Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный университет
геодезии и картографии

К.И. Лоссов, Е.Г. Маркарян

Преобразования Фурье и Лапласа

Москва
2017

Рецензенты:
доцент, кандидат техн. наук **А.С. Филонов** (МИИГАиК);
доцент, кандидат техн. наук **О.А. Баюк** (ФУ РФ)

Составители: К.И. Лоссов, Е.Г. Маркарян
Преобразования Фурье и Лапласа: методические указания. — М.: МИИГАиК, 2017. — 68 с.

Методические указания написаны в соответствии с утвержденной программой курса «Высшая математика», рекомендованы кафедрой «Высшей математики». Содержат краткое теоретическое введение, примеры, а также варианты для самостоятельного решения.

Для студентов II курса всех специальностей.

Электронная версия методических указаний размещена на сайте библиотеки МИИГАиК http://library.miigaik.ru

ВВЕДЕНИЕ

В математическом анализе и его приложениях широко распространены методы, связанные с использованием интегральных преобразований. Эти методы успешно применяются к решению дифференциальных и интегральных уравнений, изучению специальных функций, вычислению интегралов. Напомним следующее определение.

Определение. Интегральным оператором иди интегральным преобразованием принято называть оператор A, действующий на функции f по закону

$$A(f)(y)=\int_X K(x,y)f(x)dx,$$

где $K(x,y)$ — заданная функция, называемая ядром интегрального оператора, а $X \subset \mathbb{R}^n$ множество, по которому происходит интегрирование и на котором считаются определенными подынтегральные функции. Поскольку y — свободный параметр из некоторого множества Y, то $A(f)$ есть функция на этом множестве Y.

Существенным преимуществом метода интегральных преобразований является возможность подготовки таблиц прямых и обратных преобразований различных функций, часто встречающихся в приложениях (см., например [1]). В настоящем пособии рассматриваются наиболее распространенные интегральные преобразования Фурье и Лапласа.

I. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Определение 1. Функция

$$\mathcal{F}[f](\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx. \tag{1}$$

Называется *преобразованием Фурье* функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

Интеграл здесь понимается в смысле главного значения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

и считается что он существует.

Если $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, то, поскольку $\left|f(x)e^{-i\xi x}\right|=|f(x)|$ при $x,\xi\in\mathbb{R}$, для любой такой функции имеет смысл преобразование Фурье (1), причем интеграл (1) сходится абсолютно и равномерно по ξ на всей прямой $\mathbb{R}$.

Определение 2. Если $c(\xi)=\mathcal{F}[f](\xi)$ — преобразование Фурье функции

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, то сопоставляемый f интеграл

$$f(x)\sim\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

понимаемый в смысле главного значения, называется *интегралом Фурье функции f*.

Пример 1. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{bmatrix} 0, & -\infty<x<1 \\ 1, & 1<x<2 \\ 0, & 2<x \end{bmatrix}.$$

Заданная функция абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{1}^{2}dx=1<\infty.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx=\int_{1}^{2}e^{-i\xi x}dx=\frac{i\,(e^{-2i\xi}-e^{-i\xi})}{\xi},$$

То

$$\mathcal{F}[f](\xi)=\frac{i\,(e^{-2i\xi}-e^{-i\xi})}{2\pi\xi}.$$

Определение 3. Понимаемые в смысле главного значения интегралы

$$\mathcal{F}[f](\xi)=\frac{i\,(e^{-2i\xi}-e^{-i\xi})}{2\pi\xi}. \tag{3}$$

$$\mathcal{F}_s[f](\xi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\xi x dx, \tag{4}$$

Называются соответственно *косинус*- и *синус*-преобразованиями Фурье функции *f*.

Полагая $c(\xi)=\mathcal{F}[f](\xi)$, $a(\xi)=\mathcal{F}_c[f](\xi)$, $b(\xi)=\mathcal{F}_s[f](\xi)$, получаем отчасти уже знакомое нам по рядам Фурье соотношение

$$c(\xi)=\frac{1}{2}\big(a(\xi)-ib(\xi)\big). \tag{5}$$

Как видно из соотношений (3), (4),

$$a(-\xi)=a(\xi), b(-\xi)=-b(\xi). \tag{6}$$

Формулы (5), (6) показывают, что преобразования Фурье вполне определяются на всей прямой $\mathbb{R}$, если они известны лишь для неотрицательных значений аргумента.

Пример 2. Найти косинус - и синус - преобразования Фурье функции

$$f(x)=\begin{bmatrix} 0, & -\infty<x<1 \\ 1, & 1<x<2 \\ 0, & 2<x \end{bmatrix}.$$

Как показано в примере 1, заданная функция абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$.

Найдем ее косинус-преобразование Фурье по формуле (3):

$$\mathcal{F}_c[f](\xi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\xi x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{2}\cos(\xi x)dx=\frac{\sin(2\xi)-\sin(\xi)}{\pi\xi}.$$

Аналогично, нетрудно найти синус-преобразование Фурье функции $f(x)$ по формуле (4):

$$\mathcal{F}_c\left[f\right](\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\xi x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{1}^{2}\sin(\xi x)dx=\frac{\cos(\xi)-\cos(2\xi)}{\pi\xi}.$$

Используя примеры 1 и 2, нетрудно непосредственной подстановкой убедиться, что для $f(x)$ выполняется соотношение (5).

Если функция f вещественнозначна, то из формул (5), (6) в этом случае следует

$$c(-\xi)=\overline{c(\xi)}, \tag{7}$$

Поскольку в этом случае $a(\xi)$ и $b(\xi)$ — вещественные функции на $\mathbb{R}$, что видно из их определений (3), (4). Впрочем, равенство (7) при условии $\overline{f(x)}=f(x)$ получается и непосредственно из определения (1) преобразования Фурье, если учесть, что знак сопряжения можно вносить под знак интеграла. Последние наблюдение позволяет заключить, что для любой функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\mathcal{F}\left[f\right](-\xi)=\overline{\mathcal{F}\left[f\right](\xi)}, \tag{8}$$

Полезно также заметить, что если f — вещественная и четная функция, т.е. $\overline{f(x)}=f(x)=f(-x)$, то

$$\begin{gathered}\overline{\mathcal{F}_c\left[f\right](\xi)}=\mathcal{F}_c\left[f\right](\xi),\mathcal{F}_s\left[f\right](\xi)\equiv 0,\\ \overline{\mathcal{F}\left[f\right](\xi)}=\mathcal{F}\left[f\right](\xi)=\mathcal{F}\left[f\right](-\xi);\end{gathered} \tag{9}$$

если f — вещественная и нечетная функция, т.е. $\overline{f(x)}=f(x)=-f(-x)$, то

$$\begin{gathered}\mathcal{F}_c\left[f\right](\xi)\equiv 0,\ \overline{\mathcal{F}_S\left[f\right](\xi)}=\mathcal{F}\left[f\right](\xi)\\ \overline{\mathcal{F}\left[f\right](\xi)}=-\mathcal{F}\left[f\right](\xi)=\mathcal{F}\left[f\right](-\xi)\end{gathered} \tag{10}$$

а если f — чисто мнимая функция, т.е. $\overline{f(x)}=-f(x)$, то

$$\mathcal{F}\left[f\right](-\xi)=-\overline{\mathcal{F}\left[f\right](\xi)}. \tag{11}$$

Заметим что если f — вещественнозначная функция, то интеграл Фурье можно записать также в виде

$$\int_0^\infty \sqrt{a^2(\xi)+b^2(\xi)}\cos(x\xi+\varphi(\xi))d\xi=2\int_0^\infty \left|c(\xi)\right|\cos(x\xi+\varphi(\xi))d\xi,$$

где

$$\varphi(\xi)=-\operatorname{arctg}\frac{b(\xi)}{a(\xi)}=\arg c(\xi).$$

Пример 3. Найдем преобразование Фурье функции $f(t)=\dfrac{\sin at}{t}$ (считая $f(0)=a\in\mathbb{R}$)

$$\mathcal{F}[f](\alpha)\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{\sin at}{t}e^{-i\alpha t}dt=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{\sin at\cos\alpha t}{t}dt=$$

$$=\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin at\cos\alpha t}{t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sin(a+\alpha)t}{t}+\frac{\sin(a-\alpha)t}{t}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\big(\operatorname{sgn}(a+\alpha)+\operatorname{sgn}(a-\alpha)\big]\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, \text{ если} |\alpha|\le|a|,\\ 0, \text{ если} |\alpha|>|a|,\end{cases}$$

поскольку нам известно значение интеграла Дирихле

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Рассмотренная в примере функция f не является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ и её преобразование Фурье имеет разрывы. О том, что преобразование Фурье абсолютно интегрируемых функций не имеет разрывов, говорит следующая

Лемма 1. *Если функция* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *локально интегрируема и абсолютно интегрируема на* $\mathbb{R}$*, то*

a) её преобразование Фурье $\mathcal{F}[f](\xi)$ определено при любом значении $\xi\in R$;

b) $\mathcal{F}(f)\in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$;

c) $\sup_{\xi}\left|\mathcal{F}[f](\xi)\right|\le\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx$;

d) $\mathcal{F}[f](\xi)\to 0$ при $\xi\to\infty$.

Напомним, что если $f:G\to\mathbb{C}$ — вещественно или комплекснозначная функция, определенная на открытом множестве $G\subset R$, *то функция* f *называется локально интегрируемой на* G, если любая *точка* $x\in G$ имеет окрестность $U(x)\subset$G, в которой функция $f|_{U(x)}$ интегрируема. В частности, если $G=R$, условие локальной интегрируемости функции f, очевидно, равносильно тому, что $f\big|_{[a,b]}\in\mathcal{R}[a,b]$ для любого отрезка [a,b].

Пример 4. Найдем преобразование Фурье функции $f(t)=e^{-t^2/2}$:

$$\mathcal{F}[f](\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}e^{-i\alpha t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}\cos\alpha t\,dt.$$

Дифференцируя последний интеграл по параметру α и интегрируя затем по частям, находим, что

$$\frac{d\mathcal{F}[f]}{d\alpha}(\alpha)+\frac{\alpha}{2}\mathcal{F}[f](\alpha)=0,$$

или

$$\frac{d}{d\alpha}\ln\mathcal{F}[f](\alpha)=-\frac{\alpha}{2}.$$

Значит, $\mathcal{F}[f](\alpha)=ce^{-\alpha^2/2}$, где c — постоянная, которую, пользуясь интегралом Эйлера-Пуассона находим из соотношения

$$c=\mathcal{F}[f](0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt=\sqrt{2\pi}.$$

Итак, мы нашли, что $\mathcal{F}_c[f](\alpha)=\sqrt{2\pi}e^{-\alpha^2/2}$, и одновременно показали, что $\mathcal{F}_c[f](\alpha)=\sqrt{2\pi}e^{-\alpha^2/2}$, а $\mathcal{F}_s[f](\alpha)\equiv 0$.

Определение 4. Говорят, что функция $f:\overset{\circ}{U}(x)\to\mathbb{C}$, заданная в проколотой окрестности точки $x\in\mathbb{R}$, удовлетворяет в точке x условиям Дини, если

a) в точке x существуют оба односторонних предела

$f(x_-)=\lim\limits_{t\to+0}f(x-t), f(x_+)=\lim\limits_{t\to+0}f(x+t);$

b) оба интеграла

$$\int_{+0}\frac{f(x-t)-f(x_-)}{t}dt,\ \int_{+0}\frac{f(x+t)-f(x_+)}{t}dt$$

сходятся абсолютно.

Абсолютная сходимость интеграла $\int_{+0}g(t)dt$ означает абсолютную сходимость интеграла $\int_0^{\varepsilon}g(t)dt$ хоть при каком-нибудь значении $\varepsilon>0$.

1. Достаточные условия представимости функции интегралом Фурье

Теорема 1. *Если абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ и локально кусочно непрерывная функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ удовлетворяет в точке $x\in\mathbb{R}$ условиям Дини, то её интеграл Фурье сходится в этой точке, причем к значению* $\frac{1}{2}\left[f(x_-)+f(x_+)\right]$, *равному полусумме левого и правого пределов значений функции в этой точке.*

Следствие 1. *Если функция* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *непрерывна, имеет в каждой точке* $x\in\mathbb{R}$ *конечные односторонние производные и абсолютно интегрируемая на* $\mathbb{R}$*, то она представляется на* $\mathbb{R}$ *своим интегралом Фурье*

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} c(\xi)e^{ix\xi}d\xi, \tag{13}$$

где $c(\xi)=\mathcal{F}[f](\xi)$ — *преобразование Фурье функции f.*

Представление функции интегралом Фурье можно переписать в виде:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{i\xi(x-y)}dy. \tag{13$'$}$$

Замечание. Сформулированные в теореме 1 и следствии 1 условия на функцию *f* являются достаточными, но не являются необходимыми для возможности такого представления.

Пример 5. Представить функцию *f*(*x*) интегралом Фурье, если

$$f(x)=\begin{bmatrix} -1, & -1<x<0 \\ 1, & 0<x<1 \\ 0, & |x|>1 \end{bmatrix}$$

Данная функция *f*(*x*) является нечетной и непрерывной на $\mathbb{R}$, кроме точек $x=-1$, $x=0$, $x=1$.

В силу нечетности и вещественности функции *f*(*x*) имеем:

$$\mathcal{F}_c[f](\xi)=0,$$

и из равенств (5) и (10) следует, что

$$c(\xi)=-\frac{i}{2}b(\xi)=-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\sin(\xi y)dy=$$

$$=-\frac{i}{2\pi}2\int_0^1 \sin(\xi y)dy=\frac{i\cos(\xi y)}{\pi\xi}\Big|_0^1=\frac{i(\cos(\xi)-1)}{\pi\xi}.$$

В точках непрерывности функции *f* имеем:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} c(\xi)e^{i\xi x}d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i(\cos(\xi)-1)}{\xi}(\cos(\xi x)+i\sin(\xi x))d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1-\cos(\xi))}{\xi}\sin(\xi x)d\xi+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\cos(\xi)-1)}{\xi}\cos(\xi x)d\xi\right\}.$$

Но функция $g(\xi)=\dfrac{(\cos(\xi)-1)}{\xi}\cos(\xi\ x)$ — нечетная, поэтому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{(\cos(\xi)-1)}{\xi}\cos(\xi x)d\xi=0$, так как интеграл вычисляется в смысле главного значения.

Функция $h(\xi)=\dfrac{(1-\cos(\xi))}{\xi}\sin(\xi x)$ — четная, поэтому $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{(1-\cos(\xi))}{\xi}\sin(\xi x)d\xi$, если $x\neq 0$, $x\neq\pm 1$. При $x=1$ должно выполняться равенство

$$\frac{f(1-0)+f(1+0)}{2}=\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(1-\cos(\xi))}{\xi}\sin(\xi)d\xi.$$

Полагая $\xi=2t$, отсюда находим

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin^3 t\cos t}{t}dt=\frac{\pi}{16}.$$

Если в последнем выражении для $f(x)$ положить $x=½$,

то $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{(1-\cos(\xi))}{\xi}\sin\left(\dfrac{\xi}{2}\right)d\xi$.

Полагая здесь $\xi=2t$, найдем

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t}dt=\frac{\pi}{4}.$$

Если функция $f(x)$ вещественнозначная кусочно непрерывна на любом отрезке действительной прямой абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и имеет в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ конечные односторонние производные тогда в точках непрерывности функции f представляется в виде интеграла Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)dt, \tag{13.1}$$

а в точках разрыва функции f левую часть равенства (13.1) следует заменить на

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Если непрерывная, абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция f имеет в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ конечные односторонние производные, то в случае, когда это функция является четной, справедливо равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos xy dy, \tag{13.2}$$

где

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos ytdt, \tag{13.2$'$}$$

а в случае, когда f — нечетная функция, выполняется равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(y) \sin xy dy, \tag{13.3}$$

где

$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin ytdt, \tag{13.3$'$}$$

Пример 5′. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье, если:

$$f(x) = e^{-a|x|}, \ a > 0;$$

Так как f — непрерывная на $\mathbb{R}$ четная функция, то, используя формулы (13.2), (13.2′), имеем

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos ytdt = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 + y^2)},$$

$$e^{-\alpha|x|} = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos yx}{\alpha^2 + y^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Обозначим символом $F[\varphi]$ понимаемый в смысле главного значения интеграл

$$F[\varphi](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \tag{14}$$

Следствие 2. *Для любой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющей условиям следствия 1, существуют все преобразования $\mathcal{F}[f]$, $F[f]$, $F\left[\mathcal{F}[f]\right]$, $\mathcal{F}\left[F[f]\right]$ и имеют место равенства*

$$F\left[\mathcal{F}[f]\right] = \mathcal{F}\left[F[f]\right] = f. \tag{15}$$

Имея ввиду эти соотношения, преобразование (14) часто называют *обратным преобразование Фурье* и вместо F пишут $\mathcal{F}^{-1}$, а сами равенства (15) называют формулой обращения преобразования Фурье.

Пример 6. Пусть $a>0$ и

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & \text{при} x>0, \\ 0 & \text{при} x\le 0; \end{cases}$$

тогда

$$\mathcal{F}[f](\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-ax}e^{-ix\xi}d\xi=\frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{a+i\xi}.$$

Заметим, что если $f\_(x)=f(-\text{x})$, то при любой функции f

$$\mathcal{F}[f_-](\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-ix\xi}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}dx=\mathcal{F}[f](-\xi).$$

Возьмем теперь функцию $e^{-a|x|}=\varphi(x)=f(x)+f(-x)$.

Тогда

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi)=\mathcal{F}[f](\xi)+\mathcal{F}[f](-\xi)=\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+\xi^2}.$$

Если же взять функцию $\psi(x)=f(x)-f(-x)$, являющуюся нечетным продолжением функции e^{-ax}, $x>0$, на всю числовую ось, то

$$\mathcal{F}[\psi](\xi)=\mathcal{F}[f](\xi)-\mathcal{F}[f](-\xi)=-\frac{i}{\pi}\frac{\xi}{a^2+\xi^2}$$

Используя теорему 1, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix\xi}}{a+i\xi}d\xi=\begin{cases} e^{-ax}, & \text{если } x>0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x=0, \\ 0, & \text{если } x<0, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ae^{ix\xi}}{a^2+\xi^2}d\xi=e^{-a|x|},$$

$$\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi e^{ix\xi}}{a^2+\xi^2}d\xi=\begin{cases} e^{-ax}, & \text{если } x>0, \\ 0, & \text{если } x=0, \\ -e^{ax}, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Все интегралы здесь понимаются в смысле главного значения,

Отделяя в двух последних интегралах действительные и мнимые части, находим интегралы Лапласа

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\xi}{a^2+\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2a}e^{-a|x|},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\xi\sin x\xi}{a^2+\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2a}e^{-a|x|}\operatorname{sgn} x.$$

Определение 1'. Функцию

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx \tag{16}$$

будем называть нормированным преобразованием Фурье.

Определение 2'. Если $\hat{f}(\xi)$ — нормированное преобразование Фурье функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, то сопоставляемый f интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{ix\xi}d\xi, \tag{17}$$

будем называть нормированным интегралом Фурье функции f.

Будем рассматривать нормированное преобразование Фурье (16).

Введем для удобства следующие обозначения:

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx, \tag{18}$$

$$\hat{\mathcal{F}}[f] = \hat{f},\ \tilde{\mathcal{F}}[f] = \tilde{f} \quad (\text{т.е. } \hat{f}(\xi) = \tilde{f}(-\xi)).$$

В сравнении с прежними обозначениями это всего лишь перенормировка: $\hat{\mathcal{F}}[f] = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[f]$, $\tilde{\mathcal{F}}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F[f]$. Значит, в частности, соотношения (15) позволяют заключить, что

$$\hat{\mathcal{F}}\left[\tilde{\mathcal{F}}[f]\right] = \tilde{\mathcal{F}}\left[\hat{\mathcal{F}}[f]\right] = f$$

или, в более короткой записи,

$$\hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}} = f.$$

Определение 5. Оператор $\hat{\mathcal{F}}$ мы будем называть нормированным преобразованием Фурье, а оператор $\tilde{\mathcal{F}}$ будем называть обратным нормированным преобразованием Фурье.

В лемме 1 отмечалось, что преобразование Фурье любой абсолютно интегрируемой на R функции стремится на бесконечности к нулю.

В следующих двух утверждениях констатируется, что, подобно коэффициентам Фурье, преобразование Фурье тем быстрее стремится к нулю, чем глаже функция, от которой оно берется (в первом утверждении); взаимный с этим факт будет состоять в том, что чем быстрее стремится к нулю функция, от которой берется преобразование Фурье, тем глаже ее преобразование Фурье (второе утверждение).

Утверждение 1 (о связи гладкости функции и скорости убывания её преобразования Фурье). Если $f \in C^{(k)}(\mathbb{R},\mathbb{C})(k=0,1,\ldots)$ и все функции *$f, f', \ldots f^{(k)}$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то:*

а) *при любом* $n \in \{0,1,\ldots k\}$

$$\tilde{f}^{(n)}(\xi)=(i\xi)^n\,\tilde{f}(\xi), \tag{19}$$

б)

$$\hat{f}(\xi)=\circ\left(\frac{1}{\xi^k}\right) \text{ при } \xi\to 0.$$

Утверждение 2 (о связи скорости убывания функции и гладкости её преобразования Фурье). *Если локально интегрируемая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ такова, что функция $x^k f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то:*

а) *преобразование Фурье функции f принадлежит классу* $C^{(k)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$;

б) *имеет место неравенство*

$$\hat{f}^{(k)}(\xi)=(-i)^k\,\hat{\mathcal{F}}\left[x^k f(x)\right](\xi). \tag{20}$$

Приведем основные аппаратные свойства преобразования Фурье.

Лемма 2. Пусть для функций f_1 и f_2 существует преобразование Фурье (соответственно, обратное преобразование Фурье), тогда, каковы бы ни были числа λ_1 и λ_2, существует преобразование Фурье (соответственно, обратное преобразование Фурье) и для функции $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$, причем

$$\mathcal{F}\left[\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\right]=\lambda_1\mathcal{F}\left[f_1\right]+\lambda_2\mathcal{F}\left[f_2\right]$$

(соответственно $F\left[\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\right]=\lambda_1 F\left[f_1\right]+\lambda_2 F\left[f_2\right]$).

Это свойство называется линейностью преобразования Фурье, (соответственно обратного преобразования Фурье).

Следствие. $\mathcal{F}[0]=F[0]=0.$

Лемма 3. Преобразование Фурье, так же как и обратное преобразование, является взаимно однозначным преобразованием на множестве непрерывных абсолютно интегрируемых на всей оси функций, имеющих в каждой точке односторонние производные.

Это означает, что если f_1 и f_2 — две функции указанного типа и если $\mathcal{F}\left[f_1\right]=\mathcal{F}\left[f_2\right]$ (соответственно, если $F[f_1]=F[f_2]$), то $f_1 \equiv f_2$ на всей оси.

Из утверждения леммы 1 можно получить следующую лемму.

Лемма 4. Если последовательность абсолютно интегрируемых функций $f_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, и абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ таковы, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_n\left(x\right)-f(x)\right|dx=0,$$

то последовательность $\{\hat{f}_n(y)\}$ равномерно на всей оси сходится к функции $\hat{f}(y)$.

Займемся теперь изучением преобразования Фурье сверток двух функций. Для удобства видоизменим определение свертки $\varphi*\psi$, добавив дополнительный множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$:

$$\varphi*\psi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(t\right)\psi\left(x-t\right)dt.$$

Теорема 2. Пусть функции φ и ψ ограничены, непрерывны и абсолютно интегрируемы на вещественно оси, тогда

$$\mathcal{F}\left[\varphi*\psi\right]=\mathcal{F}\left[\varphi\right]\mathcal{F}\left[\psi\right],$$

т.е. преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье этих функций.

Составим сводную табл. 1 свойств нормированного преобразования Фурье, полезных при решении задач приведенных ниже.

Используя свойства 1–4 и 6, получаем

$$\tilde{\mathcal{F}}\left[\sum_{k=1}^{n}a_k x^{m_k} f_k\left(b_k x+c_k\right)\right]\left(\xi\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{1}{(-i)^{m_k}}\frac{d^{m_k}}{d\xi^{m_k}}e^{ic_k\xi}\frac{1}{b_k}\tilde{\mathcal{F}}\left[f_k(x)\right]\left(\frac{\xi}{b_k}\right).$$

Таблица 1

Функция	Нормированное преобразование Фурье
$f(x)$	$\hat{F}[f(x)](\xi)$
1. $f(x) \pm g(x)$	$\hat{F}[f(x)](\xi) \pm \hat{F}[g(x)](\xi)$
2. $\alpha \cdot f(x)$	$\alpha \cdot \hat{F}[f(x)](\xi)$
3. $f(b \cdot x)$	$\frac{1}{b} \cdot \hat{F}[f(x)](\frac{\xi}{b})$
4. $f(x+c)$	$e^{ic\xi} \cdot \hat{F}[f(x)](\xi)$
5. $e^{icx} \cdot f(x)$	$\hat{F}[f(x)](\xi - c)$
6. $x^n \cdot f(x)$	$\frac{1}{(-i)^n} \frac{d^n}{d\xi^n} \hat{F}[f(x)](\xi)$
7. $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$	$(i \cdot \xi)^n \hat{F}[f(x)](\xi)$
8. $f * g(x)$	$\hat{F}[f(x)](\xi) \cdot \hat{F}[g(x)](\xi)$
9. $f(x) \cdot g(x)$	$\hat{F}[f(x)](\xi) * \hat{F}[g(x)](\xi)$
10. $\overline{f(x)}$	$\overline{\hat{F}[f(x)](-\xi)}$

Пример 7. Найти нормированное преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-bx^2}, b > 0.$$

В примере 4 было показано, что

$$\hat{\mathcal{F}}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

так как, если

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ то } g\left(\sqrt{2}\, b\, x\right) = e^{-bx^2} = f(x).$$

По этому по свойству 3 имеем:

$$\hat{\mathcal{F}}\left[f(x)\right] = \hat{\mathcal{F}}\left[g(\sqrt{2b}\, x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2b}} \hat{\mathcal{F}}\left[g(x)\right]\left(\frac{\xi}{\sqrt{2b}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2b}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4b}}.$$

Т а б л и ц а 2

Функция	Нормированное обратное преобразование Фурье
$f(x)$	$\tilde{F}[f(x)](\xi)$
1. $f(x) \pm g(x)$	$\tilde{F}[f(x)](\xi) \pm \tilde{F}[g(x)](\xi)$
2. $\alpha \cdot f(x)$	$\alpha \cdot \tilde{F}[f(x)](\xi)$
3. $f(b \cdot x)$	$\frac{1}{b} \cdot \tilde{F}[f(x)](\frac{\xi}{b})$
4. $f(x+c)$	$e^{-ic\xi} \cdot \tilde{F}[f(x)](\xi)$
5. $e^{icx} \cdot f(x)$	$\tilde{F}[f(x)](\xi + c)$
6. $x^n \cdot f(x)$	$\frac{1}{(i)^n} \frac{d^n}{d\xi^n} \tilde{F}[f(x)](\xi)$
7. $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$	$(-i \cdot \xi)^n \tilde{F}[f(x)](\xi)$
8. $f * g(x)$	$\tilde{F}[f(x)](\xi) \cdot \tilde{F}[g(x)](\xi)$
9. $f(x) \cdot g(x)$	$\tilde{F}[f(x)](\xi) * \tilde{F}[g(x)](\xi)$
10. $\overline{f(x)}$	$\overline{\tilde{F}[f(x)](-\xi)}$

Аналогично, можно составить табл. 2 для нормированного обратного преобразования Фурье:

Так же как и ранее, используя свойства 1–4 и 6 получаем что

$$\tilde{\mathcal{F}}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k x^{m_k} f_k\left(b_k x + c_k\right)\right] = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{1}{i^{m_k}} \frac{d^{m_k}}{d\xi^{m_k}} e^{-ic_k\xi} \frac{1}{b_k} \tilde{\mathcal{F}}\left[f_k(x)\right]\left(\frac{\xi}{b_k}\right).$$

Пример 8. Найти нормированное обратное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Как следует из примера 6

$$\hat{\mathcal{F}}\left[e^{-a|x|}\right](\xi) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right](\xi) = \sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+\xi^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+\xi^2}.$$

При $a = 1$ имеем:

$$\hat{\mathcal{F}}\left[e^{-a|x|}\right](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2},$$

а значит

$$\tilde{\mathcal{F}}\left[\frac{1}{x^2+1}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|\xi|}.$$

Представив функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = x\,\frac{x}{x^2+1},$$

используем свойство 6 при $n = 1$ и получаем:

$$\tilde{\mathcal{F}}\left[\frac{x}{x^2+1}\right](\xi) = \frac{l}{i}\,\frac{d}{d\xi}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|\xi|} =$$

$$= -\frac{l}{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}} sign(\xi) e^{-|\xi|} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} sign(\xi) e^{-|\xi|}.$$

2. Варианты заданий для расчетно-графических работ

1. Найти синус – преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in (0,1) \\ 0, x \notin (0,1). \end{cases}$$

2. Найти синус – преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x, x \in (0,1) \\ 0, x \notin (0,1). \end{cases}$$

3. Найти косинус – преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in (0,1) \\ 0, x \notin (0,1). \end{cases}$$

4. Найти косинус – преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x, x \in (0,1) \\ 0, x \notin (0,1). \end{cases}$$

5. Найти синус – преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right) \\ -1, x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ 0, x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

6.Найти косинус – преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, x \in \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ 0, x \notin \left(0, \frac{3}{2}\right). \end{cases}$$

7.Найти синус – преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in (0, 2] \\ 3, x \in (2, 4) \\ 0, x \notin (0,4). \end{cases}$$

8. Найти косинус – преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, x \in (0, \pi) \\ 0, x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

9. Найти косинус – преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, x \in (0, 2\pi) \\ 0, x \notin (0, 2\pi). \end{cases}$$

10. Найти синус – преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, x \in (0, \pi) \\ 0, x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

11. Найти синус – преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, x \in (0, 2\pi) \\ 0, x \notin (0, 2\pi). \end{cases}$$

12. Найти синус - преобразование функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

13. Найти синус - преобразование функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ xe^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

14. Найти косинус - преобразование функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

15. Найти косинус - преобразование функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ xe^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

16. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, если:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$

17. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, если:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

18. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, если:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$

19. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, если:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ xe^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

20. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, если:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x} \cos x, & x > 0 \end{cases}$$

21. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, если:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x}\sin x\,, & x > 0 \end{cases}$$

22. Найти нормированное обратное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 8x + 5}.$$

используя формулу

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|\xi|}$$

23. Найти нормированное обратное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$$

используя формулу

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|\xi|}$$

24. Найти нормированное обратное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

используя формулу

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|\xi|}$$

25. Найти нормированное обратное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 5}$$

используя формулу

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|\xi|}$$

26. Найти нормированное обратное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 1}$$

используя формулу

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2 + 1}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|\xi|}$$

27. Найти нормированное обратное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 2}$$

используя формулу

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2 + 1}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|\xi|}$$

28. Найти нормированное обратное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

используя формулу

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2 + 1}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|\xi|}$$

29. Найти нормированное обратное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)}$$

используя формулу

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2 + 1}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|\xi|}$$

30. Найти нормированное обратное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x^2 + 4x + 5)(4x^2 - 8x + 5)}$$

используя формулу

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2 + 1}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|\xi|}$$

31. Найти нормированное обратное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

используя формулу

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|\xi|}$$

32. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье

$$1.1)\ f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } |x| < \tau, \\ 0, \text{если } |x| > \tau; \end{cases}$$

33. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|/a, & \text{если } |x| \le a, \\ 0, & \text{если } |x| > a; \end{cases}$$

34. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье

$$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}, a \ne 0$$

35. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье

$$f(x) = \operatorname{sign}(x-a) - \operatorname{sign}(x-b), b > a;$$

36. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье

$$f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}, a \ne 0$$

37. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } |x| \le \pi, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi; \end{cases}$$

38. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье

$$f(x) = \begin{cases} cos\, x, & \text{если } |x| \le \pi/2, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi/2; \end{cases}$$

39. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье

$$f(x) = \begin{cases} sin\, \omega x, & \text{если } |x| \le 2\pi n/\omega, \\ 0, & \text{если } |x| > 2\pi n/\omega, \end{cases} \quad n \in N, \omega > 0.$$

40. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin\beta x\,, \alpha > 0;$$

41. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos\beta x\,, \alpha > 0;$$

42. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

43. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив её нечетным образом на интервал $(-\infty; 0)$, если:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x\,, & \text{если } 0 \le x \le \pi, \\ \quad 0, & \text{если } x > \pi; \end{cases}$$

44. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив её нечетным образом на интервал $(-\infty; 0)$, если:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & \text{если } 0 \le x \le 2/3, \\ \quad 0, & \text{если } x > 2/3. \end{cases}$$

45. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив её четным образом на интервал $(-\infty; 0)$, если:

$$f(x) = e^{-\alpha x}, \alpha > 0;$$

46. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив её четным образом на интервал $(-\infty; 0)$, если:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

II. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

1. Преобразование Лапласа

Пусть $f(t)$ — функция действительного переменного t, непрерывная на $[0, +\infty)$, за исключением, быть может, конечного числа изолированных точек. Для обеспечения существования некоторых интегралов на бесконечном интервале $0 \le t < \infty$ потребуем для функции $f(t)$ выполнения дополнительных ограничений, связанных с её ростом, а именно будем предполагать, что существуют положительные числа M и S_0 такие, что

$$\left| f(t) \right| < Me^{s_0 t} \tag{1}$$

для любого $t \in [0,+\infty)$.

На основании выше сказанного, введем понятие функции-оригинала в операционном исчислении.

Определение. Если функция $f(t)$ обладает следующими свойствами:

1. $f(t)=0$ при $t<0$;

2. $|f(t)|<Me^{s_0 t}$ при $t>0$, где $M>0$ и S_0 — показатель роста — действительное число; (2)

3. Если на любом конечном отрезке $[a, b]$ положительной полуоси $0t$ функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле (ограничена и либо непрерывна, либо имеет конечное число точек разрыва первого рода), то её называют оригиналом или начальной функцией.

Рассмотрим функцию $e^{-pt}f(t)$, где $p=a+ib$ $(a>0)$ — некоторое комплексное число, причем $Re p=a>S_0$. При сформулированных условиях;

(2) интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f\left(t\right)dt$ сходится и является аналитической функцией;

сходится и является аналитической функцией $F(p)$ комплексного переменного p в полуплоскости $Re p>S_0$, где S_0 — показатель роста функции оригинала $f(t)$:

$$F\left(p\right)= \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt. \tag{3}$$

Интеграл в формуле (3) называется интегралом Лапласа, а определяемая им функция $F(p)$ называется преобразованием Лапласа от функции $f(t)$, или изображением оригинала $f(t)$.

Тот факт, что функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, обозначают следующими символами:

$$f(t) \risingdotseq F(p) \text{ или } F(p)\ f(t) \text{ или } f(t) \leftarrow: F(p) \text{ или } L\left\{f(t)\right\}=F(p).$$

Заметим, что если t_0 точка разрыва первого рода, то за значение оригинала в этой точке принимается

$$f(t_0)=\frac{1}{2}\left[f(t_0-0)+f(t_0+0)\right]. \qquad (4)$$

При соблюдении этого условия между оригиналами и изображениями устанавливается взаимно однозначное соответствие (т.е. всякому оригиналу соответствует единственное изображение и обратно).

2. Простейшие свойства преобразования Лапласа

1. *Свойство линейности изображений.*

Изображение суммы функций, умноженных на постоянные, равно сумме изображений этих функций, умноженных на те же постоянные, т.е. если

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t) \text{ и } f_i(t) \risingdotseq F_i(p),$$

то

$$f(t) \risingdotseq F(p)=\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(p),$$

где c_i — постоянные.

2. *Теорема подобия.*

Для любого постоянного $\alpha>0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. *Дифференцирование оригинала.*

Если $f(t), f'(t), \ldots f^{n}(t)$ являются функциями-оригиналами, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0)$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f''(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$$

Величины $f^{(K)}(0)$, $K=0,1,\ldots,n-1$, понимаются как $\lim\limits_{t\to+0} f^{K}(t)$.

4. *Дифференцирование изображения.*

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $(-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n} F(p) \risingdotseq t^n f(t)$, где $n=1,2,\ldots$

В частности,

$$F'(p) \risingdotseq -tf(t).$$

5. *Интегрирование оригинала.*

Если функция $f(t)$ непрерывна на $(0, +\infty)$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int_0^t f(u)du \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

6. *Интегрирование изображения.*

Если $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом,то из $f(t) \risingdotseq F(p)$ следует

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} F(q)dq \text{ (при условии его сходимости).}$$

7. *Теорема смещения.*

Если $F(p)$ является изображением $f(t)$ то $F(p+\alpha)$ является изображением функции $e^{-\alpha t}f(t)$, т.е. $e^{-\alpha t}f(t) \risingdotseq F(p+\alpha)$,
где $Re(p+\alpha)>S_0$.

8. *Теорема запаздывания.*

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$, $\tau>0$.

Заметим, что при $t<\tau$ $f(t-\tau)=0$.

3. Построение изображений основных элементарных функций

1. Найти изображение единичной функции Хевисайда.

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Решение.

$$L\{\eta(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}.$$

Следовательно,

$$\eta(t) = \frac{1}{p}.$$

2. Найти изображения sin t и cos t.

Решение.

$$L\{\eta(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t dt=\frac{e^{-pt}(-p\sin t-\cos t)}{p^2+1}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p^2+1}.$$

Аналогично вычисляются $L\{\cos t\}$: $L\{\cos t\}=\dfrac{p}{p^2+1}$.

3. Найти изображения sin βt и cos βt.

Решение. Применяя теорему подобия $f(\alpha t)\risingdotseq\dfrac{1}{\alpha}F(\dfrac{p}{\alpha})$, получим

$$\sin\beta t\risingdotseq\frac{1}{\beta}\frac{1}{\left(\frac{p}{\beta}\right)^2+1}=\frac{\beta}{p^2+\beta^2},$$

$$\cos\beta t\risingdotseq\frac{1}{\beta}\frac{\frac{p}{\beta}}{\left(\frac{p}{\beta}\right)^2+1}=\frac{p}{p^2+\beta^2}.$$

4. Найти изображения $e^{-\alpha t}$, $sh\alpha t$, $ch\alpha t$, $e^{-\alpha t}\sin\beta t$, $e^{-\alpha t}\cos\beta t$.

Решение. Представим $e^{-\alpha t}$ в виде $e^{-\alpha t}\eta(t)$ и применим теорему смещения к изображению $F(p)=\dfrac{1}{p}$. Тогда $e^{-\alpha t}=e^{-\alpha t}\eta(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p+\alpha}$.

Аналогично, $e^{\alpha t}\risingdotseq\dfrac{1}{p-\alpha}$.

Так как $sh\alpha t=\dfrac{1}{2}\left(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}\right)$, то по свойству линейности

$$sh\alpha t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{p}{p^2-\alpha^2}.$$

Применяя теорему смещения к изображению sin βt, получим

$$e^{-\alpha t}\sin\beta t\risingdotseq\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}.$$

Аналогично, $e^{-\alpha t}\cos\beta t\risingdotseq\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$.

5. Найти изображения t^n, $t\sin\beta t$, $t\cos\beta t$, $t^n e^{-\alpha t}$.

Для нахождения изображения степенной функции t^n воспользуемся формулой $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$.

Тогда по правилу дифференцирования изображения $F'(p) \risingdotseq -tf(t)$ получим $-t \risingdotseq -\frac{1}{p^2}$ или $t \risingdotseq \frac{1}{p^2}$.

Аналогично, $t^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}$ и при любом $n \in N$ получаем $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Изображение $t\sin\beta t$ получим путем дифференцирования изображения $F(p) \risingdotseq \sin\beta t$, а именно $F(p) = \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$.

Тогда — $F'(p) \risingdotseq t\sin\beta t$ или $t\sin\beta t \risingdotseq -\left(\frac{\beta}{p^2+\beta^2}\right)' = \frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$.

Аналогично, $t\cos\beta t \risingdotseq -\left(\frac{p}{p^2+\beta^2}\right)' = \frac{p^2-\beta^2}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$.

Для нахождения изображения $t^n e^{-\alpha t}$ применим теорему смещения к оригиналу t^n.

Так как $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$, то $t^n e^{-\alpha t} \risingdotseq \frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$. В частности $te^{-\alpha t} = \frac{1}{(p+\alpha)^2}$.

Таблица 1

Таблица изображений основных элементарных функций

№ формулы	$f(t)(t>0)$	$F(p)$	№ формулы	$f(t)(t>0)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	7	$\operatorname{ch}\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	8	$\operatorname{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	9	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
4	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	10	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
5	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	11	$t\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
6	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	12	$t\sin\beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

4. Примеры на нахождение изображений по заданным оригиналам

При вычислении изображений используются как свойства, указанные в §2, так и таблица изображений основных элементарных функций (§3).

Пример 1. Найти изображение функции $f(t)=2^t$.

Решение. Так как $2^t=e^{t\ln 2}$, то применив формулу 3 из таблицы 1, получаем $2^t \risingdotseq \dfrac{1}{p-\ln 2}$.

Пример 2. Найти изображение функции $f(t)=\sin^2 t$.

Решение. Так как $\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$, то используя свойство линейности, получаем

$$\sin^2 t \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)=\frac{2}{\left(p^2+4\right)p}.$$

Пример 3. Найти изображение функции $f(t)=ch\,3t\,\sin 3t$.

Решение. Так как $ch3t=\dfrac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}$, то $f(t)=\dfrac{1}{2}e^{3t}\sin 3t+\dfrac{1}{2}e^{-3t}\sin 3t$.

Применим формулу 10 из табл. 1:

$$F(p)=\frac{1}{2}\frac{3}{(p-3)^2+9}+\frac{1}{2}\frac{3}{(p+3)^2+9}=\frac{3\left(p^2+18\right)}{\left[(p-3)^2+9\right]\left[(p+3)^2+9\right]}.$$

Пример 4. Найти изображение функции $f(t)=t\,ch\,2t$.

Решение. Так как $f(t)=t\,ch2t=t\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}=\dfrac{1}{2}te^{2t}+\dfrac{1}{2}te^{-2t}$, то, применив формулу 4 из табл. 1 при $n=1$, получим

$$f(t)\risingdotseq F(p)=\frac{1}{2(p-2)^2}+\frac{1}{2(p+2)^2}=\frac{p^2+4}{\left(p^2-4\right)^2}.$$

Пример 5. Найти изображение интегрального синуса $\mathrm{Si}t=\int_0^t \dfrac{\sin u}{u}du$.

Решение. Используя теорему об интегрировании изображения найдем изображение оригинала $\frac{\sin t}{t}$.

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int_p^{+\infty} \frac{dq}{q^2+1} = arctgq\Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - arctgp = F(p).$$

Тогда по теореме об интегрировании оригинала получим

$$\mathrm{Si}t = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du \risingdotseq \frac{F(p)}{p} = \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\ p\right).$$

Пример 6. Используя теорему запаздывания найти изображение оригинала $f(t)$, если

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} 0 \le t < 1, \\ 0 & \text{при } t \ge 1 \end{cases}$$

— единичный импульс, действующий в течении промежутка времени от $t=0$ до $t=1$.

Решение. Запишем $f(t)$, используя функцию Хевисайда, в виде

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t-1).$$

Так как $\eta(t-1)=0$ при $t<1$ и $\eta(t-1)=1$ при $t \ge 1$, то значение $f(t)$ совпадают со значениями заданного оригинала. Изображение $f(t)$ будет состоять из двух слагаемых, а именно

$$\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p},\ \eta(t-1) \risingdotseq \frac{1}{p}e^{-p} \text{ и } F(p) = \frac{1}{p}\left(1-e^{-p}\right) \risingdotseq f(t).$$

Пример 7. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при } 0 \le t < \frac{\pi}{2}; \\ -\cos t & \text{при } \frac{\pi}{2} \le t < \pi; \\ 0 & \text{при } t \ge \pi. \end{cases}$$

Решение. Запишем функцию $f(t)$ используя функцию Хевисайда:

$$f(t) = \sin t - \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\sin t - \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos t + \eta(t-\pi)\cos t.$$

Для каждого слагаемого $f(t)$ найдем изображение.

$$F(p)=\frac{1}{1+p^2}-\frac{1}{1+p^2}e^{-\frac{\pi}{2}p}-\frac{p}{p^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}p}+\frac{p}{p^2+1}e^{-\pi p}.$$

Проведем группировку слагаемых и запишем $F(p)$ в виде

$$F(p)=\frac{1}{1+p^2}\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}p}\right)\left(1-pe^{-\frac{\pi}{2}p}\right).$$

Пример 8. По графику оригинала $f(t)$ найти изображение $F(p)$.

Решение. Запишем функцию $f(t)$ используя рис. 1.

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ 2-t, & 0<t\le 2\\ 1, & t>2.\end{cases}$$

С помощью функции Хевисайда $f(t)$ можно записать в виде

$$f(t)=\eta(t)(2-t)-\eta(t-2)(2-t)+\eta(t-2).$$

Найдем изображение каждого слагаемого:

$$F(p)=\frac{2}{p}-\frac{1}{p^2}-e^{-2p}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{p^2}\right)+e^{-2p}\frac{1}{p}.$$

Пример 9. Найти изображение

$$\frac{e^{-3t}-e^{-2t}}{t}.$$

Решение. По теореме интегрирования изображения найдем изображение $\frac{f(t)}{t}$, где $f(t)=e^{-3t}-e^{-2t}\risingdotseq F(p)=\frac{1}{p+3}-\frac{1}{p+2}$.

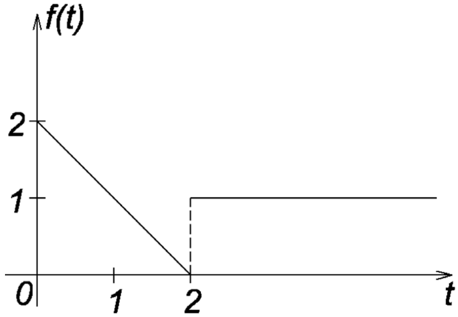


Рис. 1

Тогда

$$\frac{e^{-3t}-e^{-2t}}{t}=\int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{q+3}-\frac{1}{q+2}\right)dq=$$

$$=\lim_{q\to\infty}\ln\frac{q+3}{q+2}-\ln\frac{p+3}{p+2}=$$

$$=\ln 1+\ln\frac{p+2}{p+3}=\ln\frac{p+2}{p+3}.$$

Пример 10. Найти изображение

$$\int_0^t \tau \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau \ .$$

Решение. Найдем изображение функции

$$t \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \cos t \risingdotseq \frac{1}{2p^2} - \frac{1}{2} \frac{p^2 - 1}{\left(p^2 + 1\right)^2}.$$

Тогда по теореме интегрирования оригинала найдем изображение

$$\int_0^t \tau \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau \risingdotseq \frac{1}{2p^3} - \frac{1}{2p} \frac{p^2 - 1}{\left(p^2 + 1\right)^2}.$$

Пример 11. Найти изображение периодической функции $f(t)$, заданной графически с периодом $T=4$ (рис. 2).

Решение. Изображение периодической функции $f(t)$ находится по формуле

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt.$$

На интервале [0,4] функция $f(t)$ задается следующим образом

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0,1] \\ -t + 3, & t \in [1,3] \\ 0, & t \in [3,4] \end{cases}$$

Вычислим $\int_0^4 f(t) e^{-pt} dt$.

$$\int_0^4 f(t) e^{-pt} dt = \int_0^1 2te^{-pt} dt + \int_1^3 (3 - t) e^{-pt} dt = \frac{2}{p^2} - \frac{3}{p^2} e^{-p} + \frac{1}{p^2} e^{-3p}$$

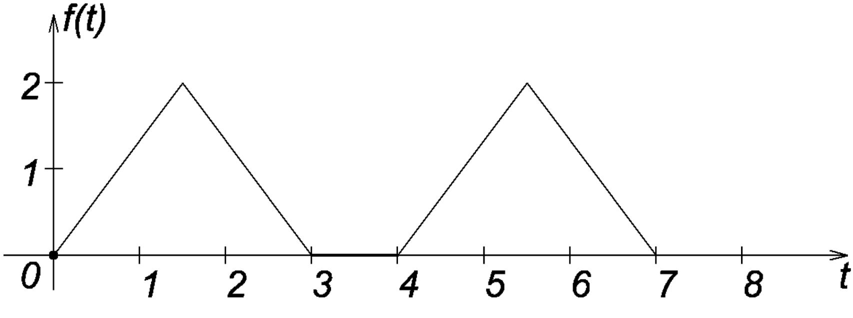


Рис. 2

Тогда

$$F(p) = \frac{\frac{2}{p^2} - \frac{3}{p^2}e^{-3p} + \frac{1}{p^2}e^{-3p}}{1 - e^{-4p}} = \frac{1}{p^2(1 - e^{-4p})}\left(2 - 3e^{-p} + e^{-3p}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения функций.

6. $f(t) = te^t ch\, t$

7. $f(t) = te^{-2t} sin\, 2t$

8. $f(t) = te^{-3t} cos\, t$

9. $f(t) = \dfrac{\cos 2t - e^t}{t}$

10. $f(t) = \dfrac{e^{3t} - e^{2t}}{t}$

11. $f(t) = \dfrac{\sin^2 2t}{t}$

12. $f(t) = \dfrac{\sin 5t \cdot \sin 3t}{t}$

13. $f(t) = \int_0^t \sin \tau \, d\tau$

14. $f(t) = \int_0^t \cos^2 2\tau \, d\tau$

По данному графику оригинала $f(t)$ найти изображение $F(p)$.

15.

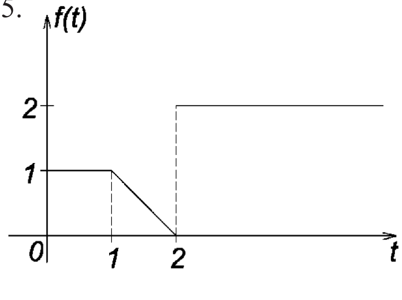


Рис. 3

16.

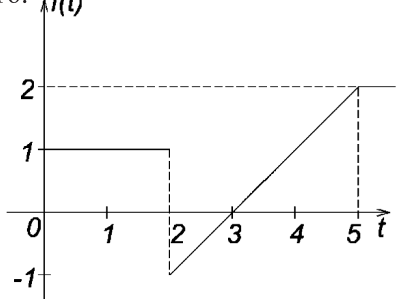


Рис. 4

5. Отыскание оригинала по изображению

При решении обратной задачи, а именно по заданному изображению $F(p)$ найти начальную функцию $f(t)$, используют таблицу изображений основных элементарных функций и теоремы разложения (первая и вторая).

Первая теорема разложения.

Если изображение $F(p)$ может быть представлено в виде сходящегося степенного ряда по степеням $\frac{1}{p}$, а именно

$$F(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\ldots+\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots,$$

то функция оригинал $f(t)$ находится по формуле

$$f(t)=a_0+a_1\frac{t}{1!}+a_2\frac{t^2}{2!}+\ldots+a_n\frac{t^n}{n!}+\ldots,$$

причем ряд этот сходится при всех значениях t.

Вторая теорема разложения позволяет найти оригинал для изображения, являющегося дробно-рациональной функцией от p. Эта теорема определяет необходимое и достаточное условие рациональности функции $F(p)$.

Теорема. Для того, чтобы изображение было рациональной функцией, необходимо и достаточно, чтобы оригинал представлял линейную комбинацию функций вида $t^m e^{\lambda t}$, где $m \geq 0$, λ — комплексное число.

Рассмотрим методику нахождения начальной функции, изображение которой $F(p)$ является правильной рациональной (алгебраической) дробью от p, а именно

$$F(p)=\frac{\psi_m(p)}{\varphi_n(p)},$$

где $\psi_m(p)$ и $\varphi_n(p)$ — многочлены по степени p, причем $m<n$.

Как известно, всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простых дробей четырех видов:

I. $\dfrac{A}{p-a}$.

II. $\dfrac{A}{(p-a)^k}$, где $k \geq 2$.

III. $\dfrac{Ap+B}{p^2+\alpha p+\beta}$, где $p^2+\alpha p+\beta$ — квадратный трехчлен с корнями, т.к. его дискриминант отрицательный.

IV. $\dfrac{Ap+B}{(p^2+\alpha p+\beta)^k}$, где $k \geq 2$, корни знаменателя комплексные.

Для дробей I и II видов начальные функции непосредственно находятся из таблицы 1, а именно

$$\frac{A}{p-a} \risingdotseq Ae^{at},$$

$$\frac{A}{(p-a)^k} \risingdotseq A\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{at}$$

Дробь III вида требует предварительных преобразований, связанных с выделением полного квадрата в знаменателе, после чего также используется табл. 1 для нахождения оригинала.

Преобразование дробей IV вида сопряжено с большими вычислениями.

Процесс разложения правильной рациональной дроби на простые (элементарные) проводится по известной схеме интегрирования алгебраических дробей.

Рассмотрим следующие примеры на отыскание оригинала по изображению.

Пример 1. Пользуясь таблицей изображений и теоремой запаздывания, найти оригиналы $f(t)$ для изображений:

1) $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$;

2) $F(p)=\dfrac{1}{p+3}+\dfrac{e^{-2p}}{p}$;

3) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+4}-\dfrac{2pe^{-2p}}{p^2-4}+\dfrac{e^{-3p}}{p^2-16}$.

Решение. 1) Рассмотрим изображение

$$F_1(p)=\frac{1}{(p+1)^2}.$$

По табл. 1 этому изображению соответствует оригинал $f_1(t)=te^{-t}$. Тогда по теореме запаздывания изображению $F(p)=e^{-3p}\,F_1(p)$ соответствует оригинал $f(t)=f_1(t-3)=(t-3)e^{(t-3)}$, $t\geq 3$,

или $f(t)=\eta(t-3)(t-3)e^{(t-3)}$.

2) Представим $F(p)$ в виде $F(p)=F_1(p)+F_2(p)$,

где $F_1(p)=\dfrac{1}{p+3}$ и $F_2(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p}$.

Очевидно, что $F_1(p)\risingdotseq e^{-3t}$, а $F_2(p)\risingdotseq \eta(t-2)$.

Тогда $F(p)\risingdotseq e^{-3t}+\eta(t-2)$, или $f(t)=\begin{cases} e^{-3t}, & 0\leq t<2 \\ e^{-3t}+1, & t\geq 2 \end{cases}$.

3) Для каждого из трех слагаемых найдем оригинал, пользуясь табл. 1.

$$\frac{p}{p^2+4}\risingdotseq\cos 2t,\quad \frac{2pe^{-2p}}{p^2-4}\risingdotseq 2ch2(t-2)$$

$$\frac{e^{-3p}}{p^2-16}=\frac{1}{4}\frac{4}{p^2-16}e^{-3p}\risingdotseq\frac{1}{4}sh4(t-3).$$

Запишем сумму оригиналов используя функцию Хевисайда $\eta(t)$, а именно $F(p)\risingdotseq\cos 2t-2\eta(t-2)ch2(t-2)+\dfrac{1}{4}\eta(t-3)sh4(t-3)$.

Функция Хевисайда определяет тот момент, начиная с которого появляется соответствующее слагаемое в записи оригинала. Полученный оригинал можно записать так:

$$f(t)=\begin{cases} \cos 2t, & 0\leq t<2 \\ \cos 2t-2ch2(t-2), & 2\leq t<3 \\ \cos 2t-2ch2(t-2)+\dfrac{1}{4}sh4(t-3), & t\geq 3 \end{cases}.$$

Пример 2. Пользуясь первой теоремой разложения, найти оригиналы для заданных функций:

$$1)\ F(p)=\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p},$$

$$2)\ F(p)=\frac{1}{p}e^{\frac{1}{p^3}}.$$

Решение. 1) Разложение $F(p)$ в окрестности точки $p=\infty$ в ряд по степеням $\frac{1}{p}$ имеет вид:

$$F(p)=\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{2!\,p^2}+\frac{1}{4!\,p^4}-\frac{1}{6!\,p^6}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{2!\,p^3}+\frac{1}{4!\,p^5}-\frac{1}{6!\,p^7}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{2n+1}(2n)!}$$

Тогда по первой теореме разложения оригиналом для $F(p)$ является функция

$$f(t)=1-\frac{t^2}{(2!)^2}+\frac{t^4}{(4!)^2}-\frac{t^6}{(6!)^2}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n!)^2}.$$

Разложение $F(p)$ в окрестности точки $p=\infty$ в ряд по степеням $\frac{1}{p}$ имеет вид:

$$F(p)=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^3}+\frac{1}{2!\,p^6}-\frac{1}{3!\,p^9}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^4}+\frac{1}{2!\,p^7}+\ldots\frac{1}{3!\,p^{10}}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n)!\,p^{3n+1}}.$$

Тогда по первой теореме разложения оригинал $f(t)$ имеет вид:

$$f(t)=1+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^6}{2!6!}+\frac{t^9}{3!9!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{3n}}{n!(3n)!}.$$

Пример 3. Найти оригиналы для заданных функций $F(p)$, пользуясь второй теоремой разложения.

1) $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2+p-2}$; 2) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2-4p+5}$;

3) $F(p)=\dfrac{p^2+p+1}{p(p+1)^2}$; 4) $F(p)=\dfrac{4p^2-9p+4}{p^3-3p^2+2p}$.

Решение. 1) $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2+p-2}$ — правильная рациональная дробь, знаменатель которой раскладывается на множители $p^2+p-2=(p-1)(p+2)$.

Следовательно, дробь раскладывается на сумму простых дробей I вида, а именно

$$\frac{2p+1}{p^2+p-2}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+2},$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Их можно вычислить путем приведения дробей правой части к общему знаменателю

$$\frac{2p+1}{p^2+p-2}=\frac{A\big(p+2\big)+B(p-1)}{(p-1)(p+2)}.$$

Отсюда следует тождественное равенство числителей, а именно

$$2p+1=A(p+2)+B(p-1).$$

Подставив $p=-2$, получим $B=1$, а подставив $p=1$, получим $A=1$. Следовательно,

$$\frac{2p+1}{p^2+p-2}=\frac{A\big(p+2\big)+B(p-1)}{(p-1)(p+2)}.$$

2) $F\big(p\big)=\dfrac{p+1}{p^2-4p+5}$ относится к простым дробям III вида.

Выделим в знаменателе полный квадрат, а именно $p^2-4p+5=(p-2)^2+1$ и представим дробь в виде суммы двух дробей, оригиналы которых известны:

$$\frac{p+1}{p^2-4p+5}=\frac{p+1}{(p-2)^2+1}=\frac{\big(p-2\big)+3}{(p-2)^2+1}=\frac{p-2}{(p-2)^2+1}+\frac{3}{(p-2)^2+1}.$$

По таблице 1 имеем

$$\frac{p-2}{(p-2)^2+1}\risingdotseq e^{2t}\cos t,\frac{3}{\big(p-2\big)^2+1}=3\frac{1}{\big(p-2\big)^2+1}\risingdotseq 3e^{2t}\sin t.$$

Следовательно, $\dfrac{p+1}{p^2-4p+5}\risingdotseq e^{2t}\cos t+3e^{2t}\sin t$.

3) Разложение $\dfrac{p^2+p+1}{p(p+1)^2}$ на простейшие дроби имеет вид:

$$\frac{p^2+p+1}{p(p+1)^2}.$$

Приводя правую часть равенства к общему знаменателю, получим

$$p^2+p+1=A(p+1)^2+Bp(p+1)+Cp.$$

Подставив $p=0$, получим $A=1$, а подставив $p=-1$, получим $C=-1$.

Чтобы найти B, достаточно подставить любое значение $p\neq 0$ и $p\neq -1$.

Пусть $p=1$, тогда $3=4A+2B+C$.

Подставив в это равенство $A=1$ и $C=-1$, получим $B=0$.

Следовательно,

$$\frac{p^2+p+1}{p(p+1)^2}=\frac{1}{p}-\frac{1}{(p+1)^2}\risingdotseq 1-te^{-t}.$$

4) Разложим p^3-3p^2+2p на множители

$$p^3-3p^2+2p=p\left(p^2-3p+2\right)=p\left(p-1\right)\left(p-2\right).$$

Тогда

$$F\left(p\right)=\frac{4p^2-9p+4}{p^3-3p^2+2p}=\frac{4p^2-9p+4}{p(p-1)(p-2)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-2}.$$

Действуя по аналогии с 1) и 3), имеем равенство

$$4p^2-9p+4=A\left(p-1\right)\left(p-2\right)+Bp\left(p-2\right)+Cp(p-1).$$

Подставив последовательно $p=0$, $p=1$ и $p=2$, получим $A=2$, $B=1$, $C=1$.

Тогда

$$\frac{2}{p}+\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p-2}\risingdotseq 2+e^t+te^{2t}.$$

Пример 4. Найти оригинал изображения

$$F\left(p\right)=\frac{1}{p(1+p^4)}.$$

Решение. Хотя изображение представляет рациональную дробь, но разложение ее на простые дроби достаточно трудоемко. В данном случае для получения оригинала используем первую теорему разложения, а именно

$$F\left(p\right)=\frac{1}{p(1+p^4)}=\frac{1}{p^5}\frac{1}{1+\dfrac{1}{p^4}}=\frac{1}{p^5}\left(1-\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^8}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{p^5}-\frac{1}{p^9}+\frac{1}{p^{13}}-\frac{1}{p^{17}}+\ldots$$

Этот ряд сходится, если $|p|>1$.
Тогда

$$f(t)=\frac{t^4}{4!}-\frac{t^8}{8!}+\frac{t^{12}}{12!}-\frac{t^{16}}{16!}+\dots$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти оригиналы для заданных изображений

1. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{(p-1)^2}$;

2. $F(p)=\dfrac{1}{p-2}+\dfrac{e^{-3p}}{p}$;

3. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+9}-\dfrac{e^{-3p}p}{p^2+4}$;

4. $F(p)=\dfrac{1}{p^2}\cos\dfrac{1}{p}$;

5. $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{\frac{1}{p^2}}$;

6. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-1)}$;

7. $F(p)=\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{e^{-p}}{(p+1)^2}+\dfrac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$;

8. $F(p)=\dfrac{6}{p^3-1}$;

9. $F(p)=\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{e^{-p}}{p^2+1}+\dfrac{e^{-2p}p}{p^2+1}$;

10. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$;

11. $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)^2}$;

12. $F(p)=\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$;

13. $F(p)=\dfrac{3p^2-2p+2}{(p-2)(p^2+1)}$;

14. $F(p)=\dfrac{4p^2+3p+2}{p^2(p+1)}$;

15. $F(p)=\dfrac{2p^2+2p+12}{(p+2)(p^2+4)}$;

16. $F(p)=\dfrac{p^2+4p-1}{(p+2)(p^2+1)}$.

6. Свертка функций

Сверткой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция, обозначаемая $f_1 \cdot f_2$ и определяемая равенством

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

Интеграл, определяющий свертку, не меняет значения от перестановки функций f_1 и f_2. Отметим, что если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — оригиналы, то $f_1 \cdot f_2$ — тоже оригинал.

Имеет место теорема о свертке оригиналов: при свертке оригиналов изображения перемножаются, т.е. если $f_1(t) \fallingdotseq F_1(p)$ и

$$f_2(t) \fallingdotseq F_2(p), \text{ то } (f_1 * f_2)(t) \fallingdotseq F_1(p)F_2(p).$$

Пример 1. Найти свертку функций t и $\cos t$ а так же её изображение.

Решение. Вычислим

$$\int_0^t \tau\cos(t-\tau)\,d\tau = -\tau\sin(t-\tau)\Big|_0^t + \int_0^t \sin(t-\tau)\,d\tau = \cos(t-\tau)\Big|_0^t = 1-\cos t.$$

Следовательно, $t * \cos t = 1 - \cos t$.

По теореме о свертке оригиналов (2)

$$t * \cos t \fallingdotseq \frac{1}{p^2}\frac{p}{1+p^2} = \frac{1}{(1+p^2)p}.$$

Пример 2. Пользуясь теоремой о свертке, найти оригинал для

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)^2}.$$

Решение. Изображение $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$ представляет рациональную дробь, разложение которой на простейшие будет содержать дробь IV вида и непосредственное вычисления оригинала является трудоёмким процессом. Применим к заданному изображению теорему о свертке,представив $F(p)$ в виде $F(p) = F_1(p)F_2(p) = \dfrac{p}{p^2+1}\dfrac{p}{p^2+1}$.

Так как $\dfrac{p}{p^2+1} \fallingdotseq \cos t$, то

$$\frac{p}{p^2+1}\frac{p}{p^2+1} \fallingdotseq \int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\cos t + \cos(2\tau - t)\right]d\tau =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\tau\cos t + \frac{1}{4}\sin(2\tau - t)\right)\Big|_0^t = \frac{1}{2}\left[t\cos t + \sin t\right].$$

Пример 3. Найти изображение функции

$$\int_0^t \tau e^{\tau} \cos 2\left(t-\tau\right) d\tau.$$

Решение. Этот интеграл является сверткой функций $f(t)=te^t$ и f_2(t)=cos$2t$.

Так как $f_1\left(t\right) \risingdotseq \dfrac{1}{\left(p-1\right)^2} = F_1\left(p\right)$ и $f_2\left(t\right) \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+4} = F_2(p)$, то по теореме о свертке функций

$$\int_0^t \tau e^{\tau} \cos 2(t-\tau) d\tau \risingdotseq F_1(p)\, F_2(p) = \frac{1}{(p-1)^2}\ \frac{p}{p^2+4}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображение, используя теорему о свертке функций.

1. $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)e^{2\tau} d\tau.$
2. $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{sh}\tau\, d\tau.$
3. $\displaystyle\int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau)\, d\tau.$
4. $\displaystyle\int_0^t \cos\tau \sin 2(t-\tau)\, d\tau.$

Найти оригинал, используя теорему о свертке функций.

5. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+4)^2}.$
6. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)(p+1}$
7. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+16)^2}.$
8. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)(p-1}$

7. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} +_{\dots} + a_n y = f(t), \qquad (7.1)$$

где $f(t)$ является оригиналом, a_1, a_2.... a_n — заданные коэффициенты.

Тогда решение $y(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=y_0, y'(0)=y_0',\dots y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}$, (7.2)
так же является оригиналом.

Применяя к обеим частям уравнения (7. 1) преобразование Лапласа, перейдем к так называемому изображающему уравнению вида:

$$(p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\dots+a_n)Y(p)+Q(p)=F(p), \tag{7.3}$$

где $Y(p)$ — изображение искомого решения $y(t)$, удовлетворяющего начальным условиям (7.2), $Q(p)$ — многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных условий и который тождественно равен нулю, если начальные условия нулевые, $F(p)$ — изображение функции $f(t)$.

Из уравнения (7.3) находится изображение

$$Y(p)=\frac{F(p)-Q(p)}{L(p)}, \tag{7.4}$$

где $L(p)=p^n+a_1p^{(n-1)}+a_2p^{(n-2)}+\ldots+a_n$ — характеристический многочлен исходного дифференциального уравнения. По изображению (7.4) находят оригинал $y(t)$.

Заметим, что при произвольных начальных условиях $y_0, y_0',\dots y_0^{(n-1)}$ найденное решение $y(t, y_0, y_0',\dots y_0^{(n-1)})$ будет общим решением уравнение (7.1).

Пример 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений

$$1)\ y''-4y'+4y=e^{2t},\quad 2)\ y''+9y=\cos 3t$$

Решение. 1) Так как правая часть уравнения является оригиналом, то применим к обеим частям уравнения преобразования Лапласа.

Пусть $y(t)\doteqdot Y(p)$, тогда $y'(t)\doteqdot pY(p)-y(0)$,

$$y''(t)\doteqdot p^2Y(p)-py(0)-y'(0) \text{ и } e^{2t}\doteqdot\frac{1}{p-2}.$$

Обозначив $y(0)=y_0$ и $y'(0)=y_0'$, запишем изображающее уравнение в виде

$$(p^2-4p+4)Yp-(p+4)y_0-y_0'=\frac{1}{p-2}.$$

Решив его относительно $Y(p)$, получим

$$Y(p)=\frac{1}{(p-2)^3}+\frac{p+4}{(p-2)^2}y_0+\frac{y_0'}{(p-2)^2}.$$

Для отыскания оригинала представим $Y(p)$ в виде

$$Y(p)=\frac{1}{(p-2)^3}+\frac{(p-2)+6}{(p-2)^2}y_0+\frac{y_0'}{(p-2)^2}=\frac{1}{(p-2)^3}+\frac{y_0}{p-2}+\frac{6y_0+y_0'}{(p-2)^2}.$$

Пользуясь таблицей изображений, найдем $y(t)$:

$$y(t)=\frac{1}{2}t^2e^{2t}+y_0e^{2t}+\left(6y_0+y_0'\right)te^{2t}.$$

Обозначив $y_0=C_1$, $6y_0+y_0'=C_2$, запишем общее решение в виде

$$y(t)=e^{2t}\left(\frac{t^2}{2}+C_1+C_2t\right).$$

2) Переходим к изображениям в заданном уравнении.

$$p^2Y(p)-py_0-y_0'+9Y(p)=\frac{p}{p^2+9} \text{ или } (p^2+9)Y(p)-py_0-y_0'=\frac{p}{p^2+9}.$$

Тогда $Y(p)=\dfrac{p}{p^2+9}y_0+\dfrac{1}{p^2+9}y_0'+\dfrac{p}{(p^2+9)^2}$, (7.5)

где $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0'$, $Y(p)\risingdotseq y(t)$.

Найдем оригиналы для каждого слагаемого правой части равенства (7.5).

$$\frac{p}{p^2+9}y_0\risingdotseq y_0\cos 3t,\quad \frac{1}{p^2+9}y_0'=\frac{3}{p^2+9}\frac{y_0'}{3}\risingdotseq\frac{1}{3}y_0'\sin 3t$$

$$\frac{p}{(p^2+9)^2}=\frac{1}{3}\frac{p}{p^2+9}\frac{3}{p^2+9}=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^t\cos 3\tau\sin(3t-3\tau)d\tau=\frac{1}{6}\int_0^t(\sin 3t+\sin(3t--3\tau))d\tau=$$

$$=\frac{1}{6}\sin 3t\ \tau\,|_0^t+\frac{1}{36}\cos(3t-6\tau)|_0^t=\frac{1}{6}t\sin 3t\ .$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y(t)=y_0\cos 3t+\frac{1}{3}y_0'\sin 3t+\frac{1}{6}t\sin 3t,$$

или,обозначив $C_1=y_0, C_2=\dfrac{1}{3}y_0'$, запишем общее решение в стандартном виде $y(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\dfrac{1}{6}t\sin 3t$.

Пример 2. Решить задачу Коши.

1) $y'''+y=0,\ \ y(0)=0,\quad y'(0)=-1,\ y''(0)=2.$

2) $y''-9y=sht,\ y(0)=-1,\ y'(0)=3.$

3) $y'''+3y''+3y'+y=te^{-t},\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$

Решение. 1) Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p)$,

$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - y'(0) = p^2Y(p) + 1$, $y'''(t) \risingdotseq p^3Y(p) + p - 2$.

Тогда изображающее уравнение имеет вид $p^3Y(p) + p - 2 + Y(p) = 0$.

Откуда $Y(p) = \dfrac{2-p}{p^3+1}$.

В результате разложения дроби на простейшие получим

$$\frac{2-p}{(p+1)(p^2-p+1)} = \frac{1}{p+1} + \frac{1-p}{p^2-p+1} = \frac{1}{p+1} - \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{p+1} - \frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Сумма оригиналов изображений правой части полученного разложения и будет решением задачи Коши, т.е.

$$y(t) = e^{-t} + e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2} - \cos\frac{t\sqrt{3}}{2}\right).$$

2) $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) + 1$, $y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) + p - 3$.

Тогда изображающее уравнение принимает вид

$$(p^2-9)Y(p) + p - 3 = \frac{1}{p^2-1}$$

и

$$Y(p) = \frac{3-p}{p^2-9} + \frac{1}{(p^2-1)(p^2-9)} = -\frac{1}{p+3} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{p^2-1} - \frac{3-p}{p^2-9}\right).$$

Таким образом, $y(t) = -e^{-3t} - \dfrac{1}{8}sht + \dfrac{1}{24}sh3t$.

3) Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $y'(t) \risingdotseq pY(p)$, $y''(t) \risingdotseq p^2Y(p)$, $y'''(t) \risingdotseq p^3Y(p)$, $te^{-t} \risingdotseq \dfrac{1}{(p+1)^2}$. Тогда изображающее уравнение имеет вид

$$\left(\mathrm{p}^3 + 3\mathrm{p}^2 + 3\mathrm{p} + 1\right)\mathrm{Y}(\mathrm{p}) = \frac{1}{(\mathrm{p}+1)^2} \, u \, \mathrm{Y}(\mathrm{p}) = \frac{1}{(\mathrm{p}+1)^5} \risingdotseq \frac{\mathrm{t}^4}{4!}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}.$$

Таким образом, $y(t)=\frac{t^4}{4!}e^{-t}$.

Пример 3. Найти при нулевых начальных условиях решение уравнения

$$y'' + y = f(t), \text{ где } f(t)=\begin{cases} \cos t & \text{при} 0 \le t < \pi \\ 0 & \text{при } t \ge \pi \end{cases}.$$

Решение. Запишем $f(t)$ с помощью единичной функции Хевисайда:

$$f(t)=\cos t - \eta(t-\pi)\cos t.$$

Используя теорему запаздывания, найдем изображение $F(p) \risingdotseq f(t)$, а именно

$$F(p)=\frac{p}{p^2+1}\left(1-e^{-\pi p}\right).$$

Так как начальные условия нулевые, то применив преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, получим

$$(p^2+1)Y(p)=\frac{p}{p^2+1}\left(1-e^{-\pi p}\right),$$

из которого следует, что $Y(p)=\frac{p}{(p^2+1)^2}\left(1-e^{-\pi p}\right)$.

Применив теорему свертывания к изображению

$$\frac{p}{(p^2+1)^2}=\frac{p}{p^2+1}\,\frac{p}{p^2+1},$$

получим

$$\frac{p}{p^2+1}\,\frac{p}{p^2+1} \risingdotseq \int_0^t \cos\tau \sin(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}t\sin t.$$

Тогда по теореме запаздывания искомое решение имеет вид:

$$\frac{p}{p^2+1}\,\frac{p}{p^2+1} \risingdotseq \int_0^t \cos\tau \sin(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}t\sin t.$$

По аналогичной схеме решаются системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В результате применения преобразования Лапласа к системе получают линейную алгебраическую систему для изображения искомых функций.

Пример 4. Найти решение системы

$$\begin{cases} y' + 4y + 4z = 0 \\ z' + 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

при начальных условиях $y(0)=3$, $z(0)=15$.

Решение. Пусть $Y(p) \risingdotseq y(t)$, $Z(p) \risingdotseq z(t)$. Применим преобразование Лапласа к системе с учетом того, что $y'(p) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) - 3$ $z'(t) \risingdotseq pZ(p) - z(0) = pZ(p) - 15$.

Тогда система для изображений имеет вид

$$\begin{cases} Y(p+4) + 4Z = 3 \\ 2Y + (p+6)Z = 15. \end{cases}$$

Решая её по правилу Крамера, находим:

$$Y(p) = \frac{3p-42}{p^2+10p+16} = \frac{3p-42}{(p+2)(p+8)} = -\frac{8}{p+2} + \frac{11}{p+8}$$

$$Z(p) = \frac{15p+54}{(p+2)(p+8)} = \frac{4}{p+2} + \frac{11}{p+8}.$$

Следовательно, решение задачи Коши данной системы имеет вид

$$y(t) = -8e^{-2t} + 11e^{-8t}, z(t) = 4e^{-2t} + 11e^{-8t}.$$

Пример 5. Решить систему уравнений при заданных начальных условиях

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p), y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогда $x'(t) \risingdotseq pX - 1$, $y'(t) \risingdotseq pY - 1$ и, применив к исходной системе преобразование Лапласа, получим линейную систему уравнений для изображений $X(p)$ и $Y(p)$

$$\begin{cases} X(p-3) - 4Y = 1 \\ -4X + (3+p)Y = 1. \end{cases}$$

Решая её по правилу Крамера, получим

$$X = \frac{p+7}{p^2-25} = \frac{6}{5}\frac{1}{p-5} - \frac{1}{5}\frac{1}{p+5}, \; Y = \frac{3}{5}\frac{1}{p-5} + \frac{2}{5}\frac{1}{p+5}.$$

Тогда оригиналы $x(t)$ и $y(t)$ имеют вид

$$x(t)=\frac{6}{5}e^{5t}-\frac{1}{5}e^{-5t},\ y(t)=\frac{3}{5}e^{5t}+\frac{2}{5}e^{-5t}.$$

Пример 6. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} y'' + z' = 1 \\ z'' - y' = 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть $y(t)$ и $z(t)$ — общее решение и $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $z(t) \risingdotseq Z(p)$.

Тогда

$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y_0$, $y'' \risingdotseq p^2Y(p) - py_0 - y_0'$, $z'(t) \risingdotseq pZ(p) - z_0$,

$z''(t) \risingdotseq p^2Z(p) - pz_0 - z_0'$, где $y_0 = y(0)$, $y_0' = y'(0)$, $z_0 = z(0)$,

$z_0' = z'(0)$.

Применив преобразование Лапласа к исходной системе, получим линейную систему для изображений вида

$$\begin{cases} p^2Y + pZ = py_0 + y_0' + z_0 + \dfrac{1}{p} \\ -pY + p^2Z = pz_0 + z_0' - y_0. \end{cases}$$

Неизвестные изображения $Y(p)$ и $Z(p)$ находим методом исключения неизвестных. В результате получим

$$Y(p)=\frac{p}{p^2+1}y_0+\frac{y_0'}{p^2+1}+\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\right)\left(1-z_0'+y_0\right),$$

$$Z(p)=\frac{p}{p^2+1}z_0+\frac{z_0'}{1+p^2}+\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\right)\left(y_0'+z_0\right)+\frac{1}{p^2}-\frac{p}{p^2+1}$$

или

$$Y(p)=\frac{y_0'}{p^2+1}+\frac{z_0'p}{p^2+1}+\frac{1}{p}\left(1-z_0'+y_0\right)-\frac{p}{p^2+1},$$

$$Z(p)=\frac{z_0'}{p^2+1}z_0-y_0'\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p}\left(y_0'+z_0\right)+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}.$$

Тогда оригиналы $y(t)$ и $z(t)$ имеют вид

$$y(t) = y_0' \sin t + z_0' \cos t + 1 - z_0' + y_0 - \cos t,$$

$$z(t) = z_0' \sin t - y_0' \cos t + (y_0' + z_0) + t - \sin t.$$

Обозначим $y_0' = c_1, z_0' = c_2, 1 - z_0' + y_0 = c_3, z_0 + y' = c_4$.
Тогда общее решение системы запишем в виде

$$y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 - \cos t,$$

$$z(t) = c_2 \sin t - c_1 \cos t + c_4 + t - \sin t.$$

Заметим, что $y = -\cos t$, $z = t - \sin t$ — частное решение системы.

Задачи для самостоятельного решения

Решите задачу Коши.

1. $y'' + 4y = t - 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$
2. $y'' + 4y' = e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
3. $y'' + 4y' - 5y = e^{2t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
4. $y'' - 5y' + 6y = e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
5. $y'' - y' - 6y = e^t + 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
6. $y''' + y' = e^t,\ y(0) = y''(0) = 0,\ y'(0) = 2.$
7. $y''' + 3y'' - 4y = 0,\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 2.$

Решите систему уравнений при заданных начальных условиях.

8.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x + 5y \end{cases}, \qquad x(0) = y(0) = 1\,.$$

9.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 7y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 5y \end{cases}, \qquad x(0) = y(0) = 2\,.$$

Найти общее решение системы.

10.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^{3t} - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2e^{3t} - x \,. \end{cases}$$

Решить систему уравнения при заданных начальных условиях.

11.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^{t} \end{cases}, \qquad x(0) = 1\,, \qquad y(0) = 0\,.$$

8. Интеграл Дюамеля и его приложение

Пусть $f(t)$ — непрерывный на $[0, +\infty)$ оригинал, $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемый оригинал на этом же множестве. Как известно из теоремы о свертке, если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\varphi(t) \risingdotseq (p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq F(p)(p). \tag{8.1}$$

В результате дифференцирования левой части соотношения (1) по параметру t и на основании свойства дифференцирования оригинала получаем формулу Дюамеля или так называемый интеграл Дюамеля

$$f(t)\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq pF(p)\,(p)$$

или (8.2)

$$f(0)\varphi(t) + \int_0^t f'(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq pF(p)(p).$$

С помощью интеграла Дюамеля находят решение линейных дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями не находя изображения правой части уравнения.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$L(y(t)) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t) \tag{8.3}$$

при нулевых начальных условиях

$$y(0)=y'(0)=_{\dots}\ y^{(n-1)}(0)=0, \tag{8.4}$$

где a_1, a_2, ... a_n — заданные константы и $f(t)$ — заданная функция — оригинал.

Предположим, что известно решение уравнения $L(y(t))=1$ (с той же левой частью и при начальных условиях (8.4)). Обозначим его $y_1(t)$ и построим уравнение для изображения $Y_1(p)\risingdotseq y_1(t)$. Это уравнение имеет вид $p^nY_1+a_1p^{(n-1)}Y_1+_{\dots}+a_nY_1=\dfrac{1}{p}$ или $L(p)Y_1(p)=\dfrac{1}{p}$,
где $L(p)=p^n+a_1p^{(n-1)}+_{\dots}+a_n$ — характеристический многочлен исходного уравнения. Отсюда $L(p)=\dfrac{1}{pY_1}$.

Исходному уравнению $L(y(t))=f(t)$ соответствует изображающее уравнение вида $L(p)Y(p)=F(p)$, где $Y(p)\risingdotseq y(t)$ и $F(p)\risingdotseq f(t)$.

Тогда

$$Y(p)=\frac{F(p)}{L(p)}=pY_1(p)F(p).$$

Применив интеграл Дюамеля к последнему равенству, получим

$$y(t)=y_1(0)f(t)+\int_0^t y_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau=\int_0^t y_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau, \tag{8.5}$$

так как $y_1(0)=0$, или $y(t)=f(0)y_1(t)+\int_0^t f'(\tau)y_1(t-\tau)d\tau$. (8.6)

Этот метод решения применяют в тех случаях, когда возникают трудности при нахождении изображения $F(p)$ правой части $f(t)$ линейного уравнения (8.3), а также при необходимости многократного решения уравнения (8.3) для различных функций $f(t)$.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$y'-y=\frac{1}{e^t+3},\ y(0)=0.$$

Решение. Рассмотрим уравнение $y'-y=1$, $y(0)=0$. Пусть $y_1(t)$ — его решение и $y_1(t)\risingdotseq Y_1(p)$. Тогда изображающее уравнение имеет вид

$$pY_1-Y_1=\frac{1}{p}\ \text{и}\ Y_1(p)=\frac{1}{p(p-1)}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\ \text{и}\ y_1(t)=e^t-1.$$

По формуле (8.5) находим $y(t)$ — решение заданного уравнения.

$$y(t)=\int_0^t \frac{e^{\tau}}{e^{t-\tau}+3}d\tau=\int_0^t \frac{e^{\tau}de^{\tau}}{e^{t}+3e^{\tau}}d\tau=\frac{1}{3}\int_0^t \frac{3e^{\tau}+e^{t}-e^{t}}{e^{t}+3e^{\tau}}de^{\tau}=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^t de^{\tau}-\frac{e^{t}}{3}\int_0^t \frac{de^{\tau}}{e^{t}+3e^{\tau}}=\frac{1}{3}\left(e^{t}-1\right)-\frac{te^{t}}{9}+\frac{e^{t}}{9}\ln\frac{e^{t}+3}{4}.$$

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения

$$y''-2y'+y=\frac{e^{t}}{t+1},$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=y'(0)=0$.

Решение. Так как функция $\frac{e^{t}}{t+1}$, относится к оригиналам, для которых отыскание изображения достаточно затруднительно, то применим к решению исходного уравнения метод Дюамеля. С этой целью рассмотрим уравнение вида $y''-2y'+y=1$, $y(0)=y'(0)=0$.

Пусть $y_1(t)$ — его решение и $y_1(t) \risingdotseq Y_1(p)$. Тогда изображающее уравнение принимает вид $Y_1(p)\left(p^2-2p+1\right)=\frac{1}{p}$.

Откуда $Y_1(p)=\frac{1}{p(p-1)^2}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{(p-1)^2}$.

Возвращаясь к оригиналу $y_1(t)$, получим $y_1(t)=1-e^{t}+te^{t}$.

По формуле (8.5) найдем $y(t)$ — решение заданного уравнения

$$y(t)=\int_0^t y_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau=\int_0^t \frac{(t-\tau)e^{t-\tau}e^{\tau}}{\tau+1}d\tau=$$

$$=e^{t}\int_0^t \frac{t-\tau}{\tau+1}d\tau=e^{t}\left(t\ln(t+1)-t+\ln(t+1)\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям $y(0)=y'(0)=0$ (№ 1 – 6).

1. $y''-y'=\frac{1}{1+e^{t}}$. 2. $y''-y'=\frac{1}{ch\ t}$.

3. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{(t+1)^2}$. 4. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{t}}{1+t^2}$.

5. $y'' + y' = \dfrac{e^{t}}{e^{t}+1}$. 6. $y'' + 2y' = \dfrac{e^{t}}{ch\ t}$.

9. Приложения операционного исчисления к решению интегральный и интегро-дифференциальных уравнений

Интегральным уравнением называют уравнение, включающее интегральное преобразование над неизвестной функцией $y(t)$. Если, к тому же, в уравнение входит производная от $y(t)$, то его называют интегро-дифференциальным.

Метод перехода к изображающему уравнению позволяет найти решение линейных интегральных уравнений вида

$$\int_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau = f(t), \tag{9.1}$$

$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau, \tag{9.2}$$

в которых $K(t)$ и $f(t)$ являются заданными функциями-оригиналами, причем $K(t)$ называют ядром интегрального уравнения, $y(t)$ — искомая функция (решение уравнения).

Эти интегральные уравнения являются частным случаем уравнений Вольтерра первого и второго рода, общий вид которых получается, если в уравнениях (9.1) и (9.2) заменить ядро $K(t-\tau)$ некоторой функцией двух аргументов $K(t,\tau)$.

Пример 1. Найти решение уравнения Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau = \sin t$$

Решение. Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Применим преобразование Лапласа к интегральному уравнению. Так как

$$\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{pY(p)}{p^2+1},$$

то изображающее уравнение имеет вид

$$\frac{pY(p)}{p^2+1} = \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

Тогда $Y(p)=\dfrac{2}{p^2+1}$ и $y(t)=2\sin t$ — решение интегрального уравнения.

Пример 2. Решить интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau = y(t)-e^t$$

Решение. Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Применим преобразование Лапласа. Так как левая часть уравнения является сверткой функций $y(t)$ и e^t, то

$$\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{1}{p-1}Y(p)$$

и изображающее уравнение имеет вид

$$\frac{Y}{p-1}=Y-\frac{1}{p-1}.$$

Тогда $Y=\dfrac{1}{p-2}$ и $y(t)=e^{2t}$ — решение исходного уравнения.

Пример 3. Решить интегральное уравнение.

$$y=\int_0^t yd\tau+1$$

Решение. Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Применим преобразование Лапласа. Так как $\int_0^t yd\tau \risingdotseq \dfrac{Y(p)}{p}$, то $Y(p)=\dfrac{Y(p)}{p}+\dfrac{1}{p}$. Тогда $Y(p)=\dfrac{1}{p-1}$ и $y(t)=e^t$ — решение интегрального уравнения.

Пример 4. Найти решение интегро-дифференциального уравнения

$$y''+y=\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

при начальных условиях $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

Решение. Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$.

Тогда

$$y'(t) \risingdotseq pY(p)-y_0=pY(p) \text{ и } y''(t) \risingdotseq p^2Y(p)-y_0'=p^2Y-1,$$

$$\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}Y(p),$$

и изображающее уравнение имеет вид $p^2 Y + Y - 1 = \frac{Y}{p^2+1}$.

Откуда $Y = \frac{p^2+1}{p^4+2p^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2+2}\right]$.

Следовательно, $y(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$ — решение исходного уравнения с заданными начальными условиями.

Задачи для самостоятельного решения

Решить интегральные уравнения.

$$1. \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau = 1 - \cos t$$

$$2. \int_0^t y(\tau)(t-\tau)^2 d\tau = \frac{1}{3}\,t^3$$

$$3. \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = t\cos t$$

$$4. \int_0^t y(\tau)ch(t-\tau)d\tau = cht - \cos t$$

Решить интегро-дифференциальные уравнения.

$$5. \int_0^t e^{t-\tau}\sin(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = y'' - y' + e^t(1-\cos t)$$

при начальных условиях $y(0) = y'(0) = 1$.

$$6. \int_0^t sh(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = y'' - y' + \frac{1}{2}t\sin t$$

при начальных условиях $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

10. Расчетные задания по теме «Операционное исчисление»

Задача 1. По заданному оригиналу $f(t)$ найти изображение $F(p)$.

1.1 $f(t) = sh2t\cos 3t$

1.2 $f(t) = e^{2t}\sin^2 t$

1.3 $f(t) = ch3t\sin 2t$

1.4 $f(t) = e^{-t}\cos^2 t$

1.5 $f(t) = ch5t\cos 3t$

1.6 $f(t) = t\sin^2 t$

1.7 $f(t) = e^{-t}\sin^2 2t$

1.8 $f(t) = t\cos^2 t$

1.9 $f(t) = t\cdot 2^t$

1.10 $f(t) = \sin t - t\cos t$

1.11 $f(t) = t\sin t - \cos t$

1.12 $f(t) = e^{2t}\cos^2 2t$

1.13 $f(t) = t\sin^2 2t$

1.14 $f(t) = (t+1)\sin 2t$

1.15 $f(t) = (2t-1)\cos 2t$

1.16 $f(t) = (t^2-1)e^{-t}$

1.17 $f(t) = t\ sh3t$

1.18 $f(t) = t\ ch\,4t$

1.19 $f(t) = t\cdot 3^t$

1.20 $f(t) = (t^3+1)e^{2t}$

1.21 $f(t) = ch2t\sin 4t$

1.22 $f(t) = e^{2t}\sin^2 2t$

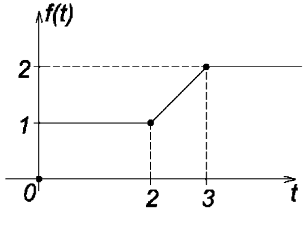
1.23 $f(t) = (3t+1)\sin 2t$

1.24 $f(t) = (t+1)\cos 2t$

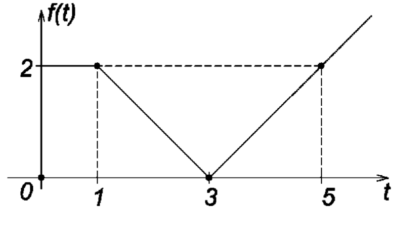
1.25 $f(t) = te^{2t}\sin 2t$

Задача 2. По данному графику оригинала $f(t)$ найти изображения $F(p)$.

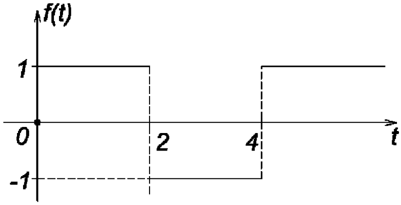
2.1



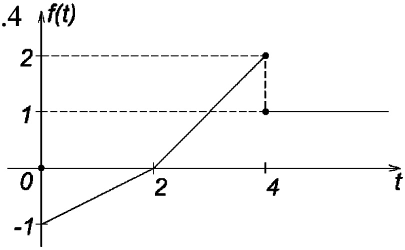
2.2



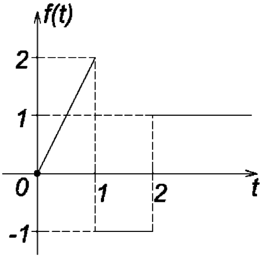
2.3



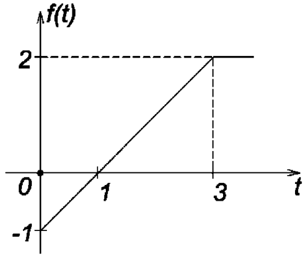
2.4



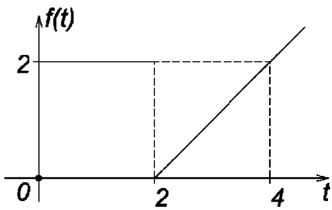
2.5



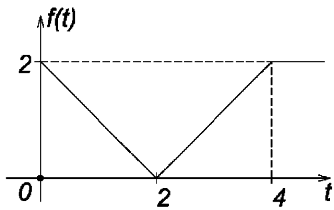
2.6



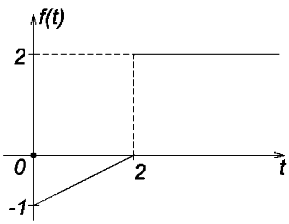
2.7



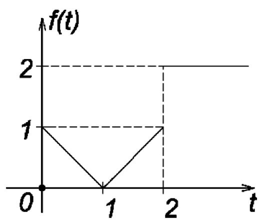
2.8



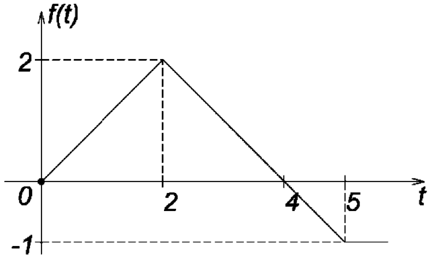
2.9



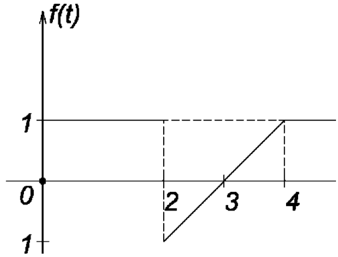
2.10



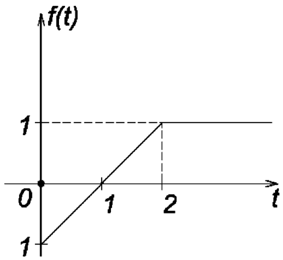
2.11



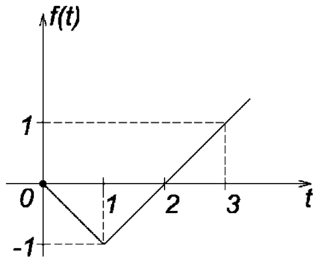
2.12



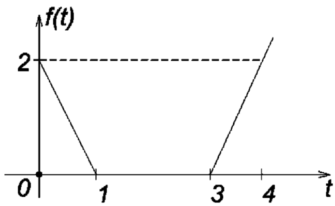
2.13



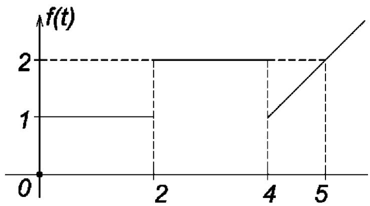
2.14



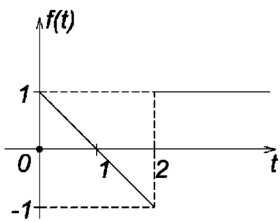
2.15



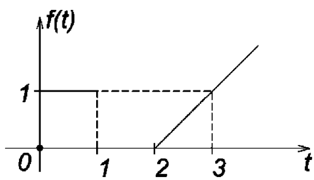
2.16



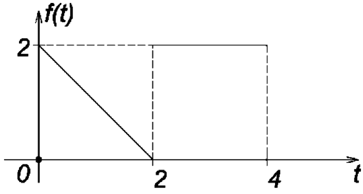
2.17



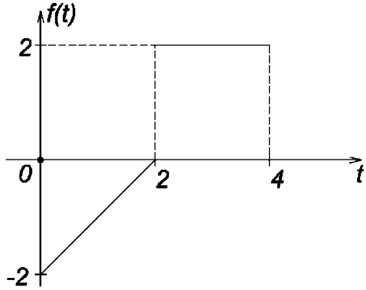
2.18



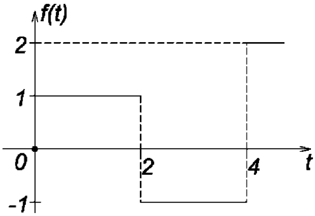
2.19



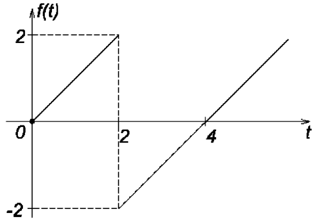
2.20



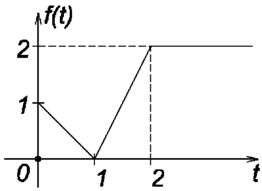
2.21



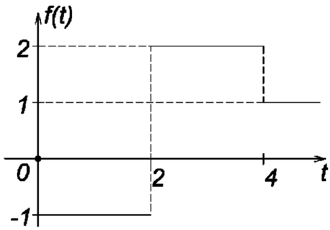
2.22



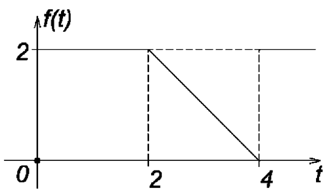
2.23



2.24



2.25



Задача 3. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$.

3.1. $\dfrac{3}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

3.2. $\dfrac{4}{p^2(p^2+1)}$.

3.3. $\dfrac{5p-2}{(p-1)p(p+2)}$.

3.4. $\dfrac{2p}{(p^2+1)(p-1)^2}$.

3.5. $\dfrac{5p-5}{(p+1)(p^2-4p+5)}$.

3.6. $\dfrac{4}{p^2(p^2-4)}$.

3.7. $\dfrac{1}{p+2}+\dfrac{e^{-p}}{p}+\dfrac{e^{-2p}}{p^2+1}$.

3.8. $\dfrac{3p}{(p-1)(p^2+2p+3)}$.

3.9. $\dfrac{p}{p^2+4}+\dfrac{e^{-3p}}{p^2}+\dfrac{e^{-4p}}{p^2+1}$.

3.10. $\dfrac{3p+6}{(p+1)p(p-2)}$.

3.11. $\dfrac{p}{p^2+9}e^{-p}+\dfrac{2pe^{-2p}}{p^2-9}$.

3.12. $\dfrac{p+1}{p^3+p^2+p}$.

3.13. $\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p^3}e^{-p}+\dfrac{1}{p^2+1}e^{-2p}$.

3.14. $\dfrac{1}{p^3-4p^2+3p}$.

3.15. $\dfrac{p+1}{p^3-4p}$.

3.16. $\dfrac{p}{(p^2-4)(p+1)}$.

3.17. $\dfrac{p-1}{p^3-p^2+p}$.

3.18. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{e^{-2p}}{p^2}+\dfrac{e^{-4p}}{p^2-4}$.

3.19. $\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{e^{-p}}{p^3}+\dfrac{e^{-2p}}{p^2+1}$.

3.20. $\dfrac{p+2}{(p-1)(p^2+2p+2)}$.

3.21. $\dfrac{p}{p^3-4p^2+3p}$.

3.22. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{e^{-3p}}{p^2}+\dfrac{e^{-5p}}{p^2-1}$.

3.23. $\dfrac{p+1}{p^3+3p^2-4p}$.

3.24. $\dfrac{1}{p}-\dfrac{e^{-p}}{p^2+1}+\dfrac{e^{-2p}p}{p^2+4}$.

3.25. $\dfrac{4+2p}{(p^2+4)(p-2)}$.

Список литературы

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. — М.: Наука, 1968. — 344 с.

2. *Зорич В.А.* Математический анализ: Учебник. Ч. II. — М.: Наука, 1984. — 640 с.

3. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / Под ред. А.И. Кириллова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 400 с.

4. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу, Т. 3. Функции нескольких переменных: Учебное пособие / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 472 с.

5. *Н.С. Пискунов.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, Т. 2. — М.: Наука, 1985. — 560 с.

6. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. — М.: Айрис-пресс, 2006. — 608 с.

Приложение 1

Для нахождения прямого, обратного преобразований Фурье, а также синус и косинус – преобразований Фурье можно использовать математическую программу Maple.

Прежде всего необходимо загрузить пакет интегральных преобразований, для чего необходимо ввести команду with (inttrans), после чего в окне программы должно появиться:

$[\,addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable\,]$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x \end{cases}$$

Для определения функции f необходимо ввести команду

$$f(x) := \text{piecewise}\,(x \le 1, 0, x \le 2, 1, x > 2, 0),$$

в появившемся диалоговом окне выбрать: remember table assignment и нажать кнопку OK.

Затем ввести команду

$$\text{fourier}\,(f(x), x,),$$

в результате получим

$$\frac{\mathrm{I}e^{-2\mathrm{I}\xi}(-e^{\mathrm{I}\xi}+1)}{\xi},$$

Что отличается от результата полученного в «ручном режиме» лишь множителем 1/(2), что обусловлено соответствующим определением преобразования Фурье используемым в Maple (без этого множителя) см. Maple Help.

Пример 2. Найти косинус — и синус — преобразования Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x \end{cases}$$

Для нахождения косинус — преобразования Фурье необходимо ввести команду:

fouriercos ($f(x)$, x,),

в результате получим

$$-\frac{\sqrt{2}\,(\sin(\xi)-(\sin(\xi))}{\sqrt{\pi\xi}}$$

Для нахождения синус — преобразования Фурье необходимо ввести команду:

fouriersin ($f(x)$, x,),

на выходе будем иметь

$$\frac{\sqrt{2}\,(\cos(\xi)-(\cos(\xi))}{\sqrt{\pi\xi}}$$

Что отличается от результата полученного в «ручном режиме» лишь множителем $1/\sqrt{2\,\pi}$, это обусловлено различием определений косинус и синус — преобразованиями Фурье используемым в Maple см. Maple Help и (получающимся умножением на $1/\sqrt{2\,\pi}$) определении 3.

Пример 7. Найти нормированное преобразование Фурье функции

$$f\left(x\right)=e^{-bx^2},\, b>0.$$

Чтобы найти обратное преобразование Фурье введем команды:

assume ($0<b$)

fourier (exp($-b$*x^2), x,).

Первая из этих команд задает ограничение для $b(b>0)$; вторая позволяет найти нормированное преобразование Фурье заданной функции, умноженное на $\sqrt{2\,\pi}$ (этим множителем отличается приведенное в определении 5 нормированное преобразования Фурье от определенного в Maple преобразование Фурье).

Если применить к полученному результату команду invfourier (обратное преобразование Фурье), т.е. ввести в командную строку

invfourier ($e^{-\frac{1}{4}\frac{\xi^2}{b\sim}}\sqrt{\frac{\pi}{b\sim}}, \xi, x$), с последующим упрощением командой simplify из правого контекстного меню мыши, то получим исходную функцию: e^{-bx^2}.

Также как и при нахождения прямого и обратного преобразования Фурье, для отыскания изображений и восстановления оригинала по изображению можно использовать математическую программу Maxima.

Первоначально загружаем пакет интегральных преобразований, для чего вводим команду with(inttrans). Далее, рассмотрим на примерах.

Пример 2. Найти изображение функции $f(t)=\sin^2 t$.

Достаточно ввести команду laplace(sin(t)^2,t,p) и нажать ENTER. В результате получим , что полностью совпадает с результатом полученным без использования математической программы.

Пример 3. Найти оригиналы для заданных функций $F(p)$:

$$1)\ F(p)=\frac{2p+1}{p^2+p-2};\quad 2)\ F(p)=\frac{p+1}{p^2-4p+5}.$$

Для нахождения оригиналов потребуются соответственно команды: invlaplace((2p+1)/(p^2+p−2), p,t) и invlaplace((p+1)/(p^2−4p+5), p,t).

Результаты применения этих команд совпадают с результатами полученными в ручном режиме.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

I. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ 4
1. Достаточные условия представимости функции интегралом Фурье 8
2. Варианты заданий для расчетно-графических работ 18

II. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА 25
1. Преобразование Лапласа 25
2. Простейшие свойства преобразования Лапласа 26
3. Построение изображений основных элементарных функций 27
4. Примеры на нахождение изображений по заданным оригиналам 30
Задачи для самостоятельного решения 34
5. Отыскание оригинала по изображению 35
Задачи для самостоятельного решения 41
6. Свертка функций 42
Задачи для самостоятельного решения 43
7. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами 43
Задачи для самостоятельного решения 50
8. Интеграл Дюамеля и его приложение 51
Задачи для самостоятельного решения 53
9. Приложения операционного исчисления к решению интегральный и интегро-дифференциальных уравнений 54
Задачи для самостоятельного решения 56
10. Расчетные задания по теме «Операционное исчисление» 57

Список литературы 62

Приложение 1 63

Приложение 2 65

Для заметок

Внутривузовское издание

Подписано в печать 30.10.2017. Гарнитура Таймс
Формат 60×90/16 Бумага офсетная
Объем 4,5 усл. печ. л
Тираж 25 экз. Заказ № 93

Отпечатано в УПП «Репрография» МИИГАиК