

Գ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ա. ԴԱՎԹՅԱՆ, Ռ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

**ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱԶԱԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ
ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՅԱՇՎԻ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ
ՏՆՏԵՍԱԳԵՏՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ**

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ - 2005

ՀՏԴ 51:33(07)
ՊՄԴ 22.1+65 ց7
Հ 177

Հրատարակման է երաշխավորված
ԵՊՀ տնտեսագիտության
ֆակուլտետի խորհրդի կողմից

Խմբագիրներ՝ Ռոբերտ Դավթյան
Մելս Սահակյան

Հակոբյան Գ. և ուրիշ.

Հ 177 Վերլուծական երկրաչափության և գծային հանրահաշվի
խնդրագիրք տնտեսագետների համար (Գ. Գ. Հակոբյան, Ա. Ա.
Դավթյան, Ռ. Շ. Սահակյան) / Եր.: Երևանի համալս. հրատ., 2005,
132 էջ:

Խնդրագիրքը կազմվել է Երևանի պետական համալսարանի տնտեսագիտու-
թյան ֆակուլտետում «Վերլուծական երկրաչափություն և գծային հանրահաշիվ»
առարկայի դասավանդման ծրագրին համապատասխան: Նախատեսված է
«Տնտեսագիտություն» և հարակից առարկաներ ուսումնասիրողների համար:

Խնդրագիրքը հրատարակվել է Նորանկախ երկրների քոլեջ-համալսարանների
համագործակցության շրջանակներում՝ Երևանի պետական համալսարանի
տնտեսագիտության ֆակուլտետի և ԱՄՆ-ի Կալիֆորնիայի (Ֆրեզնոյի) պետա-
կան համալսարանի միջև համագործակցության շնորհիվ:

Задачник составлен в соответствии с программой преподавания курса
"Аналитическая геометрия и линейная алгебра" на экономическом факуль-
тете ЕГУ. Предназначен для изучающих экономику и смежные предметы.

The task-book was published under the sponsorship according to the partnership
between the economics Faculty of Yerevan State University and California State
University, Fresno, USA within the cooperation program with the universities of
newly independent states.

1602000000
Հ ————— 2005
704(02)05

ՊՄԴ 22.1+65 ց7

Տնտեսագիտության առաջընթացը մեծապես պայմանավորված է մաթեմատիկական գաղափարների հարուստ զինանոցի և եղանակների օգտագործմամբ: Այդ առումով, ժամանակակից տնտեսագետի կայացման կարևոր բաղադրիչ է հանդիսանում նրա մաթեմատիկական կրթվածությունը: Երևանի պետական համալսարանի տնտեսագիտության ֆակուլտետի մաթեմատիկայի ամբիոնի կողմից մշակված մաթեմատիկական առարկաների դասավանդման ծրագրերը նպատակաուղղված են խորացնելու ապագա տնտեսագետի հիմնարար մաթեմատիկական գիտելիքները:

Սույն խնդրագիրքը կազմվել է Երևանի պետական համալսարանի տնտեսագիտության ֆակուլտետում «Վերլուծական երկրաչափություն և գծային հանրահաշիվ» առարկայի դասավանդման ծրագրին համապատասխան: Նրա տասնհինգ ենթաբաժիններում ընդգրկված են շուրջ 900 խնդիրներ՝ կոորդինատային համակարգեր և վեկտորներ, ուղղի և հարթության հավասարումներ, մատրիցներ և որոշիչներ, գծային հավասարումների և անհավասարումների համակարգեր, գծային և էվկլիդյան տարածություններ, գծային ձևափոխություններ և քառակուսային ձևեր թեմաներից:

Ենթաբաժինները սկսվում են անհրաժեշտ տեսական նյութի սեղմ շարադրանքով և համալրված են համապատասխան տնտեսագիտական բնույթի մեկնաբանություններով ու խնդիրներով:

Խնդրագիրքը կարող է օգտակար լինել նաև այլ ֆակուլտետների ուսանողների համար:

Խնդրագիրքը կազմելիս սիրով օգտվել ենք մեր գործընկերների արժեքավոր առաջարկություններից ու դիտողություններից: Առանձնակի շնորհակալությամբ ենք ընդգծում Երևանի պետական համալսարանի տնտեսագիտության ֆակուլտետի պրոֆեսորներ Զ. Ղազարյանի, Մ. Սահակյանի և դոցենտ Ռ. Դավթյանի մշտական ու բեղմնավոր աջակցությունը: Մեր երախտագիտությունն ենք հայտնում Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի ֆակուլտետի հանրահաշվի և երկրաչափության ամբիոնի աշխատակիցներին, հատկապես՝ պրոֆեսոր Յու. Մովսիսյանին և դոցենտներ Ն. Գալստյանին ու Վ. Փիլիպոսյանին, խնդրագրքի մանրամասն ընթերցման ու արժեքավոր խորհուրդների համար:

1. ԿՈՐՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ՀԱՍԱԿԱՐԳԵՐ

Կետի կորրդինատներ են կոչվում այն թվերը, որոնց միջոցով որոշվում է կետի դիրքն ուղղի վրա, հարթության վրա, տարածության մեջ:

1.1. Դեկարտյան կորրդինատներ ուղղի վրա: Ուղիղը, որի վրա ընտրված է ուղղություն կոչվում է *առանցք*: Ընդունված է ընտրված ուղղությունն անվանել *դրական*, իսկ հակառակ ուղղությունը՝ *բացասական*: Ընտրենք ուղղի վրա երկու տարբեր O և E կետեր այնպես, որ O -ից E ուղղությունը համընկնի ուղղի վրա ընտրված դրական ուղղության հետ: OE հատվածի միջոցով չափվում է ամեն մի հատվածի երկարություն (OE -ն մասշտաբի միավորն է՝ $|OE| = 1$): Ուղիղը, որի վրա ընտրված է ուղղությունը, O *սկզբնակետը* և մասշտաբի միավորը, կոչվում է *կորրդինատային առանցք* (Ox թվային առանցք):

Թվային առանցքի վրա գտնվող կամայական M կետի *դեկարտյան կորրդինատ* անվանում են OM հատվածի երկարությունը, վերցրած պլուս նշանով, եթե O -ից M ուղղությունը համընկնում է առանցքի դրական ուղղության հետ և մինուս նշանով՝ հակառակ դեպքում: Այն փաստը, որ M կետն ունի x կորրդինատը գրանցվում է այսպես՝ $M(x)$: Այսպիսով, ուղղի վրա գտնվող ցանկացած M կետի համապատասխանեցվում է որոշակի իրական թիվ (իր կորրդինատը) և հակառակը՝ տրված իրական թվով կորրդինատային առանցքի վրա որոշվում է այն միակ կետը, որի կորրդինատն է այդ թիվը: Այս փաստը հնարավորություն է տալիս կետի փոխարեն դիտարկել համապատասխան թիվը՝ նրա կորրդինատը:

Եթե $M_1(x_1)$ -ը և $M_2(x_2)$ -ը կորրդինատային առանցքի երկու կետեր են, ապա նրանց միջև հեռավորությունը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\rho(M_1, M_2) = |M_1 M_2| = |x_2 - x_1|:$$

1.2. Դեկարտյան ուղղանկյուն կորրդինատներ հարթության վրա: Հարթության վրա տանենք հավասար մասշտաբով երկու փոխուղղա-

հայաց կոորդինատային առանցքներ՝ Ox (աբսցիսների առանցքը) և Oy (օրդինատների առանցքը): Կոորդինատային առանցքների հատման O կետն անվանում են *կոորդինատների սկզբնակետ*: Եթե OE_1 –ը և OE_2 –ը համապատասխանաբար Ox և Oy առանցքների մասշտաբի միավորներն են, ապա $|OE_1| = |OE_2| = 1$:

Դիցուք՝ M –ը հարթության կամայական կետ է: Տանենք M կետով Oy կոորդինատային առանցքին զուգահեռ ուղիղ: Ox առանցքի հետ նրա հատման M_x կետի (պրոեկցիայի) x կոորդինատն անվանում են M կետի առաջին կոորդինատ, կամ M կետի աբսցիս: Եթե M_y –ը M կետի պրոեկցիան է Oy առանցքի վրա, ապա M_y կետի y կոորդինատն անվանում են M կետի երկրորդ կոորդինատ, կամ M կետի օրդինատ: Այն փաստը, որ M կետն ունի x և y դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատներ գրանցվում է այսպես՝ $M(x, y)$: Այսպիսով, հարթության վրա յուրաքանչյուր կետի համապատասխանության մեջ է դրվում թվերի կարգավորված զույգ: Մյուս կողմից, թվերի տրված (x, y) կարգավորված զույգի համար հարթության վրա գոյություն ունի միակ կետը, որի դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատներն են x –ը և y –ը: Կոորդինատային առանցքներն այդ առանցքներին չպատկանող հարթության կետերը բաժանում են չորս մասերի, որոնք կոչվում են քառորդներ:

Եթե $M_1(x_1, y_1)$ –ը և $M_2(x_2, y_2)$ –ը հարթության կամայական կետեր են, ապա նրանց միջև հեռավորությունը որոշվում է

$$\rho(M_1, M_2) = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ բանաձևով:}$$

1.3. Դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատներ տարածության մեջ: Ընդհանուր O սկզբնակետով, միևնույն մասշտաբային միավորով և որոշակի կարգով համարակալված երեք փոխուղղահայաց առանցքները տարածության մեջ կազմում են կոորդինատների դեկարտյան ուղղանկյուն համակարգ: O կետը կոչվում է համակարգի սկզբնակետ, իսկ առանցքները՝ կոորդինատային առանցքներ, ընդ որում առաջինը՝ աբսցիսների Ox առանցք, երկրորդը՝ օրդինատների Oy առանցք, երրորդը՝ ապլիկատների Oz առանցք:

Դիցուք՝ M –ը տարածության կամայական կետ է: Տանենք այդ կետով կոորդինատային առանցքներին ուղղահայաց երեք հարթություններ, որոնց հատման կետերը համապատասխան առանցքների հետ նշանակենք M_x, M_y, M_z : Եթե M_x կետը Ox առանցքի վրա ունի x կոորդինատը, M_y –ը՝ Oy առանցքի վրա y կոորդինատը և M_z –ը՝ Oz

առանցքի վրա z կոորդինատը, ապա M կետի դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատներ են կոչվում x, y, z թվերը: Այն փաստը, որ M կետն ունի x, y և z կոորդինատները զրանցվում է այսպես՝ $M(x, y, z)$: Այսպիսով, տարածության կամայական կետի համապատասխանության մեջ է դրվում թվերի կարգավորված եռյակ՝ նրա դեկարտյան կոորդինատները: Հակառակը՝ եթե տրված է (x, y, z) թվերի կարգավորված եռյակը, ապա կարելի է կառուցել միակ M կետն այնպես, որ x -ը լինի նրա աբսցիսը, y -ը՝ օրդինատը, z -ը՝ ապլիկատը: Կոորդինատային առանցքների յուրաքանչյուր զույգ որոշում է կոորդինատային հարթություն: Oxy, Oxz, Oyz -ով նշանակված կոորդինատային հարթությունները այդ հարթություններին չպատկանող կետերը բաժանում են ութ մասերի, որոնք կոչվում են օկտանտներ:

Եթե $M_1(x_1, y_1, z_1)$ -ը և $M_2(x_2, y_2, z_2)$ -ը տարածության երկու կամայական կետեր են, ապա նրանց միջև հեռավորությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\rho(M_1, M_2) = |M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} :$$

1.4. Հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ: Եթե $M(x, y, z)$ կետը $M_1(x_1, y_1, z_1)$ և $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ծայրակետերով հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ, հաշված M_1 -ից՝ $\lambda = \frac{|M_1 M|}{|M M_2|}$, ապա նրա

կոորդինատները որոշվում են

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \text{ բանաձևերով:}$$

1.5. Ձանգվածների համակարգի ծանրության կենտրոնը: Դիցուք $M_1, M_2, \dots, M_n$ զանգվածները տեղադրված են տարածության $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \dots, M_n(x_n, y_n, z_n)$ կետերում համապատասխանաբար: Այդ դեպքում համակարգի $M(x, y, z)$ ծանրության կենտրոնի կոորդինատները որոշվում են

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

բանաձևերով:

1.6. Բևեռային կոորդինատներ: Հարթության վրա ընտրենք որևէ կետ, նշանակենք այն O -ով և անվանենք *բևեռ*: Ընտրենք նաև O -ից դուրս եկող Ox ճառագայթը՝ նշված մասշտաբով, որը կանվանենք *բևեռային առանցք*: Վերցնենք հարթության կամայական M կետ: Նշանակենք ρ -ով ($0 \leq \rho < +\infty$) այդ կետի հեռավորությունը բևեռից և այն անվանենք *բևեռային շառավիղ*: Բևեռային կանվանենք այն φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) անկյունը, որով ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ պետք է պտտել Ox ճառագայթը մինչև OM -ի հետ համընկնելը: M կետի բևեռային կոորդինատներ են կոչվում նրա ρ բևեռային շառավիղը և φ բևեռային անկյունը (գրվում է՝ $M(\rho, \varphi)$): Եթե հարթության վրա սահմանված է նաև Oxy դեկարտյան ուղղանկյուն համակարգը, ապա (x, y) դեկարտյան և (ρ, φ) բևեռային կոորդինատները կապվում են $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ բանաձևերով:

1.1. Նկարագրել թվային առանցքի այն կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

- | | | |
|-----------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1) $ x = 2$ | 2) $x - 3 \leq 0$ | 3) $-2 \leq x < 5$ |
| 4) $1 < x < 7$ | 5) $ 2 - 3x > 4$ | 6) $\frac{3x-1}{2-x} < 1$ |
| 7) $x^2 + x - 12 > 0$ | 8) $x^2 + 8x + 15 \leq 0$ | 9) $\frac{2-x}{x-1} > 0$: |

1.2. Գտնել $\lambda = \frac{|AC|}{|CB|}$ հարաբերությունը, որով C կետը տրոհում է

A և B ծայրակետերով հատվածը, եթե

- 1) $A(2), B(6), C(4)$ 2) $A(-1), B(5), C(3)$ 3) $A(5), B(-2), C(3)$
 4) $A(1), B(13), C(5)$:

1.3. Գտնել հետևյալ ծայրակետերով հատվածի միջնակետի կոորդինատը

1) $A(3), B(5)$ 2) $A(-1), B(5)$ 3) $A(-1), B(-3)$ 4) $A(2), B(12)$:

1.4. Թվային առանցքի վրա գտնել M կետի կոորդինատը, եթե հայտնի է, որ

1) $M_1(3), M_2(7)$ և $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = 2$

2) $M_1(-2), M_2(5)$ և $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = 3$

3) $M_1(-1), M_2(3)$ և $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{1}{2}$

4) $M_1(1), M_2(3)$ և $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{1}{3}$:

1.5. Տրված $A(5)$ և $B(-3)$ կետերի համար թվային առանցքի վրա գտնել

1) B -ի նկատմամբ A -ին սիմետրիկ M կետի կոորդինատը

2) A -ի նկատմամբ B -ին սիմետրիկ N կետի կոորդինատը:

1.6. $A(-2), B(19)$ ծայրակետերով հատվածը տրոհված է երեք հավասար մասերի: Գտնել տրոհման կետերի կոորդինատները:

1.7. A և B ծայրակետերով հատվածը $P(-25)$ և $Q(-9)$ կետերով տրոհված է երեք հավասար մասերի: Գտնել A և B կետերի կոորդինատները:

1.8. A և B կետերը համապատասխանաբար Ox և Oy դրական կիսաառանցքների կետեր են: Գտնել $OACB$ ուղղանկյան գագաթների կոորդինատները Oxy հարթության վրա, եթե

1) $|OA| = 5, |OB| = 2$

2) $|OA| = m, |OB| = n$:

1.9. Գտնել Ox առանցքի նկատմամբ հետևյալ կետերին սիմետրիկ (համաչափ) կետերի կոորդինատները.

$$A(2, 3), \quad B(-3, 2), \quad C(-1, -1), \quad D(-3, -5), \quad E(-4, 6), \quad F(a, b):$$

1.10. Գտնել Oy առանցքի նկատմամբ հետևյալ կետերին սիմետրիկ կետերի կոորդինատները.

$$A(-1, 2), \quad B(3, -1), \quad C(-2, -2), \quad D(-2, 5), \quad E(3, -5), \quad F(a, b):$$

1.11. Oxy հարթության վրա գտնել կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ հետևյալ կետերին սիմետրիկ կետերի կոորդինատները.

$$A(3, 3), \quad B(2, -4), \quad C(-2, 1), \quad D(5, -3), \quad E(-5, 4), \quad F(a, b):$$

1.12. Գտնել կոորդինատային հարթության առաջին և երրորդ քառորդների կիսորդի նկատմամբ հետևյալ կետերին սիմետրիկ կետերի կոորդինատները.

$$A(2, 3), \quad B(5, -2), \quad C(-3, 4):$$

1.13. Ո՞ր քառորդում է գտնվում $M(x, y)$ կետը, եթե

$$1) \quad xy > 0 \quad 2) \quad xy < 0 \quad 3) \quad x - y = 0 \quad 4) \quad x + y = 0$$

$$5) \quad x + y > 0 \quad 6) \quad x + y < 0 \quad 7) \quad x - y > 0 \quad 8) \quad x - y < 0:$$

1.14. $P(-3, 3)$ գազաթով քառակուսու անկյունագծերը հատվում են կոորդինատների սկզբնակետում: Գտնել քառակուսու մյուս երեք գագաթները:

1.15. Գտնել $ABCD$ զուգահեռագծի D գագաթի կոորդինատները, եթե նրա մյուս գագաթներն են $A(0, 0)$, $B(5, 0)$, $C(12, -3)$ կետերը:

1.16. Հաշվել $A(4, 0)$, $B(12, -2)$, $C(5, -9)$ գագաթներով եռանկյան պարագիծը:

1.17. Գտնել

1) Oy առանցքի այն կետը, որը հավասար է հեռացված $A(-3, 5)$ և $B(6, 4)$ կետերից

2) Ox առանցքի այն կետը, որը հավասար է հեռացված $C(1, 1)$ և $D(3, 5)$ կետերից:

1.18. Տրված են $A(4, 3, 5)$, $B(-5, 3, 1)$, $C(2, -3, 0)$, $D(0, 0, -3)$ կետերը: Գտնել նրանց պրոեկցիաների կոորդինատները Oxy , Oxz , Oyz հարթությունների և Ox , Oy , Oz առանցքների վրա:

1.19. Գտնել $D(a, b, c)$ կետին սիմետրիկ կետի կոորդինատները Oxy , Oxz , Oyz հարթությունների և Ox , Oy , Oz առանցքների նկատմամբ:

1.20. Ո՞ր օկտանտներում են գտնվում այն կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են հետևյալ պայմանին

- 1) $x + y = 0$ 2) $x - y = 0$ 3) $x - z = 0$ 4) $x + z = 0$ 5) $y - z = 0$
6) $xy > 0$ 7) $xz < 0$ 8) $yz > 0$ 9) $xyz > 0$ 10) $xyz < 0$
11) $y + z = 0$:

1.21. Գտնել $R = 3$ շառավիղ ունեցող այն գնդի կենտրոնի կոորդինատները, որը շոշափում է երեք կոորդինատային հարթությունները և գտնվում է

1) երկրորդ 2) հինգերորդ 3) վեցերորդ 4) յոթերորդ 5) ութերորդ օկտանտում:

1.22. Գտնել կոորդինատների սկզբնակետի հեռավորությունը $A(-4, 7, 0)$ և $B(0, -1, 2)$ ծայրակետերով հատվածի միջնակետից:

1.23. Տրված են $A(3, 1, -2)$, $B(2, 2, -3)$ և $C(2, 0, -1)$ կետերը: Գտնել ABC եռանկյան

- 1) պարագիծը 2) միջնագծերի երկարությունները:

1.24. Գտնել այն կետի կոորդինատները, որը հավասար է հեռացված $A(-2, 3, 5)$ և $B(3, 2, -3)$ կետերից և գտնվում է

- 1) Ox 2) Oy 3) Oz առանցքի վրա:

1.25. Տրված են $A(3, -1, 6)$, $B(-1, 7, -2)$ և $C(1, -3, 2)$ կետերը: Ապացուցել, որ ABC եռանկյունն ուղղանկյուն է:

1.26. Տրված են $ABCD$ զուգահեռագծի $A(2, -3, -5)$, $B(-1, 3, 2)$ գագաթները և անկյունագծերի հատման $E(4, -1, 7)$ կետը: Գտնել զուգահեռագծի մյուս գագաթները:

1.27. Տրված են $ABCD$ զուգահեռագծի $A(3, -4, 7)$, $B(-5, 3, -2)$ և $C(1, 2, -3)$ գագաթները: Գտնել զուգահեռագծի չորրորդ գագաթը:

1.28. Գտնել C , D , E , F կետերի կոորդինատները, եթե հայտնի է, որ նրանք $A(-1, 8, 3)$ և $B(9, -7, -2)$ ծայրակետերով հատվածը բաժանում են հինգ հավասար մասերի:

1.29. Գտնել այն հատվածի ծայրակետերի կոորդինատները, որը $C(2, 0, 2)$ և $D(5, -2, 0)$ կետերով բաժանվում է երեք հավասար մասերի:

1.30. Տրված են եռանկյան $A(1, 2, -1)$, $B(2, -1, 3)$ և $C(-4, 7, 5)$ գագաթները: Գտնել եռանկյան B գագաթի ներքին անկյան կիսորդի երկարությունը:

1.31. Գտնել $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ և $C(x_3, y_3)$ գագաթներով եռանկյան ծանրության կենտրոնը (միջնագծերի հատման կետը):

1.32. $A(7, \frac{3}{2})$, $B(3, 5)$ և $C(2, 4)$ կետերում տեղադրված են համապատասխանաբար 60, 40 և 100 գ. զանգվածներ: Գտնել այդ համակարգի ծանրության կենտրոնը:

1.33. Գտնել $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ և $D(x_4, y_4, z_4)$ գագաթներով քառանիստի ծանրության կենտրոնը:

1.34. $A(-7, 3, -2)$, $B(0, 2, 1)$, $C(4, -1, 0)$ և $D(-1, 0, -3)$ գագաթներով քառանիստի ծանրության կենտրոնը կոորդինատային համակարգի

սկզբնականի որոշակի տեղաշարժից հետո գտնվում է $M(6, -2, 1)$ կետում: Ի՞նչ կոորդինատներ կունենան քառանիստի գագաթներն այդ նույն տեղաշարժի արդյունքում:

1.35. Կոորդինատների բևեռային համակարգում կառուցել հետևյալ կետերը

$$A(3, \frac{\pi}{2}), B(2, \pi), C(3, -\frac{\pi}{4}), D(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}):$$

1.36. Գտնել բևեռային առանցքի նկատմամբ $A(3, \frac{\pi}{4}), B(2, -\frac{\pi}{2}), C(1, \frac{\pi}{6})$ կետերին սիմետրիկ կետերի բևեռային կոորդինատները:

1.37. Գտնել բևեռի նկատմամբ $A(1, \frac{\pi}{4}), B(5, \frac{\pi}{2}), C(2, \frac{\pi}{3})$ կետերին սիմետրիկ կետերի բևեռային կոորդինատները:

1.38. Կոորդինատների բևեռային համակարգում $A(3, -\frac{4\pi}{9}), B(5, \frac{3\pi}{4})$ կետերը $ABCD$ զուգահեռագծի գագաթներ են, իսկ նրա անկյունագծերը հատվում են բևեռում: Գտնել զուգահեռագծի մյուս երկու գագաթները:

1.39. Գտնել $A(8, -\frac{2\pi}{3})$ և $B(6, \frac{\pi}{3})$ ծայրակետերով հատվածի միջնակետի բևեռային կոորդինատները:

1.40. Գտնել բևեռային կոորդինատներով տրված $A(\rho_1, \theta_1)$ և $B(\rho_2, \theta_2)$ կետերի հեռավորությունը:

1.41. Բևեռային կոորդինատներով տրված $A(12, -\frac{\pi}{2})$ և $B(3, \frac{\pi}{2})$ կետերը քառակուսու կից գագաթներ են: Գտնել մյուս երկու գագաթների բևեռային կոորդինատները:

1.42. Բևեռային կոորդինատներով տրված $A(4, -\frac{\pi}{6})$ և $B(8, \frac{\pi}{3})$

կետերը կանոնավոր եռանկյան գագաթներ են: Հաշվել այդ եռանկյան մակերեսը:

1.43. Կոորդինատների բևեռային համակարգի սկզբնակետը և բևեռային առանցքը համընկնում են համապատասխանաբար դեկարտյան համակարգի սկզբնակետի և Ox դրական կիսառանցքի հետ: Գտնել

բևեռային համակարգում տրված $A(6, \frac{\pi}{6})$, $B(5, 0)$ և $C(10, -\frac{\pi}{3})$

կետերի դեկարտյան կոորդինատները:

2. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ

2.1. A սկզբնակետով և B վերջնակետով $\vec{a} = \overline{AB}$ ուղղորդված հատվածն անվանում են *վեկտոր*: Ասում են, որ $\overline{AB}$ վեկտորը տեղադրված է A կետից: $\overline{AB}$ հատվածի երկարությունն անվանում են $\overline{AB}$ վեկտորի *մոդուլ* կամ *երկարություն*: Միևնույն կամ զուգահեռ ուղիղների վրա գտնվող վեկտորները կոչվում են *համագիծ*, իսկ միևնույն կամ զուգահեռ հարթությունների վրա գտնվող վեկտորները՝ *համահարթ*: Եթե վեկտորի՝ սկիզբը և վերջը համընկնում են, օրինակ՝ $\overline{AA}$, ապա այդպիսի վեկտորը կոչվում է *զրոյական* և նշանակվում՝ $\vec{0} = \overline{AA}$: Զրոյական վեկտորի մոդուլը հավասար է զրո, ուղղությունը կամայական է, և համարվում է, որ այն ցանկացած վեկտորի հետ կազմում է համագիծ զույգ: Միավոր են կոչվում այն վեկտորները, որոնց մոդուլը հավասար է մեկի: Ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորին համագիծ և նույն ուղղությունն ունեցող (*համուղղված*) միավոր վեկտորը կոչվում է $\vec{a}$ վեկտորի *օրթ*:

Համուղղված և հավասար երկարություններ ունեցող վեկտորները համարվում են *հավասար*: Այսպիսով, ցանկացած P կետից (մասնավորապես՝ O սկզբնակետից) կարելի է տեղադրել տրված $\vec{a}$ վեկտորին հավասար միակ $\overline{PQ}$ վեկտորը: Տեղադրենք $\vec{a}$ վեկտորը կոորդինատային համակարգի O սկզբնակետից: $\vec{a} = \overline{OM}$ վեկտորի *կոորդինատներն* են կոչվում նրա M վերջնակետի կոորդինատները: Այսպես՝ Oxy հարթության վրա գտնվող $\vec{a} = \overline{OM}$ վեկտորի կոորդինատներ են հանդիսանում երկու թվեր՝ x -ը և y -ը ($\vec{a} = (x, y)$): Oxyz տարածության մեջ $\vec{a} = \overline{OM}$ վեկտորի կոորդինատները կլինեն երեքը՝ x-ը, y-ը և z-ը ($\vec{a} = (x, y, z)$), եթե՝ M(x, y, z): Կապը $\overline{AB}$ վեկտորի կոորդինատների և նրա A(x₁, y₁, z₁) սկզբնակետի ու B(x₂, y₂, z₂) վերջնակետի կոորդինատների միջև ստացվում է $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ բանաձևով, իսկ $\vec{a} = (x, y, z)$ վեկտորի երկարությունը՝

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} :$$

2.2. Վեկտորի բազմապատկումը թվով: $\mathbf{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալ է կոչվում այն $\mathbf{b}$ վեկտորը, որի երկարությունը՝ $|\mathbf{b}| = |k| |\mathbf{a}|$, ընդ որում $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ վեկտորները համուղղված են, եթե $k > 0$ և հակուղղված՝ $k < 0$ դեպքում, իսկ $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$: $\mathbf{a} = (x, y, z)$ ($\mathbf{a} = (x, y)$) վեկտորի և k թվի արտադրյալ $\mathbf{b}$ վեկտորը գրվում է $\mathbf{b} = k\mathbf{a} = (kx, ky, kz)$ ($\mathbf{b} = k\mathbf{a} = (kx, ky)$) տեսքով:

2.3. Վեկտորների գումարումը: $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ երկու վեկտորների *գումար* է կոչվում $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ վեկտորը, որի սկիզբը համընկնում է $\mathbf{a}$ -ի սկզբնակետի հետ, իսկ վերջը՝ $\mathbf{b}$ -ի վերջնակետի հետ, պայմանով, որ $\mathbf{b}$ -ի սկիզբը համընկնում է $\mathbf{a}$ -ի վերջի հետ (*եռանկյան կանոն*): $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ վեկտորը հանդիսանում է նաև $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի անկյունագիծը (*զուգահեռագծի կանոն*): $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ վեկտորների տարբերությունը սահմանվում է որպես $\mathbf{a}$ և $(-\mathbf{b})$ վեկտորների գումար, որտեղ $(-\mathbf{b})$ -ով նշանակված է $(-1)\mathbf{b}$ վեկտորը: $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ և $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ վեկտորների $\mathbf{c}$ գումար և $\mathbf{d}$ տարբերություն վեկտորների կոորդինատները որոշվում են $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ և $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ բանաձևերով:

2.4. Վեկտորների սկալյար արտադրյալ: $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ վեկտորների *սկալյար արտադրյալ* կոչվում է այդ վեկտորների երկարությունների և նրանցով կազմված α անկյան կոսինուսի արտադրյալը՝ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$: Եթե $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, ապա այդ վեկտորներն ուղղահայաց (օրթոգոնալ) են: Սկալյար արտադրյալն $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ և $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ վեկտորների կոորդինատների միջոցով արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$:

2.5. Վեկտորի պրոեկցիան առանցքի վրա: Դիցուք տարածության մեջ տրված են $\overline{AB}$ վեկտորը և u առանցքը: Նշանակենք A_1 -ով և B_1 -ով համապատասխանաբար A և B կետերից u առանցքի վրա իջեցված ուղղահայացների հիմքերը: $\overline{A_1 B_1}$ վեկտորի պրոեկցիա u առանցքի վրա կոչվում է $|\overline{A_1 B_1}|$ թիվը պլյուս նշանով, եթե $\overline{A_1 B_1}$ -ի ուղղությունը համընկնում է u առանցքի ուղղության հետ, և մինուս նշանով՝ հակառակ դեպքում: $\overline{AB}$ վեկտորի պրոեկցիան u առանցքի վրա կնշանակենք

$\overline{\Pi_{\alpha} AB}$: եթե α -ն $\overline{AB}$ վեկտորի և u առանցքի կազմած անկյունն է, ապա

$$\overline{\Pi_u AB} = |AB| \cdot \cos \alpha :$$

$\Pi_a b$ -ով նշանակվում է b վեկտորի պրոեկցիան « a վեկտորի վրա», այսինքն a ոչ զրոյական վեկտորով որոշվող u առանցքի վրա՝

$$\Pi_a b = |b| \cdot \cos \alpha = \frac{(a, b)}{|a|} :$$

a, b, c վեկտորների և k թվի համար ճիշտ են

$$\Pi_a(b + c) = \Pi_a b + \Pi_a c \quad \text{և} \quad \Pi_a(k b) = k \Pi_a b$$

բանաձևերը: $\overline{AB}$ վեկտորի պրոեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա այդ վեկտորի կոորդինատներն են՝

$$x = |AB| \cdot \cos \alpha, \quad y = |AB| \cdot \cos \beta, \quad z = |AB| \cdot \cos \gamma,$$

որտեղ α, β, γ -ով նշանակված են $\overline{AB}$ վեկտորի կազմած անկյունները Ox, Oy, Oz առանցքների հետ համապատասխանաբար: Նրանց կոսինուսները կոչվում են $\overline{AB}$ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսներ՝

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

ընդ որում՝ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$: Միավոր e վեկտորի կոորդինատները հավասար են իր ուղղորդ կոսինուսներին՝

$$e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) :$$

2.6. n - չափանի վեկտոր է կոչվում n իրական թվերից կազմված կարգավորված համախմբությունը՝ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, որտեղ x_i -ն x վեկտորի i -րդ կոորդինատն է: Երբ $n > 3$, n - չափանի վեկտորները չունեն անմիջական երկրաչափական իմաստ, սակայն բազմաթիվ, այդ թվում նաև տնտեսագիտական գործընթացներ նկարագրելու համար հարմար են: Օրինակ, ընդունված է ապրանքների հավաքածուն նշա-

նակել $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ վեկտորով, իսկ նրանց համապատասխան վաճառքի գները՝ $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ վեկտորով:

Երկու $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ և $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ n - չափանի վեկտորներ հավասար են՝ $x = y$, եթե $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$: Վեկտորների *գումարը* և վեկտորի *թվով բազմապատկումը* սահմանվում են

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), kx = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$$

բանաձևերով: Երկու վեկտորների *սկալյար արտադրյալ* է կոչվում $x \cdot y \equiv (x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ թիվը: Այսպես, եթե $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ -ը տարբեր ապրանքների քանակների վեկտորն է, իսկ $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ -ը՝ նրանց վաճառքի գների վեկտորը, ապա (p, q) սկալյար արտադրյալն արտահայտում է այդ ապրանքների վաճառքից ստացված հասույթը:

2.7. Վեկտորների գծային կախվածությունը: $a_1, a_2, \dots, a_r$ վեկտորները կոչվում են *գծայնորեն կախյալ*, եթե գոյություն ունեն $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ իրական թվեր, որոնցից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից, այնպիսին, որ $a_1, a_2, \dots, a_r$ վեկտորների համապատասխան *գծային կոմբինացիան*՝ $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r$ -ը դառնա θ զրոյական վեկտորը: Հակառակ դեպքում, այսինքն, եթե $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r = \theta$ հավասարությունը տեղի ունի միայն, երբ $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$ ՝ վեկտորները կոչվում են *գծայնորեն անկախ*:

Անդրադառնա՞նք երկրաչափական վեկտորներին՝ ուղղորդված հատվածներին, այս տեսանկյունից: Երկու վեկտորներ գծայնորեն կախյալ են այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանք համագիծ են: Եթե e_1 -ը և e_2 -ը ոչ համագիծ վեկտորներ են, ապա նրանց համահարթ ցանկացած երրորդ a վեկտորը կարելի է միակ ձևով ներկայացնել $a = x_1 e_1 + x_2 e_2$ տեսքով, այսինքն՝ վերլուծել ըստ այդ վեկտորների: Ասում են, որ e_1 և e_2 վեկտորները կազմում են տվյալ հարթության *հենք (բազիս)*: Երեք վեկտորներ գծայնորեն կախված են այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանք համահարթ են: Եթե e_1 -ը, e_2 -ը և e_3 -ը ոչ համահարթ վեկտորներ են, ապա ցանկացած a վեկտոր կարելի է միակ ձևով ներկայացնել $a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ տեսքով: Այդպիսի e_1, e_2, e_3 վեկտորները կազմում են *հենք* վեկտորների տարածության մեջ, իսկ x_1, x_2, x_3 -ը a -ի կոորդինատներն են ըստ e_1, e_2, e_3 հենքի: Մասնավորաբար, երբ e_1, e_2 և e_3 վեկտորները փոխուղղահայաց են, ստացվում է կոորդինատների դեկարտյան ուղղանկյուն համակարգ, ընդ որում, եթե $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$,

ապա այդ վեկտորներն անվանում են օրթեր և նշանակում են i, j, k -ով համապատասխանաբար: Այսպիսով, տարածության ցանկացած $a = (x_1, x_2, x_3)$ վեկտորը միարժեք վերլուծվում է ըստ i, j, k հենքի՝ $a = x_1 i + x_2 j + x_3 k$: Այս ներկայացման մեջ $x_1 i, x_2 j$ և $x_3 k$ վեկտորները կոչվում են a վեկտորի բաղադրիչներ համապատասխան առանցքների վրա:

Եթե $e_1, e_2, \dots, e_n$ n – չափանի վեկտորները գծայնորեն անկախ են, ապա ամեն մի a n – չափանի վեկտոր միարժեք ներկայացվում է $a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ տեսքով:

2.1. Տրված են $P(-1, 2)$ և $Q(-1, -4)$ կետերը: Որոշել R կետի կոորդինատները, եթե

$$1) \overline{PQ} = \overline{RP} \quad 2) \overline{PQ} = \overline{QR} \quad 3) \overline{OP} = \overline{PR} :$$

2.2. Տրված $A(3, -1, 2)$ և $B(-1, 2, 1)$ կետերի համար գտնել $\overline{AB}, \overline{BA}$ վեկտորների կոորդինատները:

2.3. Տրված $a = (3, -1, 4)$ վեկտորի սկզբնակետը $M(1, 2, -3)$ կետն է: Գտնել նրա N վերջնակետի կոորդինատները:

2.4. Գտնել $a = (2, -3, -1)$ վեկտորի սկզբնակետը, եթե նրա վերջնակետը $N(1, -1, 2)$ կետն է:

2.5. Տրված a և b վեկտորների համար կառուցել

$$1) 3a \quad 2) -\frac{1}{2}b \quad 3) 2a + \frac{1}{3}b \quad 4) \frac{1}{2}a - 3b \quad \text{վեկտորները:}$$

2.6. Տրված են $A(1, 2, 2), B(2, 3, 3), C(-1, 2, 1)$ և $D(0, -1, 2)$ կետերը: Գտնել P կետի կոորդինատները, եթե

$$1) \overline{AP} = \overline{AB} + \overline{CD} \quad 2) \overline{OP} = \overline{AB} + \overline{BD} \quad 3) \overline{BP} = \overline{AD} + \overline{CB} :$$

2.7. Տրված են $A(2, -4, 2), B(1, 1, -3), C(-2, 1, 4)$ և $D(-2, 0, 2)$ կետերը: Գտնել P կետի կոորդինատները, եթե

$$1) \overline{CP} = \frac{1}{3}\overline{AB} \quad 2) \overline{AP} = 2\overline{AB} + 3\overline{CD} \quad 3) \overline{BP} = -2\overline{AD} + \overline{CB} :$$

2.8. Գտնել $\mathbf{a}$ վեկտորի օրթը, եթե

1) $\mathbf{a} = (3, 4, -12)$ 2) $\mathbf{a} = (6, -2, -3)$ 3) $\mathbf{a} = (3, -5, 8)$:

2.9. Գտնել $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ և $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, եթե $\mathbf{a} = (3, -5, 8)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 4)$:

2.10. Դիցուք $\mathbf{c} = 16\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$: Գրել $\mathbf{c}$ -ին հակուղղված $\mathbf{d}$ վեկտորի վերլուծությունը $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ բազիսում, եթե $|\mathbf{d}| = 75$:

2.11. $ABCD A'B'C'D'$ զուգահեռանիստում տրված են նրա կողերի հետ համընկնող $\mathbf{m} = \overline{AB}$, $\mathbf{n} = \overline{AD}$ և $\mathbf{p} = \overline{AA'}$ վեկտորները: Կառուցել հետևյալ վեկտորները՝

1) $\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}$ 2) $\mathbf{m} + \mathbf{n} + \frac{1}{2}\mathbf{p}$ 3) $\frac{1}{2}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + \mathbf{p}$

4) $\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{p}$ 5) $-\mathbf{m} - \mathbf{n} + \frac{1}{2}\mathbf{p}$:

2.12. Տրված են $\mathbf{a} = (3, -2, 6)$ և $\mathbf{b} = (-2, 1, 0)$ վեկտորները: Գտնել տրված վեկտորի պրոեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա.

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 2) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 3) $2\mathbf{a}$ 4) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$ 5) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ 6) $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \mathbf{b}$:

2.13. $\mathbf{a} = (x, y, z)$ վեկտորը Ox և Oy առանցքների հետ կազմում է $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$ անկյուններ, իսկ Oz առանցքի հետ՝ սուր անկյուն: Գտնել նրա կոորդինատները, եթե $|\mathbf{a}| = 2$:

2.14. Գտնել $\mathbf{a} = (12, -15, -16)$ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները:

2.15. $\mathbf{a}$ վեկտորը Ox և Oz առանցքների հետ կազմում է $\alpha = 120^\circ$ և $\gamma = 45^\circ$ անկյուններ: Ի՞նչ անկյուն կարող է այն կազմել Oy առանցքի հետ:

2.16. Գտնել $\mathbf{a}$ վեկտորի պրոեկցիաները Ox , Oy և Oz առանցքների վրա, եթե $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, իսկ $|\mathbf{a}| = 2$:

2.17. Տրված են $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$ և $\mathbf{b} = (-6, 3, -9)$ վեկտորները: Ստուգել այդ վեկտորների համագիծ լինելը: Համեմատել նրանց երկարությունները և ուղղությունները:

2.18. Գտնել α և β թվերը, եթե հայտնի է, որ $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$ և $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ վեկտորները համագիծ են:

2.19. Համոզվել, որ $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$, $D(3, -5, 3)$ կետերը սեղանի գագաթներ են:

2.20. Տրված են $A(-1, 5, -10)$, $B(5, -7, 8)$, $C(2, 2, -7)$, $D(5, -4, 2)$ կետերը: Համոզվել, որ $\overline{AB}$ և $\overline{CD}$ վեկտորները համագիծ են: Համեմատել նրանց երկարությունները և ուղղությունները:

2.21. Ստուգել $\mathbf{p} = (2, 3)$ և $\mathbf{q} = (1, 2)$ վեկտորների գծայնորեն անկախությունը:

2.22. Վերլուծել $\mathbf{a} = (9, 4)$ վեկտորն ըստ $\mathbf{p} = (2, 3)$ և $\mathbf{q} = (1, 2)$ վեկտորների:

2.23. Հարթության $\mathbf{a} = (3, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 1)$ և $\mathbf{c} = (7, 4)$ վեկտորներից յուրաքանչյուրը վերլուծել ըստ մյուս երկուսի:

2.24. ABC եռանկյան $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ և $\overline{CP}$ միջնագծերը վերլուծել ըստ նրա $\mathbf{a} = \overline{AB}$ և $\mathbf{b} = \overline{AC}$ կողմերի:

2.25. Տրված են $A(1, -2)$, $B(2, 1)$, $C(3, 2)$ և $D(-2, 3)$ կետերը: $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ և $\overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}$ վեկտորներն արտահայտել $\overline{AB}$ և $\overline{AC}$ վեկտորների միջոցով:

2.26. Տրված են $\mathbf{p} = (3, -2, 1)$, $\mathbf{q} = (-1, 1, -2)$ և $\mathbf{r} = (2, 1, -3)$ վեկտորները: Վերլուծել $\mathbf{c} = (11, -6, 5)$ վեկտորն ըստ $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ և $\mathbf{r}$ վեկտորների:

2.27. Տրված են $\mathbf{p} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{q} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{r} = (2, 2, -1)$ և $\mathbf{s} = (3, 7, -7)$ վեկտորները: Վերլուծել նրանցից յուրաքանչյուրն ըստ մյուս երեքի:

2.28. Համապատասխանաբար 3 և 4 երկարություններ ունեցող $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ վեկտորները կազմում են $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ անկյուն: Հաշվել

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ | 2) $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ | 3) $(\mathbf{b}, \mathbf{b})$ |
| 4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$ | 5) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b})$ | 6) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b})$ |

սկալյար արտադրյալները:

2.29. $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են, իսկ $\mathbf{c}$ - ն նրանցից յուրաքանչյուրի հետ կազմում է $\varphi = \frac{\pi}{3}$ անկյուն: Հաշվել

- | | |
|---|--|
| 1) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ | 2) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \mathbf{b} + 3\mathbf{c})$ |
| 3) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c})$ | |

եթե $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$ և $|\mathbf{c}| = 8$:

2.30. Համապատասխանաբար $\sqrt{3}$ և 1 երկարություններ ունեցող $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ վեկտորները կազմում են $\varphi = \frac{\pi}{6}$ անկյուն: Գտնել $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ և $\mathbf{q} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը:

2.31. Տրված $\mathbf{a} = (4, -2, -4)$ և $\mathbf{b} = (6, -3, 2)$ վեկտորների համար հաշվել հետևյալ արտահայտության արժեքը՝

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ | 2) $ \mathbf{a} $ | 3) $ \mathbf{b} $ |
| 4) $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b})$ | 5) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$ | 6) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b})$: |

2.32. $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$ և $D(-5, -5, 3)$ կետերը: Ապացուցել, որ $\overline{AC}$ և $\overline{BD}$ վեկտորներն ուղղահայաց են:

2.33. Որոշել α -ի այն արժեքը, որի համար $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ և $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \alpha \mathbf{k}$ վեկտորներն ուղղահայաց են:

2.34. Գտնել

- 1) խորանարդի անկյունագծի և կողի կազմած անկյունը,

2) խորանարդի անկյունագծի և նիստերից մեկի անկյունագծի կազմած անկյունը,

3) խորանարդի նիստի և անկյունագծի կազմած անկյունը:

2.35. Տրված են $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ և $C(3, -2, 1)$ կետերը: Գտնել ABC եռանկյան B գագաթին առընթեր ներքին անկյունը:

2.36. $A(3, 2, -3)$, $B(5, 1, -1)$ և $C(1, -2, 1)$ կետերը ABC եռանկյան գագաթներն են: Գտնել նրա A գագաթին առընթեր արտաքին անկյունը:

2.37. x վեկտորը համագիծ է $a = (6, -8, -\frac{15}{2})$ վեկտորին և Oz առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն: Գտնել x վեկտորի կոորդինատները, եթե $|x| = 50$:

2.38. Գտնել $a = (2, 1, -1)$ վեկտորին համագիծ x վեկտորի կոորդինատները, եթե $(x, a) = 3$:

2.39. Տրված $a = 3i + 2j + 2k$ և $b = 18i - 22j - 5k$ վեկտորներին ուղղահայաց x վեկտորը Oz առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն: Գտնել x -ի կոորդինատները, եթե $|x| = 14$:

2.40. Գտնել տրված $a = (2, 3, -1)$ և $b = (1, -2, 3)$ վեկտորներին ուղղահայաց x վեկտորը, եթե $(x, 2i - j + k) = -6$:

2.41. Տրված են $a = (3, -1, 5)$ և $b = (1, 2, -3)$ վեկտորները: Գտնել Oz առանցքին ուղղահայաց x վեկտորը, եթե $(x, a) = 9$, $(x, b) = -4$:

2.42. Տրված են $a = 2i - j + 3k$, $b = i - 2j + 3k$ և $c = 3i + 2j - 4k$ վեկտորները: Գտնել այն x վեկտորը, որի համար $(x, a) = -5$, $(x, b) = -11$ և $(x, c) = 20$:

2.43. Գտնել $s = (4, -3, 2)$ վեկտորի պրոեկցիան այն առանցքի վրա, որը կոորդինատային առանցքների հետ կազմում է հավասար սուր անկյուններ:

2.44. Գտնել $s = (\sqrt{2}, -3, -5)$ վեկտորի պրոեկցիան այն առանցքի վրա, որը Ox, Oz առանցքների հետ կազմում է $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ անկյուններ, իսկ Oy -ի հետ՝ սուր անկյուն:

2.45. Տրված են $A(3, -4, -2)$, $B(2, 5, -2)$ կետերը: Գտնել $\overline{AB}$ վեկտորի պրոեկցիան այն առանցքի վրա, որը Ox, Oy առանցքների հետ կազմում է $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$ անկյուններ, իսկ Oz -ի հետ՝ բութ անկյուն:

2.46. Գտնել $a = (5, 2, 5)$ վեկտորի պրոեկցիան $b = (2, -1, 2)$ վեկտորի վրա:

2.47. Տրված են $a = 3i - 6j - k$, $b = i + 4j - 5k$ և $c = 3i - 4j + 12k$ վեկտորները: Գտնել c -ի պրոեկցիան $(a + b)$ -ի վրա:

2.48. Տրված են $a = (1, -3, 4)$, $b = (3, -4, 2)$ և $c = (-1, 1, 4)$ վեկտորները: Գտնել a -ի պրոեկցիան $(b + c)$ -ի վրա:

2.49. Տրված են $a = -2i + j + k$, $b = i + 5j$ և $c = 4i + 4j - 2k$ վեկտորները: Գտնել $(3a - 2b)$ -ի պրոեկցիան c -ի վրա:

2.50. Տրված են $A(-5, 7, -6)$, $B(7, -9, 9)$ կետերը: Գտնել $a = (1, -3, 1)$ վեկտորի պրոեկցիան $\overline{AB}$ վեկտորի վրա:

2.51. Տրված են $A(-2, 3, -4)$, $B(3, 2, 5)$, $C(1, -1, 2)$ և $D(3, 2, -4)$ կետերը: Գտնել $\overline{AB}$ վեկտորի պրոեկցիան $\overline{CD}$ վեկտորի վրա:

2.52. Տրված չորս չափանի $a = (2, -3, 4, 7)$, $b = (6, 0, -4, 2)$ և $c = (-1, 1, 4, 5)$ վեկտորների համար գտնել.

- | | | | |
|---------------------|---------------------|------------------------|---------------------|
| 1) $a + b$ | 2) $a - c$ | 3) $2a - 5b$ | 4) $5c + 4b$ |
| 5) $6a - 2b + c$ | 6) (a, b) | 7) $(2a - 3b, a + 2b)$ | 8) $(a + b, c - b)$ |
| 9) $(a - b, a + c)$ | 10) $(a, b + 2c)$: | | |

2.53. Հայտնի են ձեռնարկության յոթ աշխատակիցների հունիս և հուլիս ամիսների վարձատրության $a = (52000, 29000, 36000, 41000, 74000, 27500, 31800)$ և $b = (48300, 28700, 32400, 38000, 69100, 25000, 30000)$ վեկտորները: Օգոստոս ամսին նրանց տրամադրել են արձակուրդ, վճարելով նախորդ երկու ամիսների միջին աշխատավարձը: Գտնել այդ աշխատակիցների արձակուրդային վճարի c վեկտորը:

2.54. Ձեռնարկությունը որոշակի ապրանք թողարկելիս օգտագործում է չորս տեսակի հումք: Հումքերի ծախսը ապրանքի միավորի համար բնութագրվում է $s = (5, 4, 4, 3)$ վեկտորով: Որոշել 150 միավոր ապրանք արտադրելու համար հումքի ընդհանուր արժեքը, եթե գների վեկտորն է՝ $p = (100, 300, 400, 400)$:

2.55. Ձեռնարկությունը տեխնիկական վերագինման նպատակով որոշել է ներգրավել վարկային միջոցներ: Ա, Բ, Գ և Դ բանկերը տրամադրում են 20, 40, 25 և 30 մլն. դրամ՝ տարեկան համապատասխանաբար 25, 22, 20 և 18 % տոկոսադրույքներով: Ձեռնարկությունը տարեվերջին ընդամենը որքա՞ն պետք է վճարի ստացած վարկերի համար:

2.56. Աշոտը, Բագրատը և Գոռը գնել են հինգ տեսակի ապրանքներ, ընդ որում Աշոտը 3 միավոր I տեսակի ապրանքից, 4 միավոր II -ից, 2 միավոր III -ից, Բագրատը՝ 2 միավոր II-ից, 1 միավոր IV-ից, 4 միավոր V-ից և, վերջապես, Գոռը՝ 6 միավոր I -ից, 2 միավոր III -ից, 1 միավոր IV-ից, 3 միավոր V -ից.

1) ներկայացնել յուրաքանչյուրի գնումները a , b և c վեկտորների տեսքով,

2) մեկնաբանել $a + b + c$, $a - c$ և $a + c - b$ վեկտորների տնտեսագիտական իմաստը,

3) որոշել հաճախորդներից յուրաքանչյուրի ծախսը, եթե վերոհիշյալ ապրանքների գների վեկտորն է՝ $p = (10, 5, 12, 20, 7)$,

4) մեկնաբանել $(p, a - c)$, $(p, a + b + c)$ և $(p, a + c - b)$ մեծությունները:

3. ԳԾԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Դիցուք հարթության վրա տրված են կոորդինատների դեկարտյան ուղղանկյուն համակարգը և որևէ L գծը (կորը): Այդ գծի վրա գտնվող կետի x և y կոորդինատները, ընդհանրապես ասած, կամայական լինել չեն կարող, դրանք պետք է բավարարեն որոշակի օրինաչափության, որը տրվում է հավասարման տեսքով: Ավելի ստույգ՝ հարթության վրա գտնվող L *գծի հավասարում* է կոչվում այն հավասարումը, որին բավարարում են L գծի վրա գտնվող յուրաքանչյուր $M(x, y)$ կետի կոորդինատները և չեն բավարարում ցանկացած այլ L գծի վրա չգտնվող կետի կոորդինատները: Գծի հավասարում կարող է հանդիսանալ $y = f(x)$ (գծի տրման բացահայտ ձևը), կամ ավելի ընդհանուր՝ $F(x, y) = 0$ (անբացահայտ տրման ձևը) հավասարումը: Հաճախ գծի ներկայացման համար հարմար է արտահայտել այդ գծի վրա գտնվող կետի x և y կոորդինատները մեկ այլ՝ երրորդ փոփոխականի (t պարամետրի) միջոցով՝ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ (գծի պարամետրական ներկայացումը):

Գծը կոչվում է հանրահաշվական, եթե այն որևէ դեկարտյան ուղղանկյուն համակարգում տրվում է $P(x, y) = 0$ հավասարումով, որտեղ $P(x, y)$ -ը բազմանդամ է, ընդ որում, եթե բազմանդամը n -րդ աստիճանի է, ապա գծը կոչվում է n -րդ կարգի գծ: Մասնավորապես, առաջին կարգի գծերը ուղիղ գծերն են, իսկ երկրորդ կարգի կարևոր կորերից են՝ էլիպսը, հիպերբոլը, պարաբոլը: Ոչ հանրահաշվական գծերը կոչվում են տրանսցենդենտ:

3.1. Գտնել հարթության այն գծի հավասարումը, որի կետերը հավասարապես են հեռացված կոորդինատային առանցքներից:

3.2. Ի՞նչ հավասարման են բավարարում

1) հարթության արեցիսների առանցքից մեկ հեռավորության վրա գտնվող կետերի կոորդինատները,

2) հարթության օրդինատների առանցքից երկու հեռավորության վրա գտնվող կետերի կոորդինատները:

3.4. Կազմել $A(4, 0)$ և $B(0, 2)$ կետերից հավասարապես հեռացված կետերի բազմությունը ներկայացնող հավասարումը:

3.5. Կազմել $A(1, 1)$ և $B(2, 2)$ կետերից հավասարապես հեռացված կետերի բազմությունը ներկայացնող հավասարումը:

3.6. Երկու երկարության հատվածի մի ծայրակետը շարժվում է աբսցիսների առանցքով, իսկ մյուսը՝ օրդինատների: Կազմել այդ հատվածի միջնակետի հետագծի հավասարումը:

3.7. Տրված են գծի պարամետրական հավասարումները: Արտաքսելով t պարամետրը, գտնել այդ գծի հավասարումը.

$$1) \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos^2 t \end{cases} :$$

4. ՈՒՂԻՂ ԳԻԾԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

4.1. Ուղիղ գծի ընդհանուր հավասարումը: Եթե հարթության վրա ընտրված է Oxy դեկարտյան ուղղանկյուն համակարգը, ապա x և y փոփոխականների նկատմամբ առաջին կարգի ցանկացած

$$Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 > 0, \quad (1)$$

հավասարումը որոշում է ուղիղ գիծ և, հակառակը, հարթության վրա կամայական ուղիղ գիծ որոշվում է առաջին կարգի հավասարումով: Կամայական A, B, C գործակիցներով, բայց այնպես որ $A^2 + B^2 > 0$, (1) հավասարումը կոչվում է *ուղիղ գծի ընդհանուր հավասարում*: Ընդհանուր (1) հավասարումով որոշվող ուղիղ գիծը օրթոգոնալ է $n=(A, B)$ վեկտորին: Այդ վեկտորը կոչվում է (1) ուղղի *նորմալ վեկտոր*:

4.2. Ուղղի հավասարումը առանցքներից անջատված հատվածներով: Եթե (1) հավասարման A, B, C գործակիցները զրոյից տարբեր են, ապա այն կարելի է բերել հետևյալ տեսքի

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (2)$$

որը կոչվում է ուղիղ գծի «*անջատված (կտրված) հատվածներով*» հավասարում:

4.3. Ուղղի կանոնական հավասարումը: Ուղիղ գծին զուգահեռ կամայական ոչ զրոյական վեկտորը կոչվում է այդ ուղղի *ուղղորդ վեկտոր*: Տրված $M_0(x_0, y_0)$ կետով անցնող և $q = (l, m)$ ուղղորդ վեկտորն ունեցող ուղիղ գծի

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \quad (3)$$

հավասարումը կոչվում է ուղղի *կանոնական հավասարում*:

4.4. Երկու կետերով անցնող ուղիղ գծի հավասարումը: Տրված $M_1(x_1, y_1)$ և $M_2(x_2, y_2)$ իրարից տարբեր կետերով անցնող ուղիղ գծի ուղղորդ կարող է հանդիսանալ $q = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ վեկտորը և (3) հավասարումից ստացվում է

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (4)$$

$M_1(x_1, y_1)$ և $M_2(x_2, y_2)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:

4.5. Ուղղի պարամետրական հավասարումը: $M_0(x_0, y_0)$ կետով անցնող և $q = (l, m)$ ուղղորդ վեկտորն ունեցող ուղիղը t պարամետրի միջոցով ներկայացվում է հետևյալ հավասարումներով

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty): \quad (5)$$

$M_1(x_1, y_1)$ և $M_2(x_2, y_2)$ կետերով անցնող ուղիղ գծի պարամետրական տրումն է՝

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty):$$

4.6. Անկյունային գործակցով ուղիղ գծի հավասարումը: Եթե (1) հավասարման մեջ $B \neq 0$, ապա լուծելով այն y -ի նկատմամբ և

նշանակելով $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, ստացվում է

$$y = kx + b \quad (6)$$

հավասարումը:

Եթե α -ով նշանակենք ուղղի կազմած անկյունը Ox առանցքի հետ, ապա $\operatorname{tg} \alpha = k$ և k -ն ուղիղ գծի անկյունային գործակիցն է: Եթե ուղիղը զուգահեռ է Ox առանցքին, ապա $\alpha = 0$, $k = 0$ և (6) հավասարումն ընդունում է $y = b$ տեսքը: Մասնավորապես, Ox առանցքը որոշվում է $y = 0$ հավասարումով: Ox առանցքին ուղղահայաց ուղիղն անկյունային գործակից չունի:

4.7. Երկու ուղիղների կազմած անկյունը: ա) Ընդհանուր հավասարումներով տրված $L_1: Ax_1 + B_1y + C_1 = 0$ և $L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ուղիղների կազմած անկյուններից մեկը՝ α -ն որոշվում է

$$\cos \alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

բանաձևի օգնությամբ:

L_1 և L_2 ուղիղների զուգահեռության պայմանն է՝ $A_1 B_2 = A_2 B_1$ (եթե նաև $A_1 C_2 = A_2 C_1$, ապա ուղիղները համընկնում են):

L_1 և L_2 ուղիղների ուղղահայացության պայմանն է՝ $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$:

բ) եթե L_1 և L_2 ուղիղները տրված են կանոնական հավասարումներով՝

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \text{ և } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2},$$

ապա

$$\cos \alpha = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}};$$

L_1 և L_2 ուղիղների զուգահեռության պայմանը կլինի՝ $l_1 m_2 = l_2 m_1$:

L_1 և L_2 ուղիղների ուղղահայացության պայմանը՝ $l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$:

գ) L_1 և L_2 անկյունային գործակիցներով տրված $y = k_1 x + b_1$ և $y = k_2 x + b_2$ ուղիղների կազմած α անկյուններից մեկը որոշվում է

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

բանաձևով: Ուղիղները զուգահեռ են, եթե $k_1 = k_2$ և ուղղահայաց՝ երբ $k_1 k_2 = -1$:

4.8. Ուղիղ գծի նորմալ (նորմալիզացված) հավասարումը: Կոորդինատների սկզբնակետով տանենք տրված L ուղղին ուղղահայաց ուղիղ և P -ով նշանակենք այդ ուղիղների հատման կետը, իսկ p -ով՝ $\overline{OP}$ վեկտորի երկարությունը: Դիցուք $\overline{OP} \neq \theta$ և n -ը $\overline{OP}$ վեկտորին համուղված միավոր վեկտորն է, θ -ն n վեկտորի կազմած անկյունն է Ox առանցքի հետ՝ $n = (\cos \theta, \sin \theta)$: $M(x, y)$ կետը գտնվում է L ուղղի վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա կոորդինատները բավարարում են

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$$

հավասարմանը: Այդ հավասարումը կոչվում է ուղիղ գծի *նորմալ (նորմալիզացված)* հավասարում: Ուղիղ գծի $Ax + By + C = 0$ ընդհանուր հա-

մերի բազմությունը, որը կարող է լինել անսահմանափակ, սահմանափակ, նույնիսկ դատարկ:

4.1. Հետևյալ կետերից որո՞նք են պատկանում $2x - 3y - 3 = 0$ ուղղին. $A(3, 1)$, $B(2, 3)$, $C(6, 3)$, $D(-3, -3)$, $E(3, -1)$, $F(-2, 1)$:

4.2. A , B , C և D կետերը պատկանում են $3x - 2y - 6 = 0$ ուղղին: Գտնել նրանց օրդինատները, եթե այդ կետերի աբսցիսները հավասար են համապատասխանաբար՝ 4, 2, -2 և -6:

4.3. A , B , C և D կետերը պատկանում են $x - 3y + 2 = 0$ ուղղին: Գտնել նրանց աբսցիսները, եթե օրդինատները հավասար են համապատասխանաբար 1, 2, -1 և -3:

4.4. Գտնել $2x - 3y - 12 = 0$ ուղղի հատման կետերը կոորդինատային առանցքների հետ:

4.5. Գտնել $3x - 4y - 29 = 0$ և $2x + 5y + 19 = 0$ ուղիղների հատման կետը:

4.6. Կազմել ուղղի հավասարումը, եթե հայտնի են նրա k անկյունային գործակիցը և այն b հատվածը, որն այդ ուղիղն անջատում է Oy առանցքից.

$$1) k = \frac{2}{3}, b = 3 \quad 2) k = 3, b = 0 \quad 3) k = 0, b = -2$$

$$4) k = -\frac{3}{4}, b = 3 \quad 5) k = -2, b = -5:$$

4.7. Որոշել տրված ուղղի k անկյունային գործակիցը և այն b հատվածը, որն ուղիղն անջատում է Oy առանցքից

$$1) 5x - y + 3 = 0 \quad 2) 2x + 3y - 6 = 0 \quad 3) 5x + 3y + 2 = 0$$

$$4) 3x + 2y = 0 \quad 5) y - 3 = 0:$$

4.8. Տրված է $2x + 3y + 4 = 0$ ուղիղը: Կազմել $M(2, 1)$ կետով անցնող այն ուղղի հավասարումը, որը

1) զուգահեռ է տրված ուղղին

2) ուղղահայաց է տրված ուղղին:

4.9. Ուղղանկյան երկու կողմերի հավասարումներն են՝ $2x - 3y + 5 = 0$ և $3x + 2y - 7 = 0$, իսկ $A(2, -3)$ կետը նրա գագաթներից մեկն է: Կազմել ուղղանկյան մյուս երկու կողմերի հավասարումները:

4.10. Ուղղանկյան երկու կողմերի և անկյունագծերից մեկի հավասարումներն են՝ $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ և $7x + y - 15 = 0$ համապատասխանաբար: Գտնել նրա գագաթները:

4.11. Գտնել $2x - 3y - 3 = 0$ ուղղի նկատմամբ $P(-5, 13)$ կետի սիմետրիկ կետը:

4.12. Գտնել հետևյալ ուղիղներին զուգահեռ և նրանցից հավասարահեռ ուղղի նորմալ հավասարումը.

1) $3x - 2y - 1 = 0$, $3x - 2y - 13 = 0$

2) $2x + 3y - 6 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$:

3) $3x - 15y - 1 = 0$, $x - 5y - 2 = 0$

4.13. Գտնել $M_1(2, -5)$ և $M_2(3, 2)$ կետերով անցնող ուղղի անկյունային գործակիցը:

4.14. Կազմել ABC եռանկյան $A(5, -4)$, $B(-1, 3)$, $C(-3, -2)$ գագաթներով անցնող և նրանց հանդիպակաց կողմերին զուգահեռ ուղիղների հավասարումները:

4.15. Եռանկյան կողմերի միջնակետերը $M_1(2, 1)$, $M_2(5, 3)$ և $M_3(3, -4)$ կետերն են: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

4.16. Տրված են $P(2, 3)$ և $Q(-1, 0)$ կետերը: Կազմել Q կետով անցնող և PQ -ին ուղղահայաց ուղղի հավասարումը:

4.17. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որի համար $P(2, 3)$ կետը կտորոգինատների համակարգի սկզբնակետից այդ ուղղին տարված ուղղահայացի հիմքն է:

4.18. Տրված են եռանկյան $A(2, 1)$, $B(-1, -1)$ և $C(3, 2)$ գագաթները: Կազմել այդ եռանկյան բարձրությունների ընդհանուր հավասարումները:

4.19. Եռանկյան գագաթներն են $A(1, -1)$, $B(-2, 1)$, $C(3, 5)$ կետերը: Կազմել A գագաթով անցնող և BM միջնագծին ուղղահայաց ուղղի հավասարումը:

4.20. Տրված են եռանկյան $A(2, -2)$, $B(3, -5)$ և $C(5, 7)$ գագաթները: Կազմել AN կիսորդին C գագաթից տարված ուղղահայացի հավասարումը:

4.21. Տրված են եռանկյան $A(3, 2)$, $B(5, -2)$ և $C(1, 0)$ գագաթները: Կազմել նրա միջնագծերի հավասարումները:

4.22. Գտնել $M_1(-1, 2)$ և $M_2(2, 3)$ կետերով անցնող ուղղի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերի կոորդինատները:

4.23. $A(-3, -1)$ և $B(2, 2)$ կետերը $ABCD$ զուգահեռագծի կից գագաթներ են, իսկ $Q(3, 0)$ -ն՝ նրա անկյունագծերի հատման կետը: Կազմել զուգահեռագծի կողմերի հավասարումները:

4.24. Տրված են ուղղանկյան երկու կողմերի $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ և անկյունագծի $3x + 7y - 10 = 0$ հավասարումները: Կազմել նրա մյուս երկու կողմերի և անկյունագծի հավասարումները:

4.25. Տրված են եռանկյան $A(1, -2)$, $B(5, 4)$ և $C(-2, 0)$ գագաթները: Կազմել նրա A գագաթին կից ներքին և արտաքին անկյունների կիսորդների հավասարումները:

4.26. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $P(2, 3)$ կետով և հավասարահեռ է $A(-7, 3)$ ու $B(11, -15)$ կետերից:

4.27. Գտնել $P(-8, 12)$ կետի պրոեկցիան $A(2, -3)$ և $B(-5, 1)$ կետերով անցնող ուղղի վրա:

4.28. Գտնել $A(3, -4)$ և $B(-1, -2)$ կետերով անցնող ուղղի նկատմամբ $M(8, -9)$ կետին սիմետրիկ N կետի կոորդինատները:

4.29. Գտնել հետևյալ ուղիղների կազմած անկյունը.

- 1) $5x - y - 7 = 0$, $3x + 2y = 0$ 2) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$
3) $x - 2y - 1 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$ 4) $3x + 2y - 1 = 0$, $5x - 2y + 3 = 0$:

4.30. Կազմել $M(2, 1)$ կետով անցնող և $2x + 3y + 4 = 0$ ուղղի հետ 45° անկյուն կազմող ուղիղների հավասարումները:

4.31. $Q(1, -1)$ կետը քառակուսու կենտրոնն է, իսկ նրա կողմերից մեկը գտնվում է $x - 2y + 12 = 0$ ուղղի վրա: Կազմել քառակուսու մյուս կողմերի հավասարումները:

4.32. Եռանկյան կողմերի հավասարումներն են $3x + 4y - 1 = 0$, $x - 7y - 17 = 0$ և $7x + y + 31 = 0$: Համեմատելով եռանկյան անկյունները համոզվել, որ այն հավասարասրուն է:

4.33. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M(2, -3)$ կետով և զուգահեռ է

- 1) $3x - 7y + 3 = 0$ 2) $x + 9y - 11 = 0$ 3) $16x - 24y - 7 = 0$
4) $2x + 3 = 0$ 5) $3y - 1 = 0$

ուղղին:

4.34. Պարզել, թե հետևյալ ուղիղների զույգերից որոնք են ուղղահայաց.

- 1) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$
2) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$
3) $6x - 15y + 7 = 0$, $10x + 4y - 3 = 0$
4) $9x - 12y + 1 = 0$, $8x + 6y - 13 = 0$
5) $7x - 2y + 3 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$
6) $5x - 7y + 3 = 0$, $3x + 2y - 5 = 0$:

4.35. Գտնել a պարամետրի այն արժեքը, որի համար $(a+2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$ ուղիղը՝

- 1) զուգահեռ է արագիսների առանցքին,
- 2) զուգահեռ է օրդինատների առանցքին,
- 3) անցնում է կոորդինատային համակարգի սկզբնակետով:

4.36. Որոշել m և n թվերն այնպես, որ $(m + 2n - 3)x + (2m - n + 1)y + 6m + 9 = 0$ ուղիղն անցնի $M(0, -3)$ կետով և զուգահեռ լինի Ox առանցքին:

4.37. Գտնել m և n թվերն այնպես, որ $(2m - n + 5)x + (m + 3n - 2)y + 2m + 7n + 19 = 0$ ուղիղն անցնի $M(5, 0)$ կետով և զուգահեռ լինի Oy առանցքին:

4.38. Համոզվել, որ հետևյալ ուղիղները զուգահեռ են.

- 1) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y + 7 = 0$
- 2) $y + 5 = 0$, $y - 2 = 0$
- 3) $x - \sqrt{2}y = 0$, $\sqrt{2}x - 2y = 0$
- 4) $\sqrt{3}x - 1 = 0$, $3x - \sqrt{3} = 0$:

4.39. Որոշել m և n թվերն այնպես, որ $mx - 2y - 1 = 0$ և $6x - 4y - n = 0$ ուղիղները

- 1) լինեն զուգահեռ 2) համընկնեն 3) ունենան մեկ ընդհանուր կետ:

4.40. Գտնել m և n թվերն այնպես, որ $mx + 8y + n = 0$ և $2x + my - 1 = 0$ ուղիղները

- 1) լինեն զուգահեռ 2) համընկնեն 3) լինեն ուղղահայաց:

4.41. Գտնել m թիվն այնպես, որ $(m - 1)x + my - 5 = 0$ և $mx + (2m - 1)y + 7 = 0$ ուղիղները հատվեն Ox առանցքին պատկանող կետում:

4.42. Գտնել m թիվն այնպես, որ $(2m + 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0$ և $mx + (2m + 3)y + m + 6 = 0$ ուղիղները հատվեն Oy առանցքին պատկանող կետում:

4.43. Տրված են ABC եռանկյան $A(3, -1)$, $B(5, 7)$ գագաթները և բարձրությունների հատման $N(4, -1)$ կետը: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

4.44. ABC եռանկյան կողմի և երկու բարձրությունների հավասարումներն են՝

$$AB: 5x - 3y + 2 = 0, \quad AM: 4x - 3y + 1 = 0, \quad BN: 7x + 2y - 22 = 0:$$

Կազմել նրա մյուս երկու կողմերի և երրորդ բարձրության հավասարումները:

4.45. ABC եռանկյան միջնագծերից երկուսն ընկած են $x - 2y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$ ուղիղների վրա, իսկ $A(1, 3)$ կետը նրա գագաթներից մեկն է: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

4.46. Եռանկյան գագաթներից մեկը $B(-4, -5)$ կետն է, իսկ երկու բարձրություններն ընկած են $5x + 3y - 4 = 0$, $3x + 8y + 13 = 0$ ուղիղների վրա: Կազմել այդ եռանկյան կողմերի հավասարումները:

4.47. ABC եռանկյան գագաթներից մեկը $A(4, -1)$ կետն է, իսկ երկու կիսորդներն ընկած են $x - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ ուղիղների վրա: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

4.48. Եռանկյան տարբեր գագաթներից տարված բարձրությունը և կիսորդը գտնվում են համապատասխանաբար $3x - 4y + 27 = 0$ և $x + 2y - 5 = 0$ ուղիղների վրա, իսկ $B(2, -1)$ կետը նրա գագաթներից մեկն է: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

4.49. Եռանկյան մույն գագաթից տարված բարձրությունը և միջնագիծը գտնվում են համապատասխանաբար $2x - 4y + 12 = 0$ և $2x + 3y = 0$ ուղիղների վրա, իսկ $C(4, -1)$ կետը նրա գագաթներից մեկն է: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

4.50. Եռանկյան տարբեր գագաթներից տարված բարձրությունը և միջնագիծն ունեն համապատասխանաբար $3x + y + 11 = 0$ և $x + 2y + 7 = 0$ հավասարումները, իսկ $B(2, 7)$ կետը նրա գագաթներից մեկն է: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

4.51. Եռանկյան նույն գագաթից տարված կիսորդն ու միջնագիծը գտնվում են $x + 2y - 5 = 0$ և $4x + 13y + 10 = 0$ ուղիղների վրա, իսկ $C(4, 3)$ կետը նրա գագաթներից մեկն է: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

4.52. Եռանկյան տարբեր գագաթներից տարված կիսորդն ու միջնագիծն ունեն $x - 4y + 10 = 0$ և $6x + 10y - 59 = 0$ հավասարումները, իսկ $A(3, -1)$ կետը նրա գագաթներից մեկն է: Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները:

4.53. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատային համակարգի սկզբնակետով և $x - y + 12 = 0$, $2x + y + 9 = 0$ ուղիղների հետ կազմում է $1,5$ մակերեսով եռանկյուն:

4.54. $P(3, 0)$ կետով անցնող ուղիղներից ընտրել այն, որի՝ $2x - y - 2 = 0$ և $x + y + 3 = 0$ ուղիղներով պարփակված հատվածը P կետով կիսվում է:

4.55. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատային համակարգի սկզբնակետով այնպես, որ նրա՝ $2x - y + 5 = 0$ և $2x - y + 10 = 0$ ուղիղների միջև ընկած հատվածի երկարությունը հավասար լինի $\sqrt{10}$ -ի:

4.56. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $C(-5, 4)$ կետով, իսկ նրա այն հատվածի երկարությունը, որն ընկած է $x + 2y + 1 = 0$ և $x + 2y - 1 = 0$ ուղիղների միջև՝ 5 է:

4.57. Գտնել այն եռանկյան մակերեսը, որը $3x - 4y - 12 = 0$ ուղիղն անջատում է համապատասխան կոորդինատային անկյունից:

4.58. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M(3, -7)$ կետով և կոորդինատային առանցքներից անջատում է հավասար՝ ոչ զրոյական հատվածներ:

4.59. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M(2, 3)$ կետով և կոորդինատային առանցքներից անջատում է հավասար՝ ոչ զրոյական հատվածներ:

4.60. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M(1, 1)$ կետով և կոորդինատային համապատասխան անկյունից անջատում է 2-ի հավասար մակերես ունեցող եռանկյուն:

4.61. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M(5, -5)$ կետով և կոորդինատային համապատասխան անկյունից անջատում է եռանկյուն, որի մակերեսը հավասար է 50:

4.62. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M(8, 6)$ կետով և կոորդինատային համապատասխան անկյունից անջատում է եռանկյուն, որի մակերեսը հավասար է 12:

4.63. Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $M(12, 6)$ կետով և կոորդինատային համապատասխան անկյունից անջատում է եռանկյուն, որի մակերեսը հավասար է 150:

4.64. Ուղիղն անցնում է $M(4, 3)$ կետով և կոորդինատային համապատասխան անկյունից անջատում է 3 -ի հավասար մակերես ունեցող եռանկյուն: Գտնել այդ ուղղի հատման կետերը կոորդինատային առանցքների հետ:

4.65. Պարզել, թե հետևյալ հավասարումներից որոնք են նորմալ տեսքի

$$1) \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0 \quad 2) \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y - 1 = 0$$

$$3) \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2 = 0 \quad 4) -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$$

$$5) -x + 2 = 0 \quad 6) x - 2 = 0$$

$$7) y + 2 = 0 \quad 8) -y - 2 = 0:$$

4.66. Ուղղի հավասարումը բերել նորմալ տեսքի

$$1) 4x - 3y - 10 = 0 \quad 2) \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 = 0$$

$$3) 12x - 5y + 13 = 0 \quad 4) x + 2 = 0:$$

4.67. Ապացուցել, որ $2x + y + 3 = 0$ ուղիղը հատում է $A(-5, 1)$ և $B(3, 7)$ ծայրակետերով հատվածը:

4.68. Ցույց տալ, որ $2x - 3y + 6 = 0$ ուղիղը չի հատում $A(-2, -3)$ և $B(1, -2)$ ծայրակետերով հատվածը:

4.69. Հաշվել հետևյալ զուգահեռ ուղիղների միջև հեռավորությունը.

$$1) 3x - 4y - 10 = 0 \quad 6x - 8y + 5 = 0$$

$$2) 5x - 12y + 26 = 0 \quad 5x - 12y - 13 = 0$$

$$3) 4x - 3y + 15 = 0 \quad 8x - 6y + 25 = 0$$

4.70. ABC եռանկյան գագաթներն են $A(-10, -13)$, $B(-2, 3)$ և $C(2, 1)$ կետերը: Գտնել նրա B գագաթի հեռավորությունը CM միջնագծով անցնող ուղղից:

4.71. Քառակուսու կողմերը գտնվում են $5x - 12y - 65 = 0$ և $5x - 12y + 26 = 0$ ուղիղների վրա: Հաշվել քառակուսու մակերեսը:

4.72. $A(2, -3)$ գագաթով քառակուսու կողմերը $4x - 3y + 3 = 0$ և $4x - 3y - 17 = 0$ ուղիղների վրա են: Կազմել նրա մյուս երկու կողմերի հավասարումները:

4.73. Քառակուսու կողմերը $5x + 12y - 10 = 0$ և $5x + 12y + 29 = 0$ ուղիղների վրա են: Կազմել նրա մյուս երկու կողմերի հավասարումները, եթե հայտնի է, որ $P(-3, 5)$ կետը գտնվում է այդ կողմերից մեկի վրա:

4.74. Կազմել $P(-2, 3)$ կետով անցնող և $A(5, -1)$, $B(3, 7)$ կետերից հավասարահեռ ուղղի ընդհանուր հավասարումը:

4.75. Կազմել հետևյալ ուղիղների կազմած անկյան կիսորդի հավասարումը

$$1) 3x - y + 7 = 0, \quad 3x - y - 3 = 0$$

$$2) x - 2y + 3 = 0, \quad x - 2y + 7 = 0$$

$$3) 3x + 4y - 1 = 0, \quad 5x + 12y - 2 = 0:$$

4.76. Եռանկյան կողմերը $x + y - 4 = 0$, $3x - 7y + 8 = 0$ և $4x - y - 31 = 0$ ուղիղների վրա են: Պարզել $P(-3, 2)$ կետի դիրքն այդ եռանկյան նկատմամբ:

4.77. $3x - 2y + 5 = 0$ և $2x + y - 3 = 0$ ուղիղներով կազմված անկյուններից որի՞ն է պատկանում կոորդինատային համակարգի սկզբնակետը:

4.78. $3x - 5y - 4 = 0$ և $x + 2y + 3 = 0$ ուղիղների կազմած սուր, թե՞ բութ անկյանն է պատկանում $P(2, -5)$ կետը:

4.79. Կազմել $3x - y - 4 = 0$ և $2x + 6y + 3 = 0$ ուղիղներով կազմված այն անկյան կիսորդի հավասարումը, որին պատկանում է կոորդինատային համակարգի սկզբնակետը:

4.80. Կազմել $3x + 4y - 5 = 0$ և $5x - 12y + 3 = 0$ ուղիղների կազմած սուր անկյան կիսորդի հավասարումը:

4.81. Կազմել $x - 3y + 5 = 0$ և $3x - y + 15 = 0$ ուղիղների կազմած բութ անկյան կիսորդի հավասարումը:

4.82. Գտնել $x + 2y - 11 = 0$ և $3x - 6y - 5 = 0$ ուղիղների կազմած և $Q(1, -3)$ կետը պարունակող անկյան կիսորդի հավասարումը:

4.83. Oxy հարթության վրա պատկերել անհավասարմանը կամ անհավասարումների համակարգին բավարարող կետերի բազմությունը.

$$1) y \geq x$$

$$2) \begin{cases} y \geq -1 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y + x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y \leq 2x \\ y \geq x \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y + 2x \leq 4 \\ y - 2x \leq 4 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2y + x - 1 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x + 3y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x + y \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x + y \leq 4 \\ x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

4.84. Հետևյալ ուղիղներով սահմանափակված տիրույթը ներկայացնել անհավասարումների համակարգի տեսքով.

1) $y = x$, $y = 2 - x$ և $y = 0$ 2) $y = 2x$, $y = x$ և $x = 2$

3) $3x + y = 3$, $x=0$ և $y = 0$ 4) $x + y = 2$, $x - y = 2$ և $x = 0$:

4.85. Հայտնի է, որ ընթացիկ տարվա սպառողական զամբյուղը կազմում է 32000 դ., իսկ նախորդ տարում այն կազմել է 29000 դ.: Որքան կկազմի այն 5 տարի հետո, ե տարի հետո, եթե սպառողական զամբյուղի աճի տեմպը պահպանվի:

4.86. Ձեռնարկատերը բանկից վերցրել է 2000000 դ. երկարաժամկետ վարկ տարեկան 16% (պարզ) տոկոսադրույքով: Պարզել պարտքի չափը 6 ամիս, 2 տարի, 5 տարի, 1 տարի անց:

4.87. Հայտնի է, որ ձեռնարկությունը տարածքի վարձակալության և աշխատակիցների վարձատրության համար անկախ թողարկման ծավալից շաբաթական վճարում է 200000 դ.: Բացի այդ, արտադրանքի միավորի փոփոխում ծախսը կազմում է 200 դ.: Պատրաստի արտադրանքի միավորը վաճառվում է 250 դրամով: Գտնել շաբաթական թողարկման այն ծավալը, որի դեպքում ձեռնարկությունը ոչ շահույթ կունենա և ոչ էլ վնաս (ծախսածածկման կետը):

4.88. Ալյուրի p գնից կախված $S = S(p)$, $D = D(p)$ առաջարկի և պահանջարկի կախվածությունները տրվում են հետևյալ բանաձևերով $S = 0,8p + 0,5$, $D = -0,4p + 1,5$: Որոշել ալյուրի շուկայական գինը:

4.89. Ալյուրի գնի կախվածություններն առաջարկից և պահանջարկից տրվում են $p = 1,25S - 0,625$ և $p = -2,5D + 3,75$ բանաձևերով: Գտնել հավասարակշռված գինը:

4.90. Ընկերությունը վաճառում է ընկույզ և նուշ՝ կիլոգրամը 1200 դ. և 1800 դ. գներով: Ընկույզի պահանջարկի անկումը հաղթահարելու

նպատակով ընկերությունը նախատեսել է վաճառքի համել ընկույզի և նուշի խառնուրդ՝ 1400 դրամով: Ի՞նչ համամասնությամբ պետք է պատրաստվի խառնուրդը, որպեսզի հասույթը մնա անփոփոխ:

4.91. Ընկերությունը չիր և չամիչ ձեռք բերելու նպատակով ծախսել է 500000 դ.: Վաճառքից ստացվել է համապատասխանաբար 8% և 10% շահույթ, որը կազմել է ընդամենը՝ 46000 դ.: Որոշել յուրաքանչյուր տեսականու վրա ծախսված գումարը:

4.92. Հունվարի 15-ին ապրանքի գինը կազմել է 120 դ., իսկ նույն տարվա մայիսի 15-ին՝ 140 դ.: Համարելով, որ գնի աճը գծային է՝ հաշվել ապրանքի գինը նույն տարվա օգոստոսի 1-ին, դեկտեմբերի 1-ին:

4.93. Ծխախոտի կրպակում երկու ամիս առաջ վաճառվել է 3,5 մլն. դրամի ծխախոտ, իսկ ընթացիկ ամսում՝ 2,9 մլն. դրամի: Համարելով ծխախոտի պահանջարկի անկումը կայուն՝ որոշել նրա վաճառքից ստացված գումարի կախվածությունը ժամանակից: Պարզել, թե քանի՞ ամիս անց գնորդները կիրաժարվեն այդ վատ սովորությունից:

4.94. Հայտնի է, որ ապրանքի միավորն իրացվում է 300 դրամով, իսկ n միավոր ապրանքի թողարկման ծախսը արտահայտվում է $C = 150n + 105000$ բանաձևով: Որոշել հավասարակշռության քանակը (եկամտի և վնասի բացակայությունը): Գերադասելի՞ է արդյոք թողարկողի համար $C = 120n + 110000$ իրավիճակը:

4.95. Շաքարի տարեկան միջին Q_S առաջարկը և Q_D պահանջարկը տրվում են $Q_S = 0.75p + 400$, $Q_D = -0.5p + 150$ բանաձևերով, որտեղ p -ն շաքարի մեկ կիլոգրամի գինն է: Կառուցել այդ ֆունկցիաների գրաֆիկները և հաշվել շաքարի շուկայական գինը:

4.96. Ապրանքի մեկ միավորի շուկայական գինը 500 դրամ է: Այդ պայմաններում իրացման ծավալը 14 000 միավոր է: 300 դրամով այդ ապրանքի արդեն չի թողարկվի, իսկ 900 դրամով՝ չի իրացվի: Գտնել պահանջարկի և առաջարկի ֆունկցիաները, եթե դրանք գծային են:

5. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԳԾԵՐ

Ընդհանուր տեսքով տրված երկու փոփոխականով երկրորդ կարգի

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, \quad (1)$$

հավասարումը համապատասխան ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգում որոշում է կամ դատարկ բազմություն, կամ կետ, կամ ուղիղ, կամ ուղիղների զույգ, կամ *էլիպս (շրջանագիծ)*, *հիպերբոլ*, *պարաբոլ* գծերից մեկը:

5.1. Շրջանագծի հավասարումը: Դիցուք $A = C \neq 0$, $B = 0$ և $D^2 + E^2 - 4AF > 0$: Այդ դեպքում ստացված

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2)$$

հավասարումը հարթության վրա որոշում է շրջանագիծ: Իրոք, լրացնելով x և y պարունակող անդամները մինչև լրիվ քառակուսի, կստանանք՝

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}: \quad (3)$$

Քանի որ $D^2 + E^2 - 4AF > 0$, ապա (2) -ը *շրջանագծի ընդհանուր հավասարումն է*, որի կենտրոնը գտնվում է $Q\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$ կետում, իսկ շա-

ռավիղն է՝ $R = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2|A|}$: Նշանակելով $x_0 = -\frac{D}{2A}$, $y_0 = -\frac{E}{2A}$,

ստանում ենք շրջանագծի *նորմալ հավասարումը*՝

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2: \quad (4)$$

Մասնավորապես, եթե շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում ($x_0 = y_0 = 0$), ապա շրջանագծի հավասարումը կընդունի

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (5)$$

տեսքը:

5.2. Էլիպս: Դիցուք (1) հավասարման մեջ $B = 0$: Անջատելով լրիվ քառակուսիները, (1) հավասարումը կբերվի

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F \quad (6)$$

տեսքի, կամ, նշանակելով $x_0 = -\frac{D}{2A}$, $y_0 = -\frac{E}{2A}$, $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F = d$,
կստանանք՝

$$A(x-x_0)^2 + C(y-y_0)^2 = d: \quad (7)$$

Երկրորդ կարգի (7) կորը կոչվում է *էլիպս*, եթե A , C և d գործակիցներն ունեն միևնույն նշանը: Կատարելով կոորդինատային համակարգի սկզբնակետի համապատասխան տեղաշարժ, կստանանք՝

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

էլիպսի կանոնական հավասարումը ($a = \sqrt{\frac{d}{A}}$ և $b = \sqrt{\frac{d}{C}}$ *կիսառանցք-*

ներով): Մասնավոր դեպքում, երբ $a = b$, (8) -ը դառնում է $x^2 + y^2 = a^2$ շրջանագծի հավասարում: $F_1(-c, 0)$ և $F_2(c, 0)$ կետերն անվանում են (8)

էլիպսի կիզակետեր (ֆոկուսներ), որտեղ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (միշտ կարելի է

համարել $a \geq b > 0$), իսկ $\varepsilon = \frac{c}{a}$ հարաբերությունը՝ *էլիպսի էքսցենտրի-*

սիտետ: Ակնհայտ է, որ $0 \leq \varepsilon < 1$, ընդ որում, շրջանագծի համար՝ $\varepsilon = 0$: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$ կետերը կոչվում են *էլիպսի գագաթներ*:

5.3. Հիպերբոլ: Երկրորդ կարգի (7) կորը կոչվում է *հիպերբոլ*, եթե A և C գործակիցներն ունեն տարբեր նշաններ, այսինքն $AC < 0$, իսկ $d \neq 0$: Եթե $A > 0$, $C < 0$ և $d > 0$, ապա ստացվում է *հիպերբոլի կանոնական հավասարումը*՝

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (9)$$

որտեղ $a = \sqrt{\frac{d}{A}}$ հիպերբոլի իրական կիսառանցքն է, իսկ $b = \sqrt{\frac{d}{-C}}$.

Կեղծ կիսառանցքը: $F_1(c, 0)$ -ն և $F_2(-c, 0)$ -ն հիպերբոլի *կիզակետերն են* ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$), իսկ $\varepsilon = \frac{c}{a}$ -ն՝ *էքսցենտրիսիտետը* ($\varepsilon > 1$): Հիպերբո-

լի գազաթներն են $A_1(a,0)$ և $A_2(-a,0)$ կետերը: (9) հիպերբոլն ունի երկու ասիմպտոտ՝

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x:$$

Եթե $d < 0$, ապա ստացվում է (9) հիպերբոլին համալուծ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

հիպերբոլը, $a = \sqrt{\frac{d}{-A}}$ և $b = \sqrt{\frac{d}{C}}$ կիսառանցքներով: *Հավասարակողմ*

հիպերբոլի ($a = b$) ասիմպտոտները փոխուղղահայաց են և հանդիսանում են կոորդինատային անկյունների կիսորդները:

Հավասարակողմ հիպերբոլ է հանդիսանում նաև երկրորդ կարգի

$$xy = k \quad (10)$$

հավասարումով տրվող հակադարձ համեմատականության կախվածություները: Եթե $k > 0$, ապա (10) հիպերբոլի ճյուղերը գտնվում են I և III քառորդներում: Եթե $k < 0$, ապա (10) հիպերբոլի ճյուղերը գտնվում են II և IV քառորդներում: $k = 1$ դեպքում $A_1(1,1)$ և $A_2(-1,-1)$ կետերը (10) հիպերբոլի գազաթներն են, իսկ $x = 0$ և $y = 0$ կոորդինատային առանցքները՝ նրա ասիմպտոտները:

5.4. Պարաբոլ: Դիցուք (1) հավասարման մեջ B-ն, ինչպես նաև A և C գործակիցներից մեկը հավասար են զրո, որոշակիության համար՝ $A = B = 0, C \neq 0$, այսինքն՝

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0: \quad (11)$$

Լրացնելով y պարունակող անդամները մինչև լրիվ քառակուսի, ենթադրելով, որ $D \neq 0$ ($D = 0$ դեպքում ստացվում են երկու զուգահեռ ուղիղներ կամ դատարկ բազմություն), կհանգենք

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad (12)$$

հավասարմանը, որտեղ $x_0 = -\frac{F}{D} + \frac{E^2}{4DC}$, $y_0 = -\frac{E}{2C}$, $2p = -\frac{D}{C}$:

Երկրորդ կարգի (12) կորը կոչվում է *պարաբոլ*, $Q(x_0, y_0)$ -ն նրա *գագաթն է*, p -ն՝ *պարաբոլի պարամետրը*: Եթե $p > 0$ պարաբոլի ճյուղերն ուղղված են աջ, $p < 0$ դեպքում՝ ձախ: Պարաբոլի համաչափության

առանցք է հանդիսանում $y = y_0$ ուղիղը: Եթե պարաբոլի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, ապա (12) հավասարումը ընդունում է $y^2 = 2px$ տեսքը: $F(\frac{p}{2}, 0)$ կետը կոչվում է պարաբոլի *կիզակետ*, իսկ $x = -\frac{p}{2}$ ուղիղը՝ *դիրեկտրիսա*:

5.1. Պարզել կորի տեսքը

$$1) (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

$$3) x^2 - 4y^2 = 16$$

$$5) x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$7) x^2 + 4y^2 - 4x + 16y = 0$$

$$9) 9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y = 367$$

$$11) x^2 + y^2 - 4x + 14y + 54 = 0$$

$$13) y^2 = -4x$$

$$15) y = \frac{4x+5}{2x-1}$$

$$17) 16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$$

$$18) x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0$$

$$2) (x - 2)^2 + 5(y + 2)^2 = 15$$

$$4) x^2 = 6y + 2$$

$$6) x^2 + y^2 + 16y = 17$$

$$8) 25x^2 + 9y^2 - 72y = 81$$

$$10) y = 4x^2 - 8x + 7$$

$$12) x = 2y^2 - 12y + 14$$

$$14) y = \frac{4x+14}{x+2}$$

$$16) y = \frac{14x+1}{3x+8}$$

5.2. Կազմել շրջանագծի հավասարումը, եթե

1) այն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, իսկ կենտրոնը $Q(-6, 8)$ կետն է,

2) այն անցնում է $A(-8, 6)$ կետով, իսկ կենտրոնը $Q(1, 2)$ կետն է,

3) նրա տրամագծերից մեկի ծայրակետերը $A(2, 3)$ և $B(6, 1)$ կետերն են,

4) $5x - 12y + 9 = 0$ ուղիղը նրա շոշափողն է, իսկ $Q(1, -1)$ կետը՝ կենտրոնը,

5) այն անցնում է $A(1, 2)$, $B(0, -1)$ և $C(-3, 0)$ կետերով,

6) այն անցնում է $A(7, 7)$ ու $B(-2, 4)$ կետերով, և նրա կենտրոնը գտնվում է $2x - y - 2 = 0$ ուղղի վրա:

5.3. Եռանկյան կողմերը գտնվում են $9x - 2y - 41 = 0$, $7x + 4y + 7 = 0$ և $x - 3y + 1 = 0$ ուղիղների վրա: Կազմել այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի հավասարումը:

5.4. Կազմել $x^2 + y^2 = 16$ և $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ շրջանագծերի ընդհանուր լարի հավասարումը:

5.5. Կազմել էլիպսի հավասարումը, եթե

1) $F_1(-2, 0)$ -ն և $F_2(2, 0)$ -ն նրա կիզակետերն են, իսկ մեծ կիսա-առանցքը՝ $a = \sqrt{5}$:

2) $F_1(-4, 0)$ -ն և $F_2(4, 0)$ -ն նրա կիզակետերն են, իսկ էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{4}{5}$:

3) Նրա կիզակետերը Ox առանցքի՝ սկզբնակետի նկատմամբ սիմետրիկ կետեր են, մեծ կիսաառանցքը՝ $a = 20$, իսկ էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{3}{5}$:

4) Նրա կիզակետերը Ox առանցքի՝ սկզբնակետի նկատմամբ սիմետրիկ կետեր են, իսկ կիսաառանցքները՝ $a = 7$, $b = 2$:

5.6. Կազմել $M(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4})$ և $N(-2, \frac{\sqrt{15}}{5})$ կետերով անցնող էլիպսի կանոնական հավասարումը:

5.7. Պարզել $M(7, 1)$, $N(-5, -4)$ և $P(4, 5)$ կետերի դիրքը $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$ էլիպսի նկատմամբ:

5.8. Ապացուցել, որ F_1 և F_2 կիզակետերով $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ էլիպսի վրա գտնվող ամեն մի M կետի համար ճիշտ է $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ հավասարությունը:

5.9. Կազմել $M(9, 8)$ կետով անցնող հիպերբոլի հավասարումը, եթե նրա ասիմպտոտները տրվում են $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x$ և $y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}x$ հավասարումներով:

5.10. Կազմել $F_1(-13, 0)$ և $F_2(13, 0)$ կիզակետերով հիպերբոլի հավասարումը, եթե նրա գագաթների միջև հեռավորությունը հավասար է 24:

5.11. Կազմել $F_1(-4, 0)$ և $F_2(4, 0)$ կիզակետերով հիպերբոլի հավասարումը, եթե նրա գագաթներից մեկը $A(1, 0)$ կետն է:

5.12. Կազմել այն հիպերբոլի հավասարումը, որի գագաթներն ու կիզակետերը համընկնում են $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$ էլիպսի գագաթների ու կիզակետերի հետ:

5.13. Ապացուցել, որ F_1 և F_2 կիզակետերով $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ հիպերբոլի վրա գտնվող ամեն մի M կետի համար ճիշտ է $||F_1M| - |F_2M|| = 2a$ հավասարությունը:

5.14. Գտնել Ox առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ այն պարաբոլի հավասարումը, որի գագաթը $O(0, 0)$ -ն է և որը $y = x$ ուղղից կտրում է $4\sqrt{2}$ երկարությամբ լար:

5.15. $y^2 = 3x$ պարաբոլի վրա գտնել կետ, որի հեռավորությունը $4x + 3y - 110 = 0$ ուղղից հավասար է 2:

5.16. Oxy հարթության վրա պատկերել անհավասարմանը կամ անհավասարումների համակարգին բավարարող կետերի բազմությունը.

$$\begin{array}{lll} 1) (x - 4)^2 + (y + 3)^2 \leq 1 & 2) 4x^2 - y \leq 0 & 3) xy \geq 1 \\ 4) x^2 + 4y^2 \geq 1 & 5) \begin{cases} x^2 - y \leq 0 \\ y \leq 3x + 4 \end{cases} & 6) \begin{cases} xy \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

$$7) \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 \leq 1 \\ y \geq x^2 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ x - y^2 \geq 0 \end{cases} :$$

5.17. Դերձակը շուկան ուսումնասիրելիս տեսել է, որ եթե գլխարկի վաճառքի գինը լինի 3000 դ., ապա օրական կգնեն 30 գլխարկ, իսկ եթե վաճառքի գինը լինի 4000 դ., ապա օրական կվաճառվի 20 գլխարկ: Արտադրության հաստատուն ծախսը կազմում է 20000 դ., իսկ մեկ գլխարկի փոփոխումն ծախսը՝ 1000 դ.: Ընդունենք, որ վաճառված գլխարկների քանակի և գնի միջև կապը (գլխարկի պահանջարկի ֆունկցիան) գծային է՝ $q = kp + c$, որտեղ p –ն մեկ գլխարկի վաճառքի գինն է, q –ն վաճառված գլխարկների քանակը, իսկ k –ն և c –ն հաստատուն գործակիցներ են: Պահանջվում է ստանալ համապատասխան բանաձևեր հասույթի, ընդհանուր ծախսի և եկամուտի համար և կառուցել դրանց գծապատկերները:

6. ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԵՎ ԳԾԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Դիցուք տարածության մեջ տրված են $Oxyz$ դեկարտյան ուղղանկյուն համակարգը և որևէ S մակերևույթ: S մակերևույթի հավասարում է կոչվում

$$F(x, y, z) = 0$$

հավասարումը, եթե մակերևույթի վրա գտնվող ցանկացած կետի x , y և z կոորդինատները և միայն նրանք են բավարարում այդ հավասարմանը: Գիծը տարածությունում ներկայացվում է որպես երկու մակերևույթների հատում և հետևաբար՝

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

հավասարումները համատեղ որոշում են գիծ տարածությունում, այսինքն հանդիսանում են *տարածական գծի հավասարումներ*: Մակերևույթը և գիծը տարածությունում ներկայացվում են նաև պարամետրական տեսքերով: Այդ դեպքում, սովորաբար, տարածական L գծի ցանկացած կետի կոորդինատները տրվում են որպես որոշակի միջակայքում փոփոխվող t պարամետրից կախված անընդհատ ֆունկցիաներ՝

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

իսկ մակերևույթի պարամետրական ներկայացման համար այդ մակերևույթի կետերի կոորդինատները տրվում են արդեն որպես երկու՝ u և v պարամետրերից կախված անընդհատ ֆունկցիաներ՝

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v):$$

Մակերևույթը կոչվում է *հանրահաշվական*, եթե այն որևէ դեկարտյան ուղղանկյուն համակարգում տրվում է $P(x, y, z) = 0$ հավասարումով, որտեղ $P(x, y, z)$ -ը երեք փոփոխականների բազմանդամ է, ընդ որում, եթե բազմանդամը n -րդ աստիճանի է, ապա մակերևույթը կոչվում է n -րդ կարգի մակերևույթ: Ոչ հանրահաշվական մակերևույթները կոչվում են *տրանսցենդենտ*: Եթե տարածական գիծը հանդիսանում է հանրահաշվական մակերևույթների հատում, ապա այն կոչվում է *հանրահաշվական*:

6.1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ մակերևույթի վրա գտնել կետ, որի

1) աբսցիսը հավասար է 1, իսկ օրդինատը՝ 2,

- 2) արքցիսը հավասար է 2, իսկ ապլիկատը՝ 2,
 3) օրդինատը հավասար է 0, իսկ ապլիկատը՝ 3:

6.2. Տարածության մեջ ի՞նչ երկրաչափական պատկեր է որոշում հետևյալ հավասարումը.

- | | | |
|--|---------------------|-----------------|
| 1) $x = 0$ | 2) $y + z = 0$ | 3) $x - y = 0$ |
| 4) $x + z = 0$ | 5) $xy = 0$ | 6) $xyz = 0$ |
| 7) $xy - y^2 = 0$ | 8) $x^2 + y^2 = 25$ | 9) $x^2 = 6z$: |
| 10) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 49$ | | |

6.3. Ի՞նչ երկրաչափական պատկեր է որոշվում հետևյալ պարամետրական հավասարումներով

- 1) $x = R \sin u \cos v, y = R \sin u \sin v, z = R \cos u, 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v < 2\pi$:
 2) $x = 1 + 2u + 3v, y = 1 + 3u + 4v, z = 1 + 2u + v$:

6.4. Ի՞նչ հավասարման պետք է բավարարեն $M_1(1, 2, -3)$ և $M_2(3, 2, 1)$ կետերից հավասարահեռ կետերի կոորդինատները:

6.5. Գտնել

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 25 = 0 \end{cases}$$

գծի 3 արքցիսն ունեցող կետերը:

6.6. Ո՞ր կորն է որոշվում հետևյալ համակարգով.

- | | |
|---|---|
| 1) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} y + 2 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} (x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 169 \\ x = 0 \end{cases}$: |

7. ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

7.1. Հարթության ընդհանուր հավասարումը: Եթե տարածության մեջ տրված է $Oxyz$ դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը, ապա x , y և z փոփոխականների նկատմամբ առաջին կարգի ցանկացած

$$Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0, \quad (1)$$

գծային հավասարումով որոշվում է հարթություն և հակառակը՝ կամայական հարթություն որոշվում է (1) հավասարումով, որը կոչվում է *հարթության ընդհանուր հավասարում*: Հարթությանն ուղղահայաց $n = (A, B, C)$ վեկտորն անվանում են այդ հարթության *նորմալ վեկտոր*:

7.2. Հարթության հավասարումը անջատված հատվածներով: Եթե (1) հավասարման բոլոր գործակիցները զրոյից տարբեր են, ապա այն կարելի է բերել հետևյալ տեսքի՝

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (2)$$

որը կոչվում է *հարթության հավասարում անջատված (կտրված) հատվածներով*:

7.3. Երեք կետերով անցնող հարթության հավասարումը: Մեկ ուղղի վրա չգտնվող երեք կետերով անցնում է մեկ և միայն մեկ հարթություն: Այդ հարթության հավասարումն ունի (1) տեսքը և, քանի որ տրված երեք կետերը գտնվում են հարթության վրա, դրանց կոորդինատները բավարարում են (1) հավասարմանը: Արդյունքում ստացվում է երեք գծային հավասարումներից կազմված համակարգ A , B , C և D չորս անհայտների նկատմամբ:

7.4. Երկու հարթությունների կազմած անկյունը:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{և} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

ընդհանուր հավասարումներով տրված π_1 և π_2 հարթությունների կազմած φ անկյունը հավասար է նրանց նորմալ՝ $n_1 = (A_1, B_1, C_1)$ և $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$ վեկտորների կազմած անկյանը և, հետևաբար՝

$$\cos \varphi = \frac{(n_1, n_2)}{|n_1| |n_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}};$$

Մասնավորաբար, հարթություններն ուղղահայաց են, եթե ուղղահայաց են $\mathbf{n}_1$ և $\mathbf{n}_2$ վեկտորները, այսինքն՝ $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0$, կամ՝ $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$: Հարթությունները զուգահեռ են, երբ $\mathbf{n}_1$ և $\mathbf{n}_2$ վեկտորները համագիծ են, այսինքն՝

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

իսկ, եթե

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

ապա π_1 և π_2 հարթությունները համընկնում են:

7.5. Հարթության նորմալ (նորմավորված) հավասարումը: Դիցուք տրված է կոորդինատների սկզբնակետով չանցնող π հարթությունը: Կոորդինատների սկզբնակետով տանենք այդ հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ և դիցուք P -ն նրա հատման կետն է այդ հարթության հետ:

$\overline{OP}$ վեկտորին համուղղված միավոր վեկտորը նշանակենք $\mathbf{n}$ -ով: Եթե α -ն, β -ն և γ -ն $\mathbf{n}$ վեկտորի կազմած անկյուններն են համապատասխանաբար Ox , Oy և Oz առանցքների հետ՝ ($\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$)

և $p = |\overline{OP}|$, ապա π հարթությունը տրվում է

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (3)$$

հավասարումով, որը կոչվում է *հարթության նորմալ հավասարում*: Եթե հարթության ընդհանուր հավասարման երկու կողմերը բազմապատ-

կենք $\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ թվով, ընտրելով μ -ի նշանը D -ի նշանին

հակառակ, ապա կստանանք հարթության նորմալ հավասարումը: $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետի հեռավորությունը ընդհանուր հավասարումով տրվող հարթությունից որոշվում է

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

բանաձևով:

7.1. Կազմել $M(2, 1, -1)$ կետով անցնող և $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$ նորմալ վեկտորն ունեցող հարթության հավասարումը:

7.2. $P(2, -1, -1)$ կետը հանդիսանում է կոորդինատային համակարգի սկզբնակետից հարթության իջեցրած ուղղահայացի հիմքը: Կազմել այդ հարթության հավասարումը:

7.3. Տրված են $M_1(3, -1, 2)$ և $M_2(4, -2, -1)$ կետերը: Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է M_1 կետով և ուղղահայաց է $\overline{M_1M_2}$ վեկտորին:

7.4. Կազմել $P(3, 4, -5)$ կետով անցնող և $\mathbf{a} = (3, 1, -1)$ ու $\mathbf{b} = (1, -2, 1)$ վեկտորներին զուգահեռ հարթության հավասարումը:

7.5. Կազմել $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -2, -1)$ և $M_3(2, 0, 2)$ կետերով անցնող հարթության հավասարումը:

7.6. Հավասարումների ո՞ր զույգերն են կազմում զուգահեռ հարթություններ.

$$1) 2x - 3y + 5z - 7 = 0, \quad 2x - 3y + 5z + 3 = 0$$

$$2) 4x + 2y - 4z + 5 = 0, \quad 2x + y + 2z - 1 = 0$$

$$3) x - 3z + 2 = 0, \quad 2x - 6z - 7 = 0:$$

7.7. Հավասարումների ո՞ր զույգերն են կազմում ուղղահայաց հարթություններ.

$$1) 3x - y - 2z - 5 = 0, \quad x + 9y - 3z + 2 = 0$$

$$2) 2x + 3y - z - 3 = 0, \quad x - y - z + 5 = 0$$

$$3) 2x - 5z = 0, \quad x + 2z - 3 = 0:$$

7.8. l և m թվերի ո՞ր արժեքների դեպքում հետևյալ հարթություններն կլինեն զուգահեռ.

$$1) 2x + ly + 3z - 5 = 0, \quad mx - 6y - 6z + 2 = 0$$

$$2) 3x - y + lz - 9 = 0, \quad 2x + my + 2z - 3 = 0$$

$$3) mx + 3y - 2z + 1 = 0, \quad 2x - 5y - lz = 0:$$

7.9. l -ի ո՞ր արժեքի դեպքում հետևյալ հարթությունները կլինեն ուղղահայաց.

1) $3x - 5y + lz - 3 = 0, \quad x + 3y + 2z + 5 = 0$

2) $5x + y - 3z - 3 = 0, \quad 2x + ly - 3z + 1 = 0$

3) $7x - 2y - z = 0, \quad lx + y - 3z - 1 = 0:$

7.10. Գտնել հարթությունների զույգով կազմված երկնիստ անկյունը.

1) $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0, \quad x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$

2) $3y - z = 0, \quad 2y + z = 0$

3) $6x + 3y - 2z = 0, \quad x + 2y + 6z - 12 = 0$

4) $x + 2y + 2z - 3 = 0, \quad 16x + 12y - 15z - 1 = 0:$

7.11. Կազմել $M(3, -2, -7)$ կետով անցնող և $2x - 3z + 5 = 0$ հարթությանը զուգահեռ հարթության հավասարումը:

7.12. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(2, -1, 1)$ կետով և ուղղահայաց է $2x - z + 1 = 0, y = 0$ հարթություններից յուրաքանչյուրին:

7.13. Համոզվել, որ $x - 2y + z - 7 = 0, 2x + y - z + 2 = 0$ և $x - 3y + 2z - 11 = 0$ հարթություններն ունեն ճիշտ մեկ ընդհանուր կետ: Գտնել այդ կետի կոորդինատները:

7.14. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է

1) $M(2, -3, 3)$ կետով և զուգահեռ է Oxy հարթությանը,

2) $M(1, -2, 4)$ կետով և զուգահեռ է Oxz հարթությանը:

7.15. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է

1) $M(4, -1, 2)$ կետով և ուղղահայաց է Ox առանցքին,

2) $M(1, -4, -3)$ կետով և ուղղահայաց է Oy առանցքին,

3) $M(3, -4, 7)$ կետով և ուղղահայաց է Oz առանցքին:

7.16. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է

1) $M_1(7, 2, -3)$, $M_2(5, 6, -4)$ կետերով և զուգահեռ է Ox առանցքին

2) $M_1(2, -1, 1)$, $M_2(3, 1, 2)$ կետերով և զուգահեռ է Oy առանցքին

3) $M_1(3, -2, 5)$, $M_2(2, 3, 1)$ կետերով և զուգահեռ է Oz առանցքին:

7.17. Գտնել $3x - 4y - 24z + 12 = 0$ հարթության հատման կետերը կոորդինատային առանցքների հետ:

7.18. Գտնել այն եռանկյան մակերեսը, որը $5x - 6y - 3z + 120 = 0$ հարթությունն անջատում է Oxy հարթության համապատասխան կոորդինատային անկյունից:

7.19. Գտնել $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ հարթությամբ և կոորդինատային հարթություններով սահմանափակված բուրգի ծավալը:

7.20. Հարթությունն անցնում է $M_1(1, 2, -1)$, $M_2(-3, 2, 1)$ կետերով և օրդինատների առանցքը հատում է $Q(0, 3, 0)$ կետում: Կազմել այդ հարթության անջատված հատվածներով հավասարումը:

7.21. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(2, -3, -4)$ կետով և կոորդինատային առանցքներից անջատում է զրոյից տարբեր հավասար հատվածներ:

7.22. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(4, 3, 2)$ կետով և կոորդինատային առանցքներից անջատում է զրոյից տարբեր հավասար հատվածներ:

7.23. Կազմել հարթության հավասարումը, որն ուղղահայաց է $n = (-2, 1, 3)$ վեկտորին և Oz առանցքից անջատում է $c = 5$ երկարությամբ հատված:

7.24. Հետևյալ հավասարումներից որո՞նք են տրված նորմալ տեսքով.

$$1) \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0 \quad 2) \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z - 3 = 0$$

$$3) \frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z + 5 = 0 \quad 4) x - 1 = 0$$

$$5) -\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z - 5 = 0 \quad 6) \frac{5}{13}y - \frac{12}{13}z - 1 = 0$$

$$7) \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 3 = 0 \quad 8) z - 5 = 0:$$

7.25. Հավասարումը բերել նորմալ տեսքի.

$$1) 2x - 2y + z - 18 = 0 \quad 2) \frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$$

$$3) 5y - 12z + 26 = 0 \quad 4) 3x - 4y - 1 = 0$$

$$5) 4x - 6y - 12z - 11 = 0 \quad 6) -4x - 4y + 2z + 1 = 0$$

$$7) y + 2 = 0 \quad 8) -x - 5 = 0:$$

7.26. Գտնել կոորդինատային համակարգի սկզբնակետի հեռավորությունը տրված հարթությունից: Որոշել հարթության նորմալ վեկտորի կազմած անկյունները կոորդինատային առանցքների հետ:

$$1) x + \sqrt{2}y + z - 18 = 0 \quad 2) x - y - \sqrt{2}z + 16 = 0 \quad 3) x + z - 6 = 0$$

$$4) y - z + 2 = 0 \quad 5) \sqrt{3}x + y + 10 = 0 \quad 6) z - 2 = 0$$

$$7) 2x + 1 = 0 \quad 8) 2y + 1 = 0:$$

7.27. Հաշվել P կետի հեռավորությունը տրված հարթությունից.

$$1) P(-2, -4, 3), \quad 2x - y + 2z + 3 = 0$$

$$2) P(2, -1, -1), \quad 16x - 12y + 15z - 4 = 0$$

$$3) P(1, 2, -3), \quad 5x - 3y + z + 4 = 0$$

$$4) P(3, -6, 7), \quad 4x - 3z - 1 = 0$$

$$5) P(9, 2, -2), \quad 12y - 5z + 5 = 0$$

$$6) P(2, 1, -3), \quad x + 2y - 2z + 5 = 0:$$

7.28. Հաշվել $P(-1, 1, -2)$ կետի հեռավորությունը $A(1, -1, 1)$, $B(-2, 1, 3)$ և $C(4, -5, -2)$ կետերով անցնող հարթությունից:

7.29. Ապացուցել, որ $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ հարթությունը հատում է $A(3, -2, 1)$ և $B(-2, 5, 2)$ ծայրակետերով հատվածը:

7.30. Ապացուցել, որ $5x - 2y + z - 1 = 0$ հարթությունը չի հատում $A(1, 4, -3)$ և $B(2, 5, 0)$ ծայրակետերով հատվածը:

7.31. Հատու՞մ է արդյոք տրված հարթությունը կոորդինատային համակարգի սկզբնակետը $Q(2, -1, 1)$ կետին միացնող հատվածը.

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| 1) $5x - 3y + z - 18 = 0$ | 2) $2x + 7y + 3z + 1 = 0$ |
| 3) $x + 5y + 12z - 1 = 0$ | 4) $2x - y + z + 11 = 0$ |
| 5) $2x + 3y - 6z + 2 = 0$ | 6) $3x - 2y + 2z - 7 = 0$: |

7.32. Հաշվել զուգահեռ հարթությունների հեռավորությունը.

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| 1) $x - 2y - 2z - 12 = 0,$ | $x - 2y - 2z - 6 = 0$ |
| 2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0,$ | $4x - 6y + 12z + 21 = 0$ |
| 3) $2x - y + 2z + 9 = 0,$ | $4x - 2y + 4z - 21 = 0$ |
| 4) $16x + 12y - 15z + 50 = 0,$ | $16x + 12y - 15z + 25 = 0$ |
| 5) $30x - 32y + 24z - 75 = 0,$ | $15x - 16y + 12z - 2 = 0$: |

7.33. Oy առանցքի վրա գտնել կետ, որի հեռավորությունը $x + 2y - 2z - 2 = 0$ հարթությունից հավասար լինի 4 -ի:

7.34. Oz առանցքի վրա գտնել կետ, որը հավասարահեռ է $3x - 2y + 6z - 9 = 0$ հարթությունից և $M(1, -2, 0)$ կետից:

7.35. Ox առանցքի վրա գտնել կետ, որը հավասարահեռ է $12x - 16y + 15z + 1 = 0$ և $2x + 2y - z - 1 = 0$ հարթություններից:

7.36. Կազմել տրված զուգահեռ հարթություններից հավասարահեռ հարթության հավասարումը.

1) $4x - y - 2z - 3 = 0$, $4x - y - 2z - 5 = 0$

2) $3x + 2y - z + 3 = 0$, $3x + 2y - z - 1 = 0$

3) $5x - 3y + z + 3 = 0$, $10x - 6y + 2z + 7 = 0$:

7.37. Կազմել հետևյալ հարթություններով կազմված երկնիստ անկյան կիսորդ հարթության հավասարումը.

1) $x - 3y + 2z - 5 = 0$, $3x - 2y - z + 3 = 0$

2) $5x - 5y - 2z - 3 = 0$, $x + 7y - 2z + 1 = 0$

3) $2x - y + 5z + 3 = 0$, $2 - 10y + 4z - 2 = 0$:

7.38. Պարզել, թե $x - 2y + 3z - 5 = 0$ և $2x - y - z + 3 = 0$ հարթություններով կազմված երկնիստ անկյուններից որի՞ն է պատկանում կոորդինատային համակարգի սկզբնակետը:

7.39. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որը կիսում է $2x - y + 2z - 3 = 0$ և $3x + 2y - 6z - 1 = 0$ հարթություններով կազմված և $P(1, 2, -3)$ կետը պարունակող երկնիստ անկյունը:

7.40. Գտնել $2x - 3y - 4z - 3 = 0$ և $4x - 3y - 4z - 3 = 0$ հարթություններով կազմված սուր երկնիստ անկյան կիսորդ հարթությունը:

7.41. Գտնել $3x - 4y - z + 5 = 0$ և $4x - 3y + z + 5 = 0$ հարթություններով կազմված բութ երկնիստ անկյան կիսորդ հարթությունը:

8. ՈՒՂԻՂ ԳԻԾԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

8.1. Տարածական ուղղի կանոնական հավասարումները: Տարածության $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետով անցնող և տրված $q = (l, m, n)$ ոչ զրոյական վեկտորին զուգահեռ ուղիղը տրվում է

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad (1)$$

տեսքով, որն ընդունված է անվանել *ուղիղ գծի կանոնական հավասարումներ*:

8.2. Ուղղի պարամետրական ներկայացումը տարածության մեջ: Ընդունելով (1) առնչության կոտորակներից յուրաքանչյուրը հրպես է պարամետր, կստացվեն

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt, \quad t \in (-\infty, +\infty), \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (2)$$

հավասարումները, որոնք կոչվում են *ուղղի պարամետրական հավասարումներ*:

8.3. Երկու կետերով անցնող ուղղի տրումը: Երկու տարբեր $M_1(x_1, y_1, z_1)$ և $M_2(x_2, y_2, z_2)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}; \quad (3)$$

Եթե ուղիղը տրված է երկու ոչ զուգահեռ հարթությունների հատման տեսքով՝

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

ապա, գտնելով այդ համակարգի որևէ երկու տարբեր լուծումներ, կարելի է ստանալ (3) հավասարումը:

8.4. Ուղիղների փոխդասավորությունը տարածության մեջ: Տարածության L_1 և L_2 որևէ երկու ուղիղներ կամ համընկնում են, կամ հատվում են, կամ զուգահեռ են, կամ չեն գտնվում մի հարթության վրա (խաչվող են): Պարզել այդ ուղիղների փոխադարձ դասավորվածությունը կարելի է հե-

տևյալ կերպ. լուծելով համապատասխան հավասարումների համակարգը գտնել L_1 և L_2 ուղիղների ընդհանուր կետերը: Եթե համակարգը լուծում չունի, ապա ուղիղները չունեն ընդհանուր կետեր, և այդ դեպքում նրանք կամ զուգահեռ են, կամ խաչվող: Պարզելու համար թե այդ դեպքերից որ մեկը տեղի ունի, ընտրում են երկու կետ L_1 -ից և մեկ կետ L_2 -ից: Այդ երեք կետերով անցնող π հարթությունը պարունակում է L_1 ուղիղը: Վերցնենք L_2 -ից ևս մեկ կետ, եթե այդ կետը պատկանի π հարթությանը, ապա L_1 և L_2 ուղիղները զուգահեռ են, հակառակ դեպքում՝ խաչվող:

8.5. Ուղիղների կազմած անկյունը տարածության մեջ: Ուղիղների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: Կանոնական հավասարումներով տրված

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{և} \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

ուղիղների կազմած α անկյունը հավասար է նրանց ուղղորդ $\mathbf{q}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ և $\mathbf{q}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ վեկտորների կազմած անկյանը, այսինքն՝

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)}{|\mathbf{q}_1| |\mathbf{q}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}};$$

L_1 և L_2 ուղիղների ուղղահայացության պայմանն է՝

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0:$$

L_1 և L_2 ուղիղների զուգահեռության պայմանն է՝

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}:$$

8.6. Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

կանոնական հավասարումներով տրված L ուղղի և

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ընդհանուր հավասարումով տրված π հարթության կազմած α անկյունը որոշվում է

$$\sin \alpha = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

բանաձևից: .

8.4. Ապացուցել, որ
$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 6 = 0 \\ x + 5y - 7z + 10 = 0 \end{cases}$$
 ուղիղը հատում է

Oy առանցքը:

8.5. a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում
$$\begin{cases} 2x + 3y - z - a = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

ուղիղը կհատի

1) Ox

2) Oy

3) Oz

առանցքը:

8.6. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է
$$\begin{cases} 3x - y + 2z + 9 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$$
 ուղղով և

1) $P(4, -2, -3)$ կետով

2) զուգահեռ է Ox առանցքին

3) զուգահեռ է Oy առանցքին

4) զուգահեռ է Oz առանցքին:

8.7. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է
$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$
 ուղղով և զուգահեռ է $q = (2, -1, -2)$ վեկտորին:

8.8. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է
$$\begin{cases} 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$
 ուղղով և ուղղահայաց է $x - 2y + z + 5 = 0$

հարթությանը:

8.9. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է
$$\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$
 ուղղով և ուղղահայաց է $x + 2y + 3z - 5 = 0$

հարթությանը:

8.10. Գտնել $P(-6, 6, -5)$ և $M(12, -6, 1)$ կետերով անցնող ուղղի հատման կետերը կոորդինատային հարթությունների հետ:

8.11. Եռանկյան գագաթները $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 2, 3)$ և $C(4, -7, -2)$ կետերն են: Կազմել նրա C գագաթից տարված միջնագծի պարամետրական հավասարումները:

8.12. Եռանկյան գագաթները $A(3, -1, -1)$, $B(1, 2, -7)$, $C(-5, 14, -3)$ կետերն են: Կազմել նրա C գագաթին առնչվող միջնագծի անկյան կիսորդի կանոնական հավասարումները:

8.13. Եռանկյան գագաթները $A(1, -2, -4)$, $B(3, 1, -3)$ և $C(5, 1, -7)$ կետերն են: Կազմել նրա B գագաթից տարված բարձրության պարամետրական հավասարումները:

8.14. Կազմել $P(2, 3, -5)$ կետով անցնող և
$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$
 ուղղին զուգահեռ ուղղի կանոնական հավասարումները:

8.15. Կազմել հետևյալ ուղղի կանոնական հավասարումները.

$$1) \begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - 4z - 8 = 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}:$$

8.16. Կազմել հետևյալ ուղղի պարամետրական հավասարումները.

$$1) \begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}:$$

8.17. Ստուգել ուղիղների զուգահեռությունը

$$1) \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}, \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = t - 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 3y - z + 1 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y - 5z - 1 = 0 \\ x - 2y + 3z - 9 = 0 \end{cases}:$$

8.18. Ստուգել ուղիղների ուղղահայացությունը

$$1) \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = -6t + 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases}:$$

8.19. Գտնել հետևյալ ուղիղների կազմած սուր անկյունը

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}:$$

8.20. Գտնել հետևյալ ուղիղների կազմած բութ անկյունը

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 0 \\ z = -t + 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 0 \\ z = t - 3: \end{cases}$$

8.21. Ապացուցել, որ հետևյալ համակարգերով տրված ուղիղները հատվում են

$$\begin{cases} x=2t-3 \\ y=3t-2 \\ z=-4t+6 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=t+5 \\ y=-4t-1 \\ z=t-4 \end{cases}$$

8.22. Պարզել, թե l -ի ո՞ր արժեքի դեպքում հետևյալ ուղիղները կհատվեն.

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}:$$

8.23. Կազմել այն ուղղի կանոնական հավասարումները, որն անցնում է $P(-1, 2, -3)$ կետով, ուղղահայաց է $a = (6, -2, -3)$ վեկտորին և հատում է $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$ ուղիղը:

8.24. Կազմել այն ուղղի պարամետրական հավասարումները, որն անցնում է $P(-4, -5, 3)$ կետով և հատում է հետևյալ ուղիղները՝

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}, \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}:$$

8.25. Կազմել կոորդինատների սկզբնակետով անցնող և տրված ուղիղներին ուղղահայաց ուղղի պարամետրական հավասարումները.

$$\begin{cases} x=3t-7 \\ y=-2t+4 \\ z=3t+4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-8 \\ z=-t-12 \end{cases}:$$

8.26. Կազմել այն ուղղի կանոնական հավասարումները, որն անցնում է $P(2, -3, -5)$ կետով և ուղղահայաց է $6x - 3y - 5z + 2 = 0$ հարթությանը:

8.27. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $P(1, -1, -1)$ կետով և ուղղահայաց է $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$ ուղղին:

8.28. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $P(1, -2, 1)$ կետով և ուղղահայաց է $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$ ուղղին:

8.29. m -ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ ուղիղը զուգահեռ կլինի $x-3y+z+3=0$ հարթությանը:

8.30. C -ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ ուղիղը զուգահեռ կլինի $2x-y+Cz-2=0$ հարթությանը:

8.31. A և D թվերի ո՞ր արժեքների համար $x=3+4t$, $y=1-4t$, $z=-4+t$ ուղիղն ընկած կլինի $Ax+2y-4z+D=0$ հարթության վրա:

8.32. A և B թվերի ո՞ր արժեքների համար $Ax+By+3z-5=0$ հարթությունն ուղղահայաց կլինի $x=3+2t$, $y=5-3t$, $z=-2-2t$ ուղղին:

8.33. l և C թվերի ո՞ր արժեքների համար $\frac{x-2}{l} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ ուղիղը ուղղահայաց կլինի $3x-2y+Cz+1=0$ հարթությանը:

8.34. Գտնել $P(2, -1, 3)$ կետի պրոեկցիան $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$ ուղղի վրա:

8.35. Գտնել $P(5, 2, -1)$ կետի պրոեկցիան $2x-y+3z+23=0$ հարթության վրա:

8.36. Գտնել $3x + y - 2z = 0$ հարթության նկատմամբ $P(1, 3, -4)$ կետին սիմետրիկ կետը:

8.37. Հաշվել $P(1, 1, -2)$ կետի հեռավորությունը

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2} \quad \text{ուղղից:}$$

8.38. Հաշվել $P(2, 3, -1)$ կետի հեռավորությունը հետևյալ ուղղից.

$$1) \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2} \quad 2) x=t+1, y=t+2, z=4t+13$$

$$3) \begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0 \end{cases} :$$

8.39. Համոզվելով, որ հետևյալ ուղիղները զուգահեռ են, հաշվել նրանց միջև եղած հեռավորությունը.

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4} \quad , \quad \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases} :$$

8.40. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $P(1, 2, -3)$ կետով և զուգահեռ է հետևյալ ուղիղներից յուրաքանչյուրին.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3} \quad , \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1} :$$

8.41. Ապացուցել, որ $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$ և $x + 2y + 3z - 1 = 0$ երեք հարթությունները հատվում են մեկ ուղղով:

8.42. Նկարագրել տարածության այն կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են հետևյալ անհավասարմանը կամ համակարգին.

$$1) x + y + z \geq 2 \quad 2) \begin{cases} x \leq 2 \\ y \geq 1 \\ z \geq 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + 2y + z \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x + 2y + z \leq 2 \\ x + y + z \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 0 \leq x_i \leq 1 \\ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x + y \leq 1 \\ x + z \leq 1 \\ y + z \leq 1 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x - y \leq 1 \\ x - z \leq 1 \\ y - z \leq 1 \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

8.43. Ընկերությունն արտադրում է X, Y և Z տեսակի ապրանքներ, օգտագործելով A և B հումքատեսակները՝ 220 կգ և 250 կգ պաշարներով համապատասխանաբար: Ապրանքատեսակի միավորի արտադրման համար օգտագործվում են. X-ի՝ A-ից 4 կգ, B-ից 2 կգ, Y-ի՝ A-ից 3 կգ, B-ից 5 կգ, Z-ի՝ A-ից 5 կգ, B-ից 2կգ: Նկարագրել ընկերության թողարկման հնարավորությունները:

9. R^n ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ: ՈՒՈՒՅԻԿ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

9.1. Թվային n –յակներ: $a_1, a_2, \dots, a_n$ իրական թվերի կարգավորված համախմբությունն անվանում են n –*չափանի կետ* (n -յակ), նշանակում են՝ $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$, համարելով, որ a_i -ն A -ի i -րդ *կոորդինատն* է: n -ի 2 և 3 արժեքների նման, ընդհանուր դեպքում ևս հարմար է n –չափանի վեկտորները կապել n –չափանի կետերի հետ՝ ցանկացած $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ և $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ կետերի համար A սկզբնակետով և B վերջնակետով վեկտոր համարելով $\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$ -ը, այդպիսով իսկ՝ յուրաքանչյուր վեկտորի համապատասխանեցնելով որոշակի թվային n -յակ: Մյուս կողմից, ամեն մի տրված $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n –յակի դեպքում, $O(0, 0, \dots, 0)$ սկզբնակետով և X վերջնակետով $\overline{OX} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ վեկտորին կհամապատասխանի հենց X n -յակը:

Երկու $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ և $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ վեկտորներ համարվում են *հավասար* (գրանցվում է՝ $\mathbf{a} = \mathbf{b}$), եթե $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$: Վեկտորների *գումարումը* և *թվով բազմապատկումը* սահմանվում են հետևյալ կերպ՝

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n), k \mathbf{a} = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n), k \in R:$$

$\theta = (0, 0, \dots, 0)$ -ն *զրոյական* վեկտորն է: Նշված գործողություններով բոլոր n -չափանի վեկտորների բազմությունն անվանում են n -*չափանի (թվաբանական) տարածություն* և այն նշանակում են R^n -ով:

Երկու $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ և $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ վեկտորների *սկալյար արտադրյալ* է կոչվում հետևյալ թիվը՝

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n:$$

Ոչ զրոյական $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ վեկտորների կազմած φ անկյունը որոշվում է

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

բանաձևից, որտեղ $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$ -ն $\mathbf{a}$ վեկտորի *մոդուլն* է:

Դիցուք տրված են $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ կետը և $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ոչ զրոյական վեկտորը: Այդ դեպքում այն $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ տեսքի n -յակների բազմությունը, որոնց համապատասխան $\mathbf{x} = \overline{OX}$ վեկտորները բավարարում են

$$x = a + t b, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

առնչությանը՝ անվանում են A կետով անցնող և b ուղղորդն ունեցող *ուղիղ*, իսկ

$$x = a + t b, \quad t \in [0, +\infty),$$

առնչությանը բավարարելու դեպքում՝ A սկզբնակետով և b ուղղորդն ունեցող *ճառագայթ*։

Դիցուք տրված են $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ և $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ n -չափանի կետերը։ A և B ծայրակետերով $[A, B]$ հատված կոչվում է այն բոլոր X կետերի բազմությունը, որոնց համապատասխան $x = \overline{OX}$ վեկտորները բավարարում են

$$x = sa + (1 - s)b, \quad 0 \leq s \leq 1$$

առնչությանը։

Թվային n -յակների բազմության մեջ *հիպերհարթություն* են անվանում բոլոր այն n -չափանի $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են որոշակի գծային հավասարման՝

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + D = 0,$$

որտեղ A_1 -ը, A_2 -ը, ..., A_n -ը և D -ն իրական թվեր են, ընդ որում՝ $A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 > 0$ ։ Այսպիսով, (թվային եռյակների) տարածության հիպերհարթությունը պարզապես համընկնում է (սովորական) հարթության հետ։ Հիպերհարթությունը թվային n -յակների բազմությունը բաժանում է երկու *կիսատարածությունների*, որոնցից մեկը բաղկացած է այն $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ կետերից, որոնց կոորդինատները բավարարում են

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + D \geq 0$$

գծային անհավասարմանը, իսկ մյուսը՝ այն կետերից, որոնց կոորդինատները բավարարում են

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + D \leq 0$$

անհավասարմանը։

n -չափանի կետերի G բազմությունը կոչվում է *ուռուցիկ*, եթե ցանկացած A և B երկու կետերի հետ միասին այն պարունակում է $[A, B]$ հատվածն ամբողջությամբ։ Թվային n -յակների ուռուցիկ բազմության օրինակ է հանդիսանում կիսատարածությունը և, քանի որ ուռուցիկ բազմությունների հատումը նույնպես ուռուցիկ բազմություն է, ապա ուռուցիկ են նաև կիսատարածությունների հատումից առաջացած բազմությունները, մասնավորապես՝ հիպերհարթությունը։ $x_1, x_2, \dots, x_n$ փոփոխականներից մի քանի գծային անհավասարումների համակար-

զը նկարագրում է համապատասխան կիսատարածությունների հատումից առաջացած M բազմությունը, որը կոչվում է *ուռուցիկ բազմանիստ տիրույթ*: M -ը կարող է լինել դատարկ, սահմանափակ, անսահմանափակ: Սահմանափակ, ոչ դատարկ ուռուցիկ բազմանիստ տիրույթը կոչվում է *ուռուցիկ բազմանիստ*:

M ուռուցիկ բազմանիստ տիրույթին պատկանող A կետը կոչվում է M տիրույթի *զագաթ*, եթե գոյություն չունեն M -ին պատկանող երկու տարբեր A_1 և A_2 կետեր այնպիսին, որ

$$a = sa_1 + (1 - s)a_2, \quad s \in (0, 1):$$

Եթե M բազմությունը տրվում է անհավասարումների համակարգով, ապա նրա բոլոր զագաթները կարելի է գտնել հետևյալ կերպ. ընտրում են որևէ n անհավասարումներ, որոնք փոխարինվում են հավասարություններով: Եթե ստացված հավասարումների համակարգն ունի միակ՝ $x_1, x_2, \dots, x_n$ լուծումը և $X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$, ապա X -ը M -ի զագաթ է: Փոփոխելով համակարգը, կարելի է ստանալ M -ի բոլոր զագաթները:

Եթե տրված են $A_1, A_2, \dots, A_k$ n -չափանի կետերը, ապա ամեն մի

$$a = s_1a_1 + s_2a_2 + \dots + s_ka_k$$

վեկտորով որոշվող A կետ, որտեղ $s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, \dots, s_k \geq 0, s_1 + s_2 + \dots + s_k = 1$, կոչվում է $A_1, A_2, \dots, A_k$ կետերի *ուռուցիկ կոմբինացիա*.

$A_1, A_2, \dots, A_k$ կետերի բոլոր ուռուցիկ կոմբինացիաների բազմությունը նշանակում են $\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$ -ով, որն անվանում են այդ կետերի համակարգի *ուռուցիկ թաղանթ*: Այն իրենից ներկայացնում է $A_1, A_2, \dots, A_k$ կետերը պարունակող փոքրագույն ուռուցիկ բազմությունը: Ընդհանրապես, n -չափանի կետերի G բազմության ուռուցիկ թաղանթն այդ բազմությունը պարունակող փոքրագույն ուռուցիկ բազմությունն է, այսինքն՝ G -ն ընդգրկող բոլոր ուռուցիկ բազմությունների հատումը:

9.1. Դիցուք $a = (1, 3, 0, 5)$, $b = (0, 0, 4, -5)$ և $c = (-1, 1, -1, 5)$: Հաշվել

- 1) $a + b$ 2) $a - c$ 3) $2a + 3b$ 4) $5c - 4b$ 5) $3a - 5b + 2c$:

9.2. Գտնել հետևյալ վեկտորների կազմած անկյունը.

- 1) $(1, 0, 0, 0)$ և $(0, 1, 0, 0)$ 2) $(1, 0, 0, 0)$ և $(1, 1, 1, 1)$
3) $(1, 0, 1, 0)$ և $(1, 1, 1, 1)$ 4) $(1, 0, 1, 0, 0)$ և $(0, 1, 0, 1, 1)$
5) $(1, 3, -7, 1, 4)$ և $(6, 0, -2, -20, 0)$ 6) $(1, 2, 3, 1, 1)$ և $(1, 0, 1, -1, 1)$
7) $(4, 2, 2, 1, 0)$ և $(3, -1, 3, -4, 1)$

9.3. λ -ի ո՞ր արժեքների դեպքում հետևյալ վեկտորները կլինեն ուղղահայաց.

- 1) $(2, 3, 5, \lambda)$ և $(4, 3, 2, \lambda^2)$ 2) $(1, 2, \lambda, -1, 0)$ և $(-1, \lambda, 1, 0, 3)$:

9.4. Տրված են $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ և $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ վեկտորները: Ապացուցել, որ $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$, որտեղ $\alpha + \beta = 1$, վեկտորին համապատասխանող X կետը գտնվում է $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ և $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ կետերով անցնող ուղղի վրա:

9.5. Տրված են $A(0, 0, 1, 1)$ և $B(1, 1, 2, 2)$ կետերը: Պարզել, թե $C_1(2, 2, 3, 3)$, $C_2(-1, -1, 0, 0)$, $C_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, $C_4(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $C_5(-2, -2, -1, -1)$ և $C_6(-1, -2, 1, 0)$ կետերից որո՞նք են պատկանում

1) AB ուղղին 2) AB ճառագայթին 3) BA ճառագայթին 4) $[A, B]$ հատվածին:

9.6. Գտնել այնպիսի c_2, c_3, c_4 և c_5 թվեր, որ $C(-2, c_2, c_3, c_4, c_5)$ կետը գտնվի $A(0, 2, 3, 4, 5)$ և $B(4, 2, -1, 6, 3)$ կետերով անցնող ուղղի վրա:

9.7. Որոշել c_2, c_3 և c_4 թվերն այնպես, որ $C(3, c_2, c_3, c_4)$, $A(4, 0, 5, 3)$ և $B(2, 6, 3, 5)$ կետերը գտնվեն մեկ ուղղի վրա:

9.8. Կազմել $A(2, 0, 0, 0)$, $B(0, 4, 0, 0)$, $C(0, 0, 1, 0)$ և $D(0, 0, 0, 5)$ կետերով անցնող հիպերհարթության հավասարումը:

9.9. Գտնել $A(0, 0, 0, 2)$ և $B(1, 1, 1, 0)$ կետերով անցնող ուղղի հատման կետը $2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 6 = 0$ հիպերհարթության հետ:

9.10. Գտնել $x_1 = 2t$, $x_2 = x_3 = 1 - t$, $x_4 = 1 + t$ հավասարություններով տրված ուղղի հատման կետը $A(1, 0, 0, 0)$, $B(0, 2, 0, 0)$, $C(0, 0, 3, 0)$ և $D(0, 0, 0, 4)$ կետերով անցնող հիպերհարթության հետ:

9.11. Կազմել $O(0, 0, 0, 0)$ կետով անցնող և $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + 7 = 0$ հիպերհարթության հետ ընդհանուր կետ չունեցող հիպերհարթության հավասարումը:

9.12. Նկարագրել հետևյալ համակարգին բավարարող կետերի բազմությունը.

$$1) \begin{cases} 0 \leq x_i \leq 1 \\ i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

9.13. Ելնելով ուռուցիկ բազմության սահմանումից ապացուցել, որ կոորդինատային հարթության ամեն մի քառորդն ուռուցիկ բազմություն է:

9.14. Ելնելով ուռուցիկ բազմության սահմանումից ապացուցել, որ կոորդինատային հարթության $|x| \leq 1$ շերտն ուռուցիկ բազմություն է:

9.15. Ելնելով ուռուցիկ բազմության սահմանումից ապացուցել, որ կոորդինատային հարթության առաջին և չորրորդ քառորդների կիսորդներով սահմանափակված և այդ քառորդներում գտնվող բազմությունն ուռուցիկ է:

9.16. Ելնելով ուռուցիկ բազմության սահմանումից ապացուցել, որ $x + y + z - 1 = 0$ հարթությունը կոորդինատային տարածության առաջին օկտանտից անջատում է ուռուցիկ բազմություն:

9.17. Պարզել, թե հետևյալ սահմանափակումներով տրված կետերի բազմություններից որոնք են ուռուցիկ.

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1^2 - x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^{10} + x_2^{10} \geq 4 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 - x_2^2 \leq 0 \\ x_2 - x_1^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 + 4x_2^2 \leq 0 \\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 = 15 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x_1^2 - x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ x_2 - x_1 = 1 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_1^2 + x_2^3 = 0 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 2 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 + (x_2 - 2)^2 = 1 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 : \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

9.18. Ընտրել λ -ն այնպես, որ հետևյալ սահմանափակումներով տրված կետերի բազմությունը լինի ուռուցիկ.

$$1) x_1^2 (\lambda^2 + 3\lambda + 2) - x_2 \geq 0$$

$$2) \begin{cases} \lambda(x_1 - x_2^2) = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$3) (\lambda^2 - 5\lambda + 6)(x_1^2 + 1) - (\lambda^2 + 2)x_2 \leq 0$$

$$4) \begin{cases} \lambda(x_1 - x_2^2) = 0 : \\ x_1 + x_2 = \lambda \end{cases}$$

9.19. Գտնել հետևյալ բազմության ուռուցիկ թաղանթը.

- $$\begin{array}{lll}
 1) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ -x_1^2 + x_2 = 0 \end{cases} & 2) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \\ x_1 x_2 = 0 \end{cases} & 3) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \\
 4) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1 \end{cases} & 5) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 - x_2 = 1 \end{cases} & 6) \begin{cases} -x_1^2 + x_2 \geq 0 \\ -|x_1| + x_2 \geq 0 \end{cases} \\
 7) \begin{cases} -x_1^4 + x_2 \geq 0 \\ -|x_1| + x_2 \leq 0 \end{cases} & 8) \begin{cases} -x_1^2 + x_2 \leq 0 \\ -|x_1| + x_2 \geq 0 \end{cases} & 9) \begin{cases} -x_1^4 + x_2 = 0 \\ -|x_1| + x_2 = 0 \end{cases} \\
 10) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0 \end{cases} & 11) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 4 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 2 \end{cases} \\
 12) x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 & 13) x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 \\
 14) x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 & 15) x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 1:
 \end{array}$$

9.20. Արտադրամասը թողարկում է երկու տեսակի ապրանք: Հայտնի է, որ արտադրամասն օրվա մեջ աշխատում է հնարավոր երեք տեխնոլոգիական ռեժիմներից միայն մեկով: Նշանակենք $\mathbf{a}^j = (a_1^j, a_2^j)$ -ով ($j = 1, 2, 3$) j -րդ տեխնոլոգիական ռեժիմով մեկ օրվա թողարկած ապրանքների հավաքածուն: Կարող է արդյոք T օրում արտադրամասը թողարկել $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ հավաքածուն, եթե

- $$\begin{array}{llll}
 1) \mathbf{a}^1 = (4, 3), & \mathbf{a}^2 = (3, 4), & \mathbf{a}^3 = (2, 6), & \mathbf{b} = (14, 23), \quad T = 5 \\
 2) \mathbf{a}^1 = (3, 4), & \mathbf{a}^2 = (2, 5), & \mathbf{a}^3 = (5, 2), & \mathbf{b} = (25, 24), \quad T = 7 \\
 3) \mathbf{a}^1 = (4, 6), & \mathbf{a}^2 = (2, 8), & \mathbf{a}^3 = (6, 2), & \mathbf{b} = (25, 31), \quad T = 6:
 \end{array}$$

10. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ: ԳԱՌԻՄԻ ԵՂԱՆԱԿԸ

10.1. Գծային հավասարումների համակարգեր:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (3)$$

տեսքի համակարգն անվանում են գծային հավասարումների համակարգ: Այն կազմված է m գծային հավասարումներից $x_1, x_2, \dots, x_n$ անհայտների նկատմամբ, իսկ a_{ij} -ն i -րդ հավասարման մեջ j -րդ

անհայտի գործակիցն է: Եթե $\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$, ապա

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ n -յական անվանում են (3) համակարգի լուծում, այսինքն անհայտների $x_j = \alpha_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) արժեքները բավարարում են (3) համակարգի հավասարումներից յուրաքանչյուրին: Համակարգը կոչվում է *համատեղելի*, եթե այն ունի գոնե մեկ լուծում: Հակառակ դեպքում այն կոչվում է *անհամատեղելի*: Համատեղելի համակարգը կոչվում է *որոշյալ*, եթե նրա լուծումը միակն է: Մեկից ավելի թվով լուծումներ ունեցող համակարգն անվանում են *անորոշ*: Հետազոտել կամ լուծել (3) համակարգը նշանակում է պատասխանել հետևյալ հարցերին. համակարգը համատեղելի է, թե անհամատեղելի և եթե համակարգը համատեղելի է, ապա պարզել այն որոշյալ է, թե՛ անորոշ: Եթե համակարգը որոշյալ է՝ գտնել նրա միակ լուծումը, իսկ եթե անորոշ է՝ նկարագրել նրա բոլոր լուծումները:

Միևնույն $x_1, x_2, \dots, x_n$ անհայտներով կազմված երկու համակարգեր կոչվում են *համարժեք*, եթե նրանցից մեկի ամեն մի լուծում հանդիսանում է լուծում նաև մյուսի համար: Այդ տեսակետից, լուծել գծային հավասարումների որևէ համակարգ, կնշանակի նաև լուծել նրան համարժեք ցանկացած այլ համակարգ:

Ակնհայտ է, որ եթե փոխենք համակարգի որևէ երկու հավասարումների տեղերը, կստանանք մի նոր համակարգ, որը համարժեք է տրվածին, կամ ասում են, որ դրանից համակարգը չի փոխվում: Պարզ է, որ եթե համակարգի որևէ հավասարման ձախ և աջ մասերը բազմապատկենք զրոյից տարբեր միևնույն թվով, ապա դրանից ևս համակարգը չի փոխվի: Դիտարկվող համակարգին համարժեք համակարգ կստացվի նաև այն դեպքում, երբ համակարգի որևէ հավասարման ձախ և աջ մասերից հանենք մեկ այլ հավասարման համապատասխան ձախ և աջ մասերը:

Եթե համակարգի որևէ հավասարման բոլոր անհայտների գործակիցները հավասար են զրո, իսկ նրա աջ մասը զրոյից տարբեր է, ապա համակարգն անհամատեղելի է: Եթե համակարգի որևէ հավասարման բոլոր անհայտների գործակիցները և աջ մասը զրոներ են, ապա համակարգից արտաքսելով այդ հավասարումը, կստանանք տրվածին համարժեք համակարգ:

Գծային հավասարումների համակարգերի հետազոտման ընթացքում երբեմն անհաժեշտություն է առաջանում վերահամարակալել անհայտներից մի քանիսի համարները: Նման դեպքերում, հետազոտումն ավարտելուց հետո վերաձգանգնում են անհայտների սկզբնական համարները:

10.2. Գաուսի եղանակը: Նկարագրենք գծային հավասարումների համակարգի լուծման Գաուսի (կամ անհայտների հաջորդական արտաքսման) եղանակը: Այն իրենից ներկայացնում է վերջավոր ալգորիթ, հիմնված վերը նկարագրված գործողությունների հաջորդական կիրառման վրա:

Եթե (Չ) համակարգի անհայտների բոլոր գործակիցները հավասարումներից յուրաքանչյուրում հավասար են զրո՝ $a_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$,

$j = 1, 2, \dots, n$, իսկ աջ մասերից գոնե մեկը զրո չէ՝ $\sum_{i=1}^m |b_i| > 0$, ապա հա-

մակարգն անհամատեղելի է:

Եթե (Յ) համակարգում $a_{ij} = 0$, $b_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, ապա կամայական $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ n -յակ հանդիսանում է այդ համակարգի լուծում:

Անցնենք այն դեպքի նկարագրմանը, երբ a_{ij} գործակիցներից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $a_{11} \neq 0$, քանի որ անհրաժեշտության դեպքում հնարավոր է փոխել հավասարումների տեղերը, կատարել անհայտների վերահամարակալում: Առաջին հավասարման ձախ և աջ մասերը բաժանենք

$$5) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 + 7x_4 - x_5 = 1 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} 3x + 2y - 2z = -2 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - 3y - 3z = 10 \\ 5x + 4y = -2 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases} \quad 10) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 5 \\ x + 3y + 5z - 2t = 3 \\ x + 5y - 9z + 8t = 1 \\ 5x + 18y + 4z + 5t = 12 \end{cases} \quad 12) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0 \end{cases}$$

11. ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ ԵՎ ՈՐՈՇԻՉՆԵՐ

11.1. Մատրիցներ: $m \times n$ չափսերի *մատրից* ասելով հասկանում են m տողերում և n սյունակներում (*սյուններում*) գրված թվերի հավաքածուն (օրինակ, գծային հավասարումների (Հ) համակարգի a_{ij} գործակիցներից կազմված աղյուսակը՝ այդ համակարգի *գլխավոր մատրիցը*)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

իսկ a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) թվերն անվանում են A մատրիցի *տարրեր* (*ելեմենտներ*): A -ի տողերի և սյունների տեղափոխումից ստացված

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

մատրիցն անվանում են A -ի *շրջված մատրից*. Եթե B -ն $n \times s$ չափսերի մատրից է՝

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix},$$

սահմանվում է $m \times s$ չափսերի $C = A \cdot B$ արտադրյալ մատրիցը, որի c_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, s$) տարրերը որոշվում են հետևյալ բանա-

ձևերով՝ $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$: Տեղի ունի $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ հավասարությունը:

U , V և W մատրիցների համար տեղի ունի $(U \cdot V) \cdot W = U \cdot (V \cdot W)$ հավասարությունը, եթե իհարկե համապատասխան արտադրյալները սահմանված են: Ոչոք չափսերի մատրիցն անվանում են n -րդ կարգի (քառակուսի կամ քառակուսային) մատրից:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

քառակուսի մատրիցն անվանում են n -րդ կարգի միավոր մատրից, քանի որ $A \cdot E = E \cdot A = A$ ամեն մի A n -րդ կարգի քառակուսի մատրիցի համար: Եթե $C \cdot A = A \cdot C = E$, ապա C -ն անվանում են A -ի *հակադարձ մատրից* և նշանակում են $C = A^{-1}$ (պարզ է, որ մաս $A = C^{-1}$): Մատրիցի հակադարձը (եթե այն գոյություն ունի) միակն է: Որպեսզի տրված A քառակուսի մատրիցն ունենա հակադարձ անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա տողերի (որպես n -չափանի վեկտորների) համակարգը լինի գծայնորեն անկախ:

11.2. Որոշիչներ: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ n -յակն անվանում են n -րդ կարգի *տեղափոխություն*, եթե $\alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ և $\alpha_i \neq \alpha_j$, երբ $1 \leq i < j \leq n$: Իրարից տարբեր n -րդ կարգի տեղափոխությունների քանակը $n!$ է: Եթե $1 \leq i < j \leq n$ և $\alpha_i > \alpha_j$, ապա ասում են, որ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ տեղափոխության մեջ առկա է *դիրքախախտում*: Տեղափոխությունը կոչվում է կենտ, եթե նրանում առկա դիրքախախտումների քանակը կենտ թիվ է: Հակառակ դեպքում տեղափոխությունը կոչվում է զույգ:

Տրված է A n -րդ կարգի քառակուսի մատրիցը: Ամեն մի $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ տեղափոխության համար կազմենք $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ արտադրյալը: Այն իրենից ներկայացնում է A մատրիցի n էլեմենտների

արտադրյալ՝ յուրաքանչյուր տողից և յուրաքանչյուր սյունից ճիշտ մեկական արտադրիչներով: Նշանակենք $F_{\alpha} = a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$, եթե α -ն զույգ տեղափոխություն է և $F_{\alpha} = -a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$, եթե α -ն կենտ տեղափոխություն է: Բոլոր՝ $n!$ հատ F_{α} -ների գումարն անվանում են տրված A մատրիցի որոշիչ և այն նշանակում են $\det(A)$, $|A|$ կամ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} : \quad (n)$$

Ելնելով որոշիչի (n) նշանակման մեջ համապատասխան մատրիցի փաստական առկայությունից, ընդունված է մատրիցի տող, սյունակ (սյուն), անկյունագիծ, տարր արտահայտություններին զուգահեռ օգտագործել նաև որոշիչի տող, սյունակ (սյուն), անկյունագիծ, տարր ձևերը:

Մասնավոր դեպքերում, երբ $n = 2$ և $n = 3$, ստանում ենք՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}:$$

Նշենք որոշիչի կարևոր հատկությունները:

1. $\det(A^T) = \det(A)$, այսինքն, մատրիցի շրջումից նրա որոշիչի արժեքը չի փոխվում: Դա նշանակում է, որ որոշիչի տողերի մասին ամեն մի պնդում ճիշտ կլինի նաև նրա սյունների համար:

2. Եթե A -ի որևէ տողի բոլոր էլեմենտները հավասար են զրո, ապա $\det(A) = 0$:

3. Եթե փոխենք A -ի որևէ երկու տողերի տեղերը՝ մնացած տողերը թողնելով անփոփոխ, կստանանք մի նոր մատրից, որի որոշիչը հավասար է A -ի որոշիչի հակադիրին:

4. Հավասար (համընկնող) տողեր պարունակող մատրիցի որոշիչի արժեքը հավասար է զրո:

5. Եթե A -ի որևէ տողի բոլոր էլեմենտները բազմապատկենք միևնույն c թվով, ապա կստանանք մի մատրից, որի որոշիչը հավասար է $c \det(A)$:

6. Համեմատական տողեր պարունակող մատրիցի որոշիչը հավասար է զրո:

7. Եթե A մատրիցի որևէ k -րդ տողի էլեմենտները ներկայացված են երկու գումարելիների տեսքով, ապա այդ մատրիցի որոշիչը հավասար է երկու առանձին մատրիցների որոշիչների գումարին, որոնցից մեկում k -րդ տողի էլեմենտները փոխարինված են համապատասխան առաջին գումարելիներով, մյուսում՝ երկրորդ, իսկ մնացած տողերը անփոփոխ են մնացել:

8. Եթե A մատրիցի որևէ տող հանդիսանում է նրա մնացած տողերի գծային կոմբինացիա, ապա A -ն վերասերված է՝ այսինքն $\det(A) = 0$:

9. Որպեսզի A մատրիցի որոշիչը լինի զրոյից տարբեր (A -ն լինի չվերասերված), անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա տողերը կազմեն գծայնորեն անկախ համակարգ:

Տրված A քառակուսի մատրիցով կազմված n -րդ կարգի որոշիչի a_{ij} էլեմենտի A_{ij} հանրահաշվական լրացում ասելով հասկանում են A -ի i -րդ տողի և j -րդ սյան արտաքսումներից ստացվող $(n - 1)$ -րդ կարգի որոշիչը, եթե $(i + j) -$ ն գույգ է և այդ որոշիչը՝ հակադիր նշանով, եթե $(i + j) -$ ն կենտ է:

$$10. \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} (= \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}), \text{ այսինքն, տրված որոշիչի արժեքը}$$

հավասար է նրա որևէ i -րդ տողի (j -րդ սյան) էլեմենտների և նրանց հանրահաշվական լրացումների ատաղորյալների գումարին:

11. Եթե որոշիչի նախորդ հատկությամբ տրված ներկայացման մեջ $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ ($a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$) էլեմենտները փոխարինենք $b_1, b_2, \dots, b_n$ թվերով, ապա կստացվի մի որոշիչ, որը միայն i -րդ տողով (j -րդ սյունով) է տարբերվում տրվածից (նրանք փոխարինված են $b_1, b_2, \dots, b_n$ թվերով):

12. Որոշիչի տրված տողի (սյան) էլեմենտների և մեկ այլ տողի (սյան) համապատասխան էլեմենտների հանրահաշվական լրացումների ար-

տաղրյալների գումարը հավասար է զրո՝ $\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0, k \neq i,$

($\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0, k \neq j$):

Եթե $\det(A) = d \neq 0$, ապա A -ի տողերի համակարգը գծայնորեն անկախ է, այսինքն A -ի հակադարձը գոյություն ունի և այն որոշվում է

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}$$

բանաձևով:

A և B n -րդ կարգի չվերասերված մատրիցների համար ճիշտ է $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ նույնությունը: Եթե $\det(A) \neq 0$, ապա $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$: Եթե $\det(A) \neq 0$ և $A \cdot C = A$, ապա $C = E$:

(Ո) որոշիչի k -րդ ($1 \leq k \leq n$) կարգի մինոր ասելով հասկանում ենք նրա որևէ k տողերի և k սյուների հատման տեղերում գտնվող k -րդ կարգի որոշիչը՝

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix},$$

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$:

Եթե $1 \leq k \leq n - 1$, ապա մնացած՝ $(n - k)$ տողերով և $(n - k)$ սյուներով կազմված մինորը՝ վերցրած պլյուս նշանով, եթե $(i_1 + i_2 +$

$+ \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k$)-ն զույգ է և միևնույն նշանով, եթե այն կենտ է, անվանում են տրված միևնորի հանրահաշվական լրացում: 10 –րդ հատկության ընդհանրացումը ձևակերպվում է *Լապլասի* թեորեմի միջոցով՝ որոշիչի արժեքը հավասար է նրա որևէ k տողերում ընդգրկված բոլոր k -րդ կարգի միևնորների և իրենց հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարին:

Լապլասի թեորեմի միջոցով ցույց է տրվում, որ A -ն B ու $-$ րդ կարգի քառակուսի մատրիցների համար տեղի ունի $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$ հավասարությունը:

11.3. Կրամերի կանոնը: Որոշիչի (10) – (12) հատկությունները կիրառելով (3) համակարգի մի մասնավոր դեպքի (երբ $m = n$ և այդ համակարգի գլխավոր մատրիցը չվերասերված է) հետազոտման համար, ստանում ենք, որ այն որոշյալ է, իսկ նրա միակ՝ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ լուծման կոորդինատները որոշվում են $\alpha_j = d_j / d$ *Կրամերի բանաձևերով*, որտեղ d -ն համակարգի գլխավոր մատրիցի որոշիչն է, իսկ d_j -ն նրանից տարբերվում է միայն j -րդ սյունով, որի էլեմենտները փոխարինված են համակարգի $b_1, b_2, \dots, b_n$ ազատ անդամներով, $j = 1, 2, \dots, n$:

Մասնավոր դեպքերում գծային հավասարումների համակարգերի հետազոտումը կարելի է բերել մատրիցային հավասարումների լուծմանը: Եթե A -ն $n \times n$ չափսերի չվերասերված, B -ն $n \times s$ չափսերի տրված մատրիցներ են և փնտրվում է $A \cdot X = B$ ՝

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

մատրիցային հավասարմանը բավարարող $n \times s$ չափսերի X մատրիցը, ապա այդ հավասարման երկու մասերն էլ ձախից բազմապատկելով A^{-1} հակադարձ մատրիցով, կստանանք՝ $X = A^{-1} \cdot B$: Երբ $s = 1$, ապա, ընդունելով $x_j = x_{j1}$, $b_j = b_{j1}$, $j = 1, 2, \dots, n$, նշանակումները, կհանգենք Կրամերի բանաձևերի մատրիցային գրառմանը:

11.1. Հաշվել հետևյալ տեղափոխության դիրքախախտումների քանակը:

$$1) (2, 3, 5, 4, 1) \quad 2) (6, 3, 1, 2, 5, 4) \quad 3) (7, 5, 6, 4, 1, 3, 2)$$

$$4) (1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8)$$

$$5) (1, 3, 5, \dots, 2n-1, 2, 4, \dots, 2n)$$

$$6) (2, 4, \dots, 2n, 1, 3, \dots, 2n-1)$$

$$7) (1, 4, 7, \dots, 3n-2, 2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n)$$

$$8) (1, 5, \dots, 4n-3, 2, 6, \dots, 4n-2, 3, 7, \dots, 4n-1, 4, 8, \dots, 4n):$$

11.2. Պարզել, թե հետևյալ արտադրյալներից որո՞նք են մասնակցում համապատասխան կարգի որոշիչներում և ի՞նչ նշանով.

$$1) a_{43} a_{21} a_{35} a_{12} a_{54}$$

$$2) a_{61} a_{23} a_{36} a_{12} a_{54}$$

$$3) a_{27} a_{36} a_{51} a_{74} a_{25} a_{43} a_{62}$$

$$4) a_{33} a_{16} a_{72} a_{27} a_{55} a_{61} a_{44} :$$

11.3. i, j -ն ընտրել այնպես, որ $a_{62} a_{15} a_{33} a_{j4} a_{46} a_{21}$ գումարելին համապատասխան 6 -րդ կարգի որոշիչում մասնակցի (-) նշանով:

11.4. i, j -ն ընտրել այնպես, որ $a_{47} a_{63} a_{1i} a_{55} a_{7j} a_{24} a_{31}$ գումարելին համապատասխան 7 -րդ կարգի որոշիչում մասնակցի (+) նշանով:

11.5. Հաշվել հետևյալ որոշիչը.

$$1) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix} \quad 4) \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \quad 6) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} \quad 7) \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$$

$$8) \begin{vmatrix} x & 2x+1 \\ x+1 & x+1 \\ -1 & x \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$9) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & x & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$10) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$11) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$12) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$13) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$14) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$15) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$16) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$17) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$18) \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$19) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$20) \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} :$$

11.6. Ապացուցել, որ մեկ ուղղի վրա չգտնվող $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, 3$, կետերով անցնող հարթության հավասարումն ունի

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

տեսքը:

11.7. Կազմել կոորդինատների սկզբնակետով և $A(3, -2, 1)$ ու $B(1, 4, 0)$ կետերով անցնող հարթության հավասարումը:

11.8. Կազմել $A(0, 0, 2)$, $B(3, 0, 5)$, $C(1, 1, 0)$ և $D(4, 1, 2)$ գագաթներով քառանիստի նիստերով անցնող հարթությունների հավասարումները:

11.9. Դիցուք $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$:

Գտնել $A + 3B^T - C$ մատրիցը:

11.10. Հաշվել մատրիցների արտադրյալը.

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

4) $(2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}^T$ 7) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$8) \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$9) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$10) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 11) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} :$$

11.11. Կատարել գործողությունները.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3 \quad 2) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}^4 \right)^T \quad 3) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^2 :$$

11.12. Համոզվել, որ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ և $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ առնչությունները տեղի ունեն այն և միայն այն դեպքում, երբ $A \cdot B = B \cdot A$: Կատարել համապատասխան հաշվարկները, երբ

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} :$$

11.13. Նախորդ օրինակի A մատրիցների և $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 5x + 7$ բազմանդամի համար գտնել $P(A)$ մատրիցները:

11.14. Հավասարումների համակարգը լուծել Կրամերի եղանակով.

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 = 4 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5x-4y=6 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 2x+3y-4z=-5 \\ 3x+y+z=3 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 2x-y+3z=9 \\ 3x-5y+2z=-4 \\ 4x-7y+z=5 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x-3y+4z=9 \\ -x-5y-7z=-4 \\ 3x+y+z=5 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x+y+z+t=3 \\ 2x-y-z-t=-1 \\ 3x+2y-6z+2t=0 \\ x-2y+4t=2 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x+3y+11y+5t=2 \\ x+y+5z+2t=1 \\ 2x+y+3z+2t=-3 \\ x+y+3z+4t=-3 \end{cases} \quad 10) \begin{cases} 2x+y+4z+8t=-1 \\ x+3y-6z+2t=3 \\ 3x-2y+2z-2t=8 \\ 2x-y+2z-2t=4 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 2x-5y+3z+t=5 \\ 3x-7y+3z-t=-1 \\ 5x-9y+6z+3t=7 \\ 4x-6y+3z+t=8 \end{cases}$$

11.15. Գտնել մատրիցի հակադարձը.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$6) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad 7) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad 8) \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad 10) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 11) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$12) \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} :$$

11.16. Լուծել մատրիցային հավասարումը.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \quad 2) X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$8) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$10) X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$11) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$12) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

$$13) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} :$$

11.17. Լուծել $A^2 X + BX + C = 0$ հավասարումը, որտեղ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} :$$

11.18. Հավասարումների համակարգը լուծել մատրիցային եղանակով.

$$1) \begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ x - 12y = 10 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -x + 3y = -4 \\ 5x = 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -y = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x - y + 3z = 9 \\ x - 5y + 3z = -4 \\ x - 7y + 4z = 5 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 6x - y + 8z = 1 \\ 5x - y + 6z = 0 \\ x - 3y + 4z = 2 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 2x - 7y + 3z = 2 \\ 3x - 9y + 4z = 1 \\ 5x + 2y - 3z = 0 \end{cases} :$$

12. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

12.1. Մատրիցի ռանգը: k -րդ կարգի մինորի հասկացությունը մտցվում է մաև ուղղանկյուն մատրիցների համար (ինչպես նախորդ կետում դա արվել էր որոշիչի, կամ՝ համապատասխան քառակուսի մատրիցի դեպքում): Մատրիցը կոչվում է *գրոյական*, եթե նրա բոլոր տարրերը 0 են: Ամեն մի տրված A ($m \times n$ չափսերի) ոչ գրոյական մատրիցի համար նրա գծայնորեն անկախ տողերի (սյուների) առավելագույն քանակը համընկնում է այդ մատրիցի գրոյից տարրեր մինորների կարգերից ամենաբարձրի հետ: Մատրիցը բնութագրող այդ մեծությունը նշանակում են $R(A)$ -ով և այն անվանում են A մատրիցի *ռանգ*: A գրոյական մատրիցի դեպքում համարվում է, որ $R(A) = 0$: Պարզ է, որ $0 \leq R(A) \leq \min\{m, n\}$: Ոչ գրոյական մատրիցի ռանգը հաշվելու համար նրա նկատմամբ կիրառում են, այսպես կոչված, տարրական գործողություններ. փոխում են մատրիցի որևէ երկու տողերի (սյուների) տեղերը, մատրիցի որևէ տողի (սյան) բոլոր էլեմենտները բազմապատկում են գրոյից տարրեր միևնույն թվով, մատրիցի որևէ տողին (սյանը) ավելացնում են մեկ այլ տողի (սյան) պատիկը, մատրիցից արտաքսում են նրա այն տողը (սյունը), որը բաղկացած է միայն զրոներից: Տարրական գործողությունները չեն փոխում մատրիցի ռանգը: Ամեն մի մատրից տարրական գործողությունների միջոցով բերվում է, այսպես կոչված, անկյունագծային տեսքի, երբ նրա համընկնող համարներով տողերի և սյուների հատման տեղերում՝ զլխավոր անկյունագծի վրա 1-եր են, իսկ մնացած՝ ոչ անկյունագծային բոլոր էլեմենտները զրոներ, այսինքն ստացվել է որևէ r -րդ կարգի միավոր մատրից: Դա կնշանակի, որ $R(A) = r$:

Մատրիցի ռանգը կարելի է գտնել մաև մեկ այլ՝ երիզող մինորների եղանակով: Դրա համար ընտրում են A մատրիցի գրոյից տարրեր k -րդ (պարզության համար առաջին կամ երկրորդ) կարգի որևէ մինոր: Նրան ավելացնում են մատրիցի մեկական մոր տող և մոր սյուն, ստանալով այդ մինորը երիզող՝ $(k+1)$ -րդ կարգի մինոր: Եթե ընտրված մինորի բոլոր $(k+1)$ -րդ կարգի երիզողների արժեքները լինեն զրոներ, ուրեմն $R(A) = k$: Հակառակ դեպքում ընտրվում է հանդիպած առաջին իսկ ոչ գրոյական $(k+1)$ -րդ կարգի մինորը և դիտարկվում են արդեն նրան երիզող՝ $(k+2)$ -րդ կարգի մինորները: Հաշվարկները շարունակում են

մինչև ամենաբարձր կարգի ոչ զրոյական (*հենքային*) մինորի հայտնաբերումը:

Եթե A -ն $m \times n$, իսկ B -ն $n \times s$ չափերի մատրիցներ են, ապա $R(A \cdot B) \leq \min\{R(A), R(B)\}$: Եթե C -ն n -րդ կարգի չվերասերված մատրից է, ապա $R(A \cdot C) = R(A)$:

12.2. Գծային հավասարումների համակարգի հետազոտումն ընդհանուր դեպքում: Այն տարվում է *Կրոնեկեր-Կապելլիի* թեորեմի հիման վրա, համաձայն որի (3) *համակարգը համատեղելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ* $R(A) = R(\bar{A})$, որտեղ A –ն համակարգի գլխավոր, իսկ

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

ընդլայնված մատրիցներն են:

Որոշյալ համակարգի (երբ $R(A) = n$) միակ լուծումն ստանալու համար նախ ընտրում են A մատրիցի (n -րդ կարգի) հենքային մինորը, համակարգում պահպանում են այդ մինորը կազմող տողերի համարներին համապատասխանող հավասարումները (մնացած հավասարումներն արտաքսվում են համակարգից) և, օրինակ, Կրամերի բանաձևերով կամ Գաուսի եղանակով գտնում են ստացված (քառակուսի, չվերասերված) գլխավոր մատրիցով համակարգի լուծումը:

Անորոշ համակարգի (երբ $R(\bar{A}) = R(A) \equiv r < n$) բոլոր լուծումները նկարագրելու շարադրանքի պարզեցման համար ենթադրենք, որ համակարգի գլխավոր մատրիցի հենքային մինորը գտնվում է նրա վերին ձախ անկյունում, այսինքն կազմված է մատրիցի առաջին r տողերով ու սյուներով (ընդհանուր դեպքում հարկավոր կլինեն փոխել համակարգի համապատասխան հավասարումների տեղերը և կատարել անհայտների պահաջվող վերահամարակալում): Համակարգից արտաքսվում են նրա $(r + 1)$ -ից մինչև m -րդ հավասարումները: Առաջին r (*հենքային*) անհայտները պարունակող անդամները թողնվում են հավասարումների ձախ մասերում, իսկ մնացած (*ազատ*) անհայտները տեղափոխվում են հավասարումների աջ մասերը՝

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + .a_{12}x_2 ++ a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} -- a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ++ a_{2n}x_n = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} -- a_{2n}x_n \\ \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 ++ a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} -- a_{rn}x_n \end{array} \right. \quad (1)$$

Այժմ, (3) համակարգի որևէ մասնավոր՝ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ լուծում ստանալու համար (1)-ում $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ անհայտներին կարելի է վերագրել կամայական $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$ (օրինակ՝ զրոյական, որին համապատասխան մասնավոր լուծումն անվանում են համակարգի *հենքային լուծում*) արժեքներ, իսկ $x_1, x_2, \dots, x_r$ անհայտների համապատասխան $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ արժեքները հաշվել ստացված համակարգից:

(3) համակարգի բոլոր լուծումներն ստանալու համար ուսումնասիրվում է (3)-ի համապատասխան

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

համասեռ հավասարումների համակարգը: Այն միշտ համատեղելի է, քանի որ $\theta = (0, 0, \dots, 0)$ n -յակը նրա լուծումն է: Եթե $r < n$, ապա համակարգն ունի նաև ոչ զրոյական լուծումներ, ընդ որում այդ լուծումների ամեն մի գծային կոմբինացիա ևս կհանդիսանա (2) համակարգի լուծում: (2) –ի լուծումների $\{e^1, e^2, \dots, e^k\}$ գծայնորեն անկախ համակարգն անվանում են նրա *լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ*, եթե (2) –ի ամեն մի լուծում ներկայացվում է $\{e^1, e^2, \dots, e^k\}$ -ի միջոցով: Երբ $r < n$, ապա (2) համասեռ համակարգի լուծումների ամեն մի ֆունդամենտալ համակարգ կազմված է ճիշտ $(n - r)$ լուծումներից: Այն գտնելու համար կազմում են (1)-ի համապատասխան համասեռ բերված համակարգը

12.1. Մատրիցի ռանգը հաշվել տարրական գործողությունների միջոցով.

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & -39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}$$

$$6) \begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix} \quad 7) \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}.$$

12.2. Մատրիցի ռանգը հաշվել երիզող մինորների եղանակով.

$$1) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & 0 & -9 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 22 \\ 4 & 5 & 3 & 42 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 3 & 2 & 1 & 47 \\ 1 & 3 & -1 & 18 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 & 11 \\ 5 & 1 & 6 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & -10 & 14 & 22 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

12.3. Հաշվել մատրիցի ռանգը.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -2 & 8 & 6 \\ -3 & -6 & 9 & -10 & -8 \\ 3 & 9 & -5 & 13 & 9 \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

$$6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}:$$

12.4. Հաշվել λ պարամետրից կախված մատրիցի ռանգը.

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}:$$

12.5. Հետազոտել համակարգի համատեղելիությունը.

$$1) \begin{cases} x+2y+z-t=1 \\ x+3y-z+2t=-4 \\ 2x+y-z+t=-1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+z+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x+7y+3z+t=5 \\ x+3y+5z-2t=3 \\ x+5y-9z+8t=1 \\ 5x+18y+4z+5t=12 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x+3y+4z-2t=2 \\ -3x-7y-8z+2t=-4 \\ 2x-y+3z=4 \\ 2x+4y+4z=2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x+2y-3z+t=1 \\ 3x-y+2z-t=-1 \\ 2x-2y+3z=5 \\ 2x+3y-2z+t=-3 \end{cases}$$

12.6. Գտնել համակարգի որևէ հենքային լուծում.

$$1) \begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3-x_4=-5 \\ x_1-2x_2+2x_3+x_4=8 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4x_1-2x_2+5x_3-2x_4=8 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+3x_4=5 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3-3x_4=-9 \\ x_1-4x_2-6x_3+7x_4=3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3+5x_4=6 \\ 2x_1+5x_2-2x_3+3x_4=4 \\ x_1-3x_2+6x_3+2x_4=2 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x_1-2x_2+5x_3-x_4=-6 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+2x_4=3 \\ 2x_1+7x_2-7x_3+3x_4=9 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 5x_1-3x_2+3x_3+2x_4=4 \\ 3x_1+5x_2-7x_3+8x_4=21 \\ 2x_1-4x_2+6x_3+2x_4=8 \end{cases}$$

12.7. Կառուցել հավասարումների համասեռ համակարգի լուծումների որևէ ֆունդամենտալ համակարգ:

$$1) \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

12.8. Գտնել համակարգի մեկ մասնավոր լուծում, կազմել համապատասխան համասեռ համակարգի լուծումների որևէ ֆունդամենտալ համակարգ և նրանց միջոցով ներկայացնել տրված համակարգի ընդհանուր լուծումը.

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -18 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 9 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} 2x - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases} \quad 10) \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases} :$$

13. ԳԾԱՅԻՆ ԵՎ ԷՎԿԼԻԴՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

13.1. Դիցուք L ոչ դատարկ բազմության ցանկացած երկու $x \in L$ և $y \in L$ տարրերի (էլեմենտների) համար որոշված է նրանց գումարը՝ $x + y \in L$ և ցանկացած $x \in L$ ու ամեն մի λ իրական թվի համար որոշված է $\lambda x \in L$ արտադրյալը: L բազմությունն անվանում են *գծային տարածություն*, եթե նրա տարրերի գումարումն ու իրական թվով բազմապատկումը բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$1^0. x + y = y + x$$

$$2^0. (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$3^0. \text{գոյություն ունի այնպիսի } \theta \in L \text{ (զրո տարր), որ } x + \theta = x, x \in L$$

4⁰. յուրաքանչյուր $x \in L$ համար գոյություն ունի $y \in L$ (հակադիր տարր) այնպիսին, որ $x + y = \theta$ (հետագայում գրվելու է $y = -x$, այսինքն՝ $x + (-x) = \theta$)

$$5^0. 1 \cdot x = x$$

$$6^0. \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$

$$7^0. (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$8^0. \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y:$$

R^n տարածությունում սահմանված գումարումն ու թվով բազմապատկումը բավարարում են 1⁰ – 8⁰ պայմաններին: Գծային տարածություն են հանդիսանում նաև այլ բնույթի տարրերի բազմություններ (բնական ձևով սահմանված գործողություններով). միայն մեկ՝ զրո էլեմենտից կազմված (տրիվիալ) գծային տարածությունը, թափառականության, հաջորդականությունների, զուգամետ հաջորդականությունների, $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված և անընդհատ ֆունկցիաների $C[a, b]$ բազմությունները, մինչև n - րդ կարգի բոլոր հանրահաշվական բազմանդամների բազմությունը: Միևնույն ժամանակ, ճիշտ n - րդ կարգի բոլոր բազմանդամների բազմությունը չի հանդիսանում գծային տարածություն, քանի որ երկու n - րդ կարգի բազմանդամների գումարը կարող է ունենալ n - ից ցածր կարգ:

13.2. Գծային անկախություն: Դիցուք L -ը գծային տարածություն է և $x_1, x_2, \dots, x_m \in L$: Եթե $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ իրական թվեր են և $u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$, ապա u -ն նույնպես պատկանում է L -ին և կոչվում է

$x_1, x_2, \dots, x_m$ տարրերի *գծային կոմբինացիա*: L գծային տարածության $x_1, x_2, \dots, x_m$ տարրերը կոչվում են *գծայնորեն անկախ*, եթե

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = \theta \quad (1)$$

հավասարությունը տեղի ունի միայն, երբ $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ և *գծայնորեն կախյալ*՝ հակառակ դեպքում, այսինքն, եթե (1) հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ նաև α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) թվերից գոնե մեկի զրոյից տարբեր լինելու դեպքում: L գծային տարածության $x_1, x_2, \dots, x_m$ տարրերը կլինեն *գծայնորեն կախյալ* այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանցից մեկը կարող է ներկայացվել մնացածների գծային կոմբինացիայի միջոցով ($m \geq 2$) կամ այդ համակարգը բաղկացած է միակ՝ θ տարրից ($m = 1$):

13.3. Գծային տարածության էլեմենտների համակարգի ռանգը. Գծային տարածության $\{a^1, a^2, \dots, a^m\}$ m տարրերի համակարգի *ռանգ* է կոչվում այդ համակարգի առավելագույն *գծայնորեն անկախ* տարրերի քանակը: Դիցուք R^n -ում տրված է m վեկտորներից կազմված՝ $a^1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), a^2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, a^m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ համակարգը: Այդ համակարգին համապատասխանության մեջ է դրվում

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

մատրիցը, որի k -րդ սյունը կազմված է a^k վեկտորի կոորդինատներով: $\{a^1, a^2, \dots, a^m\}$ վեկտորների համակարգի ռանգը հավասար է նրա համապատասխան A մատրիցի ռանգին, մասնավորապես՝ $\{a^1, a^2, \dots, a^m\}$ համակարգը *գծայնորեն անկախ* է, եթե $R(A) = m$:

Գծային տարածությունը կոչվում է *ո-չափանի*, եթե նրանում առկա է n էլեմենտներից բաղկացած որևէ *գծայնորեն անկախ* համակարգ, իսկ նրա n -ից ավելի թվով տարրերի ամեն մի համակարգ *գծայնորեն կախյալ* է: n -չափանի գծային տարածության *հենք (բազիս)* են անվանում այդ տարածության n տարրերից կազմված ամեն մի *գծայնորեն անկախ* համակարգը: Եթե $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ -ը տրված n -չափանի գծային

տարածության որևէ հենք է, իսկ x -ը՝ այդ տարածության որևէ էլեմենտ, ապա $\{e_1, e_2, \dots, e_n, x\}$ համակարգը գծայնորեն կախյալ է և, ուրեմն, միարժեքորեն կորոշվեն $x_1, x_2, \dots, x_n$ թվեր (գործակիցներ), այնպես, որ $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, այսինքն՝ x էլեմենտը կվերլուծվի ըստ $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ հենքի: Գծային տարածությունը կոչվում է *անվերջ չափանի*, եթե կամայական m բնական թվի համար նրանում առկա է իր որևէ m էլեմենտներից կազմված գծայնորեն անկախ համակարգ:

13.4. Անցումը նոր հենքի: Դիցուք n - չափանի գծային տարածությունում տրված են երկու հենքեր. հինը՝ $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ և նորը՝ $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$: Տրված են նոր հենքի տարրերի ներկայացումները հին հենքի էլեմենտների գծային կոմբինացիաների տեսքով՝

$$e_1^* = c_{11} e_1 + c_{12} e_2 + \dots + c_{1n} e_n$$

$$e_2^* = c_{21} e_1 + c_{22} e_2 + \dots + c_{2n} e_n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$e_n^* = c_{n1} e_1 + c_{n2} e_2 + \dots + c_{nn} e_n :$$

Այդ վերլուծությունների գործակիցները գրանցելով սյուների տեսքով, ստանում ենք

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

քառակուսի, չվերասերված մատրիցը, որն անվանում են *հին հենքից նորին անցնելու մատրից*: Եթե x էլեմենտի կոորդինատները հին՝ $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ հենքում $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ույակն է, իսկ նոր, $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ հենքում՝ $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ -ը, ապա հին և նոր կոորդինատների կապերը որոշվում են

$$x_1 = c_{11} y_1 + c_{21} y_2 + \dots + c_{n1} y_n$$

$$x_2 = c_{12} y_1 + c_{22} y_2 + \dots + c_{n2} y_n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_n = c_{1n} y_1 + c_{2n} y_2 + \dots + c_{nn} y_n$$

բանաձևերով, որոնց մատրիցային գրառումն ընդունում է

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

տեսքը:

13.5. Էվկլիդյան տարածություններ: E գծային տարածությունը կոչվում է *էվկլիդյան*, եթե նրա կամայական x և y տարրերին (վեկտորներին) որոշակի կանոնով համապատասխանության մեջ է դրվում իրական թիվ, որն անվանում են x և y վեկտորների *սկալյար արտադրյալ* և նշանակում են (x, y) , ընդ որում այդ կանոնը ցանկացած $x, y, z \in E$ և ցանկացած λ իրական թվի համար պետք է բավարարի հետևյալ պայմաններին (աքսիոմաներին)։

$$1 \quad (x, y) = (y, x)$$

$$2^\circ \quad (x, y + z) = (x, y) + (x, z)$$

$$3^\circ \quad (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

$$4^\circ \quad (x, x) > 0, \text{ եթե } x \neq \theta, \text{ և } (x, x) = 0, \text{ եթե } x = \theta:$$

9-րդ կետում սահմանված սկալյար արտադրյալը R^n -ում $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ բավարարում է $1^\circ - 4^\circ$ պայմաններին: $C[a, b]$ գծային տարածությունը դառնում է էվկլիդյան, եթե $x(t)$ և $y(t)$ անընդհատ ֆունկցիաների սկալյար արտադրյալը սահմանվի, օրինակ,

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

բանաձևով: Էվկլիդյան տարածության վեկտորի երկարությունը (*նորմը*) սահմանվում է $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ բանաձևով, մասնավորապես, եթե $x \in R^n$,

$$\text{ապա } \|x\| = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}:$$

Վեկտորի նորմն օժտված է հետևյալ հատկություններով.

$$1. \quad \|x\| = 0 \text{ այն և միայն այն դեպքում, երբ } x = \theta$$

$$2. \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \text{ որտեղ } \lambda - \text{ն իրական թիվ է}$$

3. $\|(x, y)\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունը)

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Մինկովսկու կամ եռանկյան անհավասարությունը):

Էվկլիդյան տարածության x և y երկու վեկտորները կոչվում են *օրթոգոնալ*, եթե $(x, y) = 0$: Մասնավորապես, զրոյական վեկտորն օրթոգոնալ է ցանկացած վեկտորի:

Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունից հետևում է, որ ցանկացած ոչ զրոյական x և y վեկտորների համար $-1 \leq \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} \leq 1$, հե-

տևաբար՝ $\frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$ հարաբերությունը կարելի է դիտարկել որպես որո-

շակի անկյան կոսինուս: x և y վեկտորների կազմած φ անկյունը որոշվում է $\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$ բանաձևով: Այսպիսով, եթե երկու ոչ զրոյա-

կան վեկտորներ օրթոգոնալ են, ապա նրանց կազմած անկյունը հավասար է $\pi/2$:

Վեկտորների $\{a^1, a^2, \dots, a^n\}$ համակարգը կոչվում է *օրթոգոնալ*, եթե նրա վեկտորները զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են, այսինքն $(a^i, a^k) = 0$, երբ $i \neq k$: Ոչ զրոյական վեկտորների օրթոգոնալ համակարգը գծայնորեն անկախ է: Էվկլիդյան տարածության a էլեմենտն անվանում են *նորմավորված* կամ *միավոր*, եթե $\|a\| = 1$: Եթե a -ն ոչ զրոյական վեկտոր է, ապա

$$a' = \frac{1}{\|a\|} a, \quad a'' = -\frac{1}{\|a\|} a$$

վեկտորներից յուրաքանչյուրը նորմավորված է (*վեկտորի նորմավորումը*): Նորմավորված վեկտորների $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ համակարգը կոչվում է *օրթոնորմավորված*, եթե այն օրթոգոնալ է, այսինքն

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

որտեղ $i, j = 1, 2, \dots, n$: n - չափանի էվկլիդյան տարածության բազիսը (հենքը) կոչվում է *օրթոնորմավորված*, եթե հենքային տարրերը կազ-

մում են օրթոնորմավորված համակարգ: Ամեն մի n -չափանի էվկլիդյան տարածության մեջ գոյություն ունի օրթոնորմավորված բազիս: Եթե $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ -ը n -չափանի էվկլիդյան տարածության որևէ բազիս է, ապա այդ տարածության օրթոնորմավորված բազիս կարելի է կառուցել հետևյալ ալգորիթմով (*Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը*): Քանի որ $x_1 \neq \theta$, վերցնենք

$$e_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1:$$

Փնտրենք e'_2 -ը՝ $e'_2 = x_2 - c_{21}e_1$ տեսքով, ընտրելով c_{21} -ն այնպես, որ e'_2 -ը լինի օրթոգոնալ e_1 -ին, այսինքն՝ $c_{21} = (x_2, e_1)$: Նկատի ունենալով, որ $e'_2 \neq \theta$, վերցնենք

$$e_2 = \frac{1}{\|e'_2\|} e'_2:$$

Այնուհետև փնտրենք e'_3 -ը՝ $e'_3 = x_3 - c_{31}e_1 - c_{32}e_2$ տեսքով, ընտրելով c_{31} -ն ու c_{32} -ն այնպես, որ $e'_3 \perp e_1$ և $e'_3 \perp e_2$, այսինքն՝ $c_{31} = (x_3, e_1)$, $c_{32} = (x_3, e_2)$: Քանի որ $e'_3 \neq \theta$, ընտրվում է

$$e_3 = \frac{1}{\|e'_3\|} e'_3:$$

Այսպես շարունակելով և ենթադրելով, որ $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ օրթոնորմավորված համակարգն արդեն կառուցված է փնտրենք e'_n -ը՝ $e'_n = x_n - c_{n1}e_1 - c_{n2}e_2 - \dots - c_{n,n-1}e_{n-1}$ տեսքով, ընտրելով c_{nk} գործակիցներն այնպես, որ e'_n -ը լինի օրթոգոնալ e_k -ին, այսինքն՝ $c_{nk} = (x_n, e_k)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$: Նկատի ունենալով, որ $e'_n \neq \theta$ (հակառակ դեպքում՝ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ համակարգը կլիներ գծայնորեն կախյալ), ստանում ենք

$$e_n = \frac{1}{\|e'_n\|} e'_n:$$

13.1. Ապացուցել, որ գծային տարածության զրո տարրը միակն է:

13.2. Ապացուցել, որ գծային տարածության ցանկացած էլեմենտի հակադիրը միակն է:

13.3. Ցույց տալ, որ գծային տարածության ցանկացած x էլեմենտի համար $0 \cdot x = \theta$:

13.4. Ցույց տալ, որ $(-1) \cdot x = -x$, որտեղ $(-x)$ -ը x -ի հակադիր էլեմենտն է:

13.5. Ցույց տալ, որ $\lambda \cdot \theta = \theta$:

13.6. Ապացուցել, որ $\lambda \cdot x = \theta$ հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $\lambda = 0$ կամ $x = \theta$:

13.7. Հանդիսանում է արդյոք գծային տարածություն բոլոր երկրորդ կարգի քառակուսի մատրիցների բազմությունը:

13.8. Հանդիսանում է արդյոք գծային տարածություն բոլոր հնարավոր բազմանդամների բազմությունը, որոնց կարգը մեծ չէ երեքից:

13.9. Ապացուցել, որ R^n -ը գծային տարածություն է:

13.10. Ցույց տալ, որ $C[a, b]$ բազմությունը գծային տարածություն է:

13.11. Ցույց տալ, որ θ էլեմենտը պարունակող վեկտորների ամեն մի համակարգ գծայնորեն կախյալ է:

13.12. Ապացուցել, որ եթե $\{a^1, a^2, \dots, a^n\}$ համակարգի որևէ k էլեմենտներ գծայնորեն կախյալ են, ապա ամբողջ համակարգը ևս գծայնորեն կախյալ է:

13.13. Ապացուցել, որ եթե $\{a^1, a^2, \dots, a^n\}$ գծայնորեն անկախ համակարգից արտաքսվեն նրա որևէ k ($k < n$) էլեմենտներ, ապա մնացած վեկտորների խամակարգը ևս կլինի գծայնորեն անկախ:

13.14. Ապացուցել, որ $C[a, b]$ գծային տարածությունն անվերջ չափանի է:

13.15. Կառուցել R^n տարածության որևէ հենք:

13.16. Դիցուք M -ը $x = (x_1, x_2, 0, 0)$ տեսքի ($x_j \in R, j = 1, 2$) բոլոր հնարավոր կարգավորված քառյակների բազմությունն է: Հանդիսանում է այն գծային տարածություն, եթե ընդունենք $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0, 0)$, $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0, 0)$:

13.17. Դիցուք M -ը $x = (x_1, x_2, 1, 1)$ տեսքի ($x_j \in R, j = 1, 2$) բոլոր հնարավոր կարգավորված քառյակների բազմությունն է: Հանդիսանում է այն գծային տարածություն, եթե այնտեղ գործողությունները սահմանվեն ինչպես R^4 -ում:

13.18. Ցույց տալ, որ մինչև n -րդ կարգի բոլոր հանրահաշվական բազմանդամների բազմությունը գծային տարածություն է:

13.19. Դիցուք M -ը $x = (x_1, x_2)$ տեսքի ($x_j \in R, x_j > 0, j = 1, 2$) բոլոր հնարավոր կարգավորված զույգերի բազմությունն է: Հանդիսանում է այն գծային տարածություն, եթե ընդունենք

$$x + y = (x_1 y_1, x_2 y_2), \quad \lambda x = (x_1^\lambda, x_2^\lambda):$$

13.20. Կարո՞ղ է արդյոք գծային տարածությունը բաղկացած լինել
1) մեկ էլեմենտից 2) երկու տարբեր էլեմենտներից:

13.21. Դիցուք որևէ գծային տարածությունից արտաքսված է նրա որևէ x տարրը: Կհանդիսանա՞ր արդյոք գծային տարածություն ստացված բազմությունը:

13.22. Դիցուք որևէ գծային տարածությունից արտաքսված է նրա տարրերի որևէ անվերջ ենթաբազմություն: Կարո՞ղ է արդյոք ստացվել գծային տարածություն: Բերել համապատասխան օրինակներ:

13.23. Ընտրելով համապատասխան գործողությունները, ցույց տալ, որ $m \times n$ չափսերի բոլոր մատրիցների բազմությունը գծային տարածություն է:

13.24. Հանդիսանում է արդյոք գծային տարածություն $O(0, 0, 0)$ սկզբնակետով և առաջին օկտանտում գտնվող բոլոր երկրաչափական վեկտորների բազմությունը:

13.25. Հանդիսանում է արդյոք գծային տարածություն

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

գծային հավասարումների համասեռ համակարգի բոլոր լուծումների բազմությունը:

13.26. Ապացուցել, որ x , y և z համահարթ վեկտորները գծայնորեն կախյալ են, իսկ x , y և z ոչ համահարթ վեկտորները՝ գծայնորեն անկախ:

13.27. Ո՞ր դեպքում 13.19 խնդրում սահմանված տարածության երկու վեկտորներ կլինեն գծայնորեն կախյալ:

13.28. Ապացուցել, որ R^3 -ում կամայական չորս վեկտորներից կազմված համակարգը գծայնորեն կախյալ է:

13.29. Պարզել, գծայնորեն կախյալ է արդյոք վեկտորների հետևյալ համակարգը.

1) $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (3, 6, 7)$

2) $a_1 = (4, -2, 6)$, $a_2 = (6, -3, 9)$

3) $a_1 = (2, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 5)$

4) $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 1, 2)$, $a_3 = (2, 1, 2)$

5) $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$

6) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1, 2)$, $a_3 = (3, 1, 3, 1)$, $a_4 = (0, 1, 1, 0)$

7) $a_1 = (4, -5, 2, 6)$, $a_2 = (2, -2, 1, 3)$, $a_3 = (6, -3, 3, 9)$, $a_4 = (4, -1, 5, 6)$:

13.30. Վերլուծել $c = (2, 4, 4)$ վեկտորն ըստ նախորդ խնդրի (1) համակարգի:

13.31. Յուլյոց տալ, որ երկրորդից ոչ բարձր կարգի բոլոր բազմանդամների գծային տարածության մեջ $P_1 = 1 + 2t + 3t^2$, $P_2 = 2 + 3t + 4t^2$, $P_3 = 3 + 5t + 7t^2$ տարրերը գծայնորեն կախյալ են:

13.32. Գտնել λ պարամետրի բոլոր այն արժեքները, որոնց համար $b = (7, -2, \lambda)$ վեկտորը գծայնորեն արտահայտվում է $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$, համակարգի միջոցով:

13.33. Ապացուցել, որ երկրորդ կարգի բոլոր մատրիցների տարածության մեջ

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

մատրիցները կազմում են բազիս:

13.34. Ապացուցել, որ 10.19 խնդրում սահմանված տարածության մեջ $e_1 = (1, 10)$, $e_2 = (10, 1)$ վեկտորները կազմում են բազիս: Վերլուծել ըստ նրա $x = (2, 3)$ վեկտորը:

13.35. Ապացուցել, որ R^n տարածությունում բազիս է հանդիսանում վեկտորների հետևյալ համակարգը՝

$$e_1 = (1, 1, 1, \dots, 1, 1), e_2 = (0, 1, 1, \dots, 1, 1), \dots, e_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 1, 1), e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1):$$

13.36. Հնարավոր է արդյոք հիմն և նոր բազիսների միջև հետևյալ կախվածությունը. $e_1^* = e_2 - e_3$, $e_2^* = e_3 - e_1$, $e_3^* = e_1 - e_2$:

13.37. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ բազիսում տրված $x = 2(e_1 + e_2 + \dots + e_n)$ վեկտորը վերլուծել ըստ $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ բազիսի, եթե

$$e_j^* = e_j + e_{j+1} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \quad e_n^* = e_n + e_1:$$

13.38. Վերլուծել x -ն ըստ $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ բազիսի, եթե հայտնի է, որ

$$x = 3e_1 - 2e_2 + e_3, \quad e_1^* = -3e_1 + e_2 + e_3, \quad e_2^* = 2e_1 - 4e_2 + e_3, \\ e_3^* = e_1 + 3e_2 - 5e_3:$$

13.39. Օxy կոորդինատային համակարգը պտտած է իր սկզբնակետի շուրջը (ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ) α անկյան չափով: Վերլուծել $a = (x, y)$ վեկտորն ըստ կոորդինատների նոր համակարգի, եթե $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$:

13.40. Դիցուք $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ բազիսում տրված է $x = (1, 1, 1, 1)$ վեկտորը: Վերլուծել x -ն ըստ $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$ բազիսի, եթե նոր բազիսի անցումը տրվում է

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

մատրիցով:

13.41. Դիցուք $x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \dots + \zeta_n e_n$ և $e_k^* = k e_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$): Գտնել x վեկտորի $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ բազիսում $\zeta'_1, \zeta'_2, \dots, \zeta'_n$ կոորդինատների և $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ -երի միջև կապն արտահայտող բանաձևերը:

13.42. Կհանդիսանա՞ր արդյոք էվկլիդյան տարածություն բոլոր երկրաչափական վեկտորների բազմությունը, եթե սկալյար արտադրյալը սահմանենք որպես վեկտորների երկարությունների արտադրյալ:

13.43. Կհանդիսանա՞ր արդյոք էվկլիդյան տարածություն բոլոր երկրաչափական վեկտորների բազմությունը, եթե սկալյար արտադրյալը սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$(a, b) = |a| \Gamma_a b:$$

13.44. M-ը $x = (x_1, x_2)$ տեսքի ($x_j \in R, x_j > 0, j = 1, 2$) բոլոր հնարավոր կարգավորված զույգերի գծային տարածությունն է, որտեղ $x + y = (x_1 y_1, x_2 y_2)$, $\lambda x = (x_1^\lambda, x_2^\lambda)$: Կհանդիսանա՞ այն էվկլիդյան տարածություն, եթե $(x, y) = \ln x_1 \ln y_1 + \ln x_2 \ln y_2$:

13.45. Գտնել միավոր երկարության վեկտոր, որը լինի օրթոգոնալ հետևյալ վեկտորներին.

- 1) $x = (1, -2, 1)$, $y = (2, -1, -1)$
- 2) $x = (3, 6, 1)$, $y = (-4, -2, 1)$
- 3) $x = (6, 6, 3)$, $y = (-4, -1, 1)$
- 4) $x = (1, -10, 2)$, $y = (2, -5, -2)$
- 5) $x = (3, 6, 3)$, $y = (-2, -1, 1)$
- 6) $x = (-5, 10, 3)$, $y = (2, -1, -3)$
- 7) $x = (3, -1, -1, -1)$, $y = (1, -3, 1, 1)$, $z = (3, 1, -1, -3)$:

13.46. Օրթոնորմավորել հետևյալ բազիսը.

- 1) $x = (1, 0, 1)$, $y = (1, 1, 2)$, $z = (2, 1, 2)$
- 2) $x = (1, 2, 1)$, $y = (1, 1, 0)$, $z = (2, 2, 1)$
- 3) $x = (3, 4, 3)$, $y = (3, 1, 0)$, $z = (6, 4, 3)$
- 4) $x = (2, -2, 2)$, $y = (2, -1, 0)$, $z = (4, -2, 2)$
- 5) $x = (1, 2, 3)$, $y = (3, 0, 4)$, $z = (1, 0, 1)$
- 6) $x = (1, 3, 5)$, $y = (0, 1, 0)$, $z = (2, 2, 4)$
- 7) $x = (1, 0, 2)$, $y = (3, 1, 2)$, $z = (5, 0, 4)$:
- 8) $x = (-1, 6, 1)$, $y = (-1, 3, 0)$, $z = (-2, 6, 1)$:

14. ԳԾԱՅԻՆ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ՔԱՌԱԿՈՒՄԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐ

14.1. Եթե L գծային տարածության ցանկացած u վեկտորին որոշակի կանոնով համապատասխանության մեջ է դրված այդ նույն տարածության միակ v վեկտորը, ապա ասում են, որ տրված է L գծային տարածության φ ձևափոխություն (օպերատոր) և գրանցում են $v = \varphi(u)$, կամ $v = \varphi u$: v վեկտորը կոչվում է u վեկտորի *պատկեր*, իսկ u -ն՝ v -ի *նախապատկեր*. L գծային տարածության φ ձևափոխությունը կոչվում է *գծային ձևափոխություն* (*գծային օպերատոր*), եթե ցանկացած $u_1, u_2, u \in L$ և ցանկացած իրական λ թվի համար կատարված են

$$1^\circ. \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

$$2^\circ. \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$$

պայմանները: Դիցուք n -չափանի L գծային տարածության φ ձևափոխությունը արտապատկերում է հենքային $e_1, e_2, \dots, e_n$ վեկտորները համապատասխանաբար $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ վեկտորներին, այսինքն՝

$$e'_1 = \varphi(e_1), e'_2 = \varphi(e_2), \dots, e'_n = \varphi(e_n):$$

Վերջին վեկտորներից յուրաքանչյուրը վերլուծվում է ըստ $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ հենքի՝

$$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n$$

$$e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n$$

.....

$$e'_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n:$$

Դուրս գրելով e'_k վեկտորի կոորդինատները k -րդ սյան տեսքով ($k = 1, 2, \dots, n$), ստանում ենք

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

մատրիցը, որը կոչվում է φ ձևափոխության մատրից $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ բազիսում: Այսպիսով, ամեն մի գծային ձևափոխության տրված բազիսում համապատասխանում է որոշակի մատրից: Ճիշտ է նաև հակառակը. ցանկացած n -րդ կարգի B մատրիցի համապատասխանում է n -չափանի տարածության որոշակի գծային ձևափոխություն, որի մատրիցը տրված բազիսում B -ն է: $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ բազիսում u վեկտորի և նրա $v = \varphi(u)$ պատկերի միջև կապը գրվում է

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

մատրիցային հավասարումով, որտեղ $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$, իսկ A -ն φ ձևափոխության մատրիցն է: Եթե φ ձևափոխությանը $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ հին բազիսում համապատասխանում է A մատրիցը, իսկ $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ նոր բազիսում՝ A^* մատրիցը, ապա այդ մատրիցները կոչվում են *միմյանը* և միմյանց հետ կապված են $A^* = C^{-1} \cdot A \cdot C$ առնչությամբ, որտեղ C -ն հին բազիսից նորին անցնելու մատրիցն է:

14.2. Գծային ձևափոխության սեփական վեկտորներն ու սեփական արժեքները: λ թիվը կոչվում է φ ձևափոխության *սեփական արժեք*, եթե գոյություն ունի ոչ զրոյական u վեկտոր այնպիսին, որ

$$\varphi(u) = \lambda u, \quad (1)$$

և այդ դեպքում u վեկտորը կոչվում է φ ձևափոխության *սեփական վեկտոր*: Եթե φ ձևափոխությանը որևէ $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ բազիսում համապատասխանում է A մատրիցը և $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, ապա (1) հավասարումը կգրվի

$$(A - \lambda E) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

մատրիցային տեսքով: Այն իրենից ներկայացնում է գծային հավասարումների համասեռ համակարգ, որն ունի ոչ զրոյական լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ համակարգի գլխավոր մատրիցի որոշիչը՝

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0:$$

λ -ի նկատմամբ n -րդ կարգի բազմանդամ հանդիսացող $|A - \lambda E|$ որոշիչը կոչվում է φ ձևափոխության կամ A մատրիցի *բնութագրիչ բազմանդամ*: Այն կախված չէ ընտրված բազիսից, քանի որ նման մատրիցների բնութագրիչ բազմանդամները համընկնում են: Եթե φ գծային ձևափոխությունն ունի զույգ առ զույգ իրարից տարբեր $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ սեփական արժեքներ, ապա նրանց համապատասխանող $u_1, u_2, \dots, u_n$ սեփական վեկտորները գծայնորեն անկախ են, և φ ձևափոխության A մատրիցը $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ բազիսում ստանում է առավել պարզ՝

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & 0 \\ \dots & \dots & & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

անկյունագծային տեսք:

14.3. Քառակուսային ձևեր: Երկրորդ կարգի կորերի ($n = 2$) և երկրորդ կարգի մակերևույթների ($n = 3$) ընդհանրացումը բերում է n փոփոխականներից քառակուսային ձևի հասկացությանը: $x_1, x_2, \dots, x_n$ փոփոխականներից *քառակուսային ձև* անվանում են

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (2)$$

արտահայտությունը, որտեղ (ընդհանրությունը չխախտելով) դրվում են $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) համաչափության պայմանները: Օգտագործելով

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

նշանակումները, (2) քառակուսային ձևը կարելի է գրել $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T \cdot A \cdot x$ մատրիցային տեսքով: A սիմետրիկ ($A^T = A$) մատրիցն անվանում են (2) *քառակուսային ձևի մատրից*, իսկ $R(A)$ -ն՝ այդ քառակուսային ձևի ռանգ: Եթե $R(A) = n$, ապա (2) -ն անվանում են չվերասերված քառակուսային ձև: Եթե Q -ն n -րդ կարգի չվերասերված մատրից է և կատարված է փոփոխականների $x = Qy$ գծային ձևափոխությունը, ապա նոր՝ $y_1, y_2, \dots, y_n$ փոփոխականների միջոցով (2)-ը բերվում է $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(y_1, y_2, \dots, y_n) = y^T \cdot B \cdot y$ տեսքի, որտեղ $B = Q^T \cdot A \cdot Q$, ընդ որում՝ $R(B) = R(A)$: Մասնավորաբար, եթե $b_{ij} = 0$, երբ $i \neq j$, ապա ասում են, որ f քառակուսային ձևը Q չվերասերված գծային ձևափոխությամբ բերվել է g *կանոնական տեսքի* (իսկ A մատրիցը՝ B անկյունագծային տեսքի): Տրված քառակուսային ձևը կանոնական տեսքի կարելի է բերել տարբեր եղանակներով, ավելին, նրա կանոնական տեսքը միակը չէ: Եթե B -ն և C -ն (2) քառակուսային ձևի երկու տարբեր կանոնական տեսքերի համապատասխան (անկյունագծային) մատրիցներն են, ապա բացի այն, որ $R(B) = R(C)$, համընկնում են նաև B և C մատրիցների դրական (ուրեմն՝ և բացասական) էլեմենտների քանակները (*իներցիայի օրենքը*): A (ոչ զրոյական) մատրիցով քառակուսային ձևը կարելի է բերել կանոնական տեսքի, օրինակ, փոփոխա-

կանների քառակուսիների հաջորդական անջատման միջոցով: Եթե մատրիցի a_{ii} անկյունագծային էլեմենտներից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, օրինակ, $a_{11} \neq 0$, ապա կատարելով $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$, $y_2 = x_2$, ..., $y_n = x_n$ գծային ձևափոխության հակադարձ ձևափոխությունը ստանում են

$$h(y_2, \dots, y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{a_{11}} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2,$$

արդեն $n - 1$ փոփոխականներով h քառակուսային ձևը (անջատվել է առաջին փոփոխականի քառակուսին): Եթե մատրիցի բոլոր անկյունագծային էլեմենտները զրոներ են, և, օրինակ $a_{12} \neq 0$, ապա նախ կատարվում է օժանդակ քայլ՝ $x_1 = z_1 - z_2$, $x_2 = z_1 + z_2$, $x_3 = z_3$, ..., $x_n = z_n$ գծային ձևափոխությունը, ստանալով z_1^2 -ու ոչ զրոյական գործակից, այնուհետև՝ արդեն նկարագրված ձևով, անջատվում է այդ փոփոխականի քառակուսին: Նման եղանակով, հաջորդաբար անջատելով նաև մյուս փոփոխականների քառակուսիները, ստանում են քառակուսային ձևի կանոնական տեսքը: (2) քառակուսային ձևը (նրա A մատրիցը) կոչվում է *դրական որոշյալ*, եթե $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ ամեն մի ոչ զրոյական x -ի համար: Դրական որոշյալ քառակուսային ձևը չվերասերված է, իսկ նրա կանոնական տեսքի համապատասխան մատրիցի բոլոր անկյունագծային էլեմենտները դրական թվեր են: Որպեսզի քառակուսային ձևը լինի դրական որոշյալ անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա A մատրիցի հետևյալ՝

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(զլխավոր) միներները լինեն դրական (*Միլվեստրի պայմանը*): Եթե $f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ կամայական ոչ զրոյական x -ի համար՝ այսինքն $(-f)$ -ը դրական որոշյալ է, ապա f -ն անվանում են *բացասական որոշյալ* քառակուսային ձև: Այդ դեպքում տեղի ունեն $\Delta_1 < 0, \Delta_k \Delta_{k+1} < 0, k = 1, 2, \dots, n - 1$, պայմանները:

14.1. Յույց տալ, որ $\varphi(u) = \alpha u, \alpha \in \mathbb{R}$, ձևափոխությունը գծային է:

14.2. Դիցուք $\varphi(u) = u + u_0, u, u_0 \in L (u_0 \neq \theta)$: Գծային է արդյոք սահմանված ձևափոխությունը:

14.3. Դիցուք տրված է երկրաչափական վեկտորների գծային տարածությունը: φ ձևափոխությունը յուրաքանչյուր վեկտորի համապատասխանեցնում է Ox առանցքի վրա իր բաղադրիչը: Հանդիսանում է արդյոք φ -ն գծային ձևափոխություն:

14.4. Դիցուք u -ն երկրաչափական վեկտոր է: Գծային է արդյոք $\varphi(u) = |u| \cdot u$ ձևափոխությունը:

14.5. Դիցուք $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ -ի համար $\varphi(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = (u_2, u_1, u_3, u_4, u_5)$: Գծային է արդյոք այդ ձևափոխությունը $\mathbb{R}^5$ -ում:

14.6. φ -ն գծային ձևափոխություն է: Համոզվել, որ $\psi(u) = \varphi(u) - 2u$ ձևափոխությունը նույնպես գծային է:

14.7. Oxy կոորդինատային հարթությունը պտտած է իր սկզբնակետի շուրջը (ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ). α անկյան չափով: Գծային է արդյոք այդ ձևափոխությունը:

14.8. Գտնել ε նույնական ձևափոխության մատրիցը $\mathbb{R}^n$ -ում:

14.9. Գտնել $\varphi x = \alpha x$ ձևափոխության մատրիցը $\mathbb{R}^n$ -ում:

14.10. R^4 -ում տրված է $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ բազիսը և $\varphi e_1 = e_3 + e_4$,
 $\varphi e_2 = e_1 + e_4$, $\varphi e_3 = e_4 + e_2$, $\varphi e_4 = e_2 + e_3$ հավասարություններով
 որոշվող φ գծային ձևափոխությունը: Գտնել φ -ն, եթե
 $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$:

14.11. φ գծային ձևափոխությունը կայանում է նրանում, որ Oxy
 կոորդինատային հարթությունը պատում է իր սկզբնականի շուրջը
 (ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ) α անկյան չափով: Գտնել այդ
 ձևափոխության մատրիցը:

14.12. Դիցուք u -ն $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ բազիսում ներկայացվում է
 $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$ տեսքով: Համոզվել, որ $\varphi u = x_2 e_1 + x_3 e_2 + x_4 e_3 + x_1 e_4$
 ձևափոխությունը գծային է և գտնել նրա մատրիցը:

14.13. φ գծային ձևափոխությունը կայանում է նրանում, որ Oxy
 կոորդինատային հարթությունը պատում է իր սկզբնականի շուրջը
 (ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ) α անկյան չափով: Գտնել
 $\varphi^2 + \sqrt{2}\varphi + \varepsilon$ և $\varphi + \varphi^{-1}$ ձևափոխությունների մատրիցները, եթե ε -ը
 նույնական ձևափոխությունն է:

14.14. R^3 -ում տրված են $\varphi(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$ և
 $\psi(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$ ձևափոխությունները: Գտնել $\varphi\psi$ և
 $\psi\varphi$ ձևափոխությունների մատրիցները:

14.15. Դիցուք երկչափ վեկտորների տարածությունում սահմանված
 են φ և ψ ձևափոխությունները: Գտնել $\varphi\psi$ և $\psi\varphi$ ձևափոխություննե-
 րի մատրիցները, եթե

1) φ -ն յուրաքանչյուր վեկտորի համապատասխանեցնում է նրա
 բաղադրիչը- Ox առանցքի վրա

2) ψ -ն ամեն մի վեկտոր հայելային արտապատկերում է $y=x$ ուղղի
 նկատմամբ:

14.16. R^2 -ում տրված է $\varphi(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$ գծային ձևափոխությունը: Գտնել φ^{-1} -ը:

14.17. φ գծային ձևափոխությունը կայանում է նրանում, որ Oxy կոորդինատային հարթությունը պտտում է իր սկզբնականի շուրջը (ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ) $\alpha = 45^\circ$ անկյան չափով: Գտնել հակադարձ ձևափոխության մատրիցը:

14.18. λ պարամետրի n -ր արժեքի դեպքում R^3 -ում որոշված $\varphi(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y + \lambda z)$ գծային ձևափոխության հակադարձը գոյություն չունի:

14.19. Գտնել այն գծային ձևափոխությունը, որը $u_1 = (2, 0, 3)$, $u_2 = (4, 1, 5)$, $u_3 = (3, 1, 2)$ վեկտորներին համապատասխանեցնում է $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (4, 5, -2)$, $v_3 = (1, -1, 1)$ վեկտորները:

14.20. Գտնել գծային ձևափոխության սեփական արժեքներն ու սեփական վեկտորները, եթե այն տրվում է հետևյալ մատրիցով

$$1) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad 7) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 8) \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 10) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 11) \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

14.21. φ գծային ձևափոխությունը կայանում է նրանում, որ Oxy կոորդինատային համակարգը պտտում է իր սկզբնականի շուրջը

(Ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ) α անկյան չափով: Ի՞նչ կարելի է ասել նրա սեփական արժեքների մասին:

14.22. Գիտենալով φ գծային ձևափոխության սեփական արժեքները գտնել նրա հակադարձ φ^{-1} ձևափոխության սեփական արժեքները:

14.23. Վարժություն 14.20. -ի 3), 5), 6) մատրիցները բերել անկյունագծային տեսքի:

14.24. Պարզել, դրական, թե՞ բացասական է որոշված հետևյալ քառակուսային ձևը.

1) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ 2) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ 3) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$:

14.25. Կազմել հետևյալ քառակուսային ձևի համապատասխան մատրիցը.

1) $x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_2^2$

2) $-x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$

3) $7x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$

4) $-3x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3$

14.26. Օգտվելով Սիլվեստրի հայտանիշից պարզել, դրական, թե՞ բացասական է որոշված հետևյալ քառակուսային ձևը.

1) $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$

2) $2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

3) $2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$:

14.27. Հետևյալ քառակուսային ձևը բերել կանոնական տեսքի.

1) $x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2$

2) $4x_1^2 + 2x_1x_2$

3) $-x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$

4) $4x_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3 + 4x_1x_3$

5) $6x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_3$

15. ԳԾԱՅԻՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

15.1. Դիտարկենք x և y երկու անհայտով գծային անհավասարումների

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y \geq c_1 \\ a_2 x + b_2 y \geq c_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_m x + b_m y \geq c_m \end{cases} \quad (1)$$

համակարգը և K -ով նշանակենք այդ համակարգի լուծումների բազմությունը, այսինքն՝ $M(x, y) \in K$, եթե (x, y) զույգը բավարարում է (1) համակարգի բոլոր անհավասարումներին: Դիտարկենք նաև համապատասխան համասեռ անհավասարումների

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y \geq 0 \\ a_2 x + b_2 y \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_m x + b_m y \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

համակարգը՝ լուծումների K_0 տիրույթով և հավասարումների

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_m x + b_m y = 0 \end{cases} \quad (3)$$

համասեռ համակարգը՝ լուծումների L տիրույթով:

15.2. Նորմալ համակարգեր: Գծային անհավասարումների (1) համակարգը կոչվում է *նորմալ*, եթե համապատասխան համասեռ հավասարումների (3) համակարգն ունի միայն զրոյական լուծում՝ $L = \{O(0, 0)\}$: Նորմալ համակարգի լուծումների K տիրույթը չի պարունակում ուղիղներ և, հետևաբար, եթե K -ն գազաթներ չունի, ապա համակարգն

անհամատեղելի է: Մնացած դեպքերում՝ $K = \{Z: z = p + q, P \in \langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle, Q \in K_0\}$, որտեղ $A_1, A_2, \dots, A_k$ -երը K -ի բոլոր գազաթմերն են, իսկ $\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$ -ն՝ նրանց ուռուցիկ թաղանթը: K -ի գազաթմերը գտնում են 9-րդ բաժնում նկարագրված եղանակով (լուծում են երկու հավասարումներից կազմված բոլոր ենթահամակարգերը և ընտրում այն լուծումները, որոնք բավարարում են (1) համակարգին): Նորմալ համակարգի համար K_0 -ն կամ համընկնում է $O(0, 0)$ կետի հետ, կամ O սկզբնակետով ճառագայթ է, կամ՝ O գազաթով անկյուն: Յուրաքանչյուր կոնկրետ դեպքում ճշգրտումը կարելի է կատարել այսպես. (3) համակարգի առաջին ուղղի վրա ընտրվում է զրոյականից տարբեր որևէ $C(x_0, y_0)$ կետ: Ստուգումով պարզվում է, պատկանում է արդյոք C -ն K_0 -ին, այսինքն՝ բավարարում է արդյոք (x_0, y_0) -ն (2) համակարգին: Եթե $C \notin K_0$, ապա OC ճառագայթը չի մասնակցում K_0 -ի ձևավորմանը և ստուգվում է $C_1(-x_0, -y_0)$ կետը: Եթե մաս $C_1 \notin K_0$, ապա առաջին ուղղից K_0 -ի մեջ ոչ զրոյական կետեր չկան: Այնուհետև, նման ձևով ընտրվում է կետ (3) համակարգի երկրորդ ուղղի վրա և այլն: Եթե ոչ մի ուղղի վրա չգտնվեց K_0 -ից ոչ զրոյական կետ, ապա $K_0 = \{O(0,0)\}$: Եթե գտնվեց այդպիսի մեկ կետ՝ $B \in K_0$, ապա K_0 -ն OB ճառագայթն է՝ $K_0 = \{Z: z = t b, t \geq 0\}$: Եթե գտնվեցին այդպիսի երկու կետեր՝ B_1 և B_2 , ապա K_0 -ն OB_1 և OB_2 ճառագայթներով կազմված անկյունն է՝ $K_0 = \{Z: z = t_1 b_1 + t_2 b_2, t_1, t_2 \geq 0\}$:

15.3. Գծային անհավասարումների ոչ նորմալ համակարգեր: Այս դեպքում $L \neq \{O(0, 0)\}$, այսինքն (3) համակարգի բոլոր հավասարումները հարթության վրա որոշում են միևնույն ուղիղը, որի կետերն էլ հենց կազմում են L բազմությունը: Եթե $P \in K, Q \in L$ և $z = p + q$, ապա $Z \in K$, այսինքն՝ K -ն շերտ է: Այդ շերտը նկարագրելու համար պետք է վերցնել նրան հատող և L -ին ոչ զուգահեռ Γ ուղիղը (հարմար է օգտագործել $x = 0$ կամ $y = 0$ ուղիղներից մեկը), գտնել նրա Γ_K հետքը (K շերտում ընկած հատվածը) և այդ դեպքում՝ $K = \{Z: z = p + q, P \in \Gamma_K, Q \in L\}$:

15.1. Պարզել, թե անհավասարումների համակարգերից որո՞նք են նորմալ, իսկ որոնք՝ ոչ.

$$1) \begin{cases} 3x - y - 4 \geq 0 \\ 21x - 7y - 6 \geq 0 \\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{6} + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -2x + y - 1 \geq 0 \\ 2x - 3y + 6 \geq 0 \\ x + \frac{y}{3} - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + y - 5 \leq 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + 1 \geq 0 \\ x + \frac{y}{2} - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2y \geq 2 \\ 3x + 4y - 9 \leq 0 \\ -2x - 8y - 8 \geq 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x - 2y + 6 \leq 0 \\ -x + 2y + 2 \geq 0 \\ x - 2y - 20 \leq 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x + 2y - 1 \leq 0 \\ -3x + y - 2 \leq 0 : \\ 5x - 10 - 5 \geq 0 \end{cases}$$

15.2. Գտնել հետևյալ անհավասարումների համակարգով որոշված տիրույթի բոլոր գագաթները.

$$1) \begin{cases} x + y + 1 \geq 0 \\ x - 2y - 2 \geq 0 \\ 2x - y - 4 \geq 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -x + 3y - 9 \leq 0 \\ x - 2y + 1 \geq 0 \\ 2x - 2y - 1 \leq 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x - y + 4 \geq 0 \\ 3x - 2y + 1 \geq 0 : \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

15.3. Գտնել համասեռ համակարգի լուծումների բազմությունը.

$$1) \begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ 3x + 5y \leq 0 \\ 2x + y \geq 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -3x - 2y \leq 0 \\ 6x - y \leq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x + y \leq 0 \\ -x + 2y \leq 0 \\ x - 3y \leq 0 \end{cases}$$

15.4. Լուծել անհավասարումների համակարգը և պատկերել նրա լուծումների բազմությունը կոորդինատային հարթության վրա.

$$1) \begin{cases} 3x - y - 4 \geq 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{6} - \frac{4}{7} \geq 0 \\ -3x + y + 6 \geq 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - y + 1 \geq 0 \\ \frac{2}{3}x - y + 2 \geq 0 \\ 3x + y - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + y - 2 \leq 0 \\ \frac{x}{10} + \frac{y}{20} + \frac{1}{5} \geq 0 \\ x + \frac{y}{2} - \frac{5}{2} \leq 0 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 1,5x + y - 3 \geq 0 \\ 0,5x - y + 1 \leq 0 \\ 0,75x + y \geq 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} -1,5x + 3y - 9 \leq 0 \\ x - 2y - 2 \geq 0 \\ 0,5x - y - 10 \leq 0 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x - 2y - 2 \geq 0 \\ 3x + 5y - 15 \leq 0 \\ 2x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x - 0,5y + 4 \geq 0 \\ 3x + 2y - 1 \geq 0 \\ 4x - 3 \geq 0 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x + y - 0,5 \leq 0 \\ 3x - y + 2 \leq 0 \\ x - 2y - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} -1,5x + 3y - 9 \leq 0 \\ x - 2y - 2 \geq 0 \\ 0,5x - y - 10 \leq 0 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} y - 1 \geq 0 \\ 0,75x + y - 3 \leq 0 \\ x + 4y + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 3x + 2y - 6 \leq 0 \\ 3x - y + 3 \leq 0 \\ x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ x - 2y - 2 \geq 0 \\ 0,5x - y - 10 \leq 0 \end{cases} :$$

15.5. Դիցուք C վիտամինի անհրաժեշտ պաշարը լրացվում է x հատ նարինջ և y հատ խնձոր ուտելով: Տրված է, որ նարինջի հատն արժե 75 դ., խնձորինը՝ 50 դ., իսկ նրանց գնման համար նախատեսված գումարը կազմում է 300 դ.: Գտնել այդ բարիքների ձեռք բերման թույլատրելի հավաքածուների բազմությունը:

15.6. Դիցուք ձեռնարկության ռեսուրսները կազմում են առկա աշխատուժը, հումքը և ֆինանսական միջոցները՝ L, B և I ծավալներով համապատասխանաբար: Հայտնի է, որ j -րդ ապրանքատեսակի մեկ միավորի թողարկման համար i -րդ ռեսուրսի ծախսը կազմում է a_{ij} միավոր: Նկարագրել ձեռնարկության թողարկման հնարավորությունները, եթե թողարկվում է երկու տեսակի ապրանք, $L = 10$, $B = 112$, $I = 135$, իսկ

ծախսերը որոշվում են $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 14 & 8 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$ մատրիցով:

1. **Ильин В. А., Позняк Э. Г.** Аналитическая геометрия. – М., Наука, 1981
2. **Ильин В. А., Позняк Э. Г.** Линейная алгебра. – М., Наука, 1978
3. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры. – М., Наука, 1971
4. **Бугров Я. С., Никольский С. М.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М., Наука, 1984
5. **Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В.** Математика в экономике, ч.1, - М., Финансы и статистика, 2001
6. **Моденов П. С., Пархоменко А. С.** Сборник задач по аналитической геометрии. – М., Наука, 1976
7. **Клетеник Д. В.** Сборник задач по аналитической геометрии. – Профессия, 2002
8. **Фадеев Д. К., Соминский И. С.** Сборник задач по высшей алгебре. – М., Наука, 1968
9. **Проскуряков И. В.** Сборник задач по линейной алгебре. – М., Наука, 1970

Նախաբան	3
---------------	---

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱԶԱԹՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐ

1. ԿՈՌՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ	5
2. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ	15
3. ԳԾԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ	26
4. ՈՒՂԻՂ ԳԻԾԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ	28
5. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԳԾԵՐ	44
6. ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԵՎ ԳԾԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ	51
7. ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ	53
8. ՈՒՂԻՂ ԳԻԾԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ	61
9. R^n ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ: ՈՒՈՒԹՅԻԿ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ	71

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՏԱՐՐԵՐ

10. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ: ԳԱՌՄԻ ԵՂԱՆԱԿԸ	78
11. ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ ԵՎ ՈՐՈՇԻԶՆԵՐ	83
12. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ	96
13. ԳԾԱՅԻՆ ԵՎ ԷՎԿԼԻԴՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ	105
14. ԳԾԱՅԻՆ ԶԵՎԱԹՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ՔԱՌԱԿՈՒՄԱՅԻՆ ԶԵՎԵՐ	117
15. ԳԾԱՅԻՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ	126
Գրականություն	131