БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра уравнений математической физики

Ф.Е. Ломовцев

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ПРАКТИКУМ

МИНСК
2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии изложены основные методы решения модельных задач по общему курсу «Уравнения математической физики». Приведены подробные решения типовых задач. Даются образцы решения модельных задач. Для решения некоторых задач применяется система компьютерной алгебры Mathematica (Wolfram Research, Inc). В каждой теме даются краткие теоретические сведения и практические рекомендации. Задачи в основном составлены автором.

Пособие дополняет лабораторный практикум «Уравнения математической физики» [1] и содержит те же темы.

Для упрощения изложения решений задач применяются сокращения некоторых основных терминов, значения которых разъясняются в начале пособия. Нумерация задач и формул двухзначная и в каждой теме своя: первая цифра обозначает номер темы и вторая цифра – номер формулы.

Предложения, пожелания и замечания просим направлять автору по электронной почте на адрес e-mail: lomovcev@bsu.by.

Для студентов механико-математического факультета БГУ.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\mathbb{C}$ – комплексная плоскость,

$C^{(k)}$ – множество всех k-раз непрерывно дифференцируемых функций,

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел,

$\mathbb{R}$ – вещественная прямая,

$\mathbb{R}^n$ – n - мерное Евклидово пространство,

ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение,

ДУЧП – дифференциальное уравнение в частных производных,

КЗ – краевая задача,

КУ – краевое условие,

ГУ – граничное условие,

НУ – начальное условие,

КВ – канонический вид,

ОР – общее решение,

ЧР – частное решение,

ЗК – задача Коши,

УК – условие Коши,

ЗГ – задача Гурса,

УГ – условие Гурса,

ЗШ–Л – задача Штурма–Лиувилля,

СЗ – собственное значение,

СФ – собственная функция,

ГЗ – граничная задача,

ФГ – функция Грина,

СмЗ – смешанная задача.

Тема 1. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Многие явления природы математически моделируются краевыми задачами (КЗ) для дифференциальных уравнений с частными производными и, в том числе, уравнений математической физики. Решая эти краевые задачи и изучая свойства их решений методами математической физики, мы познаем исходные явления природы в той мере, насколько точно краевые задачи моделируем их.

Для постановки краевой задачи сначала выбираем величины, область и функцию, которые являются определяющие изучаемое явление. Затем, пользуясь физическими законами и принципами, выражающими существенную связь между этими величинами, в области выводим уравнение, и на границе области – дополнительные к нему краевые условия (КУ), из которых впоследствии методами математической физики, как правило, однозначно находится неизвестная функция, характеризующая данное явление. Краевые условия включают граничные (ГУ) и начальные условия (НУ). Надо иметь в виду, что одна и та же краевая задача математической физики может служить моделью различных природных явлений. Все зависит от физического смысла величин, коэффициентов и исходных данных краевой задачи.

1. *Краевые задачи для гиперболических уравнений*. Уравнения гиперболического типа получаются при математическом моделировании различных нестационарных колебательных процессов – таких как колебания струн, мембран, балок, вибрации, упругости, акустики и других. При выводе краевых задач для гиперболических уравнений применяют закон Гука, законы механики Ньютона и принципы Даламбера [2, с. 9; 3, с. 19] или Гамильтона [3, с. 16].

Задача 1.1. *Задача о поперечных колебаниях струны*. Невесомая конечная струна линейной непрерывной плотности $\rho(x)$ находится в горизонтальном положении равновесия и натянута с предельной силой T. В начальный момент времени точкам струны сообщаются начальные отклонения и скорости. В дальнейшем на внутренние точки струны действует непрерывно распределенная поперечная сила, характеризующаяся линейной непрерывной плотностью $p(x,t)$. Поставить краевую задачу для определения малых поперечных колебаний точек этой струны от положения равновесия, если в процессе колебаний к шарику массы m_0, помещенному в ее внутренней точке x_0, приложена поперечная сила $F(t)$, левый конец струны упруго закреплен с коэффициентом упругости $\beta(t)$ и правый конец струны свободен.

Решение. Поставим КЗ, описывающую бесконечно малые, поперечные колебания бесконечно тонкой, невесомой, гибкой и упругой конечной струны.

Бесконечная тонкость конечной струны позволяет нам отождествить ее в положении равновесия с отрезком $[0,l]$ вещественной оси x.

Невесомость струны означает, что влияние ее веса на колебания столь незначительно, что им можно пренебречь.

Под гибкостью струны понимается, что она не сопротивляется изгибу, не связанному с изменением ее длины. Математически это значит, что в каждой внутренней колеблющейся точке струны возникают силы натяжения, уравновешивающие друг друга по третьему закону Ньютона и направленные по касательной в этой точке к профилю струны.

В силу упругости струны величины возникающих в ней натяжений вычисляются по линейному закону Гука.

Мы изучаем только поперечные колебания, лежащие в одной плоскости. Будем предполагать, что вектор смещения точки x в любой момент времени перпендикулярен к оси x. Тогда основной величиной, характеризующей колебания струны, является отклонение $u = u(x,t)$ струны в плоскости (x,u) от положения равновесия в точке x в момент времени t. В процессе вывода уравнения и краевых условий будем пренебрегать квадратами величины $u_x(x,t)$, так как рассматриваются бесконечно малые колебания струны.

I. ***Вывод уравнения.*** Для вывода уравнения колебаний возьмем бесконечно малый участок струны от x до $x+\Delta x$, не содержащий точки x_0, и спроектируем на оси координат все реально действующие на этот участок силы и его мнимую силу инерции. Согласно принципу Даламбера, сумма проекций всех этих сил на каждую из осей должна равняться нулю. Найдем сумму проекций указанных сил на ось u. Для этого сначала вычисляем длину дуги $\widehat{AB}$ (рис 1.1) интегралом

$$\left|\widehat{AB}\right| = \int_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1+(u_x)^2}\,dx \approx \Delta x.$$

Это означает, что удлинения участков колеблющейся струны не происходит и, следовательно, по закону Гука величина натяжения во внутренних точках $x \neq x_0$ струны не зависит ни от x, ни от времени, т. е. сила натяжения $\left|\vec{T}(x,t)\right| = T \quad \forall x,\ t$.

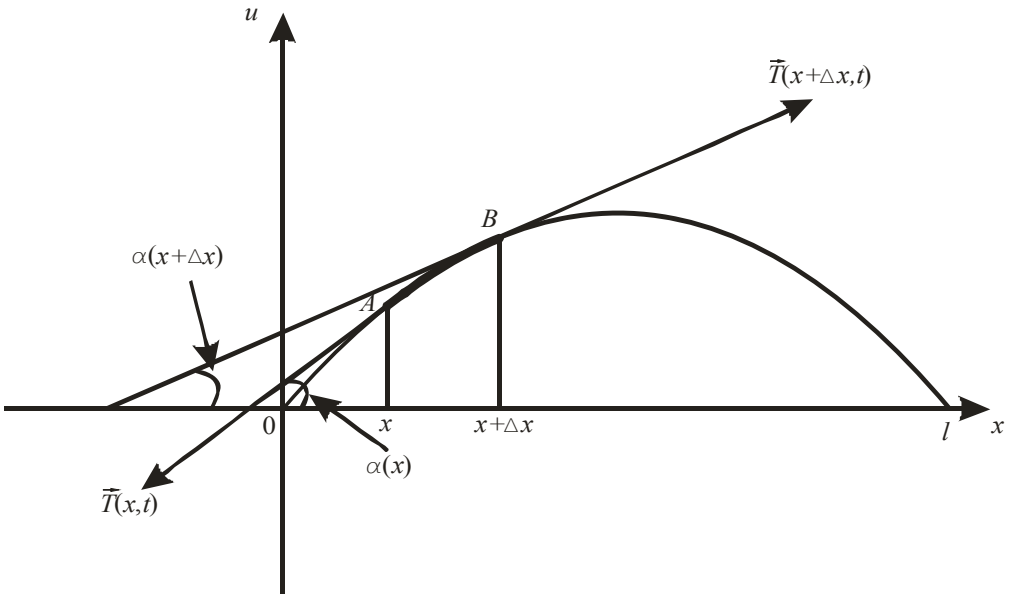

Рис. 1.1. Силы натяжения, действующие на концах внутреннего участка струны

Сумма проекций сил натяжения на концах участка $\overset{\frown}{AB}$ с точностью до бесконечно малых первого порядка равна

$$T\left[\sin\alpha(x+\Delta x)-\sin\alpha(x)\right]=T\left[\frac{\mathrm{tg}\alpha(x+\Delta x)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha(x+\Delta x)}}-\frac{\mathrm{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha(x)}}\right]=$$

$$=T\left[\frac{u_x(x+\Delta x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x+\Delta x,t)}}-\frac{u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x{}^2(x,t)}}\right]\approx$$

$$\approx T\left[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)\right]\approx Tu_{xx}(x,t)\Delta x$$

по теореме Лагранжа о конечных приращениях, если $u\in C^{(2)}$. Во внутренних точках дуги $\overset{\frown}{AB}$ силы натяжения уравновешивают друг друга.

Можно считать внешние силы и силу инерции направленными вдоль оси u. Тогда на участок дуги $\overset{\frown}{AB}$ вдоль оси u действуют внешняя сила $\approx p(x,t)\Delta x$ и сила инерции $\approx -\rho(x)\,u_{tt}(x,t)\Delta x$, где $m\approx\rho(x)\,\Delta x$ — масса этого участка.

Поэтому сумма проекций всех сил на ось u имеет вид

$$\left[Tu_{xx}(x,t)+p(x,t)-\rho(x)u_{tt}(x,t)\right]\Delta x=0.$$

Отсюда после деления на $\Delta x \neq 0$ и предельного перехода при $\Delta x \to 0$ получаем точное равенство нулю, т. е. дифференциальное уравнение вынужденных колебаний струны

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) - Tu_{xx}(x,t) = p(x,t), \quad 0 < x < x_0,\ x_0 < x < l,\ t > 0. \qquad (1.1)$$

II. *Вывод граничных условий.* 1) $x = 0$. Для вывода ГУ на левом конце $x = 0$ струны выделяем примыкающий к точке $x = 0$ участок $\widehat{KL}$ бесконечно малой длины Δx и проектируем на ось u все силы, действующие на этот участок (рис 1.2).

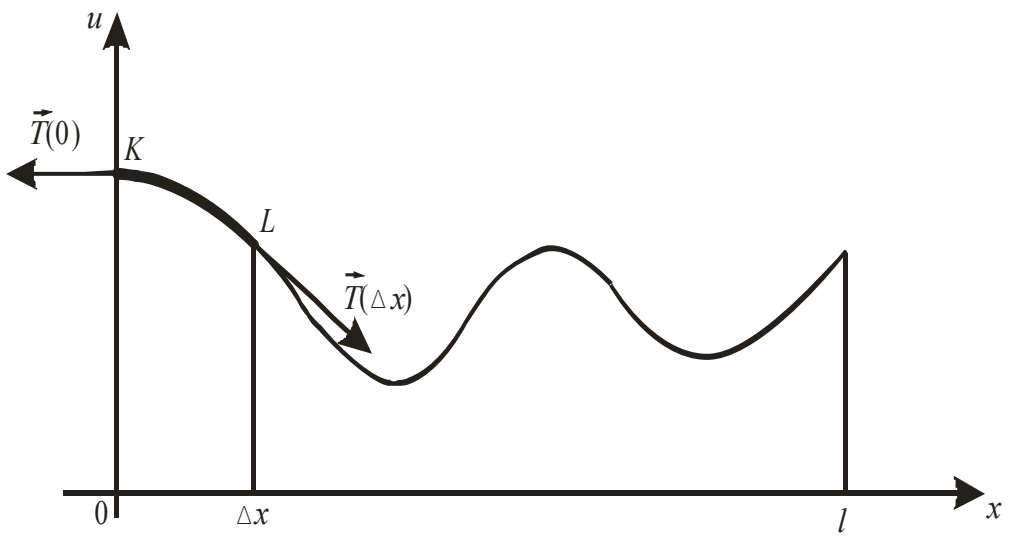

Рис. 1.2. Силы натяжения на концах участка, примыкающего к левому концу струны

Упругое закрепление левого конца струны означает, что точка $x = 0$ струны испытывает со стороны внешней среды сопротивление, пропорциональное отклонению и противоположно ему направленное, т. е. сопротивление внешней среды в точке $x = 0$ струны равно $-\beta(t)u(0,t)$. Проекция силы натяжения $\vec{T}(\Delta x)$ в точке L участка $\widehat{KL}$ на ось u равна $\approx Tu_x(\Delta x,t)$. Проекциями на ось u вынуждающей силы и силы инерции этого участка являются $\approx p(0,t)\Delta x$ и $\approx -\rho(0)u_{tt}(0,t)\Delta x$. В силу принципа Даламбера приравниваем их сумму нулю и получаем равенство

$$Tu_x(\Delta x,t) - \beta(t)u(0,t) + p(0,t)\Delta x - \rho(0)u_{tt}(0,t)\Delta x = 0,$$

из которого предельным переходом при $\Delta x \to 0$ вследствие непрерывности и ограниченности входящих функций приходим к ГУ

$$Tu_x(0,t) - \beta(t)u(0,t) = 0, \ t > 0. \qquad (1.2)$$

2) $x = l$. Чтобы вывести математическое выражение свободного правого конца $x = l$ струны, выбираем примыкающий к точке $x = l$ участок $\overset{\frown}{MN}$ бесконечно малой длины Δx и проектируем на ось u все силы, действующие на этот участок (рис 1.3).

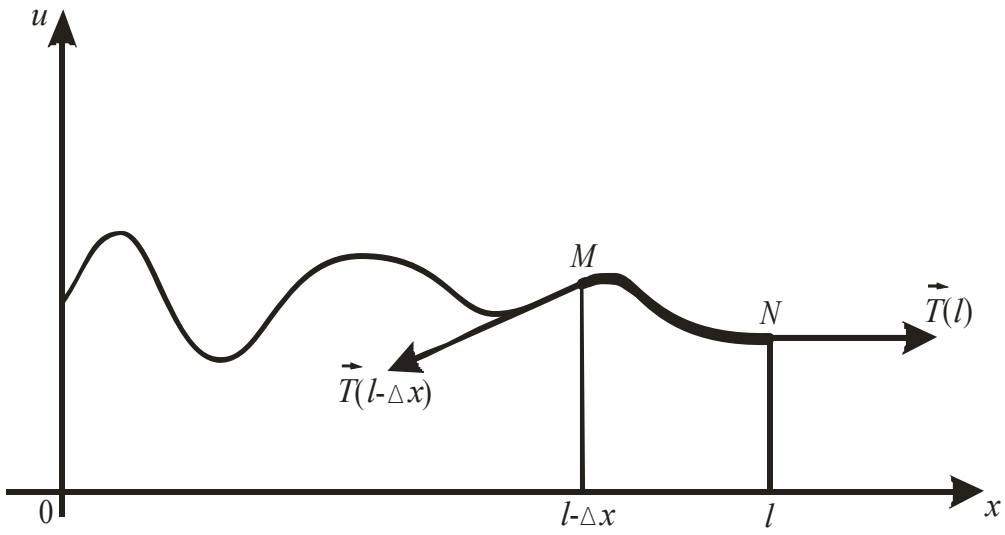

Рис. 1.3. Силы натяжения на концах участка, примыкающего к правому концу струны

Сумма проекций сил натяжения на участок $\overset{\frown}{MN}$ равна $\approx -Tu_x(l - \Delta x, t)$, так как натяжение в свободной точке $x = l$ струны действует параллельно оси x. Проекции на ось u вынуждающей силы и силы инерции участка $\overset{\frown}{MN}$ равны $\approx p(l,t)\Delta x$ и $\approx -\rho(l)u_{tt}(l,t)\Delta x$ соответственно. Приравнивая нулю их сумму

$$-Tu_x(l - \Delta x, t) + p(l,t)\Delta x - \rho(l)u_{tt}(l,t)\Delta x = 0$$

и устремляя здесь Δx к нулю, получаем второе ГУ

$$u_x(l,t) = 0, \ t > 0. \qquad (1.3)$$

III. ***Вывод условий для точки*** x_0. С этой целью применяем принцип Даламбера к сумме проекций на ось u всех сил, действующих на участок $\widehat{PR}$ бесконечно малой $\Delta x = [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ – окрестности точки x_0 (рис 1.4).

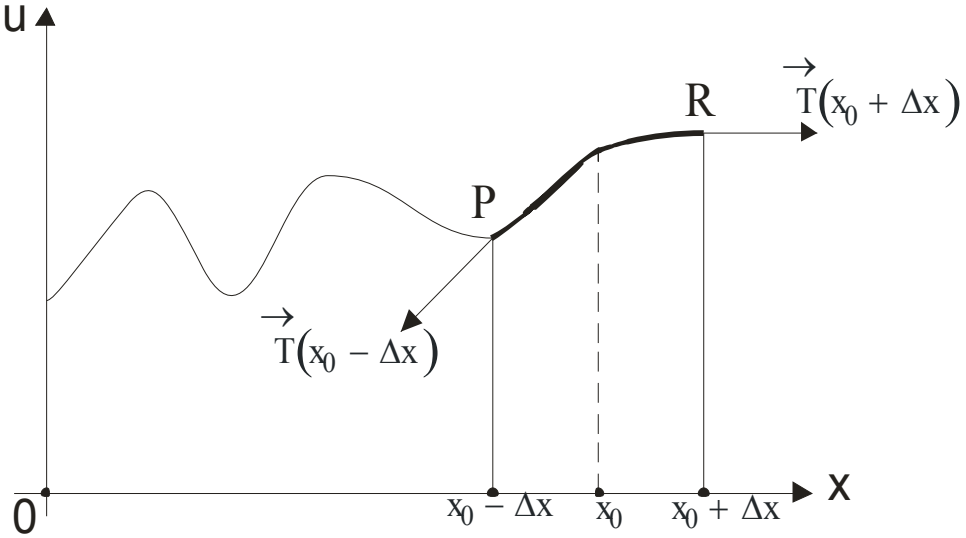

Рис 1.4. Силы натяжения на концах участка, содержащего шарик

Согласно выводу уравнения (1.1), сумма проекций на ось u сил натяжения на концах этого участка равна $\approx T[u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0 - \Delta x, t)]$. Вдоль оси u на дугу $\widehat{PR}$ в момент времени t действуют внешняя сила $\approx 2p(x_0, t)\Delta x + F(t)$ и сила инерции $\approx -2\rho(x_0)u_{tt}(x_0, t)\Delta x - m_0 u_{tt}(x_0, t)$. В результате применения принципа Даламбера имеем равенство

$$T[u_x(x_0 - \Delta x, t) - u_x(x_0 + \Delta x, t)] + 2p(x_0, t)\Delta x + F(t) - 2\rho(x_0)u_{tt}(x_0, t)\Delta x - m_0 u_{tt}(x_0, t) = 0.$$

Устремив здесь Δx к нулю, приходим к условию разрыва первой производной в точке x_0

$$T[u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t)] + F(t) = m_0 u_{tt}(x_0, t),\ t > 0. \qquad (1.4)$$

Кроме того, чтобы не произошел разрыв самой струны в точке x_0 и она колебалась как единое целое, нужно добавить условие непрерывности в этой точке

$$u(x_0+0,t)=u(x_0-0,t),\ t>0\,. \qquad (1.5)$$

IV. ***Задание начальных условий***. Для завершения постановки требуемой КЗ теперь остается к дифференциальному уравнению (1.1) с ГУ (1.2), (1.3), условием разрыва первой производной (1.4) и условием непрерывности (1.5) присоединить НУ в начальный момент колебаний

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad u_t(x,0)=\psi(x), \quad 0<x<l\,,$$

где функции $\varphi(x)$ — начальный профиль и $\psi(x)$ — начальная скорость струны.

Задача 1.2. *Задача о продольных колебаниях стержня.* Пусть упругий конечный стержень с достаточно гладкими площадью переменных поперечных сечений $S(x)$, объемной плотностью $\rho(x)$ и поверхностным модулем упругости Юнга $E(x)$ может смещаться вдоль своей оси. В начальный момент времени поперечным сечениям стержня сообщаются продольные начальные отклонения и скорости. На эти сечения по оси постоянно действует внешняя сила с объемной непрерывной плотностью $p(x,t)$. Предполагается, что поперечные сечения стержня при смещениях остаются плоскими и перпендикулярными оси стержня. Поставить краевую задачу о малых продольных колебаниях его сечений от положения равновесия, если в процессе колебаний левый конец стержня движется по заданному закону $\mu(t)$, а его правый конец испытывает сопротивление, пропорциональное скорости с коэффициентом трения $\beta(t)$ [4].

Решение. Предположения данной задачи позволяют считать математической моделью данного стержня отрезок $[0,l]$ вещественной оси x, которая совпадает с продольной осью стержня и абсциссы $x\in[0,l]$ которой являются координатами его поперечных сечений. Обозначим через $u(x,t)$ отклонение в момент времени t того сечения стержня, которое имело абсциссу x в состоянии покоя. При выводе уравнения и краевых условий можно предполагать, что натяжения, возникающие в стержне в случае бесконечно малых колебаний, удовлетворяют закону Гука.

Выделим произвольную бесконечно малую часть стержня, находящуюся в покое между поперечными сечениями с абсциссами x и $x+\Delta x$ (рис 1.5).

Вычислим в момент t относительное удлинение участка $[x, x+\Delta x]$, координаты концов которого имеют значения $x+u(x,t)$ и $x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)$. Его относительное удлинение равно величине

$$\frac{\Delta x+u(x+\Delta x,t)-u(x,t)-\Delta x}{\Delta x}=u_x(x+\theta\Delta x,t), \quad 0\le\theta\le 1,$$

предел которой при $\Delta x\to 0$ дает относительное удлинение $u_x(x,t)$ стержня в точке x [5, с. 31]. Поэтому по закону Гука натяжение стержня в каждом его сечении с абсциссой x равно

$$T(x,t)=E(x)S(x)u_x(x,t), \quad t>0.$$

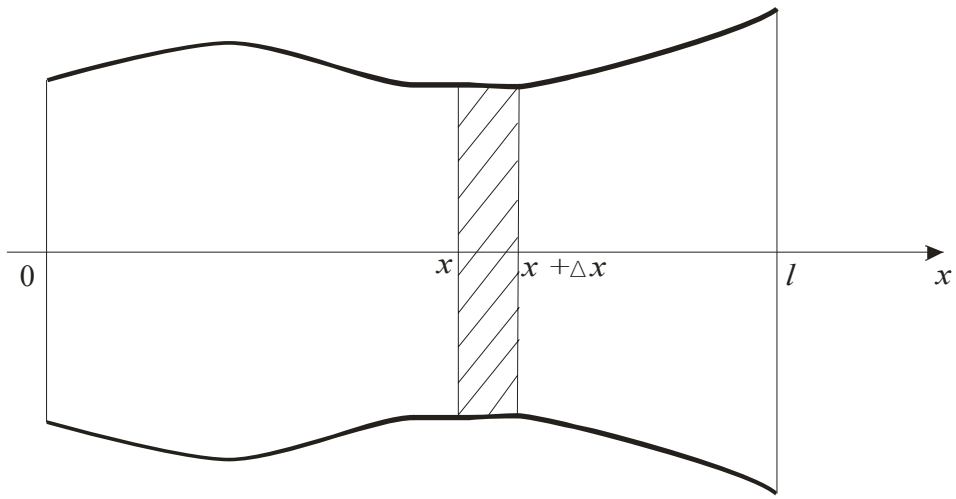

Рис. 1.5. Внутренний участок стержня

I. ***Вывод уравнения.*** Чтобы вывести уравнение продольных колебаний стержня, по принципу Даламбера приравняем нулю сумму всех реально действующих сил и силы инерции на участок стержня $[x, x+\Delta x]$. Равнодействующая сил натяжения равна

$$T(x+\Delta x)-T(x)=E(x+\Delta x)S(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x,t)-E(x)S(x)u_x(x,t)\approx$$
$$\approx(E(x)S(x)u_x(x,t))_x\Delta x.$$

Внешнюю силу и силу инерции можно считать направленным вдоль оси стержня. Они выражаются соответственно величинами

$\approx S(x)p(x,t)\Delta x$ и $\approx -\rho(x)S(x)u_{tt}(x,t)\Delta x$, где $S(x)\Delta x$ – объем и $\rho(x)S(x)\Delta x$ – масса участка стержня $[x, x+\Delta x]$. Поэтому для их суммы имеем равенство

$$\left[\left(E(x)S(x)u_x(x,t)\right)_x + S(x)p(x,t) - \rho(x)S(x)u_{tt}(x,t)\right]\Delta x = 0.$$

Разделив его на $\Delta x \neq 0$ и устремив Δx к нулю, получаем точное дифференциальное уравнение вынужденных продольных колебаний стержня

$$\rho(x)S(x)u_{tt}(x,t) - \left(E(x)S(x)u_x(x,t)\right)_x = S(x)p(x,t), \quad 0 < x < l, t > 0. \quad (1.6)$$

II. ***Вывод граничных условий.*** 1) $x = 0$. Движение левого конца стержня по заданному закону $\mu(t)$ выражается граничным условием

$$u(0,t) = \mu(t), \ t > 0. \quad (1.7)$$

2) $x = l$. С целью математического моделирования условий задачи 1.2 на правом конце стержня найдем сумму всех сил, действующих на участок стержня $[l - \Delta x, l]$ (рис 1.6).

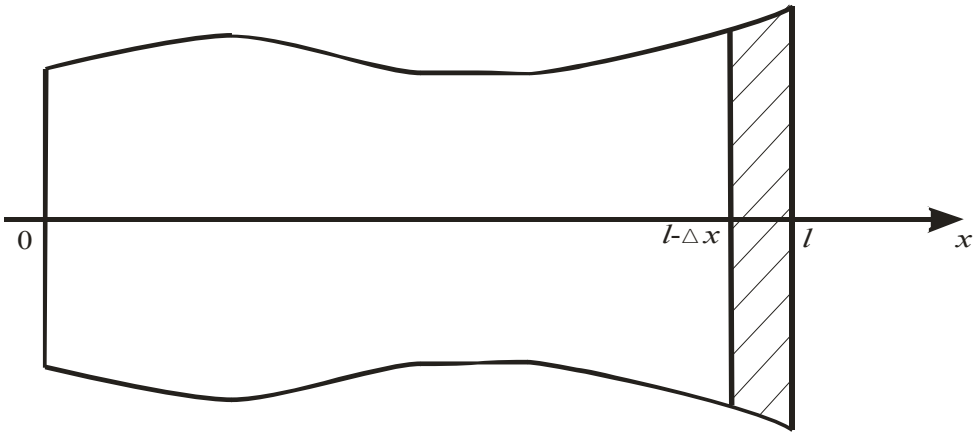

Рис. 1.6. Участок, примыкающий к правому концу стержня

На левом конце этого участка сила натяжения $T(l-\Delta x) = E(l-\Delta x)S(l-\Delta x)u_x(l-\Delta x, t)$. По условию задачи 1.2 на

правый конец стержня действует сила $-\beta(t)u_t(l,t)$. Внешняя сила и сила инерции участка $[l-\Delta x,l]$ равны $\approx S(l)p(l,t)\Delta x$ и $-\rho(l)S(l)u_{tt}(l,t)\Delta x$ соответственно. В силу принципа Даламбера их сумму приравниваем нулю

$$E(l-\Delta x)S(l-\Delta x)u_x(l-\Delta x,t)-\beta(t)u_t(l,t)+S(l)p(l,t)\Delta x-\rho(l)S(l)u_{tt}(l,t)\Delta x=0.$$

Отсюда предельным переходом при $\Delta x\to 0$ ввиду непрерывности и ограниченности входящих функций получаем точное второе ГУ

$$E(l)S(l)u_x(l,t)-\beta(t)u_t(l,t)=0, \quad t>0. \tag{1.8}$$

III. ***Задание начальных условий.*** Дифференциальное уравнение (1.6) и ГУ (1.7),(1.8) остается дополнить еще НУ

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad u_t(x,0)=\psi(x), \quad 0<x<l,$$

где $\varphi(x)$ – начальные смещения и $\psi(x)$ – начальные скорости поперечных сечений стержня.

2. ***Краевые задачи для параболических уравнений.*** Уравнения параболического типа получаются при математическом моделировании теплопроводности, диффузии и других процессов. Вывод краевых задач для параболических уравнений основывается на законе Фурье, уравнении теплового баланса, законе Нэрнста и уравнении баланса количества вещества [5].

Задача 1.3. Имеется конечный стержень с достаточно гладкими объемной плотностью $\rho(x)$, площадью поперечных сечений $S(x)$, коэффициентами внутренней и внешней конвективной теплопроводности $k(x)$ и $\eta(x)$ соответственно, периметром поперечных сечений $\sigma(x)$, удельной теплоемкостью $c(x)$, объемной плотностью $q(x,t)$ внутренних источников тепла и температурой внешней среды $\tau(t)$. Предполагается, что в каждом поперечном сечении стержня температура всех точек одинакова. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня при условиях, что на его левом конце задан тепловой поток $Q(t)$, правый конец стержня теплоизолирован и на его боковой поверхности протекает конвективный теплообмен с внешней средой.

Решение. Условия этой задачи дают возможность направить ось стержня вдоль оси x и абсциссами $x \in [0,l]$ обозначать его поперечные сечения. Пусть значения функций $u = u(x,t)$ – температура точек в поперечном сечении x в момент времени t.

I. ***Вывод уравнения.*** Для этого возьмем произвольный бесконечно малый участок стержня, заключенный между поперечными сечениями в точках x и $x + \Delta x$ (см. рис 1.5), и за произвольно малый промежуток времени от t до $t + \Delta t$ составим для него уравнение теплового баланса

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3, \tag{1.9}$$

где Q_1 – тепло, поступившее через сечения x и $x + \Delta x$, Q_2 – тепло, притекшее через боковую поверхность, Q_3 – тепло, полученное от внутренних источников участка стержня за промежуток времени Δt.

Согласно закону Фурье, количество тепла, протекающее через малую площадку ΔS за время Δt, определяется формулой

$$\Delta Q = -k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial \vec{n}}\Delta S \Delta t, \tag{1.10}$$

где $\vec{n}$ — нормаль к площадке, направленная в сторону передачи тепла. По этому закону количество тепла, поступившее через сечения x и $x + \Delta x$, выражается величиной

$$Q_1 = \left[k(x+\Delta x)S(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x,t) - k(x)S(x)u_x(x,t)\right]\Delta t \approx (k(x)S(x)u_x(x,t))_x \Delta x \Delta t. \tag{1.11}$$

Приток тепла через боковую поверхность, в силу закона конвективного теплообмена Ньютона, пропорционален разности температур и равен

$$Q_2 \approx \eta(x)\sigma(x)[\tau(t) - u(x,t)]\Delta x \Delta t. \tag{1.12}$$

Наконец, внутренние источники участка $[x, x + \Delta x]$ за время Δt выделяют тепло

$$Q_3 \approx S(x)q(x,t)\Delta x \Delta t. \tag{1.13}$$

Все это тепло расходуется на нагревание взятого участка стержня от температуры $u(x,t)$ до температуры $u(x,t+\Delta t)$ и поэтому

$$Q \approx c(x)\rho(x)S(x)\left[u(x,t+\Delta t)-u(x,t)\right]\Delta x \approx c(x)\rho(x)S(x)u_t(x,t)\Delta x\Delta t. \quad (1.14)$$

Подставляем значения тепла $(1.10)-(1.13)$ в уравнение (1.9), сокращаем полученное равенство на $\Delta x\Delta t \neq 0$, переходим в нем к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$ и приходим к точному дифференциальному уравнению теплопроводности

$$\begin{aligned} &c(x)\rho(x)S(x)u_t(x,t)-(k(x)S(x)u_x(x,t))_x-\eta(x)\sigma(x)(\tau(t)-u(x,t)) \\ &=S(x)q(x,t),\ \ 0<x<l,\ t>0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

II. ***Вывод граничных условий.*** 1) $x=0$. Применив закон Фурье (1.10) о протекающем тепле за единицу времени, заключаем, что заданный тепловой поток на левом конце стержня математически записывается в виде

$$-k(0)S(0)u_x(0,t)=Q(t),\ t>0\,. \quad (1.16)$$

2) $x=l$. Чтобы найти математическое выражение теплоизоляции правого конца стержня, вычислим уравнение теплового баланса (1.9) за промежуток времени Δt для бесконечно малого участка стержня $[l-\Delta x,l]$, заключенного между поперечными сечениями в точках $l-\Delta x$ и l (рис 1.6).

Согласно условию задачи 1.3 о теплоизоляции сечения $x=l$, по закону Фурье (1.10) через сечение $x=l-\Delta x$ поступает тепло

$$Q_1 \approx k(l-\Delta x)S(l-\Delta x)u_x(l-\Delta x,t)\Delta t. \quad (1.17)$$

На основании формулы (1.12) через боковую поверхность указанного участка приток тепла равен

$$Q_2 \approx \eta(l)\sigma(l)\left[\tau(t)-u(l,t)\right]\Delta x\Delta t. \quad (1.18)$$

Внутренние источники этого участка по формуле (1.13) выделяют количество тепла

$$Q_3 \approx S(l)q(l,t)\Delta x\Delta t. \qquad (1.19)$$

Аналогично выражению (1.14) имеем величину тепла

$$Q \approx c(l)\rho(l)S(l)\left[u(l,t+\Delta t)-u(l,t)\right]\Delta x \approx c(l)\rho(l)S(l)u_t(l,t)\Delta x\Delta t. \quad (1.20)$$

Теперь, подставляя значения тепла (1.17)−(1.20) в уравнение (1.9), сокращая полученное равенство на $\Delta t \neq 0$ и устремляя в нем Δx к нулю, в силу непрерывности и ограниченности входящих функций приходим к точному равенству $k(l)S(l)u_x(l,t)=0$, из которого имеем второе ГУ

$$u_x(l,t)=0,\ t>0. \qquad (1.21)$$

III. ***Задание начального условия.*** Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса распространения тепла необходимо, кроме уравнения теплопроводности (1.15) и температурных режимов (1.16), (1.21) на концах стержня, задать НУ

$$u(x,0)=\varphi(x), 0<x<l,$$

где $\varphi(x)$ – начальная температура поперечных сечений стержня.

Тема 2. КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Тип уравнения с n – переменными $x=(x_1,\dots,x_n)\in G\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(x)=F(x,u(x),u_{x_1}(x),\dots,u_{x_n}(x)) \qquad (2.1)$$

в каждой фиксированной точке $x_0\in G$ определяется тройкой чисел $\{n_+,n_0,n_-\}$, где n_+, n_0 и n_- — количество положительных, нулевых и отрицательных собственных значений симметрической матрицы $\{a_{ij}(x_0)\}_{n\times n}$ соответственно. Тип уравнения (2.1) может определяться по каноническому виду (КВ) квадратичной формы $\Phi(t)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)t_i\ t_j$ этого уравнения. Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду, например, методом выделения полных квадратов.

Уравнение (2.1) в каждой фиксированной точке $x_0\in G$ можно привести к каноническому виду линейным неособым преобразованием $y=B^Tx$, $y=(y_1,\dots,y_n)$, где B^T — транспонированная матрица к такой матрице B, что преобразование $t=B\tau$, где $t=(t_1,\dots,t_n)$, $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)\in\mathbb{R}^n$, приводит квадратичную форму уравнения (2.1) к каноническому виду.

Задача 2.1. Определить тип и привести к каноническому виду уравнение

$$u_{x_1x_1}+2u_{x_1x_2}-2u_{x_1x_3}+u_{x_3x_3}+u_{x_1}-u_{x_2}+0,5u=2x_1+x_2+2x_3. \qquad (2.2)$$

Решение. I. *Классификация.* Определим тип уравнения по КВ его квадратичной формы $\Phi(t) = \underline{t_1^2} + \underline{2t_1t_2} - \underline{2t_1t_3} + t_3^2$. Следуя методу Лагранжа выделения полных квадратов, если квадратичная форма содержит квадрат t_1^2 переменной t_1, которая присутствует еще хотя бы в одном смешанном произведении $t_1\, t_j$, $j = \overline{1,n}$, то для удаления всех этих смешанных произведений выделяем сумму всех входящих в подчеркнутые слагаемые переменных t_1, t_2 и t_3 с такими коэффициентами, чтобы возведение ее в квадрат давало подчеркнутые слагаемые,

$$\Phi(t) = (t_1 + t_2 - t_3)^2 + \underline{2t_2t_3} - \underline{t_2^2} = (t_1 + t_2 - t_3)^2 - (t_2 - t_3)^2 + t_3^2 .$$

Полагаем

$$\begin{cases} \tau_1 = t_1 + t_2 - t_3, \\ \tau_2 = t_2 - t_3, \\ \tau_3 = t_3 \end{cases} \qquad (2.3)$$

и получаем КВ $\Phi(\tau) = \tau_1^2 - \tau_2^2 + \tau_3^2$. По количеству его равных канонических коэффициентов 1, -1 и 1 заключаем, что уравнение (2.2) имеет тип $\{2,0,1\}$, который соответствует *нормально гиперболическому уравнению.*

II. *Приведение к КВ*. Найдем матрицу *B*, с помощью которой неособым преобразованием $t = B\tau$ получен КВ квадратичной формы уравнения (2.2). С этой целью решаем линейную систему уравнений (2.3) относительно t_1, t_2 и t_3 и получаем, что

$$\begin{cases} t_1 = \tau_1 - \tau_2, \\ t_2 = \tau_2 + \tau_3, \\ t_3 = \tau_3, \end{cases}$$

т. е. матрица $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Теперь в уравнении (2.2) делаем замену переменных по формуле

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = B^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix},$$

т. е. переходим к новым переменным $y_1 = x_1$, $y_2 = -x_1 + x_2$ и $y_3 = x_2 + x_3$ новой функции $\tilde{u}(y) = u(x)$. Вычисляем первые частные производные, содержащиеся в уравнении (2.2),

$$u_{x_1} = \tilde{u}_{\xi_1}(\xi_1)'_{x_1} + \tilde{u}_{\xi_2}(\xi_2)'_{x_1} + \tilde{u}_{\xi_3}(\xi_3)'_{x_1} = \tilde{u}_{\xi_1} - \tilde{u}_{\xi_2},$$
$$u_{x_2} = \tilde{u}_{\xi_1}(\xi_1)'_{x_2} + \tilde{u}_{\xi_2}(\xi_2)'_{x_2} + \tilde{u}_{\xi_3}(\xi_3)'_{x_2} = \tilde{u}_{\xi_2} + \tilde{u}_{\xi_3}.$$

Результат этой замены переменных во вторых частных производных, содержащихся в уравнении (2.2), можно сразу записать по КВ $\Phi(\tau)$ квадратичной формы $\Phi(t)$. Поскольку в силу замены переменных $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1 + y_2$ и $x_3 = -y_1 - y_2 + y_3$, то правая часть уравнения $2x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1 - y_2 + 2y_3$. В результате приходим к КВ уравнения (2.2)

$$\tilde{u}_{y_1y_1} - \tilde{u}_{y_2y_2} + \tilde{u}_{y_3y_3} - \tilde{u}_{y_1} - 2\tilde{u}_{y_2} - \tilde{u}_{y_3} + 0{,}5\tilde{u} = y_1 - y_2 + 2y_3. \qquad (2.4)$$

Это уравнение допускает дальнейшее упрощение заменой функции $\tilde{u}(y) = v(y)e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} = v(y)e^{(\alpha, y)}$, где координаты вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ требуют подбора. Находим частные производные

$$\tilde{u}_{y_i} = (v_{y_i} + \alpha_i v)e^{(\alpha, y)},$$
$$\tilde{u}_{y_iy_i} = (v_{y_iy_i} + 2\alpha_i v_{y_i} + \alpha_i^2 v)e^{(\alpha, y)}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Подставив их в уравнение (2.4) и разделив на $e^{(\alpha,y)}$, получаем следующие коэффициенты при младших частных производных новой функции $v(y)$:

$$\begin{array}{l|l} v_{y_1} & b_1 = 2\alpha_1 + 1, \\ v_{y_2} & b_2 = -2\alpha_2 - 2, \\ v_{y_3} & b_3 = 2\alpha_3 - 1, \\ v & c = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 + 0,5. \end{array}$$

Приравнивая коэффициенты $b_i, i = \overline{1,3}$, нулю, определяем значения параметров $\alpha_1 = -0,5$, $\alpha_2 = -1$ и $\alpha_3 = 0,5$ и, следовательно, коэффициент $c = 1$. Таким образом, КВ (2.4) исходного уравнения приводится к более простому уравнению

$$v_{y_1y_1} - v_{y_2y_2} + v_{y_3y_3} + v = (y_1 - y_2 + 2y_3)e^{0,5y_1 + y_2 - 0,5y_3}.$$

Задача 2.2. Определить тип и привести к каноническому виду уравнение

$$u_{x_1x_2} + u_{x_2x_3} + u_{x_1} + u_{x_2} + u_{x_3} = 2x_1 + x_2 - x_3. \tag{2.5}$$

Решение. I. *Классификация.* Квадратичная форма $\Phi(t) = t_1t_2 + t_2t_3$ уравнения (2.5) не содержит ни одного квадрата $t_i^2, i = \overline{1,3}$. Поэтому, следуя методу Лагранжа выделения полных квадратов, в $\Phi(t)$ производим специальное невырожденное преобразование

$$\begin{cases} t_1 = t_1' - t_2', \\ t_2 = t_1' + t_2', \\ t_3 = t_3', \end{cases} \tag{2.6}$$

применение которого дает квадраты $\Phi(t') = \underline{t_1'^2} - t_2'^2 + \underline{t_1't_3'} + t_2't_3'$. Теперь выделяем полные квадраты по правилу, указанному в решении предыдущей задачи 2.1,

$$\Phi(t') = (t_1' + \tfrac{1}{2}t_3')^2 - \underline{\tfrac{1}{4}t_3'^2} - t_2'^2 + \underline{t_2't_3'} = (t_1' + \tfrac{1}{2}t_3')^2 - (t_2' - \tfrac{1}{2}t_3')^2 = \tau_1^2 - \tau_2^2 + 0\cdot\tau_3^2,$$

где

$$\begin{cases} \tau_1 = t_1' + \tfrac{1}{2}t_3', \\ \tau_2 = t_2' - \tfrac{1}{2}t_3', \\ \tau_3 = t_3'. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Согласно каноническим коэффициентам 1, 0 и -1 КВ $\Phi(\tau)$, уравнение (2.5) имеет тип $\{1,1,1\}$, что соответствует *гиперболически-параболическому уравнению.*

II. *Приведение к КВ*. Чтобы определить матрицу B, с помощью которой квадратичная форма приведена к КВ, найдем решения $t_1' = \tau_1 - \tfrac{1}{2}\tau_3$, $t_2' = \tau_2 + \tfrac{1}{2}\tau_3$, $t_3' = \tau_3$ линейной системы уравнений (2.7), подставим их в равенства (2.6) и получим, что $t_1 = \tau_1 - \tau_2 - \tau_3$, $t_2 = \tau_1 + \tau_2$, $t_3 = \tau_3$, т. е. матрица

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В уравнении (2.5) переходим к новым переменным

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = B^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем первые частные производные

$$u_{x_1} = \tilde{u}_{y_1} - \tilde{u}_{y_2} - \tilde{u}_{y_3},\ u_{x_2} = \tilde{u}_{y_1} + \tilde{u}_{y_2},\ u_{x_3} = \tilde{u}_{y_3}.$$

Из $x_1 = \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2)$, $x_2 = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)$ и $x_3 = \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2) + y_3$ следует, что правая часть уравнения (2.5) равна $2x_1 + x_2 - x_3 = y_1 - y_3$. Поскольку главную часть КВ уравнений можно без вычислений записывать по КВ их квадратичных форм, то отсюда выводим КВ уравнения (2.5)

$$\tilde{u}_{y_1y_1} - \tilde{u}_{y_2y_2} + 2\tilde{u}_{y_1} = y_1 - y_3 .$$

Задача 2.3. Определить тип и привести к каноническому виду уравнение

$$u_{x_1x_1} - 4u_{x_1x_2} + 5u_{x_2x_2} - 2u_{x_2x_3} + 2u_{x_3x_3} - u_{x_1} + 2u_{x_2} = x_1 + x_3 . \qquad (2.8)$$

Решение. I. *Классификация.* Методом Лагранжа выделяем полные квадраты

$$\Phi(t) = \underline{t_1^2} - \underline{4t_1t_2} + 5t_2^2 - 2t_2t_3 + 2t_3^2 = (t_1 - 2t_2)^2 + \underline{t_2^2} - \underline{2t_2t_3} + 2t_3^2 =$$
$$= (t_1 - 2t_2)^2 + (t_2 - t_3)^2 + t_3^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2,$$

где

$$\begin{cases} \tau_1 = t_1 - 2t_2, \\ \tau_2 = t_2 - t_3, \\ \tau_3 = t_3. \end{cases} \qquad (2.9)$$

По КВ квадратичной формы видим, что уравнение (2.8) имеет тип $\{3,0,0\}$, что соответствует *эллиптическому уравнению*.

II. *Приведение к КВ*. Решением линейной системы (2.9) является

$$\begin{cases} t_1 = \tau_1 + 2\tau_2 + 2\tau_3, \\ t_2 = \tau_2 + \tau_3, \\ t_3 = \tau_3, \end{cases}$$

т. е. матрица $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

В уравнении (2.8) переходим к новым переменным

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = B^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем первые частные производные уравнения

$$u_{x_1} = \tilde{u}_{y_1} + 2\tilde{u}_{y_2} + 2\tilde{u}_{y_3},$$
$$u_{x_2} = \tilde{u}_{y_2} + \tilde{u}_{y_3}.$$

Выражаем правую часть уравнения через новые переменные

$$x_1 + x_3 = y_1 - y_2 + y_3,$$

так как $x_1 = y_1$ и $x_3 = -y_2 + y_3$. В результате записываем главную часть КВ уравнения по КВ его квадратичной формы, имеем КВ уравнения (2.8)

$$\tilde{u}_{y_1 y_1} + \tilde{u}_{y_2 y_2} + \tilde{u}_{y_3 y_3} - \tilde{u}_{y_1} = y_1 - y_2 + y_3.$$

2. Уравнение с двумя переменными $(x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2$

$$au_{xx}(x,y) + 2bu_{xy}(x,y) + cu_{yy}(x,y) = F(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y)), \qquad (2.10)$$

где коэффициенты $|a(x,y)| + |b(x,y)| + |c(x,y)| \neq 0 \quad \forall (x,y) \in G$, принадлежит к *гиперболическому (параболическому* или *эллиптическому) типу* в точке $(x,y) \in G$, если соответственно дискриминант $D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y) \cdot c(x,y) > 0 (= 0$ или $< 0)$.

Общие интегралы $\varphi(x,y) = c_1, \psi(x,y) = c_2$ характеристического уравнения

$$a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0$$

определяют *характеристики* уравнения (2.10). Уравнение (2.10) гиперболического, параболического и эллиптического типа имеет соответственно два различных действительных $(\psi \neq \varphi)$, одно действительное $(\psi = \varphi)$ и два различных комплексно-сопряженных $(\psi = \overline{\varphi})$ семейств характеристик.

Уравнение (2.10) *гиперболического типа* в области $G_1 \subseteq G$ приводится невырожденной заменой переменных $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$ в G_1 к каноническому виду

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi, \eta, \tilde{u}(\xi, \eta), \tilde{u}_{\xi}(\xi, \eta), \tilde{u}_{\eta}(\xi, \eta)) \tag{2.11}$$

и невырожденной заменой переменных $\alpha = \left(\varphi(x, y) + \psi(x, y)\right)/2$, $\beta = \left(\varphi(x, y) - \psi(x, y)\right)/2$ в G_1 к другому каноническому виду

$$\hat{u}_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) - \hat{u}_{\beta\beta}(\alpha, \beta) = \hat{F}(\alpha, \beta, \hat{u}(\alpha, \beta), \hat{u}_{\alpha}(\alpha, \beta), \hat{u}_{\beta}(\alpha, \beta)).$$

Уравнение (2.10) *параболического типа* в области $G_2 \subseteq G$ заменой переменных $\xi = \varphi(x, y), \eta = \eta(x, y)$, где η – любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что якобиан $J = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \neq 0$ в G_2, приводится к каноническому виду

$$\tilde{u}_{\eta\eta}(\xi, \eta) = \tilde{F}\left(\xi, \eta, \tilde{u}(\xi, \eta,), \tilde{u}_{\xi}(\xi, \eta,), \tilde{u}_{\eta}(\xi, \eta,)\right).$$

Уравнение (2.10) *эллиптического типа* в области $G_3 \subseteq G$ приводится невырожденной комплекснозначной заменой переменных $\xi = \varphi(x, y), \eta = \overline{\varphi(x, y)}$ в G_3 к каноническому виду (2.11) и невырожденной действительнозначной заменой переменных $\alpha = \operatorname{Re}\varphi(x, y), \beta = \operatorname{Im}\varphi(x, y)$ в G_3 к другому каноническому виду

$$\hat{u}_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) + \hat{u}_{\beta\beta}(\alpha, \beta) = \hat{F}(\alpha, \beta, \hat{u}(\alpha, \beta), \hat{u}_{\alpha}(\alpha, \beta), \hat{u}_{\beta}(\alpha, \beta)).$$

Задача 2.4. В каждой из областей, где сохраняется тип, привести к каноническому виду уравнение

$$yu_{xx} - xu_{yy} = 0. \tag{2.12}$$

Решение. I. *Классификация.* Из условия $|a| + |c| \neq 0 \ \forall (x, y) \in G$ следует, что $G = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Дискриминант этого уравнения равен $D = xy$ в G. Поэтому уравнение (2.12) имеет

1) *гиперболический тип* ($D > 0$) в областях а) $x > 0, y > 0$; б) $x < 0, y < 0$;

2) *параболический тип* ($D = 0$) в областях а) $x = 0, y \neq 0$; б) $x \neq 0, y = 0$;

3) *эллиптический тип* ($D<0$) в областях а) $x>0,\ y<0$; б) $x<0,\ y>0$.

II. *Приведение к КВ.*

1. $D>0$. Сначала для упрощения выкладок приведtм к КВ гиперболическое уравнение (2.12) в первой четверти плоскости.

а) $x, y>0$. В первой четверти его характеристическое уравнение $y(dy)^2 - x(dx)^2 = 0$ распадается на два дифференциальных уравнения $\sqrt{y}dy \pm \sqrt{x}dx = 0$. Их общие интегралы

$$\varphi(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt{y^3} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = c_1,$$

$$\psi(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt{y^3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = c_2,\ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

являются характеристиками уравнения (2.12).

В уравнении (2.12) делаем замену переменных

$$\alpha = (\varphi+\psi)/2 = \frac{2}{3}\sqrt{y^3},\ \beta = (\varphi-\psi)/2 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}.$$

С этой целью по формуле производной сложной функции двух переменных вычисляем частные производные функции $u(x,y) = \hat{u}(\alpha(y), \beta(x))$

$$u_x = \hat{u}_\alpha \alpha_x + \hat{u}_\beta \beta_x = \hat{u}_\beta \sqrt{x},\ \ u_{xx} = \hat{u}_{\beta\beta} x + \hat{u}_\beta \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$u_y = \hat{u}_\alpha \alpha_y + \hat{u}_\beta \beta_y = \hat{u}_\alpha \sqrt{y},\ \ u_{yy} = \hat{u}_{\alpha\alpha} y + \hat{u}_\alpha \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

подставляем их в уравнение (2.12) и получаем уравнение

$$yx\hat{u}_{\beta\beta} - yx\hat{u}_{\alpha\alpha} + \frac{y}{2\sqrt{x}}\hat{u}_{\beta} - \frac{x}{2\sqrt{y}}\hat{u}_{\alpha} = 0 .$$

После деления его на $-yx$ имеем уравнение

$$\hat{u}_{\alpha\alpha} - \hat{u}_{\beta\beta} + \frac{1}{2\sqrt{y^3}}\hat{u}_{\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\hat{u}_{\beta} = 0 .$$

В коэффициентах этого уравнения старые переменные x, y выражаем через новые переменные

$$2\sqrt{y^3} = 3\alpha, \quad 2\sqrt{x^3} = 3\beta$$

и приводим к КВ уравнения (2.12)

$$\hat{u}_{\alpha\alpha} - \hat{u}_{\beta\beta} + \frac{1}{3\alpha}\hat{u}_{\alpha} - \frac{1}{3\beta}\hat{u}_{\beta} = 0 . \qquad (2.13)$$

б) $x, y < 0$. В третьей четверти плоскости заменой переменных $\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{|y|^3}$ и $\beta = \frac{2}{3}\sqrt{|x|^3}$ гиперболическое уравнение (2.12) аналогичным образом приводится к этому же КВ (2.13).

Заметим, что для приведения уравнения (2.12) к другому гиперболическому КВ нужно сделать замену переменных: $\xi = \frac{2}{3}\sqrt{|y|^3} + \frac{2}{3}\sqrt{|x|^3}, \eta = \frac{2}{3}\sqrt{|y|^3} - \frac{2}{3}\sqrt{|x|^3}$ в (2.12) или $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$ в КВ (2.13).

2. $D = 0$. Для приведения параболического уравнения (2.12) к КВ на оси Oy (Ox) достаточно в его коэффициентах положить $x = 0$ ($y = 0$).

а) $x = 0, y \neq 0$. В его коэффициентах полагаем $x = 0$ и получаем

$$yu_{xx} = 0 \Rightarrow u_{xx} = 0, \quad y \neq 0.$$

б) $x \neq 0, y = 0$. На оси Ox аналогично находим КВ

$$-xu_{yy} = 0 \Rightarrow u_{yy} = 0, \quad x \neq 0.$$

3. $D<0$. Сначала приведем к КВ эллиптическое уравнение (2.12) в четвертой четверти плоскости.

а) $x>0,\ y<0$. В четвертой четверти его характеристическое уравнение распадается на два дифференциальных уравнения $\sqrt{-y}dy \pm i\sqrt{x}dx = 0,\ i=\sqrt{-1}$. Их общие интегралы дают характеристики уравнения

$$\varphi(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3} + i\frac{2}{3}\sqrt{x^3} = c_1,$$

$$\overline{\varphi(x,y)} = \frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3} - i\frac{2}{3}\sqrt{x^3} = c_2 \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

В уравнении (2.12) делаем замену переменных

$$\alpha = \operatorname{Re}\varphi(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3},\ \beta = \operatorname{Im}\varphi(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}.$$

Для этого находим частные производные

$$u_x = \hat{u}_\alpha \cdot 0 + \hat{u}_\beta\sqrt{x},\ u_{xx} = \hat{u}_{\beta\beta}x + \hat{u}_\beta\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$u_y = \hat{u}_\alpha \cdot \left(-\sqrt{-y}\right) + \hat{u}_\beta \cdot 0,\ u_{yy} = \hat{u}_{\alpha\alpha}(-y) + \hat{u}_\alpha\frac{1}{2\sqrt{-y}},$$

подставляем их в уравнение и приходим к уравнению

$$yx\hat{u}_{\beta\beta} + yx\hat{u}_{\alpha\alpha} + \frac{y}{2\sqrt{x}}\hat{u}_\beta - \frac{x}{2\sqrt{-y}}\hat{u}_\alpha = 0.$$

Это уравнение делим на yx, в полученных коэффициентах старые переменные x, y выражаем через новые переменные

$$2\sqrt{(-y)^3} = 3\alpha,\ 2\sqrt{x^3} = 3\beta$$

и имеем КВ

$$\hat{u}_{\alpha\alpha} + \hat{u}_{\beta\beta} + \frac{1}{3\alpha}\hat{u}_{\alpha} + \frac{1}{3\beta}\hat{u}_{\beta} = 0. \qquad (2.14)$$

б) $x < 0,\ y > 0.$ Во второй четверти плоскости заменой переменных $\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{y^3},\ \beta = \frac{2}{3}\sqrt{(-x)^3}$ эллиптическое уравнение (2.12) аналогичным образом приводится к этому же КВ (2.14).

Заметим, что для приведения уравнения (2.12) к другому эллиптическому КВ нужно сделать замену переменных: $\xi = \frac{2}{3}\sqrt{|y|^3} + i\frac{2}{3}\sqrt{|x|^3},\ \eta = \frac{2}{3}\sqrt{|y|^3} - i\frac{2}{3}\sqrt{|x|^3}$ в (2.12) или $\xi = \alpha + i\beta$, $\eta = \alpha - i\beta$ в КВ (2.14).

Задача 2.5. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} = 0. \qquad (2.15)$$

Решение. I. *Классификация.* Это уравнение не вырождается во всей плоскости, т. е. областью его задания является вся плоскость $G = \mathbb{R}^2$. Уравнение (2.15) является параболическим в $\mathbb{R}^2$, так как его дискриминант $D = x^2 - x^2 = 0\ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

II. *Приведение к КВ.* Его характеристическое уравнение $x^2(dy)^2 + 2xdxdy + (dx)^2 = (xdy + dx)^2 = 0$ вырождается в одно ОДУ с разделяющимися переменными $xdy + dx = 0$. Очевидно, что $x = 0 -$ решение. При $x \neq 0$ разделяем переменные $dy + \frac{dx}{x} = 0$ и интегрируем $y + \ln|x| = \ln|c|$. Если здесь пропотенцировать, то будем иметь одно семейство характеристик $\varphi(x, y) = xe^y = c,\ c \in \mathbb{R}$, которое содержит частное решение $x = 0$ при $c = 0$.

Если в уравнении (2.15) перейти к новой переменной $\xi = xe^y$, то в качестве второй новой переменной можно взять $\eta = y$, так как

$\eta \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2)$ и якобиан преобразования $J = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^y & xe^y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^y \neq 0$ в $\mathbb{R}^2$.

Теперь вычисляем частные производные исходного уравнения

$$u_x = \tilde{u}_\xi e^y + \tilde{u}_\eta \cdot 0, u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi} e^{2y},$$

$$u_{xy} = \left(\tilde{u}_{\xi\xi}\xi_y + \tilde{u}_{\xi\eta}\eta_y\right)e^y + \tilde{u}_\xi e^y = \tilde{u}_{\xi\xi} x e^{2y} + \tilde{u}_{\xi\eta} e^y + \tilde{u}_\xi e^y,$$

$$u_y = \tilde{u}_\xi \xi_y + \tilde{u}_\eta \eta_y = \tilde{u}_\xi x e^y + \tilde{u}_\eta, u_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi} x^2 e^{2y} + 2\tilde{u}_{\xi\eta} x e^y + \tilde{u}_{\eta\eta} + \tilde{u}_\xi x e^y.$$

Составляем таблицу коэффициентов при всех частных производных нового уравнения

$$\begin{array}{c|l} \tilde{u}_{\xi\xi} & x^2e^{2y} - 2x^2e^{2y} + x^2e^{2y} = 0, \\ \tilde{u}_{\xi\eta} & 0 \quad - \quad 2xe^y \quad + 2xe^y = 0, \\ \tilde{u}_{\eta\eta} & 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 1 \quad = 1, \\ \tilde{u}_\xi & 0 \quad - \quad 2xe^y \quad + \quad xe^y = -xe^y. \end{array}$$

В итоге уравнение (2.15) приводится к уравнению $\tilde{u}_{\eta\eta} - xe^y \tilde{u}_\xi = 0$ и после перехода в коэффициентах к новым переменным $xe^y = \xi$ к КВ

$$\tilde{u}_{\eta\eta} - \xi \tilde{u}_\xi = 0.$$

Задача 2.6. Привести к каноническому виду уравнение

$$\left(1 + x^2\right)u_{xx} + \left(1 + y^2\right)u_{yy} = 0. \qquad (2.16)$$

Решение. I. *Классификация.* Ясно, что областью задания данного уравнения является вся плоскость $G = \mathbb{R}^2$, где оно имеет эллиптический тип, потому что $D = -\left(1 + x^2\right)\left(1 + y^2\right) < 0 \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

II. *Приведение к КВ.* Его характеристическое уравнение $\left(1 + x^2\right)(dy)^2 + \left(1 + y^2\right)(dx)^2 = \left(1 + x^2\right)(dy)^2 - i^2\left(1 + y^2\right)(dx)^2 = 0$ распадается

на два ОДУ с разделяющимися переменными $\sqrt{1+x^2}dy \pm i\sqrt{1+y^2}dx = 0$, общие интегралы которых дают два семейства характеристик

$$\varphi(x,y) = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} + i\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = c_1,$$

$$\overline{\varphi(x,y)} = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} - i\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = c_2, \forall c_1, c_2 \in C.$$

В уравнении (2.16) переходим к новым переменным

$$\alpha = \operatorname{Re}\varphi(x,y) = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}}, \beta = \operatorname{Im}\varphi(x,y) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}. \qquad (2.17)$$

Находим частные производные

$$u_x = \hat{u}_\alpha \cdot 0 + \hat{u}_\beta \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, u_{xx} = \hat{u}_{\beta\beta}\frac{1}{1+x^2} - \hat{u}_\beta \frac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}},$$

$$u_y = \hat{u}_\alpha \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \hat{u}_\beta \cdot 0, u_{yy} = \hat{u}_{\alpha\alpha}\frac{1}{1+y^2} - \hat{u}_\alpha \frac{y}{\sqrt{\left(1+y^2\right)^3}},$$

подставляем их в уравнение (2.16) и получаем уравнение

$$\hat{u}_{\beta\beta} + \hat{u}_{\alpha\alpha} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\hat{u}_\beta - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\hat{u}_\alpha = 0.$$

Поскольку при $D<0$ в области эллиптичности уравнения замена переменных не вырождена, то преобразование (2.17) обратимо, т. е. $D<0 \Rightarrow J \neq 0\ \forall(x,y)\in G \ \Rightarrow\ \exists x = x(\beta), y = y(\alpha)$.

Поэтому уравнение (2.16) приводится к КВ

$$\hat{u}_{\alpha\alpha} + \hat{u}_{\beta\beta} - \frac{y(\alpha)}{\sqrt{1+y^2(\alpha)}}\hat{u}_{\alpha} - \frac{x(\beta)}{\sqrt{1+x^2(\beta)}}\hat{u}_{\beta} = 0. \qquad (2.18)$$

Здесь $x = sh\beta$ и $y = sh\alpha$.

Отметим, что можно вывести другой эллиптический КВ уравнения (2.16), если в нем перейти к новым переменным $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \overline{\varphi(x, y)}$ или в КВ (2.18) $-$к новым переменным $\xi = \alpha + i\beta$ и $\eta = \alpha - i\beta$.

Тема 3. НАХОЖДЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Функция $u = u(x, y)$ называется *решением (классическим)* уравнения

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = F\left(x, y, u, u_x, u_y\right), (x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2, \qquad (3.1)$$

где непрерывные коэффициенты $|a| + |b| + |c| \neq 0 \quad \forall (x,y) \in G$, если она принадлежит классу $C^{(2)}(G)$ и удовлетворяет уравнению (3.1) в G. Множество всех решений этого уравнения называется *общим решением* (ОР) уравнения (3.1).

Если уравнение (3.1) допускает решение, то, возможно, невырожденной заменой переменных (методом характеристик), заменой функций и другими преобразованиями оно сводится к простейшему уравнению с частными производными, решение которого известно или не вызывает затруднений.

Задача 3.1. В каждой из областей, где сохраняется тип, решить уравнение

$$xu_{xx} + (x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0. \qquad (3.2)$$

Решение. I. *Классификация.* Из условия $|a| + |b| + |c| \neq 0$ заключаем, что область задания уравнения $G = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. По знаку дискриминанта $D = (x+y)^2/4 - xy = (x-y)^2/4$ определяем, что уравнение (3.2) имеет гиперболический тип при $y \neq x$ и параболический тип при $y = x$.

II. *Приведение к КВ*.

1). Пусть $y \neq x$. Характеристическое уравнение

$$x(dy)^2 - (x+y)dxdy + y(dx)^2 = 0$$

распадается на два ОДУ с разделяющимися переменными

$$dy - dx = 0, \quad xdy - ydx = 0,$$

решения которых дают два семейства характеристик: $\varphi(x,y) = y - x = c_1$ и $\psi(x,y) = y/x = c_2 \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, если $x \neq 0$. Случай $x = 0, y \neq 0$ будет рассмотрен ниже.

а) $x \neq 0$. В уравнении (3.2) делаем замену переменных

$$\xi = y - x, \quad \eta = y/x \tag{3.3}$$

и вычисляем частные производные

$$u_x = \tilde{u}_\xi(-1) + \tilde{u}_\eta\left(\frac{-y}{x^2}\right), u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\xi\eta}\frac{2y}{x^2} + \tilde{u}_{\eta\eta}\frac{y^2}{x^4} + \tilde{u}_\eta\frac{2y}{x^3},$$

$$u_{xy} = -\left(\tilde{u}_{\xi\xi}\cdot 1 + \tilde{u}_{\xi\eta}\frac{1}{x}\right) + \left(\tilde{u}_{\eta\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta}\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right) - \tilde{u}_\eta\frac{1}{x^2},$$

$$u_y = \tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta\frac{1}{x}, u_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi} + \frac{2}{x}\tilde{u}_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}\tilde{u}_{\eta\eta}.$$

Подставляя их в уравнение (3.2), получаем следующие ненулевые коэффициенты при частных производных нового уравнения

$$\begin{array}{l|l} \tilde{u}_{\xi\eta} & \dfrac{2y}{x} - \dfrac{x+y}{x} - \dfrac{(x+y)y}{x^2} + \dfrac{2y}{x} = -\dfrac{(y-x)^2}{x^2}, \\ \tilde{u}_\eta & \dfrac{2y}{x^2} - \dfrac{x+y}{x^2} + 0 = \dfrac{y-x}{x^2}, \end{array}$$

т. е. приходим к уравнению $-\dfrac{(y-x)^2}{x^2}\tilde{u}_{\xi\eta} + \dfrac{y-x}{x^2}\tilde{u}_\eta = 0$, из которого имеем КВ гиперболического уравнения (3.2)

$$\tilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{\xi}\tilde{u}_\eta = 0. \tag{3.4}$$

III. *Интегрирование.* Решаем уравнение (3.4) заменой функции $\nu = \tilde{u}_\eta$. Это уравнение при каждом фиксированном η приводится к ОДУ с разделяющимися переменными $\dfrac{d\nu}{d\xi} - \dfrac{\nu}{\xi} = 0$. Очевидно, что $\omega = 0$ – его решение. При $\omega \neq 0$ можно разделить переменные и проинтегрировать

$$\frac{d\nu}{\nu}-\frac{d\xi}{\xi}=0 \quad \Rightarrow \quad \ln|\nu|-\ln|\xi|=\ln|C(\eta)|.$$

В результате его решения $\nu=\xi C(\eta)$, где $C(\eta)-$любая непрерывно дифференцируемая функция, дают другое уравнение $\tilde{u}_\eta=\xi C(\eta)$, интегрированием которого по η находим ОР уравнения (3.4)

$$\tilde{u}=\xi\int C(\eta)\,d\eta+C_2(\xi)=\xi C_1(\eta)+C_2(\xi), \tag{3.5}$$

где $C_1(\eta)$, $C_2(\xi)-$любые дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Поскольку в силу невырожденности замены переменных (3.3) (ее якобиан $J\neq 0$ при $y\neq x$) уравнения (3.2) и (3.4) эквивалентны в области гиперболичности в смысле их множеств решений, то, на основании равенства $u(x,y)=\tilde{u}(\xi,\eta)$, все решения уравнения (3.2) при $y\neq x$

$$u=(y-x)C_1(y/x)+C_2(y-x) \tag{3.6}$$

можно получить из всех решений (3.5), вернувшись в них к старым переменным по формулам (3.3).

IV. *Приведение к КВ*.

а) $x=0, y\neq 0$. Полагая $x=0$ в коэффициентах уравнения (3.2), получаем уравнение

$$u_{xy}+u_{yy}=0. \tag{3.7}$$

Его характеристическое уравнение $-dxdy+(dx)^2=0$, распадаясь на два ОДУ $dx=0$ и $dy-dx=0$, дает два семейства характеристик: $x=c_1$ и $y-x=c_2$, $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Переходим к новым переменным $\xi=y-x, \eta=x$, вычисляем частные производные

$$u_x=-\tilde{u}_\xi+\tilde{u}_\eta,\ u_{xx}=\tilde{u}_{\xi\xi}-2\tilde{u}_{\xi\eta}+\tilde{u}_{\eta\eta},\ u_{xy}=-\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\xi}, u_y=\tilde{u}_\xi, u_{yy}=\tilde{u}_{\xi\xi},$$

подставляем их в уравнение (3.7) и имеем КВ: $\tilde{u}_{\xi\eta}=0$.

V. *Интегрирование*.

а) $x=0, y\neq 0$. Общим решением этого КВ является $\tilde{u}=c_1(\xi)+c_2(\eta)\quad \forall c_1(\xi), c_2(\eta)\in C^{(2)}$. Возвращаясь здесь к старым переменным, находим ОР уравнения (3.7): $u=C_1(y-x)+C_2(x)$.

Замечание 3.1. В силу симметрии уравнения (3.2) относительно переменных x и y, т. е. уравнение (3.2) не изменяется при замене x и y на y и x соответственно, этой заменой из ОР (3.6) можно получить ОР уравнения (3.2) при $x=0, y\neq 0$

$$u=(x-y)C_1(x/y)+C_2(x-y).$$

VI. *Приведение к КВ*.

1) Пусть $y=x\neq 0$. Тогда из уравнения (3.2) имеем уравнение

$$u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0. \tag{3.8}$$

Характеристическое уравнение $(dy)^2-2dxdy+(dx)^2=(dy-dx)^2=0$ уравнения (3.8) дает одно семейство характеристик $y-x=c,\quad \forall c\in\mathbb{R}$. Тогда допустима замена переменных $\xi=y-x, \eta=x$, так как ее якобиан $J=-1\neq 0$. Подставив в уравнение (3.8) соответствующие частные производные

$$u_x=-\tilde{u}_\xi+\tilde{u}_\eta, u_{xx}=\tilde{u}_{\xi\xi}-2\tilde{u}_{\xi\eta}+\tilde{u}_{\eta\eta},$$
$$u_{xy}=-\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\xi}, u_y=\tilde{u}_\xi, u_{yy}=\tilde{u}_{\xi\xi},$$

приходим к его КВ

$$\tilde{u}_{\eta\eta}=0.$$

VII. *Интегрирование*.

1) $y=x\neq 0$. Интегрируя уравнение $\tilde{u}_{\eta\eta}=0$ по η, имеем $\hat{u}_\eta=C_1(\xi)$, и еще раз по η, имеем ОР этого КВ: $\tilde{u}=\eta C_1(\xi)+C_2(\xi)$. Здесь возвращаемся к старым переменным x и y и получаем ОР уравнения (3.2) в области параболичности

$$u=x\cdot C_1(y-x)+C_2(y-x)\quad \forall C_1(\xi), C_2(\xi)\in C^{(2)}.$$

Задача 3.2. Решить уравнение

$$y^2u_{xx} - 2yxu_{xy} + x^2u_{yy} - xu_x - yu_y = 0. \qquad (3.9)$$

Решение. I. *Классификация.* Из условия $y^2 + 2|xy| + x^2 \neq 0$ вытекает, что областью задания этого уравнения является область $G = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, где уравнение (3.9) сохраняет параболический тип, так как дискриминант $D = (xy)^2 - x^2y^2 = 0 \quad \forall (x,y) \in G$.

II. *Приведение к КВ.* Данное уравнение имеет одно семейство характеристик $\varphi(x,y) = x^2/2 + y^2/2 = c,\ c \in \mathbb{R}$, потому что его характеристическое уравнение

$$y^2(dy)^2 + 2xydxdy + x^2dx^2 = (ydy + xdx)^2 = 0$$

дает лишь одно дифференциальное уравнение характеристик $ydy + xdx = 0$.

а) $y \neq 0$. В уравнении (3.9) допустима замена переменных

$$\xi = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2},\ \ \eta = x, \qquad (3.10)$$

так как ее якобиан

$$J = \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -y \neq 0,$$

если $y \neq 0$. Случай $x \neq 0, \quad y = 0$ будет рассмотрен ниже.

Находим частные производные

$$u_x = \tilde{u}_\xi x + \tilde{u}_\eta,\ u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi}x^2 + \tilde{u}_{\xi\eta}2x + \tilde{u}_{\eta\eta} + \tilde{u}_\xi,$$
$$u_{xy} = \left(\tilde{u}_{\xi\xi}y + \tilde{u}_{\xi\eta}\cdot 0\right)x + \tilde{u}_{\eta\xi}y + \tilde{u}_{\eta\eta}\cdot 0 = \tilde{u}_{\xi\xi}xy + \tilde{u}_{\eta\xi}y,$$
$$u_y = \tilde{u}_\xi y + \tilde{u}_\eta \cdot 0,\ u_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi}y^2 + \tilde{u}_\xi.$$

Подставляем их в уравнение (3.9), определяем ненулевые коэффициенты нового уравнения при частных производных

$$\begin{array}{l|l} \tilde{u}_{\eta\eta} & y^2 + 0 + 0 + 0 = y^2, \\ \tilde{u}_{\xi} & y^2 + x^2 - x^2 - y^2 = 0, \\ \tilde{u}_{\eta} & 0 + 0 - x + 0 = -x, \end{array}$$

и приходим к уравнению $y^2\tilde{u}_{\eta\eta} - x\tilde{u}_{\eta} = 0$, из которого в силу $x = \eta, y = 2\xi - \eta^2$ получаем КВ уравнения (3.9)

$$\tilde{u}_{\eta\eta} - \frac{\eta}{2\xi - \eta^2}\tilde{u}_{\eta} = 0. \quad . \tag{3.11}$$

III. *Интегрирование.*

а) $y \neq 0$. Заменой функции $\nu = \tilde{u}_{\eta}$ этот КВ при каждом фиксированном ξ сводится к ОДУ с разделяющимися переменными

$$\frac{d\nu}{d\eta} - \frac{\eta}{2\xi - \eta^2}\nu = 0. \tag{3.12}$$

Непосредственной подстановкой проверяется то, что $\nu = 0$ – его решение. Если $\nu \neq 0$, то разделяем переменные $\frac{d\nu}{\nu} - \frac{\eta d\eta}{2\xi - \eta^2} = 0$, интегрируем $\ln|\nu| + \frac{1}{2}\ln\left|2\xi - \eta^2\right| = \ln\left|C_1(\xi)\right|$ и, тем самым, имеем ОР $\nu = C_1(\xi)\Big/\sqrt{2\xi - \eta^2}$ $\forall C_1(\xi) \in C^{(2)}$ уравнения (3.12). Теперь, интегрируя по η уравнение $\tilde{u}_{\eta} = C_1(\xi)\Big/\sqrt{2\xi - \eta^2}$, находим ОР для КВ (3.11)

$$\tilde{u} = \arcsin\frac{\eta}{\sqrt{2\xi}}C_1(\xi) + C_2(\eta),$$

из которого введенной заменой переменных (3.10) получаем ОР исходного уравнения (3.9) при $y \neq 0$

$$u = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}C_1\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)+C_2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)=$$

$$=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}C_3\left(x^2+y^2\right)+C_4\left(x^2+y^2\right),$$

где $C_3(2\xi)$ и $C_4(2\xi)$ – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции.

IV. *Приведение к КВ.*

а) $x \neq 0, y = 0$. В коэффициентах уравнения (3.9) полагаем $y = 0$, делим на $x \neq 0$ и имеем его КВ: $u_{yy} - \frac{1}{x}u_x = 0$, который не является элементарным уравнением в частных производных.

Задача 3.3. Решить уравнение

$$\left(1+x^2\right)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0. \qquad (3.13)$$

Решение. I. *Классификация.* Согласно дискриминанту $D = -(1+x^2)\,(1+y^2) < 0$ данное уравнение является эллиптическим в области задания $G = \mathbb{R}^2$.

II. *Приведение к КВ*. Интегрирование его характеристического уравнения

$$(1+x^2)\left(dy\right)^2 + (1+y^2)\left(dx\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} \pm i\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

дает два семейства характеристик^ $\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) + i\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = c_1$, $\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) - i\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Поэтому переходим к новым переменным

$$\xi = \ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) + i\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\ \ \eta = \ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) - i\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),$$

находим частные производные

$$u_x = \tilde{u}_\xi \frac{i}{\sqrt{1+x^2}} + \tilde{u}_\eta \frac{-i}{\sqrt{1+x^2}}, u_y = \tilde{u}_\xi \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \tilde{u}_\eta \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

$$u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi} \frac{-1}{1+x^2} + \tilde{u}_{\xi\eta} \frac{2}{1+x^2} + \tilde{u}_{\eta\eta} \frac{-1}{1+x^2} + \tilde{u}_\xi \frac{-ix}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} + \tilde{u}_\eta \frac{ix}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}},$$

$$u_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi} \frac{1}{1+y^2} + \tilde{u}_{\xi\eta} \frac{2}{1+y^2} + \tilde{u}_{\eta\eta} \frac{1}{1+y^2} + \tilde{u}_\xi \frac{-y}{\sqrt{\left(1+y^2\right)^3}} + \tilde{u}_\eta \frac{-y}{\sqrt{\left(1+y^2\right)^3}},$$

при подстановке их в уравнение (3.13) строим таблицу коэффициентов нового уравнения

$$\begin{array}{c|l}
\tilde{u}_{\xi\eta} & 2 + 2 + 0 + 0 = 4, \\
\tilde{u}_\xi & \dfrac{-ix}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{ix}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} = 0, \\
\tilde{u}_\eta & \dfrac{ix}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} - \dfrac{ix}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} = 0
\end{array}$$

и получаем КВ уравнения (3.13)

$$\tilde{u}_{\xi\eta} = 0. \tag{3.14}$$

III. *Интегрирование.* Проинтегрировав уравнение (3.14) по ξ и η, имеем его ОР $\tilde{u} = c_1(\xi) + c_2(\eta) \quad \forall c_1(\xi), c_2(\eta) \in C^{(2)}$. Здесь возвращаемся к старым переменным и приходим к ОР искомого уравнения (3.13)

$$u = c_1\left(\ln(y+\sqrt{1+y^2}) + i\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right) + c_2\left(\ln(y+\sqrt{1+y^2}) - i\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right).$$

Задача 3.4. Решить уравнение

$$u_{xy} + xu_x + u_y + (x-1)u = 0. \tag{3.15}$$

Решение. I. *Классификация.* В области задания $G=\mathbb{R}^2$ это уравнение является гиперболическим, так как оно уже имеет КВ гиперболических уравнений.

II. *Интегрирование.* В уравнении (3.15) сгруппируем первое с третьим и второе с четвертым слагаемые и в них вынесем общие операции и множители за скобки

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u_x+u\right)+x\left(u_x+u\right)-u=0.$$

Здесь следует сделать замену функции $\nu=u_x+u$ и получить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\nu&=u_x+u,\\ u&=\nu_y+x\nu.\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Ее второе уравнение подставляем в первое уравнение, приводим подобные члены и приходим к уравнению

$$\nu_{xy}+x\nu_x+\nu_y+x\nu=0,$$

в котором снова группируем первое с третьим и второе с четвертым слагаемые, выносим общие действия и множители за скобки и находим уравнение

$$\left(\nu_x+\nu\right)_y+x\left(\nu_x+\nu\right)=0.$$

Снова заменой функции $\omega=\nu_x+\nu$ оно при каждом фиксированном x сводится к ОДУ с разделяющимися переменными $\dfrac{d\omega}{dy}+x\omega=0$.

Ясно, что последнее уравнение имеет частное решение $\omega=0$. Если же $\omega\neq 0$, то, разделив переменные $\dfrac{d\omega}{\omega}+xdy=0$ и проинтегрировав $\ln|\omega|+xy=\ln\left|C\left(x\right)\right|\quad \forall C\left(x\right)\in C^{(0)}$, находим его ОР $\omega=e^{-xy}C\left(x\right)$, которое приводит к уравнению $\nu_x+\nu=e^{-xy}C\left(x\right)$. Умножив это уравнение на

интегрирующий множитель $\mu = e^x$, проинтегрировав по x и разделив результат на e^x, имеем решения

$$\nu = \int_0^x e^{-x-\xi y} C_1(\xi)\, d\xi + e^{-x} C_2(y),\ C_1(\xi) \in C^{(0)},\ C_2(y) \in C^{(2)}. \qquad (3.17)$$

Тогда благодаря второму уравнению системы (3.16) получаем ОР исходного уравнения (3.15)

$$u = \int_0^x (x-\xi) e^{-x-\xi y} C_1(\xi) d\xi + e^{-x} C_2'(y) + x e^{-x} C_2(y). \qquad (3.18)$$

Подстановкой (3.17) и (3.18) в систему (3.16) легко убедиться в том, что найденная пара $\{v, u\}$ является ее решениями и, следовательно, формулой (3.18) действительно выражаются все решения уравнения (3.15).

Замечание 3.2. Если бы мы находили решения u не из второго уравнения системы (3.16), а из ее первого уравнения, то после интегрирования получили бы его решения

$$u = e^{-x} \int_0^x e^s \nu(s, y) ds + e^{-x} C_3(y),\ C_3(y) \in C^{(1)}, \qquad (3.19)$$

содержащие три произвольные функции интегрирования. Не все функции (3.19) являются решениями системы (3.16) и, следовательно, уравнения (3.15). Подставив функции ν и u, выраженные формулами (3.17) и (3.19), в систему (3.16), находим, что третья произвольная функция интегрирования $C_3(y) = C_2'(y)$. Эта зависимость приводит нас от функций (3.19) к найденным выше решениям (3.18) уравнения (3.15).

Задача 3.5. На персональном компьютере с помощью системы Mathematica решить уравнение

$$y u_{xx} + x(2y-1) u_{xy} - 2x^2 u_{yy} - \frac{y}{x} u_x + \frac{2x}{1+2y}(u_x + 2x u_y) = 0,\ x > 0,\ y > 0. \qquad (3.20)$$

Решение. В системе Mathematica данное уравнение записывается в виде

$$y\,\partial_{x,x}u[x,y] + x\,(2y-1)\,\partial_{x,y}u[x,y] - 2x^2\,\partial_{y,y}u[x,y] - \frac{y}{x}\,\partial_x u[x,y] + \frac{2x}{1+2y}\,(\partial_x u[x,y] + 2x\,\partial_y u[x,y]) == 0;$$

I. *Классификация.* Определяем тип уравнения (вычисляем дискриминант $d=D$):

$$a = y;$$
$$b = x\,(2y-1);$$
$$c = -2x^2;$$
$$l = -\frac{y}{x} + \frac{2x}{1+2y};$$
$$s = \frac{4x^2}{1+2y};$$
$$a\,\partial_{x,x}u[x,y] + b\,\partial_{x,y}u[x,y] + c\,\partial_{y,y}u[x,y] + l\,\partial_x u[x,y] + s\,\partial_y u[x,y] == 0;$$
$$d = b^2 - 4ac \;//\; \text{Simplify}$$
$$(x+2xy)^2.$$

Это уравнение имеет гиперболический тип, так как $x>0,\ y>0$.

II. *Приведение к КВ*. Находим дифференциальные уравнения характеристик:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \frac{b+\sqrt{d}}{2a} \;//\; \text{PowerExpand} \;//\; \text{Simplify}$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \frac{b-\sqrt{d}}{2a} \;//\; \text{PowerExpand} \;//\; \text{Simplify}$$
$$2x,$$
$$-\frac{x}{y}.$$

Интегрируем их:

```
Solve[∫dy==2∫xdx+c1,c1]//Simplify
```

```
Solve[∫ydy==-∫xdx+c2,c2]//Simplify
```

и получаем общие интегралы

$$\{\{c1 \to -x^2 + y\}\}$$
$$\{\{c2 \to \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\}\}.$$

Записываем функции замены переменных:

$$c1 = -x^2 + y;$$
$$c2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2);$$
$$\xi = c1$$
$$\eta = c2$$
$$-x^2 + y$$
$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Проверяем условие невырожденности замены переменных:

$$AA = \begin{pmatrix} \partial_x \xi & \partial_y \xi \\ \partial_x \eta & \partial_y \eta \end{pmatrix} // \text{MatrixForm}$$
$$\begin{pmatrix} -2x & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$$
$$x>0;y>0;$$
$$\text{Det}\left[\begin{pmatrix} -2x & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}\right] \neq 0$$
$$-2x-4xy \neq 0.$$

Вычисляем коэффициенты приведенного уравнения:

```
AA = a (∂x ξ)^2 + b ∂x ξ ∂y ξ + c (∂y ξ)^2 // PowerExpand // Simplify
BB = 2 a ∂x ξ ∂x η + b (∂x ξ ∂y η + ∂y ξ ∂x η) + 2 c ∂y ξ ∂y η // PowerExpand // Simplify
CC = a (∂x η)^2 + b ∂x η ∂y η + c (∂y η)^2 // PowerExpand // Simplify
LL = a ∂x,x ξ + b ∂x,y ξ + c ∂y,y ξ + l ∂x ξ + s ∂y ξ // PowerExpand // Simplify
SS = a ∂x,x η + b ∂x,y η + c ∂y,y η + l ∂x η + s ∂y η // PowerExpand // Simplify
```

$$0$$
$$-(x+2xy)^2$$
$$0$$
$$0$$
$$0.$$

III. *Интегрирование.* Решаем КВ исходного уравнения:

```
DSolve[∂t1,t2 u[t1, t2] == 0, u[t1, t2], {t1, t2}]
{{u[t1,t2]→C[1][t1]+C[2][t2]}}
```

и находим ОР уравнения (3.20):

```
rint["u[x,y]=",u[t1,t2]=C[1][t1]+C[2][t2]/.{t1→ξ,t2→η}]
```

$$u[x,y]=C[1][-x^2+y]+C[2]\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right].$$

Проверяем, не вошли ли лишние корни:

```
z1 = Solve[{0 == -1/2 (x + 2 x y)^2}, y] // PowerExpand // Simplify;
z2 = Solve[{0 == -1/2 (x + 2 x y)^2}, x] // PowerExpand // Simplify;
{z1[[1]], z2[[1]]}
```

$$\left\{\left\{y\to -\frac{1}{2}\right\},\ \{x\to 0\}\right\}.$$

Нет, не вошли, так как точка с координатами $(0,-1/2)$ не принадлежит области задания уравнения (3.20).

Тема 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Задача Коши для волнового уравнения. В области $G = \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$ переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ и t требуется найти функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), (x, t) \in G, \tag{4.1}$$

и начальным условиям (НУ)

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), u_t\big|_{t=0} = \psi(x), x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.2}$$

где f, φ и $\psi -$ заданные функции. Решения u задачи Коши (ЗК) (4.1) – (4.2) из класса $C^2(G) \bigcap C^1(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[)$ называются *классическими решениями* задачи Коши (4.1), (4.2).

При достаточной гладкости правой части f уравнения (4.1) и начальных данных φ и ψ начальных условий (4.2) существует единственное классическое решение задачи Коши $(4.1) - (4.2)$ [2, с. 122], которое при $n = 1$ выражается *формулой Даламбера*

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau\right],$$

при $n = 2$ *формулой Пуассона*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{|\xi - x| < at} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi - x|^2}} + \int_{|\xi - x| < at} \frac{\psi(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi - x|^2}} + \int_0^t \int_{|\xi - x| < a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2 (t-\tau)^2 - |\xi - x|^2}}\right]$$

и при $n = 3$ *формулой Кирхгофа*

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t} \int_{|\xi - x| = at} \varphi(\xi) ds\right) + \frac{1}{t} \int_{|\xi - x| = at} \psi(\xi) ds + \int_{|\xi - x| < at} \frac{1}{|\xi - x|} f\left(\xi, t - \frac{|\xi - x|}{a}\right) d\xi\right].$$

Задача 4.1. Решить задачу Коши

$$u_{tt} - u_{xx} = 6t,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{4.3}$$

$$u\big|_{t=0} = \sin x,\ \ u_t\big|_{t=0} = x,\ x \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Решение. Находим ее решение по формуле Даламбера

$$u = \frac{1}{2}\left[\sin(x+t) + \sin(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \xi d\xi + 3\int\limits_0^t \tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} d\xi d\tau =$$

$$= \sin x \cos t + xt + 6\int\limits_0^t \tau(t-\tau)\, d\tau = \sin x \cos t + xt + t^3.$$

Нетрудно убедиться в том, что эта функция удовлетворяет уравнению (4.3) и НУ (4.4).

Задача 4.2. Решить задачу Коши

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} = 6x_2 t,\ x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \tag{4.5}$$

$$u\big|_{t=0} = x_1,\ u_t\big|_{t=0} = 1,\ x \in \mathbb{R}^2. \tag{4.6}$$

Решение. Вычисляем интегралы формулы Пуассона, переходя к полярным координатам $\xi_1 - x_1 = \rho\cos\varphi,\ \xi_2 - x_2 = \rho\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$ $0 \le \rho \le t \quad (0 \le \rho \le t - \tau),$

$$\int\limits_{|\xi - x| < t} \frac{\xi_1 d\xi}{\sqrt{t^2 - |\xi - x|^2}} = \int\limits_0^t \int\limits_0^{2\pi} \frac{x_1 + \rho\cos\varphi}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \rho d\varphi d\rho = 2\pi x_1 \int\limits_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} =$$

$$= -\pi x_1 \int\limits_0^t \frac{d(t^2 - \rho^2)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = -2\pi x_1 \sqrt{t^2 - \rho^2}\,\Bigg|_{\rho = 0}^{\rho = t} = 2\pi x_1 t,$$

$$\int\limits_{|\xi-x|<t} \frac{d\xi}{\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}} = \int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} d\varphi d\rho = 2\pi\int\limits_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} = 2\pi t,$$

$$6\int\limits_0^t \int\limits_{|\xi-x|<t-\tau} \frac{\xi_2 \tau d\xi d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}} = 6\int\limits_0^t \tau\left(\int\limits_0^{t-\tau}\int\limits_0^{2\pi} \frac{x_2+\rho\sin\varphi}{\sqrt{(t-\tau)^2-\rho^2}}\rho d\varphi d\rho\right)d\tau =$$

$$= -12\pi x_2 \int\limits_0^t \tau\sqrt{(t-\tau)^2-\rho^2}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=t-\tau} d\tau = 12\pi x_2 \int\limits_0^t \tau(t-\tau)d\tau = 2\pi x_2 t^3.$$

Отсюда, согласно формуле Пуассона, имеем функцию $u(x,t) = = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}(2\pi x_1 t) + 2\pi t + 2\pi x_2 t^3\right] = x_1 + t + x_2 t^3$, которая очевидно удовлетворяет уравнению (4.5) и НУ (4.6).

Задача 4.3. Решить задачу Коши

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} = 12t^2, \ \ x \in \mathbb{R}^3, \ t > 0, \tag{4.7}$$

$$u\big|_{t=0} = x_3^2, u_t\big|_{t=0} = x_2, \ x \in \mathbb{R}^3. \tag{4.8}$$

Решение. В интегралах формулы Кирхгофа переходим к сферическим координатам $\xi_1 - x_1 = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $\xi_2 - x_2 = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $\xi_3 - x_3 = \rho\cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\rho = t$ $(0 \le \rho \le t)$, и получаем

$$\int\limits_{|\xi-x|=t} \xi_3^2 dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \left(x_3 + t\cos\theta\right)^2 t^2 \sin\theta d\theta d\varphi = x_3^2 t^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\varphi +$$

$$+t^4 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi x_3^2 t^2 \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta - 2\pi t^4 \int\limits_0^{\pi} \cos^2\theta d\left(\cos\theta\right) = 4\pi x_3^2 t^2 + \frac{4}{3}\pi t^4,$$

$$\int\limits_{|\xi-x|=t} \xi_2 dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} (x_2 + t\sin\varphi\sin\theta) t^2 \sin\theta d\theta d\varphi = x_2 t^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi x_2 t^2,$$

$$12\int\limits_{|\xi-x|<t} \frac{1}{|\xi-x|}\left(t-|\xi-x|\right)^2 d\xi = 12\int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{\rho}\left(t-\rho\right)^2 \rho^2 \sin\theta d\theta d\varphi dS =$$

$$= 24\pi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{t}\left(t-\rho\right)^2\rho d\rho = 48\pi\left(t^2\frac{\rho^2}{2}-2t\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^t = 4\pi t^4.$$

Тогда из формулы Кирхгофа имеем функцию

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}(4\pi x_3^2t^2+\frac{4}{3}\pi t^4)\right)+\frac{1}{t}\left(4\pi x_2t^2\right)+4\pi t^4\right]=x_3^2+t^2+x_2t+t^4,$$

для которой, как нетрудно убедиться, выполняются уравнение (4.7) и НУ (4.8)

Замечание 4.1. Для решения задачи Коши (4.1)–(4.2) может быть использована система Mathematica на персональных компьютерах.

2. Задача Коши на плоскости. В области $G\subset\mathbb{R}^2$ требуется найти функцию $u=u\left(x,y\right)$, удовлетворяющую гиперболическому уравнению

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+d(x,y)u_x+e(x,y)u_y=f(x,y),(x,y)\in G\setminus\Gamma, \quad (4.9)$$

и на кривой Г с уравнением $y=\theta(x)$ – условиям Коши (УК)

$$u\big|_{y=\theta(x)}=\varphi(x),\quad u_y\big|_{y=\theta(x)}=\psi(x), \quad (4.10)$$

где кривая Г принадлежит замыканию $\overline{G}$ области G. Решения u задачи Коши (4.9)–(4.10) из класса $C^2(G\setminus\Gamma)\bigcap C^1(\overline{G})$ называются *классическими решениями* задачи Коши (4.9)–(4.10).

Если в каждой точке кривой Г направление оси y не является касательным к кривой Г и касательное направление к кривой Г не является характеристическим, то в области G, ограниченной характеристиками уравнения (4.9), проходящими через концы кривой Г, при достаточной гладкости коэффициентов a,b,c,d,e, правой части f уравнения (4.9) и данных Коши φ и ψ условий Коши (4.10) существует единственное классическое решение задачи Коши (4.9) – (4.10). Если общее решение уравнения (4.1) находится в явном виде, то задача Коши (4.9) – (4.10) может быть решена методом характеристик (Даламбера) и методом Римана.

Задача 4.4. Методом характеристик решить задачу Коши

$$u_{xx}-u_{yy}-2u_x-2u_y=4, \quad (4.11)$$

$$u\big|_{y=0} = -x, \;\; u_y\big|_{y=0} = x-1. \qquad (4.12)$$

Решение. I. *Интегрирование уравнения*. Найдем ОР уравнения (4.3). Сначала приведем уравнение (4.11) к КВ. Из характеристического уравнения $(dy)^2 - (dx)^2 = 0$ получаем характеристики $y + x = c_1, y - x = c_2, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, и в уравнении (4.11) переходим к новым переменным $\xi = y + x, \eta = y - x$. При подстановке в это уравнение частных производных

$$u_x = \tilde{u}_\xi - \tilde{u}_\eta, \quad u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi} - 2\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta},$$
$$u_y = \tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta, \quad u_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi} + 2\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta}$$

составляем таблицу коэффициентов нового уравнения

$$\begin{array}{r|l} \tilde{u}_{\xi\eta} & -2-2+0+0=-4, \\ \tilde{u}_\xi & 0+0-2-2=-4, \\ \tilde{u}_\eta & 0+0+2-2=0 \end{array}$$

и приходим к уравнению $-4\tilde{u}_{\xi\eta} - 4\tilde{u}_\xi = 4$, из которого имеем КВ

$$\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_\xi = -1. \qquad (4.13)$$

Теперь решаем это уравнение заменой функции $\nu = \tilde{u}_\xi$. В результате при каждом фиксированном ξ интегрируем ОДУ

$$\frac{d\nu}{d\eta} + \nu = -1 \Rightarrow \frac{d\nu}{\nu+1} + d\eta = 0 \Rightarrow \ln|\nu+1| + \eta = \ln|C(\xi)|$$

и находим его ОР $\nu = C(\xi)e^{-\eta} - 1 \quad \forall C(\xi) \in C^{(2)}$, так как очевидно $\nu = -1$ является его частным решением. Наконец, интегрируя уравнение $\tilde{u}_\xi = C(\xi)e^{-\eta} - 1$ по ξ, получаем ОР $\tilde{u} = C_1(\xi)e^{-\eta} + C_2(\eta) - \xi$ $\forall C_2(\eta) \in C^{(2)}$ для КВ (4.13). Вернувшись в нем к старым переменным x

и y, находим ОР $u = C_1(x+y)e^{x-y} + C_2(y-x) - y - x$ уравнения (4.11), которое приводится к виду

$$u = e^{2x} g(x+y) + h(y-x) - y - x \qquad \forall g, h \in C^{(2)}. \tag{4.14}$$

II. *Подстановка ОР в УК.* По формуле производной сложной функции берем частную производную по y от ОР $u_y = e^{2x} g'(y+x) + h'(y-x) - 1$, где $g'(y+x)$ и $h'(y-x)$ – производные по $y+x$ и $y-x$ соответственно. Таким образом, подстановка ОР (4.14) в УК (4.12) дает систему уравнений

$$\begin{cases} u\big|_{y=0} = e^{2x} g(x) + h(-x) - x = -x, \\ u_y\big|_{y=0} = e^{2x} g'(x) + h'(-x) - 1 = x - 1 \end{cases} \tag{4.15}$$

относительно функций g и h.

Решим эту систему. Дифференцируя по x первое уравнение системы (4.15)

$$2e^{2x} g(x) + e^{2x} g'(x) - h'(-x) = 0$$

и складывая результат этого дифференцирования с ее вторым уравнением, имеем ОДУ

$$g'(x) + g(x) = \frac{1}{2} x e^{-2x},$$

решением которого является функция $g(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} + ce^{-x}$ или после переобозначения независимой переменной $x = s$ функция

$$g(s) = -\frac{1}{2}(s+1)e^{-2s} + ce^{-s}, \; c \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

Тогда из первого уравнения системы (4.15) находим, что $h(-x)=e^{2x}\left[\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-ce^{-x}\right]=\frac{1}{2}(x+1)-ce^{x}$. Отсюда после замены переменной $-x=t$ получаем функцию

$$h(t)=\frac{1}{2}(1-t)-ce^{-t} \quad \forall c\in\mathbb{R}. \tag{4.17}$$

Итак, функции (4.16) и (4.17) представляют собой все решения системы (4.15).

Для завершения решения ЗК (4.11)–(4.12) остается лишь подставить в ОР (4.14) выражения (4.16) и (4.17), полагая соответственно в них $s=y+x$ и $t=y-x$,

$$\begin{aligned} u&=e^{2x}\left[-\frac{1}{2}(y+x+1)e^{-2(y+x)}+ce^{-y-x}\right]+\frac{1}{2}(1-y+x)-ce^{x-y}-y-x=\\ &=-\frac{1}{2}(y+x+1)e^{-2y}+\frac{1}{2}(1-3y-x). \end{aligned} \tag{4.18}$$

III. *Проверка*. Проверим правильность решения ЗК (4.11)–(4.12) подстановкой полученного решения (4.18) в УК (4.12) и уравнение (4.11).

Функция (4.18) удовлетворяет первому условию Коши из (4.12)

$$u(x,0)=-\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2}(1-x)=-x.$$

Второе условие Коши из (4.12) тоже выполняется, потому что $u_y=-\frac{1}{2}e^{-2y}+(y+x+1)e^{-2y}-\frac{3}{2}$ и, следовательно,

$$u_y(x,0)=-\frac{1}{2}+x+1-\frac{3}{2}=x-1.$$

Вычисляем недостающие частные производные функции (4.18)

$$u_{yy} = 2e^{-2y} - 2\left(y + x + 1\right)e^{-2y},$$
$$u_x = -\frac{1}{2}e^{-2y} - \frac{1}{2}, \quad u_{xx} = 0,$$

подставляем их в уравнение (4.11)

$$-2e^{-2y} + 2\left(y + x + 1\right)e^{-2y} + 1 + e^{-2y} + e^{-2y} - 2(y + x + 1)e^{-2y} + 3 = 4$$

и убеждаемся, что она удовлетворяет уравнения (4.11). На этом основании делаем вывод о том, что функция (4.18) действительно является решением ЗК (4.11)−(4.12).

Задача 4.5. Методом характеристик решить задачу Коши

$$xu_{xx} + (x + y)u_{xy} + yu_{yy} = 0, x > 0, y > 0, \tag{4.19}$$

$$u\Big|_{y=\frac{1}{x}} = x^3, \quad u_y\Big|_{y=\frac{1}{x}} = -x^4. \tag{4.20}$$

Решение. I. *Интегрирование уравнения.* Воспользуемся ОР уравнения (3.2)

$$u = (y - x)g(\frac{y}{x}) + h(y - x), \tag{4.21}$$

полученным при решении задачи 3.1.

II. *Подстановка ОР в УК.* Для этого вычисляем частную производную

$u_y = g(\frac{y}{x}) + (y - x)g'(\frac{y}{x})x^{-1} + h'(y - x)$, где $g'(\frac{y}{x})$ и $h'(y - x)$ − производные по $\frac{y}{x}$ и $y - x$ соответственно. Подставив ОР (4.21) в УК (4.20), имеем систему уравнений

$$\begin{cases} u\Big|_{y=\frac{1}{x}} = (\frac{1}{x} - x)g(\frac{1}{x^2}) + h(\frac{1}{x} - x) = x^3, \\ u_y\Big|_{y=\frac{1}{x}} = g(\frac{1}{x^2}) + (\frac{1}{x} - x)\frac{1}{x}g'(\frac{1}{x^2}) + h'(\frac{1}{x} - x) = -x^4. \end{cases} \tag{4.22}$$

Дифференцируем первое уравнение этой системы по x

$$(-\frac{1}{x^2}-1)g(\frac{1}{x^2})-(\frac{1}{x}-x)g'(\frac{1}{x^2})\frac{2}{x^3}+h'(\frac{1}{x}-x)(-\frac{1}{x^2}-1)=3x^2,$$

результат дифференцирования складываем с ее вторым уравнением, умноженным на $(1/x^2)+1$, и находим уравнение

$$g'(1/x^2)=\frac{(x^4-2x^2)x^4}{(x^2-1)^2},$$

которое заменой переменной $t=1/x^2$ сводится к уравнению

$$g'(t)=\frac{1-2t+t^2-t^2}{t^2(t-1)^2}=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(t-1)^2}.$$

Проинтегрировав его по t, имеем функцию

$$g(t)=-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+c=\frac{1}{t(t-1)}+c,\ c\in\mathbb{R}. \qquad (4.23)$$

Теперь из первого уравнения системы (4.22) можем выразить функцию

$$h(\frac{1}{x}-x)=x^3-(\frac{1}{x}-x)g(\frac{1}{x^2})=x^3-(\frac{1}{x}-x)\left[\frac{1}{x(x-1)}+c\right]=-c(\frac{1}{x}-x),$$

которая после замены переменной $s=\frac{1}{x}-x$ становится функцией

$$h(s)=-c_1. \qquad (4.24)$$

Из ОР (4.21) решения (4.23) и (4.24) системы (4.22) дают решение ЗК (4.19)–(4.20):

$$u=(y-x)\left[\frac{x}{y\left(\frac{y}{x}-1\right)}+c\right]-c(y-x)=\frac{x^2}{y}. \qquad (4.25)$$

III. *Проверка.* Функция (4.25) удовлетворяет УК (4.20), так как

$$u(x,\frac{1}{x})=\frac{x^2}{y}\bigg|_{y=\frac{1}{x}}=x^3,\ \ u_y(x,\frac{1}{x})=-\frac{x^2}{y^2}\bigg|_{y=\frac{1}{x}}=-x^4.$$

Определив остальные частные производные от функции (4.25)

$$u_x=\frac{2x}{y},u_{xx}=\frac{2}{y},u_{xy}=-\frac{2x}{y^2},u_{yy}=\frac{2x^2}{y^3}$$

и подставив их в уравнение (4.19), убеждаемся в том, что функция (4.25) является решением этого уравнения:

$$x\frac{2}{y}+(x+y)\frac{-2x}{y^2}+y\frac{2x^2}{y^3}=\frac{2x}{y}(1-\frac{x+y}{y}+\frac{x}{y})=0.$$

Задача 4.6. Методом характеристик решить задачу Коши

$$y^{10}u_{xx}-u_{yy}+5y^4u_x=0,\ x>0,\ y>0, \qquad (4.26)$$

$$u\big|_{y=0}=x^2,\ u_y\big|_{y=0}=4. \qquad (4.27)$$

Решение. I. *Интегрирование уравнения.* Сначала приведем уравнение (4.26) к КВ. Решая его характеристическое уравнение $y^{10}(dy)^2-(dx)^2=0,$ имеем семейства характеристик $x+\frac{y^6}{6}=c_1,$

$x-\dfrac{y^6}{6}=c_2,\ \ c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Значит, в уравнении (4.26) нужно перейти к новым переменным: $\xi=x+\dfrac{y^6}{6},\eta=x-\dfrac{y^6}{6}$. Вычисляем частные производные

$$u_x=\tilde{u}_\xi+\tilde{u}_\eta, u_{xx}=\tilde{u}_{\xi\xi}+2\tilde{u}_{\xi\eta}+\tilde{u}_{\eta\eta},$$
$$u_y=\tilde{u}_\xi y^5+\tilde{u}_\eta(-y^5),\ u_{yy}=\tilde{u}_{\xi\xi}y^{10}-2\tilde{u}_{\xi\eta}y^{10}+\tilde{u}_{\eta\eta}y^{10}+\tilde{u}_\xi\cdot 5y^4+\tilde{u}_\eta(-5y^4)$$

строим таблицу неизвестных коэффициентов нового уравнения

$$\begin{array}{c|l}
\tilde{u}_{\xi\eta} & 2y^{10}+2y^{10}+\ 0\ \ =4y^{10},\\
\tilde{u}_\xi & \ \ 0\ \ -5y^4\ \ +5y^4=0,\\
\tilde{u}_\eta & \ \ 0\ \ +5y^4\ \ +5y^4=10y^4,
\end{array}$$

и приходим к КВ уравнения (4.26)

$$\tilde{u}_{\xi\eta}+\frac{5}{6(\xi-\eta)}\tilde{u}_\eta=0. \qquad (4.28)$$

После замены функции $\tilde{u}_\eta=\nu$ это уравнение приобретает вид $\nu_\xi+\dfrac{5}{6(\xi-\eta)}\nu=0$, в котором при $\nu\neq 0$ разделяем переменные $\dfrac{d\nu}{\nu}+\dfrac{5d\xi}{6(\xi-\eta)}=0$, интегрируем $\ln|\nu|+\dfrac{5}{6}\ln(\xi-\eta)=\ln|C(\eta)|$ и находим все его решения $\nu=(\xi-\eta)^{-\frac{5}{6}}C_1(\eta)\quad\forall C_1(\eta)\in C^{(2)}$. Далее, проинтегрировав по η уравнение $\tilde{u}_\eta=(\xi-\eta)^{-\frac{5}{6}}C_1(\eta)$, имеем ОР уравнения (4.28):

$$\tilde{u}=\int_0^\eta(\xi-s)^{-\frac{5}{6}}C_1(s)ds+C_2(\xi)\quad\forall C_2(\xi)\in C^{(2)}$$

и, вернувшись в нем к старым переменным x и y, будем иметь ОР уравнения (4.26)

$$u=\int\limits_0^{x-\frac{y^6}{6}}(x+\frac{y^6}{6}-s)^{-\frac{5}{6}}g(s)ds+h\left(x+\frac{y^6}{6}\right)\quad \forall g(s),h(\xi)\in C^{(2)}. \qquad (4.29)$$

II. *Подстановка ОР в УК.* Согласно частной производной по y решений (4.29)

$$u=(x+\frac{y^6}{6}-x+\frac{y^6}{6})^{-\frac{5}{6}}g\left(x-\frac{y^6}{6}\right)\cdot\left(-y^5\right)-$$

$$-\frac{5}{6}\int\limits_0^{x-\frac{y^6}{6}}(x+\frac{y^6}{6}-s)^{-\frac{11}{6}}g(s)ds\cdot y^5+h'\left(x+\frac{y^6}{6}\right)\cdot y^5,$$

подстановка ОР (4.29) в УК (4.27) дает систему уравнений

$$\begin{cases} u\big|_{y=0}=\int\limits_0^x(x-s)^{-\frac{5}{6}}g(s)ds+h(x)=x^2, \\ u_y\big|_{y=0}=-3^{\frac{5}{6}}g(x)-\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{5}3^{\frac{5}{6}}g(x)=4, \end{cases} \qquad (4.30)$$

так как в силу интегрирования по частям для $\forall g(s)\in C^{(2)}$, $\forall x>0$ предел

$$\lim_{y\overset{>}{\to}0}y^5\int\limits_0^{x-\frac{y^6}{6}}(x+\frac{y^6}{6}-s)^{-\frac{11}{6}}g(s)ds=$$

$$=\frac{6}{5}\lim_{y\overset{>}{\to}0}y^5\left[\begin{array}{l}(x+\frac{y^6}{6}-s)^{-\frac{5}{6}}g(s)\Big|_{s=0}^{s=x-\frac{y^6}{6}}- \\ -\int\limits_0^{x-\frac{y^6}{6}}(x+\frac{y^6}{6}-s)^{-\frac{5}{6}}g'(s)ds\end{array}\right]=$$

$$=\frac{6}{5}\lim_{\substack{>\\ y\to 0}} y^5\left[\left(\frac{y^6}{3}\right)^{-\frac{5}{6}} g\left(x-\frac{y^6}{6}\right)-(x+\frac{y^6}{6})^{-\frac{5}{6}} g(0)\Bigg|_{s=0}^{s=x-\frac{y^6}{6}} +\right.$$

$$\left.+6(x+\frac{y^6}{6}-s)^{\frac{1}{6}} g'(s)\Bigg|_{s=0}^{s=x-\frac{y^6}{6}} -6\int_0^{x-\frac{y^6}{6}}(x+\frac{y^6}{6}-s)^{\frac{1}{6}} g''(s)ds\right]=\frac{6}{5}\cdot 3^{5/6} g(x).$$

Решаем систему (4.30). Из второго уравнения этой системы имеем, что

$$g(x)=-2\cdot 3^{5/6}. \qquad (4.31)$$

Поэтому из первого уравнения системы (4.30) находим, что

$$h(x)=x^2+2\cdot 3^{5/6}\int_0^x (x-s)^{-5/6}ds=x^2+12\cdot 3^{5/6}x^{1/6}$$

или после переобозначения переменной $x=t$

$$h(t)=t^2+12\cdot 3^{5/6}\cdot t^{1/6}. \qquad (4.32)$$

Подставляем функции (4.31) и (4.32) в ОР (4.29) и получаем решение ЗК (4.26)–(4.27):

$$u=-2\cdot 3^{-\frac{5}{6}}\int_0^{x-\frac{y^6}{6}}\left(x+\frac{y^6}{6}-s\right)^{-5/6}ds+\left(x+\frac{y^6}{6}\right)^2+12\cdot 3^{-\frac{5}{6}}\left(x+\frac{y^6}{6}\right)^{1/6}=$$

$$=12\cdot 3^{-\frac{5}{6}}\left(x+\frac{y^6}{6}-s\right)^{1/6}\Bigg|_{s=0}^{s=x-\frac{y^6}{6}}+\left(x+\frac{y^6}{6}\right)^2+12\cdot 3^{-\frac{5}{6}}\left(x+\frac{y^6}{6}\right)^{1/6}= \qquad (4.33)$$

$$=\left(x+\frac{y^6}{6}\right)^2+4y.$$

III. *Проверка.* Функция (4.33) удовлетворяет УК (4.27)

$$u(x,0)=\left[(x+\frac{y^6}{6})^2+4y\right]\Bigg|_{y=0}=x^2,\quad u_y(x,0)=\left[2(x+\frac{y^6}{6})y^5+4\right]\Bigg|_{y=0}=4.$$

Она также удовлетворяет уравнению (4.26), потому что

$$u_x=2(x+\frac{y^6}{6}),u_{xx}=2,u_{yy}=2y^{10}+10(x+\frac{y^6}{6})y^4$$

и, следовательно, $\quad 2y^{10}-2y^{10}-10(x+\frac{y^6}{6})y^4+5y^4 2(x+\frac{y^6}{6})=0.$

Задача 4.7. Методом характеристик решить задачу Коши

$$u_{xx}-2\cos x u_{xy}-\left(3+\sin^2 x\right)u_{yy}+\sin x u_y=0, \tag{4.34}$$

$$u\big|_{y=-\sin x}=e^{2x},u_y\big|_{y=-\sin x}=\frac{1}{2}\cos 2x. \tag{4.35}$$

Решение. I. *Интегрирование уравнения.* Сначала приведем уравнение (4.34) к КВ. Решив характеристическое уравнение $\left(dy\right)^2+2\cos x dx dy-\left(3+\sin^2 x\right)\left(dx\right)^2=0$, которое распадается на два ОДУ $dy+\left(\cos x\pm 2\right)dx=0$, имеем два семейства характеристик: $y+\sin x+2x=c_1$, $y+\sin x-2x=c_2$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Поэтому делаем замену переменных: $\xi=y+\sin x+2x$, $\eta=y+\sin x-2x$, находим частные производные

$$u_x=\tilde{u}_\xi\left(\cos x+2\right)+\tilde{u}_\eta\left(\cos x-2\right),\quad u_y=\tilde{u}_\xi+\tilde{u}_\eta,$$
$$u_{xy}=\tilde{u}_{\xi\xi}\left(\cos x+2\right)+2\tilde{u}_{\xi\eta}\cos x+\tilde{u}_{\eta\eta}\left(\cos x-2\right),\quad u_{yy}=\tilde{u}_{\xi\xi}+2\tilde{u}_{\xi\eta}+\tilde{u}_{\eta\eta},$$
$$u_{xx}=\tilde{u}_{\xi\xi}\left(\cos x+2\right)^2+2\tilde{u}_{\xi\eta}\left(\cos^2 x-4\right)+\tilde{u}_{\eta\eta}\left(\cos x-2\right)^2-\tilde{u}_\xi\sin x-\tilde{u}_\eta\sin x$$

строим таблицу неизвестных коэффициентов нового уравнения

$$
\begin{array}{l|lllll}
\tilde{u}_{\xi\eta} & 2\left(\cos^2 x-4\right) & -4\cos^2 x & -2\left(3+\sin^2 x\right) & + \quad 0 & =-16, \\
\tilde{u}_{\xi} & -\sin x & + \quad 0 & + \quad 0 & + \ \sin x & =0, \\
\tilde{u}_{\eta} & -\sin x & + \quad 0 & + \quad 0 & + \ \sin x & =0
\end{array}
$$

и приходим к КВ

$$\tilde{u}_{\xi\eta}=0\,.$$

Затем, интегрируя этот КВ, получаем ОР уравнения (4.34):

$$
\begin{gathered}
u=\tilde{u}=g(\xi)+h(\eta)=g(y+\sin x+2x)+h(y+\sin x-2x) \\
\forall g(\xi),h(\eta)\in C^{(2)}.
\end{gathered}
\tag{4.36}
$$

II. *Подстановка ОР в УК.* Для решения (4.36) УК (4.35) превращаются в систему уравнений

$$
\begin{cases}
u\big|_{y=-\sin x}=g(2x)+h(-2x)=e^{2x}, \\
u_y\big|_{y=-\sin x}=g'(2x)+h'(-2x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x.
\end{cases}
$$

(4.37)

Дифференцируем по x первое уравнение данной системы

$$2g'(2x)-2h'(-2x)=2e^{2x}\,,$$

этот результат складываем с ее вторым уравнением, умноженным на 2, и приходим к уравнению

$$g'(2x)=\frac{1}{4}\left(2e^{2x}+\cos 2x\right).$$

Из него заменой переменной $\mathrm{s}=2x$ и интегрированием по s находим функцию

$$g(\mathrm{s})=\frac{1}{2}e^{s}+\frac{1}{4}\sin s+c,\quad c\in\mathbb{R}. \tag{4.38}$$

Тогда из первого уравнения системы (4.37) можем выразить

$$h(-2x)=e^{2x}-g(2x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}\sin 2x-c\,.$$

Делаем замену переменной $t=-2x$ и получаем функцию

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{4}\sin t-c. \qquad (4.39)$$

Таким образом, из ОР (4.36) функции (4.38) и (4.39) при $s=y+\sin x+2x$ и $t=y+\sin x-2x$ дают решение ЗК (4.34) $-$(4.35):

$$\begin{aligned} u=&\frac{1}{2}\left(e^{y+\sin x+2x}+e^{-y-\sin x+2x}\right)+\\ &+\frac{1}{4}\left[\sin(y+\sin x+2x)+\sin(y+\sin x-2x)\right]. \end{aligned} \qquad (4.40)$$

III. *Проверка.* Для функции (4.40) выполняются УК (4.35)

$$u\big|_{y=-\sin x}=\frac{1}{2}\left(e^{2x}+e^{2x}\right)+\frac{1}{4}\left[\sin(2x)+\sin(-2x)\right]=e^{2x},$$

$$u_y\big|_{y=-\sin x}=\frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{2x}\right)+\frac{1}{4}\left[\cos(2x)+\cos(-2x)\right]=\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Когда подстановка функции в искомое уравнение сложна, тогда в это уравнение можно поочередно подставлять слагаемые ОР данного уравнения, если она действительно содержится во множестве ОР. Например, функция (4.40) принадлежит множеству ОР (4.36), так как она действительно выводится из формулы (4.36) при функциях $g(s),h(t)\in C^{(2)}$ вида (4.38) и (4.39). Поэтому в уравнение (4.34) можно порознь подставить слагаемые $g=g(y+\sin x+2x)$ и $h=h(y+\sin x-2x)$ ОР (4.36).

Берем частные производные от первого слагаемого

$$g_x = g'(\xi)(\cos x + 2),\ \ g_{xx} = g''(\xi)(\cos x + 2)^2 - g'(\xi)\sin x,$$
$$g_{xy} = g''(\xi)(\cos x + 2),\ \ g_y = g'(\xi),\ \ g_{yy} = g''(\xi)$$

и подставляем в уравнение (4.34)

$$g''(\xi)\cdot(\cos x + 2)^2 - g'(\xi)\cdot\sin x - 2\cos x\cdot g''(\xi)(\cos x + 2) -$$
$$-\left(3 + \sin^2 x\right)\cdot g''(\xi) + \sin x\cdot g'(\xi) = 0.$$

Берем частные производные от второго слагаемого

$$h_x = h'(\eta)(\cos x - 2),\ \ h_{xx} = h''(\eta)(\cos x - 2)^2 - h'(\eta)\sin x,$$
$$h_{xy} = h''(\eta)(\cos x - 2),\ \ h_y = h'(\eta),\ \ h_{yy} = h''(\eta)$$

и подставляем их в уравнение (4.34)

$$h''(\eta)(\cos x - 2)^2 - h'(\eta)\sin x - 2\cos x\cdot h''(\eta)(\cos x - 2) - \left(3 + \sin^2 x\right)\cdot h''(\eta) +$$
$$+\sin x\cdot h'(\eta) = 0.$$

Следовательно, ЗК (4.34) – (4.35) решена правильно.

Замечание 4.2. Решение задач Коши и проверку решений проще осуществлять на персональных компьютерах с использованием системы Mathematica. Например, проверка решения (4.40) на выполнимость УК (4.35) заключается в непосредственных вычислениях:

```
u[x_, y_] = 1/2 (e^(y+Sin[x]+2x) + e^(-y-Sin[x]+2x)) +
    1/4 (Sin[y + Sin[x] + 2x] + Sin[y + Sin[x] - 2x]);
w = ∂y u[x, y];
u[x, -Sin[x]] == e^(2x)
y = -Sin[x];
w == 1/2 Cos[2x]
True.
True.
```

Проверка на справедливость уравнения (4.34) для решения (4.40) состоит из следующих вычислений:

```
u[x_, y_] = 1/2 (e^(y+Sin[x]+2x) + e^(-y-Sin[x]+2x)) +
    1/4 (Sin[y + Sin[x] + 2x] + Sin[y + Sin[x] - 2x]);
Simplify[∂x,x u[x, y] - 2 Cos[x] ∂x,y u[x, y] - (3 + (Sin[x])^2) ∂y,y u[x, y] +
    Sin[x] ∂y u[x, y]] == 0
 True.
```

Задача 4.8. На персональном компьютере с помощью системы Mathematica решить задачу Коши

$$u_{xx} - u_{xy} + \frac{2}{y}u_x - \frac{2}{y}u_y = 0,\ x > 0,\ y > 0, \qquad (4.41)$$

$$u\big|_{y=1} = \varphi(x), u_y\big|_{y=1} = \psi(x), \varphi(x) \in C^{(2)}(0,+\infty), \psi(x) \in C^{(1)}(0,+\infty). \quad (4.42)$$

Решение. I. *Интегрирование уравнения*. Приведем уравнение

```
∂x,x u[x, y] - ∂x,y u[x, y] + 2/y ∂x u[x, y] - 2/y ∂y u[x, y] == 0;
```

к КВ. Определяем тип уравнения (вычисляем дискриминант $d = D$):

```
a = 1;
b = -1;
c = 0;
l = 2/y;
s = -2/y;
a ∂x,x u[x, y] + b ∂x,y u[x, y] + c ∂y,y u[x, y] + l ∂x u[x, y] + s ∂y u[x, y] == 0;
d = b^2 - 4 a c // Simplify
  1.
```

Это уравнение гиперболического типа, так как его $d > 0$. Находим общие интегралы. Для этого подключаем специальный пакет << Calculus`DSolveIntegrals`.

```
<<Calculus`DSolveIntegrals`
CompleteIntegral[2 a * D[f[x, y], x] + (b + √d) * D[f[x, y], y] == 0, f[x, y], {x, y},
 IntegralConstants → F]
```

```
{{f[x,y]→F[1]+y F[2]}}
CompleteIntegral[2 a*D[o[x, y], x] + (b - Sqrt[d]) *D[o[x, y], y] == 0, o[x, y], {x, y},
 IntegralConstants → G]
{{o[x,y]→G[1]+x G[2]+y G[2]}}
```

Записываем функции замены переменных:

```
c1=y;
c2=x+y;
ξ=c1;
η=c2;
```

Проверяем условие невырожденности замены переменных:

$$AA = \begin{pmatrix} \partial_x \xi & \partial_y \xi \\ \partial_x \eta & \partial_y \eta \end{pmatrix} \text{ // MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
x>0;y>0;
```

$$\text{Det}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] \neq 0$$

```
True.
```

Вычисляем коэффициенты нового уравнения:

$$AA = a\,(\partial_x \xi)^2 + b\,\partial_x \xi\,\partial_y \xi + c\,(\partial_y \xi)^2 \text{ // PowerExpand // Simplify}$$

$$BB = a\,\partial_x \xi\,\partial_x \eta + \frac{b}{2}\,(\partial_x \xi\,\partial_y \eta + \partial_y \xi\,\partial_x \eta) + c\,\partial_y \xi\,\partial_y \eta \text{ // PowerExpand // Simplify}$$

$$CC = a\,(\partial_x \eta)^2 + b\,\partial_x \eta\,\partial_y \eta + c\,(\partial_y \eta)^2 \text{ // PowerExpand // Simplify}$$

$$LL = a\,\partial_{x,x} \xi + b\,\partial_{x,y} \xi + c\,\partial_{y,y} \xi + l\,\partial_x \xi + s\,\partial_y \xi \text{ // PowerExpand // Simplify}$$

$$SS = a\,\partial_{x,x} \eta + b\,\partial_{x,y} \eta + c\,\partial_{y,y} \eta + l\,\partial_x \eta + s\,\partial_y \eta \text{ // PowerExpand // Simplify}$$

$$0$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$0$$

$$-\frac{2}{y}$$

$$0.$$

Сделаем замену функции и найдем новую функцию v:

$$v = \partial_{t1} u[t1, t2]$$

$$\text{DSolve}\left[-\frac{1}{2}\,\partial_{t2} v[t1, t2] == \frac{2}{t1}\,v[t1, t2], v[t1, t2], \{t1, t2\}\right]$$

$$\left\{\left\{v[t1, t2] \to e^{-\frac{4\,t2}{t1}}\,C[1][t1]\right\}\right\}.$$

Согласно замене функции, имеем уравнение

```
DSolve[∂t1 u[t1, t2] == e^(-4 t2/t1) C[3][t1], u[t1, t2], {t1, t2}]
```

$$\left\{\left\{u[t1, t2] \to \int_{K\$43}^{t1} e^{-\frac{4\,t2}{K\$42}}\, C[3][K\$42]\, dK\$42 + C[1][t2]\right\}\right\}.$$

Интегрируем его и приходим к ОР

```
Print["u[x,y]=", u[t1, t2] = e^(-t2) C[3][t1] + C[2][t2] /. {t1 → ξ, t2 → η}]
```

$$u[x,y]=C[2][x+y] + e^{-x-y}\, C[3][y].$$

II. *Подстановка ОР в УК.*. В результате подстановки ОР в УК имеем систему:

```
u[x_, y_] = g[x + y] + e^(-x-y) h[-x];
u[x,1]
```

$$g[1+x] + e^{-1-x}\, h[-x]$$

```
qq[x_, y_] = ∂y u[x, y]
```

$$-e^{-x-y}\, h[-x] + g'[x+y]$$

```
qq[x,1]
```

$$-e^{-1-x}\, h[-x] + g'[1+x]$$

```
qq[x,1]+u[x,1]
```

$$g[1+x] + g'[1+x].$$

Находим функцию g:

```
DSolve[g[z] + ∂z g[z] == φ[z - 1] + ψ[z - 1], g[z], z]
```

$$\left\{\left\{g[z] \to e^{-z}\, C[1] + e^{-z} \int_{K\$58}^{z} e^{K\$57}\, (\varphi[-1 + K\$57] + \psi[-1 + K\$57])\, dK\$57\right\}\right\}$$

```
z=y+x;
g[z] = e^(-z) (φ[z - 1] + ψ[z - 1]) + e^(-z) C[1]
```

$$e^{-x-y}\, C[1] + e^{-x-y}\, (\varphi[-1+x+y] + \psi[-1+x+y]).$$

Находим функцию h:

```
Solve[g[z] + e^(-1-x) h[-x] == ψ[x], h[-x]] // Simplify
```

$$\left\{\left\{h[-x] \to e^{1-y}\, (-C[1] - \varphi[-1+x+y] + e^{x+y}\, \psi[x] - \psi[-1+x+y])\right\}\right\}$$

```
t == -x;
h[t] = e^(1-y) (-C[1] - φ[-1 + x + y] + e^(x+y) ψ[x] - ψ[-1 + x + y])
```

$$e^{1-y}\, (-C[1] - \varphi[-1+x+y] + e^{x+y}\, \psi[x] - \psi[-1+x+y]).$$

Подставляем g и h в ОР, получаем единственное решение ЗК:

```
Print["u[x,y]=", u[z, t] = g[z] + e^(-x-y) h[t] /. {t → -x, z → x + y}]
```

$$u[x,y]=e^{-x-y}\, C[1] + e^{1-x-2y}\, (-C[1] - \varphi[-1+x+y] + e^{x+y}\, \psi[x] - \psi[-1+x+y]) + e^{-x-y}\, (\varphi[-1+x+y] + \psi[-1+x+y])$$

```
e^(-x-y) C[1] + e^(1-x-2 y) (-C[1] - φ[-1 + x + y] + e^(x+y) ψ[x] - ψ[-1 + x + y]) +
  e^(-x-y) (φ[-1 + x + y] + ψ[-1 + x + y]) // Simplify
```

$$e^{-x-2y}\left(\left(-e+e^{y}\right)\varphi[-1+x+y]+e^{1+x+y}\psi[x]+\left(-e+e^{y}\right)\left(C[1]+\psi[-1+x+y]\right)\right).$$