Министерство образования и науки
Российской Федерации

Московский государственный университет
геодезии и картографии

# РЯДЫ ФУРЬЕ

Москва
2014

Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный университет
геодезии и картографии

К.И. Лоссов

# Ряды Фурье

Рекомендовано
учебно-методическим объединением вузов
Российской Федерации по образованию
в области геодезии и фотограмметрии
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
120100 — Геодезия и дистанционное зондирование
с присвоением квалификации (степени) бакалавр;
120401 — Прикладная геодезия
с присвоением квалификации (степени) специалист

Москва
2014

УДК 517.37

**Рецензенты:**
профессор **А.Б. Шерешев** (МИИГАиК);
доцент **О.А. Баюк** (Финансовый университет при правительстве РФ)

Составитель: **К.И. Лоссов**
Ряды Фурье: учебное пособие. — М.: МИИГАиК, 2014–41 с.

Учебное пособие написано в соответствии с утвержденной программой Курса «Математика», рекомендовано кафедрой «Высшей математики» и утверждено к изданию редакционно-издательской комиссией геодезического факультета. Содержит краткое теоретическое введение, примеры, а также 30 вариантов для самостоятельного решения.

Электронная версия учебного пособия размещена на сайте библиотеки МИИГАиК http://library.miigaik.ru

## Предисловие

В настоящем учебном пособии мы первоначально рассмотрим общий вид коэффициентов Фурье и ряда Фурье в векторном пространстве со скалярным произведением над полем действительных или комплексных чисел.

Затем детализируем общие понятия, рассмотрев тригонометрический ряд Фурье. Укажем формулы и конкретные примеры вычисления коэффициентов Фурье тригонометрического ряда для функций, заданных на отрезках $[-\pi, \pi]$, $[-l; l]$ и, наконец, на произвольном отрезке $[a, b]$. Также отдельно приведем формулы и примеры для вычисления коэффициентов Фурье для четных и нечетных функций, кроме того, укажем способы продолжения функции, заданной на отрезке $[0; l]$ четным и нечетным способом на отрезок $[-l; l]$, с последующим разложением функции только по косинусам или только по синусам соответственно.

В приложении 1 приведем способ расчета коэффициентов Фурье в математической программе «Maxima».

В приложении 2 рассмотрим разложение в ряд Фурье по некоторым другим ортогональным системам функций.

## Введение

Напомним следующее определение.

*Определение.* Множество $V$ элементов $x, y, z, \ldots$ называется линейным пространством над множеством $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$),если:

a) каждым двум элементам $x$ и $y$ поставлен в соответствие элемент $z$, называемый суммой элементов $x$ и $y$; сумма элементов $x$ и $y$ обозначается через $x+y$;

b) каждому элементу $x$ и каждому числу $\lambda$ из $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) поставлен в соответствие элемент $\lambda \cdot x$ , называемый произведением числа $\lambda$ на элемент x.

Эти операции должны удовлетворять следующим аксиомам.

I. 1) $x+y=y+x$ (коммутативность),

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность).

3) Существует элемент 0 из $V$ , такой, что $x+0=x$ для любого $x$ из $V$. Элемент 0 называется *нулевым элементом*.

4) Для каждого $x$ из $V$ существует элемент, обозначаемый через $-x$, такой, что $x+(x)=0$.

II. 1) $1 \cdot x=x$,

2) $\alpha \cdot (\beta \cdot x)=\alpha \cdot \beta \cdot (x)$.

III. 3) $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$.

Элементы линейного пространства называют векторами.

Если числа $\alpha$, $\beta$, $\lambda$, …, участвующие в определении линейного пространства, вещественны, то пространство называется *вещественным линейным пространством*. Если же эти числа $\alpha$, $\beta$, $\lambda$, … берутся из множества комплексных чисел, то пространство называется *комплексным линейным пространством*.

*Определение. Подпространством* $V'$ пространства $V$ называется совокупность элементов из $V$ таких, что они сами образуют линейное пространство относительно уже введенных в $V$ операций сложения и умножения на число.

*Пример.* Пусть $F[a, b]$ — множество числовых (действительно- или комплекснозначных) функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Это множество является линейным пространством (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, соответственно) по отношению к операциям сложения функций и умножения функции на число.

Множество $C[a, b]$ непрерывных, определенных на отрезке $[a, b]$ функций, очевидно, является подпространством построенного пространства $F[a, b]$.

*Определение.* Пусть $X$ и $Y$ — произвольные множества. Множество

$$X\times Y := \{(x, y) \mid (x\in X) \curlywedge (y\in Y)\},$$

образованное всеми упорядоченными парами $(x, y)$, первый член которых есть элемент из $X$, а второй член — элемент из $Y$, называется *прямым* или *декартовым произведением множеств* $X$ и $Y$.

Поскольку в определении речь идет об упорядоченных парах (x, y), то, вообще говоря, $X\times Y\neq Y\times X$. Равенство имеет место, если $X=Y$. В последнем случае вместо $X\times X$ пишут $X^2$.

Известная всем система декартовых координат на плоскости превращает эту плоскость в прямое произведение двух числовых осей — $\mathbb{R}^2$.

*Определение.* Говорят, что множество $X$ наделено *метрикой* или *структурой метрического пространства*, или что $X$ есть *метрическое пространство*, если указана функция

$$d: X\times X\to\mathbb{R},$$

удовлетворяющая условиям:

a) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ;

b) $d(x_1,x_2) = d(x_2,x_1)$ (симметричность);

c) $d(x_1,x_3) \le d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3)$ (неравенство треугольника), где $x_1$, $x_2$, $x_3$ — произвольные элементы $X$.

Функцию $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$, называют в этом случае *метрикой* или *расстоянием* в $X$.

Таким образом, метрическое пространство есть пара $(X, d)$ состоящая из множества $X$ и заданной на нем метрики.

Элементы множества $X$ в соответствии с геометрической терминологией обычно называют *точками*.

Заметим, что если в неравенстве треугольника c) положить $x_3=x_1$, то с учетом аксиом a) и b) метрики получим, что

$$0\le d(x_1, x_2),$$

то есть расстояние, удовлетворяющее аксиомам a), b), c), неотрицательно.

Рассмотрим следующий пример.

*Пример.* Множество $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке, становится метрическим пространством, если для функций $f$, $g$ из $C[a, b]$ положить

$$d(f,g) = \max_{a\le x\le b}\left|f(x)-g(x)\right|.$$

Аксиомы a), b) метрики, очевидно, выполнены, а неравенство треугольника следует из того, что

$$\left|f(x)-h(x)\right| \le \left|f(x)-g(x)\right| + \left|g(x)-h(x)\right| \le d(f,g)+d(g,h),$$

то есть

$$d(f,h) = \max_{a\le x\le b}\left|f(x)-h(x)\right| \le d(f,g)+d(g,h).$$

Введенную в этом примере метрику называют *равномерной* или *чебышевской метрикой* в $C[a, b]$ . Ее используют тогда, когда желают заменить одну функциюдругой, например, полиномом, по которой можно было бы вычислять значения первой функции с нужной точностью в любой точке $x\in[a,b]$. Величина $d(f, g)$ как раз характеризует точность такого приближенного расчета.

*Определение*. При $\delta>0$ и $a\in X$ множество

$$B(a,\delta) = \{x\in X \,|\, d(a,x)<\delta\}$$

называется *шаром с центром* $a\in X$ *радиуса* $\delta$ или также $\delta$ — *окрестностью точки* $a$.

*Пример*. Единичный шар в $C[a, b]$ с центром в функции, тождественно равной нулю на $[a, b]$ , состоит из тех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ , модуль которых меньше единицы на этом отрезке.

*Определение.* Множество $G \subset X$ называется *открытым в метрическом пространстве* $(X, d)$, если для любой точки $x \in G$ найдется шар $B(x, \delta)$ такой, что $B(x, \delta) \subset G$.

Из этого определения, очевидно, следует, что само $X$ — открытое в $(X, d)$ множество; пустое множество **Ø** также открыто. Легко доказать, что шар $B(x, \delta)$ или его внешность $\{x \in X \mid d(a,x) > \delta\}$ суть открытые множества.

*Определение.* Множество $F \subset X$ называется замкнутым в $(X, d)$, если его дополнение $X \backslash F$ открыто в $(X, d)$.

В частности, отсюда заключаем, что *замкнутый шар*

$$\tilde{B}(a,\delta) = \{x \in X \big| d(a,x) \le r\}$$

является множеством, замкнутым в метрическом пространстве $(X, d)$.

*Утверждение.* a) Объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ множеств любой системы $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ множеств $G_\alpha$, открытых в $X$, является множеством, открытым в $X$.

b) Пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ конечного числа множеств, открытых в $X$, является множеством, открытым в $X$.

a′) Пересечение $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ множеств любой системы $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ множеств $F_\alpha$, замкнутых в $X$, является множеством, замкнутым в $X$.

b′) Объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ конечного числа множеств, замкнутых в $X$, является множеством, замкнутым в $X$.

*Определение.* Открытое в $X$ множество, содержащее точку $x \in X$, называется *окрестностью* этой точки в $X$ .

*Определение.* Точка $x \in X$ по отношению к множеству $E \subset X$ называется *внутренней точкой* $E$ , если она содержится в Е вместе с некоторой своей окрестностью; *внешней точкой* $E$ , если она является внутренней точкой дополнения к $E$ в $X$; *граничной точкой* $E$, если она не является ни внутренней, ни внешней точкой по отношению к $E$ (т.е. если в любой окрестности этой точки имеются как точки, принадлежащие, так и точки, не принадлежащие множеству $E$ ).

*Определение. Точка* $\grave{a} \in X$ называется *предельной* для множества $E \subset X$, если для любой ее окрестности $O$ (а) множество $E \cap O$ (а) бесконечно.

*Определение.* Объединение множества $E$ и всех его предельных точек в $X$ называется *замыканием* множества $E$ в $X$.

Замыкание множества $E \subset X$ обозначают через $\overline{E}$.

*Утверждение.* Множество $F \subset X$ замкнуто в $X$ тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Итак,

$$(F \text{ замкнуто в } X) \Leftrightarrow (\overline{F} = \text{ в } X).$$

Если $(X; d)$ — метрическое пространство, а $E$–подмножество $X$, то, полагая для любой пары точек $x_1$, $x_2$ из $E$ расстояние равным $d(x_1, x_2)$, то есть расстоянию между этими точками в $X$, мы получим метрическое пространство $(E; d)$ , которое по отношению к исходному пространству $(X; d)$ принято называть подпространством.

*Определение.* Метрическое пространство $(X_1; d_1)$ называется п*одпространством метрического пространства* $(X; d)$, если $X_1 \subset X$ и для любой пары точек $a$, $b$ множества $X_1$ справедливо равенство $d_1(a, b)=d(a, b)$.

*Определение.* Последовательность $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ точек метрического пространства $(X; d)$ называется *фундаментальной* последовательностью или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при любых номерах $m$, $n \in \mathbb{N}$, больших, чем $N$, выполняется соотношение $d(x_m, x_n)<\varepsilon$.

*Определение.* Будем говорить, что последовательность $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ точек метрического пространства $(X; d)$ *сходится к точке* $a \in X$ и что $a$ есть *предел* этой последовательности, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(a, x_n) = 0$.

Последовательности, имеющие предел, будем, как и прежде, называть *сходящимися.*

*Определение.* Метрическое пространство $(X; d)$ называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность его точек является сходящейся.

*Пример.* Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел со стандартной метрикой ($d(x, y)=|x-y|$) является полным метрическим пространством.

*Пример.* Если из множества $\mathbb{R}$ удалить, например, число 0, то в стандартной метрике множество $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ уже не будет полным пространством. Действительно, последовательность $x_n=1/\text{n}$, $n \in \mathbb{N}$, его точек фундаментальна, но она не имеет предела в $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

*Пример.* Легко показать, что пространство $C[a, b]$ вещественнозначных непрерывных на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ функций с метрикой

$$d(f,g) = \max_{a \le x \le b} \left| f(x) - g(x) \right|.$$

является полным метрическим пространством.

## Ортогональные системы функций

С точки зрения алгебры, равенство

$$f = \alpha_i f_1 + \ldots + \alpha_n f_n,$$

где $f$, $f_1, \ldots, f_n$ — функции данного класса, $\alpha_i$ — коэффициенты из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, попросту означает, что вектор является линейной комбинацией векторов $f_1, \ldots, f_n$.

В анализе, как правило, приходится рассматривать «бесконечные линейные комбинации» — ряды функций вида

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k .$$

Определение суммы ряда требует, чтобы в рассматриваемом линейном пространстве была задана некоторая метрика, позволяющая судить о стремлении к нулю разности $(f - S_n)$, где $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$.

Основным для классического анализа приемом введения метрики на линейном пространстве является определение в этом пространстве той или иной нормы вектора или того или иного скалярного произведения векторов.

*Определение.* Говорят, что в линейном (над полем комплексных чисел) пространстве $X$ задана эрмитова форма, если задано отображение $<,>: X \times X \to \mathbb{C}$, обладающее свойствами:

a) $<x_1, x_2> = \overline{<x_2, x_1>}$;

b) $<\lambda \cdot x_1, x_2> = \lambda <x_1, x_2>$;

c) $<x_1 + x_2, x_3> = <x_1, x_3> + <x_2, x_3>$,

где $x_1$, $x_2$, $x_3$, — векторы из $X$, а $\lambda \in \mathbb{C}$.

Эрмитова форма называется *положительной*, если

d) $< x , x > \geq 0$ .

и *невырожденной*, если

e) $< x , x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Если $X$ — линейное пространство над полем вещественных чисел, то, разумеется, надо рассматривать вещественнозначную форму $<x_1, x_2>$.

*Определение.* Невырожденную положительную эрмитову форму в линей ном пространстве называют *скалярным произведением* в этом пространстве.

*Пример.* В $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение векторов $x=\left(x^1,\ldots,x^n\right)$, $y=\left(y^1,\ldots,y^n\right)$ можно определить, положив

$$\langle x\,,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x^i\cdot\overline{y^i}\,.$$

*Пример.* В $C[a,b]$ скалярное произведение можно определить формулой

$$\langle f\,,g\rangle=\int_a^b f\cdot\overline{g}\,(x)dx$$

Из свойств интеграла легко следует, что все требования к скалярному произведению в этом случае выполнены.

Для скалярного произведения справедливо следующее важное неравенство Коши–Буняковского:

$$|<x\,,y>|^2\leq\langle x\,,x\rangle\cdot\langle y\,,y\rangle.$$

Линейное пространство со скалярным произведением обладает естественной нормой

$$\|\,x\,\|=\sqrt{\langle x\,,x\rangle}$$

и метрикой

$$d(x\,,y)=\|\,x-y\,\|.$$

Отметим, что линейное пространство со скалярным произведением в конечномерном случае называют обычно *евклидовым* или *эрмитовым*, когда множеством констант является $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ соответственно.

Если же линейное нормированное пространство бесконечной размерности, то его называют *гильбертовым*, если оно полно, и *предгильбертовым*, если оно не полно по отношению к метрике, индуцированной естественной нормой в нем.

Будем рассматривать только пространства, наделенные скалярным произведением. В таких пространствах можно говорить об ортогональных векторах, ортогональных системах векторов и ортогональных базисах.

*Определение.* Векторы $x$, $y$ линейного пространства, наделенного скалярным произведением $<\,,>$, называются ортогональными относительно скалярного произведения), если $\left\langle x,y\right\rangle=0$

*Определение.* Система векторов $\{x_k,k\in K\}$ называется ортогональной, если векторы системы, отвечающие различным значениям индекса $k$, попарно ортогональны.

*Определение.* Система векторов $\{e_k, k \in K\}$ называется *ортонормированной (или ортонормальной)*, если для любых индексов $i, j \in K$ выполняется соотношение $\left\langle e_i, e_j \right\rangle = \delta_{i,j}$, где $\delta_i$ — символ Кронекера, то есть

$$\delta_{i.j} = \begin{Bmatrix} 1, \text{ если } i = j \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{Bmatrix}.$$

*Определение.* Конечная система векторов $x_1,\dots,x_n$ называется *линейно независимой*, если равенство $\alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = 0$ возможно, лишь когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Произвольная система векторов линейного пространства называется системой линейно независимых векторов, если линейно независима каждая ее конечная подсистема.

Рассмотрим некоторые примеры ортогональных систем функций.

На линейном пространстве $\Re_2(X, \mathbb{C})$ интегрируемых на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ функций, имеющих интегрируемый на $X$ (в собственном или несобственномсмысле) квадрат модуля, введем скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \cdot \overline{g}\,(x)\,dx\,.$$

Поскольку $|f \cdot g| \leq \frac{1}{2} \cdot \left( |f|^2 + |g|^2 \right)$, интеграл в последнем равенстве сходится и, значит, корректно определяет величину $\left\langle f, g \right\rangle$.

*Пример*. При целых $m$ и $n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i \cdot m \cdot x} \cdot e^{-i \cdot n \cdot x}\,dx = \begin{cases} 0\,, \text{ если } m \neq n \\ 2 \cdot \pi\,, \text{ если } m = n \end{cases}; \qquad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\, m \cdot x \cdot \cos\, n \cdot x\,dx = \begin{cases} 0, \text{ åñëè } m \neq n \\ \pi, \text{ åñëè } m = n \neq 0 \\ 2 \cdot \pi, \text{ åñëè } m = n \neq 0 \end{cases}; \qquad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m \cdot x \cdot \sin n \cdot x\,dx = 0; \qquad (3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m \cdot x \cdot \sin n \cdot x\,dx = \begin{cases} 0\,, \text{ если } m \neq n \\ \pi\,, \text{ если } m = n \end{cases}. \qquad (4)$$

Эти соотношения показывают, что *система экспонент* $\left\{ e^{i \cdot n \cdot x}\,;\, n \in \mathbb{Z} \right\}$ является ортогональной системой векторов пространства $\Re_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$

относительно скалярного произведения, введенного выше, а *тригонометрическая система* $\{1, \cos n\cdot x\ , \sin n\cdot x\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ ортогональна в $\Re_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Если рассматривать тригонометрическую систему как набор векторов в $\Re_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, то есть допустить линейные комбинации с комплексными коэффициентами, то в силу формул Эйлера $e^{i\cdot n\cdot x} = \cos n\cdot x + i\cdot\sin n\cdot x$ $\cos n\cdot x = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{i\cdot n\cdot x} + e^{-i\cdot n\cdot x}\right)$, $\sin n\cdot x = \frac{1}{2}\cdot$ $\cdot\left(e^{i\cdot n\cdot x} - e^{-i\cdot n\cdot x}\right)$ окажется, что рассматриваемые системы линейно выражаются друг через друга, т. е. алгебраически эквивалентны. По этой причине систему экспонент $\left\{e^{i\cdot n\cdot x}\ ,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ также называют *тригонометрической системой в комплексной записи.*

Соотношения (1)–(4) показывают, что рассматриваемые системы ортогональны, ноне нормированы, а системы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}e^{i\cdot n\cdot x}\ ,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\cos n\cdot x\ , \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sin n\cdot x\ ;\ n\in\mathbb{N}\right\}$ уже ортонормированы.

Если вместо отрезка $[-\pi, \pi]$ взять произвольный отрезок $[-l\ , l] \subseteq \mathbb{R}$, то заменой переменной можно получить аналогичные системы $\left\{\mathrm{e}^{\frac{i\cdot\pi}{l}\cdot n\cdot x}\ ,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ и $\left\{1\ ,\ \cos\frac{\pi}{l}\cdot n\cdot x\ ,\ \sin\frac{\pi}{l}\cdot n\cdot x\ ;\ n \in \mathbb{N}\right\}$, ортогональные в $\Re_2([-l\ , l\ ], \mathbb{C})$ и $\Re_2([-l\ , l\ ], \mathbb{R})$; а также соответствующие ортонормированные системы

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\cdot l}}\mathrm{e}^{\frac{i\cdot\pi}{l}\cdot n\cdot x}\ ,\ n \in \mathbb{Z}\right\}\ ,$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\cdot l}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cdot\cos\frac{\pi}{l}\cdot n\cdot x\ ,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cdot\sin\frac{\pi}{l}\cdot n\cdot x\ ;\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

*Пример.* Пусть $I_x$ — промежуток в $\mathbb{R}^m$, а $I_y$ — промежуток в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\{f_i(x)\}$ — ортогональная система функций в $\Re_2(I_x, \mathbb{R})$, а $\{g(y)\}$ — ортогональная система функций в $\Re_2(I_y, \mathbb{R})$. Тогда, как следует из теоремы Фубини, система функций $\left\{u_{ij}(x\ , y) = f_i(x)\cdot g_j(y)\right\}$ ортогональна в $\Re_2\left(I_x \times I_y\ , \mathbb{R}\right)$.

## Коэффициенты Фурье

Рассмотрим линейное пространство $X$ со скалярным произведением $<,>$ и с индуцированной им в $X$ нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ .

Пусть $\{e_i\}$ — ортонормированная система векторов в $X$.

*Определение.* Числа $\{\langle x, e_i\rangle\}$ называются *коэффициентами Фурье* вектора $x \in X$ в ортонормированной системе $\{e_i\}$.

С геометрической точки зрения, $i$–й коэффициент Фурье $\langle x, e_i\rangle$ вектора $x \in X$ есть проекция этого вектора на направление единичного вектора $e_i$.

*Лемма*. Если система векторов $e_1$, ..., $e_n$ пространства $X$ ортонормирована, то для любого вектора $x \in X$ вектор $h = x - \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x\ ,\ e_i\rangle \cdot e_i$ ортогонален плоскости векторов $e_1$, ..., $e_n$.

*Доказательство.* Достаточно проверить, что для любого вектора $e_i$ нашей системы $\langle h, e_j\rangle = 0$ . Но в самом деле,

$$\langle h, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_j\rangle \cdot \langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0.$$

Таким образом, любой вектор $x \in X$ допускает разложение

$$x = x_e + h,$$

где $x_e$ — вектор плоскости $L$, порожденной системой векторов $e_1$, ..., $e_n$, а вектор $h$ ортогонален плоскости $L$.

*Лемма (Теорема Пифагора).* Если векторы $y$ и $z$ ортогональны, а $x = y + z$, то $\| x \|^2 = \| y \|^2 + \| z \|^2$.

*Доказательство.* В самом деле,

$$\langle h, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_j\rangle \cdot \langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0.$$

*Лемма (об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье).*

Если $e_1$, ..., $e_n$ — ортонормированная система векторов, то для любого вектора $y = \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n$ имеет место неравенство:

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x\ ,\ e_i\rangle \cdot e_i \right\| \le \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i \right\|,$$

в котором равенство возможно только при условии, что для всех значений $i = 1, 2$, ..., $n$.

*Доказательство*. Пусть $x_e = \sum_{i=1}^{n} \langle x , e_i \rangle \cdot e_i$. По предпоследней лемме получаем, что $x - y = (x_e - y) + h$, где $h$ ортогонален вектору $x_e - y$, лежащему в плоскости $L$ векторов $e_1, ..., e_n$. Тогда по теореме Пифагора

$$\| x - y \|^2 = \| x_e - y \|^2 + \| h \|^2 = \| x_e - y \|^2 + \| x - x_e \|^2 \geq \| x - x_e \|^2.$$

*Утверждение (неравенство Бесселя)*. Если система векторов $e_1, ..., e_n$ ортонормальна в $X$, то для любого вектора $x \in X$ справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \langle x , e_i \rangle \right|^2 \leq \| x \|^2.$$

С геометрической точки зрения, неравенство Бесселя, таким образом, означает, что если взять не все составляющие ортогонального разложения вектора, то, естественно, сумма квадратов их норм окажется во всяком случае не больше чем квадрат нормы самого вектора. Знак равенства возможен тогда, и только тогда, когда $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x , e_i \rangle \cdot e_i$.

Если $l_1, ..., l_n$ — ортогональная, но не нормированная система век торов, то любой вектор $x \in X$ может быть представлен в виде $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot l_i + h$, где вектор $h$ ортогонален подпространству, натянутому на векторы $l_1, ..., l_n$, и коэффициенты $\alpha_i$ этого разложения находятся из равенства

$$\langle x , e_i \rangle = \alpha_i \cdot \langle l_i , l_i \rangle , \; i = 1, \ldots , n$$

*Определение*. Числа $\left\{ \dfrac{\langle x , l_i \rangle}{\langle l_i , l_i \rangle} \right\}$ называются коэффициентами Фурье вектора $x \in X$ в ортогональной системе векторов пространства $X$.

В случае, когда рассматриваемая ортогональная система еще и нормирована, мы, очевидно, возвращаемся к исходному определению коэффициентов Фурье.

Справедливо следующее неравенство Бесселя:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\left| \langle x , l_i \rangle \right|^2}{\langle l_i , l_i \rangle} \leq \| x \|^2.$$

*Пример*. В пространстве $\Re_2([-\pi , \pi ] , \mathbb{C})$ рассмотрим ортогональную систему $\left\{ e^{i \cdot k \cdot x} , \; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Пусть $f \in \Re_2([-\pi , \pi ] , \mathbb{C})$.

Коэффициенты Фурье $\{c_k\}$ функции $f$ в системе $\{e^{i\cdot k\cdot x}\}$ выражаются формулой

$$c_k = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-i\cdot k\cdot x}\,dx = \frac{\left\langle f(x)\ ,\ e^{i\cdot k\cdot x}\right\rangle}{\left\langle e^{i\cdot k\cdot x}\ ,\ e^{i\cdot k\cdot x}\right\rangle}\cdot \qquad (5)$$

Из неравенства Бесселя получаем

$$\sum_{k=-n}^{n} \left|c_k\right|^2 \le \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)\,dx.$$

*Пример*. Коэффициенты Фурье $\left\{\frac{1}{2}\cdot a_0\ ,\ a_k\ ,\ b_k\ ;\ k\in\mathbb{N}\right\}$ функции $f$ в ортогональной системе $\{1\ ,\ \cos k\cdot x\ ,\ \sin k\cdot x\ ;\ k\in\mathbb{N}\}$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos k\cdot x\,dx\ ,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \qquad (6)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin k\cdot x\,dx\ ,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ . \qquad (7)$$

Неравенство Бесселя в этом случае сводится к соотношению

$$\frac{\left|a_0\right|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\left|a_k\right|^2 + \left|b_k\right|^2\right) \le \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx,$$

справедливому при любом $n\in\mathbb{N}$.

Сравнивая полученные равенства, с учетом формулы Эйлера, получаем следующие соотношения между коэффициентами Фурье одной и той же функции относительно тригонометрической системы, записанной в действительной и комплексной формах:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\left(a_k - i\cdot b_k\right),\ \text{если } k\ge 0 \\ \frac{1}{2}\cdot\left(a_{-k} + i\cdot b_{-k}\right),\ \text{если } k<0 \end{cases}. \qquad (8)$$

Для того чтобы случай не составлял исключения, принято (считая $b_0=0$), через $a_0$ обозначать не сам начальный коэффициент Фурье, а вдвое большую величину.

## Ряд Фурье

*Определение.* Если $X$ — линейное пространство со скалярным произ ведением $<,>$, а $e_1, e_2, ..., e_n, ...,$ — ортогональная система векторов $X$, то любому вектору можно сопоставить ряд

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} \cdot e_k .$$

Этот ряд называется *рядом Фурье* вектора $x$ по ортогональной системе $\{e_k\}$.

В случае ортонормированной системы $\{e_k\}$ ряд Фурье вектора $x \in X$ запишется особенно просто

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k.$$

*Определение.* Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \cos k \cdot x + b_k \cdot \sin k \cdot x \right), \tag{9}$$

получаемый на базе тригонометрической системы $\{1, \cos k \cdot x, \sin k \cdot x; k \in \mathbb{N}\}$, называется *тригонометрическим рядом*.

Коэффициенты $\{a_0, a_k, b_k; k \in \mathbb{N}\}$ здесь — вещественные или комплексные числа. Частичные суммы тригонометрического ряда (3) суть *тригонометрические многочлены*

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left( a_k \cdot \cos k \cdot x + b_k \cdot \sin k \cdot x \right)$$

соответствующей степени $n$.

*Определение.* Если для функции $f$ имеют смысл интегралы (5), (6), то сопоставляемый $f$ тригонометрический ряд

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos n \cdot x + b_n \cdot \sin n \cdot x \right) \tag{10}$$

называется *тригонометрическим рядом Фурье функции f*.

Часто используют более компактную комплексную форму записи тригонометрических полиномов и тригонометрических рядов, основанную на формулах Эйлера $e^{i \cdot n \cdot x} = \cos n \cdot x + i \cdot \sin n \cdot x,$ $\cos n \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \left( e^{i \cdot n \cdot x} + e^{-i \cdot n \cdot x} \right)$, $\sin n \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \left( e^{i \cdot n \cdot x} - e^{-i \cdot n \cdot x} \right)$. Используя их, частичную сумму ряда Фурье (10) можно записать в виде

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x},$$

а сам ряд Фурье (10) — в виде

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}, \tag{11}$$

где коэффициенты $c_k$ — попросту коэффициенты Фурье функции $f$ по системе $\{e^{i \cdot k \cdot x}, k \in \mathbb{Z}\}$, вычисляемые по формуле (1).

В случае произвольного промежутка $[-l; l]$

$$a_k = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}\, dx, \; k = 0, 1, 2, \ldots; \tag{12}$$

$$b_k = \frac{1}{l} \cdot \int_{-1}^{1} f(x) \cdot \sin \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}\, dx, \; k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

В случае произвольного промежутка $[-l; l]$ ряд

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} \right), \tag{14}$$

где $a_n$ и $b_n$ вычисляются по формулам (2′), (3′), называется *тригонометрическим рядом Фурье функции f на отрезке* $[-l; l]$.

Комплексная форма ряда Фурье (6′) имеет вид

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i \cdot \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}}, \tag{15}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot e^{-i \cdot \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}}\, dx \tag{16}$$

*Замечание.* Конечно, промежуток $[-l;l]$ может быть заменен любым другим промежутком длины $2 \cdot i$, то есть, если функция имеет период $2 \cdot i$, то при вычислении ее коэффициентов Фурье можно интегрировать по любому отрезку длины $2 \cdot i$. Таким образом для любого числа $\tilde{n} \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$a_k = \frac{1}{l} \cdot \int_{c-l}^{c+l} f(x) \cdot \cos \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}\, dx, \; k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$b_k = \frac{1}{l} \cdot \int_{c-l}^{c+l} f(x) \cdot \sin \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l} \, dx \ , \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \ .$$

В частности, промежуток $[-l; l]$ может быть заменен промежутком $[0; 2 \cdot l]$. В последнем случае формулы (2′), (3′) должны быть заменены формулами

$$a_k = \frac{1}{l} \cdot \int_0^{2 \cdot l} f(x) \cdot \cos \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l} \, dx \ , \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \qquad (17)$$

$$b_k = \frac{1}{l} \cdot \int_0^{2 \cdot l} f(x) \cdot \sin \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l} \, dx \ , \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \ . \qquad (18)$$

В общем, переход от $[-\pi; \pi]$ к $[a; b]$, очевидно, можно осуществить сдвигом первоначального отрезка вдоль оси $x$ и изменением масштабов по этой оси.

*Определение. Тригонометрическим рядом Фурье функции $f$ на отрезке* $[a; b]$ называется ряд

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \cos \frac{k \cdot 2 \cdot \pi \cdot x}{b-a} + b_k \cdot \sin \frac{k \cdot 2 \cdot \pi \cdot x}{b-a} \right) , \qquad (19)$$

где коэффициенты $a_0$, $a_1$, ..., $b_1$, $b_2$, ... определяются по формулам

$$a_k = \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \cos \frac{k \cdot 2 \cdot \pi \cdot x}{b-a} \, dx \ , \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \ ; \qquad (20)$$

$$b_k = \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sin \frac{k \cdot 2 \cdot \pi \cdot x}{b-a} \, dx \ , \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \ . \qquad (21)$$

*Пример.* Пусть $X = \Re_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Рассмотрим в $\Re_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ ортогональную систему $\{1, \cos k \cdot x, \sin k \cdot x; \ k \in \mathbb{N}\}$ и найдем ряд Фурье функции $f(x) = x$, рассматриваемой как вектор пространства $\Re_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.

В этом случае получаем:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos k \cdot x \, dx = 0 \ , \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \ ;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\sin k\cdot x\,dx = \frac{(-1)^{k+1}\cdot 2}{k}\ ,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Таким образом,

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cdot 2}{k}\cdot\sin k\cdot x. \tag{22}$$

*Задачи* (для практических занятий). Найти тригонометрический ряд Фурье функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

1. $f(x) = 2\cdot x - 3$

2. $f(x) = \begin{cases} 2, & -3 \le x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 3 \end{cases}$

3. $f(x) = |\cos x|$

4. $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x \le 0 \\ -1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 2\cdot x - 1, & -\pi \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

*Пример*. Найти комплексный ряд Фурье функции $f(x) = e^{\alpha\cdot x}$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

При любом $n$ имеем (см. (1))

$$c_n = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha\cdot x}\cdot \mathrm{e}^{-i\cdot \mathrm{n}\cdot x}\,dx = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\alpha\cdot x - i\cdot\mathrm{n}\cdot x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\frac{1}{\alpha - i\cdot n}\cdot e^{(\alpha - i\cdot n)\cdot x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\frac{1}{\alpha - i\cdot n}\cdot\left(e^{(\alpha - i\cdot n)\cdot\pi} - e^{-(\alpha - i\cdot n)\cdot\pi}\right)$$

Заметим, что для любого целого $n$

$$e^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{n}\cdot\pi} = \cos n\cdot\pi + i\cdot\sin n\cdot\pi = \cos n\cdot\pi = (-1)^n.$$

Поэтому

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2\cdot\pi(\alpha - i\cdot n)}\cdot\left(e^{\alpha\cdot\pi} - e^{-\alpha\cdot\pi}\right) = \frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\operatorname{sh}\alpha\pi\cdot\frac{1}{\alpha - i\cdot n}.$$

Таким образом,

$$e^{\alpha\cdot x} \sim \frac{sh\,\alpha\cdot\pi}{\pi}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha - i\cdot n}\cdot e^{i\cdot n\cdot x}.$$

*Пример.* Найти комплексную форму ряда Фурье периодической с периодом π функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x\,,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0\,,\ \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}.$$

Находим коэффициенты Фурье (здесь $2\cdot l=\pi$):

$$c_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot e^{-2\cdot n\cdot x\cdot i}\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin x - 2\cdot n\cdot i\cdot\cos x}{1-4\cdot n^2}\cdot e^{-2\cdot n\cdot x\cdot i}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\cdot n\cdot i + e^{n\cdot\pi\cdot i}}{1-4\cdot n^2} = \frac{2\cdot n\cdot i + (-1)^n}{\pi\cdot\left(1-4\cdot n^2\right)}.$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\cdot n\cdot i + (-1)^n}{1-4\cdot n^2}\cdot e^{2\cdot i\cdot n\cdot x}.$$

*Задачи* (для практических занятий). Найти комплексную форму ряда Фурье функции $y=f(x)$, заданной на отрезке $[-l,\ l]$.

1. $f(x)=2\cdot x-3$ на $[-1, 1]$
2. $f(x)=x-1$ на $[-1/2, 1/2]$
3. $f(x)=|x|+x$ на $[-2, 2]$
4. $f(x) = \begin{cases} -x,\ -1 \le x \le 0 \\ x+1,\ \ 0 < x \le 1 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} 0,\ -2 \le x \le 0 \\ 1,\ \ 0 < x \le 2 \end{cases}$

*Пример.* Найти тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)=x+1$, заданной на отрезке $[\pi, 2\cdot\pi]$.

Вычислим коэффициенты $a_0, a_1, ..., b_1, b_2, ...$ по формулам (20)–(21).

Имеем

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\pi}^{2\cdot\pi} (x+1)\ dx = 3\cdot\pi + 2\ ,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\pi}^{2\cdot\pi} (x+1) \cdot \cos 2\cdot n\cdot x\ dx = 0 \quad , n = 1, 2, \ldots\ ,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\pi}^{2\cdot\pi} (x+1) \cdot \sin 2\cdot n\cdot x\ dx = -\frac{1}{n} \quad , n = 1, 2, \ldots\ .$$

Подставим найденные значения коэффициентов $a_0$, $a_1$, ..., $b_1$, $b_2$, ..., в (6‴). Получаем

$$x + 1 \sim \frac{3\cdot\pi + 2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin 2\cdot n\cdot x\ .$$

*Задачи* (для практических занятий). Разложить функцию в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[a, b]$.

1. $f(x)=x^2$ на отрезке $[-1, 3]$
2. $f(x)=x-1$ на отрезке $[-3, -1]$
3. $f(x) = \begin{cases} 0, & 2 \le x \le 3 \\ 1, & 3 < x \le 4 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} 2, & -3 \le x \le -1 \\ x, & -1 < x \le 1 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} -x, & \pi \le x \le 2\cdot\pi \\ x+1, & 2\cdot\pi < x \le 3\cdot\pi \end{cases}$

*Определение.* Вещественно- или комплекснозначную функцию $f$ будем называть *кусочно непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если существует такой конечный набор точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ этого отрезка, что функция определена, непрерывна на каждом интервале, $\left(x_{j-1},\ x_j\right)$, $j = 1, \ldots, n$, и имеет односторонние пределы при подходе к его концам.

*Определение.* Функция $f(x)$ называется *кусочно монотонной* на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков $\left[a, x_1\right]$, $\left[x_1, x_2\right]$, $\left[x_2, x_3\right]$, ..., $\left[x_n, b\right]$, в каждом из которых функция $f(x)$ монотонна.

Введем обозначения:

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c-0),$$

$$\lim_{x \to c+0} f(x) = f(c+0).$$

*Теорема (Дирихле).* Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$ и является на нем кусочно непрерывной, кусочно монотонной и ограниченной, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$.

Если $s(x)$ — сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, то во всех точках непрерывности этой функции

$$s(x)=f(x),$$

а во всех точках разрыва

$$s(x) = \frac{1}{2}\cdot(f(x-0)+f(x+0)).$$

Кроме того,

$$s(\pi) = s(-\pi) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(\pi-0)+f(-\pi+0)\right).$$

Из теоремы Дирихле видно, что значения функции $f(x)$ в точках ее разрыва не влияют на ее ряд Фурье, таким образом, функции, имеющие одни и те же точки разрыва и отличающиеся друг от друга лишь в этих точках, разлагаются в один и тот же ряд Фурье.

Далее, так как сумма любого сходящегося тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos n\cdot x + b_n\cdot\sin n\cdot x\right),$$

имеет период $2\cdot\pi$, то, составив для функции ее тригонометрический ряд Фурье, мы получим в качестве его суммы $s(x)$ функцию, которая уже опре делена не только на сегменте $[-\pi, \pi]$, но и для всех остальных вещественных значений $x$. При этом на сегменте $[-\pi, \pi]$, сумма $s(x)$ описывает функцию $f(x)$ (в смысле, как это сформулировано в теореме Дирихле).

$s(x)$ являясь периодической функцией, будет описывать функцию $f(x)$ вне отрезка в том и только в том случае, когда сама функция является периодической с периодом $2\cdot\pi$ в точках своей непрерывности. Наоборот, если функция $f(x)$ этим свойством не обладает, то вне отрезка $[-\pi, \pi]$ она может не иметь с функцией $s(x)$ ничего общего.

Напомним, что сходимость в среднем означает сходимость в естественной метрике пространства $\Re_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, то есть в смысле среднего квадратичного уклонения

$$\| f - g \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f - g|^2(x)\, dx},$$

где $f, g \in \Re_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

*Теорема* (о сходимости в среднем тригонометрического ряда Фурье). Ряд Фурье любой функции $\Re_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ сходится к ней в среднем, то есть

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cdot \cos k \cdot x + b_k(f) \cdot \sin k \cdot x,$$

и имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)\, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left( |a_k|^2 + |b_k|^2 \right).$$

*Следствие* (теорема о полноте тригонометрической системы). Любая функция $f \in \Re_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ может быть сколь угодно точно приближена в среднем тригонометрическими полиномами.

Напомним, что $C^m[-l, l]$ — сокращенное обозначение для $C^m([-l, l], \mathbb{R})$ или $C^m([-l, l], \mathbb{C})$ множества $m$ раз непрерывно дифференцируемых отображений из отрезка $[-l, l]$ в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ соответственно.

*Теорема* (о дифференцировании рядов Фурье). Пусть функция $f \in C^m[-l, l]$ и $f(-l) = f(l), f'(-l) = f'(l), \ldots, f^{(n)}(-l) = f^{(n)}(l)$. Пусть, кроме того, функция $f$ имеет на отрезке $[-l, l]$ кусочно-непрерывную производную порядка $m+1$.

Тогда: 1) сходится числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n \cdot \pi}{l} \right)^m \cdot (|a_n| + |b_n|)|),$$

где $a_n$ и $b_n$ — коэффициенты Фурье ряда (6′);

2) ряд Фурье такой функции можно $m$ раз почленно дифференцировать на указанном отрезке;

3) если $f = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \cos k \cdot x + b_k \cdot \sin k \cdot x \right)$, то

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left( -k \cdot a_k \cdot \sin k \cdot x + k \cdot b_k \cdot \cos k \cdot x \right).$$

*Теорема* (об интегрировании рядов Фурье). Ряд Фурье интегрируемой по Риману на отрезке [*–l, l*] функции *f* можно интегрировать почленно на этом отрезке, таким образом, если *f*(*x*) — кусочно непрерывная и $2 \cdot \pi$ — периодическая функция

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k(f) \cdot \cos k \cdot x + b_k(f) \cdot \sin k \cdot x \right), \text{ то}$$

$$\int_0^x f(t)\,dt \sim \frac{a_0(f) \cdot x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k(f) \cdot \sin k \cdot x}{k} + \frac{b_k(f) \cdot (1 - \cos k \cdot x)}{k} \right).$$

*Утверждение* (о связи гладкости функции и скорости убывания ее коэффициентов Фурье). Пусть $f \in C^{(m-1)}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ и $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Если функция имеет на отрезке [–π, π] кусочно непрерывную производную $f^{(m)}$ порядка *m*, то

$$c_k\left(f^{(m)}\right) = (i \cdot k)^m \cdot c_k(f), \quad k \in \mathbb{Z},$$

и

$$|c_k(f)| = \frac{\gamma_k}{k^m} = o\left(\frac{1}{k^m}\right) \text{ при } k \to \infty, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{где } \gamma_k = \left| c_k\left(f^{(m)}\right) \right|,$$

причем $\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$, где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье ряда (7).

*Замечание.* Если заданная на отрезке [–π, π] интегрируемая (в собственном или несобственном смысле) функция *f*(*x*) будет нечетной, то для нее

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0,$$

в случае четной функции *f*(*x*):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2 \int_0^{\pi} f(x)\,dx.$$

Если *f*(*x*) — четная функция, тогда произведение $f(x) \cdot \sin n \cdot x$ является нечетной функцией и в силу замечания

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin k \cdot x \, dx = 0, \; k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, *ряд Фурье четной функции содержит одни лишь косинусы*:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos n \cdot x \; ,$$

и

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos n \cdot x \, dx \, , \; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Если же функция $f(x)$ будет нечетной, то нечетной будет и функция $f(x) \cdot \sin n \cdot x$, так что

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos k \cdot x \, dx = 0 \, , \; k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, *ряд Фурье нечетной функции содержит одни лишь синусы*:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin n \cdot x \, ,$$

и

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin n \cdot x \, dx \, , \; n = 1, 2, \ldots .$$

*Пример*. Найдем разложение в ряд Фурье по косинусам четной функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Имеем,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2 \cdot \pi^2}{3} \quad .$$

Для вычисления $a_n$ при $n > 0$ применим дважды интегрирование по частям:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos n \cdot x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{x^2 \cdot \sin n \cdot x}{n} \Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \sin n \cdot x \, dx \right) =$$

$$= \frac{4}{n \cdot \pi} \cdot \left( \frac{x \cdot \cos n \cdot x}{n} \Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \cdot \int_0^{\pi} \cos n \cdot x \, dx \right) = \frac{(-1)^n 4}{n^2}.$$

Таким образом,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\cdot\left(-\cos x + \frac{\cos 2\cdot x}{2^2} - \frac{\cos 3\cdot x}{3^2} + \ldots\right).$$

Поскольку в нашем случае $f(\pi)=f(-\pi)$, наше разложение может быть по $2\cdot\pi$ периодичности распространено на любые значения $x$.

Полагая в полученном разложении $x=\pi$ или $x=0$ и учитывая, что $\cos n\cdot\pi=(-1)^n$, имеем

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Пусть функция $f$ кусочно гладкая на отрезке $[0; l]$. Если продолжить функцию $f$ с полуинтервала $(0; l]$ на полуинтервал $[-l; 0)$ нечетным образом и положить

$$F(x) = \begin{cases} f(x), 0 < x \le l, \\ \quad 0, \qquad x = 0, \\ -f(-x), -l \le x < 0 \end{cases}$$

то функция $F$ будет кусочно гладкой на отрезке $[-l; l]$ и потому, согласно теореме Дирихле, может быть разложена на этом отрезке в ряд (3). В силу нечетности функции $F$ в этом ряду будут иметься только члены с синусами. На отрезке $[-l; l]$ указанный ряд будет *разложением заданной функции f по синусам*.

Если продолжить функцию $f$ с отрезка $[0; l]$ четным образом на отрезок $[-l; 0]$, то продолженная функция, согласно теореме Дирихле, будет также раскладываться на отрезке $[-l; l]$ в ряд Фурье, а так как она четная, то этот ряд содержит только члены с косинусами и ясно, что на отрезке $[0; l]$ он дает *разложение функции f по косинусам*.

*Замечание.* Не следует думать, что нам удалось получить для одной и той же функции два различных разложения в ряд Фурье. В действительности мы разлагали весьма отличающиеся друг от друга функции (они могут отличаться друг от друга на всем промежутке $[-l; 0]$) и только отбросили часть полученного ответа, отказываясь использовать разложение в ряд Фурье для отрицательных значений $x$.

Поясним на примере.

*Пример.* Разложим на отрезке $[0; \pi]$ функцию $f(x)=x$ в ряды Фурье по синусам и по косинусам (что будет отвечать, соответственно, продолжению этой функции на отрезок $[-\pi; \pi]$ по четности и по нечетности).

Разложение этой функции по синусам было нами уже получено (см. (8)).

Для того чтобы найти разложение в ряд по косинусам, вычислим интегралы

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi \ ,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \ \cdot \cos n \cdot x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{x \cdot \sin n \cdot x}{n} \Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \cdot \int_0^{\pi} \sin n \cdot x \, dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left( - \frac{(-\cos n \cdot x)}{n^2} \Bigg|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos n \cdot \pi - 1}{n^2} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} .$$

При $n=2 \cdot k$ (четном), очевидно, $a_n=0$, а при $n=2 \cdot k-1$ (нечетном) имеем, $a_n = -\dfrac{4}{\pi \cdot (2 \cdot k - 1)^2}$. Таким образом, другое интересующее нас разложение будет иметь вид

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2 \cdot \mathrm{k} - 1)^2} \cdot \cos \, (2 \cdot \mathrm{k} - 1) \cdot x \, .$$

*Задачи* (для практических занятий).

Доопределяя необходимым образом заданную в промежутке (0, *a*) функцию до периодической, получить для нее ряд Фурье по косинусам или ряд Фурье по синусам.

1. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x) = e^x, \quad x \in [0 \, , \, \ln 2] .$$

2. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, \quad \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases} .$$

3. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, \quad 1 < x \le 2 \end{cases} .$$

4. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = x \cdot \sin x, \quad x \in [0;\, \pi].$$

5. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - x, \quad x \in [0;\, \pi].$$

*Задачи* (для расчетно-графических работ).

1. а) На отрезке $[-\pi;\, \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=|\sin x|$.
   б) Разложить функцию $f(x)=\cos 2\cdot x$, $0\le x\le\pi$ в ряд по синусам.
2. а) На отрезке $[-\pi;\, \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=x^3$
   б) Разложить в ряд Фурье по синусам функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] 0, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}.$$

3. а) На отрезке $[-\pi;\, \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=x+\pi$.
   б) Разложить в ряд Фурье по синусам функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] 0, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}.$$

4. а) На отрезке $[-\pi;\, \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=x-\pi$.
   б) Разложить в ряд Фурье по синусам функцию: $f(x)=x\cdot(\pi-x)$, $0\le x\le\pi$.
5. а) На отрезке $[-\pi;\, \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=2\cdot x+3$.
   б) Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] -\cos x, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}.$$

6. а) На отрезке $[-\pi;\, \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=e^x$.

б) Разложить в ряд Фурье по синусам функцию: $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $0\le x\le\pi$.

7. а) На отрезке $[-\pi;\pi]$ разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=2-3\cdot x$.

   б) Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию:

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le\frac{\pi}{4}\\ 0, & \frac{\pi}{4}<x\le\pi\end{cases}.$$

8. а) На отрезке $[-\pi;\pi]$ разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=|x|+x$.

   б) Разложить в ряд Фурье по синусам функцию: $f(x)=x^2$, $0\le x\le\pi$.

9. а) На отрезке $[-\pi;\pi]$ разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=e^{2\cdot|x|}$.

   б) Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию:

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{3\cdot x}{\pi}, & 0\le x\le\frac{\pi}{3}\\ 0, & \frac{\pi}{3}<x\le\pi\end{cases}.$$

10. а) На отрезке $[-\pi;\pi]$ разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=x\cdot\sin x$.

    б) Разложить в ряд Фурье по синусам функцию: $f(x)=e^{2\cdot x}$, $0\le x\le\pi$.

11. а) На отрезке $[-\pi;\pi]$ разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ 1, & 0<x\le\pi\end{cases}.$$

    б) Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию:

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}.$$

12. а) На отрезке $[-\pi;\pi]$ разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}.$$

    б) Разложить функцию $f(x)=(x-1)^2$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-1;0]$.

13. а) На отрезке $[-\pi; \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

б) Разложить функцию $f(x)=(x+2)^2$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-2; 1]$.

14. а) На отрезке $[-\pi; \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0 \\ \sin x, & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

б) На отрезке $[0; 5]$ разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 3\cdot x - 3, & 0 \le x \le 2 \\ 2\cdot x, & 2 < x \le 5 \end{cases}.$$

15. а) На отрезке $[-\pi; \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \le x \le 0 \\ \pi - x, & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

б) Разложить функцию $f(x)=e^{3-x}$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-3; 3]$.

16. а) На отрезке $[-\pi; \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot x, & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

б) Разложить функцию $f(x)=x\cdot(4-x)$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[0; 4]$.

17. а) На отрезке $[-\pi; \pi]$ разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{1}{4}\cdot(\pi\cdot x - 1), & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

б) Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -3 \le x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 3 \end{cases}.$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-3;3]$ в комплексной форме.

18. а) На отрезке [–π; π] разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

б) Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию:

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2}, \quad 0 \le x \le 1.$$

19. а) На отрезке [–π; π] разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x \le 0 \\ x+1, & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

б) Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию:

$$f(x) = \sin 3\cdot x, \quad 0 \le x \le \pi.$$

20. а) Разложить функцию $f(x)=2\cdot x-3$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [–1; 1] .

б) На отрезке [–π; π] разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=ch\ x$.

21. а) Разложить функцию $f(x)=x-1$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [–1/2; 1/2].

б) На отрезке [–π; π] разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=sh\ x$

22. а) Разложить функцию $f(x)=x\cdot\cos x$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [–π/2; π/2].

б) На отрезке [–π; π] разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} -2\cdot x, & -\pi \le x \le 0 \\ 3\cdot x, & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

23. а)Разложить функцию $e^{|x|}$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [–1, 1].

б) На отрезке [–π; π] разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -\pi \le x \le 0 \\ -3, & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

24. а) Разложить функцию $f(x)=x^2$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [–1; 1] в комплексной форме .

б) На отрезке [–π; π] разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 2\cdot x + 3, & -\pi \le x \le 0 \\ 2\cdot x, & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

25. а) Разложить функцию

$$f(x)=\begin{cases}2, -3\le x\le 0\\ x,\ 0<x\le 3\end{cases}.$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [–3; 3] в комплексной форме.

б) На отрезке [–π; π] разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\ , -\pi\le x\le 0\\ x-\dfrac{\pi}{2},\quad 0<x\le \pi\end{cases}.$$

26. а) Разложить функцию $f(x)=e^x$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [1; 3].

б) На отрезке [–π; π] разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=x^2+x$.

27. а) Разложить функцию $f(x)=10\cdot x-3$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [5; 15].

б) На отрезке [–π; π] разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2,\ -\pi\le x\le 0\\ 1,\quad 0<x\le \pi\end{cases}.$$

28. а) Разложить функцию $f(x)=2\cdot x$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [0 ; 1].

б) На отрезке [–π; π] разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=e^{5\cdot x}$.

29. а) Разложить функцию

$$f(x)=\begin{cases}x,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases},$$

заданную на отрезке [0; π] и продолженную на отрезок [–π; 0] четным образом, в тригонометрический ряд Фурье.

б) На отрезке [–π; π] разложить в ряд Фурье функцию: $f(x)=x^2-x$.

30. а) Разложить функцию $f(x)=\pi-2\cdot x$, заданную на отрезке [0; π] и продолженную на отрезок [–π; 0] нечетным образом, в тригонометрический ряд Фурье .

б) На отрезке [–π; π] разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases}1+\sin x,\ -\pi\le x\le 0\\ 1,\quad 0<x\le \pi\end{cases}.$$

## Приложение 1

Найти разложение в ряд Фурье можно также, используя математическую программу *«Maxima»*.

Поясним на уже рассмотренном ранее примере.

*Пример.* Найти разложение в ряд Фурье по косинусам четной функции $f(x)=x^2$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

1. Загрузим пакет Фурье, для этого введем команду «load (fourie)» (кавычки, разумеется, не ставим). Нажимаем кнопку «Enter». В окне программы должна появиться запись: C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.3/share/maxima/5.16.3/share/calculus/fourie.mac.

2. Для того чтобы найти коэффициенты Фурье, введем команду «fourier(x^2,x,%pi);», где на первом месте стоит функция, разложениекоторой мы ищем, на втором — независимая переменная, на третьем — $l$, где $l$ — половина периода. Опять нажимаем клавишу «Enter». Появится запись Is cos(%pi*n) positive, negative, or zero? (она появляется не при всех исходных функциях). Пишем «positive», нажимаем «Enter». В результате получим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{3}\,\%pi^2 \;;$$

$$a_n = \frac{1}{\%pi}\left(2\left(\frac{\%pi^2 \sin(\%pi\, n)}{n} - \frac{2\sin(\%pi\, n)}{n^3} + \frac{2\,\%pi \cos(\%pi\, n)}{n^2}\right)\right);$$

$$b_n = 0\cdot$$

Полученный результат можно упростить при помощи команды «foursimp(%);».

Теперь уже имеем окончательный результат:

$$a_0 = \frac{1}{3}\,\%pi^2 \;;$$

$$a_n = \frac{4\,(-1)^n}{n^2}\;;$$

$$b_n = 0\;\cdot$$

Если нам требуется разложить функцию в ряд Фурье функцию, заданную на отрезке [0; $l$] и продолженную на отрезок [$-l$; 0] четным или нечетным образом, то можно использовать команды: «fourcos (f, x, l)» или «foursin (f, x, l)».

*Пример.* Разложим на отрезке [0; π] функцию $f(x)=x$ в ряды Фурье по синусам и по косинусам (что будет отвечать, соответственно, продолжению этой функции на отрезок [–π; π] по четности и по нечетности).

1. Разложим в ряд по синусам. Для того введем последовательно:

```
load (fourie);
foursin(x,x,%pi);
positive;
foursimp(%).
```

В результате получим:

$$b_n = -\frac{2\,(-1)^n}{n}.$$

2. Для разложения в ряд по косинусам, аналогично введем последовательно:

```
load (fourie);
fourcos(x,x,%pi);
positive;
foursimp(%).
```

На выходе будем иметь:

$$a_0 = \frac{1}{2}\,\%pi;$$

$$a_n = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\%pi\; n^2}.$$

Результаты, полученные при помощи программы «Maxima», идентичны полученным ранее в «ручном режиме».

## Приложение 2

*Разложение в ряд Фурье по некоторым другим ортогональным системам функций.*

В прикладных задачах бывает более удобно использовать системы ортогональных функций, отличных от тригонометрических. Приведем несколько примеров таких систем.

1. *Многочлены Чебышева* определяются формулой

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x),\ \ n = 0, 1, 2, \dots .$$

Они образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале (–1; 1), со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-1}^{1} u(x) \cdot v(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx,$$

то есть

$\int_{-1}^{1} T_i(x) \cdot T_j(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \frac{\pi}{2^{2 \cdot n - 1}} \cdot \delta_{i, j}$, где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Выпишем несколько первых многочленов Чебышева

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \; T_2(x) = 2 \cdot x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x .$$

2. *Многочлены Лежандра определяются* формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \cdot \left(x^2 - 1\right), \; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Они образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных на отрезке [–1; 1], со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-1}^{1} u(x) \cdot v(x) \cdot dx,$$

то есть

$$\int_{-1}^{1} P_i(x) \cdot P_j(x) \cdot dx = \frac{2}{2 \cdot n + 1} \cdot \delta_{i, j} .$$

Выпишем несколько первых многочленов Лежандра

$$P_0(x) = 1 \;, \; P_1(x) = x \;, \; P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5} \cdot x .$$

Прямым вычислением можно убедиться в их ортогональности на отрезке [–1; 1].

3. *Многочлены Эрмита* определяются формулой

$$H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \cdot e^{-x^2}, \; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Они образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных на множестве действительных чисел, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot v(x) \cdot e^{-x^2} \cdot dx .$$

То есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_i(x)\cdot H_j(x)\cdot dx = \sqrt{\pi}\cdot 2^n\cdot n!\cdot\delta_{i,j},\quad i, j = 0, 1, 2, \ldots .$$

Выпишем несколько первых многочленов Эрмита

$$H_0(x) = 1\ ,\ H_1(x) = 2\cdot x\ ,\ H_2(x) = 4\cdot x^2 - 2\ .$$

Разложение функции в ряд Фурье по всем вышеописанным системам функций, как и прежде, будет иметь вид

$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\langle x, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle}\cdot e_k$, где <, > — соответствующее скалярное произведение, а $\{e_k\}$ — подходящий ортогональный базис.

Рассмотрим по одному конкретному примеру для каждой из приведенных нами ранее ортогональных систем функций.

*Пример.* Разложить функцию $y = \arccos x + 1$ в ряд Фурье на интервале (–1; 1) по системе многочленов Чебышева.

Искомое разложение функции $y = \arccos x + 1$ в ряд Фурье на интервале (–1; 1) по системе $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$,... имеет вид

$$\arccos x + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot T_n(x),\ \ x\in(-1;\ 1), \tag{23}$$

где коэффициенты Фурье $a_0$, $a_1$, $a_2$,... определяются по формулам

$$a_n = \frac{\left(\arccos x + 1\ ,\ T_n(x)\right)}{\left(T_n(x),\ T_n(x)\right)} =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} (\arccos x + 1)\cdot T_n(x)\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx}{\displaystyle\int_{-1}^{1} T_n(x)^2\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx}\ ; \tag{24}$$

Интегралы

$$\int_{-1}^{1} (\arccos x + 1)\cdot T_n(x)\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$$

вычисляем, делая замену переменной $x = \cos\theta$, затем используем формулу $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ и интегрируем по частям. Получаем

$$\int_{-1}^{1} (\arccos x + 1) \cdot T_0(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi} (\theta + 1) \cdot d\theta = \frac{\pi^2}{2} + \pi ,$$

$$\int_{-1}^{1} (\arccos x + 1) \cdot T_n(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi} (\theta + 1) \cdot \cos n \cdot \theta \, d\theta = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} , \; n = 1,2,... .$$

Вычисляем интегралы

$$\int_{1}^{1} T_n(x)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \int_{0}^{\pi} \cos^2 n \cdot \theta \, d\theta \cdot$$

При $n = 0$

$$\int_{1}^{1} T_n(x)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \pi \quad \cdot$$

При $n = 1, 2,...$

$$\int_{1}^{1} T_n(x)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \quad \cdot$$

Подставляя вычисленные интегралы в (10), получаем

$$a_0 = \frac{\pi + 2}{2} , \; a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2} , \; n = 1, 2,... .$$

Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0$, $a_1$, $a_2$,... в (9). Получаем

$$\arccos x + 1 = \frac{\pi + 2}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cdot T_n(x) \cdot$$

*Пример.* Разложить функцию $y=x^3$ в ряд Фурье на интервале (0; 1) по системе многочленов Лежандра.

Искомое разложение функции $y=x^3$ в ряд Фурье на интервале (0; 1) по системе $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$,... имеет вид

$$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot P_n(x), \quad x \in (-1; 1), \tag{25}$$

где коэффициенты $a_0$, $a_1$, $a_2$,... определяются по формулам:

$$a_n = \frac{\left(x^3, P_n(x)\right)}{\left(P_n(x), P_n(x)\right)} = \frac{\int_{-1}^{1} x^3 \cdot P_n(x) \cdot dx}{\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 \cdot dx} \cdot \tag{26}$$

Вычисляем интегралы

$$\int_{-1}^{1} x^3 \cdot P_n(x) \cdot dx, \tag{27}$$

пользуясь формулой $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \cdot \left(x^2 - 1\right)$ и, интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-1}^{1} x^3 \cdot P_0(x) \cdot dx = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} x^3 \cdot P_1(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \frac{d}{dx} \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot dx =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot dx = \frac{2}{5} \quad ,$$

$$\int_{-1}^{1} x^3 \cdot P_2(x) \cdot dx = \frac{1}{2^2 \cdot 2!} \cdot \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \frac{d^2}{dx^2} \cdot \left(x^2 - 1\right)^2 \cdot dx =$$

$$= \frac{3 \cdot 2}{2^2 \cdot 2!} \cdot \int_{-1}^{1} x \cdot \left(x^2 - 1\right)^2 \cdot dx = 0 \ ,$$

$$\int_{-1}^{1} x^3 \cdot P_3(x) \cdot dx = \frac{1}{2^3 \cdot 3!} \cdot \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \frac{d^3}{dx^3} \cdot \left(x^2 - 1\right)^3 \cdot dx =$$

$$= - \frac{1}{2^3} \cdot \int_{-1}^{1} x \cdot \left(x^2 - 1\right)^3 \cdot dx = \frac{4}{35} \ .$$

Интегралы (27) при $n > 3$ равны нулю.
Интегралы

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 \cdot dx$$

тоже можно вычислить, пользуясь формулой $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \cdot \left(x^2 - 1\right)$ и интегрируя по частям. Так было установлено, что

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 \cdot dx = \frac{2}{2 \cdot n + 1} \ .$$

Подставляя вычисленные интегралы в (12), получаем

$$a_0 = 0 \ , \ a_1 = \frac{3}{5} \ , \ a_2 = 0, \ a_3 = \frac{2}{5} \ , \ a_4 = 0 \ , \ a_5 = 0 \ , \ldots$$

Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0$, $a_1$, $a_2$,... в (25). Получаем

$$x^3 = \frac{3}{5} \cdot P_1(x) + \frac{2}{5} \cdot P_3(x) .$$

Справедливость последнего равенства легко проверить, зная что $P_1(x) = x$ и $P_3(x) = \frac{5 \cdot x^3}{2} - \frac{3 \cdot x}{2}$ .

*Пример.* Разложить функцию $y = e^{2\cdot x}$ в ряд Фурье на интервале $(-\infty, \infty)$ по системе многочленов Эрмита.

Искомое разложение функции $y = e^{2\cdot x}$ в ряд Фурье на интервале $(-\infty, \infty)$ по системе $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$,... имеет вид

$$e^{2\cdot x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot H_n(x)\ , \quad x \in (-\infty\ ;\ \infty)\ , \tag{28}$$

где коэффициенты $a_0$, $a_1$, $a_2$,... определяются по формулам:

$$a_n = \frac{\left(e^{2\cdot x}, H_n(x)\right)}{\left(H_n(x), H_n(x)\right)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\cdot x} \cdot H_n(x) \cdot e^{-x^2} \cdot dx}{\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)^2 \cdot dx}\ . \tag{29}$$

Для нахождения $a_0$, $a_1$, $a_2$,... вычисляем интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\cdot x} \cdot H_0(x) \cdot e^{-x^2} \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\cdot x} \cdot e^{-x^2} \cdot dx = \sqrt{\pi} \cdot e\,;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\cdot x} \cdot H_\mathrm{n}(x) \cdot e^{-x^2} \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\cdot x} \cdot (-1)^n \cdot \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \cdot dx =$$

$$= 2^n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\cdot x} \cdot e^{-x^2} \cdot dx = \sqrt{\pi} \cdot e \cdot 2^n.$$

Интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)^2 \cdot e^{-x^2} \cdot dx = \sqrt{\pi} \cdot 2^n \cdot n\,!$$

вычисляются специальными методами.

Подставляя вычисленные интегралы в (29), получаем

$$a_0 = e, \quad a_n = \frac{e}{n\,!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0$, $a_1$, $a_2$,... в (28). Получаем искомое разложение

$$e^{2\cdot x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \cdot H_n(x)\ , \quad x \in (-\infty\ ;\ \infty)\ .$$

## Список литературы


1. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. — М.: Наука, 1979. — 408 с.

2. *Гельфанд И.М.* Лекции по Линейной Алгебре. — М.: Наука, 1971. — 271 с.

3. *Ефимов А.В., Каракулин А.Ф., Поспелов А.С., Фролов С.В., Лесин В.В.* Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 3. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 576 с.

4. *Зорич В.А.* Математический анализ. — М.: Наука, 1984. — 640 с.

5. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 504 с.

6. *Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П.* Математический анализ: Ряды, функции векторного аргумента. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 224 с.

7. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / Под ред. А.И.Кириллова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 400 с.

## Содержание

## Для заметок

# Для заметок

*Внутривузовское издание*

Подписано в печать 12.12. 2014. Гарнитура Таймс
Формат 60×90/16 Бумага офсетная
Объем 3 усл. печ. л
Тираж 25 экз. Заказ № 161 Продаже не подлежит

Отпечатано в УПП «Репрография» МИИГАиК