհավասարություններ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների համար.

I – Ցույց տանք, որ եթե $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$ ապա $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ (1)

Δ – Կոորդինատական հարթության վրա դիտարկենք միավոր շառավղով շրջան, որի կենտրոնը գտնվում է $O(0; 0)$ կետում:

Դիցուք $\angle AOB = x$, որտեղ $0 < x < \pi/2$: B կետի պրոեկցիան x -երի առանցքի վրա նշանակենք C -ով, իսկ D կետը թող լինի OB ճառագայթի և A կետով x -երի առանցքին տարած ուղղահայաց ուղղի հատման կետը: Այդ դեպքում $BC = \sin x$, $AD = \tan x$:



Բաղդատելով ΔOAB -ն, սեկտոր OAB -ն և ΔOAD -ն, նրանց մակերեսների համար կարող ենք գրել

$$S_{\Delta OAB} < S_{\text{սեկ}AOB} < S_{\Delta AOD} \quad (2)$$

$$\text{որտեղ } S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}(AO)^2 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x$$

$$S_{\text{սեկ}AOB} = \frac{1}{2}(OA)^2 \cdot x = \frac{1}{2}x \quad S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2}OA \cdot AD = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

ստեղծագրելով (2)-ի մեջ և կրճատելով $1/2$ -ով, կստանանք

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \quad (3)$$

քանի որ $\sin x > 0$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ապա (3)-ի երեք մասերը բաժանելով $\sin x$ -ի վրա կստանանք՝

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

Անցնելով հակադարձ մեծությունների (4)-ից կունենանք

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \quad (5)$$

Այժմ ենթադրենք $-\frac{\pi}{2} < x < 0$: Այդ դեպքում $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ և հետևաբար

$$\text{ըստ (5)-ի } \cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{(-x)} < 1: \quad (6)$$

Քանի որ $\cos x$ և $\frac{\sin x}{x}$ ֆունկցիաները զույգ ֆունկցիաներ են, ապա (6)-ից

$$\text{կհետևի } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right): \quad (7)$$

(5)-ից և (7)-ից կհետևի (1)-ը:

II – Ցույց տանք, որ ցանկացած $x \in \mathbb{R}$ -ի համար ճիշտ է

$$|\sin x| \leq |x| \quad (8)$$

(8)-ը ճիշտ է երբ $x = 0$: Ենթադրենք $x \neq 0$:

Եթե $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ապա (8)-ը հետևում է (3)-ից:

Եթե $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, ապա այդպիսի x -երի համար (8)-ը համարժեք է

$$-\sin x \leq -x \text{ կամ } \sin(-x) \leq -x \quad (9)$$

Բայց $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, որի համար (9)-ը և հետևաբար (8)-ը ճիշտ է: Այսպիսով

(8)-ը ճիշտ է, եթե $|x| < \frac{\pi}{2}$: Եթե $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, ապա այդպիսի x -երի համար (8)-ի

ծախս մասը փոքր կամ հավասար է 1-ից, իսկ աջ մասը մեծ է 1-ից:

Այսպիսով (8)-ը ճիշտ է ցանկացած $x \in R$ համար:

Այժմ հաշվենք $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ -ը:

Ըստ (1)-ի $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$ (10)

Բազմապատկելով (10)-ի երեք մասերն էլ -1 -ով, այնուհետև երեք մասերին գումարելով 1 թիվը, կունենանք.

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad x \neq 0 \quad (11)$$

Սակայն ըստ (8)-ի և $|\sin t| \leq 1$, $t \in R$ անհավասարության

$$0 < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{x}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| \leq 2 \cdot \frac{|x|}{2} = |x|, \quad x \neq 0 \quad (12)$$

Այսպիսով ստացանք

$$0 < \left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < |x|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad x \neq 0 \quad (13)$$

Վերցնենք որևէ $\varepsilon > 0$ թիվ և որպես $\delta(\varepsilon)$ թիվ ընտրենք $\delta(\varepsilon) = \min \left\{ \varepsilon; \frac{\pi}{2} \right\}$

թիվը: Հենց որ $0 < |x| < \delta$ կհետևի $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Այն-

պես որ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ սահմանի հաշվումը:

Δ – Նախ ապացուցենք հետևյալ պնդումը

Դիցուք $\{n_k\}$, $(k=1; 2; \dots)$ բնական թվերի կամայական (ոչ անպայման աճող) $+\infty$ -ի ձգտող հաջորդականություն է: Այդ դեպքում

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$$

Իրոք ըստ հաջորդականության սահմանի սահմանման

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0(\varepsilon) \rightarrow \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < \varepsilon \quad (1)$$

Քանի որ $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$, ապա

$$\forall M > 0, \exists K_M \in N : \forall k \geq K_M \rightarrow n_k > M \quad (2)$$

(2)-ի մեջ որպես $M > 0$ թիվ վերցնենք $M = n_0(\varepsilon) \quad \exists K_{n_0}(\varepsilon) = K(\varepsilon) :$

$$\forall k \geq k(\varepsilon) \rightarrow n_k > n_0(\varepsilon) \quad (3)$$

Որտեղից, ըստ (1)-ի, կհետևի $\left| \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e \right| < \varepsilon, \quad k \geq k(\varepsilon)$

Հետևաբար $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$

Այժմ անցնենք սահմանի հաշվմանը:

Բավական է ապացուցել, որ

$$\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (5)$$

Օգտվենք սահմանի Հայնեի սահմանումից: Դիցուք $\{x_k\}$ -ը ($k=1;2;\dots$)

կամայական հաջորդականություն է, որը ձգտում է 0-ի և $x_k > 0, \quad k \in N$:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք $0 < x_k < 1, \quad k \in N$:

Նշանակենք $n_k = [1/x_k], \quad k=1;2;\dots$

Այդ դեպքում $n_k \leq \frac{1}{x_k} < n_k + 1, \quad k=1;2;\dots$

Որտեղից էլ կհետևի $1 + \frac{1}{n_k + 1} < 1 + x_k \leq 1 + \frac{1}{n_k} :$

Նկատի ունենալով աստիճանական և ցուցչային ֆունկցիաների աճող լինելը կարող ենք գրել.

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}, \quad k \in N$$

Քանի որ ծայրանդամային հաջորդականությունները ձգտում են e -ին ապա ըստ երեք հաջորդականության վերաբերյալ թեորեմի $\lim_{k \rightarrow \infty} (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e$:

Որտեղից էլ կհետևի $\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$:

(4)-ը ապացուցվեց: Ապացուցենք (5)-ը: Վերցնենք $-1 < x_k < 0$, $k \in N$, պայմանին բավարարող կամայական 0 -ի ձգտող հաջորդականություն: Նշանակենք $y_k = -x_k$:

Այդ դեպքում

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = (1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}} = \left(\frac{1}{1-y_k} \right)^{\frac{1}{y_k}} = \left(1 + \frac{y_k}{1-y_k} \right)^{\frac{1}{y_k}}, \quad k \in N \quad (6)$$

Նշանակենք $z_k = \frac{y_k}{1-y_k}$, $k \in N$, ունենք $z_k > 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$ և

$$\frac{1}{z_k} = \frac{1-y_k}{y_k} = \frac{1}{y_k} - 1, \quad k \in N:$$

Որտեղից $\frac{1}{y_k} = \frac{1}{z_k} + 1$, $k \in N$:

Տեղադրելով (6)-ի մեջ, կունենանք

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = (1+z_k)^{\frac{1}{z_k}} \cdot (1+z_k), \quad k \in N$$

Որտեղից էլ, ըստ ապացուցածի, կստանանք

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1+z_k)^{\frac{1}{z_k}} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} (1+z_k) = e$$

6. ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՍԱՀՄԱՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Հատկություն 1 – Եթե ֆունկցիան a կետում ունի վերջավոր սահման, ապա այն լոկալ սահմանփակ է այդ կետում:

Հատկություն 2 – Եթե $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ընդ որում $b \neq 0$, ապա գոյություն

ունի a կետի $\dot{U}_\delta(a)$ ծակ շրջակայք այնպիսին, որ այդ շրջակայքի բոլոր կետերում ֆունկցիան ընդունում է նույն նշանի արժեքներ, ինչ նշան ունի b թիվը: Այս հատկությանը հաճախ անվանում են նշանի պահպանման հատկություն:

Հատկություն 3 – Եթե գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ բոլոր $x \in \dot{U}_\delta(a)$ համար տեղի ունի $g(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$ անհավասարությունը և եթե $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$, ապա գոյություն ունի $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ -ը, որը նույնպես հավասար է b -ին

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Հատկություն 4 Եթե $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ընդ որում $A < B$ ($A > B$), ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ բոլոր $x \in \dot{U}_\delta(a)$ համար տեղի ունի $f(x) < g(x)$ ($f(x) > g(x)$) անհավասարությունը:

Մասնավորապես՝ եթե $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ և $A > B$ ($A < C$), ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ բոլոր $x \in \dot{U}_\delta(a)$ կետերի համար տեղի ունի $f(x) > B$ ($f(x) < C$) անհավասարությունը:

Հատկություն 5 Եթե գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ բոլոր $x \in \dot{U}_\delta(a)$ համար տեղի ունի $f(x) \leq g(x)$ անհավասարությունը և եթե $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, ապա $A \leq B$:

7. ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ, ԲԱՂԴԱՏՈՒՄԸ, ՀԱՄԱՐԺԵՔ ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐԵՐ

Եթե $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, ապա $\alpha(x)$ ֆունկցիային անվանում են անվերջ փոքր ֆունկցիա, երբ $x \rightarrow a$:

Վերջավոր քանակությամբ անվերջ փոքր ֆունկցիաների գումարը անվերջ փոքր ֆունկցիա է, երբ $x \rightarrow a$:

Անվերջ փոքր ֆունկցիայի և a կետի ինչ-որ ծակ շրջակայքում որոշված և սահմանափակ ֆունկցիայի արտադրյալը անվերջ փոքր ֆունկցիա է, երբ $x \rightarrow a$:

Քանի որ անվերջ փոքր ֆունկցիան լոկալ սահմանափակ ֆունկցիա է, ապա երկու անվերջ փոքր ֆունկցիաների և հետևավաբար վերջավոր քանակությամբ անվերջ փոքր ֆունկցիաների արտադրյալը անվերջ փոքր ֆունկցիա է, երբ $x \rightarrow a$:

Որպեսզի b թիվը հանդիսանա $f(x)$ ֆունկցիայի սահման, երբ $x \rightarrow a$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f(x)$ ֆունկցիան ունենա $f(x) = b + \alpha(x)$ ներկայացումը, որտեղ $\alpha(x)$ -ը անվերջ փոքր ֆունկցիա է, երբ $x \rightarrow a$:

որ բոլոր
թյունը և
նույնպես

եթե $\alpha(x)$ և $\beta(x)$ ֆունկցիաները անվերջ փոքր են, երբ $x \rightarrow a$ և

ա) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, ապա $\alpha(x)$ -ը անվանում են ավելի բարձր կարգի

անվերջ փոքր $\beta(x)$ անվերջ փոքրի նկատմամբ, երբ $x \rightarrow a$ և գրում են $\alpha(x) = o(\beta(x))$, երբ $x \rightarrow a$:

և $A < B$

բ) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, ապա $\alpha(x)$ և $\beta(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են համար-

$\in \dot{U}_\delta(a)$

ժեք անվերջ փոքրեր, երբ $x \rightarrow a$: Նշանակվում է՝ $\alpha(x) \sim \beta(x)$, երբ $x \rightarrow a$:

յ:

Նմանատիպ սահմանումներ տրվում են նաև անվերջ մեծ ֆունկցիաների համար:

ոյություն

Արտադրյալի և քանորդի սահմաններ հաշվելիս կարելի է որոշ ֆունկցիաներ փոխարինել համարժեք ֆունկցիաներով:

եղի ունի

Կարևոր սահմաններ, որոնք օգտագործվում են ֆունկցիաների սահմաններ հաշվելիս,

որ բոլոր

ը և եթե

ա) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

դ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

բ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

ե) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

գ) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

զ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$

իջ փոքր

Օգտվելով համապատասխան սահմանների բանաձևերից և համարժեքության սահմանումից, կարելի է կազմել համարժեք ֆունկցիաների հետևյալ աղյուսակը, երբ $x \rightarrow 0$

գումարը

որոշված

ա է, երբ

$\sin x \sim x$,	երբ $x \rightarrow 0$	$\arcsin x \sim x$,	երբ $x \rightarrow 0$
$\operatorname{tg} x \sim x$,	երբ $x \rightarrow 0$	$e^x - 1 \sim x$,	երբ $x \rightarrow 0$
$\arctg x \sim x$,	երբ $x \rightarrow 0$	$\ln(1+x) \sim x$,	երբ $x \rightarrow 0$
$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$,	երբ $x \rightarrow 0$	$(1+x)^p - 1 \sim px$,	երբ $x \rightarrow 0$
		$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$,	երբ $x \rightarrow 0$

նկցիա է,

ի քանա-

ր ֆունկ-

և $x \rightarrow a$,

$b + \alpha(x)$

ա:

Այս աղյուսակը ճիշտ է մահ այն դեպքում, երբ x -ը փոխարինում ենք $\alpha(x)$ -ով, որտեղ $\alpha(x) \rightarrow 0$, երբ $x \rightarrow a$:

$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$, երբ $x \rightarrow a$	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$, երբ $x \rightarrow a$
$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$, երբ $x \rightarrow a$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$, երբ $x \rightarrow a$
$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$, երբ $x \rightarrow a$	$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$, երբ $x \rightarrow a$
$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{1}{2} \alpha^2(x)$, երբ $x \rightarrow a$	$(1 + \alpha(x))^p - 1 \sim p\alpha(x)$, երբ $x \rightarrow a$
	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$, երբ $x \rightarrow a$

8. ԹԱՎԱՐԱՆԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՍԱՅՄԱՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՊԵՏ

Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները ունեն վերջավոր սահմաններ, երբ $x \rightarrow a$, ընդ որում $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ապա

$$1) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ եթե } B \neq 0:$$

Սահմանները հաշվելիս օգտակար է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ. Եթե գոյություն ունեն $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$, $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = A$, ընդ որում a կետի ինչ-որ $\dot{U}_{\delta_0}(a)$ ծակ շրջակայքի բոլոր x -երի համար $\varphi(x) \neq b$, ապա գոյություն ունի $f(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիայի սահմանը և տեղի ունի $\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = \lim_{y \rightarrow b} f(y) = A$ հավասարությունը:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0, \quad (x_0 \in \mathbb{R})$$

$$\text{բ) } \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, \quad (x_0 \in \mathbb{R})$$

$$\text{զ) } \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad \left(x_0 \in R, x_0 \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right)$$

$$\text{դ) } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad (x_0 \in (0; +\infty), n \in N)$$

$$\text{ե) } \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}, \quad (a > 0, x_0 \in R)$$

$$\text{գ) } \lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0, \quad (x_0 \in (0; +\infty))$$

$$\text{տ) } \lim_{x \rightarrow x_0} (u(x))^{v(x)} = a^b, \text{ պայմանով, որ գոյություն ունեն } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = a$$

$$(a > 0) \text{ և } \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = b$$

$$\Delta - \text{ա) Ունենք } \sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}, \text{ որտեղից}$$

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|$$

$$\text{Ստացանք } 0 \leq |\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0| \quad (1)$$

Օգտվենք սահմանի Կոշիի սահմանումից:

Ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար որպես $\delta(\varepsilon) > 0$ թիվ վերցնենք $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$:

Այդ դեպքում $0 < |x - x_0| < \delta$ պայմանից $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Հետևաբար

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \nabla$$

$\Delta - \text{բ) - Նույն ձևով}$

$$0 \leq |\cos x - \cos x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|, \text{ որտեղից կհետևի}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \quad \nabla$$

$\Delta - \text{գ) Քանի որ } x_0 \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \text{ ապա } \cos x_0 \neq 0$:

Օգտվելով քանորդի սահմանի վերաբերյալ թեորեմից՝ կունենանք

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0 \quad \nabla$$

$\Delta - \text{դ) Կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ } x = x_0 + t: \text{ Երբ } x \rightarrow x_0, \\ t \rightarrow 0:$

Դիտարկենք $\sqrt[n]{x_0+t}$ ֆունկցիան $t_0=0$ կետի $\delta=\frac{x_0}{2}$ ծակ շրջակայքում՝

$\dot{U}_\delta(0)$: Այդպիսի t -երի համար տեղի ունի

$$\sqrt[n]{x_0}\left(1-\frac{|t|}{x_0}\right) < \sqrt[n]{x_0} \cdot \sqrt[n]{1+\frac{t}{x_0}} < \sqrt[n]{x_0}\left(1+\frac{|t|}{x_0}\right)$$

անհավասարությունը:

Օգտվելով 8 կետի № 1 հատկությունից և 11 կետի թեորեմից, վերջնականապես կունենանք $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$, $x_0 > 0$: ∇

Δ – ե) Ապացուցենք $a > 1$ դեպքի համար ($0 < a < 1$ դեպքը կբերվի ապացուցված դեպքին՝ օգտագործելով $a^x = \frac{1}{(1/a)^x}$ հավասարությունը և քանորդի վերաբերյալ թեորեմը): Ունենք $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} |a^{x-x_0} - 1|$:

Քանի որ $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, ապա ըստ հաջորդականության սահմանի սահմանման տրված $\frac{\varepsilon}{a^{x_0}} > 0$ թվի համար, գոյություն ունի n_0 բնական թիվ այնպիսին, որ $1 - \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$:

Մյուս կողմից՝ $a > 1$ դեպքում a^x ֆունկցիայի մոնոտոնության շնորհիվ կունենանք.

$$1 - \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < a^{x-x_0} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} \text{ հենց որ } 0 < |x - x_0| < \frac{1}{n_0}$$

$$\text{Որտեղից կհետևի } |a^{x-x_0} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}, \quad 0 < |x - x_0| < \frac{1}{n_0}$$

Հետևաբար

$$|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} |a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon, \text{ երբ } 0 < |x - x_0| < \frac{1}{n_0}$$

Իսկ սա նշանակում է $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ ∇

Δ – Օգտվելով $1 + \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, $n = 1; 2; \dots$ անհավասարությունից.

Այս անհավասարությունից կհետևի

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\ln\frac{n}{n-1} = -\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right),$$

$$-\frac{1}{n-1} < \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < -\frac{1}{n}, \quad n > 1$$

Այսպիսով ցանկացած $n > 1$ բնական թվի համար ճիշտ է

$$-\frac{1}{n-1} < \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

որտեղից կհետևի, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի

n_0 բնական թիվ այնպիսին, որ $-\varepsilon < \ln\left(1 - \frac{1}{n_0}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) < \varepsilon$:

Դիտարկենք $f(x) = \ln x$ ֆունկցիան $x_0 > 0$ կետի $\delta = \frac{x_0}{n_0}$ ծակ շրջակայ-

քում՝ $\left(0 < |x - x_0| < \frac{x_0}{n_0}\right)$:

$$\text{Այդպիսի } x \text{-երի համար } \ln x - \ln x_0 = \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right):$$

Հաշվի առնելով $\ln(1+x)$ ֆունկցիայի աճող լինելը, վերջնականապես $\ln x - \ln x_0$ -ի համար կունենանք հետևյալ գնահատականը՝

$$-\varepsilon < \ln\left(1 - \frac{1}{n_0}\right) < \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) < \varepsilon, \text{ երբ } 0 < |x - x_0| < \frac{x_0}{n_0}$$

կամ $|\ln x - \ln x_0| < \varepsilon, 0 < |x - x_0| < \frac{x_0}{n_0}$

Իսկ սա նշանակում է, որ $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$

▽

Δ – է) Օգտվելով խնդրի պայմանից և գ) խնդրից, կունենանք

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \cdot \ln u(x) = b \cdot \ln a$$

Հետևաբար, ըստ ե) խնդրի

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x))^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{v(x) \cdot \ln u(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \cdot \ln u(x)} = e^{b \cdot \ln a} = a^b = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)\right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)}$$

▽

Հաշվել սահմանները

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$բ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad (a > 0)$$

$$գ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x}, \quad (p - \text{ն իրական թիվ է})$$

Δ – ա) Ըստ բարդ ֆունկցիայի սահմանի վերաբերյալ թեորեմի և ըստ գ) խնդրի, կունենանք.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1 \quad \nabla$$

Δ – բ) Նշանակենք $a^x - 1 = t$: Ըստ ե) – խնդրի կունենանք, երբ $x \rightarrow 0$ -ի t -ն ևս ձգտում է 0-ի: Հետևաբար ըստ նախորդ խնդրի

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a \cdot t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(1+t)^{1/t}} = \ln a \quad \nabla$$

Δ – գ) Ըստ լոգարիթմական հիմնական նույնության և ըստ վերը ապացուցած ա) և բ) սահմանների, կարող ենք գրել

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{p \ln(1+x)} - 1}{p \ln(1+x)} \cdot \frac{p \ln(1+x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{p \ln(1+x)} - 1}{p \ln(1+x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p \ln(1+x)}{x} = p \end{aligned} \quad \nabla$$

Ցույց տալ, որ գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ նշված պայմանին բավարարող x -երի համար ճիշտ է անհավասարությունը.

$$ա) \sqrt[8]{1+6x^5} + x^5 \leq \sqrt[5]{1+7x^5}, \quad -\delta < x \leq 0$$

$$բ) 17 \cos 5x \geq 5 + 12 \cos 6x, \quad -\delta < x < \delta$$

$$գ) e^{\sin 9x} \geq e^{\sin 3x} + 2 \ln(1+4x), \quad -\delta < x \leq 0$$

$$դ) \operatorname{tg}^3 2x + 25 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \operatorname{tg} 2x, \quad \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{6} + \delta$$

Δ – ա) Անհավասարության ծախ մասը որոշված չէ $x \geq -\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ համար:

Ստուգենք անհավասարությունը $x = 0$ կետի համար՝

$$\sqrt[8]{1+6 \cdot 0} + 0 \leq \sqrt[5]{1+7 \cdot 0}:$$

$1 \leq 1$ ճիշտ է:

Ենթադրենք $x \neq 0$: Խնդրի պահանջից հետևում է, որ խոսքը $x = 0$ կետի ծախակողմյան շրջակայքի մասին է: Հետևաբար սահմանափակվենք

$$-\frac{1}{\sqrt[5]{6}} < x < 0$$

անհավասարությանը բավարարող x -երով: Այդպիսի x -երի համար ապացուցվելիք անհավասարությունը համարժեք է (x -երը բացասական են)

$$\frac{\sqrt[5]{1+7x^5} - \sqrt[8]{1+6x^5}}{x^5} \leq 1 \text{ անհավասարությանը:}$$

և ըստ q)

Հաշվենք $f(x) = \frac{\sqrt[5]{1+7x^5} - \sqrt[8]{1+6x^5}}{x^5}$ ֆունկցիայի ձախակողմյան սահմանը $x=0$ կետում:

▽

$x \rightarrow 0$ -ի

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sqrt[5]{1+7x^5} - \sqrt[8]{1+6x^5}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{(1+7x^5)^{\frac{1}{5}} - 1}{x^5} - \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{(1+6x^5)^{\frac{1}{8}} - 1}{x^5} =$$

▽

ը ապա-

$$= \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\frac{7}{5}x^5}{x^5} - \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\frac{3}{4}x^5}{x^5} = \frac{7}{5} - \frac{3}{4} = \frac{13}{20}$$

(Սահմանները հաշվելիս անվերջ փոքրերը փոխարինեցինք իրենց համարժեք անվերջ փոքրերով):

▽

Քանի որ $\frac{13}{20} < 1$, ապա ըստ 8 կետի $\exists \delta > 0$ թիվ այնպիսին $\left(\delta < \frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right)$,

որ $f(x) < 1$, երբ $-\delta < x < 0$: Այն ինչ պետք էր ապացուցել:

▽

սծ պայ-

$\Delta - \rho$ Ստուգենք անհավասարությունը $x=0$ կետի համար.

$$17 \cos 0 \geq 5 + 12 \cdot \cos 0$$

$17 \geq 17$ ճիշտ է: Ենթադրենք $x \neq 0$: Այդպիսի x -երի համար անհավասարությունը համարժեք է

$$\frac{\cos 5x - \cos 6x}{1 - \cos 5x} \geq \frac{5}{12}$$

անհավասարությանը:

Հաշվենք սահմանը

համար:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 6x}{1 - \cos 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{11}{2}x}{1 - \cos 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{11}{2}x}{\frac{25}{2}x^2} = \frac{11}{25}$$

Քանի որ $\frac{11}{25} \geq \frac{5}{12}$, ապա ըստ 8 կետի $\exists \delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ բոլոր

0 կետի

x -երի համար $\dot{U}_\delta(0)$ ծակ շրջակայքից ճիշտ է

$$\frac{\cos 5x - \cos 6x}{1 - \cos 5x} \geq \frac{5}{12}$$

անհավասարությունը:

▽

Δ – գ) Ստուգենք անհավասարությունը $x = 0$ կետի համար

$$e^{\sin 0} \geq e^{\sin 0} + 2 \ln(1+0)$$

$1 \geq 1$ ճիշտ է

Ենթադրենք $x \neq 0$: Ցույց տանք, որ գոյություն ունի $x = 0$ կետի ծախս-կողմյան կիսաշրջակայք, որի բոլոր x -երի համար ճիշտ է անհավասարությունը: Քանի որ բացասական x -երի համար $\ln(1+4x)$ -ը փոքր է 0-ից, ապա այդպիսի x -երի համար անհավասարությունը համարժեք է

$$\frac{e^{\sin 9x} - e^{\sin 3x}}{\ln(1+4x)} \leq 2$$

անհավասարությանը:

Հաշվենք սահմանը

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{e^{\sin 9x} - e^{\sin 3x}}{\ln(1+4x)} &= \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{e^{\sin 3x} (e^{\sin 9x - \sin 3x} - 1)}{\ln(1+4x)} = \lim_{x \rightarrow 0-0} e^{\sin 3x} \cdot \\ &\cdot \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{e^{\sin 9x - \sin 3x} - 1}{\ln(1+4x)} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin 9x - \sin 3x}{4x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{2 \sin 3x \cdot \cos 6x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{2 \cdot 3x}{4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0-0} \cos 6x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(Սահմանը հաշվելիս անվերջ փոքրերը փոխարինեցինք իրենց համարժեք անվերջ փոքրերով):

Քանի որ $\frac{3}{2} < 2$, ապա ըստ 8 կետի գոյություն ունի $x = 0$ կետի ծախս-

կողմյան $\dot{U}_\delta(0)$ ծակ շրջակայք այնպիսին, որ բոլոր x -երի համար այդ շրջակայքից ճիշտ է

$$\frac{e^{\sin 9x} - e^{\sin 3x}}{\ln(1+4x)} < 2$$

անհավասարությանը:

Միացնելով $x = 0$ կետում ստացված արդյունքը, կստանանք այն, ինչ պետք էր ապացուցել: ∇

Δ – դ) Նախ ստուգենք անհավասարությունը $x = \pi/6$ կետի համար

$$\operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{3} + 25 \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \leq 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$$

$3\sqrt{3} \leq 3\sqrt{3}$ ճիշտ է:

Ենթադրենք $x > \pi/6$: Այդպիսի x -երի համար անհավասարությունը համարժեք է $\frac{\operatorname{tg}^3 2x - 3 \operatorname{tg} 2x}{\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)} \geq -25$ անհավասարությանը, քանի որ

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < 0:$$

Հաշվենք սահմանը՝

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}+0} \frac{\operatorname{tg}^3 2x - 3 \operatorname{tg} 2x}{\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}+0} \frac{\operatorname{tg} 2x (\operatorname{tg} 2x + \sqrt{3}) (\operatorname{tg} 2x - \sqrt{3})}{\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}+0} \operatorname{tg} 2x (\operatorname{tg} 2x + \sqrt{3}) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}+0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}{\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{3} (\sqrt{3} + \sqrt{3}) \cdot \\ &\cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}+0} \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos 2x \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)} = 6 \cdot 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}+0} \frac{1}{\cos 2x} \cdot \\ &\cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}+0} \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{6}\right)} = 12 \cdot 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}+0} \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)} = \\ &= -24 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}+0} \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)} = -24 \end{aligned}$$

Քանի որ $-24 > -25$, ապա ըստ 8 կետի գոյություն ունի $x = \frac{\pi}{6}$ կետի ծախսակողմյան $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} + \delta$ շրջակայք այնպիսին, որ այդ շրջակայքի բոլոր x -երի համար ճիշտ է

$$\frac{\operatorname{tg}^3 2x - 3 \operatorname{tg} 2x}{\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)} > -25$$

անհավասարությանը:

Միացնելով $x = \pi/6$ կետի համար ստացված արդյունքը, կստանանք այն, ինչ պետք էր ապացուցել: ∇

Ապացուցել հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևը

ա) $e^{7x} = \cos\left(\sqrt[7]{x^3}\right) + o\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 4x}\right)$, երբ $x \rightarrow 0$

բ) $9x^2 = \pi^2 + o\left(\sqrt[5]{\sin^4 3x}\right)$, երբ $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$

գ) $5^{x-3} = x^2 + o\left((x-5)^{\frac{3}{4}}\right)$, երբ $x \rightarrow 5+0$

Δ – ա) Բավական է ապացուցել, որ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - \cos\left(\sqrt[7]{x^3}\right)}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 4x}} = 0$$

Հաշվենք սահմանը

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - \cos\left(\sqrt[7]{x^3}\right)}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 4x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 4x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 4x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sqrt[3]{16 \cdot x^{2/3}}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^{6/7}}{\sqrt[3]{16 \cdot x^{2/3}}} = \frac{7}{\sqrt[3]{16}} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{16}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[21]{x^4} = 0 \end{aligned}$$

(Սահմանը հաշվելիս օգտվեցինք 11 կետի օրինակների դ) խնդրից և 10 կետի համարժեք ֆունկցիաների աղյուսակից): ∇

Δ – բ) ցույց տանք, որ $\alpha(x) = 9x^2 - \pi^2$ անվերջ փոքրը ավելի բարձր

կարգի անվերջ փոքր է, քան $\beta(x) = \sqrt[5]{\sin^4 3x}$ անվերջ փոքրը, երբ $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{9x^2 - \pi^2}{\sqrt[5]{\sin^4 3x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(3x - \pi)(3x + \pi)}{\sqrt[5]{\sin^4 3x}} = 2\pi \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3x - \pi}{\sqrt[5]{\sin^4 3x}}$$

կատարենք փոփոխականի փոխարինում: Նշանակենք $3x - \pi = t$:

Երբ $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$, $t \rightarrow 0$, կստանանք $3x = \pi + t$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 2\pi \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt[5]{\sin^4(\pi + t)}} = 2\pi \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^{4/5}} = 2\pi \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt[5]{t} = 0 \quad \nabla$$

$\Delta - q$) Հաշվենք սահմանը

$$\lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{5^{x-3} - x^2}{(x-5)^{3/4}} = \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{(5^{x-3} - 25) - (x^2 - 25)}{(x-5)^{3/4}} = \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{25(5^{x-3} - 1)}{(x-5)^{3/4}} +$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)^{3/4}} = \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{25 \cdot \ln 5 (x-5)}{(x-5)^{3/4}} + \lim_{x \rightarrow 5+0} \sqrt[4]{x-5} (x+5) = 0$$

Հետևաբար $5^{x-3} - x^2 = o\left((x-5)^{\frac{3}{4}}\right)$, երբ $x \rightarrow 5+0$: ∇

Օրինակներ ֆունկցիայի սահմանը հաշվելու վերաբերյալ

Սահմանները հաշվելիս հաճախ հանդիպում ենք դեպքերի, երբ պահանջվում է հաշվել $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ սահմանը, որտեղ $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները անվերջ փոքր ֆունկցիաներ են $x = a$ կետում՝ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$: Այդպիսի դեպքերում ասում են, որ ունենք $0/0$ տեսքի անորոշություն: Այդպիսի սահման հաշվելու համար, աշխատում են ձևափոխել $\frac{f(x)}{g(x)}$ կոտորակը՝ առանձնացնելով և՛ համարիչում, և՛ հայտարարում $(x-a)^n$ տիպի արտադրիչներ:

Օրինակ, եթե a կետի ինչ-որ $\dot{U}_\delta(a)$ ծակ շրջակայքում f -ը և g -ն ներկայացվել են $f(x) = (x-a)^n \cdot f_1(x)$, $g(x) = (x-a)^n \cdot g_1(x)$ ընդ որում $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

ֆունկցիայի սահմանը գոյություն ունի, ապա գոյություն ունի $\frac{f(x)}{g(x)}$ հարաբերության սահմանը, որը հավասար է այդ սահմանին՝

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^n \cdot f_1(x)}{(x-a)^n \cdot g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

նույնը կարելի է ասել նաև այն դեպքերում, երբ f -ը և g -ն անվերջ մեծեր են, երբ $x \rightarrow a$ -ին (a -ն կարող է լինել կետ կամ սիմվոլ):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty:$$

Այդպիսի դեպքերում ասում են, որ տրված է ∞/∞ տեսքի անորոշություն:

Սովորաբար աշխատում են այդ դեպքերում կոտորակը ձևափոխել այնպես, որ ստացված ֆունկցիայի նկատմամբ հնարավոր լինի կիրառել սահմանների վերաբերյալ հայտնի հատկությունները: Օրինակ, եթե f -ը և g -ն

միևնույն՝ n -րդ կարգի բազմանդամներ են՝

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n, \quad b_0 \neq 0$$

Ապա համարիչը և հայտարարը բաժանելով x^n -ի վրա, կստանանք՝

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots + \frac{b_n}{x^n}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Չաշվել սահմանը

ա) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^3 + 3x - 14}$

բ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{15-2x} - \sqrt{5x-6}}{\sqrt[3]{8x+3} - \sqrt[3]{2x+21}}$

գ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x} - \sqrt{1+\sin 2x}}{\sin^3 2x}$

դ) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 6x + 5} - \sqrt{4x^2 - 6x + 3}$

Δ – ա) Ունենք $0/0$ տեսքի անորոշություն:

$$2x^2 + x - 10 = 2(x-2) \left(x + \frac{5}{2} \right) = (x-2)(2x+5)$$

$$x^3 + 3x - 14 = x^3 - 8 + 3x - 6 = (x-2)(x^2 + 2x + 4) + 3(x-2) = (x-2)(x^2 + 2x + 7)$$

Չետևարար

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^3 + 3x - 14} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x^2 + 2x + 7)} = \frac{3}{5} \quad \nabla$$

Δ – բ) բազմապատկելով և բաժանելով համարիչի և հայտարարի լծորդներով և օգտվելով 11 կետի դ) խնդրի արդյունքներից, կստանանք՝

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{15-2x} - \sqrt{5x-6}}{\sqrt[3]{8x+3} - \sqrt[3]{2x+21}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(15-2x-5x+6) \left(\sqrt[3]{(8x+3)^2} + \sqrt[3]{(8x+3)(2x+21)} + \sqrt[3]{(2x+21)^2} \right)}{(8x+3-2x-21) (\sqrt{15-2x} + \sqrt{5x-6})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-7(x-3) \left(\sqrt[3]{(8x+3)^2} + \sqrt[3]{(8x+3)(2x+21)} + \sqrt[3]{(2x+21)^2} \right)}{6(x-3) (\sqrt{15-2x} + \sqrt{5x-6})} = -\frac{21}{2} \quad \nabla \end{aligned}$$

Δ – գ) Բազմապատկելով և բաժանելով համարիչի լծորդով և օգտվելով 10 կետի համարժեք անվերջ փոքրերի աղյուսակից ու 11 կետի բ) և դ) խնդիրների արդյունքներից, կարող ենք գրել

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x}}{\sin^3 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{\sin^3 2x (\sqrt{1 + \operatorname{tg} 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(1 - \cos 2x)}{\sin^3 2x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}} = \frac{1}{4} \quad \nabla \end{aligned}$$

Δ – ա) Ունենք $\infty - \infty$ տեսքի անորոշություն:

Բազմապատկելով և բաժանելով տրված արտահայտության լծորդով, այնուհետև համարիչը և հայտարարը բաժանելով x -ի վրա և օգտվելով 11 կետի դ) խնդրի արդյունքից, կստանանք՝

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 6x + 5} - \sqrt{4x^2 - 8x + 3} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x + 2}{\sqrt{4x^2 + 6x + 5} + \sqrt{4x^2 - 8x + 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14 + \frac{2}{x}}{\sqrt{4 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{4 - \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Հաշվել սահմանը

ա) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos 2x}{\sin^2 x}$

բ) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(5^{\frac{1}{x}} - 5^{\frac{1}{x+1}} \right)$

գ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4^{x-2} - x^2}{x - 4}$

դ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[13]{1+5x} - \sqrt[15]{1+2x}}{x}$

ե) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 9x)}$

զ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt[7]{\cos 2x}}{\sin^2 x}$

է) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 - 3} \right)^{x^2}$

$$\text{դ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\lg 2x}$$

ա) – գ) սահմանները հաշվելիս կօգտվենք 10 կետի համարժեք ֆունկցիաների աղյուսակի համապատասխան բանաձևերից

$$\begin{aligned} \Delta - \text{ա) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos 2x}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) + (1 - \cos 2x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x} + \\ &+ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot 4x^2}{x^2} = 1 + 2 = 3 \end{aligned} \quad \nabla$$

$$\text{բ) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(5^{\frac{1}{x}} - 5^{\frac{1}{x+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{1}{x+1}} \cdot x^2 \left(5^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \ln 5}{x(x+1)} = \ln 5 \quad \nabla$$

$$\begin{aligned} \Delta - \text{գ) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4^{x-2} - x^2}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4^{x-2} - 16 + 16 - x^2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{16(4^{x-4} - 1)}{x-4} + \\ &+ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(4+x)}{x-4} = 16 \cdot \ln 4 - 8 = 8 \ln \frac{16}{e} \end{aligned} \quad \nabla$$

$$\begin{aligned} \Delta - \text{դ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[13]{1+5x} - \sqrt[15]{1+2x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+5x)^{\frac{1}{13}} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{15}} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{13}x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{15}x}{x} = \frac{5}{13} - \frac{2}{15} = \frac{49}{195} \end{aligned} \quad \nabla$$

$$\begin{aligned} \Delta - \text{ե) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 9x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos 5x - 1)}{\ln(1 + \cos 9x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 9x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot 25x^2}{\frac{1}{2} \cdot 81x^2} = \frac{25}{81} \end{aligned} \quad \nabla$$

$$\begin{aligned} \Delta - \text{զ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{\cos x} - \sqrt[7]{\cos 2x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{\cos x} - 1}{\sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{\cos 2x} - 1}{\sin^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{5}} - 1}{\sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos 2x - 1)^{\frac{1}{7}} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{5}(\cos x - 1)}{x^2} - \\ &- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{7}(\cos 2x - 1)}{x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{10}x^2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{7}x^2}{x^2} = \frac{2}{7} - \frac{1}{10} = \frac{13}{70} \end{aligned} \quad \nabla$$

Մինչ է) և ը) սահմանների հաշվմանը անցնելը կատարենք մի դիտողություն:

Դիտողություն – Դիցուք $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty$:

Այդ դեպքում, օգտվելով 11 կետի է) խնդրի արդյունքից, կարող ենք գրել

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x))^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x)-1)v(x)}$$

Δ – է) Օգտվենք դիտողությունից: Ունենք $u(x) = \frac{x^2+3}{x^2-3}$, $v(x) = x^2$, հե-

$$\text{տևաբար } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-3} \right)^{x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{x^2-3}} = e^{-6} \quad \nabla$$

$$\Delta - \text{ը) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x - 1) \operatorname{tg} 2x}$$

Հաշվենք $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x - 1) \operatorname{tg} 2x$ սահմանը.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x - 1) \operatorname{tg} 2x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x - 1) \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = -1$$

$$\text{Հետևաբար } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{-1}$$

9. ՖՈՐԱԿՑԻԱՅԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆ

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է x_0 կետի ինչ-որ $\delta_0 > 0$ շրջակայքում: $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ x_0 կետում, եթե $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$: Այսպիսով f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, եթե բավարարված են հետևյալ պայմանները.

ա) f -ը որոշված է x_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում, այսինքն՝ $\exists \delta_0 > 0$ թիվ այնպիսին, որ $U_{\delta_0}(x_0) \subset D(f)$

բ) Գոյություն ունի $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

գ) $A = f(x_0)$

Ենթադրենք ֆունկցիան որոշված է կետի $\dot{U}_{\delta_0}(x_0)$ ծակ շրջակայքում:

x_0 կետին կանվանենք f ֆունկցիայի խզման կետ, եթե $f(x)$ ֆունկցիան կամ այդ կետում որոշված չէ, կամ եթե որոշված է, ապա անընդհատ չէ:

Այսպիսով x_0 կետը $f(x)$ ֆունկցիայի համար խզման կետ է, եթե հետևյալ երեք պայմաններից առնվազը մեկը տեղի չունի

ա) $x_0 \in D(f)$,

բ) գոյություն ունի $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ վերջավոր սահմանը,

գ) $A = f(x_0)$:

Եթե x_0 -ն ֆունկցիայի այնպիսի խզման կետ է, որ այդ կետում գոյություն ունեն ֆունկցիայի ձախակողմյան և աջակողմյան վերջավոր սահմանները՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

ապա x_0 կետը անվանում են առաջին սեռի խզման կետ: Երբ $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ x_0 կետը կոչվում է վերացնելի խզման կետ: Եթե x_0 խզման կետը առաջին սեռի խզման կետ չէ, ապա այն կոչվում է երկրորդ սեռի խզման կետ: Այսպիսով x_0 երկրորդ սեռի խզման կետում ֆունկցիայի ձախակողմյան և աջակողմյան սահմաններից գոնե մեկը կամ գոյություն չունի, կամ գոնե մեկը հավասար է անվերջության:

Տառացիորեն նույն ձևով սահմանվում են x_0 կետում ձախակողմյան և աջակողմյան անընդհատություններ:

Թեորեմ: Դիցուք f -ը որոշված է $U_{\delta_0}(x_0)$ շրջակայքում: Եթե այն անընդհատ է x_0 կետում և $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ ($\delta < \delta_0$) թիվ այնպիսին, որ կամայական $x \in U_\delta(x_0)$ համար $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$):

Թեորեմ: Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $U_{\delta_0}(x_0)$ -ում: $x_0 \in U_{\delta_0}(x_0)$ կետում $f(x)$ և $g(x)$ անընդհատ ֆունկցիաների գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը, իսկ $g(x_0) \neq 0$ դեպքում նաև քանորդը, անընդհատ են x_0 կետում:

10. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ԱՆԸՆԴՅԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Թեորեմներ: Եթե $[a; b]$ հատվածում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է այդ հատվածի յուրաքանչյուր կետում, ապա՝

ա) $f(x)$ -ը սահմանափակ է $[a; b]$ հատվածում,

բ) $f(x)$ -ը ընդունում է իր ճշգրիտ ստորին և վերին եզրերը որպես արժեքներ,

գ) եթե $f(a) \neq f(b)$: Ընդունում է $f(a)$ -ի և $f(b)$ -ի միջև ընկած բոլոր միջանկյալ արժեքները:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի խզման կետերը նշված միջակայքում և պարզել նրանց բնույթը:

ա) $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{5}{6}\pi x\right); \quad x \in [0; 6]$

բ) $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{\pi}{x}\right); \quad x \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$

գ) $f(x) = 3x - [x^2]; \quad x \in [0; 2]$

դ) $f(x) = 5x - [\sqrt{x}]; \quad x \in (1; 16]$

Δ – ա) Քանի որ սիգնում ֆունկցիան խզվող է $x = 0$ կետում, ապա խզման կետերը կլինեն այն կետերը, որոնք պատկանում են $[0; 6]$ հատվածին և որոնցում $\sin \frac{5}{6}\pi x$ ֆունկցիան հավասար է 0-ի՝ $x_0 = 0, x_1 = \frac{6}{5}, x_2 = \frac{12}{5}, \dots, x_5 = 6$:

Հետազոտենք անընդհատությունը x_1, x_2, x_3, x_4 ներքին կետերում:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{6}{5}-0} \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{5}{6}\pi x\right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{6}{5}+0} \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{5}{6}\pi x\right) = -1$$

$x_1 = \frac{6}{5}$ կետը առաջին սեռի խզման կետ է:

Տառացիորեն նույն ձևով կապացուցենք, որ x_2, x_3, x_4 կետերը նույնպես առաջին սեռի խզման կետեր են:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{5}{6}\pi x\right) = 1, \quad \operatorname{sgn}(\sin 0) = 0$$

$x_0 = 0$ վերացնելի խզման կետ է:

$$\lim_{x \rightarrow 6-0} \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{5}{6} \pi x\right)=+1, \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{5}{6} 6 \pi\right)=0$$

$x_0 = 6$ վերացնելի խզման կետ է:

▽

Δ – բ) խզման կետերը, որոնք պատկանում են $\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$ հատվածին կա-

րող են լինել՝ $x_1 = \frac{2}{7}$; $x_2 = \frac{2}{9}$; $x_3 = \frac{2}{11}$ կետերը:

Քանի որ բոլոր կետերը ներքին կետեր են, ապա բավական է հետազոտել անընդհատությունը, նրանցից որևէ մեկի համար: Ստուգենք $x_2 = \frac{2}{9}$ կետի համար:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{9}-0} \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{\pi}{x}\right)=-1, \lim_{x \rightarrow \frac{2}{9}+0} \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{\pi}{x}\right)=1$$

$x_2 = \frac{2}{9}$ կետը առաջին սեռի խզման կետ է:

▽

Δ – գ) Քանի որ $y = 3x$ ֆունկցիան անընդհատ է $[0; 2]$ հատվածի բոլոր կետերում, իսկ $[x]$ ֆունկցիան խզվող է ամբողջ կետերում, ապա հնարավոր խզման կետերը կլինեն $[0; 2]$ հատվածին պատկանող այն x_k կետերը, որոնց համար x_k^2 -ին բնական թիվ է:

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = \sqrt{3}, x_4 = 2$$

x_1, x_2, x_3 կետերը ներքին կետեր են:

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-0} (3x - [x^2]) = 3\sqrt{2} - 1; \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}+0} (3x - [x^2]) = 3\sqrt{2} - 2; 3\sqrt{2} - 1 \neq 3\sqrt{2} - 2$$

$x_2 = \sqrt{2}$ կետը առաջին սեռի խզման կետ է: Նույն ձևով կարելի է հիմնավորել, որ x_1, x_3 կետերը ևս առաջին սեռի խզման կետեր են:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (3x - [x^2]) = 0 \text{ ֆունկցիայի արժեքը } x_0 = 0 \text{ կետում ևս հավասար է}$$

0-ի: $x_0 = 0$ կետը անընդհատության կետ է.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} (3x - [x^2]) = 6 - 3 = 3 \text{ ֆունկցիայի արժեքը } x_4 = 2 \text{ կետում հավա-}$$

սար է $6 - 4 = 2$: $x_2 = 2$ կետը վերացնելի խզման կետ է

▽

Δ – դ) Քանի որ $5x$ ֆունկցիան $(1; 16]$ միջակայքի բոլոր կետերում անընդհատ ֆունկցիա է, ապա տրված ֆունկցիան խզվող է բոլոր այն կետե-

րում, որոնք պատկանում են $(1;16]$ միջակայքին և որոնցում խզվող է $\left[\sqrt{x}\right]$

ֆունկցիան: Կասկածելի կետեր են՝ $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=9$, $x_4=16$:

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} \left[\sqrt{x}\right] = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 4+0} \left[\sqrt{x}\right] = 2; \quad 1 \neq 2$$

Նույն ձևով կապացուցենք որ $x_2=4$ և $x_3=9$ կետերը ևս առաջին սեռի խզման կետեր են $\lim_{x \rightarrow 16-0} \left[\sqrt{x}\right] = 3$, $\left[\sqrt{16}\right] = 4$, $x_4=16$ կետը վերացնելի խզման կետ է: $\lim_{x \rightarrow 1+0} \left[\sqrt{x}\right] = 1$, $x_1=1$ կետը չի պատկանում ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, սակայն այդ կետում գոյություն ունի ֆունկցիայի վերջավոր սահմանը:

Այսպիսի դեպքերում $x_1=1$ կետը ևս պայմանավորվում են ընդունել վերացնելի խզման կետ, պայմանով, եթե ֆունկցիան սահմանենք $x_1=1$ կետում իր սահմանին հավասար: Հաճախ նոր ստացված $f_1(x) = \begin{cases} f(x); & 1 < x \leq 16 \\ 4; & x = 1 \end{cases}$ ֆունկցիային անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատ շարունակություն մինչև $x_1=1$ կետը: ∇

Հետազոտել $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատության տեսակետից:

$$\text{ա) } f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 21, & \text{եթե } x - \text{ը ուացիտնալ է} \\ 24 + 3x - x^2, & \text{եթե } x - \text{ը իռացիտնալ է} \end{cases}$$

$$\text{բ) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$$

$$\text{գ) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$$

$$\text{դ) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4x^n - 5}{1 + 2x^n}, \quad x \geq 0$$

$\Delta - \text{ա) } \forall$ Կերցնենք որևէ $x_0 \in R$ կետ: Ֆունկցիան այդ կետում կլինի անընդհատ, եթե բավարարվեն հետևյալ երկու պայմանները՝

1) Գոյություն ունի $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ վերջավոր սահմանը

2) $A = f(x_0)$

Դիցուք $\{x_n\}$ -ը միայն ռացիոնալ, $\{z_n\}$ -ը միայն իռացիոնալ կետերից կազմված երկու կամայական հաջորդականություններ են, որոնք ձգտում են x_0 -ին:

Ունենք

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n^2 - 3x_n - 21) = 2x_0^2 - 3x_0 - 21 \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (24 + 3z_n - z_n^2) = 24 + 3x_0 - x_0^2 \quad (2)$$

Որպեսզի ֆունկցիան x_0 կետում սահման ունենա, անհրաժեշտ է, որ եթե (1)-ը և (2)-ը լինեն իրար հավասար:

$$2x_0^2 - 3x_0 - 21 = 24 + 3x_0 - x_0^2$$

Որտեղից կհետևի, որ $x_0 = -3$, $x_0 = 5$:

Այսպիսով, թվային ուղղի բոլոր կետերում, որոնք հավասար չեն $x_1 = 3$ և $x_2 = 5$ կետերի, $f(x)$ ֆունկցիան սահման չունի և հետևաբար այդ կետերում այն խզվող է: $x_1 = 3$ և $x_2 = 5$ կետերում ֆունկցիան ունի սահման, ընդ որում՝ $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 6$ $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 14$: Այս փաստի ծիստ հիմնավորումը տրված է նախորդ նմանատիպ մեկ այլ խնդրում:

Քանի որ $x_1 = -3$ և $x_2 = 5$ կետերը ռացիոնալ կետեր են, ապա $f(-3) = 6$ և $f(5) = 14$: Ֆունկցիան անընդհատ է -3 և 5 կետերում: ∇

$\Delta - p$ Գտնենք $f(x)$ -ը, $x \in R$

$$x > 0 \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - \frac{1}{n^x}}{n^x + \frac{1}{n^x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2x} - 1}{n^{2x} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n^{2x}}}{1 + \frac{1}{n^{2x}}} = 1$$

$$x = 0 \quad f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^0 - n^{-0}}{n^0 + n^{-0}} = 0$$

$$x < 0 \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{-x}} - n^{-x}}{\frac{1}{n^{-x}} + n^{-x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^{-2x}}{1 + n^{-2x}} = -1$$

$$\text{Այսպիսով } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } x > 0 \\ 0, & \text{երբ } x = 0 \\ -1, & \text{երբ } x < 0 \end{cases}$$

Ստացանք $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $-\infty < x < +\infty$

$x = 0$ կետը առաջին սեռի խզման կետ է

▽

Δ - գ) Ունենք

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 \cdot e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{e^{nx}} + x^2}{\frac{1}{e^{nx}} + 1} = x^2, \quad \text{երբ } x > 0$$

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 + 0 \cdot e^{n0}}{1 + e^{n0}} = 0$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 \cdot e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{x^2}{e^{-nx}}}{1 + \frac{1}{e^{-nx}}} = x, \quad \text{երբ } x < 0$$

Այսպիսով $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{երբ } x \geq 0 \\ x, & \text{երբ } x < 0 \end{cases}$ ֆունկցիան անընդհատ է թվային ուղ-

ղի բոլոր կետերում:

▽

Δ - դ) Ունենք

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4x^n - 5}{1 + 2x^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4x^n - 5}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 2x^n} = -5, \quad \text{երբ } 0 \leq x < 1$$

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 1 - 5}{1 + 2} = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4x^n - 5}{1 + 2x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{5}{x^n}}{\frac{1}{x^n} + 2} = 2, \quad \text{երբ } x > 1$$

$$\text{Այսպիսով } f(x) = \begin{cases} -5, & \text{երբ } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{3}, & \text{երբ } x = 1 \\ 2, & \text{երբ } x > 1 \end{cases}$$

$$f(1-0) = -5, \quad f(1+0) = 2$$

$x = 1$ կետը առաջին սեռի խզման կետ է:

▽

a -ի ո՞ր արժեքների դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան կլինի անընդհատ

նշված x_0 կետում:

$$\text{ա) } f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin x}{\sin 2} \right)^{\frac{1}{2a(x-2)}}, & \text{երբ } x \neq 2; \\ e^{\frac{\operatorname{ctg} 2}{4}}, & \text{երբ } x = 2; \end{cases} \quad x_0 = 2$$

$$\text{բ) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[5]{1+ax} - \sqrt[7]{1+2ax}}{x}, & \text{երբ } x \neq 0; \\ -\frac{9}{35}, & \text{երբ } x = 0; \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$\text{գ) } f(x) = \begin{cases} \frac{4^{(a+1)x} - 1}{2^{3ax} - 1}, & \text{երբ } x \neq 0; \\ 2, & \text{երբ } x = 0; \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$\text{դ) } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos ax}{x^2}, & \text{երբ } x \neq 0; \\ -\frac{9}{2}, & \text{երբ } x = 0; \end{cases} \quad x_0 = 0$$

Δ - ա) Հաշվենք սահմանը՝

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sin x}{\sin 2} \right)^{\frac{1}{2a(x-2)}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin 2} - 1 \right)^{\frac{1}{2a(x-2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin x - \sin 2}{2a(x-2)\sin 2}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \frac{x-2}{2} \cdot \cos \frac{x+2}{2}}{a(x-2)\sin 2}} = e^{\frac{\operatorname{ctg} 2}{2a}} \end{aligned}$$

(օգտվեցինք 10 և 11 կետերի համապատասխան խնդիրների արդյունքներից)

$$e^{\frac{\operatorname{ctg} 2}{2a}} = e^{\frac{\operatorname{ctg} 2}{4}} \Rightarrow \frac{\operatorname{ctg} 2}{2a} = \frac{\operatorname{ctg} 2}{4}, \quad a = 2 \quad \nabla$$

$$\begin{aligned} \Delta - \text{բ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+ax} - \sqrt[7]{1+2ax}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^{\frac{1}{5}} - 1 - \left((1+ax)^{\frac{1}{7}} - 1 \right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^{\frac{1}{5}} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^{\frac{1}{7}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{5}ax}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{7}ax}{x} = \frac{a}{5} - \frac{2a}{7} = -\frac{3a}{35} \\ &= -\frac{3a}{35} = -\frac{9}{35}, \quad a = 3 \quad \nabla \end{aligned}$$

$$\Delta - \text{գ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{(a+1)x} - 1}{2^{3ax} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+1)x \cdot \ln 4}{3ax \cdot \ln 2} = \frac{2(a+1)}{3a}$$

$$\frac{2(a+1)}{3a} = 2, \quad 3a = a+1, \quad a = \frac{1}{2} \quad \nabla$$

$$\Delta - \text{դ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos ax - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - 1}{x^2} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}a^2 x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}a^2 = -\frac{9}{2}, \quad a^2 = 9, \quad a_1 = -3; \quad a_2 = 3 \quad \nabla$$

ա) Ապացուցել, որ $[a; b]$ հատվածում անընդհատ ցանկացած $f(x)$ դրական ֆունկցիայի համար գոյություն ունի m դրական թիվ այնպես, որ $\forall x \in [a; b] \Rightarrow f(x) > m$:

Δ - Քանի որ $f(x)$ -ը անընդհատ է $[a; b]$ հատվածում, ապա այն ըստ Վայերշտրասսի երկրորդ թեորեմի այդ հատվածում ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը:

Նշանակենք $m_0 = \min\{f(x)\}$: Ունենք $\exists x_0 \in [a; b]$ այնպիսին, որ $f(x_0) = m_0$ և $f(x) \geq m_0, x \in [a; b]$:

Մյուս կողմից $f(x)$ -ի դրական լինելուց կհետևի, որ $m_0 > 0$: Որպես m թիվ վերցնենք, օրինակի համար $m = m_0/2$:

Այդ դեպքում կունենանք $f(x) > m, x \in [a; b]$: ∇

բ) Դիցուք $f(x)$ -ը անընդհատ է $(a; b)$ -ում և $Y = \{f(x) : x \in (a; b)\}$: Ապացուցել, որ Y բազմության ցանկացած $A_1, A_2, \dots, A_n$ թվերի համար $\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}$ թիվը նույնպես Y բազմությունից է:

Δ - Եթե $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, ապա $\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} = A_1$ ապացուցված է:

Ենթադրենք $A_1, A_2, \dots, A_n$ թվերի բազմության մեջ գոյություն ունեն առնվազն երկու իրար ոչ հավասար թվեր: Թող A_{k_0} -ն և A_{k_0} -ն լինեն $A_1, A_2, \dots, A_n$ թվերից փոքրագույնը և մեծագույնը: Ըստ թվաբանական միջինի հատկության

$$A_{k_0} < \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} < A_{k_0}$$

Քանի որ A_{i_0} -ն և A_{k_0} -ն ֆունկցիայի արժեքներ են, ապա գոյություն ունեն x_{i_0} -ն և x_{k_0} -ն կետեր $(a; b)$ միջակայքից, այնպիսին որ $f(x_{i_0}) = A_{i_0}$ և $f(x_{k_0}) = A_{k_0}$: Կիրառելով Բոլցանո-Կոշիի երկրորդ թեորեմը x_{i_0} և x_{k_0} ծայրակետեր ունեցող հատվածում, կունենանք, որ գոյություն ունի առնվազն մեկ c կետ, որը պատկանում է x_{i_0} և x_{k_0} ծայրակետեր ունեցող ինտերվալին և այնպիսին է, որ

$$f(c) = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} : \quad \nabla$$

գ) Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[1; +\infty)$ միջակայքում և գոյություն ունի $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B$ վերջավոր սահմանը, ապա $f(x)$ -ը $[1; +\infty)$ -ում սահմանափակ է:

Δ – Օգտվելով սահմանի սահմանումից՝ $\varepsilon = 1$ թվի համար գտնենք $\Delta(1) > 1$ թիվ այնպիսին, որ $B - 1 < f(x) < B + 1$, $x > \Delta(1)$ (1)

Քանի որ $[1; \Delta]$ միջակայքում ֆունկցիան անընդհատ է, ապա ըստ Վայերշտրասի առաջին թեորեմի, այն այդ միջակայքում սահմանափակ է: Գոյություն ունեն m և M թվեր այնպիսին, որ

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [1; \Delta] \quad (2)$$

նշանակենք

$$m_0 = \min\{m; B - 1\}; \quad M_0 = \max\{M; B + 1\} \quad (3)$$

(1)-(3)-ից կհետևի

$$m_0 \leq f(x) \leq M_0, \quad x \in [1; +\infty) \quad \nabla$$

դ) Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(a; b)$ միջակայքում և $x_0 \in (a; b)$ կետի ցանկացած շրջակայքում ընդունում է ինչպես բացասական, այնպես էլ դրական արժեքներ: Ապացուցել, որ $f(x_0) = 0$:

Δ – Ենթադրենք հակառակը $f(x_0) \neq 0$: Այդ դեպքում, ըստ անընդհատ ֆունկցիայի նշանի պահպանման հատկության, գոյություն ունի x_0 կետի $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset (a; b)$ շրջակայք այնպիսին, որ այդ շրջակայքի բոլոր կետերում ֆունկցիան ընդունում է նույն նշանի արժեքներ, ինչ նշան ունի $f(x_0)$ թիվը: Եկանք հակասության: Հետևաբար $f(x_0) = 0$:

ե) Դիցուք $f(x)$ **ֆունկցիան** **անընդհատ** է $(a;b)$ **միջակայքում** **և** **գոյություն ունեն** $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ **և** $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ **վերջավոր սահմանները:** **Ապացուցել, որ** $f(x)$ **ֆունկցիան** **սահմանափակ** է $(a;b)$ **-ում:**

$$\Delta - \text{Ելանակենք } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ և } \lim_{x \rightarrow b} f(x) = B$$

Շարունակենք $f(x)$ **ֆունկցիան** **անընդհատորեն** a **և** b **կետերում:**

$$f_1(x) = \begin{cases} A, & x = a \\ f(x), & a < x < b \\ B, & x = b \end{cases}$$

Շարունակած $f_1(x)$ **ֆունկցիան** **կլիմի** **անընդհատ** $[a;b]$ **հատվածում** **և** **հետևաբար,** **ըստ** **Վայերշտրասսի առաջին թեորեմի,** **գոյություն կունենան** m **և** M **թվեր այնպիսին, որ** $m \leq f_1(x) \leq M$, $x \in [a;b]$:

Քանի որ $f_1(x) = f(x)$, $x \in (a;b)$ **ապա** **վերջին անհավասարությունից** **կհետևի** $m \leq f(x) \leq M$, $x \in (a;b)$: ▽

զ) Դիցուք $x_1, x_2, \dots, x_n$ **թվերը** $(a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b)$ $[a;b]$ **հատվածում** **անընդհատ** $f(x)$ **ֆունկցիայի բոլոր գրոներն են:** **Ապացուցել, որ** $(a; x_1), (x_1; x_2), (x_2; x_3) \dots (x_n; b)$ **միջակայքերից յուրաքանչյուրում** **ֆունկցիան** **պահպանում է** **հաստատուն նշան:**

Δ – **Ենթադրենք** **հակառակը:** **Այդ դեպքում** **գոյություն կունենա** **առնվազն** $(x_{k_0}; x_{k_0+1})$ **միջակայք, որում** **ֆունկցիան** **չի պահպանում** **հաստատուն նշան:** **Իսկ դա** **նշանակում է,** **որ** **գոյություն ունեն** **այդ** **միջակայքին** **պատկանող** **առնվազն երկու** z_1 **և** z_2 **կետեր այնպիսին, որ** $f(z_1) \cdot f(z_2) < 0$: z_1 **և** z_2 **ծայրակետեր ունեցող** **հատվածը** **ընկած է** $[a;b]$ **միջակայքում:** **Այդ** **հատվածում** **կիրառելով** **Բոլցանո-Կոշիի առաջին թեորեմը** **կունենանք,** **որ** z_1 **և** z_2 **ծայրակետեր ունեցող** **ինտերվալում** **գոյություն կունենա** **առնվազն մեկ** z_3 **կետ այնպիսին, որ** $f(z_3) = 0$:

Եկանք **հակասության, որովհետև** $x_1, x_2, \dots, x_n$ **թվերը** $f(x)$ **ֆունկցիայի** **բոլոր գրոներն են:**

է) Ապացուցել, որ $3^x = 7x$ **հավասարումը** $(0;3)$ **միջակայքում** **ունի** **առնվազն երկու արմատ:** ▽

Δ – Դիտարկենք $f(x) = 3^x - 7x$, $x \in \mathbb{R}$ ֆունկցիան:

Այն անընդհատ է, որպես երկու անընդհատ ֆունկցիաների տարբերություն:

Ունենք

$$f(0) = 3^0 - 7 \cdot 0 = 1 > 0$$

$$f(1) = 3^1 - 7 \cdot 1 = -4 < 0$$

$$f(3) = 3^3 - 7 \cdot 3 = 6 > 0$$

Քանի որ $f(x)$ -ը անընդհատ է $[0;1]$ և $[1;3]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում և միջակայքերի ծայրակետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ ապա ըստ Բոլցանո-Կոշիի առաջին թեորեմի գոյություն ունեն x_1 և x_2 կետեր այնպիսին, որ $0 < x_1 < 1$, $1 < x_2 < 3$ և $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$:

Իսկ սա նշանակում է, որ x_1 -ը և x_2 -ը հանդիսանում են $3^x = 7x$ հավասարման արմատներ: ▽

Ապացուցել $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանափակությունը

511. $f(x) = x^2 - x - 1, [-1; 5]$ 512. $f(x) = \frac{1}{2x-9}, [0; 4]$
513. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, (-\infty; +\infty)$ 514. $f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}, [0; +\infty)$
515. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^4+5}}{x^2+2}, (-\infty; +\infty)$ 516. $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}, (-\infty; +\infty)$
517. $f(x) = \frac{\cos x}{2-\sin x}, (-\infty; +\infty)$ 518. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}, |x| \geq 1$
519. $f(x) = \frac{2 \sin x}{1+tg^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$
520. $f(x) = ctgx \cdot \sin 2x, x \neq \pi k, k \in Z$

Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի ծزգրիտ ստորին և վերին եզրերը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, եթե գոյություն ունեն

521. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}, (0; +\infty)$ 522. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}, (-\infty; 0)$
523. $f(x) = \lg(x^2+x-2)$ 524. $f(x) = \log_{0,1}(4x-3-x^2)$
525. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, (-\infty; +\infty)$ 526. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}, (-2; 3], x \neq 2$
527. $f(x) = 2^{-|x+2|}$ 528. $f(x) = \frac{3x+5}{5x-1}, [3; +\infty)$
529. $f(x) = \frac{5-6x}{4x-11}, (-\infty; -3]$ 530. $f(x) = \frac{4-5x}{3x+7}, (-\infty; -2]$
531. $f(x) = \frac{2x+3}{3-4x}, [3; +\infty)$ 532. $f(x) = \frac{3x+1}{2-3x}, [1; +\infty)$
533. $f(x) = \frac{4x-3}{5x+7}, (-\infty; -2]$ 534. $f(x) = \frac{4x+3}{3-2x}, [2; +\infty)$

535. Ապացուցել,

ա) եթե գոյություն ունի ֆունկցիայի մեծագույն արժեք, ապա

$$\sup_{x \in X} \{f(x)\} = \max_{x \in X} \{f(x)\}$$

բ) եթե գոյություն ունի ֆունկցիայի փոքրագույն արժեք, ապա

$$\inf_{x \in X} \{f(x)\} = \min_{x \in X} \{f(x)\}$$

536. Դիցուք $m(f) = \inf_{x \in (a,b)} \{f(x)\}$, $M(f) = \sup_{x \in (a,b)} \{f(x)\}$:

Ապացուցել, որ

$$m(f_1) + m(f_2) \leq m(f_1 + f_2) \leq M(f_1 + f_2) \leq M(f_1) + M(f_2):$$

Գտնել ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները:

537. $f(x) = -x^2 + 5x - 6$, $[0; 4]$ 538. $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $[-10; -3]$

539. $f(x) = \frac{4-x^2}{4+x^2}$, $[-1; 3]$ 540. $f(x) = \frac{x^2}{x^4+9}$, $[0; 3]$

Ապացուցել, որ գոյություն չունեն ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքներ

541. $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$, $x \in R$, $x \neq 0$ 542. $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \in (-1; +\infty)$

543. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in R$

Ապացուցել, որ գոյություն ունի ֆունկցիայի փոքրագույն արժեք, սակայն մեծագույն արժեք գոյություն չունի

544. $f(x) = x^2 - 3x$, $x \in R$ 545. $f(x) = x^3 + \frac{8}{x^3}$, $x \in (0; +\infty)$

546. $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in R$ 547. $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-4}$, $x \in [1; 2)$

Ապացուցել, որ գոյություն ունի ֆունկցիայի մեծագույն արժեք, սակայն փոքրագույն արժեք գոյություն չունի

548. $f(x) = 4x - x^2 - 6$, $x \in R$ 549. $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, $x \in R$

550. $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x \in (-8; 0)$ 551. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $x \in [0; 1)$

Դետազոտել $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակության տեսակետից

552. $f(x) = (0, 6)^x$, $(-\infty; +\infty)$ 553. $f(x) = \log_{0,2} x$, $(1; +\infty)$

554. $f(x) = \log_x(2)$, $(1; +\infty)$ 555. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $(-\infty; +\infty)$

$$556. f(x) = \frac{1}{\cos x}, \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$557. f(x) = x \cdot \sin x, (-\infty; +\infty)$$

$$558. f(x) = 3^{\frac{1}{x}}, (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

$$559. f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}, (-\infty; +\infty)$$

Ապացուցել անհավասարությունը

$$560. \sin x < x < \operatorname{tg} x, \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$561. \sin x \geq x, x \leq 0$$

$$562. |\sin x| \leq |x|, (-\infty; +\infty)$$

$$563. \operatorname{ctg} x < \frac{1}{x}, \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$564. \cos x < \frac{\pi}{2} - x, \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$565. \operatorname{ctg} x > \frac{\pi}{2} - x, \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$566. \operatorname{tg} x < \frac{2}{\pi - 2x}, \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$567. \cos x < 1 - \frac{x^2}{2}, (-\infty; +\infty)$$

$$568. \sin x \geq x - \frac{x^3}{3}, (0; +\infty)$$

$$569. \arcsin x > x, (0; 1)$$

Օգտվելով սահմանի կոշիկի սահմանումից, ապացուցել հավասարությունը

$$570. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$$

$$571. \lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27$$

$$572. \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + x) = 3$$

$$573. \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 1) = 1$$

$$574. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 2} = 0$$

$$575. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x + 9}{x + 3} = 3$$

$$576. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - x + 2}{2x + 7} = \frac{5}{16}$$

$$577. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2} = \frac{7}{2}$$

$$578. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 7x - 5}{x^2 + 8} = -1$$

$$579. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x} = 1$$

$$580. \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{-x} = \sqrt{2}$$

$$581. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$$

$$582. \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$583. \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$584. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$$

$$585. \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$586. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$588. \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tga}, \left(a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$$

$$590. \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$592. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$$

$$594. \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty$$

$$596. \lim_{x \rightarrow +\infty} [(4x-5)] = +\infty$$

$$598. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-8x}{2x+7} = -4$$

$$600. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}-0} \frac{3x+7}{3x-1} = -\infty$$

$$602. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+3}{2x-3} = -\infty$$

$$587. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$589. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{x-2} = 3$$

$$591. \lim_{x \rightarrow 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = 0$$

$$593. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x+1}) = 0$$

$$595. \lim_{x \rightarrow +\infty} [(3x+1)] = +\infty$$

$$597. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7-9x}{3x-2} = -3$$

$$599. \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{6x-5}{2-x} = -\infty$$

$$601. \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}+0} \frac{2x+5}{3-4x} = -\infty$$

$$603. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+1}{4-3x} = -\infty$$

Օգտվելով սահմանի հայտնի սահմանումից, ապացուցել, որ սահմանը գոյություն չունի

$$604. \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

$$606. \lim_{x \rightarrow \infty} \sin 2x$$

$$608. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} \sin \frac{1}{x}$$

$$610. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$612. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - [x])$$

$$614. \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{3}{x-1}$$

$$616. \lim_{x \rightarrow 2} \cos \frac{2}{x-2}$$

$$605. \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}$$

$$607. \lim_{x \rightarrow \infty} \cos 3x$$

$$609. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} \cos \frac{2}{x}$$

$$611. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$613. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - [3x])$$

$$615. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \sin \frac{\pi}{4x+1}$$

$$617. \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \cos \frac{\pi}{3x+2}$$

$$618. \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} 4^{\frac{1}{2x-3}}$$

$$619. \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} 3^{\frac{1}{3x-4}}$$

Օգտվելով սահմանի սահմանումից, ցույց տալ, որ $f(x)$ ֆունկցիան միայն նշված կետերում ունի սահման

$$620. f(x) = \begin{cases} x^2 - 7x + 4, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ 10 - 6x, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$$

$$621. f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 + 3, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ 3x - 9, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \end{matrix}$$

$$622. f(x) = \begin{cases} 3 - |x|, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ \frac{3}{7}x + \frac{1}{7}, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = -5 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

$$623. f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ 5 - |x|, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

$$624. f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 21, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ 24 + 3x - x^2, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 5 \end{matrix}$$

$$625. f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x - 60, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ 100 + 4x - 3x^2, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = -5 \\ x_2 = 8 \end{matrix}$$

626. Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունեն`

ա) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ($f(x) \neq a$, երբ $x \neq x_0$), բ) $\lim_{y \rightarrow a} g(y)$ -ը, ապա x_0 կետում գոյություն ունի $g(f(x))$ բարդ ֆունկցիայի սահմանը և տեղի ունի $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow a} g(y)$ հավասարությունը

627. Ապացուցել, որ եթե x_0 կետի որևէ շրջակայքում տեղի ունեն

$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x) \quad (x \neq x_0)$ անհավասարությունները և

$\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x) = A$, ապա $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$:

628. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն է $(a; b)$ -ում:

Ապացուցել`

ա) ցանկացած $x_0 \in (a; b)$ կետում f -ն ունի $f(x_0 - 0)$ և $f(x_0 + 0)$ վերջավոր միակողմանի սահմաններ:

բ) a և b կետերից յուրաքանչյուրում գոյություն ունեն վերջավոր կամ անվերջ սահմաններ:

629. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան $x = a$ կետում ունի 0-ից տարբեր վերջավոր սահման, իսկ $g(x)$ -ը $x = a$ կետում չունի վերջավոր սահման, ապա $f(x) \cdot g(x)$ ֆունկցիան $x = a$ կետում չունի վերջավոր սահման:

630. Դիցուք $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, իսկ $g(x)$ -ը $x = a$ կետում սահման չունի: Ի՞նչ կարելի է ասել $f(x) \cdot g(x)$ ֆունկցիայի սահմանի գոյության մասին $x = a$ կետում: Բերել համապատասխան օրինակներ:

631. Ապացուցել, որ եթե $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, ապա $f(x) \cdot g(x)$ ֆունկցիան $x = a$ կետում անվերջ մեծ է:

632. Հայտնի է, որ $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները $x = a$ կետում սահման չունեն: Ի՞նչ կարելի է ասել $(f(x) + g(x))$, $f(x) \cdot g(x)$ ֆունկցիաների սահմանի գոյության մասին: Բերել համապատասխան օրինակներ:

633. Բերել $f(x)$ ֆունկցիայի օրինակ, որը $(-\infty; +\infty)$ -ի ոչ մի կետում սահման չունի, սակայն $f^2(x)$ -ը ցանկացած կետում ունի սահման:

634. Տրված է $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, ($n \in N$, $a_n \neq 0$) բազմանդամը: Ապացուցել, որ $\lim_{x \rightarrow \infty} |P(x)| = +\infty$:

635. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան $x = x_0$ կետում ունի վերջավոր դրական A սահմանը, ապա գոյություն ունի x_0 կետի $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ շրջակայք, որտեղ $f(x) > \frac{A}{2}$, $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$:

636. Տրված է $Q(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$, ($a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$) ռացիոնալ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & \text{երբ } n = m \\ 0, & \text{երբ } n < m \\ \infty, & \text{երբ } n > m \end{cases}$$

$$637. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 6x + 1}{x + 1}$$

$$639. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$641. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x + 1}{x^3 - 2x + 1}$$

$$643. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$$

$$645. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$$

$$647. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

$$649. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + \sqrt{x} - 6}{x - 5\sqrt{x} + 6}$$

$$651. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 4}{\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 2}$$

$$653. \lim_{x \rightarrow -0,8} \frac{5x + 3\sqrt{5 + 5x} + 1}{5x - 4\sqrt{5 + 5x} + 8}$$

$$655. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - x^3} + \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$657. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x + 12}{2x^2 + x - 1}$$

$$659. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{5 - x^2} \cdot \frac{7x^2 + 1}{5x + 7} \right)$$

$$661. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 1)^2 (3 - 7x)^2}{(2x - 1)^4}$$

$$663. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x + 1} - \frac{x^3 + 4x^2 - 2}{1 - 2x^2} \right)$$

$$665. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x} + 5x}{\sqrt[3]{x^3 + 2} + 3}$$

$$638. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$$

$$640. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14}$$

$$642. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - x^3 - 2}{x^4 + 2x - 3}$$

$$644. \lim_{x \rightarrow 0,4} \frac{5x^3 - 2x^2 + 5x - 2}{5x^2 - 12x + 4}$$

$$646. \lim_{x \rightarrow -0,5} \frac{4x^3 - 3x - 1}{4x^2 + 4x + 1}$$

$$648. \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^3 + x^2 + x - 1}$$

$$650. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 5\sqrt{x} + 6}{x - 8\sqrt{x} + 15}$$

$$652. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 3}$$

$$654. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{101} - 101x + 100}{x^2 - 2x + 1}$$

$$656. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{2x - x^2} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$$

$$658. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - 5x)^3}{(1 + x)(x^2 + x + 1)}$$

$$660. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} \cdot \frac{3x^2 + x}{x + 2} \right)$$

$$662. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^{20} (6x + 13)^{30}}{(12x - 5)^{50}}$$

$$664. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + \sqrt{x^3 + x^4}}}{\sqrt{9x^2 + 4x}}$$

$$666. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} + x}{5x + 1}$$

$$667. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + x}{4x + 3}$$

$$669. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}$$

$$671. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2 - x}{x^2}$$

$$673. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{2x+7} - \sqrt{x+4}}{\sqrt{3-2x} - \sqrt{x^2}}$$

$$675. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[4]{2x+3} - \sqrt[4]{x+2}}{x^2 - x - 2}$$

$$677. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$679. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt[3]{2x+7} - 3}{\sqrt{2x-4} + 6 - x}$$

$$681. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} - \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1} \right)$$

$$682. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 4x} - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 4} \right)$$

$$683. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt{x^4 + x^2 \sqrt{x^4 + 1}} - \sqrt{2x^4} \right)$$

$$684. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \right)$$

$$685. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$687. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$689. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x} - 1}$$

$$691. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x}$$

$$693. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2 \cos x}$$

$$668. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + x}{4x + 3}$$

$$670. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}}$$

$$672. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7+2x-x^2} - \sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2}$$

$$674. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{2-x}}$$

$$676. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{3x^2+2x} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{2x+5}}$$

$$678. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{9+x} + x + 7}{\sqrt[3]{15+2x} + 1}$$

$$680. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{5-3x} + \sqrt[3]{5x-3}}{\sqrt[3]{3x^2+2x} + x}$$

$$686. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{7x}$$

$$688. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x}$$

$$690. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$692. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin 2x \cdot \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

$$694. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{1 + \cos x}$$

$$695. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}$$

$$697. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$$

$$699. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}$$

$$701. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}}{x}$$

$$703. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - 3 \operatorname{arcsin} 4x}{\sin 5x - 6 \operatorname{arctg} 7x}$$

$$705. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(1+x) \operatorname{tg}(1-x) - \operatorname{tg}^2 1}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$707. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 1}{4x}$$

$$709. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(5^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$711. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$$

$$713. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$715. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{e^{1 - \cos mx}} - 1}{x^2}$$

$$717. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$$

$$719. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^p - a^p}{x^q - a^q}, \quad (a > 0)$$

$$721. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x^{21}}{\sin \pi x^{31}}$$

$$723. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n}) \right], \quad |x| < 1$$

$$696. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}$$

$$698. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$$

$$700. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{1+x^2} - \sin \sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

$$702. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \operatorname{arcsin} x} - \sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{\sqrt[3]{1 + \operatorname{arctg} 3x} - \sqrt[3]{1 - \operatorname{arcsin} 4x}}$$

$$704. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2 \sin(a+x) + \sin a}{x^2}$$

$$706. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2 \cos(a+x) + \cos a}{x^2}$$

$$708. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2 \operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tga}}{x^2}$$

$$710. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(4^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x+1}} \right)$$

$$712. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1}$$

$$714. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{\sqrt{3-x} - 2}$$

$$716. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x^2} \cdot \cos^2 \alpha x - 1}{x^2}$$

$$718. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^p x}{x^2} \quad (p - \text{ն } \text{իրական } t)$$

$$720. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}, \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$722. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x} \right), \quad (x > 0)$$

$$724. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^7 - 1}{2x}$$

$$726. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{9x-9} + \sqrt{7-x}}{x^2 + 3x + 2}$$

$$728. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$$

$$730. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{1+3x} \cdot \sqrt[9]{1+27x} - 1}{x}$$

$$732. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$$

$$734. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^{x-1} - x^2}{x - 3}$$

$$736. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{x - 10}$$

$$738. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right) \right)}{\sin 4x}$$

$$740. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$$

$$742. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^2$$

$$744. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2}$$

$$746. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$$

$$748. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$$

$$750. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - b^x)^2}{a^{x^2} - b^{x^2}}, \quad a, b > 0$$

$$725. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[9]{1+5x} - \sqrt[17]{1+7x}}{x}$$

$$727. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[5]{3x-1}}{x^2 + 2x}$$

$$729. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt[3]{9x+19}}{\sqrt[4]{17x-4} - 3}$$

$$731. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \sin \frac{3}{x} \right) \sqrt{x^2 + 2x + 3}$$

$$733. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sin \frac{4}{x} + \sin \frac{7}{x} \right) \sqrt{x^2 + x + 2}$$

$$735. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x+x^2) - \ln(1-3x+x^2)}{x^2}$$

$$737. \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \log_2 \frac{10+x}{5+x}$$

$$739. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot e^x + 1}{x \cdot \pi^x + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$741. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(a+x) + \lg(a-x) - 2 \lg a}{x^2}, \quad (a > 0)$$

$$743. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{2x}}$$

$$745. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$$

$$747. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right)^{\operatorname{ctg} x}$$

$$749. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$$

$$751. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a+b} \right)^{\frac{1}{x}}, \quad a, b > 0, \quad a \neq b$$

Ցույց տալ, որ գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ նշված պայմանին բավարարող x -երի համար ծիշտ լինի անհավասարությունը:

752. $\cos 2x \leq 1 - 11(\sqrt{x^2 + 9} - 3)$, $|x| < \delta$,
753. $\sin 5x > 19(\sqrt{x+4} - 2)$, $0 < x < \delta$
754. $\sin(\sin^2 x) \geq 0,98x^2$, $|x| < \delta$
755. $\operatorname{tg}^2 x \geq 0,99 \operatorname{tg} x^2$, $|x| < \delta$
756. $3 \cos x \geq 2 + \cos 2x$, $|x| < \delta$
757. $\operatorname{tg} x < \sin x + x^3$, $0 < x < \delta$
758. $3^x < 1 + 2 \ln(1+x)$, $0 < x < \delta$
759. $\cos 2x > 1 - 2,02x^2$, $0 < x < \delta$
760. $\sin^2 x + 1,98 \cos x \geq 1,98$, $|x| < \delta$
761. $\sin^2 3x \leq 10 \sin x^2$, $|x| < \delta$
762. $\sin^2 4x \geq 7 \sin 2x^2$, $|x| < \delta$
763. $3 \sin^2 2x + \sqrt[3]{\cos 8x} \geq \sqrt[3]{\cos 2x}$, $|x| < \delta$
764. $4\sqrt[2]{1+5x} \leq x + 4\sqrt[2]{1+4x}$, $-\delta < x \leq 0$
765. $\sqrt[5]{1+7x^3} \geq x^3 + \sqrt[7]{1+5x^3}$, $-\delta < x \leq 0$
766. $2\sqrt[8]{1+6x^5} + x^5 \leq 2\sqrt[5]{1+7x^5}$, $0 \leq x < \delta$
767. $\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x} \geq \sqrt{1+\sin 2x}$, $0 \leq x < \delta$
768. $\sqrt[3]{8+\operatorname{tg} 4x} \geq 3x^3 + \sqrt[3]{8+\sin 4x}$, $-\delta < x \leq 0$
769. $\sqrt[3]{8+\operatorname{tg} 4x} \leq 2x^3 + \sqrt[3]{8+\sin 4x}$, $-\delta < x \leq 0$
770. $\sqrt{1+4\operatorname{tg} 3x} \leq 25x^3 + \sqrt{1+4\sin 3x}$, $-\delta < x \leq 0$
771. $\sqrt{1+4\operatorname{tg} 3x} \geq 26x^3 + \sqrt{1+4\sin 3x}$, $0 \leq x < \delta$
772. $2\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x} \geq 2\sqrt{1+\sin 2x} + 3x^3$, $0 \leq x < \delta$
773. $11x^3 + \sqrt[3]{1+\sin 4x} \leq \sqrt[3]{1+\operatorname{tg} 4x}$, $-\delta < x \leq 0$
774. $5 \cos 3x \geq 4 + \cos 7x$, $|x| < \delta$

775. $7 \cos 5x \geq 3 + 4 \cos 7x$, $|x| < \delta$
776. $22 \cos 5x \leq 7 + 15 \cos 6x$, $|x| < \delta$
777. $e^{\sin 8x} \leq e^{\sin 4x} + \ln(1 + 3x)$, $-\delta < x \leq 0$
778. $6^{1+\sin x} \leq 6 + \ln(1 + 6x)$, $-\delta < x \leq 0$
779. $e^{\sin 9x} \geq e^{\sin 3x} + 2 \ln(1 + 4x)$, $-\delta < x \leq 0$
780. $2 \sin^2 3x + \sqrt[3]{\cos 13x} \leq \sqrt[3]{\cos 5x}$, $|x| < \delta$
781. $e^{2x^4} \leq \cos 3x^2 + 7 \sin^2 x^2$, $|x| < \delta$
782. $\operatorname{tg}^3 x \leq 3 \operatorname{tg} x - 23 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3} - \delta < x \leq \frac{\pi}{3}$
783. $\operatorname{tg}^3 2x + 25 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \operatorname{tg} 2x$, $\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{6} + \delta$

Ապացուցել հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևը

784. $\sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} + o\left(x^{\frac{3}{4}}\right)$, երբ $x \rightarrow 0$
785. $\sqrt[3]{3+x^3} = \sqrt[3]{3-x^3} + o(x^2)$, երբ $x \rightarrow 0$
786. $\cos x = \cos 2x + o\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$, երբ $x \rightarrow 0+$
787. $\sin 4x = 2 \sin 2x + o\left(x^{\frac{14}{5}}\right)$, երբ $x \rightarrow 0$
788. $e^x = \cos x + o(\sqrt{x})$, երբ $x \rightarrow 0+$
789. $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + o\left(x^{\frac{4}{5}}\right)$, երբ $x \rightarrow 0$
790. $e^{\sin 3x} = 1 + o\left(x^{\frac{3}{4}}\right)$, երբ $x \rightarrow 0+$
791. $x^2 = \pi^2 + o(\sqrt{\sin x})$, երբ $x \rightarrow \pi -$
792. $x^2 = \pi^2 + o(\sqrt{-\sin x})$, երբ $x \rightarrow \pi +$
793. $9x^2 = \pi^2 + o(\sqrt[5]{\sin^4 3x})$, երբ $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$$794. 16x^2 = \pi^2 + o\left(\sqrt[6]{\sin^5 4x}\right), \quad \text{երբ } x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0$$

$$795. \cos x = \frac{1}{2} + o\left(\sqrt{x - \frac{\pi}{3}}\right), \quad \text{երբ } x \rightarrow \frac{\pi}{3} +$$

$$796. \sqrt{1+x \sin x} = 1 + o\left(x^{\frac{3}{2}}\right), \quad \text{երբ } x \rightarrow +0$$

$$797. \sqrt{1-\cos 8x} = \sqrt{1+\cos 10x} + o\left(\sqrt{-\sin^3 6x}\right), \quad \text{երբ } x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0$$

$$798. \sqrt{1-\cos 4x} = \sqrt{1+\cos 6x} + o\left(\sqrt{-\sin^3 8x}\right), \quad \text{երբ } x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$$

$$799. 6\sqrt[7]{1+4x^4} = 6\sqrt[8]{1+5x^5} + o\left(\sqrt[3]{x^{11}}\right), \quad \text{երբ } x \rightarrow 0$$

$$800. e^{7x} = \cos \sqrt[7]{x^3} + o\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 4x}\right), \quad \text{երբ } x \rightarrow 0$$

$$801. 5^{x-3} = x^2 + o\left((x-5)^{\frac{3}{4}}\right), \quad \text{երբ } x \rightarrow 5 +$$

$$802. e^{5x} = \cos \sqrt[9]{x^4} + o\left(\sqrt[5]{x^4}\right), \quad \text{երբ } x \rightarrow 0$$

$$803. (1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + o(x), \quad \text{երբ } x \rightarrow 0$$

$$804. \sqrt{x+px+q} = x + \frac{p}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{երբ } x \rightarrow +\infty$$

$$805. \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \text{երբ } x \rightarrow \infty$$

$$806. a^x = 1 + x \ln a + o(x), \quad \text{երբ } x \rightarrow 0$$

Գործնական $f(x_0 - 0)$ -**ը** u $f(x_0 + 0)$ -**ը**

$$807. f(x) = \frac{x - |x|}{2x}, \quad x_0 = 0$$

$$808. f(x) = \arccos(x-1), \quad x_0 = 1$$

$$809. f(x) = 2^{\operatorname{ctg} x}, \quad x_0 = 0$$

$$810. f(x) = \frac{2(1-x^2) + |1-x^2|}{3(1-x^2) - |1-x^2|}, \quad x_0 = 1$$

$$811. f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x), \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$812. f(x) = \frac{1}{x + 3^{\frac{1}{3-x}}}, \quad x_0 = 3$$

$$813. f(x) = \frac{1}{x - [x]}, \quad x_0 = -1$$

$$814. f(x) = x + [x^2], \quad x_0 = 10$$

α -ի և β -ի ի՞նչ արժեքների դեպքում ֆունկցիան կլինի անվերջ փոքր

$$815. f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - \alpha x - \beta, \quad \text{երբ } x \rightarrow \infty$$

$$816. f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} - \alpha x - \beta, \quad \text{ա) երբ } x \rightarrow +\infty, \text{ բ) երբ } x \rightarrow -\infty$$

$$817. f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} - \alpha x - \beta, \quad \text{ա) երբ } x \rightarrow +\infty, \text{ բ) երբ } x \rightarrow -\infty$$

$$818. f(x) = (x+4)e^{\frac{1}{x}} - \alpha x - \beta, \quad \text{ա) երբ } x \rightarrow \infty, \text{ բ) երբ } x \rightarrow 0-$$

$$819. f(x) = \ln(1 + e^{3x}) - \alpha x - \beta, \quad \text{ա) երբ } x \rightarrow +\infty, \text{ բ) երբ } x \rightarrow -\infty$$

$$820. f(x) = x^\alpha \cdot \sin \frac{1}{x^\beta}, \quad \text{երբ } x \rightarrow 0+$$

$$821. f(x) = x^\alpha \cdot \arctg \frac{1}{x^\beta}, \quad \text{երբ } x \rightarrow 0+$$

$$822. f(x) = (1 - x^\alpha)^{x^\beta}, \quad \text{երբ } x \rightarrow 0+$$

Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն իր որոշման տիրույթի վրա անընդհատ է

$$823. f(x) = 2x + 1$$

$$824. f(x) = 3x^3 - 1$$

$$825. f(x) = \sqrt{x}$$

$$826. f(x) = \sin 2x$$

$$827. f(x) = \arcsin x$$

$$828. f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$829. f(x) = \arctg x$$

$$830. f(x) = \log_5 x$$

$$831. f(x) = 4^{5x}$$

$$832. f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$$

Չետազոտել ֆունկցիայի անընդհատությունը: Դասակարգել խզման կետերը ըստ սեռի:

$$833. y = [x]$$

$$834. y = x - [x]$$

$$835. y = \operatorname{sgn} x$$

$$836. y = \operatorname{sgn} |x|$$

$$837. y = \operatorname{sgn}(\sin x), \quad x \in [0; 2\pi]$$

$$838. y = \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{\pi}{x}\right), \quad x \in \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]$$

839. $y = 2x - [x^2]$, $x \in [0; 2]$
840. $y = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$, $x \in (1; 16)$
841. $y = 3x - [7x]$, $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$
842. $y = 4x^2 - \left[\frac{1}{5}x^2\right]$, $x \in [1; \sqrt{20}]$
843. $y = \sqrt{x} - [\sqrt{2x}]$, $x \in [0; 5; 8]$
844. $y = \sqrt{x} - [3\sqrt{x}]$, $x \in \left[0; \frac{16}{9}\right]$
845. $y = 3x - [4x^2]$, $x \in [0; 1]$
846. $y = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$, $x \in \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{5}\right]$
847. $y = \begin{cases} \left|\frac{\sin x}{x}\right|, & \text{єрр } x \neq 0 \\ 1, & \text{єрр } x = 0 \end{cases}$
848. $y = \begin{cases} x^2, & \text{єрр } x \in (-\infty; 1) \\ 2x - 1, & \text{єрр } x \in [1; +\infty) \end{cases}$
849. $y = \begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & \text{єрр } x \neq -1 \\ \frac{1}{3}, & \text{єрр } x = -1 \end{cases}$
850. $y = [x] \sin \pi x$
851. $y = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & \text{єрр } x \neq 0 \\ 0, & \text{єрр } x = 0 \end{cases}$
852. $y = \begin{cases} x^\alpha \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{єрр } x \neq 0 \\ 0, & \text{єрр } x = 0 \end{cases}$
853. $y = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{єрр } x < 0 \\ (x-1)^2, & \text{єрр } 0 \leq x \leq 2 \\ 4 - x, & \text{єрр } x > 2 \end{cases}$

$$854. y = \frac{x^2}{\sin x^2}$$

$$855. y = x \left[\frac{1}{x} \right]$$

$$856. y = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{երբ } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ 0, & \text{երբ } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases}$$

$$857. y = [x] \cdot (x - [x])$$

$$858. y = \begin{cases} x - [x], & \text{երբ } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ 0, & \text{երբ } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases}$$

$$859. y = \frac{2^x - 1}{|2^x - 1|}$$

$$860. y = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$$

$$861. y = 2^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)}$$

$$862. y = \begin{cases} x, & \text{երբ } |x| \leq 1 \\ 1, & \text{երբ } |x| > 1 \end{cases}$$

$$863. y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$$

$$864. y = \begin{cases} -x, & \text{երբ } x \leq 1 \\ \frac{2}{x-1}, & \text{երբ } x > 1 \end{cases}$$

$$865. y = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & \text{երբ } |x| \leq 1 \\ |x-1|, & \text{երբ } |x| > 1 \end{cases}$$

$$866. y = \frac{3|x-4|}{x^3 - 4x^2}$$

$$867. y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

$$868. y = \frac{|\sin x|}{x}$$

$$869. y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}$$

$$870. y = \frac{\sin x}{|x|}$$

$$871. y = \frac{\cos \frac{\pi}{2x}}{\cos \frac{\pi}{2x}}$$

$$872. y = \frac{2+x}{x+x^3}$$

$$873. y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$$

Հետազոտել ֆունկցիան անընդհատության տեսակետից

$$874. f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 + 3, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ 3x - 9, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases}$$

$$875. f(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x + \frac{1}{9}, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ 3 - |x|, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases}$$

$$876. f(x) = \begin{cases} 5 - |x|, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ x^2 + 3, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases}$$

$$877. f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 21, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ 24 + 3x - x^2, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases}$$

$$878. f(x) = \begin{cases} \cos 3x, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ -\frac{1}{2}, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases}$$

$$879. f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է} \\ -\frac{1}{2}, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է} \end{cases}$$

$$880. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

$$881. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^n}, \quad x \geq 0$$

$$882. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$$

$$883. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x, \quad x \in [0; \pi]$$

$$884. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$$

$$885. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$886. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + xe^{nx}}$$

$$887. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n}, \quad x \geq 0$$

$$888. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^n - 3}{1 + x^n}, \quad x \geq 0$$

$$889. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x)^n, \quad x \in [0; 1]$$

$$890. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}$$

$$891. f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{xt})}{\ln(1 + e^t)}$$

$$892. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 \cdot e^{nx}}{1 + e^{nx}}$$

**a -ի ո՞ր արժեքների դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան կլինի անընդհատ
 նշված x_0 կետում:**

$$893. f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\cos x}{\cos ax} \right)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ e^4, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$894. f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 ax}}, & x \neq 0 \\ \sqrt[16]{e}, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$895. f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin x}{\sin 2} \right)^{\frac{1}{2a(x-2)}}, & x \neq 2 \\ e^{\frac{\operatorname{ctg} 2}{4}}, & x = 2 \end{cases}; \quad x_0 = 2$$

$$896. f(x) = \begin{cases} (\cos a(x+1))^{\frac{1}{(x+1)^2}}, & x \neq -1 \\ e^{-2}, & x = -1 \end{cases}; \quad x_0 = -1$$

$$897. f(x) = \begin{cases} \frac{3^{ax} - 3^x}{x}, & x \neq 0 \\ 4 \ln 3, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$898. f(x) = \begin{cases} \frac{9^{(a^2-2)x} - 1}{3^{(2a+1)x} - 1}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$899. f(x) = \begin{cases} \frac{4^{(3a+5)x} - 2^{(5a-2)x}}{x}, & x \neq 0 \\ 5 \ln 4, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$900. f(x) = \begin{cases} \frac{4^{(2a+3)x} - 4^{(a-5)x}}{x}, & x \neq 0 \\ -2 \ln 4, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$901. f(x) = \begin{cases} \frac{e^{a^2 x^2} - e^{(7a-6)x^2}}{\ln(1+3ax^2)}, & x \neq 0 \\ -4, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$902. f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{2a-13}{2}x^2} - \cos(a-2)x}{\sin^2 x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$903. f(x) = \begin{cases} \frac{e^{7ax} - e^{(2a+1)x}}{\sin x}, & x \neq 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$904. f(x) = \begin{cases} \frac{e^{(2a+3)(x-1)^2} - 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} a(x-1)^2} - 1}, & x \neq 1 \\ 7, & x = 1 \end{cases}; \quad x_0 = 1$$

$$905. f(x) = \begin{cases} \frac{e^{9a(x+2)} - e^{(5a+2)(x+2)}}{\ln(5+2x)}, & x \neq -2 \\ -5, & x = -2 \end{cases}; \quad x_0 = -2$$

$$906. f(x) = \begin{cases} \frac{e^{a(x+5)^2} - \cos(x+5)}{(x+5)^2}, & x \neq -5 \\ \frac{5}{2}, & x = -5 \end{cases}; \quad x_0 = -5$$

$$907. f(x) = \begin{cases} \frac{e^{(a-8)x^2} - \cos(a-4)x}{x^2}, & x \neq 0 \\ -\frac{9}{2}, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$908. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[5]{1+ax} - \sqrt[3]{1+2ax}}{x}, & x \neq 0 \\ -\frac{9}{35}, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$909. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[4]{1+5ax} - \sqrt[3]{1+3x}}{x}, & x \neq 0 \\ 7, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$910. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[5]{1+3a(x-2)} - \sqrt[4]{1-4a(x-2)}}{x^2 - x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}; \quad x_0 = 2$$

$$911. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+ax} - 1 - \sin x}{\ln(1+x)}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$912. f(x) = \begin{cases} \frac{e^{(a+4)x^2} - 1}{\sqrt{1+\sin^2 ax} - 1}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$913. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[5]{1+(2a-3)x} - 1 - \sin(a-3)x}{\ln(1+ax)}, & x \neq 0 \\ -3, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$914. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 ax}{2 - \sqrt{3 + \cos x}}, & x \neq 0 \\ 32, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$915. f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \sin(6-a)x}{\sqrt{3-2\cos ax} - \sqrt{2-\cos ax}}, & x \neq 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}; \quad x_0 = 0$$

$$916. f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\cos a(x-1))}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ -\frac{9}{2}, & x = 1 \end{cases}; \quad x_0 = 1$$

Օգտվելով անընդհատության Կոշիի սահմանումից ապացուցել $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը նշված x_0 կետում:

$$917. f(x) = \frac{x^2 - 7x - 2}{x - 6}, \quad x_0 = -2$$

$$918. f(x) = \frac{x^2 - 4x - 12}{x + 6}, \quad x_0 = -3$$

$$919. f(x) = \frac{x^2 - 5x - 4}{x - 2}, \quad x_0 = -3$$

$$920. f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}, \quad x_0 = -2$$

$$921. f(x) = \sqrt{6-5x}, \quad x_0 = -2$$

$$922. f(x) = \sqrt{5-4x}, \quad x_0 = -5$$

$$923. f(x) = \sqrt{-x-3}, \quad x_0 = -7$$

$$924. f(x) = \sqrt[3]{-11-4x}, \quad x_0 = 4$$

$$925. f(x) = \sqrt{7+9x-x^2}, \quad x_0 = 3$$

$$926. f(x) = \sqrt{12+5x-x^2}, \quad x_0 = 4$$

$$927. f(x) = \sin 2x, x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$928. f(x) = \cos 3x, x_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$929. f(x) = \sin^3 4x, x_0 = 1$$

$$930. f(x) = \cos^3 2x, x_0 = 2$$

$$931. f(x) = \operatorname{tg} x, x_0 = \frac{3\pi}{4}$$

$$932. f(x) = \operatorname{ctg} 3x, x_0 = \frac{\pi}{4}$$

Չնարավո՞ր է արդյոք խզման x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան որոշել այնպես, որ դառնա անընդհատ:

$$933. f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{|x|}, x_0 = 0$$

$$934. f(x) = 2^{-2(1-x)^{-1}}, x_0 = 1$$

$$935. f(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}, x_0 = 0$$

$$936. f(x) = 2^{\left[\frac{1}{x}\right]}, x_0 = 0$$

$$937. f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, x_0 = 1$$

$$938. f(x) = \frac{e^x - 1}{|x|}, x_0 = 0$$

Խառը խնդիրներ

939. Բերել $f(x)$ ֆունկցիայի օրինակ որը $(-\infty, +\infty)$ -ի ոչ մի կետում անընդհատ չլինի, բայց $f^2(x)$ -ը ցանկացած կետում լինի անընդհատ:

940. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում և $f(x_0) \neq 0$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $C > 0$ թիվ և x_0 կետի շրջակայք, որ այդ շրջակայքի ցանկացած կետում ճշմարիտ է $|f(x)| \geq C$ անհավասարությունը:

941. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a; b]$ հատվածում: Ապացուցել ա) եթե $f(x) > 0$, ապա գոյություն ունի $m > 0$ թիվ, որ $f(x) > m$, $x \in [a; b]$:

բ) եթե $f(x) < 0$, ապա գոյություն ունի $M > 0$ թիվ, որ $f(x) < -M$, $x \in [a; b]$:

942. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(a; b)$ միջակայքում: Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ -ը անընդհատ է $x_0 \in (a; b)$ կետում, ապա $|f(x)|$ -ը և $f^2(x)$ -ը ևս անընդհատ են այդ կետում: Բերել $f(x)$ խզվող ֆունկցիայի այնպիսի օրինակ, որ $|f(x)|$ -ը և $f^2(x)$ -ը ֆունկցիաները լինեն անընդհատ:

943. Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $(a;b)$ միջակայքում, ընդ որում $f(x)$ -ը անընդհատ է, $g(x)$ -ը՝ խզվող $x_0 \in (a;b)$ կետում: Հետազոտել $f(x)+g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը այդ կետում:

944. Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները խզվող են $x_0 \in (a;b)$ կետում: Հետազոտել $f(x)+g(x)$ և $f(x) \cdot g(x)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը այդ կետում:

945. Կառուցել $(0;1)$ միջակայքի վրա այնպիսի անընդհատ ֆունկցիա, որը չունենա ո՛չ ամենամեծ, ո՛չ ամենափոքր արժեքներ:

946. Կառուցել $[0;1)$ կիսաբաց միջակայքի վրա այնպիսի անընդհատ ֆունկցիա, որը չունենա ո՛չ ամենամեծ, ո՛չ ամենափոքր արժեքներ:

947. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա

$$f_c(x) = \begin{cases} -C, & \text{եթե } f(x) < -C \\ f(x), & \text{եթե } |f(x)| \leq C \\ C, & \text{եթե } f(x) > C \end{cases}$$

ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է, որտեղ C -ն կամայական դրական թիվ է:

948. Ապացուցել, որ $[a;b]$ հատվածում որոշված և մոնոտոն $f(x)$ ֆունկցիայի խզման կետերը միմիայն առաջին սեռի են:

949. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն է $[a;b]$ հատվածում և նրա արժեքների բազմությունը համընկնում է $f(a)$ և $f(b)$ ծայրակետեր ունեցող հատվածի հետ, ապա այն անընդհատ է $[a;b]$ հատվածում:

950. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ $[a;b]$ հատվածում, ընդ որում նրա արժեքների բազմությունը նույն $[a;b]$ հատվածն է:

Ցույց տալ, որ $[a;b]$ հատվածում գոյություն ունի գոնե մեկ x_0 կետ, որի համար $f(x_0) = x_0$:

951. Ապացուցել, որ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը հատված է:

952. Բերել ինտերվալում որոշված և անընդհատ ֆունկցիայի օրինակ, որի արժեքների բազմությունը՝ ա) հատված է, բ) ինտերվալ է, գ) կիսաինտերվալ է:

953. Ցույց տալ, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(a;b)$ միջակայքում և $x_1, x_2, \dots, x_n$ կետերը կամայական կետեր են այդ միջակայքից, ապա նրանց միջև գոյություն ունի գոնե մեկ c կետ այնպիսին, որ

$$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

954. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(a; b)$ միջակայքում: Ապացուցել, որ ցանացած $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ($x_i \in (a; b)$, $i = 1; 2; \dots; n$) պայմանին բավարարող կետերի համար և ցանկացած $a_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ թվերի համար գոյություն կունենա առնվազն մեկ c կետ ($x_1 \leq c \leq x_n$) այնպիսին, որ $f(c) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$:
955. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[1; +\infty)$ միջակայքում և գոյություն ունի $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B$ վերջավոր սահմանը, ապա $f(x)$ -ը $[1; +\infty)$ -ում սահմանափակ է:
956. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(a; b)$ միջակայքում և $x_0 \in (a; b)$ կետի ցանկացած շրջակայքում ընդունում է ինչպես բացասական, այնպես էլ դրական արժեքներ: Ապացուցել, որ $f(x_0) = 0$:
957. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(a; b)$ միջակայքում և գոյություն ունեն $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ և $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ վերջավոր սահմաններ: Ապացուցել, որ $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $(a; b)$ -ում:
958. Դիցուք $x_1, x_2, \dots, x_n$ թվերը ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$) $[a; b]$ հատվածում $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի բոլոր արժատներն են: Ապացուցել, որ $(a; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $\dots$, $(x_n; b)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան պահպանում է հաստատուն նշան:
959. Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված և անընդհատ են $[a; b]$ հատվածում և $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի առնվազն մեկ $c \in (a; b)$ կետ այնպիսին, որ $f(c) = g(c)$:
960. Ապացուցել, որ $x \cdot 2^x = 1$ հավասարումն արձատ ունի:
961. Ապացուցել, որ $3^x = 7x$ հավասարումը $(0; 3)$ միջակայքում առնվազն երկու արձատ ունի:
962. Ապացուցել, որ $2^x = 5x$ հավասարումը $(0; 5)$ միջակայքում առնվազն երկու արձատ ունի:
963. Ապացուցել, որ $x^5 - 3x = 1$ հավասարումը՝ ա) $(1; 2)$ միջակայքում արձատ ունի, բ) առնվազն երեք արձատ ունի R -ում:

964. Ապացուցել, որ $10^{x-1} = x$ հավասարումն ունի առնվազն երկու լուծում:

965. Ապացուցել, որ $x \cdot \sin x = 1/2$ հավասարումն ունի անվերջ թվով լուծումներ:

966. Ապացուցել, որ $\cos x = x$ հավասարումը $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում արձատ ունի:

967. Ապացուցել, որ $\cos x = \frac{8}{\pi^2} x$ հավասարումը $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում լուծում ունի:

968. Ապացուցել, որ $\cos x + 4 \sin 4x = \frac{3}{\pi}$ հավասարումը $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում լուծում ունի:

969. $f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3$ ֆունկցիան $[-2; 2]$ միջակայքում ընդունում է արդյոք $2\frac{1}{3}$ արժեքը:

970. Ապացուցել, որ ամեն մի կենտ աստիճանի իրական գործակիցներով հավասարում ունի զրոյի մեկ իրական արձատ՝

$$a_0 x^{2n-1} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-3} + \dots + a_{2n-1} = 0, \quad a_0 \neq 0$$

971. Ապացուցել, որ եթե զույգ աստիճանի բազմանդամը ընդունում է զրոյի մեկ արժեք, որն ունի ավագ անդամի գործակցի հակառակ նշանը, ապա բազմանդամն ունի ամենաքիչը երկու իրական արձատներ:

972. Ապացուցել, որ հետևյալ հավասարումներից յուրաքանչյուրը նշված միջակայքում ունի առնվազն իրական արձատ:

ա) $x^3 + 5x^2 - 7 = 0, x \in [1; 2];$ բ) $x^4 + 6x^3 - 1 = 0, x \in [0; 1];$

գ) $16x^2 - 2 \operatorname{tg} x - 7 = 0, \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right);$ դ) $x^3 + \ln x - 20 = 0, x \in (0; 2):$

973. Ապացուցել, որ հետևյալ հավասարումներից յուրաքանչյուրն ունի առնվազն երկու իրական արձատ:

ա) $2x^2 + 9 \sin x - 1 = 0;$

բ) $e^x - x - 2 = 0;$

գ) $x^3 \operatorname{sgn} x + x^2 + 3x - 1 = 0:$

974. R -ում քանի՞ անընդհատ լուծում ունի $y^2 = (x^2 - 1)^2$ հավասարումը:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

81. $P \geq 2q$: 82. $P \geq \frac{3}{2}q$: 83. $P \geq \frac{4}{3}q$: 84. $P = 1$; $0 \leq q < 1$: 85. $P = \frac{3}{2}$; $0 \leq q < \frac{3}{2}$:

232. $\frac{3}{4}$: 233. $-\frac{1}{6}$: 234. $-\left(\frac{2}{5}\right)^5$: 235. 2: 236. $-\frac{1}{2}$: 237. -6: 238. 4:

239. -1: 240. $\frac{2}{3}$: 241. $-\frac{1}{5}$: 242. $\frac{1}{3}$: 243. $\frac{1}{2}$: 244. $\frac{2}{3}$: 245. $\frac{2}{5}$:

246. $2a + \frac{1}{3}$: 247. 2: 248. $\frac{1}{2}$: 249. $\frac{\sqrt{2}}{2}$: 250. $\frac{1}{4}$: 251. 0: 252. 0:

253. $\frac{1}{6}$: 254. 9: 255. 1: 256. 2: 257. $\frac{4}{3}$: 258. 1: 259. $\frac{15}{8}$:

260. $\frac{1}{2}$: 261. $\frac{27}{4}$: 262. $\frac{15}{8}$: 263. 1: 264. $\frac{20}{3}$: 265. $\frac{5}{3}$: 266. $-\frac{2}{27}$:

267. $\frac{2}{3}$: 268. $-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}$: 269. $\frac{1}{3}$: 270. $\frac{4}{5}$: 271. 3: 272. 1: 273. $-\frac{5}{4}$:

274. $\frac{1}{4}$: 275. $\frac{15}{8}$: 276. $\frac{1}{2}$: 277. 0: 278. $\frac{1}{3}$: 279. $\frac{\sqrt{2}}{2}$: 280. $\frac{\sqrt{5}}{5}$:

281. $\frac{5}{4}$: 282. e^6 : 283. e^{-10} : 284. e^2 : 285. e^{-4} : 286. $\sqrt[4]{e}$: 287. e : 288. e^6 :

289. $\frac{2}{5}$, երբ $a = 5$; ∞ , երբ $a \neq 5$: 290. $\begin{cases} a_0/b_0, & \text{երբ } p = q \\ 0, & \text{երբ } p < q \\ \infty, & \text{երբ } p > q \end{cases}$

291. 0: 292. Գոյություն չունի: 293. Գոյություն չունի: 294. 0: 295. $1/2$:

296. Գոյություն չունի: 297. 1: 314. 0; 2: 315. 1; 5: 316. -7; 8: 317. -4; 6:

318. -6; 5: 319. -12; 6: 320. $-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}$: 321. $-e; e+1$: 322. $0; \frac{5}{6}$: 323. $-(e^2+1); e^2$:

324. $-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}$: 325. 1; 2: 326. $-\frac{3}{2}; 0$: 327. $-\frac{\sqrt{3} \cdot 5}{2}; \frac{\sqrt{3} \cdot 5}{2}$: 328. $-\frac{3\sqrt{3}}{5}; \frac{3\sqrt{3}}{5}$:

329. $0; +\infty$: 330. $-5; \frac{8}{3}$: 331. $-1; \frac{3}{2}$: 332. -17; 20: 333. -10; 14: 334. -11; 8:

335. $-\frac{7}{3}; \frac{3}{4}$: 336. $-\frac{3}{4}; 1$: 337. $-6; \frac{1}{7}$: 338. $-\frac{21}{5}; \frac{25}{2}$: 339. $-\frac{5}{9}; 1$: 340. $\frac{1}{2}; 1$:

341. -22; 17: 342. $\frac{1}{2}; 3$: 343. $-\frac{23}{4}; 16$: 344. $-1; \frac{4}{3}$: 345. $-4; \frac{7}{3}$: 346. $0; \frac{9}{2}$:

347. $0; \frac{8}{3}$; 348. $0; \frac{25}{24}$; 349. $0; \frac{9}{5}$; 350. $0; \frac{343}{720}$; 351. $0; \frac{4}{3}$;
399. $\frac{1}{1-q}$; 400. $\frac{4}{3}$; 401. $\frac{3}{28}$; 402. $\frac{5}{36}$; 403. 1; 404. $\frac{1}{3}$; 405. $\frac{1}{12}$; 406. $\frac{3}{4}$;
407. $\frac{1}{3}$; 408. $\frac{1}{4}$; 409. $\frac{5}{84}$; 410. $\frac{1}{15}$; 411. $\frac{2}{21}$; 412. $\frac{1}{28}$;
413. $\frac{1}{4}$; 414. $1-\sqrt{2}$; 415. $1-\sqrt{2}$; 416. 0; 417. $\frac{1}{2}$; 418. $\frac{1}{2}\sin 2$; 419. $-\ln 2$;
449. Տարամետ է: 450. Տարամետ է: 451. Չուղամետ է: 452. Չուղամետ է:
453. Չուղամետ է: 454. Տարամետ է: 455. Տարամետ է: 456. Տարամետ է:
457. Չուղամետ է: 458. Չուղամետ է: 459. Տարամետ է: 460. Չուղամետ է:
461. Չուղամետ է: 462. Տարամետ է: 463. Չուղամետ է: 464. Տարամետ է:
465. Չուղամետ է: 466. Չուղամետ է: 467. Չուղամետ է: 468. Չուղամետ է:
469. Չուղամետ է: 470. $\begin{cases} \text{չուղամետ է, երբ } 0 < a < e \\ \text{տարամետ է, երբ } a > e \end{cases}$
471. Տարամետ է: 472. Չուղամետ է: 473. Չուղամետ է: 474. Տարամետ է:
475. Չուղամետ է: 476. Չուղամետ է: 477. Տարամետ է: 478. Չուղամետ է:
479. Տարամետ է: 480. Չուղամետ է: 481. Տարամետ է: 482. Չուղամետ է:
483. Չուղամետ է: 484. Չուղամետ է: 485. Չուղամետ է: 486. Չուղամետ է:
487. Տարամետ է: 488. Տարամետ է: 489. Տարամետ է: 490. Չուղամետ է:
491. Տարամետ է: 492. Չուղամետ է: 493. Տարամետ է:
494. $\begin{cases} \text{չուղամետ է, երբ } 0 < a < 1 \\ \text{տարամետ է, երբ } a \geq 1 \end{cases}$
495. Չուղամետ է: 496. Չուղամետ է: 497. Չուղամետ է: 498. Չուղամետ է:
521. $\inf\{f\} = \min\{f\} = 2$; $\sup\{f\} = +\infty$:
522. $D(f) = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$; $\inf\{f\} = -\infty$; $\sup\{f\} = +\infty$:
523. $\inf\{f\} = -\infty$; $\sup\{f\} = \max\{f\} = -2$:
524. $D(f) = (1; 3)$; $\inf\{f\} = -\infty$; $\sup\{f\} = \max\{f\} = 0$:
525. $\inf\{f\} = \min\{f\} = 0$; $\sup\{f\} = 1$:
526. $\inf\{f\} = -\infty$; $\sup\{f\} = +\infty$:
527. $\inf\{f\} = 0$; $\sup\{f\} = \max\{f\} = 1$:
528. $\inf\{f\} = \frac{3}{5}$; $\sup\{f\} = \max\{f\} = 1$:
529. $\inf\{f\} = -\frac{3}{2}$; $\sup\{f\} = \max\{f\} = -1$:
530. $\inf\{f\} = \min\{f\} = -\frac{19}{2}$; $\sup\{f\} = -\frac{5}{3}$:
531. $\inf\{f\} = \min\{f\} = -1$; $\sup\{f\} = -\frac{1}{2}$:

532. $\inf\{f\} = \min\{f\} = -4$; $\sup\{f\} = -1$;
533. $\inf\{f\} = \frac{4}{5}$; $\sup\{f\} = \max\{f\} = \frac{11}{3}$;
534. $\inf\{f\} = \min\{f\} = -11$; $\sup\{f\} = -2$;
537. $\min\{f\} = -6$; $\max\{f\} = \frac{1}{4}$;
538. $\min\{f\} = \frac{5}{4}$; $\max\{f\} = 3$;
539. $\min\{f\} = -\frac{5}{13}$; $\max\{f\} = 1$;
540. $\min\{f\} = 0$; $\max\{f\} = \frac{1}{6}$;
637. $\frac{7}{3}$: 638. 3: 639. $8\sqrt{2}$: 640. $\frac{15}{7}$: 641. 2: 642. $\frac{9}{8}$: 643. 0: 644. $-\frac{29}{40}$:
645. $\frac{1}{4}$: 646. $-\frac{3}{2}$: 647. $\frac{1}{4}$: 648. 0: 649. -1: 650. $-\frac{1}{2}$: 651. 4: 652. $\frac{1}{4}$:
653. $-\frac{5}{2}$: 654. 5050: 655. 1: 656. $-\frac{1}{2}$: 657. $\frac{1}{2}$: 658. -125: 659. $-\frac{7}{5}$: 660. 3:
661. $\frac{49}{16}$: 662. $\frac{1}{2^{10} \cdot 12^{20}}$: 663. $-\frac{9}{4}$: 664. $\frac{\sqrt{5}}{3}$: 665. 3: 666. $-\frac{1}{5}$: 667. 0: 668. $\frac{1}{2}$:
669. $\frac{1}{4}$: 670. 3: 671. $\frac{3}{4}$: 672. $\frac{\sqrt{7}}{4}$: 673. $-\frac{3}{4}$: 674. 4: 675. $-\frac{1}{12}$: 676. $\frac{9}{16}$:
677. $\frac{12}{5}$: 678. 2: 679. $-\frac{8}{81}$: 680. $-\frac{1}{12}$: 681. 2: 682. 2: 683. $\frac{1}{4\sqrt{2}}$: 684. $-\frac{1}{4}$:
685. $\frac{\sin 4}{4}$: 686. $\frac{3}{7}$: 687. 0: 688. $\frac{\alpha}{\beta}$: 689. -2: 690. 2: 691. -1: 692. $\frac{1}{2}$:
693. $\frac{\sqrt{3}}{3}$: 694. -24: 695. 14: 696. $\frac{1}{3}$: 697. $\frac{1}{4}$: 698. $\frac{4}{3}$: 699. 0: 700. $4\sqrt{2}$:
701. 2: 702. $\frac{10}{37}$: 703. $-\frac{1}{9}$: 704. $\lg^4 1$: 705. $-\sin a$: 706. $-\cos a$: 707. $\frac{2 \operatorname{tg} a}{\cos^2 a}$:
708. $\frac{5}{4} \ln 3$: 709. $\ln 5$: 710. $\ln 4$: 711. 5: 712. 2: 713. $\frac{3}{2}$: 714. -4π : 715. $\frac{m}{2}$:
716. 0: 717. $\frac{p}{2}$: 718. $a^a \ln \frac{a}{e}$: 719. $\frac{pa^p}{qa^q}$: 720. $(-1)^{m-n} \frac{m}{n}$: 721. $\frac{21}{31}$:
722. $\frac{1}{1-x}$: 723. $\ln x$: 724. $\frac{21}{2}$: 725. $-\frac{8}{99}$: 726. $-\frac{1}{6}$: 727. $\frac{11}{20}$: 728. $\frac{112}{27}$:
729. $\frac{243}{272}$: 730. $\frac{23}{18}$: 731. 5: 732. -11: 733. $4 \ln \frac{2}{e}$: 734. $9 \ln 3 - 6$: 735. $\frac{\ln 10}{10}$:
736. 2: 737. $5 \log_2 e$: 738. 2: 739. $\frac{a^2}{b^2}$: 740. 2: 741. $-\frac{1}{a^2 \ln 10}$: 742. 0:

$$743. \frac{1}{\sqrt{e}} : 744. e^8 : 745. \sqrt{e} : 746. \frac{1}{e^{18}} : 747. \frac{1}{e^2} : 748. \frac{e}{\pi} : 749. e : 750. \ln \frac{a}{b} :$$

$$751. \frac{a \ln a + b \ln b}{a+b} : \quad 807. f(0-0)=1; f(0+0)=0 :$$

$$808. f(1-0)=f(1+0)=\frac{\pi}{2} : \quad 809. f(0-0)=0; f(0+0)=+\infty :$$

$$810. f(1-0)=\frac{3}{2}; f(1+0)=\frac{1}{4} : \quad 811. f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=1; f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=-1 :$$

$$812. f(3-0)=0; f(3+0)=\frac{1}{3} : \quad 813. f(-1-0)=1; f(-1+0)=+\infty :$$

$$814. f(10-0)=109; f(10+0)=110 : \quad 815. \alpha=1; \beta=-3 :$$

$$816. \text{ա) } \alpha=2, \beta=\frac{1}{4}; \text{բ) } \alpha=-2, \beta=-\frac{1}{4} :$$

$$817. \text{ա) } \alpha=1, \beta=0; \text{բ) } \alpha=0, \beta=0 :$$

$$818. \text{ա) } \alpha=1, \beta=5; \text{բ) } \alpha\text{-ն կամայական } \beta=0 :$$

$$819. \text{ա) } \alpha=3, \beta=0; \text{բ) } \alpha=0, \beta=0 :$$

$$820. \text{ա) } \alpha>0, \beta\text{-ն կամայական; բ) } \alpha=0, \beta<0; \text{գ) } \alpha<0, \beta<0, \alpha-\beta>0 :$$

$$821. \text{ա) } \alpha>0, \beta\text{-ն կամայական; բ) } \alpha=0, \beta<0; \text{գ) } \alpha<0, \beta<0, \alpha-\beta>0 :$$

$$822. \alpha>0, \alpha+\beta<0 :$$

$$833. x_n = n, (n \in Z) \text{ առաջին սեռի խզման կետեր:}$$

$$834. x_n = n, (n \in Z) \text{ առաջին սեռի խզման կետեր:}$$

$$835. x=0 \text{ առաջին սեռի խզման կետ:}$$

$$836. x=0 \text{ առաջին սեռի խզման կետ:}$$

$$837. x_1=0, x_2=2\pi \text{ վերացնելի խզման կետեր, } x_3=\pi \text{ առաջին սեռի խզման կետ:}$$

$$838. x_1=\frac{1}{5}, x_2=\frac{1}{2} \text{ անընդհատության կետեր, } x_3=\frac{2}{9}, x_4=\frac{2}{7}, x_5=\frac{2}{5} \text{ առաջին սեռի խզման կետեր:}$$

$$839. x_1=0 \text{ անընդհատության կետ է, } x_2=2 \text{ վերացնելի խզման կետ, } x_3=1, x_4=\sqrt{2}, x_5=\sqrt{3} \text{ կետերը առաջին սեռի խզման կետեր են:}$$

$$840. x_1=1, x_2=16 \text{ վերացնելի խզման կետեր, } x_3=4, x_4=9 \text{ առաջին սեռի խզման կետեր են:}$$

$$841. x_1=0, x_2=\frac{1}{2} \text{ անընդհատության կետեր, } x_3=\frac{1}{7}, x_4=\frac{2}{7}, x_5=\frac{3}{7} \text{ առաջին սեռի խզման կետեր են:}$$

$$842. x_1=1 \text{ անընդհատության կետ է, } x_2=\sqrt{20} \text{ վերացնելի խզման կետ, } x_3=\sqrt{5}, x_4=\sqrt{10}, x_5=\sqrt{15} \text{ առաջին սեռի խզման կետեր են:}$$

843. $x_1 = \frac{1}{2}$ անընդհատության կետ է, $x_2 = 8$ վերացնելի խզման կետ, $x_3 = 2$, $x_4 = 9/2$ կետերը առաջին սեռի խզման կետեր են:
844. $x_1 = 1$ անընդհատության կետ է, $x_2 = \frac{16}{9}$ վերացնելի խզման կետ, $x_3 = \frac{1}{9}$, $x_4 = \frac{4}{9}$, $x_5 = 1$ կետերը առաջին սեռի խզման կետեր են:
845. $x_1 = 0$ անընդհատության կետ է, $x_2 = 1$ վերացնելի խզման կետ, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_5 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ կետերը առաջին սեռի խզման կետեր են:
846. $x_1 = \frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{1}{5}$ վերացնելի խզման կետեր, $x_3 = \frac{1}{7}$, $x_4 = \frac{1}{6}$ առաջին սեռի խզման կետեր են:
847. $x = 0$ անընդհատության կետ:
848. $x = 1$ անընդհատության կետ:
849. $x = -1$ անընդհատության կետ:
850. $x_k = k$, ($k \in \mathbb{Z}$) կետերը անընդհատության կետեր են:
851. $x = 0$ անընդհատության կետ է, եթե $\alpha > 0$: Եթե $\alpha \leq 0$, $x = 0$ կետը երկրորդ սեռի խզման կետ է:
852. $x = 0$ անընդհատության կետ է, եթե $\alpha > 0$: Եթե $\alpha = 0$, $x = 0$ կետը վերացնելի խզման կետ է: Եթե $\alpha < 0$, ապա $x = 0$ կետը երկրորդ սեռի խզման կետ է:
853. $x = 0$ անընդհատության կետ: $x = 2$ -ը առաջին սեռի խզման կետ է:
854. $x = 0$ կետը վերացնելի խզման կետ է:
855. $x = 0$ կետը վերացնելի խզման կետ է: $x_k = \frac{1}{k}$, ($k \in \mathbb{Z}$) առաջին սեռի խզման կետեր են:
856. $x \neq k$, ($k \in \mathbb{Z}$) կետերը երկրորդ սեռի խզման կետեր են:
857. $x = k$, ($k \in \mathbb{Z}$) կետերը առաջին սեռի խզման կետեր են:
858. $x_k = k$, ($k \in \mathbb{Z}$) կետերը երկրորդ սեռի խզման կետեր են:
859. $x = 0$ առաջին սեռի խզման կետ է:
860. $x_k = \pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$) կետերը վերացնելի խզման կետեր են:
861. $x = 0$ առաջին սեռի խզման կետ է:
862. $x = -1$ առաջին սեռի խզման կետ է: $x = 1$ անընդհատության կետ է:
863. $x_k = \pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$) կետերը առաջին սեռի խզման կետեր են:
864. $x = -1$ առաջին սեռի խզման կետ է:
865. $x = -1$ առաջին սեռի խզման կետ է: $x = 1$ անընդհատության կետ է:
866. $x = 4$ առաջին սեռի խզման կետ է:
867. $x_1 = 0$ և $x_2 = 1$ վերացնելի խզման կետեր են, $x_3 = -1$ կետը երկրորդ սեռի խզման կետ է:

868. $x = 0$ առաջին սեռի խզման կետ է:
869. $x_1 = -2$ և $x_2 = 2$ վերացնելի խզման կետեր են:
870. $x = 0$ առաջին սեռի խզման կետ է:
871. $x_k = \frac{1}{2k-1}$, ($k \in Z$) վերացնելի խզման կետ է:
872. $x = -2$ վերացնելի խզման կետ է:
873. $x = 0$ երկրորդ սեռի, $x = 1$ առաջին սեռի խզման կետեր են:
874. Անընդհատ է միայն $x_1 = -3$ և $x_2 = 4$ կետերում:
875. Անընդհատ է միայն $x_1 = -\frac{91}{18}$ և $x_2 = \frac{91}{45}$ կետերում:
876. Անընդհատ է միայն $x_1 = -1$ և $x_2 = 1$ կետերում:
877. Անընդհատ է միայն $x_1 = -3$ և $x_2 = 5$ կետերում:
878. Ամենուրեք խզվող է, բացի $\pm \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi k$, ($k \in Z$) կետերից:
879. Ամենուրեք խզվող է, բացի $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k$, ($k \in Z$) կետերից:
880. Խզվող է $x_1 = -1$ և $x_2 = 1$ կետերում:
881. Խզվող է $x = 1$ կետում:
882. Անընդհատ է $(-\infty; \infty)$ միջակայքում:
883. Խզվող է $x_1 = 0$ և $x_2 = \pi$ կետերում:
884. Խզվող է $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ և $x_2 = \frac{\pi}{2}$ կետերում:
885. Խզվող է $x = 0$ կետում:
886. Խզվող է $x = 0$ կետում:
887. Խզվող է $x = 1$ կետում:
888. Խզվող է $x = 1$ կետում:
889. Խզվող է $x = 0$ կետում:
890. Խզվող է $\frac{\pi}{2} + \pi k$, ($k \in Z$) կետերում:
891. Անընդհատ է $(-\infty; \infty)$ միջակայքում:
892. Անընդհատ է $(-\infty; \infty)$ միջակայքում:
893. $a_1 = -3$; $a_2 = 3$: 894. $a = 2$: 895. $a = 2$: 896. $a_1 = -2$; $a_2 = 2$: 897. $a = 5$:
898. $a_1 = -1$; $a_2 = 3$: 899. $a = -2$: 900. $a = -10$: 901. $a_1 = -3$; $a_2 = -2$:
902. $a_1 = -3$; $a_2 = 5$: 903. $a = 5$: 904. $a = 2$: 905. $a = -2$: 906. $a = 2$: 907. $a = 3$:
908. $a = 3$: 909. $a = \frac{59}{10}$: 910. $a = 6$: 911. $a = 9$: 912. $a_1 = -\frac{4}{3}$; $a_2 = 2$: 913. $a = -1$:
914. $a_1 = -2$; $a_2 = 2$: 915. $a_1 = -3$; $a_2 = 2$: 916. $a_1 = -3$; $a_2 = 3$:

**ՄԵԴԻԱԿ ՄՈՒՇԵՐՆԻ ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ
ԱՌԱՋԵԼ ԿԱՐԱՊԵՏԻ ԹԱՄԼԱՋՅԱՆ**

**ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ
ՏՆՏԵՄԱԳԵՏՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ**

ՄԱՍ I

Համակարգչային աշխատանքները՝

Ն.Օ. ԽՆԿԻԿՅԱՆԻ



**Տպագրության եղանակը՝ ռիզոգրաֆիա:
Ֆորմատ՝ 70x100 1/16, թուղթ՝ օֆսեթ, N 1:
Ծավալ՝ 11.5 տպ. մամուլ: Տպաքանակ՝ 300:**

**Տպագրված է «ԼԻՄՈՒՇ» ՍՊԸ-ի տպարանում:
Ք. Երևան, Պուշկին 40, տարածք 76, հեռ. 58.22.99
E-mail: info@limush.am**