ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ՏՆՏԵՍԱԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՖԱԿՈՒԼՏԵՏ
«ՏՆՏԵՍԱԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ» ԱՄԲԻՈՆ

ՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ԻՐԱՎԻՃԱԿՆԵՐԻ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՈՒՄ

Ուսումնական ձեռնարկ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2009

ՀՏԴ 330 (07)
ԳՄԴ 65 g7
Տ 776

Գրքի տպագրությունը երաշխավորել է
ԵՊՀ Տնտեսագիտության ֆակուլտետի
խորհուրդը

Հեղինակային կոլեկտիվ

Հ. Լ. Սարգսյան
Ա. Հ. Առաքելյան
Մ. Ա. Սահակյան
Ա. Ա. Խառատյան
Ն. Ս. Քոչինյան
Գ. Պ. Տոնոյան
Գ. Մ. Ղուկասյան
Մ. Մ. Բունիաթյան

Տ 776 Տնտեսական իրավիճակների մոդելավորում (Ուսումնական ձեռնարկ): -Եր., ԵՊՀ հրատ., 2009, 176 էջ:

Դասընթացը ուսումնասիրում է տնտեսական իրավիճակների ու գործընթացների տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելավորման սկզբունքներն ու մեթոդները: Ընդգրկում է տնտեսության վերլուծության, գործոյթների հետազոտման կիրառությունները տնտեսության տարբեր ոլորտներում ու մակարդակներում:

Դասընթացի նպատակն է ուսանողներին սովորեցնել, թե ինչպես կարելի է մոդելավորել տնտեսական գործընթացները, զարգացնել նրանց գիտելիքները (հմտությունները) տնտեսության տարբեր մակարդակներում կառավարման ու կազմակերպման խնդիրներում որոշումների հիմնավորման ու ընդունման վերաբերյալ:

Ուսումնական ձեռնարկը կազմվել է Երևանի պետական համալսարանի տնտեսագիտության ֆակուլտետում «Տնտեսական իրավիճակների մոդելավորում» առարկայի դասավանդման ծրագրին համապատասխան: Նախատեսված է «Տնտեսագիտություն», «Կառավարում» և հարակից մասնագիտությունների ուսանողների համար:

Ó÷ááíîå ïîñîáèå ïîäãîòîâëåíî â ñîîòâåòñòâèè ñ ïðîãðàììîé ïðåïîäàâàíèÿ êóðñà "Ìîäåëèðîâàíèå ýêîíîìè÷åñêèõ ïðîöåññîâ" íà ýêîíîìè÷åñêîì ôàêóëüòåòå ÅÃÓ.

Ïðåäíàçíà÷åíî äëÿ ñòóäåíòîâ ïî ñïåöèàëüíîñòÿì "Ýêîíîìèêà", "Óïðàâëåíèå" è ñìåæíûì ñïåöèàëüíîñòÿì.

The manual has been set with compliance to the syllabus of the course in "Simulation of Economic Processes", which is delivered at the Faculty of Economics, Yerevan State University.

It is designed for the students of Economics, Management and related fields of specialization.

ՀՏԴ 330 (07)
ԳՄԴ 65 g7

ISBN 978-5-8084-1201-9

© Հեղինակային կոլեկտիվ, 2009 թ.
© ԵՊՀ հրատարակչություն, 2009 թ.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ 5

Գլուխ 1. Տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելները 9
1.1. Պատմական ակնարկ 9
1.2. Տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելի հասկացությունը 14
1.3. Մոդելավորման գործընթացը, մոդելների դասակարգումը 16

Գլուխ 2. Տնտեսական գործընթացների մոդելներ 20
2.1. Սպառողի վարքի մոդելը 20
2.2. Սարդոստայնանման մոդելը 21
2.3. Նվազագույն ծախսերով արտադրության գծային մոդելը 24
2.4 Օպտիմալ պլանավորման Կանտորովիչի մոդելը 26
2.5. Դիսկրետ օպտիմալացման որոշ մոդելներ 29
2.5.1. Տրանսպորտային խնդիրը 29
2.5.2. Շրջիկ գործակալի խնդիրը 46
2.5.3.Նշանակումների խնդիրը 49
2.5.4.Ուսապարկի խնդիրը 55
2.5.5. Ձևման մասին խնդիրը 58
2.6. Փոխանակման գծային մոդելներ 58
2.7. Տնտեսական զարգացման դինամիկ մոդելներ 60
2.7.1. «Կապիտալ- ներդրումներ-արդյունք» մոդելը 60
2.7.2. Տնտեսական աճի Ուզավայի մոդելը 63

Գլուխ 3. Օպտիմալ կառավարման մոդելը, մաքսիմումի սկզբունքը 66
3.1. Օպտիմալ կառավարման մոդելը 66
3.2. Շրջակա միջավայրի աղտոտումը վերահսկելու խնդիրը 69
3.3. Օպտիմալ տնտեսական աճի նեոդասական մոդելը 71

Գլուխ 4. Դինամիկ ծրագրում 77
4.1. Դինամիկ ծրագրման խնդրի հիմնական հասկացությունները 78
4.2. Դինամիկ ծրագրման օպտիմալության սկզբունքները 80
4.3. Դինամիկ ծրագրման գործնական խնդիրների օրինակներ 82
4.3.1. Ամենակարճ երթուղու խնդիր 82
4.3.2. Ներդրումների բաշխման խնդիր 86

Գլուխ 5. Տնտեսական իրավիճակների վերլուծությունը ցանցային մոդելների կիրառմամբ 91
5.1 Ծրագրի ներկայացումը ցանցի միջոցով 92
5.2. Ցանցային մոդելի ժամանակային վերլուծությունը 95
5.3. Ծրագրերի օրացուցային պլանավորում 102
5.4. Ծրագրի իրագործման արագացման կամ կրիտիկական ճանապարհի մինիմալացման խնդիրը 107
5.5. Ծախսերի մինիմալացման խնդիրը 109
5.6. Հոսքերը ցանցերում, առավելագույն հոսքի որոնման խնդիրը 113

Գլուխ 6. Պաշարների կառավարման մոդելները 122
6.1. Պաշարների կառավարման մոդելների դասակարգումը 124
6.2. Պաշարների կառավարման հիմնական մոդելը 125
6.3 Արտադրանքի խմբաքանակի օպտիմալ չափի մոդելը 129
6.4. Արտադրական մատակարարումների մոդելը 131
6.5. Մենարտադրանքային ստատիկ մոդել պակասուրդով 133
6.6. Ձեղչով մատակարարումների մոդելը 136
6.7. Մենարտադրանքային N փուլանոց դինամիկ մոդել 139

Գլուխ 7. Հաշվեկշռային մոդելների որոշ կիրառություններ 144
7.1. Բազմաճյուղ տնտեսության Լեոնտևի մոդելը 144
7.1.1. Լեոնտևի արդյունավետ մոդելներ 148
7.1.2. Լրիվ ծախսերի վեկտոր 152
7.1.3 Հավասարակշռված գների մոդելը 153
7.2. Միջազգային առևտրի մոդելը 155

Գլուխ 8. Երկմատրիցային խաղեր 161
8.1. Խաղերի տեսության հավասարակշռության սկզբունքները 164
8.2. Գովազդային խաղը, որպես լուսաբանող օրինակ 165

Գրականության ցանկ ըստ գլուխների 173

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Դեռևս անհիշելի ժամանակներից մարդկությունը ունեցել է որոշումների կայացման իր զինանոցը: Այլ խնդիր է, որ վաղ շրջանում գերիշխել են փորձի ու սխալի, ինտուիցիայի վրա հիմնված մեթոդները: Պատասխանատու որոշումների կայացման ժամանակ ոչ պատահական են հիշեցնում, «յոթը չափիր, մեկ կտրիր» ժողովրդական ասացվածքը:

Վերջին տասնամյակներում տնտեսության կառավարման ամենատարբեր ոլորտներում ու մակարդակներում, տնտեսական երևույթների ու գործընթացների նկարագրման ու վերլուծության համար ժամանակակից տնտեսագիտությունը նախընտրում է որոշումներ կայացնելիս իրական օբյեկտների փոխարեն գործ ունենալ մոդելների և դրանց հետազոտման մաթեմատիկական մեթոդների հետ[1]: Եթե նախկինում մաթեմատիկական տնտեսագիտական հետազոտություններում ավելի շատ կիրառվում էր որպես հաշվողական և պատճառահետևանքային կապերի առավել հարմար ներկայացման միջոց, ապա այսօր այն հանդես է գալիս որպես միկրո և մակրո մակարդակներում ծագած խնդիրների լուծման մեթոդ, որպես ճանաչողության, նոր որակի հայտնաբերման հզոր գործիք:

Գործույթների հետազոտման մաթեմատիկական մեթոդների ավանդական դասընթացները պատկերացում են տալիս տնտեսական կյանքի տարբեր ոլորտներում լավագույն որոշումների կայացման մոտեցումների մասին:

Տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելները կիրառվում են այնպիսի խնդիրների լուծման համար, ինչպիսիք են ապրանքների ու ծառայությունների, աշխատանքի ու ֆինանսական շուկաներում ռացիոնալ որոշումների կայացումը և կարգավորումը, ռեսուրսների բաշխումը ձեռնարկություններում, տրանսպորտային հոսքերի կարգավորումը քաղաքներում, օդանավերի չվերթների օպտիմալացումը, պաշարների կառավարումը և այլն: Դրանք հանդիպում են տնտեսական կյանքի ամեն քայլափոխում:

20-րդ դարի վերջին առաջատար տնտեսագետների շրջանում անցկացրած հարցումը ցույց տվեց, որ նրանց մի մասը անհանգստացած է տեսական հետազոտություններում մաթեմատիկական մոդելների կիրառման աճով, գտնելով, որ մաթեմատիկական տեխնիկան կարող է ներգործել տնտեսագիտության տեսության բովանդակության վրա:

---

[1] Թերևս կարելի է ասել, որ գոյություն չունի ոչ մաթեմատիկական տնտեսագիտություն. պարզապես ընտրությունը կատարվում է տնտեսագիտության մեծ կամ փոքր աստիճանով մաթեմատիկականացված դասընթացների միջև (այս միտքն առաջին անգամ հնչել է 1960-ականներին՝ տես G. Archibald & R. Lipsey. An Introduction to a Mathematical Treatment of Economics. London. Weidenfeld and Nicolson. 1967).

Տնտեսագիտության մաթեմատիկականացման քննադատները այն կարծիքին են, որ մարդկանց վարքը հետազոտող սոցիալական գիտություններում մաթեմատիկայի կիրառումը պետք է սահմանափակ լինի: Մարդիկ ստեղծագործող, նպատակամետ անհատներ են, ուստի հնարավոր չէ նրանց վարքը համապատասխանեցնել խիստ որոշակիացված ու կանոնակարգված սկզբունքների: Տնտեսագետների այս խումբը մի կողմից շեշտում է, որ տնտեսագիտության մաթեմատիկականացման գործընթացը կարող է փոխել տնտեսագիտական կատեգորիաների իմաստը, մյուս կողմից՝ նշում, որ մաթեմատիկայի ինտենսիվ օգտագործումը տնտեսագիտական հետազոտություններում պայմանավորված է հենց այս բնագավառում առաջացած պահանջներով:

Տնտեսագետների մյուս մասը գտնում է, որ տնտեսագիտության տեսությունն այսօր ապրում է տեխնիկական փոփոխությունների և նորամուծությունների դարաշրջան: Այդ տեսանկյունից տեսության մեջ տեղի ունեցող բովանդակային փոփոխությունները դրական են:

Ժամանակակից տնտեսագիտության մեջ մաթեմատիկական մեթոդները և մոդելները լայնորեն կիրառվում են որպես տնտեսական երևույթների հետազոտության և կանխատեսման գործիք: Սակայն տնտեսական երևույթների չափման ու գնահատման և առավել հիմնարար մեթոդաբանական հիմնախնդիրների առկայությունը հանգեցրեց նրան, որ «զուտ» տնտեսագիտության տեսությունը առանձնացվեց կիրառական տեսությունից: Առաջինի շրջանակներում կիրառվում է բարդ մաթեմատիկական վերլուծություն: Միաժամանակ, կիրառական գիտությունը կենտրոնանում է պարզեցված այնպիսի մոդելների վրա, որոնց համար կան համապատասխան փորձագիտական տվյալներ:

Տեսական տնտեսագիտությունը և կիրառական տնտեսագիտությունը ունեն հետազոտության միևնույն օբյեկտը՝ տնտեսությունը: Այն բարդ է, ուստի հետազոտությունը տարվում է տարբեր կառուցվածքային մակարդակների, աբստրահման տարբեր աստիճանների վրա: «Զուտ» տեսությանը բնորոշ է աբստրահման ավելի բարձր մակարդակ: Այն ուսումնասիրում է տնտեսության մեջ առկա առավել ընդհանուր կապեր և օրինաչափություններ և մեթոդաբանական հիմք է հանդիսանում կիրառական հետազոտությունների համար: Տեսական տնտեսագիտության առանցքային հիմնադրույթներից մեկը արժեքի գնահատումն է, որը ըստ Ա. Մարշալի բացատրում է, թե ինչպես շուկայական տնտեսությունում «պահանջմունքները չափող գները հավասարակշռվում են պայմանները չափող գների հետ»[2], կամ այլ կերպ՝ ինչպիսին է հավասարակշիռ գների բնույթը մրցակցային շուկայում:

---

[2] **À. Ìàðøàëë.** Ïðèíöèïû ýêîíîìèêè íàóêè. Ì., 1983., ò. 1, ñ. 107.

Կիրառական տնտեսագիտությունը տնտեսագիտության տեսությունը հարստացնում է էմպիրիկ նյութի վերլուծությամբ: Տնտեսագիտության, վիճակագրության և մաթեմատիկայի հիման վրա զարգացավ էկոնոմետրիկան՝ գիտության ճյուղը, որը հնարավորություն է տալիս կատարել տնտեսական երևույթների քանակական վերլուծություն, օրինաչափությունները բխեցնել փորձով հաստատված արդյունքներից:

Չնայած տեսական և կիրառական տնտեսագիտության նպատակների տարբերության պատճառով «զուտ» տեսության մեջ կիրառվող մաթեմատիկան տարբերվում է վիճակագրական հետազոտություններում օգտագործվող մաթեմատիկայից, բոլոր դեպքերում մաթեմատիկան, տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելները տնտեսագիտության մեջ օգտագործվում են որպես գաղափարների արտահայտման առավել հարմար եղանակ, որպես հետազոտման ծրագրի հիմք, որպես ճանաչողության միջոց:

Ուսումնական ձեռնարկում ներառված տնտեսական հետազոտությունների գործիքակազմը, որը ներկայացված է տնտեսական գործընթացների տարբեր ոլորտներում ու մակարդակներում տարբեր բարդությամբ մեթոդների ու մոդելների համախմբով, ապագա տնտեսագետի մոտ կձևավորեն մասնագիտական գործունեության ընթացքում լավագույն որոշումների կայացման անհրաժեշտ կողմնորոշումներ ու մտածողության մշակույթ:

Հեղինակային կոլեկտիվը, իհարկե, գիտակցում է, որ ընտրված իրավիճակների մոդելավորման ներկապնակը, չնայած բազմազանությանը, այդուհանդերձ կրում է պայմանականությունների որոշակի բեռ: Դրա վկայությունն է սոսկ թվարկումը այն բաժինների, որոնք ևս կարող էին տեղ գտնել դասախոսությունների կազմում. որոշումների կայացման տեսությունը (այդ թվում՝ ռիսկի պայմաններում), իմիտացիոն մոդելավորումը, մասսայական սպասարկման տեսությունը (հերթերի տեսություն), մարկովյան վերլուծությունը, նախագծերի իրագործման վերլուծությունը և այլն:

Ուսումնական ձեռնարկի առանձին գլուխները և հատվածները շարադրել են.

տնտեսագիտության դոկտոր, պրոֆեսոր Հ. Լ. Սարգսյան (գլուխներ 1, 2, 3, 7), տեխնիկական գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա. Հ. Առաքելյան (գլուխներ 2, 5, 8), ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, պրոֆեսոր Մ. Ա. Սահակյան (գլուխներ 4, 6), տնտեսագիտության թեկնածու Ա. Ա. Խառատյան (գլուխներ 1, 2, 5, 6), տնտեսագիտության թեկնածու, դոցենտ Ն. Ս. Քոչինյան (գլուխներ 1, 2, 3, 5), ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Գ. Պ. Տոնոյան (գլուխներ 2, 7), ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Գ. Մ. Ղուկասյան (գլուխներ 3, 5, 6), տնտեսագիտության թեկնածու, դոցենտ Մ. Մ. Բունիաթյան (գլուխներ 5, 6, 7):

Պրոֆ. **Հ. Լ. Սարգսյան**
Պրոֆ. **Ա. Հ. Առաքելյան**

ԳԼՈՒԽ 1

ՏՆՏԵՍԱ-ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԸ

Ժամանակակից տնտեսագիտության տեսությունը որպես հետազոտության գործիք օգտագործում է տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելը և հետազոտության մեթոդ՝ մոդելավորումը միկրո և մակրո-մակարդակներում:

Մաթեմատիկայի կիրառությունը տնտեսագիտության մեջ թույլ է տալիս՝

- ֆորմալ նկարագրել և հետազոտել տնտեսական օբյեկտի գործունեությունը,
- բացահայտել հետազոտվող օբյեկտի առանձնահատկությունները, գործունեության օրինաչափություններն ու ստանալ նոր տեղեկություններ դրանց վերաբերյալ,
- կանխատեսել օբյեկտի հետագա վարքը փոփոխականների ու պարամետրերի փոփոխության դեպքում,
- ստացված կանխատեսումների հիման վրա կայացնել օպտիմալ որոշումներ՝ դրանով իսկ ապահովելով օբյեկտի արդյունավետ կառավարումը:

Մաթեմատիկական տերմինների օգտագործումը թույլ է տալիս ավելի հստակ ու ամփոփ ձևակերպել տնտեսագիտական տեսության հիմնադրույթները և եզրահանգումները:

Միկրո և մակրո տնտեսագիտության զարգացումը ենթադրում է ֆորմալացման բարձր մակարդակ, ինչի հիմքը դրվեց կիրառական մաթեմատիկայի բնագավառում այնպիսի բաժինների զարգացումով, ինչպիսիք են՝ մաթեմատիկական ծրագրավորումը, խաղերի տեսությունը, մաթեմատիկական վիճակագրությունը, գրաֆների տեսությունը և այլն:

1.1. Պատմական ակնարկ

Տնտեսագիտության մեջ մաթեմատիկական մեթոդներ կիրառվել են վաղ ժամանակներից: Դեռևս 1494 թվականին իտալացի վանական և մաթեմատիկոս Լուկա Պաչոլին իր «Հանրահաշվի, երկրաչափության, համամասնությունների և հարաբերությունների գիտության հանրագումար» աշխատանքի

«Հաշիվների և գրառումների մասին» բաժնում շարադրել է այն հիմնական սկզբունքները, որոնց վրա հիմնված է ժամանակակից հաշվապահությունը:

Դասական տնտեսագիտության հիմնադիր Ու. Պետին (1623-1687) գրում է, որ բառերը միայն հարաբերական և գերադրական աստիճաններով օգտագործելու փոխարեն նա իր կարծիքը թվերի, կշիռների և չափերի լեզվով արտահայտելու ուղին է ընտրել:

1758 թվականին Ֆ. Քենեն ստեղծեց մակրոտնտեսական հավասարակշռության առաջին մոդելը՝ «Տնտեսական աղյուսակը»: Մոդելում մաթեմատիկական մեթոդների կիրառմամբ ցույց է տրվում մեկ տարում ստեղծված արդյունքի բաշխումը հասարակության երեք հիմնական դասակարգերի՝ ֆերմերների, հողատերերի և «անպտուղ» դասակարգի միջև:

Պարզագույն մաթեմատիկական մոդելներ օգտագործել են Ա. Սմիթը (դասական մակրոտնտեսական մոդելը) և Դ. Ռիկարդոն (միջազգային առևտրի մոդելը): Կ. Մարքսը գտնում էր, որ գիտությունը միայն այն ժամանակ է հասնում կատարելության, երբ հաջողվում է օգտվել մաթեմատիկայից: Մարքսի պարզ և ընդլայնված վերարտադրության սխեմաները մակրոտնտեսական գործընթացների մոդելավորման վառ օրինակներ են: Մարքսը մաթեմատիկական վերլուծությունները օգտագործել է տնտեսական փոփոխականների միջև գոյություն ունեցող կախվածությունները ներկայացնելու համար: Ըստ նրա՝ ապրանքի միավորի արժեքի մեծությունն ուղիղ համեմատական է դրա ստեղծման համար կատարված աշխատանքի ծախսերին և հակադարձ համեմատական՝ աշխատանքի արտադրողականությանը, շրջանառության մեջ գտնվող փողի քանակությունը ուղիղ համեմատական է ապրանքների գների գումարին և հակադարձ համեմատական՝ փողի շրջապտույտի արագությանը:

Տնտեսագիտության մեջ մաթեմատիկական մեթոդները հատուկ կարգավիճակ ձեռք բերեցին «մարժինալիստական հեղափոխության» նախաշեմին՝ 19-րդ դարի 70-80-ականներին: Այդ ժամանակահատվածում տնտեսական երևույթների վերլուծության մեջ շեշտադրումը մակրոմակարդակից տեղափոխվեց միկրոմակարդակ՝ անհատի մակարդակը:

Առաջիններից մեկը, ով հիմք դրեց տնտեսագիտության մեջ մաթեմատիկայի կանոնավոր կիրառմանը, Օ.Կուռնոյի հետ մեկտեղ հանդիսանում է Լ. Վալրասը: Մարժինալիստները տվեցին սահմանային փոփոխականների հաջող մաթեմատիկական մեկնաբանությունները: Նրանք գտնում էին, որ արդյունքի յուրաքանչյուր լրացուցիչ միավոր անհատին ավելի քիչ օգտակարություն է տալիս, քան նախորդը, ուստի սահմանային օգտակարությունը ֆունկցիա է ապրանքի սպառման քանակից: Սահմանային օգտակարությունը սահմանվեց որպես օգտակարության U(X) ֆունկցիայի ածանցյալ՝ MUx = dU(x)/dx:

Մարժինալիստները եկան այն եզրահանգմանը, որ որքան բարձր է արդյունքի օգտակարությունը, այնքան սպառողն ավելի բարձր արժեք կամ գին է պատրաստ վճարել այն ձեռք բերելու համար:

Վալրասի կարծիքով առանց մաթեմատիկայի կիրառման հնարավոր չէ արտահայտել արժեքի փոփոխությունը՝ որպես արդյունքի օգտակարությունից կախված ֆունկցիա: Նա պնդում էր, որ միայն մաթեմատիկայի օգնությամբ կարելի է հասկանալ տնտեսական երևույթների էությունը: Շուկայական փոխանակման գործընթացի մեջ ներգրավված անհատների հիմնական շարժառիթը օգտակարության մաքսիմալացումն է, որը դիտարկվում էր որպես մաթեմատիկական խնդրի լուծում:

19-րդ դարի վերջերին համարում էին, որ տնտեսագիտությունը պետք է իր արժանի տեղը գրավի բնական գիտությունների շարքում և այդ նպատակին հասնելու միջոցը մաթեմատիկայի կիրառումն է: Մարժինալիստները գտնում էին, որ միայն օգտակարության և այլ փոփոխականների չափման հիմնախնդիրներն են խոչընդոտում տնտեսագիտությունը բնական գիտությունների շարքին դասելուն:

Օգտակարությունը չափելու հարցը բանավեճերի առարկա էր: Ուստի կիրառական բնույթի դժվարությունների պատճառով տնտեսագիտության մեջ մաթեմատիկական ուղղությունն ավելի հաջող զարգանում էր տեսական, քան՝ էմպիրիկ մակարդակի վրա: Նման զարգացումը պատասխան արձագանք գտավ Գերմանիայի պատմական դպրոցի մարժինալիստների կողմից, որոնք հայտարարեցին, որ տնտեսագիտության տեսությունն անհրաժեշտ է կառուցել էմպիրիկ օրինաչափությունների հիման վրա՝ ինդուկցիայի օգնությամբ: Անգլիական մարժինալիստների շրջանում մաթեմատիկայի օգտագործման հիմնական կողմնակիցը Ու. Ջևոնսն էր: Մարժինալիստների Ավստրիական դպրոցի տեսաբանները Մենգերի գլխավորությամբ ընտրեցին դեդուկցիայի մեթոդը, բայց մտածված կերպով խուսափում էին մաթեմատիկայից:

Այդ դարաշրջանում Մեծ Բրիտանիայում առաջատարը տնտեսագիտության զարգացման գործում համարվում էր Ա. Մարշալը: 1890 թ. նրա «Տնտեսագիտության սկզբունքները» գրքում կենտրոնական տեղը պատկանում էր գնի տեսությանը, որը հիմնվում էր արտադրության ծախսերի և սահմանային օգտակարության տեսությունների վրա: Նրա աշխատանքում մաթեմատիկական դատողությունները գրված են միայն հղումներում և հավելվածներում: Այդ պատճառով համարվում է, որ Մարշալը տեսնում էր մաթեմատիկական մեթոդների և մոդելների կիրառման սահմանափակությունը տնտեսագիտության մեջ, չնայած Ավստրիական դպրոցի ներկայացուցիչների համեմատությամբ նա ավելի հաճախ էր մաթեմատիկական տեսություններ կառուցում:

Ա. Մարշալը հիմնական շեշտադրումը կատարում էր տնտեսական գործընթացի դինամիկայի, ոչ թե հավասարակշռության վրա: Բացի այդ, դեդուկ-

տիվ դատողությունների հետ մեկտեղ, նա բերում էր կարճ տրամաբանական շղթաներ:

Մարշալի կիրառած վերլուծական մեթոդը անվանվեց մասնակի հավասարակշռության մեթոդ: Նա բոլոր գործոնները համարում էր հաստատուն՝ բացի մեկից և հետազոտում էր այդ գործոնի փոփոխության հետևանքները: Նման դատողությամբ Մարշալը ներկայացրել է պահանջարկի կորը, որի նվազող տեսքը բացատրել է նվազող սահմանային օգտակարությամբ: Մարշալի կողմից մաթեմատիկայի կիրառման օրինակներից մեկը պահանջարկի առաձգականության հասկացության սահմանումն է:

19-րդ դարում Լ. Վալրասի, Օ. Կուռնոյի հետ մեկտեղ Վ. Պարետոյի, Ֆ. Էջվորտի և մի շարք այլ տնտեսագետների կողմից ձևակերպվեց շուկայական տնտեսության հետազոտման մաթեմատիկական մոտեցումը: Ժամանակակից տնտեսագիտության մեջ լայնորեն կիրառվում են էջվորտի անտարբերության կորերը և տնտեսական համակարգի միջուկ հասկացությունը, Վ. Պարետոյի բազմանպատակ օպտիմում հասկացությունը, Լ. Վալրասի ընդհանուր տնտեսական հավասարակշռություն հասկացությունը և այլն:

20-րդ դարի ականավոր տնտեսագետը՝ Ջ. Քեյնսը, ինչպես և Ա. Մարշալը, կրթությամբ մաթեմատիկոս էր, սակայն տնտեսագիտության մեջ մաթեմատիկական մեթոդների կիրառումը վերապահումով էր ընդունում՝ մաթեմատիկան սահմանափակ չափով օգտագործելով իր աշխատանքներում: Քեյնսի ստեղծագործական գործունեության հետազոտող Ռ. Օ. Դոնելը գրում է. «Քեյնսի փիլիսոփայության համար հիմնադրույթ է հանդիսանում այն, որ որակական, տրամաբանական վերլուծությունը նախորդում է քանակականին կամ մաթեմատիկական վերլուծությանը և որոշում դրա կիրառման աստիճանը կամ մասշտաբները: Եթե այդ սկզբունքը վերածնակերպենք կարգախոսի, այն կհնչի հետևյալ կերպ՝ սկզբից տրամաբանություն, հետո, եթե անհրաժեշտ է, մաթեմատիկա»[3]:

Քեյնսը ճիշտ է համարում մաթեմատիկական տրամաբանությունը օգտագործել միայն որպես օժանդակ միջոց, բայց պնդում է, որ տնտեսագետի վրա դրա կիրառման անհրաժեշտությունն ապացուցելու բեռն է ընկած: Նրա մշակած մակրոտնտեսական քաղաքականության ռազմավարությունների տեսական ձևակերպումների հիման վրա կառուցվել են տնտեսա-մաթեմատիկական շատ մոդելներ, որոնց գործադրման հնարավորությունները գնալով կատարելագործվում են՝ անհրաժեշտ վիճակագրական տեղեկատվության առկայության և համակարգչային տեխնոլոգիաների ոլորտում ձեռք բերված նվաճումների շնորհիվ:

Մակրոտնտեսական մոդելների արժևորման հարցում տնտեսագետների շրջանում զարգացան մեթոդաբանական վեճեր: Մասնավորապես, Մ. Ֆրիդմանը առաջ քաշեց այն դրույթը, որ տեսությունն ընտրելու միակ չափանիշը

[3] O'Donnel R. M. Keynes's Philosophy, Economics and Politics. L: Macmillan, 1989, p. 35.

պետք է դառնա դրա օգնությամբ ստացված կանխատեսումների ստույգ լինելը: Մաթեմատիկայի կիրառման հարցը մղվեց երկրորդական պլան, չնայած ենթադրվում էր, որ կանխատեսումը պետք է հիմնվի որոշակի մաթեմատիկական մոդելների վրա:

Տնտեսագիտության մեջ մաթեմատիկայի կիրառման գործում իր արժանի ավանդն ունի լենինգրադցի մաթեմատիկոս Լ. Կանտորովիչը: 1938-1939 թթ. արտադրության կազմակերպման և պլանավորման մի շարք հիմնախնդիրների վերլուծության արդյունքում նա ձևակերպեց մաթեմատիկական խնդիրների նոր շարք: Այդ նոր ոլորտը հետագայում ստացավ «գծային ծրագրում» անվանումը:

20-րդ դարի վերջին մակրոէկոնոմիկան ներկայացվում էր որոշակի դրույթների մաթեմատիկորեն ներկայացված ամբողջությամբ, որն առանձնացված էր միկրոէկոնոմիկայից: Վերջին տասնամյակներում մակրոէկոնոմիկայի նվաճումները, վերջին հաշվով, կարելի է դիտարկել որպես միկրոէկոնոմիկայի հիմքերին ինտեգրվելու փորձ, ընդհանուր հավասարակշռության համակարգի կառուցում՝ սպառողի վարքի աքսիոմների հիման վրա:

Պետք է նշել, որ տնտեսական գործընթացների մաթեմատիկական մոդելավորումը բուռն զարգացում ստացավ հատկապես 20-րդ դարում: Բավական է հիշատակել տնտեսագիտության ոլորտի նոբելյան մրցանակակիրներին՝ Յ. Տինբերգեն, Վ. Լեոնտև, Դ. Հիքս, Ռ. Սոլոու, Պ. Սամուելսոն, Ջ. Ֆոն Նեյման, Ջ. Նէշ և այլն:

Տնտեսա-մաթեմատիկական մեթոդների և մոդելների զարգացման գործում մեծ ներդրում ունեցան Ե. Սլուցկին, Լ. Կանտորովիչը, Վ. Նովոժիլովը և այլն: Տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելների մի շարք կառուցվել է Վ. Լեոնտևի կողմից մշակված միջճյուղային հաշվեկշռի մեթոդի հիման վրա, որը կիրառվում է արտադրության և բաշխման վերլուծության և պլանավորման համար տնտեսության գրեթե բոլոր մակարդակներում՝ սկսած առանձին ձեռնարկությունից մինչև տնտեսական համակարգն ամբողջությամբ:

Տնտեսական գործընթացների օպտիմալ կառավարման խնդիրների լուծման համար մեծ դեր ունեցավ Լ.Պոնտրյագինի կողմից ձևակերպված մաքսիմումի սկզբունքը:

Կոնֆլիկտի կամ անորոշության պայմաններում օպտիմալ որոշումների կայացման մոդելները, որոնք կազմում են խաղերի տեսության բուն էությունը, լայնորեն կիրառվում են ոչ միայն տնտեսագիտության, այլև՝ ռազմական ոլորտներում: Կոնֆլիկտային իրավիճակներում հավասարակշռության գոյությունը ապացուցել են՝ 1928 թ. Ֆոն Նեյմանը՝ հակամարտ, 1951 թ. Նէշը՝ ոչ կոալիցիոն և Շեպլին՝ կոալիցիոն խաղերի համար:

Բազմաթիվ է այն գործնական խնդիրների քանակը, որոնք լուծվում են դիսկրետ մաթեմատիկայի, մասնավորապես գրաֆների տեսության մեթոդների կիրառմամբ: Վերջին տարիների տնտեսագիտական հետազոտություն-

ներում, իրողությունների առավել համարժեք նկատառմամբ, ուշադրության կենտրոնում են հայտնվել էկոնոմետրիկ մեթոդներն ու ծրագրային փաթեթները:

1.2. Տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելի հասկացությունը

Տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելները վերջին տասնամյակներում լայնորեն օգտագործվում են ինչպես ողջ տնտեսության, այնպես էլ տնտեսության առանձին կառուցվածքային միավորների իրավիճակային և գործընթացների նկարագրման, վերլուծության, կանխատեսման և կառավարման նպատակով:

«Մոդել» բառը ծագել է լատինական modulus բառից, որը նշանակում է չափ, մեծություն: Այն նաև կապված է modus՝ կրկնօրինակ, նմուշ բառի հետ: «Մոդել» ասելով հասկանում ենք հետազոտվող օբյեկտի կամ մտահղացման փոխարինողը, նմանակը: Այն կարող է տրվել տարբեր ձևերով՝ մակետի, նկարի, գծագրի, բանաձևերի և այլ միջոցներով:

Մոդելները առանձնակի նշանակություն են ստանում այնպիսի օբյեկտների ուսումնասիրության գործում, որոնց անմիջական հետազոտությունը հնարավոր կամ նպատակահարմար չէ: Միշտ չէ, որ նպատակահարմար է լայնամասշտաբ փորձարկումների անցկացումը, հատկապես մակրոմակարդակում, քանի որ այն կապված է մեծ ծախսումների հետ և երբեմն կարող է հասարակությանը մեծ զրկանքներ պատճառել: Այդպիսի դեպքերում օգնում է տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելը. ուսումնասիրման է ենթարկվում օբյեկտի մոդելը, որը հնարավորություն է տալիս արդյունքում ստացված տեղեկատվությունը տարածել նախատիպի վրա:

Տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելը մաթեմատիկական բանաձևերի, հարաբերությունների, ֆորմալ կապերի այնպիսի համախմբություն է, որն արտահայտում է մոդելավորվող տնտեսական օբյեկտի էությունը:

Տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելը տնտեսական իրականության հետ երկակի է կապված: Մի կողմից՝ մոդելն արտացոլում է իրական աշխարհը, վերարտադրում է այն, մյուս կողմից՝ նպաստում է այդ աշխարհի ձևափոխմանը: Մոդելը մշակվում է հետազոտվող տնտեսական օբյեկտի մասին վիճակագրական տեղեկատվության հիման վրա և օգնում է բացահայտել բարդ տնտեսական իրավիճակին, գործընթացին հատուկ ներքին օրինաչափությունները, սկզբունքային տնտեսական կապերը, գործելու մեխանիզմը: Նման բացահայտումը հնարավորություն է տալիս կառավարել տնտեսական գործընթացը:

Մոդելը միջանկյալ դեր է կատարում տնտեսական օբյեկտի և տնտեսագիտության տեսության միջև: Մոդելը և տեսությունը փոխներգործում են:

Տնտեսական իրավիճակների, գործընթացների առանձնահատկությունը նրանում է, որ այստեղ գործում են մեծ թվով պարամետրեր ու փոփոխական մեծություններ: Իրականության ողջ բազմազանությունն արտահայտող մոդելը շատ բարդ է, ուստի մոդելում իրական վիճակը ներկայացվում է պարզեցված:

Մի կողմից՝ տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելն իրենից ներկայացնում է բարձր կարգի աբստրակցիա, քանի որ այստեղ աբստրահվում ենք ոչ միայն տնտեսական օբյեկտը բնութագրող ոչ էական կապերից, այլև մոդելի մեջ մտնող տարրերի կոնկրետ քանակական մեծությունից և որակական ոչ համասեռությունից: Մյուս կողմից, եթե մոդելում չեն ներառվել տնտեսության կամ տնտեսական առանձին իրավիճակների կարևորագույն բնութագրերը, կարելի է հանգել ոչ ճիշտ հետևությունների: Ուստի տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելավորումը պահանջում է տնտեսագիտության տեսական գիտելիքների լավ իմացություն: Միաժամանակ, մոդելի վերլուծության արդյունքում ստացված նոր գիտելիքների հիման վրա ստուգվում և ճշգրտվում են հայտնի տեսական դրույթները, ձևակերպվում՝ նորերը: «Մոդելը գիտական ճանաչողության կարևորագույն գործիքներից մեկն է, հետազոտվող (կամ կառավարվող) օբյեկտի պայմանական կերպարը»: Մոդելավորումը տնտեսագիտության տեսության հետագա զարգացման, նոր օրենքների, միտումների բացահայտման միջոց է:

20-րդ դարի 80-ականներին մշակվում էին «խոշոր» մոդելներ բազմաթիվ հավասարումներով, որոնք մանրամասն ներկայացնում էին տնտեսության տարբեր ոլորտների միջև գոյություն ունեցող կապերը: Այժմ դրանք իրենց տեղը զիջել են առավել մասնակի մոդելներին: Այդ մոդելներն օգտագործվում են ինչպես մակրոմակարդակում՝ տնտեսական քաղաքականության հնարավոր ռազմավարություններից լավագույնն ընտրելու նպատակով, այնպես էլ միկրոմակարդակում՝ առանձին տնտեսական միավորների արդյունավետ գործունեությունն ապահովելու համար:

Տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելներում առկա են.

- փոփոխականներ, որոնք կարող են ընդունել որոշակի թույլատրելի արժեքներ (մոդելում օգտագործվող դրսից տրվող փոփոխականները կոչվում են էկզոգեն, իսկ մոդելից ստացվող փոփոխականները՝ էնդոգեն),
- պարամետրեր, որոնք ընդունում են որոշակի ֆիքսված արժեքներ,
- փոփոխականներն ու պարամետրերն իրար կապող հարաբերակցություններ,
- նպատակային ֆունկցիա, որի համար փնտրվում է նվազագույն կամ առավելագույն արժեքը,
- հաշվողական եղանակներ, որոնք հնարավորություն են տալիս լուծել առաջադրված խնդիրը:

1.3. Մոդելավորման գործընթացը, մոդելների դասակարգումը

«Մոդելավորումը օբյեկտի հետազոտումն է դրա մոդելի միջոցով, մոդելի կառուցումը և ուսումնասիրումը այդ օբյեկտի մասին նոր գիտելիք ստանալու նպատակով: Մոդելավորումը իմացաբանական կատեգորիա է՝ ճանաչողության կարևորագույն հնարներից ու մեթոդներից մեկը»[4]: Այն առաջացել է հին աշխարհում և կատարելագործվել գիտական առաջադիմությանը զուգընթաց: Մոդելավորումը դասակարգում են ըստ մոդելների, մոդելավորման օբյեկտների ու միջոցների, մոդելների կիրառման բնագավառների և այլն:

Տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելավորման գործընթացը ենթադրում է մոդելավորվող տնտեսական օբյեկտի կառուցվածքի, էական կապերի խոր հետազոտում, դրա նմանօրինակի ստեղծում մաթեմատիկական մեթոդներով (մոդելի կառուցում) և փորձարարական կամ տեսական վերլուծություն: Արդյունքում ստացվում են հետազոտվող օբյեկտի մասին քանակական և որակական տվյալներ:

Մոդելավորման գործընթացը ներառում է հետևյալ փուլերը. օբյեկտի նախնական ուսումնասիրություն, նրա էական բնութագրերի առանձնացման վրա հիմնված մոդելի կառուցում, լուծման օպտիմալ մեթոդի ընտրություն, մոդելի տեսական վերլուծություն, մոդելի հավաստիության ստուգում, մոդելի կիրառում և կատարելագործում:

Օբյեկտի ուսումնասիրություն: Մոդելը կառուցելուց առաջ նախ անհրաժեշտ է ուսումնասիրվող օբյեկտում առանձնացնել առավել կարևոր կառուցվածքային և ֆունկցիոնալ տարրերը, դրանց բնութագրերը: Կարևոր է ճիշտ ձևակերպել խնդրի դրվածքը, հետազոտության նպատակը:

Մոդելի կառուցում: Մոդելը պետք է կառուցվի այնպես, որ արտացոլի օբյեկտի հետազոտման նպատակի տեսանկյունից կարևոր բնութագրերը՝ հատկանիշները, փոխադարձ կապերը, կառուցվածքային ու ֆունկցիոնալ պարամետրերը և այլն:

Մաթեմատիկորեն օբյեկտը ներկայացնելու համար որոշվում են մուտքային տեղեկատվության տեսակները և աղբյուրները, այնուհետև մաթեմատիկական հարաբերակցություններով ներկայացվում են տնտեսական օբյեկտի որոշակի տարրերը և դրանց էական կապերը: Քանի որ մոդելը պետք է համապատասխանի հետազոտողի կողմից առաջադրվող պահանջներին, կարևորվում է մոդելի կիրառման արդյունքում ակնկալվող ելքային տեղեկատվությունը: Մոդելի կառուցման ժամանակ անհրաժեշտ է հաշվի առնել առաջադրված խնդրի լուծման մեթոդը և մոդելը կիրառող անձանց արձագանքը (մոդելը շատ բարդ չպետք է լինի):

---

[4] Հայկական Սովետական Հանրագիտարան: Երևան, 1981, Հ. 7, էջ 663:

Մոդելի հավաստիության ստուգում: Մոդելի ստուգման միջոցներից է այն անցյալի որևէ իրավիճակի վրա փորձարկելը: Անցյալը ներկայացնող էկզոգեն փոփոխականները մոդելի կիրառման արդյունքում տալիս են անցյալը ներկայացնող էնդոգեն փոփոխականներ, որոնց վիճակագրական արժեքները հայտնի են: Համադրելով մոդելից ստացվող և փաստացի ելքային տեղեկատվությունները, պատկերացում ենք կազմում իրականությանը մոդելի համապատասխանության մասին: Այս փուլում պարզաբանվում է, թե մոդելի կիրառումից ստացվող արդյունքները որչափով կարող են օգնել լուծելու դրված խնդիրը:

Մոդելի կիրառում: Մոդելի հավաստիության ստուգումից հետո այն պատրաստ է լինում օգտագործման համար: Մոդելը գործնական նշանակություն կարող է ունենալ այն դեպքում, երբ նրա վերլուծությունն ավելի մատչելի է հետազոտող սուբյեկտին, քան օբյեկտի անմիջական հետազոտումը:

Մեծ Բրիտանիայի Ստեռլինգի համալսարանի պրոֆեսոր Շ. Դոուն գրում է. «Մեծ Բրիտանիայի կառավարությունը տնտեսական քաղաքականության հարցերով խորհրդակցում է առաջավոր տնտեսագետների հետ, որոնց մեծ մասը իրենց առաջարկները կատարելիս հիմնվում է այս կամ այն մակրոտնտեսական մոդելի վրա: Մոդելներից յուրաքանչյուրի կանխատեսման ունակությունը հրապարակայնորեն քննարկվում է... Եթե համարենք, որ այլ հավասար պայմաններում հասարակության տնտեսական կառուցվածքը այս կամ այն մոդելի գնահատման ժամանակահատվածում չի փոխվում և ոչ մի էկզոգեն շոկեր չկան, ապա կարելի է ասել, որ մաթեմատիկական մոդելները գիտական են և կանխատեսումներ կատարելու լավագույն հիմքն են հանդիսանում»[5]:

Այդուհանդերձ, մոդելները դեռևս ոչ լիարժեք են կիրառվում: Հետազոտություններից մեկի համաձայն կառավարման գիտության մոդելներից միայն 60 տոկոսն է կիրառվում լրիվ կամ գրեթե լրիվ չափով:

Մոդելի կատարելագործում: Եթե անգամ մոդելի կիրառությունը հաջող է, այն միշտ պահանջում է կատարելագործում:

Տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելները բազմազան են: Դասակարգումը հնարավորություն է տալիս ինչ-որ սկզբունքից ելնելով մոդելները բաժանել տիպային խմբերի:

Եթե մոդելները դասակարգենք ըստ մոդելավորման նպատակի, ապա դրանք կարելի է բաժանել երկու խմբի՝ *նկարագրական և ճանաչողական (էվրիստիկ):* Նկարագրական մոդելները ծառայում են արդեն հայտնի օրենքները, կապերը պարզաբանելու համար, իսկ ճանաչողական մոդելները նպաստում են նոր տեսական գիտելիքների ստացմանը:

---

[5] **Ш. Доу.** Математика в экономической теории: исторический и методологический анализ. Вопросы Экономики, 2006, № 7, стр. 53-72.

Մոդելները տարբերվում են ընդգրկման ոլորտով: Այս չափանիշով դասակարգելու դեպքում բոլոր տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելները կբաժանվեն երկու մեծ դասի՝ *մակրոմոդելներ և միկրոմոդելներ:* Մակրոմոդելներում ներկայացվում է տնտեսությունն ամբողջությամբ, ագրեգացված ցուցանիշների միջև առկա էական կապերով, իսկ միկրոմոդելներում նկարագրվում են լոկալ գործընթացներ: Միկրոմոդելները ներկայացնում են շուկայական միջավայրում տնտեսության բաղկացուցիչ տարրերի փոխներգործությունը կամ դրանց առանձնացված վարքը:

Ըստ ընդհանրացման աստիճանի մոդելները կարելի է բաժանել *տեսական և կիրառական մոդելների:* Տեսական մոդելները տնտեսության և դրա բաղկացուցիչ մասերի ընդհանուր հատկանիշների հետազոտման միջոց են, որոնք հիմնականում կատարվում են դեդուկտիվ եզրահանգումների հիման վրա: Կիրառական մոդելները կոնկրետ տնտեսական օբյեկտի պարամետրերի գնահատման միջոց են, որոնք, մասնավորապես, օգնում են շուկայում ֆիրմաների վարքի ռազմավարության մշակմանը:

Մոդելների տարբերությունները վերաբերվում են նաև տնտեսական գործընթացի կամ իրավիճակի իրականացման ժամանակին: Ըստ այս չափանիշի մոդելները բաժանվում են *ստատիկ և դինամիկ մոդելների:* Ստատիկ մոդելներում գործընթացը ներկայացվում է ժամանակի որոշակի պահի համար, իսկ դինամիկ մոդելներում փոփոխականների մի մասը ժամանակից կախված ֆունկցիաներ են:

Տնտեսական փոփոխականների միջև գոյություն ունեցող կապերի բնույթից կախված մոդելները դասակարգվում են *դետերմինացված և ստոխաստիկ մոդելների:* Դետերմինացված մոդելները ենթադրում են մոդելի փոփոխականների միջև միայն կոշտ ֆունկցիոնալ կապեր: Ստոխաստիկ մոդելները մոդելի փոփոխականների միջև պատահական կապերի առկայություն են թույլ տալիս: Այս մոդելներն օգտագործում են հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության ապարատը:

Հավասարակշռության մոդելները ներկայացնում են տնտեսության այնպիսի իրավիճակները, երբ բոլոր ներգործությունների ընդհանուր արդյունքը հավասար է զրոյի: Որպես կանոն, հավասարակշռված մոդելները նկարագրական մոդելներ են:

Օպտիմալացման մոդելները միկրոմակարդակում (սպառողի, արտադրողի գործունեության օպտիմալացում) տնտեսավարողներին հնարավորություն են տալիս կայացնել լավագույն որոշում, որն առավելագույն չափով է իրագործում դրված նպատակները: Մակրոմակարդակում տնտեսական սուբյեկտների կողմից ռացիոնալ վարքի ընտրության արդյունքը կարող է հանգեցնել հարաբերական հավասարակշռության վիճակի:

Անորոշության տարրերով մոդելները օգտագործվում են այն իրավիճակների մոդելավորման համար, երբ որոշակի գործոնների համար անհնար

է վիճակագրական տվյալների հավաքագրումը և դրանց արժեքների որոշակիացումը: Նման դեպքերում հաճախ օգտագործվում է խաղերի տեսության և իմիտացիոն մոդելավորման գործիքակազմը:

Փորձագիտական (էքսպերտային) մոդելները օգտագործվում են մի շարք տնտեսական գործընթացների հետազոտման ժամանակ, երբ քանակական բնութագրիչների բացակայության պայմաններում հիմք է համարվում փորձագետի կարծիքը և տարբեր ասպեկտները գնահատվում են որոշակի սանդղակով:

ԳԼՈՒԽ 2

ՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐԻ ՄՈԴԵԼՆԵՐ

Տնտեսական գործընթացների նկարագրման, որոշումների կայացման խնդիրները պահանջում են մաթեմատիկական գործիքակազմի գործադրում տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելների կիրառմամբ: Այդ ամենը արդեն հիմնավորվել է նախորդ գլխում: Ուսանողին հայտնի են նաև տնտեսագիտական առանձին հիմնախնդիրներ, որոնց մասին պատկերացումները «ոչ մոդելային» են: Մյուս կողմից, հայտնի են նաև գործույթների հետազոտման մաթեմատիկական մեթոդները, որպես մոդելների հետազոտման նախագիտելիք:

Այս գլխում ներառված են իրենց բնույթով էապես միմյանցից տարբերվող տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելներ (գծային-ոչ գծային, ստատիկ-դինամիկ, միապրոդուկտ- բազմասեկտոր, անընդհատ-դիսկրետ և այլն), որոնք պատկերացում կտան դրանց բազմազանության վերաբերյալ: Ինչ վերաբերում է մոդելների ընտրությանը, ապա համաձայնվում ենք Դ. Գեյլի հետ՝ «Չգտել ենք ընտրել այն մոդելները, որոնք լավագույնս ցույց կտան, թե ինչպես մաթեմատիկական դատողությունները կարելի է կիրառել իդեալականացված տնտեսական իրավիճակների մասին տեղեկատվություն ստանալու համար»[6]: Ստորև բերվում են տնտեսական գործընթացների որոշ մոդելներ:

2.1. Սպառողի վարքի մոդելը

Սպառողն իր եկամտի և բարիքների տրված գների դեպքում բարիքների բազմությունից կատարում է ընտրություն, նպատակ ունենալով ստանալ առավելագույն օգտակարություն: Բարիքների հավաքածուն ներկայացվում է $X(x_1, x_2, \dots x_n)$ ոչ բացասական վեկտորի միջոցով, որտեղ x_i բաղադրիչը ցույց է տալիս i-րդ բարիքի քանակը տվյալ հավաքածուի մեջ:

Սպառողի վարքի ուսումնասիրությունը պարզեցնելու համար ենթադրենք, որ յուրաքանչյուր հավաքածու ընդգրկում է միայն երկու բարիք՝ x և y: Բարիքների $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2,y_2)$ հավաքածուներից կամ զամբյուղներից սպա-

---

[6] **Ä. Ãáéë.** Òåîðèÿ ëèíåéíûõ ýêîíîìè÷åñêèõ ìîäåëåé, Ìîñêâà, 1963 ã., ñòð. 9.

ռողը կընտրի այն, որից կստանա առավելագույն օգտակարություն: Օգտակարությունը (utility) սուբյեկտիվ հասկացություն է: Այն ֆունկցիա է սպառվող բարիքների տեսակներից և քանակներից: Սպառողի համար նախապատվելի կամ գերադասելի է (նշանակենք P-ով) այն զամբյուղը, որից նա ավելի մեծ օգտակարություն է ստանում. APB համարժեք է U(A) >U(B):

Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կառուցելու համար կատարենք հետևյալ նշանակումները.

P_i - i-րդ բարիքի միավորի գինը,

X_i -՝ i-րդ բարիքի քանակը, i=1, 2, ...n

M-ը սպառողի եկամուտն է,

$U(x_1,x_2,...x_n)$-ը՝ սպառողի օգտակարության ֆունկցիան:

Մոդելը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$U(x_1,...x_n) \rightarrow max \quad (1)$$

$$P_1 x_1 + P_2x_2 +...+ P_nx_n \leq M \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0 \quad (3)$$

Կախված $U(x_1,...x_n)$ օգտակարության ֆունկցիայի և (2), (3) սահմանափակումների տեսքից, մենք կունենանք մաթեմատիկական ծրագրման տարբեր բարդության խնդիրներ: Խնդրի լուծման արդյունքում գտնում ենք $x_1,x_2,...x_n$ բարիքների քանակը սպառողի զամբյուղում, որոնք բավարարում են (2) և (3) անհավասարումներին և սպառողի համար ապահովում առավելագույն օգտակարություն:

2.2. Սարդոստայնանման մոդելը

Քննարկենք դինամիկ մոդելի օրինակ: Մոդելը հնարավորություն է տալիս առաջարկի և պահանջարկի կորերի միջոցով հետազոտել գների և արտադրության ծավալի կայունությունը բարիքների շուկայում:

Եթե Q_t^S և Q_t^D ֆունկցիաները համապատասխանաբար բնութագրում են առաջարկը և պահանջարկը t-րդ տարում, իսկ P_t-ն գինն է, ապա արտադրողներն ընթացիկ ժամանակահատվածում արդյունքների առաջարկը որոշում են նախորդ ժամանակահատվածում սահմանված գների հիման վրա.

$$Q_t^S = S_t(p_{t-1}) \quad (1)$$

(1)-ով ներկայացված առաջարկի ֆունկցիայում գոյություն ունի ժամանակային լագ ժամանակի մեկ միավոր տևողությամբ, այսինքն՝ ներկայացված են նախորդ ժամանակահատվածի գները: Արտադրողներն արտադրության մասին որոշում կայացնում են ընթացիկ գների հիման վրա, սակայն

արտադրական ցիկլն ունի որոշակի տևողություն, ուստի արդյունքն առաջարկվում է արդեն հաջորդ ժամանակաշրջանում:

Պահանջարկի կորը ներկայացնում է արդյունքի պահանջարկի կախվածությունը ընթացիկ ժամանակահատվածի գնից.

$$Q_t^D = D_t(p_t) \qquad (2)$$

Բարիքների շուկայում հավասարակշռության պայմանն է.

$$Q_t^D = Q_t^S \qquad (3)$$

(1)-(3) մոդելը կարելի է ներկայացնել մեկ հավասարմամբ.

$$D_t(p_t) = S_t(p_{t-1}) \qquad (4)$$

Բարիքի գնի և արտադրության ծավալի փոփոխության դինամիկան, երբ հայտնի է սկզբնական p_o գինը կամ Q_o քանակը, կարելի է ներկայացնել հետևյալ սխեմայով.

$$Q_o \rightarrow p_o = D^{-1}(Q_o) \rightarrow Q_1 = S(p_o) \rightarrow p_1 = D^{-1}(Q_1) \rightarrow Q_2 = S(p_1) \rightarrow \ldots \qquad (5)$$

որտեղ D^{-1}–ը պահանջարկի հակադարձ ֆունկցիան է:

Որպես մասնավոր օրինակ դիտարկենք սարդոստայնանման մոդելը, որտեղ առաջարկի և պահանջարկի ֆունկցիաները գծային են.

$$S(p) = A + Bp_{t-1},\ D(p) = C - Ep_t,\ S(p) = D(p). \qquad (6)$$

Այստեղ $B>0$, քանի որ առաջարկի ֆունկցիան աճող է, $E>0$, քանի որ պահանջարկի ֆունկցիան նվազող է: $C > A > 0$, այսինքն՝ $D(0) > S(0) > 0$: Համարում ենք, որ զրոյական գնի դեպքում պահանջարկը գերազանցում է առաջարկը: (6) համակարգի դինամիկան ներկայացնող հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$D(p_t) = S(p_{t-1}),\ \text{կամ}\ C - Ep_t = A + Bp_{t-1} \qquad (7)$$

Նախ որոշենք հավասարակշռված p^* գինը և արտադրության հավասարակշռված Q^* ծավալը: Դրանք պետք է բավարարեն

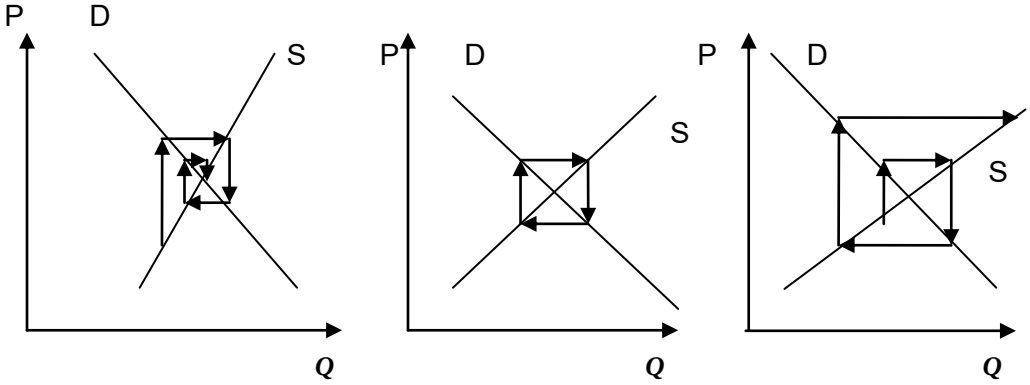
$$Q^* = C - Ep^* = A + Bp^*$$

հավասարմանը, որտեղից ստանում ենք.

$$p^* = \frac{C - A}{B + E} \quad \text{և} \quad Q^* = \frac{BC + AE}{B + E} \qquad (8)$$

Հետազոտենք գնի և արտադրության ծավալի վարքն այն դեպքում, երբ սկզբնակետը չի համընկնում հավասարակշռվածի հետ: Ունենալով բարիքի գնի և քանակի սկզբնական մեծությունները, (5) սխեմայի կիրառմամբ հաջորդաբար գտնում և (P, Q) հարթությունում տեղադրում ենք (գին-քանակ

կոորդինատներով կետերը: Ստացված կետերով կառուցում ենք առաջարկի և պահանջարկի գրաֆիկները: Գրաֆիկական վերլուծությունից ստացվում են հետևյալ արդյունքները: Եթե առաջարկի կորն ավելի կտրուկ թեքվածություն ունի, քան պահանջարկինը, ապա շուկայում կհաստատվի կայուն հավասարակշռություն (Նկար 1):



Նկար 1. *Նկար 2.* *Նկար 3.*

Եթե պահանջարկի կորի թեքությունը գերազանցում է առաջարկի կորի թեքությանը, ապա հավասարակշռությունը անկայուն կլինի (Նկար 3): Եթե այդ կորերի թեքությունները հավասար են, ապա գները կանոնավոր տատանումներ կունենան հավասարակշռված գնի շուրջը (Նկար 2):

(7) բանաձևում p_t-ն արտահայտելով p_{t-1}-ի միջոցով, կստանանք հետևյալ ռեկուրենտ հարաբերակցությունը.

$$p_t=(C-A)/E- p_{t-1}B/E \qquad (9)$$

Հաջորդաբար կիրառելով (9)-ը, կստանանք.

$$p_1=\frac{C-A}{E}-\frac{B}{E}\cdot p_0;\ p_2=\frac{C-A}{E}-\frac{B}{E}\left[\frac{C-A}{E}-\frac{B}{E}\cdot p_0\right],\ \ldots,$$

$$p_t=\frac{C-A}{E}\cdot\left[1-\frac{B}{E}+\left[\frac{B}{E}\right]^2+\cdots+(-1)^{t-1}\left[\frac{B}{E}\right]^{t-1}\right]+(-1)^t\left[\frac{B}{E}\right]^t\cdot p_0$$

Փակագծերի արտահայտությունը երկրաչափական պրոգրեսիայի գումար է, որից օգտվելով կստանանք.

$$p_t = \frac{C - A}{E} \cdot \frac{1 - (-1)^t \left[\frac{B}{E}\right]^t}{1 + \frac{B}{E}} + (-1)^t \left[\frac{B}{E}\right]^t \cdot p_o$$

Ակնհայտ է, որ երբ B/E<1, ապա $(B/E)^t$ ձգտում է 0-ի: Այսինքն, երբ B<E, առաջարկի կորի թեքությունն ավելի կտրուկ է, քան պահանջարկինը և հավասարակշռությունը կայուն է: Երբ B/E>1, ապա $(B/E)^t$ ձգտում է անվերջության և հավասարակշռությունն անկայուն է: Երբ B/E=1, p_t-ն տատանվում է հավասարակշիռ գնի շուրջ: Այսպիսով, համակարգի կայունության համար անհրաժեշտ է այն ֆունկցիայի պակաս ուժեղ արձագանքը, որն ունի ժամանակային լագ (առաջարկի ֆունկցիան):

Իրականում B/E>1 դեպքում անվերջ աճող տատանումներ չեն լինի, քանի որ ֆունկցիաները իրականում գծային չեն: Առավել իրատեսական ոչ գծային մոդելում առաջանում են մեծ, բայց վերջավոր ամպլիտուդի տատանումներ, որոնք արտադրության վերելքի և անկման տնտեսական ցիկլերի նախատիպն են հանդիսանում:

2.3. Նվազագույն ծախսերով արտադրության գծային մոդելը

Արտադրության գծային մոդելներում դիտարկվում է արտադրական ձեռնարկություն, որի համար որոշվում է արտադրության ծրագիրը, կամ այլ կերպ, փնտրվում են արտադրական գործընթացների կիրառության ինտենսիվությունները:

Արտադրական գործընթացը կամ տեխնոլոգիական եղանակը ներկայացվում է որպես որոշակի արդյունքների՝ այլ արդյունքների ձևափոխման գործընթաց:

Ձեռնարկության տնտեսական գործունեության ընթացքում ծագող տարբեր իրավիճակներում հաճախ անհրաժեշտ է լինում ընտրել հնարավոր այլընտրանքային տարբերակներից ինչ-որ իմաստով լավագույնը: Նման խնդիրների լուծման համար հաջողությամբ կիրառվում են մի շարք մաթեմատիկական մեթոդներ, որոնք առնչվում են օպտիմալացման խնդիրներին: Օպտիմալացման մեթոդներն անհրաժեշտ են ձեռնարկությունների գործունեության ընթացքում ծագող այնպիսի խնդիրների լուծման համար, ինչպիսիք են արտադրության պլանավորումը, ռեսուրսների և ներդրումների ռացիոնալ բաշխումը, թողարկվող արտադրատեսականու որոշումը, աշխատակազմի ռացիոնալ ընտրությունը, պաշարների կառավարումը և այլն:

Ստորև քննարկվում են նման տնտեսական իրավիճակների որոշ մոդելներ՝ առանց դրանց լուծման եղանակների հետազոտության:

Օրինակ, արտադրության կառուցվածքը հաճախ ներկայացվում է որպես ինչ-որ արդյունքներ (продукт) այլ արդյունքների ձևափոխող պրոցեսների համախմբություն: «Արդյունք» հասկացությունը այստեղ գործածվում է լայն իմաստով: Արդյունք ասելով նկատի են ունենում ծառայություններ, աշխատանքներ, բնական ռեսուրսներ, տեղեկատվություն, արտադրության միջոցներ և այլն: Յուրաքանչյուր արտադրական պրոցես բնութագրվում է արդյունքների վերջավոր վեկտորի միջոցով՝ $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, որտեղ a-ն բնութագրում է այդ պրոցեսի ընթացքում թողարկվող կամ ծախսվող արդյունքների մեծությունը:

Դիցուք, արտադրությունը բնութագրվում է n տիպի տարբեր արդյունքներով կամ՝ արտադրատեսակներով («արտադրատեսակ» ասելով կհասկանանք նյութական ռեսուրսներ, աշխատանք, ծառայություններ և այլն): Ընդ որում, այդ արտադրատեսակները ձեռնարկության գործունեության ընթացքում կարող են թողարկվել կամ սպառվել, կամ՝ միաժամանակ և թողարկվել, և սպառվել:

P տեխնոլոգիական պրոցեսը բնութագրվում է որպես այդ n արտադրատեսակների թողարկման կամ սպառման ծավալների կամ արժեքների (իսկ միաժամանակյա թողարկման և սպառման դեպքում՝ այդ ծավալների կամ արժեքների հանրահաշվական տարբերության) $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ վեկտոր, որտեղ a_k-ն k-րդ արտադրատեսակի ծավալն է $(1 \leq k \leq n)$:

Եթե k-րդ արտադրատեսակը արտադրվում է, ապա $a_k > 0$, եթե սպառվում է՝ $a_k < 0$, եթե այն և՛ արտադրվում է և՛ սպառվում, ապա a_k–ն արտադրվող և սպառվող ծավալների հանրահաշվական տարբերությունն է:

Այս մոդելում դիտարկվում են r տարբեր տեխնոլոգիական պրոցեսներ: Եթե s-րդ պրոցեսին համապատասխանող վեկտորը նշանակենք $a^{(s)}$ –ով, որտեղ $1 \leq s \leq r$, ապա այդ պրոցեսների ամբողջությունը կներկայացվի (r x n) չափանի մատրիցի տեսքով:

Կընդունենք, որ յուրաքանչյուր տեխնոլոգիական պրոցես կարող է ընթանալ որոշակի ինտենսիվությամբ (լարունությամբ). դիցուք, $h^{(s)}$–ը s-րդ պրոցեսի ինտենսիվությունն է $(h^{(s)}>0)$:

Կընդունենք, որ եթե $a^{(s)}$ –ը միավոր ինտենսիվությամբ արտադրական պրոցես է, ապա $h^{(s)}\, a^{(s)}$ նույնպես արտադրական պրոցես է (համասեռության մասին ենթադրություն), և եթե $a^{(s)}$ և $a^{(p)}$ արտադրական պրոցեսներ են, ապա $a^{(s)} + a^{(p)}$ նույնպես արտադրական պրոցես է (համատեղության մասին ենթադրություն):

Մոդելում արտադրական պլանը որոշվում է որպես այս r տեխնոլոգիական պրոցեսների ինտենսիվությունների $h=(h_1, h_2, \ldots, h_r)$ վեկտոր: h վեկտորով բնութագրվող արտադրական պլանի դեպքում j-րդ արտադրատեսակի թողարկվող քանակը բոլոր տեխնոլոգիական պրոցեսներում կկազմի՝ $a_{1j}h_1 + a_{2j}h_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{rj}h_r$:

Ձևակերպենք նվազագույն ծախսերով տրված պահանջարկի բավարարման արտադրության գծային մոդելը:

Ենթադրենք պահանջվում է թողարկել j-րդ արտադրատեսակից առնվազն δ_j ծավալով և հայտնի է, որ i-րդ տեխնոլոգիական պրոցեսը միավոր ինտենսիվությամբ կիրառելու դեպքում ձեռնարկության ծախսերը կազմում են γ_i: h_i ինտենսիվության գործադրման դեպքում ծախսերը կկազմեն $\gamma_i h_i$:

Անհրաժեշտ է ընտրել այնպիսի արտադրական պլան, որն ապահովի δ_j պահանջարկը և նվազագույնի հասցնի ծախսերը: Մաթեմատիկական ձևակերպմամբ՝ գտնել $h=(h_1, h_2.....,h_r)$ վեկտորը, որը բավարարի հետևյալ պայմաններին՝

$$\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + ... + \gamma_r h_r \to \min$$

$$a_{1j} h_1 + a_{2j} h_2 + \ldots + a_{rj} h_r \geq \delta_j, (1 \leq j \leq n)$$

$$h_i \geq 0, (1 \leq i \leq r)$$

2.4. Օպտիմալ պլանավորման Կանտորովիչի մոդելը[7]

Տնտեսությունը կարող է մեկնաբանվել որպես մարդկային գործունեության ոլորտ, որում իրականացվում են «պրոդուկտների» կամ բարիքների արտադրությունը, բաշխումը, սպառումը: Օպտիմալ պլանավորման Կանտորովիչի մոդելի շրջանակներում ձեռնարկությունը բնութագրվում է $a=(a_1, ..., a_k, ..., a_l)$ արտադրական պրոցեսների վեկտորներից կազմված $A=(a_{ij})_{r \times l}$ մատրիցով և $b=(b_1, ..., b_k, ..., b_l)$ պրոդուկտների սկզբնական պաշարների ոչ բացասական վեկտորով: Մոդելի ձևակերպման հիմնահարցը՝ դա պրոդուկտների վեկտորների ձևափոխումն է այլ պրոդուկտների վեկտորների որոշակի չափանիշներով: Պարզ է, որ այդ ձևափոխման հնարավոր տարբերակները բազմազան են, ուստի ձևափոխման ընտրությունը կատարվում է նախընտրելիության հայտանիշի ներմուծման միջոցով:

Եթե դիտարկվում են արտադրատեսակների երկու ցանկացած վեկտորներ՝ $x=(x_1,x_2, ...,x_m)$ և $y=(y_1, y_2, ...,y_m)$, ապա դրանց միջև սահմանվում է նախընտրելիության հարաբերությունը: Նախընտրելիության հարաբերությունը սովորաբար սահմանվում է որոշակի $u(x)$ օգտակարության ֆունկցիայի օգնությամբ,: Այս մոդելում $u(x)$ –ը սահմանվում է որպես λ_x, որը $(x-d-\lambda c) \geq 0$ անհավասարություններին բավարարող λ-ներից մեծագույնն է: $d=(d_1, ..., d_k, ...,$

[7] Մոդելը նկարագրված է Վ. Մակարովի մեկնաբանությամբ: Տե՛ս, **Â. Ë. Ìàêàðîâ,** Ìîäåëè è êîìïðòåðû â ýêîíîìèêå. Ì., Çíàíèå, 1979 ã.

d_l)-ն և $c=(c_{1,\ ...,}\ c_{k,\ ...,}\ c_l)$ -ն հաստատուն վեկտորներ են, որոնք մեկնաբանվում են համապատասխանաբար, որպես 1,...,l ուղղություններով իրականացվող ներդրումների (d) և սպառման կառուցվածքը բնութագրող (c) վեկտորներ:

Այսպիսով, այս մոդելում x վեկտորը նախընտրելի է y վեկտորից, եթե $\lambda_x > \lambda_y$, որտեղ λ_x-ը և λ_y-ը համապատասխանաբար

$(x-d-\lambda c)\geq 0$, $(y-d-\lambda c)\geq 0$ անհավասարություններին բավարարող թվերից մաքսիմալներն են: Այսինքն, λ-ն c սպառման վեկտորի այն առավելագույն բազմապատկիչն է, որ λc-ն դեռևս մնում է փոքր x – d վեկտորից: Նախընտրելիության այս հարաբերությունը սովորաբար անվանում են վերջնական սպառման մաքսիմացման հայտանիշ:

Այժմ ձևակերպենք օպտիմալ պլանավորման խնդիրը:

Դիցուք, տրված են՝ $b=(b_1,b_{2,\ ...,}b_m)$ վեկտորը, որը բնութագրում է արտադրատեսակների սկզբնական ծավալները ($b_k\geq 0$, $1\leq k\leq m$), արտադրական պրոցեսների $A=(a_{ij})_{r\ x\ m}$ մատրիցը, սպառման $c=(c_1,c_{2,\ ...,}c_m)$ և ներդրումների ծավալների $d=(d_1,d_{2,\ ...,}\ d_m)$ վեկտորները:

Անհրաժեշտ է գտնել արտադրական պրոցեսների գործադրման ինտենսիվությունների $h= (h_1,...,h_r)$, վեկտորը և այն λ բազմապատկիչը, որոնք հնարավորություն կտան արտադրատեսակների b սկզբնական ծավալներից ստանալ վերջնական սպառման համար նախատեսվող և d-ն գերազանցող մաքսիմալ ծավալներ:

Մաթեմատիկորեն այս խնդիրը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ:

Գտնել $h= (h_1,...,h_r)$ և λ, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին

$$\begin{cases} h\geq 0, \lambda \rightarrow \max \\ hA\geq d-b+\lambda c \end{cases}$$

Այս խնդիրը գծային ծրագրավորման խնդիր է: hA-ն բնութագրում է արտադրական պրոցեսների ողջ համախումբը, որի միջոցով սկզբնական բարիքների b ծավալները ձևափոխվում են $(d+\lambda .c)$ ծավալների:

Դիտարկենք թվային օրինակ:

Դիցուք ունենք 3 արտադրատեսակ և դրանց վերամշակման 2 արտադրաեղանակ. (-1,-1,-5) և (-1, 3, 2): Դիցուք 1-ին արտադրատեսակը (օրինակ, աշխատաժամանակը) միայն սպառվում է, 2-րդը և՛ արտադրվում է, և՛ սպառվում, իսկ 3-րդը միայն արտադրվում է:

Արտադրատեսակների սկզբնական ծավալներն են՝ b=(10,0,0), c=(0,1,1), իսկ d=(0,1,3): Դժվար չէ հաշվարկել, որ առաջին արտադրատեսակի ինտենսիվությունը պետք է վերցնել 12/7, երկրորդինը՝ 58/7: Այդ դեպքում c հավաքածուների բազմապատկիչը կընդունի մաքսիմալ հնարավոր արժեքը՝ 155/7: b վեկտորի ձևափոխումը $(d+\lambda .c)$=(0,12/7 (-1,-1,-5) +58/7(-1,-3, 2)=(-10, 162/7, 176/7):

Օպտիմալ պլանավորման մոդելում պարզորոշ արտահայտված է տնտեսական արդյունավետության խնդիրը. $h=(h_1,...,h_r,\lambda)$ օպտիմալ պլանի համար գոյություն ունի արտադրատեսակների գների այնպիսի հավաքածու՝ $p=(p_1, p_2,..., p_m)$, որը բոլոր արտադրատեսակների համար բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

(1) օպտիմալ պլանով նախատեսված բոլոր $a^{(s)}$ արտադրական պրոցեսների համար (այսինքն, որոնց համար $h^{(s)}>0$) ծախսումները հավասար են թողարկման արժեքին (p գներով հաշվարկած).

$$a^{(s)}p=0$$

(2) բոլոր մնացած արտադրական պրոցեսների համար ծախսումները չեն կարող լինել թողարկման արժեքից փոքր.

$$a^{(s)}p\leq 0$$

Սրանք օպտիմալ արտադրական պրոցեսներում արժեքի պահպանման պայմաններն են:

Այժմ պարզ է, թե ինչպես հաշվարկել տնտեսական արդյունավետությունը: Օրինակ, եթե առաջարկվել է նոր արտադրական պրոցես՝ a, ապա անհրաժեշտ է համեմատել դրա ծախսումներն ու հատույցը, հաշվարկված p գներով: Եթե $ap<0$, այսինքն ծախսումները գերազանցում են հատույցը, ուրեմն պրոցեսը տնտեսապես ոչ արդյունավետ է: Եթե $ap=0$, այսինքն ծախսումները հավասար են հատույցին, ուրեմն տվյալ պրոցեսը տնտեսական արդյունավետության իմաստով հավասարազոր է մյուս պրոցեսներին, և դրա կիրառումը չի վատթարացնի (սակայն չի էլ բարելավի) սահմանված պլանը: Վերջապես, եթե $ap>0$, ապա այս հարաբերակցությունը խոսում է այն մասին, որ հատույցը գերազանցում է ծախսումները, և տվյալ պրոցեսը տնտեսապես արդյունավետ է, այսինքն՝ այն կբարելավի սահմանված պլանը:

2.5. Դիսկրետ օպտիմալացման որոշ մոդելներ

2.5.1. Տրանսպորտային խնդիրը

Դիտարկենք որևէ արտադրանք թողարկող m ձեռնարկություններ (արտադրողներ) և այդ արտադրանքը սպառող n ձեռնարկություններ (սպառողներ): Դիտարկենք ժամանակի որևէ T միավոր (օր, ամիս, եռամսյակ, տարի) և ենթադրենք, որ հայտնի է T ժամանակում արտադրողներից յուրաքանչյուրի թողարկած արտադրանքի քանակը և յուրաքանչյուր սպառողին անհրաժեշտ արտադրանքի քանակը: Ենթադրենք նաև, որ արտադրանքը արտադրողից սպառողին տեղափոխելու ծախսերը գծայնորեն են կախված տեղափոխվող արտադրանքի քանակից:

Անհրաժեշտ է որոշել, թե ամեն մի արտադրողից ինչքա՞ն արտադրանք պետք է տրամադրվի յուրաքանչյուր սպառողի, որ բավարարվեն հետևյալ երեք պայմանները՝

ա) յուրաքանչյուր սպառող ստանա առնվազն այնքան, ինչքան իրեն անհրաժեշտ է,

բ) յուրաքանչյուր արտադրողից վերցվի ոչ շատ, քան իր արտադրածն է,

գ) արտադրանքը սպառողներին հասցնելու ընդհանուր տրանսպորտային ծախսը լինի հնարավորին չափ փոքր:

Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը ձևակերպելու համար համարակալենք արտադրողներին $1,2,...,m$, իսկ սպառողներին $1,2,...,n$ թվերով և ենթադրենք, որ հայտնի են a_i, b_j և c_{ij} թվերը, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, որտեղ՝

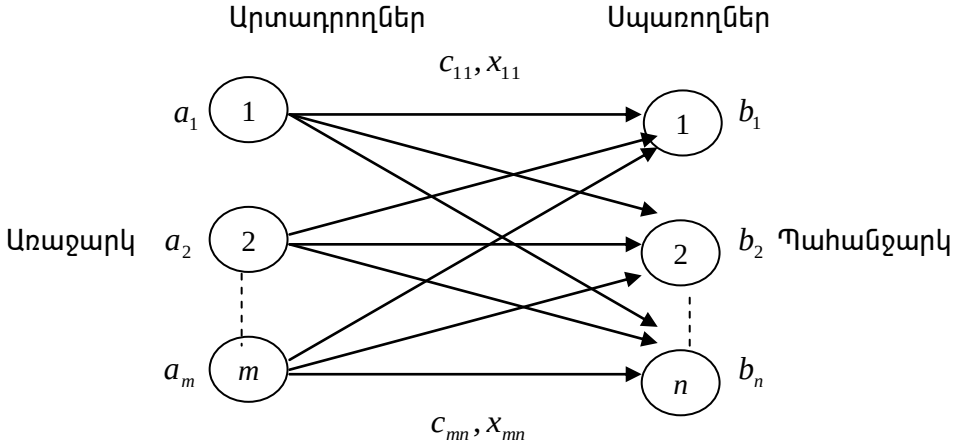
a_i – ն T ժամանակում i – րդ արտադրողի թողարկած արտադրանքի քանակն է,

b_j – ն T ժամանակում j – րդ սպառողին անհրաժեշտ արտադրանքի քանակն է,

c_{ij} – ն միավոր արտադրանքը i – րդ արտադրողից j – րդ սպառողին տեղափոխման ծախսն է:

a_i, b_j, c_{ij}, n, m թվերը խնդրի պարամետրերն են, որոնք T ժամանակի ընթացքում չեն փոխվում: Ներմուծենք x_{ij} փոփոխականներ, որտեղ x_{ij} – ն i – րդ արտադրողից j – րդ սպառողին հատկացվելիք արտադրանքի քանակն է:

Նկար 1-ում ցույց է տրված տրանսպորտային խնդրի ներկայացումը ցանցի տեսքով:



Նկար 1

Նկատենք, որ $(x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in})$-ը i-րդ արտադրողից $(1 \le i \le m)$ վերցված արտադրանքի ընդհանուր քանակն է, $(x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{mj})$-ն j-րդ սպառողին $(1 \le j \le n)$ տրված արտադրանքի ընդհանուր քանակն է, իսկ $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$-ն ընդհանուր տրանսպորտային ծախսն է: Հետևաբար տրասնպորտային խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կլինի:

Դիցուք տրված են m, n բնական թվերը, ոչ բացասական իրական թվերից կազմված $m \times n$ չափանի $C = (c_{ij})$ մատրիցը, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_m)$ և $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ վեկտորները: $(C, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ եռյակի համար ձևակերպենք հետևյալ խնդիրը: Գտնել այնպիսի ոչ բացասական իրական թվերից կազմված $m \times n$ չափանի $\mathbf{X} = (x_{ij})$ մատրից, որ

$$z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

և բավարարվեն

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, & i = 1,2,...m \qquad (2) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, & j = 1,2,...n \qquad (3) \end{cases}$$

պայմանները:

Այսպիսի տեսքը կոչվում է ոչ հավասարակշռված տրասնպորտային խնդրի մաթեմատիկական մոդել, ընդ որում նկատենք, որ սպառողների պահանջարկը կարելի է բավարարել այն և միայն այն դեպքում, եթե ամբողջ արտադրանքի քանակը փոքր չէ ամբողջ պահանջարկի քանակից՝ $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$:

Եթե ենթադրենք, որ $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, ապա կունենանք հավասարակշռված տեսքի տրասնպորտային խնդիր, որի մաթեմատիկական մոդելը կլինի հետևյալը՝

$$z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = 1,2,...m \quad (4) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = 1,2,...n \quad (5) \end{cases}$$

(2) և (4) պայմաններն ապահովում են $i-$րդ արտադրողի $(i = 1,2,...,m)$ առաջարկի, իսկ (3) և (5) պայմանները $j-$րդ սպառողի $(j = 1,2,...,n)$ պահանջարկի բավարարումը:

Մենք կուսումնասիրենք հավասարակշռված տեսքի տրանսպորտային խնդիրը: Իսկ թե ինչպես կարելի է ցանկացած ոչ հավասարակշռված տեսքի տրանսպորտային խնդիր (եթե նույնիսկ $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$) բերել հավասարակշռված տեսքի, կասվի առանձին (տե՛ս օրինակ 2):

Տրանսպորտային խնդրի լուծումը պոտենցիալների եղանակով: Տրանսպորտային խնդիրը կանոնական տեսքի ԳՕԽ է, հետևաբար այն կարելի է լուծել սիմպլեքս ալգորիթմով: Սակայն սահմանափակումների յուրահատուկ տեսքը հնարավորություն է ընձեռում առաջարկել այդ խնդրի լուծման ավելի պարզ և արդյունավետ ալգորիթմ (պոտենցիալների եղանակը), որի հիմքում այնուամենայնիվ օգտագործվում են սիմպլեքս ալգորիթմի հիմնական սկզբունքները:

Քանի որ սիմպլեքս ալգորիթմում շատ կարևոր է սկզբնական *թույլատրելի հենքային լուծում* (թ.հ.լ.) գտնելը, ապա այդ հարցը մենք կուսումնասիրենք առանձին, իսկ հետո նոր կառաջարկենք տրանսպորտային խնդրի լուծման համար ընդհանուր ալգորիթմ:

Տրանսպորտային խնդրի լուծման ալգորիթմը կլուսաբանվի օրինակի համար (օրինակ 1), ընդ որում տվյալների ներկայացման համար սովորական սիմպլեքս աղյուսակների փոխարեն օգտագործենք հատուկ տեսքի տրանսպորտային աղյուսակներ:

Օրինակ 1

Տրանսպորտային ընկերությունը զբաղվում է հատուկ մեքենաներով հացահատիկի փոխադրմամբ՝ 3 էլևատորներից դեպի 4 ջրաղացներ: Աղյուսակ 1-ում ցույց են տրված էլևատորների հացահատիկի բեռնաթափման հնարավորությունները (առաջարկ) և ջրաղացների պահանջմունքները (պահանջարկ), ինչպես նաև փոխադրման արժեքը (1 մեքենայով): Փոխադրման արժեքները՝ c_{ij} արտահայտված են դրամական միավորներով:

Աղյուսակ 1ա

	1	2	3	4	Առաջարկ
1	$c_{11}=10$ X_{11}	$c_{12}=2$ X_{12}	$c_{13}=20$ X_{13}	$c_{14}=11$ X_{14}	15
2	$c_{21}=12$ X_{21}	$c_{22}=7$ X_{22}	$c_{23}=9$ X_{23}	$c_{24}=20$ X_{24}	25
3	$c_{31}=4$ X_{31}	$c_{32}=14$ X_{32}	$c_{33}=16$ X_{33}	$c_{34}=18$ X_{34}	10
Պահանջարկ	5	15	15	15	

Աղյուսակ 1ա տեսքի աղյուսակները անվանում են տրանսպորտային աղյուսակներ: Տրանսպորտային աղյուսակը՝ դա $m\times n$ (մեր օրինակում 3×4) չափանի աղյուսակ է, որի i-րդ տողի և j-րդ սյունակի հատման վանդակի վերևի աջ անկյունում գրվում են c_{ij}-ի արժեքները, իսկ ներքևի ձախ անկյունում լրացվելու են x_{ij}-ի արժեքները: Առանձին $(n+1)$-րդ սյունակում տրված է առաջարկի $\bar{a}$ վեկտորը, իսկ առանձին $(m+1)$-րդ տողում՝ պահանջարկի $\bar{b}$ վեկտորը: x_{ij} արժեքները անհրաժեշտ է լրացնել այնպիսի ոչ բացասական թվերով, որ տրանսպորտային աղյուսակի յուրաքանչյուր տողի տարրերի գումարը հավասար լինի այդ տողի համապատասխան առաջարկին (տե՛ս պայման (4)), իսկ յուրաքանչյուր սյունակի տարրերի գումարը՝ համապատասխան պահանջարկին (տե՛ս պայման (5)):

Նշված կերպով ստացված ցանկացած $m\times n$ չափանի X մատրից, որը կբավարարի (4) և (5) պայմաններին, անվանենք հավասարակշռված տեսքի

տրանսպորտային խնդրի *թույլատրելի լուծում:* Մեր խնդիրն է բոլոր *թույլատրելի լուծումների բազմությունից* ընտրել այն, որի համար $z(X)$ նպատակային ֆունկցիան կստանա նվազագույն արժեք:

***Դիտողություն 1*:** Եթե լավագույն լուծումը միակը չէ, ապա բավական է գտնել որևէ լավագույն լուծում:

Սկզբնական թույլատրելի հենքային լուծում գտնելու եղանակներ: Հավասարակշռված տեսքի տրանսպորտային խնդրի մոդելն ունի $m+n$ սահմանափակումներ, սակայն քանի որ $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, ապա այդ հավասարումներից մեկն ավելորդ է: Հետևաբար անկախ սահմանափակումների քանակը տրանսպորտային մոդելում՝ $m+n-1$ է, որտեղից հետևում է, որ սկզբնական թույլատրելի հենքային լուծումը բաղկացած է $m+n-1$ հենքային փոփոխականներից: Դիտարկվող օրինակի համար սկզբնական թույլատրելի հենքային լուծումը պարունակում է 3+4-1=6 հենքային փոփոխականներ:

Տրանսպորտային մոդելի հատուկ կառուցվածքը սկզբնական թույլատրելի հենքային լուծման կառուցման համար թույլ է տալիս կիրառել հետևյալ եղանակները (արհեստական փոփոխականների օգտագործման փոխարեն, ինչը որ արվում է սիմպլեքս մեթոդի ժամանակ):

1. Հյուսիսարևմտյան անկյան եղանակ:
2. Նվազագույն արժեքի եղանակ:
3. Ֆոգելի կամ տուգանքների եղանակ:

Այս եղանակների տարբերությունը սկզբնական թույլատրելի հենքային լուծման «որակի» մեջ է, այսինքն որքան է սկզբնական լուծումը մոտ լավագույնին: Ընդհանուր դեպքում, Ֆոգելի եղանակը տալիս է ավելի լավ սկզբնական լուծում, քան մյուս երկու եղանակները: Սակայն հյուսիսարևմտյան անկյան և նվազագույն արժեքի եղանակները պահանջում են ավելի քիչ քանակությամբ հաշվարկներ:

Այս բաժնում կնկարագրենք միայն հյուսիսարևմտյան եղանակը:

Հյուսիսարևմտյան անկյան եղանակ

Գործողությունը սկսվում է տրանսպորտային աղյուսակի վերին ձախ (հյուսիսարևմտյան) անկյունից՝ X_{11} փոփոխականից:

Քայլ 1: Եթե գտնվում ենք աղյուսակի որևէ վանդակում, ապա այդ վանդակի հենքային փոփոխականին տրվում է առավելագույն արժեք (որքանով թույլ կտան պահանջարկի և առաջարկի սահմանափակումները):

Քայլ 2: Ջնջում ենք ամբողջությամբ տողը (սյունակը)՝ իրացված առաջարկով (բավարարված պահանջարկով): Դա նշանակում է, որ ջնջված տողում (սյունակում) մենք այլևս չենք տա արժեքներ այլ հենքային փոփոխա-

կանների (բացի առաջին քայլում որոշված փոփոխականից): Եթե միաժամանակ բավարարված են առաջարկն ու պահանջարկը, ջնջում ենք միայն տողը կամ միայն սյունակը:

Քայլ 3: Եթե աղյուսակի բոլոր վանդակները ջնջված են, ապա գործընթացն ավարտվում է: Հակառակ դեպքում անցնում ենք աջակողմյան վանդակ, եթե ջնջված է սյունակը, և ստորին վանդակ, եթե ջնջված է տողը: Այնուհետև վերադառնում ենք քայլ 1-ին:

Կիրառելով նշված գործընթացը օրինակ 1-ի համար, կստանանք սկզբնական թույլատրելի հենքային լուծում, որը ցույց է տրված 1բ աղյուսակում՝

Աղյուսակ 1բ

Հյուսիսարևմտյան անկյան եղանակ

	1	2	3	4	Առաջարկ
1	10 5	2 10	20	11	15
2	12	7 5	9 15	20 5	25
3	4	14	16	18 10	10
Պահանջարկ	5	15	15	15	

Այս աղյուսակում սլաքներով ցույց է տրված վեց հենքային փոփոխականների որոշման հերթականությունը՝ X_{11}=5, X_{12}=10, X_{22}=5, X_{23}=15, X_{24}=5, X_{34}= 10: Պարզ է, որ մնացած 12 – 6 = 6 ոչ հենքային փոփոխականների արժեքները հավասար են 0-ի (այդ արժեքները աղյուսակում նշված չեն): Տրանսպորտային ծախսը կլինի $z = 5 \cdot 10 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 18 = 520$ դոլար:

Տրանսպորտային խնդրի լուծման ալգորիթմը

Նկարագրենք տրանսպորտային խնդրի լուծման ալգորիթմը, որը քայլ առ քայլ կրկնում է սիմպլեքս ալգորիթմի հիմնական քայլերը:

Քայլ 1: Գտնվում է որևէ *սկզբնական թույլատրելի հենքային լուծում* (վերը նկարագրված երեք եղանակներից որևէ մեկով):

Քայլ 2: *Օպտիմալության հայտանիշով* որոշվում է հենք ներմուծվող այն ոչ հենքային փոփոխականը, որը կարող է փոքրացնել նպատակային ֆունկցիայի արժեքը: Եթե այդպիսին չկա, ապա ստացվում է խնդրի լավագույն լուծումը, վերջացնել գործընթացը: Հակառակ դեպքում անցնել քայլ 3-ին:

Քայլ 3: *Թույլատրելիության հայտանիշով* որոշվում է, թե ընթացիկ հենքային փոփոխականներից որն է հենքից արտաքսվում: Այնուհետև գտնվում է նոր հենքային լուծում: Անցնել քայլ 2-ին:

Նշենք, որ տրանսպորտային խնդրում հնարավոր չէ, որ նպատակային ֆունկցիան անվերջ նվազի ($z \geq 0$) և բացի այդ գոյություն ունի գոնե մեկ թույլատրելի հենքային լուծում ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$), այնպես որ այդ երկու դեպքերն այս ալգորիթմում չեն քննարկվում (չնայած ընդհանուր սիմպլեքս մեթոդում դիտարկվում և քննարկվում են նաև այդ դեպքերը): Բացի այդ տրանսպորտային աղյուսակի հատուկ կառուցվածքը թույլ է տալիս հեշտացնել հաշվարկները:

Որպես սկզբնական թույլատրելի հենքային լուծում վերցնենք հյուսիս-արևմտյան եղանակով ստացված լուծումը, շարունակենք սիմպլեքս ալգորիթմը հաջորդաբար կիրառելով երկրորդ և երրորդ քայլերն այնքան, մինչև որ կստանանք լավագույն լուծումը:

Աղյուսակ 1

Հյուսիսարևմտյան անկյան եղանակով ստացված սկզբնական լուծումը

	1	2	3	4	Առաջարկ
1	10 5	2 10	20	11	15
2	12	7 5	9 15	20 5	25
3	4	14	16	18 10	10
Պահանջարկ	5	15	15	15	

Քայլ 2. Ընթացիկ ոչ հենքային փոփոխականների միջից հենք ներմուծվող փոփոխականի որոշումը հիմնված է z-տողի այն գործակիցների հաշվարկման վրա, որոնք համապատասխանում են ոչ հենքային փոփոխականներին: Այդ գործընթացը կատարվում է պոտենցիալների մեթոդի օգնությամբ, որը ինչպես ցույց կտրվի հետագայում, հիմնված է երկակի խնդրի և երկակիության տեսության վրա:

Պոտենցիալների մեթոդում տրանսպորտային աղյուսակի յուրաքանչյուր i-րդ տողին և յուրաքանչյուր j-րդ սյունակին համապատասխանում են թվեր՝ (պոտենցիալներ) u_i և v_j: Յուրաքանչյուր X_{ij} հենքային փոփոխականի համար u_i և v_j պոտենցիալները բավարարում են՝ $u_i+v_j=c_{ij}$ հավասարմանը: Դիտարկվող խնդրում ունենք 7 անհայտ փոփոխականներ (պոտենցիալներ) և 6 հավասարումներ, որոնք համապատասխանում են 6 հենքային փոփոխականներին: Որպեսզի այդ հավասարումների համակարգից գտնենք պոտենցիալների արժեքները, անհրաժեշտ է դրանցից մեկին տալ որևէ արժեք (սովորաբար ենթադրում են $u_1=0$) և այնուհետև հերթականությամբ հաշվարկել մնացած պոտենցիալների արժեքները: Հաշվարկները բերված են աղյուսակ 2-ում:

Աղյուսակ 2

Պոտենցիալների որոշումը

Հենքային փոփոխականները	Պոտենցիալների նկատմամբ հավասարումներ	Լուծումներ
X_{11}	$u_1+v_1=10$	$u_1=0 \Rightarrow v_1=10$
X_{12}	$u_1+v_2=2$	$u_1=0 \Rightarrow v_2=2$
X_{22}	$u_2+v_2=7$	$v_2=2 \Rightarrow u_2=5$
X_{23}	$u_2+v_3=9$	$u_2=5 \Rightarrow v_3=4$
X_{24}	$u_2+v_4=20$	$u_2=5 \Rightarrow v_4=15$
X_{34}	$u_3+v_4=18$	$v_4=15 \Rightarrow u_3=3$

Այսպիսով, ունենք՝ $u_1=0$, $u_2=5$, $u_3=3$, $v_1=10, v_2=2, v_3=4, v_4=15$: Այնուհետև օգտագործելով պոտենցիալների հաշվարկված արժեքները, յուրաքանչյուր ոչ հենքային փոփոխականի համար հաշվարկվում են $u_i+v_j-c_{ij}$ մեծությունները: Հաշվարկների արդյունքները բերված են աղյուսակ 3-ում:

Աղյուսակ 3

Հաշվարկներ ոչ հենքային փոփոխականների համար

Ոչ հենքային փոփոխականներ	$u_i+v_j-c_{ij}$ – ի արժեքները
X_{13}	$u_1+v_3-c_{13}=0+4-20=-16$
X_{14}	$u_1+v_4-c_{14}=0+15-11=4$
X_{21}	$u_2+v_1-c_{21}=5+10-11=3$
X_{31}	$u_3+v_1-c_{31}=3+10-4=9$
X_{32}	$u_3+v_2-c_{32}=3+2-14=-9$
X_{33}	$u_3+v_3-c_{33}=3+4-16=-9$

Հաշվարկված արժեքները հենքային փոփոխականների զրոյական արժեքների հետ միասին (քանի որ ցանկացած բազիսային X_{ij} փոփոխականի համար $u_i+ v_j -c_{ij}=0$) փաստորեն հանդիսանում են սիմպլեքս աղյուսակի z տողի գործակիցները (աղյուսակ 4):

Աղյուսակ 4

Հենք մտնող փոփոխականի որոշումը

Հենք	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}
z	0	0	-16	4	3	0	0	0	9	-9	-9	0

Քանի որ տրանսպորտային խնդրում փնտրում ենք փոխադրումների արժեքի նվազագույնը, ապա հենք կմտնի այն փոփոխականը, որը z տողում ունի ամենամեծ գործակից, տվյալ դեպքում X_{31}-ը:

Նկարագրված հաշվարկները կարելի է կատարել անմիջականորեն տրանսպորտային աղյուսակում (աղյուսակ 5): Այս դեպքում անհրաժեշտություն չկա տեսանելի ձևով գրել պոտենցիալների նկատմամբ հավասարումները: Տրանսպորտային աղյուսակում հաշվարկները սկսվում են u_1-ին 0 արժեք տալով: Այնուհետև հաշվարկվում են բոլոր այն v_j պոտենցիալները, որոնք առաջին տողում ունեն հենքային փոփոխական (մեր դեպքում v_1 և v_2): Ապա X_{22} հենքային փոփոխականին համապատասխան պոտենցիալների նկատմամբ հավասարումների հիման վրա հաշվարկվում է u_2-ը: Իմանալով u_2-ը, կարող ենք գտնել v_3-ը և v_4-ը, ինչը թույլ է տալիս հաշվարկել նաև u_3-ը: Քանի որ բոլոր պոտենցիալները հայտնի են, հետագայում յուրաքանչյուր X_{ij} ոչ հենքային փոփոխականների համար հաշվարկվում են $u_i+v_j-c_{ij}$ մեծությունները: Այդ մեծությունները աղյուսակում 5-ում գրված են վանդակների ստորին աջ անկյունում:

Աղյուսակ 5

Պոտենցիալների արժեքների հաշվարկները և հենք մտնող փոփոխականի որոշումը

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	**Առաջարկ**
$u_1 = 0$	10 5	2 10	20 $\boxed{-16}$	11 $\boxed{4}$	**15**
$u_2 = 5$	12 $\boxed{3}$	7 5	9 15	20 5	**25**
$u_3 = 3$	4 $\boxed{9}$	14 $\boxed{-9}$	16 $\boxed{-9}$	18 10	**10**
Պահանջարկ	**5**	**15**	**15**	**15**	

Այսպիսով որոշեցինք հենք ներմուծվող փոփոխականը՝ X_{31}: Այժմ պետք է որոշել հենքից արտաքսվող փոփոխականը, այսինքն ընթացիկ հենքային փոփոխականներից մեկը պետք է դառնա ոչ հենքային և ստանա 0 արժեք, որպեսզի հենքային փոփոխականների թիվը մնա հաստատուն (տվյալ օրինակում՝ 3+4-1=6):

Քայլ 3. Հենքից արտաքսվող փոփոխականը որոշվում է հետևյալ կերպ: Ընտրելով հենք ներմուծվող X_{31} փոփոխականը, մենք ուզում ենք, որ այդ փոփոխականին համապատասխանող երթուղիով փոխադրումները կրճատեն փոխադրումների ընդհանուր արժեքը: Քննարկենք, թե ինչ ծավալ ունեցող բեռ կարելի է փոխադրել այդ երթուղիով:

Նշանակենք θ-ով (3,1) երթուղիով տեղափոխվող բեռի ծավալը (այսինքն $X_{31}=\theta$): θ-ի առավելագույն արժեքը որոշում ենք հետևյալ երկու պայմաններից:

1. Պետք է բավարարվեն առաջարկի և պահանջարկի սահմանափակումները:
2. Ոչ մի երթուղիով չպետք է կատարվեն բեռի բացասական ծավալով փոխադրումներ:

Այս պայմանները թույլ են տալիս գտնել θ-ն և որոշել հենքից արտաքսվող փոփոխականը: Սկզբում կառուցենք փակ երթուղի (ցիկլ), որը սկսվում և վերջանում է (3,1) վանդակում: Այն բաղկացած է հորիզոնական և ուղղահայաց հատվածների հաջորդականությունից: Հատվածները միացնում են ընթացիկ հենքային փոփոխականներին համապատասխանող վանդակները, ինչպես նաև ներմուծվող փոփոխականին համապատասխանող վանդակը: Աղյուսակ 6-ում ցույց է տրված ցիկլը X_{31} փոփոխականի համար:

Ցանկացած ներմուծվող փոփոխականի համար կարելի է կառուցել միայն մեկ փակ երթուղի:

Աղյուսակ 6

Փակ երթուղու կառուցումը X_{31}-ի համար

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Առաջարկ
$u_1 = 0$	10 5-θ	2 10+θ	20 -16	11 4	15
$u_2 = 5$	12 3	7 5-θ	9 15	20 5+θ	25
$u_3 = 3$	4 θ 9	14 -9	16 -9	18 10-θ	10
Պահանջարկ	5	15	15	15	

Այժմ գտնենք θ-ի արժեքը: Որպեսզի բավարարվեն առաջարկի և պահանջարկի սահմանափակումները, պետք է հերթականությամբ գումարենք և հանենք θ-ն այն հենքային փոփոխականների արժեքներին, որոնք գտնվում են երթուղու անկյունային վանդակներում: Հենքային փոփոխականների նոր արժեքները կմնան ոչ բացասական, եթե տեղի ունենան հետևյալ անհավասարումները՝

$$\begin{cases} X_{11}=5-\theta \geq 0 \\ X_{22}=5-\theta \geq 0: \\ X_{34}=10-\theta \geq 0 \end{cases}$$

Այստեղից հետևում է, որ ամենամեծ արժեքը, որը կարող է ստանալ θ-ն, դա 5- ն է, ընդ որում X_{11} և X_{22} փոփոխականները արդեն դառնում են 0: Քանի որ միայն մեկ փոփոխական է հեռացվում հենքից, ապա ընտրենք որևէ մեկը, օրինակ X_{11}-ը:

Որոշելով հենք ներմուծվող փոփոխականի արժեքը (X_{31} =5) և հենքից հեռացվող փոփոխականը, հետագայում պետք է ուղղվեն այն հենքային փոփոխականների արժեքները, որոնք գտնվում են փակ երթուղու անկյունային վանդակներում այնպես, ինչպես ցույց է տրված աղյուսակ 7-ում: Քանի որ բեռի մեկ միավորի տեղափոխումը (3,1) երթուղիով փոքրացնում է ընդհանուր արժեքը 9-ով ($9 = u_3 + v_1 - c_{31}$), ապա փոխադրումների գումարային

արժեքը կլինի 9 * 5=45- ով պակաս, քան նախորդ լուծման մեջ էր: Այսպիսով, փոխադրումների նոր գումարային արժեքը կկազմի 520-45=475$:

Աղյուսակ 7

Փակ երթուղու կառուցումը X_{14}-ի համար

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Առաջարկ
$u_1 = 0$	10 -9	2 15-θ	20 -16	11 θ 4	15
$u_2 = 5$	12 -6	7 0+θ	9 15	20 10-θ	25
$u_3 = 3$	4 5	14 -9	16 -9	18 5	10
Պահանջարկ	5	15	15	15	

Ունենալով նոր հենքային լուծում, անհրաժեշտ է կրկնել պոտենցիալների հաշվարկները, ինչպես ցույց է տրված աղյուսակ 7-ում: Հենք ներմուծվող նոր փոփոխականը կլինի X_{14} -ը: Փակ երթուղին, որը համապատասխանում է այդ փոփոխականին, թույլ է տալիս գտնել նրա արժեքը (X_{14}=10) և հենքից հեռացվող փոփոխականը՝ X_{24}:

Ստացվող նոր լուծումը, որը ցույց է տրված աղյուսակ 8-ում, 4$*10=40$-ով փոքրացնում է նպատակային ֆունկցիայի արժեքը: Այսպիսով, փոխադրումների նոր գումարային արժեքը կազմում է 475-40=435$: Այժմ $u_i+v_j-c_{ij}$-ի նոր արժեքները բոլոր ոչ հենքային X_{ij} փոփոխականների համար բացասական են: Այդ պատճառով էլ աղյուսակ 8-ում բերված լուծումը լավագույնն է:

Աղյուսակ 8

Տրանսպորտային խնդրի լավագույն լուծումը

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Առաջարկ
$u_1 = 0$	10 [-13]	2 5	20 [-16]	11 10	**15**
$u_2 = 5$	12 [-10]	7 10	9 15	20 [-4]	**25**
$u_3 = 3$	4 5	14 [-5]	16 [-5]	18 5	**10**
Պահանջարկ	**5**	**15**	**15**	**15**	

Ստացված լուծումը, էլևատորներից ջրաղացներ հացահատիկի փոխադրման սկզբնական խնդրի համար տրված է աղյուսակ 9-ում:

Աղյուսակ 9

Շտեմարանից	Դեպի ջրաղաց	Ցորենատարների քանակությունը
1	2	5
1	4	10
2	2	10
2	3	15
3	1	5
3	4	5

Բոլոր տեղափոխումների ընդհանուր նվազագույն արժեքը կկազմի 435 դոլար:

Պոտենցիալների մեթոդը որպես սիմպլեքս մեթոդի մեկնաբանություն: Պոտենցիալների մեթոդի կապը սիմպլեքս մեթոդի հետ հիմնված է ԳՕ խնդիրների երկակիության տեսության վրա: Ելնելով երկակի խնդիր կազմելու կանոններից հավասարակշռված տեսքի տրանսպորտային խնդրի երկակի խնդիրը կգրվի հետևյալ կերպ:

Գտնել այնպիսի $u=(u_1,u_2,...,u_m)\in R^m$ և $v=(v_1,v_2,...,v_n)\in R^n$ վեկտորներ, որ

$$z=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=}^{n}b_jv_j\ \to \max \qquad (6)$$

և բավարարվեն

$$u_i+v_j\le c_{ij} \qquad (7)$$

պայմանները բոլոր i,j-երի համար, որտեղ u_i և v_j ազատ փոփոխականներ են, ընդ որում u_i-ն երկակի փոփոխական է, որը համապատասխանում է i-րդ առաջարկի սահմանափակմանը, իսկ v_j–ն երկակի փոփոխական, որը համապատասխանում է j-րդ պահանջարկի սահմանափակմանը:

Երկակիության տեսությունից հետևում է, որ X_{ij} փոփոխականի գործակիցը նպատակային ֆունկցիայում պետք է հավասար լինի $u_i+v_j-c_{ij}$: Բայց, ինչպես արդեն գիտենք, այդ մեծությունը պետք է հավասար լինի 0 յուրաքանչյուր հենքային փոփոխականի համար: Այլ խոսքերով, այդ փոփոխականների համար պետք է տեղի ունենա $u_i+v_j=c_{ij}$ պայմանը: Ունենալով **m+n-1** այդպիսի հավասարումներ և լուծելով դրանք որպես գծային հավասարումների համակարգ, գտնում ենք u_i և v_j պոտենցիալների արժեքները: Հաշվարկելով պոտենցիալների արժեքները, բոլոր ոչ հենքային փոփոխականների միջից որոշում ենք հենք ներմուծվող այն փոփոխականը, որի համար $u_i+v_j-c_{ij}$ դրական մեծությունն ամենամեծն է:

Դիտողություն 2: Տրանսպորտային խնդրի ալգորիթմի պոտենցիալների մեթոդում երկակի փոփոխականներից մեկին տալիս ենք կամայական արժեք: Դա նշանակում է, որ ուղիղ խնդրի միևնույն հենքային լուծմանը համապատասխանում է երկակի խնդրի ոչ միակ լուծում: Թվում է, թե դա հակասում է ԳՕ տեսության դրույթներին, որտեղ երկակի փոփոխականների արժեքները հաշվարկվում են որպես նպատակային ֆունկցիայի գործակիցների հենքային փոփոխականների վեկտորի և հենքին համապատասխան հակադարձ մատրիցի արտադրյալ: Սակայն ապացուցվում է, որ տրանսպորտային մոդելում հակադարձ մատրիցան միշտ որոշվում է միանշանակ կերպով, այն ժամանակ, երբ նպատակային ֆունկցիայի հենքային փոփոխականների գործակիցների վեկտորը կարելի է որոշել ոչ միակ ձևով: Մասնավորապես ցույց է տրվում, որ եթե C_{ij} գործակիցը փոխարինենք $C_{ij}+K$-ով $(1\le i\le m, 1\le j\le n)$, որտեղ K-ն կամայական հաստատուն է, ապա խնդրի լավագույն լուծումը չի փոխվի: Այսինքն ստացվում է, որ մեկ երկակի փոփո-

խականին կամայական արժեք տալը հավասար է C_{ij} գործակիցներին որևէ K հաստատուն գումարելուն:

Տրանսպորտային խնդրի երկակի խնդիրը և նրա տնտեսագիտական մեկնաբանումը:

Կազմենք ոչ հավասարակշռված տեսքի տրանսպորտային խնդրի երկակի խնդիրը՝ օգտվելով երկակի խնդիր կազմելու կանոններից.

Գտնել այնպիսի $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,...,u_m)\in R^m$ և $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,...,v_n)\in R^n$ վեկտորներ, որ

$$f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=-\sum_{i=1}^{m}a_i\cdot u_i+\sum_{j=1}^{n}b_j\cdot v_j\to max \qquad (8)$$

և բավարարվեն

$$\begin{cases}-u_i+v_j\le c_{ij} & 1\le i\le m, 1\le j\le n\\ u_i\ge 0\\ v_j\ge 0\end{cases} \qquad (9)$$

պայմանները:

Տանք երկակի խնդրի տնտեսագիտական մեկնաբանումը: Ենթադրենք հայտնվել է մի նոր տրանսպորտային ձեռնարկություն, որն առաջարկում է նոր եղանակով կազմակերպել արտադրանքի տեղափոխումը արտադրողից սպառողին: Այդ ձեռնարկությունը գնում է $i-$րդ արտադրողի $(i=1,2,...,m)$ միավոր արտադրանքը u_i գներով և վերավաճառում է $j-$րդ սպառողին $(j=1,2,...,n)$ միավոր արտադրանքը v_j գներով: Նախկինում միավոր արտադրանքը $i-$րդ արտադրողից $j-$րդ սպառողին տեղափոխման ծախսն էր c_{ij}, իսկ այժմ կծախսվի $-u_i+v_j$, քանի որ $-u_i+v_j\le c_{ij}$, ապա երկակի խնդրի թույլատրելի տիրույթին բավարարող ցանկացած $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ վեկտորների համար տեղափոխման ընդհանուր տրանսպորտային ծախսերը **չեն աճի**: Նաև բնական է նոր տրանսպորտային ձեռնարկության նպատակը՝ առավելագույնի հասցնել շահույթը:

Ոչ հավասարակշռված տրանսպորտային խնդրի բերումը հավասարակշռված խնդրի:

Դիտարկենք օրինակի վրա, թե ինչպես կարելի է, օգտագործելով մի հնարք, ոչ հավասարակշռված տրանսպորտային խնդրի մաթեմատիկական մոդելը դարձնել հավասարակշռված:

Օրինակ 2: MG Auto ավտոմեքենաներ արտադրող ընկերությունը ունի 3 ձեռնարկություն՝ Լոս-Անջելեսում, Դետրոյտում և Նոր Օրլեանում և 2 բաշխման կենտրոններ՝ Դենվերում և Մայամիում: Հաջորդ եռամսյակում գործարանների արտադրության ծավալները (առաջարկ) կկազմեն համա-

պատասխանաբար 1000, 1500 և 1200, իսկ պահանջարկը՝ 2300 և 1400: Քաղաքների միջև տարածությունը (մղոններով) բերված են աղյուսակ 10-ում՝

Աղյուսակ 10

Քաղաքների միջև հեռավորությունները

	Դենվեր	Մայամի
Լոս- Անջելես	1000	2690
Դետրոյտ	1250	1350
Նոր Օրլեան	1275	850

Տրանսպորտային ընկերությունը գնահատում է իր ծառայությունները 8 ցենտ՝ 1 ավտոմեքենայի փոխադրումը 1 մղոն տարածության վրա: Արդյունքում ստանում ենք փոխադրումների հետևյալ արժեքը յուրաքանչյուր երթուղիով (աղյուսակ 11):

Աղյուսակ 11

Փոխադրումների արժեքները

	Դենվեր (1)	Մայամի (2)
Լոս- Անջելես (1)	80$	215$
Դետրոյտ (2)	100$	108$
Նոր Օրլեան (3)	102$	68$

Կազմենք տրանսպորտային աղյուսակ (աղյուսակ 12):

Աղյուսակ 12

Հավասարակշռված տրանսպորտային աղյուսակ օրինակ 2-ի համար

	Դենվեր	Մայամի	Առաջարկ
Լոս- Անջելես	80 X_{11}	215 X_{12}	1000
Դետրոյտ	100 X_{21}	108 X_{22}	1500
Նոր Օրլեան	102 X_{31}	68 X_{32}	1200
Պահանջարկ	2300	1400	

Այժմ ենթադրենք, որ Դետրոյտի ձեռնարկությունը կրճատել է արտադրությունը մինչև 1300 1500-ի (փոխարեն, ինչպես առաջ էր): Այդ դեպքում ավտոմեքենաների արտադրության ընդհանուր քանակը՝ 3500, ավելի քիչ է, քան պատվիրած ավտոմեքենաների քանակը՝ 3700: Ակնհայտ է, որ պա-

հանջների մի մասը չի բավարարվի: Քանի որ տվյալ դեպքում պահանջարկը գերազանցում է առաջարկը, հավասարակշռության վերականգման համար ներմուծենք ֆիկտիվ (ոչ իրական) ձեռնարկություն, որն արտադրում է 200=3700-3500 ավտոմեքենաներ: Ընդունենք ֆիկտիվ գործարանից մինչև բաշխման կենտրոններ փոխադրումների արժեքը զրոյական, քանի որ այդպիսի գործարան գոյություն չունի: Ընդհանուր առմամբ, ֆիկտիվ ձեռնարկությունից դեպի նպատակակետ փոխադրման արժեքները կարող են ընդունել ցանկացած դրական արժեք: Օրինակ, որպեսզի ապահովենք Մայամիի բոլոր պահանջների իրականացումը կարելի է դնել փոխադրման շատ բարձր արժեք (տուգանք) ֆիկտիվ ձեռնարկությունից դեպի Մայամի: Աղյուսակ 13-ում ներկայացված է հավասարակշռված մոդելը և նրա լավագույն լուծումը, որը ստացվել է, կիրառելով պոտենցիալների եղանակը:

Աղյուսակ 13

Հավասարակշռված մոդելը և լավագույն լուծումը

	Դենվեր	Մայամի	Առաջարկ
Լոս- Անջելես	80 1000	215	1000
Դետրոյտ	100 1300	108	1500
Նոր Օրլեան	102	68 1200	1200
Ֆիկտիվ ձեռնարկություն	0	0 200	200
Պահանջարկ	2300	1400	

Լուծումը ցույց է տալիս, որ ֆիկտիվ ձեռնարկությունը կփոխանցի Մայամի 200 ավտոմեքենա: Դա նշանակում է, որ Մայամիի բաշխիչ կենտրոնի համար պահանջված 1400 ավտոմեքենայից 200-ը առաքված չի լինի:

Եթե ենթադրենք, որ Դենվերի պահանջարկը 1900 է, ապա կստանանք մի իրավիճակ, երբ առաջարկը գերազանցում է պահանջարկին: Այս իրավիճակում հարկավոր է մտցնել ֆիկտիվ նպատակակետ, որը կկլանի ավելցուկային առաջարկը: Այստեղ ևս կարելի է դնել փոխադրումների 0-ական արժեք՝ դեպի ֆիկտիվ նպատակակետ: Իսկ եթե անհրաժեշտ է արտահանել ինչ-որ ձեռնարկության ողջ արտադրանքը, ապա նշանակվում է այդ ձեռնարկությունից դեպի նշանակակետ շատ բարձր տրանսպորտային գներ: Աղյուսակ 14-ում ցույց է տրված նոր հավասարակշռված մոդելը և նրա լավագույն լուծումը:

Աղյուսակ 14

Նոր հաշվարկված մոդելը և լավագույն լուծումը

	Դենվեր	Մայամի	Ֆիկտիվ նպատակակետ	Առաջարկ
Լոս- Անջելես	80 1000	215	0	1000
Դետրոյտ	100 900	108 200	0 400	1500
Նոր Օրլեան	102	68 1200	0	1200
Պահանջարկ	1900	1400	400	

Լուծումը ցույց է տալիս, որ 400 ավտոմեքենա Դետրոյտի ձեռնարկությունից պահանջարկ չունեն (ավելորդ են):

Դիտողություն 3: Այն իրավիճակը, երբ փոխադրումների ելակետային և վերջնական կետերի միջև գոյություն ունեն բեռների պահպանման համար միջակա (տրանզիտային) կայաններ, այս գրքում չի դիտարկվում: Այդ մոդելն ավելի ընդհանուր է, քան սովորական տրանսպորտայինը: Սակայն, բուերներ ներմուծելով, կարելի է միջակա կայաններով տրանսպորտային խնդիրը վերափոխել սովորական տրանսպորտային խնդրի և լուծել պոտենցիալների եղանակով:

Դիտողություն 4: Հարկ ենք համարում նշել, որ տրանսպորտային մոդելի օգտագործումը չի սահմանափակվում միայն ելակետային և վերջնական երկրաչափական կայանների միջև ինչ-որ բեռների փոխադրումների խնդիրների լուծումներով: Պաշարների կառավարման, սարքավորումների բաշխման և այլ շատ խնդիրներ կարելի է բերել տրանսպորտային խնդրի և լուծել տրանսպորտային աղյուսակների օգնությամբ:

2.5.2. Շրջիկ գործակալի խնդիրը

Տրված են n քաղաքներ, որոնցից ցանկացած զույգ միացված է ճանապարհով, որի երկարությունը հայտնի է: Շրջիկ գործակալը գտնվում է այդ քաղաքներից մեկում: Նա պետք է շրջագայի այդ քաղաքները՝ յուրաքանչյուրում լինելով մեկ անգամ և վերադառնա սկզբնական քաղաք: Անհրաժեշտ է որոշել՝ ինչ հերթականությամբ պետք է շրջիկ գործակալը այցելի այդ քաղաքները, որպեսզի անցած գումարային ճանապարհի երկարությունը լինի նվազագույնը: Նշենք, որ ճանապարհի երկարության փոխարեն կարելի է դի-

տարկել արդյունավետության նաև ուրիշ չափանիշներ, ինչպիսիք են փոխադրման արժեքը, ժամանակը և այլն:

Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը ձևակերպելու համար համարակալենք քաղաքները ***1,2,...,n*** թվերով և ենթադրենք (առանց ընդհանրությունը խախտելու), որ շրջիկ գործակալը գտնվում է ***1*** քաղաքում: d_{ij} – ով նշանակենք ***i*** - րդ քաղաքից ***j*** – րդ քաղաք տանող ճանապարհի երկարությունը (ընդ որում պարտադիր չէ, որ տեղի ունենա $d_{ij} = d_{ji}$ պայմանը): ***1,i₁,i₂,...,iₙ₋₁,1*** ճանապարհի երկարությունը կլինի ***(***$d_{1i_1} + d_{i_1 i_2} + ... + d_{i_{n-1}1}$***):*** Հետևաբար խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ:

Դիցուք տրված է $D = (d_{ij})$ $n \times n$ չափանի մատրիցը, որտեղ $d_{ij} \geq 0$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$): Անհրաժեշտ է գտնել $\{2,3,...,n\}$ բազմության տարրերի այնպիսի ***(i₁,i₂,...,iₙ₋₁)*** տեղափոխություն, որ ***z=*** $d_{1i_1} + d_{i_1 i_2} + ... + d_{i_{n-1}1}$ արտահայտությունը ստանա փոքրագույն արժեք: Կամ որ նույնն է՝ անհրաժեշտ է D մատրիցի յուրաքանչյուր տողից և յուրաքանչյուր սյունակից ընտրել մեկական տարր (բացի անկյունագծի տարրերը) այնպես, որ ընտրված տարրերից կազմված ճանապարհը ոչ մի քայլում (բացի վերջին քայլից) ցիկլ (փակ ճանապարհ) չլինի և այդ ընտրված տարրերի գումարը ստանա փոքրագույն արժեք:

Շրջիկ գործակալի խնդրի կիրառական օրինակներ

Երևանում «Թամարա» պաղպաղակի գործարանից ամեն առավոտ մեքենաները պաղպաղակ են բաժանում որոշակի սրճարանների և կրպակների: Ինչպիսի երթուղի պետք է ընտրի յուրաքանչյուր մեքենա, որպեսզի պաղպաղակի պաշարով ապահովի իրեն կցված բոլոր օբյեկտները և հետ վերադառնա գործարան այնպես, որ անցած ճանապարհը լինի նվազագույնը:

Նույն տիպի խնդիրներ առաջանում են ցանկացած մեծածախ առևտրի կետից մանրածախ կետեր բեռների փոխադրման ժամանակ: Ընթերցողն ինքը կարող է բազմաթիվ օրինակներ բերել հասարակական կյանքի տարբեր բնագավառներից, որտեղ անհրաժեշտ է լինում լուծել նմանատիպ խնդիրներ:

Շրջիկ գործակալի խնդրի լուծման ալգորիթմներ

1. Բոլոր հնարավոր դեպքերը քննարկելու (կամ հատարկման) եղանակ

Դժվար չէ նկատել, որ գոյություն ունեն ընդամենը $(n-1)!$ հնարավոր երթուղիներ: Հետևաբար, եթե դիտարկենք բոլոր հնարավոր երթուղիները,

հաշվենք այդ երթուղիների երկարությունները և ընտրենք նրանցից փոքրագույնը (որը կարող է միակը չլինել), ապա խնդիրը կլուծենք:

Սակայն որոշ չափով մեծ n - երի դեպքում (օրինակ $n \geq 40$) առաջարկված ալգորիթմը արդյունավետ չէ, որովհետև նույնիսկ ժամանակակից հաշվողական տեխնիկա օգտագործելով գործնականում (իրական ժամանակում) անհնար է այդքան գործողություն կատարելը:

2. «Ագահ» ալգորիթմ

Շրջիկ գործակալի խնդրի լուծման համար առաջարկենք հետևյալ ալգորիթմը՝ յուրաքանչյուր քայլում (գտնվելով տրված քաղաքում) գնանք այն ամենամոտ քաղաքը, որում դեռևս չենք եղել: Այնուհետև վերջին (n - րդ) քաղաքից հետ գնանք առաջին քաղաք:

Նշենք, որ բավականին պարզ և առաջին հայացքից լավ թվացող այս ալգորիթմն իրականում միշտ չէ, որ գտնում է խնդրի լավագույն լուծումը:

3. Ճյուղավորումների և գնահատումների եղանակ

Ստորև շարադրվող ալգորիթմը (նկարագրված են միայն հիմնական սկզբունքները) առաջին անգամ մշակվել է Լիտլի կողմից: Ալգորիթմը աշխատում է հետևյալ սկզբունքով: Սկզբում որոշվում են մի քանի թույլատրելի երթուղիներ, որից հետո մնացած երթուղիների բազմությունը տրոհվում է ավելի փոքր ենթաբազմությունների: Տրոհման յուրաքանչյուր քայլում հաշվում է ընթացիկ լավագույն երթուղու երկարության ներքին սահմանը: Գտնված սահմանների օգնությամբ կատարվում է թույլատրելի երթուղիների ենթաբազմությունների հետագա տրոհումը և ի վերջո որոշվում լավագույն երթուղին: Եթե որևէ քայլում գտնվում է երթուղի, որի երկարությունը չի գերազանցում բոլոր մյուս արդեն դիտարկված երթուղիների փոքրագույն ներքին սահմանը, ապա այդ միջանկյալ լուծումը դառնում է «լավագույն» թույլատրելի լուծում: Առաջարկվող ալգորիթմի հիմնական գործողությունները երթուղիների երկարությունների ներքին սահմանների հաշվումն է, լավագույն լուծումների առանձնացումը և ճյուղավորումը՝ նոր երթուղիներ ստանալու նպատակով:

Բոլոր երթուղիների բազմությունների ենթաբազմությունը կարելի է դիտել որպես ծառի ճյուղեր, իսկ տրոհման գործընթացը՝ ծառի ճյուղավորում: Այդ իսկ պատճառով այս եղանակը անվանում են ճյուղավորումների և գնահատումների եղանակ:

Դիտողություններ

Անհրաժեշտ ենք համարում նշել, որ.

ա) Շրջիկ գործակալի խնդիրը հնարավոր չէ ձևակերպել և լուծել որպես գծային ծրագրման խնդիր:

բ) Դիտարկվող խնդիրը պատկանում է այսպես կոչված NP - լրիվ խնդիրների դասին և այդ իսկ պատճառով մինչ այժմ հայտնի չեն այս խնդրի լուծման արդյունավետ ալգորիթմներ:

գ) Շրջիկ գործակալի խնդրի և ցանցերում նվազագույն ճանապարհ գտնելու մյուս խնդիրների հիմնական տարբերությունն այն է, որ շրջիկ գործակալի խնդրում անհրաժեշտ է գտնել բոլոր քաղաքներով անցնող նվազագույն երկարություն ունեցող կողմնորոշված ցիկլ, որն էլ հենց էապես դժվարացնում է այդ խնդրի համար արդյունավետ ալգորիթմներ գտնելը:

դ) Շրջիկ գործակալի խնդիրն ունի շատ կիրառություններ և նրա լուծման համար առաջարկվող ալգորիթմները (օրինակ ճյուղավորումների և գնահատականների եղանակը) օգտագործվում են օրացուցային պլանավորման, ցանցային կարգավորման, միագիծ կամ բազմագիծ համակարգերում հերթականություն ընտրելու, մասսայական սպասարկման համակարգերի մոդելավորման և հետազոտման, ինչպես նաև բազմաթիվ այլ խնդիրների լուծման համար:

2.5.3. Նշանակումների խնդիրը

Տրված են n աշխատատեղեր և n աշխատողներ: Յուրաքանչյուր աշխատող կարող է տրված աշխատանքներից ցանկացածը կատարել, սակայն վարպետության տարբեր աստիճանով: Այսինքն հայտնի է յուրաքանչյուր աշխատողի ցանկացած աշխատանք կատարելու արդյունավետությունը:

Եթե աշխատանքի նշանակվող աշխատողն ունի հենց այն որակավորումը, որն անհրաժեշտ է տվյալ աշխատանքը կատարելու համար, ապա կատարվող աշխատանքի արժեքը կլինի ավելի ցածր (արդյունավետությունն ավելի բարձր), քան այն դեպքում, երբ տվյալ աշխատանքի են նշանակում կատարվող գործին չհամապատասխանող որակավորում ունեցող մարդու: Խնդրի նպատակն է գտնել բոլոր կատարվող աշխատանքներում աշխատողների այնպիսի լավագույն բաշխում, երբ նվազեցվում է նշանակումների գումարային արժեքը (կամ առավելագույնի է հասցվում աշխատողների արդյունավետությունների գումարը):

Այսպիսով. տվյալ խնդիրը կայանում է որոշակի գործող օբյեկտներում ռեսուրսների լավագույն բաշխման մեջ: Ենթադրվում է, որ յուրաքանչյուր ռեսուրս նշանակվում է միայն մեկ անգամ, և յուրաքանչյուր օբյեկտին հա-

մապատասխանեցվում է միայն մեկ ռեսուրս: Ռեսուրսների և օբյեկտների, ինչպես նաև դրանց համապատասխան արդյունավետության կամ «արժեքի» չափանիշները, ներկայացված են աղյուսակ 1-ում:

Աղյուսակ 1

Նշանակումների խնդրի կիրառման օրինակներ

Օրինակ	Ռեսուրսներ	Օբյեկտներ	Արդյունավետության չափանիշ
1	Աշխատողներ	Աշխատատեղեր	Ժամանակ, ծախսեր, արդյունավետություն
2	Բեռնատար ավտոմեքենաներ	Երթուղիներ	Ծախսեր, եկամուտ
3	Հաստոցներ	Արտադրամասեր	Արտադրված ապրանքի ծավալ, պարապուրդի ժամանակ
4	Անձնակազմ	Երթուղիներ	Պարապուրդի ժամանակ, եկամուտ
5	Շրջիկ գործակալ	Քաղաքներ	Ապրանքաշրջանառություն, ժամանակ, ծախսեր

Մենք կուսումնասիրենք նշանակումների խնդիրը այն դեպքի համար, երբ նվազեցվում է նշանակումների գումարային արժեքը (ծախսը):

Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը ձևակերպելու համար համարակալենք աշխատատեղերը և աշխատողներին 1,2,...,n թվերով և դիտարկենք $n \times n$ չափանի $C = (c_{ij})$ մատրիցը, որտեղ c_{ij}–ն i–րդ աշխատողին j–րդ աշխատատեղում նշանակման ծախսն է ($1 \le i \le n, 1 \le j \le n$): Նշանակումների խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ:

Տրված է $n \times n$ չափանի $C = (c_{ij})$ մատրիցը, որտեղ $c_{ij} \ge 0$: Անհրաժեշտ է գտնել $\{1,2,...,n\}$ բազմության տարրերի այնպիսի $\pi : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ տեղադրություն, որի համար $z = \sum_{k=1}^{n} c_{k\pi(k)}$ գումարը ստանա նվազագույն արժեք: Կամ որ նույնն է, անհրաժեշտ է C մատրիցի յուրաքանչյուր տողից և յուրաքանչյուր սյունակից ընտրել մեկական տարր այնպես, որ ընտրված տարրերի գումարը լինի փոքրագույնը:

C մատրիցի յուրաքանչյուր տողից և յուրաքանչյուր սյունակից մեկական տարր ընտրելը անվանենք *թույլատրելի նշանակում*, իսկ ընտրված տարրերի գումարը՝ *նշանակման արժեք*:

Նշանակումների խնդրի լուծման ալգորիթմներ

1. **Բոլոր հնարավոր դեպքերը քննարկելու (հատարկման) եղանակ**

Դժվար չէ նկատել, որ բոլոր հնարավոր թույլատրելի նշանակումների քանակը $n!$ է: Հետևաբար, եթե յուրաքանչյուր թույլատրելի նշանակման համար հաշվենք գումարային ծախսը (նշանակման արժեքը) և ընտրենք նրանցից փոքրագույնը (որը կարող է միակը չլինել), ապա խնդիրը կլուծվի:

Սակայն գործնականում այս ալգորիթմը իրագործել հնարավոր չէ (արդյունավետ չի), որովհետև մեծ n-երի դեպքում (օրինակ $n \geq 40$) նույնիսկ ժամանակակից համակարգիչներ օգտագործելով անհնար է իրական ժամանակում (օրինակ մեկ ամսում) $n!$ կարգի հաշվարկներ կատարել:

2. **«Ագահ» ալգորիթմ**

Նշանակումների խնդրի համար առաջարկենք բավականին պարզ և առաջին հայացքից լավ թվացող հետևյալ ալգորիթմը:

Ընտրենք C մատրիցի փոքրագույն տարրը (եթե այն միակը չի, ապա որևէ փոքրագույնը) և ջնջենք մատրիցի այն տողն ու սյունակը, որում գտնվում է այդ տարրը: Մնացած տարրերը կկազմեն $(n-1)\times(n-1)$ չափանի մատրից, որի համար ևս կատարենք նույն գործողությունը: Շարունակելով նույն կերպ և կատարելով ընդամենը n քայլ, կստանանք բավականին լավ թվացող թույլատրելի նշանակում, այսինքն C մատրիցից ընտրված տարրեր, որոնք գտնվում են տարբեր տողերում և սյունակներում: Պարզվում է, որ միշտ չէ, որ այս ալգորիթմով ընտրված տարրերը կկազմեն լավագույն լուծում:

Բերենք, ագահ-ագահ ալգորիթմի կիրառման օրինակներ:

Օրինակ 1.

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 9 \\ 9 & 15 & 10 \\ 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

C մատրիցի միակ փոքրագույն տարրն է $c_{33} = 8$, ընտրենք այն և ջնջենք երրորդ տողը և երրորդ սյունակը: Կստանանք $C^{(1)}$ մատրիցը:

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$$

$C^{(1)}$ մատրիցի միակ փոքրագույն տարրն է $c_{21}=9$-ը, ընտրենք այն և ջնջենք $C^{(1)}$ մատրիցի երկրորդ տողը և առաջին սյունակը: Կմնա ընդամենը մեկ տարր՝ $c_{12}=10$, ընտրենք այն:

Այսպիսով առաջին մարդը կկատարի երկրորդ աշխատանքը, երկրորդ մարդը առաջին աշխատանքը, իսկ երրորդը՝ երրորդ աշխատանքը: Նշանակման արժեքը կլինի՝ $z=c_{33}+c_{21}+c_{12}=8+9+10=27$:

Քանի որ բոլոր հնարավոր նշանակումների քանակն է $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$, ապա ընթերցողը հեշտությամբ դիտարկելով մնացած հինգ դեպքերը, կհամոզվի, որ այս օրինակի վրա «ագահ» ալգորիթմը տվեց լավագույն արդյունք:

Դիտողություն 1: Եթե «ագահ» ալգորիթմն աշխատեր հետևյալ սկզբունքով՝ նախ առաջին մարդուն տանք ամենահարմար (նվազագույն ծախսով) աշխատանքը, հետո երկրորդին մնացած աշխատանքներից ամենահարմարը և այդպես շարունակ, ապա օրինակ 1–ի վրա կիրառելիս նշանակման արժեքը կլիներ $z=c_{13}+c_{21}+c_{32}=9+9+12=30>27$, այսինքն խնդրի լավագույն լուծումը չէր ստացվի:

Օրինակ 2.

$$C=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 2 & 9 & \mathbf{8} \\ 3 & \mathbf{7} & 6 \end{pmatrix}$$

Կիրառելով «ագահ» ալգորիթմը օրինակ 2 –ի C մատրիցի վրա, կստանանք $z=c_{11}+c_{23}+c_{32}=1+8+7=16$, մինչդեռ $c_{12}+c_{21}+c_{33}=2+2+6=10<16$: Հետևաբար այս օրինակի համար «ագահ» ալգորիթմով լավագույն լուծում չստացվեց:

3. Հունգարական ալգորիթմ

Հունգարական ալգորիթմը հիմնված է հետևյալ սկզբունքի վրա՝ եթե C մատրիցի որևէ տողի յուրաքանչյուր տարրից հանենք հաստատուն p մեծությունը, ապա ցանկացած թույլատրելի նշանակման արժեքը, որոշված նոր մատրիցով փոքր է այդ նույն նշանակման արժեքից, որոշված հին մատրիցով ճիշտ p –ով, որովհետև յուրաքանչյուր թույլատրելի նշանակման համապատասխանում է ճիշտ մեկ տարր այդ տողից: Սակայն բոլոր հնարավոր թույլատրելի նշանակումների հարաբերական արժեքները կմնան անփոփոխ: Հետևաբար, անցնելով սկզբնական C մատրիցից նորին, անփոփոխ

կմնան նաև բոլոր լավագույն նշանակումները: Ակնհայտ է, որ համանման փաստը ճշմարիտ է նաև C մատրիցի սյունակների տարրերի համար:

Քայլ 1: ***Մատրիցի պարզեցում:*** Նշված սկզբունքի վրա հիմնված հունգարական ալգորիթմն աշխատում է հետևյալ կերպ: Արժեքների C մատրիցի յուրաքանչյուր տողի, այնուհետև յուրաքանչյուր սյունակի տարրերից հանվում են իրենց նվազագույն տարրերը: Այդ գործընթացը անվանենք **մատրիցի պարզեցում**:

Քայլ 2: ***Նշանակումների որոշում:*** Փնտրվում է այնպիսի թույլատրելի նշանակում, որին համապատասխանում են պարզեցված մատրիցի զրոյական տարրերը: Եթե այդպիսի թույլատրելի նշանակում գոյություն ունի, ապա պարզ է, որ այն կհանդիսանա լավագույնը:

Քայլ 3: ***Պարզեցված մատրիցի ձևափոխում*****:** Հակառակ դեպքում արժեքների մատրիցը ձևափոխվում է նրանում ավելի շատ զրոյական տարրեր ստանալու նպատակով: Անցնել քայլ 2 –ին:

Օրինակ 3.

Ենթադրենք ունենք չորս մարդ և աշխատանքների չորս տեսակ: Աղյուսակ 2-ում տրված է խնդրի արժեքների մատրիցը:

Աղյուսակ 2

		Աշխատանքի տեսակներ			
		1	2	3	4
Մարդիկ	1	$1	$4	$6	$3
	2	$9	$7	$10	$9
	3	$4	$5	$11	$7
	4	$8	$7	$8	$5

Քայլ 1: Ալգորիթմի առաջին քայլի կիրառումը սկզբնական մատրիցի նկատմամբ հանգեցնում է հետևյալ պարզեցված մատրիցան (աղյուսակ 3):

Աղյուսակ 3

		Աշխատանքի տեսակներ			
		1	2	3	4
Մարդիկ	1	0	3	2	2
	2	2	0	0	2
	3	0	1	4	3
	4	3	2	0	0

Քայլ 2: Պարզեցված մատրիցում զրոյական տարրերի դասավորությունը թույլ չի տալիս նշանակել յուրաքանչյուր մարդու մի որևէ զրոյական արժեքով աշխատանք: Անցնենք քայլ 3 –ին:

Քայլ 3: Պարզեցված մատրիցում **նշենք** բոլոր զրոյական տարրերը պարունակող նվազագույն թվով տողեր և սյունակներ (աղյուսակ 4):

Աղյուսակ 4

1	2	3	4
0	3	2	2
2	0	0	2
0	$\boxed{1}$	4	3
3	2	0	0

Գտնենք **չնշված** տարրերից նվազագույնը՝ 1 (ընդգծված է) և հանենք այն մնացած բոլոր չնշված տարրերից, ապա գումարենք այն տարրերին, որոնք գտնվում են **նշված** տողերի և սյունակների հատման կետերում: Արդյունքում կստանանք աղյուսակ 5-ի տեսքով ձևափոխված մատրիցը:

Աղյուսակ 5

1	2	3	4
$\boxed{0}$	2	1	1
3	0	$\boxed{0}$	2
0	$\boxed{0}$	3	2
4	2	0	$\boxed{0}$

Անցնենք քայլ 2-ին: Աղյուսակ 5-ում նշված զրոներով ցույց է տրված լավագույն լուծումը, որն առաջարկում է առաջին մարդուն առաջին աշխատանքը, երկրորդին՝ երրորդ աշխատանքը, երրորդին՝ երկրորդ աշխատանքը և չորրորդին՝ չորրորդ աշխատանքը: Նպատակային ֆունկցիայի նվազագույն արժեքը կլինի $z = 1 + 10 + 5 + 5 = \$21$:

Նշանակումների խնդրի և տրանսպորտային խնդրի կապը: Եթե տրանսպորտային խնդրում n արտադրողներին համապատասխանեցնենք n աշխատողներ, իսկ n սպառողների n աշխատատեղեր, վերցնելով առաջարկի և պահանջարկի բոլոր մեծությունները հավասար 1 միավորի, ապա նշանակումների խնդիրը կդառնա տրանսպորտային խնդրի մասնավոր դեպքը: Հետևաբար այն կարելի է նաև լուծել տրանսպորտային խնդրի ալգորիթմով: Նշենք, սակայն, որ հունգարական մեթոդը էապես պարզ է պոտենցիալների մեթոդից:

Նշանակումների խնդրի և շրջիկ գործակալի խնդրի կապը: Ակնհայտ է, որ չնայած այս խնդիրների որոշ նմանությանը, ընդհանուր դեպքում նշանակումների խնդրի լավագույն լուծումը միշտ չէ, որ կլինի նաև շրջիկ գործակալի խնդրի համար լավագույն լուծում: Սակայն նշանակումների խնդրի լուծման հունգարական ալգորիթմը կարելի է որոշ ձևափոխությունների ենթարկել և օգտագործել ավելի բարդ՝ շրջիկ գործակալի խնդրի լուծման համար: Այս բաժնում մենք չենք խորանա նաև նշված հարցի ուսումնասիրման մեջ:

2.5.4. Ուսապարկի խնդիրը

Տրված են n առարկաներ: Հայտնի են նրանցից յուրաքանչյուրի գինը և ծավալը (կշիռը): Անհրաժեշտ է որոշակի տարողությամբ ուսապարկով տեղափոխելու համար այդ առարկաներից ընտրել այնպիսիները (յուրաքանչյուր առարկայից կարող ենք ընտրել քանի հատ ցանկանանք), որ ընտրված առարկաների ծավալների գումարը չգերազանցի ուսապարկի տարողությունը, իսկ նրանց գների գումարը լինի առավելագույնը:

Նշենք, որ առարկաների գների փոխարեն կարելի է դիտարկել նաև արդյունավետության այլ չափանիշներ, ինչպիսիք են օգտակարությունը, տեղափոխումից ստացվող եկամուտը և այլն:

Այսպիսի խնդիրներ առաջանում են հասարակության կյանքի շատ բնագավառներում: Օրինակ, բանակում (զինվորի ուսապարկում առավել արժեքավոր իրեր ընտրելը), նավատորմում, ավիացիայում (նավի կամ ինքնաթիռի լավագույն բեռնավորում) և այլն:

Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը ձևակերպելու համար համարակալենք առարկաները 1, 2, ..., n թվերով: Դիցուք c_i-ն i-րդ առարկայի գինն է, իսկ v_i-ն ծավալը (i=1, 2,,...,n): V-ով նշանակենք ուսապարկի տարողությունը: Ներմուծենք x_i ոչ բացասական ամբողջ փոփոխականներ, որոնք ցույց են տալիս, թե i-րդ առարկայից քանի հատ ենք որոշել վերցնել: Պարզ է, որ $\left(v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + \ldots + v_n \cdot x_n\right)$-ը կլինի ընտրված առարկաների ծավալների գումարը, իսկ $\left(c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n\right)$-ը՝ գների գումարը: Հետևաբար խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ:

Տրված են n չափանի $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ և $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ոչ բացասական վեկտորները և V ոչ բացասական թիվը: Անհրաժեշտ է գտնել այնպիսի ոչ բացասական ամբողջաթիվ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ վեկտոր, որ

$$z(x) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max \qquad (1)$$

և բավարարվի

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_nx_n \le V \qquad (2)$$

պայմանը:

Ուսապարկի խնդիրը, երբ թույլատրվում է յուրաքանչյուր առարկայից վերցնել մեկից ոչ ավելի $\left(x_i \in \{0,1\};\ i = 1,2,\ldots,n\right)$, կոչվում է 0-1 ուսապարկ: Չնայած 0-1 ուսապարկ խնդիրը ուսապարկի խնդրի մասնավոր դեպքն է, սակայն ապացուցված է, որ եթե հայտնի է 0-1 ուսապարկ խնդրի լուծման ալգորիթմ, ապա այդ ալգորիթմն արդյունավետ կերպով կարելի է օգտագործել նաև ընդհանուր խնդրի լուծման համար:

0-1 ուսապարկ խնդրի լուծման ալգորիթմներ

1. Բոլոր հնարավոր դեպքերը քննարկելու (հատարկման) եղանակ

n առարկաներից հնարավոր է տարբեր ենթաբազմություններ ընտրել 2^n եղանակով: Ընտրված ենթաբազմությունն անվանենք **թույլատրելի**, եթե այդ ենթաբազմության առարկաները տեղավորվում են ուսապարկում (առարկաների ծավալների գումարը չի գերազանցում V-ն): Դիտարկենք բոլոր հնարավոր **թույլատրելի** ենթաբազմությունները, յուրաքանչյուրի համար հաշվենք ընտրված առարկաների գների գումարը և ընտրենք նրանցից մեծագույնը (որը կարող է միակը չլինել), ապա խնդիրը կլուծվի:

Սակայն առաջարկված ալգորիթմը արդյունավետ չէ, որովհետև մեծ n-երի դեպքում (օրինակ $n \ge 50$) ժամանակակից հաշվողական տեխնիկա օգտագործելով իրական ժամանակում հնարավոր չէ 2^n կարգի գործողություններ կատարել:

Դիտողություն 1: Պարզ է, որ հատարկման եղանակով ուսապարկի խնդրի լուծման համար կպահանջվի 2^n-ից էապես շատ գործողություններ:

2. «Ագահ» ալգորիթմ

0-1 ուսապարկ խնդրի համար առաջարկենք առաջին հայացքից բավականին լավ թվացող հետևյալ ալգորիթմը:

Դասավորենք (վերահամարակալելով) առարկաները միավոր ծավալի գների նվազման կարգով՝

$$\frac{c_1}{v_1} \ge \frac{c_2}{v_2} \ge \ldots \ge \frac{c_n}{v_n}:$$

Ապա հերթականորեն դիտարկենք 1, 2, ..., n առարկաները և վերցնենք դիտարկված առարկան, եթե այն տեղավորվում է ուսապարկում: Պարզվում է, որ միշտ չէ, որ այս ալգորիթմով կատարված առարկաների ընտրությունը կլինի լավագույնը:

Դիտողություն 2: Որպեսզի կիրառենք «ագահ» ալգորիթմը ուսապարկի խնդրի համար, բավական է առաջարկված ալգորիթմում նշենք, որ հերթականորեն դիտարկվող յուրաքանչյուր առարկայից տվյալ քայլում անհրաժեշտ է վերցնել այնքան, ինչքան որ կտեղավորվի ուսապարկում:

Բերենք «ագահ» ալգորիթմի կիրառման օրինակներ:

Օրինակ 1. Դիցուք ունենք 80 տարողությամբ ուսապարկ և 4 առարկաներ, որոնց գները և ծավալները բերված են աղյուսակ 1-ում:

Աղյուսակ 1

Առարկաների գները և ծավալները

գին	160	250	180	30
ծավալ	40	50	40	20

«Ագահ» ալգորիթմը այդ 4 առարկաները կդասավորի

$$\overset{I}{\frac{250}{50}} \geq \overset{II}{\frac{180}{40}} \geq \overset{III}{\frac{160}{40}} \geq \overset{IV}{\frac{30}{20}}$$

հերթականությամբ և կընտրի վերահամարակալված առաջին և չորրորդ առարկաները 50+20=70≤85 ծավալով և 250+30=280 ընդհանուր արժեքով: Հեշտ է նկատել, որ երկրորդ և երրորդ առարկաները տեղավորվում են ուսապարկում՝ 40+40=80≤80, իսկ նրանց գների գումարը՝ 180+160=340>280: Այսինքն այս օրինակում «ագահ» ալգորիթմը չգտավ խնդրի լավագույն լուծումը:

Օրինակ 2. Դիցուք ունենք 110 տարողությամբ ուսապարկ և 5 առարկաներ, որոնց գները և ծավալները բերվում են աղյուսակ 2-ում:

Աղյուսակ 2

Առարկաների գները և ծավալները

գին	10	15	20	21	12
ծավալ	2	5	5	3	2

«Ագահ» ալգորիթմը այդ առարկաները կդասավորի

$$\overset{I}{\frac{21}{3}} \geq \overset{II}{\frac{12}{2}} \geq \overset{III}{\frac{10}{2}} \geq \overset{IV}{\frac{20}{5}} \geq \overset{V}{\frac{15}{5}}$$

հերթականությամբ և կընտրի վերահամարակալված առաջին, երկրորդ և երրորդ առարկաները 3+2+2=7≤11 ծավալով և 21+12+10=43 ընդհանուր արժեքով: Հեշտ է նկատել, որ ցանկացած այլ թույլատրելի ընտրության գների գումարը չի գերազանցում 43-ը: Այսինքն այս օրինակում «ագահ» ալգորիթմով կատարված ընտրությունը լավագույնն է:

2.5.5. Ձևման մասին խնդիրը:

Դիտարկենք արտադրական պլանավորման մեկ այլ իրավիճակ: Հայտնի են մետաղյա թիթեղներից արտադրանքների ձևման n տեխնոլոգիական եղանակներ: Դիցուք, անհրաժեշտ է ստանալ m տարբեր արտադրանքներ (ձևվածքներ), ընդ որում հայտնի է պլանային առաջադրանքի $b=(b_1, b_2, ..., b_m)$ վեկտորը, որտեղ b_1-ը 1-ին ձևվածքի պլանային քանակն է, b_2-ը՝ 2-րդ ձևվածքի, և այլն, b_m-ը՝ m-րդ ձևվածքի պլանային քանակը:

Հայտնի է նաև տեխնոլոգիական եղանակների $A = (a_{i,j})$ $m \times n$ չափանի մատրիցը, որտեղ a_{ij} –ն ցույց է տալիս, թե մեկ մետաղյա թիթեղից j-րդ տեխնոլոգիական եղանակով i-րդ ձևվածքից քանի հատ է ստացվում: Խնդիրը կայանում է նրանում, որ պլանային առաջադրանքն անհրաժեշտ է կատարել հնարավորին չափ քիչ քանակությամբ թիթեղների օգտագործմամբ: Այսինքն, եթե x_j-ով նշանակենք j-րդ տեխնոլոգիական եղանակի կիրառման դեպքում ծախսվող թիթեղների քանակը, ապա խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \to \min$$

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots\ldots+a_{in}x_n \geq b_i, \text{ որտեղ } i=1,2,\ldots, m:$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots, n:$$

2.6. Փոխանակման գծային մոդելներ

Դիտարկենք տնտեսական համակարգ, որտեղ գործում է ***n*** արտադրողներ $(P_1, ..., P_n)$ և արտադրվում՝ n տեսակի ապրանքներ $(G_1, ..., G_n)$:

Ենթադրենք.

- Յուրաքանչյուր արտադրող արտադրում է մեկ տիպի ապրանք և ընտրենք ապրանքների չափման միավորներն այնպես, որ P_i արտադրողը դիտարկվող ժամանակահատվածում, օրինակ մեկ տարում, արտադրում է G_j ապրանքի մեկ միավոր;

- Տնտեսական համակարգը փակ է, այսինքն դրսից ապրանքներ չեն ներմուծվում և երկրից դուրս չեն արտահանվում;
- Յուրաքանչյուր P_i արտադրող սպառում է որոշակի քանակությամբ ($G_1, \ldots, G_n$) ապրանքներից: Նշանակենք a_{ij}-ով G_j ապրանքի այն քանակը (կամ մասը), որն սպառում է P_i արտադրողը: Պարզ է, որ $a_{ij} \geq 0$ և $a_{ij} \leq 1$ $(i, j = \overline{1, n})$:
- G_i ապրանքի այն մասը, որը չի սպառվում արտադրողների կողմից, սպառվում է P_i արտադրողի կողմից, որտեղից հետևում է, որ $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ բոլոր j-երի համար:

Սահմանում. $A=(a_{ij})_{n \times n}$ մատրիցը, որտեղ $0 \leq a_{ij} \leq 1$ և $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ $(j = \overline{1, n})$ կոչվում է *փոխանակման մատրից:*

Նշանակենք ($G_1, \ldots, G_n$) ապրանքների գները $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ համապատասխանաբար: Դա կնշանակի, որ P_i արտադրողի տարեկան եկամուտը կազմում է π_i, ծախսերը՝ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \pi_j$:

Սահմանում. $P=(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ գների վեկտորը կոչվում է *հավասարակշռված գների* վեկտոր, եթե կամայական արտադրողի ծախսերը չեն գերազանցում նրա եկամուտը՝

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \pi_j \leq \pi_i, \ \forall i = \overline{1, n}$$

կամ տեղի ունենա հետևյալ անհավասարումը

$$Ap \leq p:$$

Խնդրի դրվածքը. Տրված է $A=(a_{ij})$ փոխանակման մատրիցը: Անհրաժեշտ է որոշել, արդյոք գոյություն ունի՞ ($G_1, \ldots, G_n$) ապրանքների գների հավասարակշռված $P=(\pi_1, \ldots, \pi_n) \geq 0$ վեկտոր:

Նախքան այս հարցին անդրադառնալը ձևակերպենք հետևյալ լեմմը, որն ընդունենք առանց ապացույցի.

Լեմմ. Եթե $A=(a_{ij})$ փոխանակման մատրիցը և p գների վեկտորը բավարարում են $Ap \leq p$ պայմանին, ապա $Ap=p$:

Տնտեսագիտորեն $Ap=p$ պայմանը նշանակում է, որ եթե արտադրողներից որևէ մեկը հարստանում է, ապա մնացած արտադրողներից գոնե մեկը տուժում է:

Այսպիսով, մաթեմատիկորեն խնդիրը բերվեց հետևյալ խնդրին: Գտնել $p \geq 0$ գների վեկտոր, որը բավարարում է Ap=p պայմանին:

2.7. Տնտեսական զարգացման դինամիկ մոդելներ

Տնտեսական համակարգերում կատարվում է ընտրության ընթացիկ և ապագա պահանջարկների բավարարման մակարդակների, այլ կերպ՝ ընթացիկ սպառման և ներդրումների միջև: Չնայած այն բանին, որ ընթացիկ սպառման ավելի բարձր մակարդակը կարող է նախընտրելի համարվել, սակայն պետք է նկատել, որ այն ենթադրում է ներդրումների առավել ցածր մակարդակ, ինչը բերում է ապագայում արդյունքի ծավալի կրճատման և առաջացնում սպառման մակարդակի անկում ապագայում:

Ուստի, *տնտեսական քաղաքականության հիմնախնդիրներից մեկը՝ սպառման և կուտակման միջև օպտիմալ հարաբերակցության ընտրությունն* է: Կարելի է նշել երկու ծայրահեղ քաղաքականություններ. առաջինը՝ հնարավորինս առավելագույնի հասցնել ընթացիկ սպառումը, անտեսելով ապագան, երկրորդը՝ հնարավորինս նվազագույնի հասցնել ընթացիկ սպառումը, առավելագույնի հասցնելով կապիտալի կուտակումը՝ ապագայում սպառման բարձր մակարդակ ապահովելու նպատակով:

Սպառման և կապիտալի կուտակման միջև հարաբերակցության ընտրություն կատարելիս, բազմաթիվ տարբերակներ են առաջանում սպառման, կապիտալագոյացության և արտադրանքի թողարկման համար:

Օպտիմալ տնտեսական աճի կամ տնտեսական աճի օպտիմալ հետագծի ընտրության խնդիրը կայանում է հետևյալում. տնտեսական աճի հնարավոր հետագծերի բազմությունից ընտրել լավագույնը:

Մակրոտնտեսական դինամիկայի գրեթե բոլոր մոդելներում բազային է համարվում ներդրումների, կապիտալի և եկամտի ցուցանիշների ժամանակային կապը:

2.7.1. «Կապիտալ- ներդրումներ-արդյունք» մոդելը

Մոդելը տնտեսական աճը նկարագրող պարզագույն մոդելներից է, որը թույլ է տալիս հետազոտել ներդրումների դինամիկայի և արդյունքի աճի փոխադարձ կապը և ստանալ նշված պարամետրերի (ներդրումներ և արդյունք) հետագծերի համար հստակ բանաձևեր: Նման կարգի մոդելները ստեղծվել են և վերլուծվել են *Ռ. Հարրոդի և Ե. Դոմարի* կողմից:

Մոդելում օգտագործվում են հետևյալ փոփոխականները.

K (t)-ն երկրում առկա կապիտալի ֆոնդը t-րդ տարում (ֆիզիկական կապիտալ, շենքեր, սարքավորումներ, ֆինանսական կապիտալ, ֆիզիկական կապիտալ),

Y(t)-ը՝ համախառն ներքին արդյունքը (ՀՆԱ) t-րդ տարում,

I(t)-ն՝ ներդրումները t-րդ տարում, (կամ կուտակումները, կամ խնայողությունները)

C(t)-ն սպառումը t-րդ տարում:

Մոդելը կառուցելու համար անենք հետևյալ ենթադրությունները.

- արտադրության պրոցեսում օգտագործվում է մեկ գործոն՝ կապիտալը: Այս պարագայում արտադրության գործընթացը ներկայացվում է որպես մի գործոնի, տվյալ դեպքում՝ կապիտալի, կամ մեկ ընդհանրական ռեսուրսի (կապիտալի) ձևափոխման գործընթաց «*սև արկղի*» տեսքով: Վերջինիս կիբեռնետիկայի կարևոր հասկացություններից մեկն է, որի օգնությամբ փորձ է կատարվում հաղթահարել բարդ համակարգերի, այդ թվում տնտեսության ուսումնասիրության դժվարությունները: Համակարգի ներկայացումը «*սև արկղի*» տեսքով նշանակում է, որ մեր գիտելիքները դեռևս թույլ չեն տալիս ներթափանցել տվյալ համակարգ և պարզել թե, որոնք են այն ներքին օրինաչափությունները, որոնցով ձևափոխվում են համակարգի մուտքերն ու ելքերը:

Այնուհանդերձ համակարգի վարքի ուսումնասիրությունը հնարավոր է դառնում այդ մուտքերի և ելքերի միջև օրինաչափ փոխկախվածությունների բացահայտման շնորհիվ:

- ենթադրելու ենք, որ գների մակարդակը հաստատուն է ;
- տնտեսությունը փակ է, հետևաբար ոչ արդյունքը, ոչ էլ ծախսերը չեն ներմուծվում, չեն արտահանվում՝ ամբողջ արդյունքը կամ սպառվում է կամ էլ ներդրվում է տնտեսության մեջ: Այլ կերպ՝ Y(t)=C (t) + I(t);
- բացակայում է հատույցի ուշացումը, այսինքն ներդրումային լագը հավասար է զրոյի;
- մոդելում հաշվի չի առնվում կապիտալի մաշվածությունը

Մոդելը ներկայացվում է հետևյալ (1)-(3) հավասարումներով:

$$\frac{dK}{dt} = I(t) \qquad (1)$$

Համաձայն (1)-ի՝ ամորտիզացիայի և հատույցի ուշացման բացակայության պայմաններում կապիտալի հավելաճը՝ $\frac{dK}{dt}$ հավասար է ներդրումներին: Մեկ այլ մեկնաբանությամբ՝ ներդրումները (I (t)) տվյալ տարում «ակնթարթորեն» վերաճում են կապիտալի հավելաճի:

$$K(t)=s\,Y(t) \qquad (2)$$

Համաձայն (2)-ի՝ երկրում առկա կապիտալը K(t) գերազանցում է Y(t)՝ ՀՆԱ-ն:

$s=\dfrac{K(t)}{Y(t)}>1$ գործակիցը կոչվում է կապիտալատարության գործակից:

$$I(t)=\sigma\,Y(t) \qquad (3)$$

Համաձայն (3)-ի ներդրումները կազմում են եկամտի (ՀՆԱ-ի) հաստատուն σ մասը: 0< σ <1 գործակիցը կոչվում է խնայողության նորմ:

(1)-(3) մոդելը ունի պարզ լուծում: Հավասարումների համակարգից կարող ենք գրել, որ

$$\sigma Y(t)=I(t)=\frac{dK}{dt}=\frac{d(sY(t))}{dt},$$

որտեղից հետևում է՝

$$\frac{dY/dt}{Y(t)}=\frac{\sigma}{s} \qquad (4)$$

Ստացանք տնտեսական աճի բնութագիրը, որն արտահայտված է ՀՆԱ-ի հավելաճի տեմպով, որը հավասար է σ/s: Եթե խնայողության նորմը և կապիտալատարությունը համապատասխանաբար ընդունում են **σ** = 0,15 և s=3 արժեքներ, ապա (4)-ից հետևում է, որ ՀՆԱ-ի հավելաճի տեմպը $\dfrac{dY/dt}{Y(t)}=0{,}05$ է: Հետևաբար եկամուտը տարեկան աճում է 5%-ով:

(4)-ը՝ առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարում է, որի Y(t) հետագիծը անցնում է Y(o) կետով

$$Y(t)=Y(0)e^{\sigma t/s}, \qquad (5)$$

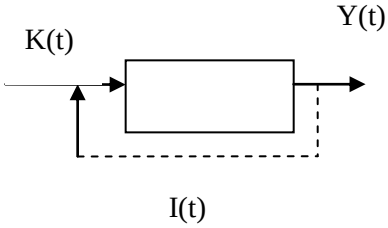
որտեղ Y(0)-ն t=0 պահին ՀՆԱ-ի մեծությունն է:

Այսպիսով, եթե հայտի են σ խնայողությունների նորմը և s կապիտալատարության գործակիցը, ապա ՀՆԱ-ի հավելաճի տեմպը գտնում են (4) բանաձևից, իսկ (5) բանաձևը նկարագրում է արդյունքի կամ ՀՆԱ-ի աճի հետագիծը ֆիքսված խնայողությունների նորմի և կապիտալատարության դեպքում:

Տնտեսական աճի ցանկալի $\dfrac{dY/dt}{Y(t)}$ տեմպը հաստատուն պահպանելու համար խնայողությունների նորմը կարելի է որոշել σ = s $\dfrac{dY/dt}{Y(t)}$ բանա-

ձևից: Դիտարկված օրինակում տնտեսական աճի տեմպը տարեկան, օրինակ 7% պահպանելու համար, խնայողությունները պետք է տարեկան կազմեն եկամտի 21 %-ը s=3 կապիտալատարության մակարդակի պայմաններում:

Ներկայացված Հարորդ-Դոմարի մոդելը կարելի է պատկերել հետևյալ սխեմայի տեսքով (տե՛ս գծապատկեր)



(1)-(3) մոդելի «*հարստացման*» ուղիները բազմազան են, որն, ի դեպ, բերում է ուսումնասիրվող տնտեսական գործընթացի առավել համարժեք (ադեկվատ) ներկայացմանը: Մոդելը կարելի է լրացնել այլ փոփոխականներով և հավասարումներով:

Այսպես օրինակ, համախառն ներքին արդյունքը (Y) կարելի է ներկայացնել Y=C+I կամ բաց տնտեսության համար՝ Y=C+I+E-M տեսքով, որտեղ C՝ սպառումն է, I՝ ներդրումները, E՝ արտահանումը, M՝ ներմուծումը:

Մեկ ուրիշ օրինակ: Մոդելի (1) հավասարումը կարելի է գրել, $\frac{dK}{dt} = I(t) - \mu k(t)$ որտեղ $\mu > 0$ հաստատունը ամորտիզացիայի նորման է: Հավասարումը տնտեսագիտորեն մեկնաբանվում է հետևյալ կերպ. I(t) ներդրումները t-րդ տարում ուղղվում են K(t) կապիտալի հավելաճի ապահովմանը և μ k(t) չափով k(t) կապիտալի մաշվածության վերացմանը:

2.7.2. Տնտեսական աճի Ուզավայի մոդելը

Մոդելում համարվում է, որ տնտեսության մեջ առանձնացված են երկու սեկտոր, որոնցից մեկը արտադրում է սպառման բարիքներ (սպառման սեկտոր), իսկ մյուսը՝ կապիտալ բարիքներ (ներդրման սեկտոր):

Նշանակենք սպառման և ներդրման սեկտորներում արդյունքները t-րդ տարում համապատասխանաբար Y_c (t)-ով և Y_1(t): Այդ դեպքում Y(t) սպառման բարիքներով չափված համախառն ազգային արդյունքը կարելի է ներկայացնել

$$Y(t) = Y_C(t) + p(t)Y_I(t) \qquad (1)$$

հավասարման տեսքով, որտեղ p(t)-ն սպառողական ապրանքների գներով արտահայտված արտադրության միջոցների գինն է:

Ենթադրվում է, որ բարիքները արտադրելու համար օգտագործվում են երկու ռեսուրս՝ աշխատանք (L) և կապիտալ (K):

Յուրաքանչյուր սեկտորում արտադրանքը որոշվում է Y=F(K,L) արտադրական ֆունկցիայով, որը ցույց է տալիս տվյալ սեկտորում թողարկված արդյունքի կախվածությունը այդ սեկտորում օգտագործված կապիտալի և աշխատանքի քանակներից: Մոդելում արտադրանքը յուրաքանչյուր սեկտորում ներկայացվում է համապատասխան հավասարման տեսքով.

$$Y_C(t) = F_C(K_C(t), L_C(t)) \quad (2)$$

$$Y_I(t) = F_I(K_I(t), L_I(t)), \quad (3)$$

որտեղ $K_c(t)$, $L_c(t)$ և $K_1(t)$, $L_1(t)$) սպառման և ներդրման սեկտորներում օգտագործված կապիտալի ու աշխատանքի ծավալներն են:

Ենթադրում ենք, որ և՛ կապիտալը, և՛ աշխատանքը օգտագործվում են ամբողջությամբ, ինչն արտահայտվում է հետևյալ պայմանների տեսքով.

$$K(t) = K_1(t) + K_c(t) \quad (4)$$

$$L(t) = L_1(t) + L_c(t), \quad (5)$$

Ենթադրվում է, որ կապիտալի ընդհանուր ծավալը ընդլայնվում է կապիտալ ներդրումների հաշվին և ենթարկվում մաշվածության μ ամորտիզացիայի հաստատուն նորմայով՝

$$\frac{dK}{dt} = Y_1(t) - \mu K(t) \quad (6)$$

Մոդելում ենթադրվում է, որ աշխատանքի քանակն աճում է հաստատուն n տեմպերով՝ $\frac{dL}{dt} = nL$, որտեղից հետևում է $\frac{dL/dt}{L} = n$ պայմանը:

Այստեղից ստանում ենք աշխատանքի քանակի աճի հետագիծը.

$$L(t) = L_0 e^{nt}, \quad \textbf{(7)}$$

որտեղ L_0-ն աշխատանքի քանակն է բազիսային տարում:

Նշենք, որ (6) և (7) հավասարումները որոշում են կապիտալի և աշխատանքի հետագծերը:

Նշանակենք w (t)-ով աշխատավարձի մեծությունը: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ պայմանը.

$$w(t) = \frac{dF_C}{dL_C} = p(t)\frac{dF_I}{dL_I}, \quad (8)$$

որը նշանակում է, որ աշխատավարձը հավասար է աշխատանքի սահմանային արդյունքին և նույնն է բոլոր սեկտորներում:

Նշանակենք r (t)-ով կապիտալի գինը կամ տոկոսադրույքը: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ պայմանը:

$$r(t) = \frac{dF_C}{dK_C} = p(t)\frac{dF_I}{dK_I} \qquad (9)$$

Այս հավասարումը նշանակում է, որ կապիտալի գինը հավասար է կապիտալի սահմանային արդյունքին և նույնն է բոլոր սեկտորներում:

Եթե (8) և (9) պայմանները չբավարարեն, ապա տեղի կունենա համապատասխան ռեսուրսի հոսք մի սեկտորից դեպի մյուս սեկտոր (ենթադրվում է, որ դա հնարավոր է): Նշված (8) և (9) պայմանները տեղի ունեն զուտ մրցակցային տնտեսությունում:

Վերջապես, եթե համախառն ազգային արդյունքի որոշակի մասը խնայվում է σ խնայողության նորմով, ապա այն ծախսվում է ներդրումների վրա՝

$$\sigma Y(t)=p(t)Y_1(t) \qquad (10)$$

Համաձայն այս հավասարությանը՝ խնայողությունների չափը հավասար է սպառողական բարիքների գներով արտահայտված ներդրումներին:

Այսպիսով, Ուզավայի տնտեսական աճի մոդելը ներկայացվեց (1) - (10) հավասարումների տեսքով:

Կասենք, որ ունենք հավասարակշռված տնտեսական աճ, եթե աշխատուժի, կապիտալի և ՀՆԱ-ի աճի տեմպերը համընկնում են, այսինքն $\frac{dY}{Y} = \frac{dK}{K} = \frac{dL}{L}$

Խնդիրը հետևյալն է. գտնել $K_c(t)$, $L_c(t)$, $K_1(t)$, $L_1(t)$ փոփոխականների համար այնպիսի հետագծեր, որոնք բավարարում են (1-10) պայմաններին և ապահովում են հավասարակշռված տնտեսական աճ:

Մոդելի վերլուծության արդյունքում ստացվել են հավասարակշռված տնտեսական աճի ապահովման պայմանները: Ապացուցված է, որ *հավասարակշռված տնտեսական աճի միակության ու կայունության համար բավարար է, որ տեղի ունենա* $\frac{K_c}{L_c} > \frac{K_1}{L_1}$ *պայմանը, այսինքն սպառման սեկտորը լինի ավելի կապիտալազինված, քան ներդրման սեկտորը: Կարևոր է նշել, որ սա բավարար պայման է, բայց ոչ՝ անհրաժեշտ:*

ԳԼՈՒԽ 3

ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՄՈԴԵԼԸ, ՄԱՔՍԻՄՈՒՄԻ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ

3.1. Օպտիմալ կառավարման մոդելը

Ռացիոնալ տնտեսավարման դինամիկ խնդիրը կարող է ներկայացվել որոշակի ժամանակի ընթացքում սահմանափակ ռեսուրսների բաշխման խնդրի տեսքով: Այն ձևակերպելով մաթեմատիկական տերմիններով՝ ստանում ենք մի խնդիր, որը հայտնի է որպես օպտիմալ կառավարման ընդհանուր դինամիկ մոդել:

Խնդրի խիստ ձևակերպման համար օգտագործվում են հետևյալ հասկացությունները. ժամանակ նկարագրող (ֆազային) փոփոխականներ, կառավարող պարամետրեր, կառավարվող օբյեկտի փոփոխությունը բնութագրող (շարժման) հավասարումներ, նպատակային ֆունկցիա:

Ներգործելով կառավարվող օբյեկտի կամ համակարգի վրա հնարավոր է դառնում այս կամ այն իմաստով այն կառավարել, այլ կերպ՝ ազդել նրա վարքի վրա: Կառավարվող օբյեկտ կարող է հանդիսանալ ավտոմեքենան, ինքնաթիռը, հրթիռը, ինչպես նաև՝ արտադրական գործընթացը, տնտեսական գործունեությունն ընդհանրապես և այլն:

Ժամանակը չափվում է որպես անընդհատ մեծություն: Ենթադրվում է, որ այն փոփոխվում է սկզբնական t_0 պահից մինչև վերջնական t_1 պահը: Ի դեպ, t_1-ը հաճախ հարկ է լինում որոշել, որը կարող է ինքնուրույն քննարկման առարկա լինել: Տվյալ դեպքում ենթադրում ենք, որ $t_0 \le t \le t_1$:

Կառավարվող օբյեկտի կամ համակարգի վիճակը ժամանակի ցանկացած պահին $(t_0 \le t \le t_1)$ բնութագրվում է n թվերի միջոցով $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$, որոնց անվանում են ֆազային կոորդինատներ: Ֆազային կոորդինատներից կազմված n չափանի վեկտորը կոչվում է ֆազային վեկտոր $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ (ֆազային կետ էվկլիդյան n-չափանի տարածության մեջ):

Որոշումները, որոնք կայացվում են ժամանակի յուրաքանչյուր t պահին $(t_0 \le t \le t_1)$, բնութագրվում են $y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t)$ r իրական թվերով, որոնք կոչվում են կառավարող պարամետրեր: Կառավարման պարամետրերից կազմված r - չափանի վեկտորը կոչվում է կառավարող վեկտոր:

$$\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t)):$$

Սովորաբար $y_1(t), y_2(t),..., y_r(t)$ կառավարող պարամետրերը չեն կարող ընդունել կամայական արժեքներ, այլ ենթարկվում են որոշ սահմանափակումների: Ընդհանուր դեպքում r - չափանի տարածության մեջ նշված է մի որևէ Y բազմություն և պահանջվում է, որ ժամանակի ցանկացած t պահին $(y_1(t),..., y_r(t)) \in Y$ (կամ $\overline{y}(t) \in Y) \forall t, t \in [t_0, t_1]$): Y բազմությունը կոչվում է կառավարման տիրույթ (նշենք, որ կառավարման տեսության մեջ ընդունված է $y_i(t)$ ֆունկցիաները վերցնել կտոր առ կտոր անընդհատ ֆունկցիաներ):

Կառավարվող օբյեկտի շարժումը (փոփոխությունը ժամանակի ընթացքում) մաթեմատիկական տեսանկյունից կայանում է նրանում, որ ժամանակի ընթացքում նրա $x_1,...x_n$ կոորդինատները փոփոխվում են՝ հանդիսանում են ժամանակից կախված ֆունկցիաներ: Սովորաբար օբյեկտի շարժումը բնութագրվում է դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով՝

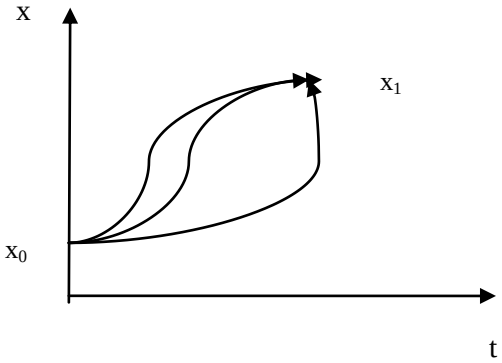
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t), y_1(t),..., y_r(t), t) \\ ... \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = f_n(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t), y_1(t),..., y_r(t), t) \end{cases} \qquad (1)$$

կամ վեկտորական տեսքով

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t), t),$$

որտեղ $f_1,..., f_n$-ը հայտնի ֆունկցիաներ են՝ կախված օբյեկտի հատկություններից: Դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունից հայտնի է, որ եթե $t = t_0$ դեպքում հայտնի են $x_1(t_0), x_2(t_0),..., x_n(t_0)$ թվերը (օբյեկտի սկզբնական ֆազային կոորդինատները), ապա, ընտրելով $y_1(t),..., y_r(t)$ կառավարող պարամետրերը $t_0 < t$ միջակայքում, (1) համակարգից միարժեք ձևով կարելի է գտնել $x_1(t),..., x_n(t)$ ֆունկցիաները: Այս ֆունկցիաների համախումբը կոչվում է օբյեկտի ֆազային հետագիծ:

Ենթադրենք, իմանալով օբյեկտի սկզբնական $x_0 = x(t_0)$ ֆազային վիճակը և $y(t) = (y_1(t), y_2(t),..., y_r(t))$ կառավարումը, (1) համակարգով որոշվել է $x(t)$ ֆազային հետագիծը: Եթե մենք փոփոխենք $y(t)$ կառավարումը, անփոփոխ թողնելով x_0-ն, ապա կստանանք մեկ այլ հետագիծ, որը նույնպես սկիզբ է առնում x_0 կետից և այսպես շարունակ (տես նկ. 1):



Նկար 1

Օպտիմալ կառավարման ընդհանուր խնդիրը նրանում է, որ օբյեկտը մի ինչ-որ սկզբնական x_0 վիճակից պետք է տեղափոխել մեկ այլ x_1 վիճակի (ընտրելով հարմար կառավարում), սակայն այնպես, որ մի ինչ-որ մեծություն (որը կախված է և՛ ֆազային կոորդինատներից, և՛ կառավարող պարամետրերից) ընդունի իր մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը: Այդ մեծությունը, կախված խնդրի բնույթից, կարող է լինել եկամտի կամ ծախսերի մեծությունը, ժամանակը և այլն:

Այսպիսով, խնդիրը մաթեմատիկական տեսանկյունից ձևակերպվում է այսպես. դիցուք կառավարվող օբյեկտի շարժումը բնութագրվում է (1) համակարգով, որտեղ y-ը պատկանում է կառավարման Y տիրույթին: Ֆազային կոորդինատների տարածությունում տրված են x_0 և x_1 կետերը: Պահանջվում է բոլոր թույլատրելի y(t) կառավարումներից, որոնք օբյեկտը տեղափոխում են x_0 վիճակից x_1 վիճակ, ընտրել այնպիսի կառավարում, որի դեպքում $J = \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)dt$ մեծությունը ընդունում է մեծագույն (կամ փոքրագույն) արժեք: Այսպես,

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y,t)$$

$$\{y(t)\} \in Y$$

գտնել

$$\max J = \max \int_{t_0}^{t_1} F(x,y,t)dt :$$

Կառավարման խնդրի դասական օրինակ է հրթիռի օպտիմալ հետագծի որոշման խնդիրը: Այստեղ որպես ֆազային կոորդինատներ հանդիսանում են նրա կշիռը, ինչպես նաև՝ արագությունը և գտնվելու վայրը ֆիքսված կոորդինատային համակարգի նկատմամբ: Որպես կառավարող պարամետրեր հանդես են գալիս շարժիչի միացման ժամանակը, նրա աշխատանքի տևողությունը, քարշի ուժի մեծությունն ու ուղղությունը, որը հարկավոր է կիրառել հրթիռի նկատմամբ ժամանակի յուրաքանչյուր պահին: Ֆազային կոորդինատների կախվածությունը քարշի ուժից արտահայտվում է դիֆերենցիալ հավասարումների օգնությամբ, որոնք կազմվում են համաձայն ֆիզիկայի օրենքների: Արդյունքում հետագծի հաշվարկումը կայանում է որևէ նպատակային ֆունկցիայի մաքսիմումին հասնելու մեջ:

3.2. Շրջակա միջավայրի աղտոտումը վերահսկելու խնդիրը

Քանի որ շրջակա միջավայրի աղտոտման հիմնական աղբյուրն արտադրական թափոններն են, ապա վերահսկողությունը կարելի է կատարել՝ կիրառելով արտադրական ֆունկցիաների և օգտակարության ֆունկցիաների գործիքակազմը:

Ենթադրենք, հասարակության շահերը ներկայացվում են օգտակարության $u(c,p)$ ֆունկցիայով, որում արգումենտները համապատասխանաբար սպառման (c) և աղտոտման (p) ծավալներն են: Ենթադրենք նաև, որ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$\frac{\partial u}{\partial c} > 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} < 0, \frac{\partial u}{\partial p} < 0, \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} < 0, \qquad \lim_{c\to 0}\frac{\partial u}{\partial c} = \infty,$$

այսինքն, սպառման սահմանային օգտակարությունը $MU_c = \frac{\partial u}{\partial c}$ դրական է, իսկ աղտոտվածության աճին զուգընթաց օգտակարությունը նվազում է: Սակայն սպառման և աղտոտվածության սահմանային օգտակարությունները, դրանց ծավալների աճին զուգընթաց, նվազում են: Սպառման սահմանային օգտակարությունը 0 կետում ունի II կարգի խզում: Այստեղ որպես օպտիմալացման չափանիշ է կիրառվում օգտակարության ֆունկցիայի ինտեգրալը $(c(t),p(t))$ կոնկրետ հետագծի երկայնքով, հաշվի առնելով դիսկոնտավորումը՝

$$W = \int_0^T u(c,p)e^{-rt}dt :$$

Դիտարկենք Կոբ-Դուգլասի $F(K,L)$ մեկ արդյունքանի նեոդասական ֆունկցիան K և L արգումենտներով, որտեղ K-ն հիմնական կապիտալի, իսկ L-ը՝ աշխատանք ռեսուրսի ծավալներն են:

Պարզության համար ենթադրենք, որ աշխատանք ռեսուրսի L քանակը և ամորտիզացիայի δ նորմը ժամանակի ընթացքում չեն փոխվում: Ենթադրենք նաև, որ աղտոտվածության ծավալը համամասնական է արտադրանքի թողարկման ծավալին և կազմում է նրա ε մասը, $0<\varepsilon<1$: Աղտոտվածությունը չափվում է նույն միավորներով, ինչ միավորներով հիմնական արտադրանքը: Հայտնի է, որ շրջակա միջավայրը արտադրության թափոնները յուրացնելու հատկություն ունի: Ենթադրենք թափոնների ընդհանուր ծավալի γ բաժինը կլանվում է շրջակա միջավայրի կողմից: Կլանման կամ, նվազման այդպիսի պարզեցումը՝ գծային կապը, հարմար է մաթեմատիկական նկատառումով, որը, սակայն, կոպիտ է մոտարկում կենսաբանական իրականությունը: Ենթադրենք նաև, որ α-ն սպառման նորմն է, β-ն ներդրումների բաժինը, որն ուղղված է աղտոտվածության կրճատմանը: Ընդ որում, ենթադրվում է, որ աղտոտվածությունը կրճատելու ծախսերի արդյունավետությունը հաստատուն է, այսինքն, միավոր արտադրանքի վրա կատարած ծախսերը աղտոտվածությունը կրճատում են μ միավորով $(\mu>1)$: Օպտիմալ կառավարման մոդելի միջոցով որոշվում են թողարկման α և β բաժինները, որոնք նախատեսված են սպառման (α) և աղտոտվածության կրճատման (β) համար, և սպառման ու աղտոտման հոսքերից կախված u(c,p) դիսկոնտավորված օգտակարության գումարային ֆունկցիոնալը ընդունում է իր առավելագույն արժեքը:

Մոդելը ներկայացվում է (1) հավասարումների համակարգով և (2) նպատակային ֆունկցիայի միջոցով.

$$\begin{cases} c=\alpha F(K,L) \\ \dfrac{dK}{dt}=(1-\alpha-\beta)F(K,L)-\delta K \\ \dfrac{dp}{dt}=(\varepsilon-\mu\beta)F(K,L)-\gamma p \\ 0\le\alpha(t)\le 1, 0\le\beta(t)\le 1, \alpha(t)+\beta(t)\le 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\int_0^T u(c,p)e^{-rt}dt\to\max \tag{2}$$

Խնդրի լուծման՝ օպտիմալ հետագծերի որոշման համար մշակված է հատուկ եղանակ՝ Պոնտրյագինի մաքսիմումի սկզբունքը:

3.3. Օպտիմալ տնտեսական աճի նեոդասական մոդելը

Մոդելը նկարագրում է տնտեսական աճի դինամիկան փակ տնտեսությունում: Ենթադրվում է, որ ժամանակի կամայական t պահին արտադրվում է մեկ համասեռ արտադրանք $Y(t)$ քանակությամբ: Արտադրության պրոցեսում օգտագործվում են երկու ռեսուրսներ՝ $L(t)$ աշխատանքը և $K(t)$ կապիտալը: Եթե նշանակենք $C(t)$-ով սպառումը, իսկ $I(t)$-ով ներդրումները, ապա

$$Y(t) = C(t) + I(t): \tag{1}$$

Ներդրումներն օգտագործվում են առկա կապիտալի ավելացման և մաշված կապիտալի փոխարինման համար: Դիցուք $K(t)$-ն ժամանակի t պահին առկա կապիտալի մեծությունն է: Այդ դեպքում կապիտալ ներդրումները չափվում են առկա կապիտալի փոփոխման արագությամբ՝ $\dot{K}(t) = \dfrac{dK(t)}{dt}$: Ենթադրենք, որ առկա կապիտալի մաշվածությունը համեմատական է նրա մեծությանը և հավասար է μ (մաշվածության նորմը), այսինքն, ժամանականի t պահին պետք է փոխարինել $\mu K(t)$ մաշված կապիտալը: Այդ դեպքում՝

$$I(t) = \dot{K}(t) + \mu K(t) \tag{2}$$

Դիցուք թողարկվող արտադրանքի քանակը որոշվում է $Y = F(K, L)$ արտադրական ֆունկցիայով, որը համասեռ է, այսինքն, կամայական $\alpha > 0$ թվի համար

$$F(\alpha K, \alpha L) = \alpha F(K, L) = \alpha Y \tag{3}$$

Ենթադրվում է նաև, որ արտադրական ֆունկցիան երկու անգամ դիֆերենցելի է, և տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները.

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \lim_{K \to 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \infty, \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = 0, \\ \lim_{L \to 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = \infty, \ \lim_{L \to \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

Եթե վերցնենք $\alpha = \frac{1}{L}$, ապա կստանանք

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L},1\right) = f\left(\frac{K}{L}\right): \tag{6}$$

$f(.)$ ֆունկցիան որոշում է մեկ աշխատողին բաժին ընկնող թողարկված արտադրանքի քանակը՝ աշխատանքի արտադրողականությունը՝ կախված կապիտալազինվածությունից՝ մեկ աշխատողին բաժին ընկնող կապիտալի մեծությունից:

Գրենք (6)-ը հետևյալ տեսքով.

$$y = f(k), \tag{7}$$

որտեղ $y(t)$-ն աշխատանքի արտադրողականությունն է, իսկ $k(t)$-ն՝ կապիտալազինվածությունը.

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)},\ k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} \tag{8}$$

(4) և (5)-ից հետևում է, որ

$$f'(k) = \frac{df(k)}{dk} > 0,\ f''(k) = \frac{d^2 f(k)}{dk^2} < 0\text{, երբ } k > 0\text{,}$$
$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty,\ \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0: \tag{9}$$

Նշանակենք

$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)},\ i(t) = \frac{I(t)}{L(t)} \tag{10}$$

Այդ դեպքում կունենանք.

$$y(t) = c(t) + i(t), \tag{11}$$

$$i(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \mu k(t): \tag{12}$$

Մեկ աշխատողի կապիտալազինվածությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\cdot\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - k\frac{\dot{L}}{L}: \tag{13}$$

Ուստի

$$i(t) = \dot{k} + \left(\mu + \frac{\dot{L}}{L}\right)k : \qquad (14)$$

Ենթադրվում է, որ աշխատուժի քանակությունը փոխվում է էքսպոնենցիալ օրենքով.

$$\frac{\dot{L}}{L} = n , \qquad (15)$$

ուստի

$$i(t) = \dot{k} + (\mu + n)k = \dot{k} + \lambda k , \qquad (16)$$

որտեղ λ-ն կապիտալի մաշվածության նորմի և աշխատուժի աճի տեմպի գումարն է՝

$$\lambda = \mu + n , \qquad (17)$$

Հետագայում կենթադրենք, որ λ-ն դրական հաստատուն է:

Վերևում բերված (11), (12) և (17) հավասարումները թույլ են տալիս գրելու տնտեսական աճի նեոդասական մոդելի հիմնական դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$f(k(t)) = c(t) + \lambda k(t) + \dot{k}(t) \qquad (18)$$

Օպտիմալ տնտեսական աճի նեոդասական խնդիրը կարելի է դիտարկել որպես տնտեսության ռացիոնալ վարման դինամիկ խնդիր (կառավարման խնդիր): Խնդրում կա մեկ ֆազային կոորդինատ՝ մեկ աշխատողի կապիտալազինվածությունը՝ $k(t)$: Շարժման հավասարումը տնտեսական աճի նեոդասական մոդելի հիմնական դիֆերենցիալ հավասարումն է՝

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \lambda k(t) - c(t) : \qquad (19)$$

Սկզբնական վիճակը տրվում է $t = t_0$ պահին մեկ աշխատողի կապիտալազինվածության ցուցանիշով՝

$$k(t_0) = k_0 : \qquad (20)$$

Որպես կառավարող պարամետր հանդես է գալիս մեկ աշխատողի $c(t)$ պահանջարկը, որը փոփոխվում է տրված միջակայքում.

$$\{c(t)\} = \{c(t) \mid t_0 \le t \le t_1\} : \qquad (21)$$

Ժամանակի t_0 և t_1 սկզբնական և վերջնական արժեքները տված են, ընդ որում t_1-ը կարող է ընդունել ինչպես վերջավոր, այնպես էլ անվերջ արժեքներ: Թույլատրելի հետագիծ կոչվում է ցանկացած կտոր-առ-կտոր անընդհատ $c(t)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է (19) շարժման հավասարմանը, (20) եզրային պայմանին, և որի համար

$$0 \le c(t) \le f(k(t)), \ \forall t \in [t_0, t_1]: \tag{22}$$

Կառավարման խնդիրն է՝ ընտրել այնպիսի $c(t)$ թույլատրելի սպառման ֆունկցիա, որը լինի օպտիմալ որոշ տնտեսական նպատակի հասնելու համար:

Որպես տնտեսական նպատակ կարելի է դիտարկել, օրինակ, օգտակարության ֆունկցիայի մաքսիմալացումը: Այդ ֆունկցիան ժամանակի յուրաքանչյուր t պահի որոշում է մեկ աշխատողի սպառումից ստացած օգտակարությունը.

$$U = U(c(t)) \tag{23}$$

Կընդունենք, որ օգտակարության ֆունկցիան երկու անգամ անընդհատորեն դիֆերենցելի է, և սահմանային օգտակարությունը դրական, նվազող ֆունկցիա է.

$$\frac{dU(c)}{dc} = U'(c) > 0, \ \frac{d^2U(c)}{dc^2} = U''(c) < 0, \ \forall 0 < c < \infty \text{ - համար:} \tag{24}$$

Հետևաբար, $U(.)$ օգտակարության ֆունկցիան խիստ գոգավոր, մոնոտոն աճող ֆունկցիա է: Կենթադրենք նաև, որ

$$\lim_{c \to 0} U'(c) = \infty, \ \lim_{c \to \infty} U'(c) = 0 \tag{25}$$

Որպես օպտիմալացման չափանիշ վերցվում է օգտակարության ֆունկցիայի ինտեգրալը $(c(t))$ հետագծի երկայնքով, հաշվի առնելով դիսկոնտավորումը.

$$W = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)} U(c(t)) dt, \tag{26}$$

որտեղ $\delta > 0$ դիսկոնտավորման նորմը հաստատուն է:

Ժամանակը կարող է լինել վերջավոր կամ անվերջ: Եթե ժամանակը վերջավոր է, ապա t_1 կետում անհրաժեշտ է տալ կապիտալազինվածության մինիմալ թույլատրելի արժեք, որպեսզի ապահովենք տվյալ ժամանակահատվածի համար սպառման հնարավորությունը.

$$k(t_1) = k_1: \tag{27}$$

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ t_1-ը անվերջ է, այսինքն $(c(t))$ հետագիծը ընտրվում է ամբողջ ապագա ժամանակահատվածի համար: Այս դեպքում, բարեկեցության (26) ինտեգրալի զուգամիտության համար դրվում է $c(t) \le f\left(\tilde{k}\right)$ պայմանը, որտեղ $\tilde{k}$-ը մաքսիմալ հասանելի կապիտալազին-վածության մակարդակն է: Իրոք, այդ դեպքում

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} U(c(t))dt \le \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} U\left(f\left(\tilde{k}\right)\right)dt = \frac{U\left(f\left(\tilde{k}\right)\right)}{\delta}, \tag{28}$$

այսինքն, բարեկեցության ինտեգրալը վերևից սահմանափակ է:

Այսպիսով, նեոդասական օպտիմալ աճի խնդիրը փակ տնտեսության համար անվերջ պլանավորման դեպքում դիսկոնտավորման դրական նորմի պայմանով բերվում է այնպիսի $c(t)$ կտոր-առ-կտոր անընդհատ ֆունկցիայի ընտրության, որ

$$\max_{\{c(t)\}} W = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} U(c(t))dt \tag{29}$$

$$\begin{cases} k' = f(k) - \lambda k - c, \\ k(t_0) = k_0, \\ 0 \le c \le f(k) \end{cases} \tag{30}$$

Կազմենք համիլտոնիանը.

$$H = e^{-\delta(t-t_0)} \{U(c) + q[f(k) - \lambda k - c]\}, \tag{31}$$

որտեղ q-ն համալուծ փոփոխական է:

Ներքին մաքսիմումի համար $\frac{\partial H}{\partial c} = 0$ առաջին կարգի պայմանից ստանում ենք

$$q = \frac{dU}{dc}: \tag{32}$$

Համալուծ փոփոխականի համար կանոնական հավասարումն է՝

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\delta(t-t_0)} q(t)\right) = -\frac{\partial H}{\partial k},$$

որտեղից էլ՝

$$\dot{q} = -\left(f'(k) - (\lambda + \delta)\right)q : \qquad (33)$$

Ձևափոխելով վերջին հավասարումը, կստանանք՝

$$f'(k) + \frac{\dot{q}}{q} - \mu - n - \delta = 0 : \qquad (34)$$

Քանի որ օպտիմալ հետագծի վրա ($q(t) = U'(c(t))$, ապա դիֆերենցելով, կստանանք՝

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{U''(c)}{U'(c)}\dot{c} = -\sigma(c)\frac{\dot{c}}{c},$$

որտեղ $\sigma(c)$-ն սահմանային օգտակարության առաձգականությունն է: Այսպիսով, եթե $(c^*(t), k^*(t))$-ն օպտիմալ լուծում է, ապա այն պետք է բավարարի հետևյալ համակարգին.

$$\begin{cases} \dot{c} = \dfrac{1}{\sigma(c)}\left[f'(k) - (\lambda + \delta)\right]c, \\ \dot{k} = f(k) - \lambda k - c \end{cases}$$

ԳԼՈՒԽ 4

ԴԻՆԱՄԻԿ ԾՐԱԳՐՈՒՄ

Դինամիկ ծրագրումը (ԴԾ) մի հնարք է՝ մշակված որոշակի տիպի օպտիմալացման՝ բազմափուլային կամ բազմաքայլային խնդիրների լուծման համար: Այն հնարավորություն է տալիս բարդ մաթեմատիկական խնդրի լուծումը հանգեցնել մի շարք ավելի պարզ խնդիրների հաջորդական լուծմանը: Բազմաթիվ տնտեսական գործընթացներ բնականոն ձևով տրոհվում (բաղդատվում) են փուլերի կամ քայլերի: Այդպիսիք են ժամանակի մեջ զարգացող պլանավորման կամ կառավարման խնդիրները, որտեղ ժամանակի ընդհատ միավորներ են հանդես գալիս տարին, եռամսյակը, ամիսը, շաբաթը: Օրացուցային պլանավորման խնդիրներում ժամանակի միավոր է հաճախ դիտարկվում նաև մեկ օրը:

Լինում են դեպքեր, երբ խնդրի լուծման «փուլավորումը» ստեղծվում է արհեստականորեն: Այդպիսի մոտեցումը բնորոշ է այն խնդիրներին, որտեղ ժամանակի գործոնը բացակայում է: Դա է պատճառը, որ «դինամիկ» եզրաբառը օգտագործվում է ոչ թե ժամանակի ընթացքում զուգորդվող խնդրի բովանդակության, այլ դիտարկվող խնդրի լուծման ընթացքի ներկայացումը փուլերի կամ քայլերի միջոցով: Այդպիսին են սովորաբար հեռանկարային կամ ընթացիկ պլանավորման խնդիրները, ժամանակի ընդհատ պահերին բազմաքայլ որոշումների կայացման խնդիրները, ռեսուրսների բաշխման բազմատեսակ խնդիրները, ծրագրերի պլանավորման և կառավարման գործընթացներում ծրագրի ամենաշուտ ավարտի ժամանակի որոշումը և այլն:

Մաթեմատիկական ծրագրման գծային, ոչ գծային, ամբողջաթիվ, ինչպես նաև ցանցային խնդիրների լուծման համար գոյություն ունեն չափօրինակ (ստանդարտ) մոտեցումներ: Գծային ծրագրման խնդրի լավագույն լուծումը գտնելու համար կարելի է օգտագործել սիմպլեքս ալգորիթմը, ոչ գծային ծրագրման խնդիրների համար օգտակար է Լագրանժի բազմապատկիչների եղանակը, գրադիենտի եղանակը, տարբեր տեսակի մոտարկումների և գնահատականների եղանակները: Ցանցային ծրագրման խնդիրներում օգտագործում են նշումների եղանակը և այլք: Ի տարբերություն վերը նշված օպտիմալացման խնդիրների լուծման միօրինակ մոտեցումների ԴԾ խնդիրների համար նմանատիպ չափօրինակ մոտեցումներ գոյություն չունեն:

4.1. Դինամիկ ծրագրման խնդրի հիմնական հասկացությունները

Դինամիկ ծրագրման խնդրի լուծման եղանակը էապես տարբերվում է մաթեմատիկական ծրագրման այլ խնդիրների լուծման եղանակներից: ԴՕ եղանակը առանձնանում է իր յուրովի գաղափարների ու հասկացություններ-ի, ինչպես նաև օգտագործվող եզրաբառերի առումով: ԴՕ-ն ունի որոշակի առանձնահատկություններ. խնդրի լուծումը իրականացվում է փուլ առ փուլ, օգտագործվում են անդրադարձ հավասարումներ, կիրառվում է ընկղման սկզբունքը, և, վերջապես, կիրառվում է օպտիմալացման սկզբունքը:

ԴՕ ոչ սովորական եզրերը և դրույթները որոշակի դժվարություններ են առաջացնում դրանք յուրացնելիս և օգտագործելիս: Ընթերցողը պետք է ընդունի այս ոչ խիստ, ինչ-որ չափով անորոշ սահմանումներն ու պնդումները, որովհետև ԴՕ-ն ընդգրկում է ոչ միայն խիստ մաթեմատիկական ձևակերպումներ, այլև հետազոտողի փորձառությանը և բանականությանը չհակասող հնարամտություններ:

Բացի վերը նշված առանձնահատկություններից դինամիկ ծրագրման եղանակը սահմանում է նոր եզրաբառեր, ինչպիսիք են՝ փուլ (stage), վիճակ (state), որոշումի կայացման փոփոխական՝ վարվելակերպ (policy decision), վարք (strategy):

Ստորև կփորձենք մանրամասնել ներմուծված եզրաբառերի հիմնարար բովանդակությունը.

Փուլ: Հետազոտվող խնդրի լուծման որոնումը բաժանվում է փուլերի կամ քայլերի, ամեն մի փուլում (քայլում) առանձնացնելով դիտարկվող ընթացիկ փուլի համար որոշումների կայացման քաղաքականության մշակման հարցերը: Խնդրի լուծումը՝ որոշումների փոխկապված հաջորդականություն է, որը բնութագրում է նաև փուլից փուլ անցնելու որոշումների ընդունման գործընթացը:

Վիճակ: Ցանկացած փուլ բաղկացած է վիճակների բազմությունից, որն ասոցիացվում է որոշումների ընդունման հաջորդականության ընթացակարգի հետևանքով որոշակի փուլի որոշումների կայացման գործընթացի մեջ ընդգրկման սկիզբը: Վիճակի սահմանման համար միօրինակ մոտեցում չկա: Դա ԴՕ-ի եղանակի՝ դժվարությամբ և նրբորեն սահմանվող հասկացություն է: Վիճակը պետք է նկարագրել այնպիսի փոփոխականների և պարամետրերի միջոցով ու այնպիսի մանրամասնությամբ, որ հնարավորություն ստեղծվի կատարելու ընթացիկ երկընտրանքային հաշվարկները և ունենալու դրանց գնահատականները՝ լավագույն լուծում գտնելու համար:

Փուլ և վիճակ հասկացությունները սերտորեն կապված են: Լինում են դեպքեր, երբ նմանատիպ վիճակների (պայմանների) միավորման միջոցով կարելի է ստանալ փուլերը և դրանց հաջորդականությունը: Օրինակ, օրգրաֆի համար նմանատիպ պայմաններ են այն բոլոր s գագաթները, որոնց

համար սկզբնական գագաթից s-րդ գագաթ տանող ամենաշատ աղեղներ պարունակող ուղու աղեղների քանակը k է, k=1,2,…:

Շատ կարևոր է նաև փուլերի քանակը՝ վերջավոր կամ անվերջ: Բոլոր դեպքերում պետք է ընձեռնվի այնպիսի հնարավորություն, որ խնդրի լուծման հետ կապված գործողությունները կատարվեն պարզ եղանակով և խուսափել բարդ հաշվարկներից:

Վարվելակերպ, վարք: Ինչ-որ փուլին պատկանող ցանկացած վիճակի բնութագրիչներից է վարվելակերպ հասկացությունը, որի միջոցով նկարագրվում է դիտարկվող վիճակի համար բոլոր հնարավոր որոշումների (գործողությունների) բազմությունը: Այդ բազմության որևէ տարրի (վարվելակերպի) ընտրության դեպքում տվյալ վիճակից անցում է կատարվում հաջորդ փուլին պատկանող մի նոր վիճակ:

Հետևաբար, գտնվելով որոշակի վիճակում՝ հնարավորություն կա անցնելու հաջորդ փուլին պատկանող տարբեր հարևան վիճակների, որոնք ընտրվում են շնորհիվ դիտարկվող վիճակը բնորոշող վարվելակերպերի: Տրված վիճակում որոշակի վարվելակերպի ընտրությունը կանվանենք այդ վիճակին համապատասխանող որոշման կայացում կամ լուծում: Նշենք, որ ամեն մի վիճակի համար ընդունվում է ընդամենը մեկ որոշում (վարվելակերպ):

Այսպիսի անցման շնորհիվ է, որ ԴՇ խնդրի լուծումը կարելի է մեկնաբանել ցանցերի լեզվով՝ ցանկացած վիճակ ներկայացվում է որպես գագաթ, այդ գագաթից դուրս եկող աղեղների բազմությունը նկարագրում են համապատասխան վիճակը բնութագրող վարվելակերպերի բազմությունը: Հասկանալի է, որ եթե մենք ունենք որոշակի նպատակ (համաձայն խնդրի բովանդակության), ապա կամայական (նաև սկզբնական) վիճակում (գագաթում) գտնվելիս և ընտրելով այդ վիճակի (գագաթի) համար լավագույն լուծումը (վարվելակերպը, աղեղը) և օգտվելով դինամիկ ծրագրման օպտիմալության սկզբունքից արդյունքում կարող ենք գտնել վերջնական լուծումը, որը կանվանենք լավագույն վարք:

Ինքնին վարքն ամեն մի վիճակի համար մեկական ընտրված վարվելակերպերի բազմությունն է, եթե դրա արդյունքում ստանում ենք սկզբնական վիճակից դեպի դիտարկվող վիճակը տանող լուծումների հաջորդականություն:

Այսպիսով լավագույն վարքը դա այն վարվելակերպերի բազմությունն է, որը բնութագրվում է.

- Ամեն վիճակի համար ընտրված է միայն մեկ վարվելակերպ,
- ընտրված վարվելակերպը լավագույնն է խնդրի նպատակի համաձայն,
- ընտրված լավագույն վարվելակերպերի բազմությունը կազմում են խնդրի լավագույն (օպտիմալ) լուծումը:

Անցնելով ցանցերի լեզվին լավագույն վարք ասելով հասկանում ենք. գտնել ցանցում սկզբնական գագաթից դեպի վերջնական գագաթ տանող լավագույն՝ ամենակարճ կամ ամենաերկար ուղին:

4.2. Դինամիկ ծրագրման օպտիմալության սկզբունքները

Օպտիմալության սկզբունք (տարբերակ 1): Լավագույն ուղու ցանկացած ենթաուղի լավագույնն է:

Օպտիմալության սկզբունք (տարբերակ 2): Յուրաքանչյուր վիճակի համար գոյություն ունի սկզբնական վիճակից այդ վիճակին բերող լավագույն վարք:

Օպտիմալության սկզբունք (տարբերակ 3): Լավագույն վարքն օժտված է այն հատկությամբ, որ ինչպիսին էլ լինի դիտարկվող s վիճակը, հաջորդ որոշումները պետք է կազմեն լավագույն վարքը s-ի համար:

Ընկղման սկզբունքը: ԴՕ բնորոշ առանձնահատկություններից է նաև ընկղման սկզբունքը, որը դինամիկ ծրագրման ստեղծող Ռ. Բելմանի խոսքերով առաջինը կիրառել է մեր հայրենակից աստղագետ Վիկտոր Համբարձումյանը: Ընկղման սկզբունքի իմաստը հետևյալն է. խնդիրը լուծելու համար ձևավորվում է նույնատիպ օպտիմալացման խնդիրների բազմություն, որին պատկանող բոլոր խնդիրները լուծելիս ստանում ենք նաև մեր խնդրի լուծումը: Ասվածն ամփոփվում է հետևյալ մոտեցմամբ.

Ելակետային խնդիրն ընկղմվում է օպտիմալացման խնդիրների բազմության մեջ, և յուրաքանչյուր վիճակի համար լուծվում է առանձին խնդիր:

Օպտիմալության սկզբունքների մաթեմատիկական ձևակերպումը հնարավորություն է տալիս ստանալ Բելմանի անդրադարձ հավասարումները:

Անդրադարձ հավասարումներ: Վերը դիտարկված օպտիմալացման սկզբունքները (մաքսիմացման խնդրի դեպքում) մաթեմատիկորեն նկարագրվում են

$$\boldsymbol{l_j = \max_{i \in B(j)} (l_i + l_{ij})}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, N$$

անդրադարձ հավասարումների միջոցով: Այստեղ $\boldsymbol{l_j}$-ն $j = 1, \ldots, N$ սկզբնական գագաթից (վիճակից) դեպի $\boldsymbol{j}$ գագաթ (վիճակ) տանող ամենաերկար ուղու մեծությունն է (լավագույն վարքն է), իսկ B_j={(i,j)} (B-befor j) այն աղեղների (վարվելակերպերի) բազմությունն է, որոնք i (i<j-ից) գագաթից (վիճակից) տանում են դեպի j գագաթ (վիճակ):

Ստորև կառաջարկվի ալգորիթմ, որն օգտագործելով անդրադարձ հավասարումները, գտնում է ցանցում ամենաերկար ուղին: Մենք կենթադրենք, որ ցանցը ցիկլ չի պարունակում, աղեղների երկարությունները ոչ բացասա-

կան թվեր են, գագաթները համարակալված են $1,2,3,\ldots,N$ թվերով այնպես, որ եթե (i,j)-ն աղեղ է, ապա $i<j$: Ալգորիթմի աշխատանքի ընթացքում յուրաքանչյուր j գագաթ $(j=1,2,3,\ldots,N)$ նշվում է v_j թվով. այն փոխվում է ալգորիթմի աշխատանքի ընթացքում և ալգորիթմի ավարտի պահին 1-ից j գագաթ տանող ամենաերկար ուղու երկարությունն է:

Դինամիկ ծրագրման հաշվարկային ալգորիթմները

Հետադարձ մղման ալգորիթմ

Քայլ 1: Վերցնենք $v_1=0$, $v_k=-\infty$, $k=2,3,\ldots,N$, $j=2$:

Քայլ 2: j գագաթ մտնող յուրաքանչյուր (i,j) աղեղի համար ընդունենք $v_j:=\max\{v_i,v_i+l_{ij}\}$:

Քայլ 3: Եթե $j=N$, ալգորիթմն ավարտում է աշխատանքը: Հակառակ դեպքում վերցնենք j-ն հավասար $j+1$ և վերադառնանք քայլ 2-ին:

Դիտողություն: Երկրորդ քայլում v_j-ն փոխարինվում է v_i+l_{ij}-ով, եթե այն մեծ է v_j-ից: Ալգորիթմի այս քայլը կատարվում է գագաթ մտնող յուրաքանչյուր աղեղի համար, ընդ որում համեմատությունը կատարվում է ըստ j-ի աճող համարների: Ալգորիթմի միջոցով գտնում ենք ամենաերկար ուղու մեծությունը: Որպեսզի գտնենք այդ ուղուն պատկանող գագաթները, անհրաժեշտ է լրացուցիչ հիշել ամենաերկար ուղի կազմող գագաթները (աղեղները), կատարելով հետադարձ հաշվարկ՝ գտնում ենք այն աղեղը ու գագաթը, որոնց միջոցով գտել ենք վերջնական լուծումը,… և այդպես շարունակ մինչև չհասնենք սկզբնական գագաթը:

Այժմ դիտարկենք նույն խնդիրը լուծող մեկ այլ ալգորիթմ, որտեղ կատարվում են նույն գործողությունները, բայց այլ հերթականությամբ:

Ուղիղ մղման ալգորիթմ:

Քայլ 1: Վերցնենք $v_1=0$ և $v_k=-\infty$, $k=2,3,\ldots,N-1$, $i=1$:

Քայլ 2: i-րդ գագաթից դուրս եկող յուրաքանչյուր (i,j) աղեղի համար ընդունենք $v_j:=\max\{v_j,v_i+l_{ij}\}$:

Քայլ 3: Եթե i=N -1, ալգորիթմը ավարտում է աշխատանքը: Հակառակ դեպքում i-ն վերցնենք հավասար $i+1$ և վերադառնանք քայլ 2-ին:

Համադրելով ուղիղ և հակադարձ մղման ալգորիթմները՝ համոզվում ենք, որ քայլ 2-ի շնորհիվ դրանք էապես տարբերվում են իրարից, իսկ հաշվման տեսանկյունից՝ չեն տարբերվում: Ուղիղ մղման ալգորիթմում աղեղները դիտարկվում են այն գագաթների համար, որոնց լավագույն

ուղիները հայտնի են, այսինքն i գագաթից դուրս եկող աղեղները հաշվարկների հիմք են: Իսկ հետադարձ մղման ալգորիթմում աղեղները դիտարկվում են այն գագաթների ուղղությամբ, որոնց համար լավագույն ուղիները դեռևս հայտնի չեն: Այդ տեսանկյունից ուղիղ մղման ալգորիթմը նախընտրելի է և հարմար է կիրառել ուղիների բազմության ցանկացած կառուցվածքի դեպքում:

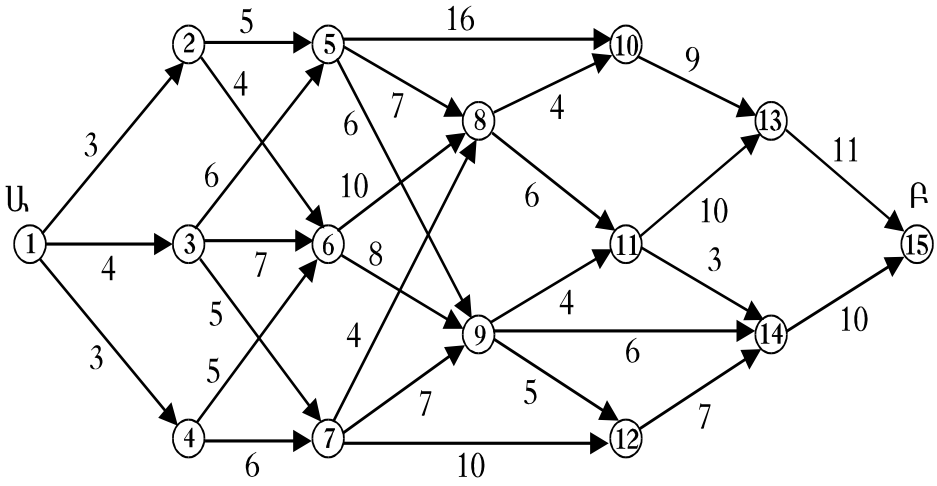
Մեկ անգամ ևս նշենք, որ ինքնին ԴԾ-ն ոչ թե օպտիմալացման, այլ «մեծ» խնդրի լուծումը մի խումբ «փոքր» խնդիրների հաջորդական լուծման հանգեցնող եղանակ է, որին բնորոշ հասկացություններ են.

- վիճակ հասկացությունը, որը բնութագրվում է որոշակի փոփոխականների և պարամետրերի միջոցով,
- փուլից փուլ անցնելու համար թույլատրելի վարվելակերպի (լուծումների, որոշումների) տարբերակներից ընտրել միայն մեկը,
- որոշում կայացնելու արդյունքում կատարվում է անցում հաջորդ փուլին պատկանող մի նոր վիճակի,
- որևէ վիճակում գտնվելու նախապատմությունը չի ազդում ապագա որոշումների կայացման վրա,
- որոշումների կայացման նպատակը վիճակի փոփոխականներից կախված տրված նպատակային ֆունկցիայի օպտիմալացում է:

4.3. Դինամիկ ծրագրման գործնական խնդիրների օրինակներ

4.3.1. Ամենակարճ երթուղու խնդիր

Ենթադրենք դուք որոշել եք ամառային արձակուրդին Ա վայրից ուղևորվել Բ վայր: Քարտեզն ուսումնասիրելիս դուք նկատում եք, որ կան Ա վայրից Բ վայր տանող բազմաթիվ ուղիներ, որոնք անցնում են մի շարք բնակավայրերով: Թղթի վրա գծելով Ա-ից Բ տանող բոլոր հնարավոր երթուղիներն ու բնակավայրերը կստանաք նկար 1-ում պատկերված ցանցը, որտեղ համարակալված գագաթները՝ բնակավայրերն են, իսկ աղեղները պատկերում են այդ բնակավայրերը միացնող երթուղիները:



Նկար 1

Աղեղների մոտ գրված թվերը համապատասխան բնակավայրերի միջև եղած հեռավորություններն են: Օրինակ, Ա-ից մինչև 2-րդ բնակավայր 3 կմ է, Ա-ից մինչև 3-րդ բնակավայր՝ 4 կմ, 2-րդ բնակավայրից մինչև 5-րդ բնակավայր 5 կմ է և այլն: Քարտեզն ուսումնասիրելիս նկատում ենք, որ կան Ա-ից Բ տանող բազմազան ուղիներ՝ կարճ և երկար: Դուք որոշում եք ընտրել ամենակարճ երթուղին: Հետևաբար, պետք է լուծվի Ա-ից Բ տանող ամենակարճ երթուղին գտնելու խնդիրը: Եթե բնակավայրերի քանակը շատ չէ, ապա խնդրի լուծումը կարելի է գտնել հատարկման եղանակով՝ թվարկելով Ա-ից Բ տանող բոլոր հնարավոր երթուղիները և դրանցից ընտրելով ամենակարճը: Բայց երբ գագաթների և աղեղների քանակը շատ է՝ մի քանի հարյուր, կամ նույնիսկ մի քանի հազար, ապա պարզ է, որ նշված եղանակը պիտանի չէ:

Պարզ է, որ Ա բնակավայրից դուք կարող եք շարժվել դեպի 2-րդ, 3-րդ կամ 4-րդ բնակավայրերից որևէ մեկը: Այդ ընտրությունը անվանենք ամենակարճ երթուղու ընտրության առաջին քայլ: Հաջորդ՝ երկրորդ քայլը, կախված նրանից, թե որ բնակավայրում եք եղել առաջին քայլի ընտրության արդյունքում, դուք կարող եք շարժվել միայն դեպի որևէ հարևան բնակավայր. եթե ընտրել էիք 2-րդ բնակավայրը, ապա կարող եք շարժվել դեպի 5-րդ կամ 6-րդ բնակավայր, իսկ եթե ընտրել էիք 3-րդը՝ դեպի 5-րդ, 6-րդ և 7-րդ բնակավայրեր և այլն: Երբ ճամփորդության ընթացքում դուք գտնվում եք որոշակի բնակավայրում, համարենք, որ դուք գտնվում եք բնակավայրի համարին համապատասխանող վիճակում: Գտնվելով որոշակի վիճակում՝ դուք որոշում եք կայացնում՝ ասենք՝ գտնում եք լուծումը, թե դեպի որ բնակավայր գնալ: Դեռևս չգիտենք, թե ինչպես եք հանգում այդ որոշմանը: Բայց

եթե դուք Ա-ից Բ ամենակարճ երթուղին ընտրելու նպատակ ունեք և գտնվում եք որևէ i-րդ բնակավայրում, ապա պարզ է, որ i-ից Բ ընտրվելիք *երթուղին ևս պետք է լինի ամենակարճը*:

Խնդրի դրվածքից ելնելով՝ լավագույն երթուղի ասելով հասկանում ենք Ա-ից մինչև Բ տանող ամենակարճ երթուղին:

Մենք հանգեցինք Ռ. Բելլմանի կողմից ձևակերպված ԴՕ *օպտիմալացման սկզբունքի* առաջին տարբերակին.

Օպտիմալության սկզբունք 1: *Լավագույն երթուղու ցանկացած ենթաերթուղի լավագույնն է*:

Խնդրի լուծմանը մենք կհանգենք՝ փուլ առ փուլ դիտարկելով որոշակի գագաթներ (վիճակներ) և տրված վիճակին համապատասխան որոշում կայացնելով (լուծումը գտնելով)՝ նշելով այն աղեղը, որով պետք է շարժվեն:

Կասենք, որ s-րդ գագաթը պատկանում է n-րդ փուլին, եթե Ա-ից դեպի s գոյություն ունի n հատ աղեղ պարունակող երթուղի, և գոյություն չունի n-ից ավելի աղեղ պարունակող երթուղի:

Առաջարկվող ալգորիթմը հերթական $n=1,2,...$ արժեքների համար դիտարկում է n-րդ փուլին պատկանող բոլոր գագաթները (վիճակները) և դրանցից յուրաքանչյուրի համար որոշում Ա-ից այդ գագաթը տանող ամենակարճ երթուղու երկարությունը: Ալգորիթմը նկարագրելիս կօգտագործվի նաև վարք գաղափարը: Մեր դեպքում տրված վիճակում վարքը Ա-ից մինչև այդ վիճակ որևէ երթուղու ընտրությունն է: Լավագույն վարքը Ա-ից Բ գագաթ տանող ամենակարճ երթուղու ընտրությունն է:

Այսպիսով, ձեր խնդիրը լուծելու համար պետք է որոշվի վիճակից վիճակ անցնելու հաջորդականությունը: Ընտրված վիճակների հաջորդականությունը պետք է կազմի փնտրվող ամենակարճ երթուղին, որն սկզբնական Ա վիճակից տանում է դեպի վերջնական Բ վիճակ: Այժմ տեսնենք, թե դա ինչպես կարելի է իրականացնել:

Ալգորիթմը նկարագրելու համար մեզ պետք են հետևյալ նշանակումները: $f_n(i)$-ով նշանակենք սկզբնական գագաթից (վիճակից) n-րդ փուլին պատկանող i գագաթը (վիճակը) ամենակարճ երթուղու երկարությունը $i=1,2,...,N$, $n=1,2,...,L$ որտեղ N-ը վիճակների (գագաթների) քանակն է ցանցում, իսկ L-ը՝ փուլերի թիվն է: Նկար 1-ում $N=15$, $L=6$: l_{ij}-ով նշանակենք (i,j), աղեղի երկարությունը (նկատենք, որ ցանցը ցիկլ չի պարունակում, և գագաթները համարակալված են այնպես, որ եթե (i,j)-ն աղեղ է, ապա $i<j$):

Պարզ է, որ

$$f_0(1)=0,\ f_1(2)=f_0(1)+l_{12}=0+3=3,$$

$$f_1(3)=f_0(1)+l_{13}=0+4=4,\ f_1(4)=f_0(1)+l_{14}=0+3=3:$$

Առաջին փուլի գագաթների համար հաշվարկներն ավարտված են: Ստացված թվերը, որոնք սկզբնական գագաթից դեպի համապատասխան գագաթ տանող ամենակարճ երթուղիների մեծություններն են, գրում ենք համապատասխան գագաթի շրջանակի մոտ, օրինակ, շրջանակի վերևում: Սկզբնական գագաթից երկրորդ փուլին պատկանող որևէ գագաթ տանող երթուղու երկարությունը հաշվելիս կօգտվենք առաջին փուլի հաշվարկներից: Այսպես, օրինակ 5-րդ գագաթ տանող երկու երթուղի կա, որոնց երկարությունը

$$f_2^{(1)}(5) = f_1(2) + l_{25}, \;\; f_2^{(2)}(5) = f_1(3) + l_{35},$$

այդ երկու հնարավորություններից պետք է ընտրել ամենակարճ երթուղին՝

$$f_2(5) = \min[\, f_2^{(1)}(5);\, f_2^{(2)}(5)] = \min[3+5;4+6] = 8:$$

Ստացված 8 թիվը, որը սկզբնական գագաթից դեպի 5-րդ գագաթ տանող ամենակարճ երթուղու մեծությունն է, գրում ենք 5 գագաթի շրջանակի մոտ (շրջանակի մեջ գագաթի համարն է): Գտնենք $f_2(6)$-ը:

$$f_2^1(6) = f_1(2) + l_{26} = 7,\; f_2^2(6) = f_1(3) + l_{36} = 11,$$
$$f_2^3(6) = f_1(4) + l_{46} = 8,$$
$$f_2(6) = \min\{\, f_2^1(6);\, f_2^2(6);\, f_2^3(6)\} = \min\{7;11;8\} = 7:$$

Նման եղանակով կստանանք

$$f_2^1(7) = f_1(3) + l_{37} = 9,\; f_2^2(7) = f_1(4) + l_{47} = 9,$$
$$f_2(7) = \min\{\, f_2^1(7);\, f_2^2(7)\} = \min\{9;9\} = 9:$$

2-րդ փուլի հաշվարկներն ավարտված են: Անցնենք 3-րդ փուլի հաշվարկներին: Այս փուլին պատկանում են 8 և 9 գագաթները, հետևաբար՝

$$f_3(8) = \min[\, f_3^{(1)}(2) = f_2(5) + l_{58},\, f_3^{(2)}(8) = f_2(6) + l_{68},\, f_3^{(3)}(8) = f_2(7) + l_{78}] =$$
$$= \min[8+7,7+10,9+4] = 13$$
$$f_3(9) = \max[\, f_3^{(1)}(9) = f_2(5) + l_{59},\, f_3^{(2)}(9) = f_2(6) + l_{69},\, f_3^{(3)}(9) = f_2(7) + l_{79}] =$$
$$= \max[8+6,7+8,9+7] = 14$$

Գրենք ԴՕ հաշվարկների անդրադարձ հավասարումը n-րդ փուլից $(n+1)$-րդ փուլ անցնելու համար

$$f_{n+1}(j) = \min_{i \in B(j)}[\, f_n(i) + l_{ij}]:$$

Այստեղ j-ն $(n+1)$-րդ փուլի գագաթ է, $B(j)$-ն նախորդ փուլերի այն i գագաթների բազմությունն է, որոնց համար (i, j)-ն աղեղ է: Շարունակենք հաշվարկները.

$$f_4(10) = \min[\, f_4^1(10)] = f_3(8) + l_{810} = 13 + 4 = 17$$

$$f_4(11) = \min[\, f_4^{(1)}(11),\, f_4^{(2)}(11)] = \min[\, f_3(8) + l_{811},\, f_3(9) + l_{911}] = [13 + 6{,}14 + 4] = 18$$

$$f_4(12) = f_3(9) + l_{912} = 14 + 5 = 19$$

$$f_5(13) = \min[\, f_5^{(1)}(13),\, f_5^{(2)}(13)] = \min[\, f_4(10) + l_{1013},\, f_4(11) + l_{1113}] = \min[17 + 9{,}18 + 10] = 26$$

$$f_5(14) = \min[\, f_5^{(1)}(14),\, f_5^{(2)}(14),\, f_5^{3}(14)] = \min[\, f_3(9) + l_{9,14},\, f_4(11) + l_{11,13},\, f_4(12) + l_{12,14}] =$$
$$= \min[14 + 6{,}18 + 3{,}19 + 7] = 20$$

Վերջապես, հաշվենք ամենակարճ երթուղու մեծությունը.

$$f_6(15) = \min[\, f_5(13) + l_{13,15},\, f_5(14) + l_{14,15}] = \min[26 + 11{,}20 + 10] = 30$$

Այսպիսով, փնտրվող երթուղու երկարությունը 30 կմ է:

Մեզ մնաց գտնել բուն երթուղին՝ ամենակարճ ճանապարհին գտնվող գագաթները: Դրա համար վարվում ենք հետևյալ կերպ: Գտած 30 թվից հանում ենք կից գագաթը միացնող աղեղի երկարությունը և տարբերությունը համեմատում շրջանակի մոտ գրված թվի հետ: Եթե այդ երկու թվերը համընկնում են, ապա տվյալ գագաթը պատկանում է ամենակարճ երթուղուն: Այդպես շարժվելով հակառակ ուղղությամբ՝ կհասնենք սկզբնական գագաթին և կգտնենք փնտրվող լավագույն երթուղին: Ձեր խնդրի համար այն հետևյալն է՝ [1,2,5,9,11,14,15]:

Այսպիսով, սկզբնական՝ Ա-ից դեպի Բ տանող ամենակարճ երթուղին գտնելու համար, մենք լուծեցինք նմանատիպ խնդիրներ բոլոր գագաթների (վիճակների) համար և վերջում ստացանք սկզբնական խնդրի լուծումը: Խնդրի լուծման այս մոտեցումը ծանոթացրեց մեզ ԴՕ եղանակի ևս մի առանձնահատկությանը՝ ընկղման սկզբունքին:

Ընկղման սկզբունք.

Յուրաքանչյուր գագաթի (վիճակի) համար լուծում ենք օպտիմալացման խնդիր և վերջում ստանում ենք հիմնական խնդրի լուծումը:

4.3.2. Ներդրումների բաշխման խնդիր

Ձեռնարկության ղեկավարությունն ուսումնասիրում է երեք մասնաճյուղերի վերակառուցման խնդիրը: Այդ նպատակի համար նախատեսված է 6 մլն դրամ: Յուրաքանչյուր մասնաճյուղի զարգացման տարբերակ բնութագրվում է c_i ծախքով և r_i եկամտով $i = 1,2,3$ (տե՛ս, աղյուսակ 1):

Աղյուսակ 1

Նախագծերի տարբերակներ	Ձեռնարկություն					
	Մասնաճյուղ 1		Մասնաճյուղ 2		Մասնաճյուղ 3	
	c_1	r_1	c_2	r_2	c_3	r_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	6	3	10	1	5
3	2	8	4	11	-	-
4	-	-	5	14	-	-

Առաջին տողի 0-ական եկամուտները նշանակում են, որ մասնաճյուղում վերակառուցում չի նախատեսված: Խնդիրն այն է, որ ղեկավարությունը պետք է որոշի, թե յուրաքանչյուր մասնաճյուղի համար ինչքան ներդրում կատարվի, որպեսզի 6 մլն դրամի սահմաններում ստանա առավելագույն եկամուտ:

Կառուցենք վերը նկարագրված ներդրումների բաշխման խնդրի օրգրաֆը և ցույց տանք, որ առավելագույն եկամտի խնդիրը բերվում է ամենաերկար ուղին գտնելու համարժեք խնդրին:

Նախ՝ ներդրումների բաշխման խնդիրը ներկայացնենք որոշումների կայացման բազմափուլ գործընթացի տեսքով: Այս խնդրի համար ստեղծում ենք մտացածին փուլեր: Առաջին փուլում դիտարկվում է միայն մեկ մասնաճյուղ, օրինակ՝ 1-ը: Երկրորդ փուլում դիտարկվում է երկու մասնաճյուղ, օրինակ՝ 1-ը և 2-ը: Հաջորդ փուլում (մեր օրինակի համար վերջին փուլում) դիտարկվում են 1-ին, 2-րդ և 3-րդ մասնաճյուղերը միասին: Աղեղի երկարությունը թույլատրելի նախագծերի c_i ներդրում իրականացումից սպասվելիք r_i եկամտի մեծությունն է:

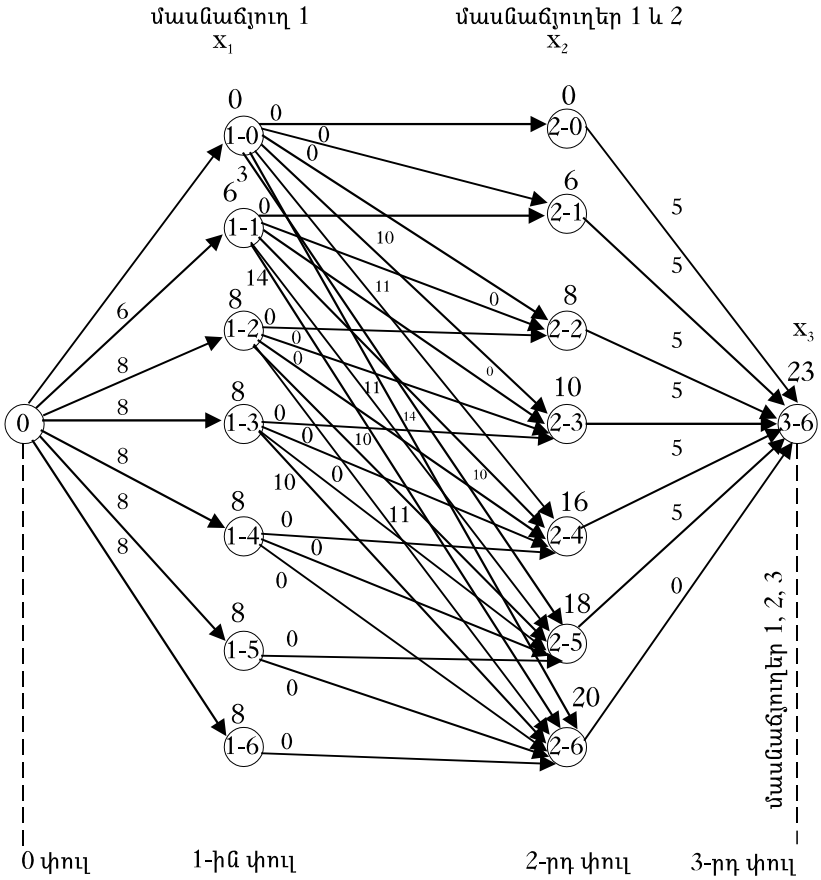
Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

x_1 - 1-ին փուլում հատկացված ներդրման քանակն է,

x_2 - 1-ին և 2-րդ փուլերում հատկացված ներդրման քանակն է,

x_3 - 1-ին, 2-րդ և 3-րդ մասնաճյուղերին հատկացված ամբողջ ներդրումն է՝ $x_3 = 6$:

Նշենք, որ x_1 և x_2-ը ամբողջ թվեր են և ընդունում են 0,1,...,6 արժեքներ: Ներդրումների բաշխման խնդրի օրգրաֆը բերված է գծանկար 3-ում:



Նկար 2

x_1-ի ամեն մի արժեքի համապատասխանում են օրգրաֆի որոշակի գագաթ (վիճակ)՝ (1-0),(1-1),...,(1-6) և եկամուտ՝ 0,6,8,…,8, որն արտահայտում է կապը 0 և 1-ին փուլերի միջև:

x_2-ին համապատասխանում են (2-0), (2-1),...,(2-6) գագաթները (վիճակները) և դրանց համապատասխան եկամուտները: Վերջապես, $x_3 = 6$, և 3-րդ փուլում ունենք ընդամենը մեկ գագաթ (վիճակ): 3-րդ փուլում դիտարկվող աղեղների մոտ գրված են վիճակից վիճակ անցումից ստացվող առավելագույն եկամուտները:

Հիշեցնենք, որ x_2-ը 2-րդ փուլում բաշխվող ներդրման քանակն է, պայմանով, որ առաջին փուլում հատկացվել է x_1 գումար, և, հետևաբար $x_2 - x_1 \geq 0$ և կազմում է 2-րդ մասնաճյուղի հնարավոր հասանելիք ներդրման քանակը: Այդ անհավասարությունը թելադրում է ցանցի կառուցվածքը: Այսպիսով, x_1, x_2, x_3-ի յուրաքանչյուր թույլատրելի արժեքի համապատասխա-

նում է որոշակի վիճակ (գագաթ), որը պատկանում է $i=1, i=2, i=3$ փուլերից որևէ մեկին: $i=0$ սկզբնական փուլը և զրո գագաթը դիտարկվում են հաշվարկները պարզեցնելու նպատակով:

Քննարկենք 2-րդ փուլի գագաթների և աղեղների բովանդակությունը: Սահմանման համաձայն $x_2 - x_1$ մեծությունը միայն 2-րդ փուլում բաշխված ներդրումներն են, և (x_1, x_2) աղեղը թույլատրելի է միայն այն նախագծերի համար, որոնց իրականացման ծախքը չի գերազանցում $x_2 - x_1$-ին: Այդ աղեղի երկարությունը նախագծերի r_2-ի առավելագույն արժեքն է: Այսպես, օրինակ, եթե $x_1 = 1$ և $x_2 = 5$, ապա 2-րդ փուլում բաշխված ներդրումը կկազմի $x_2 - x_1 = 4$, և թույլատրելի են առաջին 3 նախագծերը, քանի որ «3-րդ» նախագծի եկամուտը ամենամեծն է $(r_3 = 11)$, և աղեղին վերագրվում է 11 միավոր: 2-րդ փուլի (1,3) աղեղի համար $x_2 - x_1 = 2$, թույլատրելի նախագիծ չկա, աղեղի երկարությունը 0 է: $x_1 > x_2$ համապատասխան աղեղ գոյություն չունի, քանի որ վատագույն դեպքում x_2-ը կարող է հավասար լինել x_1-ին:

Դժվար չէ նկատել, որ յուրաքանչյուր աղեղ կապված է որևէ նախագծի հետ: Մեր նպատակը 0 փուլի 0 գագաթից $i=3$ փուլի 6 գագաթ տանող ամենաերկար ուղին գտնելն է, որի երկարությունը առավելագույն եկամուտն է: x_1, x_2, x_3 փոփոխականների սահմանումից հետևում է, որ $i=0$ փուլի «0» գագաթը $i=3$ փուլի «6» գագաթին միացնող կամայական ուղին համապատասխանում է նախագծերի թույլատրելի համակցությանը: Դժվար չէ նկատել նաև, որ որոշ աղեղներ չեն ազդում լավագույն լուծում գտնելու վրա: Դրանք կարելի է չդիտարկել: Օրինակ, $i=1$ և $i=2$ փուլերի միջև $(0,1)$ աղեղը կարելի է անտեսել, քանի որ $x_2 - x_1 = 1$ մլն դրամ ներդրումը 2-րդ փուլում ոչ մի եկամուտ չի բերում. այդ գումարը բավական չէ 2-րդ նախագծի իրականացման համար: Այդպիսի աղեղների անտեսումը զգալիորեն նվազեցնում է անհրաժեշտ հաշվարկների ծավալը:

Ցանցը կառուցելուց հետո $i=0$ փուլի «0» գագաթից $i=3$ փուլի «6» գագաթի միջև պետք է գտնել ամենաերկար ուղին:

$f_i(x_i)$-ով նշանակենք i փուլում x_i գագաթ տանող ամենաերկար ուղու երկարությունը: Քանի որ $i=0$-ն ելակետային փուլն է, ապա հեշտ է նկատել, որ մեր խնդիրը հանգեց վերը դիտարկված ամենաերկար երթուղու խնդրին: Այնուհետև կատարենք հաշվարկներն ըստ փուլերի՝ ստացված վերջնական արդյունքները գրելով գագաթների շրջանակների վերին մասում:

Փուլ 1: $f_1(x_1) = f_0(0) + r_1(0, x_1)$, որտեղ $r_1(0, x_1)$-ը $(0, x_1)$ աղեղի երկարությունն է (եկամուտը): Կունենանք՝

$$f_1(0) = 0 + 0 = 0, \quad f_1(1) = 0 + 6 = 6, \quad f_1(2) = 0 + 8 = 8,$$

$$f_1(3)=0+8=8,\quad f_1(4)=0+8=8,\quad f_1(5)=0+8=8,$$
$$f_1(6)=0+8=8:$$

Փուլ 2: Այս փուլում, ի տարբերություն նախորդի, հաշվարկում ենք 0-ից մինչև $x_2=0,1,2,3,4,5,6$ բոլոր գագաթներ տանող ամենաերկար ուղիները:

Նկատենք, որ մինչև x_2 գագաթ տանող ամենաերկար ուղու մեծությունը հավասար է մինչև x_1 գագաթ ամենաերկար ուղու մեծությանը՝ գումարած (x_1,x_2) աղեղի երկարությունը և վերցված այդ գումարի մաքսիմումը՝ ըստ բոլոր թույլատրելի աղեղների: Ասվածը կարելի է արտահայտել մեզ հայտնի անդրադարձ հավասարման միջոցով.

$$f_2(x_2)=\max_{(x_1,x_2)}\{f_1(x_1)+r_2(x_1,x_2)\}:$$

Արդյունքում կունենանք՝

$$f_2(0)=0+0=0$$
$$f_2(1)=\max\{0+0,6+0\}=6$$
$$f_2(2)=\max\{0+0,6+0,8+0\}=8$$
$$f_2(3)=\max\{0+10,6+0,8+0,8+0\}=10$$
$$f_2(4)=\max\{0+11,6+10,8+0,8+0,8+0\}=16$$
$$f_2(5)=\max\{0+14,6+11,8+10,8+0,8+0,8+0\}=18$$
$$f_2(6)=\max\{0+14,6+14,8+11,8+10,8+0,8+0,8+0\}=20:$$

Ընդգրկված թվերը համապատասխան գագաթ տանող ամենաերկար ուղու երկարություններն են: Այդ թվերը գրում ենք համապատասխան գագաթի մոտ (տե՛ս նկար 2) և օգտագործում ենք հաջորդ փուլում հաշվարկներ կատարելու համար:

Փուլ 3: Նախորդ փուլի նմանությամբ մինչև x_3 գագաթ տանող ամենաերկար ուղին որոշող արտահայտությունն է

$$f_3(x_3)=\max_{(x_1,x_2)}\{f_2(x_2)+r_3(x_2,x_3)\}:$$

Հաշվարկի արդյունքում ստանում ենք

$$f_3(6)=\max(0+5,6+5,8+5,10+5,16+5,18+5,20+0)=23:$$

Լավագույն ուղին (նախագծերի համակցությունը) գտնելու համար (ինչպես նախորդ խնդրում) վերջին գագաթից ետ են շարժվում դեպի սկզբնական գագաթ՝ հիշելով համապատասխան գագաթների համարները և նշված թվերը: Լավագույն համակցությունը 1-ին մասնաճյուղի համար 3-րդ տարբերակն է, 2-րդի համար՝ 2-րդը և 3-րդ-ի համար՝ նույնպես 2-րդ տարբերակը: Սպասվելիք առավելագույն եկամուտը 23 մլն դրամ է:

ԳԼՈՒԽ 5

ՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ԻՐԱՎԻՃԱԿՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ՑԱՆՑԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՄԱՄԲ

Ժամանակակից տնտեսական ծրագրերի բարդացումը առաջադրեց հետևյալ խնդիրը՝ մշակել ծրագրերի նկարագրման և պլանավորման այնպիսի արդյունավետ մեթոդներ, որոնք ապահովեն բարդ ծրագրերի օպտիմալ իրականացումը: Ծրագրի օպտիմալ իրականացումը, իրավիճակից կախված, սահմանվում է տարբեր եղանակով. հաճախ այն նշանակում է ծրագրի կատարման նվազագույն տևողության կամ ռեսուրսների օպտիմալ բաշխման ապահովում:

20-րդ դարի 60-ականներին ծրագրերի կատարման կազմակերպումը դարձավ ուսումնասիրությունների նոր ոլորտ: ԱՄՆ-ում գրեթե միաժամանակ երկու առանձին խմբերի կողմից մշակվեցին ծրագրերի օրացուցային պլանավորման և օպերատիվ կառավարման երկու մեթոդ՝ PERT (Project Evaluation and Review Tecnique) ծրագրերի զարգացման և վերանայման մեթոդ և CPM (Critical Path Method) կրիտիկական ուղու մեթոդ: Այս մեթոդները բավականաչափ պարզ, բայց և չափազանց արդյունավետ են: Բարդ ծրագրերի իրականացումը ենթադրում է երեք փուլ՝

- ծրագրի նախագծում,
- ծրագրի օրացուցային պլանավորում,
- ծրագրի օպերատիվ կառավարում:

Ծրագրերի նախագծման ընթացքում հիմնական բարդությունը ժամկետների և ծախսերի ճշգրիտ որոշումն է: Դա բացատրվում է մի շարք գործոններով, որոնցից գլխավորը անորոշության բարձր աստիճանն է: Ցանցային մոդելը հնարավորություն է տալիս կատարել որոշակի պարզ հաշվարկներ՝ կապված ծրագրի աշխատանքների կատարման ժամկետների և ռեսուրսների բաշխման հետ:

5.1 Ծրագրի ներկայացումը ցանցի միջոցով

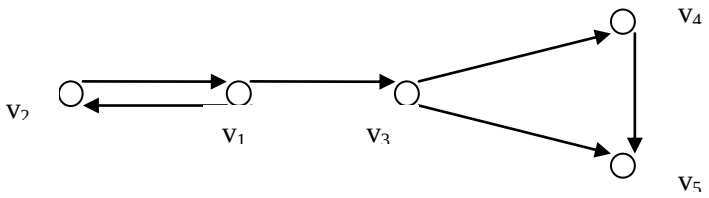
Ծրագրի օպտիմալ իրագործումն ապահովելու համար նախ անհրաժեշտ է այն ներկայացնել ցանցի միջոցով:

Ցանցը նկարագրելու համար սահմանենք օրգրաֆը:

Օրգրաֆը $G=(V,E)$ բազմությունների զույգ է, որտեղ $V=\{v_1,v_2,...,v_p\}$-ը կոչվում է գագաթների բազմություն, իսկ $E=\{e_1,e_2,...,e_q\}$-ն՝ աղեղների բազմություն: Յուրաքանչյուր աղեղ ունի $e=(u,v)$ տեսքը, որտեղ u-ն և v-ն միմյանցից տարբեր գագաթներ են՝ $u\neq v$: Ընդ որում, գագաթների հերթականությունն էական է՝ $(u,v)\neq(v,u)$:

Օրգրաֆը կպատկերենք հետևյալ կերպ. որպես գագաթներ կնշենք հարթության միմյանցից տարբեր կետեր կամ շրջանակներ, իսկ $e=(u,v)$ աղեղներ՝ համապատասխան u և v կետերը միացնող գծեր՝ v գագաթի մոտ սլաք նշելով:

Պատկերենք $G=(V,E)$ օրգրաֆը, որում $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$, իսկ $E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_1),(v_1,v_3),(v_3,v_4),(v_3,v_5),(v_4,v_5)\}$ (տես՝ նկար 5.1.):



Նկար 5.1

Գագաթների $(v_1,v_2,...,v_k)$ հաջորդականությունը կոչվում է v_1 *-ից* v_k ուղի, եթե $(v_1,v_2),(v_2,v_3),...,(v_{k-1},v_k)$-ն G օրգրաֆի միմյանցից տարբեր աղեղներ են: Եթե $v_1=v_k$, այն կոչվում է ցիկլ:

Նկար 5.1.-ում v_2,v_1,v_3,v_4-ը v_2-ից v_4 ուղի է, իսկ v_2,v_1,v_3,v_5,v_4-ը v_2-ից v_4 ուղի չէ, քանի որ $(v_5,v_4)\notin E$:

$G=(V,E)$ օրգրաֆն անվանենք ցանց, եթե դրա աղեղներին վերագրված են ոչ բացասական թվեր, որոնց կանվանենք աղեղի կշիռ կամ թողունակություն:

Ցանցային մոդելի կառուցումը

Ցանցային մոդելի կառուցման համար անհրաժեշտ է ունենալ ծրագրի աշխատանքների ցուցակը՝ $E=\{e_1,\dots e_j \dots,e_m\}$ և աշխատանքների տևողությունները՝ $T(E)=\{t(e_1),\dots,t(e_m)\}$: Ակնհայտ է, որ $t(e_j)>0, j=1,\dots m$:

Աշխատանքների կատարման հաջորդականության վրա դրված են որոշակի սահմանափակումներ. որոշ աշխատանքներ նախորդում (կամ հաջորդում) են միմյանց: e_i աշխատանքը նախորդում է e_j աշխատանքին կմեկնաբանենք հետևյալ կերպ. քանի դեռ e_i աշխատանքը չի ավարտվել, e_j-ն սկսել չենք կարող:

Աշխատանքների կարգավորվածությունը ներկայացվում է պատահույթների միջոցով: Դրանք այն պահերն են, որ միմյանցից բաժանում են անմիջապես հաջորդող աշխատանքների կատարումը:

Ծրագրի պատահույթները համարակալենք ոչ բացասական ամբողջ թվերով՝ $V=\{0,1,2,\dots,n\}$:

Պատահույթների համարակալումը կատարենք այնպես, որ եթե մի պատահույթը նախորդում է մյուսին, ապա այն կունենա ավելի փոքր համար: Սկզբնական պատահույթին վերագրենք 0 համարը, վերջնական պատահույթին՝ n համարը: Ապացուցված է, որ նման համարակալում գոյություն ունի:

Ծրագրին համապատասխանող ցանցում գագաթները ծրագրի պատահույթներն են՝ $V=\{0,1,\dots,n\}$, աղեղները՝ աշխատանքները $E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$: Եթե ցանցի e աշխատանքի համար սկզբնական պատահույթը *i*-ն է, իսկ վերջնականը՝ *j–ն,* ապա e աշխատանքը կներկայացվի $e=(i,j)$ աղեղի տեսքով: $e=(i,j)$ աղեղին վերագրենք $t(i,j)$ թիվը՝ համապատասխան աշխատանքի տևողությունը:

Նշանակենք $A(e_j)$-ով այն աշխատանքների բազմությունը, որոնք անմիջապես հաջորդում են e_j աշխատանքին, $B(e_j)$-ով՝ այն աշխատանքների բազմությունը, որոնք անմիջապես նախորդում են e_j աշխատանքին $(j=1,\dots m)$: Եթե $B(e_j)=\varnothing$, *ապա* e_j*-ն* սկզբնական աշխատանքն է՝ $e_j=e_1$, *եթե* $A(e_j)=\varnothing$, ապա e_j-ն վերջնական աշխատանքն է՝ $e_j=e_m$:

Քննարկենք օրինակ:

Դիցուք ծրագիրը ներկայացվում է աղյուսակ 5.1.-ում բերված տվյալներով.

Աղյուսակ 5.1.

e	Աշխատանքի անվանումը	B(e)	Աշխատանքի կատարման տևողությունը օրերով
e_1	Տարածքի և շենքի ձեռքբերում	-	10
e_2	Սարքավորումների գնում և տեղադրում	e_1	7
e_3	Ձեռնարկության աշխատակազմի հավաքագրում	e_2	9
e_4	Հումքի և արտադրության համար անհրաժեշտ այլ նյութերի ձեռքբերում	e_2	10
e_5	Արտադրության կազմակերպում	e_3, e_4	3
e_6	Գովազդ	e_1	11
e_7	Պատրաստի արտադրանքի մատակարարում և վաճառք	e_5	5

Ծրագրին համապատասխանող ցանցի կառուցման համար սահմանենք և համարակալենք պատահույթները.

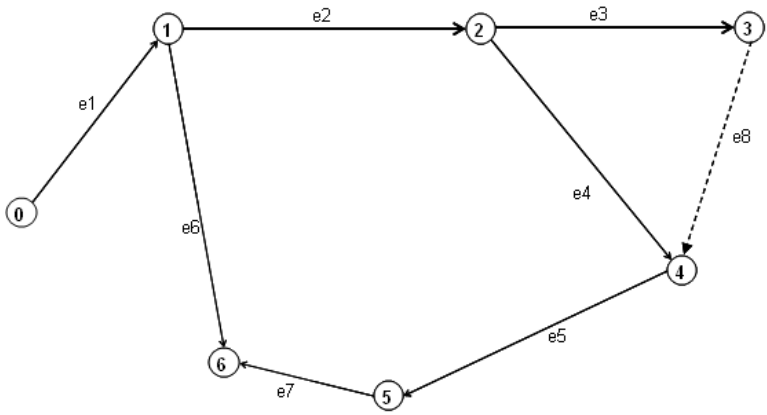
- ծրագրի կատարման սկիզբ՝ 0
- e_1 աշխատանքի ավարտ, e_2 և e_6 աշխատանքների սկիզբ՝ 1
- e_2 աշխատանքի ավարտ, e_3 և e_4 աշխատանքների սկիզբ՝ 2

Հաջորդ պատահույթների սահմանումը կապված է որոշակի դժվարության հետ: Դա պայմանավորված է այն հանգամանքով,, որ e_5 աշխատանքի սկզբի պահը պետք է համընկնի e_3 և e_4 աշխատանքների ավարտի պահի հետ, որոնք ունեն նույն սկիզբը և ավարտը: Այդ աշխատանքները միմյանցից տարբերելու համար ներմուծենք նոր կեղծ (ֆիկտիվ) e_8 աշխատանքը, որն անմիջականորեն հաջորդում է e_3-ին և նախորդում e_5-ին, և որի ավարտի պահ սահմանենք e_4-ի ավարտի պահը, իսկ տևողությունը՝ համարենք 0:

Հիմա կարող ենք սահմանել հաջորդ պատահույթները.

- e_3 աշխատանքի ավարտ, e_8 աշխատանքի սկիզբ՝ 3
- e_4 և e_8 աշխատանքների ավարտ, e_5 աշխատանքի սկիզբ՝ 4
- e_5 աշխատանքի ավարտ, e_7 աշխատանքի սկիզբ՝ 5
- e_6 և e_7 աշխատանքների, ուստի նաև՝ ծրագրի ավարտ՝ 6:

Համապատասխան ցանցը կունենա նկ. 5.2.-ում պատկերված տեսքը.



Նկար 5.2.

5.2. Ցանցային մոդելի ժամանակային վերլուծությունը

Ուսումնասիրենք հետևյալ հարցերը.

ա) ամենաքիչը որքա՞ն *T* ժամանակ է հարկավոր ծրագրի բոլոր աշխատանքներն ավարտելու համար,

բ) ինչպիսի՞ ժամկետներում կարող է կատարվել յուրաքանչյուր e_j աշխատանք, որպեսզի ամբողջ ծրագիրն ավարտվի *T* ժամկետում:

Այս հարցերին պատասխանելու համար անհրաժեշտ է որոշել ծրագրի, այսպես կոչվող, **կրիտիկական աշխատանքները**, որոնք չունեն ժամանակի պահուստ և ծրագիրը *T* ժամկետում ավարտելու համար պետք է կատարվեն հստակ որոշված ժամանակահատվածում: **Ոչ կրիտիկական աշխատանքների** կատարման ժամկետները կարող են որոշակի սահմաններում փոփոխվել: Ահա թե ինչու է ծրագրերի օրացուցային պլանավորման խնդիրներում կարևոր տեղ հատկացվում ցանցի ժամանակային վերլուծությանը:

Յուրաքանչյուր $k = 0,1,...,n$ պատահույթի համար սահմանենք հետևյալ ժամկետները՝

k պատահույթի իրականացման ամենավաղ ժամկետը՝ $T(k)$,

k պատահույթի իրականացման ամենաուշ ժամկետը՝ $L(k)$:

Բնական է ենթադրել, որ

$T(0) = L(0) = 0$,

$T(n) = L(n) = T$,

$T(k) \le L(k)$ բոլոր $k = 0,1,...,n$-ի համար:

$A(k)$-ով նշանակենք այն պատահույթների բազմությունը, որոնք անմիջապես հաջորդում են k պատահույթին, իսկ $B(k)$-ով՝ այն պատահույթների բազմությունը, որոնք անմիջապես նախորդում են k պատահույթին:

Նշենք, որ պատահույթների համարակալումն այնպիսին է, որ եթե $i \in B(k)$, ապա $i < k$, եթե $j \in A(k)$, ապա $j > k$: Պատահույթի ամենավաղ իրականացման ժամկետը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$T(0) = 0, \quad T(k) = \max_{i \in B(k)} \{T(i) + t(i,k)\}: \qquad (1)$$

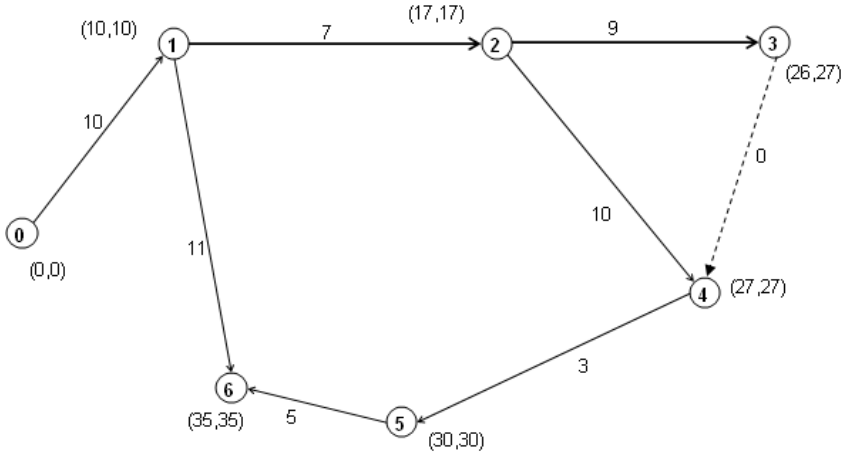
(1) բանաձևի միջոցով $k = 0,1,\ldots,n$ արժեքների համար կատարված հաշվարկներն անվանում են ցանցի ուղիղ անցման ալգորիթմ, որի ավարտին ստացվում է $T = T(n)$ թիվը՝ ծրագրի կատարման նվազագույն ժամկետը:

Ցանկացած $k = n,\ldots,0$ պատահույթի ամենաուշ իրականացման ժամկետը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$L(n) = T, \quad L(k) = \min_{j \in A(k)} \{L(j) - t(k,j)\}, \qquad (2)$$

(2) բանաձևով կատարված հաշվարկները անվանում են ցանցի հակադարձ անցման ալգորիթմ:

Վերը նշված օրինակի համար հաշվարկների արդյունքները բերված են նկ. 5.3-ում (k պատահույթի կողքին գրված թվերը համապատասխանաբար այդ պատահույթի իրականացման ամենավաղ և ամենաուշ պահերն են՝ $T(k)$ և $L(k)$):



Նկար 5.3.

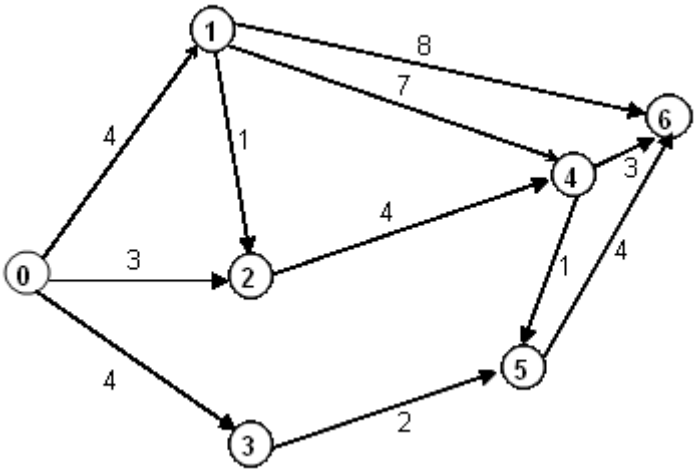
Ծրագրի իրագործումն ավարտվում է 35 օրում:

Սահմանում: $e=(i,j)$ աշխատանքը կոչվում է կրիտիկական, եթե

$$T(i)=L(i)$$
$$T(j)=L(j)$$
$$L(j)-L(i)=T(j)-T(i)=t(i,j):$$

Նկար 5.3-ում ներկայացված ցանցում կրիտիկական աշխատանքներն են՝ (0,1), (1,2), (2,4), (4,5), (5,6):

Ցանցի ուղիղ և հակադարձ անցման ալգորիթմների աշխատանքը նկարագրենք նկար 5.4-ում պատկերված ցանցի համար:



Նկար 5.4.

Պատահույթի իրականացման ամենավաղ ժամկետի հաշվարկ.

$$T(0)=0$$
$$T(1)=T(0)+t(0,1)=0+4=4$$
$$T(2)=\max\left(T(0)+t(0,2),T(1)+t(1,2)\right)=\max(0+3,4+1)=5$$
$$T(3)=T(0)+t(0,3)=0+4=4$$
$$T(4)=\max\left(T(1)+t(1,4),T(2)+t(2,4)\right)=\max(4+7,5+4)=11$$
$$T(5)=\max\left(T(3)+t(3,5),T(4)+t(4,5)\right)=\max(4+2,11+1)=12$$
$$T(6)=\max\left(T(1)+t(1,6),T(4)+t(4,6),T(5)+t(5,6)\right)=\max(4+8,11+3,12+4)=16$$

Այսպիսով, ծրագրի ավարտի ամենավաղ պահը 16-ն է՝ $T = 16$:

Պատահույթի իրականացման ամենաուշ ժամկետի հաշվարկ:

$L(6) = T = 16$

$L(5) = L(6) - t(5,6) = 16 - 4 = 12$

$L(4) = \min(L(6) - t(4,6), L(5) - L(4,5)) = \min(16 - 3, 12 - 1) = 11$

$L(3) = L(5) - t(3,5) = 12 - 2 = 10$

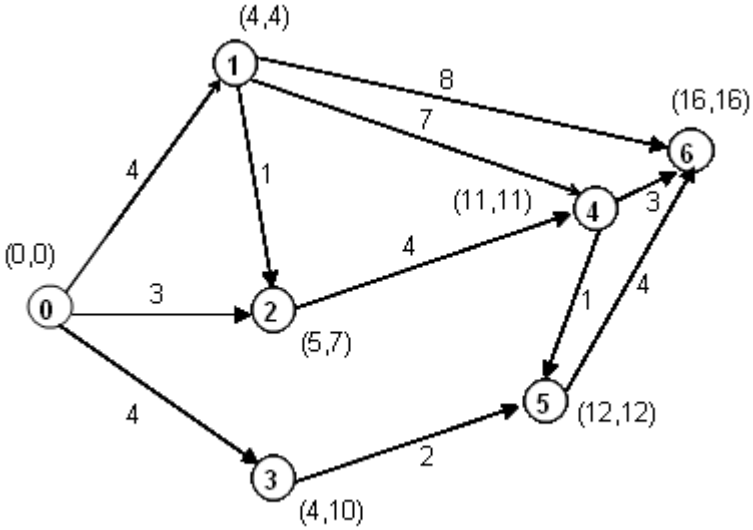
$L(2) = L(4) - t(2,4) = 11 - 4 = 7$

$L(1) = \min(L(6) - t(1,6), L(4) - t(1,4), L(2) - t(1,2)) = \min(16 - 8, 11 - 7, 7 - 1) = 4$

$L(0) = \min(L(3) - t(0,3), L(2) - t(0,2), L(1) - t(0,1)) = \min(10 - 4, 7 - 3, 4 - 4) = 0$:

Նկատենք, որ ճիշտ հաշվարկների դեպքում միշտ $L(0) = 0$:

Հաշվարկների արդյունքները պատկերված են նկար 5.5-ում:



Նկար 5.5.

Ծրագրի իրականացումն ավարտվում է 16 օրում: Ցանցի կրիտիկական աշխատանքներն են՝ $(0,1), (1,4), (4,5), (5,6)$:

Լեմմ: Եթե որևէ *k* պատահույթի համար $T(k) = L(k)$, ապա գոյություն ունի այնպիսի $k' \in B(k)$ պատահույթ, որ (k',k) աշխատանքը կրիտիկական է:

Ապացուցում: Համաձայն *(1)*-ի՝ $T(k) = \max\limits_{i \in B(k)} \{T(i) + t(i,k)\}$: Ենթադրենք մաքսիմումը հասանելի է *i=k'*–ի համար՝

$$T(k) = T(k') + t(k',k):$$

Այստեղից՝

$$T(k)-T(k')=t(k',k):$$

Ցույց տանք, որ հենց այդ k' պատահույթը որոնելի պատահույթն է, այսինքն, բավարարվում է նաև $T(k')=L(k')$ պայմանը:

Ակնհայտ է, որ $T(k')\le L(k')$: Ցույց տանք, որ բավարարվում է նաև $L(k')\le T(k')$ պայմանը, ինչից և կհետևի $T(k')=L(k')$:

Քանի որ

$$L(k')=\min_{j\in A(k')}\{L(j)-t(k',j)\},$$

հետևաբար՝

$$L(k')\le L(k)-t(k',k)=T(k)-t(k',k)=T(k'):$$

Այսպիսով, $T(k')=L(k')$ և (k',k) աշխատանքը կրիտիկական է: Լեմմը ապացուցվեց:

Թեորեմ 1: Ցանկացած ցանցում գոյություն ունի սկզբնական գագաթը վերջնականին միացնող գոնե մեկ ուղի, որի բոլոր աշխատանքները կրիտիկական են:

Թեորեմի ապացույցը հետևում է նախորդ լեմմից և $T(n)=L(n)$ պայմանից:

Սահմանում: Ցանցում ուղին, որի բոլոր աշխատանքները կրիտիկական են, կոչվում է կրիտիկական ուղի:

Կրիտիկական ուղին ամենաերկար ուղին է և ցույց է տալիս նվազագույն ժամանակը, որի ընթացքում ծրագրի բոլոր աշխատանքները հնարավոր է ավարտել:

Դիտարկենք սկզբնական գագաթը վերջնականին միացնող որևէ L ուղի: $T(L)$-ով նշանակենք այդ ուղու վրա գտնվող աշխատանքների տևողությունների գումարը:

Սահմանում: $R(L)=T-T(L)$ թիվը կոչվում է L ուղու ժամանակի պահուստ և ցույց է տալիս, թե որքան ժամանակով կարող է ավելացվել ուղու վրա գտնվող որոշ աշխատանքների կատարման ընդհանուր տևողությունը այնպես, որ ծրագրի կատարման *T* ժամկետը չխախտվի:

Սահմանումից հետևում է, որ *R(L)=0* այն և միայն այն դեպքում, երբ L -*ը* կրիտիկական ուղի է:

Սահմանում: $R(k)=L(k)-T(k)$ թիվը կոչվում է k պատահույթի ժամանակի պահուստ և ցույց է տալիս, թե որքան ժամանակով կարող է ուշացվել

k պատահույթի իրականացումն այնպես, որ ծրագրի կատարման ժամկետը չխախտվի:

$R(k)=0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ k պատահույթը պատկանում է կրիտիկական ուղուն:

Դիտարկենք ծրագրի որևէ (i,j) աշխատանք: Այն կարող է սկսվել ոչ շուտ, քան $T(i)$-ն և ծրագիրը T ժամկետում ավարտելու համար, այդ աշխատանքը պետք է ավարտվի ոչ ուշ, քան $L(j)$-ն: Հետևաբար, (i,j) աշխատանքի կատարման համար հատկացվում է $L(j)-T(i)$ ժամանակահատված, կամ, որ նույնն է, (i,j) աշխատանքի սկսվելը կարելի է երկարաձգել $(L(j)-T(i)-t(i,j))$-ով, առանց խախտելու ծրագրի ավարտի T ժամկետը:

$r_1=L(j)-T(i)-t(i,j)$ թիվն անվանում են (i,j) աշխատանքի լրիվ պահուստային ժամանակ:

Ակնհայտ է, որ եթե որևէ (i,j) աշխատանքի լրիվ պահուստային ժամանակը 0 է, ապա այն անպայման պետք է սկսվի $T(i)$ պահին, հակառակ դեպքում ծրագիրը հնարավոր չէ ավարտել T ժամկետում:

Եթե (i,j) աշխատանքի ավարտի պահը չգերազանցի $T(j)$-ին, ապա այդ աշխատանքի սկզբի պահի երկարաձգումը չի ազդելու հաջորդ աշխատանքների կատարման ժամկետների վրա:

$r_2=T(j)-T(i)-t(i,j)$ թիվն անվանում են (i,j) աշխատանքի ազատ պահուստային ժամանակ: Այն ցույց է տալիս, թե i-րդ պատահույթի ամենավաղ իրականացման դեպքում (i,j) աշխատանքը կատարելուց հետո որքան ժամանակ է մնում մինչև j պատահույթի իրականացման ամենավաղ ժամկետը:

Քննարկենք (i,j) աշխատանքի ևս մեկ բնութագրիչ. ո՞ր միջակայքում պետք է կատարվի այդ աշխատանքը, որպեսզի չխախտվեն ծրագրի մնացած բոլոր աշխատանքների ժամանակային սահմանափակումները: Դրա համար այդ աշխատանքը պետք է սկսվի ինչքան հնարավոր է ուշ ($L(i)$ պահից հետո) և ավարտվի որքան հնարավոր է շուտ ($T(j)$ պահից առաջ):

$r_3=T(j)-L(i)-t(i,j)$ թիվն անվանում են (i,j) աշխատանքի անկախ պահուստային ժամանակ. այն ցույց է տալիս, թե i-րդ պատահույթի ամենաուշ իրականացման դեպքում (i,j) աշխատանքը կատարելուց հետո որքան ժամանակ է մնում մինչև j պատահույթի իրականացման ամենավաղ ժամկետը:

Նկատենք, որ աշխատանքի անկախ պահուստային ժամանակը կարող է լինել բացասական թիվ. այդ դեպքում (i,j) աշխատանքի սկզբի ցանկա-

ցած փոփոխություն անպայման ազդելու է որոշ աշխատանքների ժամանակային սահմանափակումների վրա:

Դա նշանակում է, որ աշխատանքը պետք է սկսել իր ամենավաղ իրականացման ժամկետին:

Աշխատանքների ժամանակի պահուստները բնութագրում են ծրագրի առաձգականությունը: Որքան փոքր են այդ պահուստները, այնքան կոշտ է ծրագրի ցանցը: Եթե ծրագրի բոլոր աշխատանքները կրիտիկական են, ապա ոչ մի աշխատանքի ուշացում չի թույլատրվում:

Պահուստային ժամանակների սահմանումներից հետևում է՝ **որպեսզի (i, j) աշխատանքը լինի կրիտիկական, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի նրա լրիվ պահուստային ժամանակը հավասար լինի 0:**

Պարզ է նաև, որ ծրագրի ցանկացած աշխատանքի համար (լրիվ պահուստային ժամանակ) ≥ (ազատ պահուստային ժամանակ) ≥ (անկախ պահուստային ժամանակ):

Վերը քննարկված, նկ. 5.5-ում պատկերված ցանցի աշխատանքների պահուստային ժամանակների հաշվարկը բերված է ստորև պատկերված աղյուսակ 5.2-ում (*-ով նշված են կրիտիկական աշխատանքները):

Աղյուսակ 5.2.

Աշխատանք (i, j)	Լրիվ պահուստային ժամանակ $r_1(i, j)$	Ազատ պահուստային ժամանակ $r_2(i, j)$	Անկախ պահուստային ժամանակ $r_3(i, j)$
(0,1)*	4-0-4=0	4-0-4=0	4-0-4=0
(0,2)	7-0-3=4	5-0-3=2	5-0-3=2
(0,3)	10-0-4=6	4-0-4=0	4-0-4=0
(1,2)	7-4-1=2	5-4-1=0	5-4-1=0
(1,4)*	11-4-7=0	11-4-7=0	11-4-7=0
(1,6)	16-4-8=4	16-4-8=4	16-4-8=4
(2,4)	11-5-4=2	11-5-4=2	11-7-4=0
(3,5)	12-4-2=6	12-4-2=6	12-10-2=0
(4,5)*	12-11-1=0	12-11-1=0	12-11-1=0
(4,6)	16-11-3=2	16-11-3=2	16-11-3=2
(5,6)*	16-12-4=0	16-12-4=0	16-12-4=0

5.3. Ծրագրերի օրացուցային պլանավորում

Ծրագրին համապատասխանող ցանցում նշված են միայն աշխատանքների տևողությունները և որոշակի, ոչ կոշտ, սահմանափակումներ դրանց կատարման հերթականության վրա:

Ենթադրելով, որ ծրագիրը սկսում է իրագործվել $t = 0$ պահից, մենք լուծեցինք ծրագրի ընդհանուր T տևողությունը գտնելու խնդիրը: Ընդ որում, առանձնացրեցինք կրիտիկական (i, j) աշխատանքներ, որոնք T ժամկետում ծրագրի ավարտի դեպքում, անպայման պետք է սկսվեին $T(i) = L(i)$ պահին և ավարտվեին $T(j) = L(j) = T(i) + t(i, j)$ պահին:

Մնացած, ոչ կրիտիկական, աշխատանքների համար սկսվելու պահը ամրագրված չէր: Միայն հայտնի էր, որ T ժամկետում ծրագրի ավարտի համար, այդ աշխատանքները պետք է կատարվեին տրված $[T(i), L(j)]$ ժամանակահատվածում:

Ծրագրի իրագործման համար պետք է կազմել ծրագրի օրացուցային պլանը. յուրաքանչյուր ոչ կրիտիկական (i, j) աշխատանքի համար անհրաժեշտ է նշել դրա սկսելու պահը՝ այնպիսի $\lambda(i, j)$ թիվ, որը բավարարի

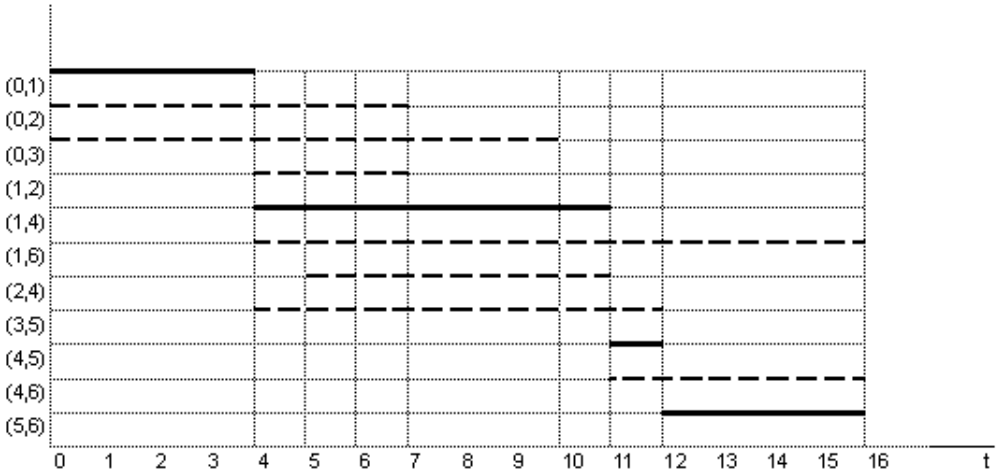
$$T(i) \le \lambda(i, j) \text{ և } \lambda(i, j) + t(i, j) \le L(j)$$

պայմաններին: Դրանք հետևյալ սահմանափակումներն են.

(i, j) աշխատանքը պետք է սկսել ոչ շուտ, քան i պատահույթի իրականացման ամենավաղ ժամկետը և ավարտել ոչ ուշ, քան j պատահույթի իրականացման ամենաուշ ժամկետը:

Պարզ է, որ $\lambda(i, j)$ թվերը միարժեքորեն չեն որոշվում: Ծրագրի իրականացման հետ կապված պահանջներից ելնելով, այդ թվերի ընտրության ժամանակ առաջանում են որոշակի խնդիրներ: Այդ խնդիրներից մի քանիսի քննարկման համար հարմար է դիտարկել ցանցի նախնական ժամանակային գրաֆիկը: Յուրաքանչյուր (i, j) աշխատանքի համապատասխանեցնենք կոորդինատային հարթության $0t$ առանցքին զուգահեռ ուղիղ, դրա վրա նշելով $[T(i), L(j)]$ միջակայքին համապատասխանող հատվածը՝ կրիտիկական աշխատանքների համար հոծ, իսկ ոչ կրիտիկականների համար՝ կետագծերով:

Նկար 5.6-ում կառուցված է այդ գրաֆիկը նկար 5.4-ում պատկերված ցանցի համար:



Նկար 5.6

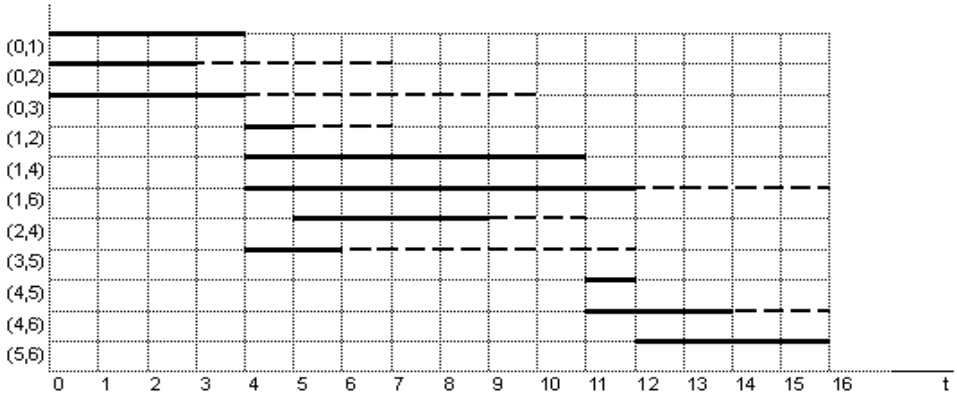
Ցանցի ժամանակային նախնական գրաֆիկի ամեն մի ոչ կրիտիկական (i, j) աշխատանքի համար նշելով $t(i, j)$ երկարությամբ հատված $[T(i), L(j)]$ միջակայքում, կստանանք ծրագրի իրականացման ժամանակային գրաֆիկ: Պարզ է, որ այն միարժեքորեն բնորոշում է ծրագրի իրականացման օրացուցային պլանը:

Գործնականում ընդունված է այդ գործողությունը կատարել հետևյալ վարվելակերպերից որևէ մեկի միջոցով.

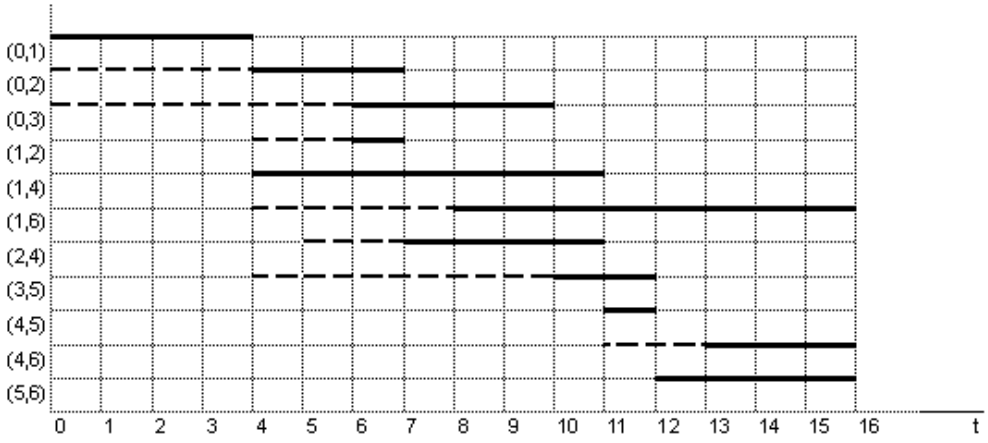
ա) նշվում է $[T(i), T(i)+t(i, j)]$ հատվածը, կամ, որ նույնն է, ընտրվում է (i, j) ոչ կրիտիկական աշխատանքի կատարման ամենավաղ ժամանակահատվածը,

բ) նշվում է $[T(j)-t(i, j), T(j)]$ հատվածը, կամ, որ նույնն է, ընտրվում է (i, j) ոչ կրիտիկական աշխատանքի կատարման ամենաուշ ժամանակահատվածը:

Նկար 5.7-ում և նկար 5.8-ում համապատասխանաբար պատկերված են վերը նշված ցանցի ժամանակային նախնական գրաֆիկից ստացված ծրագրի ժամանակային գրաֆիկները:



Նկար. 5.7 Ծրագրի ժամանակային գրաֆիկ (ա) վարվելակերպ)



Նկար. 5.8 Ծրագրի ժամանակային գրաֆիկ (բ) վարվելակերպ)

Ծրագիրը նկարագրող ցանցի համար տարբեր օրացուցային պլանների առկայության պայմաններում բնական է քննարկել այս կամ այն բնութագրիչներով լավագույն օրացուցային պլանի կառուցման խնդիրներ:

Դրանցից մեկը ռեսուրսների բաշխման խնդիրն է:

Հաճախ որոշ աշխատանքների միաժամանակյա կատարումը նյութական կամ աշխատանքային ռեսուրսների սահմանափակության պատճառով կարող է անհնար լինել: Ոչ կրիտիկական աշխատանքների կատարման ժամկետները թույլատրելի սահմաններում հարմար եղանակով փոփոխելով, երբեմն բերում են ռեսուրսների պահանջարկի պակասեցմանը: Նույնիսկ այն դեպքում, երբ ռեսուրսների սահմանափակում չկա, դրա արդյունքում

ընտրվում է ծրագրի աշխատանքը կատարողների առավել կամ պակաս հաստատուն կազմ:

Ավելի մանրամասն քննարկենք այդ խնդիրը:

Ենթադրենք, որ ծրագրի յուրաքանչյուր (i, j) աշխատանքի համար տրված է $h(i, j)$ թիվը՝ այն աշխատողների քանակը, որոնք կարող են իրագործել այդ աշխատանքը $t(i, j)$ ժամանակում:

Ունենալով ծրագրի իրագործման օրացուցային պլանը, կարող ենք ամեն մի $t \in [0, T]$ պահի համար հաշվել $a(t)$ թիվը՝ այն աշխատողների քանակը, որոնք այդ պահին աշխատում են ծրագրի իրագործման համար:

Նկատենք, որ $a(t) = \sum h(i, j)$, որտեղ գումարը կատարվում է այն աշխատանքներով, որոնք կատարվում են t պահին:

Ծրագրի իրագործման օրացուցային պլանի բնութագրիչ համարենք

$$\max_{t \in [0, T]} a(t)$$

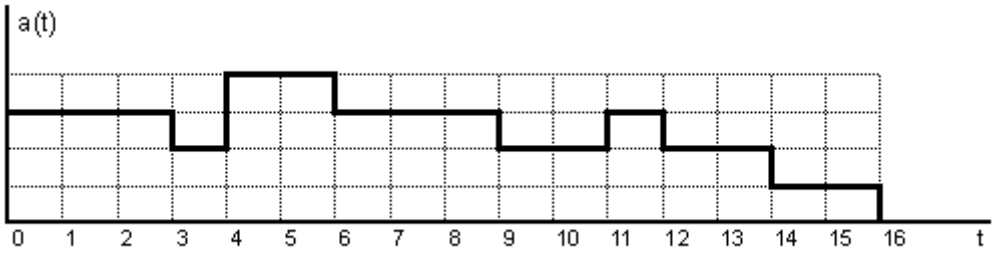
թիվը. դա օգտագործվող աշխատանքային ռեսուրսների առավելագույն քանակն է:

Ռեսուրսների հավասարաչափ բաշխման խնդիրը հետևյալն է.

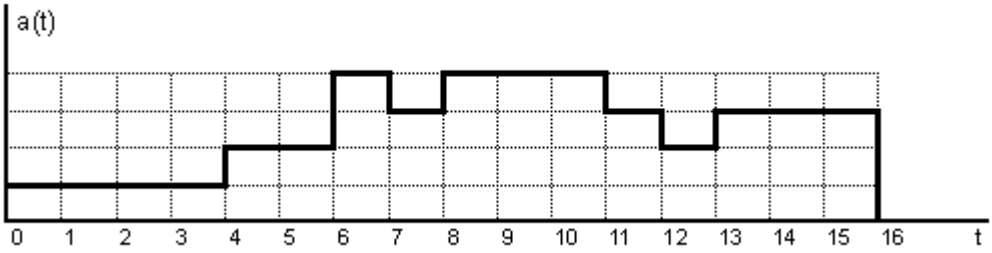
Անհրաժեշտ է գտնել ծրագրի իրագործման այնպիսի օրացուցային պլան, որի բնութագրիչը ամենափոքրն է:

Չնայած պարզ ձևակերպմանը, այս խնդրի լուծման արդյունավետ եղանակ հայտնի չէ: Դիտարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ $h(i, j)$-ի արժեքները հավասար են մեկի:

Ստորև (նկար 5.9 և նկար 5.10) պատկերված են վերը նշված ծրագրի իրագործման ա) և բ) ժամանակային գրաֆիկներին համապատասխանող $a(t)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:



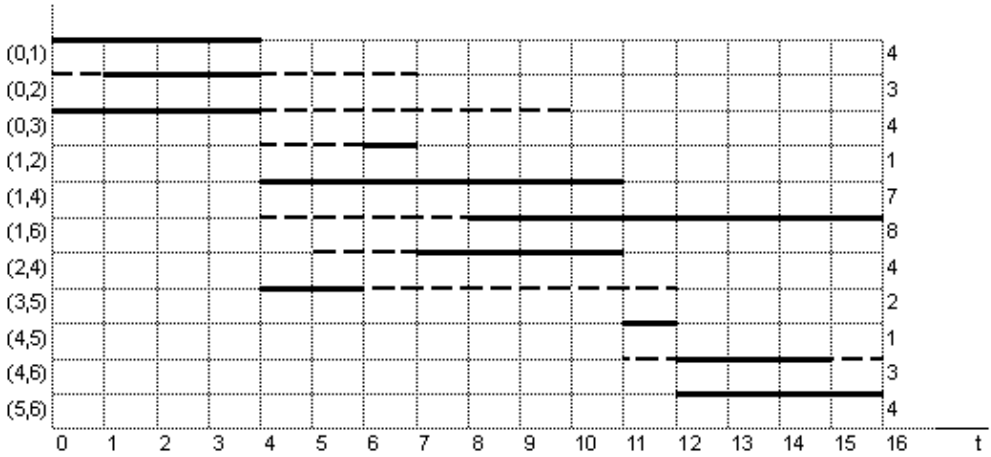
Նկար 5.9



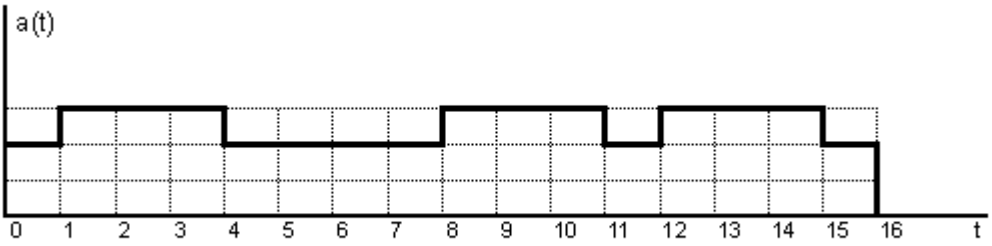
Նկար. 5.10

Այս երկու օրացուցային պլանների համար max a(t)=4, t∈[0,T], այսինքն ունեն 4 բնութագրիչը. ծրագրի իրականացման համար անհրաժեշտ կատարողների քանակը 4 է: Նկատենք, որ նկարներում պատկերված $a(t)$ ֆունկցիաների գրաֆիկներով սահմանափակված պատկերների մակերեսները միմյանց հավասար են և ցույց են տալիս այն ընդհանուր ժամանակը, որն անհրաժեշտ է ծրագրի իրականացման համար:

Նկար 5.11-ում և նկար 5.12-ում պատկերված են նույն ծրագրի իրագործման մեկ այլ ժամանակային գրաֆիկ և դրան համապատասխանող $a(t)$ ֆունկցիան:



Նկար 5.11



Նկար. 5.12

Այս օրացուցային պլանի բնութագրիչը 3 է: Այն օպտիմալ է, քանի որ նշված պատկերի մակերեսը 41 է, և $a(t)$ ֆունկցիայի մաքսիմալ արժեքը 3-ից փոքր լինել չի կարող:

5.4. Ծրագրի իրագործման արագացման կամ կրիտիկական ճանապարհի մինիմալացման խնդիրը

Օրացուցային պլանավորման ընթացքում հաշվի առնենք նաև ծրագրի արժեքային կողմը: Աշխատանքի արագացումը, որպես կանոն, հանգեցնում է նրա արժեքի աճին:

Դիցուք յուրաքանչյուր *j=1…m* աշխատանքի համար տրված են.

$t(e_j)$՝ e_j աշխատանքի սովորական կամ նորմալ ռեժիմով կատարման տևողությունը,

$h(e_j)$՝ e_j աշխատանքը $t(e_j)$ ժամկետում կատարելու համար անհրաժեշտ աշխատողների քանակը,

$c(e_j)$՝ e_j աշխատանքի սովորական ռեժիմով կատարման համար անհրաժեշտ ծախսերը:

Նշանակենք ամբողջ ծրագրի կատարման համար անհրաժեշտ ծախսը՝

$$C=\sum_{j=1}^{m} c(e_j):$$

e_j աշխատանքի տևողությունը կարելի է կրճատել ռեսուրսների քանակի ավելացման կամ դրանց արտադրողականության աճի շնորհիվ (ավելի կատարելագործված տեխնիկա, ավելի որակյալ աշխատողներ կիրառելու և այլ ուղիներով), հետևաբար՝ C ծախսերի ավելացման հաշվին:

Նշանակենք

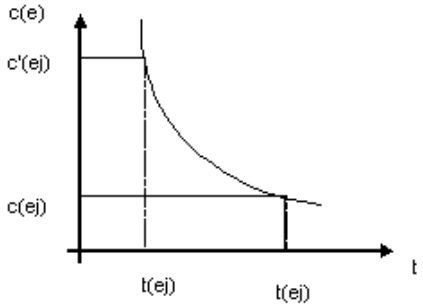
$t'(e_j)$–ով e_j աշխատանքի տևողությունը արագ կատարման դեպքում,

$h'(e_j)$-ով՝ $t'(e_j)$ ժամկետում e_j աշխատանքը կատարելու համար անհրաժեշտ աշխատողների թվաքանակը,

$c'(e_j)$-ով՝ $t'(e_j)$ ժամկետում e_j աշխատանքը կատարելու համար անհրաժեշտ ծախսերը:

Ակնհայտ է, որ $t'(e_j) < t(e_j)$, $h'(e_j) > h(e_j)$, $c'(e_j) > c(e_j)$:

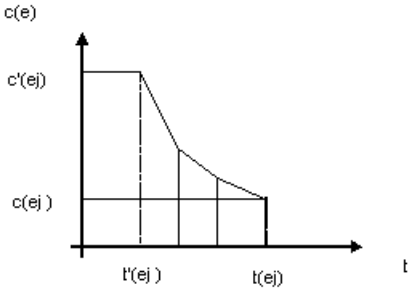
e_j աշխատանքի կատարման համար անհրաժեշտ $c(e_j)$ ծախսը ֆունկցիա է նրա տևողությունից՝ $c(e_j)=f(t(e_j))$:



Նկար 5.13.

Նկար 5.13.-ում ($t(e_j), c(e_j)$) կետը համապատասխանում է աշխատանքի կատարման նորմալ ռեժիմին, իսկ ($t'(e_j), c'(e_j)$) կետը՝ ամենաինտենսիվ ռեժիմին (գրականությունում այդ տևողությունն անվանում են նաև «վթարային»), որից հետո ռեսուրսների օգտագործման ինտենսիվության հետագա աճը հանգեցնում է միայն ծախսերի աճի, առանց կրճատելու աշխատանքի տևողությունը:

Աշխատանքի տևողության և ծախսերի միջև եղած կախվածությունը ոչ գծային է, սակայն պարզեցնելու համար աշխատանքը բաժանենք մասերի և կախվածությունը ներկայացնենք հատվածագծային տեսքով: Նշենք, որ այդ հատվածների թեքությունները նորմալ ռեժիմի կետից ամենաինտենսիվ ռեժիմի կետին անցնելիս աճում են (տե՛ս նկար 5.14.-ը):



Նկար 5.14.

Ծրագրի բոլոր աշխատանքների համար որոշվում է «ծախսեր-տևողություն» կախվածությունը: Նպատակն է՝ արագացնել ծրագրի կատարումը: Այդ նպատակով նախ բոլոր աշխատանքների համար ընդունվում է նորմալ ռեժիմի տևողությունը և աշխատանքների այդ տևողության համար հաշվարկվում ծրագրի ընդհանուր ծախսը: Այնուհետև դիտարկվում է ծրագրի տևողության կրճատման հնարավորությունը:

Ծրագրի տևողությունը կրճատելու համար անհրաժեշտ է կրճատել որևէ կրիտիկական աշխատանքի տևողությունը: Ընտրվում է այն կրիտիկական աշխատանքը, որը ժամանակի միևնույն կրճատման դեպքում ծախսերը կմեծացնի նվազագույն չափով, այսինքն, որի համար «ծախս-տևողություն» կորի թեքությունն ամենափոքրն է:

Յուրաքանչյուր աշխատանքի համար «ծախս-տևողություն» կորի թեքությունը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$p(e_j)=\frac{\Delta c}{\Delta t}=\frac{c'(e_j)-c(e_j)}{t(e_j)-t'(e_j)},$$

որտեղ $p(e_j)$-ն ցույց է տալիս e_j աշխատանքի տևողությունը մեկ միավորով կրճատելու համար անհրաժեշտ ծախսերի մեծությունը:

Ծրագրի կատարման ընդհանուր տևողությունը կփոքրանա նույն մեծությամբ, ինչ մեծությամբ կրճատվել է ընտրված կրիտիկական աշխատանքի տևողությունը: Կրիտիկական աշխատանքի տևողության կրճատման արդյունքում ստանում ենք նոր օրացուցային պլան: Ընդ որում, հնարավոր է, որ ավելանա մեկ այլ կրիտիկական ուղի: Այդ նոր պլանը կրկին կրճատման է ենթարկվում «ծախս-տևողություն» կորի ամենափոքր թեքությունն ունեցող հաջորդ կրիտիկական աշխատանքի տևողության կրճատման միջոցով:

Այս գործընթացը շարունակվում է այնքան ժամանակ, մինչև բոլոր կրիտիկական ուղիները բերվեն ամենաինտենսիվ ռեժիմի կամ սպառվի ծրագրի արագացման համար նախատեսված գումարը:

5.5. Ծախսերի մինիմալացման խնդիրը

Ծախսերի մինիմալացման խնդիրը հետևյալն է՝ ֆիքսված կրիտիկական ճանապարհի դեպքում մինիմալացնել ծրագրի կատարման ընդհանուր ծախսերը:

Հայտնի է, որ ոչ կրիտիկական աշխատանքներն ունեն պահուստային ժամանակ, իսկ դա նշանակում է, որ նրանց կատարման տևողությունները կարող են ավելացվել առանց ծրագրի կատարման ընդհանուր ժամկետը ավելացնելու, ինչը համարժեք է ծախսերի նվազեցմանը:

Նշանակենք $t''(e_j)$–ով e_j աշխատանքի մաքսիմալ տևողությունը;

$h''(e_j)$ –ով՝ $t''(e_j)$ ժամկետում e_j աշխատանքը կատարելու համար անհրաժեշտ աշխատողների քանակը;

$c''(e_j)$-ով՝ $t''(e_j)$ ժամկետում e_j աշխատանքը կատարելու համար անհրաժեշտ ծախսերը:

Ակնհայտ է, որ $t''(e_j) > t(e_j)$, $h''(e_j) < h(e_j)$, $c''(e_j) < c(e_j)$:

Դիտարկենք հետևյալ հարաբերությունը

$$q(e_j)=\frac{\Delta c}{\Delta t}=\frac{c(e_j)-c''(e_j)}{t''(e_j)-t(e_j)}:$$

$q(e_j)$-ն ցույց է տալիս, թե e_j աշխատանքի տևողությունը մեկ միավորով ավելացնելու դեպքում որքանով կկրճատվեն ծախսերը:

Ակնհայտ է, որ ծրագրի վրա կատարվող ծախսերը կարելի է կրճատել՝ ավելացնելով ոչ կրիտիկական աշխատանքների տևողությունները:

5.4 նկարում բերված ցանցի համար լուծենք **կրիտիկական ուղու մինիմալացման և ծախսերի մինիմալացման խնդիրները:**

Հետևյալ 5.3 աղյուսակում բերված են ցանցի յուրաքանչյուր (i,j) աշխատանքի կատարման նվազագույն $t'(i,j)$ և առավելագույն $t''(i,j)$ ժամկետները, կատարման տևողությունը մեկ օրով նվազեցնելու համար անհրաժեշտ $p(i,j)$ ծախսը և կատարման տևողությունը մեկ օրով ավելացնելու դեպքում ծախսի $q(i,j)$ կրճատումը:

Աղյուսակ 5.3.

(i,j)	$t(i,j)$	$t'(i,(j)$	$t''(i,j)$	$p(i,j)$ հազ.դրամ	$q(i,j)$ հազ.դրամ
(0,1)	4	2	6	20	30
(0,2)	3	2	5	15	20
(0,3)	4	3	5	25	25
(1,2)	1	1	2	40	40
(1,4)	7	3	8	10	20
(1,6)	8	6	9	15	15
(2,4)	4	3	6	10	30
(3,5)	2	1	5	30	35
(4,5)	1	1	3	25	25
(4,6)	3	2	4	20	20
(5,6)	4	2	6	15	40

5.2 բաժնում գտել ենք, որ ցանցում $0\to1\to4\to5\to6$ ուղին կրիտիկական է և նրա երկարությունն է՝ $T_{կր} = 16$:

Լուծենք կրիտիկական ուղու մինիմալացման խնդիրը:

Առաջին քայլ. Ընտրենք $0 \to 1 \to 4 \to 5 \to 6$ կրիտիկական ուղու (1,4) կրիտիկական աշխատանքը, որի տևողության մեկ օրով կրճատման համար պահանջվում է նվազագույն ***p (1,4) =10*** ծախսը և այդ աշխատանքի նվազագույն տևողությունն է՝ ***t'(1,4) =3:*** Հետևաբար (1,4) աշխատանքի տևողությունը կարելի է կրճատել ***t(1,4) - t'(1,4) =*** 4 օրով: Սակայն նկատենք, որ այդ դեպքում ցանցում կրիտիկական ուղին չի կրճատվի 4 օրով, քանի որ ցանցում կան $0 \to 1 \to 4 \to 6$ և $0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6$ ուղիները, որոնց երկարությունը հավասար է 14: Իսկ դա նշանակում է, որ կրիտիկական ուղին կկրճատվի ընդամենը 2 օրով: Ուստի, կրճատենք (1,4) աշխատանքի տևողությունը 2 օրով, ծախսելով ***2•10 = 20*** հազ. դրամ***:***

Արդյունքում կառաջանա նոր կրիտիկական ուղի՝ $0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6$, որի տևողությունը հավասար է՝ $T_{կր}$ ***= 14:***

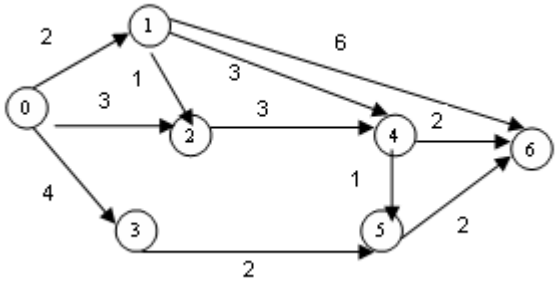
Երկրորդ քայլ. Այս քայլում կրճատենք (0,1) աշխատանքի տևողությունը 2 օրով, ինչի արդյունքում երկու կրիտիկական ուղիների տևողությունները նույնպես կկրճատվեն 2 օրով՝ $T_{կր}$ ***= 12,*** իսկ ծախսը կկազմի ***2 • 20 = 40*** հազ. դրամ***:*** Սակայն այս անգամ ևս կառաջանա նոր կրիտիկական ուղի՝ $0 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6$:

Երրորդ քայլ. Նկատենք, որ այս քայլում, կրճատելով (5,6) աշխատանքի տևողությունը 2 օրով, բոլոր երեք կրիտիկական ուղիները կկրճատվեն ևս 2 օրով և կրիտիկական ուղու երկարությունը կկազմի՝ $T_{կր}$ ***= 10*** օր: Ծախսը այս քայլում կկազմի ***2 •15 = 30*** հազ. դրամ***:*** (5,6) աշխատանքի տևողության կրճատման արդյունքում կունենանք երեք կրիտիկական ուղիներ՝ $0 \to 1 \to 6$, $0 \to 1 \to 4 \to 6$ և $0 \to 2 \to 4 \to 6$:

Չորրորդ քայլ. Այս քայլում, կրճատելով (1,6) աշխատանքի տևողությունը 2 օրով, (1,4) աշխատանքի տևողությունը 2 օրով, (2,4) և (4,6) աշխատանքների տևողությունները 1 օրով, բոլոր կրիտիկական ուղիների տևողությունները կկրճատվեն 2 օրով և կունենանք՝ $T_{կր}$ ***= 8*** օր: Այս քայլում ծախսը կկազմի ***2•15 + 2•10 + 1•10 + 1•20 = 80*** հազ. դրամ***:***

Նկատենք, որ այլևս հնարավոր չէ կրճատել կրիտիկական աշխատանքների տևողությունները, ուստի խնդրի լուծումը ավարտված է:

Այսպիսով, ծախսելով լրացուցիչ ***20 + 40 + 30 + 80 = 170*** հազ. դրամ, ծրագրի կատարման ընդհանուր ժամկետը հաջողվեց նվազեցնել երկու անգամ: Նկար 5.15 – ում ներկայացված է ցանցը աշխատանքների կատարման նվազագույն տևողություններով:



Նկար 5.15

Այժմ բերված ցանցի համար լուծենք **ծախսերի մինիմալացման խնդիրը**:

Ցանցում ծախսերը նվազագույն դարձնելու համար ավելացնենք ոչ կրիտիկական աշխատանքների տևողությունները: Որպեսզի դրանք չազդեն հաջորդող աշխատանքների կատարման ժամկետների վրա և չավելացնեն ծրագրի կատարման ընդհանուր տևողությունը, յուրաքանչյուր *(i,j)* ոչ կրիտիկական աշխատանքի տևողությունը կարող է ավելացվել ամենաշատը $\min\{t''(i,j) - t(i,j);\ r_2(i,j)\}$ չափով:

Ավելացնենք .

(0,2) աշխատանքի տևողությունը $\min\{5-3, 2\} = 2$ օրով,

(2,4) աշխատանքի տևողությունը $\min\{6-4, 2\} = 2$ օրով,

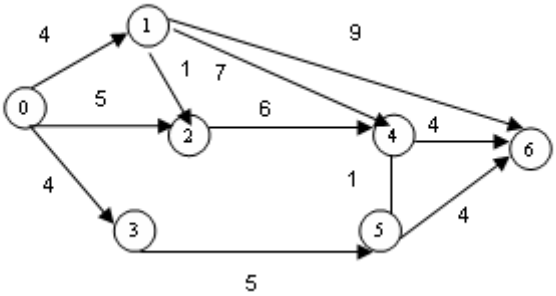
(4,6) աշխատանքի տևողությունը $\min\{4-3, 2\} = 1$ օրով,

(3,5) աշխատանքի տևողությունը $\min\{5-2, 6\} = 3$ օրով,

Նշենք, որ *(1,2)* և *(0,3)* ոչ կրիտիկական աշխատանքների տևողությունները հնարավոր չէ ավելացնել, քանի որ դրանց ազատ պահուստային ժամանակը հավասար է զրոյի՝ $r_2(1,2) = r_2(0,3) = 0$:

Ոչ կրիտիկական աշխատանքների տևողությունները ավելացնելու արդյունքում ծախսերը ցանցում կնվազեն $1 \cdot 15 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 20 + 3 \cdot 35 = 240$ հազար դրամով:

Նկար 5.16 – ում ներկայացված է ցանցը աշխատանքների կատարման առավելագույն տևողություններով:



Նկար 5.16

5.6. Հոսքերը ցանցերում, առավելագույն հոսքի որոնման խնդիրը:

Դիտարկենք $G = (X,U)$ ցանց, որի հանգույցների միջև փոխանցվում է, օրինակ, ինֆորմացիա և հայտնի են բոլոր աղեղների թողունակությունները: **Աղեղի թողունակություն** ասելով կհասկանանք տվյալ աղեղով փոխանցվող առավելագույն ինֆորմացիայի չափը: Այսպիսի ցանցում առաջանում է հետևյալ խնդիրը՝ գտնել ***s*** սկզբնական գագաթից ***t*** վերջնական գագաթը գնացող առավելագույն հոսքը: Մինչև խնդրի մաթեմատիկական մոդելին անցնելը սահմանենք ***հոսքը ցանցում*** հասկացությունը:

x_{ij} ոչ բացասական թվերի բազմությունը կոչվում է ***s*** սկզբնական գագաթից ***t*** վերջնական գագաթը գնացող ***հոսք***, եթե նրանք բավարարում են հետևյալ *(1) - (2)* պայմաններին՝

$$\sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = \begin{cases} 0, j \neq s, j \neq t \\ -v, j = s \\ v, j = t \end{cases} \qquad (1)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq b_{ij} \ \forall \ (i, j) \ \text{աղեղի համար} \qquad (2)$$

որտեղ՝ x_{ij}-ն հոսքի մեծությունն է *(i,j)* աղեղով, b_{ij}–ն՝ *(i,j)* աղեղի թողունակությունը,

$v = \sum_i x_{si} = \sum_j x_{jt}$ ՝ հոսքի մեծությունն է ցանցում,

$\sum_i x_{ij}$ ՝ *j*–րդ հանգույցը մտնող հոսքն է,

$\sum_k x_{jk}$ ՝ *j*–րդ հանգույցից դուրս եկող հոսքն է:

Առավելագույն հոսքի խնդիրը հետևյալն է՝ գտնել (1)-(2) պայմաններին բավարարող

$V = \sum_i x_{si} = \sum_j x_{jt}$ ֆունկցիայի առավելագույն արժեքը՝

$$V \to \max : \qquad (3)$$

Ակնհայտ է, որ (1)-(3) խնդիրը՝ գծային ծրագրման խնդիր է, որի թույլատրելի լուծումների բազմությունը դատարկ չէ՝ օրինակ, $x_{ij} = 0$ բոլոր (i, j) աղեղների համար թույլատրելի հոսք է: Մյուս կողմից, v նպատակային ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից, և, հետևաբար, (1)-(3) խնդիրը ունի օպտիմալ լուծում:

Դիտարկենք պարզագույն ցանց, որը պարունակում է սկզբնական s գագաթը t վերջնականին միացնող միայն մեկ ուղղի: Ակնհայտ է, որ այդպիսի ցանցում առավելագույն հոսքը չի կարող գերազանցել այդ ուղղու աղեղներից նվազագույնի թողունակությունը: Մինիմալ թողունակությամբ աղեղը կոչվում է այդ ուղղու, և հետևաբար նաև այդ ցանցի, **“նեղ տեղը”:**

Իսկ հիմա սահմանենք “նեղ տեղի” հասկացությունը կամայական ցանցի համար:

Տրոհենք գագաթների X բազմությունը երկու ենթաբազմությունների՝ $X_1 \subset X$ և $X_2 \subset X$ այնպես, որ

$$X_1 \cup X_2 = X \text{ և } X_1 \cap X_2 = \varnothing :$$

Այն (i,j) աղեղների բազմությունը, որոնց համար $i \in X_1$, իսկ $j \in X_2$, կոչվում է (X_1,X_2) հատույթ: G ցանցում (X_1,X_2) հատույթը անջատում է s-ը t–ից, եթե $s \in X_1$, իսկ $t \in X_2$:

(X_1,X_2) հատույթի մեջ մտնող աղեղների թողունակությունների գումարը՝ $C(X_1,X_2)= \sum_{i \in X, j \in X_2} b_{ij}$ անվանենք (X_1,X_2) հատույթի թողունակություն: Ակնհայտ է, որ $C(X_1,X_2) \neq C(X_2,X_1)$: s-ը t-ից անջատող հատույթներից նվազագույն թողունակություն ունեցող հատույթը կոչվում է **մինիմալ**, իսկ նրա թողունակությունը՝ ցանցի **“նեղ տեղ”:**

Ակնհայտ է, որ առավելագույն հոսքը ցանցում չի կարող գերազանցել մինիմալ հատույթի թողունակությանը: Իսկ, համաձայն **Ֆորդ-Ֆալկերսոնի** ցանցում հոսքերի վերաբերյալ **հիմնական թեորեմի**.

Կամայական ցանցում առավելագույն հոսքը հավասար է մինիմալ հատույթի թողունակությանը.

$$V_{max} = C_{min}(X_1,X_2) :$$

Ապացույց. Բերենք այս թեորեմի կոնստրուկտիվ ապացույցը, որի ընթացքում կգտնենք մաքսիմալ հոսքը և միաժամանակ կկառուցենք մինիմալ հատույթը:

Պարզ է, որ $v \le C(X_1,X_2)$՝ հոսքի մեծությունը ցանցում չի գերազանցում կամայական (X_1,X_2) հատույթի թողունակությանը: Եթե մենք ցույց տանք, որ կամայական ցանցում գոյություն ունի հոսք, որի մեծությունը հավասար է որևէ հատույթի թողունակությանը, ապա թեորեմը կապացուցվի:

Ապացույցը կատարենք հետևյալ եղանակով.

- Վերցնենք որևէ թույլատրելի v հոսք (թույլատրելի հոսքը միշտ գոյություն ունի, քանի որ
  (1) - (3) խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը դատարկ չէ):
- Եթե այդ հոսքի մեծությունը հավասար է որևէ հատույթի թողունակությանը, ապա թեորեմը ապացուցված է: Հակառակ դեպքում կատարենք հաջորդ քայլը:
- Ավելացնենք v հոսքը ստորև բերված կանոնների համաձայն և վերադառնանք նախորդ քայլին:

Քանի որ մինիմալ հատույթի թողունակությունը վերջավոր մեծություն է, իսկ յուրաքանչյուր քայլում հոսքի մեծությունը ավելանում է, ապա վերջավոր քանակով քայլեր կատարելուց հետո առավելագույն հոսքը կստացվի:

Նախ, սահմանենք ցանցում ***շղթա*** և ***ճանապարհ*** հասկացությունները.

$(i_1,\dots i_k,i_{k+1},\dots i_n)$ գագաթների հաջորդականությունը կոչվում է ***շղթա***, եթե կամայական $k=1,\dots n-1$ համար $(i_k,i_{k+1}) \in U$ և կոչվում է ***ճանապարհ,*** եթե բոլոր $k=1,\dots n-1$ համար $(i_k,i_{k+1}) \in U$ կամ

$(i_{k+1}, i_k) \in U$ (այսպիսի աղեղները կոչվում են համապատասխանաբար ուղիղ և հակառակ աղեղներ):

Այժմ ձևակերպենք այն կանոնը, որի համաձայն, ունենալով որևէ հոսք, կառուցվում է (X_1,X_2) հատույթը.

1. Վերցնում ենք $s \in X_1$;
2. Եթե $i \in X_1$ և $x_{ij} < b_{ij}$, ապա $j \in X_1$;
3. Եթե $i \in X_1$ և $x_{ji} > 0$, ապա $j \in X_1$;
4. Այն հանգույցները, որոնք չեն մտնում X_1 բազմության մեջ, մտնում են X_2 բազմության մեջ:

(X_1,X_2) հատույթը 1-4 կանոններով կառուցելուց հետո կունենանք հետևյալ երկու դեպքերից մեկը. $t \in X_2$ կամ $t \in X_1$:

Դիտարկենք առաջին դեպքը: Եթե $t \in X_2$, ապա (X_1,X_2) հատույթին պատկանող (i,j) աղեղների համար տեղի ունեն $x_{ij} = b_{ij}$ և $x_{ji} = 0$ պայմանները, որտեղից հետևում է, որ

$$\sum_{i\in X_1, j\in X_2} x_{ij} = \sum_{i\in X_1, j\in X_2} b_{ij} = C(X_1,X_2) \quad \text{և} \quad \sum_{i\in X_1, j\in X_2} x_{ji} = 0:$$

Հետևաբար, հոսքի v մեծությունը հավասար է 1-4 կանոններով կառուց-

ված (X_1,X_2) հատույթի թողունակությանը, ինչը նշանակում է, որ թեորեմը ապացուցվեց:

Դիտարկենք երկրորդ դեպքը: Եթե $t\in X_1$, ապա (X_1,X_2) հատույթի կառուցման կանոններից հետևում է, որ գոյություն ունի ***s*** գագաթը ***t***-ին միացնող՝ $(s,\ldots i,\ i+1,\ldots t)$ ճանապարհ, որի բոլոր ուղիղ աղեղների համար տեղի ունի $x_{i,i+1} < b_{i,i+1}$ պայմանը, իսկ հակառակ աղեղների համար՝ $x_{i+1,i} > 0$ պայմանը:

Նշանակենք.

$\lambda_1 = \min\{b_{i,i+1} - x_{i,i+1}\} > 0$ (մինիմումը վերցվում է ըստ $(s,\ldots i,i+1,\ldots t)$ ճանապարհին պատկանող ուղիղ աղեղների),

$\lambda_2 = \min\{x_{i,i+1}\} > 0$ (մինիմումը վերցվում է ըստ $(s,\ldots i,i+1,\ldots t)$ ճանապարհին պատկանող հակառակ աղեղների),

$$\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0:$$

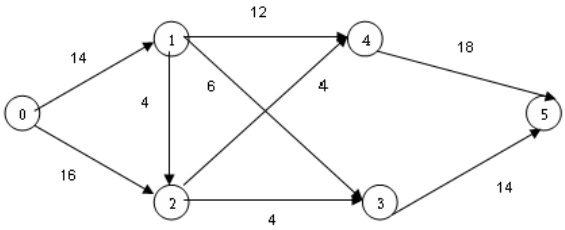
Այնուհետև կառուցենք նոր $v'=v+\lambda > v$ հոսքը հետևյալ կանոններով.

- $(s,\ldots i,i+1,\ldots t)$ ճանապարհին պատկանող ուղիղ աղեղների վրա հոսքը ավելացնենք λ-ով;
- $(s,\ldots i,i+1,\ldots t)$ ճանապարհին պատկանող հակառակ աղեղների վրա հոսքը պակասեցնենք λ-ով;
- ցանցի մնացած աղեղների վրա հոսքը թողենք անփոփոխ:

Հեշտ է ստուգել, որ այս ձևով կառուցած v' հոսքը բավարարում է *(1)-(2)* պայմաններին և, հետևաբար, թույլատրելի հոսք է: Այս նոր հոսքի համար, կառուցելով *(1)-(4)* կանոններով նոր (X_1,X_2) հատույթ, կրկին կունենանք $t\in X_2$ կամ $t\in X_1$ դեպքերից մեկը: Խնդրի լուծումը կավարտվի այն ժամանակ, երբ կստանանք $t\in X_2$ դեպքը:

Քանի որ հոսքի մեծությունը յուրաքանչյուր քայլում ավելանում է, իսկ այն վերջավոր մեծություն է, ապա վերջավոր քանակով քայլեր կատարելուց հետո առավելագուին հոսքը կգտնվի: Թեորեմն ապացուցված է:

Նկար 5.17-ում պատկերված ցանցի օրինակի վրա ցույց տանք, թե ինչպես կարելի է գտնել առավելագույն հոսքը ցանցում:



Նկար 5.17

Նախ, ձևակերպենք այս խնդրի մաթեմատիկական մոդելը. գտնել

$$\begin{cases} x_{01}+x_{02}=x_{45}+x_{35}, & x_{01}=x_{14}+x_{13}+x \\ x_{02}=x_{24}+x_{23}, & x_{14}+x_{24}=x_{45}, \quad x_{13}+x_{23}=x_{35} \\ 0\le x_{01}\le 14, & 0\le x_{24}\le 4, \quad 0\le x_{14}\le 12 \\ 0\le x_{02}\le 16, & 0\le x_{23}\le 4, \quad 0\le x_{45}\le 18 \\ 0\le x_{13}\le 6, & 0\le x_{35}\le 14, \quad 0\le x_{12}\le 4 \end{cases}$$

սահմանափակումներին բավարարող և $v=x_{01}+x_{02}$ ֆունկցիայի արժեքը մաքսիմալացնող ցանցի աղեղներով x_{ij} հոսքի մեծությունները:

Ստացված խնդիրը գծային ծրագրման խնդիր է և այն կարելի է լուծել սիմպլեքս ալգորիթմով: Սակայն մենք կգտնենք առավելագույն հոսքը Ֆորդ-Ֆալկերսոնի թեորեմի ապացուցման ընթացքում ձևակերպված ալգորիթմով:

Առաջին քայլ. Որպես սկզբնական հոսք վերցնենք զրոյական $v=o$ հոսք, այսինքն $\forall i,j$ համար $x_{ij}=0$:

Առաջնորդվելով 1-4 կանոններով, կառուցենք *(X_1,X_2)* հատույթը.

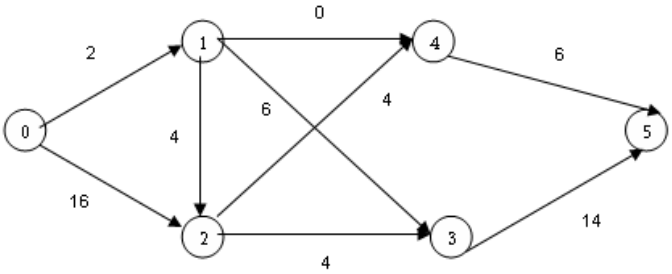
$$X_1=\{0,1,2,3,4,5\},\ X_2=\{\varnothing\}:$$

5 գագաթը պատկանում է X_1 բազմությանը, ուստի հոսքի մեծությունը ցանցում կարելի է ավելացնել, քանի որ գոյություն ունի 0 գագաթը 5-ին միացնող ուղի, որի յուրաքանչյուր աղեղի համար տեղի ունի $x_{ij}<b_{ij}$ պայմանը (այսինքն հոսքի մեծությունը աղեղով փոքր է այդ աղեղի թողունակությունից):

Ընտրենք, օրինակ, $0\to1\to4\to5$ ուղին: Այս ուղու նվազագույն թողունակությամբ աղեղը *(1,4)* աղեղն է, որի համար $b_{14}=12$:

Ավելացնենք $0\to1\to4\to5$ ուղու բոլոր աղեղների հոսքի մեծությունը 12-ով մնացած աղեղներով հոսքի մեծությունը անփոփոխ թողնելով: Կստանանք հետևյալ հոսքը՝ $x_{01}=12$, $x_{14}=12$, $x_{45}=12$ և $x_{ij}=0$ ցանցի մնացած աղեղների համար: Հեշտ է ստուգել, որ այն թույլատրելի հոսք է: Հոսքի մեծությունը ցանցում՝ $v=12$:

Անցնենք նոր ցանցի, որի բոլոր աղեղների թողունակությունները կմնան անփոփոխ, բացի *(0,1), (1,4) և (4,5)* աղեղներից, որոնց թողունակությունները կնվազեն 12-ով:



Նկար 5.18

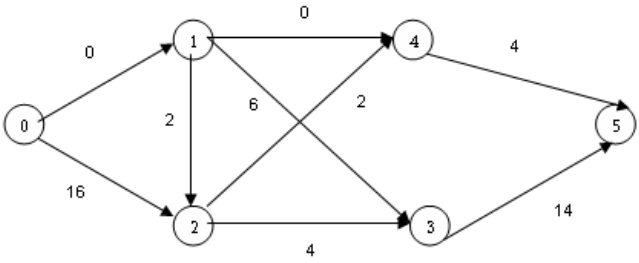
Երկրորդ քայլ. Ունենք նոր՝ $v = 12$ հոսք ցանցում, կառուցենք *(X_1,X_2)* հատույթը՝

$$X_1 = \{0,1,2,3,4,5\}, \; X_2 = \{\varnothing\}:$$

Քանի որ 5 գագաթը պատկանում է X_1 բազմությանը, ապա հոսքի մեծությունը ցանցում նորից կարելի է ավելացնել:

Այս անգամ ընտրենք $0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5$ ուղին, որին պատկանող *(0,1)* աղեղն ունի նվազագույն թողունակությունը՝ $b_{01} = 2$: Ուստի, այս ուղու աղեղներով հոսքը ավելացնենք 2 միավորով մնացած բոլոր աղեղներով հոսքի մեծությունը անփոփոխ թողնելով: Կստանանք հետևյալ թույլատրելի հոսքը՝ $x_{01} = 14, x_{14} = 12, x_{45} = 14,$ $x_{12} = 2, x_{24} = 2$ և $x_{ij} = 0$ ցանցի մնացած աղեղների համար: Հոսքի մեծությունը ցանցում դարձավ $v = 12 + 2 = 14$:

Այս քայլում ընտրված $0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5$ ուղու յուրաքանչյուր աղեղի թողունակությունը նվազեց 2-ով և ստացվեց հետևյալ ցանցը՝



Նկար 5.19

Երրորդ քայլ. $v=14$ հոսքի համար կառուցենք *(X₁,X₂)* հատույթը՝

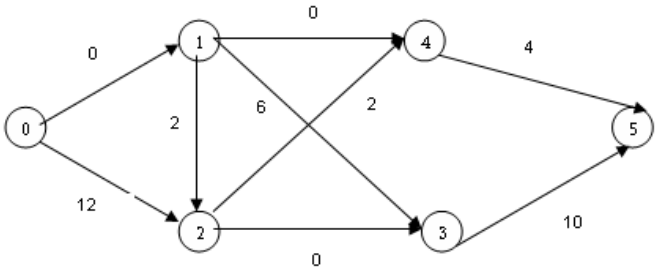
$$X_1=\{0,1,2,3,4,5\},\ X_2=\{\varnothing\}:$$

Քանի որ 5 գագաթը կրկին պատկանում է X_1 բազմությանը, ապա հոսքի մեծությունը ցանցում կարելի է ավելացնել:

Այս քայլում ընտրենք $0\to2\to3\to5$ ուղին: Այս ուղու *(2,3)* աղեղն ունի նվազագույն թողունակությունը՝ $b_{23}=4$: Հետևաբար, *(0,2), (2,3) և (3,5)* աղեղներով հոսքի մեծությունը ավելացնենք 4-ով: Հոսքի մեծությունը ցանցում կդառնա՝ $v=14+4=18$:

Այսպիսով, այս քայլում ստացանք հետևյալ թույլատրելի հոսքը՝ $x_{01}=14, x_{14}=12, x_{45}=14$, $x_{12}=2, x_{24}=2$, $x_{13}=0$, $x_{02}=4$, $x_{23}=4$, $x_{35}=4$:

Նվազեցնելով ընտրված ուղուն պատկանող աղեղների թողունակությունները 4-ով, կստանանք նոր ցանց՝



Նկար 5.20

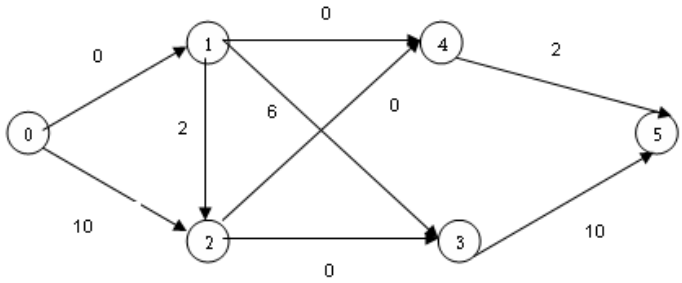
Չորրորդ քայլ. $v=18$ հոսքի համար կառուցենք *(X₁,X₂)* հատույթը՝

$$X_1=\{0,1,2,3,4,5\},\ X_2=\{\varnothing\}:$$

Քանի որ 5 գագաթը պատկանում է X_1 բազմությանը, ապա հոսքի մեծությունը ցանցում ավելացնենք, ընտրելով այս անգամ $0\to2\to4\to5$ ուղին: Այս ուղուն պատկանող աղեղներից նվազագույն թողունակությունն ունի *(2,4)* աղեղը՝ $b_{24}=2$: Հետևաբար, նրան պատկանող աղեղներով հոսքի մեծությունը ավելացնենք 2-ով: Ցանցի աղեղների համար կստանանք՝ $x_{01}=14$, $x_{14}=12$, $x_{45}=16$, $x_{12}=2$, $x_{24}=4$, $x_{13}=0$, $x_{02}=6$, $x_{23}=4$, $x_{35}=4$, ինչը թույլատրելի հոսք է:

Հոսքի մեծությունը ցանցում կդառնա՝ $v=18+2=20$:

Նոր թողունակություններով ցանցը պատկերված է 5.21 նկարում՝



Նկար 5.21

Հինգերորդ քայլ. $v = 20$ հոսքի համար կառուցենք *(X₁,X₂)* հատույթը՝

$$X_1 = \{0,2,1,3,5,4\},\ X_2 = \{\varnothing\}:$$

Քանի որ 5 գագաթը պատկանում է X_1 բազմությանը, ապա գոյություն ունի 0 գագաթը 5-ին միացնող ճանապարհ, որին պատկանող ուղիղ աղեղների համար տեղի ունի $x_{ij} < b_{ij}$ պայմանը (այսինքն հոսքի մեծությունը աղեղով փոքր է այդ աղեղի թողունակությունից), իսկ հակառակ աղեղների համար՝ $x_{ji} > 0$ պայմանը (այսինքն j գագաթից դեպի i գագաթ դրական հոսք կա): Այդ ճանապարհն է՝ $0 \to 2 \to 1 \to 3 \to 5$, որի ուղիղ աղեղների համար տեղի ունեն $x_{02} = 6 < b_{02} = 16$, $x_{13} = 0 < b_{13} = 6$ և $x_{35} = 4 < b_{35} = 14$ պայմանները, իսկ հակառակ *(2,1)* աղեղի համար՝ $x_{12} = 2 > 0$:

Հետևաբար՝ $\lambda_1 = \min\{16-6, 6-0, 14-4\} = 6$, $\lambda_2 = \min\{2\} = 2$, որտեղից ստանում ենք $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\} = \min\{4,2\} = 2$:

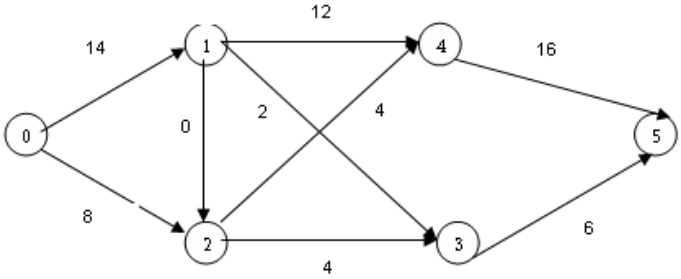
Համաձայն դիտարկվող ալգորիթմի, հոսքի մեծությունը ուղիղ աղեղներով ավելացնենք 2-ով, իսկ հակառակ աղեղներով՝ պակասեցնենք 2-ով: Հոսքի մեծությունը ցանցում կավելանա $\lambda = 2$-ով և կդառնա հավասար՝ $v = 20 + 2 = 22$, իսկ աղեղների համար հոսքի մեծությունները կդառնան հավասար՝ $x_{01} = 14$, $x_{14} = 12$, $x_{45} = 16$, $x_{12} = 0$, $x_{24} = 4$, $x_{13} = 2$, $x_{02} = 8$, $x_{23} = 4$, $x_{35} = 6$:

Վեցերորդ քայլ. $v = 22$ հոսքի համար կառուցենք *(X₁,X₂)* հատույթը՝

$$X_1 = \{0,2,1,\ \},\ X_2 = \{3,4,5\}:$$

Քանի որ 5 գագաթը այս անգամ պատկանում է X_2 բազմությանը, ապա խնդրի լուծումը ավարտված է և առավելագույն հոսքը ցանցում՝ $v_{\max} = 22$:

Վերջնական հոսքը պատկերված է 5.22 նկարում:



Նկար 5.22

ԳԼՈՒԽ 6

ՊԱՇԱՐՆԵՐԻ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԸ

Պաշարների կառավարման խնդիրներն առաջանում են, երբ անհրաժեշտ է լինում ստեղծել նյութական ռեսուրսների կամ սպառողական ապրանքների պաշարներ որոշակի ժամանակահատվածում արտադրության և բնակչության պահանջարկը բավարարելու նպատակով: Կամայական կազմակերպության անընդհատ և արդյունավետ գործունեության համար անհրաժեշտ է պաշարների ստեղծում:

Պաշարների կուտակումը հանգեցնում է որոշակի ծախսերի՝ կապված տարածքների վարձակալման, որոշակի պայմանների ստեղծման, համապատասխան աշխատակազմի վարձման և այլ ծառայությունների հետ: Պահանջարկը մեծմասամբ լինում է անորոշ: Որքան քիչ է պաշարների մակարդակը, այնքան հաճախ է առաջանում պատվերներ տալու կարիքը: Պաշարների ոչ բավարար քանակը կարող է հանգեցնել կորուստների ինչպես արտադրության ոլորտում, այնպես էլ սպասարկման ոլորտում՝ հաճախորդներ կորցնելու առումով:

Մյուս կողմից, ավելցուկային պաշարների ստեղծումը պահանջում է ավելի մեծ կապիտալ ներդրումներ, բայց այս դեպքում նվազում են պակասուրդի հետ կապված վնասները և պատվերների տրման հաճախականությունը:

Պաշարների ծավալների և պատվիրման հաճախականության որոշումը կայացվում է՝ ելնելով ընդհանուր ծախսերի ֆունկցիայի մինիմալացման պահանջից:

Պաշարների կառավարման մոդելները բազմազան են: Նրանց հետազոտման համար օգտագործվում են ամենատարբեր մաթեմատիկական գործիքներ՝ սկսած դասական դիֆերենցիալ հաշվից մինչև գծային և ոչ գծային, դինամիկ ծրագրման, հերթերի տեսության, որոշումների ընդունման, նմանակման մեթոդները:

Պաշարների կառավարման յուրաքանչյուր մոդել պետք է պատասխանի հետևյալ հարցերին.

- Ինչպիսի՞ն պետք է լինի պաշարի օպտիմալ ծավալը;
- Ինչպիսի՞ն պետք է լինի պատվիրման հաճախականությունը:

Պաշարի օպտիմալ ծավալը կարող է փոփոխվել ժամանակի ընթացքում, իսկ պատվերների տրման հաճախականությունը կախված է պաշար-

ների կառավարման համակարգից: Եթե կատարվում է պաշարի մակարդակի պարբերական վերահսկում հավասար ժամանակահատվածներում (օրինակ՝ շաբաթը մեկ, ամիսը մեկ և այլն), ապա սովորաբար նոր պատվերի տրման պահը համընկնում է հաջորդ ժամանակահատվածի սկզբի հետ: Անընդհատ վերահսկման դեպքում պատվիրման պահը որոշվում է պաշարի առկա մակարդակով:

Պաշարների կառավարման համակարգի ծախսերը ներառնում են հետևյալ ծախսերը.

- ձեռքբերման ծախսեր,
- պատվերի ձևակերպման ծախսեր,
- պաշարի պահպանման ծախսեր,
- պաշարի պակասուրդով պայմանավորված վնասներ:

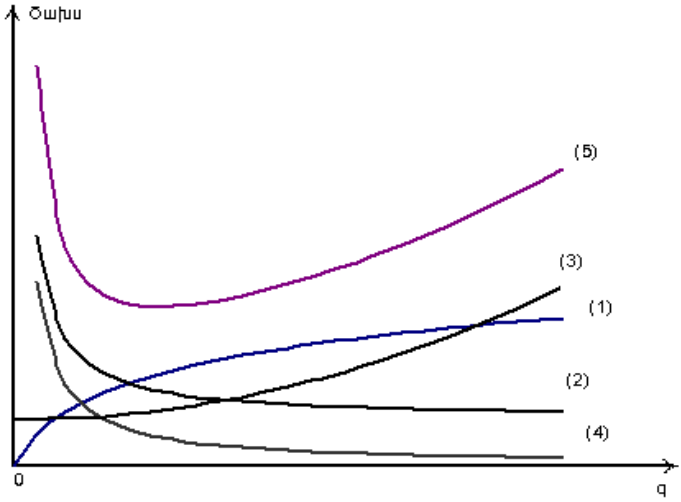
Պաշարի ձեռքբերման ծախսերը կախված են պատվերի ծավալից: Դրանք առավել կարևորվում են հատկապես այն ժամանակ, երբ մեծաքանակ պատվերի դեպքում գների զեղչ է կատարվում:

Պատվերների ձևակերպման ծախսերը հաստատուն ծախսեր են և կախված են պատվիրման հաճախականությունից:

Պաշարների պահպանության ծախսերն աճում են պաշարի մակարդակի աճի դեպքում:

Պաշարի պակասուրդով պայմանավորված կորուստները պաշարի բացակայությամբ պայմանավորված ծախսերն են:

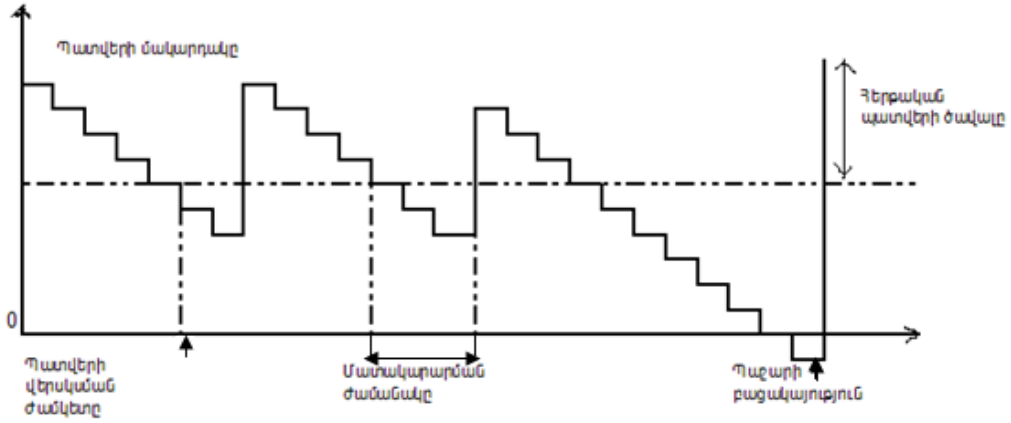
Նկար 6.1-ում պատկերված են պաշարների կառավարման համակարգի գումարային ծախսերը (կոր 5), պաշարի ձեռքբերման ծախսերը (կոր 1), ձևակերպման ծախսերը (կոր 2), պահպանության ծախսերը (կոր 3), պակասուրդով պայմանավորված ծախսերը (կոր 4)՝ կախված պաշարի q մակարդակից.



Նկար 6.1. Պաշարների կառավարման համակարգի ծախսերը

Նշենք, որ պաշարների կառավարման մոդելների մեջ որոշ ծախսեր կարող են չներառվել, հատկապես այն դեպքում, երբ նրանց ազդեցությունն աննշան է: Որոշ դեպքերում բոլոր ծախսերի ներառումը բարդացնում է գումարային ֆունկցիայի տեսքը:

Պաշարների կառավարման յուրաքանչյուր համակարգում պաշարների մակարդակը փոփոխվում է պարբերաբար՝ կախված պահանջարկի բնույթից: Երբ պաշարի մակարդակը իջնում է որոշակի կետի, այն համալրելու նպատակով տրվում է նոր պատվեր: Որոշ ժամանակ անց, որը կոչվում է պատվերի մատակարարման ժամանակ, պաշարը լրացվում է, և նրա մակարդակը բարձրանում է: Դրանից հետո սկսվում է պաշարների կազմակերպման նոր ժամանակահատված (նկար 6.2):



Նկար 6.2. Պաշարների կազմակերպման սխեման

6.1. Պաշարների կառավարման մոդելների դասակարգումը

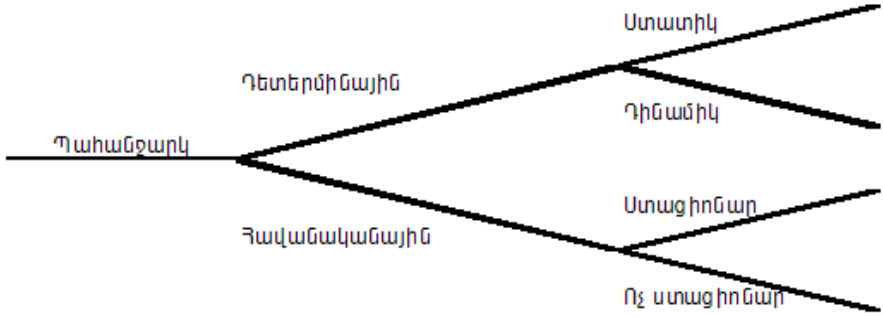
Պաշարների կառավարման մոդելները խիստ բազմազան են: Բազմազան են նաև նրանց լուծման համար օգտագործվող մեթոդները՝ սկսած դասական դիֆերենցիալ հաշվից մինչև գծային և ոչ գծային, դինամիկ ծրագրման մեթոդները: Այդ բազմազանությունը պայմանավորված է պահանջարկի բնույթով, որը կարող է լինել դետերմինային (որոշակի) կամ հավանականային (պատահական):

Դետերմինային պահանջարկը կարող է լինել ստատիկ, երբ սպառման հաճախականությունը ժամանակի ընթացքում անփոփոխ է, կամ՝ դինամիկ, երբ պահանջարկը ստույգ հայտնի է բայց փոփոխվում է ժամանակից կախված:

Պատահական (հավանականային) պահանջարկը կարող է լինել ստացիոնար (կայուն), երբ պահանջարկի հավանականության խտության ֆունկ-

ցիան ժամանակի ընթացքում անփոփոխ է, կամ՝ ոչ ստացիոնար, երբ այն փոփոխվում է: Հավանականային մոդելների լուծման համար օգտագործվում են հավանականությունների տեսության բավականաչափ բարդ ապարատ կիրառող մեթոդներ:

Նկար 6.3-ում բերված է պաշարների կառավարման մոդելների դասակարգումը՝ կախված պահանջարկի բնույթից.



Նկար 6.3. Պաշարների կառավարման մոդելների դասակարգումը

Պաշարների կառավարման մոդելները կառուցելիս, բացի պահանջարկի բնույթից, կարող են հաշվի առնվել նաև այլ գործոններ.

- պատվերների կատարման ժամկետները (այն ժամանակահատվածը, որն ընկած է պատվերի տրման և պաշարի լրացման միջև): Նշենք, որ պատվերի կատարման ժամկետը կարող է հավասար լինել զրոյի (ակնթարթային կատարում),
- դիտարկվող ժամանակահատվածը, որի համար ստեղծվում է պաշարը (այն կարող է լինել վերջավոր կամ անվերջ),
- պաշարվող արտադրանքի կամ հումքի տեսակների քանակը (մեկ կամ մի քանի տեսակի):

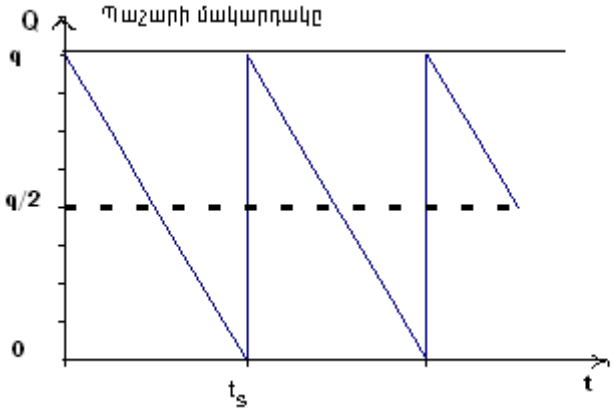
6.2. Պաշարների կառավարման հիմնական մոդելը

Պաշարների կառավարման հիմնական մոդելը ստատիկ մոդել է:

Մոդելում դիտարկվում է մեկ համասեռ ապրանքի պաշարների կառավարման խնդիրը T ժամանակահատվածում (օրինակ՝ 1 տարի): Ենթադրվում է, որ ապրանքի D պահանջարկը դիտարկվող ժամանակահատվածում հաստատուն է: Դիցուք պաշարի մակարդակը պահեստում նվազում է հաստատուն ինտենսիվությամբ, և այն լրացվում է պարբերաբար յուրա-

քանչյուր t_s ժամանակահատվածում հաստատուն q խմբաքանակով: Պատվերը տրվում է այն ժամանակ, երբ պահեստում պաշարի մակարդակը դառնում է զրո: Ենթադրվում է, որ պատվերը կատարվում է անմիջապես, ուստի մոդելում պակասուրդից վնասները բացառվում են:

Նկար 6.4.-ում բերված է Q պաշարի փոփոխության դինամիկան:



Նկար 6.4. Պաշարի մակարդակի փոփոխությունը հիմնական մոդելում

Հաշվենք պաշարների կառավարման համակարգի ծախսերը:

Պաշարի ձեռքբերման ծախսերը T ժամանակահատվածում կազմում են cD, որտեղ c-ն միավոր ապրանքի գինն է:

Դիցուք s-ը մեկ պատվերի հետ կապված ձևակերպման ծախսերն են: Այդ դեպքում T ժամանակահատվածում պատվերների ձևակերպման ընդհանուր ծախսերը կկազմեն Ds/q:

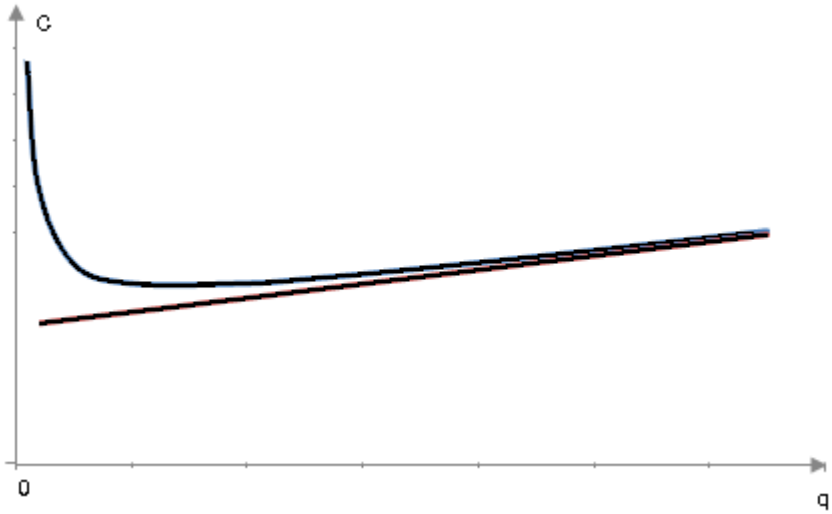
Նշանակենք c_1-ով պահեստում մեկ միավոր ապրանքի պահպանման ծախսերը միավոր ժամանակամիջոցում: Պահեստում յուրաքանչյուր t_s ժամանակահատվածում պաշարի միջին մակարդակը հավասար է $q/2$, ուստի այդ ընթացքում պաշարի պահպանման ծախսերը կկազմեն $c_1 t_s q/2$: Հետևաբար, դիտարկվող T ժամանակահատվածում պաշարի պահպանման ծախսերն են $c_1 Tq/2$:

Այսպիսով, T ժամանակահատվածի համար պաշարների կառավարման համակարգի ընդհանուր $C(q)$ ծախսերը, կախված պատվերի q խմբաքանակի չափից, կկազմեն

$$C(q) = cD + \frac{D}{q}s + \frac{c_1 T}{2}q$$

Ակնհայտ է, որ q քանակը մեծացնելիս ձևակերպման ծախսերը նվազում են, իսկ պահպանման ծախսերը՝ աճում:

Պաշարների կառավարման խնդրի նպատակն է՝ որոշել պատվերի այն լավագույն q^* խմբաքանակի մեծությունը, որի համար ընդհանուր ծախսերը նվազագույնն են: Նկար 6.5-ում պատկերված են պաշարների կառավարման $C(q)$ ծախսերի ֆունկցիայի և նրա թեք ասիմպտոտի կորերը:



Նկար 6.5. Պաշարի ծեռքբերման գումարային ծախսերի կորը

$C(q)$ ֆունկցիայի նվազագույն արժեքը գտնելու համար ածանցենք այն ըստ q-ի.

$$C'(q) = -\frac{D}{q^2}s + \frac{c_1 T}{2}$$

Լուծելով $C'(q) = 0$ հավասարումը, կստանանք պատվերի խմբաքանակի լավագույն q^* չափը.

$$q^* = \sqrt{\frac{2Ds}{c_1 T}}:$$

Ստացված բանաձևը կոչվում է Հարրիս-Ուիլսոնի բանաձև: Այժմ կարող ենք հաշվել պատվերների n^* թիվը T ժամանակահատվածում և երկու հաջորդական պատվիրման պահերի միջև ընկած t_s^* տևողությունը.

$$n^* = \frac{D}{q^*},$$

$$t_s^* = \frac{T}{n^*}:$$

Օրինակ 1: Որևէ ապրանքի տարեկան պահանջարկը 2500 միավոր է, միավորի գինը՝ 20 պ.դ.մ., պատվերի ձևակերպման ծախսերը՝ 15 պ.դ.մ., միավոր ապրանքի պահպանման ծախսերը 10 պ.դ.մ./տարեկան: Որոշել պատվերի օպտիմալ խմբաքանակի չափը, պատվերների տրման թիվը, երկու հաջորդական պատվիրման պահերի միջև ընկած տևողությունը, պաշարների կառավարման համակարգի նվազագույն ծախսերը:

Լուծում:

Ըստ խնդրի պայմանների՝

$$D = 2500 \text{ միավոր},$$

$$c = 20 \text{ պ.դ.մ.},$$

$$c_1 T = 10 \text{ պ.դ.մ./տարի},$$

$$s = 15 \text{ պ.դ.մ./պատվեր:}$$

Հաշվենք պատվերի խմբաքանակի լավագույն չափը ըստ Հարրիս-Ուիլսոնի բանաձևի.

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 2500 \cdot 15}{10}} \approx 87 \text{ միավոր:}$$

Այս դեպքում պատվերների n^* թիվը մեկ տարում կազմում է՝

$$n^* = 2500/87 \approx 29$$

Երկու հաջորդական պատվիրման պահերի միջև ընկած t_s^* տևողությունն է՝

$$t_s^* = 365/29 \approx 12.5 \text{ օր:}$$

Պաշարների կառավարման համակարգի սպասվելիք նվազագույն ծախսերն են.

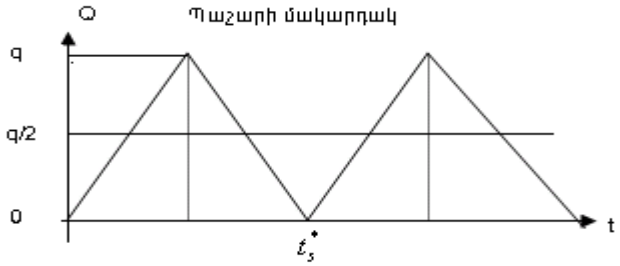
$$C(q^*) = 20 \cdot 2500 + \frac{2500}{87} \cdot 15 + \frac{87 \cdot 10}{2} \approx 50866 \text{ պ.դ.մ.:}$$

6.3. Արտադրանքի խմբաքանակի օպտիմալ չափի մոդելը

Տեխնոլոգիական գործընթացի կազմակերպման հիմքում կարող է ընկած լինել արտադրանքի խմբաքանակի արտադրության և արտադրանքի իրացման հաջորդական հերթափոխումը:

Դիցուք ձեռնարկությունը տալիս է արտադրանք, որի պահանջարկը T ժամանակահատվածում D է: Ենթադրենք, նախ արտադրվում է q քանակությամբ արտադրանք, որից հետո արտադրությունը կանգնեցվում է, և սկսվում է արտադրանքի իրացման գործընթացը: Արտադրանքի q խմբաքանակի լրիվ իրացումից հետո (ենթադրվում է, որ այն իրացվում է հավասարաչափ ինտենսիվությամբ) արտադրության գործընթացը վերսկսվում է, և այսպես շարունակ:

Նկար 6.6.-ում պատկերված է Q պաշարի փոփոխության դինամիկան:



Նկար 6.6. Արտադրանքի խմբաքանակի օպտիմալ չափի մոդելը

Որոշենք արտադրանքի խմբաքանակի լավագույն չափը:

Դիցուք արտադրական ծախքերը արտադրության t_s ժամանակահատվածում կազմում են c_s, իսկ միավոր արտադրանքի պահպանության ծախսերը ժամանակի միավորում՝ c_1 :Պաշարների կառավարման համակարգի գումարային ծախսերը ներառնում են արտադրության կազմակերպման ծախքերը և արտադրանքի պահպանման ծախսերը ողջ դիտարկվող T ժամանակահատվածում:

$$C(q) = \frac{D}{q} c_s + \frac{c_1 T}{2} q$$

Օպտիմալ խմբաքանակի չափն է՝

$$q^* = \sqrt{\frac{2Dc_s}{c_1 T}}$$

Պատվերների n^* թիվը T ժամանակահատվածում և երկու հաջորդական պատվիրման պահերի միջև ընկած t_s^* տևողությունն է.

$$n^* = \frac{D}{q^*},$$

$$t_s^* = \frac{T}{n^*}:$$

Օրինակ 2: Արտադրանքի տարեկան պահանջարկը կազմում է D=2400 միավոր, արտադրության մեկ ցիկլի կազմակերպման ծախքերը՝ $c_s = 200$ պ.դ.մ., միավոր արտադրանքի պահպանման ծախսերը՝ 6 պ.դ.մ./տարեկան: Որոշել արտադրանքի խմբաքանակի լավագույն չափը, արտադրության կազմակերպման ցիկլերի թիվը, յուրաքանչյուր ցիկլի տևողությունը, ինչպես նաև արտադրության կազմակերպման նվազագույն ծախքերը մեկ տարվա ընթացքում:

Լուծում: Քանի որ միավոր արտադրանքի պահպանման ծախսերը ժամանակի միավորի ընթացքում նշանակել ենք c_1, ուստի T ժամանակահատվածում դրանք կկազմեն c_1T : Ըստ պայմանի՝ $c_1T = 6$ պ.դ.մ.:

Խմբաքանակի օպտիմալ չափը հավասար է.

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 2400 \cdot 200}{6}} = 400 \text{ միավոր:}$$

Արտադրության կազմակերպման ցիկլերի թիվը և յուրաքանչյուր արտադրական ցիկլի տևողությունը համապատասխանաբար կազմում են

$$n^* = \frac{2400}{400} = 6,$$

$$\mathrm{t}_s^* = \frac{365}{6} \approx 61 \text{ օր:}$$

Արտադրության կազմակերպման նվազագույն գումարային ծախքերը մեկ տարվա համար կազմում են.

$$C(q^*) = \frac{2400 \cdot 200}{400} + \frac{6 \cdot 400}{2} = 2400 \text{ պ.դ.մ.}$$

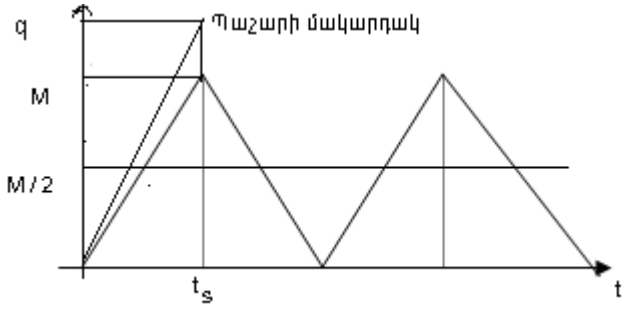
6.4. Արտադրական մատակարարումների մոդելը

Խմբաքանակի օպտիմալ չափի մոդելում խմբաքանակի արտադրության և արտադրանքի իրացման գործընթացները հաջորդաբար հերթափոխում էին միմյանց:

Ստորև նկարագրվող մոդելում արտադրանքը օգտագործվում է նաև նրա արտադրության ընթացքում:

Դիցուք ձեռնարկությունը տալիս է արտադրանք, որը հաջորդաբար մշակվում է P և D տարբեր արտադրողականությամբ երկու արտադրական հոսքագծերի վրա, ընդ որում $P > D$: Առաջին հոսքագծի վրա մշակվելուց հետո հերթական արտադրանքը փոխանցվում է երկրորդ հոսքագիծ՝ հետագա մշակման համար: Քանի որ $P > D$, ուստի առաջին հոսքագծի վրա որոշ ժամանակ անց մշակված արտադրանքի մի մասը կուտակվում է և պաշարվում, մինչև որ հնարավոր լինի շարունակել դրանց մշակումը երկրորդ հոսքագծի վրա: Առաջին հոսքագիծը, q միավոր արտադրանք տալուց հետո կանգնեցվում է, և այդ պահից սկսած աշխատում է միայն երկրորդ հոսքագիծը, որի վրա շարունակվում է պաշարված արտադրանքի մշակումը հավասարաչափ ինտենսիվությամբ: Երբ դրանց մշակումն ավարտվում է, և պաշարի մակարդակը դառնում է զրո, կրկին միացվում է առաջին հոսքագիծը, և այսպես շարունակ:

Նկար 6.7.-ում բերված է արտադրանքի խմբաքանակի պաշարների փոփոխության դինամիկան ժամանակի ընթացքում:



Նկար 6.7. Պաշարի փոփոխության դինամիկան արտադրական մատակարարումների մոդելում

Դիտարկվող մոդելում պաշարների կառավարման համակարգի ընդհանուր ծախսերը հավասար են տեխնոլոգիական գործընթացի կազմակերպման ծախքերի և պահպանման ծախսերի գումարին:

Դիցուք, յուրաքանչյուր t_s ժամանակահատվածում արտադրության կազմակերպման ծախքերը կազմում են c_s, այդ դեպքում դիտարկվող T

ժամանակահատվածում դրանք կկազմեն Dc_s/q:

Այժմ հաշվենք պաշարների պահպանության ծախսերը T ժամանակահատվածում: Որպեսզի որոշենք պաշարի միջին մակարդակը, դիտարկենք նրա փոփոխության ընթացքը մեկ առանձին t_s ժամանակահատվածում: Քանի որ առաջին հոսքագծի արտադրողականությունը հավասար է P, իսկ երկրորդինը՝ D $(P > D)$, նշանակում է t_s ժամանակահատվածում պաշարների համալրումը կկազմի

$$M = \frac{(P-D)}{T} t_s :$$

Մյուս կողմից, $\frac{P}{T} t_s = q,$ որտեղ q-ն խմբաքանակի չափն է: Հետևաբար, պաշարի առավելագույն մակարդակը պահեստում կկազմի $M = \frac{(P-D)}{P} q$, իսկ միջին մակարդակը՝

$$\frac{M}{2} = \frac{(P-D)}{2P} q :$$

Եթե նշանակենք միավոր արտադրանքի պահպանության ծախսերը ժամանակի միավորում՝ c_1-ով, ապա պահպանման ընդհանուր ծախսերը կկազմեն

$$\frac{(P-D)c_1 T}{2P} q :$$

Այսպիսով, պաշարների կառավարման համակարգի ընդհանուր ծախսերն են՝

$$C(q) = \frac{D}{q} c_s + \frac{(P-D)c_1 T}{2P} q :$$

$C(q)$ ծախսերի ֆունկցիայի նվազագույն արժեքը որոշվում է

$$-\frac{D}{q^2} c_s + \frac{(P-D)c_1 T}{2P} = 0$$

հավասարումից, այն է՝

$$q^* = \sqrt{\frac{2PDc_s}{(P-D)c_1 T}} :$$

Օրինակ 3: Ձեռնարկությունը թողարկում է մանրակներ, որոնց օրական պահանջարկը 60 միավոր է: Դիցուք ձեռնարկությունը օրական թողարկում է

110 մանրակ: Արտադրական մեկ ցիկլի կազմակերպման ծախքերն են 120 պ.դ.մ.: Մեկ մանրակի պահպանման ծախսերը կազմում են 6 պ.դ.մ./տարի: Գտնել պատվերի խմբաքանակի օպտիմալ չափը և արտադրության կազմակերպման տարեկան նվազագույն ծախքը:

Լուծում: Ըստ խնդրի պայմանների՝

$$D = 60 \text{ միավոր/օր} = 21900 \text{ միավոր/տարի},$$
$$\mathrm{P} = 110 \text{ միավոր/օր} = 40150 \text{ միավոր/տարի},$$
$$c_1 T = 6 \text{ պ.դ.մ./տարի},$$
$$c_s = 120 \text{ պ.դ.մ.:}$$

Խմբաքանակի օպտիմալ չափն է՝

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 40150 \cdot 21900 \cdot 120}{(40150 - 21900) \cdot 6}} \approx 1388 \text{ միավոր:}$$

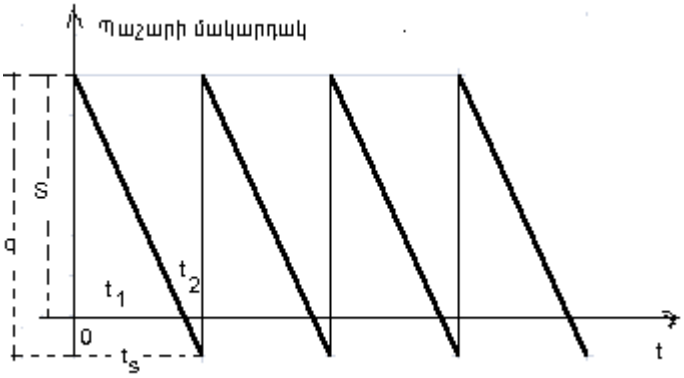
Արտադրության կազմակերպման տարեկան ծախքերն են.

$$\mathrm{C}(\mathrm{q}^*) = \frac{21900 \cdot 120}{1388} + \frac{(40150 - 21900) \cdot 6}{2 \cdot 40150} \cdot 1388 \approx 3786 \text{ պ.դ.մ.}$$

6.5. Մենարտադրանքային ստատիկ մոդել պակասուրդով

Ստորև դիտարկվող մոդելում ենթադրվում է, որ պահանջարկը գերազանցում է պաշարները, որի հետևանքով առաջանում է պակասուրդ, և դրա դիմաց վճարվում է համապատասխան չափով տուգանք:

Նկար 6.8.-ում պատկերված է նկարագրված իրավիճակը: Պաշարի մակարդակը պահեստում նվազում է հավասարաչափ ինտենսիվությամբ: t_1 ժամանակ անց պաշարի մակարդակը դառնում է զրո, և գոյանում է $q - S$ միավորի պակասուրդ, մինչև t_2 ժամանակ անց այն կհամալրվի q քանակությամբ: Պատվերի կատարումից հետո կազմակերպությունը փոխհատուցում է պակասուրդով պայմանավորված վնասները և վերականգնում է պաշարի մակարդակը: Յուրաքանչյուր $t_s = t_1 + t_2$ ժամանակահատվածի սկզբում պահեստում պաշարի մակարդակը կազմում է S միավոր:



Նկար 6.8. Պաշարի մակարդակի փոփոխությունը պակասուրդով մենարտադրանքային ստատիկ մոդելում

Նկար 6.8.-ից պարզ երևում է, որ

$$\frac{S}{q}=\frac{t_1}{t_s} \text{ և } \frac{q-S}{q}=\frac{t_2}{t_s},$$

որտեղից էլ՝

$$t_1=\frac{S}{q}t_s,$$

$$t_2=\frac{q-S}{q}t_s:$$

Պաշարի միջին մակարդակը t_1 ժամանակամիջոցում կազմում է $S/2$, ուստի նրա պահպանության ծախսերը կհավասարվեն $c_1t_1S/2$, որտեղ c_1-ը միավոր արտադրանքի պահպանության ծախսերն են ժամանակի միավորի ընթացքում: Միջին պակասուրդը և դրան համապատասխանող տուգանքը t_2 ժամանակամիջոցում կկազմեն համապատասխանաբար $\frac{q-S}{2}$ և $\frac{(q-S)c_2t_2}{2}$, որտեղ c_2-ը միավոր արտադրանքի պակասուրդի դեպքում տուգանքի մեծությունն է ժամանակի միավորի ընթացքում:

Այսպիսով, T ժամանակահատվածում պաշարների կառավարման համակարգի ընդհանուր ծախսերը կկազմեն.

$$C(q,S)=\frac{D}{q}\left(c_s+\frac{c_1t_1}{2}S+\frac{(q-S)c_2t_2}{2}\right),$$

որտեղ c_s – ը մեկ պատվերի ձևակերպման ծախսերն են:

Տեղադրելով t_1, t_2 և t_s-ի արժեքները, կստանանք

$$C(q,S)=-\frac{S^2c_1T}{2q}+\frac{(q-S)^2c_2T}{2q}+\frac{c_sD}{q}:$$

q^* և S^* լավագույն արժեքների որոշման համար կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial C}{\partial S}=\dfrac{Sc_1T}{q}-\dfrac{(q-S)c_2T}{q}=0\\[2ex] \dfrac{\partial C}{\partial q}=\dfrac{S^2c_1T}{2q^2}+\dfrac{4q(q-S)-2(q-S)^2}{4q^2}c_2T-\dfrac{c_sD}{q^2}=0\end{cases}$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$q^*=\sqrt{\frac{2Dc_s}{Tc_1}}\times\sqrt{\frac{c_1+c_2}{c_2}},$$

$$S^*=\sqrt{\frac{2Dc_s}{Tc_1}}\times\sqrt{\frac{c_2}{c_1+c_2}}=q^*\frac{c_2}{c_1+c_2}$$

Հետևաբար,

$$t_s^*=\frac{Tq^*}{D}=\sqrt{\frac{2Tc_s}{Dc_1}}\times\sqrt{\frac{c_1+c_2}{c_2}}:$$

Տեղադրելով q^* և S^* արժեքները ընդհանուր ծախսերի ֆունկցիայի մեջ՝ որոշ պարզեցումներից հետո կստանանք՝

$$C^*=C(q^*,S^*)=\sqrt{2DTc_1c_s}\times\sqrt{\frac{c_2}{c_1+c_2}}:$$

$\rho=\dfrac{c_2}{c_1+c_2}$ մեծությունը կոչվում է չբավարարված պահանջարկից առաջացած վնասների խտություն: Պարզ է, որ $\rho-$ի արժեքները գտնվում են $[0,1]$ միջակայքում: ρ մեծության արժեքը կարևոր կարգավորիչ դեր է խաղում այն խնդիրներում, որտեղ ստեղծվում է այնպիսի իրավիճակ, երբ պաշարները անբավարար չափով են կամ լիովին սպառված են:

Օրինակ 4: Դիցուք ձեռնարկությունը պարտավորվել է մեկ տարում պատվիրատուին մատակարարել 30000 միավոր արտադրանք: Միավոր արտադրանքի պահպանման ծախսերը մեկ ամսում կազմում են 0,2 պ.դ.մ.,

մեկ խմբաքանակի արտադրության ծախքերը՝ 300 պ.դ.մ., միավոր ապրանքի պակասուրդի դեպքում տուգանքը՝ 0,4 պ.դ.մ.:

Լուծում: T=12 ամիս, D=30000 միավոր, $c_1 = 0.2$ պ.դ.մ., $c_2 = 0.4$ պ.դ.մ., $c_s = 300$ պ.դ.մ.

Հաշվենք q^* և S^* արժեքները:.

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 30000 \cdot 300}{12 \cdot 0.2}} \cdot \sqrt{\frac{0.2 + 0.4}{0.4}} \approx 3354 \text{ միավոր,}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 30000 \cdot 300}{12 \cdot 0.2}} \cdot \sqrt{\frac{0.4}{0.2 + 0,4}} \approx 1667 \text{ միավոր,}$$

$$t_s^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 12 \cdot 300}{30000 \cdot 0.2}} \cdot \sqrt{\frac{0.2 + 0.4}{0.4}} = 0,6 \text{ ամիս=18 օր:}$$

Սպասվելիք գումարային ծախսերը ամբողջ ժամանակահատվածի համար կազմում են.

$$C^* = C(q^*, S^*) = \sqrt{2 \cdot 30000 \cdot 12 \cdot 0.2 \cdot 300} \cdot \sqrt{\frac{0.4}{0.2 + 0.4}} \approx 5366.59 \text{ պ.դ.մ.}$$

Ստանում ենք, որ լավագույն վարվելակերպի դեպքում սպասվելիք պակասուրդը ժամանակի յուրաքանչյուր պարբերության վերջում կկազմի

$q^* - S^* = 1687$ միավոր:

6.6. Զեղչով մատակարարումների մոդելը

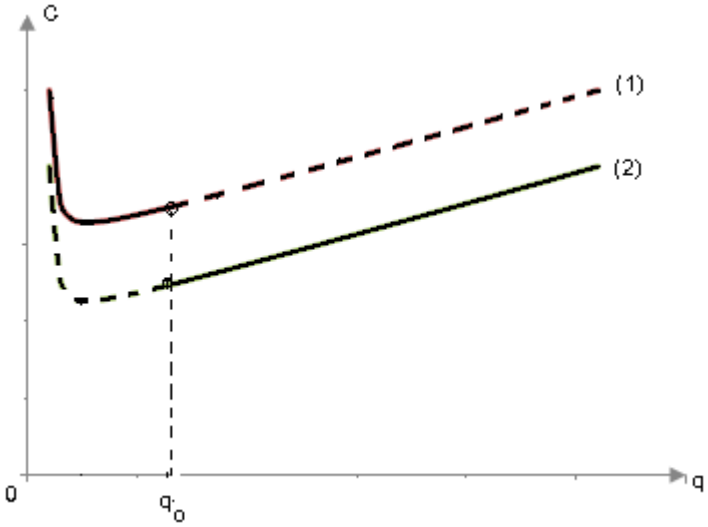
Մինչ այժմ դիտարկված մոդելներում ենթադրվում էր, որ պաշարի խմբաքանակի ձեռքբերման ծախսերը հաստատուն են: Սակայն, հաճախ, մեծաքանակ գնումների դեպքում արվում են գների զեղչեր:

Այժմ կդիտարկենք պաշարների կառավարման մի մոդել, որում հաշվի է առնված գների զեղչման հանգամանքը: Ենթադրենք q_0 – ն պաշարի այն մակարդակն է, որից սկսած արվում է գների զեղչ:

Պատվերի $q < q_0$ ծավալի դեպքում միավոր արտադրանքի գնման գինը հավասար է p_1, իսկ $q \geq q_0$ դեպքում՝ p_2, ընդ որում $p_1 > p_2$: Այս դեպքում T ժամանակահատվածում պաշարների կառավարման համակարգի $C(q)$ ընդհանուր ծախսերը ներառնում են գնման, պատվերների ձևակերպման, պահպանության ծախսերը, այն է՝

$$C(q)=\begin{cases} p_1 D+\dfrac{D}{q}s+\dfrac{c_1 T}{2}q, & q<q_0, \\ p_2 D+\dfrac{D}{q}s+\dfrac{c_1 T}{2}q, & q\geq q_0, \end{cases}$$

որտեղ $s-$ը մեկ պատվերի ձևակերպման ծախսերն են, իսկ c_1-ը՝ միավոր արտադրանքի պահպանության ծախսերը միավոր ժամանակամիջոցում: Նկար 6.9.-ում բերված է պաշարների համակարգի ընդհանուր ծախսերի կորը՝ կախված խմբաքանակի q չափից.



Նկար 6.9. Պաշարների համակարգի ընդհանուր ծախսերի կորը

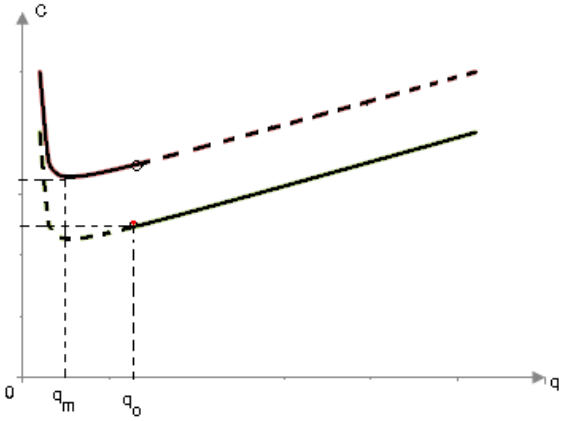
$C(q)$ ֆունկցիան $q=q_0$ կետում խզվող է, և նրա թռիչքը այդ կետում հավասար է $(p_1-p_2)D$:

(1) և (2) կորերը իրենց նվազագույն արժեքները ընդունում են q_m կետում, այն է՝

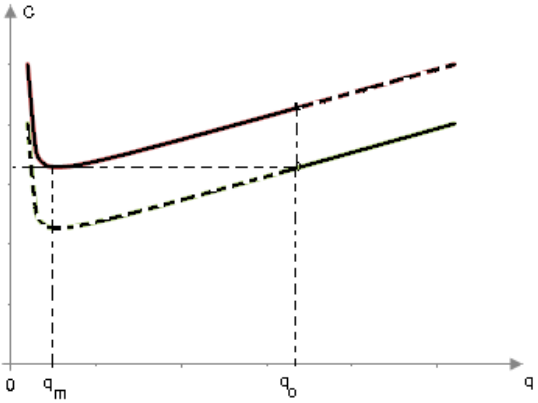
$$q_m=\sqrt{\frac{2Ds}{c_1 T}}:$$

(1) և (2) ծախսերի ֆունկցիաների տեսքից երևում է, որ պատվերի q^* լավագույն ծավալը կախված է q_0 կետի դիրքից: Նկար 6.10.-ում բերված են պատվերի լավագույն ծավալի որոշման երեք հնարավոր դեպքեր.

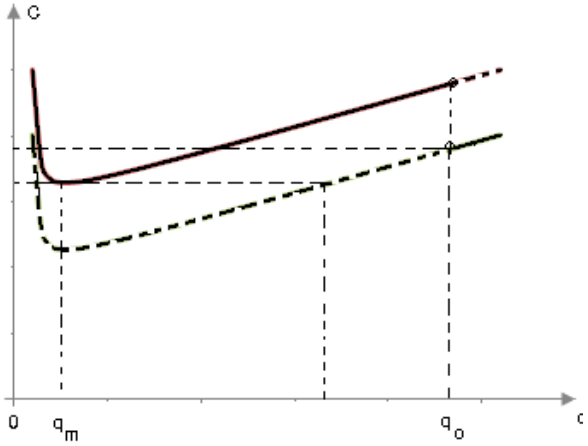
ա). $C(q_0) < C(q_m)$: Այս դեպքում $q^* = q_0$:



բ). $C(q_0) = C(q_m)$: Այս դեպքում $q^* = q_m = q_0$:



գ). $C(q_0) > C(q_m)$: Այս դեպքում $q^* = q_m$:



Նկար 6.10. Պատվերի լավագույն ծավալի որոշման երեք դեպքերը:

Օրինակ 5: Ապրանքի պահանջարկը տարեկան կազմում է 2200 միավոր: Պատվերի ձևակերպման ծախսերն են 12 պ.դ.մ., միավոր ապրանքի տարեկան պահպանության ծախսերը՝ 5 պ.դ.մ.: Ապրանքի միավորի գինը 6 պ.դ.մ. է: Այն դեպքում, երբ խմբաքանակի չափը մեծ է կամ հավասար 600 միավորից, արվում է գների զեղչ, և գնման գինը դառնում է 5 պ.դ.մ.: Գտնել պատվերի լավագույն չափը:

Լուծում: Ունենք D=2200 միավոր, S=12 պ.դ.մ., $c_1T = 5$ պ.դ.մ., $p_1 = 6$ պ.դ.մ., $q_0 = 600,\ p_2 = 5$:

$$C(q) = \begin{cases} 6 \cdot 2200 + \dfrac{2200}{q} \cdot 12 + \dfrac{q}{2} \cdot 5, & q < 600, \\ 5 \cdot 2200 + \dfrac{2200}{q} \cdot 12 + \dfrac{q}{2} \cdot 5, & q \geq 600: \end{cases}$$

Գտնենք լոկալ մինիմումի կետը.

$$q_m = \sqrt{\frac{2 \cdot 2200 \cdot 12}{5}} \approx 103:$$

Հաշվենք $C(q_m)$ և $C(q_0)$ արժեքները.

$$C(q_m) = 6 \cdot 2200 + \frac{2200}{103} \cdot 12 + \frac{600}{2} \cdot 5 \approx 13714$$

$$C(q_0) = 5 \cdot 2200 + \frac{2200}{600} \cdot 12 + \frac{103}{2} \cdot 5 \approx 1254:$$

Քանի որ $C(q_0) < C(q_m)$, ուստի $q^* = q_0 = 600$:

6.7. Մենարտադրանքային N փուլանոց դինամիկ մոդել

Դիտարկվող մոդելում ենթադրվում է, որ պահանջարկը հայտնի է, սակայն այն կարող է փոփոխվել ժամանակի ընթացքում փուլ առ փուլ, իսկ պաշարի մակարդակը պարբերաբար վերահսկվում է: Մատակարարման ուշացում թույլատրելի է, սակայն մոդելում պաշարի համալրումը կատարվում է ակնթարթորեն:

Կատարենք հետևյալ նշանակումները $i = 1, 2, \ldots, N$ փուլերի համար.

q_i - պատվիրվող արտադրանքի քանակը i-րդ փուլում,

r_i - արտադրանքի պահանջարկը i-րդ փուլում,

S_i - i-րդ փուլի սկզբում ելակետային պաշարը,

C_{1i} - i-րդ փուլից $(i+1)$-րդ փուլն անցնելիս միավոր պաշարի պահպանության ծախսերը,

C_{si} - պատվերի ձևակերպման ծախսերը,

$k_i(q_i)$ - սահմանային ծախսերի ֆունկցիան:

Դիցուք՝

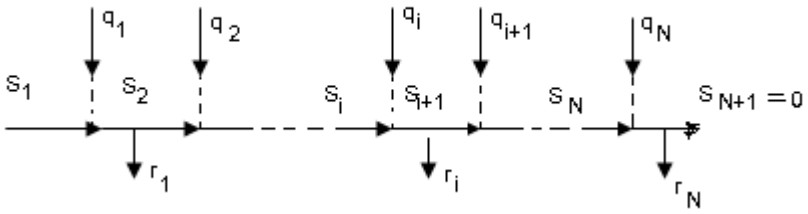
$$K_i(q_i) = \delta_i C_{si} + k_i(q_i)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0, \ q_i = 0, \ \left(i = \overline{1,N}\right) \\ 1, \ q_i > 0 \end{cases}$$

$k_i(q_i)$ ֆունկցիան հետաքրքրություն է ներկայացնում միայն այն դեպքում, երբ միավոր արտադրանքի գնման ծախսերը փոփոխվում են ժամանակի ընթացքում կամ գոյություն ունի գների զեղչում:

Պահանջվում է որոշել q_i $\left(i = \overline{1,N}\right)$ արժեքներն այնպես, որ մինիմացվեն պաշարների ձևակերպման, գնման և պահպանման ընդհանուր ծախսերը ըստ բոլոր փուլերի: Ենթադրվում է, որ պահպանության ծախսերը ուղիղ համեմատական են i-րդ փուլից $(i+1)$-րդ փուլն անցնող պաշարի ծավալին, այն է՝ $S_{i+1} = S_i + q_i - r_i$: Հետևաբար, պահպանության ծախսերը $i-$րդ փուլում կկազմեն $C_{1i}S_{i+1}$ միավոր (պարզության համար):

Խնդրի լուծման ընթացքը ներկայացնենք հետևյալ գծապատկերի միջոցով (նկար 6.11).



Նկար 6.11. Մենարտադրանքային N փուլանոց դինամիկ մոդելը:

Յուրաքանչյուր փուլ համապատասխանում է մեկ քայլի: Օգտագործելով դինամիկ ծրագրման անդրադարձ հավասարումը՝ $i-$րդ քայլում որոշենք համակարգի վիճակները որպես ելակետային S_i պաշարի ծավալ:

Դիցուք $f_i(S_i)$ ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է ընդհանուր նվազագույն ծախսերը $i, i+1, \ldots, N$ փուլերում: Անդրադարձ հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f_N(S_N) = \min_{q_n + S_N = r_N,\ q_N \geq 0} \{K_N(q_N)\},$$

$$f_i(Si) = \min_{r_i \leq q_i + S_i \leq r_1, \ldots + r_N,\ q_N \geq 0} \{K_i(qi) + C_{1i}(S_i + q_i - r_i) + f_{i+1}(S_i + q_i - r_i)\},\ \left(i = \overline{1, N}\right):$$

Ուղիղ անդրադարձ հավասարումը կարելի ստանալ i-րդ փուլի վիճակները որոշելով՝ որպես պաշարի ծավալը փուլի վերջում: Յուրաքանչյուր S_{i+1} մեծությունները պետք է բավարարեն հետևյալ սահմանափակումներին.

$$0 \leq S_{i+1} \leq r_{i+1} + \ldots + r_N :$$

Այսպիսով, սահմանային դեպքում պատվիրվող արտադրանքի ծավալը՝ q_i-ն $i = \left(i = \overline{1, N}\right)$ i-րդ փուլում կարող է լինել այնքան մեծ, որ S_{i+1} պաշարը բավարարի հաջորդ բոլոր փուլերի պահանջարկներին:

Դիցուք, $f_i(S_{i+1})$-ը նվազագույն ընդհանուր ծախսերն են $1, 2, \ldots, i$-րդ փուլերում, երբ հայտնի է i-րդ փուլի վերջում պաշարի S_{i+1} քանակը:

Այդ դեպքում անդրադարձային հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$f_1(S_2) = \min_{0 \leq q_1 \leq \eta + S_{i+1}} \{K_1(q_1) + C_{11} S_2\},$$

$$f_i(S_{i+1}) = \min_{0 \leq q_1 \leq \eta + S_{i+1}} \{K_i(q_i) + C_{1i} S_{i+1} + f_{i-1}(S_{i+1} + q_i - r_i)\},\ \left(i = \overline{1, N}\right):$$

Նկարագրված մոդելը պատկանում է **դինամիկ դետերմինացված** մոդելների դասին, ուստի նրա թվային լուծումը ստանալու համար կարելի է օգտագործել դինամիկ ծրագրավորման մեթոդը:

Դիտարկենք փոփոխվող պահանջարկով եռափուլ պաշարների կառավարման համակարգ: Խնդրի տվյալները բերված են հետևյալ աղյուսակում՝

Փուլ (i)	Պահանջարկը (r_i) (միավոր)	Պատվերի ձևակերպման ծախսերը (C_{2i}), դրամ	Պաշարի պահպահման ծախսերը (C_{1i}), դրամ
1	3	2	2
2	2	5	6
3	2	4	4

Համակարգում սկզբնական պաշարի չափը s_1=1, իսկ ապրանքի ձեռքբերման սահմանային ծախսերը որոշվում են հետևյալ բանաձևով.

$$K_i(q_i) = \begin{cases} 10q_i, & q_i \le 3 \\ 30 + 20(q_i - 3), & q_i > 3 \end{cases} :$$

Դիտարկվող ժամանակահատվածի վերջում ենթադրվում է պաշարներ չունենալ՝ s_4=0:

Խնդիրը հետևյալն է. Որոշել (q_1^*, q_2^*, q_3^*)՝ պատվերի օպտիմալ չափերը յուրաքանչյուր փուլի համար, այնպես որ ձեռքբերման $K_i(q_i)$, ձևակերպման C_{2i} և պահպահման C_{1i} գումարային ծախսերը բոլոր փուլերում միասին վերցված լինեն նվազագույնը:

Նշենք, որ հաշվողական տեսանկյունից այս խնդրի լուծման համար ուղիղ և հակադարձ մղման ալգորիթմները գրեթե համարժեք են, ուստի մենք կբերենք լուծման ուղիղ ալգորիթմը:

Ստորև բերված են ուղիղ մղման ալգորիթմով ստացված խնդրի լուծման արդյունքները :

Առաջին քայլ. Առաջին փուլի համար ունենք՝ $r_1 = 3$: Պարզ է, որ այս փուլի վերջում պաշարի չափը չի կարող գերազանցել $r_2 + r_3 = 4$: Հետևաբար՝ $0 \le s_2 \le 4$:

Քանի որ $s_1 = 1$, ապա առաջին փուլում q_1 պատվերի չափի նվազագույն արժեքը հավասար է 2, իսկ առավելագույնը՝ 6 :

s_2	$s_2 \cdot C_{11}$	$f_1(q_1/s_2) = K_1(q_1) + C_{21} + s_2 \cdot C_{11}$					Օպտիմալ լուծումը	
		$q_1 = 2$	3	4	5	6	$f_1(s_2)$	q_1^*
		22	32	52	72	92		
0	0	22+0					22	2
1	2		32+2				34	3
2	4			52+4			56	4
3	6				72+6		78	5
4	8					92+8	100	6

Երկրորդ քայլ. Երկրորդ փուլի համար ունենք՝ $r_2 = 2$, $0 \le s_3 \le 2$, $0 \le q_2 \le 4$:

s_3	$s_3 \cdot C_{12}$	$f_2(q_2/s_3) = K_2(q_2) + C_{22} + s_3 \cdot C_{12} + f_1(s_3 - r_2 + q_2)$					Օպտիմալ լուծումը	
		$q_2 = 0$	1	2	3	4	$f_2(s_3)$	q_2^*
		0	15	25	35	55		
0	0	$0+56$	$15+34$	$25+22$			47	2
1	6	$6+78$	$21+56$	$31+34$	$41+22$		63	3
2	12	$12+100$	$27+78$	$37+56$	$47+34$	$67+22$	81	3

Երրորդ քայլ. Երրորդ փուլի համար ունենք՝ $r_3 = 2$, $s_4 = 0$, $0 \le q_3 \le 2$:

s_4	$s_4 \cdot C_{13}$	$f_3(q_3/s_4) = K_3(q_3) + C_{23} + s_4 \cdot C_{13} + f_2(s_4 - r_3 + q_3)$			Օպտիմալ լուծումը	
		$q_3 = 0$	1	2	$f_3(s_4)$	q_3^*
		0	14	24		
0	0	$0+81$	$14+63$	$24+47$	71	2

Այսպիսով, պատվերների օպտիմալ չափերն են՝ $q_1^* = 2$, $q_2^* = 2$, $q_3^* = 2$ իսկ ընդհանուր ծախսերը՝ $f_{\min} = 71$:

ԳԼՈՒԽ 7

ՀԱՇՎԵԿՇՌԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

7.1. Բազմաճյուղ տնտեսության Լեոնտևի մոդելը

Մեզ հայտնի է, որ տնտեսական աճի հիմնական գործոններն են աշխատանքը և կապիտալը: Միևնույն ժամանակ գիտենք, որ արտադրության մակարդակը տնտեսության որոշ ճյուղերում, բացի թվարկված գործոններից, կախված է նաև օգտագործվող (մատակարարվող) հումքից ու նյութերից: Ստորև դիտարկվող Լեոնտևի մոդելը թույլ է տալիս բացատրել, թե արտադրական համակարգը ինչ եղանակով է ստեղծում վերջնական պահանջարկը՝ սպառման, ներդրումների և արտահանման բաղադրիչներով:

Տնտեսական համակարգը բնութագրվում է հորիզոնական կապերի բարդ կառուցվածքով և դրա արդյունավետ կառավարման համար անհրաժեշտ է

- համաձայնեցնել պահանջարկներն ու ռեսուրսներն ամբողջ տնտեսական համակարգի շրջանակներում;
- ապահովել առանձին ճյուղերի համաձայնեցված և համաչափ զարգացումը:

Յուրաքանչյուր ճյուղ միաժամանակ հանդես է գալիս մի կողմից՝ որպես որևէ արտադրատեսակ արտադրող և մյուս կողմից՝ որպես այլ ճյուղերում թողարկված արտադրատեսակների սպառող: Ճյուղերի միջև փոխադարձ կապի պատկերավոր ներկայացման համար օգտագործում են որոշակի տեսքի աղյուսակներ, որոնք կոչվում են **միջճյուղային հաշվեկշռի աղյուսակներ:** Նման աղյուսակների օգտագործման գաղափարն առաջին անգամ ձևակերպվեց սովետական տնտեսագետների աշխատություններում, իսկ առաջին աղյուսակը հրատարակվեց դեռևս 1926 թվականին ԽՍՀՄ Կենտրոնական վիճվարչությունում: Սակայն տնտեսական վերլուծության լայն հնարավորություններ ընձեռող միջճյուղային հաշվեկշռի առավել զարգացած մաթեմատիկական մոդելը հրատարակվեց ավելի ուշ՝ 1936 թ. ամերիկյան տնտեսագետ Վ. Լեոնտևի աշխատություններում:

Ենթադրենք տնտեսական համակարգը բաղկացած է **n** ճյուղերից, որոնցից յուրաքանչյուրը թողարկում է միայն մեկ տեսակի համասեռ արտադրատեսակ, ընդ որում տարբեր ճյուղեր թողարկում են տարբեր արտադրատեսակներ: Ակնհայտ է, որ ճյուղի վերաբերյալ նման պատկերացումը հանդի-

սանում է մտացածին, սակայն նման մոտեցումը հնարավորություն է տալիս առաջին դիտարկմամբ ուսումնասիրել տնտեսական համակարգի կառուցվածքը:

Հետագայում խոսքը գնալու է որոշակի **T** ժամանակահատվածի մասին (սովորաբար այդպիսի ժամանակահատված հանդիսանում է պլանային տարին):

Համարակալենք ճյուղերը $1,2,...,n$ թվերով: Նշանակենք x_i-ով **i**-րդ ճյուղում արտադրված ապրանքի ընդհանուր ծավալը, կամ, այլ խոսքով, i-րդ ճյուղի **համախառն արտադրանքը,** y_i-ով **i**-րդ ճյուղում արտադրված ապրանքի այն ծավալը, որը նախատեսված է ոչ արտադրողական ոլորտում սպառման համար (**վերջնական սպառման ծավալը**): Սովորաբար այն կազմում է ճյուղում թողարկված արտադրանքի մեծամասնությունը և ներառում է տնտեսությունում ստեղծվող պաշարները, բնակչության սպառումը, արտահանումը, հասարակական պահանջմունքների բավարարումը (կրթություն, գիտություն, առողջապահություն, ենթակառուցվածքների զարգացում և այլն):

Նշանակենք x_{ij}-ով **i**-րդ ճյուղի արտադրանքի այն քանակը, որը սպառվում է **j**-րդ ճյուղում արտադրության ընթացքում (**միջճյուղային հոսքեր**):

Այս բոլոր մեծությունները ներառենք հետևյալ աղյուսակի մեջ (Աղյուսակ 7.1):

Աղյուսակ 7.1

Ճյուղեր	Միջճյուղային հոսքեր	Վերջնական սպառում	Համախառն արտադրանք
	1 2 ...j ...n		
1	$x_{11}\ x_{12} \ldots x_{1j} \ldots x_{1n}$	y_1	x_1
2	$x_{21}\ x_{22} \ldots x_{2j} \ldots x_{2n}$	y_2	x_2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	$x_{n1}\ x_{n2} \ldots x_{nj} \ldots x_{nn}$	y_n	x_n

Աղյուսակի հաշվեկշռային բնույթը արտահայտվում է նրանում, որ ցանկացած $i = 1,2,...n$ համար պետք է բավարարվի

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_i \qquad (1)$$

հարաբերակցությունը: Սա նշանակում է, որ x_i համախառն թողարկումը ծախսվում է ($x_{i1}+x_{i2}+...+x_{in}$) արտադրական սպառման և y_i վերջնական սպառման վրա: **(1)** պայմաններն անվանենք **հաշվեկշռի պայմաններ**:

Բոլոր նշված մեծությունների չափման միավորները կարող են լինել **բնաիրային** (հատ, տոննա, կիլովատ/ժամ, խորանարդ մետր և այլն) կամ **արժեքային**: Որոշակիության համար հետագայում մենք նկատի կունենանք **արժեքային հաշվեկշիռ:**

Վ. Լեոնտևը, հետազոտելով ամերիկյան տնտեսությունը, ուշադրություն դարձրեց այն հանգամանքի վրա, որ $\frac{x_{ij}}{x_j}=a_{ij}$ մեծությունները տարիների ընթացքում չեն փոփոխվում, ինչը պայմանավորված է այդ ժամանակահատվածում օգտագործվող տեխնոլոգիաների հաստատուն լինելով:

Նշված հանգամանքը թույլ է տալիս անել հետևյալ ենթադրությունը՝ **j**-րդ ճյուղում ցանկացած x_j ծավալի արտադրանք թողարկելու համար անհրաժեշտ է ծախսել **i**-րդ ճյուղի արտադրանքից $a_{ij}x_j$ քանակություն, որտեղ a_{ij}-ն հաստատուն գործակից է: Այլ կերպ ասած՝ նյութական ծախքերը ուղիղ համեմատական են թողարկվող արտադրանքի ծավալին: Այս ենթադրությունը համարժեք է օգտագործվող տեխնոլոգիայի գծայնությանը: Գծայնության սկզբունքը տարածվում է նաև ծախսերի այլ տեսակների վրա, օրինակ աշխատավարձի, նորմատիվային շահույթի և այլն:

Այսպիսով ունենք՝

$$x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j,\ i,j=\overline{1,n}: \qquad (2)$$

a_{ij} **գործակիցները կոչվում են ուղղակի ծախսերի գործակիցներ:**

(2) գծայնության պայմանների դեպքում **(1)** համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} x_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+.....+a_{1n}x_n+y_1 \\ x_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+.....+a_{2n}x_n+y_2 \\ ..... \\ x_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+.....+a_{nn}x_n+y_n: \end{cases} \qquad (3)$$

Կամ մատրիցային գրառմամբ՝

$$\mathbf{x}=A\mathbf{x}+\mathbf{y}, \qquad (4)$$

որտեղ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_i \\ . \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ y_j \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}$ վեկտորը կոչվում է համախառն արտադրանքի վեկտոր, $\mathbf{y}$-ը՝ վերջնական սպառման վեկտոր, A-ն՝ ուղղակի ծախսերի գործակիցների մատրից, (3) համակարգը՝ միջճյուղային գծային հաշվեկշռի հավասարումներ: $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ վեկտորների և A մատրիցի հետ միասին $\mathbf{x}=A\mathbf{x}+\mathbf{y}$ հավասարումը կոչվում է Լեոնտևի մոդել:

Միջճյուղային հաշվեկշռի հավասարումները կարելի է օգտագործել պլանավորման նպատակով՝ **T** ժամանակահատվածում տրված **y** վերջնական սպառման վեկտորի համար որոշել **x** համախառն արտադրանքի վեկտորը: **Այլ կերպ ասած, անհրաժեշտ է լուծել հետևյալ խնդիրը՝ որոշել յուրաքանչյուր արտադրատեսակի թողարկման ծավալը վերջնական սպառման տրված մակարդակը ապահովելու համար:**

Մաթեմատիկորեն խնդիրը հետևյալն է: Տրված են ոչ բացասական տարրերով $n\times n$ չափանի $A=(a_{ij})$ մատրիցը և n չափանի **y** վեկտորը (այսուհետև կգրենք $A\geq 0$, $\mathbf{y}\geq 0$): Անհրաժեշտ է գտնել n չափանի այնպիսի $\mathbf{x}\geq 0$ վեկտոր, որը բավարարի $\mathbf{x}=A\mathbf{x}+\mathbf{y}$ մատրիցային հավասարմանը:

Դիտողություն 1: a_{ij} ուղիղ ծախսերի գործակիցները միջճյուղային հաշվեկշռի արժեքային արտահայտության դեպքում համընկնում են x_{ij} արժեքների հետ, երբ $x_j=1$ (պայմանական դրամական միավոր):

Այսպիսով, a_{ij} -ն **j**-րդ ճյուղի արտադրանքի մեկ դրամական միավորում ներդրված **i**-րդ ճյուղում թողարկված արտադրանքի արժեքն է: Այստեղից երևում է, որ արժեքային մոտեցումը բնաիրայինի հետ համեմատած ավելի լայն հնարավորություններ է ընձեռում, քանի որ այսպիսի մոտեցման դեպքում կարելի է «մաքուր» ճյուղերի փոխարեն դիտարկել բազմաարտադրանքային ճյուղեր և խոսել մի ճյուղի արժեքային ներդրման մասին մի այլ ճյուղում մեկ դրամական միավորի արտադրանք թողարկելու համար:

7.1.1. Լեոնտևի արդյունավետ մոդելներ

Սահմանում. $A \geq 0$ մատրիցը կոչվում է **արդյունավետ**, եթե կամայական $\mathbf{y} \geq 0$ վեկտորի համար $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{y}$ համակարգն ունի $\mathbf{x} \geq 0$ լուծում:

Այդ դեպքում $A \geq 0$ մատրիցով որոշվող Լեոնտևի մոդելը նույնպես կոչվում է արդյունավետ:

Այսպիսով, Լեոնտևի մոդելը արդյունավետ է, եթե ցանկացած $\mathbf{y} \geq 0$ վերջնական սպառման վեկտոր կարելի է ստանալ ընտրելով համապատասխան $\mathbf{x} \geq 0$ համախառն արտադրանքի վեկտորը:

Պարզվում է, որ կարիք չկա պահանջել $\mathbf{x} \geq 0$ ոչ բացասական լուծման գոյությունը ցանկացած $\mathbf{y} \geq 0$ վերջնական սպառման վեկտորի համար: Բավական է, որ այդպիսի լուծում գոյություն ունենա գոնե մեկ $\mathbf{y} > 0$ վերջնական սպառման վեկտորի համար:

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը (բերվում է առանց ապացուցման):

Թեորեմ 1. (արդյունավետության առաջին հայտանիշ):

Եթե $A \geq 0$ և որևէ $\mathbf{y} > 0$-ի համար $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{y}$ համակարգն ունի $\mathbf{x} \geq 0$ լուծում, ապա A մատրիցն արդյունավետ է:

Դիտողություն 2: Նկատենք, որ իրականում $\mathbf{x} > 0$, քանի որ $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{y}$ և $A \geq 0$, $\mathbf{y} > 0$, $\mathbf{x} \geq 0$:

$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}$ մատրիցային հավասարումը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{y}, \qquad (5)$$

որտեղ E միավոր մատրից է: Պարզ է, որ եթե գոյություն ունի $(E - A)^{-1}$ հակադարձ մատրիցը, ապա

$$\mathbf{x} = (E - A)^{-1}\mathbf{y}: \qquad (6)$$

Ստորև ձևակերպենք ևս մեկ թեորեմ, որը տալիս է արդյունավետության ավելի լավ հայտանիշ, քան թեորեմ 1-ը (բերվում է առանց ապացուցման):

Թեորեմ 2. (արդյունավետության երկրորդ հայտանիշ):

$A \geq 0$ մատրիցը արդյունավետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $(E - A)^{-1}$ մատրիցը գոյություն ունի և ոչ բացասական է:

Թեորեմ 2 –ը պարզաբանենք օրինակներով (երկու ճյուղի համար):

Օրինակ 1: Տրված է ուղղակի ծախսերի $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ մատրիցը և

վերջնական սպառման $y=\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$ վեկտորը: Հետազոտել A մատրիցի արդյունավետությունը և եթե այն արդյունավետ է, ապա գտնել համախառն արտադրանքի $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ վեկտորը և վերականգնել միջճյուղային հոսքերի $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$ մատրիցը:

Լուծում: Տրված է $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3\\0,4 & 0,6\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$:

$$E-A=\begin{pmatrix}0,8 & -0,3\\-0,4 & 0,4\end{pmatrix},\ |E-A|=0,32-0,12=0,2\neq 0\ \Rightarrow$$

$\exists(E-A)^{-1}$:

Հաշվարկենք (E-A) մատրիցի հակադարձ մատրիցը.

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1,5\\2 & 4\end{pmatrix}\geq 0,$$

հետևաբար A մատրիցն արդյունավետ է (ըստ արդյունավետության երկրորդ հայտանիշի):

Օգտվենք (6) մատրիցային հավասարումից՝

$$\mathbf{x}=(E-A)^{-1}\mathbf{y}=\begin{pmatrix}2 & 1,5\\2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\50\end{pmatrix}\quad:$$

Օգտվենք (2) բանաձևից՝ $x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j$ $(i,j=\overline{1,n})$, կստանանք՝

$$x_{11}=a_{11}\cdot x_1=0,2\cdot 25=5$$
$$x_{12}=a_{12}\cdot x_2=0,3\cdot 50=15$$
$$x_{21}=a_{21}\cdot x_1=0,4\cdot 25=10$$
$$x_{22}=a_{22}\cdot x_2=0,6\cdot 50=30:$$

Լրացնենք աղյուսակ 1-ի տեսքի աղյուսակ այս օրինակի համար (Աղյուսակ 7.2):

Ճյուղեր	Միջճյուղային հոսքեր		Վերջնական սպառում	Համախառն արտադրանք
	1	2		
1	5	15	5	25
2	10	30	10	50

Այսպիսով, առաջին ճյուղը T ժամանակում տալիս է 25 միավոր արտադրանք, որից 5 միավորը օգտագործվում է հենց իր ճյուղում, 15 միավորը երկրորդ ճյուղում, իսկ 5 միավորը հատկացվում է վերջնական սպառման: Նույն կերպ կարելի է բացատրել նաև աղյուսակի երկրորդ տողը:

Օրինակ 2: Այժմ ենթադրեք, որ նախորդ օրինակում ճյուղերի հզորությունները սահմանափակ են՝ առաջին ճյուղում արտադրանքի ծավալը չի գերազանցում 15, իսկ երկրորդ ճյուղում՝ 25 միավորից:

Հասկանալի է, որ այդ դեպքում $y = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ վերջնական սպառումը ամբողջությամբ չի բավարարվի և տրամաբանական կլինի ձևակերպել հետևյալ խնդիրը. որոշել այն առավելագույն վերջնական սպառումը, որը հնարավոր է ապահովել կիրառվող տեխնոլոգիաների պայմաններում:

Նշանակենք α - ով վերջնական սպառման այն մասը, որը հնարավոր է ապահովել տրված $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ ուղղակի ծախսերի մատրիցի դեպքում և գտնենք առավելագույն α -ն $(0 < \alpha < 1)$:

$\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{y}$ համակարգից կստանանք՝ $x_1 = 25\alpha$, $x_2 = 50\alpha$, իսկ

$$\begin{cases} x_1 = 25\alpha \le 15 \\ x_2 = 50\alpha \le 25 \end{cases}$$

համակարգից՝ $\alpha \le 1/2$:

Ուստի, α -ի առավելագույն արժեքը կլինի $1/2$: Հետևաբար, համակարգում կիրառվող տեխնոլոգիաների պայմաններում առավելագույնը հնարավոր է ապահովել տրված $y = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ վերջնական սպառման վեկտորի երրորդ մասը՝ $\alpha\mathbf{y} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$:

Շարունակենք Լեոնտևի մոդելի արդյունավետության վերլուծությունը և ձևակերպենք արդյունավետության ևս մեկ հայտանիշ (բերվում է առանց ապացուցման):

Թեորեմ 3. (արդյունավետության երրորդ հայտանիշ):

$A \geq 0$ մատրիցը արդյունավետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ մատրիցների $E + A + A^2 + A^3 + ...$ անվերջ շարքը զուգամետ է:

Բարձրագույն մաթեմատիկայի դասընթացից հայտնի է, որ ցանկացած A քառակուսի մատրիցի համար՝ եթե մատրիցների $(E + A + A^2 + A^3 + ...)$ անվերջ շարքը զուգամիտում է, ապա նրա գումարը $(E - A)^{-1}$ մատրիցն է:

Այսպիսով, A մատրիցը արդյունավետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + ...: \qquad (7)$$

Այս հայտանիշը շատ դեպքերում կարելի է օգտագործել A մատրիցի արդյունավետությունը ստուգելու համար: Օրինակ, օգտագործելով երրորդ հայտանիշը, ցույց տանք, որ եթե A մատրիցի ցանկացած սյունակի տարրերի գումարը փոքր է մեկից, ապա A մատրիցը արդյունավետ է: Նշանակենք **q-**ով նշված գումարներից առավելագույնը՝ **q<1:** Պարզ է, որ A մատրիցի տարրերից ոչ մեկը չի գերազանցում **q-** ն: Մատրիցների բազմապատկման կանոններից կստանանք, որ A^2 մատրիցի տարրերն էլ չեն գերազանցի **q²՝**

$$(A^2)_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + ... + a_{in}a_{nj} \leq q(a_{i1} + ... + a_{nj}) \leq q^2:$$

Նման ձևով կստանանք, որ A^3 մատրիցի տարրերն էլ չեն գերազանցում **q³** և այլն:

Այստեղից էլ հետևում է, որ $E + A + A^2 + A^3 + ...$ մատրիցների շարքը զուգամիտում է, ուստի A մատրիցը արդյունավետ է:

Նման ձևով ապացուցվում է, որ, եթե $A \geq 0$ մատրիցի ցանկացած տողի տարրերի գումարը փոքր է մեկից, ապա A մատրիցն արդյունավետ է:

Օրինակ 3: Ցույց տալ, որ $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$ մատրիցը արդյունավետ է: Ստուգելու համար բավական է հաշվել սյունակների տարրերի գումարը և

համոզվել, որ դրանք մեկից փոքր են: Հետևաբար A մատրիցն արդյունավետ է:

7.1.2. Լրիվ ծախսերի վեկտոր

Դիցուք ուղղակի ծախսերի A մատրիցն արդյունավետ է: Համաձայն թեորեմ 2–ի տեղի ունի $(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots$ հավասարությունը, որն ունի հետաքրքիր տնտեսագիտական մեկնաբանություն: (6) և (7) պայմաններից հետևում է, որ

$$\mathbf{x} = (E-A)^{-1}\mathbf{y} = (E + A + A^2 + A^3 + \ldots)\mathbf{y} = \mathbf{y} + A\mathbf{y} + A^2\mathbf{y} + A^3\mathbf{y} + \ldots : \quad (8)$$

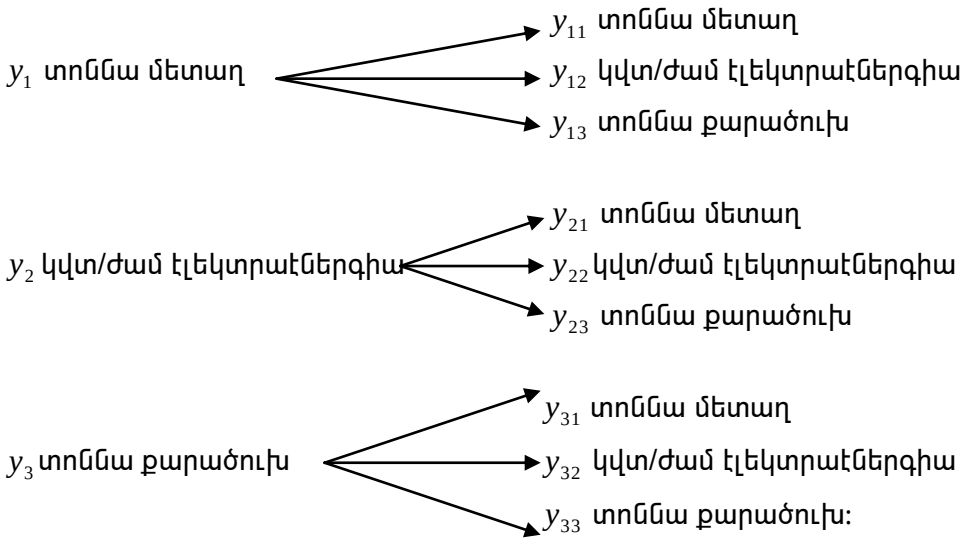
Այս ներկայացումից երևում է, որ $\mathbf{y}$ վերջնական սպառման վեկտորն ապահովող $\mathbf{x}$ համախառն արտադրանքի վեկտորը ստանալու համար անհրաժեշտ է արտադրել նախ $\mathbf{y}$ վեկտորով նկարագրվող արտադրատեսակների հավաքածուն: Բայց $\mathbf{y}$ վեկտորը արտադրելու համար անհրաժեշտ է ծախսել (իսկ դա նշանակում է նախապես արտադրել) $A\mathbf{y}$ վեկտորը, որն արտադրելու համար նույնպես պետք է կատարել $A(A\mathbf{y})$ վեկտորով նկարագրվող ծախսեր (նախապես արտադրել), և այսպես շարունակ: Ինչ-որ տեղից սկսած այս ծախսերը դառնում են անվերջ փոքր և այլևս չեն դիտարկվում: Այսպիսով, $\mathbf{x}$ համախառն արտադրանքը՝ y, $A\mathbf{y}$, $A^2\mathbf{y}$, $A^3\mathbf{y}$ ... գումարելիների գումարն է, ինչը և արտահայտում է (8) հավասարությունը: Այս մեկնաբանությանը համապատասխան՝ $\mathbf{y} + A\mathbf{y} + A^2\mathbf{y} + A^3\mathbf{y} + \ldots$ գումարն անվանում են **լրիվ ծախսերի վեկտոր,** իսկ (8) հավասարությունից ստացված եզրակացությունը ձևակերպում հետևյալ կերպ՝ **$\mathbf{x}$ համախառն արտադրանքի վեկտորը համընկնում է լրիվ ծախսերի վեկտորի հետ:**

Ասվածը պարզաբանելու համար դիտարկենք հետևյալ օրինակը: Դիտարկենք երեք ճյուղից բաղկացած պայմանական տնտեսություն:

1) մետալուրգիա,
2) էլեկտրաէներգիայի արտադրություն,
3) քարածխի արտադրություն:

$\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ վերջնական արդյունքը ստանալու համար անհրաժեշտ է արտադրել y_1 տոննա մետաղ y_2 կվտ/ժամ էլեկտրաէներգիա և y_3 տոննա քարածուխ: Սակայն y_1 տոննա մետաղ արտադրելու համար անհրաժեշտ է ծախսել, այսինքն նախապես արտադրել, մետաղի, էլեկտրաէներգիայի և

քարածխի որոշակի քանակություններ: Նույնը վերաբերվում է y_2 կվտ/ժամ էլեկտրաէներգիայի և y_3 տոննա քարածխի արտադրությանը (տե՛ս նկար 7.1):



Նկար 7.1

Իր հերթին, y_{11} տոննա մետաղ արտադրելու համար նույնպես անհրաժեշտ է արտադրել, մետաղի, էլեկտրաէներգիայի և քարածխի որոշակի քանակություններ և այլն: Այսպիսով, **x** համախառն արտադրանքի վեկտորը իրենից ներկայացնում է 0 կարգի (**y** վեկտորը), առաջին կարգի (A**y** վեկտորը), երկրորդ կարգի (A^2**y**) և այսպես շարունակ այլ ծախսերի գումար:

7.1.3 Հավասարակշռված գների մոդելը

Այժմ դիտարկենք այն հաշվեկշռային մոդելը, որ Լեոնտևի մոդելի երկակին է, այսպես կոչված **հավասարակշռված գների մոդելը**: Դիցուք A-ն ուղիղ ծախսերի մատրիցն է, $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ համախառն արտադրանքի վեկտորը: Նշանակենք p_i-ով **i**-րդ ճյուղի միավոր արտադրանքի գինը, իսկ $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)^T$ անվանենք գների վեկտոր: Այդ դեպքում **i**-րդ ճյուղի եկամուտը հավասար կլինի $p_i x_i$: Իր եկամտի մի մասը **i**-րդ ճյուղը ծախսում է այլ ճյուղերի արտադրանքի գնման վրա: Այսպես օրինակ, **i**-րդ ճյուղում

միավոր արտադրանք թողարկելու համար անհրաժեշտ է գնել a_{ji} միավոր j-րդ արտադրատեսակից: Այդ արտադրատեսակների գնման վրա ծախսվում է $a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + ... + a_{ni}p_n$ գումար: Հետևաբար, x_i քանակությամբ **i**-րդ արտադրատեսակից թողարկելու համար անհրաժեշտ է ծախսել x_i գումար: **i**-րդ ճյուղի եկամտի մնացած մասը, որը կոչվում է **ավելացված արժեք,** նշանակենք V_i–ով: Եկամտի այդ մասը ծախսվում է աշխատավարձի և հարկերի վճարման, ինչպես նաև ձեռնարկատիրական շահույթի և ներդրումների վրա:

Այսպիսով, տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը

$$p_i x_i = x_i \cdot (a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + ... + a_{ni}p_n) + V_i :$$

Այս հավասարությունը x_i >**0** վրա բաժանելուց հետո կստանանք՝

$$p_i = a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + ... + a_{ni}p_n + v_i , \qquad (9)$$

որտեղ $v_i = \dfrac{V_i}{x_i}$-ն ավելացված արժեքի նորմն է կամ **i**-րդ ճյուղում միավոր արտադրանքին բաժին ընկնող ավելացված արժեքը $(i = 1,2,...,n)$:

(9) հավասարումները կարելի է գրել մատրիցային տեսքով՝

$$\mathbf{p} = A^T\mathbf{p} + \mathbf{v} , \qquad (10)$$

որտեղ $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ ավելացված արժեքների նորմերի վեկտորն է:

Ինչպես տեսնում ենք, ստացված **(10)** մատրիցային հավասարումը նման է Լեոնտևի մոդելի համակարգին այն տարբերությամբ, որ **x** վեկտորը փոխարինված է **p**-ով, **y**-ը՝ **v**-ով, իսկ A մատրիցը՝ A^T-ով:

Հավասարակշռված գների մոդելի **(10)** հավասարումը կարելի է օգտագործել տրված **v** ավելացված արժեքների նորմերի վեկտորի համար հավասարակշռված գների **p** վեկտորը որոշելու համար: **Այլ կերպ ասած, անհրաժեշտ է լուծել հետևյալ խնդիրը՝ որոշել յուրաքանչյուր արտադրատեսակի հավասարակշռված գինը ավելացված արժեքների տրված նորմերը ապահովելու համար:**

Մաթեմատիկորեն խնդիրը հետևյալն է: Տրված են ոչ բացասական տարրերով $n \times n$ չափանի $A = (a_{ij})$ մատրիցը և n չափանի **v** վեկտորը ($A \geq 0$, **y** ≥ 0): Անհրաժեշտ է գտնել n չափանի այնպիսի **p** ≥ 0 վեկտոր, որը բավարարի **p** $= A^T$**p** + **v** մատրիցային հավասարմանը:

Հավասարակշռված գների մոդելը հնարավորություն է տալիս ավելացված արժեքների նորմերի հիման վրա կանխատեսել ճյուղերի արտադրատեսակների գները, ինչպես նաև գների փոփոխությունը և ինֆլյացիայի մակարդակը, պայմանավորված ճյուղերից որևէ մեկում գների փոփոխությամբ:

Ասվածը պարզաբանելու համար բերենք օրինակ:

Օրինակ 4: Դիցուք տրված են ուղղակի ծախսերի $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ մատրիցը և $\mathbf{v} = (4,10)$ ավելացված արժեքների նորմերի վեկտորը: Գտնենք հավասարակշռված գները:

(9) համակարգից կստանանք՝ $\mathbf{p} = (E - A^T)^{-1}\mathbf{v}$:

Քանի որ $(E - A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1,5 & 4 \end{pmatrix}$, ապա հավասարակշռված գների վեկտորը կլինի՝ $\mathbf{p} = (E - A^T)^{-1}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1,5 & 4 \end{pmatrix}(4, \quad 10) = \begin{pmatrix} 28 \\ 46 \end{pmatrix}$:

Այսպիսով, առաջին արտադրատեսակի գինը հավասար է 28, իսկ երկրորդ արտադրատեսակի գինը՝ 46 պայմանական դրամական միավորի:

Ենթադրենք այժմ, որ առաջին ճյուղում ավելացված արժեքի նորմը փոփոխվեց և $\mathbf{v} = (5,10)$: Հաշվելով հավասարակշռված գները, կստանանք $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 30 \\ 47,5 \end{pmatrix}$:

Ինչպես տեսնում ենք, առաջին ճյուղում ավելացված արժեքի նորմի փոփոխությունը առաջացրեց գների աճ՝ առաջին ճյուղում 7,1 % և երկրորդ ճյուղում 3,3 %:

7.2. Միջազգային առևտրի մոդելը

Միջազգային առևտրի մոդելը հնարավորություն է տալիս պատասխանել հետևյալ հարցին. ինչպիսի՞ն պետք է լինեն միմյանց հետ առևտուր անող երկրների բյուջեների հարաբերակցությունները, որպեսզի առևտուրը լինի փոխշահավետ: Այսինքն, յուրաքանչյուր մասնակից երկրի համար առևտրային հաշվեկշռի էական պակասուրդ չլինի: Դիտարկվող խնդիրը

բավականին կարևոր է, քանի որ երկրների միջև առևտրային պակասուրդը առաջացնում է այնպիսի ոչ ցանկալի երևույթներ, ինչպիսիք են ներմուծման և արտահանման թույլտվությունը և դրանց սահմանափակումը, մաքսատուրքերի աճը և նույնիսկ առևտրային պատերազմները:

Դիտարկենք ***n*** երկրներ, որոնք առևտուր են անում միմյանց հետ և ենթադրենք, որ յուրաքանչյուր երկրի առևտրային բյուջեն ծախսվում է կամ իր երկրի ներսում ապրանքներ գնելու կամ ***n-1*** այլ երկրներից ապրանքներ ներմուծելու համար: Համարակալենք երկրները ***1,2,...,n*** թվերով: x_i-ով նշանակենք i-րդ երկրի առևտրային բյուջեն, իսկ a_{ij}-ով i-րդ երկրի առևտրային բյուջեի այն մասը, որը հատկացվում է j-րդ երկրի հետ առևտուր անելու (ապրանքներ ներմուծելու) համար ($i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,n$): Ենթադրենք, որևէ ***T*** ժամանակի ընթացքում (օրինակ մեկ տարում) a_{ij} թվերը հաստատուն են:

$A = (a_{ij})$ $n \times n$ չափանի մատրիցը անվանենք **առևտրի կառուցվածքային (կամ փոխանակման) մատրից:** Պարզ է, որ $0 \le a_{ij} \le 1$ **և** A մատրիցի **յուրաքանչյուր** սյունակի տարրերի գումարը հավասար է 1-ի՝ $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ ($j = 1,2,...,n$):

x $= (x_1, x_2,..., x_n)^T$ դրական վեկտորը անվանենք **բյուջետային վեկտոր**:

Խնդիրը կայանում է հետևյալում՝ տրված առևտրային մատրիցի համար ինչպիսին պետք է լինեն $x_1, x_2,..., x_n$ բյուջեների հարաբերակցությունները, որպեսզի յուրաքանչյուր երկրի համար առևտուրը լինի փոխշահավետ:

Մեկ տարի առևտուր անելուց հետո i-րդ երկիրը կստանա $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$ եկամուտ: Որպեսզի առևտուրը լինի հավասարակշռված և փոխշահավետ, բնական է պահանջել, որ յուրաքանչյուր երկիր պակասուրդ չտա, այսինքն՝

$$p_i \ge x_i, \ i = 1,2,...,n: \qquad (1)$$

Գումարենք այս n անհավասարումները.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ge \sum_{i=1}^{n} x_i : \qquad (2)$$

Տեղադրենք p_i-երի արժեքները և ձախ մասը խմբավորենք ըստ x_i փոփոխականների

$$x_1(a_{11}+a_{21}+...+a_{n1})+x_2(a_{12}+a_{22}+...+a_{n2})+...+x_n(a_{1n}+a_{2n}+...+a_{nn})\geq\sum_{i=1}^{n}x_i:$$

$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=1$ պայմանից հետևում է, որ անհավասարության ձախ մասում յուրաքանչյուր փակագիծ հավասար է մեկի, հետևաբար ստացվեց.

$$x_1+x_2+...+x_n\geq x_1+x_2+...+x_n: \qquad (3)$$

(3)-ը ճիշտ է այն և միայն այն դեպքում, եթե տեղի ունի հավասարություն, հետևաբար **(1)** անհավասարումներից ոչ մեկը խիստ չէ:

Այսպիսով ստացանք

$$p_i=x_i,\ i=1,2,...,n, \qquad (4)$$

որի տնտեսագիտական իմաստը հետևյալն է՝ երկրների միջև առևտուրը կլինի փոխշահավետ այն և միայն այն դեպքում, եթե յուրաքանչյուր երկրի առևտրի համար հատկացված և կատարված բյուջետային ծախսերը հավասար են առևտրից ստացված ընդհանուր գումարային եկամտին:

(4)-ը համարժեք է $A\mathbf{x}=\mathbf{x}$ մատրիցային հավասարմանը: Այսպիսով, որպեսզի առևտուրը լինի փոխշահավետ, անհրաժեշտ է տրված $A=(a_{ij})$ $n\times n$ չափանի առևտրային մատրիցի համար գտնել այնպիսի $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ դրական վեկտոր, որը բավարարի

$$A\mathbf{x}=\mathbf{x} \qquad (5)$$

կամ

$$(A-E)\mathbf{x}=0 \qquad (6)$$

մատրիցային հավասարումներին, որտեղ E-ն $n\times n$ չափանի միավոր մատրից է:

Վերը ասածները պարզաբանելու համար դիտարկենք օրինակ երեք երկրների համար, որոնց պայմանականորեն անվանենք ԱՄՆ, Գերմանիա և ՄԱԷ (Միացյալ արաբական էմիրաթներ):

Դիցուք առևտրային մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{ԱՄՆ} & \text{Գերմանիա} & \text{ՄԱԷ} \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{ԱՄՆ} \\ \text{Գերմանիա} \\ \text{ՄԱԷ} \end{array} \end{array}:$$

Այսինքն, ԱՄՆ-ը իր առևտրային բյուջեի **1/2** մասը հատկացնում է իր երկրի ներսում ապրանքներ գնելու համար, **1/4** -ը՝ Գերմանիայից, իսկ **1/4** –ն էլ էմիրաթներից ապրանքներ գնելու (ներմուծելու համար): Գերմանիան իր առևտրային բյուջեն հավասարաչափ է բաշխում իր երկրի ներսում և ԱՄՆ-ի ու ՄԱԷ-ի հետ առևտուր անելու համար, իսկ ՄԱԷ-ը իր առևտրային բյուջեի կեսը հատկացնում է ԱՄՆ-ի, կեսը՝ Գերմանիայի հետ առևտրի համար և իր երկրի ներսում ապրանքներ չի գնում: Ուշադրություն դարձնենք, որ A մատրիցի յուրաքանչյուր սյունակի տարրերի գումարը հավասար է մեկի:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A-E=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{3}&-1\end{pmatrix}:$$

Հետևաբար (**6**) մատրիցային հավասարումը կընդունի այսպիսի տեսք՝

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{3}&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

որտեղ $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$ վեկտորը փնտրվող բյուջետային վեկտորն է:

Դժվար չէ գտնել այս մատրիցային հավասարման (կամ երեք անհայտներով երեք հավասարումների համակարգի) ընդհանուր լուծումը՝

$$\begin{cases}x_1=2x_3\\x_2=\frac{3}{2}x_3\end{cases}$$

կամ $\mathbf{x}=(4,3,2)^T\cdot c$, որտեղ $c\in R$, իսկ մեր խնդրի համար $c>0$:

Այսպիսով ստացանք՝ նշված երեք երկրների միջև առևտուրը կլինի հավասարակշռված և փոխշահավետ այն և միայն այն դեպքում, եթե նրանց առևտրային բյուջեները բավարարեն հետևյալ պայմանին՝

$$x_1:x_2:x_3=4:3:2:$$

Մասնավորապես, օրինակ եթե ԱՄՆ–ը միջազգային առևտրի համար հատկացնում է **12** մլն. դոլար, ապա Գերմանիան պետք է հատկացնի **9** մլն., իսկ ՄԱԷ-ը **6** մլն. դոլար:

Քանի որ ցանկացած երկրի առևտրային բյուջեն դրական է՝ $x_i > 0$ $(i = 1,2,...,n)$, ապա մեզ հետաքրքրում են **(6)** մատրիցային հավասարման դրական լուծումները՝ $\mathbf{x} > 0$: Այդ իսկ պատճառով ուսումնասիրենք, թե $A = (a_{ij})$ $n \times n$ չափանի ոչ բացասական տարրերով առևտրային մատրիցի համար արդյոք միշտ գոյություն ունի՞ $\mathbf{x} > 0$ վեկտոր, որը բավարարում է **(6)** –ին:

Բերենք հանրահաշվի դասընթացից հայտնի որոշ փաստեր, որոնք կօգնեն պատասխանելու վերը նշված հարցին:

Թեորեմ 1. (Ֆրոբենիուս-Պերրոնի թեորեմի հետևանք, որը բերվում է առանց ապացուցման**):** Եթե A առևտրային մատրիցի բոլոր տարրերը դրական են, ապա $(A - E)\mathbf{x} = 0$ հավասարումը միշտ ունի դրական լուծում:

Սահմանում 1: Կասենք, որ i և j երկրները միացված են i-ից j ներմուծման շղթայով, եթե գոյություն ունի i–ում սկսվող և j-ում վերջացող երկրների շղթա, որում յուրաքանչյուր հաջորդ երկիր ներմուծում է ապրանքներ նախորդ երկրից:

Բերենք օրինակ, սահմանումը լավ հասկանալու համար:

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

1 և **2** երկրները միացված են $1 \to 4 \to 3 \to 2$ շղթայով:

Թեորեմ 2. (առանց ապացուցման**):** Եթե A առևտրային մատրիցն այնպիսին է, որ ցանկացած երկու i և j երկրներ միացված են i-ից j ներմուծման շղթայով, ապա **(6)** հավասարումը միշտ ունի դրական լուծում:

Դիտողություն 1: Եթե A առևտրային մատրիցում հնարավոր է նշել ներմուծման փակ շղթա, որը պարունակում է բոլոր երկրները, ապա ցանկացած երկու երկրները միացված կլինեն ներմուծման շղթայով:

Վերը բերված օրինակում գոյություն ունի $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$ ներմուծման փակ շղթա, հետևաբար այդ մատրիցի համար **(6)** հավասարումը միշտ ունի դրական լուծում:

Դիտողություն 2: $(A - E)\mathbf{x} = 0$ մատրիցային հավասարումը համասեռ գծային հավասարումների համակարգ է, որը եթե ունի ոչ զրոյական լուծում,

ապա ունի անվերջ լուծումներ, որոնք մեկը մյուսից ստացվում են հաստատուն թվով բազմապատկելով: Հայտնի է, որ գծային հավասարումների $AX=0$ համասեռ համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ A մատրիցը վերասերված է՝ $|A|=0$: Այդ իսկ պատճառով $|A-E|=0$ **և (6)** մատրիցային հավասարումն ունի ոչ զրոյական անվերջ թվով լուծումներ:

Այսպիսով, եթե A մատրիցը բավարարում է թեորեմ 1 կամ թեորեմ 2 –ի պայմանները, ապա (6) հավասարումն ունի անվերջ դրական լուծումներ և եթե $x>0$ վեկտորը բավարարում է (6) –ին, ապա $\forall c>0$ թվի համար cx –ը նույնպես բավարարում է (6) –ին:

Տնտեսագիտորեն դա նշանակում է, որ և՛ գները, և՛ եկամուտները հարաբերական են, քանի որ դրանց բազմապատկումը միևնույն թվով նշանակում է միայն անցում նոր չափման միավորի:

Դիտողություն 3: Եթե դիտարկենք այնպիսի մոդել, որտեղ բոլոր երկրները բաժանված են մի քանի խմբերի այնպես, որ յուրաքանչյուր խմբի մեջ մտնող երկրները ներմուծում են միայն այդ խմբի մեջ մտնող երկրներից, ապա այդ դեպքում կարելի է դիտարկել մի քանի անկախ մոդելներ: Ակնհայտ է, որ եթե մի խմբի մեջ մտնող երկրների եկամուտները բազմապատկենք միևնույն թվով, ապա դա չի ազդի մյուս խմբերի մեջ մտնող երկրների եկամուտների վրա:

ԳԼՈՒԽ 8

ԵՐԿՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԽԱՂԵՐ

Ներածություն: Մոդելավորման խնդիրներում հաճախ հանդիպում ենք իրավիճակների, երբ շուկայի մեծ թվով մասնակիցների պարագայում ֆիրմաներից մեկի որոշումների արդյունավետությունը կախվածության մեջ է դրվում այլ մասնակիցների որոշումներից: Իրոք, երբ ֆիրման որոշում է կայացնում իր շահույթի մաքսիմալացման վերաբերյալ, ապա նա կատարում է այդ, կռահելով մրցակիցների վարվելակերպը: Կարող է իրադրությունը բնութագրվել մեկ գնորդով և մեկ վաճառողով (մոնոպոլիա - մոնոպսոնիա դեպքը), ամենատարբեր տնտեսական գործակալների համախմբով, որոնց միջև կա կոնֆլիկտ:

«Գործույթների հետազոտման մաթեմատիկական մեթոդները» դասընթացում խաղային մոդելների ուսումնասիրությունը սահմանափակվում էր այնպիսի իրադրությունների դիտարկումով, որոնցում խաղացողներն ունեին հակադիր շահեր: Սակայն ոչ հազվադեպ են այն իրադրությունները, որոնցում խաղացողների շահերը չեն համընկնում, բայց և հակադիր չեն: Երկմատրիցային խաղերը նկարագրում են նման իրադրություններ, որոնք կհանդիսանան մեր քննարկման առարկան:

Խաղերի տեսության բնորոշ գծերից է անորոշության պայմաններում որոշումների կայացումը, ընդ որում այդ իրադրություններում կարևոր դեր է վերապահում կոնֆլիկտներին և դրանց հաղթահարման համատեղ գործողություններին:

Սոցիալ-տնտեսական իրողությունները համարժեք ներկայացնելուն հավակնող խաղային մոդելները պետք է արտահայտեն կոնֆլիկտին բնորոշ գծերը: Այլ կերպ դրանք պետք է նկարագրեն.

- ✓ շահագրգիռ կողմերի բազմությունը (խաղացողներ կամ սուբյեկտներ, անձեր, կողմեր, մասնակիցներ);
- ✓ յուրաքանչյուր կողմի հնարավոր գործողությունները, որոնք անվանվում են նաև ստրատեգիաներ կամ քայլեր;
- ✓ կողմերի շահերը, որոնք ներկայացվում են շահումների (վճարումների) ֆունկցիաներով:

Կոնֆլիկտի բովանդակալից ներկայացումը իրականացվում է մաթեմատիկական մոդելով տրվող խաղով:

Խաղերի տեսությունն առաջին անգամ համակարգված ներկայացվել է

Ջ. ֆոն Նեյմանի և Օ. Մորգենշտերնի կողմից 1944 թվականին, չնայած առաջին արդյունքները հրապարակվել են դեռևս 1920-ական թվականներին: Խաղերի տարբեր տեսակները կարելի է դասակարգել հենվելով այս կամ այն հայտանիշների վրա, ինչպիսին են խաղացողների թվաքանակը, ստրատեգիաների թիվը, շահումի ֆունկցիայի հատկությունը, նախնական բանակցությունների և խաղի ընթացքում խաղացողների փոխգործակցման հնարավորությունը:

Դասակարգման հաջորդ սկզբունքով՝ ըստ ստրատեգիաների թվի (ստրատեգիաների իմաստը ներկայացված է ստորև) տարբերվում են վերջավոր և անվերջ խաղերը:

Խաղերի դասակարգման հաջորդ եղանակը հենվում է շահումի (վճարման) ֆունկցիայի հատկությունների վրա: Խաղերի տեսության մեջ կարևոր դեպքերից է այն իրավիճակը, երբ մեկ խաղացողի շահումը հավասարվում է մյուսի կորստին: Այդպիսի խաղերը անվանվում են զրոյական գումարով կամ հակամարտ (անտագոնիստական) խաղեր:

Եթե խաղացողների շահերը համընկնում են, ապա նրանք կարող են միավորվել՝ ստեղծելով դաշինքներ (կոալիցիաներ): Այն բանից հետո, երբ խաղում որոշված է շահումը, դաշինքները կարող են փլուզվել՝ շահումը առանձին խաղացողների միջև բաշխելու համար: Անդաշինք խաղերում յուրաքանչյուր մասնակցի նպատակը առավելագույն անհատական շահումի ստացումն է: Տարբերվում են նաև կոոպերատիվ և ոչ կոոպերատիվ խաղեր: Կոոպերատիվ են համարվում ոչ զրոյական գումարով խաղերը, որոնցում խաղացողները կարող են որոշումներ կայացնել՝ համաձայնվելով իրար հետ և հանդես գալով դաշինքներով: Ոչ կոոպերատիվ խաղերը այն խաղերն են, որոնցում մասնակցում են միմյանցից անկախ որոշումներ կայացնող երեքից ոչ պակաս անձինք:

Հիմնական սկզբունքներ: Խաղերի տեսությունը մոդելավորում է ստրատեգիական իրավիճակները, որոնք առաջանում են տարաբնույթ միջավայրերում: Տնտեսության մոդելավորման հիմնախնդիրներում խաղերի տեսությունը հնարավորություն է տալիս ներկայացնել տնտեսական իրավիճակները մաթեմատիկորեն մեկնաբանելի եղանակով: Այն հնարավորությունը, որն ապահովում է խաղերի տեսությունը ներկայացնելու համար ուսումնասիրվող հիմնախնդիրը հանդիսանում է նման մոդելավորման մեծագույն ուժը:

Ցանկացած իրավիճակ, երբ պետք է կատարեն ստրատեգիական ընտրություններ և երբ վերջնական արդյունքը կախված է յուրաքանչյուր անհատի ընտրությունից կարող է ուսումնասիրվել որպես խաղ:

Խաղացողներ: Յուրաքանչյուր որոշումներ կայացնողը կոչվում է «խաղացող»: Այս խաղացողները կարող են լինել անհատներ, ֆիրմաներ (օրինակ օլիգոպոլիական շուկայում) կամ ամբողջ ազգություններ և տնտեսու-

թյուններ (ինչպիսիք են ռազմական կոնֆլիկտները կամ տնտեսական մրցակցային իրավիճակները): Բոլոր խաղացողները բնութագրվում են իրենց ունակություններով ընտրություն կատարել իրականացվող գործողությունների համախմբությունից: Սովորաբար, խաղացողների քանակը լինում է ֆիքսված «խաղի» ամբողջ ընթացքում և խաղերը բնութագրվում են խաղացողների քանակով (օրինակ՝ երկու խաղացողների խաղեր, երեք խաղացողների խաղեր, կամ n խաղացողների խաղեր): Այս գլխում մենք կուսումնասիրենք երկու խաղացողների խաղեր և կնշանակենք խաղացողներին A և B: Խաղերի տեսությունում ընդունվող հիմնական կարևոր ենթադրություններից մեկն այն է, որ խաղացողների միջև տարբերություն չի մտցվում: Խաղի մեջ գոյություն չունեն «լավ կամ վատ տղաներ» և չի ենթադրվում, որ խաղացողները ունենան որևէ առանձնահատուկ ընդունակություններ կամ թերություններ: Յուրաքանչյուր խաղացող կատարում է ընտրություն, որը նրան տալիս է լավագույն արդյունք:

Ստրատեգիաներ: Գործողությունների յուրաքանչյուր ուղի, որը տրամադրված է խաղացողին կոչվում է «ստրատեգիա»: Խաղերի տեսության խնդիրը խաղացողների համար երաշխավորությունների մշակումն է, այսինքն նրանց համար օպտիմալ ստրատեգիաների որոշումն է: Խաղացողի ստրատեգիան, այլ կերպ, որոշակի կանոնների համախումբ է, որը միանշանակ որոշում է խաղացողի վարքը յուրաքանչյուր քայլում, կախված այն իրավիճակից, որն առաջացել է խաղի ընթացքում: Օպտիմալ է համարվում այն ստրատեգիան, որը խաղի բազմակի կրկնության դեպքում տվյալ խաղացողին ապահովում է առավել հնարավոր միջին շահում: Կախված նրանից, թե ինչպիսի խաղ է ուսումնասիրվում, ստրատեգիան կարող է լինել չափազանց պարզ գործողություն (օրինակ վերցնել այլ քարտը թղթախաղում), կամ շատ բարդ (օրինակ ընտրել լազերի վրա հիմնված հակահրթիռային պաշտպանություն): Սովորաբար, յուրաքանչյուր խաղացողի ստրատեգիաների բազմությունը կարող է լինել վերջավոր:

Շահումներ: Վերջնական վաստակները, որը խաղի խաղացողները ստանում են խաղի արդյունքում կոչվում են «շահումներ»: Շահումները սովորաբար չափվում են օգտակարությամբ, որոնք ստանում են խաղացողները, չնայած այն բանին, որ հաճախ փողային շահումները (օրինակ ֆիրմաների շահումները) օգտագործվում են դրանց փոխարեն: Հիմնականում ենթադրվում է, որ խաղացողները կարող են կարգավորել խաղի շահումները առավել նախընտրելիից մինչև ցածր նախընտրելի և որոնել հասանելի բարձր կարգավորված շահում: Շահումները միավորում են այն բոլոր ասպեկտները, որոնք կապված են խաղի արդյունքների հետ: Սա ընդգրկում է ճշգրիտ փողային շահույթները և խաղացողների ենթադրելի կարծիքները, որոնք վերաբերվում են այնպիսի արդյունքներին, ինչպիսին են նրանց ընտրությունը կամ հանդիսանում են ինքնագնահատմամբ ստացված շահույթ:

8.1. Խաղերի տեսության հավասարակշռության սկզբունքները

Շուկաների տեսության ուսումնասիրությունում մշակվել է հավասարակշռության սկզբունք, որտեղ ինչպես մատակարարները, այնպես էլ սպառողները բավարարված են եղել շուկայի արդյունքից: Երբ տրված են հավասարակշռության գինը և քանակը, ապա շուկայի ոչ մի մասնակից չունի դրդապատճառ փոխելու համար իր վարվելակերպը: Այսպիսով, հարց է առաջանում. խաղերի տեսության մոդելների համար գոյություն ու՞նեն հավասարակշռության սկզբունքներ: Այսինքն, գոյություն ունեն ստրատեգիական ընտրություններ, համաձայն որոնց խաղացողները, կատարելով այդ ընտրությունները, այլևս չունեն դրդապատճառներ դրանց փոխելու համար:

Չնայած այն բանին, որ խաղերի տեսությունում գոյություն ունեն հավասարակշռության ֆորմալացման տարբեր եղանակներ, այնուամենայնիվ առավել հաճախ մոտեցումն այն էր, որն առաջարկվել է Կուրնոյի կողմից 19-րդ դարում և ընդհանրացվել 1950-ական թվականներին Ջ. Նէշի կողմից: Համաձայն հավասարակշռության Նէշի սկզբունքի ստրատեգիաների (a*, b*) զույգը սահմանվում է որպես հավասարակշռություն, եթե a*-ը ներկայացնում է A-ի լավագույն ստրատեգիան, երբ B-ն խաղում է b* և b*-ը ներկայացնում է B-ի լավագույն ստրատեգիան, երբ A-ն խաղում է a*-ը: Նույնիսկ այն դեպքում, երբ խաղացողներից մեկը բացահայտում է հավասարակշռության այն ստրատեգիան, որ նա կօգտագործի, մյուս խաղացողը չի կարող օգտվել դրա մասին իրեն հայտնի տեղեկատվությունից: Ոչ հավասարակշռության ստրատեգիաները, ինչպես մենք կտեսնենք, դրա օրինակը չեն: Եթե խաղացողներից մեկը գիտի, թե մյուս խաղացողը ի՞նչ ստրատեգիա է ընտրել, նա հաճախ կարող է օգտվել դրանից և ընթացքում ընտրի այնպիսի գործողություններ, որոնք կնվազեցնեն այն շահույթը, որը ստացել է իր ստրատեգիան բացահայտած խաղացողը:

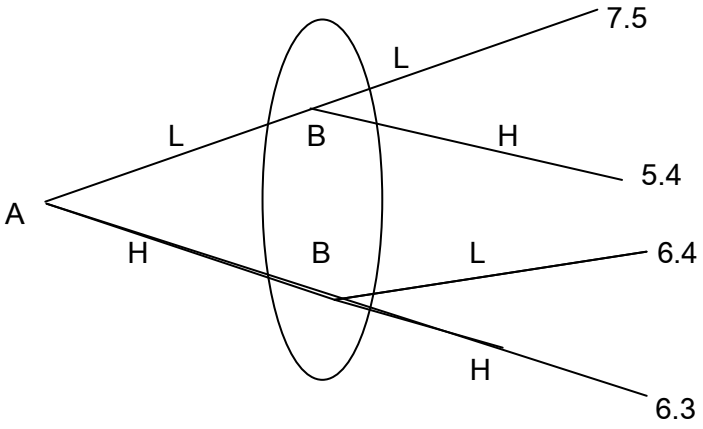
Նշենք, որ բոլոր խաղերը չեն, որ ունեն մաքուր ստրատեգիաներով հավասարակշռության իրավիճակ ըստ Նէշի: Սակայն, որոշ դեպքերում խաղը կարող է ունենալ հավասարակշռության շատ իրավիճակներ, որոնցից որոշները առավել հավանական են, քան մյուսները: Հավասարակշռության իրավիճակները կարող են լինել առավել ցանկալի խաղի խաղացողների համար: Դրա հետ մեկտեղ հավասարակշռության մյուս սկզբունքները կարող են ավելի խելամիտ լինեն, քան հավասարակշռության իրավիճակը ըստ Նէշի: Հետևաբար, առկա է բարդ հարաբերություն խաղերի տեսության հավասարակշռության սկզբունքի և ավանդական շուկայական հավասարակշռության սկզբունքի միջև: Նշենք, որ մինչև այժմ մենք ունեինք հավասարակշռության սկզբունքի այնպիսի սահմանում, համաձայն որի կարելի է սկսել խաղերի տեսության ուսումնասիրությունը:

Սահմանում: Հավասարակշռության Նէշի ստրատեգիաները: (a*,b*) ստրատեգիաների զույգը ներկայացնում է երկու խաղացողների խաղի հավասարակշռության լուծում, եթե a*-ը A-ի օպտիմալ ստրատեգիան է b*-ի դեմ, իսկ b*-ը B-ի օպտիմալ ստրատեգիան է a*-ի դեմ:

8.2 Գովազդային խաղը, որպես լուսաբանող օրինակ

Որպես ստրատեգիական մոդելավորման խաղային-տեսական մոտեցման լուսաբանող օրինակ ուսումնասիրենք այն պարզագույն օրինակը, որտեղ երկու ֆիրմաները (A-ն և B-ն) պետք է որոշեն, թե որքան ծախսեն գովազդի համար: Ֆիրմաներից յուրաքանչյուրը կարող է ծախսել կամ մեծ քանակությամբ (H) գումար, կամ քիչ քանակությամբ (L) գումար և մենք ցանկանում ենք ուսումնասիրել հավասարակշռության հնարավոր ընտրությունները այս իրավիճակում: Նշենք, որ այս խաղն ունի միայն ուսումնական, մանկավարժական բնույթ:

Խաղի էքստենսիվ ձևը: Նկար 1-ը լուսաբանում է գովազդային խաղի առանձնահատուկ մանրամասները: Այս խաղի «ծառը» գործողությունն իրականացվում է ձախից աջ և յուրաքանչյուր «գագաթ» ներկայացնում է դիտարկվող ֆիրմայի որոշումների կայացման կետը: Առաջին քայլը կատարում է A ֆիրման՝ այն պետք է ընտրի իր ծախսերի մակարդակը H կամ L: Քանի որ B ֆիրմայի ընտրությունները տեղի են ունենում A-ից դեպի աջ, ծառը նշում է, որ B ֆիրման կատարում է իր որոշումները A ֆիրմայից հետո:



Նկար 1. Գովազդի խաղի էքստենսիվ ձևը

Այս խաղում A-ն ընտրում է իր ցածր մակարդակի (L) կամ բարձր մակարդակի (H) գովազդային ծախսը, իսկ հետո B-ն կատարում է նման ընտրությունը: Օվալային օղակը, որն ընդգրկում է B-ի քայլերի գագաթները, նշում է, որ նրանք բաժանում են միմյանց միջև նույն տեղեկատվությունը (տեղեկատվության պակաս)՝ B-ն չպետք է իմանա, թե A-ն ինչ է ընտրել: Շահույթները (երբ A-ն կատարում է առաջին քայլը) բերված են աջ կողմում: Այս փուլում հնարավոր են խաղի երկու տարբերակներ, կախված այն ենթադրությունից, թե B-ն գիտի A-ի ընտրությունը: Նախ մենք կուսումնասիրենք այն դեպքը, երբ B-ն չունի այս տեղեկատվությունը: B-ն ֆիրմայի ընտրություններին համապատասխանող գագաթներն ընդգրկող մեծ օվալաձև օղակը նշում է, որ երկու գագաթներն էլ բաժանում են նույն (պակաս) տեղեկատվությունը: B ֆիրման պետք է ընտրի H-ը կամ L-ը առանց իմանալու, թե ինչ է կատարել A-ն: Հետագայում մենք կուսումնասիրենք այն դեպքը, երբ B-ն ունի այս տեղեկատվությունը:

Ծառի յուրաքանչյուր ճյուղի վերջում նշվում է շահույթը, որտեղ շահույթը հաշվարկված է դրամներով (հազար կամ միլիոն): Շահույթի յուրաքանչ-յուր զույգ թվարկում է առաջինը A-ի շահույթները: Այսպես, նկար 1-ը ցույց է տալիս, որ եթե A ֆիրման ընտրում է H-ը և B-ն ընտրում է L-ը, ապա A-ի շահույթը հավասար է 6-ի, իսկ B-ի շահույթը հավասար է 4-ի: Մնացած շահույթները կարելի է նկարագրել նմանապես:

Նորմալ ձևով խաղեր: Չնայած այն բանին, որ նկար 1-ը հնարավորություն է տալիս տեսանելի ներկայացնել խաղի ամբողջ կառուցվածքը, երբեմն առավել հարմար է նկարագրել խաղերն աղյուսակային (կամ «նորմալ») ձևով: Աղյուսակ 1-ը պայմանավորում է նման ներկայացումը գովազդային խաղի համար:

Աղյուսակ 1.

Գովազդային խաղի նորմալ ձևը

		B-ի ստրատեգիաներ	
		L	H
A-ի ստրատեգիաները	L	7,5	5,4
	H	6,4	6,3

Այս աղյուսակում A ֆիրմայի ստրատեգիաները (H, L) բերված են ձախ մասում, իսկ B-ի ստրատեգիաները (H, L) վերևի մասում:

Շահույթները (նորից ենթադրելով, որ A-ն կատարում է առաջին քայլը), որոնք համապատասխանում են տարբեր ստրատեգիաներին, բերված են աղյուսակում: Համեմատելով նկար 1-ը և աղյուսակ 1-ը կարելի է համոզվել, որ դրանք նկարագրում են միևնույն խաղը:

Դոմինանտ և Նէշի հավասարակշռություն

Աղյուսակ 1-ը պարզ է դարձնում, որ գովազդի համար ցածր բյուջեի ընտրությունը հանդիսանում է B ֆիրմայի համար դոմինանտ ստրատեգիա: Անկախ A ֆիրմայի կողմից ստրատեգիայի ընտրությունը պայմանավորում է ավելի մեծ շահույթ, քան H ստրատեգիան: Իհարկե, քանի որ ենթադրվում է, որ խաղի կառուցվածքը հայտնի է երկու խաղացողներին, ապա A ֆիրման կընտրի այնպիսի ստրատեգիա, որի շնորհիվ կնվազեցնի B-ի շահույթը: Պարզ է, որ այդպիսին է L ստրատեգիան: Այսպիսով, ստրատեգիաների դոմինանտության ուսումնասիրությունը ցույց է տալիս, որ A:L, B:L ստրատեգիայի ընտրությունը պայմանավորում է 7(A-ին) և 5(B-ին) շահույթները: A:L, B:L ստրատեգիայի ընտրությունը նույնպես բավարարում է Նէշի հավասարակշռության չափանիշներին: Եթե A-ն գիտի, որ B-ն կխաղա L, ապա նրա լավագույն ընտրությունը L-ն է: Նույնպես, եթե B-ն գիտի, որ A-ն կխաղա L, ապա B-ի լավագույն ստրատեգիան նույնպես L-ն է (իհարկե, քանի որ L-ն հանդիսանում է B-ի դոմինանտ ստրատեգիա, ապա նա կընտրի այդ ստրատեգիան, անկախ այն բանից, թե ինչ կանի A-ն):

Այսպիսով A:L, B:L ընտրությունը պայմանավորում է Նէշի չափանիշով պահանջվող սիմետրիկությունը:

Որպեսզի համոզվենք, որ Աղյուսակ 1-ում տրված ստրատեգիաների զույգերը չեն բավարարում Նէշի հավասարակշռության չափանիշին նորից դիտարկենք դրանք: Եթե խաղացողները հայտարարում են A:B, B:L ստրատեգիաների ընտրությունը, ապա A-ն հնարավորություն է ստանում լավացնել իր դիրքը: A-ն իմանալով B-ի կողմից L-ի ընտրության մասին կարող է մեծացնել իր շահույթը ընտրելով L ստրատեգիան: Այսպիսով, A:H, B:L չի հանդիսանում Նէշի հավասարակշռության վիճակ: Երկու արդյունքներից ոչ մեկը երբ B-ն ընտրում է H-ը, չի ապահովում Նէշի հավասարակշռությունը, քանի որ, ինչպես մենք արդեն նշեցինք, անկախ նրանից, թե ինչ է անում A-ն, B-ն կարող է լավացնել իր շահույթը ընտրելով L ստրատեգիան: Քանի որ B ֆիրմայի համար L ստրատեգիան խիստ դոմինանտում է H-ը, ապա ոչ մի դեպքում, երբ B-ն ընտրում է H-ը չի բավարար է Նէշի հավասարակշռության պայմաններին:

Նէշի հավասարակշռության բնույթը

Չնայած այն բանին, որ նկար 1-ում ներկայացված գովազդային խաղը ունի Նէշի հավասարակշռության միակ լուծում, այնուամենայնիվ դա երկու խաղացողների խաղերի ընդհանուր հատկությունը չէ: Ստորև բերված օրինակ 1-ը լուսաբանում է պարզագույն խաղ («տուփը, մկրատը, թուղթը»), որ-

տեղ գոյություն չունի Նէշի հավասարակշռություն և մյուս խաղը («Սեռերի մարտը»), որն ունի Նէշի երկու հավասարակշռություն: Այսպիսով, Նէշի մոտեցումը միշտ չէ, որ խաղային իրավիճակների համար պայմանավորում է լավագույն ձևով որոշված լուծում: Նէշի հավասարակշռության մոտեցումը նույնպես չի պայմանավորի առանձնահատուկ ցանկալի հավասարակշռություն, ինչպես նաև այն դեպքում, երբ խաղը կրկնվում է: Նման խաղը լուսաբանված է բանտարկյալի երկընտրանքում, որը դիտարկված է ստորև:

Օրինակ 1. Նէշի հավասարակշռության օրինակ:

Աղյուսակ 2-ը լուսաբանում է երկու հայտնի խաղեր, որոնք վերաբերվում են Նէշի հավասարակշռության երկու տարբեր դեպքերին:

Աղյուսակ 2-ի մաս (ա)-ն նկարագրում է մանկական մատերի խաղը՝ «Տուփ, մկրատ, թուղթ»: Զրոյական շահույթները, որոնք տրված են անկյունագծում ցույց են տալիս, որ եթե խաղացողները ընտրում են միևնույն ստրատեգիան, ապա որևէ վճարում չի կատարվում: Մնացած դեպքերում պարտվածը վճարում է 1 լումա հաղթողին համաձայն սովորական հիերարխիայի (Տուփը փակում է մկրատը, մկրատը կտրում է թուղթը, թուղթը փաթեթավորում է տուփը): Ցանկացած մարդ, ով խաղացել է այս խաղը, գիտի որ այս խաղում գոյություն չունի հավասարակշռություն: Ստրատեգիայի ցանկացած զույգ անկայուն է, քանի որ այն պայմանավորում է գոնե մեկ խաղացողին այնպիսի դրդապատճառ, որ-պեսզի փոխարինի մյուս ստրատեգիան: Այսպես, (A:մկրատ, B:մկրատ) զույգը պայմանավորում է, որպեսզի A-ն կամ B-ն դրդված լինեն ընտրել տուփը: Նմանապես, (A:թուղթ, B:տուփ) զույգն ակնհայտ է, որ կխրախուսի B-ն ընտրել մկրատը: Այս խաղի պարբերաբար կրկնվող վարվելակերպը ցույց է տալիս, որ խաղը չունի Նէշի հավասարակշռություն:

Սեռերի մարտը: «Սեռերի մարտ»-ի խաղում ամուսինը (A-ն) և կինը (B-ն)-ն պլանավորում են մեկնել արձակուրդ: A-ն նախընտրում է լեռնային տեղանք, իսկ B-ն նախընտրում է ծովափնյա հանգիստ: Երկու խաղացողները նախընտրում են արձակուրդը անցկացնել միասին: Աղյուսակ 2-ի (բ) մասում շահույթները արտահայտում են այս նախընտրությունները: Այստեղ միասին արձակուրդի անցկացման ստրատեգիաները ներկայացնում են Նէշի հավասարակշռությունը: Իրոք, (A: Լեռնային տեղանք, B: Լեռնային տեղանք) իրավիճակում խաղացողներից ոչ մեկը չի կարող շահել՝ շեղվելով իր ստրատեգիայից հավասարակշռության իրավիճակում: Նույնպես կարելի է բացատրել (A:ծովափ, B:ծովափ) իրավիճակը: Այսպիսով, այս խաղն ունի Նէշի հավասարակշռություն:

Երկու պարզ խաղեր

(ա) Տուփը, մկրատը, թուղթը՝ Նէշի հավասարակշռություն չկա

		B-ի ստրատեգիաները		
		տուփ	մկրատ	թուղթ
A-ի ստրատեգիաները	տուփ	0 0	1 -1	-1 1
	մկրատ	-1 1	0 0	1 -1
	թուղթ	1 -1	-1 1	0 0

(բ) Սեռերի մարտը՝ Նէշի երկու հավասարակշռություն

		B-ի ստրատեգիաները	
		Լեռնային տեղանք	Ծովափ
A-ի ստրատեգիաները	Լեռնային տեղանք	2 1	0 0
	Ծովափ	0 0	1 2

Բանտարկյալի երկընտրանքը: Բանտարկյալի երկընտրանք խաղը առաջին անգամ ուսումնասիրել է Ա. Վ. Թակերը 1940 թ.: Խաղի անվանումը հիմնվում է հետևյալ խաղային իրավիճակի վրա: Երկու քաղաքացիներ բանտարկված են քրեական հանցագործություն կատարելու համար: Մարզային դատավորը ունի փոքրաթիվ փաստեր և չի կարող ստանալ բանտարկյալներից խոստովանություն: Նա անջատում է կասկածները և ասում է յուրաքանչյուրին. «Եթե դու խոստովանես, իսկ քո գործընկերը ոչ, ապա ես կխոստանամ պակասեցնել քո դատավճիռը (վեց ամիս) միաժամանակ քո խոստովանության դեպքում քո գործընկերը կստանա տասը տարի: Եթե երկուսով էլ խոստովանեք, ապա ձեզանից յուրաքանչյուրը կստանա երեք տարի»: Կասկածյալներից յուրաքանչյուրը գիտի նաև, որ եթե նրանցից ոչ մեկը չխոստովանի, ապա փաստերի պակասությունը կպայմանավորի, որպեսզի նրանցից յուրաքանչյուրը դատապարտվի ավելի փոքր հանցագործության համար, ինչի շնորհիվ նրանցից յուրաքանչյուրը կստանա երկու տարվա դատապարտություն: Այս խաղի նորմալ ձևի մատրիցան պատկերված է Աղյուսակ 3-ում: «Խոստովանություն» ստրատեգիան դոմինանտում է ինչպես A-ի, այնպես էլ B-ի համար: Հետևաբար այս ստրատեգիաները կազմում են Նէշի հավասարակշռությունը և մարզային դատավորի գործողությունը հաջողված է: Սակայն, եթե դատապարտյալները պայմանավորվեն չխոստովանել, ապա նրանց դատապարտությունը կպակասեցվի երեք տարուց երկու տարվա: Այս «ռացիոնալ» լուծումը կայուն չէ և դատապարտյալներից յուրաքանչ-

յուրը դրդված է փչացնել իր գործընկերոջ վիճակը: Սա էլ իրենից ներկայացնում է դիլեման՝ արդյունքները, որոնք ստացվում են օպտիմալ են, բայց ոչ կայուն:

Աղյուսակ 3.

Դատապարտյալի երկընտրանքը

		B	
		խոստովանել	չխոստովանել
A	խոստովանել	A:3 տարի B:3 տարի	A: 6 ամիս B:10 տարի
	չխոստովանել	A:10 տարի B:6 ամիս	A:2 տարի B:2 տարի

Կիրառությունները:

(I) Բանտարկյալի երկընտրանքի տիպի հիմնահարցը կարող է առաջանալ իրական շուկայական իրավիճակներում: Աղյուսակ 4-ը լուսաբանում է երկընտրանքը գովազդային տարբեր խաղերում:

Աղյուսակ 4.

Գովազդի խաղ, որն ունի ցանկալի արդյունք և անկայուն է

		B-ի ստրատեգիաները	
		L	H
A-ի ստրատեգիաները	L	7, 7	3, 10
	H	10, 3	5, 5

Այսպես, երկու L ստրատեգիաներն (այսինքն (L, L) իրավիճակը), ավելի շահութաբեր են, բայց այս ընտրությունն անկայուն է: Սակայն պայմանավորվածության դեպքում աղյուսակ 4-ում բերված իրավիճակը կլինի անկայուն: Յուրաքանչյուր ֆիրմա կարող է ավելացնել իր շահույթները, դադարեցնելով պայմանագիրը: Նման իրավիճակներն առաջանում են օդային տեղափոխություն կազմակերպող ֆիրմաներում, երբ նրանք տալիս են «երթևեկության բոնուսներ» (դրանք կստանան ավելի մեծ շահույթ, եթե դադարեցնեն անվնաս տոմսերի հատկացումը, սակայն այս լուծումը անկայուն է) և ագարակատերերի անկայունությունը, հիմնված արտադրանքի քանակի սահմանափակության վրա (դա անհատ ագարակատիրոջ համար, որը ձգտում է վաճառել ավելի շատ կաթ միայն գայթակղություն է): Ինչպես ցույց են տալիս այս օրինակները պայմանագրերի կենսագործման դժվարությունը կարող է վնասակար լինել արդյունաբերությունում շահույթներ ստանալու համար:

Տարբեր ասպեկտները գնահատվում են որոշակի սանդղակով: Այդ գնահատականները կարող են մեկնաբանվել որպես վեկտորներ, որոնք կարելի է համեմատել:

(II) Շուկայի ընտրության խաղային մոդելը: A և B կազմակերպությունները իրականացնում են գովազդային գործունեություն, որոնցից յուրաքանչյուրը գովազդում է իր ապրանքը երեք հնարավոր շուկաներում: Այդ կազմակերպությունների մաքուր ստրատեգիաները նշանակենք (1, 2, 3), իսկ խաղի շահույթի մատրիցան՝

$$D=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

որի i-րդ տողի և j-րդ սյան էլեմենտը (այսինքն, եթե A կազմակերպությունը գովազդելու համար ընտրում է i-րդ շուկան, իսկ B կազմակերպությունը՝ j-րդ շուկան) հավասար է A կազմակերպության շահույթին, արտահայտած պայմանական միավորներով:

Նշանակենք կազմակերպությունների խառը ստրատեգիաները համապատասխանաբար $x=(x_1,x_2,x_3)$ և $y=(y_1,y_2,y_3)$: Հետևաբար A կազմակերպության շահույթի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է $H(x,y)=xDy^T$: Կազմակերպությունների օպտիմալ խառը ստրատեգիաները որոշելու համար ներկայացնենք ուսումնասիրվող խաղը գծային ծրագրավորման խնդրի միջոցով:

Եթե x-ը A-րդ y-ը B-րդ կազմակերպության որևէ խառը ստրատեգիաներ են, ապա նշանակենք

$$\min_{y\in Y} H(x,y)=g(x) \text{ և } \max_{x\in X} H(x,y)=h(y)$$

որտեղ X և Y բազմությունները համապատասխանաբար A և B կազմակերպությունների խառը ստրատեգիաների բազմություններն են:

Եթե $u_i=\dfrac{x_i}{g(x)}$, և $v_i=\dfrac{y_i}{h(y)}$, որտեղ i, j=1, 2, 3, ապա կազմակերպությունների համար կդիտարկենք գծային ծրագրավորման հետևյալ խնդիրները.

(I) min $(u_1+u_2+u_3)$=min w,

հետևյալ պայմանների դեպքում

$$-2u_1+u_2+3u_3\geq 1,$$
$$-u_1-2u_2+u_3\geq 1,$$
$$5u_1+3u_2-4u_3\geq 1:$$

(II) max ($v_1+v_2+v_3$)=max z,

հետևյալ պայմանների դեպքում

$$-2v_1-v_2+5v_3\leq 1,$$
$$v_1-2v_2+3v_3\leq 1,$$
$$3v_1+v_2-4v_3\leq 1:$$

Այսպիսով, լուծելով երկակի (I) և (II) խնդիրները, կստանանք max z = min w = 11, եթե v_1=0, v_2=9; v_3=2, u_1=5, u_2=0, u_3=6:

Հետևաբար, A և B կազմակերպությունների օպտիմալ խառը ստրատեգիաները, այսինքն ապրանքը գովազդելու համար 1,2,3 շուկաների ընտրության օպտիմալ խառը ստրատեգիաները հավասար են $x^*=\left(\frac{5}{11},0,\frac{6}{11}\right)$, $y^*=\left(0,\frac{9}{11},\frac{2}{11}\right)$ համապատասխանաբար:

Այսպիսով, A կազմակերպությունը գովազդելու համար 1, 2, 3 շուկաների ընտրությունը կատարվում է համապատասխանաբար $\frac{5}{11},0,\frac{6}{11}$ հավանականություններով, իսկ B կազմակերպությունը՝ $0,\frac{9}{11},\frac{2}{11}$ հավանականություններով:

Նշենք, որ խաղային այս մոդելի օրինակով ներկայացվեց մատրիցային խաղի բերումը գծային ծրագրավորման խնդրի, ինչը հնարավորություն տվեց որոշել խաղի հավասարակշռության իրավիճակը խառը ստրատեգիաներով:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ ԸՍՏ ԳԼՈՒԽՆԵՐԻ

Գլուխ 1

1. **Ш. Доу.** Математика в экономической теории: исторический и методологический анализ. Вопросы Экономики, 2006, №7, стр. 53-72.
2. **À. Ìàðøàëë.** Îñíîâû ýêîíîìè÷åñêîé íàóêè. Ì., 2007.
3. **O'Donnel R. M.** Keynes's Philosophy, Economics and Politics. L: Macmillan, 1989.

Գլուխ 2

1. **Õýmäè À. Òàõà,** "Ââåäåíèå â èññëåäîâàíèå îïåðàöèé", Ìîñêâà, 2001.
2. **Ä. Ôèëëèïñ, À. Ãàðñèà - Äèîñ,** "Ìåòîäû àíàëèçà ñåòåé", Ìîñêâà, 1984.
3. **Ò. Õó,** "Öåëî÷èñëåííîå ïðîãðàììèðîâàíèå è ïîòîêî â ñåòÿõ", Ìîñêâà, 1984.
4. **Ì. Ãåðè, Ä. Äæîíñîí,** "Âû÷èñëèòåëüíûå ìàøèíû è òðóäíîðåøàåìûå çàäà÷è", Ìîñêâà, 1982.
5. **Õ. Ïàèàèèòòðèó, Ê. Ñòàéãëèö,** "Êîìáèíàòîðíàÿ îïòèìèçàöèÿ, àëãîðèòìû è ñëîæíîñòü", Ìîñêâà, 1985.
6. **Ռ. Տոնոյան,** «Գործոյթների հետազոտման մաթեմատիկական խնդիրներ», Երևան, 1999:

Գլուխ 3

1. **Болтянский В. Г.** "Математические методы оптимального управления". М. 1969 г.
2. **Интрилигатор М.** "Математические методы оптимизации и экономическая теория". М. 1975 г.
3. **Миюк С. А., Ровба Е. А., Кузьмич К. К.** "Математические методы и модели в экономике", Минск, 2002 г.
4. **Красс М. С., Чупрынов Б. П.** "Математические методы и модели ". Санкт-Петербург, 2006 г.

Գլուխ 4

1. **Մ. Ա. Սահակյան, Հ. Լ. Սարգսյան, Ս. Դ. Սարգսյան, Ռ. Ն. Տոնոյան.** Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ (Գործոյթների հետազոտում. Կառավարման գիտություն) Մաս 1, Երևան, ԷԿԱԳՄԱՀԲ, 1997.
2. **Òàõà Õ.** Ââåäåíèå â èññëåäîâàíèå îïåðàöèé, (Ïåð. ñ àíãë.)- Ì.: 2005.

Գլուխ 5

1. **Êîôìàí À., Äåáàçåé Ã.,** Ñòîõàñòè÷åñêèå ìåòîäû ïëàíèðîâàíèÿ, Ìîñêâà, 1968 ã.

2. **Մ. Ա. Սահակյան, Ն. Ա. Բեկնազարյան, Հ. Ց. Հակոբյան, Խ. Վ. Քերոբյան,** Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ, 2-րդ հատոր, Երևան, 2001 թ.:
3. **Å. Â. Øèêèí,** Èññëåäîâàíèå îïåðàöèé, 2006 ã.
4. **Ն. Բեկնազարյան և ուրիշներ,** Օպտիմալ որոշումների ընդունումը միջազգային բիզնեսում և մարքեթինգում, Երևան, 2006 թ.:
5. **Ôîðä Ë., Ôàëêåðñîí Ä.,** Ïîòîêè â ñåòÿõ, Ìîñêâà, 1966.

Գլուխ 6
1. **Áóêàí Äæ, Êåíèãñáåðã Ý.** Íàó÷íîå óïðàâëåíèå çàïàñàìè (Ïåð. ñ àíãë.) Ìîñêâà, Íàóêà, 1977.
2. **Øèêèí Å. Â., ×õàðòèøâèëè À. Ã.** Ìàòåìàòè÷åñêèå ìåòîäû è ìîäåëè â óïðàâëåíèè. Ìîñêâà, 2000.

Գլուխ 7
1. **À. Ñ. Ñîëîäîâíèêîâ, Â. À. Áàáàéöåâ, À. Â. Áðàëîâ,** Ìàòåìàòèêà â ýêîíîìèêå, Ìîñêâà, 2000 ã.
2. **Ա. Դ. Թունիև, Յու. Մ. Մովսիսյան,** Գծային հանրահաշվի և գծային ծրագրավորման մեթոդներ. Երևան, 2002 թ.:
3. **Ä. Ãåéë,** Òåîðèÿ ëèíåéíûõ ýêîíîìè÷åñêèõ ìîäåëåé, Ìîñêâà, 1963 ã.

Գլուխ 8
1. **Varian Hal R,** Microeconomic analysis, 3 rd ed., 1992.
2. **Nicholson Walter,** Microeconomic theory: basic principles and extensions, 5 rd ed., 1992.
3. **Äæ. Ôîí Íåéìàí, Î. Ìîðãåíøòåðí.** Òåîðèÿ èãð è ýêîíîìè÷åñêîå ïîâåäåíèå. Ìîñêâà, 1970 ã.
4. **Լ. Պետրոսյան.** Անհակամարտ խաղեր բաժինը «Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ» դասագրքում: էջ 263-319, Երևան,1997.

ՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ԻՐԱՎԻՃԱԿՆԵՐԻ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՈՒՄ

Ուսումնական ձեռնարկ

Սրբագրիչ՝ **Վ. Վ. Դերձյան**
Համ. ձևավորումը՝ **Ա. Խ. Աղուզումցյանի**

Ստորագրված է տպագրության 16.12.2009 թ.:
Չափսը՝ 70x100 1/16: Թուղթը՝ օֆսեթ: Տպագրությունը՝ օֆսեթ:
Տպագր. 10.375 մամուլ: Տպաքանակ՝ 300:

ԵՊՀ տպագրատուն, Երևան, Աբովյան 52

2*

3*

4*

5*

6*

7*

8*

9*

10*

11*

12*

13*

14*