Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

“МАТИ”- Российский Государственный Технологический
Университет им К.Э.Циолковского

Кафедра “Высшая математика”

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
методические указания и варианты курсовых заданий

Сост. Вергасов В.А.

Москва 2002 г.

Аннотация.

Предлагаемые методические указания предназначены для студентов второго курса всех специальностей и факультетов. В методических указаниях рассмотрены примеры решения задач по уравнениям математической физики:

- нахождение общего решения линейного однородного уравнения 1-го порядка,
- определение типа уравнения 2-го порядка и приведение его к каноническому виду,
- краевая задача для однородного волнового уравнения,
- краевая задача для неоднородного волнового уравнения,
- краевая задача для однородного уравнения теплопроводности,
- численные методы решения задач по уравнениям математической физики.

Для закрепления материала студентам предлагается выполнение курсовой работы по рассмотренным выше темам.

1. Нахождение общего решения линейного однородного уравнения 1-го порядка.

Общий вид линейного однородного уравнения 1-го порядка

$$j_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+j_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad (1)$$

где $u=u(x,y)$, а $j_1(x,y)$ и $j_2(x,y)$ заданные функции переменных (x,y). Для нахождения функции $u(x,y)$ необходимо рассмотреть обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'=\frac{j_2(x,y)}{j_1(x,y)} \qquad (2)$$

Обозначив через $j(x,y)=C$ общий интеграл уравнения (2), общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$u(x,y)=F(j(x,y)), \qquad (3)$$

где F - произвольная дифференцируемая функция.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x}+(\sin x+yctgx)\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Напишем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'=\frac{\sin x+yctgx}{1}$$

Получим линейное дифференциальное уравнение, которое будем решать методом вариации постоянных

$$\frac{\partial y}{\partial x}=yctgx$$

$$\frac{\partial y}{y}=ctgxdx$$

$$\ln|y|=\ln|\sin x|+\ln C_1$$

$$y=C_1\sin x$$

$$m.e. y(x)=C_1(x)\sin x$$

$$C_1'\sin x+C_1\cos x=\sin x+C_1\cos x$$

$$C_1'=1, C_1(x)=x+C$$

$$y(x)=(x+C)\sin x, \frac{y}{\sin x}=x+C, C=\frac{y}{\sin x}-x$$

Ответ: $u(x,y)=F(\frac{y}{\sin x}-x)$.

2. Определение типа уравнения 2-го порядка и приведение его к каноническому виду.

Пусть $u = u(x, y)$- неизвестная функция двух независимых переменных x и y. Тогда уравнением 2-го порядка называется уравнение вида

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \qquad (4)$$

Тип уравнения определяется в зависимости от величины $\Delta = b^2 - ac$

Если $\Delta > 0$, то уравнение <u>гиперболического типа</u>,

Если $\Delta = 0$, то уравнение <u>параболического типа</u>,

Если $\Delta < 0$, то уравнение <u>эллиптического типа</u>.

Для приведения (4) к каноническому виду следует написать уравнения характеристик

$$\begin{cases} ady - (b + \sqrt{b^2 - ac})dx = 0, \\ ady - (b - \sqrt{b^2 - ac})dx = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

и найти их общие решения.

<u>Уравнения гиперболического типа</u> при $b^2 - ac > 0$.

Обозначив общие интегралы системы уравнений (5) через $j(x,y) = c_1; y(x,y) = c_2$, вводим новые независимые переменные x, h по формулам $x = j(x,y); h = y(x,y)$. Тогда уравнение (4) примет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial h} = F(x,h,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial h})$- <u>канонический вид уравнения гиперболического типа.</u>

<u>Уравнения параболического типа</u> при $b^2 - ac = 0$.

Общие интегралы системы уравнений (5) совпадают $j(x,y) = \tilde{c}$

Вводим новые независимые переменные x, h по формулам $x = j(x,y); h = h(x,y)$, где $h(x,y)$ - функция, удовлетворяющая условию $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$, например, $h = x$.

Тогда уравнение (4) примет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial h^2} = F(\cdot)$ - <u>канонический вид уравнения параболического типа.</u>

<u>Уравнения эллиптического типа</u> при $b^2 - ac < 0$.

Общие интегралы системы уравнений (5) $j(x,y) \pm iy(x,y) = \tilde{c}$.

Вводим новые независимые переменные x, h по формулам $x = j(x,y); h = y(x,y)$.

Тогда уравнение (4) примет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} + F(x,h,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial h}) = 0$ - <u>канонический вид уравнения эллиптического типа.</u>

<u>Пример 2.</u> Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x = 0,$$

$$a = 1, b = 1, c = 2$$

$\Delta = b^2 - ac = -1;$ Уравнение эллиптического типа. Уравнение характеристик

$$ady - (b \pm \sqrt{b^2 - ac})dx = 0,$$

$$dy - (1 \pm i)dx = 0.$$

$$y - x \pm ix = c, x = y - x, h = x.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial h}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial h}(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial h} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial h}(\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial h} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial h}(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial h}.$$

Подставляя полученные значения частотных производных в данное уравнение, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial h} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial h} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial h} = 0$$

Ответ: $\displaystyle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} = -\frac{\partial u}{\partial h} + \frac{\partial u}{\partial x}.$

3. Краевая задача для однородного волнового уравнения.

Дано однородное волновое уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, с начальными условиями $u(0,x) = j\,(x), \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = y\,(x)$ и краевыми условиями $U(t,0) = U(t,l) = 0.$

Данная задача может быть решена методом Фурье, согласно которому решение записывается в виде $U(t,x) = X(x)T(t).$ После подстановки $U(t,x)$ в данное уравнение, получим уравнения для функций $X(x)$ и $T(t)$.

Решая уравнение $X'' = -l^2 X$ относительно функции $X(x)$ с граничными условиями $X(0) = X(l) = 0$, получим

$$X(x) = X_n(x) = A_n \sin\frac{pn}{l}x,\ l = l_n = \frac{pn}{l}.$$

Решая уравнение $T'' = -l^2 a^2 T$ относительно функции $T(t)$, получим

$$T(t) = T_n(t) = C_n \sin\frac{apn}{l}t + D_n \cos\frac{apn}{l}t,$$

где A_n, C_n, D_n - некоторые константы. В силу однородности уравнения, можно полагать, что $A_n = 1.$ Следовательно, решение данного уравнения записывается в виде

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sin\frac{apn}{l}t+D_n\cos\frac{apn}{l}t)\sin\frac{pn}{l}x.$$

Для нахождения констант C_n, D_n воспользуемся начальными условиями $U(0,x)=j\,(x),\dfrac{\partial U(0,x)}{\partial x}=y\,(x).$

Тогда получим уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{pn}{l}x=j\,(x), \qquad D_n=\frac{2}{l}\int_0^l j\,(x)\sin\frac{pn}{l}xdx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{apn}{l}\sin\frac{pn}{l}x=y\,(x), \qquad C_n=\frac{2}{apn}\int_0^l y\,(x)\sin\frac{pn}{l}xdx.$$

Пример 3. Решить краевую задачу для однородного волнового уравнения

$$U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1{,}5$$

$$U(0,x)=x(l-x),\frac{\partial U(0,x)}{\partial t}=0, U(t,0)=U(t,l)=0.$$

Решение записывается в виде

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sin\frac{apn}{l}t+D_n\cos\frac{apn}{l}t)\sin\frac{pn}{l}x,$$

где $C_n=0$, т.к. $y\,(x)=0$, а $D_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l x(l-x)\sin\frac{pn}{l}xdx$, т.к. $j\,(x)=x(l-x),$ D_n вычислим, воспользовавшись дважды интегрированием по частям

$$D_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{pn}{l}xdx=-\frac{2}{pn}\int_0^l x(l-x)d\cos\frac{pn}{l}x=-\frac{2}{pn}x(l-x)\cos\frac{pn}{l}x\Big|_0^l+$$

$$+\frac{2}{pn}\int_0^l\cos\frac{pn}{l}x(l-2x)dx=\frac{2l}{(pn)^2}\int_0^l(l-2x)d\sin\frac{pn}{l}x=\frac{2l}{(pn)^2}(l-2x)\sin\frac{pn}{l}x\Big|_0^l+$$

$$+\frac{4l}{(pn)^2}\int_0^l\sin\frac{pn}{l}xdx=-\frac{4l^2}{(pn)^3}\cos\frac{pn}{l}x\Big|_0^l=-\frac{4l^2}{(pn)^3}\cos pn+\frac{4l^2}{(pn)^3}=\frac{4l^2}{(pn)^3}[1-\cos pn]=$$

$$=\frac{4l^2}{(pn)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right].$$

Ответ: $U(t,x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^2}{(pn)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right]\cos\frac{1{,}5pn}{l}t\sin\frac{pn}{l}x.$

4. Краевая задача для неоднородного волнового уравнения.

Ограничимся рассмотрением краевой задачи для неоднородного волнового уравнения вида

$$U_{tt}=a^2U_{xx}+f_1(x)f_2(t) \qquad (6)$$

с нулевыми начальными и граничными условиями, т.е.

$$U(0,x)=\frac{\partial U(0,x)}{\partial t}=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде разложения $U(t,x)$ в ряд Фурье по x:

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{pn}{l}x \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получим задачу Коши для неизвестной функции

$$T_n(t):T_n''+\left(\frac{apn}{l}\right)^2T_n=d_nf_2(t),T_n(0)=T_n'(0)=0,d_n=\frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{pn}{l}xdx.$$

Обозначив решение этой задачи через $T_n(t)$ и подставляя в разложение (7), получим искомую функцию $U(t,x)$.

<u>Пример 4</u>. Решить краевую задачу для неоднородного волнового уравнения

$$U_{tt}=a^2U_{xx}=xt,a=1$$

$$U(0,x)=\frac{\partial U(0,x)}{\partial t}=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

Неизвестные функции $T_n(t)$ удовлетворяют задаче Коши

$$T_n''+\frac{n^2p^2}{l^2}T_n=d_nt,$$

$$d_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{pn}{l}xdx=-\frac{2}{pn}\int_0^l xd\cos\frac{pn}{l}x=-\frac{2}{pn}x\cos\frac{pn}{l}x\Big|_0^l+\frac{2}{pn}\int_0^l\cos\frac{pn}{l}xdx=$$

$$=-\frac{2}{pn}l\cos pn+\frac{2l}{(pn)^2}\sin\frac{pn}{l}x\Big|_0^l=\frac{2l}{pn}(-1)^{n+1}$$

Следовательно, получили уравнение $T_n''+\frac{p^2n^2}{l^2}T_n=\frac{2l}{pn}(-1)^{n+1}t$ (8)

Его общее решение есть сумма общего решения однородного уравнения

$$T_n''+\frac{p^2n^2}{l^2}T_n=0 \tag{9}$$

и частного решения уравнения (8). Характеристическое уравнение для (9) имеет вид

$$K^2+\frac{p^2n^2}{l^2}=0\text{, т.е. }K_{1,2}=\pm\frac{pn}{l}i.$$

Следовательно, общее решение уравнения (9) записывается в виде

$$T_n=d_1\cos\frac{pn}{l}t+d_2\sin\frac{pn}{l}t$$

Найдем частное решение уравнения (8). Его надо искать в виде $T_n=At+B,$ подставляя его в уравнение (8), получим

$$\frac{p^2n^2}{l^2}(At+B)=\frac{2l}{pn}(-1)^{n+1}t,B=0,A=(-1)^{n+1}\frac{2l^3}{p^3n^3}.$$

Итак, общее решение уравнения (8) имеет вид

$$T_n(t) = d_1 \cos\frac{pn}{l}t + d_2 \sin\frac{pn}{l}t + (-1)^{n+1}\frac{2l^3}{p^3 n^3}t.$$

Константы d_1, d_2 находим из начальных условий $T_n(0) = T_n'(0) = 0$, а потому $d_1 = 0, d_2 = (-1)^n \frac{2l^4}{p^4 n^4}$.

Ответ: $U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n \frac{2l^4}{p^4 n^4}\sin\frac{pn}{l}t + (-1)^{n+1}\frac{2l^3}{p^3 n^3}\right)\sin\frac{pnx}{l}.$

5. Краевая задача для однородного уравнения теплопроводности.

Дано уравнение $U_t = a^2 U_{xx}$ и условия $U(0,x) = j(x), U(t,0) = U(t,l) = 0.$ Согласно методу Фурье решение записывается в виде $U(t,x) = T(t)X(x).$ Подставляя его в данное уравнение, получим

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -l^2.$$

Для функции $X(x)$ имеем краевую задачу $X'' = -l^2 X, X(0) = X(l) = 0$, решение которой имеет вид $X(x) = X_n(x) = d_n \sin\frac{pn}{l}x, \; l = l_n = \frac{pn}{l}.$

Для функции $T(t)$ имеем уравнение $T' + a^2\left(\frac{pn}{l}\right)^2 T = 0,$ решение которого имеет вид $T(t) = T_n(t) = A_n \exp\left(-\frac{a^2 p^2 n^2}{l^2}t\right)$. Следовательно, решение уравнения теплопроводности имеет вид

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{a^2 p^2 n^2}{l^2}t\right)\sin\frac{pn}{l}x$$

коэффициенты b_n находим из начального условия $U(0,x) = j(x),$ т.е. $j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{pn}{l}x, b_n = \frac{2}{l}\int_0^l j(x)\sin\frac{pn}{l}x dx.$

<u>Пример 5</u>. Решить краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности

$$U_t = a^2 U_{xx}, \;\; a = 1, \;\; U(0,x) = 2\sin^2\frac{pn}{2l}x, \;\; U(t,0) = U(t,l) = 0$$

так как $U(x) = 2\sin^2\frac{pn}{l}x,$ то

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l 2\sin^2\frac{pn}{l}x\sin\frac{pn}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^l(1-\cos\frac{pn}{l}x)\sin\frac{pn}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{pn}{l}xdx-$$

$$-\frac{1}{l}\int_0^l\sin\frac{2pn}{l}xdx=-\frac{2}{pn}\cos\frac{pn}{l}x\Big|_0^l+\frac{1}{2pn}\cos\frac{2pn}{l}x\Big|_0^l=-\frac{2}{pn}\cos pn+\frac{2}{pn}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{pn},\text{если } n-\text{нечетное},\\ 0,\text{если } n-\text{четное}.\end{cases}$$

Ответ: $U(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{p(2k-1)}\exp\left(-\dfrac{4p^2(2k-1)^2}{l^2}t\right)\sin\dfrac{2p(2k-1)}{l}x.$

6. Численные методы решения задач по уравнениям математической физики.

Рассмотрим численные методы на примере решения неоднородного уравнения теплопроводности

$$U_t=a^2U_{xx}+F(x,t) \qquad (10)$$

с границей g и удовлетворяющее условиям

$$D=\{(x,t):0\le x\le 1,\ 0\le t\le 1\},\ U\big|_{t=0}=f(x),\ U\big|_{x=0}=j(t),\ U\big|_{x=1}=y(t). \qquad (11)$$

Используем метод сеток с шагом по оси $Ox, h_x=0{,}1$ и с шагом по оси $Ot, h_t=0{,}005$. Метод состоит в том, что искомое решение $U(x,t)$ представляются в виде таблицы $[U*]$ значений этого решения в точках некоторого точечного множества $D^*\subset D\cup g$ называемого сеткой. Точки множества называют узлами сетки. Узлы сетки совпадают с точками пересечения прямых $x_m=x_0+mh,\ t_n=t_0+nt$, т.е. с точками $(x_m,t_n)=(x_0+mh,t_0+nt)$. Решение $[U*]$ представляет собой множество значений $\{U_{mn}\}$, где $U_{mn}=U(x_0+mh,t_0+nt)$. Запишем уравнение (10) в операторном виде

$$LU=F_1(x,t) \qquad (12)$$

$$LU=\begin{cases}U_t-a^2U_{xx}\\ U(x,0),\ \ 0\le x\le 1\\ U(0,t)\\ U(1,t)\end{cases} \qquad F_1(x,t)=\begin{cases}F(x,t)\\ f(x)\\ j(t)\\ y(t)\end{cases} \qquad (13)$$

Заменив значения всех функций в точках (x,t) на их значения в точках (x_m,t_n), где $x_m=mh,\ t_n=nt,\ m=\overline{1,k},\ n=\overline{0,s},$ получим приближенное уравнение, называемое разностным уравнением

$$
L\tilde{U} = \begin{cases} \dfrac{U_{m,n+1} - U_{m,n}}{t} - a^2 \dfrac{U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}}{h^2} \\ 1 \le m \le k-1, \quad 0 \le n \le s-1 \\ U_{m,0}, \quad 0 \le m \le k, \\ U_{0,n}, \\ U_{k,n}, \quad 0 \le n \le s \end{cases}
$$

$$
\tilde{F}_1(x,t) = \begin{cases} F_{mn}, \quad 1 \le m \le k-1, \quad 0 \le n \le s-1, \\ f_m, \quad 0 \le m \le k, \\ j_n, \\ y_n, \quad 0 \le n \le s \end{cases}
$$

Программа решения задачи, написанная на языке Фортран:

```
      SUBROUTINE  PARAB(A,F,F1,FI,PSI,
     * K1,NS1,X,T,U)
      COMMON Y1,B
      DIMENSION X(K1),T(NS1),U(K1,NS1)
      HT=Y1/(NS1-1)
      HX=B/(K1-1)
      DO 2 I=1,K1
      X(I)=HX*(I-1)
2     U(I,1)=F1(X(I))
      DO 3 J=1,NS1
      T(J)=HT*(J-1)
      U(1,J)=FI(T(J))
3     U(NS1,J)=PSI(T(J))
      A1=HT*A/HX**2
      A2=1-2*A1
      K=K1-1
      NS=NS1-1
      DO 5 J=2,NS
      DO 5 I=2,K
5     U(I,J+1)=A1*U(I+1,J)+A2*U(I,J)+
      A1=U(I-1,J)+HT*F(X(I),T(J))
      RETURN
      END
```

ВАРИАНТЫ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ.

Все варианты составлены из задач со следующей постановкой:
Задача 1. Найти общее решение линейного однородного уравнения 1-го порядка.
Задача 2. Определить тип уравнения 2-го порядка и привести его к каноническому виду.
Задача 3. Решение краевой задачи для однородного волнового уравнения.
Задача 4. Решение краевой задачи для неоднородного волнового уравнения.
Задача 5. Численные методы решения неоднородного уравнения теплопроводности.

1.

$$1)ctgx\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+(y+2\cos^2 xctgx)\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$2)U_{xx}-9U_{yy}=0$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=(l-x)\sin\frac{px}{l}, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0$$

$$U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+t\sin\frac{px}{2}, a=5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,$$

$$U(t,0)=U(t,l)=0$$

$$5)U_t=U_{xx}+\cos\frac{px}{2}, U(x,0)=x^2\sin px, U(0,t)=0,$$

$$U(l,t)=0, x\in[0,1], t\in[0;0.4]$$

2.

$$1)x\frac{\partial U}{\partial x}+y\ln\frac{y}{x}\frac{\partial U}{\partial y}=0$$

$$2)U_{xx}-6U_{xy}+2U_y=0$$

$3) U_{tt} = a^2 U_{xx,} a = 3, U(0,x) = x\sin(l - x), \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0,$

$U(t,0) = U(t,l) = 0$

$4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + (t+5)x, a = 3, U(0,x) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$

$U(t,0) = U(t,l) = 0$

$5) U_t = U_{xx} + \sin\dfrac{px}{2}, U(x,0) = 1{,}2x^2 \sin px, U(0,t) = 0,$

$U(l,t) = e^{-0{,}1} \sin\dfrac{pt}{4}, x \in [o,2], t \in [0;0{,}1].$

3.

$1) x\dfrac{\partial U}{\partial x} + (2y - x^2)\dfrac{\partial U}{\partial y} = 0$

$2) U_{xx} + 8U_{xy} + 3U_x = 0$

$3) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 4, U(0,x) = 2(l - x)\sin x, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

$4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + (t^2 - 1)x, a = 1, U(0,x) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0$

$5) U_t = U_{xx} + \sin\dfrac{px}{2}, U(0,x) = 4x\sin px, U(0,t) = 1,$

$U(l,t) = 2. x \in [0,1], t \in [0,1].$

4.

$1) (x^2 - 1)\dfrac{\partial U}{\partial x} + (xy + x^4 - 1)\dfrac{\partial U}{\partial y} = 0$

$2) U_{xx} - 4U_{yy} + 10U_x = 0.$

$3) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 10, U(0,x) = 10x, U(t,0) = U(t,l) = 0, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0.$

$4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + 10(t-1)\cos 2x, a = 1, U(0,x) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$5) U_t = U_{xx} + 2x + t, U(x,0) = 0{,}5x^4 + 1, U(0,t) = t, U(l,t) = \sin 2t,$

$x \in [0,1], t \in [0,2].$

5.

1) $(2x-y)\dfrac{\partial U}{\partial x}+(x+y)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

2) $2U_{xx}-6U_{xy}+4U_{yy}=0.$

3) $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1{,}5, U(0,x)=2(x+3), \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\sin x,$

$U(t,0)=U(t,l)=1.$

4) $U_{tt}=a^2U_{xx}+tx^2, a=2, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

5) $U_t=U_{xx}+t\sin x, U(x,0)=x(1-x), U(0,t)=\sqrt{t}, U(l,t)=t$

$x\in[0;0{,}5], t\in[0,1]$

6.

1) $x^2\dfrac{\partial U}{\partial x}+(2xy+3)\dfrac{\partial U}{\partial x}=0.$

2) $4U_{xy}-U_{yy}+U_x-2U_y=0.$

3) $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=\cos 2x, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=x,$

$U(t,0)=U(t,l)=t.$

4) $U_{tt}=a^2U_{xx}+t^2x, a=3, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

5) $U_t=U_{xx}+e^{-0{,}3x}\sin x, U(x,0)=x^2, U(0,t)=1, U(l,t)=5t$

$x\in[0;1], t\in[0,3]$

7.

1) $(2x+y+1)\dfrac{\partial U}{\partial x}+(x-y)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

2) $2U_{xx}+2U_{xy}+5U_{yy}=0.$

3) $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=x^2, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\dfrac{1}{x},$

$U(t,0)=U(t,l)=0.$

4) $U_{tt}=a^2U_{xx}-50(l-x)\sin 4t, a=1{,}5, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

5) $U_t=U_{xx}+\sin\dfrac{px}{12}, U(x,0)=x\sin px, U(0,t)=0{,}5, U(l,t)=e^{-t},$

$x\in[0;1], t\in[0,2].$

8.

$1)(x-y+2)\dfrac{\partial U}{\partial x}+(2x+3y-1)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)U_{xx}-9U_{yy}+3U_{y}=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1, U(0,x)=\dfrac{x}{2}, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0,$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+t^2x^2, a=3{,}5,\ U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5)U_{t}=U_{xx}+t\sin 2x, U(x,0)=3x(2-x), U(0,t)=t^2,\ U(l,t)=\cos t,$

$x\in[0;1], t\in[0,2].$

9.

$1)(x+2y+1)\dfrac{\partial U}{\partial x}+(x-2y)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)U_{xx}-2U_{xy}-8U_{yy}+U_{x}-U_{y}=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2,\ U(0,x)=2\cos 2{,}5x,\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+t, a=1{,}5, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5)U_{t}=U_{xx}+\sin\dfrac{px}{6}, U(x,0)=4x^2, U(0,t)=t+1,\ U(l,t)=\sin t,$

$x\in[0;1], t\in[0,2].$

10.

$1)(x+y+2)\dfrac{\partial U}{\partial x}+(2x+3y+1)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)2U_{xx}-10U_{xy}+12U_{yy}+U_{y}=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1.5, U(0,x)=x\sin\dfrac{px}{l}, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+(t^2+1)\sin 2x, a=1, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5)U_{t}=U_{xx}+e^{-x}, U(x,0)=\sqrt{x}, U(0,t)=2t-1, U(l,t)=2\sin t,$

$x\in[0;1], t\in[0,1].$

11.

$$1) 2y\frac{\partial U}{\partial x} + (\sin x - y^2)\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

$$2) U_{xx} - 10U_{yy} + 5U_x - U_y = 0.$$

$$3) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = 2(l - x)\sin x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$$

$$4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + 2x\cos t, a = 1{,}5, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$$

$$5) U_t = U_{xx} + t\sin 3x, U(x,0) = 2x, U(0,t) = -1, U(l,t) = t + 1,$$
$$x \in [0;1], t \in [0,1].$$

12.

$$1) 2y\frac{\partial U}{\partial x} + (y^2 tgx + \sin 2x)\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

$$2) U_{xx} + 6U_{xy} + 8U_{yy} = 0.$$

$$3) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2.5,\ U(0,x) = x\cos\frac{px}{2l}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$$
$$U(t,0) = U(t,l) = 0.$$

$$4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + (x + 2)\sin t, a = 2, l = p,$$
$$U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$$

$$5) U_t = U_{xx} + (t + 1)\sin x, U(x,0) = x(1 - x), U(0,t) = t, U(l,t) = \cos\sqrt{t},$$
$$x \in [0;1], t \in [0,1].$$

13.

$$1) (x^2 + y^2)\frac{\partial U}{\partial x} + xy\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

$$2) U_{xx} + 10U_{xy} + 25U_{yy} = 0.$$

$$3) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = x + 2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$$

$$4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + t^2 x, a = 2, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$$

$$5) U_t = U_{xx} + t\sin 3x, U(x,0) = x^4, U(0,t) = 0{,}1t, U(l,t) = e^{-0.3t},$$
$$x \in [0;2], t \in [0,1].$$

14.

$$1)(x^2+y^2)\frac{\partial U}{\partial x}+(x^2-3y^2)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)U_{xy}-2U_{yy}+3U_y=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=e^x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+\sin t, a=1{,}5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=p.$$

$$5)U_t=U_{xx}+t+x, U(x,0)=\sqrt{x}, U(0,t)=t, U(l,t)=4,$$
$$x\in[0;1], t\in[0,1].$$

15.

$$1)(x+y+3)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-y+1)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)U_{xx}-9U_{yy}+2U_x=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=e^{x+1}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=1, U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+(x+4)\cos 3t, a=1, l=\frac{p}{2}, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)U_t=U_{xx}+xt, U(x,0)=x^2, U(0,t)=t, U(l,t)=1,$$
$$x\in[0;1], t\in[0,1].$$

16.

$$1)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-ytgx)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)U_{xx}-U_{xy}+U_{yy}+2U_y=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=x^2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=p.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+t^2, a=1, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)U_t=U_{xx}+tx, U(x,0)=3x, U(0,t)=t-1, U(l,t)=\sin 2t,$$
$$x\in[0;1], t\in[0,1].$$

17.

$1) x\frac{\partial U}{\partial x}+(xy+xe^{x})\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2) U_{xx}+2U_{xy}+10U_{yy}=0.$

$3) U_{tt}=a^{2}U_{xx}, a=4, U(0,x)=x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\frac{p}{2}.$

$4) U_{tt}=a^{2}U_{xx}+x\sin 2t, a=1, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=1.$

$5) U_{t}=U_{xx}+2x(t+1), U(x,0)=x, U(0,t)=t, U(l,t)=\sin t,$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

18.

$1) x\frac{\partial U}{\partial x}+(x^{2}\sqrt{y}-yx)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2) U_{xy}-U_{yy}+2U_{x}-U_{y}=0.$

$3) U_{tt}=a^{2}U_{xx}, a=2, U(0,x)=2x+1, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=p.$

$4) U_{tt}=a^{2}U_{xx}+te^{x}, a=1, l=2 U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5) U_{t}=U_{xx}+t\sqrt{x}, U(x,0)=x^{2}, U(0,t)=t+1, U(l,t)=e^{-t},$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

19.

$1) (x^{2}-y^{2})\frac{\partial U}{\partial x}+2xy\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2) U_{xx}-4U_{xy}-1=0.$

$3) U_{tt}=a^{2}U_{xx}, a=3, U(0,x)=x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=2.$

$4) U_{tt}=a^{2}U_{xx}+e^{x}\sin t, a=1, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5) U_{t}=U_{xx}+t^{2}x, U(x,0)=x, U(0,t)=t-1, U(l,t)=\sqrt{t},$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

20.

1) $(x^2-1)\dfrac{\partial U}{\partial x}+(-x+yx)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

2) $3U_{xx}+U_{xy}+U_y=0.$

3) $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=p.$

4) $U_{tt}=a^2U_{xx}+e^x\cos 2t, a=4, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=p.$

5) $U_t=U_{xx}-x^3t, U(x,0)=t, U(0,t)=1, U(l,t)=2x,$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

21.

1) $x\dfrac{\partial U}{\partial x}+(2y-x^2)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

2) $U_{xx}-8U_{xy}+U_y-U_x=0.$

3) $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=\sin 2x, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\dfrac{p}{2}.$

4) $U_{tt}=a^2U_{xx}+2x\cos t, a=1{,}5, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=p.$

5) $U_t=U_{xx}+t\sin x, U(x,0)=x^4, U(0,t)=t, U(l,t)=t^2,$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

22.

1) $2y\dfrac{\partial U}{\partial x}+(y^2 tgx+\sin 2x)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

2) $U_{xx}-4U_{yy}+U_x=0.$

3) $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=x\cos\dfrac{px}{l}, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=p.$

4) $U_{tt}=a^2U_{xx}+x\cos 2t, a=2, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=p.$

5) $U_t=U_{xx}+t^2\sin x, U(x,0)=2x, U(0,t)=t, U(l,t)=\sqrt{t},$
$x\in[0;1], t\in[0,1].$

23.

1) $(x-y)\dfrac{\partial U}{\partial x}+(x+2y)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

2) $U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}+U_{y}=0.$

3) $U_{tt}=a^{2}U_{xx}, a=2, U(0,x)=x(l-x), \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=1.$

4) $U_{tt}=a^{2}U_{xx}+e^{x}\sin t, a=4, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=1.$

5) $U_{t}=U_{xx}+tx, U(x,0)=x, U(0,t)=2t, U(l,t)=t,$

$x\in[0;1], t\in[0,1].$