ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԳՐԱՐԱՅԻՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ՏԵՍԱԿԱՆ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԱՄԲԻՈՆ

Լ.Ե. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԵՐԵՎԱՆ
ՀԱԱՀ
2016

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1g7
Դ 171
Հաստատված է Հայաստանի ազգային ագրարային համալսարանի գիտական խորհրդի կողմից

Գրախոսներ՝ Երևանի պետական տնտեսագիտական համալսարանի բարձրագույն մաթեմատիկայի ամբիոնի վարիչ ֆիզմաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ **Ա.Ն. Հայրապետյան**

ԵՊՀ կիրառական մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ֆակուլտետի թվային անալիզի ամբիոնի դոցենտ **Յ.Գ. Դադայան**

Խմբագիր՝ **Ց.Վ. Պողոսյան**

ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ Լ.Ե.
Դ 171 **Բարձրագույն մաթեմատիկա:** Ուսումնական ձեռնարկ. - Եր.: ՀԱԱՀ, 2016. – 188 էջ:

Ուսումնական ձեռնարկը նախատեսված է Հայաստանի ազգային ագրարային համալսարանի բակալավրիատի ուսանողների համար:

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1g7

ISBN 978-9939-54-956-9

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Սույն ձեռնարկը նախատեսված է Հայաստանի ազգային ագրարային համալսարանի առկա և հեռակա ուսուցման ուսանողների համար: Այն կազմվել է գործող ծրագրերին համապատասխան: Առաջին հրատարակության համեմատ ավելացվել է նոր գլուխ գծային հանրահաշվի տարրերից, նաև ընդլայնվել են այլ բաժիններ:

Ձեռնարկում մատչելի ձևով շարադրված են բարձրագույն մաթեմատիկայի հիմնական մեթոդները, առանձին դեպքերում ցուցադրված են գյուղատնտեսական արտադրության բնագավառի օրինակներ: Որոշ բաժիններում տրված են տիպական խնդիրներ ու վարժություններ: Յուրաքանչյուր գլխից հետո կան խնդիրներ և վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար:

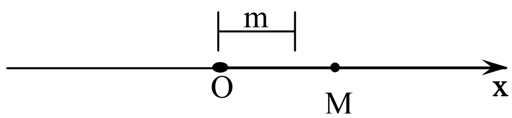
ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Անալիտիկ կամ վերլուծական երկրաչափությունը ուսումնասիրում է երկրաչափական պատկերների հատկությունները հանրահաշվի մեթոդներով, բանաձևերի միջոցով: Ուսումնասիրման հիմնական մեթոդը կոորդինատական մեթոդն է:

ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴԸ ՈՒՂՂԻ ՎՐԱ, ԹՎԱՅԻՆ ԱՌԱՆՑՔ

Վերցնենք մի կամայական ուղիղ: Այն ունի երկու հակադիր ուղղություններ: Ըստ ցանկության, ընտրենք դրանցից մեկը և անվանենք դրական ուղղություն:

Այն ուղիղը, որի վրա նշված է դրական ուղղությունը, կոչվում է առանցք: Գծագրում այն նշում են սլաքով և նշանակում մեկ տառով՝ x,y,z,t,...:



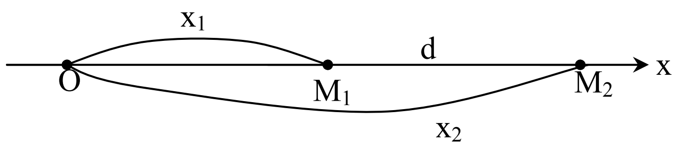
Գծ. 1.

Եթե առանցքի վրա նշված է նաև հաշվարկի սկզբնակետը, որն ընդունված է նշանակել O տառով և չափման միավոր (մասշտաբ), ապա այդ առանցքը կոչվում է թվային առանցք (գծ.1):

Նշենք մեթոդը, որի օգնությամբ առանցքի վրա վերցրած յուրաքանչյուր կետ բնորոշվում է որևիցե մի թվով, ըստ որի էլ առանցքը կոչվում է *թվային առանցք:*

Իրոք՝ x առանցքի վրա վերցնենք մի M կետ և չափման միավորի օգնությամբ չափենք OM հատվածի երկարությունը: Արդյունքում կստանանք մի թիվ, որը կոչվում է M կետի կոորդինատ և գրվում է M(x) տեսքով: O կետի կոորդինատը հավասար է զրոյի: Կոորդինատ ունենալու արդյունքում կետի դիրքը առանցքի վրա դառնում է որոշակի: Այսպիսով, կարող ենք ասել, որ թվային առանցքի կետերի բազմության և իրական թվերի բազմության միջև գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն:

Հաշվենք երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունը թվային առանցքի վրա: Դիցուք, տրված են $M_1(x_1)$ և $M_2(x_2)$ կետերը և պահանջվում է հաշվել դրանց միջև եղած d հեռավորությունը: Նշենք կետերը առանցքի վրա (գծ.2):



Գծ.2

Գծ.2-ից երևում է, որ $d = \left|\overline{M_1M_2}\right| = \left|OM_2 - OM_1\right| = \left|x_2 - x_1\right|$:

Այսպիսով, հայտնի կոորդինատներով երկու կետերի հեռավորությունը առանցքի վրա հաշվվում է

$$d = \left|x_2 - x_1\right| \tag{1}$$

բանաձևով:

Ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգը հարթության վրա

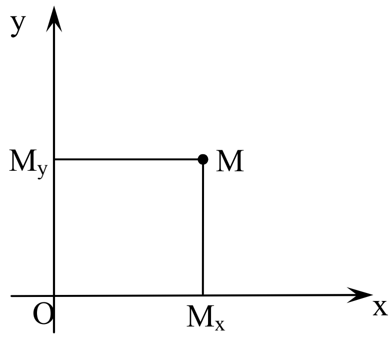
Եթե նշված է մի մեթոդ, որի օգնությամբ կարելի է որոշել կետի դիրքը հարթության վրա, ապա ասում են, որ հարթության վրա մտցված է կոորդինատական համակարգ:

Դիտարկենք պարզագույն և ամենակիրառելի կոորդինատական համակարգը, որը կոչվում է ուղղանկյուն դեկարտյան:

Դիցուք, հարթության վրա տրված են երկու փոխուղղահայաց առանցքներ (Ox և Oy) և չափման միավորը (մասշտաբը): Այս դեպքում ասում են, որ տրված են ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգ: Առանցքների հատման կետը կոչվում է կոորդինատների սկզբնակետ, իսկ առանցքները՝ կոորդինատական առանցքներ (Ox-ը աբսցիսների առանցք, Oy-ը օրդինատների առանցք):

Ենթադրենք, հարթության վրա մտցված է կոորդինատական համակարգ և տրված է մի M կետ (գծ.3):

Պրոյեկտենք M կետը կոորդինատական առանցքների վրա և պրոյեկցիաները համապատասխանաբար նշանակենք M_x և M_y: Չափելով OM_x և OM_y հատվածների մեծությունները՝ կստանանք՝ $OM_x=x, OM_y=y$:



Գծ.3.

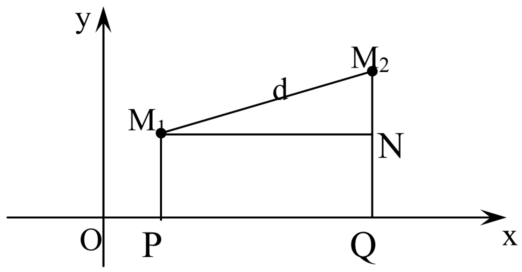
Այսինքն՝ հարթության վրա տրված կետին համապատասխանում է մի զույգ թիվ (x,y), որը կոչվում է նրա կոորդինատներ: x-ը կոչվում է առաջին կոորդինատ կամ աբսցիս, իսկ y-ը՝ երկրորդ կոորդինատ կամ օրդինատ և գրվում է հետևյալ կերպ՝ M(x,y): Հակառակ պնդումը նույնպես ճիշտ է, այսինքն տրված ամեն մի զույգ իրական թվին հարթության վրա համապատասխանում է մի որոշակի կետ: Այս թվերի (կոորդինատների) միջոցով հարթության վրա կառուցվում է կետը:

Դիտարկենք անալիտիկ երկրաչափության մի քանի պարզագույն խնդիրներ հարթության վրա:

Երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունը

Դիցուք, հարթության վրա տրված է երկու կետ՝ $M_1(x_1,y_1)$ և $M_2(x_2,y_2)$ և պահանջվում է հաշվել դրանց միջև եղած d հեռավորությունը: Կառուցենք կետերը՝ հարթության վրա նախօրոք վերցնելով կոորդինատական համակարգ:

Համաձայն Պյութագորասի թեորեմի, ΔM_1NM_2-ից (գծ.4) կարող ենք գրել՝ $\left|\overline{M_1M_2}\right|^2=\left|\overline{M_1N}\right|^2+\left|\overline{NM_2}\right|^2$



Գծ.4.

Քանի որ $\left|\overline{M_1M_2}\right| = d, \quad \left|\overline{M_1N}\right| = \left|\overline{PQ}\right| = x_2 - x_1,$

$$\left|\overline{NM_2}\right| = \left|\overline{QM_2}\right| - \left|\overline{QN}\right| = \left|\overline{QM_2}\right| - \left|\overline{PM_1}\right| = y_2 - y_1,$$

ապա $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, որտեղից

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2)$$

Օրինակ.- Հաշվել $M_1(-2,3)$ և $M_2(1,-2)$ կետերի հեռավորությունը:
Լուծում.- Համաձայն բանաձևի

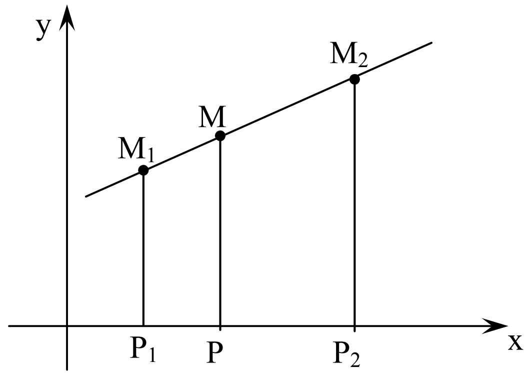
$$d = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \ :$$

Հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ

Դիցուք, հարթության վրա տրված է երկու կետ՝ $M_1(x_1,y_1)$ և $M_2(x_2,y_2)$: M_1M_2 հատվածի վրա վերցնենք մի $M(x,y)$ կետ:

$\frac{M_1M}{MM_2}$ հարաբերությունը նշանակում են λ տառով և ասում, որ M կետը M_1M_2 հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ:

Ենթադրենք, λ-ն տրված է, M_1 և M_2 կետերի կոորդինատները հայտնի են, որոշենք M բաժանման կետի կոորդինատները: M_1, M և M_2 կետերը պրոյեկտենք Ox առանցքի վրա և դրանց պրոյեկցիաները համապատասխանաբար նշանակենք P_1, P և P_2 (գծ.5):



Գծ.5.

Համաձայն տարրական երկրաչափության զուգահեռ ուղիղների միջև եղած հատվածների համեմատականության մասին թեորեմի, կարող ենք գրել (Թալեսի թեորեմը).

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda, \qquad (3)$$

բայց $P_1P = x - x_1$: $PP_2 = x_2 - x$

Տեղադրելով այս արժեքները (3) հավասարության մեջ՝ կստանանք.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$$

Լուծելով այս հավասարությունը x անհայտի նկատմամբ՝ կստանանք

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

M_1, M և M_2 կետերը պրոյեկտելով Oy առանցքի վրա և վարվելով նման ձևով՝ y անհայտի համար կստանանք՝

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Այսպիսով, բաժանման կետի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.

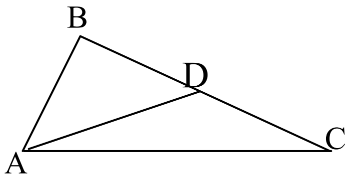
$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases} \tag{4}$$

Մասնավոր դեպքում, եթե M կետը գտնվում է հատվածի միջնակետում, ապա $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2} = 1$ և (4) բանաձևերից հատվածի միջնակետի կոորդինատների որոշման համար կստանանք.

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \tag{5}$$

Օրինակ.- Տրված է ABC եռանկյան գագաթի կոորդինատները՝ A(2, 1), B(-2, 4), C(6, 2):

Պահանջվում է գտնել AD միջնագծի երկարությունը:



Գծ.6.

Լուծում.- Կատարենք պայմանական գծագիրը և նախապես որոշենք D միջնակետի կոորդինատները: Համաձայն (5) բանաձևերի

$$x_D = \frac{x_B + x_c}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2$$

$$y_D = \frac{y_B + y_c}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$$

Ուրեմն D կետի կոորդինատներն են (2, 3): Գտնենք AD միջնագծի երկարությունը համաձայն (2) բանաձևի.

$$AD = \sqrt{(2-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{0+4} = 2$$

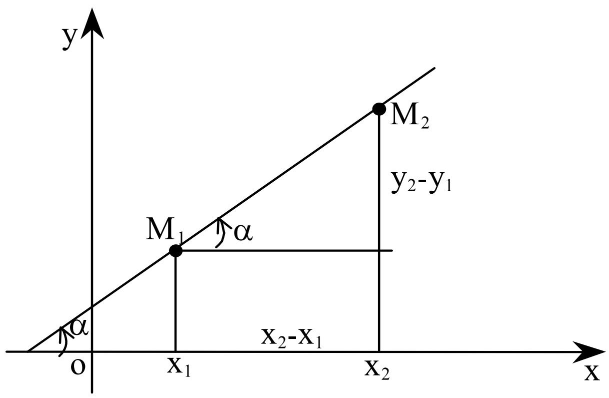
ՈՒՂԻՂ ԳԻԾԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ենթադրենք, հարթության վրա տրված է ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգ և մի ուղիղ գիծ, որը Ox առանցքի դրական ուղղության հետ կազմում է α անկյուն $(\alpha \neq 90^0)$:

α անկյունը կոչվում է ուղղի թեքման անկյուն, իսկ նրա տանգենսը՝ ուղիղի անկյունային գործակից և նշանակվում է k տառով:

$$tg\alpha=k \tag{6}$$

Անկյունային գործակիցը ուղղի ուղղության կարևորագույն բնորոշիչն է և մշտապես օգտագործվում է անալիտիկ երկրաչափության և նրա կիրառությունների մեջ:



Գծ.7.

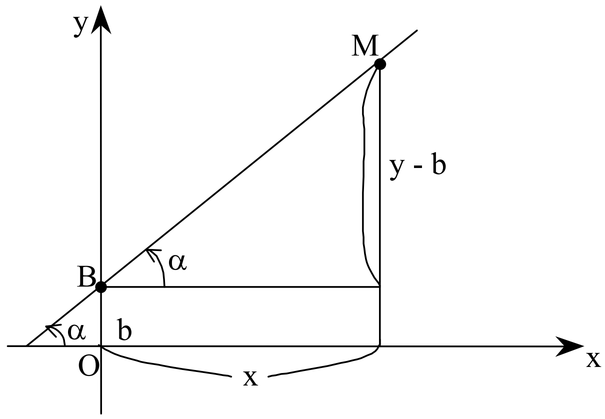
Դիտարկենք մի ուղիղ և նրա վրա վերցնենք երկու կետ. $M_1(x_1,y_1)$ և $M_2(x_2,y_2)$ (գծ.7): Որոշենք ուղղի անկյունային գործակիցը.

$$k = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (7)$$

Սա ուղղի անկյունային գործակցի որոշման բանաձևն է նրա երկու կետերի միջոցով:

Ուղղի հավասարումը անկյունային գործակցով

Դիցուք, տրված է մի ուղիղ, որի անկյունային գործակիցը հավասար է k և օրդինատների առանցքից կտրում է b երկարության հատված (գծ.8): Ուղղի վրա վերցնենք մի M(x,y) ընթացիկ կետ: Գծագրից երևում է, որ որտեղ էլ որ գտնվի M կետը ուղիղի վրա, միշտ կարելի է գրել



Գծ.8.

$$\frac{y - b}{x} = tg\alpha = k,$$

որտեղից` $y - b = kx, y = kx + b$ (8)

Այսպիսով, յուրաքանչյուր ուղիղ, որն ունի k անկյունային գործակից և Oy առանցքից կտրում է b երկարության հատված, բնութագրվում է (8) հավասարումով: Հակառակն էլ ճիշտ է. (8) տեսքի ամեն մի հավասարում հարթության վրա պատկերում է ուղիղ գիծ:

(8) հավասարումը կոչվում է ուղղի հավասարում անկյու-նային գործակցով: Եթե $b=0$, ապա ուղիղը կանցնի կոորդինա-տական սկզբնակետով, որի հավասարումն էլ կլինի՝ $y=kx$:

Տրված մեկ կետով անցնող և տրված անկյունային գործակիցը ունեցող ուղղի հավասարումը

Շատ դեպքերում անհրաժեշտ է լինում կազմել տրված $M_1(x_1,y_1)$ կետով անցնող և k անկյունային գործակից ունեցող ուղղի հավասարումը: Եթե ուղղի վրա վերցնենք մի $M(x,y)$ ընթա-ցիկ կետ, ապա (7) բանաձևի համաձայն կարող ենք գրել.

$$k=\frac{y-y_1}{x-x_1} \quad \text{կամ} \quad y-y_1=k(x-x_1) \qquad (9)$$

Սա որոնելի ուղղի հավասարումն է:

Օգտագործելով (9) հավասարումը՝ կարելի է կազմել $M_1(x_1,y_1)$ և $M_2(x_2,y_2)$ տրված երկու կետերով անցնող ուղղի հա-վասարումը:

(7) բանաձևի համաձայն $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$: Տեղադրելով այս արժեքը (9) հավասարման մեջ՝ կստանանք.

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Այս հավասարումն ընդունված է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (10)$$

Ուղիղ գիծը որպես առաջին կարգի գիծ: Ուղղի ընդհանուր հավասարումը

Ապացուցենք հետևյալ սկզբունքային թեորեմը:

Թեորեմ.- Դեկարտյան կոորդինատական համակարգում ամեն մի ուղիղ որոշվում է առաջին աստիճանի հավասարումով և հակառակը՝ ամեն մի առաջին աստիճանի հավասարում հարթության վրա պատկերում է մի ուղիղ:

Ապացույց.-Նախ ապացուցենք թեորեմի առաջին մասը: Ենթադրենք, տրված է մի կամայական ուղիղ: Եթե այն ուղղահայաց չէ Ox առանցքին, ապա արդեն հայտնի է, որ բնութագրվում է y=kx+b առաջին աստիճանի հավասարումով: Իսկ եթե այն ուղղահայաց է Ox առանցքին, ապա նրա բոլոր կետերը բնութագրվում են x=a հավասարումով, որտեղ a-ն ուղղի Ox առանցքից կտրած հատվածն է: Այս հավասարումը նույնպես առաջին աստիճանի հավասարում է: Թեորեմի առաջին մասը ապացուցված է:

Ապացուցենք հակառակ պնդումը: Ենթադրենք, տրված է առաջին աստիճանի հավասարում.

$$Ax + By + C = 0 \tag{11}$$

A, B, C գործակիցների կամայական արժեքներով: A և B գործակիցներից որևէ մեկը հավասար չէ 0-ի:

Եթե $B\neq 0$, ապա տրված հավասարումը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով`

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}:$$

Նշանակելով $-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{C}{B} = b$` կստանանք y=kx+b, որն ինչպես արդեն հայտնի է, հարթության վրա պատկերում է ուղիղ գիծ, որը 0y առանցքից կտրում է b հատված և ունի k անկյունային գործակից: Այսպիսով ամեն մի առաջին աստիճանի հավասարում պատկերում է ուղիղ գիծ, ուստի ուղիղ գիծը կոչվում է նաև առաջին կարգի գիծ:

$Ax + By + C = 0$ հավասարումը կոչվում է ուղղի ընդհանուր հավասարում (որպես առաջին աստիճանի ընդհանուր հավասարում):

Ուղղի ընդհանուր հավասարման հետազոտումը: Ուղղի հավասարումը «հատվածներով»

Հետազոտել ուղղի ընդհանուր հավասարումը` նշանակում է պարզել, թե A, B, C գործակիցների արժեքներից կախված ուղիղը ինչպիսի դիրք է գրավում հարթության վրա:-

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

1. $C = 0$, հավասարումը կընդունի $Ax + By = 0$ տեսքը, որտեղից $y = -\frac{A}{B}x = kx$ $\left(k = -\frac{A}{B}\right)$. Սա կոորդինատական սկզբնակետով անցնող ուղիղն է: Դրանում կարելի է համոզվել նաև` տեղադրելով հավասարման մեջ x=0, y=0 կոորդինատները:

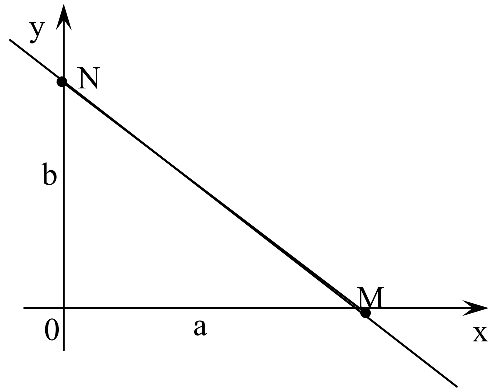
2. B=0, A≠0, հավասարումը կընդունի Ax+C=0 տեսքը, որտեղից $x = -\frac{C}{A} = a$ $\left(a = -\frac{C}{A}\right)$: Իսկ սա Ox առանցքին ուղղահայաց կամ 0y-ին զուգահեռ ուղղի հավասարումն է:

Մասնավոր դեպքում, եթե a=0, ապա ուղիղը կհամընկնի Oy առանցքի հետ և այդ առանցքի հավասարումը կլինի x=0:

3. A=0, B≠0, հավասարումը կդառնա By+C=0

$$y = -\frac{C}{B} = b:$$

Սա մի ուղղի հավասարում է, որի բոլոր կետերը հավասարապես են հեռացված Ox առանցքից, այսինքն Ox առանցքին զուգահեռ ուղղի հավասարումն է: Մասնավոր դեպքում, եթե b=0, ապա ուղիղը կհամնկնի Ox առանցքի հետ և նրա հավասարումը կլինի y=0: Հիմա ենթադրենք, տրված է Ax + By + C = 0 հավասարումը և A, B, C գործակիցներից ոչ մեկը հավասար չէ զրոյի: Այս դեպքում հավասարումը կարելի է բերել մի հատուկ տեսքի, որը նպատակահարմար է անալիտիկ երկրաչափության մի շարք խնդիրներում:



Գծ.9

Ենթադրենք, ուղիղը կոորդինատական առանցքներից համապատասխանաբար կտրում է a և b հատվածներ: Պահանջվում է կազմել այդ ուղղի հավասարումը (գծ.9): Որոնելի ուղղի հավասարումը գրենք ընդհանուր տեսքով

Ax+By+C=0, որտեղից կստանանք՝ Ax+By= – C

$$-\frac{Ax}{C}-\frac{By}{C}=1$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1:$$

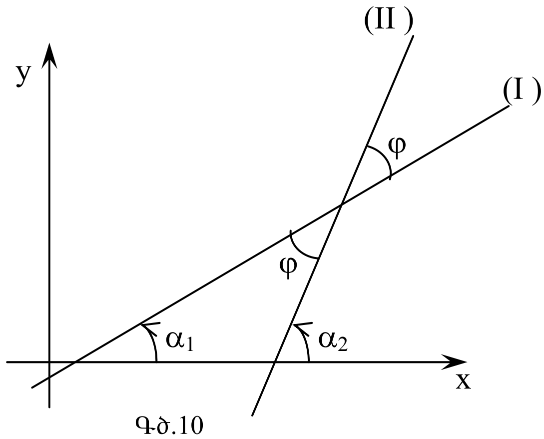
Նշանակելով $-\frac{C}{A}=a,\ -\frac{C}{B}=b$՝ կունենանք

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1: \qquad (12)$$

Սա կոչվում է ուղղի հավասարում «հատվածներով»:

Երկու ուղիղների կազմած անկյունը: Ուղիղների ուղղահայացության և զուգահեռության պայմանները

Անալիտիկ երկրաչափության հիմնական խնդիրներից մեկը երկու ուղիղների կազմած անկյան որոշումն է: Այժմ դուրս



Գծ.10

բերենք մի բանաձև, որի միջոցով կարելի է հաշվել երկու ուղիղների կազմած անկյունը, եթե հայտնի են դրանց անկյունային գործակիցները: Դիտարկենք երկու ուղիղներ (I) և (II), որոնք կազմում են φ անկյուն. (գծ.10.)

Ենթադրենք, այդ ուղիղների անկյունային գործակիցները են k_1 և k_2:

Գծագրից կարող ենք գրել $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ (եռանկյան արտաքին անկյունը հավասար է իրեն ոչ կից ներքին անկյունների գումարին):

Որտեղից $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, իսկ $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$

Բայց $tg\alpha_1 = k_1$, $tg\alpha_2 = k_2$, հետևաբար

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (13)$$

Դիտարկենք մասնավոր դեպքեր.

1) ենթադրենք, ուղիղները զուգահեռ են: Այդ դեպքում $\varphi = 0$ և $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 0$:

Որտեղից հետևում է, որ $k_2 - k_1 = 0$ կամ $k_1 = k_2$:

Այսպիսով, եթե ուղիղները զուգահեռ են, ապա նրանց անկյունային գործակիցները հավասար են:

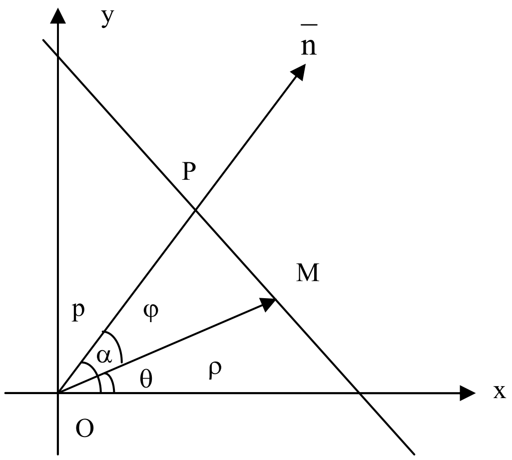
2) ենթադրենք ուղիղները ուղղահայաց են: Այդ դեպքում $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ և $tg\varphi \to \infty$: Սա էլ նշանակում է (13) բանաձևի հայտարարը պետք է հավասարվի զրոյի. $1 + k_1 k_2 = 0$ կամ $k_1 k_2 = -1$:

Այսինքն, եթե ուղիղները ուղղահայաց են, ապա նրանց անկյունային գործակիցների արտադրյալը հավասար է -1:

ՈՒՂՂԻ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ

Ենթադրենք հարթության վրա ընտրված ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում տրված է մի ուղիղ գիծ:

Կոորդինատական սկզբնակետից տանենք տրված ուղղին ուղղահայաց մի $\overline{n}$ ճառագայթ և դրան անվանենք ուղղի նորմալ:



Գծ.11

Նորմալի հատման կետը ուղղի հետ նշանակենք P (գծ.11): α-ով նշանակենք նորմալի կազմած անկյունը OX առանցքի հետ, իսկ p-ով $\overline{OP}$ հատվածի երկարությունը: Ենթադրենք α և p պարամետրերը հայտնի են, ստանանք տրված ուղղի հավասարումը: Այդ նպատակով ուղղի վրա վերցնենք M(x;y) ընթացիկ կետ և կազմենք $\overline{OM}$ վեկտորի պրոյեկցիան նորմալի ուղղության վրա: Ակնհայտ է, որ

$$\text{պր}_{\bar{n}}\overline{OM} = p\,; \qquad (14)$$

Գտնենք $\overline{OM}$ հատվածի պրոյեկցիան նորմալի վրա M կետի (x;y) կոորդինատների միջոցով, նշանակելով M կետի բևեռային կոորդինատները $(\rho;\theta)$

$$\text{պր}_{\bar{n}}\overline{OM} = \rho\cos\varphi = \rho\cos(\alpha-\theta) = \rho(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta)\,,$$

բայց $\begin{cases}\rho\cos\theta = x\\ \rho\sin\theta = y\end{cases}$, հետևաբար $\text{պր}_{\bar{n}}\overline{OM} = x\cos\alpha + y\sin\alpha$:(15)

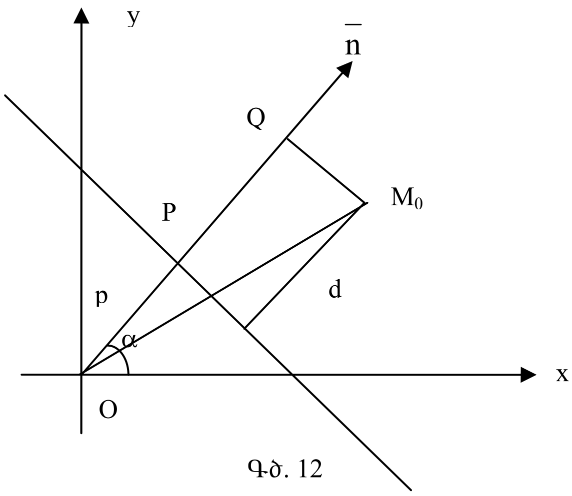
Համեմատելով (14) և (15) հավասարությունները կարող ենք գրել՝

$$x\cdot\cos\alpha + y\sin\alpha = p, \text{ կամ } x\cdot\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \,: \qquad (16)$$

Ստացանք x և y փոփոխականների նկատմամբ առաջին կարգի հավասարում, որին անվանում են ուղղի նորմալ հավասարում:

ԿԵՏԻ ՀԵՌԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՏՐՎԱԾ ՈՒՂՂԻՑ

Ենթադրենք հարթության վրա տրված է ուղիղ գիծ իր նորմալ հավասարումով՝ $x\cdot\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ և դրանից դուրս գտնվող մի $M_0(x_0;y_0)$ կետ: Պահանջվում է գտնել տրված կետի հեռավորությունը տրված ուղղից: Նշանակենք այդ հեռավորությունը d տառով:



Գծ. 12

Պայմանավորվենք M_0 կետի շեղում տված ուղղից անվանել նրա հեռավորությունը այդ ուղղից պլյուս նշանով, եթե կետն ու կոորդինատական սկզբնակետը գտնվում են ուղղի տարբեր կետերում (ինչպես նշված է գծագրում) և մինուս նշանով, եթե կետը և կոորդինատական սկզբնակետը գտնվում են ուղղի միևնույն կողմը:

Կետի շեղումը ուղղից նշանակելով δ տառով, կարող ենք գրել՝ $\delta=\pm d$, հետևաբար $d=|\delta|$:

Կետի շեղումը ուղղից հաշվելու համար կազմենք $\overline{OM_0}$ հատվածի պրոյեկցիան նորմալի ուղղության վրա: Մի կողմից

$պր_{\bar{n}} \overline{OM_0} = OQ = OP + PQ = p + \delta$, մյուս կողմից համաձայն (15) բանաձևի $պր_{\bar{n}} \overline{OM_0} = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha$:

Այս երկու հավասարությունների ձախ մասը նույնն են, հետևաբար աջ մասերը նույնպես կլինեն հավասար՝ $x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha = p + \delta$, որտեղից $\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p$, $d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|$:

Այսպիսով, որպեսզի որոշել տրված կետի հեռավորությունը տրված ուղղից, պետք է ուղղի նորմալ հավասարման ձախ մասի մեջ x և y փոփոխականների փոխարեն տեղադրել տրված M_0 կետի կոորդինատները և վերցնել բացարձակ արժեքով:

ՈՒՂՂԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԲԵՐՈՒՄԸ ՆՈՐՄԱԼ ՏԵՍՔԻ

Ենթադրենք տրված է ուղղի հավասարումը ընդհանուր տեսքով՝

$$Ax+By+C=0 \tag{17}$$

և պահանջվում է այն բերել

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{18}$$

նորմալ տեսքի: Այդ նպատակով (17) հավասարման երկու կողմը բազմապատկենք μ բազմապատկիչով՝

$$\mu Ax+\mu By+\mu C=0 \quad (19):$$

Ենթադրենք (19) հավասարումը արդեն նորմալ տեսքի է և պարզենք թե ինչպիսին պետք է լինի μ բազմապատկիչը:

Համեմատելով (19) և (18) հավասարումները, նկատում ենք

$$\begin{cases} \mu A = \cos\alpha \\ \mu B = \sin\alpha \\ \mu C = -p \end{cases} \quad (20):$$

(20) համակարգի առաջին երկու հավասարումները բարձրացնենք քառակուսի և գումարենք, կստանանք $\mu^2(A^2 + B^2) = 1$, որտեղից $\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$:

Որպեսզի կոնկրետ հավասարման համար որոշենք μ բազմապատկիչի նշանը, օգտվենք (20) համակարգի երրորդ հավասարությունից՝ μC=-p: Այստեղից հետևում է, որ μ-ն և C-ն պետք է ունենան հակադիր նշաններ:

μ-ն կոչվում է նորմալացնող բազմապատկիչ:

Այսպիսով (17) հավասարման նորմալացված տեսքը կլինի՝

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y\mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0 \qquad (21):$$

Ակնհայտ է, որ տված $M_0(x_0,y_0)$ կետի հեռավորությունը Ax+By+C=0 տեսքով տրված ուղղից գտնելու համար, նախապես ընդհանուր հավասարումը պետք է բերել նորմալ տեսքի և օգտվել վերը նշված կանոնից՝

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}:$$

Օրինակ.-Գտնել $M_0(3,-2)$ կետի հեռավորությունը 2x-4y+5=0 ուղղից:

Հաշվում ենք μ բազմապատկիչը՝

$$\mu=-\frac{1}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{4+16}}=-\frac{1}{\sqrt{20}}:$$

Նորմալացված տեսքը կլինի՝ $-\frac{2}{\sqrt{20}}x-\frac{4}{\sqrt{20}}y-\frac{5}{\sqrt{20}}=0:$

$$d=\frac{|(-2)\cdot 3-4(-2)-5|}{\sqrt{20}}=\frac{|-6+8-5|}{\sqrt{20}}=\frac{|-3|}{\sqrt{20}}=\frac{3}{\sqrt{20}}:$$

ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԳԾԵՐ

Այն գծերը, որոնք բնութագրվում են երկրորդ աստիճանի հավասարումներով, կոչվում են երկրորդ կարգի գծեր: Երկրորդ կարգի հավասարման ընդհանուր տեսքը հետևյալն է՝

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, որտեղ A, B, C գործակիցները միաժամանակ ≠0:

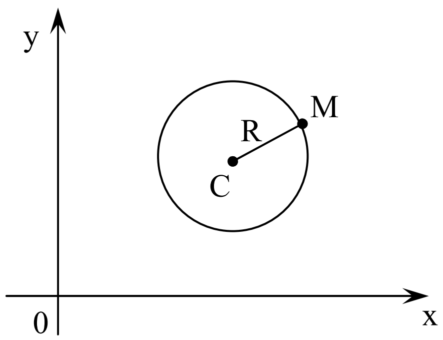
Հետևաբար, սա երկրորդ կարգի գծերի ընդհանուր հավասարումն է:

Դիտարկենք պարզագույն երկրորդ կարգի գծերը: Դրանք են՝ շրջանագիծը, էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը: Համառոտակի ներկայացնենք այս գծերն առանձին-առանձին:

ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ

Հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք հավասարապես են հեռացված տրված մի կետից, որը կոչվում է կենտրոն, կոչվում է շրջանագիծ:

Հարթության վրա մտցնենք ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգ և շրջանագծի կենտրոնը նշանակենք C(a;b)-ով: Շրջանագծի վրա վերցնենք M(x,y) ընթացիկ կետ (գծ.13): Որտեղ էլ որ գտնվի M կետը շրջանագծի վրա, ըստ սահմանման, CM հեռավորությունը մնում է հաստատուն: Այդ հաստատունը ընդունված է նշանակել R տառով և անվանել շրջանագծի շառավիղ: Հաշվենք CM-ը որպես երկու կետերի հեռավորություն և հավասարեցնենք R-ի:



Գծ.13

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

կամ $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (22)$$

Այս հավասարումը կոչվում է շրջանագծի կանոնական հավասարում: Մասնավոր դեպքում, եթե շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատական սկզբնակետում, ապա a=b=0 և շրջանագծի հավասարումը ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$x^2 + y^2 = R^2:$$

Բացելով (22) հավասարման փակագծերը` կստանանք`

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

Համեմատելով այս հավասարումը երկրորդ կարգի գծերի ընդհանուր հավասարման հետ` նկատում ենք, որ

1) A=C

2) B=O:

Այսպիսով, կարող ենք ասել, որ եթե երկրորդ կարգի ընդհանուր հավասարման մեջ x^2 և y^2 գործակիցները հավասար են և xy արտադրյալով անդամը բացակայում է, ապա այդ հավասարումը պատկերում է շրջանագիծ և այն բերելով կանոնական տեսքի, միաժամանակ կարելի է որոշել շրջանագծի կենտրոնը և շառավիղը:

Օրինակ.- Դիցուք, տրված է $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ հավասարումը: Համեմատելով ընդհանուր հավասարման հետ, նկատում ենք, որ A =C =1 և B=0: Ուրեմն դա շրջանագծի հավասարումն է: Շրջանագծի կենտրոնը և շառավիղը գտնելու համար բավական է այն բերել կանոնիկ տեսքի: Որպեսզի ընդհանուր տեսքով տրված շրջանագծի հավասարումը բերվի կանոնական տեսքի, անհրաժեշտ է խմբավորել անդամները և անջատել լրիվ քառակուսի.

$$\left(x^2 - 6x\right) + \left(y^2 + 4y\right) - 3 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 - 9 - 4 - 3 = 0$$

կամ $$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16:$$

Սա արդեն շրջանագծի հավասարումն է` գրված կանոնական տեսքով, որտեղից երևում է, որ կենտրոնը C(3;-2) կետն է, իսկ շառավիղը` R=4:

ԷԼԻՊՍ

Սահմանում.- Էլիպս կոչվում է այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների գումարը կիզակետեր կոչվող տրված երկու կետերից հաստատուն մեծություն է:

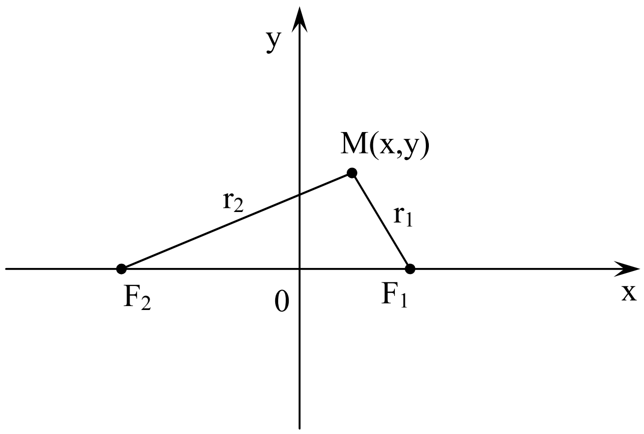
Վերցնենք կոորդինատական համակարգը և նշենք էլիպսի կիզակետերը, որոնք ընդունված է նշանակել F_1 և F_2 տառերով: Այդ կետերը տեղադրենք 0x առանցքի վրա, այնպես, որ կոորդինատական սկզբնակետը գտնվի դրանց մեջտեղում (գծ.14):

F_1F_2–ը նշանակում են 2c-ով և անվանում միջկիզակետա-յին հեռավորություն: Հետևաբար, ընտրված համակարգում կիզակետերի կոորդինատները կլինեն՝ $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$: Հար-թության վրա վերցնենք էլիպսի մի կամայական ընթացիկ կետ՝ M(x,y) և այն միացնենք կիզակետերի հետ:

Նշանակում ենք $F_1M=r_1$ և $F_2M=r_2$ և անվանում էլիպսի կիզակետային շառավիղներ:

Ըստ էլիպսի սահմանման, որտեղ էլ որ գտնվի M կետը էլիպսի վրա, կիզակետային շառավիղների գումարը միշտ մնում է հաստատուն, որն ընդունված է նշանակել 2a-ով: Այսինքն՝

$$r_1 + r_2 = 2a \quad 2a > 2c, \quad a > c$$



Գծ.14

Հաշվենք r_1-ը և r_2-ը որպես երկու կետերի միջև եղած հեռավորություն և տեղադրենք այս հավասարության մեջ.

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a:$$

Սա կլինի էլիպսի հավասարումը: Բերենք այն ռացիոնալ (կանոնական) տեսքի. այդ նպատակով ձախ մասի անդամներից մեկը տեղափոխենք աջ մաս և ստացված հավասարության երկու կողմը բարձրացնենք քառակուսի`

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 =$$

$$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$\text{կամ } a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx + a^2:$$

Կրկին հավասարման երկու կողմը բարձրացնենք քառակուսի և, նշանակելով` $a^2 - c^2 = b^2$, կստանանք $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$:

Բաժանելով այս հավասարության երկու կողմը a^2b^2 վրա, կունենանք.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1: \qquad (23)$$

Այս հավասարումը կոչվում է էլիպսի կանոնական հավասարում: Ինչպես տեսնում ենք, (23) հավասարումը երկրորդ կարգի հավասարում է: Ուրեմն էլիպսը նույնպես երկրորդ կարգի գիծ է:

Այժմ հետազոտենք էլիպսի ձևը և կառուցենք այն:

1. Էլիպսի հավասարման մեջ x և y ընթացիկ կոորդինատները մտնում են զույգ աստիճաններով: Այս հանրահաշվական առանձնահատկությունը բերում է կարևոր երկրաչափական եզրահանգման. էլիպսը սիմետրիկ է կոորդինատական առանցք-

ների նկատմամբ: Իրոք՝ ցանկացած (±x, ±y) կոորդինատներով կետերը բավարարում են էլիպսի հավասարմանը:

2. Գտնենք էլիպսի հատման կետերը կոորդինատական առանցքների հետ: Եթե (23) հավասարման մեջ տեղադրենք y=0, ապա կստանանք՝

$$\frac{x^2}{a^2}=1 \quad x^2=a^2 \qquad\qquad x=\pm a:$$

Հետևաբար, էլիպսն աբսցիսների առանցքի հետ հատվում է երկու կետերում՝ $A_1(a,0)$ և $A_2(-a,0)$:

Նման ձևով, եթե (23) հավասարման մեջ տեղադրենք x=0, կստանանք՝

$$\frac{y^2}{b^2}=1 \quad y^2=b^2 \qquad\qquad y=\pm b:$$

Հետևաբար, էլիպսը օրդինատների առանցքի հետ նույնպես հատվում է երկու կետերում՝ $B_1(0;\ b)$ և $B_2(0;\ -b)$:

A_1, A_2, B_1, B_2 կետերը կոչվում են էլիպսի գագաթներ:

$A_1A_2=2a$ և $B_1B_2=2b$ կոչվում են էլիպսի առանցքներ՝ 2a-ն մեծ առանցքն է, 2b-ն՝ փոքր առանցքը: Համապատասխանաբար a-ն և b-ն կոչվում են էլիպսի կիսաառանցքներ:

3. Եթե (23) հավասարումը լուծենք y–ի նկատմամբ, ապա կստանանք՝

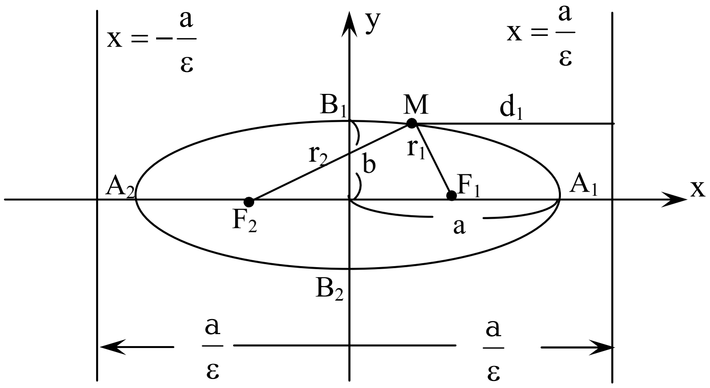
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}:$$

Այս ֆունկցիայի գոյության տիրույթն է $|x|\le a$ և առաջին քառորդի համար, երբ x=0, ապա y=b և երբ $x\to a$, ապա y-ը, նվազելով, ձգտում է 0-ի:

Քանի որ, ըստ առաջին կետի, էլիպսը սիմետրիկ է կոորդինատական առանցքների նկատմամբ, ապա բավական է նրա պատկերը կառուցել առաջին քառորդում և սիմետրիկ ձևով շարունակել մյուս քառորդներում: Այս բոլոր ուսումնասիրությունների հիման վրա կառուցենք էլիպսը (գծ.15):

$\frac{c}{a}$ հարաբերությունը ընդունված է նշանակել ε տառով և անվանել էլիպսի էքսցենտրիսիտետ՝

$$\varepsilon = \frac{c}{a}: \qquad (24)$$



Գծ. 15

Քանի որ $F_1F_2 < F_1M + F_2M$, այսինքն՝ $2c < 2a$, ուստի $c<a$: Հետևաբար, էլիպսի էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon<1$: Արտահայտենք էքսցենտրիսիտետը էլիպսի կիսաառանցքների միջոցով:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ հետևաբար}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}:$$

Այս բանաձևից հետևում է, որ ինչքան ε-ը փոքր է, այնքան b-ն մոտ է գտնվում a-ին և հակառակը՝ ինչքան ε-ը մեծանում է, այնքան b-ն ավելի է փոքրանում a-ից:

Այս ամենը վկայում է այն մասին, որ էքսցենտրիսիտետը բնորոշում է էլիպսի ձգվածության կամ սեղմվածության աստիճանը:

$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ ուղիղները կոչվում են էլիպսի դիրեկտրիսներ:

Քանի որ $\varepsilon<1$, ապա $\frac{a}{\varepsilon}>a$: Հետևաբար, դիրեկտրիսները աբսցիսների առանցքին ուղղահայաց և էլիպսի գագաթներից դուրս գտնվող ուղիղներ են (գծ.15):

Ռացիոնալ բանաձևեր էլիպսի կիզակետային շառավիղների համար

Ըստ էլիպսի սահմանման, $r_1+r_2=2a$, կանոնական հավասարման դուրսբերման ընթացքից հայտնի է, որ $a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=cx+a^2$,այսինքն

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\frac{c}{a}x+a=a+\varepsilon x \quad r_2=a+\varepsilon x$$

Սահմանումից $r_1=2a-r_2=2a-a-\varepsilon x=a-\varepsilon x$:

Այսպիսով, էլիպսի կիզակետային շառավիղների համար ստացվում են հետևյալ ռացիոնալ բանաձևերը՝

$$\begin{cases} r_1=a-\varepsilon x \\ r_2=a+\varepsilon x \end{cases} \qquad (25)$$

Առանց ապացույցի բերենք հետևյալ թեորեմը՝. էլիպսի ցանկացած կետի՝ կիզակետից և համապատասխան դիրեկտրիսից ունեցած հեռավորությունների հարաբերությունը հաստատուն է և հավասար է նրա էքսցենտրիսիտետին՝

$$\frac{r}{d}=\varepsilon \qquad (26)$$

ՀԻՊԵՐԲՈԼ

Սահմանում.- Հիպերբոլ կոչվում է այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների տարբերությունը կիզակետեր կոչվող տրված երկու կետերից հաստատուն մեծություն է: Հիպերբոլի կիզակետերը ընդունված է նշանակել F_1 և F_2 տառերով, իսկ դրանց միջև եղած հեռավորությունը՝ 2c: Հիպերբոլի կամայական M ընթացիկ կետի հեռավորությունները կիզակետերից նշանակում են $r_1=F_1M$ և $r_2=F_2M$ և անվանում կիզակետային շառավիղներ: Ակնհայտ է, որ այդ շառավիղների տարբերությունը բացարձակ մեծությամբ, որն ընդունված է նշանակել 2a, փոքր է միջկիզակետային հեռավորությունից: Այսինքն՝ 2a<2c (a<c): Եթե կոորդինատական համակարգը և կիզակետերը ընտրենք այնպես, ինչպես էլիպսի դեպքում, ապա, ըստ սահմանման, կարող ենք գրել, որ

$$r_1-r_2=\pm 2a \tag{27}$$

M ընթացիկ կետի կոորդինատները նշանակենք (x,y), կիզակետերի կոորդինատները ընտրված համակարգում կլինեն (c, 0) և (-c, 0):

Հաշվենք r_1 և r_2 հատվածների երկարությունները և տեղադրենք (27) հավասարության մեջ.

$$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

(27) հավասարությունից կունենանք.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a: \tag{28}$$

Սա կլինի հիպերբոլի հավասարումը:

Պարզեցնելով այս հավասարումը և նշանակելով $b^2=c^2-a^2$՝ կունենանք

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1: \tag{29}$$

Այս հավասարումը կոչվում է հիպերբոլի կանոնական հավասարում:

Հետազոտենք հիպերբոլի հավասարումը և կառուցենք այն:

1. Հիպերբոլի կանոնական հավասարման մեջ x և y փոփոխականները մտնում են քառակուսի աստիճանով:

Սա նշանակում է, որ հիպերբոլը սիմետրիկ է կոորդինատական առանցքների նկատմամբ:

2. Գտնենք հիպերբոլի հատման կետերը կոորդինատական առանցքների հետ: Այդ նպատակով (29) հավասարման մեջ տեղադրենք y=0 և x=0 ու գտնենք հատման կետերը համապատասխանաբար 0x և 0y առանցքների հետ.

$$y=0,\ \frac{x^2}{a^2}=1,\quad x^2=a^2,\quad x=\pm a:$$

Ուրեմն հիպերբոլը աբսցիսների առանցքի հետ հատվում է երկու կետերում՝ $A_1(a,0)$ և $A_2(-a,0)$:

$$x=0,\ -\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y^2=-b^2,\quad y=\pm\sqrt{-b^2}=\pm bi,$$

որտեղ $i=\sqrt{-1}$ և կոչվում է կեղծ միավոր:

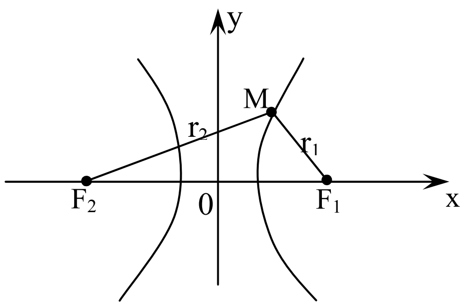
Սա նշանակում է, որ հիպերբոլը օրդինատների առանցքի հետ իրական կետերում չի հատվում: Այստեղից էլ հետևում է, որ հիպերբոլը բաղկացած է երկու թևից՝ աջ թև, որը գտնվում է աջ կիսահարթության մեջ ($x>0$) և ձախ թև, որը գտնվում է ձախ կիսահարթության մեջ ($x<0$):

A_1 և A_2 կետերը կոչվում են հիպերբոլի գագաթներ, $A_1A_2=2a$ կոչվում է հիպերբոլի իրական առանցք:

3. (29) հավասարումը լուծենք y–ի նկատմամբ՝

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ : \qquad (30)$$

Այս ֆունկցիան գոյություն ունի բոլոր այն x-երի համար, որոնք բավարարում են $x^2-a^2\geq 0$ անհավասարությանը, կամ $|x|\geq a$: Այսինքն, աջ թևը դասավորված է $x\geq a$ կիսահարթությունում, իսկ ձախ թևը $x\leq -a$ կիսահարթությունում: Եթե դիտարկենք միայն առաջին քառորդը, ապա (30) հավասարումից հետևում է, որ $x\to\infty$, $y\to\infty$: Ստացված արդյունքների հիման վրա կառուցենք հիպերբոլը առաջին քառորդում և այն սիմետրիկ ձևով շարունակենք մյուս քառորդներում նույնպես (գծ.16):



Գծ.16

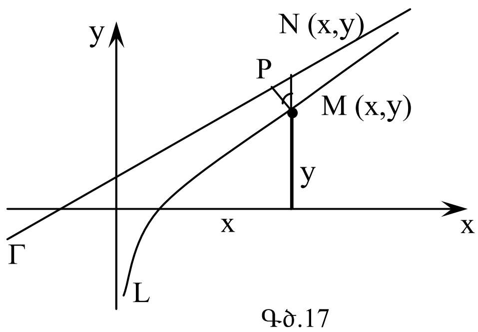
$\frac{c}{a}$ հարաբերությունը նշանակում են ε տառով և անվանում հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետ՝ $\varepsilon = \frac{c}{a}$: Քանի որ հիպերբոլի համար $c > a$, ապա $\varepsilon > 1$:

$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ ուղիղները կոչվում են հիպերբոլի դիրեկտրիսներ: Քանի որ ε>1, ապա $\frac{a}{\varepsilon} < a$: Հետևաբար, հիպերբոլի դիրեկտրիսները Ox առանցքին ուղղահայաց և գագաթներից ներս ընկած ուղիղներ են:

ՀԻՊԵՐԲՈԼԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏՆԵՐԸ

Նախ սահմանենք թե որն է կոչվում տրված ֆունկցիայի ասիմպտոտ:

Սահմանում.- Տրված Γ ուղիղը կոչվում է L կորի ասիմպտոտ, եթե կորի վրայով կետի անվերջորեն հեռանալու ժամանակ նրանց միջև եղած հեռավորությունը ձգտում է զրոյի (գծ.17):



Գծ.17

Ըստ սահմանման, $\lim\limits_{x\to\infty} MP = 0$:

ΔMPN -ից MP=MN cosφ: Քանի որ |cosφ| ≤ 1, ապա MP→0, MN-ը նույնպես կձգտի զրոյի: Այսինքն, $\lim\limits_{x\to\infty} MN = 0$: Բայց MN=Y-y, հետևաբար, ասիմպտոտի սահմանումը վերջնական տեսքով մաթեմատիկորեն կգրվի հետևյալ կերպ.

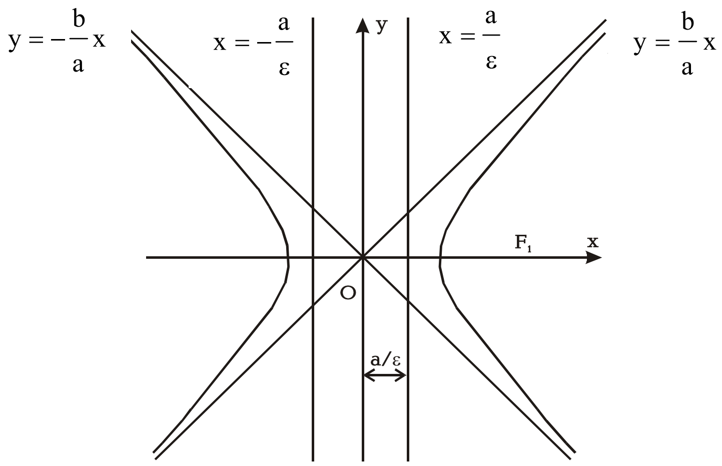
$$\lim_{x\to\infty} (Y-y)=0 \tag{31}$$

Այժմ ցույց տանք, որ $Y = \pm\frac{b}{a}x$ ուղիղները $Y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ հիպերբոլի ասիմպտոտներն են : Իրոք՝

$$\lim_{x\to\infty}(Y - y) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0 :$$

Գծենք հիպերբոլը իր ասիմպտոտներով և դիրեկտրիսաներով հանդերձ (գծ.18)



Գծ.18

Ելնելով հիպերբոլի սահմանումից կարելի է ստանալ ռացիոնալ բանաձևեր հիպերբոլի կիզակետային շառավիղների համար: Դրանք կունենան հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x \\ r_2 = -a + \varepsilon x \end{cases} \quad \text{աջ թևի համար}$$

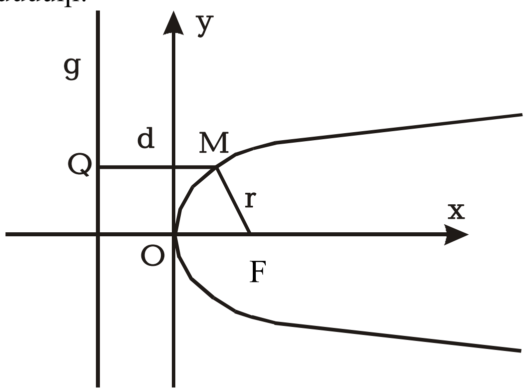
$$\begin{cases} r_1 = -a - \varepsilon x \\ r_2 = a - \varepsilon x \end{cases} \quad \text{ձախ թևի համար:}$$

Ինչպես, որ էլիպսի դեպքում էր, հիպերբոլի բոլոր կետերն էլ բավարարում են (26) հավասարմանը: Դա կարելի է ապացուցել անմիջական տեղադրման միջոցով:

ՊԱՐԱԲՈԼ

Սահմանում.- Պարաբոլ կոչվում է այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունները կիզակետ կոչվող տրված մի կետից և դիրեկտրիս կոչվող տրված մի ուղղից հավասար են միմյանց:

Պարաբոլի կիզակետը նշանակենք F տառով, իսկ դիրեկտրիսը՝ g տառով: Կիզակետի և դիրեկտրիսի միջև հեռավորությունը ընդունված է նշանակել p տառով և անվանել պարաբոլի պարամետր:



Գծ.19

Հարթության վրա մտցնենք ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգ. այնպես, որ ox առանցքը անցնի կիզակետով և ուղղահայաց լինի դիրեկտրիսին (ուղղված դիրեկտրիսից դեպի կիզակետ)։

Կոորդինատական սկզբնակետը տեղադրենք կիզակետի և դիրեկտրիսի մեջտեղում (գծ.19)։

Ընտրված համակարգում կիզակետի կոորդինատները կլինեն $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, իսկ դիրեկտրիսի հավասարումը՝ $x = -\frac{p}{2}$։

Արտածենք պարաբոլի հավասարումը ընտրված համակարգում։ Հարթության վրա վերցնենք մի M(x,y) ընթացիկ կետ նշանակենք դրա հեռավորությունը կիզակետից r-ով (r =FM), իսկ դիրեկտրիսից՝ d-ով (d=MQ)։ Ըստ սահմանման,

$$r = d: \tag{32}$$

Պարաբոլի հավասարումը վերջնական տեսքով ստանալու նպատակով, հաշվենք r-ը և d-ն ու տեղադրենք (32) հավասարման մեջ։

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \qquad d = x + \frac{p}{2}:$$

Հետևաբար.

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}:$$

Բերենք այս հավասարումը պարզ տեսքի. այդ նպատակով երկու կողմը բարձրացնենք քառակուսի.

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

կամ

$$y^2 = 2px : \tag{33}$$

Սա կլինի պարաբոլի կանոնական հավասարումը։

Այժմ հետազոտենք պարաբոլի տեսքը և կառուցենք այն։

1. (33) հավասարումից հետևում է, որ պարաբոլը սիմետրիկ է 0x առանցքի նկատմամբ, քանի որ նրան բավարարում են բոլոր $(x, \pm y)$ կետերի կոորդինատները:

2. Երբ x=0, ապա y=0, այսինքն պարաբոլը անցնում է կոորդինատական սկզբնակետով:

3.Եթե $p > 0$, ապա $x \geq 0$, այսինքն այս դեպքում պարաբոլը դասավորված է աջ կիսահարթության մեջ: Իսկ եթե $p< 0$, ապա $x \leq 0$, դա նշանակում է, որ պարաբոլը դասավորված է ձախ կիսահարթության մեջ:

4. (33) հավասարումից երևում է նաև, որ $x\to\infty$, $y\to\pm\infty$:

Այժմ կառուցենք պարաբոլը (գծ.19).

Եթե պարաբոլի կիզակետը տեղադրենք 0y առանցքի վրա և օգտվելով սահմանումից դուրս բերենք հավասարումը, ապա կստանանք.

$$x^2 = 2py \tag{34}$$

Սա մի պարաբոլ է, որը սիմետրիկ է 0y առանցքի նկատմամբ և որի գագաթը նույնպես գտնվում է կոորդինատական սկզբնակետում: Ընդ որում, եթե $p > 0$, ապա $y\geq 0$ և պարաբոլը դասավորված է վերին կիսահարթության մեջ, իսկ եթե $p< 0$, ապա $y\leq 0$ և պարաբոլը գտնվում է ստորին կիսահարթության մեջ: Դպրոցական ծրագրից հայտնի է այս պարաբոլը: Իրոք (34)-ից $y = \frac{1}{2p}x^2$:

Կամ եթե նշանակենք $\frac{1}{2p} = a$, կստանանք $y=ax^2$:

Քանի որ, ըստ պարաբոլի սահմանման $r = d$, ապա կարող ենք գրել $\frac{r}{d} = 1$: Այստեղից բնական է ենթադրել, որ պարաբոլի էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon=1$:

Այսպիսով՝ էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը բնութագրվում են մի ընդհանուր տեսքի հավասարումով՝

$$\frac{r}{d} = \varepsilon:$$

Եթե $\varepsilon<1$, ապա այս հավասարումը պատկերում է էլիպս, եթե $\varepsilon>1$՝ հիպերբոլ, իսկ եթե $\varepsilon=1$, ապա այդ հավասարումը պատկերում է պարաբոլ:

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՏԱՐՐԵՐԸ

ԵՐԿՐՈՐԴ ԵՎ ԵՐՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՈՐՈՇԻՉՆԵՐ (ԴԵՏԵՐՄԻՆԱՆՏՆԵՐ) ԵՎ ԴՐԱՆՑ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ արտահայտությունը կոչվում է երկրորդ կարգի որոշիչ, իսկ $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ թվերը՝ որոշիչի էլեմենտներ կամ տարրեր:

Որոշիչի վերևի ձախ անկյունից ներքևի աջ անկյուն տարվող անկյունագիծը կոչվում է գլխավոր անկյունագիծ, իսկ ներքևի ձախ անկյունից վերևի աջ անկյուն տարվողը՝ երկրորդական: Փաստորեն՝ երկրորդ կարգի որոշիչը հավասար է գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող էլեմենտների արտադրյալից հանած երկրորդական անկյունագծի վրա գտնվող էլեմենտների արտադրյալը: Երկրորդ կարգի որոշիչը բաղկացած է երկու տողից և երկու սյունից: Էլեմենտների ինդեքսներից առաջինը ցույց է տալիս տողի համարը, իսկ երկրորդը՝ սյան համարը:

Օրինակ. -a_{21}-ը նշանակում է երկրորդ տողի և առաջին սյան էլեմենտ: Եթե որոշիչի տողերը փոխարինենք համապատասխան սյուներով, ապա որոշիչի արժեքը չի փոխվի:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

այսինքն՝ տողերը և սյուները հավասարազոր են:

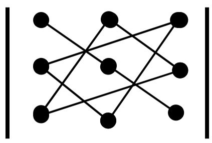
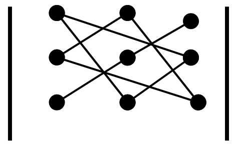
Եթե որոշիչի երկու հաջորդական տողերի տեղերը փոխենք, ապա դրանից կփոխվի որոշիչի նշանը՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}:$$

Հետևյալ արտահայտությունը կոչվում է երրորդ կարգի որոշիչ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} : \end{array}$$

Գրված հաշվման բանաձևը ստացվում է հետևյալ սխեմայով.

ա)  բ) 

Այստեղ ա)-ն դրական անդամների համար է (ըստ գլխավոր անկյունագծի), բ)-ն երեք բացասական անդամների (ըստ երկրորդական անկյունագծի):

Որոշիչների հաշվման այս մեթոդն անվանում են «եռանկյունիների» մեթոդ:

Օրինակ. - Հաշվել երրորդ կարգի որոշիչը՝

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 20 - 4 - 24 - 6 - 5 = -50 :$$

Գոյություն ունի նաև երրորդ կարգի որոշիչի հաշվման զուգահեռ ուղիղների մեթոդը, ըստ որի՝ տրված որոշիչին կցագրում են առաջին երկու սյուները, տանում գլխավոր և երկրորդական անկյունագծերն ու դրանց զուգահեռ ուղիղները, որոնք հատում են երեքական էլեմենտներ: Գլխավոր անկյունագծի և դրան զուգահեռ ուղիղների վրա գտնվող էլեմենտների արտադրյալների գումարից ստացվում են դրական անդամները, իսկ երկրորդական անկյունագծի և դրան զուգահեռ ուղիղների վրա գտնվող էլեմենտների արտադրյալից՝ բացասական անդամները:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}:$$

Համեմատելով այս արտահայտության աջ մասը վերը նշված բանաձևի աջ մասի հետ՝ նկատում ենք, որ դրանք նույնն են:

Օրինակ. - Հաշվել երրորդ կարգի որոշիչը՝

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{matrix} = 9 - 4 + 20 - 24 - 5 + 6 = 2:$$

Մանրամասն ներկայացնենք երրորդ կարգի որոշիչների հատկությունները:

1. Եթե որոշիչի տողերը փոխարինենք համապատասխան սյուներով, ապա որոշիչի արժեքը չի փոխվի (տողերի և սյուների հավասարազորության հատկություն):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}:$$

Այս հատկության հիման վրա հաջորդ բոլոր հատկությունները հավասարապես վերաբերում են ինչպես տողերին, այնպես էլ սյուներին:

2. Եթե որոշիչի երկու հաջորդական տողերի կամ սյուների տեղերը փոխենք, ապա որոշիչի նշանը կփոխվի:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}:$$

3. Եթե որոշիչն ունի երկու նույնական տող կամ սյուն, ապա արժեքը հավասար է 0-ի:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

4. Եթե որոշիչի որևէ տողի կամ սյան էլեմենտները 0-ներ են, ապա որոշիչի արժեքը հավասար է 0-ի:
5. Եթե որոշիչի որևէ տողում կամ սյունում կա ընդհանուր բազմապատկիչ, ապա այն կարելի է դուրս բերել որոշիչից:
$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}:$$
6. Եթե որոշիչի որևէ տողի կամ սյան էլեմենտները ներկայացված են երկու թվերի գումարի տեսքով, ապա այդ որոշիչը հավասար է երկու այնպիսի որոշիչների գումարի, որոնցից առաջինի համար տվյալ տողի սյան էլեմենտերն առաջին գումարելիներն են, իսկ երկրորդի համար՝ երկրորդ գումարելիները:
$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
7. Եթե որոշիչի որևէ տողի կամ սյան էլեմենտներին գումարենք դրան զուգահեռ տողի կամ սյան էլեմենտները՝ նախապես բազմապատկելով ինչ-որ բազմապատկիչով, ապա դրանից որոշիչի արժեքը չի փոխվի:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}:$$

Ըստ նախորդ հատկության՝
$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0:$$

Ստացվեց այն, ինչ պետք էր ապացուցել:

Մինչ հաջորդ հատկություններին անցնելը՝ ծանոթանանք գծային հանրահաշվի երկու կարևոր գաղափարների հետ: Դրանք են՝ մինոր և հանրահաշվական լրացում:

Դիցուք տրված է $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ որոշիչը: Եթե ջնջենք որոշիչի մի տող և մի սյուն, ապա դրանից կմնա նոր որոշիչ (կարգով մեկը պակաս), որն անվանում են մինոր և նշանակում M_{ij}, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3$: Ջնջելով տարբեր տողեր և տարբեր սյուներ՝ կստանանք տարբեր մինորներ: Օրինակ, եթե ջնջենք որոշիչի առաջին տողը և առաջին սյունը, կստանանք՝

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ և այլն:}$$

Առավել կարևոր է հանրահաշվական լրացման գաղափարը: a_{ij} էլեմենտի հանրահաշվական լրացում կոչվում է այդ էլեմենտը պարունակող տողը և սյունը ջնջելուց առաջացած մինորը՝ բազմապատկած $(-1)^{i+j}$ –ով: Այն նշանակում են A_{ij}, $i, j = 1,2,3$: Այնպես որ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$:

Օրինակ. - $A_{11}=M_{11}$, $A_{23}= -M_{23}$:

8. Յուրաքանչյուր որոշիչ հավասար է իր որևէ սյան կամ տողի էլեմենտների և դրանց համապատասխան հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարին, այսինքն՝ $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, կամ $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$ և այլն:

Այս բանաձևերն անվանում են որոշիչի վերլուծություններ ըստ դրանց որևէ շարքի էլեմենտների: Վերոնշյալ բանաձևերից առաջինը վերլուծությունն է ըստ առաջին տողի էլեմենտների, իսկ երկրորդը՝ ըստ առաջին սյան էլեմենտների: Այս բանաձևրի միջոցով հաշվում են ոչ միայն երրորդ կարգի որոշիչները, այլ նաև չորրորդ և ավելի բարձր կարգի որոշիչները: Ավելի բարձր կարգի որոշիչները հաշվելու համար նպատակահարմար է, օգտվելով որոշիչի յոթերորդ հատկությունից, որևէ տողի կամ սյան էլեմենտներից հնարավորինս ստանալ զրոներ և հետո վերլուծել ըստ այդ տողի կամ սյան էլեմենտների:

9. Որոշիչի որևէ տողի կամ սյան էլեմենտների և դրանց զուգահեռ տողի կամ սյան էլեմենտների հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարը հավասար է 0-ի. $\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$, որովհետև այս դեպքում ստացվում են որոշիչներ, որոնց երկու տողերը կամ սյուները նույնն են:

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ: ԿՐԱՄԵՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

Որոշիչներն ունեն կարևոր կիրառություններ գծային հավասարումների համակարգերի լուծման ժամանակ:

Դիտարկենք երեք անհայտներով երեք գծային հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} :$$

Անհայտների գործակիցներից կազմված որոշիչն անվանենք համակարգի հիմնական որոշիչ և նշանակենք

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} :$$

x_1 անհայտը գտնելու համար համակարգի հավասարումները համապատասխանաբար բազմապատկենք առաջին սյան էլեմենտների հանրահաշվական լրացումներով և գումարենք: Կստանանք՝

$$(a_{11}A_{21}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x_1+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})x_2+$$
$$+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})x_3=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31},$$

որտեղից $\Delta\cdot x_1=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}$:

x_2 անհայտը գտնելու համար համակարգի հավասարումները համապատասխանաբար բազմապատկենք որոշիչի երկրորդ սյան հանրահաշվական լրացումներով և գումարենք: Կստանանք՝

$$\Delta\cdot x_2=b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32}:$$

x_3 անհայտը գտնելու համար համակարգի հավասարումները համապատասխանաբար բազմապատկենք որոշիչի երրորդ սյան հանրահաշվական լրացումներով և գումարենք: Կստանանք՝

$$\Delta\cdot x_3=b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}:$$

Այսպիսով, անհայտների որոշման համար ունենք հետևյալ հավասարությունները.

$$\begin{cases}\Delta\cdot x_1=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}\\ \Delta\cdot x_1=b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32}\\ \Delta\cdot x_1=b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}\end{cases}:$$

Դժվար չէ նկատել, որ այս հավասարությունների աջ մասերը երրորդ կարգի որոշիչներ են, որոնցից յուրաքանչյուրը կարելի է ստանալ համակարգի հիմնական որոշիչից՝ առաջին դեպքում առաջին սյունը փոխարինելով ազատ անդամների սյունով, երկրորդ դեպքում երկրորդ սյունը փոխարինելով ազատ անդամների սյունով, երրորդ դեպքում երրորդ սյունը փոխարինելով ազատ անդամների սյունով: Այսինքն՝

$$b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\Delta_1:$$

$$b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32}=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}=\Delta_2:$$

$$b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=\Delta_3:$$

$\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ որոշիչներն անվանում են համակարգի օժանդակ որոշիչներ:

Ստացանք $\begin{cases} \Delta\cdot x_1=\Delta_1 \\ \Delta\cdot x_2=\Delta_2 \\ \Delta\cdot x_3=\Delta_3 \end{cases}$,

այստեղից որոշենք x_1, x_2, x_3 անհայտները:

$\begin{cases} x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta} \end{cases}$ բանաձևերն անվանում են Կրամերի բանաձևեր:

Այսպիսով, գծային հավասարումների համակարգը Կրամերի բանաձևերով լուծելու համար պետք է հաշվել $\Delta,\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ որոշիչները և տեղադրել բանաձևերի մեջ:

Լուծումները հետազոտելու համար դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

1) ենթադրենք՝ $\Delta\neq 0$, այս դեպքում Կրամերի բանաձևերից հետևում է, որ համակարգն ունի մեկ լուծում.

2) ենթադրենք՝ $\Delta=0$, բայց օժանդակ որոշիչներից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի, այս դեպքում Կրամերի բանաձևերից հետևում է, որ համակարգը լուծում չունի.

3) ենթադրենք՝ $\Delta=0$, և օժանդակ որոշիչները նույնպես հավասար են զրոյի, այս դեպքում համակարգն ունի անթիվ լուծումներ:

Եթե $b_1=b_2=b_3=0$, համակարգը կոչվում է համասեռ հավասարումների համակարգ: Եթե համակարգի հիմնական որոշիչը՝ $\Delta\neq 0$, ապա համակարգի լուծումները կլինեն զրոյական, քանի որ այս դեպքում $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$: Որպեսզի համասեռ համակարգն ունենա ոչ զրոյական լուծում, Կրամերի բանաձևերից հետևում է, որ հիմնական որոշիչը պետք է հավասար լինի զրոյի $(\Delta = 0)$:

Օրինակ. - Կրամերի բանաձևերով լուծել հավասարումների հետևյալ համակարգը:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} :$$

Հաշվենք $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ որոշիչները.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 - 9 - 3 - 6 - 2 = -23,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 3 + 1 - 36 + 1 = 23,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -24 - 1 - 3 - 18 - 2 + 2 = -46,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 - 54 + 3 - 3 - 12 = -69 :$$

Ուրեմն՝ $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{23}{-23} = -1$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-46}{-23} = 2$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-69}{-23} = 3$: Պատ.՝ (1, 2, 3):

ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ ԵՎ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԴՐԱՆՑ ՆԿԱՏՄԱՄԲ

Թվերի նշված աղյուսակը կոչվում է մատրից, իսկ այդ թվերը՝ մատրիցի էլեմենտներ կամ տարրեր:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}:$$

Սա m×n չափի մատրից է: Եթե մատրիցի տողերի թիվը հավասար է սյուների թվին՝ m=n, ապա այն կոչվում է քառակուսային մատրից, իսկ եթե m≠n՝ ուղղանկյուն մատրից: Գոյություն ունեն նաև տողային և սյունային մատրիցներ: Այն մատրիցը, որը բաղկացած է միայն մեկ տողից, կոչվում է տողային մատրից՝ $(a_1, a_2, \dots a_n)$, իսկ այն մատրիցը, որը բաղկացած միայն մեկ սյունից, կոչվում է սյունային մատրից՝ $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$:

Ընդունված է մատրիցները նշանակել մեծատառերով՝ A, B, C, X, Y, ... կամ (a_{ij}), որտեղ $i = 1,2,3,\dots,m$; $j = 1,2,3,\dots,n$:

Մանրամասն ուսումնասիրենք քառակուսային մատրիցները և որպես օրինակ դիտարկենք երրորդ կարգի քառակուսային մատրիցը՝

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}:$$

Ամեն մի քառակուսային մատրից ունի իր որոշիչը, որն ընդունված է նշանակել՝

$$\Delta A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\det A:$$

Այն քառակուսային մատրիցը, որի որոշիչը հավասար է զրոյի $(\Delta A=0)$, կոչվում է եզակի մատրից, իսկ եթե $\Delta A\neq 0$, ապա այն կոչվում է ոչ եզակի մատրից:

A մատրիցի՝ զրոյից տարբեր մինորի ամենաբարձր կարգը կոչվում է այդ մատրիցի ռանգ և նշանակվում rangA:

Եթե մատրիցի տողերը փոխարինենք համապատասխան սյուներով, ապա կստանանք նոր մատրից, որն անվանում են տրանսպոնացված մատրից և նշանակում A^T:

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}:$$

Եթե մատրիցի բոլոր էլեմենտները զրոներ են, ապա այն կոչվում է զրոյական մատրից, իսկ եթե մատրիցի բոլոր էլեմենտները զրոներ են (բացի անկյունագծի վրա դասավորված էլեմենտներից), ապա այն կոչվում է անկյունագծային մատրից՝

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}:$$

Այն անկյունագծային մատրիցը, որի անկյունագծի էլեմենտները հավասար են մեկի, կոչվում է միավոր մատրից և նշանակվում E տառով՝

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Տրանսպոնացված մատրիցի էլեմենտների հանրահաշվական լրացումներից կազմված մատրիցը կոչվում է կցված մատրից և նշանակվում A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}:$$

I. Երկու մատրիցների գումարումը

Դիցուք տրված են A և B մատրիցները.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}:$$

Այս մատրիցների գումար մատրիցը կազմելու համար բավական է դրանց համապատասխան էլեմենտները գումարել՝

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{11} + b_{11} & a_{11} + b_{11} \\ a_{11} + b_{11} & a_{11} + b_{11} & a_{11} + b_{11} \\ a_{11} + b_{11} & a_{11} + b_{11} & a_{11} + b_{11} \end{pmatrix}:$$

II. Մատրիցի բազմապատկումը k բազմապատկիչով

A մատրիցը ինչ-որ k բազմապատկիչով բազմապատկելու համար պետք է դրա բոլոր էլեմենտները բազմապատկել այդ թվով՝

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}:$$

III. Երկու մատրիցների բազմապատկումը

Երկու մատրիցներ կարելի է բազմապատկել, եթե առաջին մատրիցի սյուների քանակը հավասար է երկրորդ մատրիցի տողերի քանակին:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}:$$

Նշանակենք C=A×B, $C_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}$; $(i = 1,2,3,\ j = 1,2,3)$, այսինքն`

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Օրինակ.- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

Բազմապատկման կանոնից և այս օրինակից գալիս ենք այն եզրակացության, որ ընդհանուր դեպքում մատրիցները բազմապատկելիս տեղափոխման օրենքը չի գործում:

AB≠BA:

Բացառություն է կազմում միավոր մատրիցով բազմապատկելը` AE=EA=A, այսինքն` E-ն մատրիցների տեսության մեջ կատարում է 1-ի դերը:

ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑ ԵՎ ԴՐԱ ԳՏՆԵԼԸ

Սահմանում. - Տրված A մատրիցի հակադարձ կոչվում է այն մատրիցը, որը բազմապատկելով A մատրիցով` ինչպես ձախից, այնպես էլ աջից ստացվում է միավոր մատրից:

A հակադարձը ընդունված է նշանակել A^{-1}, այնպես որ ըստ սահմանման` $AA^{-1}=A^{-1}A=E$:

Ապացուցենք, որ եթե A մատրիցի որոշիչը հավասար չէ զրոյի $(\Delta A \neq 0)$, ապա $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} A^{*}$: Եթե $\Delta A = 0$, ապա այդ մատրիցը հակադարձ չունի:

Կազմենք AA^{-1} մատրիցը. եթե այս արտադրյալը տվեց միավոր մատրից, ուրեմն վերոնշյալ բանաձևն ապացուցված է:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}{\Delta} & \frac{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}}{\Delta} & \frac{a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}}{\Delta} \\ \frac{a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}}{\Delta} & \frac{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}}{\Delta} & \frac{a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33}}{\Delta} \\ \frac{a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13}}{\Delta} & \frac{a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23}}{\Delta} & \frac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E :$$

Քանի որ $\frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1$, $\frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1$, $\frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1$, մնացած էլեմենտների համարիչները հավասար են զրոյի:

Այսպիսով, մատրիցի հակադարձը գտնելու համար անհրաժեշտ է՝

ա) հաշվել ΔA -ն, եթե $\Delta A \neq 0$,

բ) հաշվել տրված մատրիցի էլեմենտների հանրահաշվական լրացումները $(A_{11}, A_{12,} ...)$,

գ) կազմել A^* կցված մատրիցը,

դ) ստացված արդյունքները տեղադրել $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} A^*$ բանաձևի մեջ:

Օրինակ.- Գտնել $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ մատրիցի հակադարձը:

1. $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 + 2 - 1 - 4 - 3 = 1$:

2. A_{11}=-2, A_{21}=1, A_{31}=1,
A_{12}=-1, A_{22}=0, A_{32}=1, A_{13}=5, A_{23}=-1, A_{33}=-3:

3. $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$:

4. $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} A^* = 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$:

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԳՐԱՌՈՒՄԸ ԵՎ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

Որպես օրինակ վերցնենք երեք անհայտով երեք գծային հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}:$$

Եթե նշանակենք $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$,

ապա տրված համակարգը կարելի է գրել հետևյալ մատրիցային հավասարման տեսքով՝ AX=B:

Այս մատրիցային հավասարումը լուծելու համար երկու կողմը ձախից բազմապատկենք A^{-1} հակադարձ մատրիցով, կստանանք $A^{-1}AX = A^{-1}B$, $A^{-1}A=E$, $EX= A^{-1}B$, EX=X, հետևաբար՝ $X= A^{-1}B$: Նախապես որոշելով A^{-1} հակադարձ մատրիցը և այն բազմապատկելով B մատրիցով՝ կստանանք $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

մատրիցը, այսինքն՝ տրված համակարգի լուծումը:

Օրինակ. - Հակադարձ մատրիցի օգնությամբ լուծել գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=0\\2x_1+x_2+x_3=1\\x_1+3x_2+x_3=2\end{cases}:$$

$$\text{Նշանակենք } A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&3&1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},$$

կստանանք AX=B, որի լուծումն է $X=A^{-1}B$,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-1&0&1\\5&-1&-3\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-1&0&1\\5&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-7\end{pmatrix}:$$

Պատ.՝ $x_1=3$, $x_1=-2$, $x_1=-7$:

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԱՆՀԱՅՏՆԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆ ԱՐՏԱՔՍՄԱՆ ՄԵԹՈԴ ԿԱՄ ԳԱՈՒՍԻ ՄԵԹՈԴ

Դիցուք տրված է գծային հավասարումների համակարգ՝

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}:$$

Գաուսի մեթոդը բաղկացած է երկու քայլից՝ ուղիղ քայլ և հակադարձ քայլ: Ըստ այս մեթոդի՝ արտաքսում ենք x_1 անհայտը համակարգի բոլոր հավասարումներից՝ բացի առաջինից: Դրա համար բավական է համակարգի երկրորդ և երրորդ հավասարումների երկու կողմերը բազմապատկել ինչ-որ բազմապատկիչով՝ հավասարեցնելով x_1 անհայտի գործակիցը առաջին հավասարման x_1 անհայտի գործակցին, առաջին հավասարումից հերթով հանել նոր ստացված հավասարումները: Կստանանք՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}:$$

Նույն կերպ արտաքսենք x_2 անհայտը այս համակարգի բոլոր հավասարումներից (բացի առաջին երկուսից): Կստանանք՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad a''_{33}x_3 = b''_3 \end{cases}:$$

Գաուսի մեթոդի ուղիղ քայլն ավարտվեց:

Այժմ վերջին համակարգի վերջին հավասարումից որոշենք x_3 անհայտը՝ $x_3 = \dfrac{b''_3}{a''_3}$:

Տեղադրելով x_3-ի այս արժեքը երկրորդ հավասարման մեջ՝ որոշենք x_2 անհայտը: Արդեն x_2-ի և x_3-ի հայտնի արժեքները տեղադրելով համակարգի առաջին հավասարման մեջ՝ կորոշենք x_1 անհայտը: Սա էլ Գաուսի մեթոդի հակադարձ քայլն է:

Գործնականում համակարգը Գաուսի մեթոդով լուծելու համար կարելի է դուրս գրել անհայտների գործակիցներից կազմված ընդլայնված մատրիցը և նույնական ձևափոխություններով զրոներ դարձնել գլխավոր անկյունագծից ներքև դասավորված էլեմենտները, ինչից հետո կիրառել հակադարձ քայլը:

$$\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{22} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_2 \end{matrix}\right. :$$

Օրինակ.- Գաուսի մեթոդով լուծել համակարգը`

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 : \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

Անհայտների գործակիցներից կազմենք ընդլայնված մատրիցը`

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 4 \\ -11 \\ 0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 4 \\ -11 \\ -3 \end{matrix}\right. :$$

Ստորին տողից $-3x_3=-3$, $x_3=1$, երկրորդ տողից $-11x_2=-11$, $x_2=1$ և առաջին տողից $x_1+2\cdot 1+1\cdot 1=4$, $x_1=1$: Պատ.` (1;1;1):

ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Մաթեմատիկական մեծության գաղափարը

Մաթեմատիկայում «մեծություն» անվան տակ հասկացվում է այն ամենը, ինչը ենթակա է չափման: Այստեղ հարկ է նշել, որ մեծության ֆիզիկական էությունը մեզ համար նշանակություն չունի: Այդ իսկ պատճառով մաթեմատիկայի բոլոր եզրակացությունները օժտված են ընդհանրությամբ, դրանք կիրառելի են բոլոր մեծությունների նկատմամբ ընդհանրապես: Նման տիպի մեծությունները կոչվում են մաթեմատիկական մեծություններ: Մեծության չափման արդյունքը արտահայտվում է թվով, որը կոչվում է նրա թվային արժեք:

Մաթեմատիկական մեծությունները լինում են հաստատուն և փոփոխական:

Հաստատուն մեծություն կոչվում է այն մեծությունը, որն ընդունում է միևնույն թվային արժեքը: Օրինակ` հավասարաչափ ուղղագիծ շարժման արագությունը հաստատուն մեծություն է:

Փոփոխական մեծություն կոչվում է այն մեծությունը, որն ընդունում է տարբեր թվային արժեքներ: Օրինակ՝ որոշակի զանգվածի գազի ճնշումն ու ծավալը փոփոխական մեծություններ են:

Հաստատուն մեծությունները ընդունված է նշանակել a, b, c, . . . α, β, γ, . . . տառերով, իսկ փոփոխական մեծությունները x,y,z, . . . ξ,η,ζ. . .տառերով:

Փոփոխական մեծության և հաջորդականության սահմանը

Սահմանում. – a հաստատուն թիվը կոչվում է x փոփոխական մեծության սահման, եթե սկսած ինչ-որ մի արժեքից x-a կամ a-x տարբերության բացարձակ արժեքը դառնում է և միշտ մնում փոքր, քան ցանկացած, նախապես վերցրած, բավականաչափ փոքր $\varepsilon>0$ թիվը: Այսինքն, եթե $|x-a|< \varepsilon$: Եթե a-ն x-ի սահմանն է,ապա գրում են, որ $\lim x=a$ կամ $x\to a$ (սահման x հավասար է a, լիմենս x հավասար է a, x ձգտում է a):

Պարզ է, որ հաստատուն մեծության սահմանը հավասար կլինի հենց իրեն:

Եթե x փոփոխական մեծության արժեքները համարակալված են և դասավորված որոշակի կարգով, ապա այդպիսի փոփոխական մեծությանը անվանում են կարգավորված փոփոխական մեծություն կամ հաջորդականություն և նշանակում են x_n-ով, որտեղ n-ը փոփոխական մեծության արժեքի համարն է: n-ին տալով տարբեր արժեքներ՝ n=1,2,3,...N, N+1, ... , կստանանք x_1, x_2, x_3, ... , x_n ... հաջորդականությունը: Հաջորդականությունը ընդունված է նշանակել $\{x_n\}$ ձևով:

Սահմանում.- a հաստատուն թիվը կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության սահման, եթե ցանկացած նախապես տրված, բավականաչափ փոքր $\varepsilon>0$ թվի համար կարելի է նշել մի այնպիսի n=N համար, որ $|x_n - a| < \varepsilon$, հենց որ $n\geq N$-ից:

Եթե a թիվը հանդիսանում է x_n հաջորդականության սահմանը, ապա այդ գրում են հետևյալ ձևով՝

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a :$$

Օրինակ.- x_n փոփոխական մեծության սահմանը, որը n-ի անսահման մեծացման հետ միասին ընդունում է հաջորդաբար x_1=0,9; x_2=0,99; x_3=0,999;…,հավասար է 1:

Իրոք, α_n=1-x_n տարբերությունը հաջորդաբար ընդունում է հետևյալ արժեքները:

α_1 =1-0,9=0,1; α_2=1-0,99=0,01; α_3=1-0,999=0,001… և ակնհայտ է, որ սկսած մի արժեքից այդ տարբերությունը դառնում է ավելի փոքր, քան ցանկացած նախապես վերցրած, բավականաչափ փոքր $\varepsilon>0$ թիվը:

ՖՈՒՆԿՑԻԱ
ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ

Սահմանում.- y փոփոխականը x փոփոխականի ֆունկցիան է, եթե x-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է y-ի որոշակի արժեք:

x-ի այն արժեքների բազմությունը, որոնց համար գոյություն ունի y-ի որոշակի արժեք, կոչվում է ֆունկցիայի գոյության կամ որոշման տիրույթ:

Եթե x-ի մեկ արժեքին համապատասխանում է y-ի միայն մեկ արժեք, ապա ֆունկցիան կոչվում է միարժեք ֆունկցիա:

x փոփոխականը կոչվում է անկախ փոփոխական կամ արգումենտ, իսկ y փոփոխականը` կախյալ փոփոխական կամ ֆունկցիա:

Մեզ շրջապատող իրականության մեջ կարելի է նշել բազմաթիվ ֆունկցիոնալ կախման օրինակներ` օդի ջերմաստիճանի կախումը ժամանակից, շրջանագծի մակերեսի կախումը շառավղից և այլն:

Ընդհանուր դեպքում ֆունկցիան նշանակում են y=f(x) տեսքով, որտեղ f-ը կոչվում է ֆունկցիայի սիմվոլ և ցույց է տալիս, թե արգումենտի (x) նկատմամբ ինչպիսի մաթեմատիկական գործողություններ պետք է կատարել, որպեսզի ստացվի ֆունկցիայի (y) արժեքը: Բերենք մի քանի օրինակներ`

$y = x^2$, $y = \sin x$, $y = \dfrac{x+1}{2x-5}$ և այլն:

Ֆունկցիան կարելի է տալ երեք եղանակով.

1. Վերլուծական, այսինքն y=f(x) տեսքով (բանաձևի օգնությամբ):
2. Աղյուսակի տեսքով:
3. Գրաֆիկական:

Քանի որ ֆունկցիաների տարրական տեսությունը մեզ հայտնի է մաթեմատիկայի դպրոցական ծրագրից ուստի միանգամից անցնենք ֆունկցիայի սահմանի ձևակերպմանը:

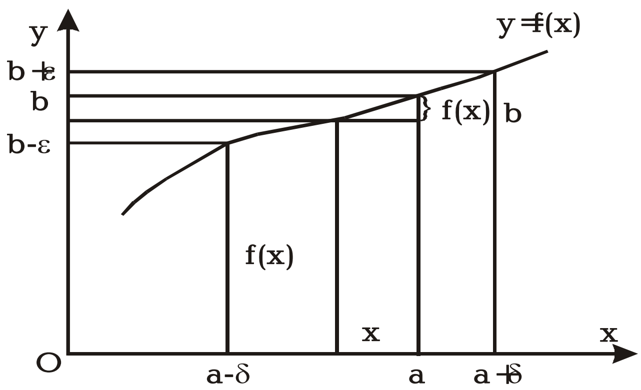
Սահմանում. - b թիվը կոչվում է y=f(x) ֆունկցիայի սահման x-ը a-ին ձգտելիս՝ եթե x-ի a-ին բավականաչափ մոտ գտնվող արժեքներին համապատասխանում են y-ի b-ին շատ մոտ գտնվող արժեքներ:

Այսինքն, եթե ցանկացած, նախապես տրված, բավականաչափ փոքր $\varepsilon>0$ թվի համար կարելի է նշել այնպիսի բավականաչափ փոքր $\delta>0$ թիվ, որ $|f(x)-b|<\varepsilon$, հենց որ $|x-a|<\delta$:

Եթե b-ն f(x)-ի սահմանն է, ապա դա գրում ենք $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ու կարդում՝ սահման f(x) հավասար է b-ի:

Երկրաչափորեն ֆունկցիայի սահմանի սահմանումը կարելի է մեկնաբանել գծագիր 20-ի օգնությամբ:

Գծագրից հետևում է, որ եթե b թիվը f(x)-ի սահմանն է x-ը a-ին ձգտելիս, ապա դա երկրաչափորեն նշանակում է, որ a կետի δ շրջակայքից վերցրած ամեն մի x-ին պետք է համապատասխանեն y-ի այնպիսի արժեքներ, որոնք ընկած են b կետի ε շրջակայքում:



Գծ. 20

Անվերջ փոքր և անվերջ մեծ մեծություններ, անվերջ փոքրերի հատկությունները և համեմատումը

Սահմանում 1.- α-ն կոչվում է անվերջ փոքր մեծություն, եթե այն բացարձակ արժեքով փոքր է, քան ցանկացած, նախապես տրված, բավականաչափ փոքր $\varepsilon>0$ թիվը: Այսինքն, եթե $|\alpha|<\varepsilon$:

Այստեղից հետևում է, որ $\alpha\to0$: Եվ կարող ենք ասել, որ զրոյի ձգտող մեծությունը կոչվում է անվերջ փոքր մեծություն:

Սահմանում 2.- Z-ը կոչվում է անվերջ մեծ մեծության, եթե այն բացարձակ արժեքով մեծ է, քան ցանկացած, նախապես տրված, բավականաչափ մեծ $M>0$ թիվը: Այսինքն, եթե $|Z|>M$:

Այստեղից էլ հետևում է, որ $Z\to\infty$: Եվ կարող ենք ասել, որ անսահմանության ձգտող մեծությունը կոչվում է անվերջ մեծ մեծություն:

Հատկությունները.

1. Անվերջ փոքր մեծության հակադարձը անվերջ մեծ մեծություն է և հակառակը՝ անվերջ մեծ մեծության հակադարձը անվերջ փոքր մեծություն է:Այսինքն, եթե $\alpha\to0$, ապա $\dfrac{1}{\alpha}\to\infty$ և հակառակը՝ եթե $Z\to\infty$, ապա $\dfrac{1}{Z}\to0$:
2. Վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի գումարը անվերջ փոքր մեծություն է:
3. Անվերջ փոքր մեծության և հաստատուն մեծության արտադրյալը անվերջ փոքր մեծություն է:
4. Անվերջ փոքր մեծության և վերջավոր մեծության հարաբերությունը անվերջ փոքր մեծություն է:

Համեմատումը .- Համեմատել երկու անվերջ փոքր մեծություններ նշանակում է ուսումնասիրել դրանց հարաբերության սահմանը:

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը՝

1. Եթե $\ell\mathrm{im}\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq0$, ապա α -ն և β-ն կոչվում են միևնույն կարգի անվերջ փոքր մեծություններ:

2. Եթե $\ell im\frac{\alpha}{\beta}=0$, ապա α -ն կոչվում է ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություն, քան β-ն:

3. Եթե $\ell im\frac{\alpha}{\beta}=1$, ապա α -ն և β-ն կոչվում են համարժեք անվերջ փոքր մեծություններ:

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԹԵՈՐԵՄ 1. Սահմանների տեսության ֆունդամենտալ թեորեմը. Եթե a հաստատունը x փոփոխականի սահմանն է, այսինքն $\lim x=a$, ապա այն կարելի է ներկայացնել իր սահմանի և մի անվերջ փոքր մեծության գումարի տեսքով՝ $x=a+\alpha$, որտեղ $\alpha\to 0$: Եվ հակառակը՝ եթե փոփոխականը ներկայացված է ինչ-որ մի a հաստատունի և մի α անվերջ փոքր մեծության գումարի տեսքով՝ $x=a+\alpha$, ապա այդ հաստատուն գումարելին x փոփոխականի սահմանն է՝ $\lim x=a$

ԹԵՈՐԵՄ 2. Վերջավոր թվով ֆունկցիաների (փոփոխականների) հանրահաշվական գումարի սահմանը հավասար է առանձին գումարելիների սահմանների հանրահաշվական գումարին:

$$\lim[u+v+w+...]=\lim u+\lim v+\lim w+...:$$

ԹԵՈՐԵՄ 3. Արտադրյալի սահմանը հավասար է առանձին արտադրիչների սահմանների արտադրյալին

$$\lim(u\cdot v)=\lim u\cdot\lim v:$$

Հետևանք.- Հաստատուն բազմապատկիչը կարելի է դուրս հանել սահմանի նշանի տակից. $\lim(cu)=c\lim u$

ԹԵՈՐԵՄ 4. Կոտորակի սահմանը հավասար է համարիչի և հայտարարի սահմանների քանորդին:

$$\lim\frac{u}{v}=\frac{\lim u}{\lim v}:$$

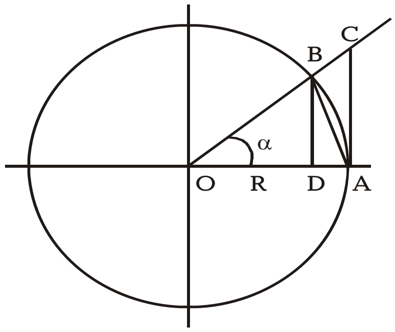
ԹԵՈՐԵՄ 5. Եթե փոփոխականը կամ ֆունկցիան սահմանափակված է երկու այլ փոփոխականներով կամ ֆունկցիաներով, որոնք ունեն ընդհանուր սահման, ապա այդ փոփոխականը (ֆունկցիան) ձգտում է նույն սահմանին:

Թող $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$ և $\lim f(x) = \lim g(x) = b$, այդ դեպքում $\lim \varphi(x) = b$:

ԹԵՈՐԵՄ 6. Անվերջ փոքր աղեղի սինուսի և այդ աղեղի հարաբերության սահմանը, արտահայտված ռադիաններով հավասար է մեկի, այսինքն՝ $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$:

Այս բանաձևը կոչվում է առաջին նշանավոր սահման: Տանք այս թեորեմի ապացույցը:

Ապացույց.- Քանի որ α աղեղը ձգտում է զրոյի, ապա կարելի է վերցնել $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (գծ. 21):



Գծ.21

Վերցնենք R շառավղով շրջագիծ և α կենտրոնական անկյունը: Գծագրից ակնհայտ է, անկյան վրա կառուցված ΔOBA, սեկտոր OBA, ΔOCA երկրաչափական պատկերների մակերեսները բավարարում են $S_{\Delta OAB} < S_{\text{սեկOAB}} < S_{\Delta OAC}$ անհավասարությանը:

Հաշվենք այս պատկերների մակերեսները, օգտվելով տարրական երկրաչափության բանաձևերից

$$S_{\Delta OAB} = \frac{R^2}{2} \sin \alpha$$

$$S_{\text{սեկ.}OAB} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB}\cdot R = \frac{\alpha}{2}R^2$$

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}R \cdot R\,tg\alpha = \frac{R^2}{2}tg\alpha :$$

Տեղադրենք այս արժեքները վերոհիշյալ անհավասարության մեջ:

Կստանանք $\frac{R^2}{2}\sin\alpha < \frac{R^2}{2}\cdot\alpha < \frac{R^2}{2}\cdot tg\alpha$ կամ, կրճատելով $\frac{R^2}{2}$ -ով $\sin\alpha < \alpha < tg\alpha :$

Բաժանելով $\sin\alpha$ -ի վրա՝ կունենաք $1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$ կամ $1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha :$

Անցնենք սահմանի, երբ $\alpha \to 0$ $1 > \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha$

Քանի որ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha$ =1, ապա 5-րդ թեորեմի համաձայն, կարող ենք գրել, որ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$, այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել:

ԹԵՈՐԵՄ 7. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ արտահայտությունը, երբ n-ը անվերջորեն աճում է, ձգտում է մի սահմանի, որը սահմանափակված է 2 և 3 թվերի արանքում:

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 :$$

Այդ սահմանը կոչվում է e թիվ: Այսպիսով՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$:

Այդ թվի մոտավոր արժեքն է՝ $e \approx 2{,}71828...$

Եթե լոգարիթմի հիմքը e թիվն է, ապա այդպիսի լոգարիթմները կոչվում են բնական լոգարիթմներ և նշանակվում են հետևյալ ձևով. $\ln x = \log_e x$:

Սահմանների հաշվման օրինակներ.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5x} = 5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = 5\cdot 1 = 5$:

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}$:

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{x+1}-1\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{-(x+1)}\right]^{\frac{-x}{x+1}} =$

$= e^{-\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\frac{x}{x+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$:

Անորոշություններ և դրանց բացման տարրական եղանակները

Գոյություն ունեն յոթ տիպի անորոշություններ`

1. Եթե f(x) և α(x) ֆունկցիաները միաժամանակ ձգտում են զրոյի ($f(x)\to 0$, $\alpha(x)\to 0$), ապա դրանց $\frac{f(x)}{\alpha(x)}$ հարաբերությունը տալիս է $\frac{0}{0}$ տիպի անորոշություն:
2. Եթե f(x) և α(x) ֆունկցիաները միաժամանակ ձգտում են անսահմանության ($f(x)\to\infty$, $\alpha(x)\to\infty$), ապա դրանց $\frac{f(x)}{\alpha(x)}$ հարաբերությունը տալիս է $\frac{\infty}{\infty}$ տիպի անորոշություն:

3. Եթե $f(x)\to 0$, իսկ $\alpha(x)\to\infty$, ապա դրանց $f(x)\alpha(x)$ արտադրյալը տալիս է $0\cdot\infty$ տիպի անորոշություն:
4. Եթե $f(x)\to\infty$, $\alpha(x)\to\infty$, ապա դրանց $f(x) - \alpha(x)$ տարբերությունը տալիս է $\infty-\infty$ տիպի անորոշություն:
5. Եթե $f(x)$-ը և $\alpha(x)$-ը միաժամանակ ձգտում են զրոյի, ապա $(f(x))^{\alpha(x)}$ արտահայտությունը տալիս է 0^0 տիպի անորոշություն:
6. Եթե $f(x)\to\infty$, $\alpha(x)\to 0$, ապա $(f(x))^{\alpha(x)}$-ը տալիս է ∞^0 տիպի անորոշյան:
7. Եթե $f(x)\to 1$, $\alpha(x)\to\infty$, ապա $(f(x))^{\alpha(x)}$ արտահայտությունը տալիս է 1^∞ տիպի անորոշություն:

Անորոշությունների բացման օրինակներ

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

Անմիջական սահմանային անցում կատարելով՝ ստացվում է $\dfrac{0}{0}$ տիպի անորոշություն: Անորոշությունը բացելու համար բավական է համարիչը վերլուծել արտադրիչների և կրճատել.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-3)=-1$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2-1}{2x^3+x+7}$:

Սա տալիս է $\dfrac{\infty}{\infty}$ տիպի անորոշություն: Նման դեպքերում անորոշությունը բացելու համար բավական է կոտորակի համարիչը և հայտարարը անդամ առ անդամ բաժանել x-ի ամենաբարձր ցուցիչով անդամի վրա:

Կստանանք՝ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2-1}{2x^3+x+7}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}=\dfrac{1}{2}$

Կատարելով սահմանային անցում՝ կստանանք $\frac{1}{2}$:

Հաջորդ տիպի անորոշությունների բացումը կատարելու համար դրանք նույնական ձևափոխությունների միջոցով նախապես բերվում են նախորդ տիպերից որևիցե մեկին և շարունակում արդեն հայտնի մեթոդով:

Անորոշությունների բացումն ունի հիմնականում գործնական բնույթ և այն մշակվում է գերազանցապես գործնական պարապունքների ժամանակ:

Վարժություններ՝

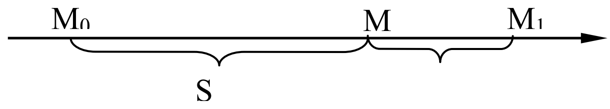
1\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$:   2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

3\. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{kx}\right)^x$;   4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$;   5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

ԱԾԱՆՑՅԱԼ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

Ածանցյալի էությունը պարզելու համար դիտարկենք մի խնդիր:

Արագության խնդիր.- Ենթադրենք, M նյութական կետը կատարում է ուղղագիծ անհավասարաչափ շարժում: Դիցուք այն շարժվում է M_0 դիրքից և ժամանակի t պահին անցել է $M_0M=S$ ճանապարհ: Պարզ, է որ կետի անցած ճանապարհը կլինի ժամանակի ֆունկցիա և եթե տրված է S-ի և t-ի ֆունկցիոնալ կախումը՝ S=f(t),ապա ասում են, որ տված է շարժման օրենքը:



Գծ.22

Ենթադրենք, $t+\Delta t$ ժամանակամիջոցում կետը անցել է $OM_1=S+\Delta S$ ճանապարհ: Δt ժամանակամիջոցին կհամապատասխանի ΔS ճանապարհը:

$\frac{\Delta S}{\Delta t}$ հարաբերությունը տալիս է Δt ժամանակամիջոցում մարմնի շարժման միջին արագությունը, որը նշանակում են $v_{\text{միջ}}$-ով:

$$v_{\text{միջ}}=\frac{\Delta S}{\Delta t}:$$

Եթե մարմինը շարժվում է անհավասարաչափ, ապա միջին արագությունը փոփոխվում է կախված Δt-ից: Ուստի $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ հարաբերությունը լրիվ չի բնորոշում շարժումը: Ուստի մտցնենք t մոմենտում շարժման ակնթարթային արագության գաղափարը:

Անհավասարաչափ շարժման արագություն տվյալ պահին կամ ակնթարթային արագություն կոչվում է միջին արագության սահմանը, երբ $\Delta t\to 0$: Եթե ակնթարթային արագությունը նշանակենք v-ով, ապա ըստ սահմանման

$$v=\lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{միջ}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}:$$

Եթե շարժման օրենքը տրված է $S=f(t)$ բանաձևով, ապա

$$\Delta S=f(t+\Delta t)-f(t) \text{ և } v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}:$$

Որպես օրինակ դիտարկենք ազատ ընկնող մարմնի շարժումը: Հայտնի է, որ այդ շարժումը տեղի է ունենում g հաստատուն արագացմամբ, հետևյալ օրենքով՝ $S=\frac{1}{2}gt^2$, որտեղ S-ը անցած ճանապարհն է, t-ն ժամանակը:

Այս դեպքում միջին արագությունը կլինի

$$v_{միջ}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}=\frac{1}{2}g(2t+\Delta t)$$

Անցնենք սահմանի, երբ $\Delta t\to 0$: Կստանանք՝ $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(2t+\Delta t)=gt$: Այսինքն՝ v=gt: Այսպիսով, ազատ անկման ժամանակ մարմնի ակնթարթային արագությունը որոշվում է v=gt բանաձևով:

Ածանցյալի սահմանումը

Քանի որ նման ձևով կարելի է լուծել բազմաթիվ խնդիրներ, ուստի հարցը դիտարկենք ընդհանուր դրվածքով:

Ենթադրենք, ունենք մի y=f(x) ֆունկցիա, որը որոշված ու անընդհատ է [a;b] միջակայքում:

Արգումենտին տանք Δx աճ և հաշվենք ֆունկցիայի աճած արժեքը՝ $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$: Ֆունկցիայի աճած արժեքից հանենք սկզբնական արժեքը և որոշենք նրա Δy աճը՝

$$-\begin{cases} y+\Delta y=f(x+\Delta x) \\ y \qquad\;\; =f(x) \end{cases}$$
$$\overline{\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)}\,:$$

Կազմենք ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերությունը.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}:$$

Այն ցույց է տալիս y ֆունկցիայի փոփոխման միջին արագությունը x արգումենտի փոփոխման համեմատությամբ, երբ վերջինս փոփոխվել է x արժեքից մինչև $x+\Delta x$ արժեքը:

Վերը ստացած հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$:

Սահմանում.- ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերության սահմանը, երբ վերջինս ձգտում է զրոյի, կոչվում է այդ ֆունկցիայի ածանցյալ և նշանակվում է հետևյալ ձևով՝ $y'=f'(x)$ կամ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{df(x)}{dx}$ կամ y_x':

Այսպիսով, ըստ սահմանման,

$$y_x' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}:$$

Վերադառնանք դիտարկված խնդրին: Ապացուցվել է, որ ուղղագիծ անհավասարաչափ շարժման ակնթարթային արագությունը՝ $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$: Նկատի ունենալով ածանցյալի սահմանումը՝ կարող ենք գրել, որ՝ $v=\dfrac{dS}{dt}=f'(t)$, այսինքն՝ ակնթարթային արագությունը հավասար է ճանապարհի ածանցյալին ըստ ժամանակի: Սա է հենց ածանցյալի մեխանիկական իմաստը: Իսկ ընդհանրապես ֆունկցիայի ածանցյալը բնորոշում է այդ ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը՝ կախված արգումենտի փոփոխությունից:

$y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը կարդում են հետևյալ կերպ. «իգրեկ շտրիխ» կամ «դե իգրեկ ըստ դե իքսի» $y'=\dfrac{dy}{dx}$:

Ֆունկցիայի ածանցյալը գտնելու գործողությունը կոչվում է ածանցման կամ դիֆերենցման գործողություն:

Այն ֆունկցիան, որն ունի ածանցյալ որևէ x_0 կետում, կոչվում է ածանցելի կամ դիֆերենցելի այդ կետում: Եթե ֆունկցիան դիֆերենցելի է միջակայքի բոլոր կետերում, ապա այն կոչվում է դիֆերենցելի միջակայքում:

Ֆունկցիայի ածանցյալի հաշվման ընդհանուր կանոնը

Այդ կանոնը անմիջականորեն բխում է ածանցյալի սահմանումից:

Այն կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ.

1-ին քայլ. x անկախ փոփոխականին տալիս են Δx կամայական աճ և հաշվում y ֆունկցիայի աճած արժեքը՝ $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$:

2-րդ քայլ. ֆունկցիայի աճած արժեքից հանում ենք նրա սկզբնական արժեքը և հաշվում ֆունկցիայի Δy աճը՝ $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$:

3-րդ քայլ. կազմում ենք ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերությունը՝ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$:

4-րդ քայլ. ստացված հավասարության մեջ անցնում ենք սահմանի, երբ $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}:$$

Եթե այս սահմանը գոյություն ունի, հենց դա էլ կլինի ֆունկցիայի ածանցյալը՝ $y' = f'(x)$:

Օրինակ.- Հաշվել $y = x^2$ ֆունկցիայի ածանցյալը: Օգտվենք ընդհանուր կանոնից.

1. $y+\Delta y = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$
2. $\Delta y = x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$
3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$
4. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x$, $y' = 2x$:

Եթե պահանջվի հաշվել տրված ֆունկցիայի ածանցյալը տրված կետում՝ ասենք, $y = x^2$ ֆունկցիայի ածանցյալը $x = 3$ կետում, ապա ածանցյալի մեջ x-ի փոխարեն տեղադրում ենք 3, $y'/_{x=3} = (2x)/_{x=3} = 2\cdot 3 = 6$:

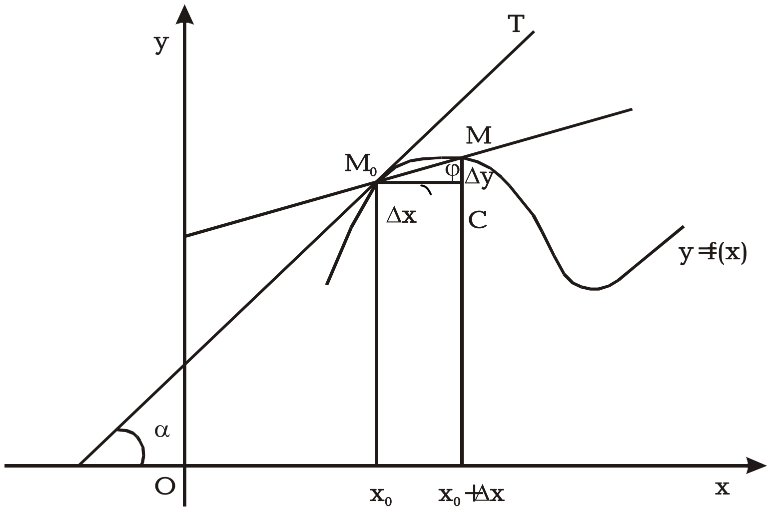
Ածանցյալի երկրաչափական մեկնաբանությունը: Կորի շոշափողի հավասարումը

Դիցուք, տրված է մի L կոր, որի հավասարումն է՝ y=f(x) և նրա վրա մի $M_0(x_0,y_0)$ կետ: x_0-ին տանք Δx աճ և $x_0+\Delta x$ կետով տանենք oy առանցքին զուգահեռ ուղիղ՝ մինչև գրաֆիկի հետ հատման M կետը (գծ.23): M_0 կետով տանենք կորի M_0M հատողը և M_0T շոշափողը: Ենթադրենք $\Delta x\to 0$:

Այդ դեպքում M կետը, շարժվելով կորի վրայով, կձգտի M_0 կետին: Հետևաբար, M_0M հատողը, պտտվելով M_0 կետի շուրջը, կձգտի գրավել M_0T շոշափողի դիրքը և φ անկյունը կձգտի α-ին: Այսինքն՝ $\varphi\to\alpha$ և $tg\varphi\to tg\alpha$:

Մյուս կողմից, ΔM_0CM-ից կարող ենք գրել՝ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\varphi$ և այս հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $\Delta x\to 0$, կստանանք՝ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}tg\varphi=tg\alpha$ կամ $y'=tg\alpha$:

Բայց $tg\alpha$ -ն շոշափողի անկյունային գործակիցն է, որը ընդունված է նշանակել k -ով: Ուրեմն՝ $y'=k$:



Գծ.23

Այսինքն՝ ֆունկցիայի ածանցյալը տվյալ կետում հավասար է կորին այդ կետում տարած շոշափողի անկյունային գործակցին: Դրանում է հենց ածանցյալի երկրաչափական իմաստը:

Այժմ կազմենք կորի տրված $M_0(x_0,y_0)$ կետով անցնող շոշափողի հավասարումը: Հայտնի է, որ տրված կետով անցնող ուղղի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

որտեղ՝ k-ն անկյունային գործակիցն է: Ածանցյալի երկրաչափական իմաստից $k = y'\big|_{x=x_0} = f'(x_0)$: Հետևաբար շոշափողի հավասարումը կլինի՝ $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$:

Ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը

Մեզ արդեն հայտնի է, որ ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի տրված կետում, եթե այդ կետում ունի ածանցյալ: Հիմա ապացուցենք մի թեորեմ, որը կապ է հաստատում ֆունկցիայի դիֆերենցելիության և անընդհատության միջև:

Թեորեմ.- Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x=x_0$ կետում, ապա այդ կետում այն անընդհատ է:

Ապացույց.- Ըստ պայմանի, ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$:

Ըստ սահմանների տեսության ֆունդամենտալ թեորեմի կարող ենք գրել՝

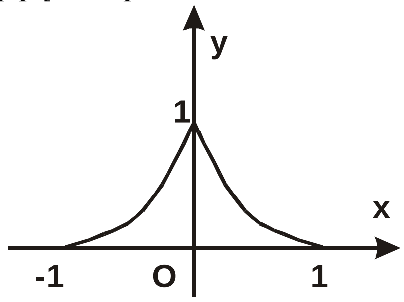
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha, \text{ որտեղ } \alpha \to 0 \text{ կամ, } \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x:$$

Ստացվեց մի կարևոր բանաձև, որը ֆունկցիայի վերջավոր աճը արտահայտում է նրա ածանցյալի միջոցով:

Քանի որ $f'(x_0)$ -ն որոշակի թիվ է և $\alpha \to 0$, ապա ստացված այս բանաձևից հետևում է, որ երբ $\Delta x \to 0$, նաև $\Delta y \to 0$, այսինքն՝ ֆունկցիան անընդհատ է:

Հակադարձը, սակայն, ճիշտ չէ. ֆունկցիան կարող է տվյալ կետում լինել անընդհատ, բայց ածանցյալ չունենալ:

Որպես օրինակ դիտարկենք $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ ֆունկցիան, որի գրաֆիկը պատկերված է գծ. 24-ում:



Գծ.24

Այս ֆունկցիան անընդհատ է [-1;1] հատվածի բոլոր կետերում, բայց նրա ածանցյալը $y' = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, x=0 կետում գոյություն չունի:

ԱԾԱՆՑՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԿԱՆՈՆՆԵՐԸ

1. ***Հաստատունի ածանցյալը.***

Դիցուք, y=C, որտեղ C-ն հաստատուն է: Այդ դեպքում ցանկացած զրոյից տարբեր Δx-ի համար Δy=0 և $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$: Այսպիսով, հաստատունի ածանցյալը հավասար է զրոյի : $C' = 0$:

2. ***y=x***

Այս դեպքում նաև իրար հավասար կլինեն նրանց աճերը՝ Δy=Δx և $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, որի սահմանը նույնպես կլինի 1, այսինքն y′=1:

Այս դեպքում ասում են, որ յուրաքանչյուր փոփոխականի ածանցյալն ըստ նույն փոփոխականի հավասար է 1-ի:

3. ***Գումարի ածանցյալը***

Դիցուք, ունենք $y = u \pm v$, որտեղ $u = u(x)$-ը և $v = v(x)$-ը դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են: Այս դեպքում՝

$y+\Delta y = u+\Delta u \pm v+\Delta v$, իսկ $\Delta y = \Delta u \pm \Delta v$ և $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$:

$$y' = \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \ell im_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = u' \pm v':$$

Այսինքն՝ $(u \pm v)' = u' \pm v'$:

Գումարի ածանցյալը հավասար է առանձին գումարելիների ածանցյալների գումարին:

4. Արտադրյալի ածանցյալը

Դիցուք, տրված է $y = u \cdot v$, որտեղ u=u(x)-ը և v=v(x)-ը դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են: Օգտվելով ածանցյալի որոշման ընդհանուր կանոնից՝ կարող ենք գրել.

$$y+\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) = uv + (\Delta u)v + (\Delta v)u + (\Delta u)(\Delta v)$$

$$\Delta y = (\Delta u) \cdot v + (\Delta v) \cdot u + (\Delta u)(\Delta v)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$$

$$y' = \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v\, \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u\, \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$$

Քանի որ $\Delta x \to 0$, Δv-ն նույնպես ձգտում է զրոյի, ուստի այս արտահայտության վերջին գումարելին կձգտի զրոյի և մենք կունենանք $y'=u'v+v'u$ կամ $(u \cdot v)' = u'v + v'u$:

Հետևանք.- Հաստատունը կարելի է դուրս հանել ածանցյալի նշանից: Այսինքն՝ $(c \cdot u)' = cu'$: Իրոք, նախորդ բանաձևի համաձայն՝ $(c \cdot u)' = c'u + cu' = 0 \cdot u + cu' = cu'$:

5. *Կոտորակի ածանցյալը*

Ածանցյալի հաշվման չորս քայլերի օգնությամբ կարելի է ստանալ, որ եթե $y = \frac{u}{v}$, որտեղ u=u(x) և v=v(x), ապա $y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, այսինքն՝ կոտորակի ածանցյալը հավասար է մի կոտորակի, որի հայտարարում գրվում է տրված կոտորակի հայտարարի քառակուսին, իսկ համարիչում` համարիչի ածանցյալ անգամ հայտարար հանած հայտարարի ածանցյալ անգամ համարիչ:

6. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը

Դիցուք, տրված է $y = F(u)$ դիֆերենցելի ֆունկցիան, որտեղ u-ն իր հերթին x փոփոխականի դիֆերենցելի ֆունկցիան է` $u = \varphi(x)$: Այդ դեպքում $y$-ը $x$-ի բարդ ֆունկցիան է կամ ֆունկցիայի ֆունկցիան ` $y = F[\varphi(x)]$, իսկ u-ն կոչվում է միջանկյալ արգումենտ: Պահանջվում է որոշել y'_x :

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ հարաբերությունը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով` $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ և անցնելով սահմանի, երբ $\Delta x \to 0$ ու նկատի ունենալով, որ $\Delta x \to 0$, $\Delta u$-ն նույնպես ձգտում է զրոյի, կունենանք`

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ կամ, եթե $y = F(u)$, ապա $y' = F'(u) \cdot u'$

7. Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալը

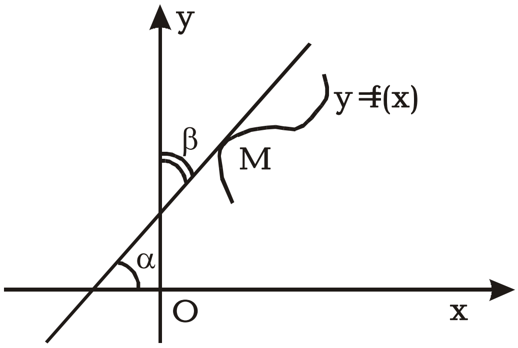
Եթե մեզ տրված է $y = f(x)$ ֆունկցիան, ապա լուծելով այս հավասարությունը x-ի նկատմամբ, այսինքն y-ը դիտարկելով որպես անկախ փոփոխական, իսկ x-ը` կախյալ, կունենանք` $x = \varphi(y)$:

Այս ֆունկցիան կոչվում է տրված ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիա: Տեսնենք, թե ինչպես կարելի է հաշվել հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալը` ուղիղ ֆունկցիայի ածանցյալի միջոցով: Ֆունկցիաների անընդհատության շնորհիվ, երբ $\Delta x \to 0$, նաև $\Delta y \to 0$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} :$$

Այս հավասարության մեջ անցնելով սահմանի և նկատի ունենալով վերը նշվածը՝ կունենանք

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}} \text{ կամ } x'_y=\frac{1}{y'_x}:$$



Գծ.25

Այսինքն՝ հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է ուղիղ ֆունկցիայի ածանցյալի հակադարձ մեծությանը:

Այս արդյունքը կարելի է ստանալ նաև երկրաչափորեն: Իրոք՝ ածանցյալի երկրաչափական իմաստից $y'_x=\mathrm{tg}\alpha$, իսկ $x'_y=\mathrm{tg}\beta$: Բայց քանի որ $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha,$ ապա $\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$ $=\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$: Այսինքն՝ $x'_y=\frac{1}{y'_x}$

Հիմնական տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները

Ֆունկցիայի ածանցյալի սահմանումից և վերոհիշյալ կանոնների օգնությամբ կարելի է հաշվել բոլոր հիմնական տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները:

1. Աստիճանային ֆունկցիայի ածանցյալը:

Եթե $y = x^n$, որտեղ n-ը կամայական հաստատուն թիվ է, ապա` $y' = nx^{n-1}$: Իսկ $y = u^n$ բարդ աստիճանային ֆունկցիայի դեպքում, համաձայն բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնի` $y' = nu^{n-1} \cdot u'$:

2. Լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցյալը

Եթե տրված է $y = \ln x$ ֆունկցիան, ապա $y' = \frac{1}{x}$, իսկ $y = \ln u$ բարդ լոգարիթմական ֆունկցիայի դեպքում $y' = \frac{1}{u} \cdot u'$:

3. Ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալը

Եթե $y = a^x$, ապա $y' = a^x \ln a$, իսկ եթե $y = a^u$, ապա $y' = a^u \ln a \cdot u'$:

4. Մասնավոր դեպքում, եթե ունենանք $y = e^x$, ապա $y' = e^x \ln e = e^x$, քանի որ $\ln e = 1$:

Իսկ եթե $y = e^u$, ապա $y' = e^u \cdot u'$

Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալները

5. Դիցուք, տրված է $y = \sin x$ ֆունկցիան: Որպես օրինակ, չորս քայլերի օգնությամբ հաշվենք այս ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\ \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x :$$

Այսպիսով՝ $(\sin x)'=\cos x$, իսկ բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնի համաձայն՝ $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$

6. Նման ձևով կարելի է հաշվել $y=\cos x$ ֆունկցիայի ածանցյալը: Ստացվում է, որ՝ $y'=-\sin x$, իսկ եթե $y=\cos u$, ապա $y'=-\sin u\cdot u'$

7. $y=\mathrm{tg}x$

Սա կարելի է ներկայացնել որպես $\sin x$-ի և $\cos x$-ի հարաբերություն և օգտվել կոտորակի ածանցման կանոնից: Իրոք՝ $\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ և $(\mathrm{tg}x)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$, իսկ $(\mathrm{tg}u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$:

8. Նման ձևով, եթե տրված է $y=\mathrm{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$, ապա՝ $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$, իսկ եթե $y=\mathrm{ctg}u$, ապա $y'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$:

Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալները

9. Եթե $y=\arcsin x$, ապա $x=\sin y$ և հակադարձ ֆունկցիայի ածանցման կանոնի համաձայն կանող ենք գրել՝ $y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: Նման ձևով, եթե

$y=\arcsin u$, ապա $y'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$:

10. $y=\arccos x$, $x=\cos y$,

$y'_x=\frac{1}{x'_y}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: Նման ձևով, եթե $y=\arccos u$, ապա $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$:

11. $y=\operatorname{arctg}x, \Rightarrow x=\operatorname{tg}y$,

$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$: Նման ձևով, եթե $y=\operatorname{arctg}u$, ապա $y'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$:

12. $y=\operatorname{arcctg}x, \Rightarrow x=\operatorname{ctg}y$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=-\sin^2 y=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}:$$

Նման ձևով, եթե $y=\operatorname{arcctg}u$, ապա $y'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$:

Ածանցման կանոնների և բանաձևերի աղյուսակ

Այսպիսով, մենք ստացանք ածանցման հետևյալ կանոններն ու բանաձևերը`

1. $c'=0$
2. $x'=1$
3. $(u\pm v)'=u'\pm v'$
4. $(u\cdot v)'=u'v+uv'$
5. $(c\cdot u)=c\cdot u'$

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

7. $y = F(u),\ y' = F'(u) \cdot u'$

8. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$

9. $\begin{cases} (x^n)' = nx^{n-1} \\ (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \end{cases}$

10. $\begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' \end{cases}$

11. $\begin{cases} (a^x)' = a^x \ln a \\ (a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \end{cases}$

12. $\begin{cases} (e^x)' = e^x \\ (e^u)' = e^u \cdot u' \end{cases}$

13. $\begin{cases} (\sin x)' = \cos x \\ (\sin u)' = \cos u \cdot u' \end{cases}$

14. $\begin{cases} (\cos x)' = -\sin x \\ (\cos u)' = -\sin u \cdot u' \end{cases}$

15. $\begin{cases}(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ (\mathrm{tg}u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'\end{cases}$

16. $\begin{cases}(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \\ (\mathrm{ctg}u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'\end{cases}$

17. $\begin{cases}(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'\end{cases}$

18. $\begin{cases}(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'\end{cases}$

19. $\begin{cases}(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ (\mathrm{arctg}u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'\end{cases}$

20. $\begin{cases} (\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2} \\ (\mathrm{arcctg}u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u' \end{cases}$

Օրինակներ.

1. $y = \ln\sin x$, $y' = \dfrac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \mathrm{ctg}x$:

2. $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$,

$y' = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3x^{1/3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$:

3. $y = \mathrm{arctg}3x^2$,

$y' = \dfrac{1}{1+9x^4}\cdot(3x^2)' = \dfrac{6x}{1+9x^4}$:

4. $y = 5^{x^3}$,

$y' = 5^{x^3}\ln 5(x^3)' = 5^{x^3}\ln 5\cdot 3x^2 = 3x^2\cdot 5^{x^3}\ln 5$:

5. $y = x\sqrt{x} = x^{3/2}$,

$y' = \dfrac{3}{2}x^{1/2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$:

6. $y = (x^2-2)^3$,

$y' = 3(x^2-2)^2\cdot(x^2-2)' = 3(x^2-2)^2\cdot 2x = 6x(x^2-2)^2$:

7. $y = \sin\dfrac{x}{2}$,

$y' = \cos\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)' = \cos\dfrac{x}{2}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$:

8. $y = \cos^2 3x$,

$$y' = 2\cos 3x(\cos 3x)' = 2\cos 3x(-\sin 3x)(3x)' =$$
$$= -6\cos 3x \sin 3x = -3\sin 6x \,:$$

Վարժություններ

Հաշվել տրված ֆունկցիաների ածանցյալները

1. $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
2. $y = \mathrm{tg}2x$
3. $y = \cos x^2$
4. $y = \ln\cos x$
5. $y = \ln^2 x$
6. $y = e^{\sin 2x}$
7. $y = e^{-x}\sin x$
8. $y = \dfrac{5x+3}{x^2-3x+2}$
9. $y = 3^{\mathrm{arctg}x}$
10. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

Ֆունկցիայի դիֆերենցիալի սահմանումը

Ֆունկցիայի ածանցյալի սահմանումից հայտնի է, որ եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $[a,b]$ հատվածում, ապա նրա ածանցյալը այդ հատվածի որևէ x կետում որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ՝ $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$:

Այստեղից սահմանների տեսության ֆունդամենտալ թեորեմի համաձայն՝ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, որտեղ $\alpha \to 0$, երբ $\Delta x \to 0$: Բազմապատկենք Δx -ով՝ $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$

Քանի որ ընդհանուր դեպքում $f'(x) \neq 0$, ապա ֆունկցիայի Δy աճը ներկայացվում է երկու գումարելիների գումարի տեսքով, որոնցից առաջինը գծային է Δx -ի նկատմամբ, իսկ երկրորդը ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություն է:

$f'(x)\Delta x$ գումարելին կոչվում է ֆունկցիայի աճի գլխավոր մաս:

Սահմանում.-Ֆունկցիայի աճի գլխավոր մասը կոչվում է այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալ և նշանակվում է հետևյալ ձևով` dy կամ $df(x)$:

Հետևաբար, ըստ սահմանման, $y = f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը հավասար է` $dy = f'(x)\Delta x$:

Հեշտությամբ ապացուցվում է, որ անկախ փոփոխականի աճը հավասար է նրա դիֆերենցիալին, այսինքն` $\Delta x = dx$:

Հաշվի առնելով այս հավասարությունը` ֆունկցիայի դիֆերենցիալի որոշման համար ստանում ենք հետևյալ հավասարությունը. $dy = f'(x)dx$;

Այսպիսով` ֆունկցիայի դիֆերենցիալը հավասար է նրա ածանցյալի և արգումենտի դիֆերենցիալի արտադրյալին: Այս կանոնն էլ հենց ֆունկցիայի դիֆերենցիալի հաշվման կանոնն է, որից հետևում է, որ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի որոշման խնդիրը հավասարազոր է նրա ածանցյալի որոշման խնդրին: Դա է պատճառը, որ ածանցյալներին վերաբերող շատ թեորեմներ և բանաձևեր պահպանում են իրենց ուժը նաև դիֆերենցիալների համար:

Օրինակ.
$$d(u+v) = du + dv$$
$$d(u \cdot v) = udv + vdu$$
և այլն:

Բարձր կարգի ածանցյալներ և դիֆերենցիալներ

Ենթադրենք, $y = f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $[a:b]$ հատվածում: Նրա $f'(x)$ ածանցյալը, ընդհանրապես, նույնպես x-ի ֆունկցիա է:

Դիֆերենցելով այս նոր ֆունկցիան` կստանանք տրված ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը:

Առաջին կարգի ածանցյալի ածանցյալը կոչվում է տրված ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ և նշանակվում է հետևյալ ձևով` y'' կամ $f''(x)$

$$y'' = (y')' = f''(x):$$

Այսպես, օրինակ, եթե $y = x^3$, ապա $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$:

Ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալի ածանցյալը կոչվում է նրա երրորդ կարգի ածանցյալ և նշանակվում է y''' կամ $f'''(x)$ սիմվոլով:

Ընդհանրապես n-րդ կարգի ածանցյալը նշանակվում է $y^{(n)}$ կամ $f^{(n)}(x)$ ձևով և հավասար է $y^n = \left(y^{(n-1)}\right)'$:

Օրինակ.-Տրված է $y = \sin x$ ֆունկցիան: Հաշվել նրա մի քանի կարգի ածանցյալներ.

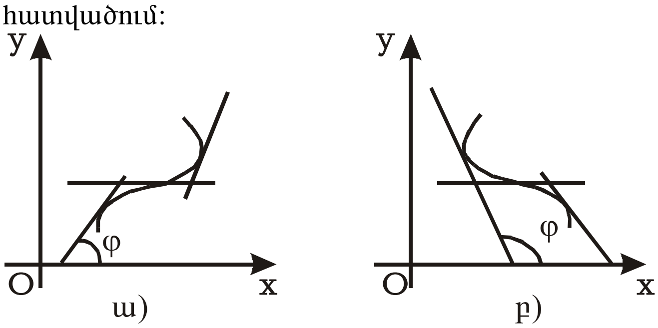
$$y = \sin x$$
$$y' = \cos x$$
$$y'' = -\sin x$$
$$y''' = -\cos x$$
$$y^{(IV)} = \sin x$$
$$y^{(V)} = \cos x$$
$$y^{(6)} = -\sin x$$
$$-------$$
$$-------$$

Ֆունկցիայի բարձր կարգի դիֆերենցիալները սահմանվում են նման եղանակով և նշանակվում հետևյալ ձևերով.

$$d^2y = d(dy) = [f'(x)dx]'\,dx = f''(x)dx^2$$
$$d^3y = d\left(d^2y\right) = f'''(x)dx^3$$
$$d^4y = d\left(d^3y\right) = f^{IV}(x)dx^4$$
$$--------------$$
$$--------------$$

1.ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՃՄԱՆ և ՆՎԱԶՄԱՆ ՄԻՋԱԿԱՅՔԵՐԸ

Թեորեմ.- Եթե [a,b] հատվածում դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիան աճում է, ապա նրա ածանցյալը այդ հատվածում ոչ բացասական մեծություն է, այսինքն` $f'(x) \geq 0$: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է [a,b] հատվածում և և դիֆերենցելի (a:b) միջակայքում, ընդ որում $f'(x) > 0$, ապա այդ ֆունկցիան աճում է [a,b] հատվածում:



Գծ.26

Նման թեորեմ գոյություն ունի նաև [a,b] հատվածում նվազող ֆունկցիայի համար:

Տանք այս թեորեմների երկրաչափական մեկնաբանությունը.

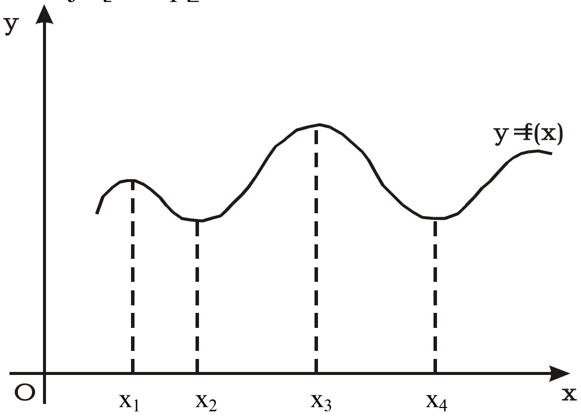
Ձևակերպված թեորեմը արտահայտում է հետևյալ երկրաչափական փաստը: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան աճում է, ապա նրա յուրաքանչյուր կետում տարված շոշոփողը այդ հատվածում ox առանցքի հետ կազմում է φ սուր անկյուն կամ առանձին կետերում հորիզոնական է: Քանի որ սուր անկյան տանգենսը ոչ բացասական է, այսինքն $tg\varphi \geq 0$, $f'(x) = tg\varphi \geq 0$ (գծ.26,ա), ապա թեորեմի իմաստը պարզ է: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան նվազում է, ապա շոշափողի թեքման անկյունը բութ է կամ առանձին կետերում շոշափողը հորիզոնական է, որի տանգեսը ոչ դրական մեծություն է`

$$f'(x) = \operatorname{tg}\varphi \le 0 \text{ (գծ.26, բ):}$$

Այսպիսով, այս թեորեմը հնարավորություն է տալիս դատելու ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերի մասին ածանցյալի նշանի միջոցով:

2. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԱՔՍԻՄՈՒՄԸ ԵՎ ՄԻՆԻՄՈՒՄԸ

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ամենուրեք մոնոտոն աճող կամ մոնոտոն նվազող չէ, ապա արգումենտի որոշ արժեքների դեպքում այն իր ընթացքը փոխում է, աճումից անցնելով նվազման կամ, ընդհակառակը, նվազումից անցնելով աճման: Նման տիպի ֆունկցիայի գրաֆիկը կարող է, օրինակի համար, ունենալ հետևյալ տեսքը`



Գծ.27

Սահմանում I.- $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքը $x = x_1$ կետում կոչվում է մաքսիմում $(\max)$, եթե այն մեծ է իրեն անմիջականորեն հարևան բոլոր արժեքներից: Այլ կերպ ասած` $f(x)$ ֆունկցիան ունի մաքսիմում $x = x_1$ կետում, եթե $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$, որտեղ Δx-ը ցանկացած բավականաչափ փոքր (դրական կամ բացասական) մեծություն է:

Սահմանում II.- $f(x)$ ֆունկցիան ունի մինիմում $(\min)$ $x = x_2$ կետում, եթե $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ որտեղ Δx-ը ցանկացած բավականաչափ փոքր /դրական կամ բացասական/ մեծություն է:

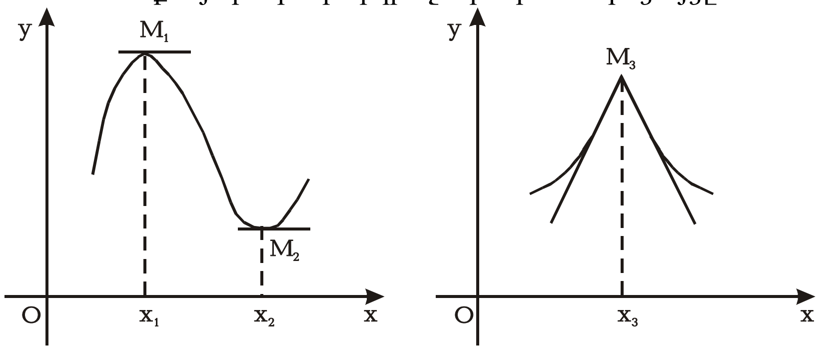
Օրինակ. բերված գծագրում $x=x_1$ և $x=x_3$ կետերը մաքսիմումի կետեր են, իսկ $x=x_2$ և $x=x_4$ կետերը՝ մինիմումի կետեր:

Ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի կետերը միասին կոչվում են էքստրեմումի կետեր:

Այժմ տեսնենք, թե ածանցյալների օգնությամբ ինչպես կարելի է գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը:

Թեորեմ I.- (էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանը).- Եթե $f(x)$ դիֆերենցելի ֆունկցիան $x=x_1$ կետում ունի մաքսիմում կամ մինիմում, ապա նրա ածանցյալը այդ կետում կամ դառնում է զրո՝ $f'(x)=0$, կամ գոյություն չունի:

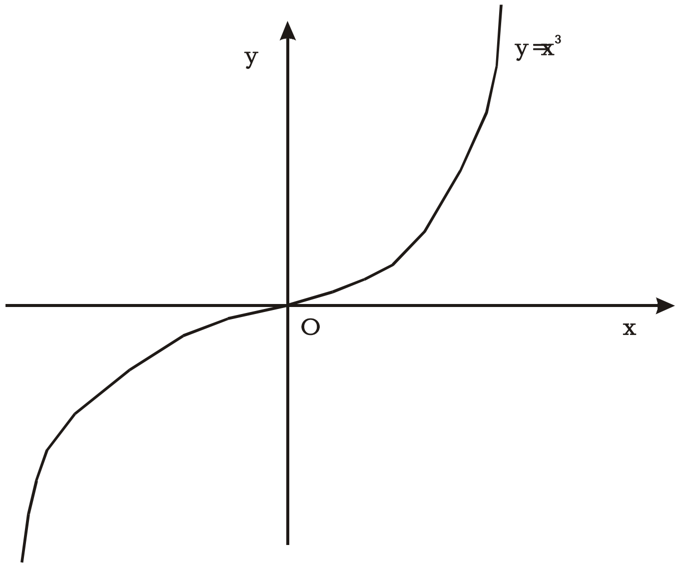
Տանք այս թեորեմի երկրաչափական ապացույցը.



Գծ.28

Գծագրից երևում է, որ $x=x_1$ և $x=x_3$ կետերը համապատասխան ֆունկցիաների մաքսիմումի կետեր են, իսկ $x=x_2$ մինիմումի կետ է: M_1 և M_2 էքստրեմումի կետերում կորին տարված շոշափողները զուգահեռ են ox առանցքին, հետևաբար դրանց անկյունային գործակիցները հավասար են զրոյի, այսինքն $f'(x)=0$: M_3 կետը $\max$-ի կետ է, բայց այնտեղ ֆունկցիայի ածանցյալ գոյություն չունի:

Ցույց տանք, որ ապացուցված հայտանիշը անհրաժեշտ է, բայց ոչ բավարար, այսինքն այն բանից, որ ածանցյալը տրված կետում դառնում է զրո կամ գոյություն չունի, դեռևս չի հետևում, որ այդ կետը էքստրեմումի կետ է: Այսպես, օրինակ, $y = x^3$ ֆունկցիան ունի $y' = 3x^2$ ածանցյալ, որը դառնում է զրո $x = 0$ կետում: Բայց $x = 0$ կետը երբեք էքստրեմումի կետը չէ (գծ.29):



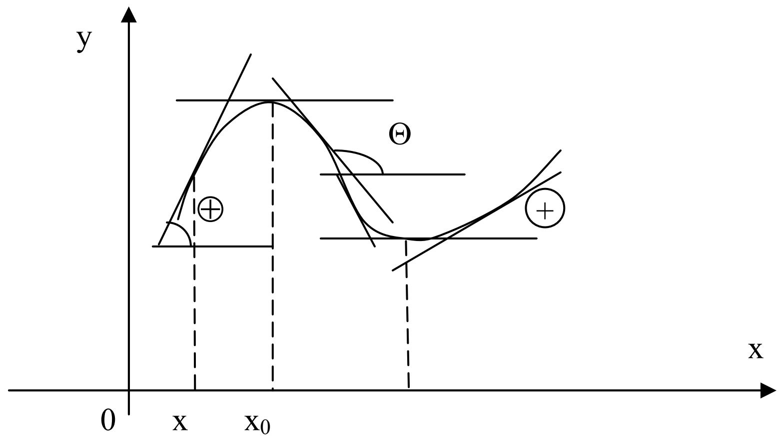
Գծ.29

Ֆունկցիայի որոշման տիրույթի այն ներքին կետերում, որտեղ ածանցյալը դառնում է զրո կամ գոյություն չունի, կոչվում են կրիտիկական արժեքներ կամ կրիտիկական կետեր:

Որպեսզի պարզենք, թե կրիտիկական կետերից որոնք են էքստրեմումի կետեր, ապացուցենք էքստրեմումի գոյության բավարարության հայտանիշները:

Առաջին բավարարության հայտանիշ.- Եթե ֆունկցիայի $f'(x)$ ածանցյալը x-ը $x_\circ$-ի վրայով անցնելիս փոխում է իր նշանը + -ից - -ի, ապա $x_\circ$ կետը $\max$-ի կետն է, իսկ եթե $f'(x)$-ը x-ը $x_\circ$-ի վրայով անցնելիս փոխում է իր նշանը - -ից + -ի, ապա այդ կետը ֆունկցիայի $\min$-ի կետն է:

Իրոք, եթե $x < x_\circ$, $f'(x) > 0$, իսկ $x > x_\circ$, $f'(x) < 0$, դա նշանակում է, որ ձախից կորը մոնոտոն աճում է, իսկ աջից՝ մոնոտոն նվազում: Սա էլ նշանակում է, որ $x = x_\circ$ max -ի կետ է: Նման դատողություն կարելի է կատարել նաև min կետի նկատմամբ (գծ.30):



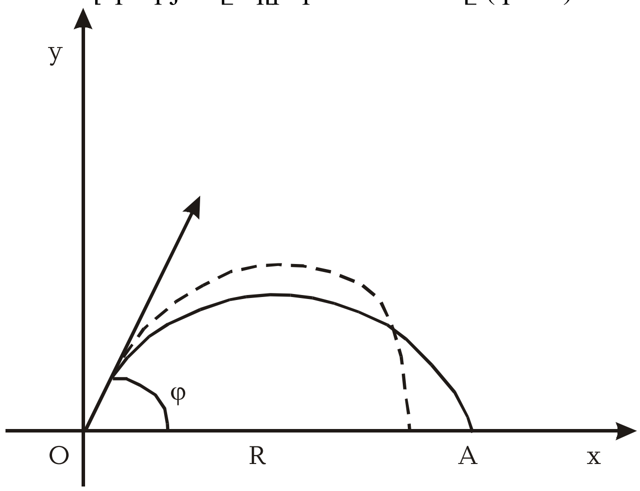
Գծ.30

Երկրորդ բավարարության հայտանիշը .- Դիցուք, $x = x_1$ կետում $f'(x) = 0$: Բացի այդ, $x = x_1$ կետի ինչ-որ շրջակայքում $f''(x)$-ը գոյություն ունի և անընդհատ է: Այդ դեպքում առկա է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ.- Թող $f'(x) = 0,$ այդ դեպքում $x = x_1$ կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում, եթե $f''(x_1) < 0$ և մինիմում, եթե $f''(x_1) > 0$:

ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Խնդիր 1.- Հրանոթից $v_\circ$ սկզբնական արագությամբ թռչող արկի $R = OA$ թռիչքի հեռավորությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝ $R = \frac{v_\circ^2 \sin 2\varphi}{g}$, որտեղ φ հրանոթի թեքման անկյունն է հորիզոնի նկատմամբ: Որոշել φ անկյան այն արժեքը, որի դեպքում R հեռավորությունը կլինի ամենամեծը (գծ.31):



Գծ.31

Լուծում.- R մեծությունը φ-ի ֆունկցիան է: Որոշենք այդ ֆունկցիայի $\max$-ը, երբ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$: $\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2v_\circ^2 \cos 2\varphi}{g}$,

$\frac{2v_\circ^2 \cos 2\varphi}{g} = 0$, որտեղից

$$\cos 2\varphi = 0,\ \ 2\varphi = \frac{\pi}{2},\ \varphi = \frac{\pi}{4}:$$

Երկրորդ բավարարության թեորեմի օգնությամբ հետազոտենք $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ կրիտիկական արժեքը:

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\frac{4v_\circ^2 \sin 2\varphi}{g}: \quad \left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = -\frac{4v_\circ^2}{g} < 0:$$

Հետևաբար, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$-ում R ֆունկցիան ունի մաքսիմում $R_{max} = \dfrac{v_\circ^2}{g}$: R ֆունկցիայի արժեքները միջակայքի ծայրակետերում հավասար են. $R/_{\varphi=0} = 0$ և $R/_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0$:

Այսպիսով, որոշված մաքսիմումը որոնելի մեծագույն արժեքն է:

Խնդիր 2.- Մարմինը շարժվում է $v = -t^3 + 48t + 1$ սմ/վրկ արագությամբ: Գտնել շարժման այն ամենամեծ և ամենափոքր արագությունը, որն ի հայտ է գալիս առաջին 5 վայրկյանի ընթացքում:

Լուծում.- Գտնենք $v' = -3t^2 + 48$ ածանցյալը և $t = \pm 4$ կրիտիկական կետերը: Ուրեմն, [0,5] հատվածի ներսում կա միայն մեկ կրիտիկական $t = 4$ կետ: Տեսնենք այս կետը $\max$-ի կետ է, թե $\min$-ի:

$$v'/_{t<4} > 0, \quad v'/_{t>4} < 0$$

Առաջին կարգի ածանցյալը փոխում է նշանը +-ից – -ի: Հետևաբար $t = 4$ կետում արագության ֆունկցիան ունի $\max$ արժեք՝ $v_{max} = 129$: Հաշվենք ֆունկցիայի արժեքները միջակայքի ծայրակետերում. $v/0/ = 1$; $\quad v/5/ = 116$:

Հետևաբար, արագության առավելագույն արժեքը $t = 4$ պահին ունեցած $v = 129$ արժեքն է, իսկ նվազագույն արժեքը՝ $t = 0$ մոմենտում ունեցած $v = 1$ արժեքը:

Մենք դիտարկեցինք ընդամենը երկու խնդիր, բայց էքստրեմումների տեսությունն ունի բազմաթիվ կիրառություններ ֆիզիկայի, տեխնիկայի, գյուղատնտեսության, տնտեսագիտության և այլ բնագավառների խնդիրներում:

ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

Նախնական ֆունկցիա: Անորոշ ինտեգրալ

Մաթեմատիկական անալիզի տեսական և կիրառական շատ հարցերում հարկ է լինում լուծել դիֆերենցման խնդրին հակադարձ խնդիր, այսինքն՝ ֆունկցիայի տրված $F'(x)=f(x)$ ածանցյալով կամ, որ միևնույնն է, տրված $dF(x)=f'(x)dx$ դիֆերենցիալով, որոշել սկզբնական կամ, այսպես կոչված, $F(x)$ նախնական ֆունկցիան:

Սահմանում.- Այն $y=F(x)$ ֆունկցիան, որի ածանցյալը հավասար է տրված $y=f(x)$ ֆունկցիային, այսինքն $F'(x)=f(x)$, կոչվում է նախնական ֆունկցիա:

Ապացուցված է, որ ամեն մի անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիա անպայմանորեն ունի նախնական ֆունկցիա: Այսպես, օրինակ - $\frac{x^4}{4}$ ֆունկցիան x^3-ի նախնական ֆունկցիան է, որովհետև $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=\frac{1}{4}4x^3=x^3$, sinx-ը նախնական ֆունկցիա է cosx-ի համար և այլն:

Ցույց տանք, որ յուրաքանչյուր տրված ֆունկցիա ունի անթիվ բազմությամբ նախնական ֆունկցիաներ, որոնք տարբերվում են իրարից հաստատուն գումարելիով: Իրոք, եթե $F(x)$-ը $f(x)$-ի նախնական ֆունկցիան է, ապա ամեն մի $y=F(x)+C$ ֆունկցիա, որտեղ C-ն կամայական հաստատուն գումարելի է, նույնպես նախնական ֆունկցիա է.

$[F(x)+C]'=F'(x)+C'=F'(x)=f(x)$:

Ենթադրենք, $F(x)$-ը և $\Phi(x)$-ը տրված $f(x)$ ֆունկցիայի երկու նախնական ֆունկցիաներն են (a,b) միջակայքում: Ցույց տանք, որ դրանց տարբերությունը հաստատուն մեծություն է: Ըստ պայմանի $F'(x)=f(x)$ և $\Phi'(x)=f(x)$:

Կազմենք $[F(x)-\Phi(x)]'=F'(x)-\Phi'(x)=f(x)-f(x)=0;$

Հետևաբար, $F(x)-\Phi(x)=C$, այսինքն՝ $F(x)=\Phi(x)+C$

Պնդումն ապացուցված է:

Սահմանում.- Տրված $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր նախնական ֆունկցիաների բազմությունը կոչվում է այդ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալ և նշանակվում է հետևյալ ձևով՝ $\int f(x)dx$:

Այսպիսով, ըստ սահմանման՝ $\int f(x)dx = F(x) + C$, որտեղ $F'(x) = f(x)$:

$f(x)$-ը կոչվում է ենթաինտեգրալային ֆունկցիա, $f(x)dx$-ը ենթաինտեգրալային արտահայտություն, x-ը ինտեգրման փոփոխական: Նախնական ֆունկցիան որոշելու գործողությունը կոչվում է ինտեգրման գործողություն:

Օրինակ.- $\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ և այլն:

Անորոշ ինտեգրալի հիմնական հատկությունները

I. Անորոշ ինտեգրալի ածանցյալը հավասար է ենթաինտեգրալային ֆունկցիային, այսինքն՝

$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$: Իրոք $\left(\int f(x)dx\right)' = [F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$:

II. Անորոշ ինտեգրալի դիֆերենցիալը հավասար է ենթաինտեգրալային արտահայտությանը՝

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

Իրոք՝ $d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$

III.- Հաստատուն բազմապատկիչը կարելի է դուրս հանել ինտեգրալի նշանից $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$:

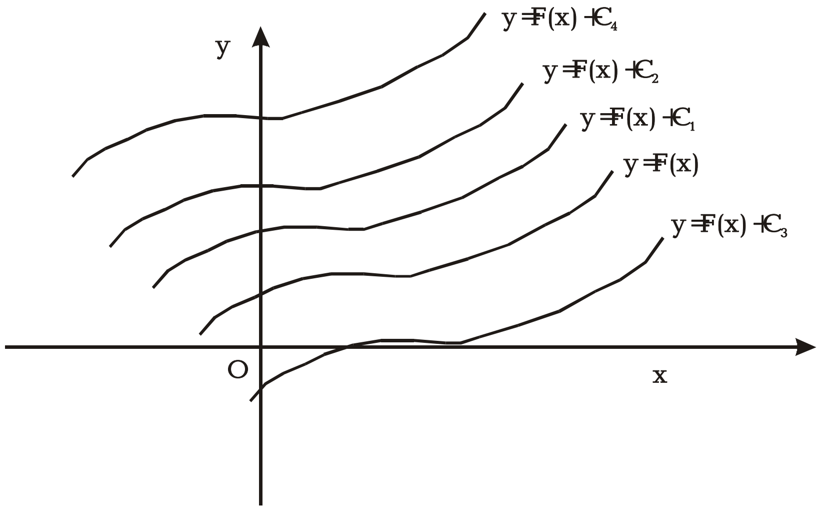
IV.- Երկու և ավելի ֆունկցիաների հանրահաշվական գումարի անորոշ ինտեգրալը հավասար է առանձին գումարելիների ինտեգրալների գումարին $\int[f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$:

V.- Անորոշ ինտեգրալի ձևի անփոփոխելիության հատկությունը. $\int f(x)dx = \int f(t)dt = \int f(u)du = ...$

Անորոշ ինտեգրալի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Գիտենք, որ $\int f(x)dx = F(x) + C$: $y = F(x) + C$ ֆունկցիան C-ի տարբեր արժեքներին համապատասխան հարթության վրա կունենա տարբեր գրաֆիկներ, այսինքն՝ այդ ֆունկցիային հարթության վրա կհամապատասխանի մեկ պարամետրանի կորերի ընտանիք: Նախնական ֆունկցիայի գրաֆիկին անվանենք ինտեգրալային կոր: Այսպիսով, եթե $F'(x) = f(x)$, ապա $y = F(x)$-ի գրաֆիկը ինտեգրալային կոր է:

Անորոշ ինտեգրալը երկրաչափորեն բոլոր ինտեգրալային կորերի ընտանիքն է (գծ.32):



Գծ.32

Հիմնական ինտեգրալների աղյուսակ

Դիֆերենցիալ հաշվում մենք ստացել ենք հիմնական տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները, նշել ենք գումարի,արտադրյալի, քանորդի, բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնները: Այդ կանոնները մեզ հնարավորություն են տվել որոշելու բոլոր տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները:

Նախնական ֆունկցիաների որոշման համար այդպիսի պարզ և ունիվերսալ կանոններ գոյություն չունեն:

Ֆունկցիաների ինտեգրումը հանգում է տարբեր մեթոդների օգտագործման, որոնց օգնությամբ հնարավոր է լինում հասնել նպատակին:

Ինտեգրումը հեշտացնելու համար կազմվում են հիմնական ինտեգրալների աղյուսակներ, որոնք ստացվում են դիֆերենցման հիմնական բանաձևերից:

Բերենք այդ աղյուսակը.

I. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

Մասնավոր դեպքում, երբ $n = 0$

$$\int dx = x + C$$

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

III. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

IV. $\int \cos x dx = \sin x + C$

V. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$

VI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$

VII. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$

VIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

IX. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

X. $\int e^x dx = e^x + C$

XI. $\int \operatorname{tgx}dx = -\ln|\cos x| + C$

XII. $\int \operatorname{ctgx}dx = \ln|\sin x| + C$

XIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

XIV. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\right| + C$

XV. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

XVI. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

Ինտեգրման արդյունքները կարելի է ստուգել դիֆերենց-ման միջոցով:

Ինտեգրման հիմնական եղանակները

Գոյություն ունի ինտեգրման երեք հիմնական եղանակ, որոնց օգնությամբ կարելի է ավելի բարդ արտահայտություն-ները ձևափոխել և նմանեցնել հիմնական բանաձևերին:

I. ***Գումարելիների վերլուծման եղանակ.***- Տրված $f(x)$ ֆունկցիան, որն անհնար է անմիջապես ինտեգրել, հաճախ հնարավոր է լինում վերածել մի քանի ֆունկցիաների գումարի, որոնցից յուրաքանչյուրը հեշտությամբ ինտեգրվում է:

Բերենք օրինակներ.

1 $\int \frac{x^3 + 4x + 2}{2x}dx = \int\left(\frac{1}{2}x^2 + 2 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int x^2dx + 2\int dx +$

$+\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + c = \frac{x^3}{6} + 2x + \ln|x| + c;$

2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$

$= -\operatorname{ctgx} + \operatorname{tgx} + c;$

II. Փոփոխականի փոխարինման եղանակ.- Շատ դեպքերում, $\int f(x)dx$ ինտեգրալի մեջ x փոփոխականի փոխարեն մտցնելով նոր t փոփոխական տրված ինտեգրալը հնարավոր է դառնում բերել մի նոր ինտեգրալի, որը կամ պարունակվում է հիմնական ինտեգրալների աղյուսակում, կամ հեշտությամբ բերվում է նրանց: Ինտեգրման այս մեթոդը կոչվում է փոփոխականի փոխարինման մեթոդ: x փոփոխականի փոխարեն մտցնենք մի t փոփոխական, որը x-ի հետ կապված է $x=\varphi(t)$ առնչությամբ: $\varphi(t)$-ն անընդհատ ֆունկցիա է,որն ունի $\varphi'(t)$ անընդհատ ածանցյալ: Այդ դեպքում $dx=\varphi'(t)dt$ և մենք կունենանք.

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$:

Այս բանաձևը կոչվում է փոփոխականի փոխարինման բանաձև: Դրա ճշմարտացիությունն ապացուցելու համար բավական է նրա երկու կողմը դիֆերենցել:

Օրինակներ.- 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, նշանակենք $x = at;\ dx = adt$

Օգտագործելով վերը նշված բանաձևը` կստանանք.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{adt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}} = \int \frac{adt}{a\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$$

Վերադառնալով հին փոփոխականին` կունենանք.

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, քանի որ նշանակումից $t=\frac{x}{a}$:

2. $\int \sqrt[3]{1+x^2}\,xdx$:

Տեղադրենք $1+x^2=t$, $dt = 2xdx$, որտեղից $xdx=\frac{1}{2}dt$

$$\int \sqrt[3]{1+x^2}\,xdx = \int \sqrt[3]{t}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^{1/3}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{4/3}}{4/3} + C =$$

$$= \frac{3}{8}t^{4/3} + C = \frac{3}{8}\left(1+x^2\right)^{4/3} + C :$$

III. Մասերով ինտեգրման եղանակ.- Եթե $u=u(x)$ և $v=v(x)$-ը դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են, ապա դրանց արտադրյալի համար ունենք՝ $d(u\cdot v)=udv+vdu$, որն ինտեգրելով, կստանանք՝ $uv=\int udv+\int vdu;$

Եթե այս երկու ինտեգրալներից մեկը կարողանանք հաշվել, մյուսը կգտնենք հենց այդ հավասարությունից՝

$$\int udv=uv-\int vdu:$$

Այս բանաձևը կոչվում է մասերով ինտեգրման բանաձև:

Տրված ինտեգրալի նկատմամբ այս բանաձևը կիրառելու համար պետք է կարողանալ ենթաինտեգրալային արտահայտությունը տրոհել երկու արտադրիչների, որոնցից մեկը նշանակել u-ով, մյուսը dv-ով: Տրոհման համար, ընդհանուր կանոն գոյություն չունի, ուղղակի պետք է հաշվի առնել, որ $dv=v'(x)dx$ արտահայտությունը պետք է կարողանալ ինտեգրել այնպես, որպեսզի ստացվի v-ն:

Բերենք երկու օրինակ.

1. $\int x\sin xdx$

Ենթադրենք $u=x$, $dv=\sin xdx$, այստեղից $du=dx$: $v=-\cos x$

Կիրառելով մասերով ինտեգրման բանաձևը կստանանք՝

$\int x\sin xdx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C:$

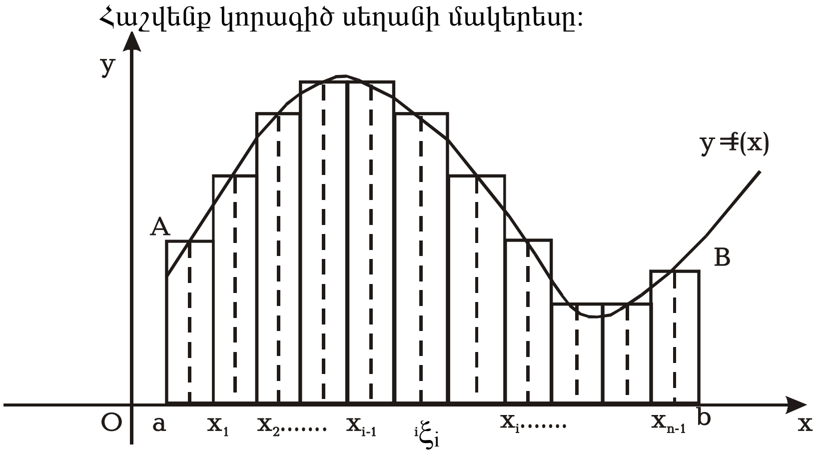
2. $\int(x-1)e^{2x}dx$

Նշանակենք $u=x-1$: $dv=e^{2x}dx$, որտեղից $du=dx$: $v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}\ d(2x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int(x-1)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$$

Դիտարկենք մի խնդիր, որի լուծումը հանգում է որոշյալ ինտեգրալի գաղափարին:

Հաշվենք կորագիծ սեղանի մակերեսը:



Գծ.33

Սահմանում.- Կորագիծ սեղան կամ սեղանակերպ կոչվում է այն հարթ պատկերը, որը սահմանափակված է $y = f(x)$ կորի աղեղով, OX առանցքով և $x = a$, $x = b$ ուղիղներով (գծ.33):

Ուստի պետք է հաշվել AabB պատկերի մակերեսը՝ S_{ab} Հաշվումների պարզեցման նպատակով ընդունենք $a < b$, $f(x) > 0$ և անընդհատ [a,b] միջակայքում: [a,b] հատվածը n-1 կամայական կետերի միջոցով տրոհենք մասերի՝ $a = x_\circ < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_{n-1} < x_n = b$: Այս կետերը [a,b] հատվածը կտրոհեն n տարրական մասերի.

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ . . . ,\ \ [x_{i-1},x_i],. . .,\ \ [x_{n-1},x_n],$$

Տրոհման կետերից տանելով oy առանցքին զուգահեռ ուղիղներ՝ տրված կորագիծ սեղանը կբաժանենք n տարրական կորագիծ սեղանների: Նշանակենք այդ սեղանների մակերեսները համապատասխանաբար $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_i, ..., \Delta S_n$: Պարզ է, որ $S_{ab} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + ... + \Delta S_i + ... + \Delta S_n$ կամ ավելի կարճ ձևով $S_{ab} = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$, որտեղ $\sum$ (սիգմա) գումարի նշանն է:

Սակայն այս տարրական կորագիծ սեղանների մակերեսները հաշվելը նույնքան դժվար է, որքան մեծ սեղանակեպի մակերեսի հաշվումը: Ուստի վարվենք հետևյալ կերպ. յուրաքանչյուր տարրական $[x_{i-1}; x_i]$ հատվածում վերցնենք մի կամայական $\xi_i (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$ կետ և հաշվենք ֆունկցիայի արժեքները այդ կետերում, այսինքն՝ կառուցենք $f(\xi_i)$ օրդինատները:

Այնուհետև յուրաքանչյուր տարրական կորագիծ սեղան մոտավորապես փոխարինենք $[x_{i-1;} x_i]$ $(i = 1,2,..., n)$ հիմք ունեցող ուղղանկյուններով, որոնց բարձրությունները հավասար են $f(\xi_i)$ $(i = 1,2,3,...n)$ (գծ.33):

Նշանակենք $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i (i = 1,2,...n)$: Այդ դեպքում ուղղանկյունների մակերեսները հավասար կլինեն $f(\xi_i)\Delta x_i (i = 1,2,...., n)$, իսկ $\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$: Տրված կորագիծ սեղանի մակերեսը մոտավորապես հավասար կլինի գծ.33 ստացված աստիճանաձև պատկերի մակերեսին՝

$$S_{ab} \approx \sum_{i=1}^{u} f(\xi_i)\Delta x_i :$$

Պարզ է, որ եթե Δx_i-ից մեծագույնը սկսի նվազել, ապա այս գումարը ավելի ճիշտ կարտահայտի սեղանակերպի մակերեսը: Ուստի բնական է, որ գրենք

$$S_{ab} = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i| \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Այսպիսով, կորագիծ սեղանի մակերեսի հաշվումը բերվեց այս տիպի գումարի սահմանի հաշվման և խնդիրը փաստորեն լուծված է:

Նման մոտեցումով կարելի է լուծել բազմապիսի խնդիրներ:

Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը

Այժմ ուշադրություն չդարձնենք կոնկրետ խնդրի բովանդակության վրա, և հարցը դիտարկենք ընդհանուր տեսքով:

Դիցուք, $f(x)$ ֆունկցիան որոշված և սահմանափակ է [a,b] միջակայքում: Միջակայքում վերցնենք $n-1$ հատ կամայական թվեր՝ $a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_{i-1} < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b$, որոնք միջակայքը տրոհում են n մասերի:

Յուրաքանչյուր $[x_{i-1}; x_i]$ միջակայքում վերցնենք մի ξ_i կամայական կետ՝ $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ և այնտեղ հաշվենք $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքը՝ $f(\xi_i)$ $(i = 1,2,....,n)$:

Ֆունկցիայի այդ արժեքները բազմապատկենք համապատասխան Δx_i միջակայքերի երկարությամբ՝ $f(\xi_i)\Delta x_i$ և ստացված բոլոր արտադրյալները գումարենք՝

$$f(\xi_i)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i :$$

Այս գումարը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումար [a,b]միջակայքում: Քանի որ [a,b] միջակայքի տրոհումը և յուրաքանչյուր փոքր միջակայքում ξ_i կետերի ընտրությունը կատարվում է կամայական եղանակով, ուստի տրված $f(x)$ ֆունկցիայի և $[a:b]$ միջակայքի համար միևնույն n-ի դեպքում կարելի է բազմաթիվ ինտեգրալային գումարներ կազմել:

n-ը անվերջորեն մեծացնենք այնպես, որ բոլոր փոքր միջակայքերի Δx_i երկարությունները անվերջորեն փոքրանան. հնարավոր է երկու դեպք՝

ա) տարբեր եղանակներով կազմված ինտեգրալային գումարները ձգտեն տարբեր սահմանների կամ վերջավոր սահման չունենան

բ) բոլոր հնարավոր եղանակներով կազմված ինտեգրալային գումարները ձգտեն միևնույն վերջավոր սահմանին:

Երկրորդ դեպքում ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է [a,b] միջակայքում, իսկ ինտեգրալային գումարի սահմանը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ [a:b] միջակայքում և նշանակվում այսպես՝ $\int_a^b f(x)dx$:

Առաջին դեպքում ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը [a:b] միջակայքում գոյություն չունի:

Այսպիսով, ըստ սահմանման՝

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta x_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է ենթաինտեգրալային, x-ը՝ ինտեգրման փոփոխական, իսկ a-ն և b-ն՝ համապատասխանաբար որոշյալ ինտեգրալի ստորին և վերին սահմաններ: Յուրաքանչյուր $f(x)$ ֆունկցիայի համար տրված a և b սահմանների դեպքում որոշյալ ինտեգրալը որոշակի թիվ է: Որոշյալ ինտեգրալի արժեքը կախված է ենթաինտեգրալային ֆունկցիայից և ինտեգրման սահմաններից:

Անդրադառնանք վերը դիտարկված խնդրին: Համեմատելով կորագիծ սեղանի S_{ab} մակերեսի համար ստացված արժեքը որոշյալ ինտեքրալի սահմանման հետ՝ նկատում ենք, որ՝ $S = \int_a^b f(x)dx$:

Սա է որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական իմաստը:

Որոշյալ ինտեգրալի սահմանման հետ կապված հարց է առաջանում, թե ինչպիսի պայմանների առկայության դեպքում գոյություն ունի ինտեգրալային գումարի սահմանը, այսինքն որոշյալ ինտեգրալը: Դրա պատասխանը տալիս է որոշյալ ինտեգրալի գոյության թեորեմը, որը ներկայացվում է առանց ապացուցման:

Թեորեմ. Փակ միջակայքում յուրաքանչյուր անընդհատ ֆունկցիա այդ միջակայքում ինտեգրելի է, այսինքն գոյություն ունի նրա որոշյալ ինտեգրալը:

Այսպիսով, որպեսզի ֆունկցիան լինի ինտեգրելի բավական է, որ այն լինի անընդհատ փակ միջակայքում: Բայց որոշյալ ինտեգրալը կարող է գոյություն ունենալ նաև որոշ խզվող ֆունկցիաների համար: Օրինակ, ապացուցվում է, որ փակ միջակայքում սահմանափակ և վերջավոր խզման կետեր ունեցող յուրաքանչյուր ֆունկցիայի համար որոշյալ ինտեգրալը գոյություն ունի:

Որոշյալ ինտեգրալի հատկությունները

Ներկայացնենք որոշյալ ինտեգրալի մի քանի հատկություններ, որոնք ստացվում են հիմնականում նրա սահմանումից, ըստ որի $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\Delta x_i$

1. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

այսինքն՝ որոշյալ ինտեգրալի սահմանները տեղափոխելիս՝ փոխվում է միայն ինտեգրալի նշանը:

2. $$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

այսինքն՝ հավասար ստորին և վերին սահմաններ ունեցող որոշյալ ինտեգրալը հավասար է զրոյի:

3. $$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx,$$

այսինքն՝ հաստատուն բազմապատկիչը կարելի է դուրս բերել որոշյալ ինտեգրալի նշանի տակից:

4. $$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx,$$

այսինքն՝ ֆունկցիաների գումարի որոշյալ ինտեգրալը հավասար է առանձին գումարելիների որոշյալ ինտեգրալների գումարին:

5. $\int_a^b dx = b - a$:

6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$,

ընդ որում, սա հավաստի է a, b, c թվերի ցանկացած դասավորության դեպքում:

7. Եթե [a,b] միջակայքում $f(x) \geq 0$ և $a < b$, ապա՝ $\int_a^b f(x)dx \geq 0$:

8. Եթե $f(x)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաները [a:b] միջակայքում ինտեգրելի են և $f(x) \leq \varphi(x)$, ապա $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$:

9. Եթե [a,b] միջակայքում $m \leq f(x) \leq M$ և m և M ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքներն են, $a < b$, ապա՝ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$:

10. Եթե f(x) –ը անընդհատ է [a;b] միջակայքում, ապա այդ միջակայքում գոյություն ունի առնվազն մի c կետ, որ

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \quad a < c < b:$$

Այս հատկությունը ապացուցվում է որպես առանձին թեորեմ և կոչվում է միջին արժեքի թեորեմ:

Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումից արդեն գիտենք, որ նրա թվային արժեքը կախված է ենթաինտեգրալային ֆունկցիայից, ինտեգրման սահմաններից և կախված չէ ինտեգրման փոփոխականից, ուստի կարելի է ինտեգրման փոփոխականը նշանակել ցանկացած տառով և ինտեգրալի արժեքը չի փոխվի՝

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \ldots :$$

Սակայն, եթե փոխենք ինտեգրալի սահմանները, ապա նրա արժեքը, ընդհանրապես, կփոխվի: Վերին b սահմանի փոխարեն վերցնենք մի x փոփոխական, իսկ ինտեգրման փոփոխականը նշանակենք t-ով: Այդ դեպքում, եթե x փոփոխվի, ապա $\int_a^x f(t)dt$-ի արժեքը դրանից կախված կփոփոխվի, այսինքն՝ ինտեգրալը կհանդիսանա իր վերին սահմանի ֆունկցիա: Նշանակենք այդ ֆունկցիան $\Phi(x)$-ով:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt :$$

Այս ֆունկցիան օժտված է հետևյալ երկու կարևոր հատկությամբ՝

1) եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a,b]$ միջակայքում, ապա $\Phi(x)$-ը անընդհատ է այդ միջակայքում:

2) եթե $f(x)$-ը անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքում, ապա $\Phi(x)$-ն այդ նույն միջակայքում ունի ածանցյալ, որը հավասար է $f(x)$-ի՝

$$\Phi'(x) = f(x) :$$

Ապացույց.- x-ին տանք Δx աճ, այդ դեպքում

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt:$$

$\Phi(x)$ ֆունկցիայի աճը կլինի՝

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt:$$

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt:$$

Այս հավասարությունից անմիջապես հետևում է, որ եթե $\Delta x\to 0$ ապա $\Delta\Phi$ նույնպես կձգտի զրոյի: Դա նշանակում է, որ $\Phi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է: Առաջին հատկությունը ապացուցված է:

Վերջին հավասարության աջ մասի նկատմամբ կիրառենք միջին արժեքի թեորեմը.

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)(x+\Delta x-x)=f(c)\Delta x,$$ որտեղ $x<c<x+\Delta x$:

Կազմենք $\Phi(x)$ ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերությունը և անցնենք սահմանի,երբ վերջինս ձգտում է զրոյի.

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=f(c):$$

$\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c)$, բայց երբ $\Delta x\to 0$, ապա $c\to x$, հետևաբար $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c)=\lim\limits_{c\to x} f(c)$ և ֆունկցիայի անընդհատության հետևանքով $\lim\limits_{c\to x} f(c)=f(x)$:

Այսպիսով, $\Phi'(x)=f(x)$, և երկրորդ հատկությունը նույնպես ապացուցված է:

Որոշյալ ինտեգրալի հաշվումը: Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը

Մենք ապացուցեցինք, որ $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$, այսինքն՝

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$-ն $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական ֆունկցիան է:

Այժմ ապացուցենք մի այսպիսի թեորեմ:

Եթե $F(x)$-ը $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի ինչ-որ մի նախնական ֆունկցիա է, ապա առկա է հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a):$$

Այս բանաձևը կոչվում է Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձև:

Ապացույց. - Ենթադրենք, $F(x)-$ը $f(x)$-ի որևէ նախնական ֆունկցիա է: Գիտենք, որ $\int_a^x f(t)dt$ նույնպես հանդիսանում է $f(x)$-ի նախնական ֆունկցիա: Բայց միևնույն ֆունկցիայի երկու նախնական ֆունկցիաները տարբերվում են միայն հաստատուն գումարելիով: Հետևաբար, կարող ենք գրել.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)+C$$

C հաստատունի որոշման համար այս հավասարության մեջ տեղադրենք $x=a$, այդ դեպքում

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C \quad \text{կամ} \quad O = F(a) + C, \quad \text{որտեղից} \quad C = -F(a):$$

Հետևաբար, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a):$

Տեղադրելով այս հավասարության մեջ $x = b$` կստանանք Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը`

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a):$$

Եթե նշանակենք $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, ապա որոշյալ ինտեգրալի հաշվման բանաձևը կարելի է գրել այսպես`

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a):$$

Օրինակներ.- 1. $\int_0^2 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{16}{4} - 0 = 4$

$$2. \int_0^\pi \sin xdx = -\cos x\Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2:$$

$$3. \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1:$$

Վարժություններ

1. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ 2. $\int_0^{\pi/2} \sin xdx$ 3. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+a^2}$ 5. $\int_1^2 xe^x dx$ 6. $\int_1^2 (2x-3)^5 dx$

Որոշյալ ինտեգրալի կիրառությունները

Որոշյալ ինտեգրալը սահմանեցինք որպես ինտեգրալային գումարի սահման: Որպես այդպիսին, այն բազմապիսի կիրառություններ ունի երկրաչափությունում, մեխանիկայում, ֆիզիկայում, քիմիայում, կենսաբանության մեջ, էկոնոմիկայում, տեխնիկական գիտություններում և այլուր:

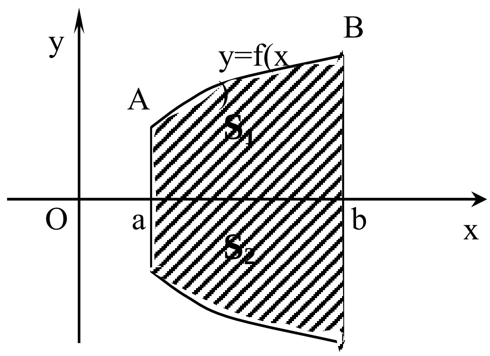
Այժմ դիտարկենք մի քանի կիրառություններ.

1. Հարթ պատկերի մակերեսի հաշվումը

Որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական իմաստից հայտնի է, որ կորագիծ սեղանի մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ ինտեգրալով՝ $S=\int_a^b f(x)dx$ կամ ավելի կարճ՝ $S=\int_a^b ydx$

Որոշյալ ինտեգրալի միջոցով այլ պատկերների մակերեսներ հաշվելու ժամանակ որպես պարզագույն պատկեր դիտվում է կորագիծ սեղանը:

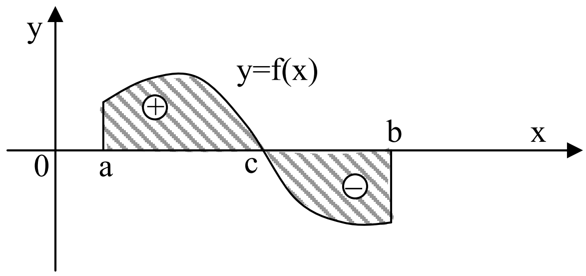
Դիցուք պահանջվում է հաշվել գծ.34-ում ներկայացված պատկերի մակերեսը. $S_1=\int_a^b f(x)dx$, իսկ $S_2=-\int_a^b f(x)dx$:



Գծ.34

Այսպիսով, երկու դեպքում էլ, երբ $f(x)$-ը հաստատուն նշանի ֆունկցիա է, կորագիծ սեղանի մակերեսը կարելի է հաշվել $S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ բանաձևով: Իսկ եթե $f(x)$ կորը հատում է ox առանցքը (գծ.35), ապա սեղանի հիմքը պետք է բաժանել մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրում $f(x)$-ը պահպանում է հաստատուն նշան, և վարվել այնպես, ինչպես նախորդ դեպքում:

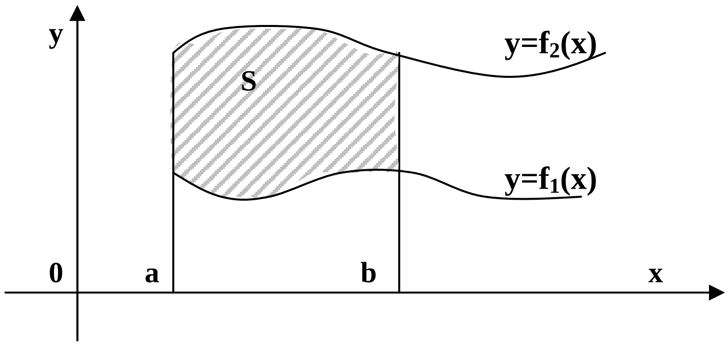
$$S=\left|\int_a^c f(x)dx\right|+\left|\int_c^b f(x)dx\right| :$$



Գծ.35

Մակերեսի հաշվման բանաձևը կարելի է օգտագործել նաև այն դեպքում, երբ տրված հարթ պատկերը սահմանափակված է երկու տարբեր կորերով կամ մի փակ կորով:

Դիցուք, պահանջվում է հաշվել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ կորերով և $x=a$ ու $x=b$ ուղիղներով /գծ.36/:



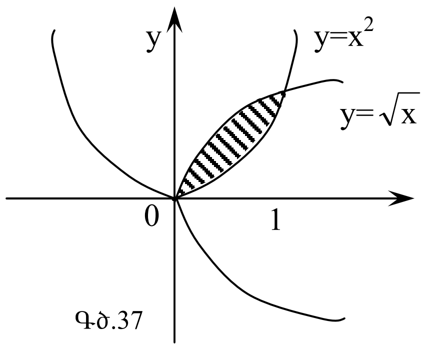
Գծ.36

Տրված պատկերի մակերեսը կարող ենք ներկայացնել որպես երկու կորագիծ սեղանների մակերեսների տարբերություն.

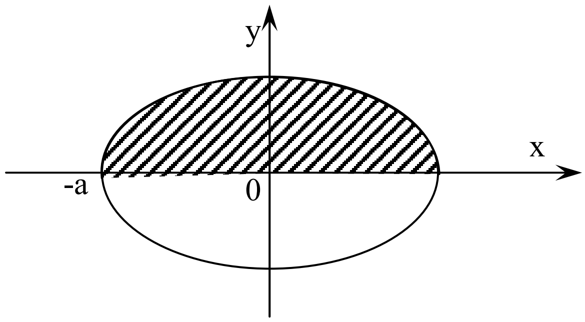
$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx:$$

Օրինակ.- 1. Հաշվել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է $y=\sqrt{x}$ և $y=x^2$ կորերով /գծ.37/:

Լուծում. - Գտնենք տրված երկու կորերի հատման կետերը: Այդ նպատակով լուծենք դրանց հավասարումները համատեղ. $\sqrt{x}=x^2$, $x=x^4$, $x(1-x^3)=0$, որտեղից $x_1=0$, $x_2=1$



Գծ.37



Գծ.38

Հետևաբար՝ $S=\int_0^1 \sqrt{x}dx-\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Օրինակ.- 2 Հաշվել էլիպսի մակերեսը (գծ.38):

Լուծում. - Էլիպսի հավասարումն է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, որտեղից

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

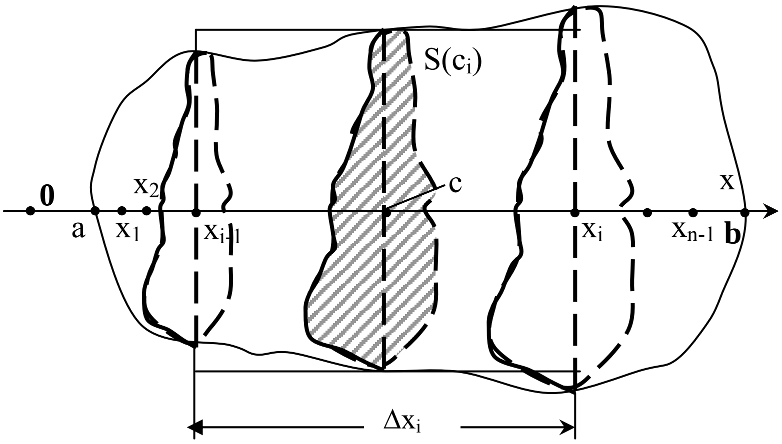
$$S=\int_a^b ydx=2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=$$

$$=\frac{2b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\pi ab:$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $a=b$ կստանանք a շառավիղով շրջանի մակերեսը՝ $S_{շրջ}=\pi a^2$:

2. Մարմնի ծավալի հաշվումը

Դիցուք, տրված է մի T մարմին: Ենթադրենք, մեզ հայտնի են այդ մարմնի OX առանցքին ուղղահայաց հատույթների մակերեսները: Պարզ է, որ x-ի փոփոխման հետ, ընդհանուր դեպքում, կփոփոխվի հատույթի մակերեսը: Այնպես որ հատույթի մակերեսը x-ի ֆունկցիան է: Նշանակենք այդ ֆունկցիան $S(x)$-ով: Ենթադրենք նաև, որ x-ը փոփոխվում է a-ից մինչև $b(a \le x \le b)$ և հաշվենք այն ծավալը, որը սահմանափակված է $x = a$ և $x = b$ հարթությունների միջև: Այդ նպատակով [a:b] միջակայքը տրոհենք n մասերի $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$ և բաժանման կետերով տանենք ox առանցքին ուղղահայաց հարթություններ: Այդ հարթությունները կտրոհեն տրված մարմինը n տարրական շերտերի (գծ.39):



Գծ.39

Յուրաքանչյուր տարրական հատվածում վերցնենք մի կամայական c_i միջանկյալ կետ.

$$x_{i-1} \le c_i \le x_i \qquad (i = 1,2,3,....,n)$$

c_i կետով տանենք ox առանցքին ուղղահայաց հատույթ: Նրա մակերեսը, որն ընդգծված է գծագրում, կլինի $S(c_i)$: Յուրաքանչյուր տարրական շերտ մոտավորապես փոխարինենք մի ուղիղ գլանով, որի բարձրությունն է $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$(i=1,2,3,...,n)$, իսկ հիմքը $S(c_i)$-ն է: Այդ եղանակով ամբողջ մարմինը կփոխարինվի մի աստիճանաձև պատկերով, որը բաղկացած է n տարրական գլաններից: Էլեմենտար գլանի ծավալը նշանակենք Δv_i-ով, իսկ աստիճանաձև մարմնի ծավալը՝ V_n-ով:

$$\Delta v_i = S(c_i)\cdot \Delta x_i \quad (i=1,2,3,....,n), \text{ իսկ}$$

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = \sum_{i-1}^{n} S(c_i)\cdot \Delta x_i :$$

T մարմնի V ծավալը հավասար կլինի V_n-ի սահմանին, երբ $\max|\Delta x_i| \to 0$ կամ $n\to\infty$, այսինքն՝

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta x_i|\to 0}} V_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta x_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} S(C_i)\Delta x :$$

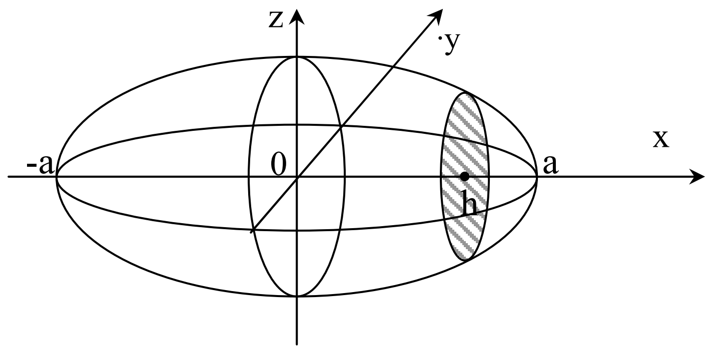
Բայց $\sum_{i-1}^{n} S(C_i)\Delta x_i$-ը $S(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարն է: Հետևաբար, նրա սահմանը, երբ $\max|\Delta x_i| \to 0$, կտա որոշյալ ինտեգրալ և կարող ենք գրել՝

$$V = \int_a^b S(x)dx :$$

Սա զուգահեռ հատույթների մակերեսների միջոցով մարմնի ծավալի հաշվման բանաձևն է:

Օրինակ, հաշվենք այն պատկերի ծավալը, որը սահմանափակված է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ էլիպսոիդով:

Լուծում.- Էլիպսոիդը հատելով $x=h$ հարթությամբ՝ կստանանք $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}$ կամ $\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}=1$, այսինքն մի էլիպս, որի կիսաառանցքներն են՝ $b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$ և $c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$ (գծ.40):



Գծ.40

Քանի որ էլիպսի մակերեսը հավասար է π թվի և կիսաառանցքների արտադրյալին, ուստի կարող ենք գրել, որ $S(h)=\pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)$:

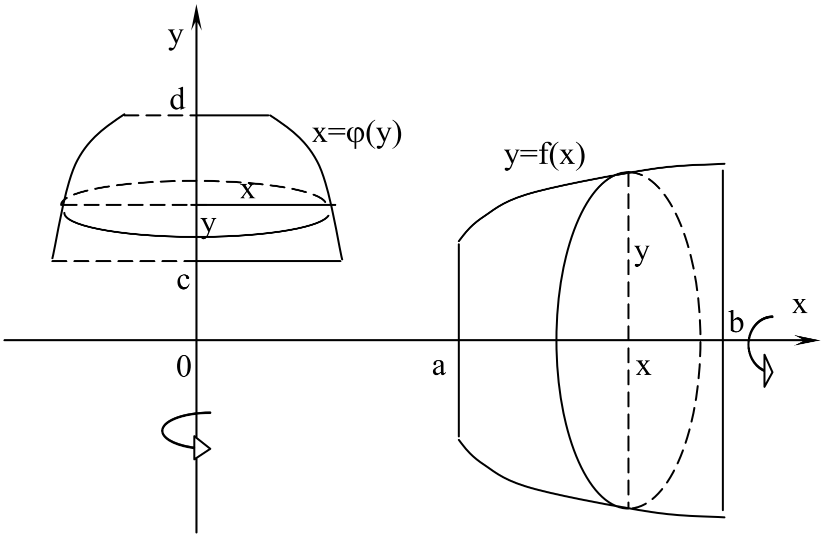
Հետևաբար, վերը ստացված ծավալի բանաձևի մեջ x-ը փոխարինելով h-ով, կունենանք՝

$$V=\int_{-a}^{a}S(h)dh=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)dh=\pi bc\left(h-\frac{h^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc:$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $a=b=c=R$, մենք կստանանք R շառավիղով գնդի ծավալը, որը հավասար կլինի $\frac{4}{3}\pi R^3$:

ՊՏՏՄԱՆ ՄԱՐՄՆԻ ԾԱՎԱԼԸ

Դիցուք, կորագիծ սեղանի հիմքը ox կամ oy առանցքի ինչ-որ հատվածն է և T մարմինը ստացվում է այդ կորագիծ սեղանի պտտումից իր հիմքի շուրջը (գծ.41):

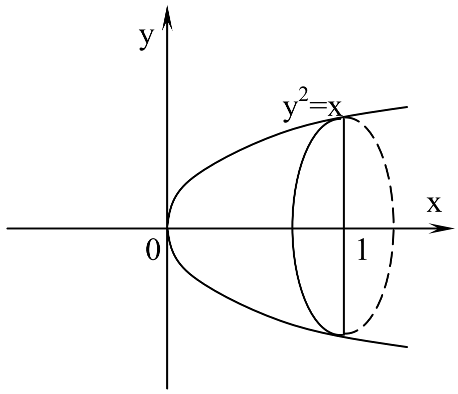


Գծ.41

Առաջին դեպքում պտտման առանցքին ուղղահայաց հատույթները $S(x)=\pi y^2$ փոփոխական մակերեսներով շրջաններ են, որտեղ $y=f(x)$ $a\le x\le b$: Երկրորդ դեպքում՝ $S(y)=\pi x^2$ մակերեսով շրջաններ, որտեղ $x=\varphi(y)$ և $c\le y\le d$: Այդ դեպքում պտտման T մարմնի ծավալը, համաձայն ծավալի հաշվման $V=\int_a^b S(x)dx$ ընդհանուր բանաձևի, կլինի՝

$V_{պտ}=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b [f(x)]^2dx$, երբ պտտումը տեղի է ունենում ox առանցքի շուրջը, և $V_{պտ} = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d [\varphi(y)]^2 dy$, երբ պտտումը տեղի է ունենում oy առանցքի շուրջը:

Օրինակ.- Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որը ստացվում է $y^2 = x$ պարաբոլի [0:1] հատվածում ընկած աղեղի պտտումից ox առանցքի շուրջը (գծ.42):

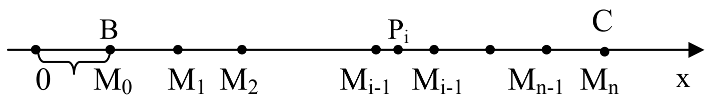


Գծ.42

Լուծում.- $V_{պտ} = \pi\int_0^1 y^2 dx = \pi\int_0^1 x dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$:

3. Փոփոխական ուժի կատարած աշխատանքի հաշվումը

Դիցուք, M նյութական կետը $\overline{F}$ ուժի ազդեցությամբ ուղղագիծ շարժվում է B կետից մինչև C կետը (գծ.43):



Գծ.43

Պարզության համար ենթադրենք, որ ուժի ուղղությունը համընկնում է շարժման ուղղության հետ: Պահանջվում է հաշվել ուժի կատարած աշխատանքը: Ֆիզիկայից հայտնի է, որ հաստատուն ուժի կատարած աշխատանքը հավասար է այդ ուժի չափի և անցած ճանապարհի երկարության արտադրյալին՝ $A = F \cdot BC$:

Այժմ ենթադրենք, թե $\overline{F}$ ուժը փոփոխական է: M կետի հեռավորությունը սկզբնական 0 կետից նշանակենք S-ով: Պարզ է, որ $\overline{F}$ ուժի չափը կլինի S ճանապարհի ֆունկցիա՝ $\overline{F} = \overline{F}(S)$: Այս դեպքում նախորդ բանաձևով աշխատանքը հաշվել չենք կարող, քանի որ չենք կարող իմանալ, թե անցած ճանապարհի փոփոխական ուժի ո՞ր արժեքով պիտի բազմապատկել:

Այս խնդիրը լուծելու համար վարվենք հետևյալ կերպ.

BC ճանապարհը կամայական եղանակով տրոհենք n մասերի: Տրոհման կետերը թող լինեն՝
$M_0, M_1, M_2, ..., M_{i-1}, M_i, ..., M_{n-1}, M_n$:

Նշանակենք $M_{i-1}M_i = \Delta S_i$: Յուրաքանչյուր հատվածում վերցնենք մի միջանկյալ $P(S_i'), (i = 1,2,3,...,n)$ կետ և հաշվենք ուժի արժեքները այդ կետերում՝ $\overline{F}(S_i')$: Ենթադրենք, յուրաքանչյուր տարրական հատվածում ուժը մոտավորապես պահպանում է հաստատուն արժեք՝ հավասար $F(S_i')$: Արդյունքում կստացվի,որ $\overline{F}$ ուժը BC տեղամասում փոփոխվում է թռիչքաձև:

Եթե i-րդ հատվածում ուժի կատարած աշխատանքը նշանակենք ΔA_i ,ապա կարող ենք գրել՝

$$\Delta A_i = F(S_i') \cdot \Delta S_i :$$

Իսկ, եթե թռիչքաձև փոփոխվող ուժի կատարած աշխատանքը BC տեղամասում նշանակենք A_n, ապա
$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} F(S_i') \cdot \Delta S_i :$$

Եթե ΔS_i հատվածների մաքսիմալ երկարությունը անսահմանորեն փոքրացնենք, ապա $\overline{F}(S_i')$-ը կձգտի $\overline{F}$ ուժի կատարած A աշխատանքին: Այսինքն՝

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta S_i|\to 0}} A_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta S_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} F(S_i')\Delta S_i :$$

Սակայն $\sum_{i=1}^{n} F(S_i')\Delta S_i$ -ն $F(S)$ ֆունկցիայի n -րդ ինտեգրալային գումարն է: Հետևաբար, նրա սահմանը կտա որոշյալ ինտեգրալ և կարող ենք գրել՝ $A = \int_b^c F(S)dS$ որտեղ $b = OB,\ c = OC$:

Վարժություններ

1. Հաշվել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է $y= x^2 +1$ պարաբոլով և $x-y=3$ ուղղով:
2. Հաշվել $y=x^2$ և $x= y^2$ պարաբոլներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:
3. Հաշվել $y= 2^x$, $y=2$ և $x=0$ գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:
4. Հաշվել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է $y= 2x-x^2$ կորով և ox առանցքով:
5. Որոշել $y = \ln x$, $x = e$ և $y = 0$ գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը :
6. Հաշվել այն մարմնի ծավալը , որը առաջանում է $y=2x-x^2$ և $y=0$ գծերով սահմանափակված պատկերը ox առանցքի շուրջը պտտելիս:
7. Հաշվել $y=x^2$ և $y=2x$ գծերով սահմանափակված պատկերը ox առանցքի շուրջը պտտելու արդյունքում առաջացած մարմնի ծավալը:
8. Հաշվել $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսի ox առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի ծավալը (պտտման էլիպսոիդ):
9. Գտնել $y=x^2$ և $y=4$ գծերով սահմանափակված պատկերը $x=2$ ուղղի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի ծավալը:

10. Որոշել $y=x^3$, $x=0$ և $y=8$ գծերով սահմանափակված պատկերը oy առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի ծավալը:

ԹՎԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ
ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ

Ենթադրենք, տրված է անվերջ թվային հաջորդականություն $u_1, u_2, u_3,\ldots, u_n,\ldots$:

Այս հաջորդականության անդամներից կազմենք մի այսպիսի անվերջ գումար՝

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1)$$

(1) գումարը կոչվում է թվային շարք :

(1) շարքը կարճ կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով՝

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ կամ երբեմն $\sum_{n=0}^{\infty} u_n, (u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ շարքի համար):

(1) շարքում $u_1, u_2, u_3,\ldots, u_n,\ldots$ թվերը կոչվում են շարքի անդամներ: Ընդ որում u_1 -ը շարքի առաջին անդամն է, u_n-ը՝ n-րդ անդամը:

Հարկ է նշել, որ ոչ մի դեպքում շարքի վերջին անդամ գոյություն չունի:

(1) շարքի համար կազմենք $S_1, S_2, S_3,\ldots S_n,\ldots$ գումարներ, որոնք որոշվում են հետևյալ ձևով՝

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1+u_2$$
$$S_3 = u_1+u_2+u_3$$

$$S_n = u_1+u_2+\ldots+u_n$$

Այս գումարները կոչվում են (1) շարքի մասնակի գումարներ, մասնավորապես S_n- ը կոչվում է n-րդ մասնակի գումար:

Սահմանում. - Եթե մասնակի գումարների հաջորդականության սահմանը $n\to\infty$ գոյություն ունի և հավասար է վերջավոր թվի, այսինքն՝

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S \qquad (2)$$

ապա (1) շարքը կոչվում է զուգամետ և S թիվը կոչվում է նրա գումար: Իսկ եթե այդ սահմանը հավասար է անվերջության կամ գոյություն չունի, ապա շարքը կոչվում է տարամետ և գումարի մասին խոսելն անիմաստ է:

Դիտարկենք երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամնե-րից կազմված շարքը՝

$$b_1+b_1q+b_1q^2+\ \ldots+b_1q^{n-1}+b_1q^n+\ldots:$$

Հանրահաշվի դասընթացից հայտնի է, որ սրա n-րդ մասնակի գումարը՝ $S_n=\dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\left(q\neq 1\right)$:

Հաշվենք այս մասնակի գումարի սահմանը, երբ $n\to\infty$. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\dfrac{b_1}{1-q}$, եթե $|q|<1$, որովհետև այս դեպքում $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$:

Հետևաբար, շարքը այս դեպքում, համաձայն սահմանման զուգամիտում է: Իսկ եթե $|q|>1$, ապա $q^n\to\infty$, երբ $n\to\infty$ և շարքը կլինի տարամետ: Շարքը տարամետ է նաև այն դեպքում, երբ $|q|=1$, որովհետև $S_n=a+a+\ldots+a=na$ և $\ell im_{n\to\infty}S_n=\ell im_{n\to\infty}na=\infty$:

Այսպիսով՝ երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամներից կազմված շարքը զուգամիտում է միայն և միայն այն դեպքում, երբ նրա հայտարարը՝ $|q|<1$: Իսկ երբ $|q|\geq 1$, ապա շարքը տարամիտում է:

Օրինակ.- $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots.+\dfrac{1}{2^n}+\ldots$ շարքը զուգամետ է, որովհետև երկրաչափական պրոգրեսիայի շարք է՝ $q=\dfrac{1}{2}$ հայտարարով:

ՇԱՐՔԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ԱՆՀՐԱԺԵՇՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՏԱՐԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ԲԱՎԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ

Շարքի գումարի հաշվումը հաճախ կապվում է բարդությունների հետ: Ուստի, այն հարցը, թե շարքը զուգամիտում է, թե տարամիտում, ունի կարևոր նշանակություն: Այս հարցին պատասխանելու համար մաթեմատիկայում ապացուցվում են հայտանիշներ, որոնց օգնությամբ, չօգտվելով, զուգամիտության անմիջական սահմանումից պարզաբանվում է շարքի զուգամիտության հարցը:

Թեորեմ.- (Շարքի զուգամիտության անհրաժեշտության հայտանիշը): Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ շարքը զուգամիտում է, ապա նրա u_n ընդհանուր անդամը ձգտում է 0-ի, n - ը ∞ ձգտելիս, այսինքն

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 :$$

Ապացույց.- Դիտարկենք $S_{n-1} = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$ և $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ մասնակի գումարները: Քանի որ ըստ պայմանի շարքը զուգամիտում է, ապա՝ $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ և $\lim_{n\to\infty} S_n = S$: Բայց $u_n = S_n - S_{n-1}$, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$:

Այն ինչ պահանջվում էր ապացուցել: Ապացուցված թեորեմից անմիջապես հետևում է շարքի տարամիտության բավարարության հայտանիշը՝ եթե շարքի u_n ընդհանուր անդամը չի ձգտում զրոյի, n-ը ∞ ձգտելիս, ապա շարքը տարամիտում է :

Իրոք, եթե շարքը զուգամիտում է, ապա $u_n \to 0$, n-ը ∞ ձգտելիս, բայց ըստ պայմանի u_n – ը չի ձգտում 0-ի, երբ $n\to\infty$:

Օրինակ – Հետազոտել հետևյալ շարքի զուգամիտությունը $\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + ... + \frac{n}{100n+1} + ...$

Լուծում.- $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{100n+1} = \frac{1}{100} \neq 0$

Հետևաբար, շարքը տարամետ է:

Եթե շարքի զուգամիտությունից հետևում է, որ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

ապա հակառակ պնդումը միշտ չէ, որ ճիշտ է: Այսինքն՝ շարքի ընդհանուր անդամը $n \to \infty$ կարող է ձգտել զրոյի, բայց շարքը զուգամետ չլինել: Որպես օրինակ դիտարկենք այսպես կոչված հարմոնիկ շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots :$$

Ցույց տանք, որ այս շարքը տարամետ է, չնայած, որ

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Իրոք՝ հարմոնիկ շարքը գրենք մի քիչ մանրամասնորեն

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{4} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{8} + \underbrace{\frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{32}}_{16} + \ldots \quad :$$

Փակագծերի մեջ վերցված անդամներից յուրաքանչյուրը փոխարինենք այդ խմբի վերջին անդամով: Այդպիսով, մենք կփոքրացնենք շարքի մասնակի գումարը և կունենանք

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{4} + \underbrace{\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}}_{8} + \underbrace{\frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{32}}_{16} + \ldots$$

կամ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots :$

Այս նոր շարքի n-րդ մասնակի գումարը, որն ավելի փոքր է, քան տրված հարմոնիկ շարքի մասնակի գումարը, կունենա հետևյալ տեսքը՝ $S_n = 1 + \frac{1}{2}n$ և n-ը անվերջության ձգտելու դեպքում , S_n-ը նույնպես կձգտի ∞: Հետևաբար, հարմոնիկ շարքի n-րդ մասնակի գումարը նույնպես կձգտի ∞: Այսինքն հարմոնիկ շարքը տարամետ է: Մնում է նշել, որ հարմոնիկ շարքը կարևոր նշանակություն ունի շարքերի տարամիտությունն ուսումնասիրելու ժամանակ:

ԴՐԱԿԱՆ ԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ ՇԱՐՔԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ԲԱՎԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

1.*Զուգամիտության համեմատության հայտանիշը*

Ենթադրենք, ունենք երկու դրական անդամներով շարքեր

$$u_1+u_2+...+u_n+... \qquad (1)$$

$$v_1+v_2+...+v_n+... \qquad (2)$$

Սրանց համար առկա է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ.-Եթե (1) շարքի անդամները չեն գերազանցում (2) շարքի համապատասխան անդամներին, այսինքն

$$u_n \le v_n \qquad (3)$$

և (2) շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև (1) շարքը: Իսկ եթե (1) շարքը տարամետ է, ապա (2) շարքը նույնպես տարամետ է:

Ապացույց.-Նշանակենք (1) շարքի մասնակի գումարը S_n, իսկ (2) շարքի մասնակի գումարը σ_n

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} u_i; \sigma_n=\sum_{i=1}^{n} v_i$$

(3) պայմանից հետևում է, որ $S_n \le \sigma_n$: (4)

Քանի որ (2) շարքը զուգամետ է, ապա $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$ և այն պայմանից, որ (1) և (2) շարքերը դրական անդամներով են, հետևում է, որ $\sigma_n<\sigma$ և (4) անհավասարության համաձայն $S<\sigma$:

Այսպիսով, մենք ցույց տվեցինք, որ S_n մասնակի գումարները սահմանափակված են վերևից: Քանի որ n-ի աճման հետ միասին S_n մասնակի գումարը մոնոտոն աճում է, ապա այն ունի սահման $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, ընդ որում պարզ է, որ $S\le\sigma$ և թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է:

Հիմա անցնենք թեորեմի երկրորդ մասի ապացուցմանը:

Ըստ թեորեմի պայմանի, (1) շարքը տարամետ է: Դա նշանակում է, որ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$ կամ գոյություն չունի: Քանի որ σ_n մասնակի գումարների հաջորդականությունը մոնոտոն աճող է, ապա, ըստ (4) անհավասարության, n-ի անվերջորեն աճման հետ միասին σ_n-ը առավել ևս կձգտի ∞: Դա նշանակում է, որ (2) շարքը նույնպես տարամետ է:

Օրինակներ. – Համեմատության հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել հետևյալ շարքերի զուգամիտությունը

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+...$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+..$

Առաջին շարքը համեմատենք $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...$ զուգամետ երկրաչափական պրոգրեսիայի շարքի հետ: Նկատի ունենալով, որ $\frac{1}{n^n}\le\frac{1}{2^n}$, ըստ համեմատության թեորեմի այս շարքը կլինի զուգամետ:

Երկրորդ շարքը համեմատենք հարմոնիկ շարքի հետ.

$$\frac{1}{n}\le\frac{1}{\sqrt{n}}:$$

Նկատի ունենալով այս անհավասարությունը, ըստ համեմատության հայտանիշի,տրված շարքը նույնպես կլինի տարամետ:

Վարժություններ

Համեմատության հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել հետևյալ դրական անդամներով շարքերի զուգամիտությունը:

1. $\frac{1}{\ell n2}+\frac{8}{\ell n3}+...+\frac{1}{\ell n(n+1)}+...$

2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...$

3. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+...+\sin\frac{\pi}{2n}+\cdots$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

6. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n} + \ldots$

7. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n^2+2n} + \ldots$

8. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{3n-1} + \ldots$

Առանց ապացույցի բերենք բավարարության մի քանի հայտանիշներ ևս:

2.Դալամբերի հայտանիշը

***Թեորեմ.*-** Դիցուք, դրական անդամներով $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ շարքի (n+1)–րդ և n-րդ անդամների հարաբերությունը n-ը, ∞ ձգտելիս, ձգտում է ℓ վերջավոր սահմանին, այսինքն $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, այդ դեպքում՝

1. եթե $\ell < 1$, ապա շարքը զուգամետ է,
2. Եթե $\ell > 1$, ապա շարքը տարամետ է,
3. եթե $\ell = 1$, ապա շարքի զուգամիտության հարցը մնում է անորոշ, անհրաժեշտ է լրացուցիչ պայման:

Սա նշանակում է, որ երբ $\ell = 1$, ապա շարքը կարող է լինել ինչպես զուգամետ, այնպես էլ տարամետ: Նման դեպքում հարցի վերջնական լուծումը պահանջում է լրացուցիչ հետազոտություններ:

Օրինակներ 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

$$u_n = \frac{1}{n!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)} = \frac{1}{n!(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1 \text{:}$$

հետևաբար, տրված շարքը զուգամետ է:

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{n}{n+1}+...$

$u_n=\frac{n}{n+1};\quad u_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=1:$$

Ուրեմն Դալամբերի հայտանիշի օգնությամբ այս շարքի զուգամիտության մասին հետևություն անել չի կարելի, բայց, օգտվելով զուգամիտության անմիջական սահմանումից, կարելի է ցույց տալ, որ շարքը զուգամետ է: Իրոք $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ և S_n մասնակի գումարը կարելի է ներկայացնել $S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$ տեսքով:

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1:$ Ուրեմն շարքը զուգամետ է:

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}=\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+...+\frac{2^n}{n}+...$

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{n}{n+1}=2>1:$

Հետևաբար, շարքը տարամետ է:

3.Կոշիի հայտանիշը

Թեորեմ.- Դիցուք, $u_1+u_2+...+u_n+...$ոչ բացասական անդամներով շարքի համար $\sqrt[n]{u_n}$ մեծությունը, երբ $n\to\infty$ ունի վերջավոր ℓ սահման, այսինքն $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell$, այդ դեպքում՝

1. Եթե $\ell<1$, շարքը զուգամետ է,
2. Եթե $\ell>1$, շարքը տարամետ է,
3. Եթե $\ell=1$, ապա շարքի զուգամիտության հարցը մնում է անորոշ: Այն լուծելու համար անհրաժեշտ են լրացուցիչ հետազոտություններ:

Օրինակներ 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+...+\frac{1}{n^n}+...$

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1:$$

Հետևաբար Կոշիի հայտանիշի համաձայն, շարքը զուգամետ է:

$$2.\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n=\frac{3}{1}+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^3+...+\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n+...$$

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2>1$$

Ուրեմն շարքը տարամետ է: Ընդհանրապես ցույց է տրվում, որ եթե Դալամբերի կամ Կոշիի հայտանիշներից մեկը զուգամիտության հարցը թողնում է անորոշ, ապա մյուսը նույնպես թողնում է անորոշ, և այն կիրառելը անիմաստ է:

4. Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը

Թեորեմ- Ենթադրենք, $u_1+u_2+...+u_n+...$դրական անդամներով շարքի անդամները մոնոտոն նվազում են, այսինքն՝ $u_1\ge u_2\ge u_3...$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$և դիցուք y=f(x) այնպիսի մոնոտոն նվազող անընդհատ ֆունկցիա է, որ f(1)= u_1, f(2)= u_2, ... , f(n)=u_n:

Այդ դեպքում՝

1) Եթե $\int_1^{\infty}f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է, ապա տրված շարքը նույնպես զուգամետ է.

2) Եթե այս ինտեգրալը տարամետ է, ապա շարքը տարամետ է:

Օրինակ .– Ցույց տանք, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ շարքը զուգամետ է, երբ p>1 և տարամետ է, երբ $p\le1$: Դալամբերի հայտանիշը այս շարքի զուգամիտության հարցը թողնում է անորոշ $(\ell=1)$: Կիրառենք Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը՝ տեղադրելով $f(x)=\frac{1}{x^p}$: Այս ֆունկցիան բավարարում է թեորեմի բոլոր պայմաններին:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\ell\mathrm{im}_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^p}=\ell\mathrm{im}_{b\to\infty}\begin{cases}\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^b=\frac{1}{1-p}\left(b^{1-p}-1\right), \text{ երբ } p\neq 1\\ \ell nx\Big|_1^b=\ell nb, \text{ երբ } p=1:\end{cases}$$

Եթե p>1, $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{1-p}$, անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է և հետևաբար, շարքը նույնպես կլինի զուգամետ: Եթե $p\leq 1$, ապա $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ ինտեգրալը հավասար է անվերջության, հետևաբար, շարքը տարամետ է:

Այսպիսով, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ շարքը զուգամետ է, եթե p>1 և տարամետ է, եթե $p\leq 1$:

Այս կարևոր արդյունքը հաճախ կօգտագործվի կոնկրետ թվային շարքերի զուգամիտությունն ուսումնասիրելու ժամանակ: Այսպես օրինակ՝

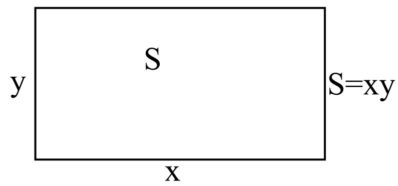
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$ շարքը զուգամետ է, որովհետև p=2>1:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$շարքը տարամետ է, որովհետև $p=\frac{1}{2}<1$:

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ ԵՎ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ

Մինչ այժմ մենք ուսումնասիրում էինք մեկ փոփոխականից կախված ֆունկցիաններ: Բայց պրակտիկայում շատ հաճախ հանդիպում են այնպիսի դեպքեր, երբ դիտարկվող մեծության (ֆունկցիայի) փոփոխությունը կախված է լինում ոչ թե մեկ, այլ մի քանի մեծությունների (արգումենտների) փոփոխություններից:

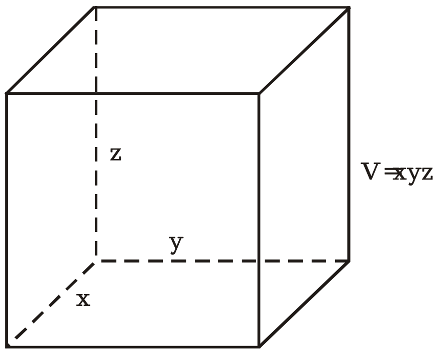
Օրինակ 1. Ուղղանկյան մակերեսը հավասար է նրա չափումների արտադրյալին՝



Գծ. 44

Այստեղ ուղղանկյան մակերեսը կարելի է համարել երկու փոփոխականների ֆունկցիա: $S(x,y)=xy$

Օրինակ 2. Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ծավալը հավասար է նրա չափումների արտադրյալին:



Գծ. 45

Այստեղ զուգահեռանիստի ծավալը երեք փոփոխականների ֆունկցիա է: $V(x,y,z)=xyz$

Օրինակ 3. Ջոուլ - Լենցի օրենքը արտահայտում է անջատվող ջերմության քանակի կախվածությունը հոսանքի ուժից, հաղորդալարի դիմադրությունից և ժամանակից $Q=0,24I^2Rt$:

Այստեղ Q-ն նույնպես երեք փոփոխականների ֆունկցիա է: Այնուհետև տանք մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի և վերջինիս որոշման տիրույթի սահմանումը:

Սահմանում 1 .Եթե x, y, z, ..., t փոփոխականների արժեքների յուրաքանչյուր բազմությանը համապատասխանում է u փոփոխականի որոշակի արժեք, ասում են, որ u –ն x, y, z, ..., t փոփոխականների ֆունկցիա է և այդ կապակցությունը ընդհանուր ձևով գրում են հետևյալ կերպ՝

$u=f(x, y, z, ..., t)$:

Սահմանում 2. $x, y, z, ..., t$ փոփոխականների արժեքների այն բազմությունը, որի համար գոյություն ունեն u-ի որոշակի արժեքներ, կոչվում է ֆունկցիայի որոշման տիրույթ և նշանակվում է D տառով:

Մասնավորապես, մանրամասն ուսումնասիրենք երկու փոփոխականների ֆունկցիաները:

z փոփոխականը կոչվում է x և y փոփոխականների ֆունկցիա, եթե (x,y) արժեքների յուրաքանչյուր զույգին համապատասխանում է z-ի որոշակի արժեք: (x,y) արժեքների զույգերի այդ բազմությունը կոչվում է z ֆունկցիայի որոշման կամ գոյության տիրույթ:

$z=f(x,y)$ երկու փոփոխականի ֆունկցիայի որոշման տիրույթը հարթության կետերի բազմություն է: Մասնավոր դեպքում այն կարող է լինել ամբողջ հարթությունը: Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը սահմանափակող գիծը կոչվում է եզրագիծ:

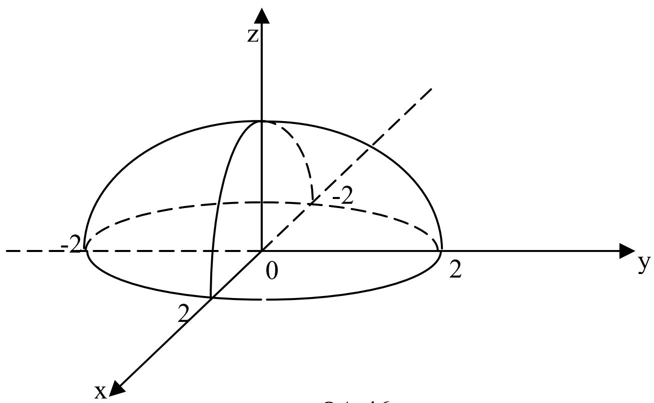
Տիրույթի եզրագծին չպատկանող կետերը կոչվում են ներքին կետեր: Այն տիրույթը, որը բաղկացած է միայն ներքին կետերից, կոչվում է բաց տիրույթ: Եթե տիրույթին են պատկանում նաև եզրագծի կետերը, այն կոչվում է փակ տիրույթ:

Այսպես օրինակ .

1. $z= x^2+y^2$ ֆունկցիան որոշված է (x,y)-ի ցանկացած զույգի համար: Ուրեմն նրա տիրույթը ամբողջ xoy հարթությունն է .

2. $z = \dfrac{1}{y - x}$ ֆունկցիան որոշված է ամենուրեք, բացի $y-x=0$ կամ $y=x$ ուղղի կետերից.

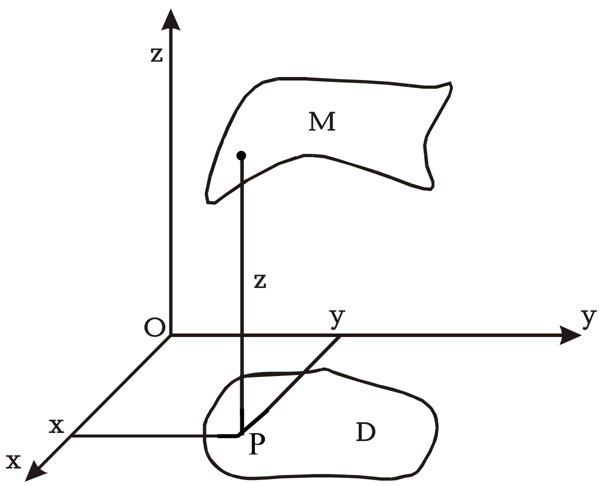
3. $z = +\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ֆունկցիան որոշված է միայն x և y փոփոխականների այն արժեքների համար, որոնք բավարարում են $x^2 + y^2 \le 4$ անհավասարությունը: Այսինքն՝ z ֆունկցիայի որոշման տիրույթը R=2 շառավիղով շրջան է, որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատական սկզբնակետում ներառյալ նաև $x^2 + y^2 = 4$ շրջանագծի կետերը (գծ.46):



Գծ.46

ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՄԵԿՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիտարկենք z=f(x,y) ֆունկցիան: Սա ֆունկցիայի բացահայտ տեսքն է, իսկ անբացահայտ տեսքը հետևյալն է F(x;y;z)=0:



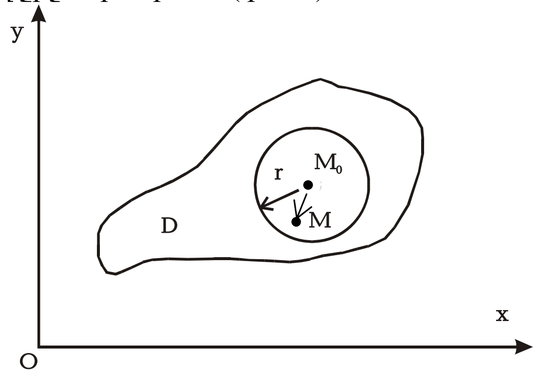
Գծ. 47

Ենթադրենք, տրված ֆունկցիան որոշված է D տիրույթում: D տիրույթի յուրաքանչյուր P(x,y) կետին կհամապատասխանի մի z, որը բավարարում է z=f(x,y) հավասարմանը: Արդյունքում տարածության մեջ կստանանք M(x, y, f (x, y)) կետերի երկրաչափական տեղ, որն, ինչպես հայտնի է անալիտիկ երկրաչափությունից, իրենից ներկայացնում է մի մակերևույթ (գծ. 47): Այսպիսով, ամեն մի երկու փոփոխականների ֆունկցիային տարածության մեջ համապատասխանում է մի մակերևույթ, որը կոչվում է նրա գրաֆիկ:

ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆՆ ՈՒ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Նախ ծանոթանանք մի կարևոր հասկացության հետ:

$M_0(x_0, y_0)$ կետի r- շրջակայք կոչվում է բոլոր այն (x,y) կետերի բազմությունը, որոնք բավարարում են $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$ անհավասարությանը, այսինքն՝ այն կետերի բազմությունը, որոնք գտնվում են $M_0(x_0, y_0)$ կենտրոնով r շառավիղով շրջանի ներսում (գծ. 48):



Գծ. 48

Ենթադրենք, տրված է z=f(x,y) ֆունկցիան, որը որոշված է xoy հարթության D տիրույթում: Դիտարկենք D տիրույթի մի որոշակի $M_0(x_0, y_0)$ կետ:

Սահմանում. - M(x,y) կետը $M_0(x_0, y_0)$ կետին ձգտելու ժամանակ A թիվը կոչվում է f(x,y) ֆունկցիայի սահման, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար կարելի է նշել այնպիսի $r>0$ թիվ, որ տեղի ունենա $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ անհավասարությունը, հենց որ տեղի է ունենում $\left|\overline{M_0M}\right|<r$ անհավասարությունը: Եթե A թիվը f(x,y) –ի սահմանն է M(x,y)-ը $M_0(x_0, y_0)$-ին ձգտելիս, ապա այդ գրում են այսպես՝ $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)=f(x_0,y_0)$: Ընդ որում M(x,y) կետը ձգտում է $M_0(x_0, y_0)$-ին կամայական եղանակով, միշտ մնալով ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ներսում: Այսպիսով, որպեսզի f(x,y) ֆունկցիան լինի անընդհատ $M_0(x_0,y_0)$ կետում, անհրաժեշտ է, որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝

1. f(x,y)-ը որոշված լինի $M_0(x_0, y_0)$ կետի շրջակայքում,
2. f(x,y)-ը պետք է ունենա սահման M(x,y)-ը $M_0(x_0, y_0)$-ին ձգտելիս,
3. այդ սահմանը պետք է հավասար լինի f(x,y)-ի արժեքին $M_0(x_0, y_0)$ կետում:

Եթե f(x,y) ֆունկցիան անընդհատ է D տիրույթի բոլոր կետերում, ապա նա կոչվում է անընդհատ այդ տիրույթում:

ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՆ ՈՒ ՄԱՍՆԱԿԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐԸ

Դիտարկենք z=f(x,y) ֆունկցիան, որը որոշված և անընդհատ է D տիրույթում:

z ֆունկցիայի մասնակի աճ կոչվում է այն աճը, որը նա ստանում է արգումենտներից որևէ մեկին աճ տալու ժամանակ.

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$$
$$\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

Սահմանում.- z=f(x,y) ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալը, ըստ որևէ մի արգումենտի, կոչվում է նրա համապատասխան մասնակի աճի և այդ արգումենտի աճի հարաբերության սահմանը, երբ վերջինս ձգտում է զրոյի:

Առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների համար ընդունված է կատարել հետևյալ նշանակումները՝

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f'_x(x,y)$$
$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f'_y(x,y):$$

Այնպես որ, ըստ սահմանման, կարող ենք գրել`

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}:$$

Սահմանումից հետևում է, որ մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները ըստ որևէ մի փոփոխականի հաշվելիս պետք է մյուս փոփոխականները դիտարկել որպես հաստատուններ: Այդ պատճառով էլ ֆունկցիայի ածանցման կանոնները մնում են նույնը ինչ-որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, միայն ամեն անգամ պետք է հաշվի առնել թե կոնկրետ ըստ ո՞ր փոփոխականի է ածանցվում ֆունկցիան:

Օրինակներ .-1. $z = x^2 \sin y,\ \frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$

2. $z = x^3 + 3x^2y^3 - 6y,\ \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^3,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 9x^2y^2 - 6$

3. $z = x^y,\ \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$:

Ամեն մի մասնակի ածանցյալ (եթե այն դիֆերենցելի է) կարելի է իր հերթին ածանցել ըստ յուրաքանչյուր արգումենտի:

Առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների մասնակի ածանցյալները կոչվում են երկրորդ կարգի ածանցյալներ և նշանակվում են հետևյալ կերպ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Նման ձևով հաշվում են երկու փոփոխոկաններով ֆունկցիայի երրորդ և ավելի բարձր կարգի մասնակի ածանցյալները: Նշենք, որ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \ldots$ կոչվում են խառը մասնակի ածանցյալներ:

Առանց ապացուցելու բերենք մի քանի փոփոխականներով ֆունկցիայի խառը ածանցյալների մասին թեորեմը.

Թեորեմ.- Ցանկացած կարգի խառն ածանցյալների արժեքները կախված չեն ածանցման հերթականությունից, այսինքն՝ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$:

Օրինակ.–Տրված է $z = \ell n\left(x^2 + y^2\right)$ ֆունկցիան: Ցույց տալ, որ նրա երկրորդ կարգի խառը ածանցյալները հավասար են.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}:$$

Անցնենք մասնակի դիֆերենցիալներին:

Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի մասնակի դիֆերենցիալների գաղափարը սահմանվում է այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալը:

Եթե մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալը սահմանվում է որպես նրա աճի գլխավոր մաս, ապա մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի մասնակի դիֆերենցիալը, ըստ որևէ մի փոփոխականի, սահմանվում է որպես ըստ այդ փոփոխականի մասնակի աճի գլխավոր մաս:

Իրոք, քանի որ $\frac{\partial z}{\partial x}=\ell im_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, ապա ըստ սահմանների տեսության հիմնարար թեորեմի, կարելի է գրել՝ $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}+\alpha$, որտեղ α-ն անվերջ փոքր մեծություն է: Այստեղից $\Delta_x z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\alpha\Delta x$:

Այս արտահայտության մի մասում գրված է երկու անհամարժեք անվերջ փոքր մեծությունների գումար, որովհետև αΔx-ը ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$:

Սահմանում.- $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$ գումարելին կոչվում է z ֆունկցիայի մասնակի աճի գլխավոր մաս կամ մասնակի դիֆերենցիալ ըստ x արգումենտի և նշանակվում է հետևյալ ձևով $d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x=\frac{\partial z}{\partial x}dx$:

Նման ձևով $d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{\partial z}{\partial y}dy$:

Այսպիսով, ֆունկցիայի մասնակի դիֆերենցիալը, ըստ որևէ մի փոփոխականի, հավասար է նրա մասնակի ածանցյալի և այդ փոփոխականի դիֆերենցիալի արտադրյալին:

Օրինակ.- $z=\ell n\left(x^2+y^2\right)$: Գտնել այս ֆունկցիայի մասնակի դիֆերենցիալները.

$$d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}dx=\frac{2x}{x^2+y^2}dx,\qquad d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{2x}{x^2+y^2}dy:$$

ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԼՐԻՎ ԱՃԸ ԵՎ ԼՐԻՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼԸ

$z=f(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ աճ կոչվում է այն աճը, որը նա ստանում է բոլոր արգումենտների փոփոխման հետևանքով. $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$:

Նշենք որ ընդհանուր դեպքում ֆունկցիայի լրիվ աճը հավասար չէ նրա մասնակի աճերի գումարին. $\Delta z\neq\Delta_x z+\Delta_y z$:

Եթե z=f(x,y) ֆունկցիան ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ, ապա կարելի է ցույց տալ, որ նրա լրիվ աճի գլխավոր մասը, ունի $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ տեսքը:

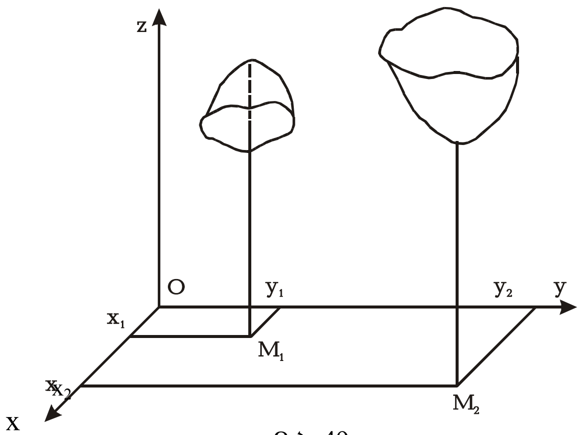
Սահմանում.- Լրիվ աճի գլխավոր մասը կոչվում է լրիվ դիֆերենցիալ և նշանակվում dz: Այնպես որ, ըստ սահմանման

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy:$$

Քանի որ $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ և $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ մասնակի դիֆերենցիալներ են, կարող ենք գրել՝ $dz=d_xz+d_yz$: Այն ֆունկցիան, որն ունի լրիվ դիֆերենցիալ, կոչվում է դիֆերենցելի: Տրված կետում ֆունկցիայի անընդհատ մասնակի ածանցյալների գոյությունը դիֆերենցելիության բավարար պայման է:

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐԸ

Սահմանում 1.- Ասում են, որ $M_1(x_1,y_1)$ կետը z=f(x, y) ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է, եթե այդ կետի շրջակայքից վերցրած ցանկացած M(x,y) կետի համար առկա է $f(x_1,y_1)>f(x,y)$ անհավասարությունը:



Գծ. 49

Սահմանում 2.- Ասում են նաև, որ $M_2(x_2, y_2)$ կետը $z=f(x, y)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետն է, եթե այդ կետի շրջակայքից վերցրած յուրաքանչյուր $M(x, y)$ կետի համար $f(x_2, y_2)<f(x, y)$:

Ֆունկցիայի մաքսիմումները և մինիմումները միասին կոչվում են էքստրեմումներ (գծ. 49): Ֆունկցիայի արժեքները էքստրեմումի կետերում կոչվում են էքստրեմումներ:

Դիցուք, ունենք $z=f(x, y)$ դիֆերենցելի ֆունկցիան: Ստանանք այն անհրաժեշտ պայմանները, որոնց դեպքում այն $M_0(x_0,y_0)$ կետում հասնում է էքստրեմումի:

Թեորեմ.- (Էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանները): Եթե $z=f(x, y)$ ֆունկցիան $M_0(x_0, y_0)$ կետում ունի էքստրեմում, ապա նրա մասնակի ածանցյալներն այդ կետում հավասար են զրոյի կամ գոյություն չունեն՝

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0,\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0:$$

Ապացույց.- Ենթադրենք, $z=f(x, y)$ ֆունկցիան $M_0(x_0, y_0)$ կետում ունի էքստրեմում: y փոփոխականին տանք մի որոշակի $y=y_0$ արժեք: Որպեսզի $f(x, y_0)$ –ն, որպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիա, ունենա էքստրեմում, $x=x_0$ կետում, անհրաժեշտ է, որ նրա ածանցյալը հավասար լինի զրոյի կամ գոյություն չունենա, այսինքն $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0$:

Նման ձևով, եթե x փոփոխականին տանք որոշակի $x=x_0$ արժեք, կստանանք $f(x_0, y)$ մեկ փոփոխականի ֆունկցիա, որը $y=y_0$ կետում ունի էքստրեմում: Նշանակում է $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0$ կամ գոյություն չունի:

Ստացանք այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել:

Այն կետերը, որոնցում $z=f(x, y)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները դառնում են զրո կամ գոյություն չունեն, կոչվում են կրիտիկական կամ ստացիոնար կետեր: Այսպիսով, տրված $z=f(x, y)$ ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը գտնելու նպատակով պետք է հավասարեցնել զրոյի նրա առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=0$ և լուծել ստացված երկու անհայտով երկու հավասարումների համակարգը:

ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԲԱՎԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

Ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար, էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտության պայմանը բավարար չէ, այսինքն՝ եթե որևէ մի կետում առկա են անհրաժեշտության պայմանները դա դեռ չի նշանակում, որ այդ կետերը էքստրեմումի կետ են:

Մի քանի փոփոխականներով ֆունկցիայի էքստրեմումի գոյության բավարարության պայմանները շատ ավելի բարդ են, քան մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար: Այդ պատճառով առանց ապացույցի բերենք այդ պայմանները երկու փոփոխականներով ֆունկցիայի համար:

Դիցուք $M_0(x_0, y_0)$, կետում $z=f(x,y)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները հավասար են 0-ի, այսինքն

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}=0 \text{ և } \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}=0:$$

$M_0(x_0, y_0)$ կետում հաշվենք ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները և նշանակենք՝

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_0}, B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{M_0}, C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_0}:$$

Այդ դեպքում՝

1. եթե $AC-B^2>0$, ապա $z= f(x, y)$ ֆունկցիան $M_0(x_0, y_0)$ կետում ունի էքստրեմում, ընդ որում՝ մաքսիմում, երբ $A<0$ և մինիմում, երբ $A>0$,
2. եթե $AC-B^2<0$, ապա $z= f(x, y)$ ֆունկցիան $M_0(x_0, y_0)$ կետում էքստրեմում չունի,
3. եթե $AC-B^2=0$, ապա ֆունկցիայի էքստրեմումի հարցը մնում է բաց և պահանջվում է լրացուցիչ հետազոտություն:

Օրինակ.- Գտնել $z=x^2-2xy+2y^2-4x+6y+10$ ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքները:

Լուծում.- Գտնենք կրիտիկական կետերը՝

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 4, \ \ \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 4y + 6,$$

$$\begin{cases} 2x - 2y - 4 = 0 \\ -2x + 4y + 6 = 0 \end{cases}:$$

Լուծելով այս համակարգը՝ կստանանք x=1 և y= -1: Հետևաբար, (1, -1) կետը կրիտիկական կետ է: Հաշվենք երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալների արժեքները այդ կետում:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2,: \ \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4:$$

Ուրեմն՝ A =2, B = -2, C= 4, $AC-B^2=2\cdot 4-(-2)^2=4>0$:

Հետևաբար, (1, -1) կետը էքստրեմումի կետ է: Քանի որ A=2>0, ուրեմն այդ կետը մինիմումի կետ է և

$Z_{min}=1^2-2\cdot 1\cdot(-1)+2\cdot(-1)^2-4\cdot 1+6\cdot(-1)+10=5$

ՆՎԱԶԱԳՈՒՅՆ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ

Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի էքստրեմումի գործնական կիրառություններից մեկն է նվազագույն քառակուսիների մեթոդը:

Ենթադրենք, ինչ-որ փորձի կամ դիտումների միջոցով ստացվում է x և y փոփոխականների միջև եղած կապակցությունը աղյուսակի տեսքով և պահանջվում է ֆունկցիոնալ կախման աղյուսակային տեսքից անցնել անալիտիկ (բանաձևային) տեսքի, ընդ որում, եթե դա հնարավոր չէ կատարել ճշգրիտ, ապա աշխատում են կատարել մոտավորապես:

Աղյուսակ 1

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Դիցուք, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$ կետերը մոտավորապես դասավորված են մեկ ուղղի վրա: Դա նշանակում է որ x և y փոփոխականների միջև եղած կապակցությունը մոտ է գծայինին՝ Y=ax+b:

a և b անհայտ պարամետրերը ընտրենք այնպես, որպեսզի Y=ax+b ուղիղը որքան հնարավոր է մոտ անցնի ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում կառուցված M_1, M_2, M_3,..., M_n կետերին: x_i կետում (Y_i-y_i) տարբերությունը անվանենք շեղում, որտեղ $Y_i=ax_i+b$, իսկ y_i-ն ֆունկցիայի փորձից ստացված արժեքն է, որը համապատասխանում է նույն x_i կետին:

Նվազագույն քառակուսիների մեթոդի էությունը հետևյալն է. Y=ax+b որոնելի ուղիղը ընտրել այնպես, որպեսզի (Y_i-y_i) շեղումների քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույնը:

Այսպիսով, a և b անհայտ պարամետրերը որոշվում են՝ $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2=\min$ պայմանից:

Քանի որ x_i և y_i հաստատուն մեծություններ են (փորձի արդյունքներ), ապա վերը նշված գումարը a և b պարամետրերի ֆունկցիա է.

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2=\Phi(a,b):$$

a-ն և b-ն որոշելու համար օգտվենք երկու փոփոխականների ֆունկցիայի էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմաններից: Գտնենք $\Phi(a,b)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները ըստ a և b պարամետրերի և հավասարեցնենք զրոյի.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial a}&=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0\\ \frac{\partial\Phi}{\partial b}&=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0\end{aligned}\right\}$$

Հետևաբար, a և b պարամետրերը, որոնց համար տեղի է ունենում լավագույն մոտարկում (վերը նշված իմաստով), կարելի է որոշել ստացված համակարգից: Այս համակարգը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}:$$

a և b մեծությունների որոշման համար մենք ստացանք երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգ, որը կոչվում է հավասարումների նորմալ համակարգ: Որոշելով a-ն և b-ն՝ կարելի է ցույց տալ, որ $\Phi(a,b)$-ն այդ արժեքների համար հասնում է մինիմումի:

Տեղադրելով a-ի և b-ի արժեքները Y=ax+b հավասարման մեջ մենք կստանանք այն գծային ֆունկցիան, որը լավագույն ձևով է արտահայտում փորձի կամ դիտումների միջոցով ստացված x և y փոփոխականների միջև եղած կապը:

Եթե փորձի արդյունքներն այնպիսին են, որ ստացված M_1, M_2, M_3,..., M_n կետերը կառուցելիս նկատում ենք, դրանց մոտավոր դասավորվածությունը քառակուսային պարաբոլի վրա, ապա x և y փոփոխականների միջև եղած մոտավոր կախվածությունը կարելի է փնտրել $Y=ax^2+bx+c$ տեսքով: a, b և c գործակիցները գտնելու համար, այս դեպքում պետք է որոշել $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2 = \Phi(a,b,c)$ ֆունկցիայի մինիմումը:

$\Phi(a,b,c)$ երեք փոփոխականների ֆունկցիայի մինիմումի որոշման խնդիրը հանգում է երեք անհայտով երեք գծային հավասարումների համակարգի լուծման.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

որտեղից հաշվում են a, b և c պարամետրերի արժեքները:

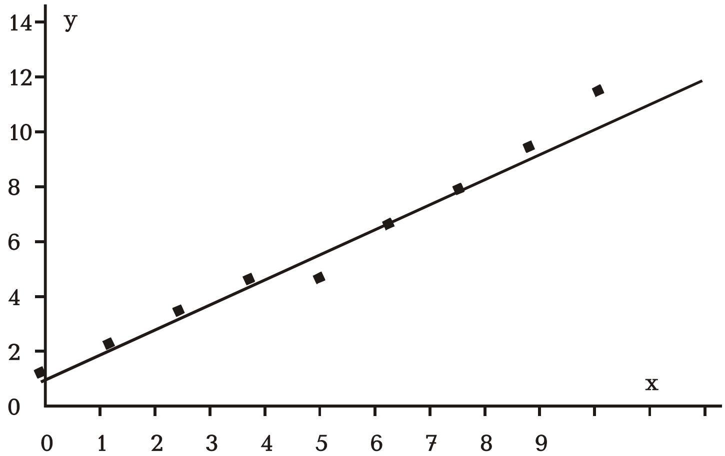
Օրինակ 1. Նվազագույն քառակուսիների մեթոդով ստանալ գծային կապ խոճկորների կենդանի քաշի և հասակի միջև: Փորձնական տվյալները բերված են հետևյալ աղյուսակում`

Աղյուսակ 2.

Հասակը, շաբաթներով	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Կենդանի քաշը, կգ	1,3	2,5	3,9	5,2	5,3	7,5	9,0	10,8	13,1

Լուծում.- Խոճկորների հասակը նշանակենք x, իսկ կենդանի քաշը` y: Դիտարկելով այս թվերը որպես հարթության կետերի կոորդինատներ` կառուցենք այդ կետերը (գծ. 50):

Նկատում ենք, որ կառուցված կետերը մոտավորապես դասավորված են մեկ ուղղի վրա, որը մեզ հնարավորություն է տալիս ենթադրելու, որ x և y փոփոխականները կապված են գծային օրենքով` Y=ax+b: a և b պարամետրերի որոշման համար օգտվենք նվազագույն քառակուսիների մեթոդի նորմալ համակարգից.



Գծ. 50

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}:$$

Այս հավասարումների մեջ մտնող գործակիցների հաշվման արդյունքները նպատակահարմար է ներկայացնել աղյուսակի տեսքով:

Աղյուսակ 3.

N	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\ y_i$	y_p	Δ
1	0	1,3	0	0		
2	1	2,5	1	2,5		
3	2	3,9	4	7,8		
4	3	5,2	9	15,6		
5	4	5,3	16	21,2		
6	5	7,5	15	37,5		
7	6	9,0	36	54,0		
8	7	10,8	49	75,6		
9	8	13,1	64	104,8		
Σ	36	58,6	204	319		

Հետևաբար նորմալ հավասարումները կունենան հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} 204a + 36b = 319 \\ 36a + 9b = 58,6 \end{cases}:$$

Լուծելով հավասարումների այս համակարգը, կստանանք՝ a=1,41, b=0,87:

Այսպիսով, խոճկորների հասակի (x) և նրանց կենդանի քաշի (y) միջև եղած որոնելի կապը արտահայտվում է y=1,41x+0,87 բանաձևով: Հարթության վրա (գծ. 50) կառուցենք նաև այս ուղիղը:

Օրինակ 2.- ենթադրենք, փորձի արդյունքները տրված են հետևյալ աղյուսակի տեսքով.

Աղյուսակ 4

x	0	1	1,5	2,1	3
y	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

Կառուցելով այս կետերը հարթության վրա, կհամոզվենք, որ դրանք մոտավորապես դասավորված են մի ուղղի վրա: Դա նշանակում է, որ x և y փոփոխականների միջև եղած կախվածությունը կարելի է փնտրել գծային ֆունկցիայի տեսքով՝ Y= ax+b: Օգտագործելով նվազագույն քառակուսիների մեթոդը՝ գտնենք a և b անհայտ պարամետրերը: Ինչպես նախորդ օրինակում, դա նպատակահարմար է իրագործել աղյուսակի օգնությամբ:

Աղյուսակ 5

N	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\,y_i$	$y_բ$	Δy
1	0	2,9	9,00	0,00	2,86	0,04
2	1,0	6,3	1,00	6,36	6,28	0,02
3	1,5	7,9	2,25	11,85	7,99	0,09
4	2,1	10,0	4,41	21,00	10,04	0,04
5	3,0	13,2	9,00	39,60	13,12	0,08
Σ	7,6	40,3	16,66	78,75		

Ըստ այս աղյուսակի կազմենք նորմալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} 16{,}66a + 7{,}6b = 78{,}75 \\ 7{,}6a + 5b = 40{,}3 \end{cases}$$

Լուծելով այս համակարգը կստանանք a=3,42, b=2,86: Հետևաբար, $Y=3{,}42x+2{,}86=y_բ$:

$y_բ$ - ֆունկցիայի բանաձևային արժեքն է, Δy- փորձի արդյունքների շեղումներն են այս բանաձևով հաշված արժեքներից:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. x և y փոփոխականների միջև եղած կախման փորձնական տվյալները ներկայացված են հետևյալ աղյուսակում

Աղյուսակ 6

x	1	2	3	4	5	6
y	15	10	4	0	-6	-10

Ընդունելով, որ այս կապակցությունը մոտովորապես գծային է, նվազագույն քառակուսիների մեթոդով որոշել $Y = ax + b$ ֆունկցիայի a և b գործակիցները:

Պատ.՝ $Y = -5{,}06x + 19{,}87$:

2. Կիրառելով նվազագույն քառակուսիների մեթոդը՝ որոշել $y=ax^2+bx+c$ ֆունկցիայի անհայտ գործակիցները, եթե x և y փոփոխականների արժեքները տրված են հետևյալ աղյուսակի տեսքով՝

Աղյուսակ 7

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
y	0,8	1,9	4,9	8,8	13,5

Պատ.՝ $y=2{,}54x^2 - x + 0{,}575$:

3. Նվազագույն քառակուսիների մեթոդով գտնել հետևյալ աղյուսակում տրված ֆունկցիոնալ կախման բանաձևը $y= ax+b$ տեսքով.

Աղյուսակ 8

x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y	0,1	0,4	0,4	0,5	0,9	0,9	0,9

Պատ.՝ $y=0{,}24x+ 0{,}01$:

4. ֆունկցիան տրված է աղյուսակի տեսքով.

Աղյուսակ 9

x	0	4	10	15	21	29	36	51	68
y	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Կառուցելով այս կետերը, կարելի է համոզվել, որ նրանք մոտավորապես դասավորված են ուղիղ գծի վրա: Նվազագույն քառակուսիների մեթոդով գտնել այդ գծային ֆունկցիայի տեսքը:

Պատ.՝ $y=0{,}87x+ 67{,}5$:

ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԳՅՈՒՂԱՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ԱՐՏԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

Վերջին ժամանակներս բուռն թափով զարգանում է մաթեմատիկական մեթոդների կիրառությունը էկոնոմիկայում և մասնավորապես գյուղատնտեսական էկոնոմիկայի խնդիրները լուծելու ժամանակ: Դրանք արդյունավետորեն օգտագործվում են տնտեսության բոլոր բնագավառներում, նպաստում հումքի, նյութերի, վառելիքի, միջոցների տնտեսմանը:

Դիտարկենք գյուղատնտեսական էկոնոմիկայի մի քանի խնդիրներ,որոնց լուծումը կարելի է տալ էքստրեմումների տեսության օգնությամբ:

1. Դիցուք ունենք n կաթնաապրանքային ֆերմաներ՝ $M_i(x_i,y_i)$, համապատասխանաբար $m_i(i=1,2,\dots,n)$ արտադրանքի քանակություններով: Պահանջվում է անցկացնել մի ճանապարհ այնպես, որ արտադրանքի քանակությունները դեպի այդ ճանապարհը տեղափոխելիս կատարվեն մինիմալ ծախսեր:

Որոնելի ճանապարհի (ուղղի) հավասարումը փնտրենք նորմալ տեսքով

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0,$$

որտեղ α-ն ox առանցքի և ուղղին ուղղահայաց ուղղի միջև եղած անկյունն է, p-ն ուղիղի հեռավորությունը սկզբնակետից:

Ինչպես հայտնի է, $M_i(x_i,y_i)$ կետի հեռավորությունը տրված ուղղից որոշվում է հետևյալ բանաձևով $\delta=\pm(x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha-p)$:

Քանի որ ուղղի դիրքը հարթության վրա բնորոշվում է α և p պարամետրերով, ուստի փոխադրումների վրա կատարված ծախսերը կլինեն համեմատական հետևյալ արտահայտությանը՝

$$R(\alpha,p) = \Sigma_1 m_i(x_i\cos\alpha + y_i\sin\alpha - p) -$$
$$-\Sigma_2 m_i(x_i\cos\alpha + y_i\sin\alpha - p),$$

որտեղ Σ_1 համապատասխանում է այն կետերին, որոնք դասավորված են ուղղից վերև, իսկ Σ_2-ը՝ այն կետերին, որոնք դասավորված են ուղղից ներքև:

Պետք է α և p պարամետրերը ընտրել այնպես, որպեսզի $R(\alpha,p)$լինի մինիմալ: Ուստի գրենք երկու փոփոխականի ֆունկցիայի էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial \alpha} = \sum_1 m_i(-x_i \sin\alpha + y_i \cos\alpha) - \sum_2 m_i(-x_i \sin\alpha + y_i \cos\alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial R}{\partial \rho} = -\sum_1 m_i + \sum_2 m_i = 0 \end{cases}$$

Այս համակարգի առաջին հավասարումից որոշենք $tg\alpha$

$$K = tg\alpha = \frac{\sum_2 m_i y_i - \sum_1 m_i y_i}{\sum_2 m_i x_i - \sum_1 m_i x_i}:$$

Համակարգի երկրորդ հավասարումից ունենք

$$\sum_1 m_i = \sum_2 m_i:$$

Նշանակելով $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, իսկ (x_{c_1}, y_{c_1}),

և (x_{c_2}, y_{c_2})-ով համապատասխանաբար կետերի առաջին և երկրորդ համակարգերի ծանրության կենտրոնների կոորդինատները, կարող ենք գրել,

$$\sum_1 m_i x_i = \frac{M}{2} x_{c_1}, \qquad \sum_1 m_i y_i = \frac{M}{2} y_{c_1}$$

$$\sum_2 m_i x_i = \frac{M}{2} x_{c_2}, \quad \sum_2 m_i y_i = \frac{M}{2} y_{c_2}:$$

Նկատի ունենալով այս նշանակումները՝ կարող ենք գրել

$$K = tg\alpha = \frac{y_{c_2} - y_{c_1}}{x_{c_2} - x_{c_1}}:$$

Այս հավասարության աջ մասը երկու համակարգերի ծանրության կենտրոններով անցնող ուղղի անկյունային գործակիցն է: Հետևաբար, որոնելի ուղիղը պետք է ուղղահայաց լինի կետերի առաջին և երկրորդ համակարգերի ծանրության կենտրոնները միացնող ուղղին և անցնի այդ հատվածի միջնակետով:

2. Դիցուք տված են n կաթնաապրանքային ֆերմաներ, որոնք տեղավորված են $M_i(x_i,y_i)$ կետերում և որոնք համապատասխանաբար տալիս են $m_i(i=1,2,\dots,n)$ արտադրանք, որը ենթակա է փոխադրման:

Պահանջվում է գտնել սպասարկման այն F(x,y) կենտ-րոնի տեղը, որի համար

$$R(x,y)=\sum_{i=1}^{n} m_i\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}=\min:$$

R(x,y) ֆունկցիայի էքստրեմումի անհրաժեշտության պայ-մանները տալիս են x և y փոփոխականների նկատմամբ հե-տևյալ հավասարումները.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{m_i(x-x_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}=0 \\ \dfrac{\partial R}{\partial y}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{m_i(y-y_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}=0: \end{cases}$$

Լուծելով այս համակարգը, կարող ենք գտնել x և y փոփո-խականները, այսինքն տնտեսական խոշոր կենտրոնի գտնվելու տեղը:

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ

Սահմանում.-Այն հավասարումը, որը կապ է հաստատում x անկախ փոփոխականի, y=y(x) որոնելի ֆունկցիայի և նրա $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ածանցյալների միջև, կոչվում է *դիֆերենցիալ հավասարում:*

Դիֆերենցիալ հավասարումը սիմվոլիկ կերպով գրվում է այսպես. $F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$ կամ $y^{(n)}=f\text{-}(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)})$, ինչը ստացվում է նախորդից, $y^{(n)}$ -ի նկատմամբ, լուծելու արդյունքում:

Եթե y=y(x) որոնելի ֆունկցիան մեկ անկախ փոփոխա-կանի ֆունկցիա է, ապա դիֆերենցիալ հավասարումը կոչվում է *սովորական*: Իսկ եթե որոնելի ֆունկցիան մի քանի անկախ փոփոխականների ֆունկցիա է, ապա դիֆերենցիալ հավասարումը կոչվում է *մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարում*:

Սահմանում.- Դիֆերենցիալ հավասարման կարգ կոչվում է հավասարման մեջ մտնող ածանցյալի ամենաբարձր կարգը;

Օրինակ.- $y'-xy=0$ հավասարումն առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարում է: $y''+ky'-\sin x=0$ հավասարումը երկրորդ կարգի է:

Սահմանում.- Դիֆերենցիալ հավասարման *լուծում* կամ *ինտեգրալ* կոչվում է այն $y=y(x)$ ֆունկցիան, որը և որի ածանցյալները տեղադրելով տված դիֆերենցիալ հավասարման մեջ նրան դարձնում են նույնություն:

Օրինակ.- $y''+y=0$ դիֆերենցիալ հավասարման համար $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ տեսքի ֆունկցիաները լուծումներ են C_1 և C_2 հաստատունների ցանկացած ընտրության դեպքում:

Դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունն ու դրանց լուծման (ինտեգրման) մեթոդներն ունեն մեծ նշանակություն: Դա բացատրվում է նրանով, որ երկրաչափության, ֆիզիկայի, մեխանիկայի, աստղագիտության, կենսաբանության և այլ կիրառական գիտությունների, շատ խնդիրներ բերվում են դիֆերենցիալ հավասարումների: Դիտարկենք մի քանի այդպիսի խնդիրներ:

1. ՌԱԴԻՈՒՄԻ ՌԱԴԻՈԱԿՏԻՎ ՔԱՅՔԱՅՈՒՄԸ

Փորձնական ճանապարհով հաստատված է, որ ռադիոակտիվ քայքայման արագությունը տվյալ պահին համեմատական է չքայքայված նյութի քանակությանը: Ենթադրելով, որ նյութի սկզբնական քանակությունը $M_\circ$ է, որոշենք չքայքայված նյութի M քանակության և t ժամանակի միջև եղած կախումը:

Ռադիոակտիվ քայքայման արագությունը հավասար է նյութի M քանակության ածանցյալին ըստ ժամանակի, այսինքն՝ $\dfrac{dM}{dt}$: Բայց ըստ պայմանի $\dfrac{dM}{dt}=-kM$, որտեղ k-ն համեմատականության գործակիցն է: Մինուս նշանը վերցվում է այն պատճառով, որ t-ի աճման հետ միասին նյութի M քանակությունը նվազում է: Սա առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարում է որոնելի M(t) ֆունկցիայի նկատմամբ:

Ստացված դիֆերենցիալ հավասարումը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝ $\frac{dM}{M} = -kdt$:

Ինտեգրելով այս հավասարման երկու կողմը՝ կստանանք՝ lnM = -kt + ln C կամ $\ln\frac{M}{C} = -kt$, որտեղից $\frac{M}{C} = e^{-kt}$ և $M = Ce^{-kt}$: Այստեղ C-ն ինտեգրման կամայական հաստատուն է: Քանի որ t = 0 մոմենտում ռադիումի զանգվածը M_0 էր, ապա C-ն պետք է բավարարի $M_\circ = Ce^{-k\cdot 0} = C$ առնչությանը:

Տեղադրելով C-ի արժեքը՝ կստանանք M-ի կախումը t-ից վերջնական տեսքով՝

$M = M_\circ e^{-kt}$:

k գործակիցը որոշվում է փորձնական ճանապարհով: Ռադիումի համար k=0,000436:

2. ՄԱՐՄՆԻ ՍԱՌԵՑՈՒՄԸ ԿԱՄ ՏԱՔԱՑՈՒՄԸ

Նյուտոնի կողմից հաստատված օրենքի համաձայն մարմնի սառեցման արագությունը համեմատական է մարմնի և շրջակա միջավայրի ջերմաստիճանների տարբերությանը:

Ենթադրենք, մարմինը տաքացված է մինչև $T_\circ$ աստիճան, միջավայրի ջերմաստիճանը հաստատուն է և հավասար $T_C(T_c < T)$: Գտնենք մարմնի փոփոխվող T ջերմաստիճանի և սառեցման t ժամանակի միջև եղած կախումը: Ենթադրենք, ժամանակի t պահին մարմնի ջերմաստիճանը T է: Ջերմաստիճանի փոփոխման արագությունը, այսինքն՝ $\frac{dT}{dt}$-ն, Նյուտոնի օրենքի համաձայն, համեմատական է $T-T_c$ տարբերությանը: Հետևաբար,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_c):$$

Մինուս նշանը դրված է այն պատճառով, որ ժամանակի աճման հետ միասին մարմնի ջերմաստիճանը նվազում է, այսինքն՝ $T = T(t)$ ֆունկցիան նվազող ֆունկցիա է: Ստացված դիֆերենցիալ հավասարումը ներկայացնենքն $\frac{dT}{T - T_c} = -kdt$ տեսքով, որտեղից $\ln(T - T_c) = -kt + \ln C$ և $T = T_c + Ce^{-kt}$: Նկատի ունենալով, որ $t = 0$ պահին $T = T_\circ$, կստանանք $T_\circ = T_c + C$, որտեղից $C = T_\circ - T_c$: Հետևաբար, մարմնի սառեցման օրենքը, կախված ժամանակից, կունենա հետևյալ վերջնական տեսքը.

$$T = T_c + (T_\circ - T_c)e^{-kt}:$$

3. Կազմել այն կորի հավասարումը, որն անցնում է (-2, 3) կետով և որի ցանկացած կետով տարված շոշոփողի անկյունային գործակիցը հավասար է այդ նույն կետի աբսցիսին:

Լուծում.- Համաձայն ածանցյալի երկրաչափական իմաստի՝ շոշափողի անկյունային գործակիցը հավասար է $\frac{dy}{dx}$: Մյուս կողմից, համաձայն խնդրի պայմանի շոշափողի, անկյունային գործակիցը հավասար է շոշափման կետի աբսցիսին (x): Այսպիսով, ունենք $\frac{dy}{dx} = x$, որտեղից $dy = xdx$: Ինտեգրելով այս դիֆերենցիալ հավասարման երկու կողմը՝ կստանանք՝ $y = \frac{x^2}{2} + C$:

Սա պարաբոլների մի ընտանիք է: Այս ընտանիքից պետք է ընտրել այն պարաբոլը, որն անցնում է տրված (-2, 3) կետով: Այս պայմանից էլ կորոշենք C կամայական հաստատունը՝ $3 = \frac{(-2)^2}{2} + C$, որտեղից C=1: Տեղադրելով C-ի արժեքը՝ վերջնականապես կստանանք $y = \frac{x^2}{2} + 1$:

ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

$F(x,y,y')=0$ կամ $y'=f(x,y)$ տեսքի հավասարումը կոչվում է առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարում:

Ինչպես նկատեցինք, վերը լուծված խնդիրները բերվեցին առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների և դրանց լուծումը, որպես կանոն, պարունակում է մեկ ինտեգրման կամայական հաստատուն:

***Սահմանում*.**- Այն $y = y(x)$ ֆունկցիան, որը և որի ածանցյալը տեղադրելով առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման մեջ նրան դարձնում է նույնություն, կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման լուծում: Յուրաքանչյուր $y'=f(x,y)$ դիֆերենցիալ հավասարում ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ: Այդ լուծումների բազմությունը կոչվում է առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման *ընդհանուր լուծում* և գրվում է այսպես՝ $y=\varphi(x,C)$:

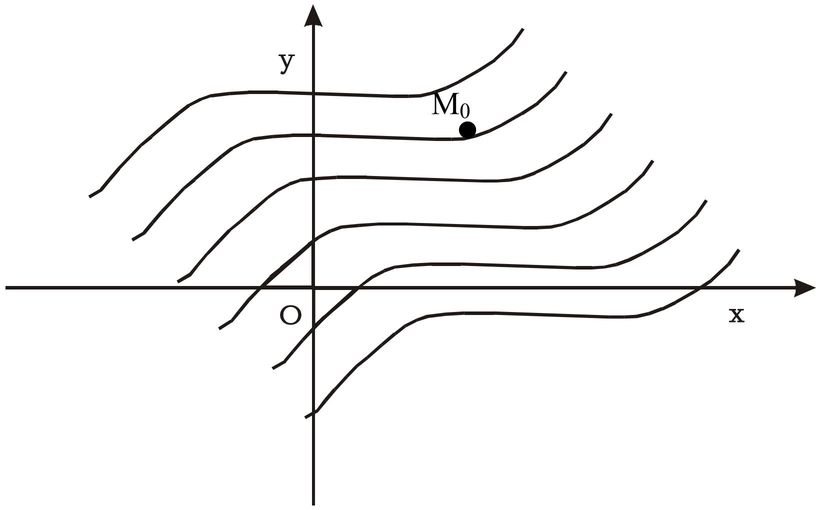
Կոնկրետ խնդիրներ լուծելիս անհրաժեշտ է լինում գտնել դիֆերենցիալ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է տրված պայմանին: Այդ պայմանը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման սկզբնական կամ նախնական պայման: Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման համար սկզբնական պայմանը գրվում է հետևյալ տեսքով $y\big|_{x=x_0} = y_0$:

Դիֆերենցիալ հավասարման այն լուծումը, որը ստացվում է ընդհանուր լուծումից, երբ պահանջվում է, որ այն բավարարի տված սկզբնական պայմանին, կոչվում է *մասնակի լուծում*:

Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծմանը հարթության վրա համապատասխանում է մեկպարամետրանի կորերի ընտանիք, որոնք կոչվում են *ինտեգրալային կորեր*:

ԿՈՇԻԻ ԽՆԴԻՐԸ.- Տրված է $y'=f(x,y)$ դիֆերենցիալ հավասարումը: Գտնել այս հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $y\big|_{x=x_0} = y_0$ սկզբնական պայմանին: Սա Կոշիի խնդիրն է առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման համար:

Ընդհանրապես, տրված հավասարումը միշտ չէ, որ ունի այդպիսի մասնավոր լուծում: Եթե $f(x,y)$ ֆունկցիան և նրա $\frac{\partial f}{\partial y}$ մասնակի ածանցյալը անընդհատ են $(x_\circ, y_\circ)$ կետի ինչ-որ շրջակայքում, ապա դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը այդ տիրույթում գոյություն ունի և միակն է: Կոշու խնդիրը մեկնաբանենք երկրաչափորեն (գծ.51):



Գծ.51

Հարթության վրա տանենք տրված դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորերը: Լուծել Կոշու խնդիրը երկրաչափորեն նշանակում է ինտեգրալային կորերի ընտանիքից գտնել այն կորը, որն անցնում է հարթության վրա նախապես տրված $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ կետով:

Այժմ ծանոթանանք առաջին կարգի պարզագույն դիֆերենցիալ հավասարումների տիպերի և դրանց լուծման մեթոդների հետ:

ԱՆՋԱՏՎԱԾ ԵՎ ԱՆՋԱՏՎՈՂ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

$M(x)dx + N(y)dy = 0$ տիպի հավասարումը կոչվում է *անջատված փոփոխականներով* հավասարում: Դրա ընդհանուր ինտեգրալը կլինի՝ $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$:

$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ տեսքի հավասարումը կոչվում է անջատվող փոփոխականներով: Այն կարող է բերվել անջատված փոփոխականներով հավասարման՝ նրա երկու մասերը $N_1(y)M_2(x)$ արտահայտության վրա բաժանելով.

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)}dy = 0$$

կամ $\dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \dfrac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$, որն արդեն անջատված փոփոխականներով հավասարում է: Դիտարկված երեք խնդիրների լուծման ժամանակ ստացված դիֆերենցիալ հավասարումները անջատվող փոփոխականներով հավասարումներ էին:

ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը կոչվում է *համասեռ,* եթե լուծելով այն y'-ի նկատմամբ, աջ մասում ստանում ենք մի արտահայտություն կախված $\dfrac{y}{x}$ հարաբերությունից.

$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$:

Այս տիպի դիֆերենցիալ հավասարումները լուծելու համար $\dfrac{y}{x} = u$ տեղադրման միջոցով այն բերում են անջատվող փոփոխականներով հավասարման: Իրոք՝ $y = ux$, $y' = u'x + u$, $u'x + u = f(u)$, $\dfrac{du}{dx}x = f(u) - u$, $\dfrac{du}{f(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$

փոփոխականները անջատված են:

Գտնելով այս հավասարման ընդհանուր լուծումը և u-ն փոխարինելով $\frac{y}{x}$ հարաբերությամբ՝ կստանանք տրված հավասարման ընդհանուր լուծումը:

ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Սահմանում.- Առաջին կարգի գծային հավասարում կոչվում է այն հավասարումը, որը գծային է անհայտ ֆունկցիայի և նրա ածանցյալի նկատմամբ: Այն ունի $y' + P(x)y = Q(x)$ տեսքը, որտեղ $P(x)$-ը և $Q(x)$-ը տրված անընդհատ ֆունկցիաներ (կամ հաստատուններ) են:

Գծային հավասարման լուծումը որոնենք x-ի երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով՝ $y = u(x)\cdot v(x)$ որոնցից մեկը կարելի է վերցնել կամայական, իսկ մյուսը կորոշվի տրված դիֆերենցիալ հավասարման հիման վրա՝ $y' = u'v + v'u$

Տեղադրելով տված հավասարման մեջ՝ կունենանք՝ $u'v + v'u + Puv = Q$ կամ $u'v + u(v' + Pv) = Q$: v ֆունկցիան ընտրենք այնպես, որ $v' + Pv = 0$: Սա v-ի նկատմամբ անջատվող փոփոխականներով հավասարում է, որը լուծելով, կստանանք՝ $\frac{dv}{dx} = -Pv$ կամ $\frac{dv}{v} = -Pdx$, որտեղից $\ln v = -\int Pdx$, $v = e^{-\int Pdx}$:

Հաշվի առնելով, որ $v' + Pv = 0$ հիմնական հավասարությունից u ֆունկցիայի որոշման համար կմնա հետևյալ հավասարումը՝ $u'v = Q$, $\frac{du}{dx}v(x) = Q(x)$ կամ $du = \frac{Q(x)}{v(x)}dx$

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C = \int Q(x)e^{\int Pdx}dx + C$$

$$y = u(x)\cdot v(x) = \left[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]e^{-\int P(x)dx} :$$

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ
ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ

Հավանականությունների տեսությունը ծագել է XVII դարի կեսերին՝ հիմնականում կապված տարբեր տեսակի բախտախաղերում հաղթանակի շանսերի հաշվարկի հետ: XVII-XVIII դարերում հավանականությունների տեսությունը զարգացավ աննշան չափով, քանի որ դրա կիրառությունների ոլորտը սահմանափակված էր ոչ մեծ քանակի հարցերի շրջանակներով: XIX դարից սկսած մինչև մեր օրերը, հավանականությունների տեսությունը անընդհատ և բուռն կերպով զարգանում է՝ իր կիրառության ոլորտն ընդգրկելով գիտության, տեխնիկայի, էկոնոմիկայի բազմաթիվ բնագավառներ:

Հավանականությունների տեսությունը մաթեմատիկայի այն բաժինն է, որը զբաղվում է մասսայական համասեռ պատահական երևույթների օրինաչափությունների վերլուծմամբ:

Մեզ շրջապատող երևույթների ուսումնասիրությունը կապված է փորձերի դիտարկման հետ: Փորձի հնարավոր ելքը պատահական երևույթ է, որին ընդունված է անվանել պատահար կամ պատահույթ: Այսինքն, որոշակի պայմանների առկայության դեպքում, այն ինչը կարող է տեղի ունենալ կամ ոչ, կոչվում է պատահար:

Բերենք պատահարների մի քանի օրինակներ:

1. Հրանոթից կրակելիս նշանակետը խոցել կամ չխոցելը պատահար է:
2. Մետաղյա դրամը նետելիս գերբի կամ թվի հանդես գալը պատահար է:
3. Խաղոսկրը նետելիս՝ 1-ից մինչև 6 որևէ թվի հանդես գալը պատահար է և այլն:

Պատահարները ընդունված է նշանակել $A, B, C, \ldots$ տառերով: Պատահարները լինում են հավաստի, անհնարին, հակադիր, համատեղելի, անհամատեղելի, միակի հնարավոր, հավասարահնարավոր, անկախ և կախյալ կամ պայմանական:

Հավաստի կոչվում է այն պատահարը, որը տվյալ փորձարկման ժամանակ անպայմանորեն տեղի է ունենում:

Օրինակ՝ սպիտակ գնդակներով լցված արկղից սպիտակ գնդակ հանելու պատահարը կլինի հավաստի: Հավաստի պատահարը ընդունված է նշանակել E տառով:

Այն պատահարը, որը տվյալ փորձարկման ժամանակ չի կարող հանդես գալ, կոչվում է անհնարին պատահար:

Օրինակ՝ երկու խաղոսկրների նետման ժամանակ անհնար է, որ հանդես եկած թվերի տարբերությունը հավասար լինի 6-ի: Անհնարին պատահարը նշանակում են U տառով:

Պատահարները կոչվում են անհամատեղելի, եթե տվյալ ժամանակի ընթացքում նրանք միաժամանակ չեն կարող հանդես գալ:

Պատահարները կազմում են լրիվ խումբ, եթե յուրաքանչյուր փորձարկման ժամանակ կարող է երևան գալ դրանցից ցանկացածը և չի կարող երևան գալ ուրիշ որևէ այլ պատահար, որը դրանց հետ համատեղելի չէ: Այդ պատահարներին անվանում են նաև միակ հնարավոր պատահարներ:

Երկու պատահարներ կոչվում են համատեղելի, եթե դրանցից մեկի հանդես գալը չի բացառում մյուսի հանդես գալուն: Օրինակ՝ եթե կրակում ենք երկու հրացանից, ապա երկուսից էլ միաժամանակ կարող են խոցել նշանակետը:

$A_1, A_{2,\ldots,} A_n$ պատահարները կոչվում են հավասարահնարավոր, եթե չկան ինչ-որ օբյեկտիվ պատճառներ, երբ այս կամ այն պատահարը կարող է ավելի հաճախ հանդես գալ, քան մյուսը:

Երկու պատահարներ կոչվում են հակադիր, եթե դրանք անհամատեղելի են և կազմում են լրիվ խումբ: Այսինքն՝ A պատահարի հակադիր պատահարը դա այն է, որը կայանում է A-ի տեղի չունենալու մեջ:

A պատահարի հակադիր պատահարը նշանակում են $\overline{A}$-ով:

Դիցուք, A պատահարի արդյունքում խոցում են նշանակետը, $\overline{A}$ պատահարի արդյունքում՝ ոչ:

Անկախ կոչվում են այն պատահարները, որոնցից մեկի հանդես գալը կախված չէ մյուսից: Իսկ կախյալ կամ պայմանական կոչվում են այն պատահարները, որոնցից մեկի հանդես դալը կախված է մյուսից:

Այժմ անցնենք կարևորագույն գաղափարի՝ պատահարի հավանականության գաղափարի ուսումնասիրմանը:

Ենթադրենք, ունենք $A_1, A_{2,\ldots,}A_n$ զույգ-զույգ անհամատեղելի, միակ հնարավոր, հավասարահնարավոր պատահարների համախումբ: Դիցուք, A պատահարը հանդես է գալիս որոշ A_i պատահարների հետ միասին: Այն A_i պատահարները, որոնց հանդես գալու ժամանակ հանդես է գալիս նաև A պատահարը, կոչվում են A պատահարին նպաստող պայմաններ: Դիտարկենք մի այսպիսի օրինակ:

Ենթադրենք, սափորի մեջ կա 20 գնդակ, որից 5-ը՝ սպիտակ, 7-ը՝ կարմիր և 8-ը՝ սև: A պատահարը սափորից գնդակ հանելն է: Այստեղ ընդհանուր ելքերի թիվը հավասար է 20-ի: Սպիտակ գնդակ հանելու պատահարին նպաստող ելքերի թիվը հավասար է 5-ի, կարմիրներինը՝ 7, իսկ սևինը՝ 8:

Տրված A պատահարի հանդես գալու հավանականությունը ընդունված է նշանակել $P(A)=p$, հնարավոր ելքերի ընդհանուր թիվը՝ n, իսկ նպաստող ելքերի թիվը՝ m: Այդ դեպքում A պատահարին նպաստող ելքերի թվի և հավասարահնարավոր պատահարների ելքերի ընդհանուր թվի հարաբերությունը կոչվում է A պատահարի հավանականություն:

Այնպես որ, ըստ սահմանման՝ $P(A)=p=\dfrac{m}{n}$:

Սա պատահարի հավանականության դասական սահմանումն է:

Վերը դիտարկված օրինակում $P_1=\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$, $P_2=\dfrac{7}{20}$,

$P_3=\dfrac{8}{20}=\dfrac{2}{5}$:

Նկատենք, որ ցանկացած A պատահարին նպաստող պայմանների m թիվը բավարարում է $0\le m\le n$ անհավասարությանը : Հետևաբար, պատահարի հավանականությունը՝ $0\le p\le 1$ է:

E հավաստի պատահարի համար $m = n$ և, հետևաբար, $P(E) = 1$, իսկ U անհնարին պատահարի համար $m = 0$ և, հետևաբար $P(U) = 0$:

Պատահարի հավանականության սահմանումն ավելի պարզ դարձնելու համար դիտարկենք ևս մի օրինակ:

Դիցուք, նետում ենք խաղոսկրները: Գտնել հավանականությունը այն բանի, որ բացված թվերի գումարը կլինի 8:

Հավասարահնարավոր ելքերի ընդհանուր թիվը կլինի $n = 6 \cdot 6 = 36$:

Նպաստող ելքերը կլինեն՝ (6, 2), (5, 3), (4, 4), (2, 6), (3, 5) այսինքն՝ $m = 5$, հետևաբար $p = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$:

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

Ենթադրենք, ունենք երկու անհամատեղելի պատահարներ՝ A և B: Այս երկու պատահարների գումար կոչվում է այն C պատահարը, որը այդ պատահարներից գոնե մեկի երևան գալու մեջ է: Երկու անհամատեղելի պատահարների գումարը նշանակում են C=A+B կամ (A կամ B) տեսքով: Երկու պատահարներից կամ A-ի կամ B-ի տեղի ունենալու, այսինքն՝ դրանց գումարի հավանականությունը նշանակենք P (կամ A կամ B) և հաշվենք այն: Հավաստի է հետևյալ թեորեմը, որը կոչվում է թեորեմ հավանականությունների գումարի մասին:

Թեորեմ.- Երկու անհամատեղելի պատահարների գումարի հավանականությունը հավասար է առանձին պատահարների հավանականությունների գումարին, այսինքն՝ P (կամ A կամ B)=P(A)+P(B) :

Ապացույց.- Դիցուք, $P(A) = \frac{m_1}{n}$, $P(B) = \frac{m_2}{n}$: Քանի որ A և B պատահարներն անհամատեղելի են, ապա դեպքերի n ընդհանուր թվի դեպքում միաժամանակ A և B պատահարներին նպաստող դեպքերի թիվը հավասար է 0-ի, իսկ կամ A

կամ B պատահարի հանդես գալուն նպաստող դեպքերի թիվը հավասար է $m_1 + m_2$: Հետևաբար՝

$$P\,(\text{կամ A կամ B}) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B):$$

Այն ինչ պահանջվում էր ապացուցել:

Նման ձևով կարելի է թեորեմն ապացուցել ցանկացած թվով գումարելիների համար.

$$P(A_1 \text{ կամ } A_2 \text{ կամ} \ldots \text{ կամ } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

կամ $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$:

Այժմ դիտարկենք A և $\overline{A}$ հակադիր պատահարները: Թող $P(A) = p$, իսկ $P(\overline{A}) = q$:

Քանի որ փորձարկման ժամանակ տեղի է ունենում կամ A կամ $\overline{A}$, ուստի $A + \overline{A}$-ը հավաստի պատահար է: Հետևաբար, $P(A + \overline{A}) = P\,(\text{կամ A կամ } \overline{A}) = 1$:

Գումարման թեորեմի համաձայն՝

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

այսինքն՝ $p + q = 1$, որտեղից $q = 1 - p$:

Հետևանք.- Եթե $A_1, A_2, \ldots, A_n$ պատահարները կազմում են լրիվ խումբ, ապա առկա է հետևյալ հավասարությունը

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1:$$

Ապացույց.- Քանի որ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ պատահարները կազմում են լրիվ խումբ, ուստի դրանցից մեկի հանդես գալը հավաստի պատահար է: Հետևաբար,

$$P(A_1 \text{ կամ } A_2 \text{ կամ} \ldots \text{ կամ } A_n) = 1:$$

Ձախ մասը ձևափոխելով գումարման թեորեմի համաձայն կստանանք վերոհիշյալ հավասարությունը՝

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n) = 1:$$

ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

Մենք արդեն գիտենք, որ A և B պատահարները կոչվում են անկախ, եթե A պատահարի հանդես գալու հավանականությունը կախված չէ այն բանից, թե B պատահարը տեղի է ունեցել կամ տեղի չի ունեցել:

Ենթադրենք, սափորի մեջ կա 4 հատ սև և 6 սպիտակ գնդակներ: Ենթադրենք A պատահարը սափորից սպիտակ գնդակ հանելն է, սափորի մեջ կա ընդամենը 6 հատ սպիտակ գնդակ:

Այդ դեպքում $P(A)=\frac{3}{5}$: Հանած գնդակը նորից գցենք սափորը և թող B պատահարը լինի երկրորդ անգամ սափորից սպիտակ գնդակ հանելը: Պարզ է, որ այս դեպքում նույնպես $P(B)=\frac{3}{5}$: A և B պատահարները տվյալ դեպքում անկախ պատահարներ են: Մի փոքր փոխենք այս խնդրի պայմանը: Նորից ենթադրենք, որ A պատահարը սափորից սպիտակ գնդակ հանելն է $P(A)=\frac{3}{5}$ հավանականությամբ: Հանված գնդակը չվերադարձնենք սափոր, և թող B պատահարը նորից լինի սափորից երկրորդ անգամ սպիտակ գնդակ հանելը:

Այս դեպքում $P(B)=\frac{6}{9}$, եթե A պատահարը տեղի չի ունեցել, և $P(B)=\frac{5}{9}$, եթե A պատահարը տեղի է ունեցել: Ինչպես տեսնում ենք, B պատահարի հավանականությունը կախված է A պատահարի տեղի ունենալուց կամ տեղի չունենալուց:

Նման տիպի պատահարները կոչվում են կախյալ կամ պայմանական պատահարներ: Պայմանական պատահարների հավանականությանն էլ ընդունված է անվանել պայմանական հավանականություն և նշանակել $P_A(B)$: Կարդացվում է այսպես՝ B պատահարի հավանականությունը A-ի տեղի ունենալու պայմանով:

Այնպես որ նախորդ օրինակից կարող ենք գրել.

$$P_A(B) = \frac{5}{9}; \;\; P_{\overline{A}}(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}:$$

Եթե A և B պատահարները լինեն անկախ, ապա պարզ է, որ $P_A(B) = P(B)$:

Թեորեմ.- A և B պատահարների միաժամանակ հանդես գալու (համատեղման) հավանականությունը հավասար է A պատահարի հավանականության և B պատահարի պայմանական հավանականության, արտադրյալին հաշված A պատահարի տեղի ունենալու պայմանով.

$$P(A \text{ և } B) = P(A) \cdot P_A(B):$$

Ապացույց.- Ենթադրենք, հնարավոր ելքերի n ընդհանուր թվից A պատահարի հանդես գալուն նպաստում են k ելքերը, որից ℓ պայմաններ նպաստում են նաև B պատահարի հանդես գալուն: Այդ դեպքում A և B պատահարների միաժամանակ հանդես գալուն կնպաստեն ℓ պայմաններ և կարող ենք գրել

$$P(A \text{ և } B) = \frac{\ell}{n}, \text{ բայց } P(A) = \frac{k}{n}; \;\; P_A(B) = \frac{\ell}{k}:$$

$\frac{\ell}{n}$-ը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով. $\frac{\ell}{n} = \frac{\ell \cdot k}{n \cdot k} = \frac{k}{n} \cdot \frac{\ell}{k}$, այսինքն՝ $P(A \text{ և } B) = P(A) \cdot P_A(B)$ և բազմապատկման թեորեմն ապացուցված է:

Այս բանաձևը կիրառենք B և A արտահայտության նկատմամբ. $P(B \text{ և } A) = P(B) \cdot P_B(A)$:

Այս երկու բանաձևերի ձախ մասերը հավասար են որպես միևնույն հավանականություն, հետևաբար, հավասար են նաև աջ մասերը: Ուստի կարող ենք գրել հետևյալ հավասարությունը՝

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Այստեղից՝ $P_B(A) = \dfrac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)}$:

Մասնավոր դեպքում այս թեորեմը կարելի է կիրառել նաև անկախ պատահարների նկատմամբ: Եթե A և B պատահարները անկախ են, ապա $P_A(B) = P(B)$ և բազմապատկման թեորեմը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $P(A \text{ և } B) = P(A) \cdot P(B)$:

Այժմ ենթադրենք ունենք $A_1, A_2, ..., A_n$ պատահարների լրիվ խումբ և դրանցից առանձին մի B պատահար: Պահանջվում է հաշվել այն բանի հավանականությունը, որ B պատահարը հանդես կգա $A_i (i = 1,2,...,n)$ պատահարներից որևէ մեկի հետ միաժամանակ: Այսինքն՝ հաշվենք

$P(\text{կամ } A_1, B \text{ կամ } A_2, B \text{ կամ...կամ } A_n, B)$:

Հավանականությունների գումարման թեորեմի համաձայն կարող ենք գրել

$$P(\text{կամ } A_1, B \text{ կամ } A_2, B \text{ կամ...կամ } A_n, B) = P(A_1, B) +$$

$$+ P(A_2, B) + ... + P(A_n, B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i B):$$

Բազմապատկման թեորեմի համաձայն `

$$P(A_i, B) = P(A_i) \cdot P_{A_i}(B):$$

Այս արտահայտությունը տեղադրելով նախորդ հավասարության մեջ կստանանք՝

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i, B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B):$$

Այս բանաձևը կոչվում է *լրիվ հավանականության* բանաձև:

ՀԻՊՈԹԵԶՆԵՐԻ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ : ԲԱՅԵՍԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

Դիտարկենք $A_1, A_2, ..., A_n$ անհամատեղելի պատահարների լրիվ խումբը, որոնց հանդես գալու հավանականություններն են $P(A_1)$, $P(A_2)$,... $P(A_n)$:

B պատահարը կարող է տեղի ունենալ $A_1, A_2, ..., A_n$ պատահարներից որևէ մեկի հետ, որոնք կոչվում են *հիպոթեզներ:*

Լրիվ հավանականությունների բանաձևի համաձայն B պատահարի հանդես գալու հավանականությունը կլինի

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\cdot P_{A_k}(B):$$

Ընդունենք, որ B պատահարը տեղի է ունեցել: Այն, որ B-ն տեղի է ունեցել կփոխի $P(A_k)$ $(k=1,2,...,n)$ հավանականությունները: Պահանջվում է որոշել այդ հիպոթեզների իրականացման պայմանական հավանականություններն այն ենթադրությամբ, որ B պատահարը տեղի է ունեցել, այսինքն՝ որոշել $P_B(A_k)$ $(k=1,2,...,n)$ հավանականությունները:

Բազմապատկման կանոնի համաձայն՝ կարող ենք գրել $P(A_kB)=P(A_k)\cdot P_{A_k}(B)=P(B)\cdot P_B(A_k)$, որտեղից

$$P_B(A_k)=\frac{P(A_k)\cdot P_{A_k}(B)}{P(B)}:$$

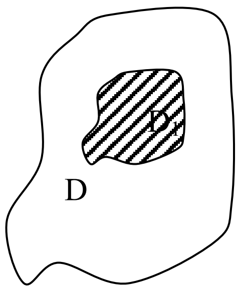
Այս հավասարության մեջ լրիվ հավանականությունների բանաձևից տեղադրելով P(B)-ի արժեքը՝ կստանանք

$$P_B(A_k)=\frac{P(A_k)\cdot P_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P_{A_i}(B)} \qquad (k=1,2,....,n):$$

Այս բանաձևը կոչվում է հիպոթեզների հավանականության բանաձև կամ Բայեսի բանաձև:

ՊԱՏԱՀԱՐԻ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱՅԼ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ

1. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՈՒՆ.-Դիցուք, ունենք մի վերջավոր D տիրույթ, որի մակերեսը հավասար է S-ի:



Գծ. 52

Ենթադրենք D_1 տիրույթը պատկանում է D տիրույթին, որի մակերեսը հավասար է S_1 –ի (գծ.52): Դեպի D տիրույթը նետում ենք ինչ-որ նյութական կետ: Գտնել հավանականությունը այն բանի, որ նետված կետը կընկնի D_1 տիրույթի մեջ:

Սահմանում.-Պատահարի երկրաչափական հավանականություն կոչվում է D_1 և D տիրույթների մակերեսների հարաբերությունը:

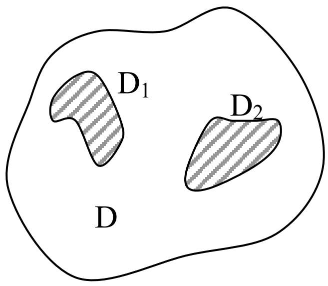
Եթե D_1 տիրույթը ընկնելու պատահարի հավանականությունը նշանակենք $P(D_1)$, ապա ըստ սահմանման, $P(D_1) = \frac{S_1}{S}$:

Նկատենք, որ այս սահմանումը չի հակասում հավանականության դասական սահմանմանը: Հավանականությունների գումարման և բազմապատկման թեորեմները կարելի է նման կարգով ձևակերպել նաև երկրաչափական հավանականության համար:

1. ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

Դիցուք, ունենք D_1 և D_2 տիրույթներ, որոնք ընկած են D տիրույթի մեջ և իրար հետ չեն հատվում (գծ. 53):

Պահանջվում է որոշել, այն բանի հավանականությունը, որ նետված մարմինը կընկնի կամ D_1 կամ D_2 տիրույթը: D_1 և D_2 տիրույթների չհատվելը համապատասխանում է պատահարների անհամատեղելիության պայմանին:



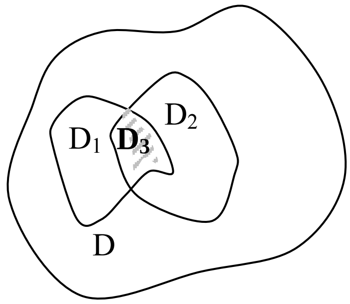
P(D_1 կամ D_2)=P(D_1)+P(D_2)

Գծ.53

2. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

1. Ենթադրենք, D տիրույթին պատկանող D_1 և D_2 տիրույթները ունեն ընդհանուր մաս, այսինքն, հատվում են (գծ.54): Պահանջվում է հաշվել այն բանի հավանականությունը, որ նետված կետը կընկնի և՛ D_1 և՛ D_2 տիրույթները, այսինքն՝ D_3 տիրույթը:

$$P(\text{և } D_1 \text{ և } D_2)=P(D_3)=P(D_1)\cdot P_{D_1}(D_2)$$



Գծ.54

2. Հաճախ հավանականության տեսության տարբեր կիրառությունների մեջ նպատակահարմար է լինում օգտվել պատահարի հավանականության այսպես կոչված վիճակագրական սահմանումից:

Ենթադրենք, գործ ունենք մեծ թվով փորձարկումների հետ, այսինքն՝ դիցուք ունենք n թվով փորձարկումներ, որտեղ n-ը բավականաչափ մեծ թիվ է: Դիցուք, դրանցից m անգամ հանդես է եկել տվյալ պատահարը: Այդ դեպքում դրանց $\mu = \frac{m}{n}$ հարաբերությունը կոչվում է պատահարի հաճախականություն: Շատ թվով փորձերի արդյունքներ դիտելիս երբեմն նկատվում է պատահարի հաճախականության կայունացում, որի շուրջը կատարվում են $\frac{m}{n}$-ի արժեքների տատանումներ: Կայուն հաճախականությունը բնորոշող թիվը հենց կոչվում է պատահարի վիճակագրական հավանականություն:

3. Գոյություն ունի նաև պատահարի հավանականության աքսիոմատիկ սահմանում :

ՄԻ ՔԱՆԻ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՄԻԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

Գոյություն ունեն երեք տիպի միացություններ `

1.Կարգավորություններ.

2. Տեղափոխություններ.

3.Զուգորդություններ:

n տարերից m-ական կազմված կարգավորությունների թիվը նշանակում են A_n^m և հաշվում հետևյալ բանաձևով.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]:$$

m տարրերից կազմված տեղափոխությունների թիվը նշանակում են P_m -ով և հաշվում այսպես`

$$P_m = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots m = m!$$

n տարերից m-ական կազմված զուգորդությունների թիվը նշանակում են C_n^m-ով, և հաշվում հետևյալ բանաձևով`

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

ԿՐԿՆՎՈՂ ԱՆԿԱԽ ՊԱՏԱՀԱՐՆԵՐ

Հավանականության տեսության շատ կիրառությունների մեջ որոշակի տեղ ունեն կրկնվող անկախ պատահարները: Ենթադրենք, կատարվում է n հատ անկախ կրկնվող փորձարկումներ: Պահանջվում է գտնել այն բանի հավանականությունը, որ այդ n փորձարկումների ժամանակ A պատահարը հանդես կգա m անգամ $(m \le n)$:

A պատահարի հանդես գալու հավանականությունը մեկ փորձարկման ժամանակ նշանակենք P(A)=p, իսկ դրա հանդես չգալու հավանականությունը` $P(\overline{A}) = q = 1 - p$: Այն բանի հավանականությունը, որ n փորձերից m անգամ հանդես կգա տրված պատահարը, նշանակենք P_{mn} -ով:

Դիտարկենք մասնավոր դեպքեր: Ենթադրենք, $n=3,\ m=2$ և հաշվենք P_{23}-ը: Պարզ է, որ A պատահարի կրկնակի հանդես գալը կապված է $\overline{A}$ պատահարի մեկ անգամ հանդես գալու հետ և այդպիսի ելք կլինի հետևյալ հնարավոր դեպքերից մեկն ու մեկում.

$$\text{կամ } AA\overline{A},\ \text{ կամ } A\overline{A}A,\ \text{ կամ } \overline{A}AA:$$

Այս բարդ պատահարներից յուրաքանչյուրի հավանականությունը միևնույն թիվն է, որը կարելի է որոշել բազմապատկման թեորեմի օգնությամբ.

$$P\left(\text{և } A \text{ և } A \text{ և } \overline{A}\right)=P\left(\text{և } A \text{ և } \overline{A} \text{ և } A\right)=P\left(\text{և } \overline{A} \text{ և } A \text{ և} A\right)=p^2q:$$

Գումարման թեորեմի համաձայն

$$P\left(AA\overline{A} \text{ կամ } A\overline{A}A \text{ կամ } \overline{A}AA\right)=p^2q+p^2q+p^2q=3p^2q:$$

Այժմ ենթադրենք $n=4,\ m=2$: Այս դեպքում հնարավոր են հետևյալ կոմբինացիաները.

$$AA\overline{A}\,\overline{A};\ A\overline{A}A\overline{A};\ A\overline{A}\,\overline{A}A;\ \overline{A}\,\overline{A}AA;\ \overline{A}AA\overline{A};\ \overline{A}A\overline{A}A:$$

Բազմապատկման թեորեմի համաձայն՝

$$P\left(\text{և } A \text{ և } A \text{ և } \overline{A} \text{ և} \overline{A}\right)=P\left(\text{և } A \text{ և } \overline{A} \text{ և } A\text{և}\overline{A}\right)=\ldots.=p^2q^2,$$

իսկ գումարման թեորեմից

$$P\left(AA\overline{A}\,\overline{A} \text{ կամ } A\overline{A}A\overline{A} \text{ կամ } \ldots.\right)=6p^2q^2$$

$$\text{Բայց } 3=C_3^2;\ 6=C_4^2,$$

հետևաբար $P_{23}=3p^2q=C_3^2p^2q;\quad P_{24}=6p^2q^2=C_4^2p^2q^2$

Այժմ հաշվենք հավանականությունը այն բանի, որ n կրկնվող փորձերի ժամանակ A պատահարը հանդես կգա m անգամ որոշակի կարգով, օրինակ՝ հետևյալ սխեմայում ներկայացված կարգով $\underbrace{AA...A}_{m}\ \underbrace{\overline{A}...\overline{A}}_{n-m}$:

Այս հավանականությունը հավասար կլինի p^mq^{n-m}: n տարրից կազմված բոլոր սխեմաների թիվը, որոնց մեջ A պատահարը հանդես է գալիս m անգամ, բայց տարբեր դասավորությամբ, կլինի C_n^m: Այդ պատճառով, համաձայն հավանականությունների գումարման թեորեմի կարող ենք գրել

$$P_{mn} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

Այս բանաձևը կոչվում է Բեռնուլիի բանաձև: Այս բանաձևի աջ մասը Նյուտոնի երկանդամի վերլուծության ընդհանուր անդամն է:

$(p+q)^n = p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + C_n^{n-3} p^{n-3} q^3 + \ldots +$

$+ C_n^2 p^2 q^{n-2} + C_n^1 p q^{n-1} + q^n = 1$, քանի որ $p+q=1$: Հետևաբար, կարող ենք գրել՝

$P_{nn} + P_{n-1,n} + P_{n-2,n} + \ldots + P_{2n} + P_{1n} + P_{0n} = 1$,

այսինքն՝ $\sum_{m=0}^{n} P_{mn} = 1$

Սա հետևանք է այն բանի, որ համապատասխան պատահարները կազմում են լրիվ խումբ:

$P_{mn} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$ հավանականությունների համախումբը կոչվում է հավանականությունների բաշխման *բինոմական օրենք*:

Հավանականությունների բախշման բինոմական օրենքը հնարավորություն է տալիս որոշելու A պատահարի հանդես գալու ամենահավանական ելքերի թիվը:

Օրինակ.- Դիցուք, հրաձգության ժամանակ նշանակետը խոցելու հավանականությունը հավասար է 0,8:

Հաշվել թե, ինչի՞ է հավասար այն բանի հավանականությունը, որ 6 անգամ կրակելու արդյունքում 5-ը կխոցի նշանակետը:

Այստեղ $n=6$, $m=5$: Համաձայն բինոմական բաշխման օրենքի.

$$P_{56} = C_6^5 p^5 q; \quad q = 1 - p = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$P_{56} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (0.8)^5 \cdot (0.2) = 0.064 :$$

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԴՐԱ ԲԱՇԽՈՒՄԸ

Հավանականության տեսության մեջ առանցքային են պատահական մեծությունները և դրանց բաշխման օրենքները:

Պատահական մեծություններ կոչվում են այն մեծությունները, որոնք, ելնելով փորձի արդյունքներից կարող են ընդունել այս կամ այն պատահական թվային արժեքներ: Եթե պատահական մեծությունը ընդունում է հաջորդական կոնկրետ թվային արժեքներ, որոնց թիվը կարող է լինել ինչպես վերջավոր, այնպես էլ անվերջ և հայտնի է նաև յուրաքանչյուր արժեքի հանդես գալու հավանականությունը, ապա այդպիսի պատահական մեծությունը կոչվում է *դիսկրետ* պատահական մեծություն:

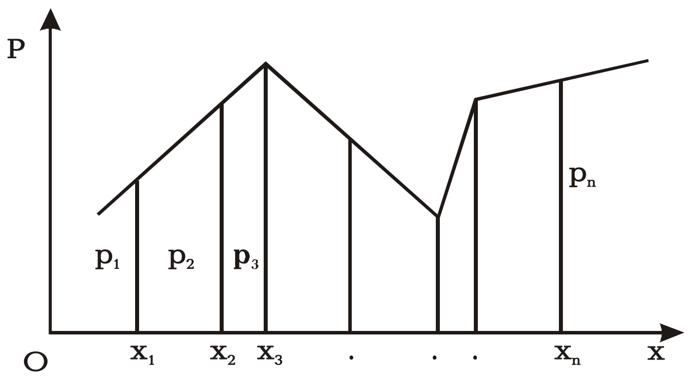
Այն ֆունկցիոնալ կախվածությունը, որը կապ է հաստատում դիսկրետ պատահական մեծության արժեքների և դրանց համապատասխան հավանականությունների միջև, կոչվում է պատահական մեծության *հավանականությունների բաշխման օրենք:*

Դիսկրետ պատահական մեծության բախշման օրենքը նպատակահարմար է տալ աղյուսակի տեսքով

Աղյուսակ 10

x	x_1	x_2	....	x_n	...
p	p_1	p_2	...	p_n	...

Այն կարելի է տալ նաև անալիտիկորեն $p_i = f(x_i), (i = 1,2,3,...,n,...)$ և գրաֆիկորեն՝ հավանականությունների բաշխման բազմանկյան տեսքով, երբ կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում կառուցվում են (x_i, p_i) կոորդինատներ ունեցող կետերը և դրանք միացվում են բեկյալով (գծ. 55): Այն, որ x պատահական մեծությունը կընդունի $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ հաջորդականության արժեքներից մեկը, հավաստի պատահար է, ուստի պետք է կատարվի $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ կամ $\sum_{i=1}^{\infty} p_i \to 1$ պայմանը:



Գծ.55

Գոյություն ունեն նաև *անընդհատ* պատահական մեծություններ: Անընդհատ կոչվում է այն x պատահական մեծությունը, որն ինչ-որ միջակայքում (վերջավոր կամ անվերջ) անընդհատորեն կարող է ընդունել բոլոր արժեքները: Պարզ է, որ այս դեպքում հավանականությունների բաշխման օրենքը կլինի x-ի անընդհատ ֆունկցիա: Այդ ֆունկցիան ընդունված է նշանակել $F(x)$-ով, և անվանել պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիա կամ *բաշխման ինտեգրալային ֆունկցիա*, որը բավարարում է $O \le F(x) \le 1$ անհավասարությանը:

Դիսկրետ պատահական մեծության օրինակներ կարող են լինել`

1. Խաղոսկրը նետելիս 1-ից մինչև 6 որևէ թվի հանդես գալը,
2. Քննության ժամանակ խմբում ուսանողների ստացած գերազանց գնահատականների թիվը և այլն:

Իսկ անընդհատ պատահական մեծության օրինակներ կարող են լինել`

1. Սկավառակի նետման տեղից մինչև վայրէջքի կետը եղած հեռավորությունը,
2. Հրաձգության ժամանակ գնդակի խոցված տեղի և նշանակետի միջև եղած հեռավորությունը և այլն:

Անընդհատ պատահական մեծությունների բնութագրման համար, բացի $F(x)$ բաշխման ինտեգրալային ֆունկցիայից, օգտագործում են նաև բաշխման դիֆերենցիալային օրենքը` կապված հավնականությունների բաշխման *խտության* հետ: Այն $\varphi(x)$ ֆունկցիան, որը արտահայտում է հավանականությունների բաշխման խտությունը, կոչվում է դիֆերենցիալային ֆունկցիա և հավասար է` $\varphi(x) = F'(x)$:

Գոյություն ունեն պատահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման հետևյալ տիպի օրենքներ.

1. Բինոմական բաշխման օրենք. Այն օրենքն է, ըստ որի հավանականությունների բաշխումը տրվում է Բեռնուլիի բանաձևով` $P_{mn} = C_n^m P^m q^{n-m}$:

2. Հավասարաչափ բաշխման օրենք: Այն օրենքն է, որի հավանականությունների *խտության ֆունկցիան* որոշվում է հետևյալ ձևով`

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \text{ երբ } -\infty < x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ երբ } a < x < b \\ 0, \text{ երբ } b < x < +\infty \end{cases}$$

3. Հավանականությունների նորմալ բաշխման օրենք կամ Լապլասի օրենք: Այս դեպքում խտության $\varphi(x)$ ֆունկցիան որոշվում է այսպես`

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} :$$

4. Պուասոնի բաշխման օրենք: Այս դեպքում հավանականությունների բաշխման օրենքը գրվում է հետևյալ կերպ.

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} :$$

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԹՎԱՅԻՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԵՐԸ

Պատահական մեծության բաշխումը բնութագրող կարևոր մեծություններից է նրա *մաթեմատիկական սպասումը*:

Դիցուք, ունենք դիսկրետ պատահական մեծություն` տրված իր բաշխման օրենքով.

Աղյուսակ11

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Սահմանում.- Պատահական մեծության *մաթեմատիկական սպասում* կոչվում է նրա բոլոր հնարավոր արժեքների և համապատասխան հավանականությունների արտադրյալների գումարը:

x պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը ընդունված է նշանակել $M[x]$ -ով կամ m_x -ով, երբեմն` $\overline{x}$ -ով: Այնպես, որ ըստ սահմանման

$$M[x] = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i :$$

Ընդ որում այստեղ կարևոր է միշտ հաշվի առնել, որ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$: Եթե պատահական մեծությունն ընդունում է անվերջ թվով արժեքներ, ապա $M[x] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$ և $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ շարքը պետք է զուգամիտի 1-ին:

Պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումն ունի այդ մեծության միջին արժեքի իմաստ: Ստանանք մաթեմատիկական սպասման և միջին թվաբանականի կապը: Ենթադրենք, թե կատարված են մեծ թվով փորձարկումներ (N): Ընդ որում հայտնի է, որ x պատահական մեծության x_1 արժեքը հանդես է եկել n_1 անգամ, x_2-ը` $n_2$ անգամ, $x_k$-ն` n_k անգամ:

Այդ դեպքում մենք կարող ենք գրել, որ x մեծության միջին թվաբանականը կլինի՝

$$\frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{N} = x_1 \frac{n_1}{N} + x_2 \frac{n_2}{N} + \ldots + x_k \frac{n_k}{N} = \\ = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = M[x] \quad :$$

x պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը կոչվում է այդ մեծության *հավանականությունների բաշխման կենտրոն*: Այս անվանումը մտցված է «ծանրության կենտրոն» անվանման նմանությամբ: Եթե Ox առանցքի $x_1, x_2, \ldots, x_n$ աբսցիսներն ունեցող կետերում տեղավորված են $p_1, p_2, \ldots p_n$ զանգվածները, ապա հայտնի է, որ այդ զանգվածների ծանրության կենտրոնի աբսցիսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով. $x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}$:

Նկատի ունենալով, որ $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, ապա $x_c = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$:

Այս բանաձևը տեսքով համընկնում է մաթեմատիկական սպասման բանաձևին: Եվ այսպես, հաստատված է, որ զանգվածների ծանրության կենտրոնը և մաթեմատիկական սպասումը հաշվվում են համանման բանաձևերով: Այստեղից էլ՝ «հավանականությունների բաշխման կենտրոն» անվանումը:

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՍՊԱՍՄԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. Հաստատունի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է հենց իրեն՝ $M[C] = C$:

2. Երկու անկախ պատահական մեծությունների գումարի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է առանձին գումարելիների մաթեմատիկական սպասումների գումարին. $M[X+Y] = M[X] + M[Y]$:

3. Արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է արտադրիչների մաթեմատիկական սպասումների արտադրյալին. $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$:

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅԱՆ ԴԻՍՊԵՐՍԻԱՆ ԵՎ ՄԻՋԻՆ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՇԵՂՈՒՄԸ

Մաթեմատիկական սպասումը պատահական մեծության բնորոշման միայն բավարար պայման է, բայց երբեմն հարկ է լինում իմանալ պատահական մեծության առանձին արժեքների շեղումը նրա մաթեմատիկական սպասումից կամ միջին արժեքից: Ուստի անհրաժեշտություն է առաջանում մտցնել պատահական մեծության արժեքների իրենից մաթեմատիկական սպասումից ունեցած շեղման գաղափարը, այսինքն $x - \overline{x}$ կամ $x_i - m_x$:

Սահմանում.- x պատահական մեծության *դիսպերսիա* կոչվում է այդ պատահական մեծության և նրա մաթեմատիկական սպասման տարբերության քառակուսու մաթեմատիկական սպասումը:

Պատահական մեծության դիսպերսիան նշանակում են $D[x]$ կամ σ_x^2:

Այնպես որ, ըստ սահմանման $D[x] = M\left[(x - \overline{x})^2\right]$ կամ

$$D[x] = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2 p_k = \sigma_x^2 :$$

Եթե մաթեմատիկական սպասումը որոշում է x պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման կենտրոնի դիրքը, ապա դիսպերսիան պատահական մեծության արժեքների՝ իր մաթեմատիկական սպասումից ունեցած ցրման, սփռման թվային բնութագիրն է:

Դիսպերսիան ունի պատահական մեծության քառակուսու չափականություն: Երբեմն, ցրումը բնութագրելու համար, ավելի հարմար է օգտվել այնպիսի մեծությունից, որի չափականությունը համընկնում է պատահական մեծության չափականությանը: Այդպիսի մեծություն է *միջին քառակուսային շեղումը*:

Սահմանում.- Պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղում կոչվում է նրա դիսպերսիայի քառակուսի արմատը՝

$$\sigma_x = \sqrt{D[x]} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2 p_k} \ :$$

Օրինակ.- x պատահական մեծությունը տրված է հետևյալ բաշխման օրենքով:

Աղյուսակ 12

x	2	3	4
p	0,3	0,4	0,3

Որոշել՝ 1) մաթեմատիկական սպասումը, 2) դիսպերսիան, 3) միջին քառակուսային շեղումը:

Լուծում.-

1. $M[x] = 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.3 = 3$

2. $D[x] = (2-3)^2 \cdot 0{,}3 + (3-3)^2 \cdot 0{,}4 + (4-3)^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6$

3. $\sigma_x = \sqrt{D[x]} = \sqrt{0{,}6} = 0{,}77$

ԼԱՊԼԱՍԻ ԼՈԿԱԼ ԹԵՈՐԵՄԸ

n փորձարկումների ժամանակ A պատահարի k անգամ հանդես գալու P հավանականությունը հաշվվում է Բեռնուլիի բանաձևով: Սակայն դժվար չէ նկատել, որ երբ n-ը բավականաչափ մեծ թիվ է, ապա Բեռնուլլիի բանաձևից օգտվելն առաջացնում է դժվարություններ՝ կապված բարդ հաշվարկումների հետ:

Հարց է առաջանում՝ կարելի՞ է հաշվել մեզ հետքրքրող հավանականությունը առանց Բեռնուլլիի բանաձևի օգտագործման: Պարզվում է՝ այո:

Լապլասի լոկալ թեորեմը տալիս է մի բանաձև, որը հնարավորություն է տալիս մոտավորապես (ցանկացած ճշտությամբ) հաշվել n փորձարկումների ժամանակ A պատահարի k անգամ հանդես գալու հավանականությունը, երբ n-ը բավականաչափ մեծ թիվ է:

$P=\frac{1}{2}$-ի դեպքում այդ բանաձևը ստացել է Մուավրը 1730 թ.: 1783 թ. Լապլասն ընդհանրացրել է Մուավրի բանաձևը ցանկացած P-ի դեպքում, որը հավասար չէ 0-ի կամ 1-ի: Դրա համար էլ այս թեորեմը երբեմն կոչվում է Մուավր-Լապլասի թեորեմ:

Թեորեմ. - Եթե A պատահարի յուրաքանչյուր փորձարկման ժամանակ հանդես գալու P հավանականությունը հաստատուն է և հավասար չէ 0-ի կամ 1-ի, ապա $P_n(k)$-ն` փորձարկումների ժամանակ A պատահարի ուղիղ k անգամ հանդես գալու հավանականությունը, մոտավորապես հավասար է $y=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$ ֆունկցիայի արժեքին, երբ $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$:

Գոյություն ունի $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակ x-ի դրական արժեքների դեպքում: $\varphi(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է, ուստի այն կարելի է օգտագործել նաև x-ի բացասական արժեքների դեպքում: $\varphi(x)$-ի արժեքների աղյուսակը տեղադրված է ցանկացած դասագրքի կամ խնդրագրքի հավելվածում (հավելված1):

Այսպիսով, հավանականությունն այն բանի, որ n փորձարկումների ժամանակ A պատահարը հանդես կգա ուղիղ k անգամ, մոտավորապես հավասար է $P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)$, որտեղ $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$:

q=1-p-ն հակադիր պատահարի հավանականությունն է:

Այս թեորեմի ապացույցը կապված է դժվարությունների հետ, դրա համար էլ այն ներկայացվում է առանց ապացույցի՝ ցուցադրելով դրա օգտագործումը օրինակների վրա:

Օրինակ. – Հաշվել հավանականությունն այն բանի, որ A պատահարը 400 փորձարկումների ժամանակ հանդես կգա 80 անգամ, եթե յուրաքանչյուր փորձարկման ժամանակ A պատահարի հանդես գալու հավանականությունը՝ P=0,2:

Լուծում. – Ըստ պայմանի՝ n=400, k=80, p=0,2, q=0,8:

Ըստ Լապլասի բանաձևի՝ $P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \varphi(x)$:

Հաշվենք $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0$: Ըստ $\varphi(x)$-ի աղյուսակի՝ $\varphi(0) = 0,3989$, հետևաբար $P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,4986$:

ԼԱՊԼԱՍԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

Ընդունենք, որ կատարվում են n փորձարկումներ, որոնցից յուրաքանչյուրում A պատահարի հանդես գալու հավանականությունը P է (0<P<1): Ինչպես հաշվել հավանականությունն այն բանի, որ A-ն n փորձարկումների ժամանակ հանդես կգա ոչ պակաս k_1 և ոչ ավելի k_2 անգամ՝ $P_n(k_1, k_2)$: Այս հարցին պատասխանում է Լապլասի ինտեգրալային թեորեմը, որը նույնպես տրվում է առանց ապացույցի:

Թեորեմ. - Եթե n փորձարկումների ժամանակ A պատահարի հանդես գալու հավանականությունը՝ P-ն, հաստատուն է և հավասար չէ 0-ի կամ 1-ի, ապա $P_n(k_1, k_2)$ որոշվում է $P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ բանաձևով, որտեղ $a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$: Քանի որ $\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$-ը վերջավոր ձևով չի արտահայտվում էլեմենտար ֆունկցիաների միջոցով, ապա օգտվում են հատուկ ֆունկցիայից՝ $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$: Այս ֆունկցիան անվանում են Լապլասի ֆունկցիա, որի արժեքների աղյուսակը տրված է հավելվածում:

$$P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^0 e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx-$$

$$-\int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi(b)-\Phi(a):$$

$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(b)-\Phi(a)$, որտեղ $a=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $b=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$:

Օրինակ. - Հավանականությունն այն բանի, որ դետալը տեխնիկական ստուգում (ОТК) չի անցել, հավասար է 0,2-ի: Գտնել հավանականությունն այն բանի, որ 400 պատահական ընտրված դետալներից ստուգում չի անցել 70-ից մինչև 100 դետալ:

Լուծում. - Ըստ պայմանի p=0,2, q=0,8, n=400, $k_1=70$, $k_2=100$: Լապլասի ինտեգրալային թեորեմի համաձայն $P_{400}(70;100)\approx\Phi(b)-\Phi(a)$,

$$a=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-400\cdot0,2}{\sqrt{400\cdot0,2\cdot0,8}}=-1,25,$$

$$b=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-400\cdot0,2}{\sqrt{400\cdot0,2\cdot0,8}}=2,5:$$

Այսպիսով՝

$$P_{400}(70;100)=\Phi(2,5)-\Phi(-1,25)=\Phi(2,5)+\Phi(1,25):$$

Աղյուսակից $\Phi(2,5)=0,4938$, $\Phi(1,25)=0,3944$ (հավելված 2), հետևաբար՝

$$P_{400}(70;100)=0,4938+0,3944=0,8882:$$

Հավելված 1

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակ

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Հավելված 2

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$ ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակ

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0.00	0.0000	0.42	0.1628	0.84	0.2995	1.26	0.3962
0.01	0.0040	0.43	0.1664	0.85	0.3023	1.27	0.3980
0.02	0.0080	0.44	0.1700	0.86	0.3051	1.28	0.3997
0.03	0.0120	0.45	0.1736	0.87	0.3078	1.29	0.4015
0.04	0.0160	0.46	0.1772	0.88	0.3106	1.30	0.4032
0.05	0.0199	0.47	0.1808	0.89	0.3133	1.31	0.4049
0.06	0.0239	0.48	0.1844	0.90	0.3159	1.32	0.4066
0.07	0.0279	0.49	0.1879	0.91	0.3186	1.33	0.4082
0.08	0.0319	0.50	0.1915	0.92	0.3212	1.34	0.4099
0.09	0.0359	0.51	0.1950	0.93	0.3238	1.35	0.4115
0.10	0.0398	0.52	0.1985	0.94	0.3264	1.36	0.4131
0.11	0.0438	0.53	0.2019	0.95	0.3289	1.37	0.4147
0.12	0.0478	0.54	0.2054	0.96	0.3315	1.38	0.4162
0.13	0.0517	0.55	0.2088	0.97	0.3340	1.39	0.4177
0.14	0.0557	0.56	0.2123	0.98	0.3365	1.40	0.4192
0.15	0.0596	0.57	0.2157	0.99	0.3389	1.41	0.4207
0.16	0.0636	0.58	0.2190	1.00	0.3413	1.42	0.4222
0.17	0.0675	0.59	0.2224	1.01	0.3438	1.43	0.4236
0.18	0.0714	0.60	0.2257	1.02	0.3461	1.44	0.4251
0.19	0.0753	0.61	0.2291	1.03	0.3485	1.45	0.4265
0.20	0.0793	062	0.2324	1.04	0.3508	1.46	0.4279
0.21	0.0832	0.63	0.2357	1.05	0.3531	1.47	0.4292
0.22	0.0871	0.64	0.2389	1.06	0.3554	1.48	0.4306
0.23	0.0910	0.65	0.2422	1.07	0.3577	1.49	0.4319
0.24	0.0948	0.66	0.2454	1.08	0.3599	1.50	0.4332
0.25	0.0987	0.67	0.2486	1.09	0.3621	1.51	0.4345
0.26	0.1026	0.68	0.2517	1.10	0.3643	1.52	0.4357
0.27	0.1064	069	0.2549	1.11	0.3665	1.53	0.4370
0.28	0.1103	0.70	0.2580	1.12	0.3686	1.54	0.4382
0.29	0.1141	0.71	0.2611	1.13	0.3708	1.55	0.4394
0.30	0.1179	0.72	0.2642	1.14	0.3729	1.56	0.4406
0.31	0.1217	0.73	0.2673	1.15	0.3749	1.57	0.4418
0.32	0.1255	0.74	0.2703	1.16	0.3770	1.58	0.4429
0.33	0.1293	0.75	0.2734	1.17	0.3790	1.59	0.4441
0.34	0.1331	0.76	0.2764	1.18	0.3810	1.60	0.4452
0.35	0.1368	0.77	0.2794	1.19	0.3830	1.61	0.4463
0.36	0.1406	0.78	0.2823	1.20	0.3849	1.62	0.4474
0.37	0.1443	0.79	0.2852	1.21	0.3869	1.63	0.4484
0.38	0.1480	0.80	0.2881	1.22	0.3883	1.64	0.4495
0.39	0.1517	0.81	0.2910	1.23	0.3907	1.65	0.4505
0.40	0.1554	0.82	0.2939	1.24	0.3925	1.66	0.4515
0.41	0.1591	0.83	0.2967	1.25	0.3944	1.67	0.4525

Հավելված 2-ի շարունակությունը

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1.68	0.4535	1.88	0.4699	2.24	0.4875	2.72	0.4967
1.69	0.4545	1.89	0.4706	2.26	0.4881	2.74	0.4969
1.70	0.4554	1.90	0.4713	2.28	0.4887	2.76	0.4971
1.71	0.4564	1.91	0.4719	2.30	0.4893	2.78	0.4973
1.68	0.4535	1.92	0.4726	2.32	0.4898	2.80	0.4974
1.69	0.4545	1.93	0.4732	2.34	0.4904	2.82	0.4976
1.70	0.4554	1.94	0.4738	2.36	0.4909	2.84	0.4977
1.71	0.4564	1.95	0.4744	2.38	0.4913	2.86	0.4979
1.72	0.4573	1.96	0.4750	2.40	0.4918	2.88	0.4980
1.73	0.4582	1.97	0.4756	2.42	0.4922	2.90	0.4981
1.74	0.4591	1.98	0.4761	2.44	0.4927	2.92	0.4982
1.75	0.4599	1.99	0.4767	2.46	0.4931	2.94	0.4984
1.76	0.4608	2.00	0.4772	2.48	0.4934	2.96	0.4985
1.77	0.4616	2.02	0.4783	2.50	0.4938	2.98	0.4986
1.78	0.4625	2.04	0.4793	2.52	0.4941	3.00	0.49865
1.79	0.4633	2.06	0.4803	2.54	0.4945	3.20	0.49931
1.80	0.4641	2.08	0.4812	2.56	0.4948	3.40	0.49966
1.81	0.4649	2.10	0.4821	2.58	0.4951	3.60	0.499841
1.82	0.4656	2.12	0.4830	2.60	0.4953	3.80	0.499928
1.83	0.4664	2.14	0.4838	2.62	0.4956	4.00	0.499968
1.84	0.4671	2.16	0.4846	2.64	0.4959	4.50	0.499997
1.85	0.4678	2.18	0.4854	2.66	0.4961	5.00	0.499997
1.86	0.4686	2.20	0.4861	2.68	0.4963		
1.87	0.4693	2.22	0.4868	2.70	0.4965		

Գրականություն

1. Պիսկունով Ն.Ս.. Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվներ. Երևան, «Լույս», 1979:
2. Սաղաթելյան Վ.Վ. Բարձրագույն մաթեմատիկայի համառոտ դասընթաց.Երևան, «Հայաստան», 1960:
3. Ա. Խ. Խաչատրյան, Հ. Վ. Համբարձումյան, Հ. Հ. Ազիզյան Հավանականությունների տեսություն և մաթեմատիկական վիճակագրություն. Երևան, ՀԱԱՀ, 2015:
4. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. М.: “Высшая школа ” 1972.
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.М.:Физматгиз, 1962.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.М.: Высшая школа, 1972.

Բովանդակություն

ԼԵՅՆԱԴ ԵՐՎԱՆԴԻ ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

Բարձրագույն մաթեմատիկա

Ուսումնական ձեռնարկ
Հայաստանի ազգային ագրարային համալսարանի
ուսանողների համար

ЛЕЙНАД ЕРВАНДОВИЧ ДАНИЕЛЯН

Высшая математика

Учебное пособие
для студентов армянского национального аграрного
университета
(на армянском языке)

Ստորագրված է տպագրության 26.01. 2016 թ. Թղթի չափսը 60x84 1/16
2,5 տպ. մամուլ Պատվեր 7 Տպաքանակ 200
ՀԱԱՀ տպարան Տերյան փ. 74