ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՀԱՐՄՈՆԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Ուսումնական ձեռնարկ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ – 2010

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1 գ7
Պ 505

Հրապարակության է երաշխավորել ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի խորհուրդը

Խմբագիրներ՝ ֆիզմաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ **Ռ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ**
ֆիզմաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ **Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ**

Գրախոս՝ ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր **Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ**

ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ Ա. Ի.

Պ 505 Հարմոնիկ ֆունկցիաներ: – Եր.: ԵՊՀ-ի հրատ., 2010, 100 էջ:

Ձեռնարկի հիմքը Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետում դասավանդվող «բազմաչափ հարմոնիկ ֆունկցիաներ» մասնագիտական դասընթացն է:

Այն պարունակում է բազմաթիվ խնդիրներ, որոնց լուծումը կնպաստի համապատասխան թեմաների յուրացմանը:

Նախատեսված է համալսարանի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի ուսանողների և ասպիրանտների, ինչպես նաև որակավորման բարձրացման ֆակուլտետի ունկնդիրների համար:

ՀՏԴ 51 (07)
ԳՄԴ 22.11 գ7

ISBN 978-5-8084-1250-7

Նախաբան

(Խմբագիրների կողմից)

Ձեռնարկի համար հիմք է ծառայել Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետում դասավանդվող «բազմաչափ հարմոնիկ ֆունկցիաներ» մասնագիտական դասընթացը:

Այդ դասընթացը հեղինակը տարիներ շարունակ դասավանդել է Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի ուսանողների և որակավորման բարձրացման ֆակուլտետի ունկնդիրների համար՝ այդ ֆակուլտետներում գործող ծրագրերին համապատասխան:

Սույն ձեռնարկը ներառում է հարմոնիկ ֆունկցիաների հիմնական հատկությունները, բազմակի ապիճանային շարքերը, սֆերիկ հարմոնիկները, համասեռ վերլուծությունները, Կելվինի ձևափոխությունը, Հարդիի և Բերգմանի հարմոնիկ տարածությունները և այլն:

Բացի հարմոնիկ ֆունկցիաների տեսության դասական հարցերից ու գաղափարներից դիտարկվում են նաև պլյուրիհարմոնիկ և n-հարմոնիկ ֆունկցիաներ, որոնք կապված են մի քանի փոփոխականի հոլոմորֆ ֆունկցիաների հետ:

Դիտարկվող հարմոնիկ ֆունկցիաները որոշված են $\mathbb{R}^n$ տարածության տիրույթներում: Հատուկ ուշադրություն է դարձված հարմոնիկ ֆունկցիաների տեսության՝ $n = 2$ և $n > 2$ դեպքերում առկա տարբերություններին:

Շարադրանքը զուգակցվում է բազմաթիվ օրինակներով և խնդիրներով, որոնք կնպաստեն նյութի յուրացմանը:

Նախատեսված է համալսարանի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի ուսանողների և ասպիրանտների, ինչպես նաև որակավորման բարձրացման ֆակուլտետի ունկնդիրների համար: Ձեռնարկը օգտակար է նաև հարակից մասնագիտությունների ուսանողների և ասպիրանտների համար:

Ձեռնարկի բովանդակությունը տրոհված է գլուխների, գլուխներն էլ՝ պարագրաֆների: Բանաձևերի համարակալումը երկտեղ է. առաջին թիվը գլխի համարն է, երկրորդը՝ բանաձևի: Ապացույցի ավարտը ազդարարվում է □ նշանով:

Գ Լ ՈՒ Խ I

ՀԱՐՄՈՆԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

§ 1. Սահմանումներ և օրինակներ

Օգտվելու ենք հետևյալ նշանակումներից և պայմանավորվածություններից.

- Ձեռնարկում դիտարկվող ֆունկցիաները կոմպլեքսարժեք են, եթե այլ բան չի նշվում:
- $\mathbb{R}^n$-ը $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ կարգավորված n-յակների բազմություն է, օժտված $|x| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$ էվկլիդյան նորմով, որտեղ $n \in \mathbb{N}$, $x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$:
- $C^k(\Omega)$-ն $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ բաց ենթաբազմությունում k անգամ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաների դասն է:
- $C^\infty(\Omega)$-ն անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների դասն է, այսինքն՝ $C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$:
- Կամայական $E \subset \mathbb{R}^n$ բազմության համար $C(E)$-ն E-ում անընդհատ ֆունկցիաների դասն է:
- Մասնակի ածանցյալն ըստ j-րդ կոորդինատի հաճախ կնշանակվի D_j-ով՝ $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$:

Սահմանում 1.1: $C^2(\Omega)$ դասին պատկանող u ֆունկցիան կոչվում է հարմոնիկ, եթե

$$\Delta u \equiv 0,$$

որտեղ $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ Լապլասի օպերատորն է:

Օրինակ 1.1: Կամայական $a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b$ գծային ֆունկցիա հարմոնիկ է ամբողջ $\mathbb{R}^n$-ում:

Օրինակ 1.2: $n > 2$ դեպքում $|x|^{2-n}$ ֆունկցիան հարմոնիկ է $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ տիրույթում (այն կոչվում է Լապլասի հավասարման ֆուն–դամենտալ լուծում):

Օրինակ 1.3: $\ln|x|$ ֆունկցիան հարմոնիկ է $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ տիրույթում: Այն կոչվում է Լապլասի հավասարման ֆունդամենտալ լուծում $n = 2$ դեպքում:

Օրինակ 1.4: Ֆունդամենտալ լուծումը ածանցելով ըստ j-րդ կոոր–դինատի, կստանանք հարմոնիկ ֆունկցիաների նոր օրինակներ՝ $x_j|x|^{-n}$, $j = 1,\ldots,n$: Հետագայում կհամոզվենք, որ հարմոնիկ ֆունկ–ցիան անվերջ դիֆերենցելի է, այնպես որ հարմոնիկ ֆունկցիայի բոլոր մասնակի ածանցյալները ևս հարմոնիկ են:

Օրինակ 1.5: Պարզ հաշվարկը ցույց է տալիս, որ $\Delta(|x|^p) = p(p+ + n-2)|x|^{p-2}$: Բացառելով պարզունակ $p = 0$ դեպքը, այստեղից հետևում է, որ $n > 2$ դեպքում $|x|^p$ ֆունկցիան հարմոնիկ է $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ տիրույթում այն և միայն այն դեպքում, երբ $p = 2-n$ (տես օրինակ 1.2):

Նկատենք, որ $\ln|x| \to \infty$ երբ $|x| \to \infty$, այնինչ՝ $|x|^{2-n} \to 0$: Բացի դրանից, ֆունդամենտալ լուծումների վարքը $n > 2$ և $n = 2$ դեպքերում տարբեր է նաև այն իմաստով, որ $|x|^{2-n} > 0$, իսկ $\ln|x|$-ը սահմանափակ չէ ոչ վերևից և ոչ էլ ներքևից: Այդ փաստերը վկայում են, որ հարմոնիկ ֆունկցիաների տեսությունը հարթության և ավելի բարձր չափողականության դեպքերում իրարից տարբերվում են: Մեկ այլ տար–բերություն է այն, որ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում իրական ֆունկցիան հարմո–նիկ է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն Ω-ում հոլոմորֆ ֆունկցիայի իրական մաս է: Նման երևույթ բարձր չափողականության դեպքում գոյություն չունի:

Դիտողություն 1.1: Զույգ չափանի տարածություններում, իսկ ավելի ճիշտ՝ $\mathbb{C}^n$-ում, ($\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$) սահմանվում են հարմոնիկ ֆունկցիաների պարապետականներ՝ n-հարմոնիկ և պլյուրիհարմոնիկ ֆունկցիաներ, որոնք կապված են մի քանի փոփոխականի հոլոմորֆ ֆունկցիաների հետ (տես § 13):

Խնդիր 1.1 (Լապլասիանը բևեռային կոորդինատներով)**:** Դիցուք u-ն կրկնակի անընդհատ դիֆերենցելի, երկու իրական փոփոխականի ֆունկցիա է, և $U(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$: Ցույց տալ, որ՝

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} :$$

Խնդիր 1.2: Դիցուք $f(z)$-ը և $zf(z)$-ը կոմպլեքսարժեք հարմոնիկ ֆունկցիաներ են: Ապացուցել, որ f-ը հոլոմորֆ ֆունկցիա է:

Խնդիր 1.3: Ցույց տալ, որ եթե u-ն և v-ն իրականարժեք հարմոնիկ ֆունկցիաներ են, ապա uv ֆունկցիան հարմոնիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\nabla u \cdot \nabla v \equiv 0$:

Խնդիր 1.4: Դիցուք g-ն իրականարժեք ֆունկցիա է $C^2\left(\mathbb{R}^n\right)$-ից, իսկ $f \in C^2\left(\mathbb{R}\right)$: Ստուգել, որ

$$\Delta(f\circ g)(x) = f''\big(g(x)\big)\big|\nabla g(x)\big|^2 + f'\big(g(x)\big)\Delta g(x) :$$

Խնդիր 1.5: Դիցուք u-ն հարմոնիկ է $\mathbb{R}^2$-ի վրա, իսկ f-ը հոլոմորֆ կամ հակահոլոմորֆ է $\mathbb{C}$-ի վրա: Ցույց տալ, որ $(u\circ f)$-ը հարմոնիկ է:

Խնդիր 1.6: Դիցուք u-ն հարմոնիկ է Ω տիրույթում, և $v(x) = x\cdot\nabla u(x)$: Ցույց տալ, որ v-ն հարմոնիկ է Ω-ում:

Խնդիր 1.7: Ապացուցել, որ եթե $\mathbb{R}^n$-ում հարմոնիկ ֆունկցիան կախված է միայն $|x|$-ից, ապա այն նույնաբար հաստատուն է:

Խնդիր 1.8: Դիցուք f-ը կոմպլեքսարժեք հարմոնիկ ֆունկցիա է Ω տիրույթում: Ապացուցել, որ եթե $|f| \equiv \mathrm{const}$ Ω-ում, ապա $f \equiv \mathrm{const}$:

§ 2. Ինվարիանտ ձևափոխություններ

Այստեղ մենք կծանոթանանք ֆունկցիաների նկատմամբ կիրառվող որոշ ձևափոխությունների հետ, որոնք պահպանում են ֆունկցիայի հարմոնիկության հատկությունը: Նախ և առաջ, քանի որ Լապլասի օպերատորը գծային է, ապա ճիշտ է հետևյալ պնդումը՝

Պնդում 1.1: *Հարմոնիկ ֆունկցիաների գծային կոմբինացիաները ևս հարմոնիկ են:*

Տրված $y \in \mathbb{R}^n$ ֆիքսած կետի և Ω-ում որոշված u ֆունկցիայի համար $\Omega+y$ տիրույթում որոշված $v(x) = u(x-y)$ ֆունկցիան կոչվում է u-ի y-տեղաշարժ (y-translate): Ակնհայտ է, որ՝

Պնդում 1.2: *Հարմոնիկ ֆունկցիաների տեղաշարժերը հարմոնիկ են:*

Տրված դրական r թվի և Ω-ում որոշված u ֆունկցիայի համար u-ի r-ձգում (r-dilate) կոչվում է այն u_r ֆունկցիան, որի համար

$$(u_r)(x) = u(rx) \,:$$

Պարզ է, որ u_r-ի որոշման տիրույթն է $(1/r)\Omega = \{(1/r)w\colon\ w \in \Omega\}$: Հեշտ է ստուգել, որ $(1/r)\Omega$-ում

$$\Delta(u_r) = r^2(\Delta u)_r \,:$$

Այստեղից հետևում է՝

Պնդում 1.3: *Հարմոնիկ ֆունկցիաների ձգումները հարմոնիկ են:*

Դիցուք $T\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ գծային ձևափոխությունը բոլոր $x \in \mathbb{R}^n$ վեկտորների համար բավարարում է $|Tx| = |x|$ պայմանին: Այդ դեպքում այն կոչվում է *գծային օրթոգոնալ ձևափոխություն*, կամ, պարզապես, *պտույտ*:

Թեորեմ 1.1: *Եթե u-ն հարմոնիկ է Ω-ում, ապա կամայական T պտույտի համար $u \circ T$ ֆունկցիան հարմոնիկ է $T^{-1}(\Omega)$-ում:*

Ապացույց: Նախ ցույց տանք, որ Լապլասի օպերատորը տեղափոխելի է կամայական T-ի հետ, այսինքն՝

$$\Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T : \tag{1.1}$$

Վերցնենք T ձևափոխության $[t_{ij}]$ մատրիցը ստանդարտ բազիսի նկատմամբ: Ինչպես հայտնի է, այդ մատրիցի սյուն-վեկտորների համակարգը օրթոնորմալ է: Բարդ ֆունկցիայի ածանցման շղթայական կանոնի համաձայն

$$D_m(u \circ T) = \sum_{j=1}^{n} t_{jm}(D_j u) \circ T :$$

Ածանցելով ևս մեկ անգամ և գումարելով ըստ m-ի, ստանում ենք

$$\begin{aligned}\Delta(u \circ T) &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{n} t_{km}t_{jm}(D_kD_ju) \circ T = \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \Big(\sum_{m=1}^{n} t_{km}t_{jm}\Big)(D_kD_ju) \circ T = \\ &= \sum_{j=1}^{n}(D_jD_ju) \circ T = (\Delta u) \circ T :\end{aligned}$$

Թեորեմի պնդումը հետևում է (1.1)-ից: □

Դիտողություն 1.2: $\mathbb{R}^n$ տարածության բոլոր գծային օրթոգոնալ ձևափոխությունների բազմությունը կազմում է խումբ և նշանակվում է $O(n)$-ով: Թեորեմ (1.1)-ը այդ տերմիններով կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ. *հարմոնիկ ֆունկցիաների բազմությունը $O(n)$-ի նկատմամբ ինվարիանտ է:*

Խնդիր 1.9: Դիցուք $T\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ գծային ձևափոխությունն այնպիսին է, որ $\mathbb{R}^n$-ում կամայական u հարմոնիկ ֆունկցիայի համար $(u \circ T)$-ն ևս հարմոնիկ է: Ապացուցել, որ սկալյար արտադրիչի ճշտությամբ T-ն օրթոգոնալ ձևափոխություն է:

§ 3. Միջին արժեքի հատկությունը

Գրինի բանաձևը Լապլասի օպերատորի համար: Հարմոնիկ ֆունկցիաները ուսումնասիրելիս կարևոր դեր է կատարում Գրինի բանաձևը Լապլասի օպերատորի համար՝

$$\int\limits_{\Omega} \big(u\,\Delta v - v\,\Delta u\big)\,dV = \int\limits_{\partial\Omega} \big(u\,D_{\mathbf{n}}v - v\,D_{\mathbf{n}}u\big)\,ds : \tag{1.2}$$

Այստեղ Ω-ն ողորկ եզրով, սահմանափակ, բաց բազմություն է $\mathbb{R}^n$-ում, u և v ֆունկցիաները պատկանում են ողորկության C^2 դասին $\overline{\Omega}$-ի որևէ շրջակայքում, dV-ն նշանակում է ծավալի չափը $\mathbb{R}^n$-ում, իսկ ds-ը՝ մակերևույթի մակերեսի չափը $\partial\Omega$-ի վրա: $D_{\mathbf{n}}$ սիմվոլը նշանակում է ածանցում Ω-ի եզրի $\mathbf{n}$ արտաքին միավոր վեկտորի ուղղությամբ: Ուրեմն, $\zeta \in \partial\Omega$ կետի համար $(D_{\mathbf{n}}u)(\zeta) = (\nabla u)(\zeta) \cdot \mathbf{n}(\zeta)$, որտեղ $\nabla = (D_1, \ldots, D_n)$-ը Համիլտոնի սիմվոլն է, իսկ «$\cdot$» նշանակում է սկալյար արտադրյալ:

Գրինի բանաձևը ստանալու համար օգտվենք անալիզի դասընթացից հայտնի Օստրոգրադսկու բազմաչափ բանաձևից (երբեմն այն անվանում են դիվերգենցիայի վերաբերյալ բանաձև)՝

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w}\, dV = \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\, ds : \tag{1.3}$$

Այստեղ $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$-ը ողորկ վեկտորական դաշտ է $\overline{\Omega}$-ի շրջակայքում, $\operatorname{div} \mathbf{w} = D_1 w_1 + \cdots + D_n w_n$: Տեղադրելով $\mathbf{w} = u\,\nabla v - v\,\nabla u$, կստանանք (1.2) Գրինի բանաձևը:

Վերցնելով (1.2)-ում $v \equiv 1$ և u-ն հարմոնիկ, ստանում ենք

$$\int\limits_{\partial\Omega} D_{\mathbf{n}} u \, ds = 0 \tag{1.4}$$

օգտակար բանաձևը:

Միջին արժեքի թեորեմները: Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

- $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \ |x-a| < r\}$ (a կենտրոնով, r շառավղով բաց գունդ):
- $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \ |x-a| \leqslant r\}$ (a կենտրոնով, r շառավղով փակ գունդ):
- $B(0,1)$-ի և $\overline{B}(0,1)$-ի փոխարեն հաճախ կօգտագործենք B և $\overline{B}$ նշանակումները:
- $S = \partial B$ (միավոր գնդոլորտ):
- σ-ն S-ի վրա մակերեսի նորմավորված չափն է, այսինքն $\sigma(S) = 1$: Նշենք, որ այդ չափը ինվարիանտ է պտույտների նկատմամբ, այսինքն $\sigma\big(T(E)\big) = \sigma(E)$ կամայական $E \subset S$ բորելյան բազմության և կամայական T օրթոգոնալ ձևափոխության համար:

u ֆունցիան կանվանենք հարմոնիկ տրված բազմությունում (որը կարող և բաց չլինել), եթե u-ն հարմոնիկ է այդ բազմության որևէ շրջակայքում:

Թեորեմ 1.2 (Միջին արժեքի թեորեմը)**:** *Եթե u ֆունկցիան հարմոնիկ է $\overline{B}(a,r)$-ում, ապա $u(a)$-ն հավասար է u-ի արժեքների միջինին $\partial B(a,r)$-ի վրա, այսինքն՝*

$$u(a) = \int\limits_S u(a + r\zeta) \, d\sigma(\zeta) \, : \tag{1.5}$$

Ապացույց: Նախ դիտարկենք $n > 2$ դեպքը: Ընդհանրությունը չխախտելով կարող ենք ենթադրել, թե $B(a,r) = B$: Ֆիքսենք $\varepsilon \in (0,1)$: Կիրառենք Գրինի բանաձևը $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \varepsilon < |x| < 1\}$ գնդային օղակում, վերցնելով $v = |x|^{2-n}$: Կստանանք

$$0 = (2-n)\int\limits_S u\,ds - (2-n)\varepsilon^{1-n}\int\limits_{\varepsilon S} u\,ds -$$

$$-\int\limits_S D_{\mathbf{n}}u\,ds + \varepsilon^{2-n}\int\limits_{\varepsilon S} D_{\mathbf{n}}u\,ds :$$

Ըստ (1.4)-ի, վերջին երկու ինտեգրալները հավասար են զրոյի, ուրեմն

$$\int\limits_S u\,ds = \varepsilon^{1-n}\int\limits_{\varepsilon S} u\,ds,$$

կամ, որ նույնն է

$$\int\limits_S u(\zeta)\,d\sigma(\zeta) = \int\limits_S u(\varepsilon\zeta)\,d\sigma(\zeta) :$$

Անցնելով սահմանի, երբ $\varepsilon \to 0$ և օգտվելով u-ի անընդհատությունից $x = 0$ կետում, ստանում ենք (1.5)-ը:

Երբ $n = 2$, ապացույցը կատարվում է նման ձևով, միայն թե $|x|^{2-n}$-ի փոխարեն վերցնում ենք $\ln|x|$ ֆունկցիան: $\square$

Միջին արժեքի հատկությունը տեղի ունի նաև ծավալային չափի նկատմամբ: Այն ստանալու համար կարելի է օգտվել բևեռային կոորդինատներով գրված հետևյալ բանաձևից.

$$\frac{1}{nV(B)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\,dV = \int\limits_0^\infty r^{n-1}\int\limits_S f(r\zeta)\,d\sigma(\zeta)dr \tag{1.6}$$

(տես [2], գլուխ 8, խնդիր 6): (1.6)-ը սիմվոլիկ ձևով կարելի է գրել նաև

$$dV = nV(B)r^{n-1}d\sigma dr$$

տեսքով:

Թեորեմ 1.3 (Միջին արժեքի թեորեմի ծավալային տարբերակը): *Եթե u ֆունկցիան հարմոնիկ է $\overline{B}(a,r)$-ում, ապա $u(a)$-ն հավասար է u-ի արժեքների միջինին $B(a,r)$-ի վրա, այսինքն՝*

$$u(a) = \frac{1}{V(B(a,r))} \int\limits_{B(a,r)} u\, dV \, : \tag{1.7}$$

Ապացույց: Ընդհանրությունը չխախտելով կարող ենք ենթադրել $B(a,r) = B$: Կիրառենք (1.6)-ը $f = u\chi$ ֆունկցիայի նկատմամբ, որտեղ χ-ն B-ի բնութագրիչ ֆունկցիան է: Կստանանք

$$\frac{1}{nV(B)} \int\limits_{B} u\, dV = \int\limits_{0}^{1} r^{n-1} \int\limits_{S} u(r\zeta)\, d\sigma(\zeta) dr \, :$$

Այստեղ աջ կողմի ներքին ինտեգրալը (1.5) բանաձևի համաձայն հավասար է $u(0)$-ի: □

Հետագայում մենք կտեսնենք, որ միջին արժեքի հատկությունը լիովին բնութագրում է հարմոնիկ ֆունկցիաները: Դրա համար նպատակահարմար է ունենալ միջին արժեքի թեորեմի հետևյալ վերաձևակերպումը՝

Թեորեմ 1.4: *Դիցուք u-ն հարմոնիկ է Ω-ում: Յուրաքանչյուր $x \in \Omega$ կետում u-ի արժեքը $\partial B(x,r)$ (որտեղ $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$) սֆերայի վրա ընդունած արժեքների միջինն է, այսինքն՝*

$$u(x) = \int\limits_{S} u(x + r\zeta)\, d\sigma(\zeta) \, :$$

Այժմ բերենք միջին արժեքի հատկության մի կիրառություն: Ինչպես ցույց է տալիս $|x|^{2-n}$ $(n > 2)$ ֆունկցիայի օրինակը, իրականարժեք հարմոնիկ ֆունկցիան կարող է ունենալ մեկուսացված եզակի կետեր: Սակայն, պարզվում է, այն չի կարող ունենալ մեկուսացված զրոներ:

Թեորեմ 1.5: *Իրականարժեք հարմոնիկ ֆունկցիայի զրոները չեն կարող լինել մեկուսացված:*

Ապացույց: Դիցուք u-ն Ω-ում իրականարժեք հարմոնիկ ֆունկցիա է, $a \in \Omega$, և $u(a) = 0$: Վերցնենք $r > 0$ այնպիսին, որ $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$: Քանի որ u-ի արժեքների միջինը $\partial\Omega$-ի վրա 0 է, ապա u-ն կամ նույնաբար 0 է $\partial\Omega$-ի վրա, կամ ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ: Վերջին դեպքում, $\partial\Omega$-ի կապակցվածության շնորհիվ, u-ն $\partial\Omega$-ի վրա կընդունի նաև 0 արժեքը:

Այսպիսով, a կենտրոնով և ցանկացած շառավղով գնդի եզրի վրա u-ն ունի զրոներ, իսկ դա նշանակում է, որ նրա զրոները մեկուսացված չեն: □

Ինչպես ցույց են տալիս սպորև բերվող օրինակները, թեորեմ 1.5-ի մեջ ֆունկցիայի իրական լինելը կարևոր է:

Օրինակ 1.6: $n = 2$ դեպքում հոլոմորֆ ֆունկցիաները նաև հարմոնիկ են, իսկ դրանց զրոները, ինչպես հայտնի է, մեկուսացված են:

Օրինակ 1.7: Որպես նման օրինակ $n \geqslant 2$ դեպքում կարող է ծառայել

$$(1-n)x_1^2 + \sum_{k=2}^{n} x_k^2 + ix_1$$

ֆունկցիան, որը զրո է դառնում միայն սկզբնակետում:

§ 4. Մաքսիմումի սկզբունքը

Միջին արժեքի թեորեմի հետևանքներից է մաքսիմումի սկզբունքի վերաբերյալ հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 1.6 (Մաքսիմումի սկզբունքը)**:** *Դիցուք Ω-ն կապակցված է և u-ն իրականարժեք հարմոնիկ ֆունկցիա է Ω-ում: Եթե u-ն Ω-ում ունի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք, ապա այն նույնաբար հաստատուն է:*

Ապացույց: Դիցուք u-ն $a \in \Omega$ կետում ընդունում է մեծագույն արժեք: Ընտրենք $r > 0$ այնպիսին, որ $\overline{B}(a,r) \subset \Omega$: Եթե $B(a,r)$-ի որևէ կետում u-ի արժեքը փոքր լիներ $u(a)$-ից, ապա անընդհատության շնորհիվ, u-ի միջինը $B(a,r)$-ի վրա ևս կլիներ $u(a)$-ից փոքր, ինչը կհակասեր (1.7)-ին: Ուրեմն, u-ն հաստատուն է $B(a,r)$-ում, իսկ դա նշանակում է, որ մաքսիմումի կետերի բազմությունը բաց է Ω-ում: u-ի անընդհատության շնորհիվ, այդ բազմությունը նաև փակ է Ω-ում: Քանի որ Ω-ն կապակցված է, նրա ոչ դատարկ, Ω-ում միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմությունը համընկնում է Ω-ի հետ, այսինքն, u-ն նույնաբար հաստատուն է Ω-ում:

Եթե u-ն $a \in \Omega$ կետում ընդունում է իր մինիմալ արժեքը, ապա $(-u)$-ն նույն կետում ընդունում է իր մաքսիմալ արժեքը: Ըստ վերը ապացուցածի, $(-u)$-ն, և ուրեմն նաև u-ն, հաստատուն է: □

Հաճախ մաքսիմումի սկզբունքը կիրառվում է ստորև բերվող 2-րդ տարբերակի տեսքով: Նկատենք, որ Ω-ից կապակցվածություն այստեղ չի պահանջվում:

Թեորեմ 1.7 (Մաքսիմումի սկզբունքի 2-րդ տարբերակ)**:** *Դիցուք Ω-ն սահմանափակ է, իսկ u-ն $\overline{\Omega}$-ում անընդհատ, Ω-ում հարմոնիկ իրականարժեք ֆունկցիա է: Այդ դեպքում $\overline{\Omega}$-ում իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքներն u-ն ընդունում է $\partial\Omega$-ի վրա:*

Ապացույց: Վայերշտրասի թեորեմի համաձայն $\overline{\Omega}$-ի վրա u-ն ընդունում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները: Ըստ թեորեմ 1.6-ի u-ն կամ հաստատուն է Ω-ի կոմպոնենտի վրա, կամ այդ արժեքները այն ընդունում է միայն եզրի վրա: Երկու դեպքում էլ ստանում ենք թեորեմի պնդումը: □

Վերջին թեորեմից հետևում է, որ սահմանափակ տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիան որոշվում է իր եզրային արժեքներով: Ավելի ճշգրիտ՝

Հետևանք 1.1: *Եթե Ω տիրույթը սահմանափակ է, u և v ֆունկցիաներն անընդհատ են $\overline{\Omega}$-ում, հարմոնիկ են Ω-ում և համընկնում են $\partial\Omega$-ի վրա, ապա նրանք համընկնում են $\overline{\Omega}$-ում:*

Մաքսիմումի սկզբունքի հաջորդ տարբերակը ամենաընդհանուր բնույթի է և կիրառելի է նույնիսկ այն դեպքում, երբ Ω-ն անսահմանափակ է կամ u-ն անընդհատ չէ $\overline{\Omega}$-ում:

Թեորեմ 1.8 (Մաքսիմումի սկզբունքի 3-րդ տարբերակ)**:** *Դիցուք u-ն իրականարժեք հարմոնիկ ֆունկցիա է Ω-ում և տեղի ունի*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, u(a_k) \leqslant M$$

անհավասարությունը $a_k \in \Omega$ յուրաքանչյուր հաջորդականության համար, որը ձգտում է կամ $\partial\Omega$-ին պատկանող որևէ կետի, կամ ∞-ի: Այդ դեպքում $u(x) \leqslant M$, $\forall x \in \Omega$:

Դիտողություն 1.3: Թեորեմը մնում է ուժի մեջ, եթե $\overline{\lim}$-ը փոխարինենք $\underline{\lim}$-ով և փոխենք անհավասարությունների ուղղությունը:

Ապացույց: Դիցուք $M' = \sup\{u(x) : \ x \in \Omega\}$ և վերցնենք $b_k \in \Omega$ այնպիսին, որ $u(b_k) \to M'$: Եթե b_k-ն պարունակում է որևէ $b \in \Omega$ կետի զուգամիտող ենթահաջորդականություն, ապա $u(b) = M'$, և մաքսիմումի սկզբունքից հետևում է, որ u-ն հաստատուն է Ω-ի՝ b-ն պարունակող կոմպոնենտի վրա: Հետևաբար այդ դեպքում գոյություն ունի Ω-ի եզրային կետի զուգամիտող $a_k \in \Omega$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ $u(a_k) = M'$: Իսկ եթե b_k-ն չի պարունակում Ω-ին պատկանող որևէ կետի զուգամիտող ենթահաջորդականություն, ապա այն պարունակում է a_k ենթահաջորդականություն, որը ձգտում է կամ Ω-ի եզրային կետի, կամ ∞-ի: Բոլոր դեպքերում ստանում ենք $M' \leqslant M$: □

Մաքսիմումի սկզբունքի՝ վերը բերած տարբերակները վերաբերվում են իրականարժեք ֆունկցիաներին: Այժմ բերենք մի նոր տարբերակ, որը կիրառելի է նաև կոմպլեքսարժեք ֆունկցիաների համար:

Թեորեմ 1.9 (Մաքսիմումի սկզբունքի 4-րդ տարբերակ)**:** *Դիցուք Ω-ն կապակցված է և u-ն հարմոնիկ է Ω-ում: Եթե $|u|$-ն ընդունում է իր մեծագույն արժեքը Ω-ում, ապա u-ն հաստատուն է:*

Ապացույց: Ենթադրենք $|u|$-ն ընդունում է իր մաքսիմալ M արժեքը $a \in \Omega$ կետում: Ընտրենք $\lambda \in \mathbb{C}$ թիվը այնպիսին, որ $|\lambda| = 1$ և $\lambda u(a) = M$: Այդ դեպքում իրականարժեք հարմոնիկ $\mathrm{Re}\,\lambda u$ ֆունկցիան իր մեծագույն M արժեքը ընդունում է a կետում: Ըստ թեորեմ 1.6-ի Ω-ում $\mathrm{Re}\,\lambda u \equiv M$: Քանի որ $|\lambda u| = |u| \leqslant M$, ապա Ω-ում $\mathrm{Im}\,\lambda u \equiv 0$: Ուրեմն λu-ն, և հետևաբար u-ն, հաստատուն է Ω-ում: □

Դիտողություն 1.4: Մինիմումի սկզբունքը $|u|$-ի համար ճիշտ չէ: Բերենք համապատասխան օրինակ:

Օրինակ 1.8: $u(x) = x_1$ ոչ հաստատուն հարմոնիկ ֆունկցիայի մոդուլը B գնդի կենտրոնում ընդունում է իր մինիմալ արժեքը:

Թեորեմ 1.9-ը թեորեմ 1.6-ի անալոգն է կոմպլեքսարժեք հարմոնիկ ֆունկցիաների համար: Կարելի է ստանալ նաև թեորեմներ 1.7-ի և 1.8-ի համապատասխան անալոգները:

Հետագայում, երբ ապացուցվի, որ հարմոնիկ ֆունկցիան իրական անալիտիկ է, մենք ի վիճակի կլինենք ստանալ մաքսիմումի սկզբունքի լոկալ տարբերակը:

§ 5. Պուասոնի կորիզը գնդի համար

Միջին արժեքի թեորեմից հետևում է, որ եթե u-ն հարմոնիկ է $\overline{B}$-ում, ապա

$$u(0) = \int\limits_S u(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\ : \tag{1.8}$$

Պարզվում է, որ կամայական $x \in \overline{B}$ կետի համար $u(x)$-ը u-ի կշռային միջինն է S-ի վրա: Ավելի ճշգրիտ, գոյություն ունի $B \times S$-ի վրա որոշված այնպիսի P ֆունկցիա, որ

$$u(x) = \int\limits_S P(x,\zeta)u(\zeta)\,d\sigma(\zeta) \tag{1.9}$$

բոլոր $x \in B$ կետերի և կամայական հարմոնիկ h ֆունկցիայի համար:

Դիտարկենք նախ $n = 2$ դեպքը: Դիցուք u-ն հարմոնիկ է հարթության փակ միավոր շրջանում: Այդ դեպքում նույն շրջանում գոյություն ունի հոլոմորֆ f ֆունկցիա այնպիսին, որ $u = \operatorname{Re} f$: Քանի որ $u = (f + \bar{f})/2$, ապա f-ի վերլուծությունից Թեյլորի շարքի՝ հետևում է, որ

$$u(re^{i\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\varphi}, \tag{1.10}$$

որտեղ $0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$: Տեղադրելով $r = 1$, ստանում ենք

$$u(e^{i\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\varphi} :$$

Աջ մասը $u(e^{i\varphi})$-ի Ֆուրյեի շարքն է, որի a_k գործակիցները, ինչպես հայտնի է, արտահայտվում են

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(e^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

բանաձևերով: Դրանք տեղադրելով (1.10)-ի մեջ, կստանանք

$$u(re^{i\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(e^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta\right) r^{|k|}e^{ik\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(\varphi-\theta)}\right) u(e^{i\theta})d\theta : \tag{1.11}$$

Այնուհետև՝

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(\varphi-\theta)} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(\varphi-\theta)} + \sum_{k=1}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(\theta-\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{1-re^{i(\varphi-\theta)}} + \frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{1-re^{i(\theta-\varphi)}} =$$

$$= \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-re^{i\varphi}} + \frac{re^{-i\varphi}}{e^{-i\theta}-re^{-i\varphi}} = \frac{1-r^2}{|e^{i\theta}-re^{i\varphi}|^2} : \tag{1.12}$$

(1.11)-ից և (1.12)-ից հետևում է՝

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{|re^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2}\, u(e^{i\theta})\, d\theta :$$

Նշանակելով

$$P(z,\zeta) = \frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^2},$$

որտեղ $z = re^{i\varphi},\ \zeta = e^{i\theta}$, ստանում ենք պահանջվելիք բանաձևը $n = 2$ դեպքում՝

$$u(z) = \int_S P(z,\zeta)u(\zeta)\, d\sigma(\zeta) :$$

$P(z,\zeta)$-ն կոչվում է *Պուասոնի կորիզ* միավոր շրջանի համար: Դժբախտաբար, բարձր չափողականությունների $(n > 2)$ դեպքում նմանափիպ դատողությունները չեն անցնում: Պուասոնի կորիզը կառուցելու համար այդ դեպքում օգտակար դեր է կատարում հետևյալ լեմման՝

Լեմմա 1.1 (Լեմմա սիմետրիայի մասին)**:** *$\mathbb{R}^n$-ի կամայական x և y ոչ զրոյական կետերի համար*

$$\left|\frac{y}{|y|} - x|y|\right| = \left|\frac{x}{|x|} - y|x|\right| :$$

Ապացույց: Ապացուցվելիք առնչությունը համարժեք է

$$\left(\frac{y}{|y|}-x|y|\right)\cdot\left(\frac{y}{|y|}-x|y|\right)=\left(\frac{x}{|x|}-y|x|\right)\cdot\left(\frac{x}{|x|}-y|x|\right)$$

սկալյար արտադրյալների հավասարությանը, ինչը հեշտությամբ ստուգվում է փակագծերը բացելով: □

$n>2$ դեպքում P-ն գտնելու համար փորձենք օգտագործել նույն մեթոդը, որը կիրառել ենք միջին արժեքի թեորեմը ապացուցելիս: Դի– ցուք u-ն հարմոնիկ է $\overline{B}$-ում: Ապացուցելու համար, որ $u(0)$-ն u-ի միջինն է S-ի վրա, մենք կիրառեցինք Գրինի բանաձևը, վերցնելով $v(y)=|y|^{2-n}$: Այս ֆունկցիան՝

(1) հարմոնիկ է $\overline{B}\setminus\{0\}$-ում,

(2) ունի եզակիություն 0-ում,

(3) հաստատուն է S-ի վրա:

Այժմ ֆիքսենք $x\in B$ կետը: Որպեսզի ցույց տանք, որ $u(x)$-ը u-ի կշռային միջինն է S-ի վրա, բնական է վերցնել $v(y)=|y-x|^{2-n}$: Այս ֆունկցիան՝

- հարմոնիկ է $\overline{B}\setminus\{x\}$-ում,
- ունի եզակիություն x-ում,
- բայց հաստատուն չէ S-ի վրա:

Սիմետրիայի մասին լեմմայից հետևում է՝, որ $\forall y\in S$ համար՝

$$|y-x|^{2-n}=|x|^{2-n}\left|y-\frac{x}{|x|^2}\right|^{2-n}:$$

Նկատենք, որ այս հավասարության աջ մասը ըստ y-ի հարմոնիկ է $\overline{B}$-ում: Ուրեմն, աջ և ձախ մասերի տարբերությունը բավարարում է պահանջվող վերը բերած (1)–(3) պայմաններին: Վերցնենք $v(y) = l(y) - r(y)$, որտեղ

$$l(y) = |y-x|^{2-n}, \qquad r(y) = |x|^{2-n}\left|y - \frac{x}{|x|^2}\right|^{2-n},$$

և ընտրենք $\varepsilon > 0$ այնպես, որ $\overline{B}(x,\varepsilon) \subset B$: Կիրառելով Գրինի բանաձևը՝ կստանանք

$$0 = \int_S uD_{\mathbf{n}}v\,ds - \int_S vD_{\mathbf{n}}u\,ds - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} uD_{\mathbf{n}}l\,ds +$$
$$+ \int_{\partial B(x,\varepsilon)} uD_{\mathbf{n}}r\,ds + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} lD_{\mathbf{n}}u\,ds - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} rD_{\mathbf{n}}u\,ds :$$

Աջ մասում 2-րդ և 5-րդ ինտեգրալները 0 են, 2-րդը շնորհիվ այն բանի, որ S-ի վրա $v \equiv 0$, իսկ 5-րդը՝ ըստ (1.4)-ի, հաշվի առնելով, որ $\partial B(x,\varepsilon)$-ի վրա l-ը հաստատուն է: Ըստ (1.17)-ի, 3-րդ ինտեգրալը հավասար է $(2-n)s(S)u(x)$-ի: Այսպիսով՝

$$0 = \int_S uD_{\mathbf{n}}v\,ds - (2-n)s(S)u(x) +$$
$$+ \int_{\partial B(x,\varepsilon)} uD_{\mathbf{n}}r\,ds - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} rD_{\mathbf{n}}u\,ds : \tag{1.13}$$

Քանի որ $uD_{\mathbf{n}}r$ և $rD_{\mathbf{n}}u$ ֆունկցիաները սահմանափակ են B-ում՝ վերջին երկու ինտեգրալները ձգտում են զրոյի երբ $\varepsilon \to 0$: Անցնելով սահմանի՝ (1.13)-ից ստանում ենք

$$u(x) = \frac{1}{2-n}\int_S uD_{\mathbf{n}}v\,d\sigma :$$

Նշանակելով

$$P(x,\zeta) = \frac{1}{2-n}D_{\mathbf{n}}v, \tag{1.14}$$

ստանում ենք *Պուասոնի ինտեգրալային բանաձևը* միավոր գնդի համար՝

$$u(x) = \int\limits_S P(x,\zeta)u(\zeta)\,d\sigma(\zeta) : \tag{1.15}$$

Հաշվելով $D_{\mathbf{n}}v$ ածանցյալը, ինչը առաջարկում ենք ընթերցողին կատարել ինքնուրույն, (1.14)-ից կստանանք

$$P(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n} : \tag{1.16}$$

$P(x,\zeta)$-ն կոչվում է *Պուասոնի կորիզ* միավոր գնդի համար: Հարմոնիկ ֆունկցիաների տեսության մեջ նրա դերը մեծ է:

Խնդիր 1.10: Գտնել Պուասոնի կորիզի տեսքը $B(a,R)$ գնդի համար:

Խնդիր 1.11: Դիցուք u-ն հարմոնիկ է $\overline{B}(x,\varepsilon)$-ում: Ապացուցել, որ

$$\int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} uD_{\mathbf{n}}|y-x|^{2-n}\,ds = (2-n)s(S)u(x) : \tag{1.17}$$

(Ցուցում՝ օգտվել միջին արժեքի թեորեմից):

§ 6. Դիրիխլեի խնդիրը գնդի համար

Անցնենք հարմոնիկ ֆունկցիաների տեսության հայտնի խնդրին՝ Դիրիխլեի խնդրին: S-ի վրա տրված է անընդհատ f ֆունկցիա: Պահանջվում է կառուցել u ֆունկցիա (Դիրիխլեի խնդրի լուծում), որը անընդհատ է $\overline{B}$-ում, հարմոնիկ է B-ում և S-ի վրա համընկնում է f-ի հետ: Դա Դիրիխլեի խնդիրն է գնդի համար: Նախ հարց է առաջանում. գոյություն ունի՞ արդյոք այդպիսի u: Նկատենք, որ համաձայն թեորեմ 1.7-ի հետևանք 1.1-ի, եթե կա այդպիսի u, ապա այն միակն է: Երկրորդ հարցը, որը առաջանում է, հետևյալն է՝ եթե գոյություն ունի նշված u-ն, ապա ինչպե՞ս կառուցել այն:

Եթե Դիրիխլեի խնդիրը ունի u լուծում, որը հարմոնիկ է $\overline{B}$-ում, ապա նախորդ պարագրաֆի համաձայն՝

$$u(x) = \int\limits_S P(x,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) :$$

Աջ մասը իմաստ ունի կամայական անընդհատ f ֆունկցիայի համար, այնպես որ բնական է սպասել, որ գրված ինտեգրալը ընդհանուր դեպ–քում էլ կլինի Դիրիխլեի խնդրի լուծումը:

Տրված $f \in C(S)$-ի համար ներմուծենք

$$P[f](x) = \int\limits_S P(x,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \tag{1.18}$$

ֆունկցիան: $P[f]$-ը որոշված է B-ում և կոչվում է f-ի *Պուասոնի ինտեգրալ*: Հաջորդ թեորեմում պնդվում է, որ Պուասոնի ինտեգրալը լուծում է Դիրիխլեի խնդիրը:

Թեորեմ 1.10: *Դիցուք $f \in C(S)$ և*

$$u(x) = \begin{cases} P[f](x), & \textit{եթե } x \in B, \\ f(x), & \textit{եթե } x \in S : \end{cases}$$

Այդ դեպքում u-ն անընդհատ է $\overline{B}$-ում և հարմոնիկ է B-ում:

Ապացույց: Ապացույցը հիմնված է Պուասոնի կորիզի երկու հատ–կությունների վրա. այն հարմոնիկ է $\mathbb{R}^n \setminus \{\zeta\}$ $(\zeta \in S)$ բազմության վրա և ապրոքսիմատիվ միավոր է:

Հարմոնիկությունը ապացուցելու համար կորիզը կգրենք $P(x,\zeta) = \left(1-|x|^2\right)|x-\zeta|^{-n}$ տեսքով և կօգտվենք հետևյալ հեշտ ստուգվող բանաձևից՝

$$\Delta(uv) = u\Delta v + 2\nabla u \cdot \nabla v + v\Delta u,$$

որը ճմարիտ է կամայական իրականարժեք, կրկնակի անընդհատ դիֆերենցելի u և v ֆունկցիաների համար: Կիրառելով Լապլասի օպերատորը (1.18)-ի ինտեգրալի նշանի տակ, համոզվում ենք, որ $P(x,\zeta)$-ն հարմոնիկ է B-ում:

Ապրոքսիմատիվ միավոր ասելով հասկանում ենք հետևյալ հատկությունների բավարարելը՝

ա) $P(x,\zeta) > 0, \ \ \forall x \in B$ և $\forall \zeta \in S$,

բ) $\displaystyle\int_S P(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 1, \ \ \forall x \in B$,

գ) Կամայական η-ի և δ-ի ($\eta \in S, \ \delta > 0$) համար

$$\lim_{x\to\eta} \int\limits_{|\zeta-\eta|>0} P(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 0 :$$

ա) և գ) հատկությունները հետևում են անմիջապես Պուասոնի կորիզի (1.16) տեսքից: Տեղադրելով (1.15)-ի մեջ $u \equiv 1$, կստանանք բ)-ն:

u-ի անընդհատությունը $\overline{B}$-ում ապացուցելու համար ֆիքսենք $\eta \in S$ և $\varepsilon > 0$: Ընտրենք այնպիսի $\delta > 0$, որ $|f(\zeta) - f(\eta)| < \varepsilon$, երբ $|\zeta - \eta| < \delta$ (և $\zeta \in S$): Հաշվի առնելով վերը նշված ա) և բ) հատկությունները, կստանանք՝

$$\begin{aligned}|u(x) - u(\eta)| &= \left| \int_S P(x,\zeta)(f(\zeta) - f(\eta))\, d\sigma(\zeta) \right| \leqslant \\ &\leqslant \int_{|\zeta-\eta|\leqslant\delta} P(x,\zeta)|f(\zeta) - f(\eta)|\, d\sigma(\zeta) + \\ &+ \int_{|\zeta-\eta|>\delta} P(x,\zeta)|f(\zeta) - f(\eta)|\, d\sigma(\zeta) \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{|\zeta-\eta|>\delta} P(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta),\end{aligned}$$

որտեղ $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in S}|f(x)|$: գ) հատկության համաձայն վերջին գումարելին փոքր կդարձնենք ε-ից՝ x-ը բավականաչափ մոտ վերցնելով η-ին: Այսպիսով՝ u-ն անընդհատ է η կետում: $\square$

Հիշեցնենք, որ Պուասոնի (1.15) ինտեգրալային բանաձևը ստացել ենք u-ի $\overline{B}$-ում հարմոնիկ լինելու ենթադրությամբ: Պարզվում է, որ այդ պայմանը կարելի է թուլացնել:

Թեորեմ 1.11: *Եթե u-ն անընդհատ է $\overline{B}$-ում և հարմոնիկ է B-ում, ապա $u = P[u|_S]$ B-ում:*

Ապացույց: Համաձայն թեորեմ 1.10-ի $u - P[u|_S]$ ֆունկցիան հարմոնիկ է B-ում և անընդհատորեն շարունակվում է S-ի վրա՝ որպես նույնաբար 0: Ըստ մաքսիմումի սկզբունքի վերաբերյալ թեորեմ 1.7-ի հետևանքի՝ $u - P[u|_S] \equiv 0$ B-ում: $\square$

Քանի որ տեղաշարժերն ու ձգումները պահպանում են հարմոնիկությունը, կարելի է պնդել, որ Դիրիխլեի խնդիրը լուծելի է կամայական գնդում, ավելի ճշգրիտ՝

Թեորեմ 1.12: *Դիցուք f-ը անընդհատ է $\partial B(a,r)$-ի վրա: Գոյություն ունի միակ u ֆունկցիա, որը՝*

1. *անընդհատ է $\overline{B}(a,r)$-ում,*
2. *հարմոնիկ է $B(a,r)$-ում,*
3. *համընկնում է f-ի հետ $\partial B(a,r)$-ի վրա:*

Այսպիսի դեպքերում ասում են՝ u-ն Դիրիխլեի խնդրի լուծումն է $\overline{B}(a,r)$-ում f եզրային արժեքներով:

Հիշեցնենք, որ հարմոնիկ ֆունկցիան սահմանելիս պահանջել ենք, որ այն պատկանի C^2 ողորկության դասին: Պարզվում է, որ այն շատ ավելի ողորկ է:

Թեորեմ 1.13: *Հարմոնիկ ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է:*

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները՝

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ոչ բացասական ամբողջ թվերի n-յակը կանվանենք մուլտիինդեքս,
- $D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ մասնակի ածանցման օպերատորը կարճ կնշանակենք D^α (D_j^0-ն նշանակում է նույնական օպերատոր),
- ֆիքսած ζ-ի համար ($\zeta \in S$) $P(\cdot, \zeta)$ ֆունկցիայի α-րդ կարգի մասնակի ածանցյալը կնշանակենք $D^\alpha P(\cdot, \zeta)$:

Թեորեմ 1.13-ի ապացույցը: Եթե u-ն անընդհատ է $\overline{B}$-ում և հարմոնիկ է B-ում, ապա, ինչպես գիտենք՝

$$u(x) = \int\limits_S P(x, \zeta) u(\zeta)\, d\sigma(\zeta), \qquad \forall x \in B :$$

Ինչպես երևում է (1.16)-ից, $P(\cdot, \zeta)$ ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է B-ում: Ածանցելով ինտեգրալի նշանի տակ՝ ստանում ենք

$$D^\alpha u(x) = \int\limits_S D^\alpha P(x, \zeta) u(\zeta)\, d\sigma(\zeta), \qquad \forall x \in B \tag{1.19}$$

յուրաքանչյուր α մուլտիինդեքսի համար: Ուրեմն՝ $u \in C^\infty(B)$:

Տեղաշարժից և ձգումից հետո նախորդ դատողությունները կիրառելի են կամայական գնդում, ինչից հետևում է, որ հարմոնիկ ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է իր որոշման տիրույթում: □

Հաջորդ թեորեմը նման է կոմպլեքս անալիզից հայտնի հոլոմորֆ ֆունկցիաների հավասարաչափ զուգամետ շարքերի վերաբերյալ Վայերշտրասի թեորեմին՝

Թեորեմ 1.14: *Դիցուք հարմոնիկ ֆունկցիաների u_n հաջորդականությունը Ω տիրույթի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա հավասարաչափ զուգամիտում է u ֆունկցիային: Այդ դեպքում՝*

1. u-ն հարմոնիկ է Ω-ում,

2. յուրաքանչյուր α մուլտիինդեքսի համար $D^\alpha u_m$-ը Ω-ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $D^\alpha u$-ին:

Ապացույց: Բավական է ապացուցել, որ կամայական $\overline{B}(a,r) \subset \Omega$ գնդի համար u-ն հարմոնիկ է $B(a,r)$-ում և յուրաքանչյուր α մուլտիինդեքսի համար $D^\alpha u_m$-ը $B(a,r)$-ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $D^\alpha u$-ին: Ընդհանրությունը չխախտելով, կարող ենք ենթադրել, որ $B(a,r) = B$:

Ինչպես գիտենք՝

$$u_m(x) = \int_S P(x,\zeta) u_m(\zeta)\, d\sigma(\zeta), \qquad \forall x \in B:$$

Անցնելով սահմանի, կստանանք՝

$$u(x) = \int_S P(x,\zeta) u(\zeta)\, d\sigma(\zeta), \qquad \forall x \in B:$$

Ուրեմն, u-ն հարմոնիկ է B-ում:

Դիցուք α-ն կամայական մուլտիինդեքս է և $x \in B$: Ունենք՝

$$D^\alpha u_m(x) = \int_S D^\alpha P(x,\zeta) u_m(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \to$$
$$\to \int_S D^\alpha P(x,\zeta) u(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = D^\alpha u(x):$$

Եթե K-ն B-ի կոմպակտ ենթաբազմություն է, ապա $D^\alpha P$-ն սահմանափակ է $K \times S$-ի վրա, ինչից հետևում է, որ $D^\alpha u_m(x)$-ը զուգամիտում է $D^\alpha u(x)$-ին K-ի վրա հավասարաչափ, ինչը և պահանջվում էր: □

Խնդիր 1.12: Ապացուցել, որ $P[f \circ T] = P[f] \circ T$ ամեն մի $f \in C(S)$ ֆունկցիայի և կամայական T գծային օրթոգոնալ ձևափոխության համար:

Խնդիր 1.13: Ֆունկցիան կոչվում է *ռադիալ*, եթե նրա արժեքը x-ում կախված է միայն $|x|$-ից: Բերել մեկ ուրիշ ապացույց

$$\int_S P(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta) = 1, \ \ \forall x \in B$$

առնչության համար, ցույց տալով, որ $x \mapsto \int_S P(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է և ռադիալ է B-ում:
(Ցուցում՝ օգտվել խնդիր 1.7-ից):

§ 7. Միջին արժեքի թեորեմների շրջումը

Ինչպես § 3-ում տեսանք, հարմոնիկ ֆունկցիաները բավարարում են միջին արժեքի հատկությանը: Իսկ այժմ, օգտվելով գնդում Դիրիխլեի խնդրի լուծելիությունից, մենք կապացուցենք, որ անընդհատ ֆունկ– ցիաներից միայն հարմոնիկներն են օժտված այդ հատկությամբ: Ավելի ճշգրիտ, տեղի ունի թեորեմ 1.4-ի հետևյալ շրջումը՝

Թեորեմ 1.15: *Դիցուք u-ն անընդհատ է Ω-ում: Եթե յուրաքանչ– յուր $x \in \Omega$ կետի համար*

$$u(x) = \int\limits_S u(x + r\zeta)\,d\sigma(\zeta),$$

որտեղ $r < \rho(x, \partial\Omega)$, ապա u-ն հարմոնիկ է Ω-ում:

Իրականում բավական է, որ բավարարվի միջին արժեքի հատկու– թյան ավելի թույլ տարբերակը:

Թեորեմ 1.16: *Դիցուք u-ն անընդհատ է Ω-ում: Եթե յուրաքանչ– յուր $x \in \Omega$ կետի համար գոյություն ունի $r_j \to 0$ դրական թվերի այնպիսի հաջորդականություն, որ՝*

$$u(x) = \int\limits_S u(x + r_j\zeta)\,d\sigma(\zeta) \qquad \text{բոլոր } j\text{-երի համար,}$$

ապա u-ն հարմոնիկ է Ω-ում:

Ապացույց: Ընդհանրությունը չխախտելով, կարող ենք ենթադրել, թե u-ն իրականարժեք է: Բավական է ապացուցել u-ի հարմոնիկությունը Ω-ում պարունակվող կամայական գնդում: Դիցուք $\overline{B}(a, R) \subset \Omega$ և v-ն Դիրիխլեի խնդրի լուծումն է $\overline{B}(a, R)$-ում u եզրային արժեքներով: Ցույց տանք, որ $B(a, R)$-ում $u = v$: Ենթադրենք, թե $(u - v)$-ն $\overline{B}(a, R)$-ի որևէ կետում դրական է: Նշանակենք

$$E = \Big\{ y \in \overline{B}(a, R) \colon \; u(y) - v(y) = \max_{x \in \overline{B}(a,R)} \big(u(x) - v(x) \big) \Big\} :$$

Քանի որ E-ն կոմպակտ բազմություն է, ապա այն պարունակում է x_0 կետ, որը ամենահեռուն է a-ից: Ակնհայտ է, որ $x_0 \in B(a, R)$: Ուրեմն՝ գոյություն ունի $B(x_0, r)$ գունդ, այնպիսին, որ $B(x_0, r) \subset B(a, R)$ և $u(x_0)$-ն իր արժեքների միջինն է $\partial B(x_0, r)$-ի վրա: Քանի որ v-ն հարմոնիկ է, ապա՝

$$(u - v)(x_0) = \int_S (u - v)(x_0 + r\zeta) \, d\sigma(\zeta) :$$

Մյուս կողմից՝ $(u - v)(x_0 + r\zeta) \leqslant (u - v)(x_0)$ բոլոր $\zeta \in S$ կետերի համար, ընդ որում այդ անհավասարությունը խիստ է S-ի ինչ-որ բաց ենթաբազմության վրա (շնորհիվ x_0-ի ընտրության): Ստացվեց հակասություն և, ուրեմն, $u - v \leqslant 0$ $\overline{B}(a, r)$-ում: Նման ձևով ստանում ենք $u - v \geqslant 0$ հակառակ անհավասարությունը: □

Դիտողություն 1.5: Նման դատողություններով կարելի է համոզվել, որ թեորեմի եզրակացությունը մնում է ուժի մեջ, եթե միջին արժեքի հատկությունը տեղի է ունենում ծավալային տարբերակով (տես խնդիր 1.14-ը):

Դիտողություն 1.6: Թեորեմում u-ի անընդհատության պայմանը էական է: Բերենք համապատասխան հակաօրինակ:

Օրինակ 1.9:

$$u(x) = u(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } x_n > 0, \\ 0, & \text{եթե } x_n = 0, \\ -1, & \text{եթե } x_n < 0 \end{cases}$$

ֆունկցիայի համար հարթության բոլոր կետերում լոկալ բավարարվում է միջին արժեքի հատկությունը, բայց այն հարմոնիկ չէ, որովհետև նույնիսկ անընդհատ չէ:

Հաջորդ թեորեմում անընդհատությունը փոխարինվում է ավելի թույլ պայմանով՝ լոկալ ինտեգրելիությունով, բայց, մյուս կողմից, պահանջվում է, որ միջին արժեքի հատկության ծավալային փարբերակը բավարարվի կամայական շառավղով գնդի համար (այլ ոչ միայն լոկալ):

Թեորեմ 1.17: *Եթե Ω-ում լոկալ ինտեգրելի u ֆունկցիան կամայական $\overline{B}(a,R) \subset \Omega$ գնդի համար բավարարում է*

$$u(a) = \frac{1}{V(B(a,r))} \int\limits_{B(a,r)} u\, dV$$

պայմանին, ապա u-ն հարմոնիկ է:

Ապացույց: Հիշեցնենք, որ ֆունկցիան կոչվում է Ω-ում լոկալ ինտեգրելի, եթե այն ինտեգրելի է Լեբեգի իմաստով Ω-ի յուրաքանչյուր կոմպակտ ենթաբազմության վրա: Ըստ դիտողություն 1.5-ի, բավական է ցույց տալ, որ u-ն անընդհատ է Ω-ում:

Ֆիքսենք $a \in \Omega$ կետը և դիցուք $a_j \in \Omega$ հաջորդականությունը զուգամիտում է a-ին: Դիցուք K-ն Ω-ի կոմպակտ ենթաբազմություն է, որի համար a-ն ներքին կետ է: Այդ դեպքում գոյություն ունի $r > 0$ այնպիսին, որ $B(a_j, r) \subset K$ սկսած ինչ-որ j համարից: E բազմության բնութագրիչ ֆունկցիան նշանակենք χ_E: Ունենք՝

$$u(a_j) = \frac{1}{V(B(a,r))} \int\limits_{B(a_j,r)} u\, dV =$$

$$= \frac{1}{V(B(a,r))} \int\limits_K u\chi_{B(a_j,r)}\, dV \to$$
$$\to \frac{1}{V(B(a,r))} \int\limits_K u\chi_{B(a,r)}\, dV = u(a) :$$

Սահմանային անցումը ինտեգրալի նշանի տակ օրինական է համաձայն Լեբեգի հայտնի թեորեմի, որովհետև u-ն ինտեգրելի է K-ում և $\left|u\chi_{B(a_j,r)}\right| \leqslant |u|$: Այսպիսով՝ u-ն անընդհատ է Ω-ում: $\square$

Խնդիր 1.14: Դիցուք u-ն անընդհատ է Ω-ում և յուրաքանչյուր $x \in \Omega$ կետի համար գոյություն ունի $r_j \to 0$ դրական թվերի այնպիսի հաջորդականություն, որ

$$u(x) = \frac{1}{V(B(x,r_j))} \int\limits_{B(x,r_j)} u\, dV$$

բոլոր j-երի համար: Ապացուցել, որ u-ն հարմոնիկ է Ω-ում:

§ 8. Սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիաներ

Լիուվիլի թեորեմը: Ինչպես հայտնի է կոմպլեքս անալիզից, Լիուվի-լի թեորեմը պնդում է, որ $\mathbb{C}^n$-ում սահմանափակ հոլոմորֆ ֆունկցիան հաստատուն է: Նման արդյունք ճշմարիտ է նաև $\mathbb{R}^n$-ում հարմոնիկ ֆունկցիաների համար:

Թեորեմ 1.18 (Լիուվիլի թեորեմը)**:** *$\mathbb{R}^n$-ում սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիան հաստատուն է:*

Ապացույց: Դիցուք $\mathbb{R}^n$-ում u հարմոնիկ ֆունկցիան սահմանափակ է M-ով, $x \in \mathbb{R}^n$ կամայական կետը և $r > 0$ թիվը ֆիքսած են: Ըստ միջին արժեքի թեորեմի (ծավալային տարբերակ, թեորեմ 1.3)՝

$$|u(x) - u(0)| = \frac{1}{V\big(B(0,r)\big)} \left| \int\limits_{B(x,r)} u\, dV - \int\limits_{B(0,r)} u\, dV \right| \leqslant$$

$$\leqslant M\,\frac{V(\mathcal{D}_r)}{V\big(B(0,r)\big)}, \tag{1.20}$$

որտեղ $\mathcal{D}_r$-ը նշանակում է $B(x,r)$-ի և $B(0,r)$-ի սիմետրիկ տարբերությունը, այսինքն՝

$$\mathcal{D}_r = [B(x,r)\bigcup B(0,r)] \setminus [B(x,r)\bigcap B(0,r)]:$$

(1.20)-ի աջ մասը ձգտում է 0-ի, երբ $r \to \infty$ (տես խնդիր 1.15): Այսպիսով $u(x) = u(0)$, ուրեմն՝ u-ն հաստատուն է: □

Խնդիր 1.15: Ապացուցել, որ Լիուվիլի թեորեմում $\dfrac{V(\mathcal{D}_r)}{V\big(B(0,r)\big)}$ արտահայտությունը ձգտում է 0-ի, երբ $r \to \infty$:

Կիրառելով Լիուվիլի թեորեմը՝ հեշտությամբ կարելի է ստանալ բաց կիսատարածությունում սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիաների միակության թեորեմը: $H = H_n$ բաց վերին կիսատարածությունը հետևյալ բազմությունն է՝

$$H = \big\{x \in \mathbb{R}^n:\ x_n > 0\big\}:$$

Հարմար է $\mathbb{R}^n$-ի կետը ներկայացնել (x,y) տեսքով, որտեղ $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ և $y \in \mathbb{R}$: Հաջորդ պնդումը ցույց է տալիս, որ $\overline{H}$-ում անընդհատ և H-ում սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիան որոշվում է իր եզրային արժեքներով:

Հետևանք 1.2: *Դիցուք u-ն $\overline{H}$-ում անընդհատ սահմանափակ ֆունկցիա է, որը հարմոնիկ է H-ում: Եթե ∂H-ի վրա $u = 0$, ապա $u \equiv 0$ ամբողջ $\overline{H}$-ում:*

Ապացույց: $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ և $y < 0$ կոորդինատներով (x,y) կետերում u-ին վերագրենք $u(x,y) = -u(x,-y)$ արժեքներ: Դրանով u-ն շարունակվում է որպես ամբողջ $\mathbb{R}^n$-ում որոշված անընդհատ և սահմանափակ ֆունկցիա: Ակնհայտ է, որ այն բավարարում է միջին արժեքի լոկալ հատկությանը, և ուրեմն, ըստ թեորեմ 1.16-ի հարմոնիկ է $\mathbb{R}^n$-ում: Համաձայն Լիուվիլի թեորեմի, $\mathbb{R}^n$-ում u-ն նույնաբար հաստատուն է: □

Օրինակ 1.10: $u(x, y) = y$ ֆունկցիան անընդհատ է $\overline{H}$-ում, հարմոնիկ է H-ում, զրո է ∂H-ի վրա, բայց նույնաբար հաստատուն չէ: Այս օրինակը վկայում է, որ հետևանք 1.2-ում u-ի սահմանափակ լինելու պայմանը կարևոր է:

Մեկուսացված եզակիություններ: Ինչպես հայտնի է, սահմանափակ հոլոմորֆ ֆունկցիայի մեկուսացված եզակիությունները վերացնելի են: Այժմ ցույց կտանք, որ նույնը ճիշտ է սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիայի համար:

Սահմանում 1.2: Եթե u-ն հարմոնիկ է $\Omega \setminus a$-ում, ապա a մեկուսացված եզակիությունը կոչվում է վերացնելի, եթե u-ն հարմոնիկորեն շարունակվում է ամբողջ Ω-ի վրա:

Թեորեմ 1.19: *Սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիայի մեկուսացված եզակիությունը վերացնելի է:*

Ապացույց: Բավական է ցույց տալ, որ եթե u-ն սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիա է $B \setminus \{0\}$-ում, ապա u-ն հարմոնիկորեն շարունակվում է ամբողջ B-ի վրա: Ընդհանրությունը չխախտելով, կարող ենք ենթադրել, որ u-ն իրականարժեք է: Պարզ է, որ հարմոնիկ շարունակության միակ հավակնորդը $P[u|_S]$ Պուասոնի ինտեգրալն է:

Նախ դիտարկենք $n > 2$ դեպքը: Տրված $\varepsilon > 0$ թվի համար վերցնենք $B \setminus \{0\}$-ում հարմոնիկ հետևյալ ֆունկցիան՝

$$v_\varepsilon(x) = u(x) - P[u|_S](x) + \varepsilon(|x|^{2-n} - 1) :$$

Թեորեմ 1.10-ից հետևում է, որ $v_\varepsilon(x) \to 0$, երբ $|x| \to 1$, իսկ u-ի սահմանափակությունից հետևում է, որ $v_\varepsilon(x) \to +\infty$, երբ $x \to 0$: Համաձայն թեորեմ 1.8-ի՝ (որում $\overline{\lim}$-ը փոխարինված է $\underline{\lim}$-ով) $B \setminus \{0\}$-ում $v_\varepsilon \geqslant 0$: Անցնելով սահմանի, երբ $\varepsilon \to 0$, եզրակացնում ենք, որ $B \setminus \{0\}$-ում $u - P[u|_S] \geqslant 0$: Փոխարինելով u-ն $(-u)$-ով, կստանանք՝ $u - P[u|_S] \leqslant 0$: Ուրեմն՝ $B \setminus \{0\}$-ում $u = P[u|_S]$: Այսպիսով՝ $P[u|_S]$-ը u-ի հարմոնիկ շարունակությունն է ամբողջ B-ի վրա:

Երբ $n = 2$, ապացույցը նույնն է, միայն թե $v_\varepsilon(x)$-ի մեջ $(|x|^{2-n} - 1)$ արտահայտության փոխարեն պետք է վերցնել $\ln 1/|x|$: $\square$

Կոշիի անհավասարությունները: Ինչպես հայտնի է կոմպլեքս անալիզից, $B(a,r) \subset \mathbb{C}$ շրջանում հոլոմորֆ և M-ով սահմանափակ f ֆունկցիայի համար ճիշտ են՝

$$|f^m(a)| \leqslant \frac{m!M}{r^m}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

Կոշիի անհավասարությունները: Նման անհավասարություններ ճիշտ են նաև գնդում հարմոնիկ ֆունկցիաների համար:

Թեորեմ 1.20: *Դիցուք α-ն մուլտիինդեքս է: Գոյություն ունի այնպիսի C_α հաստատուն, որ՝*

$$|D^\alpha u(a)| \leqslant \frac{C_\alpha M}{r^{|\alpha|}}$$

$B(a,r)$-ում հարմոնիկ, M-ով սահմանափակ կամայական u ֆունկցիայի համար:

Ապացույց: Կարող ենք ենթադրել, որ $a = 0$: Եթե u-ն հարմոնիկ է $\overline{B}$-ում և սահմանափակ է M-ով, ապա ըստ (1.19)-ի՝

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(0)| &= \left| \int\limits_S D^\alpha P(0,\zeta) u(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \right| \leqslant \\ &\leqslant M \int\limits_S |D^\alpha P(0,\zeta)|\, d\sigma(\zeta) = C_\alpha M, \end{aligned}$$

որտեղ $C_\alpha = \int_S |D^\alpha P(0,\zeta)|\, d\sigma(\zeta)$:

Եթե u-ն հարմոնիկ և սահմանափակ է M-ով $\overline{B}(0,r)$-ում , ապա, կիրառելով նույն դատողությունը u-ի r-ձգման նկատմամբ, կստանանք՝

$$|D^\alpha u(a)| \leqslant \frac{C_\alpha M}{r^{|\alpha|}} :$$

Փոխարինելով r-ը $(r-\varepsilon)$-ով և ձգտեցնելով ε-ը 0-ի, կստանանք նույն անհավասարությունը այն դեպքի համար, երբ u-ն հարմոնիկ է բաց $B(0,r)$ գնդում և սահմանափակ է M-ով: $\square$

Ստորև բերվող հետևանքը պնդում է, որ Ω տիրույթում սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիայի ածանցյալները չեն կարող շատ արագ աճել $\partial\Omega$ եզրի մոտ: $d(a,E)$-ով նշանակվում է a կետի հեռավորությունը E բազմությունից:

Հետևանք 1.3: *Դիցուք u-ն Ω-ում սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիա է և α-ն մուլտիինդեքս է: Գոյություն ունի այնպիսի C հաստատուն, որ բոլոր $a \in \Omega$ կետերի համար`*

$$|D^\alpha u(a)| \leqslant \frac{C}{d(a,\partial\Omega)^{|\alpha|}} :$$

Ապացույց: Կիրառենք Կոշիի անհավասարությունները յուրաքանչյուր $a \in \Omega$ կետի համար, վերցնելով $r = d(a,\partial\Omega)$: $\square$

Պարզվում է, որ Լիուվիլի թեորեմը մնում է ուժի մեջ, եթե ֆունկցիայի սահմանափակությունը պահանջենք միայն վերևից կամ ներքևից:

Թեորեմ 1.21 (Լիուվիլի թեորեմը դրական հարմոնիկ ֆունկցիաների համար)**:** $\mathbb{R}^n$*-ում դրական հարմոնիկ ֆունկցիան հաստատուն է:*

Ապացույց: Ապացույցի համար պետք է օգտագործել ավելի նուրբ գնահատականներ, քան սահմանափակ ֆունկցիաների դեպքում: Դիցուք u-ն $\mathbb{R}^n$-ում դրական հարմոնիկ ֆունկցիա է: Ֆիքսենք $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, և դիցուք $\mathcal{D}_r$-ը նշանակում է $B(x,r)$ և $B(0,r)$ գնդերի սիմետրիկ տարբերությունը: Ըստ միջին արժեքի 1.3 թեորեմի`

$$u(x) - u(0) = \frac{1}{V\big(B(0,r)\big)}\Bigg(\int\limits_{B(x,r)} u\,dV - \int\limits_{B(0,r)} u\,dV\Bigg) :$$

Քանի որ $B(x,r)\bigcap B(0,r)$ բազմությունով պարածված ինտեգրալները ոչնչանում են, ապա՝

$$\begin{aligned}|u(x)-u(0)| &\leqslant \frac{1}{V\big(B(0,r)\big)}\int\limits_{\mathcal{D}_r} u\,dV \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{V\big(B(0,r)\big)}\int\limits_{B(0,r+|x|)\setminus B(0,r-|x|)} u\,dV = \\ &= \frac{1}{V\big(B(0,r)\big)}\Bigg(\int\limits_{B(0,r+|x|)} u\,dV - \int\limits_{B(0,r-|x|)} u\,dV\Bigg) = \\ &= \frac{(r+|x|)^n - r-|x|)^n}{r^n}\,u(0) :\end{aligned}$$

Նշենք, որ առաջին անհավասարությունում օգտվել ենք u-ի դրական լինելուց:

Անցնելով սահմանի, երբ $r\to\infty$, ստանում ենք $u(x)=u(0)$, ինչը նշանակում է, որ u-ն հաստատուն է: □

Հետևանք 1.4: $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ *-ում դրական հարմոնիկ ֆունկցիան հաստատուն է:*

Ապացույց: Եթե u-ն $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$-ում դրական է և հարմոնիկ, ապա $z\mapsto u(e^z)$ ֆունկցիան դրական է և հարմոնիկ ամբողջ $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ հարթության վրա: Ըստ թեորեմ 1.21-ի՝ այդ ֆունկցիան, հետևաբար և u-ն, հաստատուն է: □

Օրինակ 1.11: Բարձր չափողականությունների դեպքում $(n>2)$ հետևանք 1.4-ը ճիշտ չէ. օրինակ, $|x|^{2-n}$ ֆունկցիան դրական է և հարմոնիկ $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$-ում:

§ 9. Կելվինի ձևափոխությունը

Կելվինի ձևափոխությունը հարմոնիկ ֆունկցիաների տեսությունում կատարում է նույն դերը, ինչ $f(z)\mapsto f(1/z)$ ձևափոխությունը՝ հո–

լոմորֆ ֆունկցիաների տեսությունում: Օրինակ՝ այն միավոր գնդում հարմոնիկ ֆունկցիան արտապատկերում է գնդից դուրս հարմոնիկ ֆունկցիայի:

$\mathbb{R}^n$ տարածության մեկ կետանոց կոմպակտիֆիկացիան նշանակենք՝ $\mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$:

Սահմանում 1.3: $x \mapsto x^*$ արտապատկերումը, որտեղ՝

$$x^* = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|^2}, & \text{երբ} \quad x \neq 0, \infty, \\ 0, & \text{երբ} \quad x = \infty, \\ \infty, & \text{երբ} \quad x = 0, \end{cases}$$

կոչվում է ($\mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$)-ի ինվերսիա միավոր սֆերայի նկատմամբ:

Նկատենք, որ եթե $x \notin \{0, \infty\}$, ապա x^*-ը ընկած է սկզբնակետով և x-ով անցնող ճառագայթի վրա, և $|x^*| = 1/|x|$:

Խնդիր 1.16: Ցույց տալ, որ՝

1. ինվերսիան անընդհատ է,

2. համընկնում է իր հակադարձի հետ,

3. S-ի վրա նույնական է,

4. ∞-ի շրջակայքը արտապատկերում է 0-ի շրջակայքի:

Տրված $E \subset \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ բազմության համար նշանակենք $E^* = \big\{x^* : x \in E\big\}$:

Խնդիր 1.17: Ապացուցել, որ ինվերսիան պահպանում է սֆերաների և հիպերհարթությունների ընտանիքը:
(Ցուցում՝ $E \subset \mathbb{R}^n$ բազմությունը սֆերա կամ հիպերհարթություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$E = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \ a|x|^2 + b \cdot x + c = 0\big\},$$

որտեղ $b \in \mathbb{R}^n$, իսկ a-ն և c-ն՝ $|b|^2 - 4ac > 0$ պայմանին բավարարող իրական թվեր են):

Դիցուք E-ն $\mathbb{R}^n$-ի կոմպակտ ենթաբազմություն է: Եթե u-ն հարմոնիկ է $(\mathbb{R}^n \setminus E)$-ում, ապա բնական է դիտարկել ∞-ը որպես u-ի մեկուսացված եզակիություն: Հարց է առաջանում, ո՞ր դեպքում կարելի է ասել, որ այդ եզակիությունը վերացնելի է: Երբ $n = 2$, այդ հարցի պատասխանը ակնհայտ է, որովհետև այդ դեպքում ինվերսիան պահպանում է ֆունկցիայի հարմոնիկությունը:

Խնդիր 1.18: Ապացուցել, որ եթե $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ և u-ն հարմոնիկ է Ω-ում, ապա $x \mapsto u(x^*)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է Ω^*-ում:
(Ցուցում՝ $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ տարածությունում ինվերսիան $z \mapsto 1/\bar{z}$ արտապատկերումն է):

Կասենք, որ $n = 2$ դեպքում u-ն հարմոնիկ է ∞-ում, եթե $x \mapsto u(x^*)$ ֆունկցիան 0-ում ունի վերացնելի եզակիություն:

Դժբախտաբար, $n > 2$ դեպքում ինվերսիան չի պահպանում ֆունկցիայի հարմոնիկությունը:

Խնդիր 1.19: Ցույց տալ, որ ինվերսիան չի պահպանում $u(x) = |x|^{2-n}$ ֆունկցիայի հարմոնիկությունը:

Այնուամենայնիվ, գոյություն ունի ինվերսիայի հետ կապված մի ձևափոխություն, որը պահպանում է ֆունկցիայի հարմոնիկությունը բոլոր $n \geqslant 2$ դեպքերում. այն կոչվում է *Կելվինի ձևափոխություն*:

Փորձենք կռահել, թե որն է այդ ձևափոխությունը: Դրա համար կիրառենք սիմետրիայի լեմման Պուասոնի կորիզի նկատմամբ: Հիշենք, որ $P(\cdot, \zeta)$ ֆունկցիան ֆիքսած $(\zeta \in S)$-ի համար հարմոնիկ է $\mathbb{R}^n \setminus \{\zeta\}$-ում: Համաձայն սիմետրիայի լեմմայի՝

$$|x - \zeta| = \big||x|^{-1}x - |x|\zeta\big|$$

հավասարությունը ճիշտ է բոլոր $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ կետերի համար: Կիրառելով այն $P(x, \zeta) = (1 - |x|^2)/|x - \zeta|^2$ ֆունկցիայի նկատմամբ,

կստանանք՝
$$P(x,\zeta) = -|x|^{2-n}P(x^*,\zeta) \tag{1.21}$$
բոլոր $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0,\zeta\}$ կետերի համար: Նկատենք, որ աջ մասը հարմոնիկ է x-ի նկատմամբ $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0,\zeta\}$ բազմության վրա: Նշանի ճշտությամբ այն Պուասոնի կորիզի որոնելիք ձևափոխությունն է:

Սահմանում 1.4: $E \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ բազմության վրա որոշված u ֆունկ– ցիայի համապատասխանության մեջ դնենք E^*-ի վրա որոշված՝
$$K[u](x) = |x|^{2-n}u(x^*)$$
ֆունկցիան: $K[u]$-ն կոչվում է u-ի *Կելվինի ձևափոխություն*: Նշենք, որ $n=2$ դեպքում $K[u](x) = u(x^*)$:

Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ $K\big[K[u]\big] = u$ վերը նշված բոլոր u-երի համար: Այլ կերպ ասած, Կելվինի ձևափոխությունը ինքն իր հակադարձն է:

K ձևափոխությունը նաև գծային է՝ E-ի վրա որոշված կամայական u, v ֆունկցիաների և b, c հաստատունների համար, E^*-ում $K[bu + cv] = bK[u] + cK[v]$:

Խնդիր 1.20: Դիցուք E-ն $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ բազմության կոմպակտ ենթա– բազմություն է, և (u_m)-ը E-ում որոշված ֆունկցիաների հաջորդակա– նություն է: Ցույց տալ, որ (u_m)-ը E-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $K[u_m]$-ը հավասարաչափ զուգամետ է E^*-ի վրա:

Անցնենք Կելվինի ձևափոխության ամենակարևոր հատկությանը:

Թեորեմ 1.22: *Եթե $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ապա u-ն հարմոնիկ է Ω-ում այն և միայն այն դեպքում, երբ $K[u]$-ն հարմոնիկ է Ω^*-ում:*

Ապացույց: Քանի որ Կելվինի ձևափոխությունը ինքն իր հակա– դարձն է, ապա բավական է միայն ցույց տալ, որ եթե u-ն հարմոնիկ է Ω-ում, ապա $K[u]$-ն հարմոնիկ է Ω^*-ում:

Նախ ապացույցը կապարենք $\Omega = \mathbb{R}^n$ մասնավոր դեպքում: Այս դեպքում u-ն B-ում հավասար է իր $u|_S$ եզրային արժեքների Պուասոնի ինտեգրալին: Ուրեմն, եթե $|x| > 1$, ապա

$$K[u](x) = \int\limits_S |x|^{2-n} P(x^*, \zeta) u(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = -\int\limits_S P(x, \zeta) u(\zeta)\, d\sigma(\zeta):$$

Երկրորդ հավասարությունը հետևում է (1.21)-ից: Ածանցելով վերջին ինտեգրալի նշանի տակ, համոզվում ենք, որ $K[u]$-ն հարմոնիկ է $\{x \in \in \mathbb{R}^n: \ |x| > 1\}$ բազմությունում: Հեշտ է տեսնել, որ իրական անալիտիկ արտապատկերումների կոմպոզիցիան ևս իրական անալիտիկ է (տես նաև խնդիր 2.1-ը): Ուրեմն՝ $\mathbb{R}^n$-ում u-ի իրական անալիտիկությունից հետևում է $K[u]$-ի իրական անալիտիկությունը $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ բազմությունում: Քանի որ $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ բազմությունում իրական անալիտիկ $\Delta K[u]$ ֆունկցիան զրո է դառնում $\{x \in \mathbb{R}^n: \ |x| > 1\}$ բազմությունում, ապա ըստ միակության թեորեմի՝ այն զրո է դառնում ամբողջ $\mathbb{R}^n \setminus \setminus \{0\}$-ում: Այսպիսով, $K[u]$-ն հարմոնիկ է $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ բազմությունում:

Անցնելով ընդհանուր դեպքին, ենթադրենք, թե u-ն հարմոնիկ է Ω-ում և $a \in \Omega$: Ըստ (2.5)-ի՝

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x - a),$$

որտեղ յուրաքանչյուր u_m հարմոնիկ բազմանդամ է: Քանի որ Կելվինի ձևափոխությունը գծային է և պահպանում է կոմպակտ բազմությունների վրա հավասարաչափ զուգամիտությունը, ապա a^*-ի շրջակայքում՝ $K[u] = \sum K[u_m]$, ընդ որում, վերջին շարքը նշված շրջակայքում հավասարաչափ է զուգամիտում: Ինչպես արդեն ցույց ենք տվել, յուրաքանչյուր m-ի համար $K[u_m]$-ը հարմոնիկ է $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ բազմությունում, ուրեմն, նաև Ω^*-ում: Այսպիսով՝ $K[u]$-ն հարմոնիկ է a^*-ի շրջակայքում, հետևաբար, նաև ամբողջ Ω^*-ում: $\square$

Գ Լ ՈՒ Խ II

ԻՐԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 10. Բազմակի աստիճանային շարքեր

Ինչպես տեսանք § 6-ում, հարմոնիկ ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է: Պարզվում է, որ տեղի ունի ավելի ուժեղ պնդում՝ այն իրական անալիտիկ է: Կոպիտ ասած, իրական անալիտիկ կոչվում է այն ֆունկցիան, որը յուրաքանչյուր կետի շրջակայքում վերլուծվում է աստիճանային շարքի ըստ $x_1, \ldots x_n$ կոորդինատների: Անցնենք ճշգրիտ սահմանումների:

Նախ ճշտենք, թե ինչպես ենք հասկանալու կոմպլեքս c_α թվերից կազմված $\sum c_\alpha$ բազմակի շարքի զուգամիտությունը, որտեղ գումարումը կատարվում է ըստ բոլոր α մուլտիինդեքսների (եթե նշված չէ α-ի փոփոխման բազմությունը, ապա ենթադրվում է, որ α-ն ընդունում է բոլոր հնարավոր արժեքները): Դժվարությունն այն է, որ մուլտիինդեքսների բազմությունը $n > 1$ դեպքում կարգավորված չէ:

Սահմանում 2.1: $\sum c_\alpha$ բազմակի շարքը կոչվում է բացարձակ զուգամետ, եթե՝

$$\sup \sum_{\alpha \in F} c_\alpha < \infty,$$

որտեղ supremum-ը վերցված է ըստ մուլտիինդեքսների բոլոր վերջավոր ենթաբազմությունների:

Եթե շարքը բացարձակ զուգամետ է, ապա մուլտիինդեքսների կամայական $\alpha(1), \alpha(2) \ldots$ կարգավորման դեպքում $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_{\alpha(j)}$ գումարը նույնն է, այնպես որ այն կնշանակենք պարզապես $\sum c_\alpha$: Մենք գործ կունենանք միայն բացարձակ զուգամետ բազմակի շարքերի հետ:

Բազմակի շարքերի տեսությունում ընդունված են հետևյալ նշանակումները՝

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

$$\alpha! = \alpha_1!\, \alpha_2! \cdots \alpha_n!,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n:$$

Սահմանում 2.2: f ֆունկցիան կոչվում է իրական անալիտիկ Ω-ում, եթե յուրաքանչյուր $a \in \Omega$ կետի համար գոյություն ունեն այնպիսի c_α կոմպլեքս թվեր, որ f-ը վերլուծվում է բացարձակ զուգամետ աստիճանային շարքի՝

$$f(x) = \sum c_\alpha (x-a)^\alpha$$

բոլոր x-երի համար a-ի շրջակայքից:

Ստորև բերված թեորեմը նվիրված է աստիճանային շարքի հիմնական հատկություններին, ընդ որում պարզության համար ենթադրում ենք, որ շարքի կենտրոնը՝ a-ն, հավասար է 0-ի: Հարմար է օգտվել հետևյալ նշանակումից՝

$$R(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ |x_j| < |y_j|, \ \ j = 1, 2, \ldots, n \right\} :$$

$R(y)$-ը՝ n-չափանի, 0 կենտրոնով և y գագաթով բաց զուգահեռանիստ է:

Թեորեմ 2.1: *Դիցուք $\{c_\alpha y^\alpha\}$ բազմությունը սահմանափակ է: Այդ դեպքում՝*

ա) *յուրաքանչյուր β մուլտիինդեքսի համար*

$$\sum_\alpha D^\beta \left(c_\alpha x^\alpha \right) \tag{2.1}$$

շարքը $R(y)$-ում զուգամիտում է բացարձակ, իսկ նրա կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա՝ նաև հավասարաչափ:

բ) *$f(x)=\sum c_\alpha x^\alpha$ ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է $R(y)$-ում, ավելին՝*

$$D^\beta f(x)=\sum_\alpha D^\beta\left(c_\alpha x^\alpha\right) \tag{2.2}$$

$R(y)$-ի բոլոր x-երի ու յուրաքանչյուր β մուլտիինդեքսի համար:

գ) *$c_\alpha=\dfrac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}$ բոլոր α-ների համար:*

Ապացույց: Ընթերցողին առաջարկում ենք ինքնուրույն ստուգել, որ $R\big((1,1,\ldots,1)\big)$ բազմանիստում

$$\sum_\alpha D^\beta\left(x^\alpha\right)=D^\beta\left[(1-x_1)^{-1}(1-x_2)^{-1}\cdots(1-x_n)^{-1}\right]: \tag{2.3}$$

Դիցուք $|c_\alpha y^\alpha|\leqslant M$ բոլոր α-ների համար: Եթե K-ն $R(y)$-ի կոմպակտ ենթաբազմություն է, ապա գոյություն ունի այնպիսի $t\in(0,1)$, որ $K\subset R(ty)$: Ուրեմն՝ բոլոր α-ների և $x\in K$ կետերի համար

$$|c_\alpha x^\alpha|\leqslant t^{|\alpha|}\,|c_\alpha y^\alpha|\leqslant Mt^{|\alpha|}:$$

(2.3)-ի մեջ տեղադրելով $\beta=0$ և $x_1=x_2=\cdots=x_n=t$, ստանում ենք $\sum t^{|\alpha|}=(1-t)^{-n}<\infty$, որտեղից հետևում է, որ $\sum c_\alpha x^\alpha$ շարքը K-ի վրա զուգամիտում է բացարձակ և հավասարաչափ: Կատարելով նմանատիպ դատողություններ (2.1) շարքի նկատմամբ՝ կավարտենք ա)-ի ապացույցը:

Դիցուք $f(x)=\sum c_\alpha x^\alpha$, $\forall x\in R(y)$: Քանի որ (2.1) շարքը բոլոր β-ների համար հավասարաչափ զուգամիտում է $R(y)$-ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա, ապա, ինչպես հայտնի է անալիզի դասընթացից, $f\in C^\infty\big(R(y)\big)$, և բացի դրանից, շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ածանցել և ստանալ (2.2) հավասարությունը:

(2.2)-ի մեջ տեղադրելով $x=0$՝ Թեյլորի գործակիցների համար կստանանք գ) կետի բանաձևերը: □

Հետևանք 2.1: *Իրական անալիտիկ ֆունկցիայի բոլոր ածանցյալները ևս իրական անալիտիկ են:*

Հետևանք 2.2: *Եթե $\sum a_\alpha x^\alpha = \sum b_\alpha x^\alpha$ բոլոր x-երի համար 0-ի շրջակայքում, ապա $a_\alpha = b_\alpha$ բոլոր α-ների համար:*

Թեորեմ (2.1)-ից կարող է պատկերություն ստեղծվել, թե աստիճանային շարքի բնական զուգամիտության տիրույթը զուգահեռանիստ է: Բերենք օրինակներ, որոնք վկայում են, որ այդ տիրույթը կարող է լինել զանազան բնույթի:

Օրինակ 2.1: $\sum_{k=0}^{\infty}(x_1x_2)^k$ շարքի բացարձակ զուգամիտության տիրույթն է՝

$$\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\ |x_1x_2|<1\right\}:$$

Օրինակ 2.2: Դիտարկենք

$$\sum\frac{(k_1+k_2)!}{k_1!\,k_2!}x_1^{k_1}x_2^{k_2}$$

շարքը: Այս շարքի բացարձակ զուգամիտության տիրույթը գտնելու համար կատարենք խմբավորում՝

$$\sum\frac{(k_1+k_2)!}{k_1!\,k_2!}\left|x_1\right|^{k_1}\left|x_2\right|^{k_2}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2=k}\frac{(k_1+k_2)!}{k_1!\,k_2!}\left|x_1\right|^{k_1}\left|x_2\right|^{k_2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(|x_1|+|x_2|\right)^k:$$

Վերջին շարքի զուգամիտության տիրույթն է՝

$$\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\ |x_1|+|x_2|<1\right\}:$$

Օրինակ 2.3: Նման ձևով համոզվում ենք, որ

$$\sum\frac{(k_1+k_2)!}{k_1!\,k_2!}x_1^{2k_1}x_2^{2k_2}$$

շարքի զուգամիտության տիրույթը միավոր շրջանն է:

Հաջորդ թեորեմը նվիրված է իրական անալիտիկ ֆունկցիաների միակությանը, այն ճշմարիտ չէ C^∞ դասի ֆունկցիաների համար:

Թեորեմ 2.2: *Դիցուք Ω-ն կապակցված է, f-ն իրական անալիտիկ է Ω-ում և $f = 0$ Ω-ի ոչ դատարկ բաց ենթաբազմության վրա: Այդ դեպքում $f \equiv 0$ Ω-ում:*

Ապացույց: Դիցուք ω-ն $\{x \in \Omega: \ f(x) = 0\}$ բազմության ներքին կետերի բազմությունն է: ω-ն Ω-ի ոչ դատարկ բաց ենթաբազմություն է: f-ի բոլոր ածանցյալները ω-ում հավասար են 0-ի: Եթե a-ն $(a \in \Omega)$ ω-ի համար կուտակման կետ է, ապա անընդհատության շնորհիվ $D^\alpha f(a) = 0$ բոլոր α-ների համար: Ուրեմն, a-ի շրջակայքում f-ի վերլուծումը աստիճանային շարքի նույնաբար 0 է, այսինքն՝ $a \in \omega$: Ստացվեց, որ ω-ն Ω-ում նաև փակ է: Ω-ի կապակցվածությունից հետևում է, որ $\omega = \Omega$, այսինքն Ω-ում $f \equiv 0$: □

Խնդիր 2.1: Կասենք՝ $u: \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ արտապատկերումը իրական անալիտիկ է, եթե իրական անալիտիկ է u-ի յուրաքանչյուր կոմպոնենտը: Ապացուցել, որ իրական անալիտիկ արտապատկերումների կոմպոզիցիան ևս իրական անալիտիկ է: (Այսպիսով՝ իրական անալիտիկ ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը, քանորդը և այլն, իրական անալիտիկ են):

§ 11. Համասեռ վերլուծություններ

Թեորեմ 2.3: *Եթե u-ն հարմոնիկ է Ω-ում, ապա այն իրական անալիտիկ է Ω-ում:*

Ապացույց: Բավական է ցույց տալ, որ եթե u-ն հարմոնիկ է $\overline{B}$-ում, ապա 0 կետի շրջակայքում այն ներկայացվում է զուգամետ աստիճանային շարքով: Ապացույցի եղանակը հետևյալն է. սկզբից ստանում ենք Պուասոնի կորիզի վերլուծությունն աստիճանային շարքի, այնուհետև՝ Պուասոնի ինտեգրալի համապատասխան վերլուծությունը:

Դիցուք $|x| < \sqrt{2} - 1$ և $\zeta \in S$: Այդ դեպքում $0 < |x - \zeta|^2 < 2$ և ուրեմն՝

$$P(x,\zeta) = \left(1 - |x|^2\right)\left(|x-\zeta|^2\right)^{-n/2} =$$
$$= \left(1 - |x|^2\right)\sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(|x|^2 - 2x\cdot\zeta\right)^m,$$

որտեղ $\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m\,(t-1)^m$ շարքը $t^{-n/2}$ ֆունկցիայի Թեյլորի վերլուծությունն է 1 կետի շրջակայքում, որը, ինչպես հայտնի է մաթ. անալիզի դասընթացից, զուգամիտում է $(0,2)$ միջակայքում: $\left(|x|^2 - 2x\cdot\zeta\right)^m$-ի փակագծերը բացելուց և վերախմբավորելուց հետո կստանանք՝

$$P(x,\zeta) = \sum_{\alpha} x^{\alpha} q_{\alpha}(\zeta),$$

որտեղ q_α-ները բազմանդամներ են: Նշված գործողությունները օրինական են բացարձակ զուգամիտության շնորհիվ: Վերջին շարքը ֆիքսած $x \in (\sqrt{2}-1)B$ կետի համար S-ի վրա զուգամիտում է հավասարաչափ, այնպես որ, եթե u-ն հարմոնիկ է $\overline{B}$-ում, ապա՝

$$u(x) = \int_S P(x,\zeta)u(\zeta)\,d\sigma(\zeta) =$$
$$= \sum_{\alpha}\Big(\int_S u(\zeta)q_{\alpha}(\zeta)\,d\sigma(\zeta)\Big)x^{\alpha}, \quad \forall x \in (\sqrt{2}-1)B:$$

Մենք ստացանք պահանջվելիք վերլուծությունը: □

Ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, որ գնդում հարմոնիկ ֆունկցիայի վերլուծությունն աստիճանային շարքի կարող է լինել այնպիսին, որ այդ շարքը զուգամիտի ոչ ամբողջ գնդում:

Օրինակ 2.4: $u(z) = u(x+iy) = 1/(1-z)$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է (հետևաբար, նաև հարմոնիկ է) հարթության միավոր շրջանում: Ուրեմն՝

$$u(x+iy) = \sum_{m=0}^{\infty}(x+iy)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j(iy)^{m-j},$$

որտեղ $|x+iy|<1$: Որպես կրկնակի աստիճանային շարք այն չի զուգամիտում ամբողջ միավոր շրջանում: Իրոք՝

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}|x|^j|iy|^{m-j}=\sum_{m=0}^{\infty}(|x|+|y|)^m\,,$$

իսկ վերջինի զուգամիտության տիրույթը

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x|+|y|<1\}$$

բազմությունն է, որը կազմում է միավոր շրջանի միայն մի մասը:

Հարմոնիկ ֆունկցիայի իրական անալիտիկ լինելը թույլ է տալիս ապացուցել մաքսիմումի լոկալ սկզբունքը:

Թեորեմ 2.4 (Մաքսիմումի սկզբունքի լոկալ տարբերակը)**:** *Դիցուք Ω-ն կապակցված է, իսկ u-ն իրականարժեք հարմոնիկ ֆունկցիա է Ω-ում: Եթե u-ն Ω-ում ունի լոկալ մաքսիմում կամ մինիմում, ապա այն նույնաբար հաստատուն է:*

Ապացույց: Եթե u-ն ունի լոկալ մաքսիմում $a\in\Omega$ կետում, ապա գոյություն ունի $B(a,r)\subset\Omega$ գունդ այնպիսին, որ $u(x)\leqslant u(a)$, երբ $x\in B(a,r)$: Ըստ թեորեմ 1.6-ի, B-ում $u\equiv u(a)$: Քանի որ u-ն իրական անալիտիկ է Ω-ում, ապա ըստ թեորեմ 2.2-ի, $u\equiv u(a)$ Ω-ում:

Փոխարինելով u-ն $(-u)$-ով, կստանանք լոկալ մինիմումի դեպքը: □

Մեր մոտակա նպատակն է՝ ստանալ հարմոնիկ ֆունկցիաների վերլուծումը ըստ համասեռ բազմանդամների: Բազմանդամի սահմանման համաձայն, այն վերջավոր թվով x^α մոնոմների (միանդամների) գումար է:

Սահմանում 2.3: Դիցուք m-ը ոչ բացասական ամբողջ թիվ է:

$$p(x)=\sum_{|\alpha|=m}c_\alpha x^\alpha$$

պեսքի բազմանդամը կոչվում է m-րդ աստիճանի համասեռ բազմանդամ: Այս սահմանումը համարժեք է հետևյալին՝ կամայական t-ի ($t \in \mathbb{R}$) և x-ի ($x \in \mathbb{R}^n$) համար $p(tx) = t^m p(x)$:

Խնդիր 2.2: Ապացուցել, որ p բազմանդամը m-րդ աստիճանի համասեռ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\nabla p \cdot x = mp$:

Խնդիր 2.3: Դիցուք p-ն m-րդ աստիճանի համասեռ բազմանդամ է: Ցույց տալ, որ կամայական $T: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ գծային արտապատկերման համար $(p \circ T)$-ն նույնպես m-րդ աստիճանի համասեռ բազմանդամ է:

Խնդիր 2.4: Ապացուցել, որ եթե p-ն ու q-ն m-րդ աստիճանի համասեռ բազմանդամներ են ու S-ում համընկնում են, ապա $p = q$ ամբողջ $\mathbb{R}^n$-ում: Դա նշանակում է, որ համասեռ բազմանդամը լիովին որոշվում է S-ում ընդունած արժեքներով:

Բերված հատկությունը կարող է ճիշտ չլինել կամայական բազմանդամների համար:

Օրինակ 2.5: $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ բազմանդամը S-ի վրա, բայց ոչ ամենուրեք $\mathbb{R}^n$-ում, համընկնում է նույնաբար 1-ի հետ:

Հաջորդ պնդումը վերաբերվում է համասեռ բազմանդամներից բաղկացած շարքերի միակությանը:

Պնդում 2.1: *Դիցուք $r > 0$, p_m-ը և q_m-ը m-րդ աստիճանի համասեռ բազմանդամներ են: Եթե*

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(x)$$

բոլոր $x \in rB$ կետերի համար, ապա $p_m \equiv q_m$, $m = 0, 1 \ldots$:

Ապացույց: Ֆիքսենք $\zeta \in S$: Քանի որ բերված երկու շարքերն էլ զուգամիտում են և իրար հավասար են $\forall x \in rB$ կետում, ապա՝

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(\zeta) t^m = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(\zeta) t^m$$

բոլոր t-երի ($t \in (-r, r)$) համար: Ըստ մեկ փոփոխականի աստիճա– նային շարքերի միակության թեորեմի՝ $p_m(\zeta) = q_m(\zeta)$ բոլոր m-երի համար: Հեշտ է տեսնել, որ $p = q$ ամբողջ $\mathbb{R}^n$-ում (տես նաև խնդիր 2.4-ը): □

Դիցուք u-ն հարմոնիկ է 0-ի շրջակայքում: Նշանակելով

$$p_m(x) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha u(0)}{\alpha!} x^\alpha,$$

համաձայն թեորեմ 2.3-ի, եզրակացնում ենք, որ

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x) \tag{2.4}$$

բոլոր x-երի համար 0-ի ինչ-որ շրջակայքից: Նկատի ունենալով, որ յուրաքանչյուր p_m m-րդ աստիճանի համասեռ բազմանդամ է, (2.4)-ը անվանում են u-ի *համասեռ վերլուծություն* 0 կետում: Այստեղ հե– տաքրքիրն այն է, որ u-ի հարմոնիկությունից հետևում է յուրաքանչյուր p_m բազմանդամի հարմոնիկությունը: Դրանում համոզվելու համար նկատենք, որ $\Delta u = \sum \Delta p_m \equiv 0$ 0 կետի շրջակայքում, որտեղ $m \geqslant 2$ դեպքում յուրաքանչյուր Δp_m $(m-2)$ աստիճանի համասեռ բազման– դամ է, իսկ $m < 2$ դեպքում՝ նույնաբար 0: Ըստ պնդում 2.1-ի, Δp_m-ը նույնաբար 0 է բոլոր m-երի համար: Այսպիսով, 0 կետի շրջակայքում u-ն ներկայացվում է համասեռ հարմոնիկ բազմանդամների զուգամետ շարքով:

Կատարելով տեղաշարժ, նման արդյունք ենք ստանում նաև u-ի որոշման տիրույթի կամայական կետի շրջակայքում:

Թեորեմ 2.5: *Դիցուք u-ն հարմոնիկ է Ω-ում և $a \in \Omega$: Այդ դեպքում գոյություն ունեն m-րդ աստիճանի հարմոնիկ համասեռ այնպիսի p_m բազմանդամներ, որ՝*

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x-a) \tag{2.5}$$

բոլոր x-երի համար a-ի շրջակայքում, ընդ որում այդ շրջակայքում շարքը զուգամիտում է բացարձակ ու հավասարաչափ:

Համասեռ վերլուծությունների վարքն ավելի «լավն է», քան բազմակի աստիճանային շարքերի վարքը: Հետագայում կտեսնենք, որ եթե u-ն հարմոնիկ է $B(a,r)$ գնդում, ապա (2.5) շարքը զուգամիտում է ամբողջ գնդում (համեմատիր օրինակ 2.4-ի հետ):

Համասեռ վերլուծությունները հոլոմորֆ աստիճանային շարքերի անալոգն են տարածության կամայական չափողականության դեպքում: Երբ $n = 2$ և u-ն հոլոմորֆ է $B(a,r)$ շրջանում, ապա u-ի վերլուծությունն աստիճանային շարքի՝ ըստ $(z-a)$-ի աստիճանների՝ համընկնում է նրա վերլուծության հետ՝ ըստ համասեռ բազմանդամների:

§ 12. Հոլոմորֆ ֆունկցիաներ

Սահմանում 2.4: $\mathbb{C}^n$-ով նշանակվում է n-չափանի կոմպլեքս տարածությունը, այսինքն, կոմպլեքս թվերի կարգավորված n-յակների՝ $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ բազմությունը: $\mathbb{C}^n$-ը կարելի է նույնացնել $\mathbb{R}^{2n}$-ի հետ, որը բաղկացած է $x = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ կետերից և որի վրա ներմուծված է կոմպլեքս կառուցվածք՝ $z_k = x_k + iy_k, \quad k = 1, \ldots, n$: (Մանրամասները տես [4]-ում):

Սահմանում 2.5: Կոմպլեքսարժեք f ֆունկցիան կոչվում է *հոլոմորֆ* կամ *անալիտիկ* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում, եթե ճիշտ են հետևյալ պայմանները.

(ա) f-ն անընդհատ է Ω-ում,

(բ) f-ը հոլոմորֆ է ըստ ամեն մի փոփոխականի:

Ավելի ճշգրիտ (բ) պայմանը նշանակում է հետևյալը՝ եթե $z \in \Omega$ և $1 \leqslant k \leqslant n$, ապա

$$f_k(\zeta) = f(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k + \zeta, z_{k+1}, \ldots, z_n)$$

մեկ փոփոխականի ֆունկցիան հոլոմորֆ է ըստ ζ-ի $\mathbb{C}$ հարթության զրո կետի որևէ շրջակայքում: Հետաքրքիր է այն հանգամանքը, որ (բ) պայմանից հետևում է (ա)-ն:

Թեորեմ 2.6 (Հարտոգս)**:** *Եթե f ֆունկցիան հոլոմորֆ է ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթի բոլոր կետերում, ապա այն հոլոմորֆ է D-ում:*

Այս թեորեմի ապացույցը մենք չենք բերի այն պատճառով, որ մինչև հիմա չկա համեմատաբար մատչելի ապացույց: Նկատենք, որ Հարտոգսի թեորեմի նմանակը իրական փոփոխականների համար ճիշտ չէ:

Օրինակ 2.6: Հետևյալ ֆունկցիան

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{երբ } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{երբ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

անվերջ դիֆերենցելի է ըստ x-ի՝ ֆիքսած y-ի դեպքում և հակառակը, (ըստ y-ի ֆիքսած x-ի դեպքում): Բայց այն նույնիսկ անընդհատ չէ $(0,0)$ կետում, որովհետև $y = kx$ ուղղի վրա՝

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \frac{k}{1+k^2},$$

և այդ սահմանը կախված է k-ից:

Ֆորմալ ածանցյալներ: Հոլոմորֆության սահմանումից հետևում է, որ $f = u + iv$ ֆունկցիայի համար ըստ ամեն փոփոխականի բավարարվում են Կոշի–Ռիմանի պայմանները՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \dfrac{\partial v}{\partial y_k}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_k} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_k}, \qquad k = 1,\dots,n : \end{cases} \tag{2.6}$$

Կոշի–Ռիմանի պայմանները հարմար է գրել

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right): \end{aligned} \tag{2.7}$$

ֆորմալ ածանցյալների միջոցով, որոնք շատ հարցերում օգտակար են: Այդ դեպքում (2.6) $2n$ իրական հավասարումների համակարգը գրվում է որպես n կոմպլեքս հավասարումների համակարգ՝

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n:$$

(2.7)-ում մասնակցող մեծությունները անվանում են ֆորմալ ածանցյալներ նաև այն պատճառով, որ դրանք կարելի է ստանալ ֆորմալ կիրառելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը՝

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial z_k} + \frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right),$$

և նույն ձևով

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \bar{z}_k} + \frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right),$$

$k = 1, \ldots, n$: Քանի որ ֆորմալ ածանցյալներն արտահայտվում են սովորական ածանցյալների միջոցով գծորեն, նրանց համար ածանցման բոլոր կանոնները մնում են ճշմարիտ (ուժի մեջ):

§ 13. Պլյուրիհարմոնիկ և n-հարմոնիկ ֆունկցիաներ

Սահմանում 2.6: Ω-ում որոշված u ֆունկցիան կոչվում է *պլյուրի-հարմոնիկ*, եթե այն պատկանում է $C^2(\Omega)$ դասին և բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\, \partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k\, \partial y_j} = 0,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\, \partial y_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial y_k} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

որտեղ $k, j = 1, \ldots, n$: Երկրորդ խմբի հավասարումները $k = j$ դեպ–քում, իհարկե, ակնհայտ են:

Եթե (2.8) պայմանները պահանջենք միայն $k = j$ դեպքում, ապա կստանանք

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n \tag{2.9}
$$

հավասարումներին բավարարող ֆունկցիաների ավելի լայն դաս:

Սահմանում 2.7: Եթե Ω-ում որոշված u-ն բավարարում է (2.9) հա–վասարումներին, ապա այն կոչվում է n-*հարմոնիկ* ($n = 2$ դեպքում՝ *երկհարմոնիկ*) ֆունկցիա: Այդ պայմանները նշանակում են, որ u-ն հարմոնիկ է ըստ (x_k, y_k) փոփոխականների ամեն մի զույգի:

Գումարելով (2.9) հավասարումներն ըստ k-ի, կստանանք՝

$$
\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} \right) = 0,
$$

այսինքն՝ u-ի հարմոնիկության պայմանը: Այսպիսով՝ n-հարմոնիկ ֆունկցիաների դասը հարմոնիկ ֆունկցիաների դասի մի մասն է, իսկ պլյուրիհարմոնիկ ֆունկցիաների դասը՝ n-հարմոնիկների մի մասը:

Եթե օգտագործենք ֆորմալ ածանցյալները՝

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k} \right),\\
\frac{\partial}{\partial \bar z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k} \right),
\end{aligned}
$$

ապա, ինչպես հեշտ է ստուգել,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k\,\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}\right), \qquad k = 1, \ldots, n :$$

Հետևաբար՝ (2.8) և (2.9) հավասարումները կարելի է գրել ավելի կարճ պեսքով՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k\,\partial \bar{z}_j} = 0, \qquad k, j = 1, \ldots, n,$$

և, համապատասխանաբար՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k\,\partial \bar{z}_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n :$$

Օրինակ 2.7: $u(z_1, z_2) = z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2$ ֆունկցիան հարմոնիկ է, որովհետև

$$\frac{1}{4}\,\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} = 1 - 1 = 0,$$

բայց երկհարմոնիկ չէ, քանի որ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = 1 \neq 0 :$$

Օրինակ 2.8: $u(z_1, z_2) = z_1\bar{z}_2$ ֆունկցիան երկհարմոնիկ է, որովհետև

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} = 0,$$

բայց պլյուրիհարմոնիկ չէ, քանի որ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \bar{z}_2} = 1 \neq 0 :$$

Պլյուրիհարմոնիկ ֆունկցիաները կապված են մի քանի փոփոխականի հոլոմորֆ ֆունկցիաների հետ ճիշտ այնպես, ինչպես հարթության դեպքում հարմոնիկ ֆունկցիաները կապված են մեկ փոփոխականի հոլոմորֆ ֆունկցիաների հետ:

Թեորեմ 2.7: *$D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում հոլոմորֆ f ֆունկցիայի իրական և կեղծ մասերը պլյուրիհարմոնիկ են:*

Ապացույց: Ֆորմալ ածանցյալների (2.7) սահմանումից հետևում է, որ եթե f-ը հոլոմորֆ է, ապա՝

$$\frac{\partial \bar f}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right) = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z_k}\right)} = 0, \quad k = 1, \ldots, n : \tag{2.10}$$

Ըստ z_k-ի ածանցելով f ֆունկցիայի $u = \frac{1}{2}(f + \bar f)$ իրական մասը և հաշվի առնելով (2.10)-ը՝ կստանանք

$$\frac{\partial u}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_k} : \tag{2.11}$$

Ինչպես և մեկ փոփոխականի դեպքում, մի քանի փոփոխականի հոլոմորֆ ֆունկցիան ունի բոլոր կարգի ածանցյալները, որոնք իրենց հերթին հոլոմորֆ են: Օգտվելով այդ փաստից ու ևս մեկ անգամ ածանցելով (2.11)-ը ըստ $\bar z_j$-ի՝ կստանանք

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \, \partial \bar z_j} = 0, \quad k, j = 1, \ldots, n :$$

$u = \mathrm{Re}\, f$ իրական մասի համար թեորեմն ապացուցված է: Մնում է նկատել, որ f-ի հետ մեկտեղ հոլոմորֆ է նաև $(-if)$ ֆունկցիան և որ $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Re}\,(-if)$: □

Ճիշտ է նաև այս թեորեմի հակադարձը, բայց միայն լոկալ տարբերակով: Մենք այն կբերենք առանց ապացույցի:

Թեորեմ 2.8: *Եթե իրականարժեք u ֆունկցիան պլյուրիհարմոնիկ է $z^0 \in \mathbb{C}^n$ կետի շրջակայքում, ապա գոյություն ունի այդ կետում հոլոմորֆ f ֆունկցիա, որի համար u-ն իրական մասն է:*

§ 14. Դիրիխլեի խնդրի լուծումը պոլիդիսկում

Սահմանում 2.8: Շրջանների դեկարտյան արտադրյալը, այսինքն՝

$$U^n(a,r) = \big\{z \in \mathbb{C}^n:\ |z_j - a_j| < r_j,\ \ j = 1,\dots,n\big\}$$

փիրույթը կոչվում է $a \in \mathbb{C}^n$ կենտրոնով և $r = (r_1,\dots,r_n)$ բազմաշառավղով *պոլիդիսկ* ($n = 2$ դեպքում՝ *բիդիսկ*): $U^n(a,r)$-ը կոչվում է միավոր պոլիդիսկ, եթե $a_j = 0,\ r_j = 1,\ j = 1,\dots,n$: Այս պարագրաֆում մենք գործ կունենանք միայն միավոր պոլիդիսկի հետ, որը կնշանակենք պարզապես U^n-ով:

Պոլիդիսկի $\partial U^n(a,r)$ եզրը բնական ձևով տրոհվում է

$$\Gamma_k^n = \big\{z:\ |z_k - a_k| = r_k,\ \ |z_j - a_j| \leqslant r_j,\ \ j \neq k\big\}$$

բազմությունների, որոնցից յուրաքանչյուրը $(2n-1)$ չափանի է և $\partial U^n(a,r) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Gamma_k^n$: Այդ բազմությունների $T^n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \Gamma_k^n$ ընդհանուր մասը՝

$$T^n = \big\{z \in \mathbb{C}^n:\ |z_j - a_j| = r_j,\ \ j = 1,\dots,n\big\},$$

որի չափողականությունը n է, կոչվում է պոլիդիսկի *կմախք* (*остов*): $n > 1$ դեպքում կմախքը n-չափանի փոր է և կազմում է փիրույթի եզրի մի փոքր մասը, սակայն շատ հարցերում է այն կատարում էական դեր:

Պուասոնի կորիզը պոլիդիսկի համար: Դիցուք

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

Պուասոնի սովորական կորիզն է միավոր շրջանի համար: U^n միավոր պոլիդիսկի համար Պուասոնի կորիզը սահմանենք հետևյալ ձևով՝

$$P(z,\zeta) = P_{r_1}(\theta_1 - \varphi_1)\cdots P_{r_n}(\theta_n - \varphi_n),$$

որտեղ $z \in U^n$, $\zeta \in T^n$, $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, $\zeta_j = e^{i\varphi_j}$: Բացի դրանից, Լեբեգի նորմավորված չափը T^n միավոր փորի վրա նշանակենք m_n-ով: Այսինքն՝ $dm_n = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} d\varphi_1 \cdots d\varphi_n$:

Պուասոնի կորիզը վերլուծվում է

$$P(z,\zeta) = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_1^{|k_1|} \cdots r_n^{|k_n|} e^{ik\cdot(\theta-\varphi)} \tag{2.12}$$

շարքի, որտեղ $k\cdot\theta = k_1\theta_1 + \cdots + k_n\theta_n$: Եթե f-ն ինտեգրելի է ըստ m_n չափի, ապա նրա համար սահմանվում է $P[f]$ *Պուասոնի ինտեգրալ.*

$$P[f](z) = \int\limits_{T^n} f(\zeta)P(z,\zeta)\,dm_n(\zeta), \quad z \in U^n :$$

Ինչպես հայտնի է, պոլիդիսկը պատկանում է այն տիրույթների դասին, որոնց համար Դիրիխլեի խնդիրը լուծելի է[1]: Դա նշանակում է, որ ամեն մի f ֆունկցիա, որը անընդհատ է U^n-ի եզրի վրա, հնարավոր է անընդհատորեն շարունակել պոլիդիսկի փակման վրա այնպես, որ այն լինի U^n-ում հարմոնիկ: Եթե f-ը շարունակենք ոչ թե եզրից, այլ կմախքից, ապա անընդհատ շարունակությունը կարելի է կատարել n-հարմոնիկ ֆունկցիաների դասում: Այսինքն, ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2.9: *Դիցուք f-ը կամայական ֆունկցիա է, որն անընդհատ է T^n-ի վրա: Այդ դեպքում $u(z) = P[f](z)$ ֆունկցիան U^n-ում n-հարմոնիկ է, անընդհատ է U^n-ի փակման վրա և կմախքի վրա համընկնում է f-ի հետ:*

Ապացույց: (2.12) վերլուծությունը տեղադրելով Պուասոնի ինտեգրալի մեջ և անդամ առ անդամ ինտեգրելով՝ կստանանք

$$P[f](z) = \sum \widehat{f}(k) r_1^{|k_1|} \cdots r_n^{|k_n|} e^{ik\cdot\theta}, \tag{2.13}$$

[1] Տես, օրինակ, Axler Sh., Bourdon P., Ramey W. *Harmonic function theory*, Springer-Verlag, New York, Inc., 2001, էջ 228–230:

որտեղ $\widehat{f}(k)$ թվերը f-ի Ֆուրյեի գործակիցներն են՝

$$\widehat{f}(k) = \int\limits_{T^n} \bar{\zeta}^k \, dm_n(\zeta) :$$

(2.13) ներկայացումից անմիջապես հետևում է, որ $u(z)$-ը n-հարմոնիկ է:

Հիշեցնենք, որ կմախքի վրա որոշված $T(\zeta)$ ֆունկցիան կոչվում է եռանկյունաչափական բազմանդամ, եթե այն վերջավոր թվով $e^{ik\cdot\theta}$ էքսպոնենտների գծային կոմբինացիա է: Եռանկյունաչափական բազմանդամի դեպքում (2.13) վերլուծության մեջ մասնակցում են վերջավոր թվով անդամներ, ուստի թեորեմի պնդումը նրա համար ակնհայտ է: $n = 1$ դեպքում հայտնի է Ֆեյերի թեորեմը այն մասին, որ ամեն մի անընդհատ ֆունկցիա հավասարաչափ մոտարկվում է եռանկյունաչափական բազմանդամներով: Ըստ Ստոուն-Վայերշտրասի թեորեմի՝ այդ փաստը ճշմարիտ է նաև ընդհանուր դեպքում:

Դիցուք $T_m(\zeta)$ եռանկյունաչափական բազմանդամների հաջորդականությունը T^n-ի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է f-ին: Ինչպես հետևում է մաքսիմումի սկզբունքից, Պուասոնի ինտեգրալների $P[T_m]$ համապատասխան հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է ամբողջ $\overline{U}^n$-ի վրա, և քանի որ այդ սահմանը հավասար է $P[f]$, ապա $u = P[f]$ ֆունկցիան անընդհատ է $\overline{U}^n$-ում: □

Գ Լ ՈՒ Խ III

ՍՖԵՐԻԿ ՀԱՐՄՈՆԻԿՆԵՐ

§ 15. Սֆերիկ հարմոնիկի սահմանումը

Ֆուրյեի շարքերի տեսությունից հայտնի է, որ $n = 2$ դեպքում յուրաքանչյուր $f \in L^2(S)$ ֆունկցիա ներկայացվում է

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\theta}$$

տեսքով, որտեղ շարքը զուգամիտում է $L^2(S)$-ում: Պարզվում է, որ $n > 2$ դեպքում ևս գոյություն ունի այդպիսի վերլուծություն, ընդ որում $e^{im\theta}$ ֆունկցիաների դերը կատարում են այսպես կոչված սֆերիկ հարմոնիկները: Անցնենք սահմանումներին ու նշանակումներին:

Սահմանում 3.1: m-րդ աստիճանի համասեռ հարմոնիկ բազմանդամի հետքը S-ի վրա կոչվում է m-րդ աստիճանի *սֆերիկ հարմոնիկ*:

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները՝

- $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$-ով նշանակվում է բոլոր m-րդ աստիճանի համասեռ հարմոնիկ բազմանդամների տարածությունը,
- $\mathcal{H}_m(S)$-ով նշանակվում է բոլոր m-րդ աստիճանի սֆերիկ հարմոնիկների տարածությունը:

Նկատենք, որ $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$-ը, ինչպես նաև $\mathcal{H}_m(S)$-ը, գծային տարածություններ են կոմպլեքս թվերի դաշտի վրա:

Օրինակ 3.1: $p(x,y,z) = 8x^5 - 40x^3y^2 + 15xy^4 - 40x^3z^2 + 30xy^2z^2 + 15xz^4$ բազմանդամը $\mathcal{H}_5(\mathbb{R}^3)$-ի տարր է: Այստեղ (x_1,x_2,x_3)-ի փոխարեն $\mathbb{R}^3$-ի կետը նշանակված է (x,y,z)-ով:

Օրինակ 3.2: $q(x,y,z) = 15x - 70x^3 + 63x^5$ բազմանդամը ոչ համասեռ է, ոչ հարմոնիկ, բայց սֆերիկ հարմոնիկ է: Դրանում համոզվելու համար նկատենք, որ S-ի վրա

$$q(x,y,z) = 15x(x^2+y^2+z^2)^2 - 70x^3(x^2+y^2+z^2) + 63x^5 :$$

Փակագծերը բացելով, տեսնում ենք, որ աջ մասը համընկնում է օրինակ 3.1-ի $p(x,y,z)$ բազմանդամի հետ, ուրեմն, այն պատկանում է $\mathcal{H}_5(S)$-ին:

Սֆերիկ հարմոնիկները ուսումնասիրելիս կարևոր դեր ունեն գծային օրթոգոնալ ձևափոխությունները: Հիշեցնենք, որ այդպիսի ձևափոխությունները $\mathbb{R}^n$-ում նշանակել ենք $O(n)$-ով:

Խնդիր 3.1: Ապացուցել, որ և $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$-ը, և $\mathcal{H}_m(S)$-ը $O(n)$-ինվարիանտ են:

Խնդիր 3.2: Ցույց տալ, որ կամայական $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^2)$ ունի հետևյալ տեսքը՝

$$p(z) = az^m + b\bar{z}^m,$$

որտեղ a-ն ու b-ն ինչ-որ կոմպլեքս հաստատուններ են:
(Ցուցում՝ սկզբից դիտարկել իրականարժեք p-ի դեպքը):

Խնդիր 3.2-ից հետևում է՝

Պնդում 3.1: *$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^2)$-ը $\{z^m, \bar{z}^m\}$ բազմության գծային թաղանթն է: Ուրեմն՝ $n = 2$ դեպքում $\mathcal{H}_m(S)$-ը $\{e^{im\theta}, e^{-im\theta}\}$ բազմության գծային թաղանթն է:*

Այս տեսակետից, միավոր շրջանագծի վրա ֆունկցիայի վերլուծումը Ֆուրյեի շարքի, նույնն է, ինչ վերլուծումը ըստ սֆերիկ հարմոնիկների:

§ 16. Վերլուծություն ըստ հարմոնիկների

Դիցուք H-ը հիլբերտյան կոմպլեքս տարածություն է:

Սահմանում 3.2: Կասենք՝ H տարածությունը H_m ենթատարածությունների ուղիղ գումար է և կգրենք $H = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m$, եթե

(ա) յուրաքանչյուր m-ի համար H_m-ը H-ի փակ ենթատարածություն է,

(բ) երբ $m \neq k$, H_m-ը օրթոգոնալ է H_k-ին,

(գ) յուրաքանչյուր $x \in H$ տարրի համար գոյություն ունեն այնպիսի $x_m \in H_m$, որ
$$x = x_1 + x_2 + \cdots , \tag{3.1}$$
որտեղ շարքը զուգամիտում է H-ի նորմով:

Խնդիր 3.3: Ապացուցել, որ եթե (ա) և (բ) պայմանները բավարարված են, ապա (գ)-ն կբավարարվի այն և միայն այն դեպքում, երբ $\bigcup_{m=0}^{\infty} H_m$ բազմության գծային թաղանթը ամենուրեք խիտ է H-ում:

Խնդիր 3.4: Ցույց տալ, որ (3.1) վերլուծությունը միակն է:

Այս պարագրաֆում մենք կապացուցենք, որ
$$L^2(S) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(S), \tag{3.2}$$
որտեղ $L^2(S)$-ը S-ի վրա քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիաների սովորական հիլբերտյան տարածությունն է, օժտված
$$\langle f, g\rangle = \int_S f\bar{g}\, d\sigma$$
սկալյար արտադրյալով:

Խնդիր 3.5: $n=2$ դեպքի համար ապացուցել (3.2)-ը:

(3.2)-ը ապացուցելու համար հերթով ստուգենք սահմանում 3.2-ի (ա)–(գ) պայմանները, ենթադրելով, որ $H = L^2(S)$, $H_m = \mathcal{H}_m(S)$ և n-ը կամայական է:

Քանի որ $\mathcal{H}_m(S)$ ենթատարածությունները վերջավոր չափանի են, (ա) պայմանը բավարարվում է:

Լեմմա 3.1: *Կամայական m-ի համար $\mathcal{H}_m(S)$-երը $L^2(S)$-ի փակ ենթատարածություններ են:*

Անցնենք (բ) պայմանին:

Լեմմա 3.2: *Եթե $m \neq k$, ապա $\mathcal{H}_m(S)$-ը օրթոգոնալ է $\mathcal{H}_k(S)$-ին $L^2(S)$ տարածության մեջ:*

Ապացույց: Դիցուք $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$, $q \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$: Գրինի (1.2) բանաձևի համաձայն՝

$$\int\limits_S \big(p\,D_{\mathbf{n}}q - q\,D_{\mathbf{n}}p\big)\,d\sigma = \int\limits_B \big(p\,\Delta q - q\,\Delta p\big)\,dV = 0\,: \tag{3.3}$$

Քանի որ $\zeta \in S$, ապա

$$D_{\mathbf{n}}p(\zeta) = \frac{d}{dr}p(r\zeta)\big|_{r=1} = \frac{d}{dr}\big(r^m p(\zeta)\big)\big|_{r=1} = mp(\zeta)\,:$$

Նմանապես՝ S-ի վրա $D_{\mathbf{n}}q = kq$, և (3.3)-ից ստանում ենք՝

$$(k-m)\int_S pq\,d\sigma = 0\,:$$

Հաշվի առնելով, որ $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$-ը յուրաքանչյուր ֆունկցիայի հետ պարունակում է նաև իր կոմպլեքս համալուծը, վերջին հավասարությունից ստանում ենք

$$\langle p, q\rangle = \int_S p\bar{q}\,d\sigma = 0\,:$$

$\square$

Վերը բերած (գ) պայմանը ստուգելն ավելի բարդ խնդիր է: Մեր մոտակա նպատակն է՝ ապացուցել, որ $\mathbb{R}^n$-ում որոշված կամայական բազմանդամի հետքը S-ի վրա՝ սֆերիկ հարմոնիկների գումար է: Մեզ պետք են հետևյալ նշանակումները՝

- բոլոր m-րդ աստիճանի համասեռ բազմանդամների փարածությունը նշանակենք $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$-ով,
- $\langle\, , \,\rangle_m$-ը նշանակում է $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$-ում որոշված սկալյար արտադրյալ, որը $p(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha$ և $q(x) = \sum_{|\alpha|=m} b_\alpha x^\alpha$ բազմանդամների համար սահմանվում է

$$\langle p, q\rangle_m = p(D)(\bar{q}),$$

բանաձևով, որտեղ $p(D)$-ն $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ դիֆերենցիալ օպերատորն է:

- $[t]$-ով, ինչպես միշտ, նշանակվում է t թվի ամբողջ մասը:

Խնդիր 3.6: Ապացուցել, որ

$$\langle p, q\rangle_m = \sum_{|\alpha|=m} \alpha!\, a_\alpha \bar{b}_\alpha \tag{3.4}$$

և օգտվելով սկալյար արտադրյալի այդ տեսքից, ստուգել, որ այն բավարարում է սկալյար արտադրյալից պահանջվող բոլոր պայմաններին:

Թեորեմ 3.1: *Յուրաքանչյուր $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ բազմանդամ միակ ձևով ներկայացվում է*

$$p(x) = p_m(x) + |x|^2 p_{m-2}(x) + \cdots + |x|^{2k} p_{m-2k}(x), \tag{3.5}$$

որտեղ $k = [\frac{m}{2}]$, իսկ $p_{m-2j} \in \mathcal{H}_{m-2j}(\mathbb{R}^n)$, $j = 0, 1, \ldots, k$:

Ապացույց: (3.5) վերլուծության միակությունը հետևում է այն փաստից, որ S-ի վրա համընկնող հարմոնիկ բազմանդամները համընկնում են ամենուրեք: Վերլուծությունը ճիշտ է, երբ $m = 0$ կամ $m = 1$, որովհետև այդ դեպքերում $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$: Ցույց տանք, որ եթե $m \geqslant 2$, ապա

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \bigoplus |x|^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n) \tag{3.6}$$

$\langle\, ,\, \rangle_m$ սկալյար արտադրյալի նկատմամբ: Այստեղ $|x|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n) = \big\{|x|^2 q(x) \colon\; q(x) \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)\big\}$:

Դիցուք $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ բազմանդամը օրթոգոնալ է $|x|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$-ին, այսինքն՝ բոլոր q-երի համար $|x|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$-ից ունենք՝

$$0 = \langle |x^2| q, p\rangle_m = q(D)(\Delta\overline{p}) = q(D)(\overline{\Delta p}) :$$

Քանի որ $\Delta p \in |x|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$, ապա աջ մասը հավասար է $\langle q, \Delta p\rangle_{m-2}$, ինչից հետևում է, որ Δp-ն օրթոգոնալ է յուրաքանչյուր $q \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ տարրին: Ուրեմն $\Delta p \equiv 0$, այսինք՝ $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$, ինչը և պահանջվում էր: Կատարելով նախորդ դատողությունները հակառակ ուղղությամբ, կստանանք, որ յուրաքանչյուր $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ բազմանդամ օրթոգոնալ է $|x|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$-ին:

Ապացույցն ավարտելու համար դիմենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդին: Վերցնենք $m \geqslant 2$ և ենթադրենք, թե թեորեմ 3.1-ը ճշմարիտ է բոլոր բազմանդամների համար $\mathcal{P}_j(\mathbb{R}^n)$-ից, երբ $j < m$: Դիցուք $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$: Ըստ (3.6)-ի, $p(x) = p_m(x) + |x|^2 q_{m-2}(x)$, որտեղ $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$, իսկ $q_{m-2} \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$: Կիրառելով ինդուկտիվ ենթատարածությունը (q_{m-2})-ի նկատմամբ և այսպես շարունակելով, կստանանք (3.5)-ը: □

Հետևանք 3.1: *Դիցուք p-ն m աստիճանի բազմանդամ է $\mathbb{R}^n$-ում: Այդ դեպքում նրա հետքը S-ի վրա՝ m-ից ոչ ավելի աստիճանի աֆերիկ հարմոնիկների գումար է:*

Ապացույց: Յուրաքանչյուր բազմանդամ համասեռ բազմանդամների գումար է, իսկ թեորեմ 3.1-ի համաձայն, համասեռ բազմանդամի հետքը S-ի վրա սֆերիկ հարմոնիկների գումար է, որոնց աստիճանները չեն գերազանցում m-ը: □

Այժմ մենք արդեն ի վիճակի ենք ապացուցելու այս պարագրաֆի հիմնական պնդումը:

Թեորեմ 3.2: $L^2(S) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(S)$*:*

Ապացույց: Մեզ մնացել է ապացուցել վերը նշված (գ) պայմանը, իսկ դրա համար բավական է ցույց տալ, որ $\bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(S)$ բազմության գծային թաղանթը ամենուրեք խիտ է $L^2(S)$-ում (տես խնդիր 3.3-ը): Ըստ Ստոուն-Վայերշտրասի թեորեմի, supremum նորմով բազմանդամներն ամենուրեք խիտ են $C(S)$-ում: Հաշվի առնելով հետևանք 3.1-ը, եզրակացնում ենք, որ սֆերիկ հարմոնիկները ևս ամենուրեք խիտ են $C(S)$-ում: Քանի որ $C(S)$-ն էլ խիտ է $L^2(S)$-ում և L^2-նորմը չի գերազանցում L^∞-նորմը, սպացվում է, որ սֆերիկ հարմոնիկների վերջավոր գումարները խիտ են $L^2(S)$-ում: Այլ կերպ ասած՝ $\bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(S)$ բազմության գծային թաղանթը ամենուրեք խիտ է $L^2(S)$-ում, ինչը և պահանջվում էր: □

§ 17. Զոնալ հարմոնիկներ

Դիտարկենք $\mathcal{H}_m(S)$-ը որպես $L^2(S)$-ի ենթապարածություն, որում սկալյար արտադրյալը նշանակելու ենք $\langle\ ,\ \rangle$ սիմվոլով:

Ֆիքսենք $\eta \in S$ կետը և դիտարկենք $\Lambda\colon\ \mathcal{H}_m(S) \mapsto \mathbb{C}$ արտապատկերումը, որը որոշվում է

$$\Lambda(p) = p(\eta)$$

հավասարությամբ: Այն գծային ֆունկցիոնալ է: Համաձայն $\mathcal{H}_m(S)$ հիլբերտյան պարածության ինքնահամալուծության, գոյություն ունի միակ այնպիսի $Z_\eta \in \mathcal{H}_m(S)$, որ

$$p(\eta) = \langle p, Z_\eta \rangle = \int\limits_S p\overline{Z}_\eta \, d\sigma$$

բոլոր $p \in \mathcal{H}_m(S)$ բազմանդամների համար: Z_η սֆերիկ հարմոնիկը կոչվում է՝ η բևեռով, m աստիճանի *զոնալ հարմոնիկ*: Այս տերմինը առաջացել է Z_η-ի երկրաչափական հատկություններից, ինչը մեզ պարզ կդառնա քիչ անց: Հաճախ հարմար է լինում օգտվել $Z_\eta(\zeta) = Z(\zeta, \eta)$ նշանակումից: Եթե պետք լինի շեշտել աստիճանը, կգրենք $Z_m(\zeta, \eta)$:

Գտնենք Z_m-ը $n = 2$ դեպքում: Ակնհայտորեն $Z_0 \equiv 1$: Պնդում 3.1-ից մենք գիտենք, որ $m > 0$ դեպքում երկու չափանի $\mathcal{H}_m(S)$ տարածությունը $\{e^{im\theta}, e^{-im\theta}\}$ բազմության գծային թաղանթն է: Ուրեմն, ֆիքսած $e^{i\varphi} \in S$ դեպքում, գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ հաստատուններ, որ $Z_m(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = \alpha e^{im\theta} + \beta e^{-im\theta}$: Զոնալ հարմոնիկի վերարտադրող հատկությունից հետևում է, որ կամայական $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ թվերի համար՝

$$\gamma e^{im\varphi} + \delta e^{-im\varphi} = \int\limits_0^{2\pi} \left(\gamma e^{im\theta} + \delta e^{-im\theta}\right)\left(\bar{\alpha} e^{-im\theta} + \bar{\beta} e^{im\theta}\right) \frac{d\theta}{2\pi} = \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} :$$

Այստեղից՝ $\alpha = e^{-im\varphi}$, $\beta = e^{im\varphi}$, և ուրեմն՝

$$Z_m\left(e^{i\theta}, e^{i\varphi}\right) = e^{im(\theta-\varphi)} + e^{im(\varphi-\theta)} = 2\cos m(\theta - \varphi) : \tag{3.7}$$

Վերադառնալով ընդհանուր $m \geqslant 2$ դեպքին, ենթադրենք թե $p \in \mathcal{H}_m(S)$ բազմանդամը իրականարժեք է: Այդ դեպքում՝

$$0 = \operatorname{Im} p(\eta) = \operatorname{Im} \int\limits_S p\overline{Z}_\eta \, d\sigma = -\int\limits_S p \left(\operatorname{Im} Z_\eta\right) \, d\sigma :$$

Վերցնելով այստեղ $p = \operatorname{Im} Z_\eta$, կստանանք՝

$$\int\limits_S \left(\operatorname{Im} Z_\eta\right)^2 \, d\sigma = 0,$$

որտեղից հետևում է, որ $\operatorname{Im} Z_\eta \equiv 0$: Ուրեմն՝ յուրաքանչյուր Z_η իրականարժեք է:

Դիտարկենք $\mathcal{H}_m(S)$ պարածության որևէ $p_1, \ldots, p_{h_m}$ օրթոնորմալ բազիս, որտեղ h_m-ը $\mathcal{H}_m(S)$-ի չափողականությունն է՝ $h_m = \dim \mathcal{H}_m(S)$: Հիլբերտյան պարածությունների տեսության համաձայն՝

$$Z_\eta(\zeta) = \sum_{j=1}^{h_m} \langle Z_\eta, p_j \rangle p_j(\zeta) = \sum_{j=1}^{h_m} \overline{p_j(\eta)} p_j(\zeta) \tag{3.8}$$

բոլոր $\eta, \zeta \in S$ կետերի համար: Քանի որ Z_η-ն իրականարժեք է, (3.8)-ը չի փոխվի, եթե անցնենք կոմպլեքս համալուծների, ինչից եզրակացնում ենք, որ բոլոր $\eta, \zeta \in S$ կետերի համար՝

$$Z_\eta(\zeta) = Z_\zeta(\eta) :$$

Պարսևալի հավասարությունից և (3.8)-ից հետևում է, որ բոլոր $\eta \in S$ կետերի համար՝

$$Z_\eta(\eta) = \sum_{j=1}^{h_m} |p_j(\eta)|^2 = \|Z_\eta\|_2^2, \tag{3.9}$$

որտեղ $\| \ \|_2$ սիմվոլը նշանակում է $L^2(S, \sigma)$ պարածության նորմը:

$\mathcal{H}_m(S)$ պարածության $O(n)$-ինվարիանտությունից (պտույտների նկատմամբ ինվարիանտությունից) (տես խնդիր 3.1-ը) հետևում է, որ (3.9)-ն իրականում կախված չէ η-ից: Իրոք, կամայական $T \in O(n)$ գծային ձևափոխության և կամայական $p \in \mathcal{H}_m(S)$ կետի համար ունենք՝

$$\int_S p\, Z_{T(\eta)}\, d\sigma = p\big(T(\eta)\big) = \int_S (p \circ T) Z_\eta\, d\sigma = \int_S p\, (Z_\eta \circ T^{-1})\, d\sigma :$$

Այստեղ վերջին հավասարությունը ճշմարիտ է շնորհիվ σ-ի ինվարիանտությանը պտույտների նկատմամբ: $Z_{T(\eta)}$ սֆերիկ հարմոնիկի միակությունից հետևում է, որ՝

$$Z_{T(\eta)} = Z_\eta \circ T^{-1} : \tag{3.10}$$

(3.10) հավասարությունը գրելով $T(\eta)$ կետում՝ կստանանք

$$Z_{T(\eta)}\big(T(\eta)\big) = Z_\eta(\eta) :$$

Այլ կերպ ասած, $\eta \mapsto Z_\eta(\eta)$ ֆունկցիան հաստատուն է S-ի վրա, ինչպես և սպասվում էր: Այդ հաստատունը հաշվելու համար ինտեգրենք (3.9)-ի միջին անդամը: Կստանանք՝

$$Z_\eta(\eta) = \int\limits_S \Big(\sum_{j=1}^{h_m} |p_j(\eta)|^2\Big)\, d\sigma = h_m \tag{3.11}$$

բոլոր η-ների ($\eta \in S$) համար:

Օգտվելով Շվարցի անհավասարությունից և (3.11)-ից՝ կունենանք

$$|Z_\eta(\zeta)| = |\langle Z_\eta, Z_\zeta\rangle| \leqslant \|Z_\eta\|_2\, \|Z_\zeta\|_2 = h_m = Z_\eta(\eta) : \tag{3.12}$$

Դա նշանակում է, որ $Z_\eta(\zeta)$-ն իր մեծագույն արժեքը ընդունում է $\zeta = \eta$ կետում:

Այժմ անդրադառնանք զոնալ հարմոնիկների մի երկրաչափական հատկության:

Սահմանում 3.3: Տրված $\eta \in S$ վեկտորին օրթոգոնալ հիպերհարթության և S-ի հատումը կոչվում է *η-ին օրթոգոնալ զուգահեռական*:

Այդ հասկացությունը գալիս է աշխարագրությունից: Ցույց տանք, որ Z_η զոնալ հարմոնիկը հաստատուն է η-ին օրթոգոնալ յուրաքանչյուր զուգահեռականի վրա: Նկատենք, որ S-ի վրա որոշված f ֆունկցիան հաստատուն է η-ին օրթոգոնալ յուրաքանչյուր զուգահեռականի վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ $f \circ T = f$, $T(\eta) = \eta$ պայմանին բավարարող ամեն մի T-ի ($T \in O(n)$) համար: Պահանջվելիք $Z_\eta \circ T = Z_\eta$ առնչությունը հեշտությամբ հետևում է (3.10)-ից:

Զոնալ հարմոնիկների տերմիններով $L^2(S) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(S)$ վերլուծությանը կարելի է տալ հետաքրքիր մեկնաբանություն՝

Թեորեմ 3.3: *Եթե $f \in L^2(S)$, ապա՝*

$$f(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \big\langle f, Z_m(\cdot, \eta) \big\rangle,$$

որտեղ շարքի զուգամիտությունը դիտվում է $L^2(S)$-ում:

Ապացույց: Ըստ թեորեմ 3.2-ի $f = \sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m$, որտեղ $p_m \in \mathcal{H}_m(S)$, իսկ շարքի զուգամիտությունը դիտվում է $L^2(S)$-ում: Ապացույցն ավարտելու համար բավական է նկատել, որ

$$p_m(\eta) = \big\langle p_m, Z_m(\cdot, \eta) \big\rangle = \Big\langle \sum_{k=0}^{\infty} p_k,\, Z_m(\cdot, \eta) \Big\rangle = \big\langle f, Z_m(\cdot, \eta) \big\rangle :$$

Երկրորդ հավասարությունը գրելիս հաշվի ենք առել, որ տարբեր աստիճանների սֆերիկ հարմոնիկներն իրար օրթոգոնալ են: □

Այժմ հաշվենք բազմիցս հանդիպած $h_m = \dim \mathcal{H}_m(S)$ թիվը:

Պնդում 3.2: *Դիցուք d_m-ը $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ տարածության չափողականությունն է՝ $d_m = \dim \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$: Այդ դեպքում՝*

$$d_m = h_m + d_{m-2}, \quad m \geqslant 2 : \tag{3.13}$$

Ապացույց: Եթե $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ և $p \equiv 0$ S-ի վրա, ապա $p \equiv 0$ ամբողջ $\mathbb{R}^n$-ում: Հետևաբար, $p \mapsto p|_S$ արտապատկերումը իզոմորֆիզմ է $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ և $\mathcal{H}_m(S)$ գծային տարածությունների միջև: Ուրեմն՝ այդ տարածությունների չափողականությունները նույնն են: Քանի որ տարածությունների ուղիղ գումարման դեպքում նրանց չափողականությունները գումարվում են, ապա (3.6)-ից հետևում է (3.13)-ը: □

Այսպիսով, h_m-ը գտնելու համար պետք է հաշվել d_m-ը: Ցույց տանք, որ՝

$$d_m = \binom{n+m-1}{n-1} : \tag{3.14}$$

Քանի որ $\{x^\alpha\colon\ |\alpha| = m\}$ մոնոմները (միանդամները) $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ տարածությունում կազմում են բազիս, ապա d_m-ը հավասար է այն $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ մուլտիինդեքսների քանակին, որոնց համար բավարարվում է $|\alpha| = m$ պայմանը: Նշանակելով $\beta_j = \alpha_j + 1$, ստանում ենք, որ d_m-ը հավասար է այն $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ մուլտիինդեքսների քանակին, որոնց համար բավարարվում են $|\beta| = n + m$, $\beta_j > 0$, $(j = 1, \ldots, n)$ պայմանները:

Հանելով $(0, n+m)$ միջակայքից $n-1$ ամբողջ թիվ, տրոհենք այն իրար հետ չհատվող n հատ բաց միջակայքերի: Դիցուք $\beta_1, \ldots, \beta_n$ կարգավորված թվերը դրանց երկարություններն են, այսինքն՝ $\sum_{j=1}^n \beta_j = n + m$: Այսպիսով՝ յուրաքանչյուր $n-1$ ամբողջ թվերի ընտրությունը $(0, n+m)$-ից առաջացնում է β մուլտիինդեքս, որի համար $|\beta| = n+m$, և ամեն մի այդպիսի մուլտիինդեքս առաջանում է նշված ձևով: Պարզ է, որ այդ ընտրությունների քանակը հավասար է $\binom{n+m-1}{n-1}$: Այսպիսով, մենք ստացանք (3.14)-ը:

Երբ $m \geqslant 2$, (3.13)-ից և (3.14)-ից ստանում ենք՝

$$h_m = \binom{n+m-1}{n-1} - \binom{n+m-3}{n-1}: \tag{3.15}$$

Խնդիր 3.7: Ձևափոխելով (3.15)-ը՝ $m > 0$ դեպքում ստանալ

$$h_m = \binom{n+m-2}{n-2} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

բանաձևը:
(Ցուցում. օգտվել $\binom{p+1}{q} = \binom{p}{q} + \binom{p}{q-1}$ բանաձևից, որը հետևում է Պասկալի եռանկյունուց):

Խնդիր 3.8: Ապացուցել, որ $h_0 < h_1 < h_2 < \cdots$, երբ $n > 2$:

Խնդիր 3.9: Ցույց տալ, որ ֆիքսած n-ի դեպքում՝

$$\lim_{m\to\infty} \frac{h_m}{m^{n-2}} = \frac{2}{(n-2)!}: \tag{3.16}$$

§ 18. Պուասոնի կորիզի համասեռ վերլուծությունը

$\mathcal{H}_m(S)$-ի յուրաքանչյուր p տարր $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$-ում ունի միակ շարունակությունը, որը մենք կնշանակենք նույն p տառով: Մասնավորապես, $Z_m(\cdot,\zeta)$-ն կնշանակի նաև այդ զոնալ հարմոնիկի շարունակությունը որպես $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$-ի տարր:

Դիցուք $x \in \mathbb{R}^n$: Եթե $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ և $x \neq 0$, ապա

$$\begin{aligned} p(x) &= |x|^m p(x/|x|) = \\ &= |x|^m \int\limits_S p(\zeta) Z_m\big(x/|x|,\zeta\big)\, d\sigma(\zeta) = \\ &= \int\limits_S p(\zeta) Z_m(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) : \end{aligned} \tag{3.17}$$

Խնդիր 3.10: Ապուցել, որ (3.17)-ը ճշմարիտ է նաև $x=0$ դեպքում:

Նկատենք նաև, որ $Z_m(x,\cdot)$-ը m աստիճանի սֆերիկ հարմոնիկ է յուրաքանչյուր ֆիքսած $x \in \mathbb{R}^n$ կետի համար:

Ստորև բերված թեորեմում բազմանդամի Պուասոնի ինտեգրալը արտահայտվում է զոնալ հարմոնիկների տերմիններով:

Թեորեմ 3.4: *Դիցուք f-ը m աստիճանի բազմանդամ է $\mathbb{R}^n$-ում: Այդ դեպքում նրա $P[f]$ Պուասոնի ինտեգրալը m-ից ոչ ավելի աստիճանի բազմանդամ է: Ավելին՝*

$$P[f](x) = \sum_{k=0}^{m} \int\limits_S Z_k(x,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \tag{3.18}$$

բոլոր $x \in B$ կետերի համար:

Ապացույց: Համաձայն հետևանք 3.1-ի, S-ի վրա

$$f = p_0 + p_1 + \cdots + p_m, \tag{3.19}$$

որտեղ p_k-ն k աստիճանի սֆերիկ հարմոնիկ է: B-ում Դիրիխլեի խնդրի լուծման միակության շնորհիվ

$$P[f](x) = p_0(x) + p_1(x) + \cdots + p_m(x),$$

երբ $x \in B$): Այստեղ p_k-ն արդեն նշանակում է համասեռ հարմոնիկ բազմանդամ $\mathbb{R}^n$-ում: Հաշվի առնելով, որ տարբեր աստիճանների սֆերիկ հարմոնիկներն իրար օրթոգոնալ են, (3.17)-ից ստանում ենք

$$p_k(x) = \int\limits_S Z_k(x,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

բոլոր $x \in B$ կետերի համար: Վերջին երկու հավասարություններից հետևում է (3.18)-ը: □

(3.19) վերլուծությունից հետևում է, որ m աստիճանի բազմանդամի հետքը S-ի վրա՝ օրթոգոնալ է ավելի բարձր աստիճանի սֆերիկ հարմոնիկներին: Ուրեմն՝ կարելի է (3.18)-ի մեջ վերջավոր գումարը փոխարինել անվերջ շարքով: Դա հուշում է, որ Պուասոնի կորիզը վերլուծվում է շարքի ըստ սֆերիկ հարմոնիկների:

Թեորեմ 3.5: *Յուրաքանչյուր $n \geqslant 2$ դեպքում*

$$P(x,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\zeta) \tag{3.20}$$

բոլոր $x \in B$, $\zeta \in S$ կետերի համար: Ընդ որում B-ի յուրաքանչյուր K կոմպակտ ենթաբազմության համար շարքը զուգամիտում է բացարձակ և հավասարաչափ $K \times S$ բազմության վրա:

Ապացույց: Ֆիքսած n-ի դեպքում (3.16)-ից հետևում է, որ գոյություն ունի այնպիսի C հաստատուն, որ $h_m \leqslant Cm^{n-2}$: Այստեղից և (3.12)-ից հետևում է, որ

$$|Z_m(x,\zeta)| \leqslant |x|^m h_m \leqslant Cm^{n-2}|x|^m$$

բոլոր $x \in B$, $\zeta \in S$ կետերի համար: Այսպիսով՝ (3.20)-ի աջ մասն ունի զուգամիտության համար պահանջվող բոլոր պայմանները:

Նշանակենք (3.20)-ի աջ մասը $F(x,\zeta)$-ով: Ֆիքսած x-ի ($x \in B$) դեպքում բազմապատկենք այն p կամայական սֆերիկ հարմոնիկով և ինտեգրենք S-ով: Օգտվելով (3.17)-ից՝ կստանանք

$$\int\limits_S F(x,\zeta)p(\zeta)\,d\sigma(\zeta) = p(x) :$$

Քանի որ սֆերիկ հարմոնիկների վերջավոր գումարները խիտ են $L^2(S)$-ում՝ այս հավասարությունը մնում է ճիշտ բոլոր $p \in L^2(S)$ ֆունկցիաների համար: Ուրեմն՝ F-ը համընկնում է Պուասոնի կորիզի հետ, այսինքն՝ (3.20) հավասարությունը ճիշտ է: □

(3.20) բանաձևը $n = 2$ դեպքում մեզ քաջ ծանոթ է: Իրոք, ինչպես գիտենք (1.12)-ից, Պուասոնի կորիզը B_2-ի համար ունի հետևյալ տեսքը՝

$$P(re^{i\theta}, e^{i\varphi}) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(\varphi-\theta)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k 2\cos k(\varphi-\theta),$$

որտեղ $r \in [0,1)$, $\theta, \varphi \in [0,2\pi]$: Հաշվի առնելով (3.7)-ը, եզրակացնում ենք, որ այդ վերլուծությունը (3.20)-ի մասնավոր դեպքն է, երբ $n = 2$:

Թեորեմ 3.5-ը թույլ է տալիս կամայական հարմոնիկ ֆունկցիայի համար ստանալ համասեռ վերլուծություն, որը զուգամիտում է հարմոնիկության ամբողջ գնդում: Այդ պնդումը ուժեղացնում է թեորեմ 2.5-ում ստացված արդյունքը (տես նաև նշված թեորեմից հետո կատարված քննարկումը):

Հետևանք 3.2: *Դիցուք u-ն հարմոնիկ ֆունկցիա է $B(a,r)$-ում: Այդ դեպքում գոյություն ունեն $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ այնպիսիք, որ՝*

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x-a)$$

բոլոր $x \in B(a,r)$ կետերի համար, ընդ որում շարքը զուգամիտում է բացարձակ, իսկ $B(a,r)$-ի կոմպակտ ենթաբազմություններ վրա՝ նաև հավասարաչափ:

Ապացույց: Նախ ենթադրենք, թե u-ն հարմոնիկ է $\overline{B}$-ում: Ըստ թեորեմ 2.5-ի՝ կամայական $x \in B$ կետի համար

$$u(x) = \int\limits_S P(x,\zeta)u(\zeta)\,d\sigma(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty}\int\limits_S Z_m(x,\zeta)u(\zeta)\,d\sigma(\zeta) :$$

Դիցուք

$$p_m(x) = \int\limits_S Z_m(x,\zeta)u(\zeta)\,d\sigma(\zeta) :$$

Նկատենք, որ $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$: Թեորեմ 2.5-ի օրինակով՝

$$|p_m(x)| \leqslant h_m|x|^m \int\limits_S |u|\,d\sigma \leqslant Cm^{n-2}|x|^m \int\limits_S |u|\,d\sigma,$$

երբ $x \in B$: Այստեղից հետևում է, որ $\sum p_m$ շարքը զուգամիտում է բացարձակ, իսկ $B(a,r)$-ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա՝ նաև հավասարաչափ:

Նախորդ դատողությունները ցույց են տալիս, որ տեղաշարժից և ձգումից հետո, $B(a,r)$-ում հարմոնիկ ֆունկցիան ունի պահանջվող տեսքի վերլուծություն ամեն մի $B(a,s)$-ում $(0 < s < r)$: Համասեռ վերլուծության միակության համաձայն, բոլոր այդ վերլուծությունները համընկնում են իրար հետ, այնպես որ ամբողջ $B(a,r)$-ում u-ն ունի պահանջվող վերլուծությունը: □

§ 19. Զոնալ հարմոնիկների բացահայտ բանաձևերը

Պուասոնի կորիզի (3.20) վերլուծությունը թույլ է տալիս զոնալ հարմոնիկների համար բացահայտ բանաձևեր գտնել:

Թեորեմ 3.6: *Յուրաքանչյուր* $m > 0$ *համար*

$$Z_m(x,\zeta) =$$

$$= (n+2m-2)\sum_{k=0}^{[m/2]}(-1)^k\,\frac{n(n+2)\cdots(n+2m-2k-4)}{2^k k!(m-2k)!}\,(x\cdot\zeta)^{m-2k}|x|^{2k},$$

երբ $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \in S$:

Ապացույց: $(1-z)^{-n/2}$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է կոմպլեքս հարթության միավոր շրջանում և վերլուծվում է

$$(1-z)^{-n/2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{3.21}$$

աստիճանային շարքի, երբ $|z| < 1$: Պարզ հաշվումները ցույց են պալիս, որ

$$c_k = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}{k!}\ : \tag{3.22}$$

Ֆիքսենք $\zeta \in S$: Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից և (3.21)-ից հետևում է, որ փոքր $|x|$-երի համար՝

$$\begin{aligned} P(x,\zeta) &= (1-|x|^2)(1+|x|^2-2x\cdot\zeta)^{-n/2} = \\ &= (1-|x|^2)\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(2x\cdot\zeta-|x|^2\right)^k = \\ &= (1-|x|^2)\sum_{k=0}^{\infty} c_k\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}2^{k-j}(x\cdot\zeta)^{k-j}|x|^{2j}\ : \end{aligned}$$

Ըստ թեորեմ 3.5-ի՝ $Z_m(\cdot,\zeta)$-ն հավասար է $P(\cdot,\zeta)$-ի աստիճանային շարքի վերլուծության m աստիճանի անդամների գումարին: Ուրեմն՝ վերևում բերված բանաձևից հետևում է, որ

$$Z_m(x,\zeta) = q_m(x) - |x|^2 q_{m-2}(x), \tag{3.23}$$

որտեղ (q_m)-ը և (q_{m-2})-ը այդ բանաձևի համապատասխանաբար m և $m-2$ աստիճանի անդամների գումարներն են: Դժվար չէ տեսնել, որ

$$q_m(x) = \sum_{m/2\leqslant k\leqslant m} c_k(-1)^{m-k}\tbinom{k}{m-k}2^{2k-m}(x\cdot\zeta)^{2k-m}|x|^{2k-m} :$$

Այս բանաձևում k նշիչը փոխարինելով $(m-k)$-ով՝ կստանանք

$$q_m(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} c_{m-k}(-1)^{k}\tbinom{m-k}{k}2^{m-2k}(x\cdot\zeta)^{m-2k}|x|^{2k} :$$

Օգտվելով (3.22)-ից՝ վերջին հավասարությունից ստանում ենք

$$q_m(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]}(-1)^k\,\frac{n(n+2)\cdots(n+2m-2k-2)}{2^k k!(m-2k)!}\,(x\cdot\zeta)^{m-2k}|x|^{2k} :$$

Փոխարինելով m-ը $(m-2)$-ով՝ կստանանք համապատասխան բանաձևը (q_{m-2})-ի համար: Փոխարինելով ստացված բանաձևի մեջ k-ն $(k-1)$-ով և խմբավորելով համապատասխան անդամները (3.23)-ի մեջ՝ կավարտենք ապացույցը:

$\square$

Գ Լ ՈՒ Խ IV

ՀԱՐՄՈՆԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 20. Չափի Պուասոնի ինտեգրալը

Գլուխ I-ում սահմանել ենք անընդհատ f ֆունկցիայի $P[f]$ Պուասոնի ինտեգրալը հետևյալ կերպ՝

$$P[f](x) = \int_S P(x,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) :$$

Մեր նպատակն է ընդհանրացնել այդ սահմանումը: Դիցուք μ-ն բորելյան կոմպլեքս չափ է S-ի վրա: B-ում որոշված

$$P[\mu](x) = \int_S P(x,\zeta)\, d\mu(\zeta) \tag{4.1}$$

ֆունկցիան կանվանենք μ չափի Պուասոնի ինտեգրալ: Ածանցելով (4.1)-ը ինտեգրալի նշանի տակ, համոզվում ենք, որ $P[\mu]$-ն հարմոնիկ է B-ում:

Մենք օգտվելու ենք հետևյալ նշանակումներից՝

- $M(S)$-ը բորելյան կոմպլեքս չափերի բազմությունն է S-ի վրա,
- μ-ի նորմը $M(S)$-ում՝ $\|\mu\|$-ն, համարվում է μ-ի ընդհանուր վարիացիան S-ի վրա,
- $L^p(S)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ բանախյան պարածությունը բաղկացած է S-ի վրա որոշված բոլոր բորելյան f ֆունկցիաներից , որոնց համար՝
$$\|f\|_p = \Big(\int_S |f|^p\, d\sigma\Big)^{1/p} < \infty,$$

- $L^\infty(S)$-ը բաղկացած է S-ի վրա որոշված բոլոր բորելյան f ֆունկցիաներից, որոնց համար $\|f\|_\infty < \infty$, որտեղ $\|f\|_\infty$-ը նշանակում է էական supremum-նորմը σ-ի նկատմամբ,

- $q \in [1, \infty]$ թիվը կոչվում է p-ին համալուծ, եթե $1/p + 1/q = 1$: Եթե $q \in (1, \infty]$, ապա $L^q(S)$-ը $L^p(S)$-ի համալուծ տարածությունն է՝ $L^q(S) = L^p(S)^*$: Այստեղ նույնացնում ենք $g \in L^q(S)$ ֆունկցիան $L^p(S)$-ի վրա որոշված Λ_g ֆունկցիոնալի հետ՝

$$\Lambda_g(f) = \int\limits_S fg\, d\sigma,$$

- B-ում տրված u ֆունկցիայի համար u_r-ով $(0 \leqslant r < 1)$ կնշանակվի S-ի վրա որոշված $u_r(\zeta) = u(r\zeta)$ ֆունկցիան:

Քանի որ σ չափը վերջավոր է, ապա $L^p(S) \subset L^1(S)$ բոլոր $p \in [1, \infty]$ դեպքերում: Հիշեցնենք նաև, որ $C(S)$-ը խիտ է $L^p(S)$-ում, երբ $1 \leqslant p < \infty$:

Բնական է յուրաքանչյուր $f \in L^1(S)$ ֆունկցիա նույնացնել $\mu_f \in M(S)$ չափի հետ, որը բորելյան $E \subset S$ բազմության վրա որոշված է հետևյալ ձևով՝

$$\mu_f(E) = \int\limits_E f\, d\sigma : \tag{4.2}$$

(4.2)-ը հակիրճ գրում են նաև $d\mu_f = f\, d\sigma$ տեսքով: $f \mapsto \mu_f$ արտապատկերումը գծային իզոմետրիա է $L^1(S)$-ից $M(S)$-ի մեջ: Հաճախ $P[\mu_f]$ նշանակման փոխարեն պարզապես գրելու ենք $P[f]$:

Ինչպես գիտենք, $f \in C(S)$ ֆունկցիայի դեպքում $P[f]$-ը անընդհատորեն շարունակվում է $\overline{B}$-ի վրա: Հարց է առաջանում, իսկ ի՞նչ կարելի է ասել վերը սահմանված՝ Պուասոնի ավելի ընդհանուր ինտեգրալների մասին: Հաջորդ երկու թեորեմները (մասամբ) տալիս են այդ հարցի պատասխանը:

Թեորեմ 4.1: *Պուասոնի ինտեգրալի աճը վերևից սահմանափակված է հետևյալ պայմաններով*

(ա) *եթե $\mu \in M(S)$ և $u = P[\mu]$, ապա բոլոր $r \in [0,1)$ թվերի համար $\|u_r\|_1 \leqslant \|\mu\|$,*

(բ) *դիցուք $1 \leqslant p \leqslant \infty$: Եթե $f \in L^p(S)$ և $u = P[f]$, ապա $\|u_r\|_p \leqslant \|f\|_p$ բոլոր $r \in [0,1)$ թվերի համար:*

Ապացույց: Հեշտ է ստուգել, որ՝

$$P(r\eta, \zeta) = P(r\zeta, \eta) \tag{4.3}$$

բոլոր r-երի ($0 \leqslant r < 1$) և $\zeta, \eta \in S$ կետերի համար:
(ա)-ն ապացուցելու համար ենթադրենք, թե $\mu \in M(S)$ և $u = P[\mu]$: Կամայական η-ի ($\eta \in S$) և r-ի ($r \in [0,1)$) համար ունենք

$$|u(r\eta)| \leqslant \int\limits_S P(r\eta, \zeta)\, d|\mu|(\zeta),$$

որտեղ $|\mu|$-ն μ-ի վարիացիան է: Օգտվելով Ֆուբինիի թեորեմից և (4.3)-ից՝ կստանանք

$$\|u_r\|_1 = \int\limits_S |u(r\eta)|\, d\sigma(\eta) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_S \Bigg(\int\limits_S P(r\eta, \zeta)\, d|\mu|(\zeta)| \Bigg) d\sigma(\eta) =$$

$$= \int\limits_S \Bigg(\int\limits_S P(r\zeta, \eta)\, d\sigma(\eta) \Bigg) d|\mu|(\zeta) = \|\mu\| :$$

(բ)-ն ապացուցելու համար նախ դիտարկենք $1 \leqslant p < \infty$ դեպքը: Դիցուք $f \in L^p(S)$ և $u = P[f]$: Այդ դեպքում

$$|u(r\eta)| \leqslant \int\limits_S P(r\eta, \zeta) |f(\zeta)|\, d\sigma(\zeta) :$$

Յենսենի անհավասարության համաձայն՝

$$|u(r\eta)|^p \leqslant \int\limits_S P(r\eta,\zeta)|f(\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta) :$$

Ինտեգրելով այս արտահայտությունը և կրկնելով (ա)-ում բերված դատողությունները՝ կստանանք պահանջվող $\|u_r\|_p \leqslant \|f\|_p$ անհավասարությունը:

$f \in L^\infty(S)$ դեպքը ավելի հեշտ է: Ունենք՝

$$|u(r\eta)| \leqslant \int\limits_S P(r\eta,\zeta)|f(\zeta)|\,d\sigma(\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_\infty \int\limits_S P(r\eta,\zeta)\,d\sigma(\zeta) = \|f\|_\infty : \qquad \square$$

Եթե $f \in C(S)$ և $u = P[f]$, ապա $C(S)$-ում $u_r \to f$, երբ $r \to 1$: Այս փաստը և թեորեմ 4.1-ը թույլ են տալիս ստանալ համապատասխան արդյունք L^p-ում:

Թեորեմ 4.2: *Դիցուք* $1 \leqslant p < \infty$*: Եթե* $f \in L^p(S)$ *և* $u = P[f]$*, ապա* $\|u_r - f\|_p \to 0$*, երբ* $r \to 1$*:*

Ապացույց: Դիցուք $p \in [0,\infty)$, $f \in L^p(S)$ և $u = P[f]$: Ֆիքսենք $\varepsilon > 0$ և ընտրենք այնպիսի $g \in C(S)$, որ $\|f-g\|_p < \varepsilon$: Նշանակելով $v = P[g]$, կունենանք՝

$$\|u_r - f\|_p \leqslant \|u_r - v_r\|_p + \|v_r - g\|_p + \|g - f\|_p : \qquad (4.4)$$

Քանի որ $u_r - v_r = P[u-v]$, ապա ըստ թեորեմ 4.1-ի՝ $\|u_r - v_r\|_p < \varepsilon$: Հաշվի առնելով, որ $\|v_r - g\|_p \leqslant \|v_r - g\|_\infty$, (4.4)-ից ստանում ենք՝

$$\|u_r - f\|_p < \|v_r - g\|_\infty + 2\varepsilon :$$

g-ի անընդհատությունից հետևում է, որ $\|v_r - g\|_\infty \to 0$, երբ $r \to 1$, և վերջին անհավասարությունից ստանում ենք՝

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,\|u_r - f\|_p \leqslant 2\varepsilon :$$

Քանի որ ε-ը կամայական է, այսպեղից հեպևում է, որ $\|u_r - f\|_p \to 0$, երբ $r \to 1$: □

$p = \infty$ դեպքի համար թեորեմ 4.2-ը ճշմարիտ չէ: Իսկապես, եթե $f \in L^\infty$ և $u = P[f]$, ապա r-ը 1-ին ձգտելիս, $\|u_r - f\|_\infty \to 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $f \in C(S)$:

Եթե $\mu \in M(S)$ և $u = P[\mu]$, ապա բնական հարց է առաջանում. արդյո՞ք $M(S)$-ում միշտ է u_r-ը զուգամիտում μ-ին: Քանի որ $L^1(S)$-ը $M(S)$-ի փակ ենթապարածություն է, ապա $M(S)$-ում $u_r \to \mu$ միայն այն դեպքում, երբ μ-ն σ-ի նկատմամբ բացարձակ անընդհատ է:

Այնուամենայնիվ, ինչպես կտեսնենք հաջորդ պարագրաֆում, այդ երկու բացառիկ դեպքերում համապատասխան սահմանները գոյություն ունեն, եթե դրանք հասկանանք թույլ* իմաստով:

§ 21. Թույլ* զուգամիտություն

Սահմանում 4.1: Դիցուք X-ը գծային նորմավորված պարածություն է, X^*-ը նրա համալուծ պարածությունն է: Կասենք, որ $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ հաջորդականությունը թույլ* զուգամիտում է $\Lambda \in X^*$ տարրին, եթե $\lim\limits_{k\to\infty} \Lambda_k(x) = \Lambda(x)$ յուրաքանչյուր ֆիքսած x-ի $(x \in X)$ համար: Այլ կերպ ասած, $\Lambda_k \to \Lambda$ թույլ* նշանակում է, որ Λ_k-ն X-ի վրա կետորեն զուգամիտում է Λ-ին: Մեզ հանդիպելու է նաև մեկ պարամետրից կախված $\{\Lambda_r : r \in [0,1)\} \subset X^*$ ընտանիք: Այս դեպքում կասենք, որ $\Lambda_r \to \Lambda$ թույլ*, եթե $\Lambda_r(x) \to \Lambda(x)$ յուրաքանչյուր ֆիքսած x-ի $(x \in X)$ համար, երբ $r \to 1$:

Ինչպես հայտնի է ֆունկցիոնալ անալիզի դասընթացից, եթե $\Lambda_k \to \Lambda$ թույլ*, ապա

$$\|\Lambda\| \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \|\Lambda_k\| \, : \tag{4.5}$$

Այսպեղ $\|\Lambda\|$-ը սովորական նորմն է X^*-ում, որը սահմանվում է $\|\Lambda\| = \sup\{|\Lambda(x)| : x \in X,\ \|x\| \leqslant 1\}$ հավասարությամբ: Նորմով զուգամի–

տությունից հետևում է թույլ* զուգամիտություն, բայց հակառակը ճիշտ չէ:

Օրինակ 4.1: Դիտարկենք քառակուսով գումարելի հաջորդականությունների l^2 տարածությունը: Քանի որ l^2-ը հիլբերտյան տարածություն է, ապա $(l^2)^* = l^2$: Դիցուք e_k-ն l^2-ի այն տարրն է, որի k-րդ տեղում 1 է, իսկ մնացածները 0 են: Այդ դեպքում $\langle a, e_k \rangle = a_k$ յուրաքանչյուր $a = (a_1, a_2, \ldots) \in l^2$ տարրի համար, այնպես որ $e_k \to 0$ (երբ $k \to \infty$) l^2-ում թույլ*, այնինչ՝ $\|e_k\| = 1$:

Հաջորդ արդյունքը թեորեմ 4.2-ի լրացումն է նախորդ պարագրաֆում նշված բացառիկ դեպքերի համար:

Թեորեմ 4.3: *Պուասոնի ինտեգրալը թույլ* զուգամիտության վերաբերյալ ունի հետևյալ հատկությունները.*

(ա) *եթե $\mu \in M(S)$ և $u = P[\mu]$, ապա $M(S)$-ում $u_r \to \mu$ թույլ*, երբ $r \to 1$,*

(բ) *եթե $f \in L^\infty(S)$ և $u = P[f]$, ապա $L^\infty(S)$-ում $u_r \to f$ թույլ*, երբ $r \to 1$:*

Ապացույց: Ինչպես հայտնի է, $C(S)^* = M(S)$: Դիցուք $\mu \in M(S)$, $u = P[\mu]$, և $g \in C(S)$: (ա)-ն ապացուցելու համար պետք է ցույց տալ, որ

$$\int_S g u_r \, d\sigma \to \int_S g \, d\mu, \quad \text{երբ} \quad r \to 1: \tag{4.6}$$

Ձևափոխելով (4.6)-ի ձախ մասը, կստանանք՝

$$\int_S g u_r \, d\sigma = \int_S g(\zeta) \int_S P(r\zeta, \eta) \, d\mu(\eta) d\sigma(\zeta) =$$

$$= \int_S \int_S P(r\eta, \zeta) \, d\sigma(\zeta) d\mu(\eta) =$$

$$= \int_S P[g](r\eta)\, d\mu(\eta),$$

որտեղ ևս մեկ անգամ օգտվել ենք (4.3)-ից: Քանի որ $g \in C(S)$, ապա $P[g](r\eta) \to g(\eta)$ հավասարաչափ S-ի վրա, երբ $r \to 1$: Վերջին հավասարության մեջ անցնելով սահմանի՝ կստանանք (4.6)-ը:

Նման եղանակով կապացուցենք (բ)-ն: Ինչպես հայտնի է ֆունկ–ցիոնալ անալիզի դասընթացից՝ $L^1(S)^* = L^\infty(S)$: Դիցուք $f \in L^\infty(S)$ և $u = P[f]$: Յուրաքանչյուր $g \in L^1(S)$ ֆունկցիայի համար պետք է ապացուցել, որ

$$\int_S g u_r\, d\sigma \to \int_S g f\, d\sigma, \quad \text{երբ} \quad r \to 1 : \tag{4.7}$$

Ձևափոխելով (4.7)-ի ձախ մասն այնպես, ինչպես դա արվել է վերևում, կստանանք

$$\begin{aligned}\int_S g u_r\, d\sigma &= \int_S g(\zeta)\Big(\int_S P(r\zeta,\eta) f(\eta)\, d\sigma(\eta)\Big) d\sigma(\zeta) = \\ &= \int_S \Big(\int_S P(r\eta,\zeta) g(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\Big) f(\eta)\, d\sigma(\eta) = \\ &= \int_S P[g](r\eta) f(\eta)\, d\sigma(\eta) :\end{aligned}$$

Ըստ թեորեմ 4.2-ի՝ $L^1(S)$-ում $(P[g])_r \to g$, երբ $r \to 1$: Քանի որ $f \in L^\infty(S)$, $(P[g])f$ ֆունկցիան $L^1(S)$-ում նույնպես ձգտում է gf-ին: Վերջին հավասարության մեջ անցնելով սահմանի՝ կստանանք (4.7)-ը: $\square$

Այժմ հիշեցնենք ֆունկցիոնալ անալիզի դասընթացից հայտնի Ար–ցելա-Ասկոլիի թեորեմը:

Թեորեմ 4.4 (Արցելա-Ասկոլի, տես [2])**:** *Դիցուք X-ը սեպարաբել մետրիկական տարածություն է, $\mathfrak{F}$-ը X-ում կետորեն սահմանափակ ֆունկցիաների հավասարաաստիճան անընդհատ ֆունկցիաների ընտանիք է: Այդ դեպքում կամայական $f_n \in \mathfrak{F}$ հաջորդականություն պարունակում է X-ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա հավասարաչափ զուգամետ ենթահաջորդականություն:*

Օգտվելով Արցելա-Ասկոլիի թեորեմից՝ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 4.5 (Բանախ-Ալաօղլու)**:** *Եթե X-ը սեպարաբել, գծային նորմավորված տարածություն է, ապա X^*-ում ըստ նորմի սահմանափակ կամայական հաջորդականություն պարունակում է թույլ* զուգամետ ենթահաջորդականություն:*

Ապացույց: Դիցուք Λ_m-ը X^*-ում ըստ նորմի սահմանափակ հաջորդականություն է: Այդ դեպքում Λ_m-ը X-ում որոշված, կետորեն սահմանափակ և հավասարաաստիճան անընդհատ ֆունկցիաների ընտանիք է (տես խնդիր 4.1-ը): Ըստ Արցելա-Ասկոլիի թեորեմի, Λ_m-ը պարունակում է Λ_{m_k} ենթահաջորդականություն, որը հավասարաչափ զուգամիտում է X-ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա: Մասնավորապես, Λ_{m_k}-ն կետորեն զուգամիտում է X-ի վրա, ինչը նշանակում է, որ Λ_{m_k}-ն թույլ* զուգամիտում է X^*-ի ինչ-որ տարրի: $\square$

Մենք այս թեորեմը կկիրառենք հաջորդ պարագրաֆում՝ $C(S)$ և $L^q(S)$ $(1 \leqslant q < \infty)$ սեպարաբել տարածությունների դեպքի համար:

Խնդիր 4.1: Դիցուք X-ը նորմավորված գծային տարածություն է, E-ն X^*-ում ըստ նորմի սահմանափակ ֆունկցիոնալների ընտանիք է: Ապացուցել, որ այդ դեպքում E-ն կետորեն սահմանափակ և հավասարաաստիճան անընդհատ ֆունկցիոնալների ընտանիք է:

§ 22. Հարդիի հարմոնիկ պարածությունները

$h^p(B)$-ով ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) նշանակենք B-ում հարմոնիկ այն ֆունկ-ցիաների դասը, որոնց համար՝

$$\|u\|_{h^p} = \sup_{0 \leqslant r < 1} \|u_r\|_p < \infty :$$

Այսպիսով՝ $h^p(B)$-ն բաղկացած է B-ում հարմոնիկ բոլոր այն ֆունկ-ցիաներից, որոնց L^p-նորմերը 0 կենտրոնով համակենտրոն սֆերա-ների վրա հավասարաչափ սահմանափակ են: Նկատենք, որ $h^\infty(B)$-ն պարզապես B-ում սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիաների դասն է, և որ

$$\|u\|_{h^\infty} = \sup_{x \in B} |u(x)| :$$

Մենք $h^p(B)$-երը կանվանենք «Հարդիի հարմոնիկ պարածություններ»: Սովորաբար «Հարդիի պարածություն»[2] ասելով և $H^p(B_2)$ նշանակե-լով՝ հասկանում են $h^p(B_2)$-ի այն ֆունկցիաների դասը, որոնք հոլո-մորֆ են B_2-ում:

Խնդիր 4.2: Ցույց տալ, որ $h^p(B)$-ն $\| \, \|_{h_p}$ նորմով գծային նորմա-վորված պարածություն է:

Պնդում 4.1: *Պուասոնի ինտեգրալը առաջացնում է հետևյալ իզոմետրիաները՝*

(ա) *$\mu \mapsto P[\mu]$ արտապատկերումը գծային իզոմետրիա է $M(S)$ պարածությունից $h^1(B)$-ի մեջ,*

(բ) *եթե $1 < p \leqslant \infty$, ապա $f \mapsto P[f]$ արտապատկերումը գծային իզոմետրիա է $L^p(S)$-ից $h^p(B)$-ի մեջ:*

[2] Տարածություններն այդպես են անվանվել ի պատիվ մաթեմատիկոս Գ. Հ. Հարդիի, որն առաջինն է ուսումնասիրել դրանք:

Ապացույց: Նախ և առաջ, ակնհայտ է, որ դիտարկվող արտապատկերումները գծային են: Այնուհետև, ըստ թեորեմ 4.1(ա)-ի՝

$$\|P[\mu]\|_{h^1} \leqslant \|\mu\| :$$

Մյուս կողմից, (4.5) անհավասարությունից և թեորեմ 4.3-ից հետևում է, որ

$$\|\mu\| \leqslant \varliminf_{r\to 1} \|(P[\mu])_r\|_1 \leqslant \|P[\mu]\|_{h^1} :$$

Վերջին երկու անհավասարություններից հետևում է (ա)-ն: Նման ձևով ապացուցվում է (բ)-ն. երբ $1 < p \leqslant \infty$ և $f \in L^p(S)$. թեորեմ 4.1-ից հետևում է՝

$$\|P[f]\|_{h^p} \leqslant \|f\|_p :$$

Հակառակ անհավասարությունը՝

$$\|f\|_p \leqslant \|P[f]\|_{h^p},$$

$1 < p < \infty$ դեպքում հետևում է թեորեմ 4.2-ից, իսկ երբ $p = \infty$՝ (4.5)-ից և թեորեմ 4.3-ից: Վերջին երկու անհավասարություններից հետևում է պնդման (բ) կետը: □

Պարզվում է, որ կարելի է պնդել ավելին. Պուասոնի ինտեգրալի առաջացրած արտապատկերումները ոչ թե միայն «մեջ» (injectiv), այլև «վրա» (surjectiv) են:

Թեորեմ 4.6: *Պուասոնի ինտեգրալը առաջացնում է հետևյալ իզոմետրիաները՝*

(ա) *$\mu \mapsto P[\mu]$ արտապատկերումը գծային իզոմետրիա է $M(S)$ տարածությունից $h^1(B)$-ի վրա,*

(բ) *եթե $1 < p \leqslant \infty$, ապա $f \mapsto P[f]$ արտապատկերումը գծային իզոմետրիա է $L^p(S)$-ից $h^p(B)$-ի վրա:*

Ապացույց: Ապացուցենք (ա)-ն: Հաշվի առնելով պնդում 4.1-ը, մեզ մնում է ապացուցել միայն, որ $\mu \mapsto P[\mu]$ արտապատկերման արժեքների բազմությունը ամբողջ $h^1(B)$-ն է: Դիցուք $u \in h^1(B)$: Ըստ սահմանման, $\{u_r\colon r \in [0,1)\}$ ֆունկցիաների ընտանիքը սահմանափակ է $L^1(S)$-ում և, հետևաբար, նաև $M(S) = C(S)^*$ պարածության մեջ: Բանախ-Ալաօղլուի թեորեմի համաձայն, գոյություն ունի այնպիսի $r_j \to 1$ հաջորդականություն, որ համապատասխան (u_{r_j})-ն թույլ* զուգամիտում է ինչ-որ $\mu \in M(S)$ տարրին: (ա)-ն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ $u = P[\mu]$:

Ֆիքսենք x-ը ($x \in B$): Քանի որ $y \mapsto u(r_j y)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է $\overline{B}$-ում, ապա յուրաքանչյուր j-ի համար՝

$$u(r_j x) = \int\limits_S P(x,\zeta) u(r_j \zeta)\, d\sigma(\zeta)\ : \tag{4.8}$$

Դիցուք $j \to \infty$: Անընդհատության շնորհիվ, (4.8)-ի ձախ մասը ձգտում է $u(x)$-ին: Մյուս կողմից, քանի որ $P(x,\cdot) \in C(S)$, (4.8)-ի աջ մասն էլ ձգտում է $P[\mu](x)$-ին: Այսպիսով՝ $u(x) = P[\mu](x)$, այսինքն, ինչպես և պահանջվում էր՝ $L^1(S)$-ում $u = P[\mu]$: Նույն եղանակով ապացուցվում է (բ)-ն: Ֆիքսենք $p \in (1,\infty]$: Դիցուք $u \in L^p(S)$ և q-ն p-ի համալուծ ցուցիչն է: Այդ դեպքում $\{u_r\colon r \in [0,1)\}$ ֆունկցիաների ընտանիքը սահմանափակ է $L^p(S) = L^q(S)^*$ պարածության մեջ: Բանախ-Ալաօղլուի թեորեմի համաձայն, գոյություն ունի այնպիսի $r_j \to 1$ հաջորդականություն, որ համապատասխան (u_{r_j})-ն թույլ* զուգամիտում է ինչ-որ $f \in L^p(S)$ տարրի: Բառացիորեն կրկնելով վերը բերած դատողությունները, ցույց է տրվում, որ $u = P[f]$: Միակ տարբերությունն այն է, որ այս դեպքում պետք է օգտվել այն փաստից, որ $P(x,\cdot) \in L^q(S)$: □

Հետևանք 4.1: *B-ում հարմոնիկ յուրաքանչյուր u դրական ֆունկցիայի համար գոյություն ունի միակ դրական μ չափը $M(S)$-ից, որ $u = P[\mu]$:*

Ապացույց: Դիցուք u-ն դրական հարմոնիկ ֆունկցիա է B-ում: Կամայական $r \in [0,1)$ թվի համար

$$\int_S |u_r|\, d\sigma = \int_S u_r\, d\sigma = u(0) :$$

Վերջին հավասարությունը հետևում է միջին արժեքի հատկությունից: Այսպիսով՝ $u \in h^1(B)$ և, ըստ թեորեմ 4.6-ի, գոյություն ունի այնպիսի միակ $\mu \in M(S)$ չափ, որ $u = P[\mu]$: Համաձայն թեորեմ 4.3-ի, μ-ն դրական u_r չափերի թույլ* սահմանն է, հետևաբար՝ μ-ն ինքն էլ է դրական (տես խնդիր 4.3): □

Խնդիր 4.3: Ապացուցել, որ դրական չափերի թույլ* սահմանը նույնպես դրական է:

Խնդիր 4.4: Դիցուք $\zeta \in S$, իսկ u-ն դրական հարմոնիկ ֆունկցիա է B-ում, որը անընդհատորեն շարունակվում է $B \setminus \zeta$ բազմության վրա այնպես, որ $u(x) = 0$, երբ $x \in S \setminus \zeta$: Ապացուցել, որ հաստատունի ճշտությամբ u-ն Պուասոնի կորիզն է, այսինքն, գոյություն ունի այնպիսի c թիվ, որ

$$u = cP(\cdot, \zeta) :$$

§ 23. Բերգմանի հարմոնիկ պարածությունները

Դիցուք p-ն $1 \leqslant p < \infty$ պայմանին բավարարող թիվ է: Նշանակենք $b^p(\Omega)$-ով $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում հարմոնիկ այն u ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց համար

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\, dV \right)^{1/p} < +\infty :$$

$b^p(\Omega)$-ն հաճախ դիտարկելու ենք որպես $L^2(\Omega, dV)$ պարածության ենթապարածություն:

Ֆիքսած $x \in \Omega$ կետի դեպքում $u \mapsto u(x)$ արտապատկերումը գծային ֆունկցիոնալ է $b^p(\Omega)$-ի վրա, մենք այն կանվանենք *արժեք x կետում*: Ցույց տանք, որ այդ ֆունկցիոնալն անընդհատ է $b^p(\Omega)$-ում:

Լեմմա 4.1: *Դիցուք $x \in \Omega$: Այդ դեպքում*

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{V(B)^{1/p} d(x, \partial\Omega)^{n/p}} \|u\|_p$$

ամեն մի $u \in b^p$ ֆունկցիայի համար:

Ապացույց: Դիցուք r-ը՝ $r < d(x, \partial\Omega)$ պայմանին բավարարող դրական թիվ է: Միջին արժեքի թեորեմի ծավալային տարբերակից հետևում է

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{V\big(B(x,r)\big)} \int\limits_{B(x,r)} |u| \, dV :$$

Կիրառելով Յենսենի անհավասարությունը՝ կստանանք

$$|u(x)|^p < \frac{1}{V\big(B(x,r)\big)} \int\limits_{B(x,r)} |u|^p \, dV \leqslant \frac{1}{r^n V(B)} \|u\|_p^p :$$

Անհավասարության երկու կողմերից p աստիճանի արմատ հանելով և անցնելով սահմանի, երբ $r \to d(x, \partial\Omega)$, ստանում ենք լեմմայի պնդումը:

□

Թեորեմ 4.7: *$b^p(\Omega)$-ն $L^p(\Omega, dV)$ պարածության փակ ենթապարածություն է:*

Ապացույց: Դիցուք $\|u_j - u\| \to 0$ երբ $j \to \infty$, որտեղ u_j հաջորդականությունը պատկանում է $b^p(\Omega)$-ին, իսկ $u \in L^p(\Omega, dV)$: Ապացուցենք, որ u-ն համարժեք է Ω-ում հարմոնիկ որևէ ֆունկցիայի:

Դիցուք K-ն Ω-ի կոմպակտ ենթաբազմություն է: Լեմմա 4.1-ից հետևում է, որ գոյություն ունի C հաստատուն, այնպիսին, որ

$\max\limits_{x\in K}|u(x)| \leqslant C\|u\|$ բոլոր $u \in b^p(\Omega)$ ֆունկցիաների համար: Հետևաբար՝

$$|u_j(x) - u_k(x)| \leqslant C\|u_j - u_k\|$$

բոլոր $x \in K$ և j, $k = 1, 2\ldots$ համար: Քանի որ u_j-ն ֆունդամենտալ է $b^p(\Omega)$-ում, ապա Ω-ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա u_j հաջորդականությունը հավասարաչափ կզուգամիտի ինչ-որ v ֆունկցիայի, որը, ըստ թեորեմ 1.14-ի, հարմոնիկ կլինի Ω-ում: Բացի դրանից, u_j հաջորդականությունը զուգամիտում է u-ին $L^p(\Omega, dV)$ տարածության մեջ: Ըստ Ռիսի թեորեմի՝ գոյություն ունի u_j-ի ենթահաջորդականություն, որը համարյա ամենուրեք Ω-ում զուգամիտում է u-ին: Այսպիսով, $u = v$ համարյա ամենուրեք Ω-ում, ուրեմն $u \in b^p(\Omega)$: $\square$

§ 24. Վերարտադրող կորիզ

Թեորեմ 4.7-ում վերցնելով $p = 2$, տեսնում ենք, որ $b^2(\Omega)$-ն հիլբերտյան տարածություն է, օժտված՝

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_\Omega u\bar{v}\, dV$$

սկալյար արտադրյալով:

Ֆիքսած $x \in \Omega$ դեպքում $u \mapsto u(x)$ արտապատկերումը $b^2(\Omega)$-ում գծային անընդհատ ֆունկցիոնալ է: Հիլբերտյան տարածությունների ընդհանուր տեսությունից հետևում է, որ գոյություն ունի միակ $R_\Omega(x, \cdot) \in b^2(\Omega)$ ֆունկցիա այնպիսին, որ

$$u(x) = \big\langle u, R_\Omega(x, \cdot)\big\rangle = \int\limits_\Omega u(y)\overline{R_\Omega(x, y)}\, dV(y)$$

յուրաքանչյուր $u \in b^2(\Omega)$ ֆունկցիայի համար: Կարելի է համարել, որ R_Ω ֆունկցիան որոշված է $\Omega \times \Omega$ բազմության վրա:

Սահմանում 4.2: R_Ω ֆունկցիան կոչվում է Ω տիրույթի *վերարտադրող կորիզ* (reproducing kernel):

Այժմ ստանանք R_Ω-ի հիմնական հատկությունները. դրանք նման են երկրորդ գլխում ուսումնասիրված զոնալ հարմոնիկների հատկություններին:

Դիցուք $u \in b^2(\Omega)$ ֆունկցիան իրականարժեք է: Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Im} u(x) = \\ &= \operatorname{Im} \int_\Omega u(y)\overline{R_\Omega(x,y)}\, dV(y) = \\ &= -\int_\Omega u(y) \operatorname{Im} R_\Omega(x,y)\, dV(y) : \end{aligned}$$

Ընտրելով այստեղ $u = \operatorname{Im} R_\Omega(x,\cdot)$՝ կստանանք

$$\int_\Omega \big(\operatorname{Im} R_\Omega(x,y)\big)^2 dV(y) = 0,$$

որտեղից հետևում է, որ $\operatorname{Im} R_\Omega \equiv 0$, այսինքն, R_Ω-ն իրականարժեք է:

Դիտարկենք $b^2(\Omega)$ տարածության որևէ $u_1, u_2, \ldots$ օրթոնորմալ բազիս: (Ինչպես հայտնի է, $L^2(\Omega)$-ն և, հետևաբար, $b^2(\Omega)$-ն, սեպարաբել է): Հիլբերտյան տարածությունների տեսության համաձայն՝ յուրաքանչյուր ֆիքսած $x \in \Omega$ կետի համար

$$R_\Omega(x,\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} \big\langle R_\Omega(x,\cdot), u_k \big\rangle u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{u_k(x)} u_k, \tag{4.9}$$

ընդ որում, շարքը զուգամիտում է ըստ $b^2(\Omega)$-ի նորմի: Ինչպես տեսանք այս գլխի սկզբում, «արժեքը կետում» ֆունկցիոնալը անընդհատ է, ինչից հետևում է, որ (4.9) շարքը զուգամիտում է նաև կետորեն, այսինքն, բոլոր $x, y \in \Omega$ կետերի համար՝

$$R_\Omega(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{u_k(x)} u_k(y) : \tag{4.10}$$

Քանի որ R_Ω-ն իրականարժեք է, ապա վերջին գումարը չի փոխվի, եթե անցնենք կոմպլեքս համալուծների, ինչից եզրակացնում ենք, որ բոլոր $x, y \in \Omega$ կետերի համար

$$R_\Omega(x,y) = R_\Omega(y,x) :$$

Նշենք նաև, որ

$$\|R_\Omega(x,\cdot)\|_2^2 = \big\langle R_\Omega(x,\cdot), R_\Omega(x,\cdot)\big\rangle = R_\Omega(x,x)$$

յուրաքանչյուր x-ի ($x \in \Omega$) համար:

Քանի որ $b^2(\Omega)$-ն $L^2(\Omega)$ հիլբերտյան տարածության փակ ենթատարածություն է, ապա գոյություն ունի $L^2(\Omega)$-ն $b^2(\Omega)$-ի վրա օրթոգոնալ պրոյեկտող միակ օպերատոր՝ $Q\colon L^2(\Omega) \mapsto b^2(\Omega)$: Դիցուք $u \in L^2(\Omega)$ և $x \in \Omega$: Ունենք՝

$$\begin{aligned} Q[u](x) &= \big\langle Q[u], R_\Omega(x,\cdot)\big\rangle = \big\langle u, R_\Omega(x,\cdot)\big\rangle = \\ &= \int\limits_\Omega u(y) R_\Omega(x,y)\, dV(y) : \end{aligned}$$

Այսպիսով՝ *R_Ω վերարտադրող կորիզի միջոցով առաջանում է օրթոգոնալ պրոյեկտման Q օպերատորը:*

Խնդիր 4.5: Ապացուցել, որ եթե $m \neq k$, ապա $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$-ը օրթոգոնալ է $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$-ին՝ $b^2(B)$ տարածության մեջ:
(Ցուցում՝ օգտվել բևեռային կոորդինատներից և լեմմա 3.2-ից):

§ 25. Վերարտադրող կորիզը գնդի համար

Այս պարագրաֆում մենք կստանանք վերարտադրող կորիզի բացահայտ տեսքը միավոր գնդի համար: Ինչպես հետևում է վերը բերած դատողություններից, դրա համար բավական է գտնել $b^2(B)$-ի որևէ օրթոգոնալ բազիս, կազմել (4.10) շարքը և փորձել բացահայտ տեսքով ներկայացնել նրա գումարը: Այդպիսի մոտեցումը իրագործելի է $n = 2$ դեպքում (տես խնդիրներ 4.6 և 4.7), սակայն $n > 2$ դեպքում $b^2(B)$-ում օրթոգոնալ բազիս կառուցելը հեշտ չէ: Այդ դժվարությունը շրջանցելու նպատակով հիշենք, որ § 12-ում ներմուծած զոնալ հարմոնիկները վերարտադրող կորիզներ են $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ պարածությունների համար: Ըստ (3.17)-ի՝ կամայական $u \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ ֆունկցիայի դեպքում

$$u(x) = \int_S u(\zeta) Z_m(x, \zeta)\, d\sigma(\zeta) \tag{4.11}$$

յուրաքանչյուր x-ի $\left(x \in \mathbb{R}^n\right)$ համար: Օգտվելով բևեռային կոորդինատներից, մենք կստանանք (4.11)-ի անալոգը, որում ինտեգրումը S-ի փոխարեն կատարվում է B-ով:

Շարունակենք Z_m զոնալ հարմոնիկը որպես $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$-ում որոշված ֆունկցիա: Մենք դա կկատարենք՝ շարունակելով Z_m-ը որպես համասեռ բազմանդամ ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի, այսինքն՝

$$Z_m(x, y) = |x|^m |y|^m Z_m(x/|x|, y/|y|) :$$

Եթե x-ը կամ y-ը 0 է, ապա $m > 0$ դեպքում վերցնենք $Z_m(x, y) = 0$, իսկ $m = 0$ դեպքում՝ $Z_0 \equiv 1$: Այդպիսի սահմանումներով յուրաքանչյուր ֆիքսած $x \in \mathbb{R}^n$ կետի համար $Z_m(x, \cdot) \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ և, բացի դրանից, $Z_m(x, y) = Z_m(y, x)$:

Այժմ արտածենք (4.11)-ի անալոգը, որում ինտեգրումը կատարվում է B-ով: Յուրաքանչյուր u-ի համար $\left(u \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)\right)$ ունենք՝

$$\begin{aligned}
&\int_B u(y) Z_m(x, y)\, dV(y) = \\
&= nV(B) \int_0^1 r^{n-1} \int_S u(r\zeta) Z_m(x, r\zeta)\, d\sigma(\zeta) dr = \\
&= nV(B) \int_0^1 r^{n+2m-1} \int_S u(\zeta) Z_m(x, \zeta)\, d\sigma(\zeta) dr =
\end{aligned}$$

$$= nV(B)u(x)\int_0^1 r^{n+2m-1}dr = \frac{nV(B)}{n+2m}\,u(x)$$

ամեն մի $x \in \mathbb{R}^n$ կետի համար: Այլ կերպ ասած, յուրաքանչյուր u-ի համար $u(x)$-ը u-ի և $(n+2m)Z_m(x,\cdot)/\big(nV(B)\big)$-ի սկալյար արտադրյալն է:

Գիտենք, որ եթե $m \neq k$, ապա $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$-ը օրթոգոնալ է $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$-ին $b^2(B)$ տարածության մեջ (տես խնդիր 4.5-ը): Ուրեմն, եթե u-ն M աստիճանի հարմոնիկ բազմանդամ է, ապա $u(x)$-ը u-ի սկալյար արտադրյալն է $\sum_{m=0}^{M}(n+2m)Z_m(x,\cdot)/\big(nV(B)\big)$-ի հետ: Վերցնելով այստեղ $M = \infty$, ստանում ենք գնդի համար վերարտադրող կորիզի հավանական թեկնածու: Թեորեմ 4.8-ը (տես ստորև) ցույց է տալիս, որ այդ ենթադրությունը իրագործված է: Նշված թեորեմի ապացուցման համար մեզ պետք է գալու հետևյալ պնդումը՝

Լեմմա 4.2: *Հարմոնիկ բազմանդամների բազմությունը խիտ է $b^2(B)$-ում:*

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ եթե $u \in L^2(B,dV)$, ապա $u_r \to u$ $L^2(B,dV)$-ում, երբ $r \to 1$: Իսկապես, երբ $u \in C(\overline{B})$, դա հետևում է հավասարաչափ անընդհատությունից, իսկ ընդհանուր դեպքում՝ $L^2(B,dV)$-ում $C(\overline{B})$-ի խիտ լինելուց: Այսպիսով՝ յուրաքանչյուր $u \in$ $\in b^2(B)$ ֆունկցիա $b^2(B)$-ի նորմով մոտարկվում է $\overline{B}$-ի շրջակայքում հարմոնիկ ֆունկցիաներով: Մյուս կողմից, ըստ հետևանք 3.2-ի, $\overline{B}$-ի շրջակայքում յուրաքանչյուր հարմոնիկ ֆունկցիա հավասարաչափ, հետևաբար նաև $L^2(B,dV)$-ի նորմով, մոտարկվում է հարմոնիկ բազմանդամներով: □

Թեորեմ 4.8: *Կամայական $x, y \in B$ կետերի համար*

$$R_B(x,y) = \frac{1}{nV(B)}\sum_{m=0}^{\infty}(n+2m)Z_m(x,y), \tag{4.12}$$

ընդ որում, յուրաքանչյուր $K \subset B$ կոմպակտ բազմության համար շարքը զուգամիտում է բացարձակ և հավասարաչափ $K \times B$-ի վրա:

Ապացույց: Ֆիքսած n-ի դեպքում (3.16)-ից հետևում է, որ գոյություն ունի այնպիսի C հաստատուն, որ

$$|Z_m(x,y)| = |x|^m|y|^m\big|Z_m(x/|x|, y/|y|)\big| \leqslant$$
$$\leqslant |x|^m|y|^m h_m \leqslant Cm^{n-2}|x|^m|y|^m$$

կամայական $x, y \in B \setminus \{0\}$ կետերի համար: Այստեղ h_m-ը $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ պարածության չափողականությունն է, և մենք օգտվել ենք (3.12) անհավասարությունից: Այսպիսով՝ (4.12)-ի աջ մասն ունի զուգամիտության բոլոր պահանջվող պայմանները:

Նշանակենք (4.12)-ի աջ մասը $F(x,y)$-ով: Յուրաքանչյուր $x \in B$ կետի համար $F(x,\cdot)$-ը B-ում սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիա է, մասնավորապես, $F(x,\cdot) \in b^2(B)$:

Այժմ ֆիքսենք $x \in B$: Լեմմա 4.2-ից առաջ կատարած քննարկումից հետևում է, որ $u(x) = \big\langle u, F(x,\cdot)\big\rangle$ կամայական u հարմոնիկ բազմանդամի համար: Քանի որ «արժեքը կետում» ֆունկցիոնալը անընդհատ է $b^2(B)$-ում, իսկ հարմոնիկ բազմանդամները խիտ են $b^2(B)$-ում, ապա $u(x) = \big\langle u, F(x,\cdot)\big\rangle$ բոլոր $u \in b^2(B)$ ֆունկցիաների համար: Այսպիսով՝ F-ը վերարտադրող կորիզն է գնդի համար: □

Մեր մոտակա նպատակն է՝ գտնել (4.12) շարքի գումարը բացահայտ տեսքով: Դրա համար հիշեցնենք (3.20) բանաձևը Պուասոնի կորիզի համար, ըստ որի բոլոր $x \in B$, և $\zeta \in S$ կետերի համար

$$P(x,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\zeta) :$$

Այստեղից հետևում է, որ $x, y \in B$ կետերի համար

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(|y|x, y/|y|) =$$
$$= P(|y|x, y/|y|) =$$
$$= \frac{1-|x|^2|y|^2}{\big(1-2x\cdot y+|x|^2|y|^2\big)^{n/2}}\ :$$

Պուասոնի կորիզի որոշման փիրույթը ընդլայնենք հետևյալ ձևով՝

$$P(x,y) = \frac{1-|x|^2|y|^2}{\big(1-2x\cdot y+|x|^2|y|^2\big)^{n/2}}, \tag{4.13}$$

երբ $x, y \in B$: (4.13)-ից երևում է, որ $P(x,y) = P(y,x)$ բոլոր $x, y \in B$-երի համար, բացի դրանից, $P(x,y) = P(|x|y, x/|x|)$: Վերջին հավասարությունից հետևում է, որ $x \in B$ ֆիքսած կետի համար $P(x,\cdot)$-ը հարմոնիկորեն շարունակվում է $\overline{B}$-ի վրա:

Վերադառնալով (4.12)-ին, նկատում ենք, որ՝

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2mZ_m(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\, t^{2m} Z_m(x,y)\Big|_{t=1} =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} t^{2m} Z_m(x,y)\Big)\Big|_{t=1} =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(tx,ty)\Big)\Big|_{t=1} = \frac{d}{dt}\, P(tx,ty)\Big|_{t=1}\ :$$

Այստեղից և (4.12)-ից ստանում ենք

$$R_B(x,y) = \frac{nP(x,y) + \frac{d}{dt}\, P(tx,ty)\Big|_{t=1}}{nV(B)}\ : \tag{4.14}$$

Այս պարզ ներկայացումը թույլ է տալիս ստանալ $R_B(x,y)$-ի բացահայտ տեսքը:

Թեորեմ 4.9: *Դիցուք $x, y \in B$: Այդ դեպքում՝*

$$R_B(x,y) = \frac{(n-4)|x|^4|y|^4 + (8x\cdot y - 2n - 4)|x|^2|y|^2 + n}{nV(B)\big(1 - 2x\cdot y + |x|^2|y|^2\big)^{1+n/2}} :$$

Ապացույց: Օգտվելով (4.13) տեսքից, պետք է պարզապես հաշվել (4.14)-ը: □

Խնդիր 4.6: Դիցուք $n = 2$ և $u_k(re^{i\theta}) = r^{|k|}e^{ik\theta}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$: Գտնել այնպիսի c_k հաստատուններ, որ $\{c_k u_k\}$ համակարգը լինի օրթոնորմալ բազիս $b^2(B)$-ում:

Խնդիր 4.7: Օգտվելով (4.10)-ից և նախորդ խնդրից, ստանալ վերարտադրող կորիզի բացահայտ տեսքը միավոր շրջանի համար:

Գրականություն

1. **Sheldon Axler, Paul Bourdon, Wade Ramey,** *Harmonic function theory*, Springer-Verlag, New York, Inc., 2001.
2. **Walter Rudin,** *Real and complex analysis*, third edition, Mc–Graw-Hill, New York, 1987.
3. **А. Ф. Тиман, В. Н. Трофимов,** *Введение в теорию гармонических функций*, М., Наука, 1968.
4. **Ա. Ի. Պետրոսյան,** *Բազմաչափ կոմպլեքս անալիզի հիմունքները*, ԵՊՀ հրապարակչություն, Երևան, 2007:

Բովանդակություն

ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ ԱԼԲԵՐՏ ԻՍՐԱՅԵԼԻ

ՀԱՐՄՈՆԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Ուսումնական ձեռնարկ

Հրատ. խմբագիր՝ Մ. Գ. Յավրյան
Տեխ. խմբագիր՝ Վ. Ջ. Բդոյան

Ստորագրված է տպագրության 09. 04. 10 թ.:
Չափսը՝ 60 × 84 1/16: Թուղթը՝ օֆսեթ: Հրատ. 5.2 մամուլ,
տպագր. 6.25 մամուլ = 5.8 պայմ. մամուլի:
Տպաքանակ՝ 100: Պատվեր՝ :

Երևանի պետական համալսարանի հրատարակչություն
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Երևանի պետական համալսարանի տպագրական
արտադրամաս, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1