



ISSN 1829-2992

# ԱԿՈՒՆՔ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ  
ԻՋԵՎԱՆԻ ՄԱՍՆԱՃՅՈՒՂ

ԳԻՏԱԿԱՆ ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ  
ՀԱՎԵԼՎԱԾ



ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ  
ԻՋԵՎԱՆԻ ՄԱՄՆԱՃՅՈՒՂ

Ա Կ Ո Ւ Ն Ք

ԳԻՏԱԿԱՆ ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

ՀԱՎԵԼՎԱԾ

ԵՐԵՎԱՆ  
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ  
2012

Հրատարակության է երաշխավորել  
ԵՊՀ Իջևանի մասնաճյուղի գիտխորհուրդը

Գլխավոր խմբագիր՝

*պատմ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր ԱՇՈՏ ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ*

Գրախոսներ՝

*Աշոտ Գրիգորի Ղալունյան* – ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ  
*Նորայր Պատվականի Հարությունյան* – ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ  
*Գևորգ Սարգսի Սիմոնյան* – քիմ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ

Ակունք. Գիտական հոդվածների ժողովածու; Գլխ. խմբ.՝ Ա.Ա.  
Ներսիսյան. – Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2012 թ. – 98 էջ:

- © ԵՊՀ հրատարակչություն, 2012թ.
- © Հեղ. խումբ, 2012թ.

ԼԱՊԼԱՍԻ ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ  
ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա.Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ

Աշխատանքը հանդիսանում է Իջևանի գիտական հանդեսի առաջին համարում տպագրված նյութի շարունակությունը և նվիրված է ինտեգրալ ձևափոխություններից Լապլասի ձևափոխությանը և նրա կիրառություններին մասնակի ածանցյալներով հավասարումներում:

**Լապլասի ձևափոխության կիրառությունները**

Նախ հիշեցնենք հիմնական թեորեմը՝

**Թեորեմ 1.** Դիցուք  $F(t)$  ֆունկցիան որոշված է  $(-\infty; +\infty)$  միջակայքում, անընդհատ է  $[0; +\infty)$ -ում,  $F(t) = 0, t < 0$  և յուրաքանչյուր վերջավոր հատվածում դիֆերենցելի է բացառությամբ վերջավոր թվով կետերի, որտեղ ֆունկցիան ունի վերջավոր միակողմանի սահմաններ և միակողմանի ածանցյալներ:

Ենթադրվում է նաև, որ  $F(t)$ -ն թույլ է տալիս ամենաշատը էքսպոնենցիալ աճ՝  $|F(t)| \leq M \cdot e^{-a \cdot t} \quad (a > 0)$ :

Այս պայմանների դեպքում իմաստ ունի

$$L[F](s) = \int_0^{+\infty} F(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = f(s) \quad (s = x + i \cdot y, x > a) \quad (1)$$

ինտեգրալը, որը կոչվում է Լապլասի (ուղիղ) ձևափոխություն: Այս ձևափոխությունը հակադարձելի է՝

$$L^{-1}[f](t) = F(t) = \begin{cases} \frac{v.p.}{2\pi \cdot i} \int_{x-i\cdot\infty}^{x+i\cdot\infty} f(s) \cdot e^{s \cdot t} \cdot ds, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2)$$

(Լապլասի հակադարձ ձևափոխություն):  $v.p.$  - նշանակում է ինտեգրալը գլխա-

վոր իմաստով՝  $v.p. \int_{x-i\cdot\infty}^{x+i\cdot\infty} g(s) ds = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{x-i \cdot A}^{x+i \cdot A} g(s) ds$ :

(1), (2)-ում  $F(t)$ -ն կոչվում է նախապատկեր (գրվում է մեծատառով), իսկ  $f(s)$ -ը պատկեր (գրվում է համապատասխան փոքրատառով): Այդ փաստը գրվում է հետևյալ կերպ՝  $F(t) \circ \rightarrow f(s)$ , կամ՝  $f(s) \leftarrow \circ F(t)$ :

Այժմ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝ գտնել  $U(x, t)$  ֆունկցիան ( $x$  կետում, ժամանակի  $t$  պահին եղած ջերմաստիճանը), որը բավարարում է ջերմահաղորդականության հավասարմանը՝

$$U_t = a^2 U_{xx} \quad (x \in (0; l), t > 0): \quad (3)$$

Որպեսզի հետագա գրելաձևը հեշտանա կհամարենք, որ՝  $a = l$  և բավարարում է հետևյալ սկզբնական և եզրային պայմաններին՝



$$U(x; +0) = U_0(x), U(+0; t) = A(t), U(l-0; t) = B(t): \quad (4)$$

Կենթադրենք նաև, որ բոլոր նշված ֆունկցիաները բավարարում են թեորեմ 1-ի պայմաններին: Կիրառենք (3) հավասարման և երկու կողմի վրա Լապլասի օպերատորը ըստ  $t$  փոփոխականի նշանակելով  $L_t[U(x; t)](x; s) = u(x; s)$ , հաշվի առնելով (4)-ը, կստանանք՝

$$su(x, s) - U_0(x) = u_{xx}, \quad (5)$$

$$u(+0, s) = a(s), u(l-0; s) = b(s): \quad (6)$$

Նախ կենթադրենք, որ  $U_0(x) \equiv 0$ , այնուհետև, որ  $A(t) \equiv B(t) \equiv 0 \Rightarrow a(s) \equiv b(s) \equiv 0$ : Ստացված երկու խնդիրների լուծումների գումարը կլինի սկզբնական խնդրի լուծում:

Առաջին դեպքում ունենք՝

$$u_{xx}(x; s) = su(x; s), \quad (7)$$

որի լուծումը որոնենք  $u(x; s) = e^{\lambda x}$  տեսքով: Ստացվում է հետևյալ բնութագրիչ հավասարումը՝  $\lambda^2 = s \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{s} \Rightarrow u(x; s) = \alpha e^{\sqrt{s}x} + \beta e^{-\sqrt{s}x}$ : Պահանջենք, որ բավարարվեն (6) պայմանները, կստանանք՝

$$u(x; s) = \frac{a(s)e^{-2\sqrt{s}l} - b(s)e^{-\sqrt{s}l}}{e^{-2\sqrt{s}l} - 1} e^{-\sqrt{s}x} + \frac{b(s)e^{-\sqrt{s}l}}{e^{-2\sqrt{s}l} - 1} e^{\sqrt{s}x}: \quad (8)$$

Ստացված ֆունկցիայի նախապատկերը գրվում է տրանսդենտենտ ֆունկցիաներով, կիսանվերջ ձողի դեպքում խնդիրը ունի ավելի պարզ լուծում: (8)-ում  $l$ -ը ձգտեցնենք  $+\infty$ -ի, կստանանք՝

$$u(x; s) = a(s)e^{-\sqrt{s}x}:$$

Հետագայում ցույց կտանք, որ

$$e^{-x\sqrt{s}} \leftarrow 0 \quad \frac{x}{2\sqrt{pt^{\frac{3}{2}}}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \equiv \psi(x; t): \quad (9)$$

Հաշվի առնելով այն, որ պատկերների արտադրյալի նախապատկերը հավասար է պատկերների նախապատկերների փաթեթին, կստանանք խնդրի լուծումը՝

$$U(x, t) = \frac{x}{2\pi} \int_0^t \frac{A_0(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} d\tau: \quad (10)$$

Այժմ դիտարկենք հաջորդ դեպքը՝

$$U(x; +0) = U_0(x) \quad \text{և} \quad U(+0; t) = U(l-0; t) \equiv 0: \quad (11)$$

Կիրառենք (5)-ի վրա Լապլասի օպերատորը ըստ  $x$  փոփոխականի, նշանակելով՝  $L_x(u(x; s))(\xi) \equiv v(\xi; s)$ , կստանանք՝

$$\xi^2 v(\xi; s) - \xi u(+0; s) - u'_x(+0; s) = sv(\xi; s) - u_0(\xi): \quad (12)$$

Հաշվի առնելով, որ  $U(+0; t) \equiv 0 \Rightarrow u(+0; s) \equiv 0$ , (12)-ից կստանանք՝

$$(\xi^2 - s)v(\xi; s) = U'_x(+0; s) - u_0(\xi): \quad (13)$$

Այստեղից, կստանանք՝

$$v(\xi; s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \left( e^{\sqrt{s}x} - e^{-\sqrt{s}x} \right) u'_x(+0; s) - \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_0^x \left( e^{\sqrt{s}(x-\eta)} - e^{-\sqrt{s}(x-\eta)} \right) u_0(\eta) d\eta : \quad (14)$$

Հաշվի առնելով, որ  $u(l-0; s) = 0$ , կստանանք՝

$$\frac{1}{2\sqrt{s}} \left( e^{\sqrt{s}l} - e^{-\sqrt{s}l} \right) u'_x(+0; s) = \frac{1}{2s} \int_0^l \left( e^{\sqrt{s}(l-\eta)} - e^{-\sqrt{s}(l-\eta)} \right) u_0(\eta) d\eta :$$

Տեղադրելով ստացված  $u'_x(+0; s)$  ֆունկցիան (14)-ի մեջ և ձգտեցնելով  $l$ -ը  $+\infty$ -ի, կստանանք՝

$$\begin{aligned} u(x; s) &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_0^{+\infty} u_0(\eta) \left( e^{\sqrt{s}(x-\eta)} - e^{-\sqrt{s}(x+\eta)} \right) d\eta - \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_0^x u_0(\eta) \left( e^{\sqrt{s}(x-\eta)} - e^{-\sqrt{s}(x-\eta)} \right) d\eta = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_x^{+\infty} u_0(\eta) \left( e^{\sqrt{s}(x-\eta)} - e^{-\sqrt{s}(x+\eta)} \right) d\eta + \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_0^x u_0(\eta) \left( e^{-\sqrt{s}(x-\eta)} - e^{-\sqrt{s}(x+\eta)} \right) d\eta \end{aligned} \quad (15)$$

Ստորև կապացուցենք նաև, որ՝

$$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\alpha\sqrt{s}} \leftarrow o \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} = \chi(\alpha; t) \quad (\alpha \geq 0) : \quad (16)$$

Հաշվի առնելով (16)-ը, (15)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\alpha\sqrt{s}} \leftarrow o \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} = \chi(\alpha; t) \quad (\alpha \geq 0) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} U(x; t) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} U_0(\eta) (\chi(\eta-x) - \chi(\eta+x)) d\eta = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} U_0(\eta) \left( e^{-\frac{(\eta-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(\eta+x)^2}{4t}} \right) d\eta : \end{aligned} \quad (18)$$

Հաշվի առնելով նաև (10)-ը, վերջնականապես ստանում ենք՝

$$U(x, t) = \frac{x}{2\pi} \int_0^t \frac{A_0(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} d\tau + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} U_0(\eta) \left( e^{-\frac{(\eta-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(\eta+x)^2}{4t}} \right) d\eta : \quad (19)$$

Մնում է հիմնավորել (9)-ը և (16)-ը: Նախ նկատենք, որ (16)-ը, ստացվում է (9)-ից, նրա երկու կողմը ածանցելով ըստ  $\alpha$ -ի: Այսպիսով պետք է ապացուցել, որ  $\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\alpha\sqrt{s}} \leftarrow o \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} = \chi(\alpha; t) \quad (\alpha \geq 0)$ : Այսինքն հարկավոր է հաշվել հետևյալ

$$\text{ի նտեգրալը՝ } I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4t} + s\tau\right)}}{\sqrt{t}} dt : \text{ Կատարենք նշանակում՝ } \sqrt{t} \equiv \tau : \text{ Կստանանք՝}$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4\tau^2} + s\tau^2\right)} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\sqrt{s}\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{s}\tau - \frac{\alpha}{2\tau}\right)^2} d\tau : \text{ Կատարենք նոր նշանակում՝}$$

$$\sqrt{s}\tau - \frac{\alpha}{2\tau} = z \Rightarrow \sqrt{s}\tau^2 - z\tau - \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \tau = \frac{z + \sqrt{z^2 + 2\alpha\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}} \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{z}{2\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{z^2 + 2\alpha\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}} \Rightarrow d\tau = \frac{1}{2\sqrt{s}} dz + \frac{1}{2\sqrt{s}} \frac{zdz}{\sqrt{z^2 + 2\alpha\sqrt{s}}}$$

Կստանանք՝

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{s}} e^{-\alpha\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} d\tau + \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{s}} e^{-\alpha\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ze^{-z^2}}{\sqrt{z^2 + 2\alpha\sqrt{s}}} d\tau$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\alpha\sqrt{s}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} d\tau = \sqrt{\pi} \right)$$

Այստեղ հաշվի առանք, որ  $\frac{ze^{-z^2}}{\sqrt{z^2 + 2\alpha\sqrt{s}}}$  ֆունկցիան կենտ է, ուստի

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ze^{-z^2}}{\sqrt{z^2 + 2\alpha\sqrt{s}}} dz = 0 :$$

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Г. Деч, *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа*, М., 1970.
2. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, М., Наука, 1973.
3. П.И. Лизоркин, *Курс дифференциальных и интегральных уравнений*, М., Наука, 1981.

**Ա.Գ. Գալումյան – Մատենագրություն** – Բաժնի աշխատանքները նվիրված են Լապլասի ձևափոխման կիրառությանը մաթեմատիկական և ֆիզիկական խնդիրներում: Բաժնի աշխատանքները նվիրված են Լապլասի ձևափոխման կիրառությանը մաթեմատիկական և ֆիզիկական խնդիրներում:

---

## ОБ ОДНОМ ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРА $W_{R, \bar{R}}$ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

Р.Р. КАМАЛЯН

В работе рассматриваются неориентированные связные графы [1] без кратных ребер и петель. Множество вершин и ребер графа  $G$  обозначаем через  $V(G)$  и  $E(G)$ , соответственно. Множество всех подграфов графа  $G$  обозначаем через  $\tau(G)$ . Для графа  $G$  и подмножества  $E_0 \subseteq E(G)$  его ребер положим  $\chi(G, E_0) \equiv \{H \in \tau(G) / E(H) = E_0\}$ , и пусть  $\psi(G, E_0)$  есть граф с минимальным числом вершин, удовлетворяющий условию  $\psi(G, E_0) \in \chi(G, E_0)$ .

Функция  $\varphi: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$  называется правильной  $t$ -раскраской графа  $G$ , ( $t \in \mathbb{N}$ ), если выполнены условия:

- 1) для  $\forall i, 1 \leq i \leq t, \exists e^{(i)} \in E(G)$  с  $\varphi(e^{(i)}) = i$ ,
- 2) для любых двух смежных ребер  $e' \in E(G), e'' \in E(G)$   $\varphi(e') \neq \varphi(e'')$ .

Хроматический класс [1] графа  $G$  обозначаем через  $\chi'(G)$ .

Если  $x \in V(G)$ , и  $\varphi$  – правильная  $t$ -раскраска графа  $G$ ,  $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$ , то через  $S(x, \varphi)$  обозначаем множество цветов, используемых в раскраске  $\varphi$  для ребер  $G$ , инцидентных вершине  $x$ .

Если  $D$  – непустое конечное подмножество множества  $\mathbb{N}$ , то через  $l(D)$  и  $L(D)$  обозначаем наименьший и наибольший элемент  $D$ , соответственно. Непустое конечное подмножество  $D$  множества  $\mathbb{N}$  называется интервалом, если из  $l(D) \leq t \leq L(D)$ ,  $t \in \mathbb{N}$  следует  $t \in D$ .

**Определение 1.** Правильная  $t$ -раскраска  $\varphi$  графа  $G$  обладает  $(R, \bar{R})$ -свойством ( $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$  и  $R \subseteq V(G)$ ), если для  $\forall x \in V(G)$   $S(x, \varphi)$  является интервалом тогда и только тогда, когда  $x \in R$ .

**Определение 2.** Подмножество  $R \subseteq V(G)$  назовем интервально-обособляемым подмножеством вершин графа  $G$ , если  $\exists t_0, \chi'(G) \leq t_0 \leq |E(G)|$ , при котором существует обладающая  $(R, \bar{R})$ -свойством  $t_0$ -раскраска графа  $G$ .

**Определение 3.** Для графа  $G$  и интервально-обособляемого подмножества  $R \subseteq V(G)$  его вершин обозначим через  $W_{R, \bar{R}}(G)$  наибольшее значение  $t$ , при котором существует обладающая  $(R, \bar{R})$ -свойством  $t$ -раскраска графа  $G$ .

Задачи нахождения интервально-обособляемых подмножеств  $R$  вершин графов, построения раскрасок, обладающих  $(R, \bar{R})$ -свойством, а также методы оценивания возможного количества цветов в таких раскрасках представляют интерес для составителей расписаний спортивных соревнований.



Цель работы состоит в вычислении точного значения параметра  $W_{R,\bar{R}}$  полного графа  $K_n$  при  $n \geq 4$  и  $|R| = n - 2$ .

Всюду в работе считаем, что  $V(K_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

**Лемма.** [2] При  $n \geq 4$  и  $R \subset V(K_n)$ , удовлетворяющем условию  $|R| = n - 2$ ,  $W_{R,\bar{R}}(K_n) \geq 2n - 2$ .

**Теорема.** При  $n \geq 4$  и  $R \subset V(K_n)$ , удовлетворяющем условию  $|R| = n - 2$ ,  $W_{R,\bar{R}}(K_n) = 2n - 2$ .

**Доказательство.**

**Случай 1.**  $n \geq 8$ . Из леммы вытекает, что для доказательства нужного равенства достаточно доказать, что для любого  $R \subset V(K_n)$ , удовлетворяющего условию  $|R| = n - 2$ , верно неравенство  $W_{R,\bar{R}}(K_n) \leq 2n - 2$ .

Предположим противное: существуют  $n_0 \geq 8$ ,  $h_0 \geq 1$ ,  $R_0 \subset V(K_{n_0})$  с  $|R_0| = n_0 - 2$ , при которых существует правильная  $(2n_0 - 2 + h_0)$ -раскраска  $\varphi_0$  графа  $K_{n_0}$ , обладающая  $(R_0, \bar{R}_0)$ -свойством.

Очевидно, существуют ребра  $e_1, e_2, e_3, e_4$  графа  $K_{n_0}$ , для которых  $\varphi_0(e_1) = 1$ ,  $\varphi_0(e_2) = 2$ ,  $\varphi_0(e_3) = 2n_0 - 2$ ,  $\varphi_0(e_4) = 2n_0 - 1$ .

Рассмотрим подграф  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$  графа  $K_{n_0}$ . Ясно, что этот подграф изоморфен одному из графов  $G_1, G_2, \dots, G_{10}$ , приведенных на рис. 1

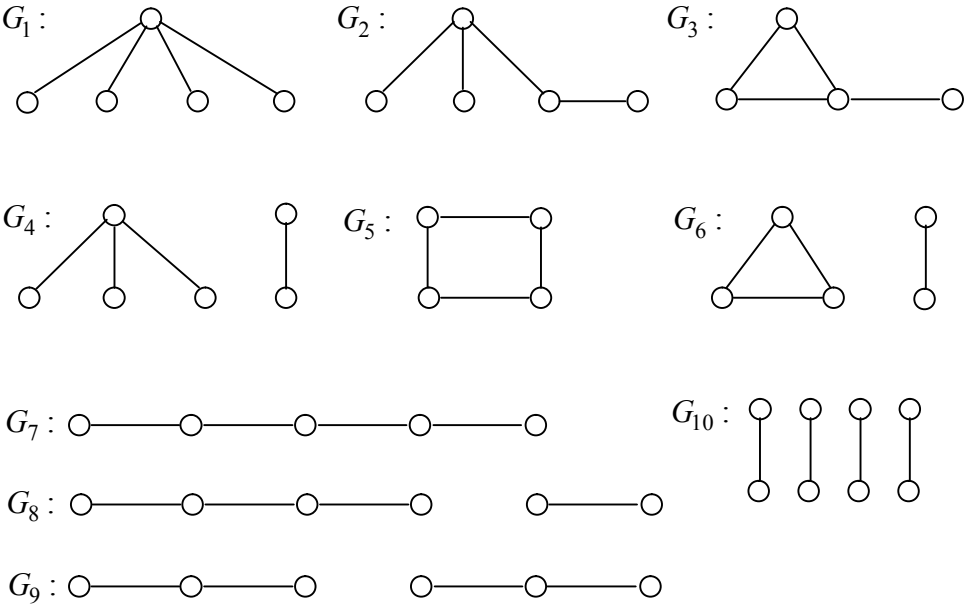


Рис. 1.

**Случай 1.1.**  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}) \cong G_1$ .

Без ограничения общности можно считать, что вершины подграфа  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$  пронумерованы так, как показано на рис. 2.

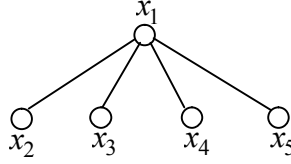


Рис. 2.

В этом случае, без ограничения общности, можно считать, что  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_1, x_3)$ ,  $e_3 = (x_1, x_4)$ ,  $e_4 = (x_1, x_5)$ .

Очевидно,  $S(x_1, \varphi_0)$  не является интервалом, из чего вытекает, что по меньшей мере одно из следующих двух утверждений является верным:

- 1)  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами,
- 2)  $S(x_3, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  являются интервалами.

Если 1) верно, то

$$\varphi_0((x_2, x_4)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_2, x_4)),$$

что невозможно.

Если 2) верно, то

$$\varphi_0((x_3, x_5)) \leq 2 + (n_0 - 2) = n_0 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_3, x_5)),$$

что невозможно.

**Случай 1.2.**  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}) \cong G_2$ .

Без ограничения общности можно считать, что вершины подграфа  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$  пронумерованы так, как показано на рис. 3.

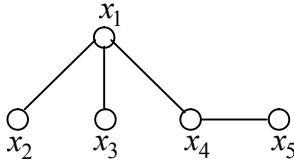


Рис. 3.

**Случай 1.2.1.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_1, x_3)$ ,  $e_3 = (x_1, x_4)$ ,  $e_4 = (x_4, x_5)$ .

Ясно, что  $S(x_1, \varphi_0)$  не является интервалом, и, следовательно, по меньшей мере одно из следующих двух утверждений является верным:

- 1)  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  являются интервалами,
- 2)  $S(x_3, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами.

Если 1) верно, то

$$\varphi_0((x_2, x_5)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_2, x_5)),$$

что невозможно.

Если 2) верно, то

$$\varphi_0((x_3, x_4)) \leq 2 + (n_0 - 2) = n_0 < n_0 + 1 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 3) \leq \varphi_0((x_3, x_4)),$$

что невозможно.

**Случай 1.2.2.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_1, x_3)$ ,  $e_3 = (x_4, x_5)$ ,  $e_4 = (x_1, x_4)$ .

Ясно, что  $S(x_1, \varphi_0)$  не является интервалом, и, следовательно, по меньшей мере одно из следующих двух утверждений является верным:

- 1)  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  являются интервалами,
- 2)  $S(x_3, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами.

Если 1) верно, то

$$\varphi_0((x_2, x_5)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_2, x_5)),$$

что невозможно.

Если 2) верно, то

$$\varphi_0((x_3, x_4)) \leq 2 + (n_0 - 2) = n_0 < n_0 + 1 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 3) \leq \varphi_0((x_3, x_4)),$$

что невозможно.

**Случай 1.3.**  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}) \cong G_3$ .

Без ограничения общности можно считать, что вершины подграфа  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$  пронумерованы так, как показано на рис. 4.

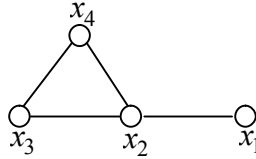


Рис. 4.

**Случай 1.3.1.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_2, x_3)$ ,  $e_3 = (x_2, x_4)$ ,  $e_4 = (x_3, x_4)$ .

Ясно, что  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_3, \varphi_0)$  не являются интервалами, и, следовательно,  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами. Отсюда  $\varphi_0((x_1, x_4)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 3) \leq \varphi_0((x_1, x_4))$ , что невозможно.

**Случай 1.3.2.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_2, x_3)$ ,  $e_3 = (x_3, x_4)$ ,  $e_4 = (x_2, x_4)$ .

Рассуждение дословно повторяет рассуждение для случая 1.3.1.

**Случай 1.3.3.**  $e_1 = (x_2, x_4)$ ,  $e_2 = (x_1, x_2)$ ,  $e_3 = (x_2, x_3)$ ,  $e_4 = (x_3, x_4)$ .

Ясно, что  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  не являются интервалами, и, следовательно,  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_3, \varphi_0)$  являются интервалами. Отсюда  $\varphi_0((x_1, x_3)) \leq 2 + (n_0 - 2) = n_0 < n_0 + 1 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 3) \leq \varphi_0((x_1, x_3))$ , что невозможно.

**Случай 1.3.4.**  $e_1 = (x_2, x_4)$ ,  $e_2 = (x_1, x_2)$ ,  $e_3 = (x_3, x_4)$ ,  $e_4 = (x_2, x_3)$ .

Рассуждение дословно повторяет рассуждение для случая 1.3.3.

**Случай 1.4.**  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}) \cong G_4$ .

Без ограничения общности можно считать, что вершины подграфа  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$  пронумерованы так, как показано на рис. 5.

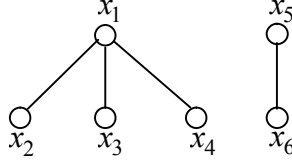


Рис. 5.

**Случай 1.4.1.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_1, x_3)$ ,  $e_3 = (x_1, x_4)$ ,  $e_4 = (x_5, x_6)$ .

Ясно, что  $S(x_1, \varphi_0)$  не является интервалом, и, следовательно, по меньшей мере одно из следующих двух утверждений является верным:

- 1)  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами,
- 2)  $S(x_3, \varphi_0)$  и  $S(x_6, \varphi_0)$  являются интервалами.

Если 1) верно, то

$$\varphi_0((x_2, x_4)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_2, x_4)),$$

что невозможно.

Если 2) верно, то

$$\varphi_0((x_3, x_6)) \leq 2 + (n_0 - 2) = n_0 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_3, x_6)),$$

что невозможно.

**Случай 1.4.2.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_1, x_3)$ ,  $e_3 = (x_5, x_6)$ ,  $e_4 = (x_1, x_4)$ .

Ясно, что  $S(x_1, \varphi_0)$  не является интервалом, и, следовательно, по меньшей мере одно из следующих двух утверждений является верным:

- 1)  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_6, \varphi_0)$  являются интервалами,
- 2)  $S(x_3, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами.

Если 1) верно, то

$$\varphi_0((x_2, x_6)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_2, x_6)),$$

что невозможно.

Если 2) верно, то

$$\varphi_0((x_3, x_4)) \leq 2 + (n_0 - 2) = n_0 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_3, x_4)),$$

что невозможно.

**Случай 1.5.**  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}) \cong G_5$ .

Без ограничения общности можно считать, что вершины подграфа  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$  пронумерованы так, как показано на рис. 6.

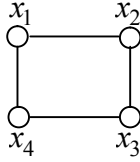


Рис. 6.

**Случай 1.5.1.**  $e_1 = (x_1, x_4)$ ,  $e_2 = (x_1, x_2)$ ,  $e_3 = (x_2, x_3)$ ,  $e_4 = (x_3, x_4)$ .

Ясно, что  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  не являются интервалами, и, следовательно,  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_3, \varphi_0)$  являются интервалами. Отсюда следует, что  $\varphi_0((x_1, x_3)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_1, x_3))$ , что невозможно.

**Случай 1.5.2.**  $e_1 = (x_1, x_4)$ ,  $e_2 = (x_1, x_2)$ ,  $e_3 = (x_3, x_4)$ ,  $e_4 = (x_2, x_3)$ .

Рассуждение дословно повторяет рассуждение для случая 1.5.1.

**Случай 1.6.**  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}) \cong G_6$ .

Без ограничения общности можно считать, что вершины подграфа  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$  пронумерованы так, как показано на рис. 7.

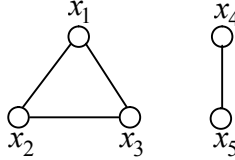


Рис. 7.

**Случай 1.6.1.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_2, x_3)$ ,  $e_3 = (x_1, x_3)$ ,  $e_4 = (x_4, x_5)$ .

Ясно, что  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_3, \varphi_0)$  не являются интервалами, и, следовательно,  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами. Отсюда следует, что  $\varphi_0((x_2, x_4)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_2, x_4))$ , что невозможно.

**Случай 1.6.2.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_2, x_3)$ ,  $e_3 = (x_4, x_5)$ ,  $e_4 = (x_1, x_3)$ .

Ясно, что  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_3, \varphi_0)$  не являются интервалами, и, следовательно,  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами. Отсюда следует, что  $\varphi_0((x_2, x_4)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_2, x_4))$ , что невозможно.

**Случай 1.7.**  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}) \cong G_7$ .

Без ограничения общности можно считать, что вершины подграфа  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$  пронумерованы так, как показано на рис. 8.

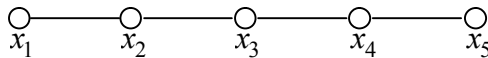


Рис. 8.

**Случай 1.7.1.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_4, x_5)$ ,  $e_3 = (x_2, x_3)$ ,  $e_4 = (x_3, x_4)$ .

Ясно, что  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  не являются интервалами, и, следовательно,  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_3, \varphi_0)$  являются интервалами. Отсюда следует, что  $\varphi_0((x_1, x_3)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 3) \leq \varphi_0((x_1, x_3))$ , что невозможно.

**Случай 1.7.2.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_4, x_5)$ ,  $e_3 = (x_3, x_4)$ ,  $e_4 = (x_2, x_3)$ .

Рассуждение дословно повторяет рассуждение для случая 1.7.1.

**Случай 1.7.3.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_2, x_3)$ ,  $e_3 = (x_3, x_4)$ ,  $e_4 = (x_4, x_5)$ .

Ясно, что  $S(x_3, \varphi_0)$  не является интервалом, и, следовательно, по меньшей мере одно из следующих двух утверждений является верным:

- 1)  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами,
- 2)  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  являются интервалами.

Если 1) верно, то

$$\varphi_0((x_1, x_4)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 3) \leq \varphi_0((x_1, x_4)),$$

что невозможно.

Если 2) верно, то

$$\varphi_0((x_2, x_5)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_2, x_5)),$$

что невозможно.

**Случай 1.7.4.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_2, x_3)$ ,  $e_3 = (x_4, x_5)$ ,  $e_4 = (x_3, x_4)$ .

Ясно, что  $S(x_3, \varphi_0)$  не является интервалом, и, следовательно, по меньшей мере одно из следующих двух утверждений является верным:

- 1)  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами,
- 2)  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  являются интервалами.

Если 1) верно, то

$$\varphi_0((x_2, x_4)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_2, x_4)),$$

что невозможно.

Если 2) верно, то

$$\varphi_0((x_1, x_5)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_1, x_5)),$$

что невозможно.

**Случай 1.7.5.**  $e_1 = (x_2, x_3)$ ,  $e_2 = (x_1, x_2)$ ,  $e_3 = (x_4, x_5)$ ,  $e_4 = (x_3, x_4)$ .

Ясно, что  $S(x_3, \varphi_0)$  не является интервалом, и, следовательно, по меньшей мере одно из следующих двух утверждений является верным:

- 1)  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  являются интервалами,
- 2)  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами.

Если 1) верно, то

$$\varphi_0((x_2, x_5)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_2, x_5)),$$

что невозможно.

Если 2) верно, то

$$\varphi_0((x_1, x_4)) \leq 2 + (n_0 - 2) = n_0 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_1, x_4)),$$

что невозможно.

**Случай 1.8.**  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}) \cong G_8$ .

Без ограничения общности можно считать, что вершины подграфа  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$  пронумерованы так, как показано на рис. 9.

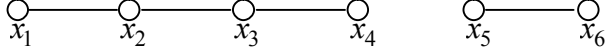


Рис. 9.

**Случай 1.8.1.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_3, x_4)$ ,  $e_3 = (x_2, x_3)$ ,  $e_4 = (x_5, x_6)$ .

Ясно, что  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_3, \varphi_0)$  не являются интервалами, и, следовательно,  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  являются интервалами. Отсюда следует, что  $\varphi_0((x_1, x_5)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_1, x_5))$ , что невозможно.

**Случай 1.8.2.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_3, x_4)$ ,  $e_3 = (x_5, x_6)$ ,  $e_4 = (x_2, x_3)$ .

Ясно, что  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_3, \varphi_0)$  не являются интервалами, и, следовательно,  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  являются интервалами. Отсюда следует, что  $\varphi_0((x_1, x_5)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_1, x_5))$ , что невозможно.

**Случай 1.8.3.**  $e_1 = (x_2, x_3)$ ,  $e_2 = (x_3, x_4)$ ,  $e_3 = (x_1, x_2)$ ,  $e_4 = (x_5, x_6)$ .

Ясно, что  $S(x_2, \varphi_0)$  не является интервалом, и, следовательно, по меньшей мере одно из следующих двух утверждений является верным:

- 1)  $S(x_3, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  являются интервалами,
- 2)  $S(x_4, \varphi_0)$  и  $S(x_6, \varphi_0)$  являются интервалами.

Если 1) верно, то

$$\varphi_0((x_3, x_5)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_3, x_5)),$$

что невозможно.

Если 2) верно, то

$$\varphi_0((x_4, x_6)) \leq 2 + (n_0 - 2) = n_0 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_4, x_6)),$$

что невозможно.

**Случай 1.8.4.**  $e_1 = (x_3, x_4)$ ,  $e_2 = (x_2, x_3)$ ,  $e_3 = (x_1, x_2)$ ,  $e_4 = (x_5, x_6)$ .

Ясно, что  $S(x_2, \varphi_0)$  не является интервалом, и, следовательно, по меньшей мере одно из следующих двух утверждений является верным:

- 1)  $S(x_3, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  являются интервалами,
- 2)  $S(x_4, \varphi_0)$  и  $S(x_6, \varphi_0)$  являются интервалами.

Если 1) верно, то

$$\varphi_0((x_3, x_5)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_3, x_5)),$$

что невозможно.



Если 2) верно, то

$$\varphi_0((x_4, x_6)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_4, x_6)),$$

что невозможно.

**Случай 1.8.5.**  $e_1 = (x_2, x_3)$ ,  $e_2 = (x_3, x_4)$ ,  $e_3 = (x_5, x_6)$ ,  $e_4 = (x_1, x_2)$ .

Ясно, что  $S(x_2, \varphi_0)$  не является интервалом, и, следовательно, по меньшей мере одно из следующих двух утверждений является верным:

- 1)  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами,
- 2)  $S(x_3, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  являются интервалами.

Если 1) верно, то

$$\varphi_0((x_1, x_4)) \leq 2 + (n_0 - 2) = n_0 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_1, x_4)),$$

что невозможно.

Если 2) верно, то

$$\varphi_0((x_3, x_5)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_3, x_5)),$$

что невозможно.

**Случай 1.8.6.**  $e_1 = (x_3, x_4)$ ,  $e_2 = (x_2, x_3)$ ,  $e_3 = (x_5, x_6)$ ,  $e_4 = (x_1, x_2)$ .

Ясно, что  $S(x_2, \varphi_0)$  не является интервалом, и, следовательно, по меньшей мере одно из следующих двух утверждений является верным:

- 1)  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами,
- 2)  $S(x_3, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  являются интервалами.

Если 1) верно, то

$$\varphi_0((x_1, x_4)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_1, x_4)),$$

что невозможно.

Если 2) верно, то

$$\varphi_0((x_3, x_5)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_3, x_5)),$$

что невозможно.

**Случай 1.9.**  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}) \cong G_9$ .

Без ограничения общности можно считать, что вершины подграфа  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$  пронумерованы так, как показано на рис. 10.



Рис. 10.

**Случай 1.9.1.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_4, x_5)$ ,  $e_3 = (x_5, x_6)$ ,  $e_4 = (x_2, x_3)$ .

Ясно, что  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  не являются интервалами, и, следовательно,  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_3, \varphi_0)$  являются интервалами. Отсюда следует, что  $\varphi_0((x_1, x_3)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_1, x_3))$ , что невозможно.

**Случай 1.9.2.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_4, x_5)$ ,  $e_3 = (x_2, x_3)$ ,  $e_4 = (x_5, x_6)$ .

Ясно, что  $S(x_2, \varphi_0)$  и  $S(x_5, \varphi_0)$  не являются интервалами, и, следовательно,  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_3, \varphi_0)$  являются интервалами. Отсюда следует, что  $\varphi_0((x_1, x_3)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_1, x_3))$ , что невозможно.

**Случай 1.9.3.**  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_2, x_3)$ ,  $e_3 = (x_4, x_5)$ ,  $e_4 = (x_5, x_6)$ .

Ясно, что существуют  $i_0$ ,  $j_0$ , удовлетворяющие условиям  $1 \leq i_0 \leq 3$ ,  $4 \leq j_0 \leq 6$ , такие, что  $S(x_{i_0}, \varphi_0)$  и  $S(x_{j_0}, \varphi_0)$  являются интервалами. Нетрудно убедиться, что единственный вариант, при котором не удастся получить противоречие для цвета ребра  $(x_{i_0}, x_{j_0})$ , аналогичное полученным при рассмотрении случаев 1.1 – 1.8, 1.9.1, 1.9.2, – это вариант, при котором  $i_0 = 3$ ,  $j_0 = 4$ . Поэтому до завершения рассуждения для случая 1.9.3 будем считать, что  $S(x_3, \varphi_0)$  и  $S(x_4, \varphi_0)$  являются интервалами.

Теперь, если существует  $l_0$ , где  $1 \leq l_0 \leq 2$ , такое, что  $S(x_{l_0}, \varphi_0)$  является интервалом, то  $\varphi_0((x_{l_0}, x_4)) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_{l_0}, x_4))$ , что невозможно.

Если же  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_2, \varphi_0)$  не являются интервалами, то  $S(x_6, \varphi_0)$  является интервалом, откуда следует, что  $\varphi_0((x_3, x_6)) \leq 2 + (n_0 - 2) = n_0 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_3, x_6))$ , что невозможно.

**Случай 1.10.**  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}) \cong G_{10}$ .

Без ограничения общности можно считать, что вершины подграфа  $\Psi(K_{n_0}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$  пронумерованы так, как показано на рис. 11.

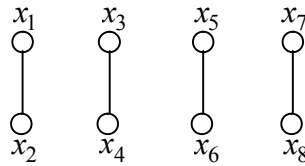


Рис. 11.

Очевидно также, что без ограничения общности можно считать, что  $e_1 = (x_1, x_2)$ ,  $e_2 = (x_3, x_4)$ ,  $e_3 = (x_5, x_6)$ ,  $e_4 = (x_7, x_8)$ .

**Случай 1.10.1.** Существует  $i_0$ ,  $1 \leq i_0 \leq 2$ , такое, что  $S(x_{i_0}, \varphi_0)$  является интервалом.

Ясно, что существует  $j_0$ ,  $5 \leq j_0 \leq 8$ , такое, что  $S(x_{j_0}, \varphi_0)$  также является интервалом. Отсюда следует, что  $\varphi_0((x_{i_0}, x_{j_0})) \leq 1 + (n_0 - 2) = n_0 - 1 < n_0 = 2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_{i_0}, x_{j_0}))$ , что невозможно.

**Случай 1.10.2.**  $S(x_1, \varphi_0)$  и  $S(x_2, \varphi_0)$  не являются интервалами.

Ясно, что  $S(x_3, \varphi_0)$  и  $S(x_7, \varphi_0)$  являются интервалами. Отсюда следует, что  $\varphi_0((x_3, x_7)) \leq 2 + (n_0 - 2) = n_0 < n_0 + 1 = 2n_0 - 1 - (n_0 - 2) \leq \varphi_0((x_3, x_7))$ , что невозможно.

Этим доказательство для случая 1 завершается.

**Случай 2.**  $n = 4$ .

Доказываемое утверждение в этом случае вытекает из леммы и равенства  $|E(K_4)| = 6$ .

**Случай 3.**  $n = 5$ .

Для  $\forall R_0 \subset V(K_5)$ , удовлетворяющего условию  $|R_0| = 3$ , неравенство  $W_{R_0, \bar{R}_0}(K_5) \geq 8$  вытекает из леммы, а неравенство  $W_{R_0, \bar{R}_0}(K_5) \leq 8$  доказывается аналогично случаю 1 – лишь с той разницей, что рассмотрение случаев 1.4, 1.8, 1.9 и 1.10 опускается.

**Случай 4.**  $n = 6$ .

Для  $\forall R_0 \subset V(K_6)$ , удовлетворяющего условию  $|R_0| = 4$ , неравенство  $W_{R_0, \bar{R}_0}(K_6) \geq 10$  вытекает из леммы, а неравенство  $W_{R_0, \bar{R}_0}(K_6) \leq 10$  доказывается аналогично случаю 1 – лишь с той разницей, что рассмотрение случая 1.10 опускается.

**Случай 5.**  $n = 7$ .

Для  $\forall R_0 \subset V(K_7)$ , удовлетворяющем условию  $|R_0| = 5$ , неравенство  $W_{R_0, \bar{R}_0}(K_7) \geq 12$  вытекает из леммы, а неравенство  $W_{R_0, \bar{R}_0}(K_7) \leq 12$  доказывается аналогично случаю 1 – лишь с той разницей, что рассмотрение случая 1.10 опускается.

Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Харари, *Теория графов*, М.: Мир, 1973, 300 с.
2. H.Z. Arakelyan, R.R. Kamalian, *On interval-separable subsets of vertices of a complete graph*, Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 31, Yerevan, 2008, pp. 108–115.

**Ռ.Ռ. Քամալյան – Լրիվ գրաֆների  $W_{R, \bar{R}}$  պարամետրի մի արժեքի մասին:** –

Աշխատանքում գտնված է  $t$ -ի առավելագույն հնարավոր արժեքը, որի դեպքում  $K_n$  ( $n \geq 4$ ) լրիվ գրաֆի համար գոյություն ունի այնպիսի կողային ճիշտ ներկում 1, ...,  $t$  գույներով, որն ապահովում է միջակայքային սպեկտրով այն և միայն այն գագաթները, որոնք պատկանում են գրաֆի գագաթների բազմության նախապես տրված  $(n-2)$ -գագաթանի  $R$  ենթաբազմությանը:

# SOME PROPERTIES OF THE NUMBER OF VERTICES WITH AN INTERVAL SPECTRUM IN PROPER EDGE COLORINGS OF GRAPHS

N.N. DAVTYAN, R.R. KAMALIAN

For simple chains, simple cycles and simple cycles with a chord sharp values are found for boundaries of extremums of the number of vertices with an interval spectrum among the set of proper edge colorings with  $t$  colors under variation of  $t$ .

## 1. Definitions, notations and the formulation of the problem

We consider finite nonoriented connected graphs without loops and multiple edges [1]. The set of vertices of a graph  $G$  is denoted by  $V(G)$ , the set of edges – by  $E(G)$ . The degree of a vertex  $x \in V(G)$  is denoted by  $d_G(x)$ , the greatest degree of a vertex of  $G$  – by  $\Delta(G)$ . The chromatic index [2] of a graph  $G$  is denoted by  $\chi'(G)$ .

For a graph  $G$  and an arbitrary positive integer  $i$ , where  $1 \leq i \leq \Delta(G)$ , let's set  $V^{(i)}(G) \equiv \{x \in V(G) / d_G(x) = i\}$ ,  $\gamma(G) \equiv |V^{(1)}(G)|$ ,  $\Gamma(G) \equiv |V^{(\Delta(G))}(G)|$ .

We denote by  $I_G(x)$  the set of edges of a graph  $G$ , which are incident to a vertex  $x \in V(G)$ .

The cardinality of an arbitrary finite set  $A$  is denoted by  $|A|$ . For an arbitrary nonempty finite subset  $D$  of the set  $N$  we denote by  $l(D)$  and  $L(D)$ , respectively, the least and the greatest element of it. A nonempty finite subset  $D$  of the set  $N$  is an interval if and only if the relations  $l(D) \leq t \leq L(D)$ ,  $t \in N$  imply  $t \in D$ . An interval  $D$  is  $h$ -interval if and only if  $|D| = h$ . An interval  $D$  is denoted by  $Int(q, h)$  if and only if  $l(D) = q$ ,  $|D| = h$ .

A function  $\varphi: E(G) \rightarrow Int(1, t)$  is a proper edge  $t$ -coloring of a graph  $G$  if and only if the following two conditions hold:

- 1) for arbitrary adjacent edges  $e_1 \in E(G)$  and  $e_2 \in E(G)$   $\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$ ;
- 2) for  $\forall i \in Int(1, t)$  there exists  $e \in E(G)$  with  $\varphi(e) = i$ .

For a graph  $G$  and a positive integer  $t$ , where  $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$ , we denote by  $\alpha(G, t)$  the set of all proper edge  $t$ -colorings of  $G$ . Let's set

$$\alpha(G) \equiv \bigcup_{t=\chi'(G)}^{|E(G)|} \alpha(G, t).$$

For  $\forall \varphi \in \alpha(G)$  and an arbitrary subset  $E_0 \subseteq E(G)$  of edges of a graph  $G$  define  $\varphi_{E_0} \equiv \{\varphi(e) / e \in E_0\}$ .

If  $G$  is a graph,  $\varphi \in \alpha(G)$  and  $x \in V(G)$ , then the set  $\varphi_{I_G(x)} \equiv S_G(x, \varphi)$  is a spectrum of the vertex  $x$  of the graph  $G$  at the coloring  $\varphi$ .

For a graph  $G$  and an arbitrary  $\varphi \in \alpha(G)$  set

$$f_G(\varphi) \equiv \left| \left\{ x \in V(G) / S_G(x, \varphi) \text{ is } d_G(x) - \text{interval} \right\} \right|.$$

$\varphi \in \alpha(G)$  is an interval edge coloring [3] of the graph  $G$  if and only if  $f_G(\varphi) = |V(G)|$ .

For an arbitrary positive integer  $t$  we denote by  $\mathfrak{N}_t$  the set of all graphs  $G$  for which an interval edge coloring  $\varphi \in \alpha(G, t)$  exists, and let

$$\mathfrak{N} \equiv \bigcup_{t \geq 1} \mathfrak{N}_t.$$

For a graph  $G \in \mathfrak{N}$  let's define:

$$w(G) \equiv \min \{ t \in N / G \in \mathfrak{N}_t \}, \quad W(G) \equiv \max \{ t \in N / G \in \mathfrak{N}_t \}.$$

For a graph  $G$  with  $\chi'(G) = \Delta(G)$  and a positive integer  $i$  with  $1 \leq i \leq \Delta(G)$  let's define numbers  $m(i, G)$  and  $M(i, G)$  by the following way:

$$m(i, G) \equiv \min \left\{ \left| \{ e \in E(G) / \varphi(e) = i \} \right| / \varphi \in \alpha(G, \Delta(G)) \right\},$$

$$M(i, G) \equiv \max \left\{ \left| \{ e \in E(G) / \varphi(e) = i \} \right| / \varphi \in \alpha(G, \Delta(G)) \right\}.$$

We denote by  $Q_{3,2}$  the set of all such graphs  $G$  with  $\chi'(G) = 3$ , every vertex  $x \in V(G)$  of which satisfies the inequality  $2 \leq d_G(x) \leq 3$ .

For a graph  $G$  and a positive integer  $t$  with  $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$  we define [4] the numbers  $\mu_1(G, t)$  and  $\mu_2(G, t)$  by the following way:

$$\mu_1(G, t) \equiv \min_{\varphi \in \alpha(G, t)} f_G(\varphi), \quad \mu_2(G, t) \equiv \max_{\varphi \in \alpha(G, t)} f_G(\varphi).$$

For a graph  $G$  we define the numbers  $\mu_{11}(G)$ ,  $\mu_{12}(G)$ ,  $\mu_{21}(G)$ ,  $\mu_{22}(G)$  by the following way:

$$\mu_{11}(G) \equiv \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_1(G, t), \quad \mu_{12}(G) \equiv \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_1(G, t),$$

$$\mu_{21}(G) \equiv \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_2(G, t), \quad \mu_{22}(G) \equiv \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_2(G, t).$$

For a positive integer  $n \geq 2$  we denote by  $P_n$  a graph which is isomorphic to a simple chain with  $n$  vertices. Further we assume that some direction is chosen for a movement over the chain  $P_n$  from one of its pendent vertices to the other one, and that all edges from the set  $E(P_n)$  are consecutively numbered in correspondence with the movement mentioned above:  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ .

For a positive integer  $n \geq 3$  we denote by  $C_n$  a graph which is isomorphic to a simple cycle with  $n$  vertices. Further we assume that all edges from the set  $E(C_n)$  are consecutively numbered in correspondence with some fixed direction of the round over the cycle  $C_n$ :  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

For positive integers  $n \geq 4$  and  $j$ , satisfying the inequality  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leq j \leq n-1$ , we define a graph  $C_{n,j}$  by the following way:

$$V(C_{n,j}) \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad E(C_{n,j}) \equiv \{(x_1, x_n), (x_1, x_j)\} \cup \{(x_i, x_{i+1}) / 1 \leq i \leq n-1\}.$$

Evidently, for positive integers  $n \geq 4$  and  $j$ , satisfying the inequality  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leq j \leq n-1$ , the equalities  $|V(C_{n,j})| = n$ ,  $|E(C_{n,j})| = n+1$ ,  $\Delta(C_{n,j}) = 3$  are true.

Using notations  $d_G(x)$ ,  $S_G(x, \varphi)$  and  $f_G(\varphi)$ , we shall omit the symbol of the graph in indices whenever it's clear from the context which graph do we speak about.

Non defined concepts and notations can be found in [1-7].

The aim of the paper consists of calculation of the values of the parameters  $\mu_{11}(G)$ ,  $\mu_{12}(G)$ ,  $\mu_{21}(G)$ ,  $\mu_{22}(G)$  in that cases when the graph  $G$  is isomorphic to  $P_n$  with  $n \geq 2$ , either  $C_n$  with  $n \geq 3$  or  $C_{n,j}$  with  $n \geq 4$  and  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leq j \leq n-1$ .

## 2. Results

**Proposition 1.** For any graph  $G$  and an arbitrary positive integer  $t$ , where  $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$ , the inequality  $\mu_1(G, t) \leq \mu_2(G, t)$  holds.

**Proof.** For any graph  $G$  and an arbitrary positive integer  $t$ , where  $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$ , we have the relation

$$\mu_1(G, t) = \min_{\varphi \in \alpha(G, t)} f_G(\varphi) \leq \max_{\varphi \in \alpha(G, t)} f_G(\varphi) = \mu_2(G, t).$$

Proposition 1 is proved.

**Lemma 1.** If  $G$  is a graph with  $\chi'(G) = \Delta(G)$  then  $\mu_{12}(G) \geq \Gamma(G)$ .

**Proof.** Let's notice that for  $\forall \varphi \in \alpha(G, \Delta(G))$  and  $\forall x \in V^{(\Delta(G))}(G)$   $S_G(x, \varphi)$  is  $\Delta(G)$ -interval and, consequently, for  $\forall \varphi \in \alpha(G, \Delta(G))$   $f_G(\varphi) \geq \Gamma(G)$ . Therefore  $\mu_1(G, \Delta(G)) \geq \Gamma(G)$  and  $\mu_{12}(G) \geq \Gamma(G)$ .

Lemma 1 is proved.

**Theorem 1.** For any graph  $G$  the inequalities

- 1)  $\mu_{11}(G) \leq \mu_{12}(G) \leq \mu_{22}(G)$ ,
- 2)  $\mu_{11}(G) \leq \mu_{21}(G) \leq \mu_{22}(G)$

are true.

**Proof.**

1) By definition,

$$\mu_{11}(G) = \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_1(G, t), \quad \mu_{12}(G) = \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_1(G, t),$$

therefore,

$$\mu_{11}(G) = \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_1(G, t) \leq \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_1(G, t) = \mu_{12}(G).$$

Now let's prove that  $\mu_{12}(G) \leq \mu_{22}(G)$ .

Evidently, there exists  $t_0$  satisfying the inequality  $\chi'(G) \leq t_0 \leq |E(G)|$ , for which the true relation  $\mu_{12}(G) = \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_1(G, t) = \mu_1(G, t_0) = \min_{\varphi \in \alpha(G, t_0)} f_G(\varphi) \leq \max_{\varphi \in \alpha(G, t_0)} f_G(\varphi) = \mu_2(G, t_0) \leq \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_2(G, t) = \mu_{22}(G)$  implies the required inequality.

2) By definition,

$$\mu_{21}(G) = \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_2(G, t), \quad \mu_{22}(G) = \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_2(G, t),$$

therefore,

$$\mu_{21}(G) = \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_2(G, t) \leq \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_2(G, t) = \mu_{22}(G).$$

Now let's prove that  $\mu_{11}(G) \leq \mu_{21}(G)$ .

Evidently, there exists  $t_0$  satisfying the inequality  $\chi'(G) \leq t_0 \leq |E(G)|$ , for which the true relation  $\mu_{21}(G) = \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_2(G, t) = \mu_2(G, t_0) = \max_{\varphi \in \alpha(G, t_0)} f_G(\varphi) \geq \min_{\varphi \in \alpha(G, t_0)} f_G(\varphi) = \mu_1(G, t_0) \geq \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_1(G, t) = \mu_{11}(G)$  implies the required inequality.

Theorem 1 is proved.

**Lemma 2.** If a graph  $G \in Q_{3,2}$  and  $\varphi \in \alpha(G, 3)$  then

$$f_G(\varphi) = 2 \cdot \left| \{e \in E(G) / \varphi(e) = 2\} \right|.$$

**Proof** is evident.

**Lemma 3.** If a graph  $G \in Q_{3,2}$  then  $\mu_{12}(G) \geq 2m(2, G)$ ,  $\mu_{21}(G) \leq 2M(2, G)$ .

**Proof.** It follows from Lemma 2 that  $\mu_1(G, 3) = 2m(2, G)$  and  $\mu_2(G, 3) = 2M(2, G)$ , therefore  $\mu_{12}(G) \geq 2m(2, G)$ ,  $\mu_{21}(G) \leq 2M(2, G)$ .

Lemma 3 is proved.

**Proposition 2.** For  $n \geq 2$  the equalities  $\mu_{12}(P_n) = \mu_{21}(P_n) = \mu_{22}(P_n) = n$  and

$$\mu_{11}(P_n) = \begin{cases} 3, & \text{if } 3 \leq n \leq 4 \\ 2 & \text{in other cases} \end{cases}$$

are true.

**Proof.** The equality  $\mu_{11}(P_3) = 3$  follows from the equalities  $\Delta(P_3) = \chi'(P_3) = |E(P_3)| = \gamma(P_3) = 2$  and  $\Gamma(P_3) = 1$ .

Let's define  $\varphi_0 \in \alpha(P_4, 3)$  by the equalities  $\varphi_0(e_1) = 1$ ,  $\varphi_0(e_2) = 3$ ,  $\varphi_0(e_3) = 2$ . Evidently,  $f(\varphi_0) = 3$  and, consequently,  $\mu_1(P_4, 3) \leq 3$ . It's not difficult to see that for  $\forall \varphi \in \alpha(P_4, 3)$   $f(\varphi) \geq 3$ , therefore we obtain the inequality  $\mu_1(P_4, 3) \geq 3$ , which leads to the equality  $\mu_1(P_4, 3) = 3$ . Evidently,  $\mu_1(P_4, 2) = 4$ , therefore, taking into account the equalities  $\chi'(P_4) = \Delta(P_4) = 2$ ,  $|E(P_4)| = 3$ , we obtain that  $\mu_{11}(P_4) = \min_{2 \leq t \leq 3} \mu_1(P_4, t) = \min \{\mu_1(P_4, 2), \mu_1(P_4, 3)\} = 3$ .

Now let's show that for an arbitrary positive integer  $n$ , satisfying the condition  $n \notin \{3, 4\}$ , the equality  $\mu_{11}(P_n) = 2$  is true.

When  $n = 2$  there is nothing to prove.

Suppose that  $n \in N$  and  $n \geq 5$ .

It's easy to see that the function  $\varphi_n : E(P_n) \rightarrow \text{Int}(1, n-1)$  defined by the equality

$$\varphi_n(e_j) = \begin{cases} 2j, & \text{if } 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \\ 2 \cdot \left( j - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right) - 1, & \text{if } \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

is a proper edge  $(n-1)$ -coloring of the graph  $P_n$  satisfying the condition  $f(\varphi_n) = 2$ . Consequently, for the values of  $n$  mentioned above  $\mu_{11}(P_n) \leq 2$ , and, taking into account the Proposition 2 of [7], we obtain  $\mu_{11}(P_n) = 2$ .

Now let's show that for  $n \geq 2$   $\mu_{12}(P_n) = n$ . Evidently, it would be enough to point such value of  $t_0$ , where  $\chi'(P_n) \leq t_0 \leq |E(P_n)|$ , for which  $\mu_1(P_n, t_0) = n$ . Set  $t_0 \equiv \chi'(P_n)$ . It's easy to notice that for  $\forall \varphi \in \alpha(P_n, \chi'(P_n))$   $f(\varphi) = n$ , therefore the required equality is clear.

As for  $n \geq 2$   $P_n$  is a tree with  $|V(P_n)| \geq 1$ , we can conclude, taking into account the results of [4], that  $P_n$  satisfies the condition of the Proposition 6 of [7] which provides  $\mu_{21}(P_n) = \mu_{22}(P_n) = |V(P_n)| = n$ .

Proposition 2 is proved.

**Proposition 3.** For  $k \geq 2$  the equalities  $\mu_{12}(C_{2k}) = \mu_{22}(C_{2k}) = 2k$ ,  $\mu_{21}(C_{2k}) = 2k - 1$ ,

$$\mu_{11}(C_{2k}) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 2 \\ 0, & \text{if } k \geq 3 \end{cases}$$

are true.

**Proof.** Let's show that for  $k \geq 2$   $\mu_{12}(C_{2k}) = 2k$ . From the definition of the number  $\mu_{12}(C_{2k})$  it follows that it would be enough to point such value of  $t_0$ , where  $\chi'(C_{2k}) \leq t_0 \leq |E(C_{2k})|$ , for which  $\mu_1(C_{2k}, t_0) = 2k$ . Set  $t_0 \equiv \chi'(C_{2k})$  and notice that for  $\forall \varphi \in \alpha(C_{2k}, \chi'(C_{2k}))$   $f(\varphi) = 2k$ .

Hence, taking into account Theorem 1 and the equality  $|V(C_{2k})| = 2k$ , we obtain that for  $k \geq 2$   $\mu_{22}(C_{2k}) = 2k$ .

Now we shall prove that for  $k \geq 2$   $\mu_{21}(C_{2k}) = 2k - 1$ .

From results of [5] it's not difficult to conclude that  $C_{2k} \in \mathfrak{N}$ ,  $w(C_{2k}) = \chi'(C_{2k}) = \Delta(C_{2k}) = 2$ ,  $W(C_{2k}) = k + 1 < 2k = |E(C_{2k})|$  and that, moreover, for an arbitrary positive integer  $t$ , where  $2 \leq t \leq k + 1$ , there exists a proper edge  $t$ -coloring  $\varphi_t$  of the graph  $C_{2k}$  with  $f(\varphi_t) = 2k$ . Consequently,  $\mu_{21}(C_{2k}) < 2k$ . Therefore it would be enough for proving of the required equality to show that for  $\forall t_0$ , where  $k + 2 \leq t_0 \leq 2k$ , there exists a proper edge  $t_0$ -coloring  $\varphi_{t_0}$  of the graph  $C_{2k}$  with  $f(\varphi_{t_0}) = 2k - 1$ .

Let's define a coloring  $\varphi_{t_0}$  of the graph  $C_{2k}$ .

For  $\forall i$ , where  $1 \leq i \leq 2k$ , set:

$$\varphi_{t_0}(e_i) \equiv \begin{cases} i, & \text{if } 1 \leq i \leq t_0 \\ t_0 - 1, & \text{if } t_0 + 1 \leq i \leq 2k \text{ and } (i - t_0) \text{ is odd} \\ t_0, & \text{if } t_0 + 1 \leq i \leq 2k \text{ and } (i - t_0) \text{ is even.} \end{cases}$$

It's easy to see that  $f(\varphi_{t_0}) = 2k - 1$ .

Now let's show that  $\mu_{11}(C_4) = 1$ .

Clearly, for the coloring  $\varphi' \in \alpha(C_4, 4)$ , defined by the equalities  $\varphi'(e_1) = 1$ ,  $\varphi'(e_2) = 3$ ,  $\varphi'(e_3) = 2$ ,  $\varphi'(e_4) = 4$ , the relation  $f(\varphi') = 1$  is true. It's not difficult to notice that for  $\forall \varphi \in \alpha(C_4, 4)$   $f(\varphi) \geq 1$ . Hence, taking into account evident equalities  $\mu_1(C_4, 2) = 4$ ,  $\mu_1(C_4, 3) = 2$ ,  $\chi'(C_4) = 2$ ,  $|E(C_4)| = 4$ , we conclude that  $\mu_{11}(C_4) = 1$ .

Now let's show that for  $k \geq 3$   $\mu_{11}(C_{2k}) = 0$ . For proving of this equality it would be enough to show that for  $\forall k \geq 3$  there exists a coloring  $\varphi_k \in \alpha(C_{2k}, 2k)$  with  $f(\varphi_k) = 0$ . Define a coloring  $\varphi_k$  of the graph  $C_{2k}$ . For  $\forall i$ , where  $1 \leq i \leq 2k$ , set:

$$\varphi_k(e_i) \equiv \begin{cases} 2i - 1, & \text{if } 1 \leq i \leq k \\ 2(i - k), & \text{if } k + 1 \leq i \leq 2k. \end{cases}$$

It's easy to see that  $\varphi_k \in \alpha(C_{2k}, 2k)$  and  $f(\varphi_k) = 0$ .

Proposition 3 is proved.



**Proposition 4.** For  $k \geq 1$  the equalities  $\mu_{22}(C_{2k+1}) = \mu_{21}(C_{2k+1}) = 2k$ ,  $\mu_{12}(C_{2k+1}) = 2$ ,

$$\mu_{11}(C_{2k+1}) = \begin{cases} 2, & \text{if } k = 1 \\ 0, & \text{if } k \geq 2. \end{cases}$$

are true.

**Proof.** Let's prove that for  $k \geq 1$   $\mu_{22}(C_{2k+1}) = 2k$ . As for  $k \geq 1$   $C_{2k+1}$  is a regular graph with  $\Delta(C_{2k+1}) = 2$ ,  $\chi'(C_{2k+1}) = 3$  [2], we can conclude, taking into account results of [5], that  $C_{2k+1} \notin \mathfrak{N}$  and, consequently,  $\mu_{22}(C_{2k+1}) < |V(C_{2k+1})| = 2k+1$ . Therefore for proving of the required equality it would be enough to point such value of  $t_0$ , where  $3 \leq t_0 \leq 2k+1$ , for which there exists a proper edge  $t_0$ -coloring  $\varphi_{t_0}$  of the graph  $C_{2k+1}$  with  $f(\varphi_{t_0}) = 2k$ . Evidently, it's enough to set  $t_0 \equiv 2k+1$ , since the coloring  $\varphi_{2k+1} \in \alpha(C_{2k+1}, 2k+1)$  defined by the equalities  $\varphi_{2k+1}(e_i) = i$  for  $i$ , satisfying the inequality  $1 \leq i \leq 2k+1$ , satisfies the relation  $f(\varphi_{2k+1}) = 2k$ .

Let's prove that for  $k \geq 1$   $\mu_{21}(C_{2k+1}) = 2k$ . From the equality  $\mu_{22}(C_{2k+1}) = 2k$  and Theorem 1 it follows that for proving of the required equality it would be enough to show that for  $\forall t_0$ , where  $3 \leq t_0 \leq 2k+1$ , there exists a coloring  $\varphi_{t_0} \in \alpha(C_{2k+1}, t_0)$  with  $f(\varphi_{t_0}) = 2k$ . Let's define a coloring  $\varphi_{t_0}$  of the graph  $C_{2k+1}$ . For  $\forall i$ , where  $1 \leq i \leq 2k+1$ , set:

$$\varphi_{t_0}(e_i) \equiv \begin{cases} i, & \text{if } 1 \leq i \leq t_0 \\ t_0 - 1, & \text{if } t_0 + 1 \leq i \leq 2k+1 \text{ and } (i - t_0) \text{ is odd} \\ t_0, & \text{if } t_0 + 1 \leq i \leq 2k+1 \text{ and } (i - t_0) \text{ is even.} \end{cases}$$

It's not difficult to see that  $\varphi_{t_0} \in \alpha(C_{2k+1}, t_0)$  and  $f(\varphi_{t_0}) = 2k$ .

Now let's prove that for  $k \geq 1$   $\mu_{12}(C_{2k+1}) = 2$ .

At first we'll show that for  $\forall t$ , where  $3 \leq t \leq 2k+1$ , there exists a coloring  $\varphi_t \in \alpha(C_{2k+1}, t)$  with  $f(\varphi_t) \leq 2$ . Let's define a coloring  $\varphi_t$  of the graph  $C_{2k+1}$ . For  $\forall i$ , where  $1 \leq i \leq 2k+1$ , set:

$$\varphi_t(e_i) \equiv \begin{cases} 2i, & \text{if } 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \\ 2 \cdot \left( i - \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \right) - 1, & \text{if } \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq t \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor - 3, & \text{if } t+1 \leq i \leq 2k+1 \text{ and } (i-t) \text{ is odd} \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor - 1, & \text{if } t+1 \leq i \leq 2k+1 \text{ and } (i-t) \text{ is even.} \end{cases}$$

It's easy to see that for arbitrary  $k \geq 1$  and  $t$ , satisfying the condition  $3 \leq t \leq 2k+1$ , the inequality  $f(\varphi_t) \leq 2$  holds. Consequently, for  $\forall t$ , where  $3 \leq t \leq 2k+1$ , the inequality  $\mu_1(C_{2k+1}, t) \leq 2$  is true, and, therefore,  $\mu_{12}(C_{2k+1}) \leq 2$ .

Now, for completion of the proof of the required equality it's enough to show that there exists such  $t_0$ , where  $3 \leq t_0 \leq 2k+1$ , for which  $\mu_1(C_{2k+1}, t_0) = 2$ .

Let's set  $t_0 \equiv 3$  and consider the coloring  $\varphi' \in \alpha(C_{2k+1}, 3)$  defined by the equality

$$\varphi'(e_i) \equiv \begin{cases} 2, & \text{if } i = 1 \\ 3, & \text{if } i \geq 3 \text{ and } i \text{ is odd} \\ 1, & \text{if } i \text{ is even.} \end{cases}$$

It's clear that  $f(\varphi') = 2$  and, consequently,  $\mu_1(C_{2k+1}, 3) \leq 2$ . Let's show that  $\mu_1(C_{2k+1}, 3) \geq 2$ . Notice that at an arbitrary coloring  $\varphi \in \alpha(C_{2k+1}, 3)$  there is an edge  $(u'_\varphi, u''_\varphi) \in E(C_{2k+1})$  with  $\varphi((u'_\varphi, u''_\varphi)) = 2$ , what leads to the inequality  $f(\varphi) \geq |\{u'_\varphi, u''_\varphi\}| = 2$ , and, as a result, to inequalities  $\min_{\varphi \in \alpha(C_{2k+1}, 3)} f(\varphi) \geq 2$  and  $\mu_1(C_{2k+1}, 3) \geq 2$ . Therefore, the equality  $\mu_1(C_{2k+1}, 3) = 2$  holds indeed.

Now let's prove that  $\mu_{11}(C_3) = 2$ . Evidently, for an arbitrary coloring  $\varphi \in \alpha(C_3, 3)$   $f(\varphi) = 2$ , consequently,  $\mu_1(C_3, 3) = 2$ . Hence, taking into account the equality  $\chi'(C_3) = |E(C_3)| = 3$ , we conclude that  $\mu_{11}(C_3) = 2$ .

Now we'll show that for  $k \geq 2$   $\mu_{11}(C_{2k+1}) = 0$ . For proving of this equality it's enough to show that for  $\forall k \geq 2$  there exists a coloring  $\varphi_k \in \alpha(C_{2k+1}, 2k+1)$  with  $f(\varphi_k) = 0$ . Let's define a coloring  $\varphi_k$  of the graph  $C_{2k+1}$ . For  $\forall i$ , where  $1 \leq i \leq 2k+1$ , set:

$$\varphi_k(e_i) \equiv \begin{cases} 2i-1, & \text{if } 1 \leq i \leq k+1 \\ 2 \cdot (i-k-1), & \text{if } k+2 \leq i \leq 2k+1. \end{cases}$$

It's easy to see that  $\varphi_k \in \alpha(C_{2k+1}, 2k+1)$  and  $f(\varphi_k) = 0$ .

Proposition 4 is proved.

**Note 1**[7]. It follows from Propositions 3, 4 that for  $k \geq 2$  the inequalities  $\mu_{21}(C_{2k}) < \mu_{12}(C_{2k})$ ,  $\mu_{12}(C_{2k+1}) < \mu_{21}(C_{2k+1})$  hold. It means that there are graphs  $G$  for which  $\mu_{21}(G) < \mu_{12}(G)$  and there are also graphs  $G$  for which  $\mu_{12}(G) < \mu_{21}(G)$ .

**Lemma 4.** For arbitrary  $k \geq 2$  and  $j$ , satisfying the inequality  $k+2 \leq j \leq 2k$ , the relations

- 1)  $C_{2k+1,j} \in Q_{3,2}$ ,
- 2)  $m(2, C_{2k+1,j}) = 2$

are true.

**Proof.** 1) follows from the definition of graphs  $C_{n,j}$  and the Lemma 1 of [7].

Let's prove 2). Notice that for the coloring  $\varphi$  of the graph  $C_{2k+1,j}$ , constructed in Case 2 of the Lemma 1 of [7], the equality  $|\{e \in E(C_{2k+1,j}) / \varphi(e) = 2\}| = 2$  holds. Hence, it follows that  $m(2, C_{2k+1,j}) \leq 2$ .

Now we'll prove that  $m(2, C_{2k+1,j}) \geq 2$ .

Assume the contrary: there are  $k_0 \geq 2$  and  $j_0$ , satisfying the inequality  $k_0+2 \leq j_0 \leq 2k_0$ , for which  $m(2, C_{2k_0+1,j_0}) \leq 1$ .

Evidently, the equality  $m(2, C_{2k_0+1,j_0}) = 0$  is impossible. Therefore  $m(2, C_{2k_0+1,j_0}) = 1$ .

Since  $d(x_1) = d(x_{j_0}) = 3$ , then for  $\forall \varphi \in \alpha(C_{2k_0+1,j_0}, 3)$ , satisfying the equality  $|\{e \in E(C_{2k_0+1,j_0}) / \varphi(e) = 2\}| = 1$ , the equality  $\varphi((x_1, x_{j_0})) = 2$  must be true. It means that there exists  $\varphi' \in \alpha(C_{2k_0+1}, 2)$  what contradicts the equality  $\chi'(C_{2k_0+1}) = 3$ .

The obtained contradiction means that the assumption made above isn't true. Therefore  $m(2, C_{2k+1,j}) = 2$ , indeed.

Lemma 4 is proved.

**Proposition 5.** For arbitrary  $n \geq 4$  and  $j$ , satisfying the inequality  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leq j \leq n-1$ , the equality  $\mu_{11}(C_{n,j}) = 0$  is true.

**Proof.** Evidently, for proving of the proposition it's enough to point such value of  $t_0$ , where  $3 \leq t_0 \leq n+1$ , for which there exists a coloring  $\varphi_{t_0} \in \alpha(C_{n,j}, t_0)$  with  $f(\varphi_{t_0}) = 0$ .

Set  $t_0 \equiv n+1$ . Let's define the function  $\varphi_{t_0} : E(C_{n,j}) \rightarrow \text{Int}(1, n+1)$  by the following way:

$$\varphi_{t_0}((x_1, x_j)) \equiv n+1, \quad \varphi_{t_0}((x_1, x_n)) \equiv \begin{cases} n-1, & \text{if } n \text{ is odd} \\ n, & \text{if } n \text{ is even,} \end{cases}$$

and for  $\forall i$ , where  $1 \leq i \leq n-1$ ,

$$\varphi_{t_0}((x_i, x_{i+1})) \equiv \begin{cases} 2i-1, & \text{if } 1 \leq i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ 2 \cdot \left( i - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right), & \text{if } \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

It's easy to see that  $\varphi_{t_0} \in \alpha(C_{n,j}, n+1)$  and  $f(\varphi_{t_0}) = 0$ .

Proposition 5 is proved.

**Proposition 6.** For arbitrary  $n \geq 4$  and  $j$ , satisfying the inequality  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leq j \leq n-1$ , the equality

$$\mu_{12}(C_{n,j}) = \begin{cases} 2, & \text{if } n \text{ is even} \\ 4, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

is true.

**Proof.**

**Case 1.**  $n = 2k$ ,  $k \geq 2$ .

At first we'll show that for arbitrary  $j$ , satisfying the inequality  $k+1 \leq j \leq 2k-1$ , the equality  $\mu_1(C_{n,j}, 3) = 2$  holds.

Let's define the function  $\varphi'_{n,j} : E(C_{n,j}) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ .

For  $\forall e \in E(C_{n,j})$  set:

$$\varphi'_{n,j}(e) \equiv \begin{cases} 1, & \text{if } e = (x_i, x_{i+1}), \text{ where } 1 \leq i \leq n-1 \text{ and } i \text{ is odd} \\ 3, & \text{if } e = (x_i, x_{i+1}), \text{ where } 1 \leq i \leq n-1 \text{ and } i \text{ is even} \\ 3, & \text{if } e = (x_1, x_n) \\ 2, & \text{if } e = (x_1, x_j). \end{cases}$$

Clearly,  $\varphi'_{n,j} \in \alpha(C_{n,j}, 3)$  and  $f(\varphi'_{n,j}) = 2$ . Consequently,  $\mu_1(C_{n,j}, 3) \leq 2$ . From the proof of Lemma 1 it follows that  $\mu_1(C_{n,j}, 3) \geq 2$ , therefore  $\mu_1(C_{n,j}, 3) = 2$ .

Consequently,  $\mu_{12}(C_{n,j}) \geq 2$ .

Now let's prove that for arbitrary  $k \geq 2$ ,  $j$ , satisfying the inequality  $k+1 \leq j \leq 2k-1$ , and  $t$ , satisfying the inequality  $4 \leq t \leq n+1$ , there exists a coloring  $\varphi_{k,j,t} \in \alpha(C_{n,j}, t)$  with  $f(\varphi_{k,j,t}) \leq 1$ .

For  $\forall e \in E(C_{n,j})$  set:

$$\varphi_{k,j,t}(e) \equiv \begin{cases} 2i, & \text{if } e = (x_i, x_{i+1}), \text{ where } 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor \\ 2 \cdot \left( i - \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor \right) - 1, & \text{if } e = (x_i, x_{i+1}), \text{ where } \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq \min\{t, n\} - 1 \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - 3, & \text{if } e = (x_i, x_{i+1}), \text{ where } t \leq i \leq n-1 \text{ and } (i-t+1) \text{ is odd} \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - 1, & \text{if } e = (x_i, x_{i+1}), \text{ where } t \leq i \leq n-1 \text{ and } (i-t+1) \text{ is even} \\ t, & \text{if } e = (x_1, x_j) \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - 1, & \text{if } e = (x_1, x_n) \text{ and } t \text{ is odd} \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - 3, & \text{if } e = (x_1, x_n) \text{ and } t \text{ is even.} \end{cases}$$

Clearly,  $\varphi_{k,j,t} \in \alpha(C_{n,j}, t)$  and  $f(\varphi_{k,j,t}) \leq 1$ .

Hence we conclude that for  $\forall t$ , where  $4 \leq t \leq n+1$ , the inequality  $\mu_1(C_{n,j}, t) \leq 1$  holds, and, taking into account the equality  $\mu_1(C_{n,j}, 3) = 2$ , we obtain that  $\mu_{12}(C_{n,j}) = 2$ .

**Case 2.**  $n = 2k+1$ ,  $k \geq 2$ .

From Lemma 4 and from the proof of Lemma 3 it follows that for arbitrary  $j$ , satisfying the inequality  $k+2 \leq j \leq 2k$ , the equality  $\mu_1(C_{2k+1,j}, 3) = 4$  is true.

Now let's prove that for arbitrary  $k \geq 2$ ,  $j$ , satisfying the inequality  $k+2 \leq j \leq 2k$ , and  $t$ , satisfying the inequality  $4 \leq t \leq 2k+2$ , there exists a coloring  $\varphi_{k,j,t} \in \alpha(C_{n,j}, t)$  with  $f(\varphi_{k,j,t}) \leq 2$ .

For  $\forall e \in E(C_{n,j})$  set:

$$\varphi_{k,j,t}(e) \equiv \begin{cases} 2i, & \text{if } e = (x_i, x_{i+1}), \text{ where } 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor \\ 2 \cdot \left( i - \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor \right) - 1, & \text{if } e = (x_i, x_{i+1}), \text{ where } \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq \min\{t, n\} - 1 \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - 3, & \text{if } e = (x_i, x_{i+1}), \text{ where } t \leq i \leq n-1 \text{ and } (i-t+1) \text{ is odd} \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - 1, & \text{if } e = (x_i, x_{i+1}), \text{ where } t \leq i \leq n-1 \text{ and } (i-t+1) \text{ is even} \\ t, & \text{if } e = (x_1, x_j) \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - 1, & \text{if } e = (x_1, x_n) \text{ and } t \text{ is even} \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - 3, & \text{if } e = (x_1, x_n) \text{ and } t \text{ is odd.} \end{cases}$$

Clearly,  $\varphi_{k,j,t} \in \alpha(C_{n,j}, t)$  and  $f(\varphi_{k,j,t}) \leq 2$ .

Hence we conclude that for  $\forall t$ , where  $4 \leq t \leq n+1$ , the inequality  $\mu_1(C_{n,j}, t) \leq 2$  holds, and, taking into account the equality  $\mu_1(C_{2k+1,j}, 3) = 4$ , we obtain that  $\mu_{12}(C_{2k+1,j}) = 4$ .

Proposition 6 is proved.

**Note 2.** For arbitrary  $n \geq 4$  and  $j$ , satisfying the inequality  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leq j \leq n-1$ , the exact values of the parameters  $\mu_{21}(C_{n,j})$  and  $\mu_{22}(C_{n,j})$  are found in [7].

## REFERENCES

1. F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
2. V.G. Vizing, *The chromatic index of a multigraph*, Kibernetika, 3, 1965, pp. 29–38.
3. A.S. Asratian, R.R. Kamalian, *Interval colorings of edges of a multigraph*, Appl. Math., 5, Yerevan State University, 1987, pp. 25–34.
4. N.N. Davtyan, R.R. Kamalian, *On boundaries of extremums of the number of vertices with an interval spectrum among the set of proper edge colorings of "Mobius ladders" with  $t$  colors under variation of  $t$* , Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Annual Scientific Conference (December 5–10, 2008) of Russian-Armenian (Slavian) University, Yerevan, 2009, pp. 81–84.
5. R.R. Kamalian, *Interval colorings of complete bipartite graphs and trees*, Preprint of the Computing Centre of the Academy of Sciences of Armenia, 1989, 11p.
6. R.R. Kamalian, *Interval Edge Colorings of Graphs*, Doctoral dissertation, The Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Academy of Sciences of USSR, Novosibirsk, 1990.
7. N.N. Davtyan, R.R. Kamalian, *On properties of the number of vertices with an interval spectrum in proper edge colorings of some graphs*, Herald of the RAU, № 2, 2009, pp. 33–42.

**Ն.Ն. Դավթյան, Ռ.Ռ. Քամալյան – Գրաֆների կողային ճիշտ ներկումներում միջակայքային սպեկտրով գազաթների թվի որոշ հատկությունների մասին:** – Հաջորդական բնական թվերի կամայական վերջավոր ենթաբազմությունն անվանում ենք միջակայք:  $G$  գրաֆի բոլոր կողային ճիշտ  $t$ -ներկումների բազմու-

թյունը նշանակենք  $\alpha(G, t)$ -ով: Նշանակենք  $\alpha(G) \equiv \bigcup_{t=\chi'(G)}^{|E(G)|} \alpha(G, t)$ , որտեղ  $E(G)$ -ն

$G$  գրաֆի կողերի բազմությունն է, իսկ  $\chi'(G)$ -ն՝ նրա քրոմատիկ դասը: Եթե  $\varphi \in \alpha(G)$  և  $x_0$ -ն  $G$  գրաֆի գազաթ է, ապա  $x_0$ -ին կից կողերի համար  $\varphi$  ներկման մեջ օգտագործված գույների բազմությունը անվանում ենք  $G$  գրաֆի  $x_0$  գազաթի սպեկտր  $\varphi$  ներկման դեպքում: Եթե  $\varphi \in \alpha(G)$ , ապա  $f_G(\varphi)$ -ով նշանակում ենք  $G$  գրաֆի այն գազաթների թիվը, որոնց սպեկտրը  $\varphi$  ներկման դեպքում միջակայք է:

Կամայական  $G$  գրաֆի համար նշանակենք.

$$\begin{aligned} \mu_{11}(G) &\equiv \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \min_{\varphi \in \alpha(G, t)} f_G(\varphi), \quad \mu_{12}(G) \equiv \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \min_{\varphi \in \alpha(G, t)} f_G(\varphi), \\ \mu_{21}(G) &\equiv \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \max_{\varphi \in \alpha(G, t)} f_G(\varphi), \quad \mu_{22}(G) \equiv \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \max_{\varphi \in \alpha(G, t)} f_G(\varphi): \end{aligned}$$

Աշխատանքում գտնված են  $\mu_{11}(G)$ ,  $\mu_{12}(G)$ ,  $\mu_{21}(G)$  և  $\mu_{22}(G)$  պարամետրերի ճշգրիտ արժեքներն այն դեպքերում, երբ  $G$  գրաֆն իզոմորֆ է կամ պարզ շղթայի, կամ պարզ ցիկլի, կամ մեկ լարով պարզ ցիկլի:

## О ЛОКАЛЬНО-СБАЛАНСИРОВАННЫХ 2-РАЗБИЕНИЯХ ПРОСТЫХ ЦИКЛОВ И ПОЛНЫХ ГРАФОВ

С.В. БАЛИКЯН, Р.Р. КАМАЛЯН

В работе рассматриваются неориентированные графы без кратных ребер и петель. Множество вершин графа  $G$  обозначается через  $V(G)$ , множество ребер – через  $E(G)$ . Для вершины  $v \in V(G)$  определим множества  $\lambda_1(v) \equiv \{w \in V(G) / (w, v) \in E(G)\}$ ,  $\lambda_2(v) \equiv \{v\} \cup \lambda_1(v)$ . 2-разбиением графа  $G$  назовем функцию  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1\}$ . 2-разбиение  $f$  графа  $G$  называется  $i$ -локально-сбалансированным [1], где  $i \in \{1, 2\}$ , если для любой вершины  $v \in V(G)$   $\|\{w \in \lambda_i(v) / f(w) = 1\} - \{w \in \lambda_i(v) / f(w) = 0\}\| \leq 1$ .

В работе рассматривается

**Задача.** Дан граф  $G$  и число  $i \in \{1, 2\}$ . Существует ли для графа  $G$   $i$ -локально-сбалансированное 2-разбиение?

Исследованиям сформулированной задачи и ее различных модификаций посвящены работы [2–7]. Актуальность изучения подобных задач связана с одним из качественных аспектов, который важно учитывать в целях повышения безопасности моделируемых систем самой разной природы (экономической, военно-политической, биологической и т.д.) при воздействии на них двух антагонистических влияний – необходимостью равномерного распределения этих влияний в сферах жизненных интересов субъектов системы, так как именно при равномерном распределении достигается наилучший баланс влияний, уменьшающий вероятность возникновения конфликтов. Заметим, что исследования указанной направленности могут вестись при различных характеристиках моделируемых систем: 1) субъекты системы не обладают способностью самозащиты (возникающие здесь задачи будут формулироваться как задачи о существовании и построении 1-локально-сбалансированных 2-разбиений графов), 2) субъекты системы обладают способностью самозащиты (возникающие здесь задачи будут формулироваться как задачи о существовании и построении 2-локально-сбалансированных 2-разбиений графов).

В настоящей работе сформулированная выше задача полностью решена для случаев, когда данный граф  $G$  изоморфен либо простому циклу  $C_n$ , либо полному графу  $K_n$ . При рассмотрении этих графов будем считать, что множеством вершин графа является множество  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

При рассмотрении простого цикла  $C_n$  будем считать, что зафиксировано некоторое направление его обхода, и вершины  $C_n$  пронумерованы при этом направлении обхода:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Теорема 1.** Для графа  $C_n$ , где  $n \geq 3$ , 1-локально-сбалансированное 2-разбиение существует тогда и только тогда, когда  $n \div 4$ .

**Доказательство.**

**Достаточность.** Пусть  $n = 4k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Определим функцию  $f: V(C_n) \rightarrow \{0, 1\}$  следующим образом: для  $\forall i, 1 \leq i \leq n$ , положим:

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \equiv 0(\bmod 4) \text{ или } i \equiv 1(\bmod 4) \\ 0, & \text{если } i \equiv 2(\bmod 4) \text{ или } i \equiv 3(\bmod 4). \end{cases}$$

Легко видеть, что  $f$  является 1-локально-сбалансированным 2-разбиением графа  $C_n$ .

**Необходимость.** Пусть для графа  $C_n$  существует 1-локально-сбалансированное 2-разбиение  $f$ . Без ограничения общности можно считать, что  $f(x_1) = 1$ . Покажем, что  $n \vdots 4$ . Предположим противное:  $n \not\vdots 4$ .

**Случай 1.**  $n = 4k_0 - 1$ ,  $k_0 \in \mathbb{N}$ .

Очевидно, в рассматриваемом случае  $f(x_3) = f(x_7) = f(x_{11}) = \dots = f(x_{4p-1}) = \dots = f(x_n) = 0$ ,  $1 \leq p \leq k_0$ , и потому  $f(x_2) = f(x_6) = \dots = f(x_{4p-2}) = \dots = f(x_{n-1}) = 1$ ,  $1 \leq p \leq k_0$ , откуда следует равенство

$$\|\{w \in \lambda_1(x_n)/f(w) = 1\} - \|\{w \in \lambda_1(x_n)/f(w) = 0\}\| = 2,$$

противоречащее тому, что  $f$  является 1-локально-сбалансированным 2-разбиением графа  $C_n$ .

**Случай 2.**  $n = 4k_0 - 2$ ,  $k_0 \in \mathbb{N}$ ,  $k_0 \geq 2$ .

Очевидно, в рассматриваемом случае  $f(x_5) = f(x_9) = \dots = f(x_{4p-3}) = \dots = f(x_{n-1}) = 1$ ,  $2 \leq p \leq k_0$ , откуда следует равенство

$$\|\{w \in \lambda_1(x_n)/f(w) = 1\} - \|\{w \in \lambda_1(x_n)/f(w) = 0\}\| = 2,$$

противоречащее тому, что  $f$  является 1-локально-сбалансированным 2-разбиением графа  $C_n$ .

**Случай 3.**  $n = 4k_0 - 3$ ,  $k_0 \in \mathbb{N}$ ,  $k_0 \geq 2$ .

Очевидно, в рассматриваемом случае  $f(x_5) = f(x_9) = \dots = f(x_{4p-3}) = \dots = f(x_n) = 1$ ,  $2 \leq p \leq k_0$ . Аналогично можно показать, что  $f(x_{n-1}) = 1$ , откуда следует равенство  $\|\{w \in \lambda_1(x_n)/f(w) = 1\} - \|\{w \in \lambda_1(x_n)/f(w) = 0\}\| = 2$ , противоречащее тому, что  $f$  является 1-локально-сбалансированным 2-разбиением графа  $C_n$ .

Противоречия, полученные при рассмотрении случаев 1–3, доказывают, что  $n \vdots 4$ .

Теорема 1 полностью доказана.

**Теорема 2.** Для графа  $K_n$ ,  $n \geq 2$ , 1-локально-сбалансированное 2-разбиение существует тогда и только тогда, когда  $n \vdots 2$ .

**Доказательство.**

**Достаточность.** Пусть  $n = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Определим функцию  $f: V(K_n) \rightarrow \{0, 1\}$  следующим образом: для  $\forall i, 1 \leq i \leq n$ , положим:

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \equiv 0(\bmod 2) \\ 0, & \text{если } i \equiv 1(\bmod 2). \end{cases}$$

Легко видеть, что  $f$  является 1-локально-сбалансированным 2-разбиением графа  $K_n$ .

**Необходимость.** Пусть для графа  $K_n$  существует 1-локально-сбалансированное 2-разбиение  $f$ . Покажем, что  $n \geq 2$ . Предположим противное:  $n \not\geq 2$ .

Очевидно, без ограничения общности можно считать, что

$$|\{z/z \in V(K_n), f(z) = 1\}| > |\{z/z \in V(K_n), f(z) = 0\}|.$$

Т.к.  $n \geq 3$ , то  $\{z/z \in V(K_n), f(z) = 0\} \neq \emptyset$ . Выберем произвольную вершину  $z_0 \in \{z/z \in V(K_n), f(z) = 0\}$ . Легко видеть, что

$$\|\{w \in \lambda_1(z_0)/f(w) = 1\}| - |\{w \in \lambda_1(z_0)/f(w) = 0\}|\| \geq 2,$$

что противоречит тому, что  $f$  является 1-локально-сбалансированным 2-разбиением графа  $K_n$ .

Полученное противоречие доказывает, что  $n \geq 2$ .

Теорема 2 полностью доказана.

**Теорема 3.** При  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  для графа  $C_n$  2-локально-сбалансированное 2-разбиение существует.

**Доказательство.** Определим функцию  $f: V(C_n) \rightarrow \{0, 1\}$  следующим образом: для  $\forall i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , положим:

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \equiv 1 \pmod{2} \\ 0, & \text{если } i \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Легко видеть, что  $f$  является 2-локально-сбалансированным 2-разбиением графа  $C_n$ .

Теорема 3 доказана.

**Теорема 4.** При  $\forall n \in \mathbb{N}$  для графа  $K_n$  2-локально-сбалансированное 2-разбиение существует.

**Доказательство.** Определим функцию  $f: V(K_n) \rightarrow \{0, 1\}$  следующим образом: для  $\forall i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , положим:

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \equiv 1 \pmod{2} \\ 0, & \text{если } i \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Легко видеть, что  $f$  является 2-локально-сбалансированным 2-разбиением графа  $K_n$ .

Теорема 4 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ս.Փ. Բալիկյան, *Գրաֆների լոկալ-հալիսիարակչոված 2-տրոհումների մշտին, թեկն. ատեն., ԵՊՀ, Երևան, 2008, 104 էջ.*
2. С.В. Баликян, Р.Р. Камалян, *Об NP – полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов  $G$  с  $\Delta(G) = 3$* , Доклады НАН РА, 2005, т. 105, №1, с. 21-27.
3. С.В. Баликян, Р.Р. Камалян, *Об NP – полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов  $G$  с  $\Delta(G) = 4$  при расширенном определении окрестности вершины*, Доклады НАН РА, 2006, т. 106, №3, с. 218-226.



4. С.В. Баликян, *О локально-сбалансированных 2-разбиениях некоторых двудольных графов*, сборник тезисов XV Международной конференции “Математика. Компьютер. Образование.”, №15, Дубна, Россия, 2008, с. 9.
5. S.V. Balikyan, *On existence of certain locally-balanced 2-partition of a tree*, Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 30, Yerevan, 2008, pp. 31-35.
6. S.V. Balikyan, R.R. Kamalian, *On existence of 2-partition of a tree, which obeys the given priority*, Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 30, Yerevan, 2008, pp. 25-30.
7. S.V. Balikyan, R.R. Kamalian, *Necessary and sufficient condition for existence of locally-balanced 2-partition of a tree under the extended definition of a neighbourhood of a vertex*, Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 31, Yerevan, 2008, pp. 116-121.

**Ս.Վ. Բալիկյան, Ռ.Ռ. Քամալյան – Պարզ ցիկլերի և լրիվ գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների մասին:** – Աշխատանքում դիտարկվում են չկողմնորոշված գրաֆներ առանց պատիկ կողերի և օղերի:  $G$  գրաֆի գագաթների բազմությունը նշանակում ենք  $V(G)$ -ով, կողերի բազմությունը՝  $E(G)$ -ով:  $G$  գրաֆի  $v$  գագաթի համար սահմանենք.  $\lambda_1(v) \equiv \{w \in V(G) / (w, v) \in E(G)\}$ ,  $\lambda_2(v) \equiv \{v\} \cup \lambda_1(v)$ :  $G$  գրաֆի 2-տրոհում կոչվում է  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1\}$  ֆունկցիան:  $G$  գրաֆի 2-տրոհումը կոչվում է  $i$ -լոկալ-հավասարակշռված,  $i \in \{1, 2\}$ , եթե կամայական  $v$  գագաթի համար տեղի ունի  $\|\{w \in \lambda_i(v) / f(w) = 1\} - \{w \in \lambda_i(v) / f(w) = 0\}\| \leq 1$  անհավասարությունը: Կամայական  $i \in \{1, 2\}$  թվի դեպքում պարզ ցիկլերի և լրիվ գրաֆների համար գտնված են  $i$ -լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

## В - ԾԱՌԵՐ, ՆՐԱՆՑ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԻ ԾՐԱԳՐԱՅԻՆ ԻՐԱԿԱՆԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

### Մ.Ա. ՃԱՂԱՐՅԱՆ

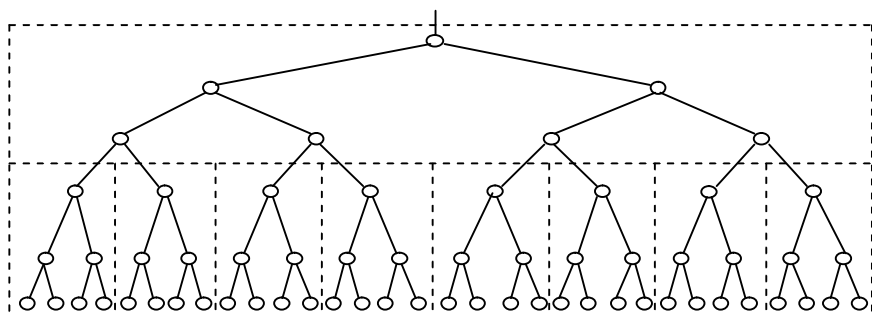
#### 1. Ուժեղ ճյուղավորվող ծառեր

Տվյալների պահպանման В-ծառ կառույցն իր հատկությունների պատճառով ունի բավականին լայն կիրառություններ: Ծառերի հետ աշխատանքի ժամանակ ավելի հաճախակի դիտարկվում են այն ծառերը, որոնց յուրաքանչյուր գագաթ ունի ամենաշատը երկու ժառանգ, այսինքն բինար ծառեր: Մա լիովին բավարար է, եթե օրինակ ցանկանում ենք ներկայացնել մարդկանց բարեկամական հարաբերությունները “ներքևից վերև գծի” առաջնայնությամբ, այսինքն երբ յուրաքանչյուր մարդու համար ներկայացվում են նրա ծնողները, ի վերջո յուրաքանչյուր մարդ երկուսից ավել ծնող չունի: Իսկ ինչպես վարվել, երբ անհրաժեշտ է ներկայացնել “վերևից ներքև գիծը” (օրինակ՝ տոհմաձառը նկարելիս): Ակընհայտ է, հանգում ենք փաստին, որ որոշ մարդիկ ունեն 2-ից ավել զավակներ, հետևաբար այդ ծառը կպարունակի 2-ից ավել ճյուղերով գագաթներ: Այդպիսի ծառերը կոչվում են **ուժեղ ճյուղավորվող ծառեր**:

Գոյություն ունի ուժեղ ճյուղավորվող ծառերի կիրառության ընդհանուր հետաքրքրություն ներկայացնող կարևոր տիրույթ: Դա մեծամասշտաբ **փնտրման ծառերի ձևավորումն ու օգտագործումն է** (օրինակ տվյալների բազաներում): Ենթադրենք դիտարկվում է որևէ քաղաքի բնակիչների հաշվառման բազան, որում յուրաքանչյուր բնակչի համար դիտարկված են նրա անձնական տվյալները, այդ թվում “*սոցիալական քարտի համարը*”: Բազաներում անհրաժեշտ են ինչպես **ավելացման** (օրինակ՝ յուրաքանչյուր նոր բնակիչ բազայում ավելացվում է ըստ իրեն սոցիալական քարտի համարի), **փնտրման** (օրինակ, որևէ բնակչի տվյալները փնտրվում են ըստ իրեն սոցիալական քարտի համարի), այնպես էլ **հեռացման** (օրինակ՝ տրված բնակիչը բազայից հեռացվում է ըստ իրեն սոցիալական քարտի համարի) **գործողություններ**, որոնց իրականացման համար մեծաքանակ բնակչություն ունեցող քաղաքի դեպքում /օրինակ 11.000.000 բնակիչ/, ակնհայտ է կպահանջվի բավականին ժամանակ, բացի դրանից մեքենայի ներքին հիշողությունը բավականաչափ մեծ չէ, կամ բավականին թանկարժեք է, որպեսզի այն օգտագործվի տվյալների երկարժամանակյա պահպանման համար: Այդ գործողությունների իրականացման համար բազաներում ավելի հաճախ կիրառվում են ըստ որևէ բանալու ինդեքսավորված ֆայլերը, սակայն ուժեղ ճյուղավորվող ծառերի կիրառությունը կրեթի տվյալների պահպանման և փնտրման լավ արդյունքների:

Ենթադրենք ծառի հանգույցները պետք է պահվեն արտաքին հիշողությունում, ինչպիսին սկավառակն է: Եթե տվյալների համախումբը, որը բաղկացած է ենթադրենք միլիոն տարրերից, պահված է բինար ծառի տեսքով, ապա անհրաժեշտ տարրի **փնտրման ժամանակ կպահանջվի փնտրման  $\log_2 10^6 \approx 20$  քայլ**: Քանի որ յուրաքանչյուր քայլը պահանջում է դիմում սկավառակին, ավելի ցանկալի

կլինի հիշողության ավելի քիչ դիմում պահանջող կազմակերպում: Ուժեղ ճյուղավորվող ծառերը հանդիսանում են այդ խնդրի լուծման լավագույն միջոցը: Եթե դիմում է կատարվում ծառի միայն մեկ հանգույցին, որը գտնվում է արտաքին կրողի վրա, ապա նույն հաջողությամբ կարելի է դիմել նաև հանգույցների խմբին: Այստեղից հետևում է, որ ծառը պետք է տրոհել ենթածառերի, հաշվի առնելով, որ բոլոր այդ ենթածառերը միաժամանակ ամբողջությամբ հասանելի են: Այդպիսի ենթածառերին անվանենք **էջեր**: Նկ.1-ում ներկայացված է էջերի տրոհված բինար ծառ, որի յուրաքանչյուր էջը պարունակում է 7 հանգույց:



Նկ. 1. Էջերի բաժանված բինար ծառ

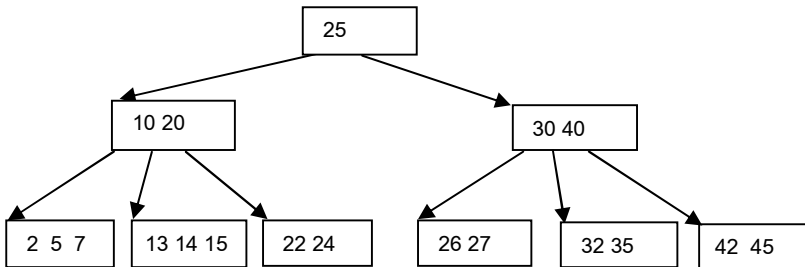
Ենթադրենք, որոշել ենք յուրաքանչյուր էջում տեղադրել 100 հատ հանգույց (սա ընդունելի տարբերակ է), այդ դեպքում միլիոն տարր պարունակող փնտրման ծառը կպահանջի միջին հաշվով  $\log_{100} 10^6 \approx 3$  դիմում էջերին 20-ի փոխարեն: Իհարկե, եթե ծառը աճում է “կամայականորեն”, ապա ամենավատագույն դեպքը կարող է պահանջել նույնիսկ  $10^4$  դիմում: Հասկանալի է, որ ուժեղ ճյուղավորվող ծառերի դեպքում անպայման անհրաժեշտ է նրանց աճը (բարձրությունը) դեկավարող սխեմա:

## 2. B-ծառեր

Աճը դեկավարող հայտանիշի փնտրման ժամանակ պետք է միանգամից բացառել իդեալական հավասարակշռությունը, քանի որ այդ հավասարակշռության համար պահանջվում է մեծ ծախսեր (ժամանակ): Բավականին տրամաբանական հայտանիշ ձևակերպվել է Ռ. Բեյերի կողմից. **տրված  $n$  հաստատունի դեպքում յուրաքանչյուր էջ (բացի մեկից) պարունակում է  $n$ -ից  $2n$  հանգույց**: Հետևաբար,  $N$  տարրով և էջի  $2n$  առավելագույն չափով ծառում վատագույն դեպքը կպահանջի  $\log_n N$  հղում էջերին (այդ գնահատականի ստացումը 3-րդ գլխում), իսկ հղումները, ինչպես հայտնի է, կազմում են փնտրման վրա ծախսված ժամանակի հիմնական մասը: Բացի այդ, հիշողության օգտագործման կարևոր գործակիցը կազմում է 50%-ից ոչ քիչ, քանի որ էջերը լցված են գոնե կիսով չափ: Այս բոլոր առավելություններով հանդերձ տրված կառույցը պահանջում է նաև տարրի փնտրման, ավելացման և հեռացման համեմատաբար պարզ ալգորիթմներ:

Դիտարկվող տվյալների կառույցները կոչվում են  **$n$ -րդ կարգի B-ծառեր** և ունեն հետևյալ հատկությունները. ( $n$ -ը կոչվում է B-ծառի կարգ).

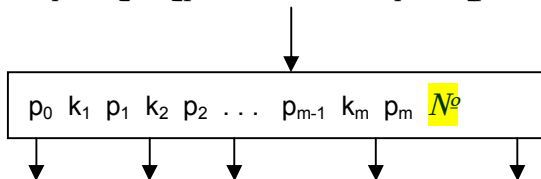
1. Յուրաքանչյուր էջ պարունակում է  $2n$ -ից ոչ ավել տարր (բանալիներ),
  2. Յուրաքանչյուր էջ բացի արմատից պարունակում է  $n$ -ից ոչ քիչ տարր,
  3. Յուրաքանչյուր էջ համարվում է կամ տերև, այսինքն՝ ժառանգներ չունի, կամ ունի  $m+1$  ժառանգներ, որտեղ  $m$ -ը նրանում գտնվող բանալիների թիվն է,
  4. Բոլոր տերևները գտնվում են նույն մակարդակի վրա:
- Նկ.2-ում ներկայացված է 3 մակարդակով 2-րդ կարգի ( $n=2$ ) B-ծառ:



Նկ. 2. 2-րդ կարգի B-ծառ

Բոլոր էջերը պարունակում են 2, 3 կամ 4 տարր ( $n \leq m \leq 2n$ ): Բացառությամբ նաև է կազմում արմատը, որին թույլատրվում է պարունակել նաև մեկ տարր: Բոլոր տերևները գտնվում են 3-րդ մակարդակում: Բանալիները տեղադրված են ձախից աջ աճման կարգով: Եթե ծառը պրոյեկտենք մեկ մակարդակի վրա՝ տեղադրելով ժառանգներին իրենց հայր-եջի բանալիների միջև, կստանանք բոլոր բանալիները՝ դասավորված աճման կարգով: Այսպիսի դասավորությունը ներկայացնում է փնտրման բինար ծառերի բնական զարգացումը և սահմանում է տրված բանալով տարրի փնտրման մեթոդը:

Դիտարկենք նկ.3-ում ներկայացված տեսքն ունեցող էջը, որտեղ  $\forall p_i, i=0,1,...,m$ , հղում է անհրաժեշտ էջին,  $\forall k_i, i=1,2,...,m$ , բանալի է:



Նկ. 3.  $m$  բանալիներ պարունակող B-ծառի էջը

Ենթադրելով, որ էջը տեղադրված է օպերատիվ հիշողությունում, կարող ենք կիրառել  $k_1, ..., k_m$  բանալիների միջև փնտրման հայտնի մեթոդներ (կախված հիշողության մեջ էջի ներկայացման կառույցից): Եթե  $m$ -ը բավականաչափ մեծ է և էջը ներկայացված է մասիվի տեսքով, ապա կարելի է կիրառել բինար փնտրում (կլիման մեթոդ), իսկ եթե այն համեմատաբար մեծ չէ, ապա հարմար է պարզ հաջորդական փնտրումը: Այստեղ կարելի է նկատել, որ **օպերատիվ հիշողությունում փնտրման վրա ծախսված ժամանակը բավականաչափ փոքր է այն ժամանակից, որն անհրաժեշտ է էջը արտաքին կրողի վրայից օպերատիվ հիշողություն տեղափոխելու համար:**

Դիցուք տրված է **փնտրման  $x$  արգումենտը**: Եթե փնտրումը տվյալ էջում **հաջող է** ավարտվել, ուրեմն էջում գոյություն է ունեցել բանալի՝  $k_i=x, i=1,2,...,m$ :

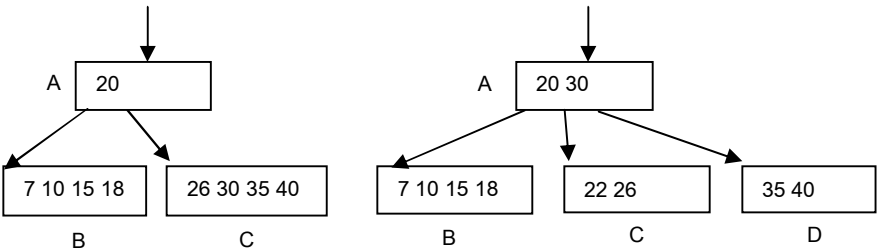
Եթե փնտրումն անհաջող է, ապա ուրեմն տեղի ունի հետևյալ իրավիճակներից որևէ մեկը.

1. կամ  $k < x < k+1$ , որևէ  $1 \leq i < m$ -ի համար, այդ դեպքում փնտրումը շարունակվում է  $P_i \uparrow$  ( $P_i$ -ում գրված հասցեով) էջում;
2. կամ  $x > k_m$ , այդ դեպքում փնտրումը շարունակվում է  $P_m \uparrow$  էջում;
3. կամ  $x < k_1$ , այդ դեպքում փնտրումը շարունակվում է  $P_0 \uparrow$  էջում:

Եթե որևէ  $P$  հղումը հավասար է **nil**, այսինքն համապատասխան ժառանգ չկա, ապա **x քանալիով տարր չկա ամբողջ ծառում և փնտրումն ավարտվում է:**

Ջարմանալի է, սակայն B-ծառում **նոր տարրի ավելացումը** նույնպես կատարվում է համեմատաբար պարզ ձևով: Եթե տարրը տեղադրվում է էջում, որը պարունակում է  $m < 2n$  տարր, ապա ավելացման գործողությունը սահմանափակվում է այդ էջով, իսկ էջում տարրի տեղադրման ավգորիթմի ընտրությունը պայմանավորված է դարձյալ հիշողության մեջ էջի ներկայացման կառույցից: Ավելացումն արդեն **լցված էջում** ազդում է ծառի կառուցվածքի վրա և այն կարող է առաջացնել նոր էջերի առաջացում: Որպեսզի պարզ դառնա, թե ինչ է տեղի ունենում այս դեպքում, դիտարկենք նկ.4-ը, որում ներկայացված է 22 արժեքն ունեցող բանալու ավելացումը 2-րդ կարգի B-ծառում: Այն բաղկացած է հետևյալ փուլերից.

1. Նախ ստուգվում և պարզվում է, որ 22 բանալին բացակայում է: C էջում նոր բանալու ավելացումը հնարավոր չէ, քանի որ C-ն արդեն լցված է:
2. C էջը բանալու 22 արժեքի հետ միասին տրոհվում է 2 էջերի, այսինքն տեղադրվում է նոր D էջը:
3.  $m+1$  հատ բանալիները հավասարապես բաժանվում է C-ի և D-ի միջև, իսկ միջին բանալին (մեջտեղի) մեկ կարգ բարձրանում է վերև՝ A հայր-էջ:



Նկ. 4. 22 բանալու ավելացումը B-ծառին

Այս բավականին գեղեցիկ ավգորիթմը պահպանում է B-ծառերի բոլոր հիմնական հատկությունները: Մասնավորապես, տրոհման ժամանակ ստացվում են ճիշտ  $n$  տարր պարունակող էջեր: Ակնհայտ է, որ տարրի ավելացումը հայր-էջին իր հերթին կարող է առաջացնել էջի գերլցում, ինչը բերում է **տրոհման տարածման:** Ծայրահեղ դեպքում այն կարող է **տարածվել մինչև արմատ:** Սա հենց B-ծառի բարձրության ավելացման միակ դեպքն է: Հետևաբար, B-ծառն աճում է տերևներից արմատ:

**Ուշադրություն:** Նշենք, որ, եթե ծառի էջերը պահվելու են արտաքին կրողի վրա, ապա նկ. 3-ում  $P_i$  հղումներն իրենցից ներկայացնելու են **ուղղակի էջերի համարներ**, որոնց մասին ինֆորմացիան կմտցվի էջի կառուցվածքի մեջ նոր №

դաշտի ավելացմամբ, մասնավորապես, օրինակ արմատի համարը կլինի 0, իսկ էջի յուրաքանչյուր տրոհման ժամանակ էջի.

– 1-ին կեսը կմնա նույն համարով, իսկ 2-րդ կեսը կստանա հերթական ազատ համարը, եթե տրոհվող էջը արմատը չէ,

– 2 կեսն էլ կստանան հերթական ազատ համարներ, եթե տրոհվող էջը արմատն է, նոր ստեղծվող արմատի համարը դնելով 0:

### 3. n-րդ կարգի B-ծառի գնահատականները

Դիտարկելով n-րդ կարգի B-ծառի կառուցումը, նկատում ենք, որ այն իրականացվում է հետևյալ 3 տիպի գործողությունների միջոցով.

– էջի փնտրում (հղում էջին),

– էջում տարրի փնտրում (կամ ավելացում),

– ելքի/մուտքի գործողություններ, եթե էջերը կազմակերպված են արտաքին կրողի վրա:

Հղումները կազմում են փնտրման վրա ծախսված ժամանակի հիմնական մասը: Բացի այդ, կախված B-ծառի էջերի կազմակերպումից (այսինքն էջերը պահված են ներքին, թե արտաքին հիշողությունում) ավելանում են նաև ելքի/մուտքի գործողություններ, որոնց վրա ծախսվող ժամանակը բավականաչափ մեծ է օպերատիվ հիշողությունում փնտրման վրա ծախսված ժամանակից: Ստանանք B-ծառի տարրեր իրականացումների դեպքում տարրի փնտրման և ավելացման գործողությունների վրա ծախսված ժամանակի գնահատականներն ըստ վերևում նշված գործողությունների:

Դիցուք ինֆորմացիոն մասիվը բաղկացած է N տարրից և դիտարկվում է n-րդ կարգի B-ծառ, այսինքն էջում բանալիների քանակը՝ m-ը, բավարարում է  $n \leq m \leq 2n$  պայմանին:

Ապացուցենք, որ N տարրով և էջի 2n առավելագույն չափով ծառում վատագույն դեպքը կպահանջի  $\lceil \log_2 N \rceil$  հղում էջերին:

**k-ով նշանակենք B-ծառի մակարդակների քանակը: Տարրի փնտրման ժամանակ k մակարդակ ունեցող B-ծառում էջերին հղումների քանակը չի գերազանցի k-ին:**

Դիտարկենք նկ. 3-ում ներկայացված տեսքն ունեցող էջը, որում տարրերի քանակը հավասար է m ( $n \leq m \leq 2n$ ), հետևաբար հղումների քանակը հավասար է  $m+1$  (ամենաշատը՝  $2n+1$ ): Էջերի քանակը վատագույն դեպքում (երբ յուրաքանչյուր էջում կա ճիշտ n հատ տարր, բացի արմատից) չի գերազանցում **N/n**: Հաշվենք էջերի հնարավոր մինիմալ քանակը, այսինքն երբ յուրաքանչյուր էջը կապրունակի  $2n+1$  բանալի: Այդ դեպքում 1-ին մակարդակում կունենանք 1 էջ, 2-րդ մակարդակում՝  $(2n+1)$  էջ, k-րդ մակարդակում՝  $(2n+1)^{k-1}$  էջ, հետևաբար էջերի ընդհանուր թիվը կլինի այդ թվերի գումարը՝ 
$$\sum_{i=1}^k (2n+1)^{i-1} = \frac{(2n+1)^k - 1}{2n}:$$

Ունենալով էջերի հնարավոր ամենաքիչ և ամենաշատ քանակները կստանանք.

$$\frac{(2n+1)^k - 1}{2n} \leq \frac{N}{n}, n \neq 0$$

$$\begin{cases} (2n+1)^k \leq 2N+1 \\ (2n+1)^k > (2n)^k + 1 \end{cases} \Rightarrow (2n)^k + 1 < 2N+1 \Rightarrow (2n)^k < 2N$$

Հաշվի առնելով, որ  $\log_n(2n) > 1$ ,  $0 < \log_n 2 \leq 1$  ( $n \geq 2$ ),  $N \gg n$ , այստեղից կստանանք.

$$k < \log_{2n} 2N = \frac{\log_n(2N)}{\log_n(2n)} < \log_n(2N) = \log_n 2 + \log_n N \approx \log_n N$$

$$k < \log_n N$$

Ստացանք՝  $k < \lceil \log_n N \rceil$ , որը նշանակում է, որ վատագույն դեպքում **էջերին հղումների քանակը չի գերազանցում  $\lceil \log_n N \rceil$** :

Էջում տարրի փնտրման, ապա տարրի ավելացման համար կատարվող գործողությունների քանակի գնահատականը պայմանավորված է ներքին հիշողությունում էջի կազմակերպումից (կառույցից).

1. Եթե էջը կազմակերպված է որպես միաչափ մասիվ, ապա

- տարրի փնտրման համար կարելի է կիրառել հայտնի որևէ լավ մեթոդ՝ օրինակ կիսման, որում համեմատությունների քանակը չի գերազանցում  $\lceil \log_2 2n \rceil = \lceil \log_2 n + 1 \rceil$ ,

- տարրի ավելացման համար կկատարվի վատագույն դեպքում  $\lceil \log_2 n + 1 \rceil$  **համեմատում**՝ տարրի տեղը գտնելու համար, և **2n տեղափոխություն**:

2. Եթե էջը կազմակերպված է որպես գծային կարգավորված ցուցակ, ապա

- տարրի փնտրումը կարելի է իրականացնել որպես հաջորդական փրնտրում կարգավորված մասիվում, որի ժամանակ վատագույն դեպքում կկատարվի **2n համեմատում**,

- տարրի ավելացման համար կկատարվի վատագույն դեպքում **2n համեմատում**՝ տեղը գտնելու համար, և **nչ մի տեղափոխություն**, ուղղակի ավելացում:

Եթե ծառի էջերը պահվում են արտաքին կրողի վրա, կկատարվեն **էջի /մուտքի** գործողություններ, որոնց քանակը յուրաքանչյուր տարրի փնտրման կամ ավելացման ժամանակ պայմանավորված է ծառի մակարդակների քանակով, որը ստացել ենք  $k \leq \log_n N$ , հետևաբար **ե/մ գործողությունների քանակը**, մասնավորապես մեկ տարրի փնտրման (ավելացման) համար, չի գերազանցում  $2^*(k-1)$ , իսկ N հատ տարրերի փնտրման (ավելացման) համար վատագույն դեպքում՝  $\leq N^*2^*(k-1) \leq N^*2(\log_n N - 1)$ , ինչը մեծ N-ի և բավականաչափ փոքր n-ի դեպքում կկազմի մեծ թիվ, հետևաբար բավականին շատ ժամանակ:

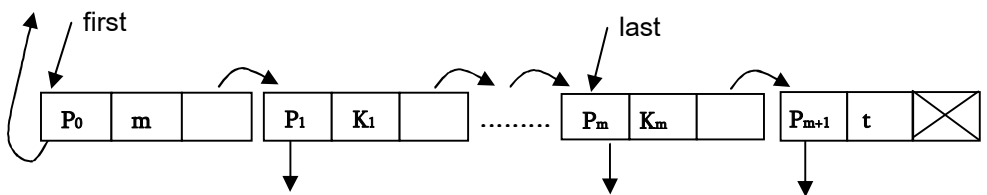
Այս դիտարկումների արդյունքում կարելի է կատարել հետևյալ եզրակացությունը. **ինչքան մեծ է n-ը, այնքան քիչ են ե/մ գործողությունները, հետևաբար եթե N-ը այնքան մեծ թիվ է, որ նրա B-ծառն ամբողջությամբ չի տեղավորվում ներքին հիշողությունում, այսինքն օգտվելու ենք արտաքին հիշողությունից, ապա n-ը կարելի է ընտրել այնպես, որ ներքին հիշողության օգտագործվող տիրույթը բավարարի ծառի 2 էջ պահելու համար՝ արմատը և ընթացիկ էջը, հաշվի առնելով մեկ էջի կառուցվածքը (նկ. 3):**

#### 4. n-րդ կարգի B-ծառի կառուցման մի ծրագրային իրականացումը

Գրված է ծրագիր, որը կառուցում է n-րդ կարգի B-ծառ: Ծրագիրը գրված է այն դեպքի համար, երբ B-ծառի բոլոր էջերը գտնվում են մեքենայի ներքին հիշողությունում: Իրականացման համար ընտրված է ռեկուրսիվ իրականացման

մեխանիզմը, քանի որ տրոհման ընթացքը կարող է տարածվել հետփնտրման ճանապարհով, մինչև արմատ:

Ծառի յուրաքանչյուր էջը սահմանվել է որպես **սովորական գծային կարգավորված ցուցակ**, որն ունի հետևյալ կառուցվածքը.



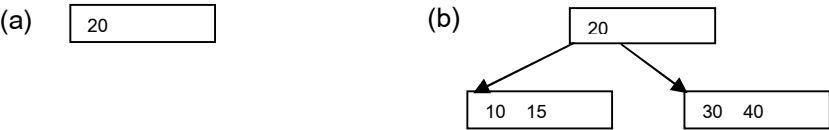
որտեղ

- **first-ը** և **last-ը** ցուցիչներ են համապատասխանաբար էջ-ցուցակի **առաջին** և **նախավերջին** հանգույցների վրա,
- **P0-ն** ցուցիչ է էջ-ցուցակի **հայր** հանդիսացող էջի վրա;
- **P1, P2, ... ,Pm+1** ցուցիչներ են համապատասխան **ծառանգ** էջերի վրա, որոնց համար տեղի ունի հետևյալը.  $\forall i=1,2,...,m$  -ի համար  $P_i$  ենթածառի բոլոր բանալիները  $K_i$  -ից փոքր են, իսկ  $P_{i+1}$  ենթածառի բոլոր բանալիները  $K_i$  -ից մեծ են (նկ. 4):
- **m-ը** ցույց է տալիս տվյալ էջում արդեն առկա **բանալիների քանակը**, որի համար տեղի ունի  $n \leq m \leq 2n$ , բացի արմատից,
- **t-ն** բույյան մեծություն է և ներկայացնում է ընթացիկ էջի **տերև**, կամ **ոչ տերև** լինելու փաստը:

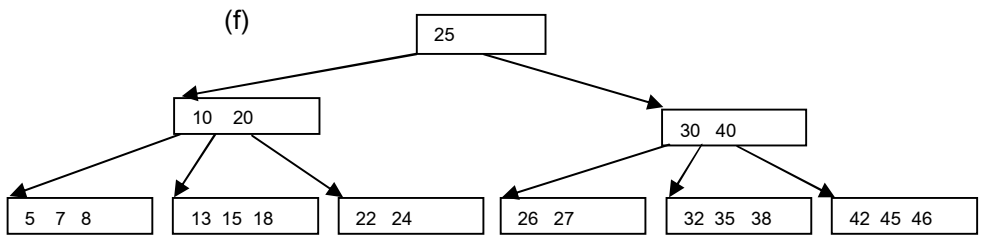
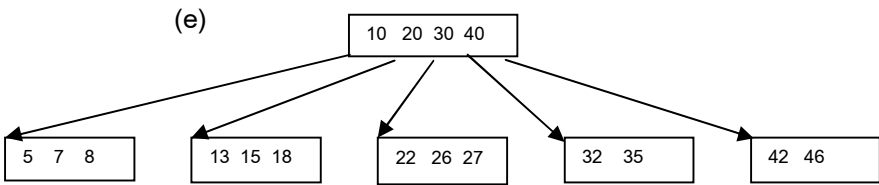
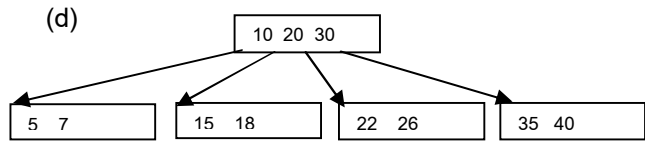
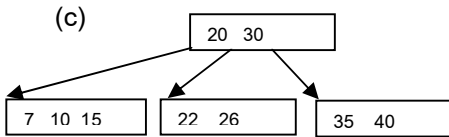
Քանի որ  $m \geq n$ , ապահովվում է 50% հիշողության զբաղվածություն:

Իրականացված է **ծառի կառուցման ալգորիթմը**: Ծառի հերթական էջում նոր բանալի ավելացնելուց, եթե բանալիների քանակը սահմանված քանակից ավելանում է ( $m > 2n$ ), տեղի է ունենում էջի տրոհում: Փնտրման հիմնական կառուցվածքը պարզ է և հիշեցնում է բինար ծառի փնտրման կառուցվածք, այն տարբերությամբ, որ հետագա ճանապարհին ընտրվում է ոչ թե 2, այլ  $m+1$  հնարավոր ճյուղերից: Դրա հետ մեկտեղ փնտրումը էջի ներսում ձևակերպված է ինչպես փնտրում ցուցակում:

Նկ. 5-ում ներկայացված է 2-րդ կարգի B-ծառի ստացումը բանալիների հետևյալ հաջորդականության համար. 20; 40 10 30 15; 35 7 26 18 22; 5; 42 13 46 27 8 32; 38 24 45 25: Այս թվարկման մեջ “;” -ը ցույց է տալիս նոր էջերի ստացման պահը: Վերջին բանալու ավելացումն առաջացնում է երկու տրոհում և երեք նոր էջերի առաջացում: Այս օրինակի համար ծրագրի աշխատանքի արդյունքները ներկայացված են նկ. 6,7-ում:







Նկ. 5. 2-րդ կարգի B ծառի աճը

B-ծառի ծրագրային իրականացման համար ծրագրավորման C++ լեզվով ստեղծված է Btree պրոյեկտը, որում հայտարարվել են 3 դասեր.

1. **Btree** դասը, որը հայտարարվել է Btree.h ֆայլում և տալիս է **Btree** տիպի հայտարարումը և այդ տիպի օբյեկտների հետ կատարվող գործողություններն իրականացնող անդամ-ֆունկցիաների նախատիպերը.

// Btree.h: interface for the Btree class.

#include "List.h"

class Btree

{ // դասի անդամ տվյալները

List \*root; // ցուցիչ ծառի արմատի վրա

int n, lev; // n- ծառի կարգը, lev- ծառի մակարդակների թիվը

public:Btree(int); //պարամետրով կոնստրուկտոր, նախապայմանը՝ ծառի կարգը

~Btree(); // դեստրուկտոր

// գործողություններ

List \*GetNewList();

bool IsEmpty()const;

bool InBtree(int)const;

```

bool Add_tree(int);
List *Add(int);
void free(List *);
bool TerevChe(List *)const;
List GetList(List *)const;
List *GetRoot()const;
int GetN()const;
int GetLev()const;
void SetRoot(List *);
void Order(List *)const;
void Print_Btree(List *); };

```

2. **List** դասը, որը հայտարարվել է List.h ֆայլում և ապահովում է B-ծառի էջ-հանգույցների **List** տիպի հայտարարումը և այդ տիպի օբյեկտների հետ կատարվող գործողությունները (ծառի էջը սահմանված է որպես սովորական գծային ցուցակ),

// List.h: interface for the List class.

```
#include "node.h"
```

```
#include <iostream.h>
```

```
class List
```

```
{ friend class Btree; friend class Node;
```

```
friend ostream &operator<<(ostream &out,const List &obj);
```

// դասի անդամ տվյալները

```
Node *first,*last; // first - ցուցիչ ցուցակի առաջին հանգույցի վրա, last-
```

ցուցիչ ցուցակի նախավերջին հանգույցի վրա

```
Node *GetNewNode(int,List *,Node * ); // տրված բանալիով ցուցակի նոր
```

հանգույցի ստացում

```
public:List(); // լրությամբ կոնստրուկտոր
```

```
~List(); // դեստրուկտոր
```

```
List(const List&); // պատճեի կոնստրուկտոր
```

// գործողություններ

```
void set_List(const List&);
```

```
void AddFirst(int,List *,List *);
```

```
void AddLast(int,List *,List *);
```

```
void Add(int,List *,List *);
```

```
bool IsEmpty()const;
```

```
bool InList(int)const;
```

```
void SetFather(List *,List *);
```

```
List *GetFather()const;
```

```
void FreeList();
```

```
List *NextGagat(int)const;
```

```
bool IsFull(int)const;
```

```
void SetTerev(); //List *);
```

```
void Build(List *,int,int);
```

```
int GetKeyT(int)const; };
```

3. **Node** դասը, որը հայտարարվել է Node.h ֆայլում և ապահովում է ցուցակի հանգույցների **Node** տիպի հայտարարումը և այդ տիպի օբյեկտների հետ կատարվող գործողությունները,

```
// Node.h: interface for the Node class.
class Node
{ friend class List;
// դասի անդամ տվյալներ
    int key; // հանգույցի բանալին
    Node *next; // ցուցիչ հաջորդ հանգույցի վրա
    List *tree_node; // ցուցիչ ծառի էջ-հանգույցի վրա
public: Node (int=0); // լրությամբ կոնստրուկտոր
// գործողություններ
    int GetKey()const;
    Node *GetNext()const;
    List *GetTreeNode()const; };
```

Ծրագրի աշխատանքն իրականացված է երկխոսության միջոցով, որը ներմուծում է որոշակի քանակության ամբողջ թվեր և ավելացնում է կառուցվող **A** **n**-րդ կարգի **B**-ծառում:

```
void main()
{ int n;
    cout<<"Insert order of B-tree: ";
    cin>>n; Btree A(2*n); // ստեղծվում է n-րդ կարգի դատարկ A B-ծառը
    int x,k;
    cout<<"Insert the number of date: "; cin>>k; // ներմուծվում է թվերի քանակը
    cout<<"Insert date:"<<endl;
    // ներմուծվում են k հատ թվեր, որոնցով արժեքավորվում է A ծառը
    for (int i=1;i<=k;i++)
    {      cin>>x;
        if(A.Add_tree(x)) // x արժեքով տարրը ավելացվում է ծառում, և
եթե տեղի է ունեցել էջի գերլցում և էջի տրոհում, Add_tree(x) ֆունկցիան վերադարձնում է "ճիշտ" արժեք
        {      cout<<endl;
            // հերթական տրոհումից հետո ծառի արտածում էջ-հանգույցների պարունակություններով
            cout<<"Root: "<<A.GetList(A.GetRoot())<<endl;
            A.Print_Btree(A.GetRoot());
            cout<<endl; }
    }
    cout<<endl<<endl;
    cout<<"Number of level B-tree= "<<A.GetLev()<<endl<<endl; // ելքում՝ ծառի
մակարդակների թվի արտածումը
    A.Order(A.GetRoot()); cout<<endl; // ծառի շրջանցման արդյունքում ներմուծված թվերի արտածումը չնվազման կարգով
    cout<<endl<<endl<<"The last view of B-tree:"<<endl;
```

```
// վերջնական ծառի արտածումը
cout<<A.GetList(A.GetRoot())<<endl;
A.Print_Btree(A.GetRoot()); cout<<endl; }
```

Ծրագիրը ապահովում է հետևյալ գործողությունները.

- ծառի պարամետրերի՝ *կարգի և տվյալների քանակի*, ներմուծումը (նկ. 6),
- *տվյալների* ներմուծումը,
- յուրաքանչյուր ներմուծված տարրի համար արմատից սկսած կատարվում է համապատասխան *էջի փնտրում*, ապա տարրի *ավելացում* ծառի համապատասխան էջում,

// value արժեքով տարրի ավելացումը ծառում

```
List *Btree::Add(int value)
```

```
{if (root==0)
```

```
{root=GetNewList(); root->Add(value,0,0); return root;}
```

```
else
```

```
{List *cur=root;
```

```
while (TerevChe(cur)) cur=cur->NextGagat(value);
```

```
cur->Add(value,0,0); return cur;}}
```

// value արժեքով տարրի ավելացումը փնտրված էջում

```
void List::Add(int value,List *l,List *g)
```

```
{ if (IsEmpty()) AddFirst(value,l,g); // եթե էջ-հանգույցը դատարկ է, ուղղակի ավելացնել
```

```
else if (first->next->key>value) AddFirst(value,l,g);
```

```
else if (last->key<value) AddLast(value,l,g);
```

```
else
```

```
{Node *curr=first->next;
```

```
while (curr->next->key<value) curr=curr->next;
```

```
if(curr->next->key!=value)
```

```
{Node *ptr=GetNewNode(value,l,curr->next);
```

```
curr->next=ptr;
```

```
ptr->next->tree_node=g;
```

```
first->key++; } }
```

```
}
```

- *ստուգվում է* ընթացիկ էջում տվյալների քանակը, և եթե այն գերազանցում է էջում թույլատրելի քանակին (2n) տեղի է ունենում *էջի տրոհում*, որը տարածվում է ծառի բարձրությամբ մինչև արմատ,

```
bool Btree::Add_tree(int x)
```

```
{ bool t=false;
```

```
List *p,*L,*G,*f;
```

```
p=Add(x);
```

```
int n=GetN();
```

```
while (p->IsFull(n)) // եթե ընթացիկ էջ-հանգույցը գերլցված է, ապա տրո-
```

հել

```
{ t=true; f=p->GetFather();
```

```
int key=p->GetKeyT(n);
```

// կառուցել տրոհված էջ-հանգույցի ձախ էջ-հանգույցը՝ L, և աջ էջ-հանգույցը՝ G

```

    L=GetNewList(); L->Build(p,0,n);
    G=GetNewList(); G->Build(p,1,n);
    if(f==0) { f=GetNewList(); SetRoot(f); lev++;} // եթե տրոհվել է
արմատը, ապա նոր արմատի կառուցում, ծառի մակարդակների թվի ավելացում
    L->SetFather(f,L); G->SetFather(f,G);
    f->Add(key,L,G); f->SetTerev();
    p->FreeList(); p=f; f=p->GetFather(); }
return t; }

```

// տրոհումից հետո նոր էջ-հանգույցի արժեքավորում

```
void List::Build(List *p,int cod,int num)
```

```

{ Node *cur1=p->first->next;
  if (cod==1)
  {      for(int i=0;i<num/2;i++) cur1=cur1->next;
          cur1=cur1->next; }
  for(int i=0;i<num/2;i++)
  {      Add(cur1->key,cur1->tree_node,cur1->next->tree_node);
          cur1=cur1->next; }
  SetTerev(); }

```

- ծառի յուրաքանչյուր տրոհմից հետո **արտածվում է** ստացված ծառը՝ էջ-հանգույցների հաջորդականության տեսքով (նկ.6),

- արտածվում է արդյունքում ստացված ծառի **մակարդակների թիվը և վերջնական ծառը** (նկ.7),

- արտածվում է ծառի շրջանցման արդյունքում ստացվող **թվերի հաջորդականությունը, որը դասավորված է չնվազման կարգով** (նկ.7).

```

void Btree::Order(List *p)const
{ if(p!=0)
  {      Node *cur=p->first->GetNext();
          while (cur!=p->last->GetNext())
          {      Order(cur->GetTreeNode());
                  cout<<setw(5)<<cur->GetKey();
                  cur=cur->GetNext();
          }
          Order(cur->GetTreeNode());
  }
}

```

Նկ. 6,7-ի օրինակում դիտարկվում է 2-րդ կարգի 21 հատ տարր պարունակող B-ծառ, նրա առաջին տրոհումը կատարվել է 20, 40, 10, 30, 15 թվերի ներմուծումից հետո:

```

Select "C:\Documents and Settings\User\Desktop\B_tree2\Debug\set.exe"
Insert order of B-tree: 2
Insert the number of date:21
Insert date:
20
40
10
30
15

Root: Number of date=1: 20 0

Number of date=2: 10 15 0
20
Number of date=2: 30 40 0

35
7
26
18
22

Root: Number of date=2: 20 30 0

Number of date=4: 7 10 15 18 0
20
Number of date=2: 22 26 0
30
Number of date=2: 35 40 0

5

Root: Number of date=3: 10 20 30 0

Number of date=2: 5 7 0
10
Number of date=2: 15 18 0
20
Number of date=2: 22 26 0
30
Number of date=2: 35 40 0

42
13
46
27
8
32

Root: Number of date=4: 10 20 30 40 0

Number of date=3: 5 7 8 0
10
Number of date=3: 13 15 18 0
20
Number of date=3: 22 26 27 0
30
Number of date=2: 32 35 0
40
Number of date=2: 42 46 0

38
24
45
25

Root: Number of date=1: 25 0

Number of date=3: 5 7 8 0
10
Number of date=3: 13 15 18 0
20
Number of date=2: 22 24 0
25
Number of date=2: 26 27 0
30
Number of date=3: 32 35 38 0
40
Number of date=3: 42 45 46 0

```

Նկ. 6. 2-րդ կարգի B-ծառի պարամետրերի և տվյալների ներմուծում

```

Number of level B-tree= 3
5 7 8 10 13 15 18 20 22 24 25 26 27 30 32 35
38 40 42 45 46

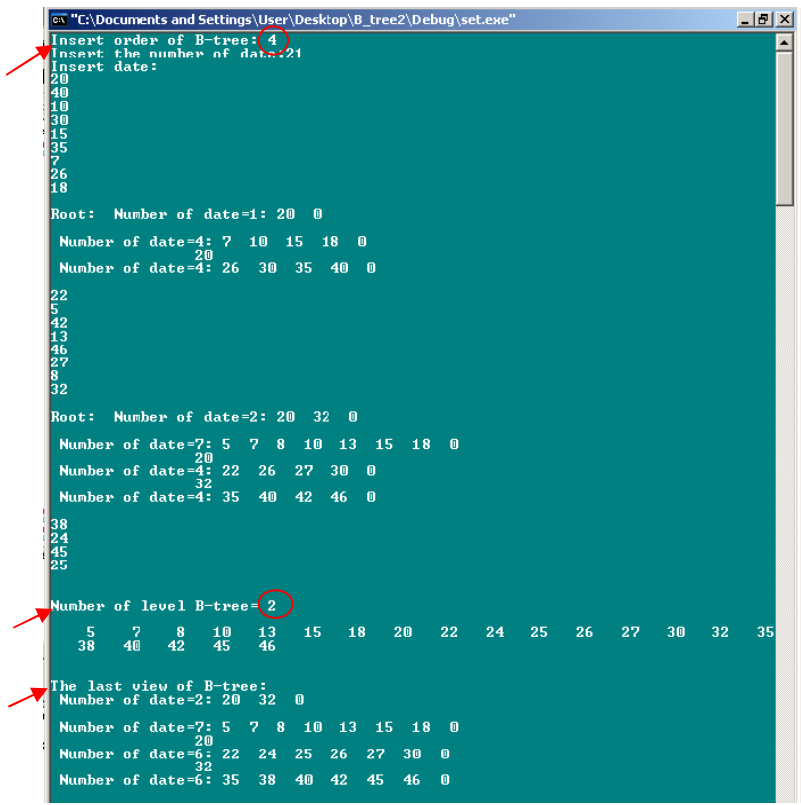
The last view of B-tree:
Number of date=1: 25 0

Number of date=3: 5 7 8 0
10
Number of date=3: 13 15 18 0
20
Number of date=2: 22 24 0
25
Number of date=2: 26 27 0
30
Number of date=3: 32 35 38 0
40
Number of date=3: 42 45 46 0

```

Նկ. 7. 2-րդ կարգի B-ծառի մակարդակների թիվը և ծառի էջերը

Տվյալների նույն հաջորդականության համար (ներմուծված են նկ.6-ի 21 հատ թվերը) նկ. 8-ում ներկայացված է 4-րդ կարգի B-ձառ, որն, ինչպես տեսնում ենք ունի 2 մակարդակ, և նրա առաջին տրոհումը կատարվել է 20, 40, 10, 30, 15, 35, 7, 26, 18 թվերի ներմուծումից հետո:



Նկ. 8. 4-րդ կարգի B-ձառի ստացումը

Նկատենք, որ մեծացնելով ձառի կարգը, փոքրանում է նրա մակարդակների թիվը:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Л. Вирт, *Алгоритмы + структуры данных = программы*. Москва, Мир, 1985г.
2. У. Топп, У. Форд, *Структуры данных в C++*, Москва, 2006г.
3. А.В. Ахо, Дж.Э. Хопкрофт, *Структуры данных и алгоритмы*, 2003г.
4. В.А. Евстигнеев, *Применение теории графов в программировании*, Москва, Наука, 1985г.
5. Х.М. Дейтел, П.Дж. Дейтел, *Как программировать на C++*, 2007г.

**М.А. Джагарян – В-деревья, об одной программной реализации их построения.** – Нахождение критерия управления ростом дерева- одна из важнейших задач поиска данных в динамических структурах данных. В работе рассматривается структура данных, которая называется В-деревом  $n$ -ого порядка. Предложен алгоритм его построения. Даны его структура, свойства, достоинства, временные оценки операции поиска и добавления нового элемента при разных реализациях страниц дерева, описание этих операций. Представлены результаты одной программной реализации. Написана программа, которая строит В-дерево  $n$ -ого порядка для случая, когда все страницы дерева находятся в оперативной памяти компьютера. Для реализации выбрана рекурсивная схема поиска и расщепления страниц дерева. Страницы дерева представлены как обычный упорядоченный список.



ՀԱԶՎԱԳՅՈՒՏ ՀՈՂԱՅԻՆ ԵՎ 3d- ԱՆՑՈՂԻԿ ՄԵՏԱՂՆԵՐԻ  
ՄԻԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿՅՈՒՐԻԻ ԶԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԸ

Ն.Պ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Հազվագյուտ հողային (Հ.Հ.) և 3d- անցողիկ մետաղների միացությունները զգալի հետաքրքրություն են ներկայացնում մագնիսական երևույթների ֆիզիկայի համար, քանի որ նրանցում դիտվող մագնիսական կարգավորությունները նկարագրելու համար կարելի է կիրառել առավել պարզ տեսական մոդելներ, քան այլ անցողիկ մետաղներում: Այդ պատճառով այս նյութերը հարմար են մետաղական ֆերո- և հակաֆերոմագնիսներում մագնիսակարգավորված վիճակը նկարագրելիս կիրառվող տեսական կոնցեպցիաների ստուգման և ճշգրտման համար: Հազվագյուտ հողային մետաղներում և նրանց միացություններում էլեկտրոնային համակարգը կարելի է պարզորոշ կերպով բաժանել լոկալիզացված մագնիսական մոմենտով տիրապետող էլեկտրոնների և հաղորդականության էլեկտրոնների [1, 2]:

Մագնիսակարգավորված նյութերի մագնիսական հատկությունները մեծամասամբ որոշվում են մագնիսական կարգավորության տեսակով և փոխանակային փոխազդեցությունների բնույթով: Այս դեպքում Հ.Հ.Մ-րի բյուրեղային ցանցի հանգույցներում մագնիսական մոմենտների կողմնորոշման յուրահատկությունները զգալիորեն չափով որոշվում են էլեկտրոնային խտության բաշխումը կարգավորող ատոմների և իոնների վալենտական կապերով: Բյուրեղային կառուցվածքի տարրական բջիջում որոշակի դիրքեր զբաղեցնող ատոմների մագնիսական մոմենտների կողմնորոշումը սովորաբար հանգեցնում է տեղական սիմետրիայի նվազեցմանը: Մագնիսական կարգավորությունը սերտորեն կերպով կախված է բյուրեղային կառուցվածքում ատոմների կարգավորվածության հետ, իսկ բյուրեղային ցանցում միջատոմային կապերի էներգիան գերազանցում է փոխանակային փոխազդեցության էներգիան: Այսպիսով, վերը նշված միացությունների մագնիսական հատկությունները սաստիկ զգայուն են կառուցվածքային փոփոխությունների նկատմամբ:

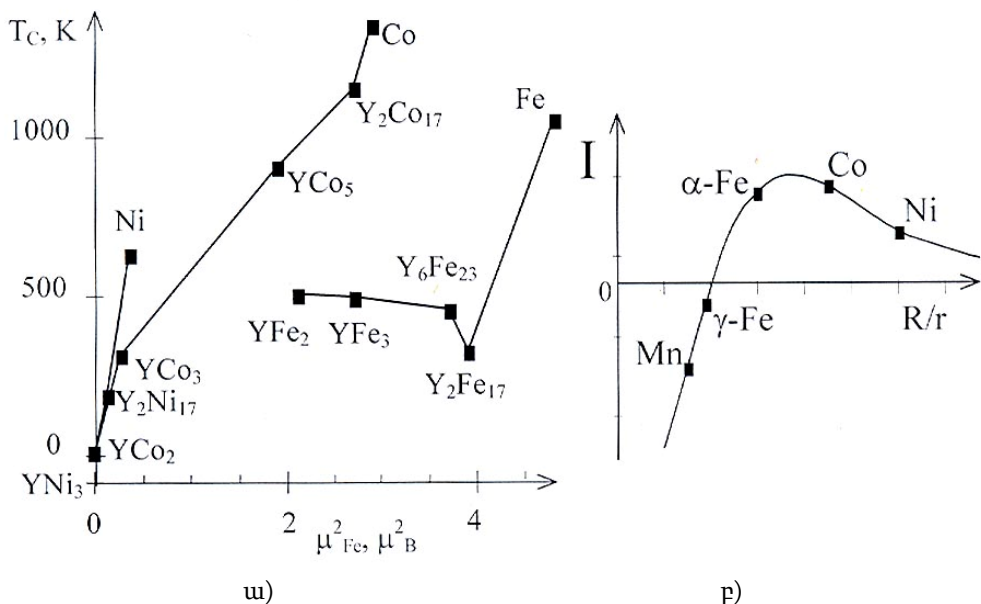
Հազվագյուտ հողային և 3d- մետաղներով միացություններում Հ.Հ. կամ 3d ատոմների այլ ատոմներով փոխարկման դեպքում դիտվում է բյուրեղային ցանցի միջհանգույցային հեռավորությունների փոփոխություն: Միջատոմային հեռավորությունների և էլեկտրոնային խտության փոփոխություն դիտվում է նաև բյուրեղային ցանցում ջրածնի ատոմների ներդրման դեպքում:

Քանի որ հազվագյուտ հողային իոնների մագնիսաակտիվ 4f- ենթաթաղանթն էկրանացված է վերը տեղադրված սպինինիքնամփոփ  $5S^25P^6$  էլեկտրոնային թաղանթներով, ապա բացակայում է 4f էլեկտրոնների ալիքային ֆունկցիաների վերադրումը հարևան ատոմների 4f և 3d էլեկտրոնների ալիքային ֆունկցիաների հետ: Հ.Հ.Մ-րի և 3d- մետաղների միջմետաղական միացություններում երկաթի 3d- էլեկտրոնները հիմնականում նույնպես լոկալիզացված են երկաթի

ատոմների վրա [3]: Այս միացությունների հիմնական մագնիսական հատկությունները մեծ հաջողությամբ բացատրվում են մագնիսական ենթացանցերի լոկալիզացված մոդելով: Այս դեպքում համաձայն մոլեկուլյար դաշտի տեսությանը, դիտարկվում են 3d- 4f փոխանակային փոխազդեցությամբ կապված երկու մագնիսական ենթացանցեր՝  $Z.Z.$ -ի և երկաթի:  $Z.Z.U.$  և 3d- մետաղների միջմետաղական միացություններում գոյություն ունեն երեք տիպի փոխանակային փոխազդեցություններ՝ 4f-4f, 3d-3d և 3d-4f: Ցույց է տրվել, որ երկաթի ատոմների միջև առավել ուժեղ փոխանակային փոխազդեցությունը ազդում է երկաթի ենթացանցի ներսում, այնինչ  $Z.Z.$ -ի ենթացանցում փոխանակային փոխազդեցությունը (4f-4f) այս միացություններում բավականին թույլ է:  $Z.Z.$ -ին միջմետաղական միացություններում փոխանակային փոխազդեցության պարամետրների գնահատման համար լայն կիրառելիություն է ձեռք բերել Նեելի տեսությունը [6]: Համաձայն այս տեսությանը մի քանի մագնիսական ենթացանցերից բաղկացած բյուրեղի հանգույցներում լոկալիզացված են  $Z.Z.$ -ին և 3d- իոնների մագնիսական մոմենտները: 4f- էլեկտրոնների ակնթային ֆունկցիաների ուղիղ վերադրում չի իրականանում և 4f- ուղեծրերի փոխանակումը իրականացվում է անուղղակի եղանակով հաղորդականության էլեկտրոնների միջոցով  $Z.Z.$ -ին իոններով նրանց բևեռեցման հաշվին: 3d-4f փոխազդեցությունը ըստ մեծության միջանկյալ դիրք է զբաղեցնում, սակայն նրա դերը բավականին մեծ է:

$Z.Z.U.$ -րի և երկաթի հիմքում ընկած միջմետաղական միացությունները տիրապետում են յուրահատուկ մագնիսական հատկություններով:

$Z.Z.U.$ -րի և երկաթի միջմետաղական միացությունները տիրապետում են մագնիսական հատկությունների որոշակի յուրահատկություններով: Օրինակ նկ. 1ա-ում ներկայացված են 3d- մետաղներ պարունակող տարբեր միջմետաղական միացությունների Կյուրիի ջերմաստիճանների կախվածությունները 3d- մետաղների մագնիսական մոմենտների քառակուսուց [7]: Ni և CO-ով միացություններում դիտվում է Կյուրիի ջերմաստիճանի և մագնիսական մոմենտի արժեքների միապադաղ աճ՝ 3d- մետաղի պարունակության աճման հետ զուգընթաց: Երկաթ պարունակող միացությունները տիրապետում են առավել մեծ մագնիսական մոմենտով, քան Ni-ով և CO-ով համապատասխան միացությունները: Դա համաձայնության մեջ է գտնվում այն ենթադրության հետ, որի համաձայն անցողիկ մետաղներում CO-ից Fe անցման ժամանակ 3d- էլեկտրոնների լոկալիզացման աստիճանն աճում է և թուլանում է 3d-3d փոխանակումը: Սակայն R- Fe միացությունների Կյուրիի ջերմաստիճանները նկատելի ցածր են մաքուր երկաթի Կյուրիի ջերմաստիճանից և հիմնականում որոշվում են երկաթի ենթացանցում ներքին փոխանակային փոխազդեցություններով: Հազվագյուտ հողային և երկաթի ենթացանցերի միջև եղած փոխանակային փոխազդեցությունը որոշակի ներդրում ունի: Տվյալ երևույթը բացատրվում է իոնների միջև եղած հեռավորությունից փոխանակային էներգիայի կախվածության դասական պատկերացումներով: Բետե-Սլետերի կորի վրա [8] երկաթին համապատասխանող կետերը տեղադրված են կորի առավել թեքության հատվածում (նկ. 1բ): Այդ պատճառով երկաթի ատոմների միջև եղած հեռավորության նույնիսկ չնչին փոփոխությունը առաջացնում է փոխանակային փոխազդեցության ինտեգրալի արժեքի, ինչպես նաև նշանի նկատելի փոփոխություն:



Նկ. 1. ա) Կյուրիի ջերմաստիճանի կախվածությունը  $3d$  ատոմի մագնիսական մոմենտի քառակուսուց; բ) Բեռնե-Սլեյտերի կորը:  $I$  փոխանակային էներգիայի կախվածությունը  $R$  իոնների միջև եղած հեռավորությունից: ( $r$ - իոնային շառավիղն է):

Բարձր բաղադրությամբ երկաթով միացությունների անոմալ ցածր կարգավորվածության ջերմաստիճանները և ճնշման աճման կամ ցանցի լայնարձակման դեպքում մագնիսական հատկության ուժեղ փոփոխությունը կարելի է բացատրել նրանով, որ դիտարկված միացություններում գոյություն ունեն երկաթի ատոմների այնպիսի դիրքեր, որոնց միջև եղած հեռավորությունները մոտ են կրիտիկականներին:

Fe- Fe փոխազդեցության փոխանակային ինտեգրալները կարելի է հաշվարկել մոլեկուլյար դաշտի տեսության շրջանակներում, ելնելով ոչ մագնիսական հազվագյուտ հողային մետաղների միացությունների Կյուրիի ջերմաստիճանների արժեքներից [9]:

$$3k T_c = I_{Fe-Fe} Z_{Fe-Fe} \mu_{Fe} (\frac{1}{2} \mu_{Fe} + 1) \quad (1)$$

որտեղ  $Z_{Fe-Fe}$  երկաթի ատոմների մոտակա հարևանների թիվն է,  $\mu_{Fe-Fe}$  ատոմի միջին մագնիսական մոմենտն է: Բմանալով  $I_{Fe-Fe}$  արժեքը և հիմնվելով համապատասխան միացությունների Կյուրիի ջերմաստիճանների տվյալների վրա մոլեկուլյար դաշտի մոտավորությամբ կարելի է հաշվարկել միջենթացանցային փոխանակման ինտեգրալները: Մասնավորապես [9] աշխատանքում ստացված են հետևյալ առնչությունները.

$$T_c = \frac{1}{2} (T_{Fe} + \sqrt{T_{Fe}^2 + 4T_{RFe}^2}) \quad (2)$$

$$T_{Fe} = n_{FeFe} \cdot N_{Fe} \cdot \sqrt{2S^*(S^*+1)} \cdot \mu_B^2 / 3k \quad (3)$$

$$T_{RFe} = n_{RFe} \sqrt{N_{Fe} \cdot N_R \cdot g_I \cdot 2 \cdot \sqrt{S^*(S^*+1)I_R(I_R+1)}} \cdot \mu_B^2 / 3k \quad (4)$$

Այստեղ  $n_{FeFe}$  և  $n_{RFe}$  փոխանակային պարամետրներն են , որոնք որոշում են փոխանակային փոխազդեցությունները երկաթի ենթացանցի և R-Fe ենթացանցի փոխանակային փոխազդեցությունները:  $N_{Fe}$ -ն և  $N_{R-Fe}$ -ն R ատոմների մոտակա հարևանների թվերն են,  $2\sqrt{S^*(S^*+1)}\mu_B$ - երկաթի արդյունաբար մոմենտն է պարամագնիսական վիճակում, որը հավասար է  $3,7 \mu_B$ :

Մյուս կողմից [10] աշխատանքում ցույց է տրվել, որ Հ.Հ.Մ.-րի արդյունաբար փոխանակային դաշտերը և մագնիսական կարգավորվածությունը պայմանավորված են անուղղակի փոխանակային փոխազդեցության ազդեցությամբ: Այդ պատճառով Կյուրիի պարամագնիսական  $\theta_p$  ջերմաստիճանն ուղիղ համեմատական է հազվագյուտ հողային իոնի սպինի լրիվ մեխանիկական մոմենտի պրոյեկցիայի քառակուսու միջին արժեքին (դե Ժանի ֆակտոր G)։

$$\theta_p = 2/3 \times (A_{\text{spin}}/k_B) \cdot G, \quad (5)$$

որտեղ  $A_{\text{spin}}$ -ն անուղղակի փոխանակային ինտեգրալն է, x-ը Հ.Հ. իոնների կոնցենտրացիան է,  $k_B$ - ն Բոլցմանի հաստատունը:

Դե Ժանի հաստատունը հավասար է

$$G = (g_I - 1)^2 I(I+1) \quad (6)$$

որտեղ  $g_I$ -ն Լանդեի ֆակտորն է, իսկ I-ն հազվագյուտ հողային իոնի լրիվ մեխանիկական մոմենտի քվանտային թիվն է: Այդ դեպքում Հ.Հ-յին միացության Կյուրիի ջերմաստիճանը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$T_C = \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_R) + \frac{1}{2}\sqrt{(\theta_0 + \theta_R)^2 + 4(\theta_{RFe} - \theta_0\theta_R)} \quad (7)$$

Այս բանաձևը հետևում է Նեելի ֆերիմագնիսականության տեսությունից և ստացվել [10] աշխատանքում:

Այն միացությունների Կյուրիի ջերմաստիճանը, որոնցում հազվագյուտ հողի ենթացանցի մագնիսական մոմենտը բացակայում է ( $\theta_R = 0$ ,  $\theta_{RFe} = 0$ ), որոշվում է  $T_{C0} = \theta_0$  պայմանից:

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. К.П. Белов, *Редкоземельные магнетики и их применение*, Москва, Наука, 1980г.
2. С.А. Никитин, *Магнитные св-ва редкоземельных металлов и их сплавов*, Москва. МГУ. 1989г.
3. С.А. Никитин, В.А. Васильковский, *Исследования сверхтонких полей на  $Fe^{57}$  в соединениях  $Gdx Y_{1-x}Fe_2$* , ЖЭТФ, 1975, т.68, вып. 2, с. 577–580.
4. К.Н.Ј. Bushow, *Novel permanent magnetic materials*, Handbook, Supermagnets. Hard magnetic materials, cd. G.I. Long., 1995, V. 331, ch. 4., p. 49–67.
5. С.А. Никитин, А.М. Бислиев, *Эффективные обменные поля в соединениях редкоземельных металлов и железа типа  $RFe_2$  и  $KFe_3$* , F.T.T., 1973, т. 15, вып. 12, с. 3681–3683.
6. П.М. Бозорт, *Ферромагнетизм*, Москва, 1956, с. 784.
7. D. Givord, R. Lemaire, *Magnetic transition and anomalous thermal expansion in  $R_2 Fe_{17}$  compounds*, IEEE Trans. Magn. 1974, v. MAG10, N2., p. 109–113.
8. J.B. Goodenough, *Magnetism and the Chemical Bond*. Interscience, New York: Wiley, 1963.

9. P. Stefanski, A. Kowalchuk, *Structural and magnetic properties of  $RFe_{10}Cr_2$  compounds*, J. Magn. Mater. 1989, v. 81, p. 155–158.
10. С.А. Никитин, И.С. Терешина, *Влияние атомов внедрения на эффективные обменные поля в ферромагнитных соединениях редких земель и 3d – переходных металлов  $R_2Fe_{17}$  и  $R_2Fe_{11}$* , Ti. Ф.Т.Т, 2003, т. 45, N10, с. 1850–1856.

**Н.П. Арутюнян – Температура Кюри соединений редкоземельных металлов и 3d- переходных металлов.** – Магнитные свойства магнитоупорядоченных металлов во многом определяются типом магнитного упорядочения и характером обменных взаимодействий. В соединениях редкоземельных и 3d- металлов происходит изменение расстояний между узлами в кристаллической решетке, занятыми различными атомами при замещении редкоземельных и 3d- атомов. В работе рассматривается метод расчета температуры Кюри соединений редкоземельных и 3d-металлов с применением теории молекулярного поля Вейса. Показано, что для определения температуры Кюри данных соединений необходимо учитывать влияние обменных полей, действующих на редкоземельные ионы как со стороны под-решетки 3d- металлов так и со стороны окружающих редкоземельных ионов.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПЛОТНОСТИ ТОКА, ВОЗБУЖДЕННОГО В ВОДОРОДОПОДОБНОМ АТОМЕ ПРИ УЧЕТЕ ИЗМЕНЕНИЯ ФАЗЫ ВОЗДЕЙСТВУЮЩЕЙ ВОЛНЫ ВНУТРИ АТОМА

А.Г. ГАЛУМЯН

Исследована зависимость интеграла, выражающего силу тока, индуцированного в водородоподобном атоме, от длины волны воздействующей на атом монохроматического электромагнитного излучения с учетом пространственной дисперсии.

## 1. Введение

Как известно, оптические свойства атома в поле световой (электромагнитной волны) определяются воздействием волновых функций волны. Оптический эффект пространственной дисперсии, определяемой поляризацией атома, связан с изменением фазы волны в атоме [2]. Пространственная дисперсия обычно учитывается феноменологически, что связано, в частности, с трудностью расчета в атомарном масштабе. Тем не менее представляет интерес расчет в атомарном уровне, что может быть осуществлено только для простейших атомов, причем с дополнительными упрощениями. В данной работе рассмотрен эффект применения в атоме в значение интеграла, выражающего плотность тока, индуцированного в атоме. В работе рассмотрен водородоподобный атом, причем учтен только один простейший переход.

## 2. Расчет тока

Волновая функция оптического электрона водородоподобного атома при наличии светового поля имеет вид [1].

$$\begin{aligned} \psi_n(\vec{r}, t) = & \psi_n^{(0)}(\vec{r}, t) + [A_{nn} \cdot \psi_n^{(0)}(\vec{r}) + A_{nl} \cdot \psi_l^{(0)}(\vec{r})] \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot e^{i\omega t} + \\ & + [B_{nn} \cdot \psi_n^{(0)}(\vec{r}) + B_{nl} \cdot \psi_l^{(0)}(\vec{r})] \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\psi_n^{(0)}(\vec{r}, t) = \psi_n^{(0)}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega_n t}, \quad \psi_n^{(0)}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \alpha^{1.5} \cdot e^{-\alpha \cdot r}, \quad \psi_l^{(0)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \alpha^{\frac{3}{2}} \cdot \sin \vartheta e^{-\frac{1}{2}\alpha \cdot r} \cdot e^{i\varphi}, \quad (2)$$

$\alpha = \frac{z_0}{a}$ ,  $z_0$  - порядковое число атома,  $a$  - радиус Бора,  $\omega$  - частота волны.

Коэффициенты  $A_{nl}$  определяются по формулам (ср. [1]):

$$A_{nl} = \frac{e}{2m\hbar(\omega_{nl} - \omega)} \int_{(V)} e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \psi_l^{(0)}(r) \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0) \psi_n^{(0)}(r) dv, \quad (3)$$

$\omega_{nl} = \omega_n - \omega_l, n \neq l, \omega_n = \frac{E_n}{\hbar}, E_n$  - энергия  $n$ -ого уровня атома.

$$A_{nl} = \frac{-e}{2m\hbar\omega} \int_{(r)} e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \psi_n^{(0)}(r) \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0) \psi_n^{(0)}(r) dv, \quad (4)$$

где  $\vec{E}_0 = (\vec{E}_{0x}, \vec{E}_{0y}, \vec{E}_{0z})$ ,  $\vec{k} = (0, 0, k_z)$  - волновой вектор.

Здесь и в дальнейшем рассматривается сферическая система координат:  $x = r \cdot \sin\vartheta \cos\varphi$ ,  $y = r \cdot \sin\vartheta \sin\varphi$ ,  $z = r \cdot \cos\vartheta$  ( $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ), ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) .

Коэффициенты  $B_{nl}$  определяются так же как и  $A_{nl}$ , но надо заменить  $k_z$  на  $-k_z$  и  $\omega$  на  $-\omega$  .

Учитывая, что:

$$\frac{\partial \psi_n^{(0)}}{\partial x} = -\alpha \sin\vartheta \cos\varphi \cdot \psi_n^{(0)}, \quad \frac{\partial \psi_n^{(0)}}{\partial y} = -\alpha \sin\vartheta \sin\varphi \cdot \psi_n^{(0)}, \quad \frac{\partial \psi_n^{(0)}}{\partial z} = -\alpha \cos\vartheta \cdot \psi_n^{(0)} \quad (5)$$

и производя интегрирование по переменной  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) , получим

$$A_{nl} = \frac{-e\alpha^4 \cdot (E_{0x} - iE_{0y})}{8\pi m\hbar(\omega_{nl} - \omega)} \int_0^{+\infty} r^2 e^{-1,5\alpha \cdot r} \int_0^\pi e^{ik_z r \cdot \cos\vartheta} \cdot \sin^3\vartheta d\vartheta \quad (n \neq l). \quad (6)$$

Производя интегрирование по переменной  $\vartheta$  , получим

$$\int_0^\pi \sin^3\vartheta \cdot e^{-ik_z r \cos\vartheta} d\vartheta = 4 \left( \frac{\sin(k_z r)}{k_z^3 r^3} - \frac{\cos(k_z r)}{k_z^2 r^2} \right). \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует:

$$A_{nl} = \frac{-e\alpha^4 \cdot (E_{0x} - iE_{0y})}{2\pi m\hbar k_z^3 (\omega_{nl} - \omega)} \cdot \left[ \int_0^{+\infty} e^{-\frac{3}{2}\alpha \cdot r} \cdot \frac{\sin(k_z r)}{r} dr - k_z \int_0^{+\infty} e^{-\frac{3}{2}\alpha \cdot r} \cdot \cos(k_z r) dr \right]. \quad (8)$$

Интегрируя по частям и применяя технику вычисления интеграла зависящего от параметра (в роли параметра удобно брать  $k_z$ ) получим [3], [5]:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-1,5\alpha \cdot r} \cdot \cos(k_z r) dr &= \frac{6\alpha}{4k_z^2 + 9\alpha^2}, \\ \int_0^{+\infty} e^{-\frac{3}{2}\alpha \cdot r} \cdot \frac{\sin(k_z r)}{r} dr &= \arctg \frac{2k_z}{3\alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует:

$$A_{nl} = C \frac{E_{0x} - iE_{0y}}{\omega_{nl} - \omega} \quad (n \neq l), \quad (10)$$

где

$$C = \frac{ez_0^4}{2\pi m\alpha^4 \hbar k_z^3} \cdot \left[ \frac{6z_0 a k_z}{4a^2 k_z^2 + 9z_0^2} - \arctg \left( \frac{2a k_z}{3z_0} \right) \right]; \quad (11)$$

Учитывая, что  $C$  четная функция от  $k_z$  , получим:

$$B_{nl} = C \frac{E_{0x} - iE_{0y}}{\omega_{nl} + \omega} \quad (n \neq l), \quad (12)$$

Из (5) имеем:

$$A_{nn} = \frac{-e}{2m\hbar\omega} \int_{(r)} e^{-i k_z r \cos(\vartheta)} \cdot (E_{0x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + E_{0y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + E_{0z} \cdot \frac{\partial}{\partial z}) \psi_n^{(0)}(r) dv =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^4}{8\pi^2 m \hbar \omega} \int_0^{+\infty} r^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot r} \left[ \int_0^\pi e^{-ik_z r \cos(\vartheta)} \cdot \sin^3(\vartheta) d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} (E_{0x} \cdot \cos(\varphi) + E_{0y} \cdot \sin(\varphi)) d\varphi + \right. \\
&\quad \left. + 2\pi E_{0z} \cdot \int_0^\pi e^{-i \cdot k_z r \cos(\vartheta)} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) d\vartheta \right] dr. \quad (13)
\end{aligned}$$

Вычислив полученные интегралы, получим

$$A_{nn} = D \cdot \frac{i \cdot E_{0z}}{\omega_{nl} - \omega}, \text{ где } D = \frac{ez_0^4 k_z}{\pi m \omega (a^2 k_z^2 + 4z_0^2)^2}. \quad (14)$$

Так как  $D$  нечетная функция от  $k_z$ , то:

$$B_{nn} = -D \cdot \frac{i \cdot E_{0z}}{\omega_{nl} + \omega}. \quad (15)$$

Из (1), (10) – (12), (14), (15) следует:

$$\psi_n(\vec{r}, t) = (a \cdot \psi_n^{(0)} + b \cdot \psi_k^{(0)}) \cdot e^{-i \cdot \omega_n t}, \quad (16)$$

где

$$a = 1 + i \frac{2E_{0z} \cdot \cos(\omega t)}{\omega} D, \quad b = \frac{2C(E_{0z} - iE_{0y})}{\omega_{nk}^2 - \omega^2} (\omega_{nk} \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)). \quad (17)$$

Плотность тока, индуцированного в атоме будет:

$$\begin{aligned}
\vec{J}_0 &= \frac{ie\hbar}{2m} [\psi_n(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \bar{\psi}_n(\vec{r}, t) - \bar{\psi}_n(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi_n(\vec{r}, t)] = \\
&= \frac{ie\hbar}{2m} [(a\psi_n^{(0)} + b\psi_l^{(0)}) \vec{\nabla} (\bar{a}\bar{\psi}_n^{(0)} + \bar{b}\bar{\psi}_l^{(0)}) - (\bar{a}\bar{\psi}_n^{(0)} + \bar{b}\bar{\psi}_l^{(0)}) \vec{\nabla} (a\psi_n^{(0)} + b\psi_l^{(0)})] = \\
&= \frac{ie\hbar}{2m} (a\bar{b}\psi_n^{(0)} \vec{\nabla} \bar{\psi}_l^{(0)} + b\bar{a}\psi_l^{(0)} \vec{\nabla} \bar{\psi}_n^{(0)} + b\bar{b}\psi_l^{(0)} \vec{\nabla} \bar{\psi}_l^{(0)} - \bar{a}b\psi_n^{(0)} \vec{\nabla} \bar{\psi}_l^{(0)} - \\
&\quad - \bar{a}b\bar{\psi}_l^{(0)} \vec{\nabla} \psi_n^{(0)} - b\bar{b}\bar{\psi}_l^{(0)} \vec{\nabla} \psi_l^{(0)}).
\end{aligned}$$

С точностью до членов первого порядка по  $|\vec{\varepsilon}_0|$  (квадраты  $|\vec{\varepsilon}_0|$  пренебрежимы) получим

$$\vec{J}_0 = -\frac{e\hbar}{m} \text{Im}(b \cdot \vec{\chi}), \text{ где } \vec{\chi} = \psi_l^{(0)} \vec{\nabla} \psi_n^{(0)} - \psi_n^{(0)} \vec{\nabla} \psi_l^{(0)} \quad (18)$$

Вычислив производные  $\sin\vartheta$ ,  $\varphi$  по переменным  $x, y, z$ , получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_l^{(0)}}{\partial x} &= \left( -\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi + \frac{\cos\varphi \cdot \cos^2\vartheta}{r \cdot \sin\vartheta} - i \frac{\sin\varphi}{r \cdot \sin\vartheta} \right) \cdot \psi_l^{(0)}, \\
\frac{\partial \psi_l^{(0)}}{\partial y} &= \left( -\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi + \frac{\sin\varphi \cdot \cos^2\vartheta}{r \cdot \sin\vartheta} + i \frac{\cos\varphi}{r \cdot \sin\vartheta} \right) \cdot \psi_l^{(0)}, \\
\frac{\partial \psi_l^{(0)}}{\partial z} &= \left( -\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\vartheta - \frac{\cos\vartheta}{r} \right) \cdot \psi_l^{(0)} \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi_n^{(0)}}{\partial x} = (-\alpha \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi) \cdot \psi_n^{(0)}, \quad \frac{\partial \psi_n^{(0)}}{\partial y} = (-\alpha \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi) \cdot \psi_n^{(0)},$$

$$\frac{\partial \psi_n^{(0)}}{\partial z} = -\alpha \cdot \cos\vartheta \cdot \psi_n^{(0)}. \quad (20)$$

Из (18) – (20) следует:



$$\begin{aligned}
\chi_x &= \psi_l^{(0)} \frac{\partial \psi_n^{(0)}}{\partial x} - \psi_n^{(0)} \frac{\partial \psi_l^{(0)}}{\partial x} = \frac{\alpha^3}{8\pi^2} \left( -\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos \varphi - \frac{\cos \varphi \cdot \cos^2 \vartheta}{r} + i \frac{\sin \varphi}{r} \right) \cdot e^{-1,5r} \cdot e^{i\varphi}, \\
\chi_y &= \frac{\alpha^3}{8\pi^2} \left( -\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \varphi - \frac{\sin \varphi \cdot \cos^2 \vartheta}{r} - i \frac{\cos \varphi}{r} \right) \cdot e^{-1,5r} \cdot e^{i\varphi}, \\
\chi_z &= \frac{\alpha^3}{8\pi^2} \left( -\frac{\alpha}{2} \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta + \frac{\cos \vartheta \cdot \sin \vartheta}{r} \right) \cdot e^{-1,5r} \cdot e^{i\varphi}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Выделяя из выражений в (21) и  $b = b_1 + ib_2$  вещественные и мнимые части, получим:

$$\begin{aligned}
I_m(b \cdot \chi_x) &= \frac{C \cdot \alpha^3 (\omega_{nk} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))}{4\pi^2 (\omega_{nl}^2 - \omega^2)} \cdot e^{-1,5r}, \\
\{ \varepsilon_{0y} \left( \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \vartheta + \frac{\cos^2 \vartheta}{r} \right) \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{r} - \varepsilon_{0x} \left( \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \vartheta + \frac{\cos^2 \vartheta}{r} - \frac{1}{r} \right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \}, \\
I_m(b \cdot \chi_y) &= \frac{C \cdot \alpha^3 (\omega_{nk} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))}{4\pi^2 (\omega_{nl}^2 - \omega^2)} \cdot e^{-1,5r}, \\
\{ -\varepsilon_{0x} \left( \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \vartheta + \frac{\cos^2 \vartheta}{r} \right) \sin^2 \varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{r} + \varepsilon_{0y} \left( \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \vartheta + \frac{\cos^2 \vartheta}{r} \right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \} \\
I_m(b \cdot \chi_z) &= \frac{C \cdot \alpha^3 (\omega_{nk} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))}{4\pi^2 (\omega_{nl}^2 - \omega^2)} \left( \frac{1}{r} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta (E_{0x} \cos \varphi - E_{0y} \sin \varphi)
\end{aligned} \tag{22}$$

Из (18) и (22), производя интегрирование по всему пространству в сферической системе координат, получаем:

$$\begin{aligned}
\int_{(V)} J_{0x} dv &= \int_0^{+\infty} r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} J_{0x} d\varphi = \\
&= \frac{1}{k_z^3} \left( \frac{6z_0 a k_z}{4a^2 k_z^2 + 9z_0^2} - \arctg \frac{2ak_z}{3z_0} \right) \frac{16e^2 \alpha \cdot E_{0y} (\omega_{nl} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))}{81\pi^2 m^2 (\omega_{nl}^2 - \omega^2)},
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\int_{(V)} J_{0y} dv = \frac{1}{k_z^3} \left( \frac{6z_0 a k_z}{4a^2 k_z^2 + 9z_0^2} - \arctg \frac{2ak_z}{3z_0} \right) \frac{16e^2 \alpha \cdot E_{0x} (\omega_{nk} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))}{81\pi^2 m^2 (\omega_{nl}^2 - \omega^2)}, \tag{24}$$

$$\int_{(V)} J_{0z} dv = 0. \tag{25}$$

Этими выражениями определяются интегралы от возбужденного волной плотности тока, взятые по объему атома.

Заметим, что функция  $F(k_z) = \frac{1}{k_z^3} \left( \frac{6z_0 a k_z}{4a^2 k_z^2 + 9z_0^2} - \arctg \frac{2ak_z}{3z_0} \right)$ , является четной  $F(-k_z) = F(k_z)$  и ограниченной.

Здесь надо учесть также, что  $\lim_{k_z \rightarrow 0} \frac{1}{k_z^3} \left( \frac{6z_0 a k_z}{4a^2 k_z^2 + 9z_0^2} - \arctg \frac{2ak_z}{3z_0} \right) = \frac{16a^3}{243z_0^3}$ . Легко убедиться, что полученный результат соответствует известному случаю  $ak_z = 0$  [1].

В заключение выражаю благодарность доктору физ. мат. наук, проф. Ерицяну О.С. за предложенную задачу и постоянное внимание к ней.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Д.И. Блохинцев, *Основы квантовой механики*, М., Наука, 1976.
2. В.М. Агранович, В.Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов*, М., Наука, 1979.
3. Г.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, М., Физ-мат. лит., Т.2, 2003.
3. В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов, *Математический анализ*, Изд. Моск. Университета, 1987.
4. Ա.Գ. Ղալումյան, Ա.Ս. Սարգսյան, *Մաթեմատիկական անալիզ*, Ինտեգրալ և դիֆերենցիալ հաշիվ, ԵՊՀՀ, 2008:

**Ա.Գ. Ղալումյան – Ջրածնանման ատոմում առաջացած հոսանքի ուժի խտության հաշվումը տարածական դիսպերսիայի դեպքում:** – Հետազոտված է մոնոքրոմատիկ էլեկտրոնազինական ճառագայթման շնորհիվ ջրածնանման ատոմում առաջացած հոսանքի ուժի խտությունից ինտեգրալի կախվածությունը ավիքի երկարությունից, տարածական դիսպերսիայի առկայության դեպքում:

## ԿԻՐԽՆՈՖԻ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՆՈՆԻ ԳՐԱՖԻԿԱԿԱՆ ՄԵԿՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

**Մ.Ս. ԱԹՈՅԱՆ, Ս.Ն. ՆԱԶԻՅԱՆ**

Ճյուղավորված շղթաների վերլուծության հիմնական մեթոդը կատարվում է Կիրխհոֆի կանոնների կիրառմամբ: Այս կանոններն ընդգրկում են լիցքի պահպանման և էներգիայի պահպանման օրենքները:

Կիրխհոֆի առաջին կանոնը կամ հանգույցի վերաբերյալ թեորեմը. կամայական հանգույցում հոսանքի ուժերի հանրահաշվական գումարը հավասար է զրոյի՝

$$\sum_i I_i = 0 \quad (1)$$

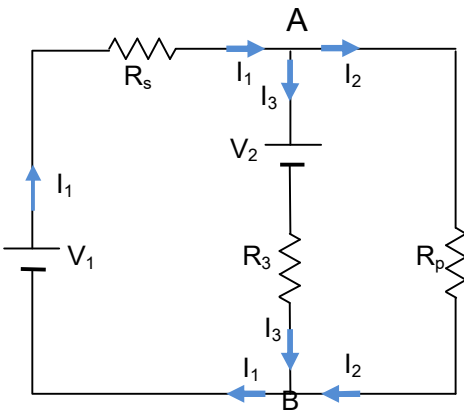
Սա պարզապես նշանակում է, որ դեպի հանգույց հոսող հոսանքների գումարը (վերցնենք որպես դրական) հավասար է հանգույցից հոսող հոսանքների գումարին (վերցնենք որպես բացասական) կամ, որ լիցքը պահպանվում է: Նկ.1-ում A կուտակման կետի համար հոսանքի ուժերի հանրահաշվական գումարը հետևյալն է՝

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

կամ

$$I_1 = I_2 + I_3$$

*մտնող էլեկտրական հոսանք = դուրս եկող էլեկտրական հոսանք*



Նկ. 1. Ճյուղավորված շղթաներ

թեորեմը. կամայական փակ կոնտուրի բոլոր տարրերի երկայնքով պոտենցիալների տարբերության (լարումների) հանրահաշվական գումարը զրո է՝

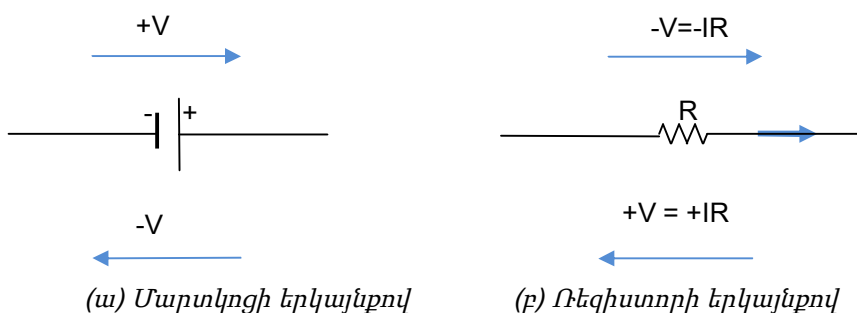
$$\sum_i V_i = 0 \quad (2)$$

Սա նշանակում է, որ փակ կոնտուրում լարման աճերի գումարը հավասար է զրոյի:

Իհարկե, նայելով Ճյուղավորված շղթայի գծագրին, հնարավոր չէ ասել, թե, որ ուղղությամբ են հոսում առանձին հոսանքները՝ դեպի հանգույց, թե՛ հանգույցից: Առանձին հանգույցում կարելի է ընդունել հոսանքի պայմանական ուղղություններ: Եթե ընտրված ուղղությունը սրիսալ է, ապա մաթեմատիկական հաշվարկների արդյունքում կըստանանք հակադիր նշան: Բացասական հոսանքը կվկայի ուղղության սխալ ընտրության մասին:

Կիրխհոֆի երկրորդ կանոնը կամ կոնտուրի վերաբերյալ

սար է լարման անկումների գումարին, որը ճիշտ է, երբ էներգիան պահպանվում է: Շրջանցելով կոնտուրը կամ ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ, կամ ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ՝ կստանանք լարման աճ կամ լարման անկում շղթայի յուրաքանչյուր տարրի երկայնքով: Հետևաբար, կարևոր է պայմանականորեն ընդունել շղթայի տվյալ տարրում լարման նշանը: Օգտագործենք նկ. 2-ում ներկայացված նշանակումները: Լարումը մարտկոցի երկայնքով վերցվում է դրական (լարման աճ), եթե կոնտուրը շրջանցվում է դեպի մարտկոցի դրական բևեռ, ինչպես ցույց է տրված նկ. 2.ա-ում: Լարումը մարտկոցում վերցվում է բացասական, եթե կոնտուրը շրջանցվում է հակառակ ուղղությամբ, այսինքն՝ դեպի բացասական բևեռ: (Նշենք, որ հոսանքի ճյուղերի ուղղությունների ընտրությունները ոչ մի կապ չունեն մարտկոցում լարման նշանը որոշելու հետ: Լարման նշանը կախված է միայն կոնտուրի շրջանցման ուղղության ընտրությունից:)



Նկ. 2. Պայմանական նշանակումները Գիրխոֆի կանոնների համար

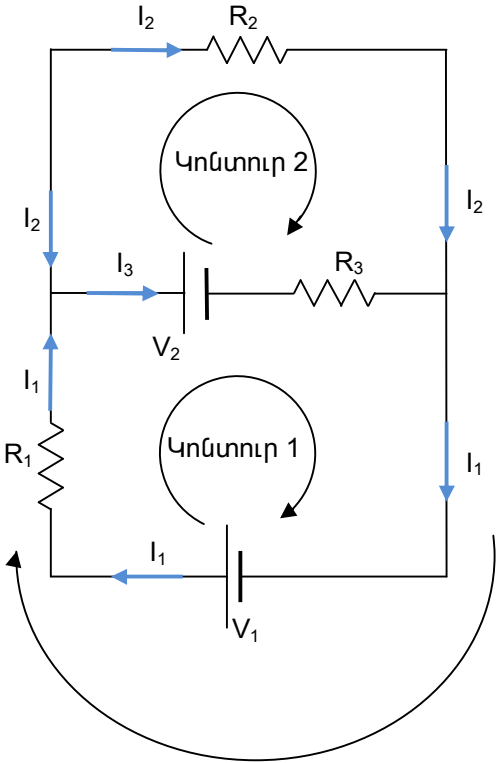
Լարումը ռեզիստորում վերցվում է բացասական (անկում), եթե կոնտուրը շրջանցվում է այդ ճյուղով անցնող հոսանքի ընտրված ուղղությամբ, և դրական, եթե կոնտուրը շրջանցվում է հակառակ ուղղությամբ: Նշանի այսպիսի պայմանական ընտրությունը թույլ է տալիս շրջանցել կոնտուրը կամ ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ, կամ ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ: Երկու դեպքում էլ (2) հավասարումը մաթեմատիկորեն մնում է նույնը:

**Գիրխոֆի կանոնների կիրառությունը.** Գիրխոֆի կանոնների կիրառման ժամանակ կարելի է օգտվել հետևյալ հատուկ քայլերից՝

1. Որոշել հոսանքը և հոսանքի ուղղությունը շղթայի յուրաքանչյուր ճյուղի համար: Դա առավել հարմար է կատարել հանգույցներում:
2. Ցույց տալ կոնտուրները և ինքնակամ ընտրել շրջանցման ուղղությունները (տե՛ս նկ. 3): Ցուրաքանչյուր ճյուղ պետք է լինի ամենաքիչը մեկ կոնտուրում:
3. Գիրառել Գիրխոֆի առաջին կանոնը և գրել հոսանքի ուժերի համար հավասարումները: (Ընդհանրապես, սա տալիս է հավասարումների համակարգ, որը պարունակում է բոլոր հոսանքի ուժերը):
4. Շրջանցել այն կոնտուրները, որոնցում կընդգրկվեն բոլոր ճյուղերը: Շրջանցելով կոնտուրը՝ կիրառել Գիրխոֆի երկրորդ կանոնը և գրել հավասարումները՝ օգտվելով շրջանցման համար ընտրված պայմանական ուղղություններից:

3 և 4 քայլերը տալիս են  $N$  անհայտներով  $N$  հավասարումների համակարգ

(հոսանքի ուժերի թիվը  $N$  է), որը կարելի է լուծել հոսանքի ուժերի նկատմամբ: Եթե ավելի շատ կոնտուրներ են շրջանցվել, քան անհրաժեշտ է, ապա կունենանք ավելորդ հավասարումներ: Միայն այն կոնտուրներն են անհրաժեշտ, որոնք ընդգրկում են յուրաքանչյուր ճյուղը մեկ անգամ: Այս գործընթացը կարող է բարդ թվալ, բայց այն իրականում ամենակարճն է:



Կոնտուր 3

Նկ. 3. Կիրիսիտֆի կանոնների կիրառությունը

**Կիրիսիտֆի կանոնի գրաֆիկական մեկնաբանությունը.** Կիրիսիտֆի երկրորդ կանոնն ունի գրաֆիկական մեկնաբանություն, որն օգնում է ավելի լավ ըմբռնել նրա իմաստը: Գրաֆիկական այս մոտեցումը թույլ է տալիս պատկերացնել պոտենցիալների փոփոխությունը շղթայում, կանխատեսել մաթեմատիկական հաշվարկների արդյունքները կամ հաստատել արդյունքների մեծության կարգը: Համեմատաբար պարզ շղթաներում այն կարող է տալ պատկերացում պատասխանների թվային արժեքների մասին:

Գրաֆիկական մոտեցման գաղափարը հետևյալն է. կոորդինատների եռաչափ համակարգը տեղադրում ենք շղթայի էլեկտրացանցի գծագրի վրա: Հաղորդալարերը և շղթայի մասերը կազմում են  $x$ - $y$  հարթության հիմքը, կամ գծագրի «հատակը»:  $z$  առանցքի երկայնքով այս հարթությանը տարած ուղղահայացը հանդիսանում է էլեկտրական պոտենցիալի արժեքների առանցք՝ զրոյական լարման համապատասխան ընտրությամբ: Այսպիսի գծագիրն անվանում են

### *Կիրիսիոֆի գծագիր:*

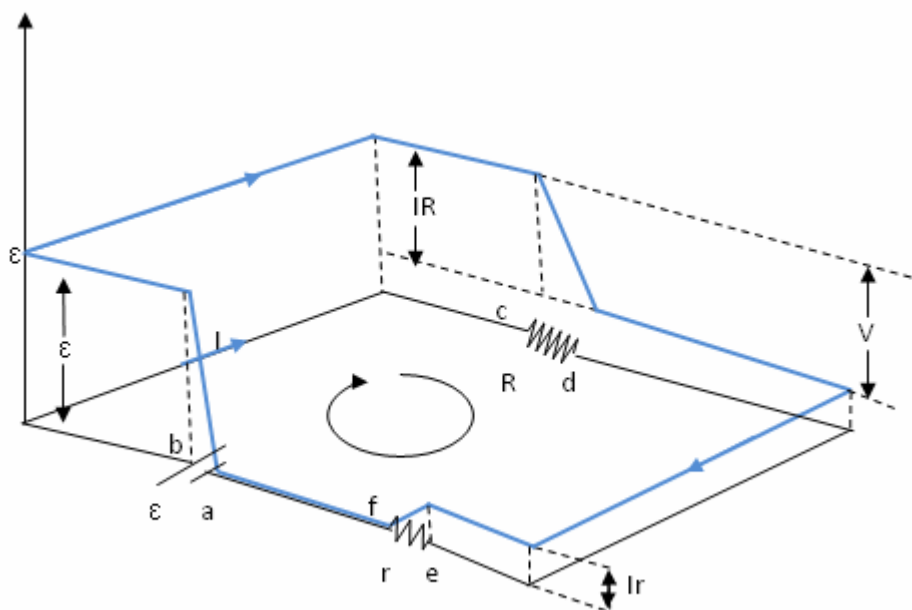
Կիրիսիոֆի գծագրի կառուցման կանոնները հետևյալն են. սկսել հայտնի պոտենցիալի արժեքից և կառուցել կոնտուրների ամբողջությունը՝ վերջացնելով ելման կետում: Այն փաստը, որ պետք է վերադառնալ ելման կետ, նշանակում է, որ բոլոր աճերը պետք է հավասարակշռվեն անկումներով: Այս պայմանն էներգիայի պահպանման օրենքի երկրաչափական արտահայտությունն է, որը մաթեմատիկորեն արտահայտվում է Կիրիսիոֆի երկրորդ կանոնում:

Այնուհետև, եթե պոտենցիալը աճում է, ցույց տալ այդ աճը պոտենցիալների առանցքի ուղղությամբ: Աճը, իհարկե, մարտկոցի բևեռի լարումն է: Նույն ձևով, եթե պոտենցիալը նվազում է (օրինակ, ռեզիստորը հոսանքի ուղղությամբ շրջանցելիս), ցույց տալ նվազումը: Եթե հնարավոր է, փորձել չափել աճերի և անկումների (լարումները) չափը: Այսինքն՝ եթե կա պոտենցիալի մեծ աճ (ինչպես բարձր լարման մարտկոցով անցնելիս), ապա գծագրում մյուսների համեմատ այդ աճը ավելի մեծ զծել:

Այս մեթոդը կարող է օգտակար լինել, եթե, նախքան շղթայի մաթեմատիկական վերլուծությունը, օգտվենք այս գրաֆիկական մեթոդից, որը կօգնի կազմակերպել հետագա գործողությունները և որակապես գնահատել արդյունքները (օրինակ, որ ռեզիստորն է ձեռք բերում ամենամեծ լարումը և այլն): Բարդ շղթաների համար այսպիսի գծագիր կազմելը կարող է դժվարացնել պրակտիկ օգտագործումը: Այնուամենայնիվ, այն միշտ լավ է ամրապնդում Կիրիսիոֆի երկրորդ օրենքի հիմնական գաղափարը:

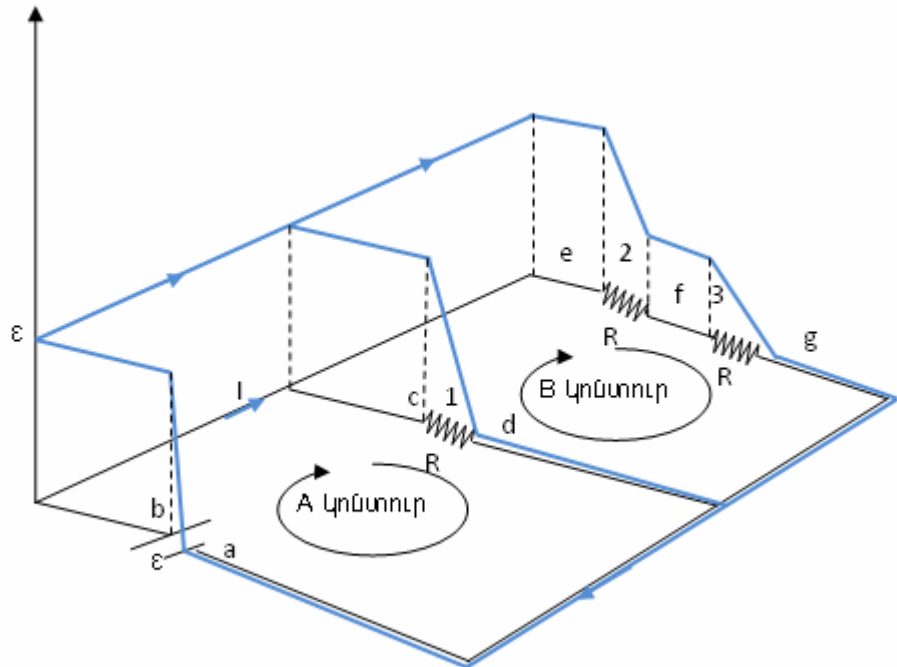
Որպես այս մեթոդի օրինակ քննարկենք նկ.4-ում գծված շղթան.  $r$  ներքին դիմադրությամբ մարտկոցը հաղորդալարով միացված է արտաքին  $R$  ռեզիստորին: Հոսանքը, ինչպես ցույց է տրված գծագրում, հոսում է կատոդից անոդ՝ անցնելով արտաքին ռեզիստորի միջով: Համարելով մարտկոցի կատոդում ( $a$  կետում) պոտենցիալը հավասար զրոյի՝ սկսում ենք զծել գծագիրը: (Սա պայմանական է, բայց ոչ պարտադիր: Մի քանի մարտկոց պարունակող շղթաներում կարելի է ընտրություն կատարել մի քանի հավասար հավանական տարբերակների միջև:) Շրջանցելով շղթան հոսանքի պայմանական ուղղությամբ՝ գծում ենք պոտենցիալի աճը մարտկոցում ( $ab$ ): Նշենք, որ պոտենցիալները հաղորդալարներում ցույց են տրված որպես  $x-y$  հարթությանը զուգահեռ զծեր ( $bc$ ,  $de$ ,  $fa$ ): Դա նշանակում է, որ նրանցում լարման անկում չկա: Երբ հասնում ենք ռեզիստորին, ապա այստեղ պետք է լինի պոտենցիալի էական նվազում: Սակայն չենք կարող արտաքին ռեզիստորի երկայնքով լարման անկումը մեծությամբ հավասարեցնել մարտկոցի երկայնքով լարման աճին: Պոտենցիալը չի հավասարվում զրոյի, քանի որ մարտկոցի ներքին դիմադրությունում հոսանք առաջացնելու համար անհրաժեշտ է որոշակի լարման անկում: Այսպիսով, մարտկոցի բևեռի  $V$  լարումն ավելի փոքր է քան նրա  $E_{\text{ԵԼԴԻ}}$ -ն ( $a$  և  $b$  կետերի միջև աճը), իսկ արտաքին ռեզիստորում հոսանքն ավելի քիչ է քան այն կլիներ, եթե մարտկոցը չունենար ներքին դիմադրություն: Նկ.5-ում ներկայացված է ավելի բարդ իրավիճակ. երկու ռեզիստորներ միացված են հաջորդաբար, իսկ նրանց զուգահեռ միացված է երրորդ ռեզիստորը:

Պոտենցիալ



Նկ. 4. Կիրիստոֆի գծագիրը

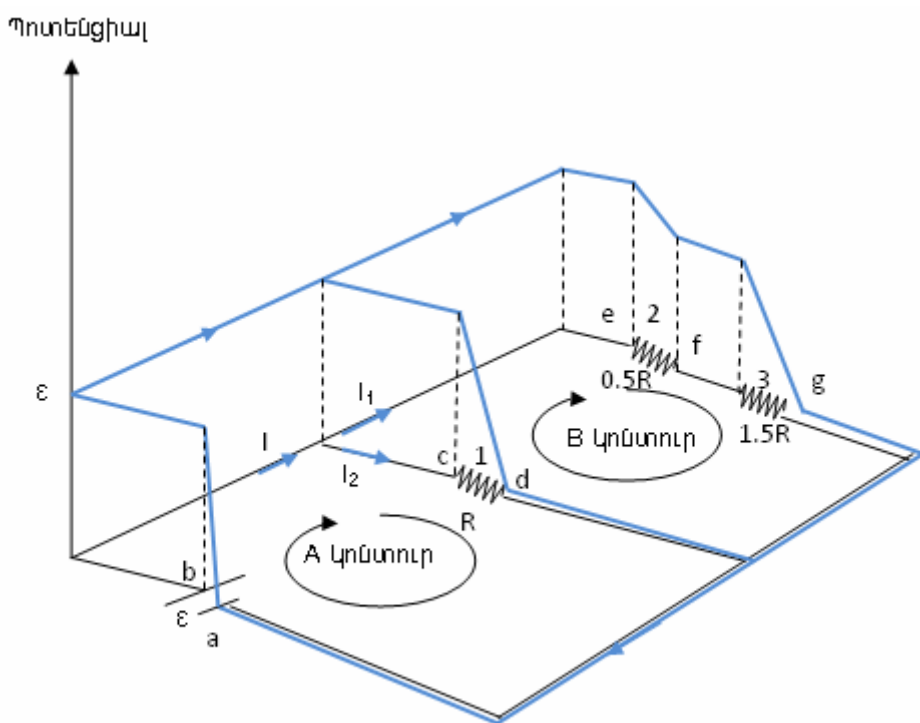
Պոտենցիալ



Նկ. 5. Կիրիստոֆի գծագիրը սովորական շղթայի համար

Բոլոր երեք ռեզիստորներն օժտված են որոշակի  $R$  դիմադրությամբ: Պարզության համար ենթադրվում է, որ մարտկոցն այստեղ ունի աննշան ներքին դիմադրություն: Գծագիրը սկսենք գծել  $a$  կետից: Մարտկոցում դիտվում է պոտենցիալի աճ, որը համապատասխանում է նրա լարմանը ( $ab$ ): Այնուհետև անցնենք 1 ռեզիստորով: Այստեղ կա պոտենցիալի անկում ( $cd$ ), որը հավասար է ռեզիստորի երկայնքով լարման անկման մեծությանը: Եթե անցնենք 2 և 3 ռեզիստորներով, ապա կտեսնենք, որ յուրաքանչյուրը ստանում է լրիվ լարման անկման կեսը: Զուգահեռ միացման ժամանակ ամենամեծ դիմադրությունով անցնում է ամենափոքր հոսանքը, բայց այս երկրաչափական մոտեցումը կարող է օգնել կանխատեսել թվային արդյունքները՝ առանց մաթեմատիկական հաշվարկներ կատարելու: Այստեղ, քանի որ բոլոր դիմադրությունները հավասար են, լրիվ հոսանքի ուժի մեկ-երրորդը անցնում է 2 և 3 ռեզիստորներով, իսկ երկու-երրորդը՝ 1 ռեզիստորով:

Այժմ դիտարկենք այնպիսի դեպք, որում տվյալներն նույնն են ինչ նկ.4-ի շղթայինը միայն հաջորդական միացված երկու ռեզիստորներից մեկն ունի  $0.5R$ , իսկ մյուսը՝  $1.5R$  դիմադրություն: Այս դեպքի համար Կիրխոֆի գծագիրն ունի նկ.6-ում պատկերված տեսքը:



Նկ. 6. Կիրխոֆի գծագիրը բարդ շղթայի համար

Մարտկոցով անցնելիս դիտվում է նրա լարմանը հավասար պոտենցիալի աճ: Այնուհետև 1 ռեզիստորում դիտվում է պոտենցիալի անկում: Եթե անցնենք 2 և 3 ռեզիստորների միջով, ապա անհրաժեշտ է, որ նրանց պոտենցիալների անկումների գումարը հավասար լինի 1 ռեզիստորի երկայնքով պոտենցիալի անկ-



մանը, քանի որ 1 ռեզիստորը 2 և 3 հաջորդական միացված ռեզիստորներին միացված է զուգահեռ: Քանի որ 2 և 3 ռեզիստորները միմյանց միացված են հաջորդաբար և նրանց դիմադրությունները հարաբերում են ինչպես 1:3, ապա այն ռեզիստորում, որն օժտված է ավելի մեծ դիմադրությամբ կդիտվի պոտենցիալի ավելի մեծ նվազում: Տվյալ դեպքում 3 ռեզիստորում պոտենցիալի նվազումը երեք անգամ մեծ կլինի 2 ռեզիստորում պոտենցիալի նվազումից: Այսպիսով, լրիվ անկման մեկ-չորրորդ մասը բաժին է ընկնում համեմատաբար փոքր դիմադրությամբ օժտված 2 ռեզիստորին, իսկ երեք-չորրորդը՝ 3 ռեզիստորին: Քանի որ զուգահեռ միացված դիմադրությունները հարաբերում են ինչպես 1:2, ապա լրիվ հոսանքի մեկ-երրորդը անցնում է 1 ռեզիստորի միջով, իսկ երկու-երրորդը՝ 2 և 3 հաջորդական միացված ռեզիստորների միջով:

Այս դեպքի համար կատարենք մաթեմատիկական հաշվարկներ:

Ձախ կողմի հանգույցի համար կիրառելով Կիրխոֆի առաջին կանոնը՝ կստանանք՝

$$I = I_1 + I_2 \quad (1)$$

Շրջանցելով A և B կոնտուրները նկարում նշված ուղղություններով և կիրառելով Կիրխոֆի երկրորդ կանոնը՝ կստանանք՝

$$I_1 R = \varepsilon \quad (2)$$

և

$$0.5I_2 R + 1.5I_2 R = I_1 R \quad (3)$$

որտեղ  $\varepsilon$ -ը մարտկոցի ԷԼՇՈՒ-ն է: Քանի որ (3) հավասարման առաջին գումարելին լարումն է 2 ռեզիստորում, իսկ հավասարման ձախ մասը լարումն է 1 ռեզիստորում, ապա նշանակելով  $0.5I_2 R = V_2$ ,  $I_1 R = V_1$ , ապա (3)-ը կարող ենք գրել հետևյալ կերպ՝

$$V_2 + 3 V_2 = V_1 \quad (3)'$$

(2) հավասարումը նշանակում է, որ պոտենցիալի աճը մարտկոցում հավասար է պոտենցիալի նվազմանը 1 ռեզիստորում: Իսկ (3)՝ հավասարումից երևում է, որ 2 և 3 ռեզիստորներում լարումները հարաբերում են ինչպես 1:3 և 2 ռեզիստորի երկայնքով պոտենցիալի նվազումը լրիվ նվազման մեկ-չորրորդ մասն է կազմում, իսկ 3 ռեզիստորի երկայնքով նվազումը՝ երեք-չորրորդը: Այստեղից երևում է, որ բոլոր աճերը հավասարակշռվում են նվազումներով և հաստատվում է Կիրխոֆի գծագրի գաղափարը:

(3) հավասարումից կստանանք՝

$$2I_2 = I_1 \quad (4)$$

Վերջինս տեղադրելով (1) հավասարման մեջ՝ կստանանք՝

$$I = 3I_2 \quad (5)$$

կամ

$$I_2 = \frac{1}{3} I \quad (6)$$

$I_1$ -ի համար կստանանք՝

$$I_1 = \frac{2}{3} I \quad (7)$$

(6) և (7) հավասարումները հաստատում են Կիրխոֆի գծագրի միջոցով կատարած դատողությունների արդյունքները:

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. A. Grambattista, B.M. Richardson, R.C. Richardson, *College Physics*, McGraw Hill, USA, 2004.
2. J.D. Wilson, A.J. Buffa, *College Physics*, Prentice Hall, USA, 2000.
3. Ի.Յ. Սալեղև, *Ընդհանուր ֆիզիկայի դասընթաց*, հատոր 2, Լոյս, Երևան, 1977:

**Մ.Տ. Ատյան, Տ.Ն. Նազինյան – *Графическое истолкование второго правила Кирхгофа.*** – В работе представлены правила Кирхгофа и дано графическое истолкование второго правила Кирхгофа, которое помогает лучше понимать его смысл. Обсуждены конкретные примеры.

## ԱԿՏԻՎ RC ՖԻԼՏՐ ՕՊԵՐԱՑԻՈՆ ՈՒԺԵՂԱՑՈՒՑՉԻ ՀԻՄԱՆ ՎՐԱ

### Գ.Վ. ԳՈՒԼԱԿՑԱՆ

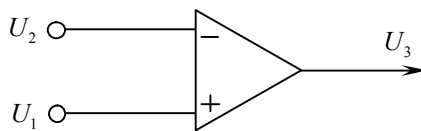
Աշխատանքում քննարկված է RC ակտիվ ֆիլտրի աշխատանքը, որը կառուցված է օպերացիոն ուժեղացուցիչի օգտագործմամբ: Հաշվարկվել են ֆիլտրի պարամետրերը  $f_0 = 1000$  Հց ռեզոնանսային հաճախության և  $H = 5$  ուժեղացման գործակցի դեպքում: Ըստ հաշվարկված պարամետրերի Multisim ծրագրի միջոցով մոդելավորվել է ցածր հաճախային ակտիվ ֆիլտր և ստացված արդյունքները համեմատվել հաշվարկվածի հետ: Համեմատությունը ցույց է տվել մոդելավորված և հաշվարկված արդյունքների բավարար համապատասխանություն:

Աշխատանքը կարելի օգտագործել ուսումնական գործընթացում:

Ժամանակակից ռադիոէլեկտրոնային սարքերում լայնորեն օգտագործվում են օպերացիոն ուժեղացուցիչները (ՕՈԻ), որոնք աշխատանքի սկզբունքով նման են սովորական ուժեղացուցիչներին և նախատեսված են մուտքային ազդանշանի հզորության ուժեղացման համար: Սակայն, ի տարբերություն սովորական ուժեղացուցիչների, որոնց հատկությունները հիմնականում պայմանավորված են իրենց «ներքին» սխեմաներով, ՕՈԻ-ներով կառուցված սխեմաների հիմնական հատկությունները պայմանավորվում են արտաքին՝ հետադարձ կապի շղթաների պարամետրերով:

Նախկինում բարձրորակ օպերացիոն ՕՈԻ-ներն օգտագործվել են բացառապես անալոգային հաշվիչ սարքերում՝ հիմնականում գումարման և ինտեգրման գործողություններ կատարելու համար, որտեղից և առաջացել է օպերացիոն ուժեղացուցիչ անվանումը:

Օպերացիոն ուժեղացուցիչը, որի պայմանական նշանը պատկերված է նկ.1-ում, դիֆերենցյալ մուտքով և միատակտ ելքով հաստատուն հոսանքի ուժեղացուցիչ է: Այն բնութագրվում շատ մեծ ուժեղացման գործակցով, ինչպես նաև մեծ մուտքային ու փոքր ելքային դիմադրություններով:



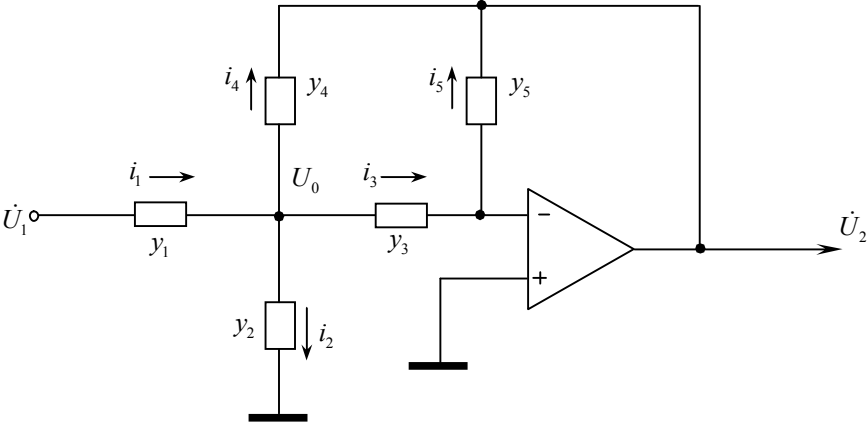
Նկ. 1

$U_3$  ելքային լարումը մուտքային  $U_1$ -ի նկատմամբ փոփոխվում է համափուլ: Այդ պատճառով  $U_1$  մուտքը կոչվում է չորջող մուտք, իսկ  $U_3$ -ը  $U_2$ -ի նրկատմամբ փոխվում է հակափուլ և մուտքը կոչվում է շրջող: Չորջող մուտքը սովորաբար նշվում է «+», իսկ շրջողը՝ «-» նշանով: Շնորհիվ ՕՈԻ-ների համարյա իդեալական բնութագրերի, տարբեր բնույթի շատ սխեմաներ անհամեմատ ավել-

լի հեշտ է իրականացնել օպերացիոն ուժեղացուցիչների միջոցով, քան տրանզիստորների: Այդ պատճառով օպերացիոն ուժեղացուցիչներն ավելի ու ավելի հաճախ են դուրս մղում տրանզիստորներին որպես սխեմատեխնիկայի տարրեր:

Հաճախ ազդանշանների զտման համար հարմար չէ օգտագործել LC ֆիլտրերը, որովհետև կոճերն ունեն մեծ չափեր և բավական թանկարժեք են: Ուստի էլեկտրոնային սարքերում առավել հաճախ օգտագործվում են RC ֆիլտրեր, իսկ բարձր որակ ստանալու համար դրանք զուգակցվում են ՕՈԻ-ների հետ, ձևավորելով ակտիվ ֆիլտր:

Այդպիսի ֆիլտրի ընդհանրացված տեսքը պատկերված է նկ.2-ում, որտեղ կոնդեսատորներն ու դիմադրությունները նշանակված են  $y$ -ով՝ որպես հաղորդականություններ: Օգտվելով Կիրխոֆի օրենքներից դժվար չէ ստանալ համակարգի կոմպլեքս փոխանցման գործակիցը՝

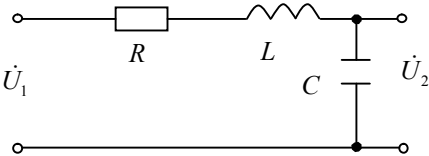


Նկ. 2

$$K(\omega)=\dot{U}_2/\dot{U}_1=-y_1y_3/\{y_5(y_1+y_2+y_3+y_4)+y_3y_4\}: \tag{1}$$

### Ցածր հաճախությունների ակտիվ RC ֆիլտր

Ցածր հաճախությունների ակտիվ ֆիլտր ստանալու համար վերը նկարագրված էլեմենտները պետք է ընտրել այնպես, որ կառուցվող ֆիլտրի փոխանցման գործակիցը համապատասխանի համարժեք LC ֆիլտրի (տես նկ. 3) փոխանցման գործակցին:



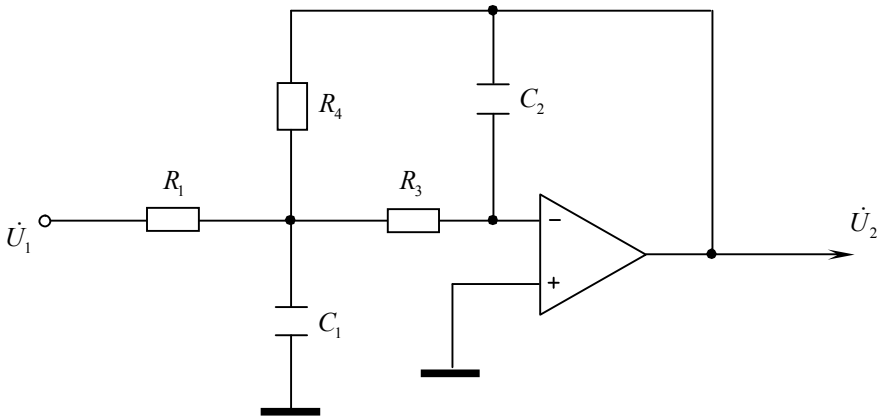
Նկ. 3

$$K(\omega)=\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+j\omega\omega_0+\omega^2}, \tag{2}$$

որտեղ՝

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad d = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}:$$

Որպեսզի (1) բանաձևի մեջ համարիչում ստացվի իրական թիվ, իսկ հայտարարում  $\omega^2$  անդամ, անհրաժեշտ է, որ  $y_1$ -ն ու  $y_3$ -ը լինեն ակտիվ հաղորդականություններ (վերցնենք  $y_1 = 1/R_1$  և  $y_3 = 1/R_3$ ), իսկ  $y_5 = j\omega C_2$ ,  $y_4 = 1/R_4$ ,  $y_2 = j\omega C_1$ : Այս դեպքում ֆիլտրի սխեման կընդունի հետևյալ տեսքը՝ (նկ.4).



Նկ. 4

Ընտրված պարամետրերը տեղադրելով փոխանցման գործակցի բանաձևի մեջ կստանանք՝

$$K(\omega) = \frac{-\frac{1}{R_1 R_3}}{-\omega^2 + j\omega \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \frac{1}{C_1 C_2} + \frac{1}{R_3 R_4 C_1 C_2}} \quad (3)$$

Համեմատելով (2) բանաձևի հետ կստանանք՝

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_3 R_4 C_1 C_2}, \quad (4)$$

$\omega_0$  - ն կոչվում է քվադրոնոմանսային հաճախություն:

Դժվար չէ տեսնել, որ բացի ֆիլտրումից, համակարգը կատարում է նաև ուժեղացում  $H = R_4 / R_1$  անգամ և ելքի ազդանշանի փուլը շրջում է մուտքի նկատմամբ:

### Ցածր հաճախային RC ֆիլտրի համակարգչային մոդելավորումը

Ժամանակակից տեխնոլոգիաները թույլ են տալիս տեսականորեն հաշվարկված տարբեր էլեկտրոնային համակարգեր պատրաստելուց առաջ նրանց աշխատանքը մոդելավորել համակարգչային ծրագրերի օգնությամբ, բացահայտել և շտկել հնարավոր թերությունները, և ապա նոր իրականացնել ռեալ սարքը: Համակարգչային մոդելավորման այդպիսի լավագույն ծրագրերից է Multisim-ը, որն ունի էլեկտրոնային տարրերի (դետալների) և սարքերի սեփական հարուստ

գրադարան, ինչպես նաև դետալների պարամետրերի ընտրության և խմբագրման մեծ հնարավորություններ:

Սույն աշխատանքում կատարված է ցածր հաճախային RC ֆիլտրի համակարգչային մոդելավորում համաձայն տեսականորեն հաշվարկված պարամետրերի: Մոդելավորման արդյունքները համեմատված են հաշվարկներով ստացված արդյունքների հետ:

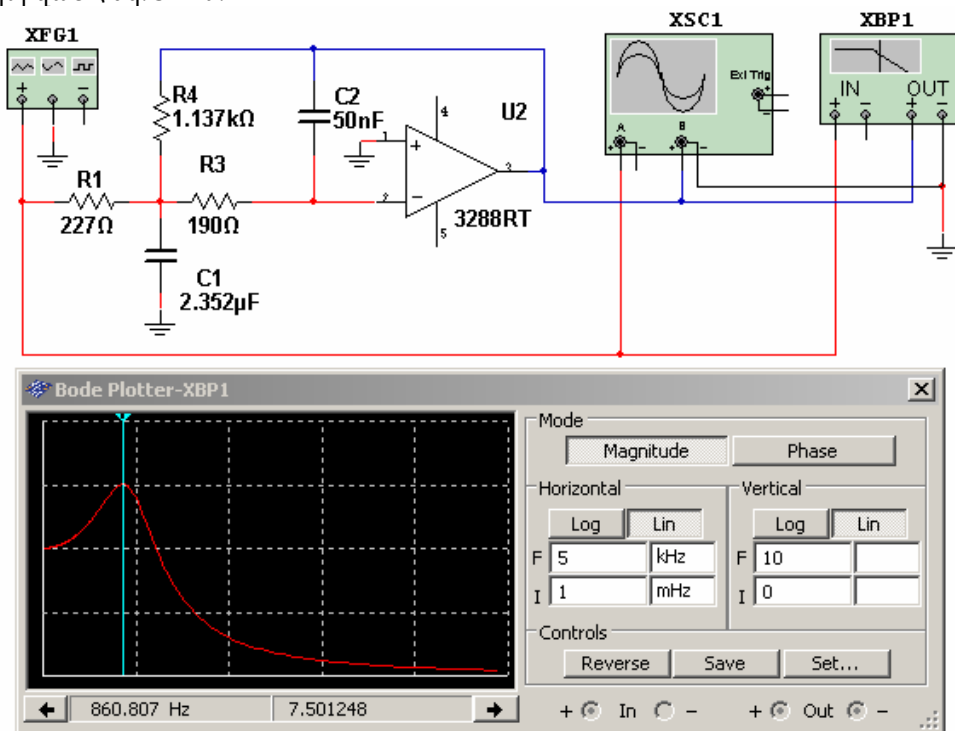
Իրականացվել է  $H = 5$  ուժեղացման գործակցով  $Q = 1,4$  բարորակությամբ և  $f_0 = 1000$  Հց ռեզոնանսային հաճախությամբ ցածր հաճախային ֆիլտր:

Ֆիլտրը կառուցվել է ըստ նկ. 4-ում պատկերված սխեմայի: Որպես ազատ պարամետր ընտրվել է  $C_2 = 50$  նՖ, իսկ մնացած պարամետրերը համաձայն հետևյալ բանաձևերի՝

$$R_4 = 1 / (2\omega_0 C_2 Q), \quad R_1 = R_4 / H, \quad R_3 = R_4 / (H + 1), \quad C_1 = 4Q^2 C_2 (H + 1):$$

Տեղադրելով  $Q$ -ի և  $H$ -ի արժեքները համապատասխան բանաձևերում կատանանք՝  $R_4 = 1137$  Օհմ;  $R_1 = 227$  Օհմ;  $R_3 = 190$  Օհմ;  $C_1 = 2352$  նՖ:

Multisim ծրագրով մոդելավորված ֆիլտրի սկզբունքային սխեման պատկերված է նկ. 5-ում:



Նկ. 5

Ուսումնասիրելով մոդելավորման արդյունքում ստացված ԱՀԲ-ն՝ (ամպլիտուդահաճախային բնութագիր) դժվար չէ տեսնել, որ ֆիլտրի ուժեղացման գործակիցը կազմում է  $H = 5.0085$ , ռեզոնանսային հաճախությունը  $f_0 = 850$  Հց, իսկ սահմանային հաճախությունը՝  $\sim 1150$  Հց:

Այսպիսով, ֆիլտրի կտրման հաճախության և ուժեղացման գործակցի համակարգչային մոդելավորման արդյունքում ստացված արժեքները բավարար ճշտությամբ համընկնում են հաշվարկների միջոցով ստացված արժեքների հետ:

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. У. Титце, К. Шенк, *Полупроводниковая схемотехника*, Москва 1990 г.
2. С.И. Баскаков, *Радиотехнические цепи и сигналы*, Москва 2003 г.

**Г.В. Гулакян – Активный RC фильтр на основе операционного усилителя.** – В работе рассмотрен RC активный фильтр, построенный на основе операционного усилителя. Рассчитаны параметры фильтра при резонансной частоте  $f_0 = 1000$  Гц, и при коэффициенте усиления  $H = 5$ . По рассчитанным параметрам с помощью программы Multisim был моделирован низкочастотный активный фильтр. Расчетные результаты сравнены с результатами моделирования. Сравнение показывает на удовлетворительное соответствие этих результатов.

Работу можно использовать в учебном процессе.

## 7-ՕՔՍԻՔԻՆՈԼԻՆԻ ՍՏՅՈՒՄ

Հ.Լ. ԻՍԱԽԱՆՅԱՆ, Ա.Հ. ԵՂՈՅԱՆ

Առաջարկված է 7-օքսիքինոլինի ստացման կատարելագործված եղանակ, որի արդյունքում հաջողվում է իրականացնել կառավարելի ռեակցիա և ստանալ բարձր մաքրությամբ արգասիք:

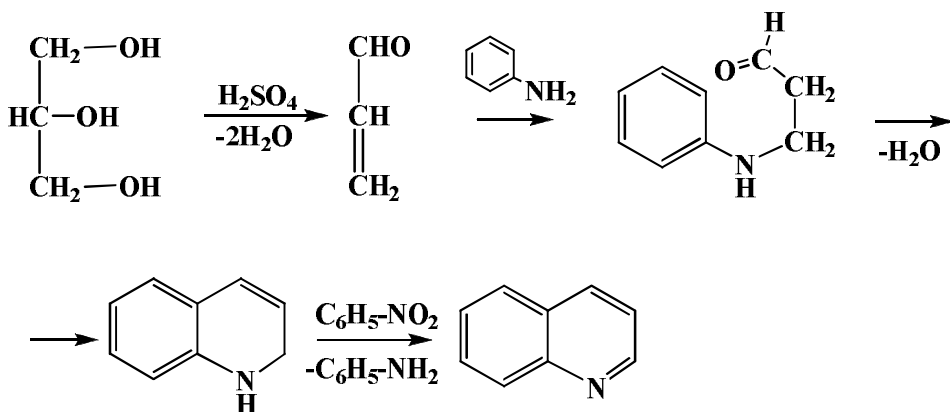
Քինոլինի սինթեզի վերաբերյալ կան մեծ քանակությամբ գրականություն և օրեցօր ավելանում են նոր աշխատանքներ, որոնք վերաբերում են նրանց սինթեզի նոր եղանակներին և կիրառությանը [1,2]:

Քինոլինը առաջին անգամ անջատել է քարածխի խեժից Ռուսզեն 1834 թ.: Նույն քարածխային խեժից Կրուբեն և Ռուպպեն անջատել են մեծ թվով քինոլինի ածանցյալներ (2,3-դիմեթիլքինոլին, 2,4-դիմեթիլքինոլին, 2-ֆենիլքինոլին, 2,4,8-տրիմեթիլքինոլին և այլն):

Մեծ թվով քինոլինի ածանցյալներ անջատել են նաև Կալիֆորնիայի նավթի կրեկինգից: Քինոլինի սինթեզով քիմիական ճանապարհով զբաղվել են Խոլլինսը և Մանսկը: Նրանք հետազայում սինթեզել են քինոլինի քլոր- և նիտրո-ածանցյալները:

Քինոլինի սինթեզի բոլոր եղանակներից, մեծ կիրառություն ունի Սկրաուպի ռեակցիան: Այդ եղանակով սինթեզում են քինոլին և նրա զանազան ածանցյալներ, մասնավորապես օքսի-քինոլիններ:

Սկրաուպի ռեակցիայի էությունը հետևյալն է. վերցնում են արոմատիկ ամին, որի օրթո-դիրքը ամինա խմբի նկատմամբ ազատ է, գլիցերին, ծծմբական թթու և օքսիդացնող նյութ և տաքացնում են:



Այս ռեակցիայով, տարբեր ելքերով, սինթեզվել են 2-, 4-, 5-, 6-, 7- և 8-օքսի-քինոլիններ, որոնք լայն կիրառություն ունեն դեղամիջոցների սինթեզման գործում:



Գրականության ուսումնասիրությունը ցույց է տվել, որ չնայած 7-օքսիքինոլին ստացվում է Սկրաուպի ռեակցիայով տարբեր ելանյութերից, բայց և այնպես չի հաջողվում ստանալ 98-99%-ոց մաքրության նյութ:

Առաջին անգամ մաքուր 7-օքսիքինոլինը ստացել են 7-օքսիքինոլինը խիտ աղաթթվի հետ տաքացնելով  $200^{\circ}\text{C}$ -ում [3,4]: Բայց հեղինակին չի հաջողվել ազատվել ելանյութի հետքերից և ստացված 7-օքսիքինոլինի հալման կետը ձգվել է  $126-139^{\circ}\text{C}$ : Հետագայում տարբեր հեղինակներ փորձել են 7-օքսիքինոլինը ստանալ մետա-նիտրոանիլինից [5,6] և բոլոր դեպքերում նույնպես չի հաջողվել 7-օքսիքինոլինը ստանալ բարձր մաքրությամբ: Ընդհանրապես Սկրաուպի ռեակցիայի էկզոթերմիան դժվար կառավարելի է, երբ ռեակցիոն միջավայրի ջերմաստիճանը բարձրանում է  $140^{\circ}\text{C}$ -ից բարձր, ռեակցիոն խառնուրդը լրիվ խեժանում է:

7-օքսիքինոլինի ստացման ռեակցիայի էկզոթերմիան կառավարելու համար մեր կողմից առաջարկվել է ռեակցիոն խառնուրդին ավելացնել այնպիսի օրգանական միացություն, որի եռման կետը մոտ լինի ռեակցիայի էկզոթերմիայի սկսման կետին և որը ռեակցիային չմասնակցի: Նշված պայմաններին բավարարում է պրոպիոնաթթուն, որի ներկայությամբ պրոցեսը դառնում է կառավարելի: Որպես ելանյութ ընտրվել է մետա-անիզիդինը, որի չռեակցված մնացորդից հեշտ է ազատվել:

### **Փորձնական մաս**

60 գ մ-անիզիդինի, 105 գզլիցերինի, 150 գմ-նիտրոբենզոսուլֆոթթվի նատրումական աղի, 330 մլ ծծմբական թթվի և 30 մլ պրոպիոնաթթվի խառնուրդը խառնելու պայմաններում տաքացնում են մինչև էկզոթերմիայի սկսելը  $136-140^{\circ}\text{C}$ : Պրոցեսը շարունակում են մոտ 4 ժամ, այդ ընթացքում ռեակցիոն խառնուրդի ջերմաստիճանը իջնում է մինչև  $130^{\circ}\text{C}$ :

Ռեակցիոն խառնուրդը նստացնում են 300 մլ ջրով, տեղափոխում 2լ բաժակ և ավելացնում 15 գ նատրիումի նիտրիտ ու կես ժամ եռացնում: Այնուհետև, ռեակցիոն խառնուրդը տեղափոխում են 5 լ կլորահատակ կոլբա և չեզոքացնում 350 գ նատրիումի հիդրօքսիդի ջրային լուծույթով: Ստացված 5- և 7-մետօքսիքինոլինի խառնուրդը թորում են ջրային գոլորշիներով, էքստրակտում եթերով և լուծիչը հեռացնելուց հետո, թորում ցածր ճնշման տակ ( $140^{\circ}\text{C}/70$  մմ. սնդ. սյուն,  $n_{\text{d}20}^{\text{D}}=1,6250$ ):

Ստացված 5-և 7-մետօքսիքինոլինի խառնուրդը քացախաթթվի և բրոմջրածնական թթվի 1:2 հարաբերությամբ խառնուրդում 40 ժամ եռացնելուց հետո, նստացնում են ջրով, չեզոքացնում նատրիումի հիդրօքսիդի 20%-ոց լուծույթով: Առաջացած նստվածքը ֆիլտրում են, լվանում ջրով և չորացնում:

Չոր նստվածքին, որը իրենից ներկայացնում է 5-հիդրօքսի- և 7-հիդրօքսիքինոլինի խառնուրդ, ավելացնում են այնքան էթանոլ, որպեսզի խառնուրդի մակերեսը ծածկվի և տաքացնում  $15-20$  րոպե ու տաք վիճակում ֆիլտրում: 5-հիդրօքսիքինոլինը անցնում է սպիրտի մեջ, իսկ 7-հիդրօքսիքինոլինը չորացնում են: Ստացվում է 99% մաքրությամբ 7-հիդրօքսիքինոլին, որի հալման կետը  $143-144^{\circ}\text{C}$  է, իսկ ռեակցիայի ելքը կազմում է 70%:

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. L. G:in, C. Cristea, C. Moldovan, D. Porumb, E. Surducan, C. Deleanu, A. Mahamoud, J. Barbe, I.A. Silberg, International Journal of Molecular Sciences. 8(2), 2007, pp. 70–80.
2. Г.И. Дрозд, *Общая органическая химия*, т. 8, М., 1985, с. 198–201
3. Cavallita, Hasskoll, J.Am. Chem. Soc, vol. 66, 1944, p. 1166
4. Cohn, J.Am. Chem. Soc, vol. 52, 1936, p. 3685
5. Kochanska, Bobranski, Ber., 69, S. 1807, 1936
6. Claus, Massau, *J. Prakt. chem.*, [2], 48, S. 170, 1893

**А.Л. Исаханян, А.О. Егоян – *Получение 7-оксихинолина*.** – Предложен усовершенствованный метод получения 7-оксихинолина из м-анизидина, глицерина, м-нитробензосульфокислоты в присутствии серной и пропионовой кислот. Новый метод позволяет получить конечный продукт высокой чистоты, а процесс синтеза 7-оксихинолина проводить в контролируемом режиме.

# ՅՈՂԲԱՑԱԽԱԹԹՎԻ ԷԹԻԼ ԷՍԹԵՐԻ ՍՏԱՑՄԱՆ ՆՈՐ ԵՂԱՆԱԿ

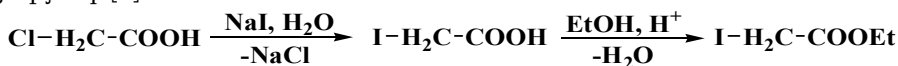
## Հ.Լ. ԻՄԱՆԱՆՅԱՆ, Ա.Հ. ԵՂՈՅԱՆ

Առաջարկված է միջֆազ կատալիզի պայմաններում յոդքացախաթթվի էթիլ էսթերի ստացման եղանակ, որը ի տարբերություն հայտնի եղանակների ընթանում է բարձր ելքով:

Հանդիսանալով լավ ակտիվացնող ազդանյութ, յոդքացախաթթվի էթիլ էսթերը ունի լայն կիրառություն կենսաբանական ակտիվ նյութերի սինթեզում և դեղանյութերի արտադրության մեջ [1,2]:

Յոդքացախաթթվի տարբեր էսթերները սինթեզվում են երկու հայտնի եղանակով՝ բրոմ- կամ քլորքացախաթթվի համապատասխան էսթերի վերահալոգենացմամբ կամ յոդքացախաթթվի էսթերացմամբ համապատասխան սպիրտով: Մասնավորապես, յոդքացախաթթվի մեթիլ էսթերը սինթեզվում է սպիրտի միջավայրում բրոմքացախաթթվի մեթիլ էսթերի և կալիումի յոդիդի փոխազդեցությամբ, որն ընթանում է 50% ելքով [3]:

Հայտնի է, որ յոդքացախաթթվի էթիլ էսթերը ստացվում է 60% ելքով թթվային կատալիզատորի ներկայությամբ յոդքացախաթթվի և էթիլսպիրտի փոխազդեցությամբ [4]:



Յոդքացախաթթուն իր հերթին ստանում են ջրային միջավայրում կամ ագետոնում նատրիումի յոդիդի ազդեցությամբ մոնոքլորքացախաթթվի վրա [5]: Այս երկու եղանակներն էլ ունեն թերություններ: Ռեակցիան ջրային միջավայրում իրականացնելիս արգասիքի անջանտման համար օգտագործում են մեծ քանակի դիէթիլէթեր, ինչը արդյունաբերական ծավալներով արտադրության ժամանակ վտանգավոր է և անշահավետ, իսկ չոր ացետոնում ցածր ելքի պատճառով ռեակցիայի իրականացումը տեխնոլոգիական տեսանկյունից անշահավետ է [6]:

Մեր կողմից մշակվել է միջֆազ կատալիզի պայմաններում յոդքացախաթթվի էթիլ էսթերի ստացման նոր, արդյունավետ և անվտանգ եղանակ: Ռեակցիայի ելքը կազմում է 90 %:

Նշենք նաև, որ այս ռեակցիան հեշտությամբ ընթանում է սնդիկի, պղնձի կամ նատրիումի յոդիդներով և կարող է հանդիսանալ մոդելային այլ յոդկարբոնաթթուների էսթերների ստացման համար:

### Փորձնական մաս

664 գ (4,0 մոլ) կալիումի յոդիդի, 424 գ (3,4 մոլ) մոնոքլորքացախաթթվի էթիլ էսթերի, 400 մլ բենզոլի, 300 մլ ջրի և 20 գ տետրաէթիլամոնիում բրոմիդի խառնուրդը խառնելու պայմաններում տաքացնում են 80 Co-ում 6-8 ժամ: Ռեակցիայի ավարտից հետո, բենզոլային շերտը առանձնացնում են, լվանում և չորացնում

կալցիումի քլորիդի վրա: Ֆիլտրելուց հետո հեռացնում են լուծիչը, իսկ մնացորդը թորում վակուումի տակ՝ 58-60°C/6 մմ սնդ. սն., 0,5 մ աշտարակով: Ստացվել է 666 գ (90 %) յոդքացախաթթվի էթիլ էսթեր, մաքրությունը 99%,  $n_{d20}=1,503$ ,  $d=1,808$  [3]:

Ռեակցիայի ընթացքը և արգասիքի մաքրությունը որոշվել է ԳՀԲ-ի օգնությամբ:

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. W.M. Eby, M.A. Tabatabai, Z. Bursac, *Hyperbolic modeling of tumor growth with a combined treatment of iodoacetate and dimethylsulphoxide*, BMC Cancer, V. 10, 2010, p. 509
2. S. Rndl, J. Černý, O. Klecnn, J. Stach, L. Plaček, Z. Mandelovná, *A synthesis of licofelone using Fenton's reagent*, Tetrahedron Letters V. 49, Issue 36, 2008, p. 5316–5318
3. F. Tiemann, Ber. dtech. chemn. Ges., V. 31, S. 825, 1898
4. В.В. Некрасов, *Химия отравляющих веществ*, Научтехиздат химпром ВСНХ СССР, 1930
5. Вейганд-Хильгетаг, *Методы эксперимента в органической химии*, Изд. "Химия", М., 1968, с. 198
6. E. Abderhalden, Guggenheim, Ber. deutsch. chem. Ges. 24, S. 2855, 1908

**А.Л. Исаханян, А.О. Егоян – Новый метод получения этилового эфира иодоуксусной кислоты.** – Предложен новый метод синтеза этилового эфира моноиодоуксусной кислоты из этилового эфира монохлоруксусной кислоты в условиях межфазного катализа. Реакция осуществлена в системе бензол: вода (4:3), а в качестве межфазного катализатора использовали бромид тетраметиламмония. Выход конечного продукта составляет 90%.

---

**ԻԶԵՎԱՆ ՔԱՂԱՔԻ ԿՈՄՈՒՆԱԼ-ԿԵՆՏՐԱԿԱՅԻՆ  
ՀՈՍՔԱԶՐԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՂԱՍՏԵՎ ԳԵՏԻ  
ԶՐԻ ԶՐԱՔԻՄԻԱԿԱՆ ՑՈՒՑԱՆԻՇՆԵՐԻ ՎՐԱ**

**Գ.Ս. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Մ.Մ. ՓԱՐՄԱՐԱՆՅԱՆ,  
Գ.Հ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Մ.Ս. ԻՍԱԽԱՆՅԱՆ**

Վերջին տասնամյակներում շրջակա միջավայրի աղտոտումը բոլոր տեսակի արդյունաբերական, գյուղատնտեսական, քաղաքային կոմունալ-կենցաղային արտանետումներով, թափոններով և հոսքաջրերով ձեռք է բերել գլոբալ բնույթ ու մարդկությանը հասցրել էկոլոգիական աղետի եզրին:

Շրջակա միջավայրի աղտոտում ասելով հասկանում ենք ցանկացած պինդ, հեղուկ և գազանման նյութերի կամ էներգիայի տեսակների (ջերմություն, ձայն, ռադիոակտիվություն) ներմուծումը կենսոլորտ ինչպես անմիջական, այնպես էլ կողմնակի ճանապարհով այն քանակությամբ, որը վնասակար ազդեցություն ունեն մարդու, կենդանիների և բույսերի համար: Կենսոլորտի աղտոտումը լինում է տեղային, տարածքային ու գլոբալ [1-3]: Տեղային աղտոտվածությունները բնութագրական են քաղաքների, խոշոր արդյունաբերական ձեռնարկությունների, անասնաբուծական կոմպլեքսների, այս կամ այն օգտակար հանածոներ արդյունահանող շրջանների համար:

Մարդու կողմից ներգործության մասշտաբով առաջին հերթին անմխիթար վիճակում են գտնվում լճերի ու գետերի քաղցրահամ ջրերը: Աշխատանքի նպատակն է ցույց տալ Աղստև գետի ջրի ջրաքիմիական ցուցանիշների վրա Իջևան քաղաքի կոմունալ-կենցաղային հոսքաջրերի ազդեցությունը: Աղստև գետը հանդիսանում է հարակից բնակավայրերի, մասնավորապես Դիլիջան քաղաքի խմելու ջրի աղբյուրը, հետևաբար, հրատապ խնդիր է Աղստև գետի ջրի մաքրությունը և դրա պահպանությունը:

Աղստև գետի ջրհավաք ավազանը զբաղեցնում է Փոքր Կովկասի ծալքավոր – ծալքաբեկորային մարզի մի զգալի մասը, որտեղ ապարները հիմնականում ջրամերժ են, և որի պատճառով այստեղ հոսքը առավելապես ներկայացված է մակերևութային՝ անձրևային և հալոցքային սնման տեսքով: Աղստև գետը սկիզբ է առնում Փամբակի լեռնաշղթայի հյուսիսային լանջերից, 3000մ բարձրությունից: Վերին հոսանքում սկզբում հոսում է Մարգահովտի գոգավորությամբ, այնուհետև՝ նեղ կիրճով, ապա ընդարձակվում Դիլիջան և Իջևան քաղաքների մոտ: Առավել խոշոր վտակներն են Գետիկը և Ոսկեպարը [4-6]:

Աղյուսակ 1-ում ներկայացված է Աղստև գետի Իջևան քաղաքից 1 կմ վերև (դիտակետ 17) և Իջևան քաղաքից ներքև (դիտակետ 18) դիտակետերի 2011թ. ջրաքիմիական ցուցանիշների միջին արժեքները:

Տվյալներից հետևում է, որ Իջևան քաղաքից դուրս ելնելով Աղստև գետի ջրաքիմիական ցուցանիշները մեծանում են 1,1–2,1 անգամ: Այս փաստը կարելի է բացատրել նրանով, որ Իջևան քաղաքի կոմունալ-կենցաղային հոսքաջրերը գետ են թափվում առանց մաքրման:

## Աղստն գետի ջրաքիմիական ցուցանիշները

| Ցուցանիշներ                       | (դիտակետ 17) | (դիտակետ 18) | Աճը, անգամ |
|-----------------------------------|--------------|--------------|------------|
| Հանքայնացում, մգ/լ                | 254          | 270          | 1,06       |
| Նիտրատ իոն, մգN/լ                 | 1,984        | 2.19         | 1,11       |
| Նիտրիտ իոն, մգN/լ                 | 0,0226       | 0,0268       | 1.87       |
| Ամոնիում իոն, մգN/լ               | 0,222        | 0,4724       | 2,13       |
| Ընդհանուր ազոտ, մգN/լ             | 2.228        | 2,69         | 1,20       |
| Ֆոսֆատներ, մգ/լ                   | 0,2446       | 0,3666       | 1.47       |
| Սիլիցիում, մգ/լ                   | 18.93        | 19.42        | 1,02       |
| Նատրիում իոն, մգ/լ                | 14.12        | 15.53        | 1,10       |
| ԹԿՊ, մգ/լ                         | 3.03         | 3.63         | 1,39       |
| Կախվածությունը նյութեր, մգ/լ      | 30.95        | 46.66        | 1,51       |
| Պերմանգանատային օքսիդացում, մգO/լ | 1,91         | 2,47         | 1,29       |
| Բիքրոմատային օքսիդացում, մգO/լ    | 14.40        | 18.80        | 1,31       |

Հայտնի է, որ ջրային միջավայրի աղտոտման աղբյուր են հանդիսանում չմաքրված կամ թերի մաքրված կոմունալ-կենցաղային հոսքաջրերը: Նրանք առաջանում են բնակավայրերում, երբ խմելու ջուրը օգտագործվում է կենցաղում և տնտեսության մեջ մարդու ֆիզիոլոգիական կարիքների համար: Կոմունալ կենցաղային հոսքաջրերի ծավալը համարյա հավասար է բնակավայրի բնակչության կողմից ծախսված խմելու ջրի ծավալին: Բնակավայրերում ջրի օգտագործման չափաբաժինը կախված է մի շարք գործոններից՝ կենտրոնական ջրամատակարարում և կոյուղագծի, բնակլիմայական պայմաններ և այլն: Քաղաքում մեկ մարդու կողմից օրական ջրօգտագործման չափաբաժինը կազմում է 50-1000լ: Այսպիսով, այն կազմում է Նյու-Յորքում՝ 600լ, Փարիզում՝ 500լ, Մոսկվայում՝ 400լ, Կիևում՝ 300լ իսկ Լոնդոնում՝ 263լ: ՀՀ քաղաքներում այն կազմում է 200լ:

Հոսքաջրերի հետ կոյուղի է ներթափանցում մարդու կենսագործնեության արգասիքները և լվացքից, լվացվելուց, լողանալուց, սննդի պատրաստումից, բնակարանի մաքրումից առաջացած աղտոտող նյութերը: Այսինքն, հոսքաջրեր են ներթափանցում հանքային (42%) և օրգանական (58%) նյութեր, որոնք հոսքաջրում կարող են գտնվել լուծված (50%), կախվածության նյութերի (20%), սուսալենգիայի (20%) և կոլոիդների (10%) տեսքով: Կոմունալ-կենցաղային հոսքաջրերն ունեն թույլ հիմնային ռեակցիա՝ pH-ը 7,2-7,6, թափանցելիությունը մինչև 5 սմ է: Թարմ և չնեխած հոսքաջրի հոսքի ինտենսիվությունը 3-4 բալ է: Քաղաքների կոմունալ-կենցաղային հոսքաջրերի բաղադրությունը տատանվում է՝ կախված բնակչության տնտեսական և կենցաղային գործունեության ռեժիմից: Ապացուցված է, որ յուրաքանչյուր մարդ օրական կոյուղի է արտազատում միջինը 90 գ. կոշտ և 1170 գ. հեղուկ արտաթորանք: Մեկ բնակչի կողմից մեկ օրում քաղաքային կոյուղագիծ ներթափանցող աղտոտիչների միջին քանակը հիմնականում հաստատուն մեծություն է [4,7] (աղ. 2):

Հաշվի առնելով, որ Իջևան քաղաքն ունի 20500 բնակիչ [8], հաշվել ենք մեկ օրում Աղստն գետ թափվող որոշ աղտոտիչների քանակը (աղ.2, 3-րդ սյունակ):

## Աղյուսակ 2.

Օրական մեկ մարդու վրա հաշվված քաղաքային կոմունալ-կենցաղային հոսքաջրերում աղտոտիչների միջին քանակը

| Աղտոտիչ նյութ       | Կոնցենտրացիա, գ | Իջևան քաղաք, կգ/օր |
|---------------------|-----------------|--------------------|
| Ընդհանուր ազոտ      | 28              | 574                |
| Ամոնիումային ազոտ   | 8               | 164                |
| Ընդհանուր ֆոսֆատներ | 2,8             | 57.4               |
| Կախության նյութեր   | 22              | 451                |
| ՄԱՆ                 | 2,5             | 51.25              |
| Նավթամթերք          | 0,2             | 4.1                |
| Հարպեր              | 8               | 164                |

Աղյուսակ 3-ում բերված են Իջևան քաղաքից ներքև ընկած հատվածում (դիտակետ 17) Աղստև գետի և Իջևան քաղաքի հոսքաջրերի ջրաբանական որոշ ցուցանիշներ:

## Աղյուսակ 3.

Աղստև գետի և Իջևան քաղաքի հոսքաջրերի ջրաբանական որոշ ցուցանիշներ

| Աղստև գետի ցուցանիշ            |                  |               | Հոսքաջրի ցուցանիշներ           |                  |                       |
|--------------------------------|------------------|---------------|--------------------------------|------------------|-----------------------|
| Ջրի ծախսը, մ <sup>3</sup> /վրկ | Արագությունը մ/վ | Խորությունը մ | Ջրի ծախսը, մ <sup>3</sup> /վրկ | Արագությունը մ/վ | Հոսքաջրի տրամագիծը, մ |
| 9.97                           | 0.94             | 0,56          | 0,048                          | 0,03             | 1.2                   |

Մեկ օրում Աղստև գետ է թափվում 4147.2 մ<sup>3</sup> Իջևան քաղաքի կոմունալ-կենցաղային հոսքաջուր, որը պարունակում է 574 կգ ընդհանուր ազոտ: Ստացվում է, որ ընդհանուր ազոտի կոնցենտրացիան հոսքաջրում հավասար է 138,4 մգN/լ-ի: Քանի որ Աղստև գետի 9.97 մ<sup>3</sup> ջրին, որտեղ ընդհանուր ազոտի կոնցենտրացիան հավասար է 2.2281 մգN/լ խառնվում է 138.4 մգN/լ ընդհանուր ազոտ պարունակող 0,048 մ<sup>3</sup> հոսքաջուր, ապա տեղի է ունենում ազոտի ընդհանուր քանակի նուսրացում:

Ջրի ընդհանուր ծախսը =  $9.97 + 0.048 = 10.018$  մ<sup>3</sup>/վրկ:

Ընդհանուր ազոտը =  $(9.97 \times 2.2283 + 0.048 \times 138.4) / 10.018 = 2.88$  մգN/լ

Հաշվարկից ստացվում է, որ ընդհանուր ազոտի կոնցենտրացիան հավասար է 2,88 մգN/լ-ի, որը մոտ է իր իրական արժեքին (աղ. 4): Նույն ձևով հաշվարկել ենք նաև ֆոսֆատների և ամոնիումային ազոտի քանակները, որոնք փոքր են իրական արժեքներից:

Գրականությունից հայտնի է, որ Իջևան քաղաքի կոմունալ-կենցաղային հոսքաջրերի ԹԿՊՆ-ն հավասար է 112 մգ/լ, իսկ կախության նյութերի քանակությունը՝ 90 մգ/լ-ի [4]: Այս տվյալներից հաշվարկել ենք ԹԲՊՏ-ի և կախության նյութերի քանակը: Աղյուսակ 4-ից երևում է, որ ԹԲՊՏ-ի իրական և հաշվարկային արժեքները բավականին մոտ են միմյանց, իսկ կախության նյութերի համար հաշվարկային տվյալները զգալիորեն փոքր են իրական տվյալներից և հավասար

են մինչև Իջևան քաղաքը մտնող Աղստև գետի ջրում կախությային նյութերի քանակին:

Աղյուսակ 4.

Աղստև գետի 18 դիտակետի ջրաքիմիական ցուցանիշները

| Ցուցանիշներ               | Փորձարարական | Հաշվարկային |
|---------------------------|--------------|-------------|
| Ընդհանուր ազոտ, մգN/լ     | 2,69         | 2,88        |
| Ամոնիում իոն, մգN/լ       | 0,4724       | 0,386       |
| Ֆոսֆատներ, մգ/լ           | 0,362        | 0,309       |
| Կախությային նյութեր, մգ/լ | 46.66        | 31.23       |
| ԹԿՊ <sub>5</sub> , մգ/լ   | 3.83         | 3,55        |

Այս վերջին փաստը խոսում է այն մասին, որ կախությային նյութերը գետ են ներթափանցում հիմնականում Իջևան քաղաքի անձրևաջրերի միջոցով: Ֆոսֆատների, ամոնիումային ազոտի և ԹԿՊ<sub>5</sub>-ի քանակների իրական արժեքների մեծ լինելը հաշվարկայինից պայմանավորված է անասնապահական կոմպլեքսներից և դաշտերից եկող մակերևութային հոսքաջրերով, որոնք պարունակում են մեծ քանակությամբ օրգանական աղտոտիչներ՝ մինչև 10հազ. մգ/դմ<sup>3</sup>, ազոտի մինչև 1.5գ/մ<sup>3</sup> և ֆոսֆորի՝ 0.06-0.10գ/դմ<sup>3</sup>, Իջևան քաղաքից ներքև Աղստև գետի ջրի աղտոտմամբ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Л.К. Садовникова, Д.С. Орлов, И.Н. Лозановская, *Экология и охрана окружающей среды при химическом загрязнении*, М.: Высшая школа, 2006, 334с.
2. А.Ф. Порядин, А.Д. Хованский, *Оценка и регулирование качества окружающей природной среды*, М.: Прибой, 1996, 350с.
3. Л.К. Давыдов, А.А. Дмитриева, Н.Р. Коннина, *Общая гидрология*, Л.: Гидрометеиздат, 1973, 462с.
4. Г.Г. Бабамян, *Эколого-гидрологическая оценка современного состояния некоторых водных объектов Республики Армения*, Ер. Зангак-97, 2006, 212с.
5. Լ.Ա. Չիլինգարյան, Բ.Պ. Մնացականյան, Կ.Ա. Աղաբաբյան, Հ.Վ. Թոքմաջյան, *Հայաստանի գետերի ու լճերի ջրագրությունը*, Երևան 2002, 491էջ:
6. Ռ. Միմոնյան, *Տալուշի մարզ*, Երևան 2003, էջ 254:
7. Л.Л. Россолимо, *Изучение лимнических экосистем под воздействием антропогенного факто*, М.: Наука, 1977, 234с.
8. <http://www.armcamping.com/2010/09/ijevan/>

**Գ.С. Симонян, М.М. Парсаданян, Г.Г. Акопян, М.С. Исаханян – Влияние коммунально-хозяйственных проточных вод города Иджеван на гидрохимические показатели реки Ахстев.** – Исследования показали, что причиной загрязнения реки Ахстев являются бытовые отходы, коммунально-хозяйственные и поверхностные проточные воды города Иджевана, которые попадают в реку без очистки.



---

## ԵՐԵՎԱՆ ՔԱՂԱՔԻ ԾԱՌԱՏԵՍԱԿՆԵՐԻ ՓՈՇԵԿԼԱՆԻՉ ԵՎ ԱՂՍՈՒԿԱԿԼԱՆԻՉ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գ.Ս. ՄԻՄՈՆՅԱՆ, Ա.Գ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ

Հետազոտություններից ստացվել է, որ Երևանի կանաչապատման համար օգտագործվող հացենի սովորականը, սոսի արևելյանը, ռոբինա կեղ-ծակացիան և կասկենին ցուցաբերում են լավ փոշեկլանիչ հատկություններ: Ադմուկը բոլորից լավ նվազեցնում է խոնարհված ֆորգիցիան:

Օդային ավազանի ախտոտումն արդյունք է արդյունաբերական, էներգետիկ, շինարարական և հանքահումքային ձեռնարկությունների գործնության ընթացքում շրջակա միջավայր արտանետված վնասակար նյութերի, ինչպես նաև տրանսպորտային միջոցների շարժիչների աշխատանքի ժամանակ առաջացած, ավտոմեքենաների անվադողերի և ասֆալտի մաշման հետևանքով առաջացած վնասակար գազերի, մրի և փոշու արտանետումների:

Փոշին համարվում է մթնոլորտի առավել վտանգավոր աղտոտիչներից մեկը: Փոշու մեջ պարունակվում են գրեթե բոլոր քիմիական տարրերը: Ամենուր՝ հողի, իրերի, բույսերի և քարերի վրա նստած է փոշի, որը մթնոլորտային հոսանքների միջոցով ներմուծվում է շրջակա միջավայր: Շրջակա միջավայրում փոշու տարածման պրոցեսը կատարվում է անընդհատ և վերջին հաշվով այն ազդում է մարդու վրա: Մարդու օրգանիզմ այն ներմուծվում է օդի, ջրի և սննդի հետ: Փոշին հանդիսանում է շնչառական ուղիների և ալերգիկ հիվանդությունների հիմնական պատճառը:

ՀՀ-ը պատկանում է քիչ անտառապատված երկրների թվին, այդ իսկ պատճառով գիտականորեն կազմակերպված էկոլոգիական մոնիթորինգի հիման վրա իրականացվող կանաչապատումը և անտառշինարարությունը կնպաստի էկոլոգիական վիճակի բարելավմանը և կունենա բնապահպանական մեծ նշանակություն[1]:

Քաղաքների փողոցների եզրամասերի, այգիների, պուրակների, զբոսայգիների կանաչապատման գործում կարևոր նշանակություն ունի ծառերի և թփերի ճիշտ ընտրությունն ու օգտագործումը, իսկ խոտերը նրանց անհրաժեշտ լրացումն են:

Հայաստանի քաղաքների, քաղաքատիպ ավանների, և այլ բնակավայրերի կանաչապատումը իրականացնելիս անհրաժեշտ է հաշվի առնել հողակլիմայական պայմանների բազմազոտիականությունը:

Քաղաքների և մյուս բնակավայրերի կանաչապատման ուղղությամբ կատարվող աշխատանքներում առաջնակարգ խնդիր է շրջակայքում գտնվող արդյունաբերական ձեռնարկություններից և ավտոմայրուղիներից մթնոլորտ արտանետվող թունավոր նյութերի, փոշու, մրի, ծխի, ինչպես նաև այլ թափոնների պարտադիր հաշվառումը այդ պայմաններին համապատասխան բույսերի տեսականու գիտականորեն հիմնված ընտրությունը:

Կանաչապատ զանգվածները բնակավայրերի կանաչ տնկարկների հիմքն են կազմում: Դրանք պետք է ապահովված լինեն գլխավորապես երկարակյաց, տեղական ծագման և լավ հարմարվող ծառատեսակներով և անպայման օգտագործվեն զբոսայգիների և անտառապուրակների հիմնական տեսակաշարումը:

Կանաչապատման ժամանակ տեսակների ընտրության դեպքում անհրաժեշտ է նաև ուշադրություն դարձնել գեղագիտական հատկանիշների վրա, կարևոր է հաշվի առնել սաղարթի ձևը (բրգաձև, սյունաձև, գնդաձև), գույնը և այլն, որոնք ունեն հոգետրոպ հատկություն:

Արդիական է Երևան քաղաքի կանաչապատման գործը կազմակերպելու համար անցկացնել բարձր մակարդակով էկոլոգիական մոնիթորինգի կառավարում, որը թելադրվում է և գեղագիտական արժեք ներկայացնող բազմաթիվ ծառեր, թփեր և խոտաբույսեր ընդգրկող հարուստ ֆլորայով [2]:

Ուսումնասիրվել Երևան քաղաքի տարածքի ձյան pH-ը: Աղյուսակ 1-ում բերված են 2002-2008 թթ. Երևանի ձնաջրի pH-ի գրականական տվյալները [3] և մեր կողմից 2010-20011թթ. ընթացքում ստացված տվյալները: Ինչպես երևում է տվյալներից 2005-20011թթ. Երևան քաղաքի ձնաջրի pH-ը թույլ թթվային է:

*Աղյուսակ 1.*

Երևան քաղաքի ձնաջրի pH-ը

| Տարի | 2002 | 2005 | 2006 | 2008 | 2010 | 2011 |
|------|------|------|------|------|------|------|
| pH   | 7.65 | 6.45 | 6.05 | 5.2  | 5.9  | 6.8  |

Մթնոլորտային տեղումների թթվայնությունը պայմանավորված է օդում ծծմբի երկօքսիդի և ազոտի օքսիդների պարունակությունից:

Համաձայն ՀՀ Բնապահպանության նախարարության Շրջակա միջավայրի վրա ներգործության մոնիթորինգի կենտրոնի տվյալների 2010թ. Երևան քաղաքի մթնոլորտում միջին տարեկան կոնցենտրացիաներից թույլատրելի նորմաները գերազանցվել են. ազոտի երկօքսիդինը՝ 2,4; ազոտի օքսիդինը՝ 1,3; գետնամերձ օդնինը՝ 1,8 անգամ: Ածխածնի մոնօքսիդի և ծծմբի երկօքսիդի կոնցենտրացիաները դիտվել են թույլատրելի նորմերի սահմաններում:

Փոշու միանվագ առավելագույն կոնցենտրացիան վերցված նմուշների 2%-ի մեջ սահմանային թույլատրելի նորմը գերազանցել է մինչև 3,5 անգամ:

Ինչպես երևում է տվյալների վերլուծությունից Երևան քաղաքի օդը պարբերաբար աղտոտված է փոշով: Շրջակա միջավայրում փոշու տարածման պրոցեսը կատարվում է անընդհատ և վերջին հաշվով այն ազդում է մարդու առողջության վրա:

Ծառերն ու թփերն օժտված են բացառիկ փոշեկլանման և փոշենստեցման ունակություններով: Մեկ հեկտար անտառի տերևների և փշատերևների մակերեսը կազմում է շուրջ 40-100 հազ. մ<sup>2</sup>, իսկ եթե հաշվի առնվեն նաև ճյուղերն ու բները, ապա՝ 50-150 հազ. մ<sup>2</sup>, որը 5-15 անգամ գերազանցում է անմիջապես անտառի զբաղեցրած մակերեսը: Եթե օդի փոշուտվածությունը անտառների կենտրոնական հատվածներում ընդունվի 100%, ապա քաղաքային զբոսայգիներում այն հավասար կլինի 49, մերձքաղաքային զբոսայգիներում՝ 13,7 և մերձքաղաքային անտառներում՝ 3-5%: Այս պատճառով բնակելի տարածքները արդյունաբե-

րական կենտրոններից պետք է առանձնացվեն տարբեր լայնություն ունեցող պաշտպանական կանաչ գոտիներով:

Ուսումնասիրել ենք Երևան քաղաքի կանաչապատման համար օգտագործվող մի շարք ծառատեսակների փոշի կլանելու հատկությունը: Ընտրել ենք օղակաձև զբոսայգու 2-րդ, 3-րդ և 4-րդ հատվածների և ԵՊՀ-ի շրջակայքում աճող հետևյալ ծառատեսակները՝ թեղի հարթ, թեղի տերևաշատ, թխկի հացենատերև, թխկի դաշտային, սոսի արևելյան, կասկենի, հացենի սովորական, ռոբինա կեղծակացիա, սաֆորա ճապոնական, թթենի սպիտակ և այլանթ բարձրաբուն (աղյուսակ 2):

Հետազոտություններում օգտագործել ենք Գ.Մ. Իլկունի առաջարկած մեթոդը [4]: 1-1,5 մ բարձրության վրա ամեն ծառից պոկում են 10-ական տերև և դնում են մաքուր ապակե տարայի մեջ և փակում կափարիչով: Տերևների վրա լցնում են թորած ջուր, հետո լվանում են յուրաքանչյուր տերևը: Ջուրը ֆիլտրում և կշռում են նստվածքը չորացնելուց հետո: Ստացված արդյունքը ցույց է տալիս փոշու քանակը լվացած մակերեսում:

Լվացած տերևների մակերեսը որոշելու համար վերցնում են 5 տարբեր չափի տերևներ և եզրագծում են թղթի վրա: Հետո կտրում և կշռում են թղթե տերևները: Նույն թղթից կտրում են 10 սմ\*10 սմ քառակուսի և կշռում:

Լվացված մակերեսը հաշվարկում են հետևյալ բանաձևով՝

$$S = \frac{M_1 \cdot P_1}{5 \cdot M_2},$$

որտեղ M<sub>1</sub>-ը 5 տերևների ձևով կտրատված թղթի զանգվածն է, M<sub>2</sub>-ը՝ 1 դմ<sup>2</sup> թղթի զանգվածն է, P<sub>1</sub>-ը՝ լվացած տերևների քանակը:

Աղյուսակ 2-ում բերված է նաև Երևան քաղաքի Աբովյանի անվան պուրակում բույսերի փոշու կլանման ունակությունը [5]:

Աղյուսակ 2.

Ծառերի տերևների միջին փոշեկլանումը մգ/սմ<sup>2</sup>

| Ծառի տեսակը       | Փոշեկլանումը | Փոշեկլանումը [5] |
|-------------------|--------------|------------------|
| Թեղի հարթ         | 0.61         | 0.52             |
| Թեղի տերևաշատ     | 0.55         | 0.48             |
| Թխկի հացատերև     | 0.65         | 0.57             |
| Թխկի դաշտային     | 0.61         | -                |
| Հացենի սովորական  | 0.68         | 0.61             |
| Սոսի արևելյան     | 0.71         | -                |
| Կասկենի           | 0.70         | -                |
| Ռոբինա կեղծակացիա | 0.73         | 0.64             |
| Սաֆորա ճապոնական  | 0.48         | 0.41             |
| Թթենի սպիտակ      | 0.39         | 0.35             |
| Այլանթ բարձրաբուն | 0.60         | 0.52             |

Ինչպես երևում է աղյուսակ 2-ից փոշեկլանիչ բավական լավ հատկություններ են ցուցաբերում հացենի սովորականը, սոսի արևելյանը, ռոբինա կեղծակացիան և կասկենին:

Առանձնապես նշենք մի ցավալի փաստ, որ Երևանի կանաչապատման համար օգտագործվող ծառատեսակների կազմում հիմնականում չի օգտագործվում կասկենին: Կասկենու հայրենիքը համարվում է Հայաստանը: Հայերենից **կասկենի** անվանումն անցել է հուներենին՝ **կաստանոն**, որից է լատիներենին՝ **կաստանել**: Լատիներենից գերմաներենի և լեհերենի միջոցով այն անցել է ռուսերեն և ուկրաիներեն լեզուներ՝ **կաշտան** ձևով: Ռուսաստանում առաջին կասկենին տնկվել է 1812թ. Նիկիտսկի բուսաբանական այգում: Կասկենին լայնորեն օգտագործվում է Ռուսաստանի և Ուկրաինայի բազմաթիվ քաղաքների կանաչապատման գործում:

Կասկենու մի քանի ձառ կա ԵՊՀ ֆիզիկայի ֆակուլտետի մոտի հատվածում:

Մենք առաջարկում ենք Երևանի կանաչապատման համար ևս օգտագործել կասկենին: Այն գեղեցիկ, խիտ սաղարթով, լայնատերև ծառ է, ունենում է մինչև 30 մետր բարձրություն: Ունի լավ փոշեկլանիչ հատկություն: Ծաղկում է մայիս-հունիս ամիսներին: Ունի սպիտակ-վարդագույն ծաղիկներ և լավ մեղրատու բույս է: Ունի գնդաձև պտուղներ, որոնք հասունանում են սեպտեմբերին: Պտուղները ուտելի են: Կասկենու տարբեր մասերը ունեն բուժիչ հատկություն:

Շրջապատող միջավայրի ֆիզիկական աղտոտվածության ամենակարևոր տեսակներից մեկն է համարվում ակուստիկ աղմուկը: Աղմուկը իրենից ներկայացնում է 16-ից մինչև 20000 Հց-ի սահմաններում մեխանիկական տատանումներ, որոնք մարդը կարողանում է ընկալել ականջով:

Էվոլյուցիայի հետևանքով մարդու լսողությունը ավելի հարմարավետ ընկալում է ոչ թե բաց տափաստանի և փակ սենյակի ձայները, այլ անտառային միջավայրին բնորոշ ձայները: Տարբեր տեսակի ծառեր ցուցաբերում են տարբեր ձայնակլանիչ հատկություն: Առանձնապես լավ են ձայնը կլանում տերևավոր տեսակները, որոնք ձայնային էներգիայի 25%-ը կլանում են, իսկ 74%-ը անդրադարձնում են: Այսպես, տերևավոր ծառերը ձայնի աղբյուրից տասնհինգ մետր հեռավորության վրա աղմուկի մակարդակը նվազեցնում են 4,2դԲ-ով, իսկ տերևավոր թփերը 6-9դԲ-ով, օրինակ բիոտա արևելյանն աղմուկի մակարդակը նվազեցնում են 10դԲ-ով: Ձայնի աղբյուրից 35 մետր հեռավորության վրա հարթատերև թեղին ձայնը նվազեցնում է 10դԲ -ով:

Բոլորից լավ աղմուկը նվազեցնում է խոնարհված ֆորգիցիան, որը պայմանավորված է նրանով, որ այն ունի բրգաձև սաղարթ, որը գետնից գտնվում է ոչ բարձր: Մշտականաչ նոճին էականորեն չի նվազեցնում աղմուկը, որը պայմանավորված է նրանով, որ նրա սաղարթը գտնվում են 2 մետրից բարձր [6]: Հիմնականում ամռանը ծառերը ավելի շատ են կլանում աղմուկը, քան գարնանը, որը պայմանավորված է սաղարթի ավելի մեծ լինելով և հետևաբար ավելի մեծ է ձայնի անդրադարձումը: Ծառերի ձայնապաշտպանիչ հատկությունը հիմնականում կախված է տնկարկի ձևից և միջավայրի էկոլոգիական վիճակից:

Քաղաքում աղմուկի մակարդակը ցերեկային ժամերին չպետք է գերազանցի 60 դԲ-ը: Իսկ ուսումնական հաստատությունների շրջակայքում այն չպետք է գերազանցի 55 դԲ-ը:

Մենք որոշել ենք համարժեքային աղմուկի մակարդակը և չափել ենք Երևանի Ալեք Մանուկյան փողոցի ԵՊՀ-ի կենտրոնական մասնաշենքին հարող հատվածի ավտոտրանսպորտի հոսքի առաջացրած աղմուկը: Աղմուկի չափումը

իրականացվել է EXTECH 407730 մոդելի աղմուկաչափով, որը հնարավորություն է տալիս չափել 40-130Դբ սահմաններում: Չափումները կատարել ենք 2 րոպե ժամանակահատվածով [7]:

Որոշվել է ավտոտրանսպորտի հոսքի բնութագրիչ հանդիսացող աղմուկի համարժեք մակարդակը երթևեկության մոտակա ողողեգոտու առանցքից 7,5 մետր հեռավորության վրա, համաձայն հետևյալ բանաձևի [8].

$$L_{Aէկվ}=15+10lgQ+13,3lgV+4lg(1+p)+L_{A1}+L_{A2}$$

որտեղ

- Q - երթևեկության միջին ինտենսիվությունն է, ավտո/ժամ,
  - V - հոսքի միջին արագությունն է, կմ/ժամ,
  - P - հոսքում բեռնատար ավտոմեքենաների բաժինը, %,
  - L<sub>A1</sub> - ուղղիչ գործակից, որը հաշվի է առնում ճանապարհածածկի տեսակը,
  - L<sub>A2</sub> - ուղղիչ գործակից, որը հաշվի է առնում ճանապարհի թեքությունը:
- Տվյալները բերված են աղյուսակ 3-ում:

Աղյուսակ 3.

Համարժեքային աղմուկի մակարդակը Երևանի Ալեք Մանուկյան փողոցում

| Ժամանակը               | 8.30-9.30 | 12.30-13.30 | 15.30-4.30 |
|------------------------|-----------|-------------|------------|
| Q, ավտո/ժամ,           | 1020      | 720         | 410        |
| P, %                   | 5         | 5           | 6          |
| L <sub>Aէկվ</sub> , Դբ | 70,8      | 69.3        | 66.9       |
| L <sub>Aիրակ</sub> Դբ  | 72        | 70          | 68         |

Հոսքի միջին արագությունը 30 կմ/ժամ է: Ճանապարհի ասֆալտե ծածկի համար L<sub>A1</sub>=0, իսկ L<sub>A2</sub>=3, քանի որ ճանապարհը ուղիղ չէ: Բեռնատար ավտոմեքենաների քանակը 5 % է:

$$L_{Aէկվ}=15+10lg1020+13,3lg30+4lg(1+5)+0+3=15+30,1+19,6+3.1+0+3=70.8$$

ԵՊՀ-ին հարող Ալեք Մանուկյան փողոցի հատվածի երթևեկության մոտակա ողողեգոտու առանցքից 7,5 մետր հեռավորության վրա չափված ավտոտրանսպորտի ստեղծած աղմուկի միջին մակարդակը տարբեր ժամերին բերված են աղյուսակ 3-ում: Այն ստացվել է հաշվարկայինից ավելի բարձր: Պատճառը, որ ավտոմեքենաները հիմնականում հին են:

Մենք առաջարկում ենք ԵՊՀ-ին հարող Ալեք Մանուկյան փողոցի ավտոտրանսպորտի աղմուկը նվազեցնելու նպատակով մայթերի զագոններին ծառերը տնկել շախմատաձև, կամ ավելի ճիշտ է օգտագործել սաղարթավոր ծառեր, օրինակ տույա, կամ ֆորգիցիա: Վերջինս իդեպ օգտագործվում է համալսարանի շրջակայքի կանաչապատման համար, որը ունի նաև էսթետիկական նշանակություն շնորհիվ վառ դեղին ծաղիկների:

### ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Հ.Յ. Սայադյան, Հայաստանի հանրապետության անտառային գեոհամակարգերի տարածաժամանակային փոփոխությունները և կառավարման հիմնախնդիրները, Ե,ԵՊՀ, 2010, 261 էջ:

2. Երևան քաղաքի ֆունկցիոնալ կանաչապատման ծրագրի մշակում, հողերի ծանր մետաղներով աղտոտվածության հետազոտում և քարտեզի մշակում, Երևանի քաղաքապետարան, Երևան 2008, 15 էջ:
3. Ա.Ա. Առաքելյան, *Աղտոտման դինամիկայի հետազոտություններ՝ կախված տարածքի լանդշաֆտա-ճարտարապետական կառուցապատման առանձնահատկություններից*, ԱՃՇՊՀ Տեղեկագիր, 2010, № 15/1, էջ 8–13:
4. *Экологический мониторинг* /под ред. Ашихмина Т.Я./ Акад. проект, 2005, 416с.
5. Օ.Ա. Բելյաեվա, Գ.Ն. Ներսիսյան, *Բույսերի փոշեկլանիչ հատկանիշների ուսումնասիրությունը Երևան քաղաքի Խ.Արսլյանի անվան պուրակում*, ԵՊՀ, Հոբելյանական գիտական նստաշրջանի հողվածների ժողովածու, 2010, հատոր 2 - բնական գիտություններ, էջ 170–173:
6. Г. Симонян Г. Пирумян, *Мониторинг шума в лесном массиве Иджеванского лесного хозяйства вблизи реки Ахстев*, Научные основы охраны окружающей среды. Сборник статей, Пенза, 2010, с. 97–99.
7. Գ. Սիմոնյան, Ա. Սիմոնյան, Գ. Փիրումյան, *Աղմուկի ուսումնասիրման կազմակերպումը Էկոլոգիական մոնիտորինգի շրջանակում*, Բնագետ, 2009, հատուկ թող. էջ 209–210:
8. ГОСТ 2044-85 *Шум. Транспортные потоки. Метод определения шумовой характеристики*, М., Стандарт, 1985.

**Գ.Ս. Симонян, А.Г. Симонян – Исследования пылепоглощающих и шумопоглощающих свойств пород деревьев города Еревана.** – Исследования показали, что для озеленения г. Еревана используемые породы ясень обыкновенный, платан восточный, робина псевдоакация и каштан имеют хорошие показатели пылепоглощения. Лучше всех уменьшает шум форзиция.

**ԱՂԵՆԻՆԸ ԵՎ ԱՂԵՆՈԶԻՆԸ ԴԵԶԱՄԻՆԱՑՆՈՂ  
ՖԵՐՄԵՆՏՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ  
ԿԵՆՍԱԲԱՆԱԿԱՆ ՕՐԳԱՆԻԶՄՆԵՐՈՒՄ**

**Մ.Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Ն.Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ**

Բժշկության դժվարին խնդիրներից է տուբերկուլյոզի ճանաչողական տարբերակումը և ախտորոշումը: Հիվանդության բացահայտման համար առաջարկված են ախտորոշման տարբեր մեթոդներ: Մեր կողմից հետազոտվող ֆերմենտները՝ աղենալը և ադենոզինդեզամինազը նույնպես կարող են ծառայել տուբերկուլյոզի բացահայտման գործոն, քանի որ հիվանդության դեպքում էրիթրոցիտներում բարձրանում է ֆերմենտների ակտիվությունը:

Ամոնիակի մակարդակը ուղեղում նյարդային համակարգի ֆունկցիոնալ վիճակի կենսաքիմիական չափանիշ է: Ամոնիակի տոքսիկ ազդեցությունը նյարդային համակարգի վրա արտահայտվում է նրա պարունակության ավելացման դեպքում: Նրա ոչ մեծ կոնցենտրացիաները բարձրացնում են նյարդային համակարգի դրդվածությունը: Ամոնիակի առաջացման և հեռացման ուղիների հետազոտումը կենդանի օրգանիզմներում մշտապես գտնվում է կենսաբանների, ֆիզիոլոգների և բժիշկների ուշադրության կենտրոնում: Այս պրոցեսների խախտումը բերում է առանձին օրգանների և օրգան համակարգերի ֆունկցիոնալ գործունեության լուրջ խանգարումների: Ամոնիակ առաջանում է ադենինի, գուանինի և այլ պուրինային ու պիրիմիդինային հիմքերի հիդրոլիտիկ դեզամինացման դեպքում [1]: Նուկլեինաթթուների պուրինային կոմպոնենտները տարբեր օրգանիզմների մոտ տարբեր ձևով են դեզամինացվում, ինչը որոշակի հետաքրքրություն է ներկայացնում ամոնիակառաջացման մեխանիզմների բացահայտման տեսանկյունից:

Այս հարցերի նկատմամբ հետաքրքրությունը հատկապես մեծացավ, երբ բացահայտվեց, որ ադենոզինդեզամինազի գենետիկական դեֆեկտի դեպքում սուր համակցված իմունոդեֆիցիտային հիվանդության զարգացումը տանում է T և B լիմֆոցիտների ֆունկցիոնալ խախտման: Համակցված իմունոդեֆիցիտի առաջին արգելակումն իրականացվել է գենոթերապիայով: Ինֆեկցիոն ախտահարման դեպքում երեխաները հիմնականում մահանում են մինչև 2 տարեկան հասակը [2]: Կան նաև որոշ հիվանդություններ, որոնցում ադենոզինդեզամինազի մակարդակը նորմայից բարձր է: Գենետիկական դեֆեկտը պայմանավորված է մարդու 20-րդ քրոմոսոմում լոկալիզացված ադենոզինդեզամինազի գենային մուտացիայով: Ադենոզինը կաթնասունների ուղեղում, լյարդում և երիկամներում կատարում է շատ կարևոր ֆիզիոլոգիական ֆունկցիաներ: Այն հանդես է գալիս որպես արյան հոսքի կարգավորիչ, նեյրոտրանսմիտոր: Այն բարձրացնում է ինսուլին-կախյալ գլյուկոզի տրանսպորտի զգայունությունը, պատասխանատու է թաղանթային Ca-ի թափանցելիության իջեցման և նյարդային վերջույթներից գլյուտամատի և ասպարտատի արտազատման թուլացման համար: Այս հատկությունները կարևոր են բժշկության և դեղաբանության տեսակետից [3]: Հարցերի

շղթան առաջացրել է ուղղություն, որի նպատակն է այս ֆերմենտների կիրառումը էնզիմոդինամիկայում տարբեր պայթուցիաների դեպքում: Օրինակ, ադենինդեզամինազի հայտնաբերումը թրոմբոցիտներում լեյկեմիայով հիվանդների մոտ և բացակայությունը նորմայում կարող է հետաքրքրություն առաջացնել թեստերի միջոցով լեյկեմիա հիվանդության զարգացման ռիսկի որոշման ժամանակ [4]: Դեռ վաղ է խոսել ֆերմենտի ակտիվության նշանակության մասին պուրինային ընդհանուր փոխանակության մեջ, սակայն կարելի է ասել, որ այն որոշիչ տեղ է զբաղեցնում ուռուցքային հյուսվածքների հետազոտման գործում: Գրականության տվյալները վկայում են, որ պուրինային հիմքերի փոխանակության ֆերմենտներից ադենինը դեզամինացնող ֆերմենտը բարձրակարգ օրգանիզմների մոտ քիչ է ուսումնասիրված, սակայն պարզ է, որ այն հանդես է գալիս սաղմնային զարգացման վաղ փուլերում և ախտահարման վիճակում, ուռուցքներում, լեյկեմիայով հիվանդների թրոմբոցիտներում, աթերոսկլերոզի դեպքում և այլն: Սա հնարավորություն է տալիս այն կիրառել դիագնոստիկայում:

Հետագայում ուսումնասիրվեց նաև ադենոզինդեզամինազի առկայությունը թրոմբոցիտներում լեյկեմիայով հիվանդների մոտ: Պարզվեց, որ առողջ մարդկանց թրոմբոցիտներում պարունակվում է մինչև այժմ չբացահայտված արգելակիչ, որն ապահովում է լեյկոզով հիվանդների մոտ թրոմբոցիտներում այդ ֆերմենտի ակտիվությունը: Հավանաբար, ախտորոշման ժամանակ արգելակիչը քայքայվում է, կորցնելով ակտիվությունը և այդ իսկ պատճառով լեյկեմիայով հիվանդների մոտ դրսևորվում է ֆերմենտային ակտիվություն: Այս հիվանդությունը բնութագրվում է երկարատև ընթացքով և ախտահարում է արյունաստեղծ համակարգը, որը որպես կանոն տանում է մահվան: Առողջ կենդանիների թրոմբոցիտներում ֆերմենտը բացակայում է [5]:

Ադենոզինդեզամինազը նուկլեոտիդների կատաբոլիզմի առանցքային ֆերմենտներից է, որի փոխանակությունը կարևոր դեր է խաղում մարդու օրգանիզմում տարատեսակ բջիջների գործունեության մեջ: Այս մեթաբոլիզմի նշանակությունը հատկապես կարևոր է իմունային համակարգի բջիջների ֆունկցիաների իրականացման մեջ և նրանց խախտումների դեպքում դիտվում են պայթուցիաներ:

Ադենոզինդեզամինազի ուժեղ արգելակիչների կիրառումը հնարավորություն տվեց ուսումնասիրելու ադենոզինի և ադենոզինդեզամինազի դերը ԿՆՀ-ում: Բացի այդ, կիրառելով ֆերմենտի տարբեր արգելակիչներ, գիտնականները նպատակ ունեն պարզաբանելու ֆերմենտի արգելակիչ կենտրոնի պահանջները տարբեր հիվանդությունների ժամանակ [6]: Քաղցկեղային հիվանդության ժամանակ, օրինակ, բարձրանում է ֆերմենտի ակտիվությունը: Այն դիտվում է նաև հեպատիտով, ցիրոզով և ինֆեկցիոն մոնոնուկլեոզով հիվանդների մոտ:

Գրականության տվյալների համաձայն, բացահայտվել են նաև տարբեր օրգանների տուբերկուլյոզային հիվանդություններ [7]: Այս խնդիրը ձեռք է բերում ավելի ու ավելի մեծ նշանակություն թոքախտով հիվանդների թվի աճման հետ ամբողջ աշխարհում [7]: Բավականին րնդունելի է ադենոզինդեզամինազի ակտիվության մակարդակի բարձրացման օգտագործումը որպես տուբերկուլյոզային պլերիտի վաղ դիագնոստիկայում հավաստի հատկանիշ և բուժման պրոցեսի ընթացքի վերահսկումը թույլատրող գործոն:



Մեր կողմից կատարված ուսումնասիրությունները նվիրված են նորմայում առողջ մարդկանց և պաթոլոգիայում՝ թոքախտով մարդկանց մոտ նշված ֆերմենտների բացահայտմանը և հիվանդության ընթացքում դրսևորված շեղումներին:

### Նյութ և մեթոդ

Ուսումնասիրության օբյեկտ է հանդիսացել առողջ մարդկանց արյան պլազման, Էրիթրոցիտները, լեյկոցիտները և թոքախտով հիվանդների արյան պլազման և Էրիթրոցիտները: Արյունը վերցվել է հիվանդանոցի թոքախտային բաժանմունքից: Արյունը չմակարդվելու համար նախապես փորձանոթում լցվել է կլիտրոնաթթվային նատրիում, որից հետո ցենտրիֆուգվել: Լեյկոցիտների անջատման համար փորձանոթում լցվել է 5% քացախաթթվի լուծույթ: Էրիթրոցիտներում ֆերմենտների ակտիվությունը որոշելու համար դրվել է ինկուբացիայի 37°C պայմաններում 1 ժամ տևողությամբ: Էրիթրոցիտների սուսպենզիայի հոմոգենատները պատրաստվել են K-ֆոսֆատային բուֆերում,  $p^H=7.4$ : Ռեակցիան կանգնեցվել է 20% ԵԲԲ-ով: Ամոնիակի քանակությունը որոշվել է միկրոդիֆուզիոն եղանակով [8]:

Աղյուսակ 1.

Ադենինի և ադենոզինի դեզամինացումը առողջ և թոքախտով հիվանդ մարդկանց արյան հոմոգենատներում մկմ NH<sub>3</sub> 1գ հյուսվ.

| Ֆերմենտներ        | Էրիթրոցիտներ |            | Լեյկոցիտներ |        | Արյան պլազմա |            |
|-------------------|--------------|------------|-------------|--------|--------------|------------|
|                   | առողջ        | հիվանդ     | առողջ       | հիվանդ | առողջ        | հիվանդ     |
| Ադենին դեզամինազ  | 19,20±0,1    | 56,6±0,01  | 9,54±0,01   | -      | 19,20±0,09   | 16,6±0,03  |
| Ադենոզինդեզամինազ | 69,79±0,02   | 184,53±0,2 | 19,18±0,01  | -      | 23,59±0,02   | 22,87±0,01 |

### Արդյունքներ և քննարկում

Ֆերմենտների ակտիվությունը որոշվել է հոմոգենատներում: Ներկայացված աղյուսակի (աղյուսակ 1) տվյալները ցույց են տալիս, որ արյան պլազմայում առողջ և հիվանդ մարդկանց մոտ ադենինդեզամինազի ակտիվությունը համապատասխանաբար կազմում է 19,20 մկմոլ և 16,6 մկմոլ NH<sub>3</sub> 1գ հյուսվածքում: Նույնը սակայն չենք կարող ասել էրիթրոցիտներում հայտնաբերված ակտիվության մասին: Առողջ օրգանիզմում այն համարյա 3 անգամ ցածր է թոքախտով հիվանդ մարդու էրիթրոցիտներում հայտնաբերված ֆերմենտի ակտիվությունից: Գրականության տվյալների համաձայն [4] դոնորների արյան ձևավոր տարրերի մեջ ֆերմենտի ակտիվություն է հայտնաբերվել միայն էրիթրոցիտներում և ավելի քիչ լեյկոզով հիվանդների մոտ: Լեյկոցիտներում ադենինդեզամինազի ակտիվություն չի հայտնաբերվել ինչպես առողջ, այնպես էլ բոլոր հետազոտվողների մոտ: Մինչդեռ մեզ մոտ լեյկոցիտներում հայտնաբերվել է ֆերմենտի ցածր ակտիվություն միայն առողջների մոտ՝ 9,54 մկմոլ NH<sub>3</sub> 1գ հյուսվածքում:

Առողջ և հիվանդ մարդկանց արյան պլազմայում ադենոզինդեզամինազի ակտիվությունը համապատասխանաբար կազմում է 23,59 մկմոլ և 22,87 մկմոլ  $\text{NH}_3$  1գ հյուսվածքում, որը խոսում է այն մասին, որ հիվանդության դեպքում ֆերմենտի ակտիվության բարձրացում կամ ընկճում չի դիտվում: Նույնը սակայն չենք կարող ասել էրիթրոցիտներում հայտնաբերված ֆերմենտի վերաբերյալ: Առողջ մարդկանց էրիթրոցիտներում ֆերմենտի ակտիվությունը կազմում է 69,8 մկմոլ այն դեպքում, երբ թոքախտով հիվանդ մարդկանց մոտ այն համարյա 3 անգամ գերազանցում է, կազմելով 184,53 մկմոլ, ինչը համապատասխանում է գրականության մեջ ներկայացված տվյալներին [4]:

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Y.M. Lowenstein, *Ammonia production in muscle and other tissues. The purine nucleotide cycle*, *Physiol. Rew.* 52(2), 382, 1972.
2. H.P. Bear, G.I. Drumond, *Physiological and regulator funetiong of adenosine and adenine nucleotides*, New York, Raven Press, 1979.
3. S. Imai, M. Nakazawa, *Role of adenosime and adenine nucleotides in the biological system* *Bos*.
4. Я.М. Соковнина, С.С. Дебов, *Аденаза форменных элементов крови доноров и люлей с различными заболеваниями крови*, *Вопр. Мед. Химии*. N1, 117, 1976
5. Соковнина Я.М. и др.
6. О.Т. Тишаренко, Н.В. Солдайова, *Проблемы туберкулеза*, Из. 3, 1996, стр. 52
7. В.В. Пунга, А.П. Конков, *Проблемы туберкулеза*, Из. 1, 1999, стр. 14
8. А. Силакова, *Микромейтод определения аммиака в тканевых трихлоруксусных экстрактах*, *Вопросы мед. химии*, 5, 1962

**М.А. Хачатрян, Н.Н. Айрапетян – Исследование ферментов дезаминирующих аденин и аденозин в некоторых биологических объектах.** – Дезаминирование пуриновых и пиримидиновых оснований является одним из ключевых вопросов клеточного метаболизма. Известно, что в клетках имеются специфические ферменты, дезаминирующие пуриновые и пиримидиновые основания.

Наши исследования проводились с целью выявления активностей этих ферментов (в частности, аденинлеаминаза, аденозинлеаминаза) в лейкоцитах, эритроцитах, плазме крови здоровых и больных туберкулезом люлей.

Экспериментальные данные подтвердили данные, имеющиеся в литературе. У люлей больных туберкулезом активность этих ферментов в плазме крови практически не изменяется, в эритроцитах больных повышается примерно в 3 раза.

Актуальность исследования заключается в учитывании уровня активности данных ферментов при ранней диагностике некоторых болезней (например, туберкулезный плеврит) и возможность контроля процессов легочных болезней.

## ՀԵՌԱՆԿԱՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Կ.Բ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ

ԵՊՀ Իջևանի մասնաճյուղի Կիրառական արվեստի ֆակուլտետի ուսանողներն ուսումնառության ընթացքում անընդհատ առնչվում են հեռանկար կառուցելու խնդիրների հետ: Նրանք ծանոթանում և հմտանում են կտավի վրա ծավալներ պատկերելու տեխնիկական միջոցներին: Ուսանողները, ուսումնասիրելով «Գծանկարչություն», «Գունանկարչություն» և «Կոմպոզիցիա» առարկաները, թղթի, կտավի, համակարգչի մոնիտորի էկրանի վրա ստեղծում են կոմպոզիցիոն աշխատանքներ, որոնց արտահայտչականությունը պայմանավորվում է ուսանողի՝ հեռանկար կառուցելու մեթոդների իմացության մակարդակով: Կիրառական արվեստի ֆակուլտետի ուսումնական պլանում նախատեսված է «Կոնստրուկտավորում և տեխ. գծագրություն» առարկան, որի նպատակն է ուսանողներին սովորեցնել, թե ինչպես և ինչ մեթոդներով կառուցել եռաչափ տարածության և նրա օբյեկտների հեռանկարները, նրանց սեփական և ընկնող ստվերները: Հեռանկարչության իմացությունը և ստվերների ճշգրիտ պատկերման հմտությունը հզոր միջոցներ են գեղանկարչի ձեռքին՝ գեղանկարին կենդանի շունչ հաղորդելու գործում:

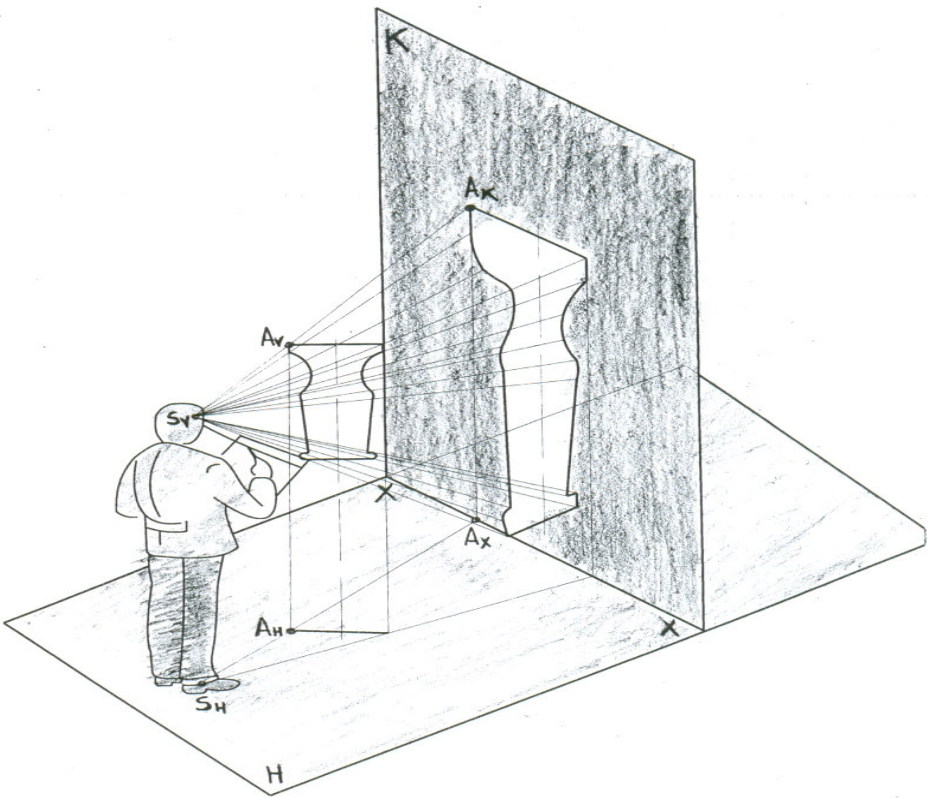
Հեռանկար կառուցելու մեթոդների իմացությունն օգտակար է նկարչական, շինարարական, ճարտարապետական և ճարտարագիտական մասնագիտությունների ուսանողների, հանրակրթական դպրոցի «Տեխնոլոգիա» և «Գծագրություն» առարկաների ուսուցիչների համար:

Մենք հարմար ենք գտնում առաջարկել օբյեկտների հեռանկարի կառուցման մի այլ մեթոդ, որը շատ ավելի հարմար է և պարզ, քան հեռանկարի կառուցման հայտնի և ուսումնասիրված մեթոդները: Առաջարկվող մեթոդում հեռանկար կառուցելու տարածական մոդելը կառուցման հենց սկզբից փոխարինվում է հարթ մոդելով: Մեթոդի հիմքում դրված է օբյեկտների մետրական (մոդելում չփոխվող) հատկությունների կիրառման սկզբունքը: Մետրական են համարվում բնօրինակի այն երկրաչափական հատկությունները (ձև, չափեր, դիրք), որոնք մոդելավորման գործընթացում մնում են անփոփոխ:

Հեռանկարի կառուցման ուսումնասիրված և առաջարկվող մեթոդների վերլուծության նպատակով ներկայացվում են ընդհանուր դրույթներ հեռանկարի մասին:

Հարթության կամ մակերևույթի վրա օբյեկտի կենտրոնական պրոյեկտման մեթոդով ստացված պատկերը կոչվում է հեռանկար (նկ.1):

Հարթության վրա կառուցված հեռանկարը կոչվում է գծային հեռանկար: Հոդվածում դիտարկվում է գծային հեռանկարի կառուցման մեթոդն առարկայական հարթությանը (H) ուղղահայաց K հարթության վրա, որը կոչվում է նկարի հարթություն:



Նկ. 1

Հեռանկարն օժտված է հետևյալ հատկություններով.

1. Արտահայտիչ է, նկարը դարձնում է ակնառու և բնականին մոտ:
2. Ունի տարածությունը կտավի վրա պատկերելու հնարավորություն, որով գեղանկարը արտահայտում է կենդանի բնությունը:

3. Հեռանկարում բնության ձևերի իրական չափերն աղավաղվում են: Գոյություն չունի հատուկ մասշտաբ, որի օգնությամբ հնարավոր լինի բույսի, ծառի, մարդու, շինության և այլ օբյեկտների իրական չափերը տեղափոխել անմիջապես նկարի վրա: Բացառություն են կազմում նկարի հարթության մեջ դասավորված օբյեկտները, որոնց հեռանկարները ստացվում են առանց աղավաղման՝ իրական մեծությամբ:

Առաջարկվող մեթոդի համար հիմք է հարձել հեռանկարի կառուցման քայլերի 3-րդ կետը: Նոր մոտեցման էությունն այն է, որ առարկայական H հարթության մեջ դասավորված օբյեկտների հեռանկարները կառուցելուց առաջ, H-ը համատեղվում է հեռանկարի K հարթության հետ: Հնարավորություն է ստեղծվում դիտարկվող օբյեկտների մետրական հատկությունների օգտագործման միջոցով կառուցել նրանց հեռանկարները: Բնօրինակի և նրա մոդելի (հեռանկարի) միջև ստեղծվում է պարզագույն կոնստրուկտիվ կապ:

4. Հեռանկարում աղավաղվում են ընդհանուր դիրքի հարթության մեջ գտնվող անկյունները, ուղղի կամ գուգահեռ ուղիղների վրա դասավորված հատվածների հարաբերությունը:

Հոդվածում առաջարկվող մեթոդով հեռանկար կառուցելուց առաջ ընդհանուր դիրքի հարթությունը պրոյեկտվում է H առարկայական հարթության վրա, որից հետո կառուցվում են պահանջվող օբյեկտների հեռանկարները:

5. Հեռանկարի հարթությանը զուգահեռ ուղղաձիգ դիրքի ուղիղների հատվածների հեռանկարային պատկերները նույնպես իրար զուգահեռ են, սակայն չեն պահպանվում նրանց երկարությունները:

Առաջարկվող մեթոդով ուղղաձիգ դիրքի ուղիղի հեռանկարը կառուցելիս H-ը և իր վրայի հետք – պրոյեկցիան համատեղվում են K-ի հետ, վերջինս դառնում է K նկարի հարթության կետ, և նրա օգտագործումը հեշտացնում է կառուցումները:

Հորիզոնական դիրքի զուգահեռ ուղիղների հեռանկարները հավաքվում են մեկ կետում՝ կիզակետում (ֆոկուս), որը նրանցից յուրաքանչյուրի անվերջ հեռու կետի (անիսկական կետ) հեռանկարն է:

Հեռանկար կառուցելու համար ֆիգուրների (կետերի բազմություն) ընտրության եղանակը դասական է՝ պարզից դեպի բարդը՝ կետ, ուղղի հատված, հարթություն (շրջան), երկրաչափական և կազմածո մարմիններ:

Հեռանկարի կառուցման հոդվածում առաջարկվող և ավանդական մեթոդների տարբերությունների լուսաբանումը ներկայացվում է շրջանագծի (շրջան), հեռանկարի կառուցման օրինակով, որը կներկայացվի հոդվածի վերջում:

Ֆիգուրի հեռանկարը կառուցելու համար ընտրվում են հեռանկարի հետևյալ տարրերը.

1. Առարկայական հարթություն (H), որի վրա տեղադրվում են այն ֆիգուրները (առարկաները), որոնց հեռանկարները պետք է կառուցել: Հեշտության համար ընտրվում է հորիզոնական դիրքը:

2. Հեռանկարի հարթությունն (K) ընտրվում է H-ին ուղղահայաց՝  $K \perp H$  ( $\perp$  - ֆիգուրների ուղղահայացություն):

$XX = H \cap K$  (կարդացվում է H-ի և K-ի հատման գիծը,  $\cap$  - ֆիգուրների հատում) գիծը կոչվում է հեռանկարի հիմք:

3. Դիտողի աչքը համարվում է դիտակետ կամ պրոյեկտման կենտրոն ( $S(S_H, S_V)$ ), իսկ նրա պրոյեկցիան H-ի վրա կհամարենք դիտակետի հիմք ( $S_H$ ):

4. Դիտակետից դուրս եկող հորիզոնական դիրքի ճառագայթները դասավորվում են  $H - \text{ին զուգահեռ } H_1$  հարթությունում ( $H_1 \parallel H$ ,  $\parallel$  - զուգահեռություն), որը անվանում ենք հորիզոնի հարթություն: Հորիզոնի և հեռանկարի հարթությունների հատման հի (հի =  $H \cap H_1$ ) գիծը կոչվում է հորիզոնի գիծ:

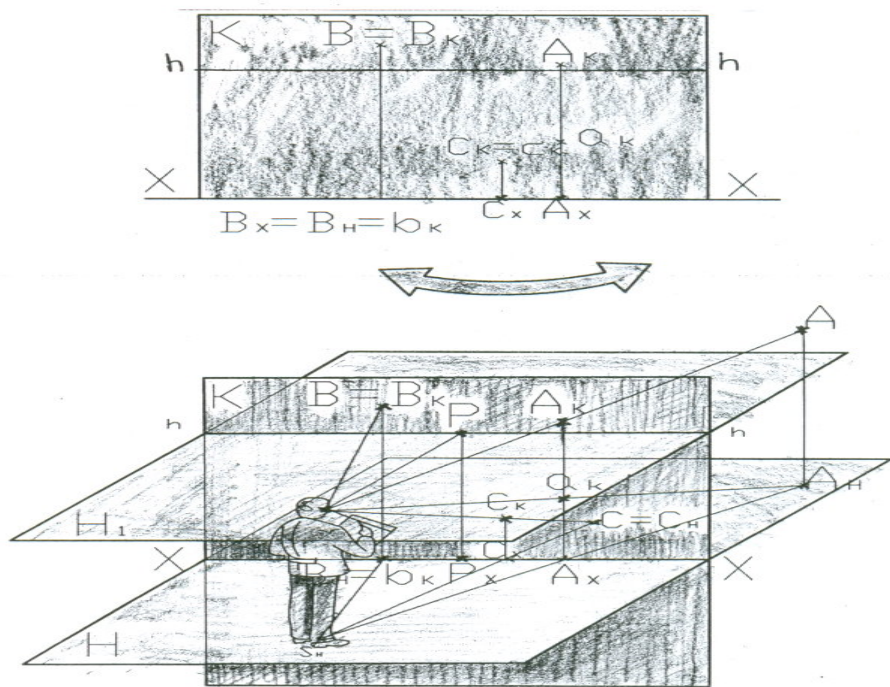
Հոդվածում առաջարկվող մեթոդում  $H_1$  հարթությունը համատեղվում է K-ի հետ: Ստանում ենք K-ի համալրված նկարը  $H - \text{ին } H_1$ -ի հետ: XX գծից ներքև դասավորվում է H-ը, հի գծից վերև՝  $H_1$ -ը:

5. Դիտակետից նկարի հարթությանն ուղղահայաց տարված ճառագայթի և այդ հարթության հատման P ( $P = SP \cap K$ ) կետը կոչվում է հեռանկարի գլխավոր կետ, իսկ SP հատվածի երկարությունը՝ գլխավոր հեռավորություն:

6. Առաջադրված կետերը նշանակվում են լատինական այբուբենի մեծատառերով՝ A, B, C, D, ..., իսկ նրանց երկրորդական պրոյեկցիաները (հիմքերը)՝ H ինդեքսներով՝  $A_H, B_H, C_H, D_H, \dots$ , նրանց հեռանկարները՝  $a_k, b_k, c_k, d_k, \dots$ :

Կետի հեռանկարի ստացման կառուցումները ներկայացվում են նկ. 2-ում: Բազմազանության նպատակով նկարում ներառված են եռաչափ տարածության մեջ ( $R^3$ ) կետի դասավորության հնարավոր երեք դեպքերը՝  $A \in R^3$  ( $\in$  – պատկանելիություն)  $B \in K$  և  $C \in H$  (նկ.2):

Ուղիղ գիծն առաջադրվում է իր երկու կամայական կետերով: Նրա հեռանկարը անցնում է այդ երկու կետերի հեռանկարներով: Ուստի, կետի հեռանկարի կառուցման քայլերի հաջորդականությունը (ալգորիթմը) երկու անգամ կրկնելով, կարելի է կառուցել ուղիղ գծի հեռանկարը: Հենց այս հիմնավորումով՝ ուղիղ գծի հեռանկարի կառուցումը հողվածում չի քննարկվում, միանգամից անցում է կատարվում հարթության հեռանկարին, որը առաջադրվում է շրջանի (շրջանագծի) տեսքով:



Նկ. 2

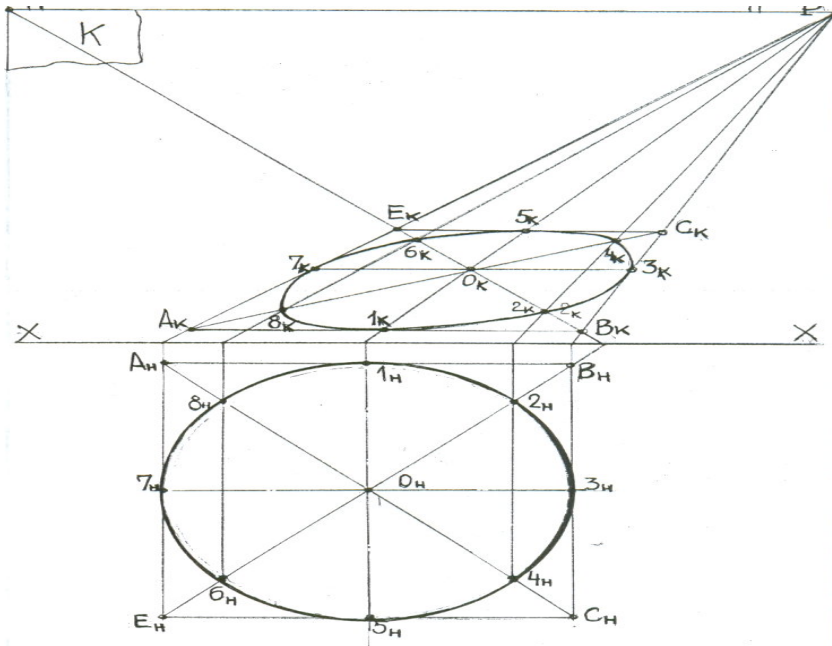
Միմյանց հետ համեմատելու նպատակով սկզբում ներկայացվում է առարկայական հարթության մեջ դասավորված շրջանագծի հեռանկարի կառուցումը ավանդական մեթոդով (նկ.3): Նկ. 4-ում ներկայացվում է նույն շրջանագծի հեռանկարի կառուցումը նոր մեթոդով, որի կառուցումներն ունեն այսպիսի հաջորդականություն:

1. հի հորիզոնի գծի  $P_{hh}$  կետում տարված է ուղղահայաց գիծ, և նրա վրա՝ այդ կետից վերև, տեղադրված է  $P_{hh}P = P_{hh}D$  հատվածը:

2. Շրջանագծի հեռանկարը, ինչպես նկ. 3-ում, կառուցված է նրա  $1_H, 2_H, \dots, 8_H$  բնորոշ կետերի  $1_k, 2_k, \dots, 8_k$  հեռանկարների և նրան արտագծած  $A_H B_H C_H E_H$  քառակուսու հեռանկարի միջոցով:  $1_H 2_H, 2_H 3_H, \dots, 8_H 1_H$  լարերի միջոցով շրջանագծի բնորոշ կետերի հեռանկարները կառուցված են ուրիշ ալգորիթմով:

3.  $1_{H2H}$ , լարը շարունակվում է մինչև  $XX$ -ի հետ  $F_k$  կետում հատվելը՝  $1_{H2H}$   
 $\cap K = F_k$ :  $1_{H2H}$  լարի անխակական  $F_k$  կետի հեռանկարը ստանալու համար  $P$  կետով տարվում է  $P F_k \parallel 1_{H2H}$  ուղիղ՝ մինչև  $XX$ -ի հետ  $F_{2k}$  կետում հատվելը:

4.  $F_k F_{2k}$  ուղղի վրա  $1_k$  և  $2_k$  կետերի հեռանկարները ստանալու նպատակով նույնատիպ կառուցումներ են արված  $1_{H8H}$  և  $2_{H3H}$  լարերի համար:



Նկ. 3

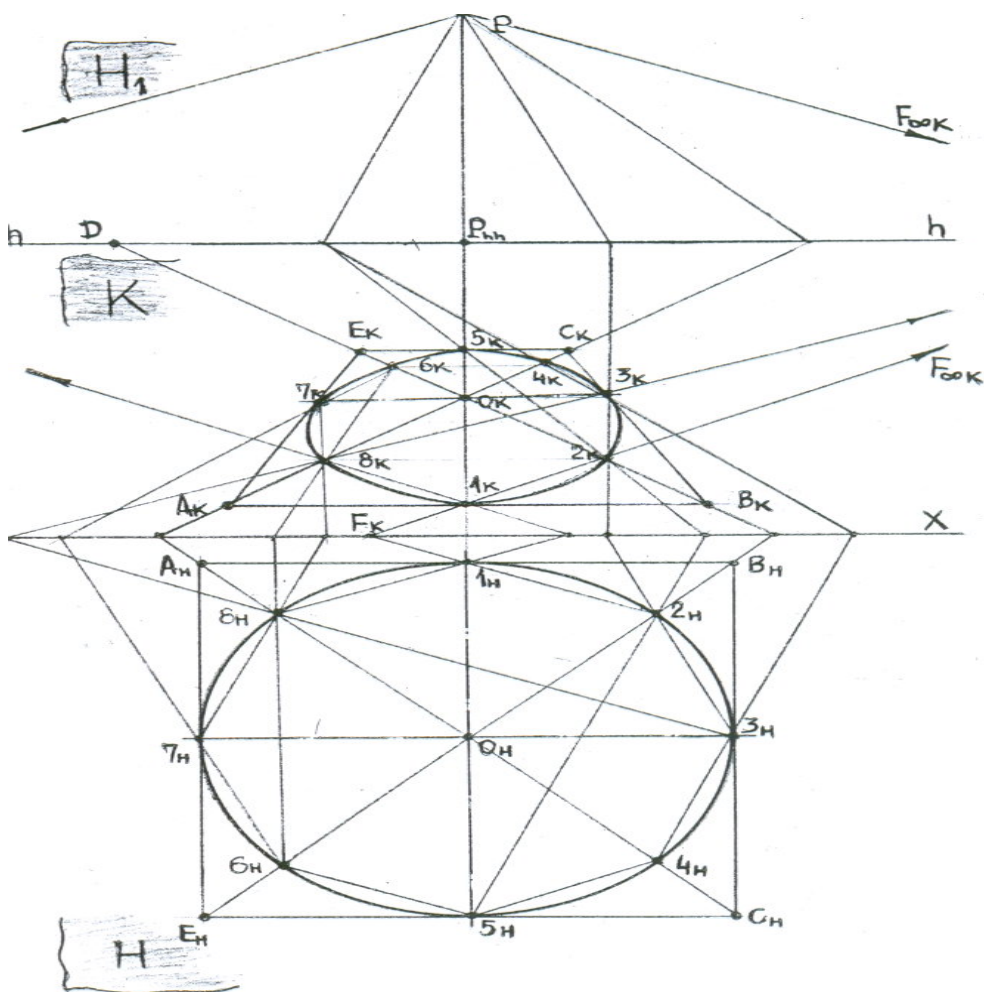
5. Համապատասխան լարերի հեռանկարների հատման արդյունքում ստացվում են դիտարկվող  $1_H, 2_H, \dots, 8_H$  կետերի որոնելի  $1_k, 2_k, \dots, 8_k$  հեռանկարները:

6. Ստանալով նշված կետերի հեռանկարները  $A_k B_k C_k E_k$  հավասարասրուն սեղանի կողմերի և անկյունների վրա և սահուն կոր գծով միացնելով իրար՝ կունենանք  $1_k, 2_k, 3_k, \dots, 8_k$  կետերով անցնող շրջանագծի հեռանկարը, որն իրենից ներկայացնում է էլիպս (նկ. 4):

Որպեսզի հողվածում ընդգրկվեն հեռանկարի կառուցման հայտնի բոլոր մեթոդները, ներկայացվում է նրանց դասակարգումը.

1. Հեռանկարի կառուցման պրոյեկցիաների(տեսքերի) մեթոդ
2. Հեռանկարի կառուցման շառավղային(Ա. Դյուրերի) մեթոդ
3. Հեռանկարի կառուցման մասշտաբային մեթոդ
4. Հեռանկարի կառուցման ճարտարապետների մեթոդ

Դասակարգված բոլոր մեթոդների նկարագրումն ի մի է բերված մեր կազմած մեթոդական ուղեցույցում, որի մասին հիշատակված է գրականության ցանկում:



Նկ. 4

#### ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. В.Н. Виноградов, *Начертательная геометрия*, Минск, Высшая школа, 1977, 368 ст.
2. Н.Н. Крылов, *Начертательная геометрия*, Москва, 1977
3. Г.А. Владимирский, *Перспектива*
4. Շ.Բ. Այվազյան, *Հեռանկարի կառուցումը շառավղային (Դյուրերի) և ճարտարապետների եղանակով, Մերօրվային ուղեցույց: Իջևան, 2010թ.:*

**К.Б. Айвазян – Методология построения перспективы.** – Статья посвящена описанию существующих методов построения перспективы. В статье описываются эти методы и предлагается, по существу, новый метод построения перспективы геометрических фигур, тел и их сочетаний.



Для иллюстрации и сравнения, в статье, построена перспектива окружности – с помощью традиционных и предлагаемых методов.

Традиционные методы построения перспективы геометрических фигур заключаются в том, что на первом этапе строится пространственная, а потом, с помощью метода совмещения плоскостей, строится плоская, картина перспективы.

Анализируя традиционные методы построения перспективы, можно сказать, что они громоздки и для усвоения предлагаемых построений нужно овладеть пространственным мышлением.

В статье предлагается новый метод построения перспективы. В нём отсутствуют пространственные построения. Сразу получается перспектива фигуры на плоскости – без пространственных манипуляций.

Предлагаемый метод построения прост и доступен.

Шаги построения легко усваиваются. Для их понимания не требуется специальной подготовки в областях начертательной геометрии, в теории теней и перспектив.

## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

### ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ ԵՎ ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱ

*Ա.Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ*

Լապլասի ձևափոխությունը և նրա կիրառությունները..... 3

*P.P. КАМАЛЯН*

Об одном значении параметра  $W_{R,\bar{R}}$  полных графов..... 7

*N.N. DAVTYAN, R.R. KAMALIAN*

Some properties of the number of vertices with an interval spectrum in proper edge colorings of graphs ..... 18

*C.B. БАЛИКЯН, P.P. КАМАЛЯН*

О локально-сбалансированных 2-разбиениях простых циклов и полных графов ..... 28

*Մ.Ա. ՃԱՂԱՐՅԱՆ*

B - ծառեր, նրանց կառուցման մի ծրագրային իրականացման մասին ..... 32

### ՖԻԶԻԿԱ

*Ն.Պ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ*

Հազվագյուտ հոդային և 3d- անցողիկ մետաղների միացությունների Կյուրիի ջերմաստիճանը ..... 47

*A.G. ГАЛУМЯН*

Вычисление интегралов от плотности тока, возбужденного в водородоподобном атоме при учете изменения фазы воздействующей волны внутри атома..... 52

*Մ.Ս. ԱԹՈՅԱՆ, Ս.Ն. ՆԱԶԻՆՅԱՆ*

Կիրիսոֆի երկրորդ կանոնի գրաֆիկական մեկնաբանությունը ..... 57

*Գ.Վ. ԳՈՒԼԱԿՅԱՆ*

Ակտիվ RC ֆիլտր օպերացիոն ուժեղացուցչի հիման վրա ..... 65

### ՔԻՄԻԱ ԵՎ ԿԵՆՍԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

*Հ.Լ. ԻՍԱԽԱՆՅԱՆ, Ա.Հ. ԵՂՈՅԱՆ*

7-օքսիֆինոլինի ստացում ..... 70

*Հ.Լ. ԻՍԱԽԱՆՅԱՆ, Ա.Հ. ԵՂՈՅԱՆ*

Յոդքացախաթվի եթիլ էթերի ստացման նոր եղանակ..... 73

*Գ.Ս. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Մ.Ս. ՓԱՐՍԱԴԱՆՅԱՆ,*

*Գ.Հ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Մ.Ս. ԻՍԱԽԱՆՅԱՆ*

Իջևան քաղաքի կոմունալ-կենցաղային հոսքաջրերի ազդեցությունը Աղստև գետի ջրի ջրաքիմիական ցուցանիշների վրա ..... 75

*Գ.Ս. ՄԻՄՈՆՅԱՆ, Ա.Գ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ*

Երևան քաղաքի ծառատեսակների փոշեկլանիչ և աղմուկակլանիչ  
հատկությունների ուսումնասիրությունը..... 79

*Մ.Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Ն.Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ*

Ադենինը և ադենոզինը դեզամինացնող ֆերմենտների  
ուսումնասիրությունը կենսաբանական օրգանիզմներում..... 85

**ՈՒՍՈՒՄՆԱՄԵԹՈԴԱԿԱՆ**

*Կ.Բ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ*

Հեռանկարի կառուցման մեթոդաբանությունը ..... 89

---

Երևանի պետական համալսարանի  
օպերատիվ պոլիգրաֆիայի ստորաբաժանում  
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1: