Գ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Թույլատրված է Հայկ. ՍՍՀ բարձրագույն և միջնակարգ մասնագիտական կրթության մինիստրության կողմից որպես ուսումնական ձեռնարկ բուհերի ուսանողների համար

3-րդ վերամշակված և լրացված հրատարակություն

«ԼՈՒՅՍ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ — 1977

517.8
Հ 20

Գիտական խմբագիր՝
Ս. Խ. ԹՈՒՄԱՆՅԱՆ

Հ $\dfrac{702 \quad 1977}{60406 \ 145 \ 1977}$

ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Այս դասագիրքը գրված է հավանականությունների տեսության վերաբերյալ Երևանի պոլիտեխնիկական ինստիտուտի էլեկտրատեխնիկական և մեխանիկական ֆակուլտետների ուսանողներին հեղինակի կարդացած դասախոսությունների հիման վրա։

Գիրքը նկատի է առնված հիմնականում տեխնիկական բուհերի ուսանողների և ինժեներների համար, որոնք ունեն այդ բուհերում կարդացվող մաթեմատիկայի սովորական դասընթացի ծավալով պատրաստություն։

Այս գիրքը գրվել է՝ ելնելով ընթերցողների լայն շրջանի համար մատչելի, հայերեն լեզվով գրված հավանականությունների տեսության համառոտ դասընթաց ունենալու անհրաժեշտությունից։

Հեղինակն աշխատել է նյութը շարադրել պարզ և մատչելի լեզվով, չձգտելով լիակատար մաթեմատիկական խստության։ Տեսության որոշ արդյունքներ բերված են առանց ապացուցման։

Գրքում բերված են մեծ քանակությամբ լուծված օրինակներ, ինչպես նաև մի քանի խնդիրներ, որոնք բացատրում են որոշ պարզագույն տեխնիկական կիրառություններ։

Հեղինակը խորին շնորհակալություն է հայտնում այս գրքի խմբագիր Մ. Խ. Թումանյանին՝ գրքի ուշադիր և բարեխիղճ խմբագրության և հիմնական հարցերի շարադրման վերաբերյալ մի շարք արժեքավոր խորհուրդների համար։ Հեղինակն իր շնորհակալությունն է հայտնում նաև Ս. Վարդանյանին, որը ուշադրությամբ կարդացել է ձեռագիրը և արել է մի շարք արժեքավոր դիտողություններ։

ԵՐԿՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Ներկա հրատարակությունը որոշ չափով տարբերվում է առաջին հրատարակությունից։ Ավելացված են նոր պարագրաֆներ, ընդլայնված է մի քանի պարագրաֆների բովանդակությունը, ամբողջ տեքստում ուղղված են նկատված անճշտություններն ու թերությունները։ Մաթեմատիկական վիճակագրության բաժինը համարյա ամբողջովին վերամշակված է։ Փոփոխություններ մտցնելիս հաշվի են առնված գրքի ընթերցողների արտահայտած ցանկությունները և դիտողությունները։

Գրքի երկրորդ հրատարակությունը, ինչպես և առաջինը, խմբագրված է Ս. Խ. Թումանյանի կողմից։ Տեքստի ուշադիր ընթերցման և ընդարձակ ու արժեքավոր դիտողությունների համար նրան հայտնում եմ իմ խորին շնորհակալությունը։

ՀԵՂԻՆԱԿ

ԵՐՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Ներկա հրատարակությունը տարբերվում է նախորդ երկու հրատարակություններից. այն համարմարեցված է տեխնիկական բուհերի հավանականությունների տեսության նոր ծրագրին։ Ավելացված է պատահական պրոցեսներին նվիրված նոր գլուխ։ Մաթեմատիկական վիճակագրությանը նվիրված գլուխը լրացված է նոր պարագրաֆներով՝ փոքրագույն քառակուսիների եղանակը, ինֆորմացիայի անհավասարությունը և այլն։ Վերամշակված են երրորդ և չորրորդ գլուխները։ Ամեն մի գլխի նյութի վերաբերյալ վերջում բերված են խնդիրներ։ Ձեռնարկը վերամշակելիս հաշվի են առնված մասնագետների և ընթերցողների բոլոր դիտողությունները։

Խորին շնորհակալություն եմ հայտնում Վ. Կ. Օհանյանին և այն բոլոր ընկերներին, որոնք գիրքը վերահրատարակման պատրաստելիս գործուն օգնություն են ցույց տվել և օգտակար դիտողություններ արել։

ՀԵՂԻՆԱԿ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Հավանականությունների տեսությունը հանդիսանում է մաթեմատիկայի մի ճյուղ, որն ուսումնասիրում է պատահական երևույթների օրինաչափությունները։ Երևույթը համարվում է պատահական, եթե հայտնի պայմանները, որոնց մեջ ընթանում է երևույթը, չեն սպառում բոլոր այն պատճառները, որոնց հետևանքով անհրաժեշտաբար տեղի է ունենում այդ երևույթը։ Օրինակ, զառը* գցելիս բացվող կետերի թիվը, տվյալ ժամանակամիջոցում քայքայվող ռադիոակտիվ նյութի ատոմների թիվը, համասեռ դետալների խմբից պատահական ձևով վերցված դետալի չափը, ռադիոլամպի ծառայության ժամկետը և այլն պատահական երևույթներ են։

Սակայն, եթե մի պատահական երևույթ չի կարելի վաղօրոք նախատեսել, ապա մեծ թվով համասեռ պատահական երևույթներ դիտելիս երևան են գալիս օրինաչափություններ, որոնք և հանդիսանում են հավանականությունների տեսության ուսումնասիրության առարկան։ Ուստի հավանականությունների տեսության մեթոդները թույլ են տալիս գուշակելու մեծ թվով համասեռ պատահական երևույթների համգումարային արդյունքը մեծ թվով դիտումների միջին ելքը։

Հավանականությունների տեսության ծնունդը (XVII դարում) կապված է ֆրանսիացի մաթեմատիկոսներ Ֆերմայի, Պասկալի և ուրիշների անունների հետ։ Այդ գիտնականների նամակագրությունների մեջ առաջին անգամ օգտագործվում են հավանականության և մաթեմատիկական սպասման հասկացությունները։ Առաջին խոշոր հաջողությունը տեսության զարգացման մեջ պետք է համարել Յակով Բեռնուլիի (1667—1754) մեծ թվերի օրենքի պարզագույն ձևի ստացումը և Լապլասի (1749—1827) կենտրոնական սահմանային թեորեմի ապացուցումը։ Հավանականությունների տեսությունն իր հետագա զարգացմամբ, որով նա դարձավ իսկական մաթեմատիկական գիտություն, պարտական է բացառապես ռուս մաթեմատիկոսներ Պ. Լ. Չեբիշևի (1821—1894), Ա. Ա. Մարկովի (1856—1922) և Ա. Մ. Լյապունովի (1857—1918) աշխատանքներին։

---

* Խոսքը նարդու զառի մասին է։

ԵՐԿՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Ներկա հրատարակությունը որոշ չափով տարբերվում է առաջին հրատարակությունից։ Ավելացված են նոր պարագրաֆներ, ընդլայնված է մի քանի պարագրաֆների բովանդակությունը, ամբողջ տեքստում ուղղված են նկատված անճշտությունները ու թերությունները։ Մաթեմատիկական վիճակագրության բաժինը համարյա ամբողջովին վերամըշակված է։ Փոփոխություններ մտցնելիս հաշվի են առնված գրքի ընթերցողների արտահայտած ցանկությունները և դիտողությունները։

Գրքի երկրորդ հրատարակությունը, ինչպես և առաջինը, խմբագրված է Ս. Խ. Թումանյանի կողմից։ Տեքստի ուշադիր ընթերցման և ընդարձակ ու արժեքավոր դիտողությունների համար նրան հայտնում եմ իմ խորին շնորհակալությունը։

ՀԵՂԻՆԱԿ

ԵՐՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Ներկա հրատարակությունը տարբերվում է նախորդ երկու հրատարակություններից. այն համարեցված է տեխնիկական բուհերի հավանականությունների տեսության նոր ծրագրին։ Ավելացված է պատահական պրոցեսներին նվիրված նոր գլուխ։ Մաթեմատիկական վիճակագրությանը նվիրված գլուխը լրացված է նոր պարագրաֆներով՝ փոքրագույն քառակուսիների եղանակը, ինֆորմացիայի անհավասարությունը և այլն։ Վերամշակված են երրորդ և չորրորդ գլուխները։ Ամեն մի գլխի նյութի վերաբերյալ վերջում բերված են խնդիրներ։ Ձեռնարկը վերամշակելիս հաշվի են առնված մասնագետների և ընթերցողների բոլոր դիտողությունները։

Խորին շնորհակալություն եմ հայտնում Վ. Կ. Օհանյանին և այն բոլոր ընկերներին, որոնք գիրքը վերահրատարակման պատրաստելիս գործուն օգնություն են ցույց տվել և օգտակար դիտողություններ արել։

ՀԵՂԻՆԱԿ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Հավանականությունների տեսությունը հանդիսանում է մաթեմատիկայի մի ճյուղ, որն ուսումնասիրում է պատահական երևույթների օրինաչափությունները։ Երևույթը համարվում է պատահական, եթե հայտնի պայմանները, որոնց մեջ ընթանում է երևույթը, չեն սպառում բոլոր այն պատճառները, որոնց հետևանքով անհրաժեշտաբար տեղի է ունենում այդ երևույթը։ Օրինակ, զառը* գցելիս բացվող կետերի թիվը, տվյալ ժամանակամիջոցում քայքայվող ռադիոակտիվ նյութի ատոմների թիվը, համասեռ դետալների խմբից պատահական ձևով վերցված դետալի չափը, ռադիոլամպի ծառայության ժամկետը և այլն պատահական երևույթներ են։

Սակայն, եթե մի պատահական երևույթ չի կարելի վաղօրոք նախատեսել, ապա մեծ թվով համասեռ պատահական երևույթներ դիտելիս երևան են գալիս օրինաչափություններ, որոնք և հանդիսանում են հավանականությունների տեսության ուսումնասիրության առարկան։ Ուստի հավանականությունների տեսության մեթոդները թույլ են տալիս գուշակելու մեծ թվով համասեռ պատահական երևույթների հանրագումարային արդյունքը մեծ թվով դիտումների միջին ելքը։

Հավանականությունների տեսության ծնունդը (XVII դարում) կապված է ֆրանսիացի մաթեմատիկոսներ Ֆերմայի, Պասկալի և ուրիշների անունների հետ։ Այդ գիտնականների նամակագրությունների մեջ առաջին անգամ օգտագործվում են հավանականության և մաթեմատիկական սպասման հասկացությունները։ Առաջին խոշոր հաջողությունը տեսության զարգացման մեջ պետք է համարել Յակով Բեռնուլլիի (1667—1754) մեծ թվերի օրենքի պարզագույն ձևի ստացումը և Լապլասի (1749—1827) կենտրոնական սահմանային թեորեմի ապացույցը։ Հավանականությունների տեսությունն իր հետագա զարգացմամբ, որով նա դարձավ իսկական մաթեմատիկական գիտություն, պարտական է բացառապես ռուս մաթեմատիկոսներ Պ. Լ. Չեբիշևի (1821—1894), Ա. Ա. Մարկովի (1856—1922) և Ա. Մ. Լյապունովի (1857—1918) աշխատանքներին։

---

* Խոսքը նարդու զառի մասին է։

Պ. Լ. Չեբիշևի ժամանակից ռուս և սովետական գիտնականները առաջատար դեր են խաղում հավանականությունների տեսության զարգացման գործում: Հավանականությունների տեսության սովետական դպրոցի ներկայացուցիչներն են Ս. Ն. Բեռնշտեյնը, Ա. Ն. Կոլմոգորովը, Ա. Յա. Խինչինը և ուրիշներ: Ա. Ն. Կոլմոգորովին է պատկանում հավանականությունների տեսության աքսիոմատիկայի մշակումը, որի հիման վրա կառուցված ներդաշնակ տեսությունը դարձել է նույնքան ճշգրիտ գիտություն, որքան և ժամանակակից մաթեմատիկայի ցանկացած բնագավառը: Հավանականությունների տեսության ժամանակակից զարգացումը բնութագրվում է նաև նրա գործնական կիրառությունների ընդլայնումով: Մեծ դեր են խաղացել հավանականությունների տեսության կիրառությունների և նրա վրա հիմնված մաթեմատիկական վիճակագրության բնագավառում սովետական գիտնականներ Ն. Վ. Սմիրնովի, Վ. Ի. Ռոմանովսկու, Ա. Մ. Յագլոմի և ուրիշների աշխատությունները:

Ներկայումս հավանականությունների տեսությունը կիրառվում է գիտության համարյա բոլոր բնագավառներում: Այն առանձնապես լայն կիրառություն է գտնում ֆիզիկայում, կենսաբանության մեջ և ժամանակակից տեխնիկայում՝ էլեկտրատեխնիկայում, ռադիոտեխնիկայում, կապի տեսության մեջ, ռազմական գործում և այլն:

I ԳԼՈՒԽ

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ

1. Պատահարներ: *Հասարակության և բնության մեջ գոյություն ունեցող օրինաչափությունները սահմանելիս հարկ է լինում կատարել փորձեր և դիտումներ։ Միևնույն պայմաններում կատարվող փորձերը կարող են տալ տարբեր արդյունքներ։ Փորձի կամ դիտման յուրաքանչյուր հնարավոր արդյունքը պատահար է։ Եթե տվյալ փորձի պայմաններում դիտարկվող պատահարը պետք է անհրաժեշտաբար տեղի ունենա, կանվանենք հավաստի պատահար (հավաստի պատահարը կնշանակենք Ω տառով)։ Եթե պատահարը տվյալ փորձի պայմաններում չի կարող տեղի ունենալ, կանվանենք անհնար պատահար (անհնար պատահարը կնշանակենք Φ տառով)։ Որպես կանոն, յուրաքանչյուր փորձի արդյունքը սկզբից նախատեսել չի կարելի, քանի որ հնարավոր չէ հաշվի առնել բոլոր այն պատահական հանգամանքները, որոնք ուղեկցում են տվյալ փորձին։ Ուստի փորձի արդյունքը հանդես է գալիս որպես մի պատահական դիպված, որը միայն մասնավոր դեպքում է ներկայացնում հավաստի կամ անհնար պատահար։ Օրինակ, եթե փորձի էությունն այն է, որ մենք 10 էլեկտրական լամպ պարունակող տուփից պատահական ձևով վերցնում ենք մեկը, ապա այս փորձի հնարավոր արդյունքները (այսինքն՝ այն, թե մեր վերցրած լամպը լավ է կամ փչացած) ներկայացնում են պատահարներ, որոնք տվյալ փորձում կարող են տեղի ունենալ։ Եթե միայն սպիտակ գույնի գնդակներ պարունակող տուփից հանում ենք մի գնդակ, ապա սպիտակ գնդակի երևան գալը կլինի հավաստի պատահար, մինչդեռ սև գնդակի երևան գալը կլինի անհնար պատահար։*

Հետագայում պատահարները նշանակելու ենք լատինական այբուբենի մեծ տառերով։

A պատահարն անվանենք B պատահարի մասնավոր դեպքը, երբ A պատահարի հանդես գալուց հանդես է գալիս նաև B պատահարը: Այն հանգամանքը, որ A պատահարը B պատահարի մասնավոր դեպքն է, գրվում է հետևյալ կերպ՝

$$A \subseteq B։$$

Դիցուք փորձի էությունն այն է, որ մենք պատահական ձևով մի դետալ ենք վերցնում պատրաստի դետալների մի խմբից, որոնց չափերը պարփակված են 12,0—13,0 սմ-ի սահմաններում։ Այս դեպքում, եթե A պատահարն այն է, որ մեր ընտրած դետալի չափը 12,0—12,2 սմ է, իսկ B պատահարն այն, որ դետալի չափը 12,0—12,5 սմ է, A-ն կլինի B-ի մասնավոր դեպքը, քանի որ, եթե դետալի չափը 12,0—12,2 սմ է, այդ չափը կլինի նաև 12,0—12,5 սմ։

Եթե A պատահարը B պատահարի մասնավոր դեպքն է ($A \subseteq B$) և B պատահարն իր հերթին՝ A պատահարի մասնավոր դեպքը ($B \subseteq A$), ապա A և B պատահարները կանվանենք իրար համարժեք և կգրենք հետևյալ կերպ՝

$$A = B։$$

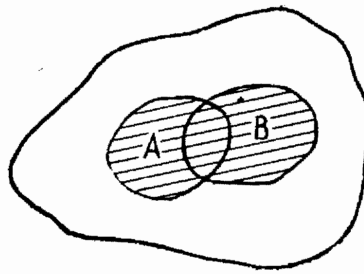
Երկու պատահարներ՝ A և B, կոչվում են անհամատեղելի, եթե նրանցից մեկի հանդես գալը տվյալ փորձում բացառում է մյուս պատահարի հանդես գալու հնարավորությունը։ Մի քանի պատահարներ՝ A, B, C, ..., կանվանենք անհամատեղելի, եթե նրանք զույգ-զույգ անհամատեղելի են։ Օրինակ, զառը գցելիս A, B, C պատահարները, որոնք համապատասխանաբար ցույց են տալիս նրա վերին նիստի վրա երկու, չորս և վեց կետերի բացվելը, անհամատեղելի պատահարներ են, որովհետև զառ գցելիս չի կարող պատահել, որ նույն նիստի վրա միաժամանակ երևան գան 2 կետ և 4 կետ կամ 2 կետ և 6 կետ կամ 4 կետ և 6 կետ։

Մի քանի պատահարներ՝ A, B, C, ..., տվյալ փորձում կազմում են պատահարների լրիվ խումբ, եթե այդ պատահարներից առնվազն մեկը անհրաժեշտաբար հանդես գա, այսինքն՝ եթե նշված պատահարները սպառում են փորձի բոլոր հնարավոր արդյունքները։ Օրինակ, զառը գցելիս հետևյալ պատահարները՝ որ նրա վերին նիստի վրա, համապատասխանաբար, երևան են գալիս մեկ, երկու, երեք, հինգ և զույգ թվով կետեր, կազմում են պատահարների լրիվ խումբ։ Իսկ այն պատահարները, որոնց էությունը նրա վերին նիստի վրա, համապատասխանաբար, մեկ, երկու, երեք, չորս, հինգ և վեց կետերի երևան գալն է, կազմում են անհամատեղելի պատահարների լրիվ խումբ։

Երկու պատահարներ՝ A և $\overline{A}$, կոչվում են հակադիր, եթե նրանք անհամատեղելի են և կազմում են լրիվ խումբ։

A *և* B *երկու պատահարներից որևէ մեկի հանդես գալը մի պատահար է, որը կոչվում է* A և B պատահարների գումար *և նշանակվում է* $A \cup B$*-ով։ Նման ձևով* $A_1, A_2, \ldots A_s$ *պատահարներից որևէ մեկի հանդես գալը մի պատահար է, որը կոչվում է այդ* $A_1, A_2 \ldots A_s$ պատահարների գումար *և նշանակվում է* $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s$*-ով։*

Օրինակ, եթե կետը նետում ենք D *տիրույթի վրա (նկ. 1) և* A*-ն մի պատահար է, որ կետը կընկնի* A *տիրույթի վրա, իսկ* B*-ն մի պատահար, որ կետը կընկնի* B *տիրույթի վրա, ապա* $A \cup B$ *պատահարն այն է, որ կետը կընկնի ստվերագծած տիրույթի վրա։ Կամ, եթե նետում ենք զառը և* A, B *ու* C *պատահարները, համապատասխանաբար, ներկայացնում են 1 կամ 3 կամ 5 պատահարների երևալը, ապա* $A \cup B \cup C$ *պատահարն այն է, որ նրա վերին նիստի վրա հանդես կգա կենտ թիվը։ Ակներև է, որ*



Նկ. 1.

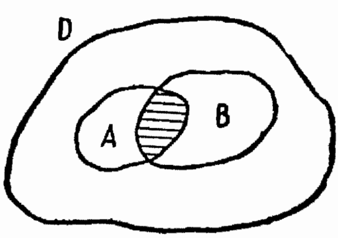
$$A \cup A = A, \quad A \cup \Phi = A, \quad A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cup \bar{A} = \Omega։$$

Եթե $A_1, A_2, \ldots A_s$ *պատահարները կազմում են լրիվ խումբ, ապա*

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s = \Omega։$$

A *և* B *երկու պատահարների համատեղ հանդես գալը մի պատահար է, որը կոչվում է* A և B պատահարների արտադրյալ *և նշանակվում է* $A \cap B$*-ով։ Նման ձևով* $A_1, A_2 \ldots A_s$ *պատահարների համատեղ հանդես գալը մի պատահար է, որը կանվանենք* $A_1, A_2 \ldots A_s$ պատահարների արտադրյալ *և կնշանակենք* $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_s$*-ով։*

Օրինակ, եթե կետը գցում ենք D *տիրույթի վրա (նկ. 2) և* A *պատահարն այն է, որ կետը կընկնի* A *տիրույթի վրա, իսկ* B*-ն՝ այն, որ կետը կընկնի* B *տիրույթի վրա, ապա* $A \cap B$ *պատահարն այն է, որ կետը կընկնի ստվերագծած տիրույթի վրա։ Եթե քարտերի կապուկից հանում ենք մի պատահական քարտ և* A *պատահարն այն է, որ քարտը կարմիր է, իսկ* B *պատահարն այն, որ քարտը վեցանոց է, ապա* $A \cap B$ *պատահարն այն է, որ քարտը կարմիր վեցանոց է։ Ակներև է, որ*



Նկ. 2.

$$A \cap A = A, \quad A \cap \Phi = \Phi, \quad A \cap \Omega = A, \quad A \cap \bar{A} = \Phi։$$

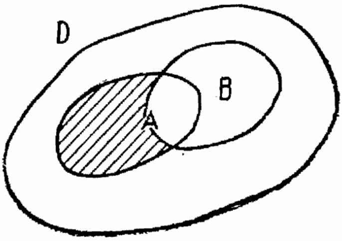
Եթե A և B պատահարներն անհամատեղելի են, ապա

$$A \cap B = \Phi։$$

Եթե $A_1, A_2, \ldots A_s$ պատահարներն անհամատեղելի են, ապա

$$A_i \cap A_j = \Phi \qquad i \neq j։$$

A պատահարի հանդես գալը առանց B-ի մի պատահար է, որը կոչվում է A և B պատահարների տարբերություն և նշանակվում է $A \setminus B$-ով։ Օրինակ, եթե կետը գցում ենք D տիրույթի վրա (նկ. 3) և A պատահարն այն է, որ կետը կընկնի A տիրույթի վրա, իսկ B պատահարն այն, որ կետը կընկնի B տիրույթի վրա, ապա $A \setminus B$ պատահարն այն է, որ կետը կընկնի ստվերագծած տիրույթի վրա։ Ակներև է, որ



Նկ. 3.

$$A \setminus A = \Phi, \quad \Omega \setminus \bar{A} = A.$$

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}։$$

2. Հավանականության դասական սահմանումը: Հավանականության դասական սահմանումը հիմնված է հավասարահնարավոր պատահարների գաղափարի վրա։ Մի քանի պատահարներ՝ A, B, C, ..., տվյալ փորձում հավասարահնարավոր են, եթե հիմք չկա պնդելու, որ նրանցից մեկի հանդես գալը գերադասելի է մյուսների համեմատությամբ։ Օրինակ, եթե խնամքով խառնելուց հետո միատեսակ դետալներից բաղկացած խմբից պատահական ձևով վերցնենք մի դետալ, ապա յուրաքանչյուր դետալի երևան գալը հավասարահնարավոր է: Եթե պատահական ձևով գնդակ հանենք մի սափորից, որ պարունակում է հավասար թվով ինչպես սպիտակ, այնպես էլ սև գնդակներ, ապա սև և սպիտակ գնդակների երևան գալու պատահարները կլինեն հավասարահնարավոր պատահարներ. իսկ եթե սպիտակ գնդակների թիվը հավասար չէ սև գնդակների թվին, այդ պատահարներն այլևս հավասարահնարավոր չեն լինի. այն գույնի գնդակների երևալը կլինի ավելի հնարավոր, որոնց թիվն ավելի մեծ է։

Տվյալ փորձում քննարկենք

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \ldots \omega_k, \ \omega_{k+1}, \ \ldots \omega_l$$

անհամատեղելի և հավասարահնարավոր պատահարների լրիվ խումբը, պատահարներ, որոնց կրճատ կանվանենք փորձի էլեմենտար ելքեր:

Այնուհետև ենթադրենք, թե փորձի որևէ k թվով ելքերը ($k \leqslant l$), օրինակ,

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \ldots \ \omega_k,$$

ներկայացնում են որևէ A պատահարի մասնավոր դեպքերը, այսինքն՝

$$\omega_1 \subseteq A, \quad \omega_2 \subseteq A, \ldots \omega_k \subseteq A\text{։}$$

Այս էլեմենտար ելքերը՝ $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_k$, որոնք իրենց ետևից բերում են A պատահարը, անվանենք փորձի էլեմենտար ելքեր, որոնք նպաստավոր են A պատահարի համար: Ակներև է, որ երբ տրված է փորձի էլեմենտար ելքերի l թիվը, A պատահարն այնքան ավելի հավանական կլինի, որքան մեծ է այն ելքերի k թիվը, որոնք նպաստավոր են այդ պատահարի համար։ Իսկ պատահարի համար նպաստավոր փորձի էլեմենտար ելքերի տվյալ k թվի դեպքում այդ պատահարն այնքան ավելի քիչ հավանական կլինի, որքան մեծ է փորձի էլեմենտար ելքերի l թիվը։

Բնական է, ուրեմն, պատահարի հավանականություն տվյալ փորձի պայմաններում անվանել այդ պատահարի հանդես գալու համար նպաստավոր էլեմենտար ելքերի թվի և տվյալ փորձի բոլոր էլեմենտար ելքերի թվի հարաբերությունը: Հենց այս սահմանումն էլ կլինի հավանականության դասական սահմանումը։

Նշանակելով A պատահարի հավանականությունը P(A)-ով, կունենանք՝

$$P(A) = \frac{k}{l}\text{։} \qquad (1)$$

Քննարկենք այս սահմանման մի քանի պարզագույն հետևանքները։

Եթե Ω պատահարը հավաստի է տվյալ փորձում, ապա ակներև է, որ նրա համար նպաստավոր են փորձի բոլոր էլեմենտար ելքերը ($k = l$), և

$$P(\Omega) = 1, \qquad (2)$$

այսինքն՝ հավաստի պատահարի հավանականությունը հավասար է 1-ի:

Եթե Φ պատահարն անհնար է տվյալ փորձում, ապա ակներև է, որ փորձի էլեմենտար ելքերից և ոչ մեկը նպաստավոր չէ նրա համար ($k = 0$) և

$$P(\Phi) = 0, \qquad (3)$$

այսինքն՝ անհնար պատահարի հավանականությունը հավասար է զրոյի:

Ընդհանրապես, ցանկացած պատահարի դեպքում փորձի այն էլեմենտար ելքերի թիվը, որոնք նպաստավոր են այդ պատահարի համար, չի կարող գերազանցել փորձի բոլոր էլեմենտար ելքերի ընդհանուր թվին $(0 \leqslant k \leqslant l)$, *ուստի*

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1, \tag{4}$$

այսինքն՝ պատահարի հավանականությունը ոչ բացասական թիվ է, որը մեծ չէ 1-ից։

Եթե A *պատահարը* B *պատահարի մասնավոր դեպքն է, ապա ակներև է, որ* A *պատահարի համար նպաստավոր փորձի* k_1 *էլեմենտար ելքերի թիվը չի կարող գերազանցել* B *պատահարի համար նպաստավոր փորձի* k_2 *էլեմենտար ելքերի թվին* $(k_1 \leqslant k_2)$, *ուստի*

$$\frac{k_1}{l} \leqslant \frac{k_2}{l}$$

և

$$P(A) \leqslant P(B), \tag{5}$$

այսինքն՝ եթե A պատահարը B պատահարի մասնավոր դեպքն է, ապա A պատահարի հավանականությունը չի գերազանցում B պատահարի հավանականությանը։

Եթե A *և* B *պատահարները իրար համարժեք են, այսինքն՝*

$$A \subseteq B, \qquad B \subseteq A,$$

ապա (5)-ի համաձայն

$$P(A) \leqslant P(B), \qquad P(B) \leqslant P(A).$$

ուստի

$$P(A) = P(B),$$

այսինքն՝ իրար համարժեք պատահարները ունեն հավասար հավանականություններ։

Եթե փորձի էլեմենտար ելքերի թիվը հավասար է l*-ի, իսկ* A *պատահարի համար նպաստավոր են* k *ելքերը, ապա ակներև է, որ հակադիր* $\bar{A}$ *պատահարի համար նպաստավոր կլինեն մնացած* $l-k$ *ելքերը. ուստի*

$$P(A) = \frac{k}{l}, \qquad P(\bar{A}) = \frac{l-k}{l}$$

և, հետևաբար,

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \tag{6}$$

այսինքն՝ հակադիր պատահարների հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի:

Օգտվելով հավանականության դասական սահմանումից, քննարկենք պատահարների հավանականությունները հաշվելու մի քանի պարզագույն օրինակներ։

Այդ օրինակները լուծելիս պետք է սկզբում նշել փորձի բոլոր հնարավոր էլեմենտար ելքերը, ապա այն ելքերը, որոնք նպաստավոր են մեզ հետաքրքրող պատահարի համար, հաշվել թե՛ մեկը և թե՛ մյուսը և կազմել նրանց հարաբերությունը։ Հիշեցնենք, որ փորձի էլեմենտար ելքերը փորձի այն հնարավոր արդյունքներն են, որոնք կազմում են անհամատեղելի հավասարահնարավոր պատահարների լրիվ խումբը։

Օրինակ 1. Միաժամանակ նետում ենք երկու դրամ. որքա՞ն է գերբի չբացվելու հավանականությունը։ Տվյալ փորձի էլեմենտար ելքերն են՝

1) գերբ և գերբ,
2) գերբ և գիր,
3) գիր և գերբ,
4) գիր և գիր։

Այդ ելքերից միայն մեկը՝ չորրորդը, նպաստավոր է A պատահարի համար, որ գերբը դրամներից ոչ մեկի վրա չի բացվի. ուստի

$$P(A)=\frac{1}{4}։$$

Օրինակ 2. Մի սափորում կա 3 սպիտակ և 2 սև գնդակ, իսկ երկրորդում՝ 2 սպիտակ և 2 սև գնդակ։ Յուրաքանչյուր սափորից հանում են (պատահական կերպով) մեկական գնդակ։ Որքա՞ն է երկու գնդակների միևնույն գույնի լինելու հավանականությունը։

Առաջին սափորից կարող է դուրս գալ այնտեղ գտնվող հինգ գնդակներից ցանկացածը։ Երկրորդ սափորից կարող է դուրս գալ այնտեղ եղած չորս գնդակներից ցանկացածը։ Առաջին սափորից հանված յուրաքանչյուր գնդակը կարող է զուգորդվել երկրորդ սափորից հանված ցանկացած գնդակի հետ։ Առաջին սափորի գնդակները համարակալելով 1, 2, 3, 4, 5 համարներով (ընդ որում առաջին երեք համարներով՝ սպիտակ գնդակները, իսկ վերջին համարներով՝ սևերը) և ճիշտ այդ ձևով էլ համարակալելով երկրորդ սափորի գնդակները (1 և 2 համարներով սպիտակ գնդակները, իսկ 3 և 4 համարներով՝ սևերը), կունենանք փորձի հետևյալ էլեմենտար ելքերը՝

1 և 1,	2 և 1,	3 և 1,	4 և 1,	5 և 1,
1 և 2,	2 և 2,	3 և 2,	4 և 2,	5 և 2,

1 և 3, 2 և 3, 3 և 3, 4 և 3, 5 և 3,

1 և 4, 2 և 4, 3 և 4, 4 և 4, 5 և 4,

որոնցից մեզ հետաքրքրող A պատահարի համար, այսինքն՝ միևնույն գույնն ունեցող երկու գնդակների երևան գալու համար նպաստավոր են միայն ընդգծված ելքերը։ Հետևաբար՝

$$l = 4 \cdot 5 = 20, \qquad k = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$$

և

$$P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}:$$

Օրինակ 3. Մի տուփից, որ պարունակում է 20 էլեկտրական լամպ, որոնցից 4-ը փչացած են, պատահական կերպով վերցնում ենք երկու լամպ։ Գտնել վերցրած լամպերի փչացած չլինելու հավանականությունը։

Այս փորձի էլեմենտար ելքերի թիվը հավասար է այն եղանակների թվին, որոնցով կարելի է քսան լամպերից ընտրել երկու լամպ, այսինքն՝ C_{20}^2։ Այդ ելքերից մեզ հետաքրքրող A պատահարի համար նպաստավոր կլինեն այն ելքերը, որոնց դեպքում ընտրված երկու լամպերն էլ փչացած չեն։ Այդ ելքերի թիվը, ակներև է, որ հավասար է C_{16}^2։ Որոնելի հավանականությունը կլինի

$$P(A) = \frac{C_{16}^2}{C_{20}^2} = \frac{16 \cdot 15}{20 \cdot 19} = \frac{12}{19},$$

Օրինակ 4. Դիցուք ունենք N առարկաների բազմություն, որոնցից M-ը օժտված են A հատկանիշով, իսկ մնացածները՝ $N - M = L$, օժտված չեն այդ հատկանիշով։ Առարկաների այդ բազմությունից պատահականորեն վերցնում ենք n առարկա։ Որոշել նրանցից m առարկայի A հատկանիշով օժտված լինելու և, հետևաբար, մնացած $n - m = l$ առարկաների այդ հատկանիշով օժտված չլինելու հավանականությունը։

Այս փորձի բոլոր էլեմենտար ելքերի թիվը կլինի այնքան, որքան տարբեր եղանակներով N առարկաներից կարելի է ընտրել n առարկա, այսինքն՝ C_N^n։ Այն ելքերի թիվը, որոնք նպաստավոր են այն պատահարի համար, որ n առարկաներից m-ը օժտված են A հատկանիշով, իսկ մնացածներն այդ հատկանիշով օժտված չեն, հավասար կլինի $C_M^m C_L^l$, որովհետև M առարկաներից, որոնք օժտված են A հատկանիշով, այդ հատկանիշով օժտված m առարկաներ կարելի է ընտրել C_M^m եղանակներով. l տարրեր, որոնք A հատկանիշով օժտըված չեն, այդ հատկանիշով չօժտված տարրերի L ընդհանուր քանակից կարելի է ընտրել C_L^l եղանակներով. ընդ որում առաջին խմբի ելքերից յուրաքանչյուրը կարող է զուգորդվել երկրորդ խմբի ցանկացած ելքի հետ, հետևաբար, նպաստավոր ելքերի ընդհանուր թիվը հավասար կլինի $C_M^m\, C_L^l$ արտադրյալին։ Այսպիսով, որոնելի հավանականությունը կլինի

$$P = \frac{C_M^m\, C_L^l}{C_N^n}։$$

Օրինակ 5. Նույն տեսակի 100 դետալների խմբի մեջ կան 5 խոտանված դետալներ. այս խմբից պատահականորեն վերցնում ենք 20 դետալ։ Որոշել այն հավանականությունը, որ այդ 20 դետալների մեջ խոտանված դետալների թիվը մեծ չէ երկուսից։

Փորձի էլեմենտար ելքերի թիվը կլինի

$$l = C_{100}^{20}$$

իսկ փորձի էլեմենտար ելքերի թիվը, որոնք նպաստավոր են այն պատահարի համար, որ խոտանված դետալների թիվը ավելի չի լինի երկուսից, ստացվում է որպես գումար այն ելքերի թվի, որոնք նպաստավոր են այն պատահարի համար, որ 20 դետալների մեջ խոտանված դետալների թիվը կլինի կամ զրո, կամ մեկ, կամ երկու դետալ, այսինքն՝

$$k = C_{95}^{20} + C_{95}^{19} \cdot C_5^1 + C_{95}^{18} \cdot C_5^2.$$

ուստի որոնելի հավանականությունը կլինի

$$P = \frac{C_{95}^{20} + C_{95}^{19} \cdot C_5^1 + C_{95}^{18} \cdot C_5^2}{C_{100}^{20}} = 0{,}947։$$

Օրինակ 6. Մի արկղի մեջ, որ պարունակում է N բջիջ, պատահական ձևով բաշխվում են n մասնիկներ ($n < N$)։ Ենթադրելով, որ յուրաքանչյուր մասնիկի ընկնելը ցանկացած բջջի մեջ հավասարահնարավոր է, գտնել որոշակի n բջիջների մեջ հայտնվող մեկական մասնիկների հավանականությունը։

Առաջին մասնիկը կարող է տեղ գրավել եղած N բջիջներից ցանկացածում։ Երկրորդ մասնիկը նույնպես կարող է տեղ գրավել այդ N բջիջներից ցանկացածում։ Բայց առաջին մասնիկի յուրաքանչյուր դիրքը կարող է զուգորդվել երկրորդ մասնիկի ցանկացած դիրքի հետ. հետևաբար, երկու մասնիկները կարող են գրավեցնել եղած N բջիջ-

ները N^2 *եղանակներով։ Նույն ձևով դատելով, եզրակացնում ենք, որ* n *մասնիկները կարող են զբաղեցնել* N *բջիջները* N^n *եղանակներով, այսինքն՝* $l = N^n$*։ Որպեսզի որոշենք փորձի ելքերը, որոնք նպաստավոր են այն պատահարի համար, որ որոշակի* n *բջիջներում կտեղավորվի մեկական մասնիկ, դիտենք նպաստավոր ելքերից մեկը։ Այդ մի ելքից կարելի է ստանալ բոլոր նպաստավոր ելքերը՝ բջիջները նույնը թողնելով, իսկ մասնիկների տեղերը փոխելով։ Այդ տեղափոխությունների թիվը կլինի* $n!$, *ուստի* $k = n!$ *և*

$$P = \frac{n!}{N^n},$$

3. Հավանականության վիճակագրական սահմանումը։ *Հավանականության դասական սահմանումն օգտագործվում է այն դեպքում, երբ տվյալ փորձի պայմաններում կարելի է ցույց տալ վերջավոր թվով անհամատեղելի և հավասարահնարավոր պատահարների լրիվ խումբ։ Սակայն շատ հաճախ գործնական խնդիրներ լուծելիս հնարավոր չէ նշել քննարկվող փորձի բոլոր հավասարահնարավոր արդյունքները, իսկ կիրառական բնույթի խնդիրների մեծամասնության մեջ փորձի հնարավոր արդյունքների թիվն անվերջ է։ Այդ դեպքում հավանականության դասական սահմանումը դառնում է կիրառման համար ոչ պիտանի։ Այդպիսի դեպքերում տվյալ փորձի հնարավոր պատահարների հավանականությունները որոշելիս հաճախ ղեկավարվում են արդեն կատարված փորձերի արդյունքներով։*

Ենթադրենք, թե նույն պայմաններում կատարված n *փորձերում մեզ հետաքրքրող* A *պատահարն իրականացել է* m *անգամ։ Այդ դեպքում* $\frac{m}{n}$ *հարաբերությունը կոչվում է այդ* n *փորձերի ընթացքում* A *պատահարի երևան գալու* հաճախություն: *Դժվար չէ տեսնել, որ* A *պատահարի երևան գալու հաճախությունն օժտված է հետևյալ հատկություններով. 1)* $\frac{m}{n} \geqslant 0$, *2) եթե պատահարը հավաստի է, պետք է տեղի ունենա բոլոր փորձերի ժամանակ, այսինքն՝* $m = n$ *և հավաստի* պատահարի հաճախությունը հավասար է միավորի, *3) եթե* A *և* B *պատահարներն անհամատեղելի են և* A *պատահարը տեղի է ունեցել* m_1 *անգամ* n *փորձերի ընթացքում, իսկ* B *պատահարը՝* m_2 *անգամ՝ այդ նույն փորձերի ընթացքում, ապա* $(A \cup B)$ *պատահարն այդ* n *փորձերի ընթացքում տեղի է ունեցել* $m_1 + m_2$ *անգամ. նշանակում է նրա հաճախությունը՝*

$$\frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n},$$

այսինքն՝ (A ∪ B) պատահարի հաճախությունը հավասար է A և B պատահարների հաճախությունների գումարին:

Մեծ թվով փորձերից բաղկացած սերիաներում, որոնք կատարվում են միևնույն պայմաններում, A պատահարի հանդես գալու կամ հանդես չգալու վերաբերյալ բազմաթիվ դիտումները ցույց են տվել, որ պատահարի հանդես գալու հաճախությունը համարյա հաստատուն մեծություն է, և որքան մեծ է փորձերի n *թիվը յուրաքանչյուր այդպիսի սերիայում, այնքան ավելի փոքր են հաճախության արժեքների շեղումները մեկը մյուսից։*

Բազմաթիվ փորձերից բաղկացած զանազան սերիաներում պատահարների հաճախության կայունության համար որպես իլյուստրացիա դիտարկենք նորածինների բաշխումն ըստ սեռի Լեհաստանում՝ 1927—1932 թվականներին։ (Տվյալները փոխ են առնված հետևյալ գրքից. Ficz. Wahrschein lichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin, 1958):

Տարեթվերը	*Ծնվածների ընդհանուր թիվը*	*Տղաներ*	*Աղջիկներ*	*Հաճախությունը*	
				տղաների ծննդի	*աղջիկների ծննդի*
1927	958733	496554	462189	0,518	0,482
1928	990993	513654	477339	0,518	0,482
1929	994101	514765	479336	0,518	0,482
1930	1022811	528072	494739	0,517	0,485
1931	964573	496986	467587	0,515	0,485
1932	934663	482431	452232	0,516	0,484

Այստեղ փորձերի վեց սերիաներից յուրաքանչյուրում կա մոտավորապես մեկ միլիոն դիտում, ընդ որում A պատահարի հաճախությունը, որ տղաների ծնունդն է (և, հետևաբար, նաև $\bar{A}$ *պատահարի հաճախությունը, որ աղջիկների ծնունդն է), զանազան սերիաներում պահպանում է համարյա նույն արժեքը՝ 0,52 (0,48)։*

Այնուհետև պարզվում է, որ այն դեպքում, երբ կիրառելի է հավանականության դասական սահմանումը, պատահարի հաճախությունը սովորաբար տատանվում է նրա հավանականության շուրջը։ Օրինակ, Բյուֆոնը, դրամը 4040 անգամ նետելով, հաշվել է, որ գերբը երևացել է 2048 անգամ, այսինքն՝ գերբի երևան գալու հաճախությունը, որը տվյալ դեպքում հավասար է 0,5080-ի, նրա երևան գալու 0,5 հավանականությունից շեղվում է 0,0080-ով։ Վիճակագրության մեջ հաճախ օգտվում են պատահական թվերի աղյուսակից, որի համաձայն փորձերի մի սերիայում պատահել է, որ 0, 1, 2, 3, ..., 9 թվանշան-

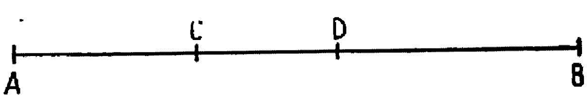
ներից պատահականորեն վերցված 10 000 թվանշանների մեջ 7 թվանշանը հանդիպել է 968 անգամ, այսինքն՝ յոթնյակի երևան գալու հաճախությունը փորձերի այդ սերիայում հավասար է 0,0968-ի, որը նրա երևան գալու 0,1 հավանականությունից տարբերվում է 0,0032-ով։

Նշված երկու հանգամանքները (նախ այն, որ հաճախությունը համարյա պահպանում է միևնույն արժեքը մեծ թվով դիտումներից բաղկացած զանազան սերիաներում, և ապա այն, որ երբ կիրառելի է հավանականության դասական սահմանումը, այդ հաճախությունը մեծ թվով փորձերի ժամանակ տատանվում է հենց տվյալ պատահարի հավանականության շուրջը), հիմք են տալիս ենթադրելու, որ քննարկվող A պատահարի համար գոյություն ունի մի այնպիսի հաստատուն մեծություն, որի շուրջը, տատանվում է նրա հաճախությունը։ Հենց այդ հաստատունն էլ A պատահարի հավանականությունն է։ Այսպիսով, A պատահարի հավանականությունը այն հաստատուն մեծությունն է, որի շուրջը տատանվում է պատահարի հաճախությունը մեծ թվով միևնույն պայմաններում կատարված փորձերից բաղկացած տարբեր սերիաներում։

Իհարկե, անհնարին է ճիշտ որոշել պատահարի հավանականությունը, օգտվելով հավանականության վիճակագրական սահմանումից։ Սակայն այդ հավանականության համար մենք կարող ենք գտնել բավականաչափ մոտ արժեք, որն այնքան ավելի մոտ կլինի ճիշտ արժեքին, որքան շատ են կատարված փորձերը։ Օրինակ, նորածինների ըստ սեռի բաշխման վերաբերյալ վերը բերված օրինակում դիտումների թիվը բավականաչափ մեծ էր, այնպես որ տղայի ծննդյան հավանականությունը բավարար ճշտությամբ կարելի է ընդունել 0,517 թիվը։

Վիճակագրական հավանականությունն ունի նույն (2), (3), (4), (5), (6) հատկությունները, որոնք ապացուցվել էին պատահարի հավանականության դասական սահմանման դեպքում։

4. Երկրաչափական հավանականություններ։ Հավանականությունների դասական սահմանման դեպքում ենթադրվում է, որ փորձի



Նկ. 4.

հնարավոր ելքերի թիվը վերջավոր է։ Այժմ քննարկենք այնպիսի փորձ, որն ունի անվերջ բազմությամբ ելքեր։ Դիցուք M կետը պատահականորեն նետվում է AB հատվածի վրա, որի երկարությունը հավասար է l-ի (Նկ. 4)։

Սահմանենք, թե ինչի է հավասար AB հատվածի վրա գտնվող ցանկացած CD հատվածի վրա նրա ընկնելու հավանականությունը։

M *կետը պատահականորեն նետվում է* AB *հատվածի վրա, նշանակում է* M *կետը կարող է ընկնել* AB *հատվածի ցանկացած կետի վրա, ընդ որում* CD հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը ուղիղ համեմատական է այդ հատվածի երկարությանը և կախված չէ այդ հատվածի դիրքից AB հատվածի վրա, *այսինքն՝*

$$P(M \in CD) = kx^{*},$$

որտեղ x-*ը* CD *հատվածի երկարությունն է, իսկ* k-*ն հաստատուն մեծություն է։ Մասնավոր դեպքում* AB *հատվածի համար կստանանք*

$$P(M \in AB) = 1 = kl,$$

որտեղից

$$k = \frac{1}{l},$$

և հետևաբար՝

$$P(M \in CD) = \frac{x}{l}. \qquad (7)$$

Այսպիսով, այն պատահարի հավանականությունը, որ պատահաբար AB հատվածի վրա նետված կետը կընկնի CD հատվածի վրա, հավասար է CD և AB հատվածների երկարությունների հարաբերությանը:

Այս կերպ սահմանված հավանականությունը կոչվում է երկրաչափական հավանականություն: *Հեշտ է ստուգել, որ երկրաչափական հավանականությունը օժտված է հավանականության դասական սահմանման հատկություններով։*

Օրինակ 1. AB *հատվածի վրա, որի երկարությունը* l-*է, նետում ենք* M *կետը։ Որոշել այն հավանականությունը, որ* $AC = \frac{1}{2}AB$, AM *և* MB *հատվածներից կարելի է կառուցել եռանկյունի (նկ. 5)։*

AM *հատվածի երկարությունը նշանակենք* x-*ով. այդ դեպքում* MB *հատվածի երկարությունը կլինի* $l - x$։ *Որպեսզի* x, $l - x$ *և* $\frac{1}{2}l$ *համապատասխան երկարություններ ունեցող* AM, MB *և* AC *հատվածներից կարելի լինի կառուցել եռանկյունի, անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ պայմանների իրականացումը՝*

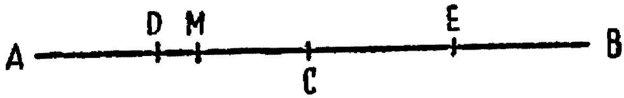
$$x + (l - x) > \frac{1}{2}l, \qquad x + \frac{1}{2}l > l - x, \qquad l - x + \frac{1}{2}l > x,$$

---

* M ∈ CD-*ն նշանակում է* M *կետը պատկանում է* CD *հատվածին։*

որոնցից առաջինը՝ $l > \frac{1}{2} l$, միշտ տեղի ունի, իսկ երկրորդ և երրորդ անհավասարություններից ստանում ենք

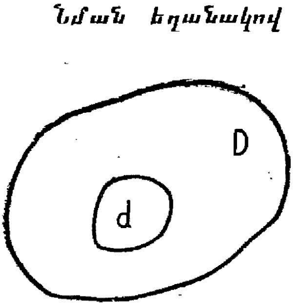
$$\frac{l}{4} < x < \frac{3l}{4}:$$



Նկ. 5.

Այսպիսով, տրված երեք հատվածներից եռանկյունի կառուցելու հնարավորության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ M *կետն ընկնի* DE *հատվածի վրա, որի երկարությունը հավասար է* $\frac{3l}{4} - \frac{l}{4} = \frac{l}{2}$. *ուստի եռանկյան կառուցման հավանականությունը կլինի* $\frac{l}{2} : l = \frac{1}{2}$:

Նման եղանակով որոշվում է M *կետի անկման հավանականությունը հարթության վրա կամ տարածության մեջ գտնվող որևէ տիրույթում։ Այսպես, եթե* M *կետը պատահականորեն նետվում է* D *տիրույթի վրա (Նկ. 6), որը գտնվում է հարթության մեջ, ապա* հավանականությունը, որ նա կընկնի այդ տիրույթի որևէ d մասում, հավասար կլինի այդ տիրույթի S_d մակերեսի և ամբողջ D տիրույթի S մակերեսի հարաբերությանը, *այսինքն՝*



Նկ. 6.

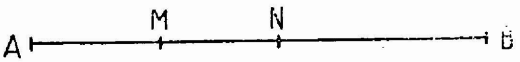
$$P(M \in d) = \frac{S_d}{S}: \qquad (8)$$

Օրինակ 2. AB *հատվածի վրա, որի երկարությունը* l *է (Նկ. 7), պատահականորեն նետում ենք երկու կետեր՝* M *և* N*։ Որոշել* MN *հատվածի երկարության որևէ* z *թվից փոքր լինելու հավանականությունը։*

AM *և* AN *հատվածների երկարությունները համապատասխանաբար նշանակենք* x*-ով և* y*-ով։ Այդ դեպքում* MN *հատվածի երկարությունը հավասար կլինի* $|y - x|$*։ Դեկարտյան* XOY *ուղղանկյուն կոորդինատների սիստեմում (Նկ. 8) դիտարկենք այն կետը, որի կոորդինատներն են* x *և* y*։ Քանի որ ըստ խնդրի պայմանի* $x \leqslant l$ *և* $y \leqslant l$, ուրեմն այդ կետը կարող է գրավել ցանկացած դիրքը l կողմ ունեցող քառակուսու ներսում: $|y-x|<z$ անհավասարությունը, որը համարժեք է հետևյալ երկու անհավասարություններին՝

$$y-x<z, \qquad x-y<z,$$

միաժամանակյա իրականացմանը, այս քառակուսու մեջ որոշում է այն տիրույթը, որը գտնվում է $y-x=z$ և $x-y=z$ ուղիղների միջև. հետևաբար, նա իրականանում է այն և միայն այն դեպքում, երբ M կետն ընկնում է այդ տիրույթի մեջ: Իսկ այն հավանականությունը, որ կետը կընկնի այդ տիրույթի մեջ, հավասար է



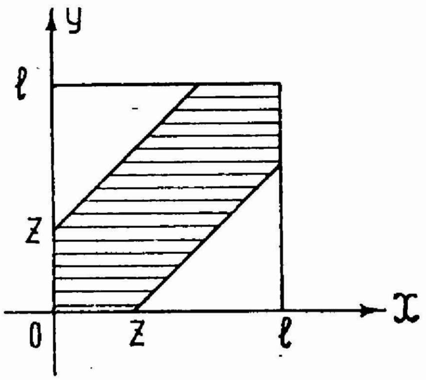
Նկ. 7.

այդ տիրույթի մակերեսը՝

$$S=l^2-(l-z)^2=2lz-z^2,$$

բաժանած ամբողջ տիրույթի մակերեսի՝ $S=l^2$-ու, վրա. ուստի

$$P=\frac{2lz-z^2}{l^2}.$$



Նկ. 8.

5. Հավանականությունների գումարման թեորեմը: *Դիտարկենք $A_1, A_2, \dots A_s$ պատահարները, որոնք տվյալ փորձի պայմաններում անհամատեղելի են: Այդպիսի պատահարների նկատմամբ տեղի ունի հետևյալ թեորեմը, որը կոչվում է* **հավանականությունների գումարման թեորեմ:**

Մի քանի անհամատեղելի պատահարներից մեկի հանդես գալու հավանականությունը (երբ չի նշվում հատկապես որ մեկի) հավասար է այդ պատահարների հավանականությունների գումարին, *այսինքն՝*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_s)=P(A_1)+P(A_2)+\dots P(A_s), \qquad (9)$$

քանի որ պատահարներից մեկի հանդես գալը (առնվազն մեկի հանդես գալը) հավասար է այդ պատահարների գումարին:

Թեորեմը ապացուցենք այն դեպքի համար, երբ $s=2$, իսկ եթե s-ը կամայական թիվ է, թեորեմը կարելի է ապացուցել մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով:

Փորձի էլեմենտար ելքերի թիվը նշանակենք l-ով, A_1 պատահարի համար նպաստավոր ելքերի թիվը՝ k_1-ով, իսկ A_2 պատահարի համար նպաստավոր ելքերի թիվը՝ k_2-ով. կստանանք

$$P(A_1)=\frac{k_1}{l}, \qquad P(A_2)=\frac{k_2}{l}. \tag{10}$$

Քանի որ A_1 և A_2 պատահարները անհամատեղելի են, ապա A_1 պատահարի համար նպաստավոր k_1 ելքերի մեջ չկա ոչ մի ելք, որ նպաստավոր լինի նաև A_2 պատահարի համար և, հակառակը, k_2 ելքերի մեջ, որոնք նպաստավոր են A_2 պատահարի համար, չկա ոչ մի ելք, որ նպաստավոր լինի նաև A_1 պատահարի համար, որովհետև հակառակ դեպքում կգտնվեր փորձի այնպիսի ելք, որը նպաստավոր կլիներ ինչպես A_1 պատահարի, այնպես և A_2 պատահարի համար, և նրա իրականացման դեպքում երկու պատահարներն էլ տեղի էին ունենալու միասին, որն անկարելի է, քանի որ այդ պատահարներն անհամատեղելի են։ Այդ պատճառով փորձի այն ելքերի թիվը, որոնք նպաստավոր են երկու պատահարներից մեկի (A_1-ի կամ A_2-ի) հանդես գալու համար (միևնույն է, թե որ մեկի), հավասար կլինի k_1+k_2, և

$$P(A_1\cup A_2)=\frac{k_1+k_2}{l}=\frac{k_1}{l}+\frac{k_2}{l}.$$

(10)-ի համաձայն կստանանք

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2). \tag{11}$$

Հավանականությունների գումարման թեորեմը կարելի է ձևակերպել և այլ ձևով։ Դիցուք $A_1, A_2, \ldots A_s$ պատահարները A պատահարի անհամատեղելի մասնավոր դեպքերն են, ընդ որում

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_s.$$

այդ դեպքում ըստ ապացուցված թեորեմի

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_s), \tag{12}$$

այսինքն՝ պատահարի հավանականությունը հավասար է նրա բոլոր անհամատեղելի մասնավոր դեպքերի հավանականությունների գումարին:

Հետևանք. եթե $A_1, A_2,\ldots A_s$ անհամատեղելի պատահարները կազմում են լրիվ խումբ, ապա նրանց հավանականությունների գումարը հավասար է միավորի:

Իրոք, նկատի ունենալով, որ $A_1, A_2, \ldots A_s$ պատահարներն անհամատեղելի են, գումարման թեորեմի համաձայն կունենանք

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_s) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_s).$$

քանի որ $A_1, A_2, \ldots A_s$ պատահարները կազմում են պատահարների լրիվ խումբ, ուրեմն

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_s$$

պատահարը հավաստի է և

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_s) = 1.$$

հետևաբար՝

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_s) = 1: \qquad (13)$$

Նախապես ապացուցված (6) հավասարությունը ստացվում է որպես այս հետևանքի մասնավոր դեպք։ Իրոք, A և $\bar{A}$ հակադիր պատահարները անհամատեղելի պատահարներ են և կազմում են լրիվ խումբ. այդ պատճառով (13)-ի հիման վրա

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1:$$

Օրինակ 1. Երկու զառեր նետելիս որոշել բացված կետերի թվի՝ չորսին չգերազանցելու հավանականությունը։

Առաջին զառի վրա բացված կետերի թիվը նշանակենք x-ով, իսկ երկրորդի վրա բացված կետերի թիվը՝ y-ով։ Պահանջվում է որոշել $P(x + y \leq 4)$։ $x + y \leq 4$ պատահարն ունի հետևյալ անհամատեղելի մասնավոր դեպքերը՝ $x + y = 2$, $x + y = 3$, $x + y = 4$. ուստի (12)-ի համաձայն

$$P(x + y \leq 4) = P(x + y = 2) + P(x + y = 3) + P(x + y = 4).$$

ակնհայտ է, որ

$$P(x + y = 2) = \frac{1}{36}, \quad P(x + y = 3) = \frac{2}{36}, \quad P(x + y = 4) = \frac{3}{36},$$

քանի որ երկու զառ գցելիս փորձի բոլոր հնարավոր ելքերի թիվը՝ $l = 36$ է, $x + y = 2$ պատահարի համար նպաստավոր է միայն մի ելք՝ (1,1), $x + y = 3$ պատահարի համար նպաստավոր են երկու (1,2 և 2,1) և, վերջապես, $x + y = 4$ պատահարի համար նպաստավոր են երեք ելքեր (1,3 և 2,2 և 3,1). Հետևաբար որոնելի հավանականությունը կլինի

$$P(x + y \leq 4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{6},$$

Օրինակ 2. Քսան տոմսերից, որոնց համարներն են՝

$$1, 2, 3, \ldots \ldots 20,$$

պատահական ձևով վերցնում ենք մի տոմս։ Որոշել վերցված տոմսի համարի՝ 3-ի կամ 7-ի վրա բաժանվելու հավանականությունը. որոշել այդ տոմսի համարի՝ 3-ի կամ 4-ի վրա բաժանվելու հավանականությունը։

Ակներև է, որ մեր փորձի պայմաններում, եթե վերցված տոմսի համարը բաժանվում է 3-ի վրա, ուրեմն չի բաժանվի 7-ի վրա և, հակառակը. եթե A և B պատահարների էությունն այն է, որ տոմսի համարը համապատասխանաբար բաժանվում է 3-ի վրա և 7-ի վրա, ապա A-ն և B-ն անհամատեղելի պատահարներ են. հետևաբար, կիրառելով հավանականությունների գումարման թեորեմը, կստանանք

$$P(A \cup B) = \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{2}{5}.$$

Իսկ A և C պատահարները, որոնց էությունն այն է, որ տոմսի համարը համապատասխանաբար բաժանվում է 3-ի վրա և 4-ի վրա, անհամատեղելի պատահարներ չեն, քանի որ 12 համարը կրող տոմսի հանդես գալու դեպքում այդ երկու պատահարները տեղի են ունենում միասին։ Որոնելի հավանականությունը որոշում ենք անմիջականորեն։ Փորձի 20 էլեմենտար ելքերից 10-ը նպաստավոր են այն պատահարի համար, որ տոմսի համարը կբաժանվի կամ 3-ի, կամ 4-ի վրա. հետևաբար՝

$$P(A \cup C) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Ընդհանուր դեպքում, երբ A և B պատահարները ցանկացած պատահարներ են, կունենանք

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \qquad (14)$$

Իրոք, այդ դեպքում $A \cup B$ պատահարը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A \cap B),$$

որտեղ A և $B \setminus A \cap B$ պատահարներն արդեն անհամատեղելի պատահարներ են. հետևաբար՝

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A \cap B). \qquad (15)$$

Բայց քանի որ $B = A \cap B \cup B(B \setminus A \cap B)$, ապա

$$P(B \setminus A \cap B) = P(B) - P(A \cap B),$$

և տեղադրելով $P(B \setminus A \cap B)$*-ի այդ արժեքը (15)-ի մեջ, կստանանք (14)-ը։*

Երկրորդ օրինակում կիրառելով (14) բանաձևը, կստանանք

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{6}{20} + \frac{5}{20} - \frac{1}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}\text{։}$$

Ապացուցեցինք գումարման թեորեմը հավանականության դասական սահմանման դեպքում. այն ճիշտ է մնում և հավանականության վիճակագրական և երկրաչափական սահմանումների դեպքում։

6. Պատահարի պայմանական հավանականությունը և հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը։ *Դիցուք տվյալ փորձի պայմաններում երկու պատահարներ՝* A *և* B*, համապատասխանաբար ունեն* $P(A)$ *և* $P(B)$ *հավանականությունները։ Եթե հայտնի դառնա, որ* B *պատահարը տեղի է ունեցել, ապա, ընդհանրապես ասած, այդ կազդի* A *պատահարի հավանականության վրա։* $P_B(A)$*-ով նշանակենք* A *պատահարի հավանականությունն այն պայմանով, որ տեղի է ունեցել* B *պատահարը։ Այս հավանականությունը կոչվում է* A **պատահարի պայմանական հավանականություն** B **պատահարի իրականացման պայմանով:**

Երկու զառ գցելու դեպքում նրանց վրա բացված կետերի $x+y$ *գումարի՝ 3-ի հավասար լինելու հավանականությունը կլինի՝*

$$P(x+y=3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},$$

իսկ եթե հայտնի է, որ առաջին զառի վրա բացվել է 1 կետ $(x=1)$ *ապա այդ հավանականությունը կդառնա*

$$P_{x=1}(x+y=3) = \frac{1}{6}\text{։}$$

Սափորի միջից, որ պարունակում է a *սպիտակ և* b *սև գնդակներ, հաջորդաբար երկու գնդակ հանելիս երկրորդ հանման ժամանակ սպիտակ գնդակի երևան գալու պայմանական հավանականությունը, այն պայմանով, որ առաջին անգամ հանվածը սպիտակ գնդակ է եղել, կլինի*

$$P_{I\,\text{սպ}}(II_{\text{սպ}}) = \frac{a-1}{a+b-1},$$

իսկ այն պայմանով, որ առաջին անգամ հանվածը սև գնդակ է, եղել կլինի

$$P_{I\,սև}(II_{սպ}) = \frac{a}{a+b-1}:$$

Սակայն մասնավոր դեպքում կարող է այնպես լինել, որ B պատահարի տեղի ունենալը չազդի A պատահարի հանդես գալու հավանականության վրա, ճիշտ այնպես, ինչպես և A պատահարի տեղի ունենալը չազդի B պատահարի հանդես գալու հավանականության վրա, այսինքն՝

$$P_B(A) = P(A), \quad P_A(B) = P(B): \qquad (16)$$

Այս դեպքում A և B պատահարները կոչվում են անկախ պատահարներ: Օրինակ, եթե A-ով նշանակենք մի զառի վրա 6 կետերի երևան գալու պատահարը, իսկ B-ով՝ մյուս զառի վրա 5 կետերի երևան գալու պատահարը, ապա պարզ է, որ այս պատահարներն անկախ են, որովհետև տվյալ դեպքում

$$P(A) = P_B(A) = \frac{1}{6}.$$

ճիշտ այդպես էլ

$$P(B) = P_A(B) = \frac{1}{6}:$$

Հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

Թեորեմ. Երկու պատահարների համատեղ իրականացման հավանականությունը հավասար է պատահարներից մեկի հավանականությունը՝ բազմապատկած մյուս պատահարի պայմանական հավանականությամբ՝ առաջին պատահարի իրականացման պայմանով, այսինքն՝

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A): \qquad (17)$$

Թեորեմի ապացուցման համար l-ով նշանակենք փորձի էլեմենտար ելքերի թիվը, k_1-ով՝ փորձի այն էլեմենտար ելքերի թիվը, որոնք նպաստավոր են A և B պատահարների համատեղ հանդես գալու համար, և k_2-ով՝ այն էլեմենտար ելքերի թիվը, որոնք նպաստավոր են A և $\overline{B}$ պատահարների համատեղ հանդես գալու համար:

Ակներև է, որ A և B պատահարների համատեղ իրականացման հավանականությունը կլինի

$$P(A \cap B) = \frac{k_1}{l}:$$

A պատահարի հանդես գալու հավանականությունը անկախ այն բանից, նա տեղի կունենա B-ի հետ, թե $\bar{B}$-ի հետ, կլինի՝

$$P(A) = \frac{k_1 + k_2}{l},$$

որովհետև A պատահարի համար տվյալ դեպքում նպաստավոր են $k_1 + k_2$ ելքերը, իսկ B պատահարի պայմանական հավանականությունն A պատահարի իրականացման պայմանով կլինի

$$P_A(B) = \frac{k_1}{k_1 + k_2}.$$

քանի որ հայտնի է, որ A պատահարը տեղի է ունեցել, ուրեմն փորձի էլեմենտար ելքերի թիվը կհավասարվի $k_1 + k_2$-ի, որոնցից B պատահարի համար նպաստավոր կլինեն k_1 ելքերը։ Այսպիսով, մեզ հետաքրքրող հավանականությունը կլինի

$$P(A \cap B) = \frac{k_1}{l} = \frac{k_1 + k_2}{l} \cdot \frac{k_1}{k_1 + k_2} = P(A) \cdot P_A(B)։$$

Նույն եղանակով ստացվում է, որ

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)։$$

Մասնավոր դեպքում, եթե A և B պատահարներն անկախ են, ապա (17)-ի համաձայն կստանանք

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \tag{18}$$

այսինքն՝ երկու անկախ պատահարների համատեղ իրականացման հավանականությունը հավասար է այդ պատահարների հավանականությունների արտադրյալին:

Օգտագործելով հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը երկու պատահարների համար, կարելի է ստանալ երեք պատահարների համատեղ իրականացման հավանականությունը։ Իրոք, $(A_1 \cap A_2)$ պատահարը դիտելով որպես առաջին պատահար, իսկ A_3 պատահարը՝ որպես երկրորդ պատահար և կիրառելով (17) հավասարությունը, կստանանք.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) =$$
$$= P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3),$$

որտեղ $P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$-ը A_3 պատահարի պայմանական հավանականությունն է այն պայմանով, որ A_1 և A_2 պատահարները տեղի են ունեցել։

Ընդհանուր դեպքում s *վերջավոր թվով պատահարների՝* A_1*-ի,* A_2*-ի, ...* A_s*-ի համար կունենանք*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_s) =$$
$$= P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{s-1}}(A_s)։ \qquad (19)$$

Մի քանի պատահարներ՝ A_1, A_2, ... A_s կոչվում են բազմությամբ անկախ պատահարներ, եթե նրանցից յուրաքանչյուրի իրականացման պայմանական հավանականությունը այն պայմանով, որ տեղի է ունեցել մնացած պատահարներից ցանկացած խումբ, հավասար է այդ պատահարի ոչ պայմանական հավանականությանը, այսինքն՝

$$P_{A_k \cap A_l \cap \dots \cap A_j}(A_i) = P(A_i) \quad i = 1, 2 \dots s. \quad k, l \dots, j \neq i։$$

Պատահարների անկախության դեպքում կունենանք

$$P_{A_1}(A_2) = P(A_2), \quad P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = P(A_3),$$
$$P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{s-1}}(A_s) = P(A_s),$$

և, հետևաբար, (19) հավասարությունը կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_s) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots P(A_s), \qquad (20)$$

այսինքն՝ մի քանի անկախ պատահարների համատեղ իրականացման հավանականությունը հավասար է այդ պատահարների հավանականությունների արտադրյալին։

Օրինակ 1. Նետում ենք չորս դրամ։ Որոշել բոլոր նիստերի վրա գերբի երևան գալու հավանականությունը։ Չորս պատահարների՝ I դ, II դ, III դ, IV դ, *համատեղ իրականացման հավանականությունը որոշվում է ըստ հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի՝ անկախ պատահարների համար.*

$$P(\text{I դ} \cap \text{II դ} \cap \text{III դ} \cap \text{IV դ}) = P(\text{I դ}) \cdot P(\text{II դ}) \cdot P(\text{III դ}) \cdot P(\text{IV դ}) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}։$$

Օրինակ 2. Մի արկղից, որը պարունակում է 5 լավորակ և 3 վատորակ լամպ, իրար ետևից պատահական ձևով հանում ենք 3 լամպ, ընդ որում ամեն անգամ լամպը արկղից հանելուց հետո այն կրկին վերադարձնում ենք արկղի մեջ։ Գտնել հանված երեք լամպերի լավորակ լինելու հավանականությունը։

A_1*-ով,* A_2*-ով,* A_3*-ով նշանակենք համապատասխան այն պատահարները, որ առաջին, երկրորդ և երրորդ լամպերը լավորակ են.*

գտնել $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$։ Բազմապատկման թեորեմի համաձայն անկախ պատահարների համար

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{512}\text{։}$$

Օրինակ 3. Եթե լամպերն ամեն անգամ հանելուց հետո չեն վերադարձվում արկղի մեջ, նախորդ օրինակում քննարկված պատահարներն արդեն անկախ չեն լինի, ուստի բոլոր հանված լամպերի լավորակ լինելու հավանականությունը՝

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) =$$
$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}\text{։}$$

Օրինակ 4. Մի արկղից, որ պարունակում է 7 սպիտակ և 5 սև գնդակներ, հաջորդաբար հանում ենք 3 գնդակ։ Ինչպիսի՞ն է նրանցից երկուսի սպիտակ լինելու, իսկ մեկի սև լինելու հավանականությունը։

Պատահարը, որ հանդես են գալիս 2 սպիտակ և 1 սև գնդակներ, կարող է իրականանալ հետևյալ անհամատեղելի մասնավոր դեպքերից մեկի դեպքում.

1) I սպիտակ, II սպիտակ, III սև,
2) I սպիտակ, II սև, III սպիտակ,
3) I սև, II սպիտակ, III սպիտակ։

Այդ դեպքերից յուրաքանչյուրի հավանականությունը որոշվում է ըստ հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի.

$$P_1 = P(\text{I սպ.} \cap \text{II սպ.} \cap \text{III սև}) = P(\text{I սպ.}) \cdot P_{\text{I սպ.}}(\text{II սպ.}) \cdot$$
$$\cdot P_{\text{I սպ.} \cap \text{II սպ}}(\text{III սև}) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{7}{44},$$

$$P_2 = P(\text{I սպ.} \cap \text{II սև} \cap \text{III սպ.}) = P(\text{I սպ.}) \cdot P_{\text{I սպ.}}(\text{II սև}) \cdot$$
$$\cdot P_{\text{I սպ.} \cap \text{II սև}}(\text{III սպ.}) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{7}{44},$$

$$P_3 = P(\text{I սև} \cap \text{II սպ.} \cap \text{III սպ.}) = P(\text{I սև}) \cdot P_{\text{I սև}}(\text{II սպ.}) \cdot$$
$$\cdot P_{\text{I սև} \cap \text{II սպ.}}(\text{III սպ.}) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{7}{44}\text{։}$$

Ուստի որոնելի հավանականությունը՝

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{7}{44} \cdot 3 = \frac{21}{44}\text{։}$$

Օրինակ 5. Գործարանում մեկ օրվա ընթացքում պատրաստված միևնույն տեսակի 60 դետալներից 53-ը ունեն նորմալ, չորսը՝ նորմալից բարձր, իսկ 3-ը՝ նորմալից ցածր չափեր։ Որոշել երեք դետալներից առնվազն երկուսի նորմալ չափեր ունենալու հավանականությունը։

Դետալը խոտան է, եթե նրա չափերը կամ նորմալից ցածր են, կամ նորմալից՝ բարձր։ A *պատահարը, որի դեպքում երեք դետալներից առնվազն երկուսն ունեն նորմալ չափեր, տեղի կունենա, եթե երեք դետալներից երկուսն ունեն նորմալ չափեր (*A_1 *պատահար) կամ եթե երեք դետալներն էլ ունեն նորմալ չափեր (*A_2 *պատահար)։ Ուստի, ըստ հավանականությունների գումարման թեորեմի*

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2)\text{։}$$

Բայց

$$P(A_1) = \frac{C_{53}^2 \cdot C_7^1}{C_{60}^3} = 0{,}282, \qquad P(A_2) = \frac{C_{53}^3}{C_{60}^3} = 0{,}684,$$

հետևաբար, որոնելի հավանականությունը՝

$$P(A) = 0{,}282 + 0{,}684 = 0{,}966\text{։}$$

Օրինակ 6. Հրաձիգի համար նշանին խփելու հավանականությունը հավասար է p*-ի։ Համարելով, որ նշանը խփված է, եթե նրան դիպչում է թեկուզ մեկ գնդակ, որոշել, թե քանի անգամ պետք է կրակել, որպեսզի տվյալ* P_1 *հավանականությամբ կարելի լինի վստահ ասել, որ նշանը խփված է։*

Կրակոցների որոնելի թիվը նշանակենք n*-ով. որոնելու ենք կրակելիս հրաձիգի գեթ մի անգամ նշանին դիպչելու հավանականությունը։ Նախ գտնենք հակադիր պատահարի հավանականությունը, այսինքն՝* n *անգամ կրակելիս հրաձիգի ոչ մի անգամ նշանին չխփելու հավանականությունը։ Հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի համաձայն այդ հավանականությունը՝*

$$Q = (1 - p)^n,$$

իսկ որոնելի հավանականությունը՝

$$P = 1 - (1 - p)^n\text{։}$$

Անհրաժեշտ կրակոցների թիվը ստացվում է հետևյալ անհավասարությունից՝

$$1-(1-p)^n \geqslant P_1,$$

որը լուծելով, ստանում ենք

$$n \geqslant \frac{lg(1-P_1)}{lg(1-p)}.$$

Օրինակ 7. Մեքենայի կոմպլեքսում կան 10000 ռադիոլամպեր և կիսահաղորդչային էլեմենտներ։ Որոշել ամբողջ կոմպլեքսի հուսալիության (սարքինության) հավանականությունը, ենթադրելով, որ մեքենայի առանձին էլեմենտների շարքից դուրս գալու պատահարները ներկայացնում են անկախ պատահարներ և որ մեկ էլեմենտի շարքից դուրս գալու հավանականությունը հավասար է 10^{-5}։

Ամբողջ կոմպլեքսը հուսալի է, եթե շարքից դուրս չի եկել նրա էլեմենտներից և ոչ մեկը․ իսկ այս պատահարի հավանականությունը ըստ հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի կլինի

$$P=(1-10^{-5})^{10\,000}\approx 0{,}9.$$

Օրինակ 8. Որոշել չորս նորածին երեխաներից երկուսի տղա և երկուսի աղջիկ լինելու հավանականությունը, ընդունելով առանձին ծնունդների արդյունքները որպես անկախ պատահարներ։

Երկու տղա և երկու աղջիկ կարող են ծնվել հետևյալ 6 հաջորդականություններից մեկով.

տ.	տ.	ա.	ա.
տ.	ա.	տ.	ա.
տ.	ա.	ա.	տ.
ա.	ա.	տ.	տ.
ա.	տ.	տ.	ա.
ա.	տ.	ա.	տ.

Այս հաջորդականություններից յուրաքանչյուրի իրականացման հավանականություններն իրար հավասար են և անկախ պատահարների համար հաշվվում են հավանականությունների բազմապատկման թեորեմով։ Եթե ընդունենք, որ տղայի ծննդի հավանականությունը հավասար է մոտավորապես 0,52-ի և, հետևաբար, աղջկա ծննդինը՝ 0,48-ի, կստանանք

$$P(\text{տ. տ. ա. ա.}) = P(\text{տ.})\cdot P(\text{տ.})\cdot P(\text{ա})\cdot P(\text{ա.}) = 0{,}52^2\cdot 0{,}48^2 = 0{,}0596.$$

Ծնունդների նշված հաջորդականություններից որևէ մեկի իրականացման հավանականությունը (առանց նշելու հատկապես որ մեկի) գտնում ենք հավանականությունների գումարման թեորեմի համաձայն, այսինքն՝

$$P = 0{,}0596\cdot 6 = 0{,}3576\text{։}$$

Օրինակ 9. Նշանին խփելիս հրաձիգը 1000 կրակոցից նշանին դիպչում է միջին հաշվով 750 անգամ։ Որոշել երեք անգամ կրակելիս հրաձիգի առնվազն երկու անգամ նշանին դիպչելու հավանականությունը։

Նկատի ունենալով, որ հայտնի է տարբեր փորձերի սերիաներից ստացված նշանին դիպչելու թվերի միջին արժեքը, կարելի է որպես նշանին դիպչելու հավանականություն տվյալ հրաձիգի համար մոտավորապես ընդունել հետևյալ թիվը՝

$$P = \frac{750}{1000} = \frac{3}{4},$$

Հրաձիգը նշանին դիպչելու է երեքից առնվազն երկու անգամ, այսինքն՝ պետք է տեղի ունենա (սխեմատիկորեն) հետևյալ պատահարներից որևէ մեկը՝

$$\begin{array}{ccc} + & + & - \\ + & - & + \\ - & + & + \\ + & + & + \end{array}$$

Առաջին երեք պատահարների հավանականություններն իրար հավասար են և որոշվում են հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի համաձայն՝

$$P(++-) = P(+-+) = P(-++) = \\ = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{64},$$

Չորրորդ պատահարի հավանականությունը կլինի

$$P(+++) = P(+)\cdot P(+)\cdot P(+) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64},$$

Որոնելի հավանականությունը հավանականությունների գումարման թեորեմի համաձայն կլինի

$$P = \frac{9}{64}\cdot 3 + \frac{27}{64} = \frac{54}{64},$$

7. Լրիվ հավանականության և Բայեսի բանաձևերը: *Ենթադրենք, թե տվյալ փորձի պայմաններում* B *պատահարը կարող է իրականանալ միայն* $A_1, A_2, \ldots, A_s$ *անհամատեղելի պատահարներից մեկի հետ: Այդ դեպքում*

$$B = A_1 \cap B \cup A_2 \cap B \cup \ldots \cup A_s \cap B.$$

ուստի

$$P(B) = P(A_1 \cap B \cup A_2 \cap B \cup \ldots \cup A_s \cap B),$$

Կիրառելով հավանականությունների գումարման և բազմապատկման թեորեմները, կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_s) \cdot P_{A_s}(B)$$

կամ

$$P(B) = \sum_{k=1}^{s} P(A_k) \cdot P_{A_k}(B): \qquad (21)$$

Այս բանաձևը կոչվում է լրիվ հավանականության բանաձև, *իսկ* $A_1, A_2, \ldots, A_s$ *պատահարները կոչվում են* հիպոթեզներ:

Օրինակ 1. Մի սափորից, որ պարունակում է 5 սպիտակ և 5 սև գնդակներ, մի գնդակ տեղափոխված է մեկ այլ սափորի մեջ, որը պարունակում է 3 սպիտակ և 2 սև գնդակներ, իսկ հետո երկրորդ սափորից հանված է մի գնդակ: Որոշել հանված գնդակի սև լինելու հավանականությունը:

Այստեղ առաջին հիպոթեզն այն է, որ առաջին սափորից տեղափոխված է սպիտակ գնդակ, իսկ երկրորդը այն, որ տեղափոխված է սև գնդակ. դրա համար (21)-ի համաձայն կունենանք

$$P(\text{սև}) = P(\text{I սպ.}) \cdot P_{\text{I սպ.}}(\text{II սև}) + P(\text{I սև}) \cdot P_{\text{I սև}}(\text{II սև}) =$$
$$= \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{6} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{12},$$

Օրինակ 2. Մի սափորից, որ պարունակում է a *սպիտակ և* b *սև գնդակներ, հաջորդաբար հանում են երկու գնդակ: Որոշել երկրորդ գնդակի սպիտակ լինելու հավանականությունը:*

Այստեղ առաջին հիպոթեզն այն է, որ առաջին անգամ դուրս է եկել սպիտակ գնդակ, իսկ երկրորդը այն, որ առաջին անգամ դուրս է եկել սև գնդակ:

Ուստի

$$P(\text{II սպ.}) = P(\text{I սպ.}) \cdot P_{\text{I սպ.}}(\text{II սպ.}) + P(\text{I սև}) \cdot P_{\text{I սև}}(\text{II սպ.}) =$$
$$= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} = \frac{a \cdot (a-1) + ab}{(a+b) \cdot (a+b-1)} = \frac{a}{a+b},$$

Այսպիսով, երկրորդ փորձում սպիտակ գնդակի երևան գալու հավանականությունը նույնն է, ինչ որ առաջին փորձում։ Թեպետ յուրաքանչյուր փորձից հետո սափորի պարունակությունը փոփոխվում է, քանի որ գնդակը սափորի մեջ չի վերադարձվում, այնուամենայնիվ յուրաքանչյուր առանձին փորձի ժամանակ սպիտակ (սև) գնդակի երևան գալու հավանականությունը մնում է անփոփոխ, եթե նախորդ փորձերի արդյունքները մեզ անհայտ են։

Օրինակ 3. Ունենք դետալների 10 խումբ։ Առաջին հինգ խմբերից ամեն մեկի մեջ կա 10 դետալ, որոնցից 3-ի չափերը նորմալից ցածր են, մյուս երեք խմբերից յուրաքանչյուրի մեջ՝ 8-ական դետալ, որոնցից նույնպես 3 դետալներ ունեն նորմալից ցածր չափեր և, վերջապես, մնացած երկու խմբերից յուրաքանչյուրի մեջ կա 6 դետալ, որոնցից 4-ը ունեն նորմալից ցածր չափեր։ Պատահական ձևով ընտրված խմբից վերցված է մի դետալ։ Որոշել նրա նորմալից ցածր չափեր ունենալու հավանականությունը։

Նորմալից ցածր չափերով դետալը կարող է երևան գալ կամ այն դեպքում, եթե վերցրել ենք առաջին տիպի խումբը և հանել ենք նորմալից ցածր չափեր ունեցող դետալ, կամ եթե վերցրել ենք երկրորդ տիպի խումբը և հանել ենք նորմալից ցածր չափեր ունեցող դետալ, կամ եթե վերցրել ենք երրորդ տիպի խումբը և դարձյալ հանել նորմալից ցածր չափեր ունեցող դետալ։

Ուստի

$$P(B) = P(I)\cdot P_I(B) + P(II)\cdot P_{II}(B) + P(III)\cdot P_{III}(B) =$$

$$= \frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10} + \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{8} + \frac{2}{10}\cdot\frac{4}{6} = \frac{19}{48}.$$

Դիցուք B պատահարը կարող է իրականանալ միայն $A_1, A_2, \ldots, A_s$ անհամատեղելի պատահարներից մեկի հետ, ընդ որում այդ հիպոթեզները համապատասխանաբար ունեն հետևյալ հավանականությունները՝

$$P(A_1),\ P(A_2), \ldots,\ P(A_s).$$

Այժմ որոշենք յուրաքանչյուր A_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ հիպոթեզի պայմանական հավանականությունն այն պայմանով, որ B պատահարն իրականացել է։

Կիրառելով հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը B և A_k պատահարների համատեղ իրականացման հավանականությունը որոշելու համար, ստանում ենք

$$P(B \cap A_k) = P(B)\cdot P_B(A_k) = P(A_k)\cdot P_{A_k}(B), \qquad k = 1, 2, \ldots, s,$$

որտեղից

$$P_B(A_k)=\frac{P(A_k)\cdot P_{A_k}(B)}{P(B)},\qquad k=1,2,\ldots,s։$$

Տեղադրելով $P(B)$*-ի արժեքը (21) բանաձևից, վերջնականապես կստանանք՝*

$$P_B(A_k)=\frac{P(A_k)\cdot P_{A_k}(B)}{P(A_1)\cdot P_{A_1}(B)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(B)+\cdots+P(A_s)\cdot P_{A_s}(B)} \tag{22}$$

$$(k=1,2,\ldots,s)։$$

Ստացված բանաձևերը կոչվում են հիպոթեզների հավանականությունների կամ Բայեսի բանաձևեր։

Այսպիսով, եթե հայտնի են հիպոթեզների $P(A_k)$ սկզբնական հավանականությունները և B պատահարի պայմանական հավանականությունները՝ յուրաքանչյուր A_k հիպոթեզի իրականացման պայմանով, ապա հիպոթեզների հավանականությունների բանաձևերը հնարավորություն են տալիս որոշելու յուրաքանչյուր հիպոթեզի պայմանական հավանականությունները B պատահարի իրականացման պայմանով։

Մասնավոր դեպքում, երբ բոլոր հիպոթեզները սկզբում հավասարահնարավոր են, այսինքն՝

$$P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_s)=p,$$

(22) բանաձևը կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$P_B(A_k)=\frac{p\cdot P_{A_k}(B)}{p\cdot P_{A_1}(B)+p\cdot P_{A_2}(B)+\cdots+p\cdot P_{A_s}(B)},$$

կամ կրճատ՝

$$P_B(A_k)=\frac{P_{A_k}(B)}{P_{A_1}(B)+P_{A_2}(B)+\cdots+P_{A_s}(B)},\qquad k=1,2,\ldots,s։ \tag{23}$$

Համեմատելով $A_1, A_2, \ldots, A_s$ *հիպոթեզների հավանականությունները այս մասնավոր դեպքում, եզրակացնում ենք, որ ստացված կոտորակներից այն կոտորակը կունենա ամենամեծ արժեքը, որի համարիչն ամենամեծն է։ Այսպիսով,* B պատահարի իրականացման պայմանով հիպոթեզների պայմանական հավանականություններից ավելի մեծ է այն հավանականությունը, որի ժամանակ B պատահարի պայմանական հավանականությունը՝ A_k պատահարի իրականացման պայմանով, ամենամեծն է։

Օրինակ 1. Ունենք 5 սափոր, որոնցից յուրաքանչյուրի մեջ կա 2 սպիտակ և 2 սև գնդակ, 3 սափոր, որոնցից յուրաքանչյուրի մեջ կա 3 սպիտակ և 1 սև գնդակ, և 2 սափոր, որոնցից յուրաքանչյուրի մեջ կա 1 սպիտակ և 3 սև գնդակ։ Պատահական ձևով ընտրված սափորից վերցվում է մի գնդակ, որը լինում է սպիտակ։ Որոշել գնդակը առաջին տիպի սափորից, երկրորդ տիպի սափորից և երրորդ տիպի սափորից հանելու հավանականությունները։

Այստեղ կան երեք հիպոթեզներ. A_1, որ գնդակը հանված է առաջին տիպի սափորից, A_2, որ գնդակը հանված է երկրորդ տիպի սափորից և A_3, որ գնդակը հանված է երրորդ տիպի սափորից։ Այս հիպոթեզների սկզբնական հավանականությունները կլինեն.

$$P(A_1)=\frac{5}{10}, \quad P(A_2)=\frac{3}{10}, \quad P(A_2)=\frac{2}{10},$$

B պատահարը այն է, որ հանված գնդակը եղել է սպիտակ, ուստի

$$P_{A_1}(B)=\frac{2}{4}, \quad P_{A_2}(B)=\frac{3}{4}, \quad P_{A_3}(B)=\frac{1}{4}։$$

Հետևաբար, ըստ (22) բանաձևի կունենանք

$$P_B(A_1)=\frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{4}}{\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{4}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{10}{21}$$

$$P_B(A_2)=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{4}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{9}{21}$$

$$P_B(A_3)=\frac{\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{4}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{2}{21}$$

Օրինակ 2. Արկղի մեջ կա նույն տեսակի 10 դետալ։ Պատահական ձևով հանված դետալը պիտանի դուրս եկավ հավաքման համար։ Ընդունելով, որ մինչև փորձը բոլոր հիպոթեզները արկղում եղած պիտանի դետալների թվի մասին հավասարահնարավոր են, որոշել հիպոթեզների պայմանական հավանականությունները այն պայմանով, որ հանված դետալներից մեկը պիտանի է։ Արկղի մեջ գտնվող պիտանի գնդակների թվի մասին մինչև փորձը կարելի է անել 11 հիպոթեզ՝ A_k $(k=0,1,\ldots,10)$, որ պիտանի գնդակների թիվը հավասար է k-ի։ Այդ հիպոթեզները մինչև փորձը հավասարահնարավոր են։ Իրականացված B պատահարը այն է, որ հանված գնդակը պիտանի է հավաքման համար. ուստի

$$P_{A_k}(B)=\frac{k}{10}, \qquad k=0,1,\ldots,10,$$

քանի որ A_k հիպոթեզի ժամանակ պիտանի գնդակների թիվը արկղում հավասար է k-ի, իսկ բոլոր գնդակների թիվը՝ 10-ի։ Հետևաբար, (23) բանաձևի համաձայն ստանում ենք հետևյալ պայմանական հավանականությունները՝

$$P_B(A_k)=\frac{\dfrac{k}{10}}{\dfrac{1}{10}+\dfrac{2}{10}+\dfrac{3}{10}+\cdots+\dfrac{10}{10}}=$$

$$=\frac{k}{1+2+3+\ldots+10}=\frac{k}{55}, \qquad k=0,1,2,\ldots,10։$$

Այն բանից հետո, երբ հայտնի է դառնում, որ հանված գնդակը պիտանի է, արկղում պիտանի գնդակներ չլինելու $(k=0)$ հիպոթեզի հավանականությունը դառնում է զրոյի հավասար, արկղի մեջ մեկ պիտանի գնդակ լինելու հիպոթեզի հավանականությունը ստացվում է $\frac{1}{55}$-ի հավասար, իսկ ամենամեծ հավանականությունը՝ $\frac{10}{55}$ ստանում է այն հիպոթեզը, որի համաձայն արկղի բոլոր գնդակները պիտանի են։

8. Անվերադարձ վերցվածք։ Դիցուք ունենք մի բազմություն, որը պարունակում է N թվով որևէ տեսակի համասեռ տարրեր, ընդ որում այդ տարրերից M-ը օժտված են Λ հատկանիշով, իսկ մնացած $N-M=L$ տարրերն այդ հատկանիշով օժտված չեն։ Այդ բազմությունից պատահական ձևով վերցվում է n տարր. այդ n տարրերի մեջ m տարրերի՝ Λ հատկանիշով օժտված լինելու, հետևաբար, l տարրերի՝ այդ հատկանիշով օժտված չլինելու հավանականությունը կլինի

$$P_m=\frac{C_M^m\cdot C_L^l}{C_N^n}, \qquad \begin{aligned}n&=1,2,3,\ldots,N,\\ m&=0,1,2,\ldots,M։\end{aligned}$$

Այժմ ենթադրենք, թե N տարրերից բաղկացած տվյալ բազմությունից n տարրեր վերցվում են ոչ թե միանգամից, այլ հաջորդաբար՝ մեկական, ընդ որում յուրաքանչյուր փորձից հետո հանված տարրկան չի վերադարձվում բազմության մեջ։ Այդպիսի պատահական n տարրկաներից կազմված բազմությունը կոչվում է անվերադարձ վերցվածք։ Ակներև է, որ հանված n տարրկաներից m տարրկաների՝ A հատկանիշով օժտված լինելու և, հետևաբար, l տարրկաների՝ այդ հատկանիշով օժտված չլինելու հավանականությունը կախված չի նրանից, թե այդ n տարրկաները կվերցվեն հիմնական բազմությունից միանգամից, թե մեկական՝ առանց վերցրածը հիմնական բազմության մեջ վերադարձնելու. ուստի հավանականությունը դարձյալ կարտահայտվի նույն բանաձևով։

Գործնական տեսակետից կարևոր է հետևյալ խնդիրը։ N տարրկաներից բաղկացած տվյալ բազմությունից կազմված է n տարրկաների անվերադարձ վերցվածք, ընդ որում, ենթադրենք այդ n տարրկաներից m-ը օժտված են A հատկանիշով, իսկ մնացած l տարրկաներն այդ հատկանիշով օժտված չեն։ Պահանջվում է որոշել հիմնական բազմության մեջ M տարրկաների՝ A հատկանիշով օժտված լինելու հավանականությունը, եթե մինչև փորձը A հատկանիշով օժտված տարրկաների թվի՝ M-ի հավասար լինելու հիպոթեզը ունի p_M հավանականությունը։

A հատկանիշով օժտված հիմնական բազմության մեջ տարրկաների թվի վերաբերյալ գոյություն ունեն հետևյալ հիպոթեզները՝

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, N,$$

որոնք համապատասխանաբար ունեն հետևյալ սկզբնական հավանականությունները՝

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3, \ldots,\ p_M, \ldots,\ p_N.$$

Դիտարկված փորձի ժամանակ տեղի է ունեցել B պատահար, այսինքն՝ ընտրված n տարրկաներից m-ը օժտված են A հատկանիշով, իսկ l-ը այդ հատկանիշով օժտված չեն։ Այդ B պատահարի պայմանական հավանականությունը այն հիպոթեզի պայմանով, որ հիմնական բազմության մեջ M տարրկաներ օժտված են A հատկանիշով, կլինի

$$P_M(B) = \frac{C_M^m \cdot C_L^l}{C_N^n}, \qquad M = m,\ m+1, \ldots, N-l.$$

Հետևաբար, այն հիպոթեզի որոնելի պայմանական հավանականությունը, ըստ որի բազմության մեջ M տարրեր օժտված են A հատկանիշով, (22) բանաձևի համաձայն կգրվի հետևյալ տեսքով՝

$$P_M(M)=\frac{p_M\cdot\dfrac{C_M^m\cdot C_L^l}{C_N^n}}{\sum\limits_{M=m}^{N-l}p_M\cdot\dfrac{C_M^m\cdot C_L^l}{C_N^n}},\qquad m\leqslant M\leqslant N-l,$$

$$P_B(M)=0,\quad m<M,\quad M>N-l,$$

քանի որ $M=0, 1, 2, \ldots, m-1,\ N-l+1,\ N-l+2, \ldots,\ N$ հիպոթեզները դառնում են անհնար։ Ստացված կոտորակները բաժանելով $\frac{1}{C_N^n}$ ընդհանուր բաժանարարի վրա, վերջնականապես կստանանք

$$P_B(M)=\begin{cases}\dfrac{p_M\cdot C_M^m\cdot C_L^l}{\sum\limits_{M=m}^{N-l}p_M\cdot C_M^m\cdot C_L^l} & m\leqslant M\leqslant N-l\\ 0 & M<m,\quad M>N-l\end{cases}\tag{24}$$

Եթե մինչև փորձը բոլոր հիպոթեզները բազմության կազմի մասին հավասարահնարավոր են, այսինքն՝

$$p_0=p_1=p_2=\ldots=p_M=\ldots=p_N=p,$$

ստացված կոտորակները կրճատելով p-ով, կունենանք

$$P_B(M)=\begin{cases}\dfrac{C_M^m\cdot C_L^l}{\sum\limits_{M=m}^{N-l}C_M^m\cdot C_L^l} & m\leqslant M\leqslant N-l\\ 0 & M<m,\quad M>N-l\end{cases}\tag{25}$$

Օրինակ 1. 20 սպիտակ և 10 սև գնդակ պարունակող սափորից կատարվում է 12 գնդակի անվերադարձ վերցվածք։ Որոշել 7 սպիտակ և 5 սև գնդակներ պարունակելու հավանականությունը։

Բազմության տարրերի թիվը՝ $N=30$, սպիտակ գույնով օժտված տարրերի թիվը՝ $M=20$, սպիտակ գույնով չօժտված տարրերի թիվը՝ $L=10$։ Պահանջվում է որոշել այն հավանականությունը, որ $m=7$, իսկ $l=5$։ Համապատասխան արժեքները բանաձևի մեջ տեղադրելով, ստանում ենք

$$P_7 = \frac{C_{20}^7 \cdot C_{10}^5}{C_{30}^{12}} = \frac{12! \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots 6}{7! \quad 5! \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots 19} \approx 0{,}225։$$

Օ ր ի ն ա կ 2. Միևնույն տեսակի 10 դետալ պարունակող արկղից պատահական ձևով հանեցին 4 դետալ, որոնցից մեկը խոտան դուրս եկավ։ Ենթադրելով, որ մինչև փորձը խոտան դետալների թվի վերաբերյալ բոլոր հնարավոր հիպոթեզները հավասարահնարավոր են, որոշել այն հիպոթեզի պայմանական հավանականությունը, որ 10 դետալների մեջ խոտան դետալների թիվը հավասար է 2-ի։

Այստեղ $N=10$, $n=4$, $m=1$, $l=3$։ Ուստի, կիրառելով (25) բանաձևը, կստանանք

$$P_B(2) = \frac{C_2^1 \cdot C_8^3}{C_1^1 \cdot C_9^3 + C_2^1 \cdot C_8^3 + \ldots + C_6^1 \cdot C_4^3 + C_7^1 \cdot C_3^3} \approx 0{,}243։$$

9. Հավանականության աքսիոմատիկ սահմանումը: Իր ծագումից երկար ժամանակ հետո հավանականությունների տեսությունը ներկայացնում էր մի գիտություն, որի հիմնական հասկացությունները ճշգրիտ կերպով սահմանված չէին։ Ներկա հարյուրամյակում հավանականությունների տեսության բուռն զարգացումը, կապված գիտության և տեխնիկայի ընդհանուր զարգացման ու տարբեր բնագավառներում հավանականությունների մեթոդների լայն կիրառման հետ, անհրաժեշտ դարձրին նրա հիմնական գաղափարների վերանայումը և ճշգրտումը, ինչպես նաև նրա արդյունքների կիրառման պայմանները։ Ահա թե ինչու վերջին տասնամյակների ընթացքում ծագեց հավանականությունների տեսության տրամաբանական կառուցվածքը, հիմնված հավանականության գաղափարի աքսիոմատիկ սահմանման վրա։

Հավանականության գաղափարի աքսիոմատիկ սահմանման ելակետը հավանականության այն հատկություններն են, որոնք նշվեցին նրա դասական, երկրաչափական և վիճակագրական սահմանումներում։

Հավանականությունների տեսության հիմքում ընկած են ակադեմիկոս Ա. Ն. Կոլմոգորովի աքսիոմաները։ Կոլմոգորովի աքսիոմատիկան ելնում է էլեմենտար պատահարի հասկացությունից։ Փորձի էլեմենտար պատահարը փորձի այն հնարավոր արդյունքն է, որը բացի իրենից չունի այլ մասնավոր դեպք։ Բոլոր էլեմենտար պատահարների բազմությունը տվյալ փորձում նշանակենք Ω և անվանենք էլեմենտար պատահարների բազմություն։ Դիցուք A պատահարը տվյալ փորձի ցանկացած արդյունքներից մեկն է. դիտենք այդ պատահարը որպես այն բոլոր էլեմենտար պատահարների բազմություն, որոնցից յուրաքանչյուրի հանդես գալու դեպքում հանդես է գալիս այդ պատահարը։ Պարզ է, որ հավաստի պատահար կլինի ամբողջ Ω բազմությունը, անհնար պատահար՝ դատարկ Φ բազմությունը և հակադիր $\overline{A}$ պատահար՝ այն բոլոր էլեմենտար պատահարների բազմությունը, որոնք չեն պատկանում A պատահարին։ Ունենք՝ $\overline{\Omega} = \Phi$, $\Phi = \Omega$։

Հիշելով բազմությունների գումարի, արտադրյալի և տարբերության սահմանումները, եզրակացնում ենք, որ պատահարների գումարը ներկայացնում է այդ պատահարներին համապատասխանող բազմությունների գումարը, պատահարների արտադրյալը՝ համապատասխան բազմությունների արտադրյալ և պատահարների տարբերությունը՝ համապատասխան բազմությունների տարբերություն։

Դիցուք կատարվում է մի փորձ, և Ω-ն այդ փորձի ω էլեմենտար պատահարների բազմությունն է՝

$$\Omega = \{\omega\}։$$

Դիցուք այդ փորձի տարբեր A պատահարների F բազմությունը, այսինքն՝ Ω բազմության տարբեր A ենթաբազմությունների բազմությունը՝

$$F = \{A\}։$$

Ենթադրենք, թե F պատահարների բազմությունը ներկայացնում է Բորելյան դաշտ կամ σ-հանրահաշիվ. այդ նշանակում է, որ բազմությունը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1. F բազմությունը պարունակում է Ω հավաստի պատահարը որպես էլեմենտ՝ $\Omega \in F$։

2. Եթե F բազմությունը պարունակում է A և B պատահարներ՝ $A \in F$, $B \in F$, ապա F-ը պարունակում է $A \cup B$ գումար, $A \cap B$ արտադրյալ և $\overline{A}$, $\overline{B}$ հակադիր պատահարներ՝

$$A \cup B \in F, \quad A \cap B \in F, \quad A \in F, \quad B \in F։$$

3. Եթե F բազմությունը պարունակում է $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ անվերջ հաջորդականության պատահարներից յուրաքանչյուրը՝ $A_n \in F$ $(n = 1, 2, \ldots)$, ապա նա պարունակում է այդ պատահարների գումար՝ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ պատահարը և այդ պատահարների արտադրյալ՝ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ պատահարը՝

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F։$$

Այս ենթադրություններից հետևում է, որ անհնար Φ *պատահարը նույնպես պատկանում է* F *բազմությանը, քանի որ* $\Phi = \overline{\Omega}$ *և* $\Omega \in F$։

Այժմ ձևակերպենք այն աքսիոմները, որոնք որոշում են պատահարի հավանականությունը։ Ամեն մի բորելյան F *դաշտին պատկանող* A *պատահարի* P(A) *հավանականությունը մի թիվ է, որը բավարարում է հետևյալ աքսիոմներին՝*

I) $P(A) \geqslant 0$.

II) $P(\Omega) = 1$.

III) *եթե* $A_1, A_2, \ldots, A_s$ *պատահարները անհամատեղելի են, ապա*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_s),$$

(գումարման աքսիոմ).

III$_1$) *եթե* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *պատահարները անհամատեղելի են, ապա*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

(ընդլայնված գումարման աքսիոմ)։

Ձևակերպված աքսիոմներից ստացվում են մի շարք հետևություններ.

1) Հակադիր պատահարների հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի, այսինքն՝

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1։$$

Իրոք, քանի որ A *և* $\overline{A}$ *պատահարներն անհամատեղելի են և* $A \cup \overline{A}$ *պատահարը հավաստի է, ուրեմն* III *աքսիոմայի համաձայն*

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

և II *աքսիոմայի համաձայն*

$$1 = P(A) + P(\overline{A})։$$

2) Անհնար պատահարի հավանականությունը հավասար է զրոյի, այսինքն՝

$$P(\Phi) = 0։$$

Իրոք,

$$P(\Phi) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0։$$

3) Եթե A *պատահարը* B *պատահարի մասնավոր դեպքն է* $(A \subseteq B)$,

ապա

$$P(A) \leqslant P(B)։$$

Իրոք, B պատահարը կարող է հանդես գալ կամ A-ի հետ միասին, կամ առանց A-ի.

$$B = A \cap B \cup \bar{A} \cap B։$$

Բայց քանի որ $A \subseteq B$, ուրեմն $A \cap B = A$ և

$$B = A \cup \bar{A} \cap B,$$

I և II աքսիոմաների համաձայն կունենանք

$$P(B) = P(A \cup \bar{A} \cap B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \geqslant P(A)։$$

4) Պատահարի հավանականությունը չի կարող գերազանցել մեկին՝

$$P(A) \leqslant 1,$$

քանի որ $A \subseteq \Omega$ և

$$P(A) \leqslant P(\Omega)։$$

5) Եթե A-ն և B-ն ցանկացած պատահարներ են, ապա

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)։$$

Իրոք՝

$$A \cup B = A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap B \cup A \cap B,$$

որտեղ $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ և $A \cap B$ պատահարներն անհամատեղելի են և դրա համար

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)։ \qquad (*)$$

Մյուս կողմից՝

$$A = A \cap B \cup A \cap \bar{B}, \quad B = A \cap B \cup \bar{A} \cap B$$

և

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B), \quad P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B),$$

որտեղից

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B), \quad P(A \cap B) = P(B) - P(A \cap B).$$

տեղադրելով $P(A \cap \bar{B})$-ի և $P(\bar{A} \cap B)$-ի ստացված արժեքները (*) հավասարության մեջ, կստանանք այն հավասարությունը, որն ուզում էինք ապացուցել։ Այդ հավասարությունից բխում է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)։$$

Վերջապես ընդլայնված գումարման աքսիոմայի կապակցությամբ նկատենք, որ $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)+\ldots$ *շարքը միշտ զուգամետ է, եթե* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *պատահարներն անհամատեղելի են, քանի որ այդ շարքի անդամները բացասական չեն և ցանկացած մասնավոր* $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$ *գումարը, որպես* $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ *հավանականություն, չի գերազանցում մեկին։* Ω *էլեմենտար պատահարների բազմությունը, պատահարների բորելյան* F *դաշտը և այդ դաշտի* A *պատահարներին համապատասխանող* P *հավանականությունը կոչվում են տվյալ փորձի հետ կապված* (Ω, F, P) հավանականային տարածություն:

Եթե փորձը այն է, որ նետվում է մի զառ, ապա էլեմենտար պատահարների բազմությունը կլինի

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}.$$

Բոլոր հնարավոր պատահարների F *բազմությունը կլինի*

$$\begin{aligned} F = \{&\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6, \ \omega_1 \cup \omega_2, \ \omega_1 \cup \omega_3, \ldots, \omega_5 \cup \omega_6, \\ &\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3, \ \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_4, \ldots, \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6, \\ &\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4, \ \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_5, \ldots \ \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6, \\ &\ldots \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6 = \Omega, \ \omega_1 \cap \omega_2 = \omega_1 \cap \omega_3 = \ldots \\ &= \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4 \cap \omega_5 \cap \omega_6 = \Phi\}. \end{aligned}$$

այդ պատահարների համապատասխան հավանականությունները կարելի է սահմանել, օրինակ, այնպես, ինչպես դասական սահմանման դեպքում է։ Հեշտ է տեսնել, որ այդ դեպքում բավարարված կլինեն բոլոր աքսիոմները։

Բերված աքսիոմները չեն հակասում իրար, քանի որ, օրինակ, հավանականությունների դասական սահմանման դեպքում նրանք բոլորը տեղի են ունենում միաժամանակ։

Սակայն աքսիոմների այս սիստեմը լրիվ չէ. պատահարների դաշտի համար հավանականությունները միարժեք չեն որոշվում։

Իրոք, բերված օրինակում կարելի է $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ *պատահարներին վերագրել հավասար հավանականություններ՝*

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_6) = \frac{1}{6},$$

ինչպես դասական սահմանման դեպքում, կամ

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = \frac{1}{4}, \quad P(\omega_4) = P(\omega_5) = P(\omega_6) = \frac{1}{12}$$

հավանականություններ. երկու դեպքում էլ հավանականությունները բավարարում են տված աքսիոմներին։ Թե ինչպիսի հավանականություններ պետք է վերագրել քննարկվող պատահարներին, որոշվում է տվյալ խնդրի ֆիզիկական պայմաններից։ Օրինակ, եթե զառը կանոնավոր է (համասեռ խորանարդ), բնական է հավանականությունների առաջին սխեմի ընդունումը. իսկ եթե զառը կանոնավոր չէ, պետք է ընտրել հավանականությունների այլ սխեմ, որ համապատասխանում է այդ զառի ֆիզիկական հատկություններին։ Այսպես, ամեն մի կոնկրետ խնդրում դաշտի պատահարներին պետք է վերագրել հավանականություններ, ղեկավարվելով մի կողմից՝ բերված աքսիոմներով, իսկ մյուս կողմից՝ տվյալ խնդրին հատուկ պայմաններով։

Օրինակ։ Փորձը այն է, որ կետը պատահականորեն գցվում է $AB = l$ հատվածի վրա։ Էլեմենտար պատահարների բազմությունը կլինի $[0, l]$ հատվածի բոլոր կետերի բազմությունը.

$$\Omega\{[=0,\ l]\}։$$

Որպես F պատահարների բազմություն կարելի է դիտել $[0, l]$ հատվածի կետերի բոլոր այն A ենթաբազմությունների բազմությունը, որոնք ունեն Լեբեգի չափ (երկարություն)՝

$$F = \{A\}։$$

Յուրաքանչյուր այդպիսի A պատահարի հավանականություն ընդունենք համապատասխան ենթաբազմության նորմավորված չափը՝

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{l}.$$

Այդ բնական է, քանի որ կետը ըստ խնդրի պայմանի պատահականորեն է գցվում AB հատվածի վրա։ Հեշտ է համոզվել, որ այսպես սահմանված հավանականությունները բավարարում են բոլոր աքսիոմներին։ Այսպիսով, կառուցված է տվյալ փորձին համապատասխանող հավանականային տարածություն. տանք հավանականության երկրաչափական սահմանումը։

Եթե $P(A) > 0$, ապա

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

հարաբերությունն անվանելու ենք B պատահարի պայմանական հավանականություն A պատահարի իրականացման պայմանով և նշանակելու ենք $P_A(B)$-ով, այսինքն՝

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

Այստեղից

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)։$$

Այսպիսով, հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը, որն ապացուցված էր դասական սահմանման դեպքում, այժմ դառնում է պայմանական հավանականության սահմանման անմիջական հետևանքը։

10. Խնդիրներ

1. Բանվորը պատրաստել է n շինվածք։ A_i $(i = 1,2, \ldots, n)$. պատահարը այն է, որ i-րդ շինվածքը խոտան է։ Գրանցել պատահարը, որ

ա) գոնե մեկ շինվածք խոտան է,

բ) խոտան է միայն մեկ շինվածք,

գ) ոչ մի շինվածք խոտան չէ,

դ) խոտան են երկուսից ոչ ավելի շինվածքներ։

2. Մասնակը բաղկացած է 100 շինվածքից, որոնցից 5-ը արատ ունեն։ Ստուգման համար պատահականորեն վերցվում է 10 շինվածք։ Գտնել նրանցից 2 շինվածքի արատավոր լինելու հավանականությունը։

3. k հրանոթներ կրակ են վարում l ինքնաթիռների վրա $(k \leqslant l)$՝ պատահականորեն և իրարից անկախ ընտրելով նպատակակետը։ Գտնել հետևյալ պատահարների հավանականությունները՝

ա) բոլոր հրանոթները կկրակեն նույն նպատակակետի վրա,

բ) բոլոր հրանոթները կկրակեն տարբեր նպատակակետերի վրա։

4. (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) գագաթներով քառակուսու մեջ պատահականորեն նշվում է M կետը, որի կոորդինատները նշանակենք (ξ, η)։

1) Ապացուցել, որ $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ համար $P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\} \cdot P\{\eta < y\} = x \cdot y$;

2) Գտնել $0 < z < 1$ համար՝

ա) $P\{|\xi - \eta| < z\}$,

բ) $P\{\xi \cdot \eta < z\}$.

գ) $P\{\min(\xi, \eta) < z\}$,

դ) $P\{\max(\xi, \eta) < z\}$,

ե) $P\left\{\frac{1}{2}(\xi + \eta) < z\right\}$։

5. Դիցուք ξ, η որոշված են, ինչպես 4 խնդրում։ Գտնել հետևյալ պատահարների հավանականությունները՝

$$x^2+\xi\cdot x+\eta=0$$

հավասարման արմատները՝

ա) իրական են, բ) երկուսն էլ դրական են։

6) Կրակոցով թիրախը խոցելու հավանականությունը հավասար է 0,7։ Կատարվում են 7 անկախ կրակոցներ։ Որոշել դրանցից առնվազն մեկով թիրախը խոցելու հավանականությունը։

7. Քանի՞ անգամ պետք է նետել զույգ զառերը, որպեսզի երկուսի վրա էլ 6 միավոր բացվելու հավանականությունը գոնե մեկ անգամ լինի 1/2-ից մեծ։

(Դե-Մերեյի խնդիրը)

8. Քննության ներկայանալիս ուսանողը ծրագրի 25 հարցից գիտի միայն 20-ը։ Որոշել իրեն տրված բոլոր 3 հարցերին՝ ուսանողի պատասխանելու հավանականությունը։

9. n գնդակներ պարունակող սափորի մեջ գցվել է մեկ սպիտակ գնդակ։ Գտնել սափորից սպիտակ գնդակը հանելու հավանականությունը, եթե բոլոր հնարավոր ենթադրությունները սպիտակ գնդակների սկզբնական թվի վերաբերյալ հավասարահնարավոր են։

10. Դիցուք միջատը $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ հավանականությամբ դնում է k ձվիկներ և k ձվիկներից r նոր միջատների զարգացման հավանականությունը հավասար է $C_k^r\cdot p^r\cdot(1-p)^{k-r}$ $(1>p>0,\ r=1,2,\ldots,k)$։

Ինչպիսի՞ն է այդ միջատի համար l միջատներից բաղկացած սերունդ ունենալու հավանականությունը։

11. Մեկ կրակոցից չվրիպելու հավանականությունը երեք հրաձիգների համար համապատասխանաբար հավասար է 4/5, 3/4, 2/3։ Երեքի միաժամանակ կրակելուց մեկը վրիպեց։ Այդ պայմանում որոշել երրորդ հրաձիգի վրիպելու հավանականությունը։

12. Հաշվիչ մեքենայի երեք իրարից անկախ աշխատող էլեմենտներից երկուսը դուրս եկան շարքից։ Որոշել առաջին և երկրորդ էլեմենտների շարքից դուրս գալու հավանականությունը, եթե այդ էլեմենտներից ամեն մեկի շարքից դուրս գալու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են 2/10, 4/10, 3/10։

Վերջապես ընդլայնված գումարման աքսիոմայի կապակցությամբ նկատենք, որ $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)+\ldots$ շարքը միշտ զուգամետ է, եթե $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ պատահույթները անհամատեղելի են, քանի որ այդ շարքի անդամները բացասական չեն և ցանկացած մասնակի $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$ գումարը, որպես $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ հավանականություն, չի գերազանցում մեկին։ Ω էլեմենտար պատահույթների բազմությունը, պատահույթների բորելյան F դաշտը և այդ դաշտի A պատահույթներին համապատասխանող P հավանականությունը կոչվում են տվյալ փորձի հետ կապված (Ω, F, P) հավանականային տարածություն։

Եթե փորձը այն է, որ նետվում է մի զառ, ապա էլեմենտար պատահույթների բազմությունը կլինի

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}։$$

Բոլոր հնարավոր պատահույթների F բազմությունը կլինի

$$\begin{aligned}F=\{&\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6, \omega_1 \cup \omega_2, \omega_1 \cup \omega_3, \ldots, \omega_5 \cup \omega_6,\\ &\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3, \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_4, \ldots, \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6,\\ &\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4, \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_5, \ldots \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6,\\ &\ldots \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6=\Omega, \omega_1 \cap \omega_2=\omega_1 \cap \omega_3=\ldots\\ &=\omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4 \cap \omega_5 \cap \omega_6=\Phi\}.\end{aligned}$$

այդ պատահույթների համապատասխան հավանականությունները կարելի է սահմանել, օրինակ, այնպես, ինչպես դասական սահմանման դեպքում է։ Հեշտ է տեսնել, որ այդ դեպքում բավարարված կլինեն բոլոր աքսիոմները։

Բերված աքսիոմները չեն հակասում իրար, քանի որ, օրինակ, հավանականությունների դասական սահմանման դեպքում նրանք բոլորը տեղի են ունենում միաժամանակ։

Սակայն աքսիոմների այս սիստեմը լրիվ չէ. պատահույթների դաշտի համար հավանականությունները միարժեք չեն որոշվում։

Իրոք, բերված օրինակում կարելի է $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ պատահույթներին վերագրել հավասար հավանականություններ՝

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\ldots=P(\omega_6)=\frac{1}{6},$$

ինչպես դասական սահմանման դեպքում, կամ

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=P(\omega_3)=\frac{1}{4}, \quad P(\omega_4)=P(\omega_5)=P(\omega_6)=\frac{1}{12}$$

ավանականություններ. Երկու դեպքում էլ հավանականությունները բավարարում են տված աքսիոմներին։ Թե ինչպիսի հավանականություններ պետք է վերագրել քննարկվող պատահարներին, որոշվում է ան խնդրի ֆիզիկական պայմաններից։ Օրինակ, եթե զառը կանոնավոր է (համասեռ խորանարդ), բնական է հավանականությունների առաջին սխեմի ընդունումը. իսկ եթե զառը կանոնավոր չէ, պետք ընտրել հավանականությունների այլ սխեմ, որ համապատասխանում է այդ զառի ֆիզիկական հատկություններին։ Այսպես, ամեն մի կոնկրետ խնդրում դաշտի պատահարներին պետք է վերագրել հավանականություններ, ղեկավարվելով մի կողմից՝ բերված աքսիոմներով, իսկ մյուս կողմից՝ տվյալ խնդրին հատուկ պայմաններով։

Օրինակ։ Փորձը այն է, որ կետը պատահականորեն գցվում է $AB = l$ հատվածի վրա։ Էլեմենտար պատահարների բազմությունը կլինի $[0, l]$ հատվածի բոլոր կետերի բազմությունը.

$$\Omega\{[=0, l]\}$$։

որպես F պատահարների բազմություն կարելի է դիտել $[0, l]$ հատվածի մասերի բոլոր այն A ենթաբազմությունների բազմությունը, որոնք ունեն Լեբեգի չափ (երկարություն)՝

$$F = \{A\}$$։

Յուրաքանչյուր այդպիսի A պատահարի հավանականություն ընդունենք համապատասխան ենթաբազմության նորմավորված չափը՝

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{l}.$$

Դա բնական է, քանի որ կետը ըստ խնդրի պայմանի պատահականորեն է գցվում AB հատվածի վրա։ Հեշտ է համոզվել, որ այդպես սահմանված հավանականությունները բավարարում են բոլոր աքսիոմներին։ Այսպիսով, կառուցված է տվյալ փորձին համապատասխանող հավանականային տարածությունը. ստացանք հավանականության երկրաչափական սահմանումը։

Եթե $P(A) > 0$, ապա

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

հարաբերությունն անվանելու ենք B պատահարի պայմանական հավանականություն A պատահարի իրականացման պայմանով և նշանակելու ենք $P_A(B)$-ով, այսինքն՝

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

Վերջապես ընդլայնված գումարման աքսիոմայի կապակցությամբ նկատենք, որ $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)+\ldots$ շարքը միշտ զուգամետ է, եթե $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ պատահույթներն անհամատեղելի են, քանի որ այդ շարքի անդամները բացասական չեն և ցանկացած մասնավոր $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$ գումարը, որպես $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ հավանականություն, չի գերազանցում մեկին։ Ω էլեմենտար պատահույթների բազմությունը, պատահույթների բորելյան F դաշտը և այդ դաշտի A պատահույթներին համապատասխանող P հավանականությունը կոչվում են տվյալ փորձի հետ կապված (Ω, F, P) հավանականային տարածություն:

Եթե փորձը այն է, որ նետվում է մի զառ, ապա էլեմենտար պատահույթների բազմությունը կլինի

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}։$$

Բոլոր հնարավոր պատահույթների F բազմությունը կլինի

$$\begin{aligned} F = \{&\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6, \omega_1 \cup \omega_2, \omega_1 \cup \omega_3, \ldots, \omega_5 \cup \omega_6, \\ &\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3, \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_4, \ldots, \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6, \\ &\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4, \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_5, \ldots \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6, \\ &\ldots \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6 = \Omega, \ \omega_1 \cap \omega_2 = \omega_1 \cap \omega_3 = \ldots \\ &= \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4 \cap \omega_5 \cap \omega_6 = \Phi\}. \end{aligned}$$

այդ պատահույթների համապատասխան հավանականությունները կարելի է սահմանել, օրինակ, այնպես, ինչպես դասական սահմանման դեպքում է։ Հեշտ է տեսնել, որ այդ դեպքում բավարարված կլինեն բոլոր աքսիոմաները։

Բերված աքսիոմաները չեն հակասում իրար, քանի որ, օրինակ, հավանականությունների դասական սահմանման դեպքում նրանք բոլորը տեղի են ունենում միաժամանակ։

Սակայն աքսիոմների այս սիստեմը լրիվ չէ. պատահույթների դաշտի համար հավանականությունները միարժեք չեն որոշվում։

Իրոք, բերված օրինակում կարելի է $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ պատահույթներին վերագրել հավասար հավանականություններ՝

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_6) = \frac{1}{6},$$

ինչպես դասական սահմանման դեպքում, կամ

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = \frac{1}{4}, \quad P(\omega_4) = P(\omega_5) = P(\omega_6) = \frac{1}{12}$$

հավանականություններ. երկու դեպքում էլ հավանականությունները բավարարում են տված աքսիոմներին։ Թե ինչպիսի հավանականություններ պետք է վերագրել քննարկվող պատահարներին, որոշվում է նաև խնդրի ֆիզիկական պայմաններից։ Օրինակ, եթե զառը կանոնավոր է (համասեռ խորանարդ), բնական է հավանականությունների առաջին սիստեմի ընդունումը. իսկ եթե զառը կանոնավոր չէ, պետք է ընտրել հավանականությունների այլ սիստեմ, որ համապատասխանում է այդ զառի ֆիզիկական հատկություններին։ Այսպես, ամեն մի կոնկրետ խնդրում դաշտի պատահարներին պետք է վերագրել հավանականություններ, ղեկավարվելով մի կողմից՝ բերված աքսիոմներով, իսկ մյուս կողմից՝ տվյալ խնդրին հատուկ պայմաններով։

Օրինակ։ Փորձը այն է, որ կետը պատահականորեն ընկնում է $AB = l$ *հատվածի վրա։ Էլեմենտար պատահարների բազմությունը կլինի* $[0, l]$ *հատվածի բոլոր կետերի բազմությունը.*

$$\Omega\{[=0,\ l]\}։$$

Որպես F *պատահարների բազմություն կարելի է գիտել* $[0, l]$ *հատվածի կետերի բոլոր այն* A *ենթաբազմությունների բազմությունը, որոնք ունեն Լեբեգի չափ (երկարություն)՝*

$$F = \{A\}։$$

Յուրաքանչյուր այդպիսի A *պատահարի հավանականություն ընդունենք համապատասխան ենթաբազմության նորմավորված չափը՝*

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{l}.$$

այդ բնական է, քանի որ կետը ըստ խնդրի պայմանի պատահականորեն է ընկնում AB *հատվածի վրա։ Հեշտ է համոզվել, որ այսպես սահմանված հավանականությունները բավարարում են բոլոր աքսիոմներին։ Այսպիսով, կառուցված է տվյալ փորձին համապատասխանող հավանականային տարածությունը. տալիս ենք հավանականության երկրաչափական սահմանումը։*

Եթե $P(A) > 0$, *ապա*

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

հարաբերությունն անվանելու ենք B *պատահույթի պայմանական հավանականություն* A *պատահույթի իրականացման պայմանով և նշանակելու ենք* $P_A(B)$*-ով, այսինքն՝*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

ՓՈՐՁԵՐԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅՈՒՆ

11. Բեռնուլիի փորձերը: *Փորձերը կոչվում են անկախ, եթե յուրաքանչյուր փորձում պատահարի պայմանական հավանականությունը, նախորդ փորձերի որոշակի արդյունքների պայմանով, կախում չունի այդ նախորդ փորձերի արդյունքներից: Օրինակ, դրամը մի քանի անգամ նետելիս գերբի կամ գրի բացման պայմանական հավանականությունը, եթե հայտնի են նախորդ փորձերի որոշակի արդյունքները, կախում չունի այդ փորձերի արդյունքներից և յուրաքանչյուր փորձի համար հավասար է $\frac{1}{2}$-ի: Այդ պատճառով դրամի նետման հաջորդական փորձերը ներկայացնում են անկախ փորձեր: Ճիշտ այդպես էլ մի քանի անգամ զառը գցելու գործողությունները նույնպես անկախ փորձեր են, քանի որ զառի որևէ նիստի բացման պայմանական հավանականությունը յուրաքանչյուր փորձում հավասար է $\frac{1}{6}$-ի՝ անկախ նախորդ փորձերի արդյունքներից: Ընդհանրապես, եթե տվյալ առարկաների բազմությունից պատահական կերպով հաջորդաբար վերցվում է մեկական առարկա, ընդ որում յուրաքանչյուր փորձից հետո վերցված առարկան կրկին վերադարձվում է բազմության մեջ, ապա այդպիսի փորձերը կլինեն անկախ:*

Դիցուք կատարվում են n *անկախ փորձեր, ընդ որում այդ* n *փորձերից յուրաքանչյուրի ժամանակ* A *պատահարի հավանականությունը հաստատուն է և հավասար է* p-*ի. պահանջվում է որոշել այդ* n *փորձերում* A *պատահարի* m *անգամ տեղի ունենալու հավանականությունը:*

n *փորձերի ժամանակ* A *պատահարը կարող է տեղի ունենալ* m *անգամ տարբեր եղանակներով, օրինակ, կարող է տեղի ունենալ հետևյալ հաջորդականությամբ՝*

$$\underbrace{A,\ A,\ A, \ldots,\ A,}_{m \text{ անգամ}}\ \underbrace{\bar{A},\ \bar{A}, \ldots,\ \bar{A}}_{n-m \text{ անգամ}}$$

կամ

$$\bar{A},\ \underbrace{A,\ A, \ldots, A,\ A,}_{m \text{ անգամ}}\ \underbrace{\bar{A},\ \bar{A}, \ldots,\ \bar{A},}_{n-m-1 \text{ անգամ}}$$

կամ այլ հաջորդականությամբ: Այդպիսի հաջորդականությունների թիվը, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է m *անգամ* A *և* n — m անգամ $\bar{A}$ պատահարներ, հավասար է այն եղանակների թվին, որոնցով A պատահարի համար կարելի է ընտրել m տեղ՝ եղած n տեղերից։ Ակներև է, որ այդ թիվը հավասար է այն զուգորդությունների թվին, որ կարելի է կազմել n տարրերից m-ական, այսինքն՝ C_n^m-ին։ n փորձերի ժամանակ A պատահարի m անգամ տեղի ունենալու որոնելի հավանականությունը, առանց նշելու, թե ինչ հաջորդականությամբ, հավասար է նշված բոլոր հնարավոր հաջորդականությունների հավանականությունների գումարին։ A պատահարի որևէ հաջորդականությամբ (օրինակ, առաջին) m-ապատիկ իրականացման հավանականությունը գտնում ենք հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի համաձայն՝ անկախ պատահարների համար.

$$P(\underbrace{AAA\ldots A}_{m}\,\underbrace{\bar{A}\,\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m}) = \underbrace{P(A)\cdot P(A)\ldots P(A)}_{m \text{ անգամ}}\cdot\underbrace{P(\bar{A})\cdot P(\bar{A})\ldots P(\bar{A})}_{n-m \text{ անգամ}} =$$

$$= \underbrace{p\cdot p\cdot p\cdot\ldots p}_{m \text{ անգամ}}\cdot\underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdot\ldots(1-p)}_{n-m \text{ անգամ}} = p^m\cdot(1-p)^{n-m}։$$

Պատահարի m-ապատիկ իրականացման հավանականությունը n փորձերի ժամանակ ցանկացած այլ հաջորդականության դեպքում, նույնպես հավասար կլինի $p^m(1-p)^{n-m}$։ Իրոք, ամեն մի այլ հաջորդականություն, որ պարունակում է m անգամ A և $n-m$ անգամ $\bar{A}$, մեր քննարկած հաջորդականությունից կտարբերվի միայն A-ի և $\bar{A}$-ի հաջորդականության կարգով, և այս երկրորդ հաջորդականության իրականացման համար մենք կստանանք նույն թվով p և $(1-p)$ բազմապատիկների արտադրյալը, միայն գրված այլ կարգով, որը չի ազդի $p^m\cdot(1-p)^{n-m}$ արտադրյալի վրա։

Այսպիսով որոնելի հավանականությունը, եթե այն նշանակենք $P_n(m)$-ով, կլինի

$$P_n(m) = \underbrace{p^m\cdot(1-p)^{n-m} + p^m(1-p)^{n-m} + \ldots + p^m\cdot(1-p)^{n-m}}_{C_n^m \text{ թվով գումարելիներ}},$$

կամ վերջնականապես

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},} \tag{26}$$

Քանի որ

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\ldots m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)\cdot(n-m)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m\quad(n-m)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{n!}{m!\,(n-m)!},$$

ուրեմն նախորդ բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m}, \tag{27}$$

որտեղ $q = 1 - p$։ Ստացված (26) և (27) բանաձևերը որոշում են պատահարի ցանկացած m երևումների թվի հավանականությունը n փորձերի ժամանակ։ Այսպես, m-ին տալով

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, (n-1),\ n$$

արժեքները, կստանանք

$$P_n(0) = q^n, \quad P_n(1) = npq^{n-1}, \quad P_n(2) = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\, p^2 q^{n-2}, \ldots,$$
$$P_n(n-1) = np^{n-1}q, \quad P_n(n) = p^n։$$

$P_n(m)$ հավանականությունների արժեքները $(q+p)^n$ երկանդամի վերլուծության անդամներն են, ընդ որում $P_n(m)$ հավանականությունը վերլուծության այն անդամն է, որը պարունակում է p^m։ Ակներև է, որ այդ բոլոր հավանականությունների գումարը՝ $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(n)$, հավասար է $(q+p)^n$, այսինքն՝ սպասվող միավորին, որովհետև $P_n(0), P_n(1), \ldots, P_n(n)$ թվերը լրիվ խումբ կազմող անհամատեղելի պատահարների հավանականություններն են։ Դիտարկված փորձերը կոչվում են Բեռնուլիի փորձեր (մաթեմատիկոս Հ. Բեռնուլիի անունով, որն առաջին անգամ ուսումնասիրել է այդպիսի փորձերը)։ (26) բանաձևերը կոչվում են Բեռնուլիի բանաձևեր։

Օրինակ 1. Որոշել գերբի 5 անգամ բացվելու հավանականությունը՝ դրամը 10 անգամ նետելու դեպքում։ Այստեղ փորձերի թիվը, $n = 10$, գերբի բացվելու հավանականությունը յուրաքանչյուր փորձի ժամանակ՝ $p = \frac{1}{2}$։ Ուստի որոնելի հավանականությունը (26) բանաձևի համաձայն կլինի

$$P_{10}(5) = C_{10}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5!\,5!} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{252}{1024}։$$

Օրինակ 2. Դիցուք պատահական ձևով n բջիջ պարունակող անոթում բաշխվում են գազի N մոլեկուլներ։ Որոշել մի բջջի մեջ h մոլեկուլների երևան գալու հավանականությունը, ենթադրելով, որ մոլեկուլը նույն հավանականությամբ կարող է երևան գալ ցանկացած բջջում և մոլեկուլի համար տվյալ բջջում երևան գալը կախում չունի այն բանից, թե ինչպես են բաշխված մյուս մոլեկուլները։

Եթե սխեմատիկորեն համարենք, որ N մոլեկուլներից յուրաքանչյուրը հաջորդաբար պատահական դիրք է գրավում անոթում, կունենանք N անկախ փորձեր. ընդ որում մեկ մոլեկուլի՝ տվյալ բջջի մեջ ընկնելու հավանականությունը հավասար կլինի $p = \frac{1}{n}$*-ի և, հետևաբար, N մոլեկուլներից տվյալ բջջի մեջ h մոլեկուլի ընկնելու որոնելի հավանականությունը ըստ (26) բանաձևի կլինի*

$$P_N(h) = C_N^h \left(\frac{1}{n}\right)^h \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{N-h}, \qquad h = 0,\ 1, \dots N։$$

12. Պատահարի երևումների ամենահավանական թիվը։ *Դիտարկված փորձերի ժամանակ A պատահարը կարող է երևան գալ m անգամ, ընդ որում m-ը կարող է ընդունել 0, 1, 2, ..., n արժեքներից որևէ մեկը՝ յուրաքանչյուրը որոշակի հավանականությամբ, որը որոշվում է (26) բանաձևով։*

Պատահարի երևումների այն թիվը, որին համապատասխանում է ամենամեծ հավանականությունը, կոչվում է պատահարի երևումների ամենահավանական թիվ։ *Գտնենք պատահարի երևումների այդ ամենահավանական թիվը, եթե կատարվում են n անկախ փորձեր և յուրաքանչյուր փորձի ժամանակ պատահարի հավանականությունը նույնն է ու հավասար p-ի։ (26) բանաձևի համաձայն երկու իրար հաջորդող պատահարների երևան գալու թվերի՝ m-ի և (m + 1)-ի, հավանականությունները՝*

$$P_m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m}, \quad P_{m+1} = \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}\, p^{m+1} q^{n-m-1}։ \text{*}$$

Կազմենք դրանց հարաբերությունը՝

$$\frac{P_{m+1}}{P_m} = \frac{n!\ p^{m+1}\ q^{n-m-1}\ m!\,(n-m)!}{(m+1)!\,(n-m-1)!\ n!\ p^m q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}, \tag{28}$$

Ակներև է, որ երբ m-ը մեծանում է 0-ից մինչև n, այս հարաբերությունը փոքրանում է, այսինքն՝

$$\frac{P_1}{P_0} > \frac{P_2}{P_1} > \frac{P_3}{P_2} > \dots > \frac{P_n}{P_{n-1}},$$

Բայց

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{n \cdot p}{q}, \quad \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{p}{nq}.$$

ապա

* *12 կետում* $P_n(m)$*-ի փոխարեն կգրենք* P_m։

$$\frac{np}{q}=\frac{P_1}{P_0}>\frac{P_2}{P_1}>\frac{P_3}{P_2}>\dots>\frac{P_n}{P_{n-1}}=\frac{p}{nq}, \qquad (29)$$

Նախ ենթադրենք, թե փորձերի n *թիվն այնքան մեծ է, որ*

$$np>q, \quad nq>p։$$

Այդ դեպքում (29)-ից եզրակացնում ենք, որ դիտարկվող հարաբերությունը՝ $\frac{P_{m+1}}{P_m}$*-ը, փոքրանում է մեկից մեծ արժեքից մինչև մեկից փոքր արժեքը։ Դիցուք գոյություն ունի մի այնպիսի* m_0 *ամբողջ թիվ, որի համար այս հարաբերությունը հավասար է մեկի, այսինքն՝*

$$\frac{P_1}{P_0}>\frac{P_2}{P_1}>\dots>\frac{P_{m_0}}{P_{m_0-1}}>1, \quad \frac{P_{m_0+1}}{P_{m_0}}=1, \quad 1>\frac{P_{m_0+2}}{P_{m_0+1}}>\dots>\frac{P_n}{P_{n-1}},$$

կամ

$$P_0<P_1<P_2<\dots<P_{m_0}=P_{m_0+1}>\dots>P_{n-1}>P_n։$$

Այդ դեպքում ակներև է, որ գոյություն ունեն պատահարի երևան գալու ամենահավանական թվեր՝ m_0 *և* m_0+1*, որոնք կարելի է գտնել հետևյալ հավասարումից՝*

$$\frac{P_{m_0+1}}{P_{m_0}}=1,$$

կամ

$$\frac{n-m_0}{m_0+1}\cdot\frac{p}{q}=1։$$

Լուծելով այս հավասարումը, գտնում ենք

$$m_0=np-q, \quad m_0+1=np+p։ \qquad (30)$$

Իսկ այն դեպքում, երբ այդպիսի ամբողջ m_0 *թիվ գոյություն չունի (այսինքն՝* $np-q$ *թիվը ամբողջ թիվ չէ),* m_0*-ով նշանակենք այն ամբողջ թիվը, որի համար* $\frac{P_{m+1}}{P_m}$ *հարաբերությունը առաջին անգամ դառնում է միավորից փոքր, այսինքն՝*

$$\frac{P_1}{P_0}>\frac{P_2}{P_1}>\dots>\frac{P_{m_0}}{P_{m_0-1}}>1, \quad 1>\frac{P_{m_0+1}}{P_{m_0}}>\dots>\frac{P_n}{P_{n-1}},$$

Այդ դեպքում ակներև է, որ

$$P_0<P_1<P_2<\dots<P_{m_0-1}<P_{m_0},$$

$$P_{m_0}>P_{m_0+1}>\dots>P_n$$

և m_0-ն դառնում է պատահարի երևումների ամենահավանական թիվը։ Այն կարելի է գտնել՝ լուծելով հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\frac{P_{m_0}}{P_{m_0-1}} > 1, \qquad \frac{P_{m_0+1}}{P_{m_0}} < 1,$$

կամ

$$\frac{p(n - m_0 + 1)}{m_0 q} > 1, \qquad \frac{p(n - m_0)}{q(m_0 + 1)} < 1։$$

Լուծելով այս անհավասարությունները m_0-ի նկատմամբ, կստանանք

$$np - q < m_0 < np + p։$$

Քանի որ $np - q$ և $np + p$ թվերը տվյալ դեպքում ամբողջ թվեր չեն և իրարից տարբերվում են մեկ միավորով, ուստի նրանց միջև գոյություն ունի միակ ամբողջ թիվ, որը և կլինի պատահարի երևումների ամենահավանական թիվը։

Այժմ ենթադրենք, թե $np \leqslant q$, ուստի $\frac{P_{m+1}}{P_m}$ հարաբերությունը (29)-ի համաձայն m-ի մեծացման դեպքում պիտի փոքրանա՝ սկսած իր այն արժեքից, որ հավասար է 1-ի կամ փոքր է 1-ից մինչև նրա միավորից փոքր արժեքը. հետևաբար՝

$$P_0 \geqslant P_1 > P_2 > \dots > P_n։$$

Այս դեպքում պատահարի երևումների ամենահավանական թիվը կամ 0-ն է (երբ $np < q$), որը, ակներևաբար, բավարարում է հետևյալ անհավասարություններին՝ $np - q < 0 < np + p$, կամ գոյություն ունեն պատահարի երևումների երկու ամենահավանական թվեր՝ 0 և 1 (երբ $np = q$), որոնք գրվում են հետևյալ կերպ՝

$$0 = np - q \quad և \quad 1 = np + p։$$

Վերջապես, ընդունենք $nq \leqslant p$, այդ դեպքում կստանանք կամ պատահարի երևումների մեկ ամենահավանական թիվ՝ հավասար n-ի, որը բավարարում է հետևյալ ակներև անհավասարությանը՝

$$np - q < n < np + p,$$

կամ գոյություն ունեն պատահարի երևումների երկու ամենահավանական թվեր՝ $n - 1$ և n, որոնք գրվում են հետևյալ կերպ՝

$$n - 1 = np - q, \quad n = np + p։$$

Այսպիսով, բոլոր դեպքերում, եթե $(np - q)$ թիվը ամբողջ թիվ է, գոյություն ունեն պատահարի երևումների երկու ամենահավանական թվեր՝ $(np-q)$ և $(np+p)$, իսկ եթե $(np-q)$ թիվը կոտորակային թիվ է, գոյություն ունի պատահարի երևումների միայն մեկ ամենահավանական թիվ, որը մեծ է $(np-q)$-ից և փոքր՝ $(np+p)$-ից։ Եթե մասնավոր դեպքում np-ն ամբողջ թիվ է, ապա հենց այդ թիվն էլ կլինի պատահարի երևումների ամենահավանական թիվը, քանի որ $np>(np-q)$ և $np<(np+p)$։

Այժմ պատահարի երևումների m թվից անցնելով պատահարի երևան գալու $\frac{m}{n}$ հաճախությանը՝ n փորձերի ժամանակ, կստանանք՝ եթե $(np-q)$ թիվը ամբողջ թիվ է, գոյություն կունենան հաճախության երկու ամենահավանական արժեքներ՝ $\left(p-\frac{q}{n}\right)$ և $\left(p+\frac{p}{n}\right)$, իսկ եթե $(np-q)$ թիվը կոտորակային թիվ է, ապա հաճախության ամենահավանական արժեքը մեծ է $\left(p-\frac{q}{n}\right)$-ից և փոքր $\left(p+\frac{p}{n}\right)$-ից։

Երկու դեպքում էլ, երբ փորձերի թիվը ձգտում է անվերջության, հաճախության ամենահավանական արժեքը ձգտում է p-ի, այսինքն՝ պատահարի հավանականությանը մեկ առանձին փորձում։

Օրինակ 1. Զառը 15 անգամ գցելիս որոշել վեցյակի երևումների ամենահավանական թիվը։

Ունենք $n=15$, $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$. Հետևաբար $np-q=\frac{5}{3}$, $np+p=\frac{8}{3}$. վեցյակի երևումների ամենահավանական թիվը՝ $m_0=2$։

Օրինակ 2. 20 սպիտակ և 60 սև գնդակներ պարունակող սափորից հաջորդաբար հանում են 12 գնդակ, ընդ որում ամեն անգամ գնդակը հանելուց հետո կրկին վերադարձվում է սափորի մեջ։ Որոշել սպիտակ գնդակների երևումների ամենահավանական թիվը։

Նկատի ունենալով, որ յուրաքանչյուր գնդակը հանելուց հետո կրկին նետում ենք սափորի մեջ, կատարված փորձերը կլինեն անկախ։ Փորձերի թիվը՝ $n=12$, յուրաքանչյուր փորձում սպիտակ գնդակի երևան գալու հավանականությունը՝ $p=\frac{1}{4}$, հետևաբար՝ $q=\frac{3}{4}$։ Քանի որ $12\cdot\frac{1}{4}=3$ ամբողջ թիվ է, սպիտակ գնդակի երևալու ամենահավանական թիվը 12 փորձերի ժամանակ կլինի 3-ը։ Կարելի է գտնել նաև սպիտակ գնդակի հանդես գալու ամենահավանական թվի հավանականությունը. այդ հավանականությունը՝

$$P_3=C_{12}^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^9\approx 0{,}264։$$

13. Բեռնուլիի փորձերի ընդհանրացումը: *Դիցուք կատարվում են* n *անկախ փորձեր, և յուրաքանչյուր փորձում կարող է հանդես գալ* $A_1, A_2, \ldots, A_s$ *անհամատեղելի պատահարներից մեկը. ընդ որում* A_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ *պատահարի հավանականությունը ամեն մի առանձին փորձում կախում չունի փորձի համարից և հավասար է* p_k*-ի՝*

$$P(A_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s.$$

$$\sum_{k=1}^{s} p_k = 1.$$

Պահանջվում է որոշել A_1 *պատահարի* m_1 *անգամ,* A_2 *պատահարի* m_2 *անգամ,* $\cdots$ A_s *պատահարի* m_s *անգամ հանդես գալու հավանականությունը: Այդ հավանականությունը նշանակենք* $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s)$*-ով: Դիտենք մեզ հետաքրքրող պատահարի մասնավոր դեպքերից մեկը, երբ, օրինակ,* A_1 *պատահարը հանդես է գալիս առաջին* m_1 *փորձերում,* A_2 *պատահարը՝ հետևյալ* m_2 *փորձերում,* $\cdots$ A_s *պատահարը՝ վերջին* m_s *փորձերում, այսինքն՝* $A_1, A_2, \ldots, A_s$ *պատահարների համապատասխանաբար* $m_1, m_2, \ldots, m_s$ *անգամ հանդես գալը հետևյալ կարգով՝*

$$\underbrace{A_1, A_1, \ldots A_1}_{m_1}, \underbrace{A_2, A_2, \ldots A_2}_{m_2} \ldots, \underbrace{A_s, A_s, \ldots A_s}_{m_s}.$$

ամեն մի այլ մասնավոր դեպք կստացվի այս մասնավոր դեպքից՝ բոլոր հնարավոր տեղափոխությունները այդ հաջորդականության էլեմենտներից կազմելով. այդ հաջորդականությունների թիվը հավասար է

$$\frac{n!}{m_1!\, m_2! \cdots m_s!},$$

Որոնելի հավանականությունը հավասար է այդ բոլոր հնարավոր մասնավոր դեպքերի հավանականությունների գումարին: Բայց մասնավոր դեպքերից որևէ մեկի (օրինակ, նշվածի) իրականանալու հավանականությունը, բազմապատկման թեորեմի համաձայն, անկախ պատահարների համար կլինի՝

$$P(\underbrace{A_1 A_1 \cdots A_1}_{m_1} \underbrace{A_2 A_2 \cdots A_2}_{m_2} \cdots \underbrace{A_s A_s \cdots A_s}_{m_s}) =$$

$$= \underbrace{p_1 p_1 \cdots p_1}_{m_1} \cdot \underbrace{p_2 p_2 \cdots p_2}_{m_2} \cdots \underbrace{p_s p_s \cdots p_s}_{m_s} = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_s^{m_s};$$

Ակներև է, որ ցանկացած այլ մասնավոր դեպքի հավանականությունը կլինի նույնը. Հետևաբար, գումարման աքսիոմայի համաձայն կստանանք

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_s!}\, p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s}\,: \tag{31}$$

Օրինակ: 5 սպիտակ, 7 սև և 8 կարմիր գնդակներ պարունակող սափորից հանվում են պատահական 6 գնդակներ: Որոշել սպիտակ, սև և կարմիր գնդակների հավասար չափով հանդես գալու հավանականությունը: Այստեղ

$$p_1 = P(A_1) = P(\text{սպ}) = \frac{1}{4}, \quad p_2 = P(A_2) = P(\text{սև}) = \frac{7}{20},$$

$$p_3 = P(A_3) = P(\text{կարմ.}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

ուստի (31) բանաձևի համաձայն որոնելի հավանականությունը կլինի

$$P_6(2, 2, 2) = \frac{6!}{2!\, 2!\, 2!} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{7}{20}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0{,}110:$$

14. Վերադարձային վերցվածք: Դիցուք ունենք N տարրերի բազմություն և հայտնի է, որ այդ տարրերից M-ը օժտված են A հատկանիշով, իսկ $N - M = L$-ը՝ հակադիր $\bar{A}$ հատկանիշով: Այդ բազմությունից պատահականորեն վերցվում են n տարրեր՝ հետևյալ եղանակով. հաջորդաբար վերցվում է մեկական տարր, արձանագրվում է նրա հատկանիշը, և յուրաքանչյուր փորձից հետո տարրը կրկին վերադարձվում է բազմության մեջ: Այս ձևով ստացված նոր բազմությունը կոչվում է **վերադարձային վերցվածք**, ի տարբերություն անվերադարձ վերցվածքի, որը քննարկեցինք վերևում:

Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ պատահական կերպով վերցված n տարրերի մեջ կգտնվեն m տարրեր, որոնք օժտված կլինեն A հատկանիշով և, հետևաբար, մնացած $n - m = l$ տարրերն օժտված կլինեն $\bar{A}$ հատկանիշով:

Դիտարկվող փորձերը ակներև է, որ անկախ են, և A հատկանիշով օժտված տարրի երևան գալու հավանականությունը յուրաքանչյուր առանձին փորձի ժամանակ հաստատուն է ու հավասար

$$p = \frac{M}{N}:$$

Ճիշտ այդպես էլ, պատահականորեն վերցված տարրի $\bar{A}$ հատկանիշով օժտված լինելու հավանականությունը նույնպես հաստատուն է և հավասար

$$q = \frac{L}{N}\text{։}$$

Կիրառելով (26) բանաձևը, կստանանք որոնելի հավանականությունը, որ վերադարձային վերցվածքի մեջ n տարրերից m-ը օժտված են A հատկանիշով.

$$P_n(m) = C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \cdot \left(\frac{L}{N}\right)^{n-m}\text{։}$$

Այժմ քննարկենք հակառակ խնդիրը։ Հիմնական բազմության մեջ կան N տարրեր. Նրանցից կազմվում է n տարրերի վերադարձային վերցվածք. ընդ որում m տարրերը օժտված են A հատկանիշով և, հետևաբար, $n - m = l$ տարրերը օժտված կլինեն հակադիր $\bar{A}$ հատկանիշով. որոշել հիմնական բազմության մեջ գտնվող M տարրերի A հատկանիշով օժտված լինելու և $L = N - M$ տարրերի $\bar{A}$ հատկանիշով օժտված լինելու հավանականությունները, եթե այս հիպոթեզի սկզբնական հավանականությունը հավասար է

$$P_M \qquad (M = 0, 1, \ldots, N)\text{։}$$

Հիմնական բազմության մեջ A հատկանիշով օժտված տարրերի M թվի վերաբերյալ կարելի է անել հետևյալ հիպոթեզները.

$$M = 0, 1, 2, 3, \ldots, N,$$

որոնց սկզբնական հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են՝

$$P_M = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_N\text{։}$$

Իրականացել է B պատահարը՝ այսինքն՝ n անկախ փորձերի ժամանակ A հատկանիշով օժտված տարրը հանդես է եկել m անգամ. ընդ որում այդ պատահարի պայմանական հավանականությունը ըստ այն հիպոթեզի, որ հիմնական բազմության մեջ կան M տարրեր, որոնք օժտված են A հատկանիշով, կլինի

$$P_M(B) = C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-m}, \qquad M = 0, 1, 2, \ldots, N\text{։}$$

Հետևաբար, հիպոթեզի որոնելի հավանականությունը (22) բանաձևի համաձայն կլինի՝

$$P_B(M) = \frac{P_M C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-m}}{\sum\limits_{M=0}^{N} P_M C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-m}}, \qquad M = 0, 1, \ldots, N,$$

կամ

$$P_B(M) = \frac{P_M \cdot M^m (N-M)^{n-m}}{\sum\limits_{K=0}^{N} P_K K^m (N-K)^{n-m}} \tag{32}$$

Մասնավոր դեպքում, եթե մինչև փորձերը բոլոր հիպոթեզները հավասարահնարավոր են, այսինքն՝

$$P_0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_N = p,$$

կստանանք

$$P_B(M) = \frac{M^m (N-M)^{n-m}}{\sum\limits_{K=0}^{N} K^m (N-K)^{n-m}}, \qquad M = 0, 1, 2, \ldots, N:$$

Օրինակ 1. 10 սպիտակ և 5 սև գնդակ պարունակող սափորից կազմվում է 5 գնդակների վերադարձային վերցվածք։ Որոշել վերցվածքի մեջ 3 սպիտակ գնդակներ լինելու հավանականությունը։

Փորձերի թիվը՝ $n=5$, *սպիտակ գնդակի երևան գալու հավանականությունը յուրաքանչյուր առանձին փորձի ժամանակ՝* $p = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, *սև գնդակի հանդես գալու հավանականությունը՝* $q = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$։ *Հետևաբար, որոնելի հավանականությունը (26)-ի համաձայն կլինի՝*

$$P = C_5^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}:$$

Օրինակ 2. 20 էլեկտրական լամպ պարունակող սափորից կազմված է 5 լամպերի վերադարձային վերցվածք, ընդ որում պարզվում է, որ նրա մեջ երկու լամպ փչացած են։ Որոշել սափորի մեջ 5 փչացած լամպ լինելու հավանականությունը, եթե մինչև փորձը բոլոր հիպոթեզները փչացած լամպերի թվի վերաբերյալ հավասարահնարավոր են։

Այստեղ N = 20, n = 5, m = 2. *ուստի որոնելի հավանականությունը ըստ (32) բանաձևի կլինի*

$$P_B(5) = \frac{5^2 \cdot 15^3}{\sum\limits_{M=0}^{20} M^2 \cdot (20 - M)^3} \approx 0{,}079\text{:}$$

15. Մուավր-Լապլասի թեորեմը: *Ինչպես ցույց տրվեց (գլուխ* II, *11), A պատահարի իրականացման հավանականությունը ճիշտ* m *անգամ,* n *անկախ փորձերի ընթացքում, արտահայտվում է (27) բանաձևով.*

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots n, \tag{27}$$

որտեղ p-*ն A պատահարի իրականացման հավանականությունն է, իսկ* q-*ն՝ հակադիր* $\bar{A}$ *պատահարի իրականացման հավանականությունը՝ յուրաքանչյուր առանձին փորձի ժամանակ։*

Այս բանաձևով հավանականությունների հաշվումը դժվարանում է, երբ փորձերի n *թիվը շատ մեծ է։ Այստեղ մենք կարտածենք մի մոտավոր բանաձև՝ այդ հավանականությունները հաշվելու համար, ընդ որում այդ բանաձևը մեզ կտա այնքան ավելի ճշգրիտ արդյունք, որքան մեծ է փորձերի* n *թիվը, այսինքն՝ հենց այն դեպքում, երբ հաշվումները ճշգրիտ բանաձևով բարդ են։*

Այդ նպատակով կօգտվենք անալիզի մեջ հայտնի Ստիրլինգի) բանաձևից.*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x!}{x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}} = 1,$$

որտեղից

$$x! = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}\,(1 + \alpha_x), \tag{33}$$

որտեղ $\alpha_x \to 0$, *երբ* $x \to \infty$։

Թեորեմ։ Եթե A պատահարի p հավանականությունը n անկախ փորձերում հաստատուն է և տարբեր է զրոյից ու մեկից ($0 < p < 1$), տեղի կունենա հետևյալ առնչությունը՝

$$\lim_{n \to \infty} \left| P_n(m) : \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}} \right| = 1, \tag{34}$$

* *Տես Ֆիխտենգոլց, Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի դասընթաց,* II *հատոր, գլ.* XI։

m-ի բոլոր այն արժեքների համար, որոնց համար $\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ մեծությունը մնում է սահմանափակ:

(27)-ի մեջ $n!$, $m!$, $(n-m)!$ թվերը փոխարինելով վերը բերված (33) բանաձևով, կստանանք

$$P_n(m)=\frac{n^n p^m q^{n-m} e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,(1+\alpha_n)}{m^m\cdot e^{-m}\sqrt{2\pi m}\,(n-m)^{n-m}e^{-(n-m)}\sqrt{2\pi(n-m)}\,(1+\alpha_m)\cdot(1+\alpha_{n-m})},$$

որտեղ $\alpha_n\to 0$, երբ $n\to\infty$, $\alpha_m\to 0$, երբ $m\to\infty$ և $\alpha_{n-m}\to 0$, երբ $n-m\to\infty$: Հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ $e^{-m}e^{-(n-m)}=e^{-n}$ և $n^n=n^m\cdot n^{n-m}$ և կատարելով կրճատումներ, $P_n(m)$-ը կարող ենք գրել հետևյալ կերպ՝

$$P_n(m)=\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}\,\frac{1+\alpha_n}{(1+\alpha_m)(1+\alpha_{n-m})}}: \qquad (35)$$

Նախ դիտարկենք առաջին արտադրիչը՝

$$H=\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}.$$

Մտցնենք նոր փոփոխական՝ t, որը կապված է m փոփոխականի հետ հետևյալ հավասարությունով

$$t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

որտեղից

$$m=np+t\sqrt{npq},\qquad n-m=nq-t\sqrt{npq}:$$

Այդ դեպքում

$$\frac{1}{H}=\left(1+t\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{np+t\sqrt{npq}}\left(1-t\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{nq-t\sqrt{npq}},$$

որը լոգարիթմելով կստանանք

$$\ln\frac{1}{H}=(np+t\sqrt{npq})\cdot\ln\left(1+t\sqrt{\frac{q}{np}}\right)+$$
$$+(nq-t\sqrt{npq})\ln\left(1-t\sqrt{\frac{p}{pq}}\right): \qquad (36)$$

Ստացված արտահայտությունը պարզեցնելու համար օգտագործենք անալիզի հայտնի բանաձևը՝

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}(1+\omega(x)), \qquad (37)$$

որտեղ $\omega(x)\to 0$, երբ $x\to 0$ և $|x|<1$:

Փոխարինելով x-ը — x-ով, կստանանք

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2}\left(1+\omega_1(x)\right), \tag{38}$$

որտեղ $\omega_1(x) \to 0$, երբ $x \to 0$ և $|x| < 1$։

Օգտվելով (37) և (38) հավասարություններից, (36) հավասարությունը կարելի է արտագրել հետևյալ ձևով՝

$$-\ln H = (np + t\sqrt{npq})\left[t\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{t^2 q}{2np}\left(1+\omega\left(t\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\right)\right] +$$

$$+ (nq - t\sqrt{npq})\left[-t\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{t^2 p}{2nq}\left(1+\omega_1\left(t\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right)\right]$$

ամ գործողությունները կատարելով՝

$$-\ln H = t\sqrt{npq} + t^2 q - \frac{t^2 q}{2} - \frac{t^3 q\sqrt{q}}{2\sqrt{np}} - \frac{t^2 q}{2}\,\omega\left(t\sqrt{\frac{q}{np}}\right) -$$

$$-\frac{t^3 q\sqrt{q}}{2\sqrt{np}}\,\omega\left(t\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - t\sqrt{npq} + t^2 p + \frac{t^3 p\sqrt{p}}{2\sqrt{nq}} - \frac{t^2 p}{2} -$$

$$-\frac{t^2 p}{2}\,\omega_1\left(t\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) + \frac{t^3 p\sqrt{p}}{2\sqrt{nq}}\,\omega_1\left(t\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)։$$

Դիցուք փորձերի n թիվը ձգտում է անվերջության. թեորեմի պայմանների համաձայն $t = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ մեծությունը սահմանափակ է, $p \neq 0$, $q = 1-p \neq 0$, որի պատճառով, երբ $n \to \infty$, $t\sqrt{\frac{q}{np}}$ և $\sqrt{\frac{p}{nq}}$ մեծությունները կձգտեն զրոյի և, հետևաբար, ըստ ω-ի և -ի սահմանումների կունենանք

$$\omega\left(t\sqrt{\frac{q}{np}}\right) \to 0, \qquad \omega_1\left(t\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \to 0.$$

Հա ակնհայտ է

$$\frac{t^3 q\sqrt{q}}{2\sqrt{np}} \to 0, \qquad \frac{t^3 p\sqrt{p}}{2\sqrt{nq}} \to 0։$$

Ուստի կունենանք

$$-\ln H = \frac{t^2}{2}(p+q) + \gamma_n$$

կամ

$$\ln H = -\frac{t^2}{2} - \gamma_n,$$

որտեղ $\gamma_n \to 0$, երբ $n \to \infty$։

Այստեղից

$$H = e^{-\frac{t^2}{2} - \gamma_n}$$

կամ վերջնականապես

$$H = e^{-\gamma_n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}. \tag{39}$$

Այժմ դիտարկենք (35) արտահայտության երկրորդ բազմապատկիչը.

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} = \sqrt{\frac{n}{2\pi(np + t\sqrt{npq})(nq - t\sqrt{npq})}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq\left(1 + t\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\left(1 - t\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 + t\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\left(1 - t\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)}}.$$

Ստացված արտադրյալի մեջ երկրորդ բազմապատկիչը ձգտում է միավորի, երբ $n \to \infty$. ուստի

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}(1 + \beta_n), \tag{40}$$

որտեղ $\beta_n \to 0$, երբ $n \to \infty$։

Վերջապես

$$\frac{1 + \alpha_n}{(1 + \alpha_m)(1 + \alpha_{n-m})}$$

մեծությունը ակներև է, որ ձգտում է միավորի, երբ $n \to \infty$, որովհետև, երբ $n \to \infty$, ունենք $m \to \infty$ և $n - m \to \infty$, և α_n, α_m ու α_{n-m} մեծությունների սահմանման համաձայն $\alpha_n \to 0$, $\alpha_m \to 0$, $\alpha_{n-m} \to 0$։ Հետևաբար՝

$$\frac{1 + \alpha_n}{(1 + \alpha_m)(1 + \alpha_{n-m})} = 1 + \delta_n, \tag{41}$$

որտեղ $\delta_n \to 0$, երբ $n \to \infty$։

Այսպիսով, մեր ստացած (39), (40), (41) և (35) բանաձևերի համաձայն կարող ենք գրել

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} \cdot e^{-\gamma_n} \cdot (1+\beta_n)\cdot(1+\delta_n).$$

Բայց $e^{-\gamma_n}(1+\beta_n)(1+\delta_n)$ *մեծությունը ձգտում է 1-ի, երբ* $n \to \infty$. *Ուստի այն նշանակելով* $(1+\varepsilon_n)$*-ով, կստանանք*

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} (1+\varepsilon_n), \tag{42}$$

որտեղ $\varepsilon_n \to 0$, *երբ* $n \to \infty$:

Այստեղից

$$P_n(m) : \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}} = 1 + \varepsilon_n$$

և

$$\lim_{n\to\infty}\left[P_n(m) : \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}\right] = 1.$$

Արհամարհելով ε_n *մեծությունը միավորի համեմատությամբ, կստանանք հետևյալ մոտավոր բանաձևը՝*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}, \tag{43}$$

որն այնքան ավելի ճշգրիտ է, որքան մեծ է n *թիվը: (43) բանաձևը որն օգտագործվում է* $P_n(m)$ *հավանականությունը հաշվելու համար, երբ փորձերի* n *թիվը շատ մեծ է, կոչվում է* Լապլասի բանաձև: *Այստեղ նկատենք, որ երբ փորձերի* n *թիվը ձգտում է անվերջության,* $P_n(m)$ *հավանականությունը՝* m*-ի նկատմամբ հավասարաչափ, ձգտում է զրոյի, քանի որ (42)-ի մեջ երկրորդ բազմապատկիչը սահմանափակ է, իսկ առաջինը ձգտում է զրոյի:*

(43) բանաձևով հաշվումները կատարելիս գրում են հետևյալ ձևով՝

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}t^2}, \tag{44}$$

որտեղ, ինչպես առաջ,

$$t = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}, \tag{45}$$

Մտցնելով

$$Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \tag{46}$$

նշանակումը, կստանանք

$$P_n(m) \approx \frac{Y(t)}{\sqrt{npq}}: \tag{47}$$

Երբ տրված են n, p, q թվերը, նախ (45) բանաձևով հաշվում են t-ի արժեքը, ապա (46)-ով՝ $Y(t)$-ն և հետո միայն (47) բանաձևով $P_n(m)$-ի արժեքը։

$Y(t)$ ֆունկցիան, որը որոշվում է (46) բանաձևով, օժտված է հետևյալ հատկություններով. 1) $Y(t)$-ն դրական է t-ի բոլոր արժեքների համար, 2) $Y(t)$-ն զույգ ֆունկցիա է, այսինքն՝ $Y(-t) = Y(t)$, 3) $Y(t)$-ն t-ի նվազող ֆունկցիա է և ձգտում է զրոյի, երբ $t \to \infty$։

$Y(t)$ ֆունկցիայի արժեքը, երբ տրված է t-ի արժեքը, գտնում են I աղյուսակից։ Այդ աղյուսակի առաջին սյունակում տրված են t-ի արժեքները, իսկ երկրորդում՝ $Y(t)$-ի համապատասխան արժեքները։ Այդ աղյուսակից տեսնում ենք, որ երբ $t > 4$, կարելի է գործնականորեն ընդունել, որ $Y(t) = 0$։

Հաջորդ աղյուսակներում բերված են $P_n(m)$ հավանականությունները, որոնք հաշվված են (27) ճշգրիտ բանաձևով և $\overline{P}_n(m)$ հավանականությունները՝ հաշվված Լապլասի (43) մոտավոր բանաձևով, երբ $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, իսկ փորձերի թիվը՝ $n = 4, 25, 100$։ $P_n(m)$ և $\overline{P}_n(m)$ տարբերությունները, երբ $n = 4$ բավական մեծ են. նրանք անհամեմատ ավելի փոքր են, երբ $n = 25$ և ավելի փոքր, երբ $n = 100$։

Տվյալները վերցված են „Гнеденко. Курс теории вероятностей“ գրքից։

$n = 4$

m	P_m	$\overline{P}_m$
0	0,4096	0,3035
1	0,4096	0,4834
2	0,1536	0,1619
3	0,0256	0,0114
4	0,0016	0,0001

$n = 25$

m	P_m	$\overline{P}_m$	m	P_m	$\overline{P}_m$
0	0,0037	0,0098	8	0,0623	0,0648
1	0,0236	0,0270	9	0,0294	0,0270
2	0,0708	0,0698	10	0,0118	0,0088
3	0,1358	0,1210	11	0,0040	0,0022
4	0,1867	0,1760	12	0,0012	0,0004
5	0,1960	0,1994	13	0,0003	0,0001
6	0,1633	0,1760	14	0,0000	0,0000
7	0,1108	0,1210			

$n = 100$

m	P_m	$\overline{P}_m$	m	P_m	$\overline{P}_m$	m	P_m	$\overline{P}_m$
8	0,0006	0,0011	16	0,0638	0,0605	24	0,0577	0,0605
9	0,0015	0,0023	17	0,0788	0,0753	25	0,0439	0,0453
10	0,0034	0,0044	18	0,0909	0,0880	26	0,0316	0,0324
11	0,0069	0,0079	19	0,0981	0,0967	27	0,0217	0,0216
12	0,0127	0,0135	20	0,0993	0,0997	28	0,0141	0,0135
13	0,0206	0,0216	21	0,0946	0,0968	29	0,0088	0,0079
14	0,0335	0,0324	22	0,0849	0,0880	30	0,0052	0,0044
15	0,0481	0,0456	23	0,0720	0,0753	31	0,0029	0,0023

Բերված աղյուսակներից երևում է, որ տվյալ n*-ի համար* $P_n(m)$*-ի և* $\overline{P}_n(m)$*-ի միջև եղած տարբերությունները կախված են* m*-ից։ Քանի որ Լապլասի թեորեմը պահանջում է, որ* $\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ *մեծությունը լինի սահմանափակ, ուստի* $P_n(m)$*-ի և* $\overline{P}_n(m)$*-ի տարբերությունները կլինեն այնքան ավելի փոքր, որքան* m*-ը մոտ է* np*-ին։ Այսպես, առաջին օրինակում* $np = 0,8$ *և այդ տարբերությունը ամենափոքրն է* $m = 1$*-ի դեպքում. երկրորդ աղյուսակում* $np = 5$ *և այդ տարբերությունը ամենափոքրն է* $m = 5$*-ի դեպքում և, վերջապես, երրորդ աղյուսակում* $np = 20$ *և այդ տարբերությունը ամենափոքրն է* $m = 20$*-ի դեպքում։ Բերված երեք օրինակներում* p*-ն նույնն է, բայց* $P_n(m)$ *և* $\overline{P}_n(m)$ *մեծությունների տարբերությունները պետք է կախված լինեն* նաև p-ի արժեքից. թեորեմի մեջ պահանջվում է, որ p-ն տարբեր լինի զրոյից և մեկից. ապացույցից եզրակացնում ենք, որ ինչքան p-ն մոտ լինի զրոյին կամ մեկին, այնքան վերոհիշյալ տարբերությունները կլինեն ավելի մեծ, քանի որ ապացուցման մեջ քննարկվող զրոյի ձգտող մեծությունների արտահայտությունների մեջ p-ն և q-ն մտնում են նաև հայտարարում:

16. Մուավր-Լապլասի ինտեգրալային թեորեմը: Նկատի ունենալով, որ երբ $n \to \infty$, m-ի առանձին արժեքների հավանականությունները ձգտում են զրոյի (մեծ թվով փորձերի ժամանակ յուրաքանչյուր m-ը դառնում է քիչ հավանական), մեծ թվով n փորձերի ժամանակ A պատահարի m -անգամ իրականանալու հավանականությունը տվյալ դեպքում առանձին հետաքրքրություն չի ներկայացնում: Ավելի մեծ հետաքրքրություն է ներկայացնում մեծ թվով n փորձերի ժամանակ A պատահարի հանդես գալու m թվի որոշ սահմաններում գտնվելու հավանականությունը, որոնք, իհարկե, n-ի հետ միասին անվերջ աճում են:

Լապլասի ինտեգրալային թեորեմ: Եթե n անկախ փորձերում A պատահարի p հավանականությունը հաստատուն է և տարբեր է զրոյից ու մեկից ($0 < p < 1$), ապա

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz: \qquad (48)$$

Ապացուցենք այս թեորեմը, ենթադրելով, որ a և b թվերը վերջավոր են ու կախում չունեն n-ից: Դիտարկվող

$$a < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b$$

անհավասարությունները համարժեք են

$$np + a\sqrt{npq} < m < np + b\sqrt{npq}$$

անհավասարություններին, ուստի, նշանակելով

$$np + a\sqrt{npq} = m_a, \qquad np + b\sqrt{npq} = m_b,$$

կստանանք

$$P\left(a < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = P(m_a < m < m_b):$$

Դիտենք (m_a, m_b) միջակայքի ներսում գտնվող ամբողջ թվերը՝

$$m_a < \overline{m}_a < \overline{m}_a + 1 < \overline{m}_a + 2 < \dots < \overline{m}_b - 1 < \overline{m}_b < m_b:$$

Գումարման աքսիոմայի համաձայն կունենանք

$$P\left(a < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < b\right) = P(\overline{m}_a \leqslant m \leqslant \overline{m}_b) = \sum_{m=\overline{m}_a}^{\overline{m}_b} P_n(m)\text{:}$$

Քանի որ ենթադրության համաձայն բավարարված են Մուավր-Լապլասի թեորեմի բոլոր պայմանները, ապա եթե փորձերի n *թիվը բավականին մեծ է, կարելի է* $P_n(m)$ *հավանականությունները փոխարինել իրենց մոտավոր արժեքներով՝*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}},$$

որից հետո կստանանք հետևյալ մոտավոր հավասարությունը՝

$$P\left(a < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < b\right) \approx \sum_{m=\overline{m}_a}^{\overline{m}_b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}\text{:}$$

Նշանակենք

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

որտեղից

$$\Delta x = \frac{m+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\text{:}$$

Եթե $m = \overline{m}_a$, *ապա* $x = \dfrac{\overline{m}_a - np}{\sqrt{npq}} = \overline{a}$, *իսկ եթե* $m = \overline{m}_b$, *ապա* $x = \dfrac{\overline{m}_b - np}{\sqrt{npq}} = \overline{b}$, *ընդ որում*

$$0 \leqslant \overline{a} - a = \frac{\overline{m}_a - m_a}{\sqrt{npq}} < \frac{1}{\sqrt{npq}};\quad 0 \leqslant b - \overline{b} = \frac{m_b - \overline{m}_b}{\sqrt{npq}} < \frac{1}{\sqrt{npq}},$$

Որոնելի հավանականությունը x-*ի միջոցով կարտահայտվի հետևյալ կերպ՝*

$$P\left(a < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x=\overline{a}}^{\overline{b}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Delta x,$$

կամ երբ $n \to \infty$,

$$P\left(a < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{x=a}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}} \Delta x,$$

Ստացված գումարը $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ *ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարն է* (a, b) *միջակայքում. ուստի*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<b\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{x=a}^{b}e^{-\frac{x^2}{2}}\Delta x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Լուծելով փակագծերում գտնվող անհավասարությունները m-*ի նկատմամբ, կարելի է ստացված արդյունքը գրել՝*

$$\lim_{n\to\infty} P(np+a\sqrt{npq}<m<np+b\sqrt{npq})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx. \qquad (49)$$

Այսպիսով, եթե n անկախ փորձերի թիվը ձգտում է անվերջության, ապա

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

ինտեգրալին ձգտող հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ A պատահարի հանդես գալու m թիվը կգտնվի

$$np+a\sqrt{npq},\quad np+b\sqrt{npq}$$

թվերի միջև:

(48) սահմանային հավասարությունը, որը ապացուցված է այն դեպքի համար, երբ a-*ն և* b-*ն վերջավոր են, ուժի մեջ է մնում նաև այն դեպքում, երբ* $a\to-\infty$ *կամ* $b\to+\infty$, *ինչպես նաև այն դեպքում, երբ* $a\to-\infty$ *և* $b\to+\infty$, *այսինքն՝*

$$\lim_{n\to\infty}\left[P(np+a_n\sqrt{npq}<m<np+b_n\sqrt{npq})-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a_n}^{b_n}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right]=0, \qquad (50)$$

երբ $a_n\to-\infty$, $b_n\to+\infty$:

Լապլասի թեորեմից անմիջապես հետևում է հետևյալ մոտավոր բանաձևը՝

$$P(np+a\sqrt{npq}<m<np+b\sqrt{npq})\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx, \qquad (51)$$

որն այնքան ավելի ճշգրիտ է, որքան ավելի մեծ է փորձերի n *թիվը։*

Դիտարկելով

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\Phi(t) \qquad (52)$$

ինտեգրալը, որ վերին t *սահմանի ֆունկցիան է, կարելի է*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

ինտեգրալը ներկայացնել

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^0 e^{-\frac{1}{2}x^2}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^b e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^b e^{-\frac{1}{2}x^2}dx-\int_0^a e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\Phi(b)-\Phi(a)$$

տեսքով։

Այդ դեպքում (49) սահմանային հավասարությունը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$\lim_{n\to\infty}P(np+a\sqrt{npq}<m<np+b\sqrt{npq})=\Phi(b)-\Phi(a), \qquad (53)$$

իսկ (51) մոտավոր հավասարությունը այսպես՝

$$P(np+a\sqrt{npq}<m<np+b\sqrt{npq})\approx\Phi(b)-\Phi(a). \qquad (54)$$

$\Phi(t)$ *ֆունկցիան կոչվում է Լապլասի ֆունկցիա։*

Նշենք (52) բանաձևով տրված Լապլասի ֆունկցիայի մի քանի հատկությունները.

1. $\Phi(0)=0$*։*

2. Քանի որ $\Phi'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ *և t-ի բոլոր արժեքների համար այս ածանցյալը դրական է, ապա* $\Phi(t)$*-ն կլինի t-ի աճող ֆունկցիա։*

3. Գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝

$$\Phi(\infty) = \lim_{t\to\infty}\Phi(t) = \frac{1}{2}.$$

Իրոք, կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = u, \qquad dx = \sqrt{2}\, du,$$

$\Phi(t)$ ֆունկցիան կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} e^{-u^2} du.$$

բայց անալիզից հայտնի է, որ գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} e^{-u^2} du = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

որից անմիջականորեն բխում է մեր պնդումը։

4. $\Phi(t)$-ն կենտ ֆունկցիա է, այսինքն՝ $\Phi(-t) = -\Phi(t)$. Իրոք՝

$$\Phi(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du = -\Phi(t).$$

Այսպիսով, $\Phi(t)$-ն կենտ ֆունկցիա է, և երբ t-ն աճում է 0-ից մինչև $+\infty$, այդ ֆունկցիան աճում է 0-ից մինչև $\frac{1}{2}$։ $\Phi(t)$ ֆունկցիայի արժեքները՝ t-ի տարբեր թվային արժեքների համար, բերված են գրքի վերջում (II աղյուսակում)։ $\Phi(t)$ ֆունկցիայի չորրորդ հատկության հետևանքով աղյուսակում բերված են նրա արժեքները միայն t-ի դրական արժեքների համար։ Ըստ այդ աղյուսակի գտնում ենք, որ երբ $t = 4$, $\Phi(t) = 0{,}499968$, այնպես որ, երբ $t > 4$, գործնականում կարելի է ընդունել $\Phi(t) = \frac{1}{2}$։

Օրինակ 1. A պատահարի հավանականությունը յուրաքանչյուր առանձին փորձում հավասար է $\frac{3}{4}$-ի։ $n = 1000$ անկախ փորձերում որոշել պատահարի երևումների թվի՝ 700 և 850 թվերի միջև գտնվելու հավանականությունը։

Ըստ պայմանի $n = 1000,\; p = \frac{3}{4}, \quad q = \frac{1}{4}.$

$$a = \frac{700 - 750}{\sqrt{1000 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}} \approx -3{,}6, \qquad b = \frac{850 - 750}{\sqrt{1000 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}} = 7{,}2.$$

Հետևաբար, (53) բանաձևի համաձայն կունենանք

$$P(700 < m < 850) \approx \Phi(7{,}2) - \Phi(-3{,}6) = \Phi(7{,}2) + \Phi(3{,}6) = 0{,}9998:$$

Օրինակ 2. 1000 միատեսակ դետալների խմբից, որի մեջ 300-ը ունեն նորմայից դուրս չափեր, կազմվում է 300 դետալների վերադարձային վերցվածք: Ընտրված դետալների մեջ որոշել նորմայից դուրս չափեր ունեցող դետալների թվի՝ 70 և 110 թվերի միջև գտնվելու հավանականությունը:

Այստեղ $n = 300, \quad p = \frac{3}{10}, \qquad q = \frac{7}{10}.$

Հետևաբար՝ $np = 90, \; \sqrt{npq} \approx 8,$

$$a = \frac{70 - 90}{8} = -2{,}5, \qquad b = \frac{110 - 90}{8} = 2{,}5:$$

(53) բանաձևի համաձայն, II աղյուսակից օգտվելով, ստանում ենք

$$P(70 < m < 110) = 2\Phi(2{,}5) = 0{,}9876:$$

17. Բեռնուլիի թեորեմը: *Վերադառնանք (50) բանաձևին.*

$$\lim_{n \to \infty} \left[P(np + a_n \sqrt{npq} < m < np + b_n \sqrt{npq}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_n}^{b_n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] = 0,$$

որը կարելի է գրել և այսպես՝

$$\lim_{n \to \infty} \left[P\left(a_n \sqrt{\frac{pq}{n}} < \frac{m - np}{n} < b_n \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_n}^{b_n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] = 0: \tag{55}$$

Դիցուք $\varepsilon > 0$ *կամայական թիվ է. որոշենք* a_n*-ը և* b_n*-ը այնպես, որպեսզի*

$$b_n \sqrt{\frac{pq}{n}} = -a_n \sqrt{\frac{pq}{n}} = \varepsilon,$$

որտեղից

$$a_n = -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}, \qquad b_n = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}:$$

Այդ դեպքում (55) հավասարությունը կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$\lim_{n\to\infty}\left[P\left(-\varepsilon<\frac{m-np}{n}<\varepsilon\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right]=0$$

կամ

$$\lim_{n\to\infty}\left[P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)-2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\right]=0.$$

Այստեղից՝

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=2\Phi(\infty)=1, \qquad (56)$$

որը և կազմում է Հ. Բեռնուլիի թեորեմի բովանդակությունը։ Եթե անկախ փորձերի թիվը՝ n-ը, ձգտում է անվերջության, ապա միավորի ձգտող հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ պատահարի հանդես գալու հաճախության շեղումը նրա հանդես գալու հավանականությունից յուրաքանչյուր առանձին փորձում փոքր է նախապես տրված ցանկացած թվից։

Երբ n-ը բավականաչափ մեծ է, տեղի ունի հետևյալ մոտավոր բանաձևը՝

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right). \qquad (57)$$

Քննության առնենք այստեղ երեք տիպի խնդիրներ, որոնք տվյալ դեպքում կարող են ծագել։

Օրինակ 1. Պատահարի հավանականությունը յուրաքանչյուր առանձին փորձի ժամանակ հաստատուն է և հավասար է 0,6-ի։ Կատարում են $n=800$ փորձ։ Որոշել այն հավանականությունը, որ պատահարի երևան գալու հաճախության շեղումը նրա երևան գալու հավանականությունից չի գերազանցում $\varepsilon=0{,}03$-ից։ Օգտվելով (57) հավասարությունից, ստանում ենք

$$P\left\{\left|\frac{m}{800}-0{,}6\right|<0{,}03\right\}\approx 2\Phi\left(\frac{0{,}03\cdot\sqrt{800}}{\sqrt{0{,}6\cdot 0{,}4}}\right),$$

որտեղ

$$2\Phi\left(\frac{0{,}03\sqrt{800}}{\sqrt{0{,}6\cdot 0{,}4}}\right)=2\Phi(1{,}72)=0{,}9146.$$

Այսպիսով

$$P\left\{\left|\frac{m}{800}-0{,}6\right|<0{,}03\right\}\approx 0{,}9146.$$

Օրինակ 2. Պատահարի հանդես գալու հավանականությունը յուրաքանչյուր առանձին փորձի ժամանակ հաստատուն է և հավասար է 0,4-ի։ Առնվազն քանի՞ փորձ պետք է կատարել, որպեսզի 0,9 հավանականությամբ կարելի լինի պնդել, որ պատահարի երևան գալու հաճախությունը յուրաքանչյուր առանձին փորձում նրա հանդես գալու հավանականությունից շեղվում է ոչ շատ, քան 0,02-ով։ Այստեղ $p=0{,}4$, $q=0{,}6$, $\varepsilon=0{,}02$ *և* $2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)=0{,}9$։ II *աղյուսակից գտնում ենք*

$$\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}=1{,}65$$

կամ

$$\frac{0{,}02\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}4\cdot 0{,}6}}=1{,}65,$$

որտեղից $n=1643$։

Օրինակ 3. Պատահարի երևան գալու հավանականությունը յուրաքանչյուր առանձին փորձի ժամանակ հավասար է 0,7-ի. կատարվում են $n=1000$ *անկախ փորձեր։ Պատահարի հանդես գալու հաճախության ինչպիսի՞ առավելագույն շեղում կարելի է սպասել նրա հանդես գալու հավանականությունից յուրաքանչյուր առանձին փորձում՝ 0,95 հավանականությամբ։*

$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)=0{,}95$ *հավասարությունից ունենք* $\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)=0{,}475$, *և* II *աղյուսակից* $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}=1{,}96$. ε*-ը կարելի է գտնել հետևյալ հավասարությունից՝*

$$\frac{\varepsilon\sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}7\cdot 0{,}3}}=1{,}96,$$

որը լուծելով, ստանում ենք $\varepsilon=0{,}025$։

18. Պուասոնի թեորեմը: *Մուավր-Լապլասի և Լապլասի ինտեգրալային թեորեմների մեջ ենթադրվում էր, որ* A *պատահարի* p *հավանականությունը յուրաքանչյուր փորձում կախում չունի* n*-ից. այստեղ կքննարկենք այն դեպքը, երբ* p*-ն, անկախ միևնույն փորձի համարից, ձգտում է զրոյի, երբ փորձերի թիվը ձգտում է անվերջության։ Վերցնենք փորձերի տարբեր սերիաներ. առաջին սերիան բաղկացած է* $n=1$ *փորձից, երկրորդը՝* $n=2$ *փորձից, երրորդը՝* $n=3$ *փորձից, ընդհանրապես* n*-րդ սերիան բաղկացած է* n *փորձերից։ Առաջին սերիայի միակ փորձում* A *պատահարի հավանականությունը՝* $P(A)=$

$= p = \frac{a}{1}$, *երկրորդ սերիայի յուրաքանչյուր փորձում A պատահարի հավանականությունը՝* $P(A) = p = \frac{a}{2}$, *և այլն, n-րդ սերիայի յուրաքանչյուր փորձում A պատահարի հավանականությունը՝*

$$P(A) = p = \frac{a}{n}.$$

այստեղ $a > 0$ *հաստատուն է։*

Պուասոնի թեորեմը։ Եթե պատահարի հավանականությունը n անկախ փորձերից բաղկացած սերիայի յուրաքանչյուր փորձում նույնն է և հավասար $\frac{a}{n}$-ի $(a > 0)$, ապա այդ պատահարի n փորձերում m անգամ հանդես գալու հավանականությունը կձգտի $e^{-a}\frac{a^m}{m!}$ սահմանին, երբ $n \to \infty$։

Իրոք, օգտվելով (26) բանաձևից, ստանում ենք

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{a^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}։$$

Եթե փորձերի թիվը՝ n-ը, ձգտում է անվերջության, ապա $\frac{a^m}{m!}$ *բազմապատկիչը մնում է անփոփոխ,* $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$ *բազմապատկիչը ձգտում է միավորի,* $\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}$ *բազմապատկիչը նույնպես ձգտում է միավորի, իսկ* $\left(1-\frac{a}{n}\right)^n$ *բազմապատկիչը ձգտում է* e^{-a}*-ի։ Ուրեմն*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = e^{-a}\frac{a^m}{m!}։ \qquad (58)$$

Այսպիսով, A պատահարի՝ փորձերի անսահման շարքում ուղիղ m անգամ հանդես գալու հավանականությունը կլինի

$$P_m = e^{-a}\frac{a^m}{m!}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

և բնական է, որ

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m = e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!} = e^{-a}\cdot e^{a} = 1,$$

քանի որ նշված m-ի արժեքները անհամատեղելի են և կազմում են լրիվ խումբ:

Պատահարի երևումների թվի՝ a և b ամբողջ, ոչ բացասական թվերի միջև գտնվելու հավանականությունը հավանականությունների գումարման թեորեմի համաձայն կլինի

$$P(a \leqslant m \leqslant b) = P_n(a) + P_n(a+1) + \dots + P_n(b) = \sum_{m=a}^{b} P_n(m)$$

կամ, անցնելով սահմանի, երբ $n \to \infty$, կստանանք.

$$\lim_{n \to \infty} P(a \leqslant m \leqslant b) = \sum_{m=a}^{b} e^{-a} \frac{a^m}{m!}:$$

Գործնականում Պուասոնի թեորեմը ամեն անգամ կիրառվում է n անկախ փորձերի ժամանակ պատահարի m անգամ տեղի ունենալու $P_n(m)$ հավանականությունը որոշելու համար, երբ փորձերի թիվը բավականաչափ մեծ է, իսկ պատահարի հավանականությունը, յուրաքանչյուր փորձի ժամանակ բավականաչափ փոքր: Այս դեպքում ընդունում են

$$P_n(m) \approx e^{-a} \frac{a^m}{m!}, \qquad (59)$$

իսկ

$$P(a \leqslant m \leqslant b) \approx \sum_{m=a}^{b} e^{-a} \frac{a^m}{m!}, \qquad (60)$$

որտեղ $a = np$:

Օրինակ 1. Մեքենաների դետալներ պատրաստելիս խոտանի միջին տոկոսը ձեռնարկությունում կազմում է 0,2%: Ինչպիսին է պատահական ձևով վերցված 500 դետալներից մեկի խոտան լինելու հավանականությունը:

Այստեղ $p = \frac{0,2}{100} = \frac{1}{500}$, $\quad a = np = \frac{500}{500} = 1.$

ապա (59) բանաձևի համաձայն որոնելի հավանականությունը կլինի

$$P_1 = e^{-1} = \frac{1}{e^1} \approx 0,368.$$

Օրինակ 2. Դետալներ պատրաստելիս խոտանի միջին տոկոսը տվյալ գործարանում կազմում է 0,5%: Որոշել այն հավանակաթյունը, որ պատահական ձևով վերցված 500 դետալների մեջ խոտան դետալների թիվը չի անցնում 4-ից։

Ունենք $p = \frac{1}{200}$, $n = 500$, $a = 2{,}5$, *հետևաբար (60) բանաձևի համաձայն կունենանք.*

$$P(m \leqslant 4) = P(m = 0 \cup m = 1 \cup m = 2 \cup m = 3 \cup m = 4) =$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = e^{-2,5} + \frac{5}{2} e^{-2,5} + \frac{25}{2} e^{-2,5} + \frac{125}{48} e^{-2,5} +$$

$$+ \frac{625}{384} e^{-2,5} \approx 0{,}867.$$

19. Խնդիրներ

1. Զառը նետված է 5 անգամ։ Գտնել երեքի բազմապատիկ թվի երկու անգամ հանդես գալու հավանականությունը։

2. Արտադրության մեջ խոտանը կազմում է ամբողջ արտադրանքի 5 տոկոսը։ Գտնել պատահաբար վերցված հինգ շինվածքի մեջ ա) խոտան չլինելու հավանականությունը, բ) երկուսի խոտան լինելու հավանականությունը։

3. Բաց թողած իրերի 1 տոկոսը խոտան է։ Գտնել 200 իրերից երեքից ավելի իրերի խոտանված լինելու հավանականությունը։

4. Ձեռնարկության արտադրած մեքենամասերի 2 տոկոսը խոտան է։ Գտնել 500 մեքենամասերից երեքից ոչ ավելի մեքենամասերի խոտանված լինելու հավանականությունը։

5. Թիրախը մեկ կրակոցով խոցելու հավանականությունը հավասար է 0,8-ի։ Գտնել 100 կրակոցի դեպքում թիրախը 75 անգամ խոցելու հավանականությունը։

6. Գտնել 100 նորածին երեխաներից 50-ի տղա լինելու հավանականությունը, եթե տղա ծնվելու հավանականությունը հավասար է 0,52-ի։

7. Որոշել այն սահմանները, որոնց միջև 0,9425 հավանականությամբ գտնվում է խոտանված իրերի m թիվը, եթե ստուգում են 475 իր, որոնցից յուրաքանչյուրի խոտանվելու հավանականությունը հավասար է 0,05-ի։

8. Խաղացողը շահում է 7 ռուբլի, եթե զառի վրա բացվում է վեց միավորը, և վճարում է 1 ռուբլի՝ հակառակ դեպքում. $p = 0{,}999936$ հավանականությամբ ինչպիսի՞ սահմաններում կգտնվի նրա շահած S գումարը, եթե զառը նետված է $n = 8000$ անգամ։

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՆՐԱ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ

20. Պատահական մեծություն: *Պատահական մեծությունը մի մեծություն է, որը փորձի ժամանակ պատահականորեն ընդունում է որևէ արժեք իր հնարավոր արժեքների բազմությունից. տարբեր փորձերում, որոնք ընթանում են նույն պայմաններում, այն կարող է ընդունել տարբեր արժեքներ: Պատրաստի դետալների խմբից վերցրած պատահական դետալի չափը, նետված զառի վրա հանդես եկած կետերի թիվը, հեռախոսակայանի, տվյալ օրվա կանչերի թիվը, ռադիոլամպի ծառայության ժամկետը, վիճակախաղի տվյալ տոմսով շահած գումարը պատահական մեծություններ են:*

Որպեսզի պատահական մեծությունը լինի հավանականությունների տեսության ուսումնասիրման առարկա, պետք է տրված լինեն այդ պատահական մեծության հնարավոր արժեքների բազմությունը և այդ արժեքներին համապատասխանող հավանականությունները. այդ դեպքում ասում են, որ տրված է պատահական մեծության հավանականությունների բաշխումը:

Ընդհանրապես, X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխումը տրվում է որևէ F(x) ֆունկցիայի միջոցով, որը X մեծության՝ x-ից ավելի փոքր արժեք ընդունելու հավանականությունն է, այսինքն՝ X<x պատահարի հավանականությունը.

$$F(x) = P(X<x), \quad -\infty < x \leq +\infty: \qquad (61)$$

Այս F(x) ֆունկցիան կոչվում է X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիա:

Այսպիսով, պատահական մեծությունը մի մեծություն է, որը իր հնարավոր արժեքների բազմությունից պատահականորեն ընդունում է որևէ մեկը և որի համար որոշված է հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան:

Օրինակ: Բեռնուլիի n փորձերում A պատահարի հանդես գալու m թիվը պատահական մեծություն է, քանի որ այդ փորձերում պատահականորեն կարող է ընդունել 0, 1, 2, ..., n թվերից որևէ մեկը և նրա համար որոշված է հավանականությունների F(x) բաշխման ֆունկցիան՝

$$F(x) = \sum_{m<x} P_n(m),$$

որտեղ $P_n(m)$-ը արտահայտվում է (26) բանաձևով:

Հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ հատկությունները.

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ *որպես հավանականություն։*

2. $F(x)$*-ը* x*-ի չնվազող ֆունկցիա է, այսինքն՝ ցանկացած* x_1 *և* x_2 *թվերի համար* $x_1 < x_2$*-ից բխում է, որ* $F(x_1) \leqslant F(x_2)$*։ Իրոք,* X *պատահական մեծության արժեքը՝* x_2*-ից ավելի փոքր լինելու հավանականությունը, գումարման թեորեմի համաձայն կլինի՝*

$$P(X < x_2) = P(X < x_1 \cup x_1 \leqslant X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leqslant X < x_2)$$

կամ

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leqslant X < x_2),$$

որտեղից

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (62)$$

այսինքն՝ պատահական մեծության՝ տվյալ ինտերվալի մեջ ընկնելու հավանականությունը հավասար է հավանականությունների բաշխման ֆունկցիայի աճին այդ ինտերվալում:

Քանի որ պատահարի հավանականությունը չի կարող բացասական թիվ լինել, ուրեմն (62) բանաձևից հետևում է, որ $F(x_1) \leqslant F(x_2)$*, երբ* $x_1 < x_2$*, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։*

3. Հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան անընդհատ է ձախից, այսինքն՝

$$F(x - 0) = F(x):$$

Ապացուցումը բաց ենք թողնում։

4. $F(-\infty) = 0$*, քանի որ* $F(-\infty) = P(X < -\infty)$*, իսկ* $X < -\infty$ *պատահարը անհնար է։*

5. $F(+\infty) = 1$*, քանի որ* $F(+\infty) = P(X < +\infty)$*, իսկ* $X < +\infty$ *պատահարը հավաստի է։*

Երկրորդ հատկությունից հետևում է, որ

$$P(X = x) = F(x + 0) - F(x), \qquad (63)$$

քանի որ

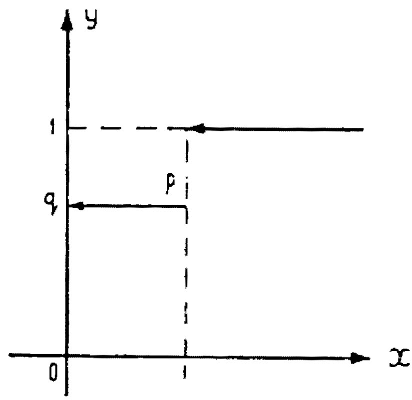
$$P(X = x) = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} P(x \leqslant X < x + \alpha) = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha \geqslant 0}} [F(x + \alpha) - F(x)] = F(x + 0) - F(x):$$

Այստեղից երևում է, որ երբ x-ը F(x) ֆունկցիայի անընդհատության կետ է, X պատահական մեծության՝ այդ x արժեքը ընդունելու հավանականությունը հավասար է զրոյի, իսկ եթե x-ը F(x) ֆունկցիայի խզման կետ է, X պատահական մեծության՝ այդ x արժեքը ընդունելու հավանականությունը հավասար է F(x) ֆունկցիայի թռիչքին այդ կետում։

Եթե F(x) ֆունկցիան անընդհատ է ամենուրեք, X պատահական մեծության որևէ արժեք, օրինակ, $X=x$ արժեքը, ընդունելու հավանականությունը, վերը ասվածի համաձայն, հավասար է զրոյի։ Բայց դրանից չի հետևում, որ $X=x$ պատահարն անհնար է, քանի որ եթե $X=x$ պատահարը լիներ անհնար x-ի բոլոր արժեքների համար, կստացվեր, որ պատահական մեծությունը չէր կարողանա ընդունել իր արժեքներից ոչ մեկը, ինչը իհարկե անհեթեթություն է։

Այսպիսով, X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման F(x) ֆունկցիան հանդիսանում է ձախից անընդհատ չնվազող ֆունկցիա, որը բավարարում է $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$ պայմաններին։

Հակադարձաբար յուրաքանչյուր չնվազող ձախից անընդհատ G(x) ֆունկցիան, որը բավարարում է $G(-\infty)=0$ և $G(+\infty)=1$ պայմաններին, հանդիսանում է որևէ պատահական X մեծության բաշխման ֆունկցիա։ Այդ պատճառով կհամարենք, որ պատահական մեծությունը տրված է, եթե տրված է նրա հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան։



Նկ. 9

Եթե X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան բավարարում է $F(x)=0$ պայմանին, երբ $x\leq a$, և $F(x)=1$, երբ $x>b$, պետք է ասենք, որ X պատահական մեծությունը բաշխված է $[a, b]$ միջակայքում։

Որպես օրինակ կառուցենք X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան, եթե այդ մեծության հավանականությունների բաշխումն է

$$P(X=0)=q,\ P(X=1)=p,\ p+q=1.$$

Բաշխման ֆունկցիայի սահմանման համաձայն ունենք

$$F(x)=0, \quad \text{երբ } x\leq 0,$$
$$F(x)=1, \quad \text{երբ } x>1,$$

իսկ եթե $0<x\leq 1$, ապա

$$F(x)=P(X<x)=P(X=0)=q։$$

Այդ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի գրաֆիկը ներկայացված է նկ. 9-ում։ Բաշխման ֆունկցիան ունի առաջին կարգի խզում $x=0$ և $x=1$ կետերում, ընդ որում թռիչքներն այդ խզման կետերում համապատասխանաբար հավասար են q և p հավանականություններին։

Տանք նաև պատահական մեծության խիստ սահմանումը։ Դիցուք տրված փորձին համապատասխանում է (Ω, F, P) հավանականային տարածությունը։ Ամեն մի ω էլեմենտար պատահարի՝ Ω բազմությունից, համապատասխանեցնենք մի իրական X թիվ, այսինքն՝ դիտարկենք մի

$$X=X(\omega),\qquad \omega\in\Omega$$

իրական ֆունկցիա՝ որոշված Ω բազմության վրա։ $X=X(\omega)$ մեծությունը կոչվում է պատահական, եթե այն F չափելի ֆունկցիա է Ω բազմության վրա, այսինքն՝ եթե այն ω էլեմենտար պատահարների A_x բազմությունը, որոնց համար տեղի ունի $X(\omega)<x$ անհավասարությունը, պատկանում է F բորելյան դաշտին՝

$$A_x=\{\omega:\quad X(\omega)<x\}\in F,$$

և հետևաբար ունի

$$P(A_x)=P(X(\omega)<x)$$

հավանականությունը։ Հենց այդ հավանականությունը մենք անվանեցինք X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիա։

Նորից վերադառնանք Բեռնուլիի փորձերում A պատահարի հանդես գալու m թվին։ Ցույց տանք, որ նա պատահական մեծություն է և այս իմաստով։ Դիցուք կատարվում են n անկախ փորձեր և $P(A)=p$ ամեն մի առանձին փորձում։ Կառուցենք այդ n փորձերին վերաբերող հավանականային տարածությունը։ Ω էլեմենտար պատահարների բազմության էլեմենտները՝

$$\omega=A\bar{A}\bar{A}A\bar{A}AA\cdots\bar{A},$$

կլինեն A և $\bar{A}$ պատահարներից կազմված n երկարություն ունեցող 2^n հաջորդականությունները։ Յուրաքանչյուր ω պատահարի հավանականությունը հավասար է նրա մեջ մտնող պատահարների հավանականությունների արտադրյալին։ Բորելյան F դաշտը կառուցենք որպես այդ էլեմենտար պատահարների բազմության բոլոր ենթաբազմությունների-

րի բազմություն: Այդ դաշտի բոլոր պատահարների համար որոշված կլինի P հավանականությունը:

Այժմ յուրաքանչյուր ω էլեմենտար պատահարի համապատասխանեցնենք մի $m=m(\omega)$ ֆունկցիա, որը A պատահարի հանդես գալու թիվն է այդ հաջորդականության մեջ: Բոլոր այն հաջորդականությունների բազմությունը, որտեղ $m(\omega)=k$, պատկանում է F-ին, և ունի $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ հավանականությունը. F-ին է պատկանում նաև այն հաջորդականությունների ω բազմությունը, որոնց համար $m(\omega)<x$, քանի որ F-ը դաշտ է և $\{\omega: m(\omega)<x\}=\bigcup_{k<x}\{\omega: m(\omega)=k\}$: Վերջին պատահարն ունի $\sum_{k<x} P_n(k)$ հավանականությունը: Այսպիսով, $m=m(\omega)$ մեծությունը պատահական մեծություն է:

21. Դիսկրետ պատահական մեծություն: Դիսկրետ պատահական մեծություն կոչվում է այն պատահական մեծությունը, որի հնարավոր արժեքների բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի*: *Նետված զառի վրա բացվող կետերի թիվը, n փորձերում պատահարի հանդես գալու թիվը, որևէ սպասարկման սիստեմում (խանութ, վարսավիրանոց) մեկ օրվա ընթացքում ներկայացված պահանջների թիվը, դիսկրետ պատահական մեծություններ են:)*

Դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենք կոչվում է պատահական մեծության բոլոր հնարավոր արժեքների և համապատասխան հավանականությունների համախմբությունը: *Եթե X պատահական մեծության հնարավոր արժեքները նշանակենք*

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\ \cdots,$$

իսկ համապատասխան հավանականությունները՝

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots,$$

ընդ որում

$$p_n=P(X=x_n),\quad n=1,2,3,\cdots n,\cdots, \qquad (64)$$

ապա X պատահական մեծության բաշխման օրենքը կարելի հետևյալ աղյուսակով՝

$$\frac{X\,|\,x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n,\ \cdots}{P\,|\,p_1,\ p_2,\ \cdots\ p_n,\ \cdots}, \qquad (65)$$

---

* *Բազմությունը անվանում են հաշվելի, եթե նրա էլեմենտները կարելի է համարակալել:*

Պարզ է, որ p_n *հավանականությունները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝*

$$0 \leq p_n \leq 1 \tag{66}$$

և

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1, \tag{67}$$

քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$*-ը այն պատահարի հավանականությունն է, որ* X*-ը կընդունի իր հնարավոր արժեքներից որևէ մեկը, իսկ այդ պատահարը հավաստի է։*

Ճիշտ է և հակադարձ պնդումը. եթե q_n *թվերի հաջորդականությունը բավարարում է*

$$0 \leq q_n \leq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n = 1$$

պայմաններին, ապա q_n *թվերի հաջորդականությունը կազմում է որևէ դիսկրետ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխումը։*

Օրինակ 1. Նետված զառի վրա բացված կետերի թիվը պատահական մեծություն է, որի բաշխման օրենքը տրվում է հետևյալ աղյուսակով՝

X	1,	2,	3,	4,	5,	6
P	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{6}$

Օրինակ 2. Բեռնուլիի փորձերում A *պատահարի հանդես գալու* m *թիվը դիսկրետ պատահական մեծություն է, որի բաշխման օրենքը տրվում է հետևյալ աղյուսակով՝*

m	0,	1,	2,	...	n − 1,	n
p	q^n,	npq^{n-1},	$\frac{n(n-1)}{2!}p^2q^{n-2}$,	...	$np^{n-1}q$,	p^n

Ստացված հավանականությունների բաշխումը կոչվում է հավանականությունների բինոմական բաշխում: *Բինոմական բաշխման օրենքը պարունակում է* p *և* n *պարամետրեր, որտեղ* p*-ն* A *պատահարի հավանականությունն է ամեն մի առանձին փորձում, իսկ* n*-ը փորձերի թիվն է։*

Օրինակ 3. X պատահական մեծությունն ունի Պուասոնի հավանականությունների բաշխումը, եթե նրա բաշխման օրենքը տրվում է հետևյալ աղյուսակով՝

X	0,	1,	2,	3,	…	n,	…
P	e^{-a},	ae^{-a},	$\frac{a^2}{2!}e^{-a}$,	$\frac{a^3}{3!}e^{-a}$,	…	$\frac{a^n}{n!}e^{-a}$,	…

որտեղ՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-a}\frac{a^n}{n!} = e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!} = e^{-a}\cdot e^{a} = 1,$$

$$0 < e^{-a}\cdot\frac{a^n}{n!} < 1:$$

Պուասոնի հավանականությունների բաշխման օրենքը պարունակում է մեկ պարամետր՝ $a>0$: Ինչպես ցույց տվեցինք, Պուասոնի բաշխման օրենքը բինոմական բաշխման օրենքի սահմանն է, երբ $n\to\infty$ և $p = \frac{a}{n}$,

Եթե տրված է դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը (65), նրա $F(x) = P(X<x)$ հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան որոշվում է

$$F(x) = \sum_{x_n < x} p_n \qquad (68)$$

բանաձևով, որտեղ գումարումը տարածված է n-ի այն բոլոր արժեքների վրա, որոնց համապատասխանող x_n-ը փոքր է x-ից: Իրոք, $F(x)$-ը, որը $X<x$ պատահարի հավանականությունն է, գումարման աքսիոմայի համաձայն հավասար է այն բոլոր x_n արժեքների հավանականությունների գումարին, որոնք փոքր են x-ից: Օրինակ, բինոմական բաշխում ունեցող պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան՝

$$F(x) = \sum_{m<x} C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (69)$$

Պուասոնի բաշխում ունեցող պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան՝

$$F(x) = \sum_{n<x} e^{-a}\frac{a^n}{n!}, \qquad (70)$$

Երբ, օրինակ, X պատահական մեծության հնարավոր արժեքների բազմությունը վերջավոր է՝

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

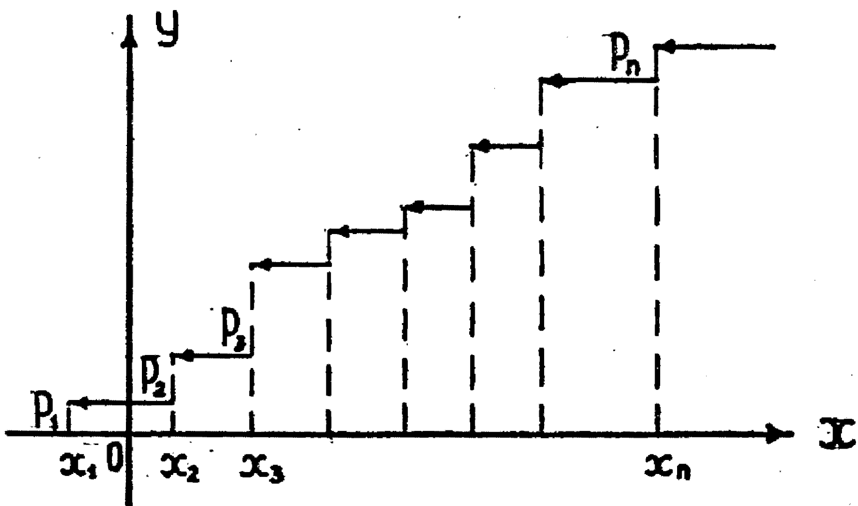
և տրված է նրա բաշխման օրենքը՝

$$\frac{X \mid x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n}{P \mid p_1,\ p_2,\ \cdots\ p_n},$$

Նրա F(x) բաշխման ֆունկցիան ըստ (68) բանաձևի մանրամասնորեն կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant x_1 \\ p_1 & x_1 < x \leqslant x_2 \\ p_1 + p_2 & x_2 < x \leqslant x_3 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_k & x_k < x \leqslant x_{k+1} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 & x > x_n, \end{cases}$$

Դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի գրաֆիկը կունենա նկ. 10-ում պատկերված տեսքը։



Նկ. 10

Ընդհանրապես դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ հատկությունները՝

1) նրա գրաֆիկը աստիճանաձև գիծ է,

2) խզվում է $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ կետերում,

3) երկու հարևան խզման կետերի միջև պահպանում է հաստատուն արժեք։

(68) բանաձևից եզրակացնում ենք, որ դիսկրետ պատահական մեծությունը տրված է, երբ տրված է նրա բաշխման օրենքը։

22. Անընդհատ պատահական մեծություն։ Դիցուք $F(x)$-ը X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է։ Եթե այդ $F(x)$ ֆունկցիան ունի $f(x)$ անընդհատ ածանցյալ, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է այդ X մեծության հավանականությունների բաշխման խտություն (երբեմն նաև X մեծության դիֆերենցիալ բաշխման ֆունկցիա)։ Պատահական մեծությունը կանվանենք անընդհատ պատահական մեծություն, եթե նրա համար գոյություն ունի խտություն։

Որոշենք $f(x)$ ֆունկցիայի հատկությունները։

1) Քանի որ $F(x)$-ը չնվազող ֆունկցիա է և

$$f(x) = F'(x), \qquad (71)$$

ուստի հավանականությունների բաշխման $f(x)$ խտությունը միշտ ոչ բացասական է՝ $f(x) \geq 0$։

2) (71)-ից ունենք

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx + C,$$

որտեղից, երբ $x \to -\infty$, ստանում ենք $C = 0$, քանի որ $F(-\infty) = 0$ և այդ պատճառով

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \qquad (72)$$

3) Քանի որ $F(+\infty) = 1$, ուստի

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1,$$

այսինքն՝ հավանականությունների բաշխման խտության ինտեգրալը տարածված ամբողջ թվային առանցքի վրա հավասար է 1-ի։

4) Հատկություն 3-ից հետևում է, որ $f(x)$*-ը ձգտում է զրոյի, երբ* $x \to \pm\infty$։

5) Վերջապես, (63) և (71) բանաձևերից հետևում է, որ

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \tag{73}$$

Ակներև է, որ ամեն մի ոչ բացասական $g(x)$ *անընդհատ ֆունկցիա, որը բավարարում է*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1$$

պայմանին, հանդիսանում է որևէ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտություն։

Այժմ, (73) բանաձևով հաշվելով $P(x \leqslant X < x + \Delta x)$ *հավանականությունը, կունենանք*

$$P(x \leqslant X < x + \Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\,dx = f(\xi)\Delta x,$$

որտեղ ξ*-ն գտնվում է* x*-ի և* $(x + \Delta x)$*-ի միջև, կամ*

$$P(x \leqslant X < x + \Delta x) = f(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x,$$

որտեղ ε*-ը ձգտում է զրոյի, երբ* $\Delta x \to 0$։ *Այսպիսով* Δx*-ի համեմատությամբ բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ճշտությամբ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝*

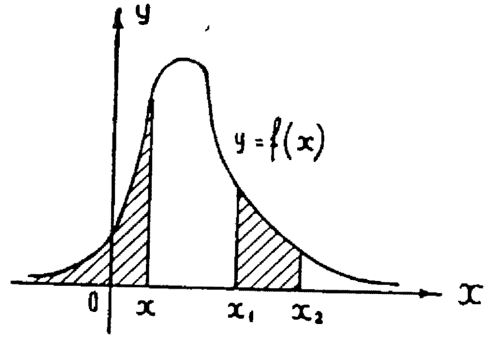
$$P(x \leqslant X < x + \Delta x) = f(x)dx, \tag{74}$$

որը հաստատում է, որ պատահական մեծության $(x, x + \Delta x)$ փոքր ինտերվալում ընկնելու հավանականությունը հավասար է x կետում հավանականությունների բաշխման խտությանը՝ բազմապատկած այդ ինտերվալի երկարությամբ։ $f(x)\Delta x$ մեծությունը կոչվում է էլեմենտար հավանականություն։

Եթե $f(x)$*-ը մասսաների բաշխման գծային խտությունն է, ապա* $(x, x + \Delta x)$ *ինտերվալում մասսան նույնպես մոտավորապես կարտահայտվի* $f(x) \cdot \Delta x$ *արտադրյալով։ Այսպիսով, որոշ նմանություն գոյու-*

թյուն ունի միաչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտության և մասսաների բաշխման գծային խտության միջև:

Եթե պատահական մեծությունը բաշխված է [a, b] միջակայքում, ապա նրա հավանականությունների բաշխման խտությունը այդ միջակայքից դուրս հավասար կլինի զրոյի: Երբ հավանականությունների բաշխման խտությունը գոյություն ունի [a, b] միջակայքի ներսում, և երբ $x = a$ և $x = b$ դադարում է գոյություն ունենալուց, այդպիսի X պատահական մեծությունը նույնպես կհամարենք անընդհատ:



Նկ. 11

Հավանականությունների բաշխման խտության մեր նշած հատկությունների հիման վրա կարելի է եզրակացնել, որ նրա գրաֆիկը, այսինքն՝ $y = f(x)$ կորը դասավորված կլինի X-երի առանցքից վերև, և X առանցքը կլինի այդ կորի ասիմպտոտը: Կորով և X-երի առանցքով սահմանափակված ամբողջ մակերեսը հավասար կլինի միավորի:

$x_1 \leq X < x_2$ անհավասարության իրականացման հավանականությունը թվապես կարտահայտվի այն կորագիծ սեղանի մակերեսով, որը սահմանափակված է այդ կորով, X-երի առանցքով, $X = x_1$ և $X = x_2$ ուղիղներով: Իսկ, վերջապես, $F(x)$-ը թվապես հավասար կլինի այն մակերեսին, որ սահմանափակված է այդ կորով, X-երի առանցքով և $X = x$ ուղիղով:

$y = F(X)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կարող է ունենալ, օրինակ, այն տեսքը, որ ցույց է տրված նկ. 11-ում:

Հավանականությունների բաշխման խտության այսպես կառուցված գրաֆիկը կոչվում է հավանականությունների կոր:

Օրինակ 1. Տրված է X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{x^3}{4} & -1 < x \leq 1, \\ 1 & x > 1: \end{cases}$$

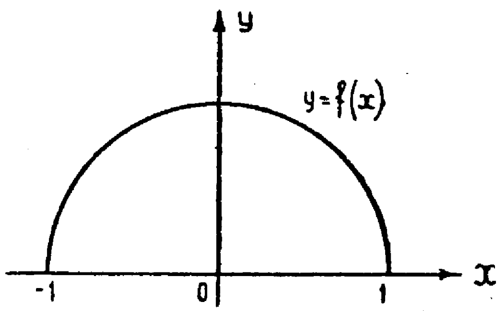
Որոշել այդ մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը և $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ միջակայքում ընկնելու հավանականությունը։

F(x)-*ը դիֆերենցելով, ստանում ենք*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 & -1 < x < 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

Իսկ որոնելի հավանականությունը ըստ (63) բանաձևի կլինի

$$P\left(0 \leqslant X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{32}\right) - \frac{1}{2} = \frac{11}{32},$$



Նկ. 12

Հավանականությունների կորը պատկերված է Նկ. 12-ում։

Օ ր ի ն ա կ 2. Ենթադրենք, թե ռադիոլամպի ծառայության X *ժամկետի հավանականությունների բաշխման խտությունն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ Cxe^{-x} & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Որոշել X *մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան և լամպի ծառայության ժամկետի՝ ժամանակի 2 և 4 միավորների միջև գտնվելու հավանականությունը։*

Նախ որոշենք C-*ն հետևյալ պայմանից՝*

$$C \cdot \int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx = 1.$$

հաշվելով ինտեգրալը, կստանանք

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx = -x \cdot e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1,$$

որտեղից $C = 1$։ *Այժմ գտնենք հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան։ Համաձայն (72) բանաձևի, երբ* $x > 0$, *կունենանք*

$$F(x) = \int_0^x xe^{-x}\,dx = -x \cdot e^{-x}\Big|_0^x + \int_0^x e^{-x}\,dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + 1,$$

հետևաբար՝

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}(x+1) & x > 0։ \end{cases}$$

$F(x)$-*ը լամպի՝ ժամանակի* x *միավորից ավելի քիչ ծառայելու հավանականությունն է, իսկ որոնելի հավանականությունը համաձայն (73) բանաձևի կլինի*

$$P\left(2 < x < 4\right) = \int_2^4 x \cdot e^{-x}\,dx = \left(-x \cdot e^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_2^4 =$$

$$= \frac{-4}{e^4} - \frac{1}{e^4} + \frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^2} = \frac{3}{e^2} - \frac{5}{e^4} = \frac{3e^2-5}{e^4},$$

Բացի դիսկրետ և անընդհատ պատահական մեծություններից, գոյություն ունեն նաև այլ տիպի պատահական մեծություններ. օրինակ, այնպիսի պատահական մեծություններ, որոնց հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան անընդհատ է, բայց դիֆերենցելի չէ։ Կիրառությունների մեջ հանդիպում ենք հիմնականում դիսկրետ և անընդհատ պատահական մեծությունների, այդ պատճառով այստեղ կուսումնասիրենք միայն այդպիսի մեծությունները։

23. Հավանականությունների մի քանի անընդհատ բաշխումներ: 1) Հավանականությունների հավասարաչափ բաշխումը: Պատահական մեծությունը [a, b] միջակայքում ունի հավանականությունների հավասարաչափ բաշխում, եթե նրա հավանականությունների բաշխման խտությունն այդ միջակայքում հաստատուն է, իսկ այդ միջակայքից դուրս հավասար է զրոյի, այսինքն՝

$$f(x) = \begin{cases} C & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a, \quad x > b։ \end{cases}$$

Քանի որ հավանականությունների բաշխման խտությունը պետք է բավարարի

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

պայմանին, ուրեմն

$$C\int_a^b dx = 1,$$

որտեղից

$$C = \frac{1}{b-a}.$$

Հետևաբար

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & x < a,\ x > b. \end{cases} \qquad (75)$$

X *մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան՝*

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx = \begin{cases} 0 & x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leqslant b, \\ 1 & x > b. \end{cases} \qquad (76)$$

X *պատահական մեծության* $[x_1, x_2]$ *միջակայքում ընկնելու հավանականությունը, որը գտնվում է* $[a, b]$ *միջակայքի ներսում, կլինի*

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{b-a} = \frac{x_2-x_1}{b-a}, \quad a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b. \qquad (77)$$

Այսպիսով, երբ պատահական X մեծությունը $[a, b]$ միջակայքում ունի հավանականությունների հավասարաչափ բաշխում, ապա $[a, b]$-ի ներսում գտնվող միջակայքում ընկնելու հավանականությունը ուղիղ համեմատական է այդ միջակայքի երկարությանը և կախում չունի նրա սկզբից ու վերջից:

2) Հավանականությունների նորմալ բաշխումը: *Երկրորդ գլխում ապացուցված Լապլասի թեորեմը հաստատում է, որ եթե կատարվում են* n *անկախ փորձեր (ընդ որում յուրաքանչյուր առանձին փորձում* A *պատահարի* p *հավանականությունը հաստատուն է և* $0 < p < 1$),

ապա հավանականությունը, որ A պատահարի երևումների m թիվը կբավարարի հետևյալ անհավասարությանը՝

$$np + a\sqrt{npq} < m < np + b\sqrt{npq},$$

երբ $n \to \infty$, ձգտում է

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

ինտեգրալին։ Վերը նշված անհավասարությունը հավասարազոր է

$$a < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b$$

անհավասարությանը. ուստի

$$P\left(a < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

կամ ենթադրելով, որ $a \to \infty$ և $b = x$, կստանանք

$$\lim_{n \to \infty} P\left(-\infty < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

$X_n = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ մեծությունը յուրաքանչյուր սևեռված n-ի համար պատահական մեծություն է, իսկ

$$P\left(-\infty < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < x\right)$$

հավանականությունը՝ այդ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան։ Լապլասի թեորեմը պնդում է, որ X_n պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան, երբ $n \to \infty$, ձգտում է հետևյալ ֆունկցիային՝

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad (78)$$

որը, ինչպես դժվար չէ նկատել, որևէ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիա է։ Այդ պատահական մեծությունն ունի հավանականությունների բաշխման հետևյալ խտությունը՝

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

Հավանականությունների այն բաշխումը, որ որոշվում է (78) բաշխման ֆունկցիայով, հավանականությունների ավելի ընդհանուր բաշխման ֆունկցիայի մասնավոր դեպքն է, որի ժամանակ բաշխման ֆունկցիան արտահայտվում է

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (79)$$

բանաձևով, իսկ բաշխման խտությունը՝

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad (80)$$

բանաձևով, որտեղ a-ն և σ-ն ($\sigma > 0$) հաստատուն մեծություններ են։ Դժվար չէ տեսնել, որ $F(x)$ ֆունկցիան, իրոք, պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիա է։ Իրոք, $F(x)$ ֆունկցիան $(-\infty, +\infty)$ միջակայքում x-ի աճող ֆունկցիան է, և $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$։ Հավանականությունների բաշխման $G(x)$ ֆունկցիան հանդիսանում է $F(x)$ ֆունկցիայի մասնավոր դեպքը, երբ $a = 0$ և $\sigma = 1$։ Հավանականությունների այն բաշխումը, որի համար բաշխման ֆունկցիան արտահայտվում է (79) բանաձևով, կոչվում է հավանականությունների նորմալ բաշխում կամ Գաուսի հավանականությունների բաշխում*։

a և σ թվերը, որոնք մտնում են հավանականությունների նորմալ բաշխման ֆունկցիայի մեջ, կոչվում են նորմալ բաշխման պարամետրեր։

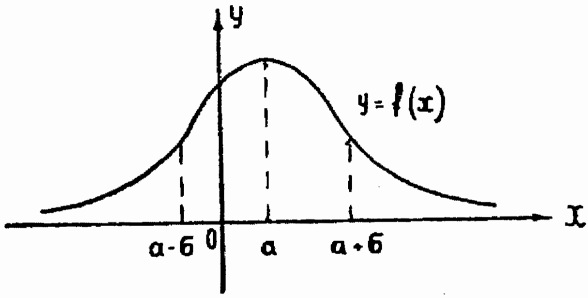
Կարելի է ցույց տալ, որ հավանականությունների նորմալ բաշխման կորը, որի հավասարումն է

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

ունի մաքսիմում, երբ $x = a$ և $y_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$։

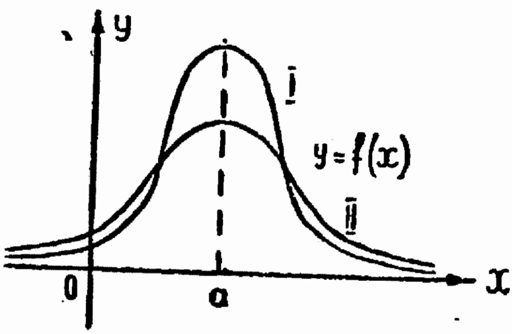
* Գաուս (1777—1855)—գերմանացի մեծ մաթեմատիկոս։

Այդ կորը սիմետրիկ է $x=a$ ուղղի նկատմամբ և ունի շրջման երկու կետ՝ $x=a\pm\sigma$։ Երբ $x\to-\infty$ կամ $x\to+\infty$, կորի օրդինատները ձգտում են զրոյի։ Հավանականությունների նորմալ բաշխման կորն ունի Նկ. 13-ում պատկերված տեսքը։



Նկ. 13

a պարամետրի փոփոխման ժամանակ կորը կտեղափոխվի X-երի առանցքի ուղղությամբ՝ չփոխելով իր ձևը։ σ պարամետրը բնութագրում է բաշխման կորի ձևը։ Քանի որ կորի մաքսիմալ օրդինատը հավասար է $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, իսկ բաշխման կորով և X-երի առանցքով սահմանափակված մակերեսը միշտ հավասար է միավորի, ուրեմն σ պարամետրը մեծացնելիս մաքսիմալ օրդինատը նվազում է, և բաշխման կորը դառնում է ավելի փռված։ Նկ. 14-ում բերված են հավանականությունների բաշխման երկու կորեր. առաջինը՝ $\sigma=\sigma_1$, իսկ երկրորդը՝ $\sigma=\sigma_2$ պարամետրով, ընդ որում $\sigma_1<\sigma_2$։ X պատահական մեծության՝ $[x_1, x_2]$ միջակայքում ընկնելու հավանականությունը կլինի



Նկ. 14

$$P\left(x_1 < X < x_2\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx\text{։}$$

Ընդունելով

$$\frac{x-a}{\sigma}=z,$$

կստանանք

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{x_1 - a}{\sigma}}^{\frac{x_2 - a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

կամ

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right), \qquad (81)$$

որտեղ

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Մասնավորապես՝

$$P(a - 3\sigma \leqslant X < a + 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}997, \qquad (82)$$

այսինքն՝ a *և* σ *պարամետրերով հավանականությունների նորմալ բաշխման դեպքում 0,997 հավանականությամբ (այսինքն՝ համարյա հավաստի) կարելի է պնդել, որ պատահական մեծությունը կշեղվի* a *թվից ավելի քիչ, քան* 3σ *մեծությամբ։ Նորմալ բաշխման այս հատկությունը կոչվում է «երեք սիգմայի» կանոն։*

3) Հավանականությունների ցուցչային բաշխում:

X պատահական մեծությունը ենթարկվում է հավանականությունների ցուցչային բաշխման, եթե նրա հավանականությունների բաշխման *ֆունկցիան արտահայտվում է հետևյալ կերպ՝*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0, \end{cases} \qquad (83)$$

որտեղ $\lambda > 0$ *կոչվում է ցուցչային բաշխման պարամետր։ Բաշխման խտությունը (Նկ. 15) կլինի՝*

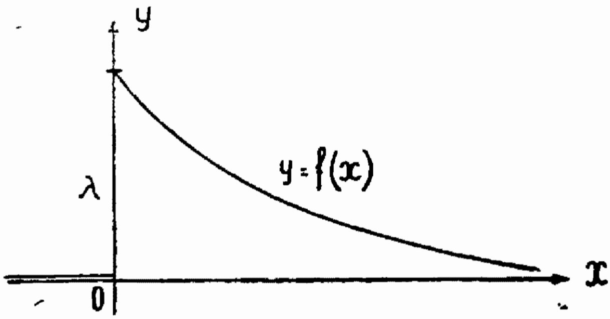
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases} \qquad (84)$$

X *պատահական մեծության* $[x_1, x_2]$ *միջակայքում գտնվելու հավանականությունը կլինի*

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

և հավասար է զրոյի, եթե $x_1 < x_2 < 0$. հավասար է $\lambda \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\lambda x}\, dx = (e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2})$-ի, եթե $0 \leqslant x_1 < x_2$ և հավասար է $\lambda \int\limits_{0}^{x_2} e^{-\lambda x}\, dx = (1 - e^{-\lambda x_2})$-ի, եթե $x_1 \leqslant 0 < x_2$: Այսպիսով,

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 < x_2 \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x_2} & x_1 \leqslant 0 < x_2 \\ e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2} & 0 \leqslant x_1 < x_2: \end{cases} \qquad (85)$$



Նկ. 15

24. Բազմաչափ պատահական մեծություն: *Կիրառությունների մեջ հաճախ հարկ է լինում գործ ունենալ այնպիսի փորձերի հետ, որոնց արդյունքը միաժամանակ որոշում է երկու կամ ավելի պատահական մեծությունների արժեքները: Օրինակ, եթե պատրաստի դետալների խմբից վերցնենք մի դետալ, ապա կարելի է հետաքրքրվել ոչ միայն վերցված դետալի որևէ X չափով, օրինակ, երկարությամբ, այլև Y հաստությամբ:* Երկու պատահական X և Y մեծություններից կազմված (X, Y) սիստեմն անվանենք երկչափ պատահական մեծություն կամ երկչափ պատահական վեկտոր:

Երկչափ (X, Y) պատահական մեծության բաշխումը նկարագրվում է հավանականությունների բաշխման F(x, y) ֆունկցիայով, որը ներկայացնում է այն հավանականությունը, որ X պատահական մեծությունը կընդունի x-ից փոքր արժեք, և դրա հետ միասին Y պատահական մեծությունը կընդունի y-ից փոքր արժեք, այսինքն՝

$$F(x,y) = P(X < x \cap Y < y), \qquad (86)$$

$$-\infty \leqslant x \leqslant +\infty, \quad -\infty \leqslant y \leqslant +\infty:$$

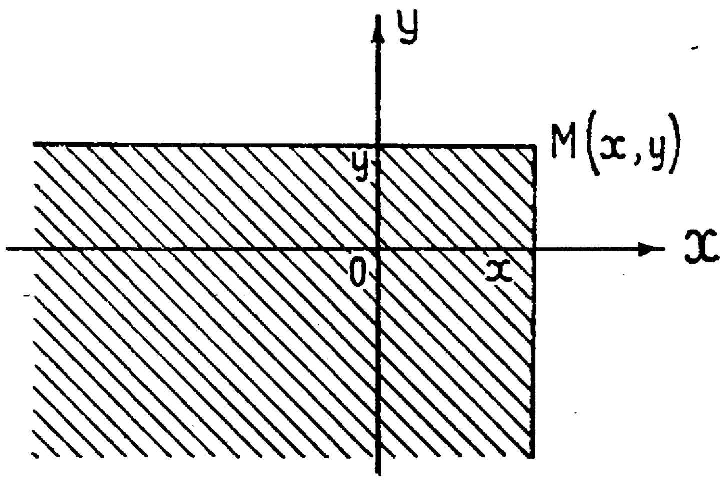
Եթե պատահական X *և* Y *մեծությունները դիտենք որպես* M *կետի դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատներ (Նկ. 15), ապա* F(x, y)*-ը կդառնա այն հավանականությունը, որը այդ* M *կետը կընկնի գծերով ծածկված տիրույթի մեջ՝* $Y = y$ *ուղղից ներքև և* $X = x$ *ուղղից դեպի ձախ։*

F(x, y) *ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով.*

1. $0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$ *որպես հավանականություն։*

2. F(x, y) *ֆունկցիան առանձին վերցրած փոփոխականներից յուրաքանչյուրի չնվազող ֆունկցիան է, այսինքն՝ ցանկացած* y*-ի դեպքում*

$$F(x_1, y) \leqslant F(x_2, y), \qquad x_1 < x_2$$



Նկ. 16

և ցանկացած x*-ի դեպքում*

$$F(x, y_1) \leqslant F(x, y_2) \qquad y_1 < y_2,$$

Իրոք, եթե Նկ. 16-ում $X = x$ *ուղիղը տեղափոխենք աջ, դրանից չի փոքրանա այն հավանականությունը, որ* M(X, Y) *կետը կընկնի գծիկներով ծածկված տիրույթի մեջ։ Ճիշտ այդպես էլ այդ հավանականությունը չի փոքրանա նաև այն դեպքում, եթե* $Y = y$ *ուղիղը շարժենք վերև։*

3. Ցանկացած x*-ի և* y*-ի դեպքում ունենք*

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0,$$

որովհետև անհնար են

$$(X < -\infty \cap Y < y),\quad (X < x \cap Y < -\infty) \text{ և } (X < -\infty \cap Y < -\infty)$$

պատահարները։

4. Ցանկացած x-ի և y-ի դեպքում ունենք

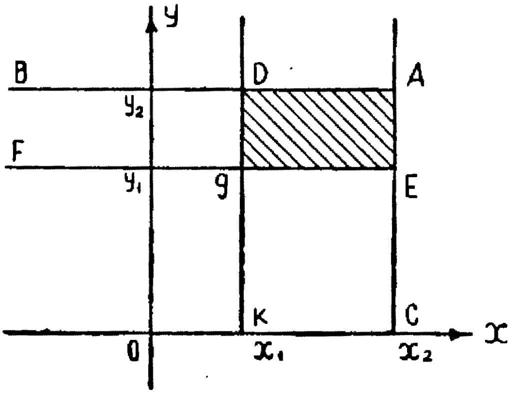
$$F(x, +\infty) = F_1(x)$$

$$F(+\infty, y) = F_2(y),$$

որտեղ $F_1(x)$-ը X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է, իսկ $F_2(y)$-ը՝ Y պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան։ Իրոք, $(X < x \cap Y < +\infty)$ պատահարը համարժեք է $X < x$ պատահարին, իսկ $(X < +\infty \cap Y < y)$ պատահարը՝ $Y < y$ պատահարին։

5. $F(+\infty, +\infty) = 1$, քանի որ $(X < +\infty \cap Y < +\infty)$ պատահարը հավաստի է։

Հավանականությունների բաշխման երկչափ $F(x, y)$ ֆունկցիայի օգնությամբ կարելի է արտահայտել նաև այն հավանականությունը, որ X պատահական մեծությունը կընկնի $[x_1, x_2)$ միջակայքում և միաժամանակ Y-ը կընկնի $[y_1, y_2)$ միջակայքում, այսինքն, X և Y պատահական կոորդինատներով M(X,Y) կետը կընկնի այն ուղղանկյան մեջ, որ սահմանափակված է $X = x_1$, $X = x_2$, $Y = y_1$, $Y = y_2$ ուղիղներով (Նկ. 17)։



Նկ. 17

Իրոք, M(X, Y) կետի՝ BAC անկյան տիրույթի մեջ ընկնելու հավանականությունը կլինի*

$$P(M \in BAC) = P(M \in BDGF) + P(M \in FEC) + P(M \in GDAE)։$$

Մյուս կողմից՝

$$P(M \in BDK) = P(M \in BDGF) + P(M \in FGK),$$

* Ենթադրում ենք, որ BAC, FEC և BDK տիրույթները չեն պարունակում իրենց եզրագծերը. BDGF տիրույթին պատկանում է միայն FG եզրը, իսկ GDAE տիրույթին՝ միայն GD և GE եզրագծերը։

որտեղից

$$P(M\in BDGF)=P(M\in BDK)-P(M\in FGK).$$

Հետևաբար՝

$$P(M\in BAC)=P(M\in BDK)+P(M\in FEC)+P(M\in GDAE)-$$
$$-PM(\in FGK)$$

կամ, անցնելով հավանականությունների բաշխման ֆունկցիային, կստանանք

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)+F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)+P(x_1\leqslant X<$$
$$<x_2\cap y_1\leqslant Y<y_2)\text{։}$$

Այսպիսով, որոնելի հավանականությունը կլինի

$$P(x_1\leqslant X<x_2\cap y_1\leqslant Y<y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-$$
$$-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\text{։} \tag{87}$$

Մասնավոր դեպքում

$$P(x\leqslant X<x+\Delta x\cap y\leqslant Y<y+\Delta y)=F(x+\Delta x,\ y+\Delta y-$$
$$-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)=\Delta_x[\Delta_y F(x,y)] \tag{88}$$

կամ նման ձևով

$$P(x\leqslant X<x+\Delta x\cap y\leqslant Y<y+\Delta y)=\Delta_y[\Delta_x F(x,y)]\text{։} \tag{89}$$

Պատահական X և Y մեծությունները կոչվում են անկախ, եթե $X<x$ և $Y<y$ պատահարները անկախ պատահարներ են, այսինքն՝

$$P_{Y<y}(X<x)=P(X<x),\quad P_{X<x}(Y<y)=P(Y<y)\text{։}$$

Եթե X *և* Y *պատահական մեծություններն անկախ են, ապա հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի համաձայն կունենանք*

$$F(x,y)=P(X<x,\ Y<y)=P(X<x)\cdot P(Y<y)$$

կամ

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)\text{։} \tag{90}$$

Ուրեմն, եթե X *և* Y պատահական մեծություններն անկախ են, ապա երկչափ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան հավասար կլինի X և Y պատահական մեծությունների բաշխման ֆունկցիաների արտադրյալին:

Ճիշտ է և հակառակ պնդումը. Եթե (X, Y) պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան վերածվում է հավանականությունների բաշխման երկու միաչափ բաշխման ֆունկցիաների արտադրյալի, ապա X և Y պատահական մեծությունները իրարից անկախ են: (87) *բանաձևը անկախ պատահական մեծությունների համար կձևափոխվի հետևյալ կերպ՝*

$$P(x_1 \leqslant X < x_2 \cap y_1 \leqslant Y < y_2) = F_1(x_2)\cdot F_2(y_2) - F_1(x_1)\cdot F_2(y_2) - F_1(x_2)\cdot F_2(y_1) + F_1(x_1)\, F_2(y_1) = [F_1(x_2) - F_1(x_1)]\cdot[F_2(y_2) - F_2(y_1)]: \qquad (91)$$

Մասնավորապես՝

$$P(x \leqslant X < x + \Delta x \cap y \leqslant Y < y + \Delta y) = \Delta F_1(x)\cdot\Delta F_2(y): \qquad (92)$$

Երկչափ պատահական մեծության նմանությամբ $X_1, X_2, \cdots X_s$ *պատահական մեծությունների՝ սիստեմն անվանելու ենք* s-չափանի պատահական մեծություն կամ s-չափանի վեկտոր *և նշանակելու ենք* $(X_1, X_2, \cdots X_s)$*-ով: s-չափանի պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան որոշվում է*

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_s) = P(X_1 < x_1 \cap X_2 < x_2 \cap \cdots \cap X_s < x_s)$$

համապատասխանությամբ (երկչափ պատահական մեծության ֆունկցիայի նմանությամբ):

$F(x_1, x_2, \cdots, x_s)$ *ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով՝*

1. $0 \leqslant F(x_1, x_2, \cdots, x_s) \leqslant 1$:

2. $F(x_1, x_2, \cdots, x_s)$ *ֆունկցիան առանձին-առանձին փոփոխականների չնվազող ֆունկցիա է:*

3. Եթե $x_1, x_2, \cdots, x_s$ *փոփոխականներից մի քանիսը, դիցուք* $x_1, x_2, \cdots, x_k$ $(k<s)$*-ը, հավասար են* $+\infty$*, ապա* $F(x_1, x_2, \cdots, x_s)$ *ֆունկցիան կլինի* $X_{k+1}, \cdots, X_s$ $(s-k)$*-չափանի պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիա, օրինակ՝* $F(+\infty, +\infty, \cdots, +\infty, x_j, +\infty, \cdots, +\infty) = F_j(x_j)$՝ X_j*-ի բաշխման ֆունկցիա,* $F(+\infty, \cdots, +\infty, x_i, +\infty, \cdots, +\infty, x_j, +\infty, \cdots, +\infty) = F_{i,j}(x_i, x_j)$՝ (X_i, X_j)*-ի բաշխման ֆունկցիա:*

4. Եթե $x_1, x_2, \cdots, x_s$ *փոփոխականներից թեկուզ մեկը հավասար է* $-\infty$, *ապա բաշխման ֆունկցիան հավասար է զրոյի։*

5. $F(+\infty, +\infty, \cdots, +\infty) = 1$։

Պատահական $X_1, X_2, \cdots, X_s$ *մեծությունները կոչվում են անկախ, եթե* $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2, \cdots$, $X_s < x_s$ *պատահարներն անկախ են։*

Այդ դեպքում $(X_1, X_2, \cdots, X_s)$ *պատահական վեկտորի բաշխման ֆունկցիան կներկայանա որպես հավանականությունների միաչափ բաշխման ֆունկցիաների արտադրյալ.*

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_s) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdots F_s(x_s)։ \qquad (93)$$

25. Դիսկրետ բազմաչափ պատահական մեծություն։ *Մասնավոր դեպքում, եթե X-ը և Y-ը դիսկրետ պատահական մեծություններ են, ապա (X, Y) երկչափ պատահական մեծությունը կոչվում է* դիսկրետ երկչափ պատահական մեծություն։ Դիսկրետ երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենք կոչվում է այդ պատահական մեծության արժեքների և համապատասխան հավանականությունների բազմություն, որը տրվում է հետևյալ աղյուսակով՝

$Y \setminus X$	x_1,	$x_2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x_n$
y_1	p_{11},	$p_{21} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots p_{n1}$
y_2	p_{12},	$p_{22}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots p_{n2}$
$\cdot$	$\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdot$	$\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdot$	$\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
y_m	p_{1m}	$p_{2m} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots p_{nm}$

Այստեղ x_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ *թվերը X պատահական մեծության հնարավոր արժեքներն են,* y_k $(k = 1, 2, \cdots m)$*-ը՝ Y պատահական մեծության հնարավոր արժեքները, իսկ* p_{ik} *թվերը, որոնք տեղավորված են աղյուսակի ներսում՝ i-րդ տողում և k-րդ սյունակում, հետևյալ հավանականություններն են՝*

$$p_{ik} = P(X = x_i \cap Y = y_k)։$$

Ակներև է, որ

$$0 \leqslant p_{ik} \leqslant 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} p_{ik} = 1:$$

Եթե տրված է (X, Y) *երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը, կարելի է որոշել* X *և* Y *պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրի հավանականությունների բաշխման օրենքը առանձին-առանձին: Իրոք,* X-*ի հնարավոր արժեքները՝*

$$x_1, \; x_2, \dots x_n,$$

հայտնի են. որոշենք յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանող հավանականությունը: Քանի որ $X = x_i$ *հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ ցանկացած* $Y = y_k$ *հավասարության հետ, և*

$$X = x_i \cap Y = y_1, \quad X = x_i \cap Y = y_2, \dots X = x_i \cap Y = y_m$$

պատահարները անհամատեղելի են, ուրեմն հավանականությունների գումարման աքսիոմայի համաձայն կստանանք

$$p_{i\cdot} = P(X = x_i) = P(X = x_i \cap Y = y_1 \cup X = x_i \cap Y = y_2 \cup \dots$$
$$\dots \cup X = x_i \cap Y = y_m) = P(X = x_i \cap Y = y_1) + P(X = x_i \cap Y = y_2) +$$
$$+ \dots + P(X = x_i \cap Y = y_m) = p_{i1} + p_{i2} + \dots + P_{im},$$

կամ

$$p_{i\cdot} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}, \qquad i = 1, 2, \dots, n: \tag{94}$$

Ճիշտ նույն ձևով որոշվում է նաև պատահական Y *մեծության բաշխման օրենքը. այն արժեքները, որոնք նա կարող է ընդունել, հայտնի են՝*

$$y_1, \; y_2, \dots, y_m,$$

իսկ նրանց համապատասխանող հավանականությունները ստացվում են նույն ճանապարհով.

$$p_{\cdot k} = P(Y = y_k) = P(X = x_1 \cap Y = y_k \cup X = x_2 \cap Y = y_k \cup \dots$$
$$\dots \cup X = x_n \cap Y = y_k) = P(X = x_1 \cap Y = y_k) + P(X = x_2 \cap Y = y_k) +$$
$$+ \dots + P(X = x_n \cap Y = y_k) = p_{1k} + p_{2k} + \dots + p_{nk},$$

$$p_{\cdot k}=\sum_{i=1}^{n} p_{ik}, \qquad k=1, 2, 3, \ldots, m: \qquad (95)$$

Այսպիսով, $X=x_i$ *հավասարման իրականացման հավանականությունը ստանալու համար (94) բանաձևի համաձայն պետք է գումարել* p_{ik} *հավանականությունները ըստ երկրորդ ինդեքսի, այսինքն՝ բոլոր այն հավանականությունները, որոնք գտնվում են հավանականությունների բաշխման աղյուսակի* i*-րդ սյունակում. իսկ* $Y=y_k$ *հավանականության իրականացման հավանականությունը ստանալու համար (95) բանաձևի համաձայն պետք է գումարել* p_{ik} *հավանականությունները ըստ առաջին ինդեքսի, այսինքն՝ այն բոլոր հավանականությունները, որոնք գտնվում են հավանականությունների բաշխման աղյուսակի* k*-րդ տողում:*

Բաշխման աղյուսակում մտնող բոլոր հավանականությունների գումարը հավասար է միավորի, ուստի

$$1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p_{ik}=\sum_{i=1}^{n} p_{i\cdot}=\sum_{k=1}^{m} p_{\cdot k}:$$

Եթե հայտնի է դիսկրետ երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը, այդ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան կլինի

$$F(x, y)=\sum_{x_i<x,\ y_j<y} p_{ij}, \qquad (96)$$

որտեղ գումարումը տարածվում է այն i *և* j *արժեքների վրա, որոնց համար* $x_i<x$ *և* $y_j<y$:

X և Y պատահական մեծությունները կոչվում են անկախ, եթե ցանկացած i-ի և k-ի դեպքում $X=x_i$ և $Y=y_k$ պատահարները անկախ են, *այսինքն՝ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝*

$$\left.\begin{array}{l} P_{Y=y_k}(X=x_i)=P(X=x_i), \\ P_{X=x_i}(Y=y_k)=P(Y=y_k), \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} i=1, 2, \ldots n \\ k=1, 2, \ldots m: \end{array}$$

Կարելի է ցույց տալ, որ անկախության այդ սահմանումը համարժեք է անկախության ընդհանուր սահմանմանը, որը տրված էր 24-ում:

Ցույց տանք, որ եթե X-ը և Y-ը անկախ են, ապա (X,Y) երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը կարելի է որոշել ըստ X և Y պատահական մեծությունների բաշխումների:

Իրոք, ենթադրենք տրված են X պատահական մեծության բաշխման օրենքը՝

$$X՝ \quad x_1,\ x_2, \dots\ x_n$$
$$p_{1\cdot},\ p_{2\cdot}, \dots\ p_{n\cdot}$$

և Y պատահական մեծության բաշխման օրենքը՝

$$Y՝ \quad y_1,\ y_2, \dots\ y_m$$
$$p_{\cdot 1},\ p_{\cdot 2}, \dots\ p_{\cdot m}:$$

Այդ դեպքում (X, Y)-ի հնարավոր զույգերը հայտնի կլինեն, իսկ համապատասխան p_{ik} հավանականությունները կարելի է գտնել համաձայն հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի անկախ պատահարների համար.

$$p_{ik} = P(X = x_i \cap Y = y_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_k),$$

այսինքն՝

$$p_{ik} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot k}, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots n \\ k = 1, 2, \dots m \end{matrix} \tag{97}$$

Այսպիսով, եթե պատահական X և Y մեծությունները անկախ են, երկչափ պատահական (X, Y) մեծության՝ $(x_i,\ y_k)$ արժեքն ընդունելու p_{ik} հավանականությունը հավասար է նշված պատահարների հավանականությունների արտադրյալին՝ $(X = x_i)$ և $(Y = y_k)$:

Ընդհանուր դեպքում, երբ X-ը և Y-ը ցանկացած պատահական մեծություններ են, $p_{ik} = P(X = x_i \cap Y = y_k)$ հավանականությունը բազմապատկման թեորեմի համաձայն կլինի

$$p_{ik} = P(X = x_i) \cdot P_{X = x_i}(Y = y_k), \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots n \\ k = 1, 2, \dots m \end{matrix}$$

և

$$p_{ik} = P(Y = y_k) \cdot P_{Y = y_k}(X = x_i), \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots n \\ x = 1, 2, \dots m \end{matrix}$$

կամ

$$p_{ik} = p_{i\cdot} P_{X=x_i}(Y=y_k), \qquad i=1, 2, \dots n$$

և

$$p_{ik} = p_{\cdot k} P_{Y=y_k}(X=x_i), \qquad k=1, 2, \dots m$$

որտեղից

$$p'_{ik} = P_{Y=y_k}(X=x_i) = \frac{p_{ik}}{p_{\cdot k}}, \qquad i=1, 2, \dots n \qquad (98)$$

և

$$p''_{ik} = P_{X=x_i}(Y=y_k) = \frac{p_{ik}}{p_{i\cdot}}, \qquad k=1, 2, \dots m\text{։} \qquad (99)$$

Այսպիսով, եթե $Y=y_k$ $(k=1, 2, \dots m)$, X *պատահական մեծության պայմանական բաշխման օրենքը կլինի*

$$\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \dots & x_n \\ \frac{p_{1k}}{p_{\cdot k}}, & \frac{p_{2k}}{p_{\cdot k}}, & & \frac{p_{nk}}{p_{\cdot k}}, \end{array} \qquad k=1, 2, \dots m,$$

և եթե $X=x_i$ $(i=1, 2, \dots n)$, Y *պատահական մեծության պայմանական բաշխման օրենքը կլինի*

$$\begin{array}{cccc} y_1, & y_2, & \dots & y_m \\ \frac{p_{i1}}{p_{i\cdot}}, & \frac{p_{i2}}{p_{i\cdot}}, & \dots & \frac{p_{im}}{p_{i\cdot}}, \end{array} \qquad i=1, 2, \dots n\text{։}$$

Մի քանի դիսկրետ պատահական մեծությունների $X_1, X_2, \dots X_s$ *սիստեմը կոչվում է* s-*չափանի դիսկրետ պատահական մեծություն և նշանակվում է* $(X_1, X_2, \dots X_s)$-*ով*. s-*չափանի դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը որոշվում է յուրաքանչյուր պատահական մեծության հնարավոր արժեքների և համապատասխան*

$$p_{i_1, i_2, \dots i_s} = P(X_1 = x_{1i_1} \cap X_2 = x_{2i_2} \cap \dots \cap X_s = x_{si_s})$$

հավանականությունների արժեքով, ըստ որում

$$i_1 = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots n_1 \ldots$$

$$i_2 = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots n_2 \ldots$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$i_s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots n_s, \ldots$$

$$0 \leq p_{i_1, i_2 \ldots i_s} \leq 1, \qquad \sum_{i_1 i_2 \ldots i_s} p_{i_1, i_2 \ldots i_s} = 1 \qquad (100)$$

Դիսկրետ պատահական $X_1, X_2, \ldots X_s$ *մեծությունները կոչվում են անկախ պատահական մեծություններ, եթե ցանկացած* $i_1, i_2, \ldots i_s$*-ի համար*

$$X_1 = x_{1i_1},\ X_2 = x_{2i_2},\ \ldots\ X_s = x_{si_s}$$

պատահարներն անկախ են։ Ակներև է, որ այս դեպքում անկախ պատահարների համար բազմապատկման թեորեմի համաձայն

$$p_{i_1, i_2, \ldots, i_s} = P(X_1 = x_{1i_1}) \cdot P(X_2 = x_{2i_2}) \ldots P(X_s = x_{si_s}), \qquad (101)$$

այսինքն՝ s-չափանի պատահական $(X_1, X_2, \ldots X_s)$ մեծության $(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \ldots x_{si_s})$ արժեքը ընդունելու հավանականությունը հավասար է այն հավանականությունների արտադրյալին, որ անկախ պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրը կընդունի համապատասխան x_{ki_k} արժեքը $(k = 1, 2, \ldots s)$։

Օրինակ 1. Նետում են երկու զառ. կառուցել (X, Y) *երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման աղյուսակը, որտեղ* X*-ը այն կետերի թիվն է, որոնք բացվում են առաջին զառի վրա, իսկ* Y*-ը՝ այն կետերի թիվը, որոնք բացվում են երկրորդ զառի վրա։*

Ակներև է, որ X*-ը և* Y*-ը անկախ պատահական մեծություններ են, ուստի երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը կորոշվի նրանցից յուրաքանչյուրի բաշխման օրենքով.*

X՝	1,	2,	3,	4,	5,	6,
	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{6}$,

$$Y: \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6,$$

$$\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6}։$$

(X, Y)-ի *հնարավոր արժեքները կլինեն* (i, k) *թվերից կազմված հնարավոր զույգերը, որտեղ* $i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, *իսկ յուրաքանչյուր* (i,k) *զույգին համապատասխանող հավանականությունը՝*

$$p_{ik} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

Ուստի հավանականությունների բաշխման աղյուսակը կունենա այստեղ բերված տեսքը։

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Օրինակ 2. Նետում են երկու զառ. կառուցել $(X, X+Y)$ *երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման օրենքը, որտեղ առաջվա նման* X-ը *այն կետերի թիվն է, որոնք բացվում են առաջին զառի վրա, իսկ* Y-ը՝ *այն կետերի թիվը, որոնք բացվում են երկրորդ զառի վրա։*

X-ի *հնարավոր արժեքները կլինեն 1, 2, 3, 4, 5, 6,* $X+Y$-ի *հնարավոր արժեքները՝ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, իսկ* p_{ik} *հավանականությունները, որ* $X = i$ *և* $X+Y = k$, *կլինեն*

$$p_{12} = P(X = 1 \cap X + Y = 2) = P(X = 1) \cdot P_{X=1}(X + Y = 2) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

$$p_{13} = P(X = 1 \cap X + Y = 3) = P(X = 1) \cdot P_{X=1}(X + Y = 3) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

և ընդհանրապես

$$p_{ik} = P(X = i \cap X + Y = k) = P(X = i) \cdot P_{X=i}(X + Y = k) =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{36}, & i < k \leqslant i + 6 \\ 0, & k \leqslant i,\ k > i + 6 ։ \end{cases}$$

Նշանակում է հավանականությունների բաշխման աղյուսակը կունենա հետևյալ տեսքը.

X+Y \ X	1	2	3	4	5	6
2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
7	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
8	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
9	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
10	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
11	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
12	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Օրինակ 3. *Տրված է դիսկրետ, երկչափ պատահական* (X, Y) *մեծության հավանականությունների բաշխման օրենքը: Որոշել այդ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան: Ակներև է, որ*

Y \ X	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$F(x, y) = 0, \quad x \leqslant 0$ *կամ* $y \leqslant 0,$

$F(x, y) = \frac{1}{4}, \quad 0 < x \leqslant 1, \quad 0 < y \leqslant 1,$

$F(x, y) = \frac{1}{2}, \quad x > 1, \quad 0 < y \leqslant 1,$

$F(x, y) = \frac{1}{2}, \quad 0 < x \leqslant 1 \quad y > 1,$

$F(x, y) = 1, \quad x > 1, \quad y > 1:$

Օրինակ 4. *Դիտարկենք* s-*չափանի* $X=(X_1, X_2, \dots X_s)$ *պատահական մեծությունը, որի արժեքներն են* $m=(m_1, m_2, \dots m_s)$, *որտեղ* m_k-*ն* A_k $(k=1, 2, \dots s)$ *պատահարի հանդես գալու թիվն է* n *անկախ փորձերում* $(m_1+m_2+\dots+m_s=n)$։ *Եթե այդ* n *փորձերի ընթացքում* $P(A_k)=p_k$ $(k=1, 2, \dots s)$ *հավանականությունները մնում են հաստատուն, ապա, ինչպես տեսանք,* m-*ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է*

$$P_n(m)=\frac{n!}{m_1!\, m_2! \cdots m_s!}\, p_1^{m_1}\; p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s} \tag{102}$$

հավանականությունը, ընդ որում

$$\sum_{m_1+m_2+\dots m_s=n} P_n(m)=\sum_{m_1+m_2+\dots m_s=n} \frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_s!}\, p_1^{m_1}\; p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}=1.$$

Այս s-*չափանի* X *պատահական վեկտորի բաշխման օրենքը, որի արժեքներն են* $m=(m_1, m_2, \dots m_s)$ *վեկտորները, իսկ համապատասխան հավանականությունները արտահայտվում են (102) բանաձևով, կոչվում է* հավանականությունների պոլինոմիալ բաշխման օրենք։ $s=3$-*ի համար պոլինոմիալ բաշխման օրենքը տրվում է* $m=(m_1, m_2, m_3)$ $(m_1+m_2+m_3=n)$ *արժեքներով և համապատասխան*

$$P_n(m)=\frac{n!}{m_1!\,m_2!\,(n-m_1-m_2)!}\, p_1^{m_1}\, p_2^{m_2}\, p_3^{n-m_1-m_2}, \quad p_1+p_2+p_3=1$$

հավանականություններով։

26. Անընդհատ բազմաչափ պատահական մեծություն։ *Ենթադրենք հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան անընդհատ է և ունի անընդհատ* $f(x, y)$ *խառը ածանցյալը, այսինքն՝*

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}=f(x, y). \tag{103}$$

Այդ դեպքում $f(x, y)$ ֆունկցիան կոչվում է (X, Y) երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտություն (կամ այդ մեծության դիֆերենցիալ բաշխման ֆունկցիա)։

Երկչափ պատահական մեծությունը, որն ունի բաշխման խտություն կոչվում է անընդհատ։

Նշենք f(x, y) *ֆունկցիայի մի քանի հատկությունները.*

1. Հավանականությունների բաշխման խտությունը ոչ բացասական ֆունկցիա է՝

$$f(x, y) \geqslant 0, \qquad (104)$$

որովհետև F(x, y) *ֆունկցիան ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի չնվազող ֆունկցիա է։*

2. (X, Y) *պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան այդ մեծության բաշխման խտության միջոցով արտահայտվում է հետևյալ կերպ՝*

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\, dx\, dy\text{։} \qquad (105)$$

Իրոք, (103)-ի համաձայն

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) dx dy + C,$$

բայց $C = 0$, *քանի որ* $F(-\infty, -\infty) = 0$։

3. Հավանականությունների բաշխման խտության ինտեգրալը՝ տարածված ամբողջ հարթության վրա, հավասար է միավորի.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx\, dy = 1, \qquad (106)$$

քանի որ

$$F(+\infty, +\infty) = 1\text{։}$$

Քանի որ $F(x, +\infty) = F_1(x)$*-ը* X *պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է, կստանանք*

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx\, dy. \qquad (107)$$

Նույն ձևով

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx\, dy, \qquad (108)$$

որտեղ $F_2(y)$-ը Y պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է։ (107)-ը դիֆերենցելով ըստ x-ի, իսկ (108)-ը՝ ըստ y-ի, կստանանք

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy, \tag{109}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx, \tag{110}$$

որտեղ $f_1(x)$-ը և $f_2(y)$-ը համապատասխանաբար X և Y մեծությունների բաշխման խտություններն են։ Այսպիսով, երե տրված է երկչափ պատահական մեծության բաշխման խտությունը, (107), (108), (109) և (110) բանաձևերով որոշվում են պատահական X և Y մեծությունների հավանականությունների բաշխման ֆունկցիաները և խտությունները։ 88) բանաձևի համաձայն, եթե (X, Y) պատահական մեծությունն ունի (x, y) խտությունը, ապա միաչափ դեպքի նմանությամբ դժվար չէ ցույց տալ, որ այդ հավանականությունը՝ $\Delta x \cdot \Delta y$-ի նկատմամբ բարձըր կարգի անվերջ փոքրերի ճշտությամբ, հավասար կլինի $f(x, y) \cdot \Delta x\, \Delta y$, այսինքն՝

$$P(x \leqslant X < x + \Delta x \cap y \leqslant Y < y + \Delta y) = f(x, y)\Delta x\, \Delta y. \tag{111}$$

$f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y$ հավանականությունը կոչվում է էլեմենտար հավանականություն։

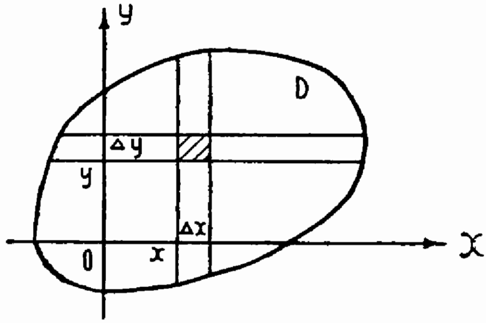
Իմանալով (X, Y) երկչափ պատահական մեծության բաշխման $f(x, y)$ խտությունը՝ կարելի է որոշել նաև X և Y պատահական կոորդինատներ ունեցող կետի՝ XOY հարթության ցանկացած D տիրույթի մեջ ընկնելու հավանականությունը։ Իրոք (նկ. 18), X և Y առանցքների զուգահեռ ուղիղներով D տիրույթը բաժանենք էլեմենտար հարթակների. այդ դեպքում M կետի՝ Δx և Δy կողմեր ունեցող փոքր ուղղանկյան մեջ ընկնելու հավանականությունը բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ճշտությամբ հավասար կլինի $f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y$, իսկ M կետի՝ D տիրույթի մեջ ընկնելու որոնելի հավանականությունը մոտավորապես կարտահայտվի հետևյալ գումարով՝

$$\sum_{x,\, y} f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y:$$

Որոնելի հավանականության ճշգրիտ արժեքը հավասար կլինի այս գումարի սահմանին, երբ բաժանումների թիվը ձգտում է անսահմանության, իսկ յուրաքանչյուր էլեմենտար հարթակը կձգտի դառնալ *մի կետ, այսինքն՝* f(x, y,) *ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալ՝ տարածված* D *տիրույթի վրա: Այսպիսով*

$$P(M \in D) = \iint_D f(x, y)dxdy. \qquad (112)$$

որտեղ X և Y պատահական կոորդինատներ ունեցող M(X, Y) կետի՝ D տիրույթի մեջ ընկնելու հավանականությունը հավասար է (X,Y) երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման f(x, y) խտության կրկնակի ինտեգրալին՝ տարածված այդ D տիրույթի վրա:



Նկ. 18

Եթե X *և* Y *պատահական մեծությունները անկախ են, ինչպես ցույց տվեցինք,* (X, Y) *մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան արտահայտվում է* X *և* Y *պատահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման ֆունկցիաների արտադրյալին, այսինքն՝*

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Դիֆերենցելով այս հավասարությունը նախ ըստ x*-ի, ապա ըստ* y*-ի, կստանանք*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{dF_1(x)}{dx} F_2(y)\right] = \frac{dF_1(x)}{dx} \cdot \frac{dF_2(y)}{dy}$$

կամ

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y), \qquad (113)$$

այսինքն՝ եթե X-ը և Y-ը անկախ պատահական մեծություններ են, (X, Y) երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը հավասար կլինի X և Y պատահական մեծությունների բաշխման խտությունների արտադրյալին:

Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը. եթե պատահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման խտությունը արտահայտվում է հավանականությունների միաչափ բաշխման խտությունների արտադրյալին, ապա X և Y պատահական մեծությունները իրարից անկախ են:

Ընդհանուր դեպքում, երբ X և Y մեծությունները անկախ չեն, էլեմենտար $f(x, y)\,\Delta x \cdot \Delta y$ *հավանականությունը, որ X և Y պատահական կոորդինատներ ունեցող M(X, Y) կետը կընկնի մի ուղղանկյան մեջ, որի կողմերն են* Δx*-ը և* Δy*-ը և մի գագաթը գտնվում է (x, y) կետում, կարելի է գտնել, օգտվելով հավանականությունների բազմապատկման թեորեմից՝ որպես երկու հավանականությունների արտադրյալ, որոնցից մեկն այն հավանականությունն է, որ X պատահական մեծությունը կընկնի* $(x, x+\Delta x)$ *միջակայքում և երկրորդը՝ այն բանի պայմանական հավանականությունը, որ Y պատահական մեծությունը կընկնի* $(y, y+\Delta y)$ *միջակայքում, այն պայմանով, որ X մեծությունն ընկել է* $(x, x+\Delta x)$ *միջակայքում։ Առաջին բազմապատկիչը հավասար է* $f_1(x)\,\Delta x$*, իսկ երկրորդը (եթե* $\Delta x \to 0$*) պայմանական հավանականությունն է, որ Y մեծությունը կընկնի* $(y, y+\Delta y)$ *միջակայքում, այն պայմանով, որ X մեծությունը ստացել է x արժեք։ Y մեծության բաշխման պայմանական խտությունը տվյալ x-ի դեպքում նշանակելով* $f_2(y/x)$*-ով, կունենանք*

$$f(x, y)\,\Delta x \cdot \Delta y = f_1(x) \cdot f_2(y/x)\,\Delta x\,\Delta y$$

կամ

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y/x). \tag{114}$$

Նման ձևով $f(x, y)$*-ը կարելի է գրել նաև հետևյալ կերպ.*

$$f(x, y) = f_2(y) \cdot f_1(x/y), \tag{115}$$

որտեղ $f_1(x/y)$ *ֆունկցիան X մեծության հավանականությունների բաշխման պայմանական խտությունն է այն պայմանով, որ Y պատահական մեծությունը ստացել է y արժեք։*

Այսպիսով, **երկչափ պատահական մեծության բաշխման խտությունը հավասար է պատահական մեծություններից մեկի բաշխման խտությանը՝ բազմապատկած մյուս պատահական մեծության բաշխման պայմանական խտությամբ այն պայմանով, որ առաջինն ընդունել է որոշակի արժեք:**

Եթե X և Y պատահական մեծություններն անկախ են, ապա, համեմատելով (113)-ը (114)-ի և (115)-ի հետ, ստանում ենք

$$f_1(x/y) = f_1(x),$$
$$f_2(y/x) = f_2(y), \tag{116}$$

այսինքն՝ **հավանականությունների բաշխման պայմանական խտությունները համընկնում են համապատասխան հավանականությունների բաշխման ոչ պայմանական խտությունների հետ:**

(114)-ի և (115)-ի համաձայն հավանականությունների բաշխման պայմանական խտությունները նույն հավանականությունների բաշխման ոչ պայմանական խտությունների միջոցով արտահայտվում են հետևյալ կերպ՝

$$f_1(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}, \qquad f_2(y) \neq 0$$

$$f_2(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}, \qquad f_1(x) \neq 0. \tag{117}$$

օգտվելով (109) և (110) հավասարություններից, կստանանք

$$f_1(x/y) = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx},$$

$$f_2(y/x) = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy}. \tag{118}$$

Պատահական $(X_1, X_2, \ldots X_s)$ s-չափանի մեծության հավանականությունների բաշխման խտություն կոչվում է հավանականությունների բաշխման ֆունկցիայի s կարգի խառը ածանցյալը, *այսինքն՝*

$$f(x_1, x_2, \ldots x_s) = \frac{\partial^s F(x_1, x_2, \cdots, x_s)}{\partial x_1\, \partial x_2 \cdots \partial x_s}.$$

Նշենք, առանց ապացուցելու, $f(x_1, x_2, \ldots x_s)$ *խտության մի քանի հատկությունները.*

1. $f(x_1, x_2, \ldots x_s) \geqslant 0.$ *(119)*

2. $F(x_1, x_2, \ldots x_s) =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_s} f(x_1, x_2, \ldots x_s)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_s. \tag{120}$$

3. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \ldots x_s)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_s = 1. \tag{121}$$

4. *Եթե* $f(x_1, x_2, \dots x_s)$ *խտությունը ինտեգրենք ըստ մի քանի փոփոխականների, դիցուք ըստ* x_1*-ի,* x_2*-ի,* x_3*-ի, կստանանք* $(X_4, X_5, \dots X_s)$ *պատահական վեկտորի խտությունը՝*

$$f_{n-3}(x_4, x_5, \dots x_s) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots x_s)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \qquad (122)$$

5. *Պատահական* $X_1, X_2, \dots X_s$ *կոորդինատներ ունեցող* $M(X_1, X_2, \dots X_s)$ *կետի որևէ* s*-չափանի* D *տիրույթի մեջ ընկնելու հավանականությունը կլինի*

$$P(M \in D) = \iiint_D \cdots \int f(x_1, x_2, \dots x_s)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_s \qquad (123)$$

6. Եթե $X_1, X_2, \dots X_s$ պատահական մեծությունները անկախ են, ապա s-չափանի $(X_1, X_2, \dots X_s)$ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը հավասար է այդ պատահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման խտությունների արտադրյալին, *այսինքն՝*

$$f(x_1, x_2, \dots x_s) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \dots f_s(x_s) \qquad (124)$$

Օրինակ 1. Պատահական X *և* Y *մեծությունները անկախ են և համապատասխանաբար ունեն հավանականությունների բաշխման հետևյալ խտությունները՝*

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}, \quad f_2(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Որոշել $M(X, Y)$ *կետի*

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = R^2$$

էլիպսի մեջ ընկնելու հավանականությունը։

Պատահական X, Y *մեծությունների անկախության հետևանքով* (X, Y) *երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը ըստ (113) բանաձևի կլինի*

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)},$$

իսկ որոնելի հավանականությունը (112) բանաձևի համաձայն կարտահայտվի

$$P = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2} \iint_D e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)} dx\,dy$$

բանաձևով, որտեղ D-ն այն տիրույթն է, որ սահմանափակվում է տվյալ էլիպսով։ Մտցնելով նոր

$$x = \sigma_1 u,$$

$$y = \sigma_2 v$$

փոփոխականները, կստանանք

$$P = \frac{1}{2\pi} \iint_{D_1} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} du\,dv,$$

որտեղ D_1-ը $u^2 + v^2 = R^2$ շրջանագծով սահմանափակված տիրույթն է։ Այժմ բևեռային կոորդինատներ՝

$$u = r \cos \varphi,$$

$$v = r \sin \varphi$$

մտցնելով, կստանանք

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr\,d\varphi$$

կամ

$$P = 1 - e^{-\frac{R^2}{2}},$$

Գտնենք այն էլիպսը, որի մեջ ընկնելու հավանականությունը հավասար է կեսի.

$$1 - e^{-\frac{R^2}{2}} = \frac{1}{2}$$

հավասարումից որոշում ենք

$$R = \sqrt{2 \ln 2},$$

որը և կլինի հետևյալ էլիպսը՝

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = 2\ln 2.$$

Օրինակ 2. Տրված է (X, Y) երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը՝

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi(x^2+y^2+1)^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \ -\infty < y < +\infty.$$

Որոշել հավանականությունների բաշխման պայմանական խտությունները՝ X մեծության համար, երբ Y = y, և Y մեծության համար, երբ X = x:

X մեծության բաշխման խտությունը ըստ (109) բանաձևի կլինի

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

Հաշվելով այս ինտեգրալը, կստանանք

$$f_1(x) = \frac{1}{2(x^2+1)^{3/2}},$$

Y մեծության բաշխման խտությունը ըստ (110) բանաձևի կլինի

$$f_2(y) = \frac{1}{2(y^2+1)^{3/2}}.$$

Հետևաբար X-ի և Y-ի հավանականությունների բաշխման պայմանական խտությունները ըստ (117) բանաձևերի կլինեն՝

$$f_1(x/y) = \frac{2(y^2+1)^{3/2}}{\pi(x^3+y^2+1)^2},$$

$$f_2(y/x) = \frac{2(x^2+1)^{3/2}}{\pi(x^2+y^2+1)^2}.$$

Օրինակ 3. (X, Y) երկչափ պատահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված ([a, b], [c, d]) ուղղանկյան մեջ, եթե նրա հավանականությունների խտությունը այդ ուղղանկյան մեջ հաստատուն է

$(C>0)$, իսկ այդ ուղղանկյունից դուրս հավասար է զրոյի, *այսինքն՝*

$$f(x, y)=\begin{cases} C & (x, y) \in ([a, b], [c, d]) \\ 0 & (x, y) \overline{\in} ([a, b], [c, d]) \end{cases}$$

Քանի որ

$$\int_a^b \int_c^d C \, dx \, dy = 1,$$

ուրեմն

$$C=\frac{1}{(b-a)(d-c)}$$

և

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & (x, y) \in ([a,b], [c,d]) \\ 0 & (x, y) \overline{\in} ([a, b],[c, d]) \end{cases} \qquad (125)$$

(105) բանաձևի համաձայն $F(x, y)$ *բաշխման ֆունկցիան կստացվի ինտեգրելով՝*

$$F(x, y)=\begin{cases} 0 & x \le a \text{ կամ } y \le c, \\ \dfrac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)} & (x, y) \in ((a, b], (c, d]), \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a<x \le b \text{ և } y>d, \\ \dfrac{y-c}{d-c} & c<y \le d \text{ և } x>b, \\ 1 & x>a \text{ և } y>d \end{cases} \qquad (126)$$

Եթե $a \le x_1 < x_2 \le b$ *և* $c \le y_1 < y_2 \le d$, *ուղղանկյան մեջ ընկնելու հավանականությունը կլինի*

$$P(x_1 \le X < x_2 \cap y_1 \le Y < y_2)=\frac{(x_2-a)(y_2-c)}{(b-a)(d-c)}-\frac{(x_2-a)(y_1-c)}{(b-a)(d-c)}-$$

$$-\frac{(x_1-a)(y_2-c)}{(b-a)(d-c)}+\frac{(x_1-a)(y_1-c)}{(b-a)(d-c)}$$

կամ

$$P(x_1 \le X < x_2 \cap y_1 \le Y < y_2)=\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{(b-a)(d-c)}. \qquad (127)$$

որտեղից եզրակացնում ենք, որ եթե (X, Y) երկչափ պատահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված ուղղանկյան մեջ, ապա X և Y պատահական մեծությունները միմյանցից անկախ են և յուրաքանչյուրը հավասարաչափ է բաշխված համապատասխան միջակայքում:

Օրինակ 4. Երկչափ պատահական (X, Y) *մեծությունը հետևում է հավանականությունների երկչափ նորմալ բաշխմանը կամ Գաուսի երկչափ բաշխմանը, եթե նրա հավանականությունների բաշխման խտությունն ունի*

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]} \qquad (128)$$

տեսքը և, հետևաբար, հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան արտահայտվում է

$$F(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\,\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]}\, dx\, dy \qquad (129)$$

բանաձևով, որը պարունակում է հինգ պարամետրեր՝ $a, b, \sigma_1>0$, $\sigma_2>0$ *և* r, *ընդ որում*

$$|r|<1:$$

Պարամետրերի վրա դրված այս պայմաններով կարելի է ստուգել, որ $f(x, y)$ *ֆունկցիան, իրոք, հավանականությունների բաշխման խտություն է: Մասնավորապես՝*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy=1:$$

Ամենից առաջ որոշենք X *և* Y *պատահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման խտությունները և բաշխման պայմանական խտությունները:*

Ըստ (109) բանաձևի ունենք

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]} dy:$$

Ինտեգրալի տակ գտնվող աստիճանի ցուցիչը գրելով հետևյալ տեսքով

$$-\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}(1-r^2)+\left[\frac{y-b}{\sigma_2}-\frac{r(x-a)}{\sigma_1}\right]^2\right\},$$

կստանանք

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{y-b}{\sigma_2}-\frac{r(x-a)}{\sigma_1}\right]^2} dy:$$

Ինտեգրալի մեջ փոփոխականի փոխարինում կատարելով

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left[\frac{y-b}{\sigma_2}-\frac{r(x-a)}{\sigma_1}\right],$$

գտնում ենք

$$f_1(x) = \frac{\sigma_2\sqrt{1-r^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

կամ

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}}, \qquad (130)$$

Նման եղանակով կարելի է ցույց տալ, որ

$$f_2(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}},$$

Այսպիսով, X և Y պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրը հետևում է հավանականությունների նորմալ բաշխմանը (a, σ_1) *և* (b, σ_2) *պարամետրերով համապատասխանաբար: X և Y պատահական* *մեծությունների հավանականությունների բաշխման պայմանական խտությունները գտնում ենք (118) բանաձևերից․*

$$f_1(x/y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]}:$$

$$:\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}\,\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{r^2(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

կամ

$$f_1(x/y)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-r^2)}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x-a}{\sigma_1}-r\frac{y-b}{\sigma_2}\right)^2}:$$

Նման ձևով

$$f_2(y/x)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi(1-r^2)}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{y-b}{\sigma_2}-r\frac{x-a}{\sigma_1}\right)^2}, \qquad (131)$$

Այսպիսով, եթե երկչափ $Z=(X, Y)$ մեծությունը ենթարկվում է Գաուսի երկչափ բաշխմանը՝ $a, b, \sigma_1, \sigma_2, r$ պարամետրերով, ապա պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրը կենթարկվի Գաուսի բաշխմանը՝ համապատասխանաբար ունենալով (a, σ_1) և (b, σ_2) պարամետրերը: Յուրաքանչյուր պատահական մեծության պայմանական բաշխումը նույնպես *հանդիսանում է Գաուսի բաշխում հետևյալ պարամետրերով՝*

$$\left(a+r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-b),\ \ \sigma_1\sqrt{1-r^2}\right),\ \left(b+r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a), \sigma_2\sqrt{1-r^2}\right):$$

Նշանակումները մի փոքր փոխելով և

$$B=\begin{pmatrix}\sigma_1^2, & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2, & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

մատրիցան մտցնելով, որի հակադարձ մատրիցան է

$$C = B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-r^2)\sigma_1^2}, & -\frac{r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} \\ -\frac{r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)}, & \frac{1}{\sigma_2^2(1-r^2)} \end{pmatrix} = (c_{ij}),$$

երկչափ նորմալ բաշխման խտությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|B|}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2} c_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j)}, \qquad (133)$$

որը հարմար է հետագա ընդհանրացման համար։

Հավանականությունների բաշխման խտությունից օգտվելով, կարելի է (112) բանաձևով որոշել N(X, Y) *կետի անկման հավանականությունը հետևյալ էլիպսի մեջ՝*

$$\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2} = R^2.$$

Իրոք, այդ հավանականությունը (128)-ի համաձայն կլինի՝

$$P = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \iint\limits_D e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]} dx\,dy,$$

որտեղ D*-ն տվյալ էլիպսով սահմանափակված տիրույթն է։*

Ինտեգրալի նշանի տակ փոփոխականի փոխարինում կատարելով, գտնում ենք

$$x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha + a,$$

$$y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha + b,$$

որտեղ α*-ն որոշվում է*

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2r\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$$

բանաձևով. ձևափոխության յակոբիանը կլինի

$$J = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1.$$

Ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող աստիճանի ցուցչին տանք հետևյալ տեսքը՝

$$-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x_1^2}{s_1^2}+\frac{y_1^2}{s_2^2}\right),$$

որտեղ

$$\frac{1}{s_1^2}=\frac{\cos^2\alpha}{\sigma_1^2}-\frac{2r\sin\alpha\cos\alpha}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\sin^2\alpha}{\sigma_2^2}$$

$$\frac{1}{s_2^2}=\frac{\sin^2\alpha}{\sigma_1^2}+\frac{2r\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\cos^2\alpha}{\sigma_2^2}։$$

Այդ պատճառով որոնելի հավանականությունը՝

$$P=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\iint\limits_{D_1} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x_1^2}{s_1^2}+\frac{y_1^2}{s_2^2}\right)}dx\,dy,$$

որտեղ D_1-ը

$$\frac{x_1^2}{s_1^2}+\frac{y_1^2}{s_2^2}=R^2$$

կամ

$$\frac{x_1^2}{s_1^2(1-r^2)}+\frac{y_1^2}{s_2^2(1-r^2)}=\frac{R^2}{1-r^2}$$

էլիպսով սահմանափակված տիրույթն է։

Այսպիսով, հանգում ենք նախապես քննարկված խնդրին (III, 26)՝ որոշել $M(X, Y)$ կետի անկման հավանականությունը $\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^3}{\sigma_2^2}=R^2$ էլիպսի մեջ, եթե X-ը և Y-ը անկախ, նորմալ բաշխում ունեցող պատահական մեծություններ են՝ $(0, \sigma_1)$ և $(0, \sigma_2)$ համապատասխան պարամետրերով։ Օգտագործելով այս խնդրում ստացված արդյունքը և հաշվի առնելով, որ մեր դեպքում X և Y պատահական մեծությունները անկախ են և ունեն հավանականությունների նորմալ բաշխում՝ $(0, s_1\sqrt{1-r^2})$ և $(0, s_2\sqrt{1-r^2})$ համապատասխան պարամետրերով, կստանանք

$$P=1-e^{-\frac{R^2}{2(1-r^2)}}$$

Ընդհանրացնելով երկչափ նորմալ բաշխման հասկացողությունը, կասենք, որ s*-չափանի* $Z = (X_1, X_2, \dots X_s)$ *պատահական մեծությունը հետևում է նորմալ բաշխմանը, եթե նրա խտությունը արտահայտվում է հետևյալ կերպ՝*

$$f(x_1, x_2, \dots x_s) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}} \sqrt{|B|}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} c_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j)}, \qquad (134)$$

որտեղ

$$A = (a_1, a_2, \dots a_s)$$

վեկտոր է,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix}$$

դրական որոշյալ մատրիցա է $(|B| > 0)$, *իսկ*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{pmatrix}$$

B *մատրիցայի հակադարձ մատրիցան է՝*

$$C = B^{-1}.$$

27. Պատահական մեծության ֆունկցիայի բաշխումը: *Եթե* X*-ը դիսկրետ պատահական մեծություն է, ապա, ընդհանրապես, նրա ցանկացած* $\varphi(X)$ *ֆունկցիան նույնպես կլինի դիսկրետ պատահական մեծություն, որի հնարավոր արժեքները կլինեն* $\varphi(x_i)$ $(i = 1, 2, 3 \dots n \dots)$, *իսկ համապատասխան հավանականությունները՝*

$$P[\varphi(X) = \varphi(x_i)] = P(X = x_i) = p_i^* \qquad (i = 1, 2, 3, \dots n \dots),$$

---

* *Եթե* i*-ի և* k*-ի որոշ արժեքների համար ստացվի* $\varphi(x_i) = \varphi(x_k)$, *ապա պատահական* $\varphi(X)$ *մեծությունը կընդունի* $\varphi(x_i) = \varphi(x_k)$ *արժեքը՝* $p_i + p_k$ *հավանականությամբ.*

այսինքն՝ $\varphi(X)$ ֆունկցիայի բաշխման օրենքը կլինի՝

$$\begin{array}{cccc} \varphi(x_1), & \varphi(x_2), & \cdots & \varphi(x_n), \cdots \\ p_1, & p_2, & \cdots & p_n, \cdots \end{array}$$

Եթե (X, Y)-ը դիսկրետ երկչափ պատահական մեծություն է, ապա, ընդհանրապես, X և Y երկու փոփոխականների ցանկացած $\varphi(X, Y)$ ֆունկցիան նույնպես կլինի պատահական մեծություն, որի հնարավոր արժեքները կլինեն $\varphi(x_i, y_j)(i = 1, 2, \ldots n \ldots, j = 1,2 \ldots m \ldots)$, իսկ համապատասխան հավանականությունները՝

$$P[\varphi(X, Y) = \varphi(x_i, y_j)] = P(X = x_i \cap Y = y_j) = p_{ij}^{*}, \qquad (139)$$

այսինքն՝ նրա բաշխման օրենքը կլինի՝

$\varphi(x_1, y_1)$	$\varphi(x_2, y_1)$	...	...	...	...	$\varphi(x_n y_1)$	...
$\varphi(x_1, y_2)$	$\varphi(x_2, y_2)$	...	...	...	...	$\varphi(x_n, y_2)$	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
$\varphi(x_1, y_m)$	$\varphi(x_2, y_m)$	...	...	...	...	$\varphi(x_n, y_m)$	...
...	...	...	...	...	...	...	...

p_{11}	p_{21}	...	...	...	...	p_{n1}	...
p_{12}	p_{22}	...	...	...	...	p_{n2}	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
p_{1m}	p_{2m}	...	...	...	..	p_{nm}	...
...	...	...	...	...	...	...	...

---

* Եթե (i, k)-ի և (j, e)-ի որոշ արժեքների համար $\varphi(x_i, y_k) = \varphi(x_j, y_e)$, այդ դեպքում պատահական $\varphi(X, Y)$ մեծությունը կընդունի այդ $\varphi(x_i, y_k) = \varphi(x_j, y_e)$ արժեքը՝ $p_{ik} + p_{je}$ հավանականությամբ։

ընդ որում առաջին տողում տրված են $\varphi(X, Y)$ *ֆունկցիայի հնարավոր արժեքները, իսկ երկրորդում՝ այդ արժեքներին համապատասխանող հավանականությունները։*

Դիցուք անընդհատ պատահական X *մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան* $F_1(x)$*-ն է։ Պահանջվում է որոշել* $Y=\varphi(X)$ *մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան, ենթադրելով, որ* $\varphi(x)$ *ֆունկցիան մոնոտոն է և, հետևաբար, ունի միարժեք հակադարձ ֆունկցիա՝* $x=\Psi(y)$*։*

Նշանակելով Y *մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան* $F_2(y)$*-ով, ըստ սահմանման կունենանք* $F_2(y)=P(Y<y)=$ $=P(\varphi(X)<y)$*։ Եթե* $y=\varphi(x)$*-ը* x*-ի աճող ֆունկցիա է, ապա* $\varphi(X)<$ $<y$ *անհավասարությունը համարժեք է* $X<\Psi(y)$ *անհավասարությանը, իսկ եթե* $y=\varphi(x)$*-ը* x*-ի նվազող ֆունկցիա է, ապա* $\varphi(X)<y$ *անհավասարությունը համարժեք է* $X>\Psi(y)$ *անհավասարությանը։*

Առաջին դեպքում կունենանք

$$F_2(y)=P[X<\Psi(y)]$$

կամ

$$F_2(y)=F_1[\Psi(y)]. \tag{140}$$

Այս հավասարության երկու մասերը դիֆերենցելով ըստ y*-ի և նշանակելով* X *մեծության բաշխման խտությունը* $f_1(x)$*-ով, իսկ* Y *մեծության բաշխման խտությունը* $f_2(y)$*-ով, նրանց միջև կստանանք հետևյալ առնչությունը՝*

$$f_2(y)=f_1[\Psi(y)]\cdot\Psi'(y). \tag{141}$$

Երկրորդ դեպքում, երբ $Y=\varphi(X)$*-ը նվազող ֆունկցիա է, կունենանք*

$$F_2(y)=P[X>\Psi(y)]$$

և

$$F_2(y)=1-F_1[\Psi(y)+0]. \tag{142}$$

Այս հավասարությունն ըստ y*-ի դիֆերենցելով, կստանանք*

$$f_2(y)=-f_1[\Psi(y)]\cdot\Psi'(y). \tag{143}$$

Օրինակ 1. Պատահական X *մեծությունն ունի հավանականությունների բաշխման հետևյալ ֆունկցիան՝*

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ 1-e^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

որոշել $Y = X^3$ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան։

Քանի որ $y = x^3$ ֆունկցիան աճող է և նրա հակադարձը կլինի $x = \sqrt[3]{y}$ ֆունկցիան, ուրեմն ըստ (140) բանաձևի կունենանք

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\sqrt[3]{y}}, & y > 0 \end{cases}$$

X մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը կլինի

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

ուստի, (141) բանաձևի համաձայն Y մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը՝

$$f_2(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ e^{-\sqrt[3]{y}} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}, & y > 0 \end{cases}$$

Օրինակ 2. Տրված M կետից, որը X առանցքից գտնվում է H հեռավորության վրա, տարվում է մի պատահական ուղիղ (նկ. 19)։ Ենթադրելով, որ այդ ուղղի և X առանցքին տարված ուղղահայացի կազմած Φ անկյունն ունի հավանականությունների բաշխման

$$F_1(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi \leqslant -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\varphi + \frac{\pi}{2}}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \varphi > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

ֆունկցիա, գտնել X մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան, եթե X-ը այն հատվածն է, որ պատահական ուղիղը հատում է X առանցքից։

X մեծությունը Φ անկյան միջոցով արտահայտվում է հետևյալ կերպ՝

$$X = H \operatorname{tg} \Phi.$$

այս ֆունկցիան $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում աճող ֆունկցիա է, որի հակադարձը կլինի

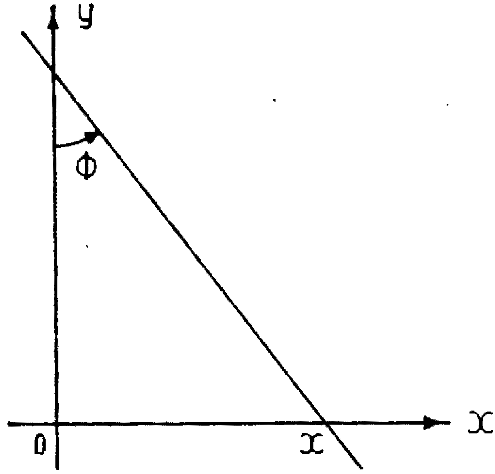
$$\Phi = \operatorname{arctg}\frac{X}{H}\text{։}$$

Ուստի, ըստ (140) բանաձևի X մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան՝

$$F_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{H},$$

$$-\infty < x < +\infty$$

իսկ խտությունը՝



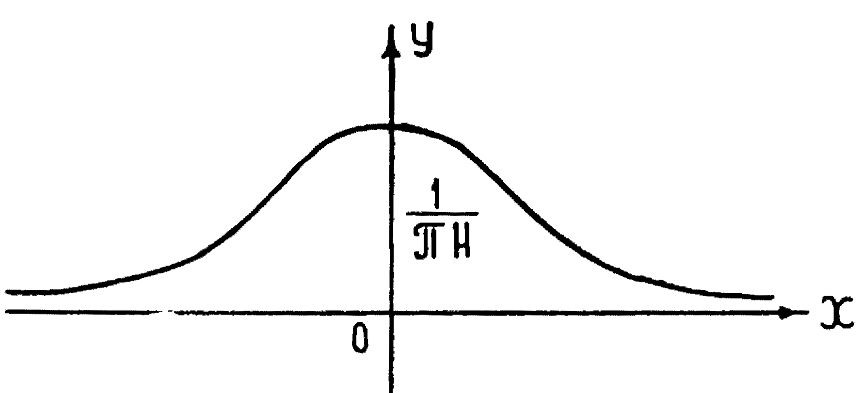
Նկ. 19

$$f_2(x) = \frac{H}{\pi}\,\frac{1}{x^2+H^2}, \qquad -\infty < x < +\infty\text{։}$$

Ստացված հավանականությունների բաշխումը կոչվում է Կոշու բաշխում։

Հավանականությունների բաշխման կորը պատկերված է նկ. 20-ում։

Օրինակ 3. X պատահական մեծությունն ունի Կոշու բաշխում։ Որոշել $Y = X^2$ մեծության բաշխման ֆունկցիաները։



Նկ. 20

Ըստ պայմանի X մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան է

$$F_1(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{H}, \quad -\infty<x<+\infty.$$

Սակայն այստեղ $Y=X^2$ ֆունկցիան մոնոտոն չէ, ուստի հնարավոր չէ օգտագործել ստացված բանաձևերը։ Հաշվում ենք Y մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան անմիջականորեն $F_2(y)$-ի սահմանումից։ Եթե $y>0$, ապա

$$F_2(y)=P(Y<y)=P(X^2<y)=P(-\sqrt{y}<X<\sqrt{y})=$$

$$=F_1(\sqrt{y})-F_1(-\sqrt{y})=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{y}}{H}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{y}}{H}.$$

Այսպիսով՝

$$F_2(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{y}}{H}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

որտեղից Y մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը՝

$$f_2(y)=\begin{cases}\frac{H}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{y}(H^2+y)}, & 0<y<+\infty,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

Օրինակ 4. Տրված է X պատահական մեծության բաշխման օրենքը՝

X՝	-2,	0,	2
	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{4}$,

$Y=X^2$ պատահական մեծության բաշխման օրենքը կլինի՝

Y՝	4,	0,	4
	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{4}$

կամ

Y՝	0,	4
	$^1/_2$,	$^1/_2$.

28. Անցումը ցանկացած բաշխում ունեցող պատահական մեծությունից հավասարաչափ բաշխում ունեցող պատահական մեծությանը: *Դիցուք X պատահական մեծությունն ունի անընդհատ F(x) բաշխման ֆունկցիա: Որոշենք $Y = F(X)$ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխումը: Y պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան նշանակելով $\Phi(y)$, կունենանք*

$$\Phi(y) = P(Y < y) = P(F(X) < y):$$

Եթե $y \leq 0$, *ապա* $P(F(X) < y) = 0$, *եթե* $0 < y \leq 1$, *ապա* $P(F(X) < y) = P(X < F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$ *և եթե* $y > 1$, *ապա* $P(F(X) < y) = 1$: *Հետևաբար՝*

$$\Phi(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ y, & 0 < y \leq 1, \\ 1, & y > 1: \end{cases}$$

Ստացանք հավանականությունների հավասարաչափ բաշխում (0,1) միջակայքում: Այսպիսով, երբ X պատահական մեծությունն ունի ցանկացած հավանականությունների բաշխում՝ F(x) բաշխման ֆունկցիայով (անընդհատ), ապա F(X) պատահական մեծությունն ունի հավանականությունների հավասարաչափ բաշխում (0,1) միջակայքում:

Ուրեմն ամեն մի հավանականությունների բաշխման ուսումնասիրություն կարելի է բերել համապատասխան փոփոխականի փոխարինում կատարելով հավանականությունների հավասարաչափ բաշխման ուսումնասիրությանը: Այս հանգամանքը մեծ նշանակություն ունի կիրառությունների մեջ՝ այսպես կոչված Մոնթե-Կարլոյի եղանակում: Մոնթե-Կարլոյի եղանակը թույլ է տալիս հավանականությունների տեսության միջոցով թվայնորեն լուծել տարբեր խնդիրներ՝ հաշվել մակերեսներ, որոշել դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը և այլն: Այդ խնդիրները լուծելու համար անհրաժեշտ է ունենալ պատահական մեծության նկատմամբ կատարված մեծ թվով փորձերի արդյունքներ: Եթե X պատահական մեծությունն ունի F(x) ցանկացած հավանականությունների բաշխման ֆունկցիա, ապա նրա նկատմամբ կատարված մեծ թվով փորձերի արդյունքներ ստանալը բավականին ծանր աշխատանքային խնդիր է: Դրա համար վարվում ենք այսպես:

Դիցուք Y պատահական մեծությունը (0,1) միջակայքում բաշխված է հավասարաչափ: Փորձը այն է, որ մի կետ ենք գցում (0,1) հատվածի վրա, արդյունքը, այսինքն՝ ստացված կետի աբսցիսը նշանակենք y_i*-ով: Այդ փորձը կրկնում ենք n անգամ, ստացվում են*

$y_1, y_2, \cdots y_n$ *թվերը, որոնք հավասարաչափ բաշխված* Y *պատահական մեծության իրագործումներն են։ Այդ թվերը անվանում են* պատահական թվեր։ *Դիցուք* X *պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան* F(x)-*ն է, որն անընդհատ ֆունկցիա է։ Հարկավոր է որոշել* X *պատահական մեծության նկատմամբ կատարված փորձերի արդյունքները։*

Ապացուցածի համաձայն $Y = F(X)$ *պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ և նրա նկատմամբ կատարված փորձերի արդյունքները մեզ հայտնի են՝*

$$y_1, y_2, \cdots y_n\text{։}$$

Քանի որ

$$X = F^{-1}(Y),$$

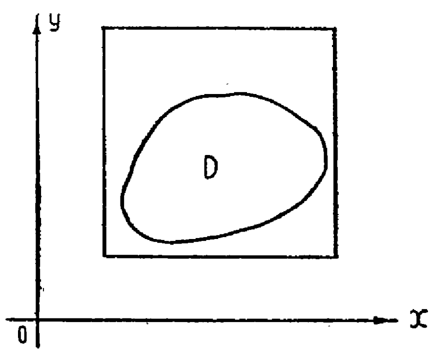
կարելի է ստանալ X *պատահական մեծության համապատասխան արժեքները՝*

$$x_k = F^{-1}(y_k), \qquad k = 1, 2, \cdots n,$$

որոնք այն արժեքներն են, որ X *պատահական մեծությունը կընդուներ նրա նկատմամբ կատարված փորձերի ընթացքում։*

*Պետք է ասել, որ կազմված է պատահական թվերի բավականին ընդարձակ աղյուսակ, որի մի փոքր հատվածը բերված է գրքի վերջում (*VI *աղյուսակում)։*

Օրինակ. Դիցուք պետք է որոշել նկ. 21-ում բերված D *պատկերի մակերեսի մոտավոր արժեքը։ Այդ պատկերը տեղավորենք քառակուսու ներսում։ Եթե կետը պատահականորեն գցենք այդ քառակուսու վրա, ապա, ինչպես գիտենք, նրա՝* D *պատկերի վրա ընկնելու հավանականությունը՝*



Նկ. 21

$$P = \frac{S_D}{S},$$

որտեղ S-*ը քառակուսու մակերեսն է և հայտնի է։ Այստեղից*

$$S_D = S \cdot P\text{։}$$

P հավանականությունը կարելի է հաշվել որպես D պատկերի վրա ընկած կետերի $\overline{P}$ հաճախությունը. դրա համար պատահական թվերի աղյուսակից հաջորդաբար վերցնելով n զույգ (x_k, y_k) թվեր, հաշվում ենք, թե այդ կոորդինատներով քանի կետ է ընկնում D տիրույթի վրա և քանիսը՝ քառակուսու վրա. դրանց հարաբերությունն էլ հենց P-ի մոտավոր արժեքն է. ուրեմն S մակերեսը կարելի է մոտավորապես հաշվել:

29. Անկախ պատահական մեծությունների գումարի բաշխումը: *Դիցուք տրված են X և Y անկախ դիսկրետ պատահական մեծությունները՝*

$$X` \quad 0, \quad 1, \quad 2, \ldots n, \ldots \qquad Y` \quad 0, \quad 1, \quad 2, \ldots m, \ldots$$

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2, \ldots p_n, \ldots, \qquad q_0, \quad q_1, \quad q_2, \ldots q_m, \ldots$$

այդ դեպքում $Z = X + Y$ գումարը նույնպես կլինի դիսկրետ պատահական մեծություն, որն ընդունում է

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots r, \ldots$$

ամբողջ արժեքները:

Որոշենք $P(Z=r)$ հավանականությունը, որ Z-ը կընդունի r արժեքը: Ակներև է, որ Z-ը կընդունի r արժեքը միայն այն դեպքում, երբ $X=0$ և $Y=r-0$, կամ $X=1$ և $Y=r-1, \ldots$ կամ $X=r$ և $Y=0$: Հետևաբար, հավանականությունների գումարման օրենքի համաձայն կունենանք

$$P(Z=r) = \sum_{i=0}^{r} P(X=i \cap Y=r-i):$$

Բայց քանի որ X-ը և Y-ը անկախ պատահական մեծություններ են, ուրեմն հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի համաձայն

$$P(X=i \cap Y=r-i) = P(X=i) \cdot P(Y=r-i),$$

Հետևաբար՝

$$P(Z=r) = \sum_{i=0}^{r} P(X=i) \cdot P(Y=r-i), \quad r=0, 1, 2, \ldots, \qquad (144)$$

Օրինակ. Որոշել անկախ

$$X\text{՝}\quad 0,\ 1,\ 2 \qquad\qquad Y\text{՝}\quad 0,\ 1$$
$$\quad \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4} \qquad\qquad\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$$

պատահական մեծությունների գումարի բաշխման օրենքը:

$Z = X + Y$ *գումարը կարող է ընդունել 0, 1, 2, 3 արժեքներից որևէ մեկը՝ հավանականություններով, որոնք հեշտ է ստանալ (144) բանաձևից: Ունենք*

$$P(Z=0) = P(X=0)\cdot P(Y=0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$P(Z=1) = P(X=0)\cdot P(Y=1) + P(X=1)\cdot P(Y=0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8},$$

$$P(Z=2) = P(X=1)\cdot P(Y=1) + P(X=2)\cdot P(Y=0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8},$$

$$P(Z=3) = P(X=2)\cdot P(Y=1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Հետևաբար, Z մեծության որոնելի բաշխման օրենքը կլինի՝

$$Z\text{՝}\quad 0,\ 1,\ 2,\ 3$$
$$\frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{8}.$$

Մի քանի անկախ պատահական մեծությունների գումարի բաշխման ֆունկցիան սովորաբար անվանում են առանձին պատահական մեծությունների *բաշխման ֆունկցիաների «կոմպոզիցիա»:*

Պատահական մեծությունների բաշխումների կոմպոզիցիան մենք քննարկեցինք դիսկրետ պատահական մեծությունների համար: Այժմ քննարկենք այդ հարցը այն դեպքում, երբ X-*ը և* Y-*ը անընդհատ պատահական մեծություններ են: Նրանց բաշխման ֆունկցիաները նշանակենք* $F_1(x)$-*ով և* $F_2(y)$-*ով, իսկ բաշխման խտությունները համապատասխանաբար՝* $f_1(x)$-*ով և* $f_2(y)$-*ով, այնպես որ*

$$F_1'(x) = f_1(x), \qquad F_2'(y) = f_2(y).$$

Գտնենք պատահական մեծությունների $Z = X + Y$ գումարի հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան։ Այդ ֆունկցիան նշանակելով $F(z)$-ով, կունենանք

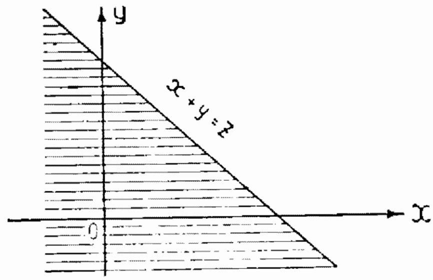
$$F(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z)։$$

Քանի որ X և Y պատահական մեծություններն անկախ են, ուրեմն (X, Y) պատահական վեկտորի բաշխման ֆունկցիան կլինի

$$F_1(x)\cdot F_2(y),$$

իսկ բաշխման խտությունը՝

$$f_1(x)\cdot f_2(y)։$$



Նկ. 22

$F(z) = P(X + Y < z)$ ֆունկցիան X, Y պատահական կոորդինատներ ունեցող $M(X, Y)$ կետի՝ $x + y = z$ ուղղից ներքև գտնվող D տիրույթում ընկնելու հավանականությունն է։ Ուստի համաձայն (112) բանաձևի ստանում ենք

$$F(z) = \iint_D f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy։$$

Այս կրկնակի ինտեգրալը կրկնվող ինտեգրման բերելով, կգտնենք

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx \int_{-\infty}^{z-x} f_2(y)dy։$$

Ընդունելով ինտեգրալի նշանի տակ $y = u - x$, փոխարինելով ստանում ենք

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx \int_{-\infty}^{z} f_2(u-x)du։ \qquad (115)$$

Պատահական մեծությունների գումարի բաշխման խտությունը որոշելու համար բավական է (115) հավասարության երկու մասերը դիֆերենցել ըստ z-ի։ Նշանակելով $F'(z) = f(z)$, կստանանք

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z-x)dx, \qquad (116)$$

Օրինակ 1. Պատահական X մեծությունն ունի հավանականությունների բաշխման հետևյալ խտությունը՝

$$f_1(x)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<x<+\infty \\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases}$$

իսկ պատահական Y մեծությունը՝ հավանականությունների բաշխման հետևյալ խտությունը՝

$$f_2(y)=\begin{cases} 2e^{-2y} & 0<y<+\infty \\ 0, & y\leqslant 0։ \end{cases}$$

Ենթադրելով, որ X և Y պատահական մեծություններն անկախ են, գտնել նրանց գումարի բաշխման խտությունը։

Ըստ (146) բանաձևի գտնում ենք

$$f(z)=2\int_0^z e^{-x}\, e^{-2(z-x)}\, dx, \qquad 0<z<+\infty,$$

քանի որ $f_1(x)\cdot f_2(z-x)$ ենթինտեգրալային ֆունկցիան հավասար է զրոյի, եթե $x<0$ կամ $x\geqslant z$։

Հետևաբար՝

$$f(z)=2\int_0^z e^{x-2z}\, dx=2e^{x-2z}\Big|_0^z=2e^{-z}-2e^{-2z}=2e^{-z}(1-e^{-z})$$

կամ

$$f(z)=2e^{-z}(1-e^{-z}), \qquad z>0$$

$$f(z)=0 \qquad z<0։$$

Օրինակ 2. Դիցուք X և Y պատահական մեծություններն ունեն Պուասոնի բաշխումը՝ համապատասխան a և b պարամետրերով, այսինքն՝

$$P(X=n)=e^{-a}\frac{a^n}{n!}, \qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$P(Y=m)=e^{-b}\frac{b^m}{m!}, \qquad m=0,1,2,\cdots։$$

Այս դեպքում $Z = X + Y$ *պատահական մեծությունը նույնպես կարող է ընդունել ցանկացած ոչ բացասական արժեք, և (144) բանաձևի համաձայն*

$$P(Z=k) = \sum_{n=0}^{k} e^{-a} \frac{a^n}{n!} e^{-b} \frac{b^{k-n}}{(k-n)!}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

կամ

$$P(Z=k) = e^{-(a+b)} \sum_{n=0}^{k} \frac{a^n \cdot b^{k-n}}{n!(k-n)!} = \frac{e^{-(a+b)}}{k!} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!\, a^n\, b^{k-n}}{n!\,(k-n)!} =$$

$$= \frac{e^{-(a+b)}}{k!} \sum_{n=0}^{k} C_k^n a^n b^{k-n},$$

վերջնականապես՝

$$P(Z=k) = e^{-(a+b)} \frac{(a+b)^k}{k!}: \tag{147}$$

Այսպիսով, Պուասոնի բաշխման կոմպոզիցիան կրկին տալիս է Պուասոնի բաշխում, որի պարամետրը հավասար է տվյալ բաշխումների պարամետրերի գումարին:

Օրինակ 3. Քննարկենք նորմալ բաշխումների կոմպոզիցիան: Դիցուք X *և* Y *անկախ պատահական մեծությունները առանձին-առանձին ենթարկվում են հավանականությունների նորմալ բաշխմանը, համապատասխանաբար ունենալով* (a_1, σ_1) *և* (a_2, σ_2) *պարամետրերը, այսինքն՝ նրանց հավանականությունների բաշխման խտությունները համապատասխանաբար արտահայտվում են հետևյալ բանաձևերով*

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \qquad f_2(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}:$$

Որոշենք նրանց $Z = X + Y$ *գումարի հավանականությունների բաշխման խտությունը:*

Ըստ (146) բանաձևի կունենանք

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[(z-x)-a_2]^2}{2\sigma_2^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z-x-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} dx:$$

Ենթինտեգրալային ֆունկցիայի ցուցիչը ձևափոխենք հետևյալ կերպ՝

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(z-x-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\,\sigma_2^2}(x-a_1)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{2(x-a_1)(z-a_1-a_2)}{\sigma_2^2}+\frac{(z-a_1-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\,\sigma_2}(x-a_1)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sigma_1(z-a_1-a_2)}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)^2+\frac{(z-a_1-a_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{\sigma_1^2(z-a_1-a_2)^2}{\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\,\sigma_2}(x-a_1)-\frac{\sigma_1(z-a_1-a_2)}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right]^2-\frac{1}{2}\,\frac{(z-a_1-a_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Տեղադրելով, կստանանք

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\,\sigma_1\,\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}(x-a_1)-\frac{\sigma_1(z-a_1-a_2)}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right]^2}\cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-a_1-a_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}dx=\frac{1}{2\pi\,\sigma_1\,\sigma_2}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-a_1-a_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}(x-a_1)-\frac{\sigma_1(z-a_1-a_2)}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right]^2}dx.$$

Փոփոխականի փոխարինում կատարելով՝

$$\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\,\sigma_2}(x-a_1)-\frac{\sigma_1(z-a_1-a_2)}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}=u,$$

կստանանք

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-a_1-a_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}du=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-a_1-a_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-a_1-a_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

կամ վերջնականապես՝

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-a_1-a_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}: \qquad (148)$$

Ստացանք հավանականությունների բաշխման նորմալ խտություն՝ $(a_1+a_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$ *պարամետրերով:*

Ստացված արդյունքը չափազանց կարևոր նշանակություն ունի գործնականում: Երբ անկախ պատահական մեծությունները ենթարկվում են հավանականությունների նորմալ բաշխմանը՝ (a_1, σ_1) *և* (a_2, σ_2) համապատասխան պարամետրերով, ապա նրանց գումարը նույնպես ենթարկվում է հավանականությունների նորմալ բաշխմանը՝ $(a_1+a_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$ պարամետրերով:

Այս արդյունքը, որ ստացվել է երկու գումարելիների գումարի համար, կարելի է տարածել ցանկացած վերջավոր թվով գումարելիների վրա: Եթե $X_1, X_2, \cdots X_n$ *անկախ պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրը ենթարկվում է հավանականությունների նորմալ բաշխմանը՝ հետևյալ համապատասխան պարամետրերով՝*

$$(a_1, \sigma_1), (a_2, \sigma_2), \cdots (a_n, \sigma_n),$$

ապա նրանց գումարը նույնպես ենթարկվում է հավանականությունների նորմալ բաշխմանը հետևյալ պարամետրերով՝

$$a=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$$\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2}$$

Օրինակ 4. Որպեսզի r շառավիղ ունեցող լիսեռը կարողանա պտտվել հենարանի R շառավիղ ունեցող շրջանային անցքի մեջ, անհրաժեշտ է, որ լիսեռի և հենարանի անցքի միջև մնա ազատ տարածություն։ Սակայն r-ի և R-ի միջև եղած տարբերության մեծությունը պետք է գտնվի որոշ սահմաններում՝

$$a < R - r < b.$$

Լիսեռների և հենարանների սերիական պատրաստման ժամանակ այս երկու մասերը պատրաստվում են առանձին-առանձին, ընդ որում հավաքման ժամանակ կարող է մասերը իրար չհարմարվեն։ Ենթադրելով, որ կարգավորված արտադրության մեջ r-ի և R-ի շեղումները r_0 և R_0 միջին արժեքներից հետևում են հավանականությունների նորմալ բաշխմանը, հաշվել, թե պատրաստվածքների որ տոկոսը հարկ կլինի դեն գցել կոնվեյերի վրա հավաքելիս։

Այստեղ R մեծությունը հետևում է Գաուսի բաշխմանը՝ (R_0, σ_0) պարամետրերով, իսկ r մեծությունը հետևում է նույն բաշխմանը՝ r_0 և σ_1 պարամետրերով։ Ուստի R — r տարբերությունը հետևում է Գաուսի հավանականությունների բաշխմանը՝ $a_0 = R_0 - r_0$ և $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_0^2$ պարամետրերով։

Հետևաբար՝

$$a < R - r < b$$

անհավասարության իրականացման որոնելի հավանականությունը արտահայտվում է հետևյալ ինտեգրալով՝

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_0^2)}} \int_a^b e^{-\frac{(x - R_0 + r_0)^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)}} dx$$

կամ

$$p = P(a < R - r < b) = \Phi(t_1) - \Phi(t_0),$$

որտեղ

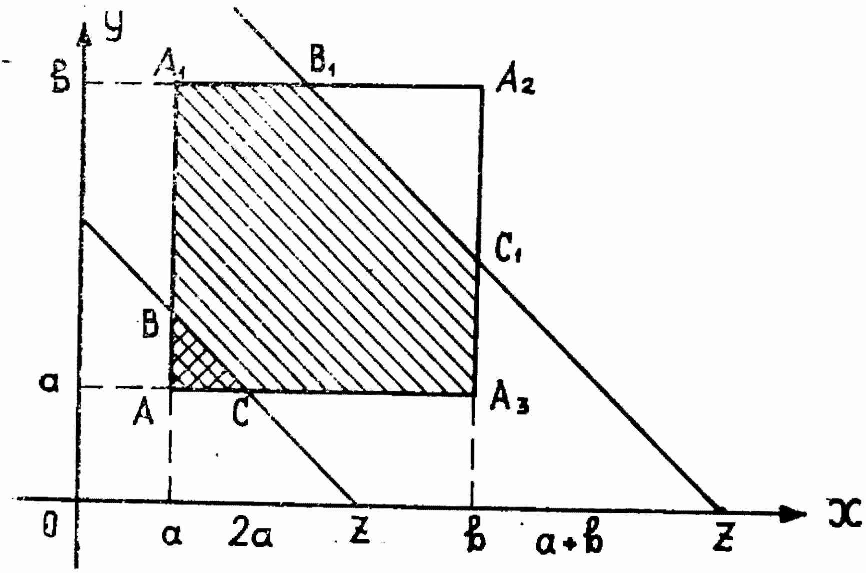
$$t_0 = \frac{a - R_0 + r_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}}, \quad t_1 = \frac{b - R_0 + r_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}},$$

Իսկ պատրաստվածքը հարկ եղած դեպքում դեն նետելու հավանականությունը հավասար է $(1 - p)$-ի։ Այն դեպքերի հաճախությունը, երբ պատրաստվածքը հարկ է լինում դեն նետել մեծ թվով փորձերի ժամանակ, մոտավորապես հավասար է գտնված հավանականությունը՝ (1 — p)-ի, այնպես որ հարկ կլինի դեն նետել շին-վածքների $100 \cdot (1-p)\%$-ը։

Օրինակ 5. Վերջապես որոշենք հավանականությունների երկու հավասարաչափ բաշխումների կոմպոզիցիան։ Դիցուք X և Y անկախ պատահական՝մեծություններից յուրաքանչյուրը բաշխված է հավասարաչափ նույն (a, b) միջակայքում։ Որոշենք նրանց $Z = X + Y$ գումարի բաշխման ֆունկցիան։ Տվյալ դեպքում կստանանք Z մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիաներն անմիջականորեն, առանց եղած բանաձևից օգտվելու։ Թող $F(z)$-ը լինի Z մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան, այսինքն՝

$$F(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z)\text{։}$$

Պատահական X և Y կոորդինատներն ունեցող $M(X, Y)$ կետը պետք է անպայման գտնվի $AA_1A_2A_3$ քառակուսում (նկ. 23), որը



Նկ. 23

սահմանափակված է $x = a$, $x = b$, $y = a$, $y = b$ ուղիղներով, իսկ որոնելի $F(z)$ հավանականությունը այդ կետի՝ այդ քառակուսում մեջ $x + y = z$ ուղղից ներքև գտնվելու հավանականությունն է։

(112) բանաձևի համաձայն

$$F(z) = \iint_D f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy,$$

որտեղ $f_1(x)$-ը և $f_2(y)$-ը X և Y պատահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման խտություններն են, իսկ D-ն դիտարկվող քառակուսու տիրույթի այն մասն է, որ գտնվում է $X+Y=z$ ուղղից ներքև, որտեղ $2a<z<2b$: Տվյալ դեպքում

$$f_1(x)=f_2(y)=\frac{1}{b-a},$$

$$a<x<b, \quad a<y<b,$$

ուրեմն

$$F(z)=\frac{1}{(b-a)^2}\iint\limits_D dx\,dy$$

ներկայացնում է դիտարկվող տիրույթի մակերեսի և $(b-a)^2$-ու հարաբերությունը: Եթե $2a<z\leqslant a+b$, ապա D տիրույթի մակերեսը հավասար կլինի ABC եռանկյան մակերեսին՝ $\frac{(z-2a)^2}{2}$, իսկ եթե $a+b<z<2b$, ապա D տիրույթի մակերեսը հավասար կլինի $AA_1B_1C_1A_2A$ պատկերի մակերեսին՝ $(b-a)^2-\frac{1}{2}(2b-z)^2$:

Այսպիսով, Z մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան՝

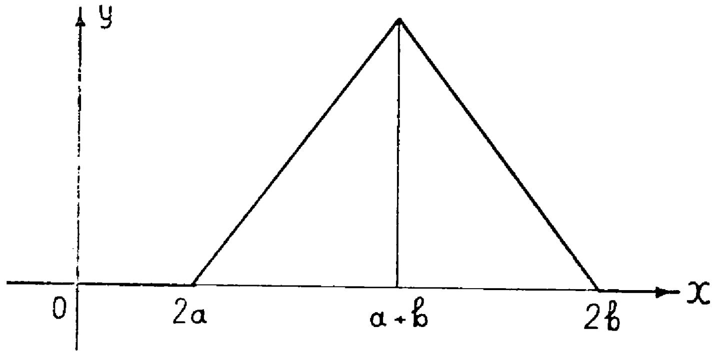
$$F(z)=\begin{cases} 0, & z\leqslant 2a, \\ \frac{(z-2a)^2}{2(b-a)^2}, & 2a<z\leqslant a+b, \\ 1-\frac{(2b-z)^2}{2(b-a)^2}, & a+b<z\leqslant 2b, \\ 1, & z>2b, \end{cases} \tag{149}$$

իսկ Z մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը կստացվի F(z) ֆունկցիայի դիֆերենցումով.

$$f(z)=\begin{cases} 0, & z<2a, \\ \frac{z-2a}{(b-a)^2}, & 2a<z\leqslant a+b, \\ \frac{2b-z}{(b-a)^2}, & a+b<z\leqslant 2b, \\ 0, & z>2b: \end{cases} \tag{150}$$

$Z=X+Y$ մեծության բաշխման խտության գրաֆիկը ներկայացված է նկ. 24-ում:

Հավանականությունների ստացված բաշխումը կոչվում է Սիմպսոնի հավանականությունների բաշխում: Այսպիսով, հավանականությունների հավասարաչափ բաշխումների կոմպոզիցիան տալիս է Սիմպսոնի հավանականությունների բաշխումը:



Նկ. 24

30. Անկախ պատահական մեծությունների քանորդի բաշխումը: *Դիցուք X և Y անկախ պատահական մեծությունները համապատասխանաբար ունեն* $F_1(x)$ *և* $F_2(y)$ *հավանականությունների բաշխման ֆունկցիաները և բաշխման հետևյալ խտությունները՝*

$$f_1(x) = F_1'(x), \qquad f_2(y) = F_2'(y):$$

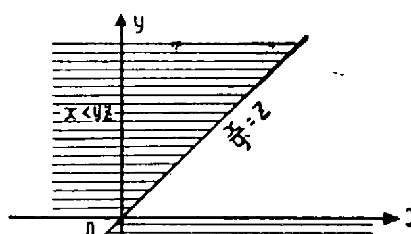
Որոշենք

$$Z = \frac{X}{Y}$$

պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան և բաշխման խտությունը: Z մեծության բաշխման ֆունկցիան նշանակելով F(z)-ով, կստանանք

$$F(z) = P(Z < z) = P\left(\frac{X}{Y} < z\right),$$

Եթե X և Y պատահական մեծությունները դիտենք որպես M(X, Y) կետի պատահական կոորդինատներ XOY հարթության վրա, ապա F(z)-ը կներկայացնի M կետի D տիրույթի մեջ ընկնելու հավանականությունը, որի կետերի կոորդինատները բավարարում են $x < yz$ *անհավասարությանը, եթե* $y > 0$, *և* $x > yz$ *անհավասարությանը, եթե*



Նկ. 25

$y < 0$։ Այդ տիրույթը նկ. 25-ում ծածկված է գծիկներով։ (112)-ի համաձայն ունենք

$$F(z)=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

կամ

$$F(z)=\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{zy} f(x,y)dx\right]dy+\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{zy}^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy,$$

որտեղ $f(x, y)$-ը (X, Y) վեկտորի բաշխման խտությունն է։ Քանի որ X և Y մեծությունները անկախ են, ուրեմն

$$f(x, y)=f_1(x)\cdot f_2(y),$$

ուստի

$$F(z)=\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{zy} f_1(x)\,f_2(y)\,dx\right]dy+\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{zy}^{+\infty} f_1(x)\,f_2(y)\,dx\right]dy$$

կամ

$$F(z)=\int_0^{+\infty} f_2(y)\,F_1(zy)\,dy+\int_{-\infty}^{0} f_2(y)\,[1-F_1(zy)]dy\text{։} \qquad (151)$$

Ստացված հավասարությունը ըստ z-ի դիֆերենցելով, կստանանք

$$f(z)=\int_0^{+\infty} y\,f_2(y)\,f_1(zy)\,dy-\int_{-\infty}^{0} y\,f_2(y)\,f_1(zy)\,dy\text{։} \qquad (152)$$

Օրինակ. X և Y անկախ պատահական մեծությունները համապատասխանաբար ունեն հետևյալ խտությունները՝

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ ae^{-ax}, & x>0,\end{cases} \qquad a>0,$$

$$f_2(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0\\ ae^{-ay}, & y>0,\end{cases} \qquad a>0\text{։}$$

Որոշել նրանց $\frac{X}{Y}$ *քանորդի խտությունը: (152) բանաձևի համաձայն կունենանք*

$$f(z) = \int_0^{+\infty} yae^{-ay}\, ae^{-azy}\, dy, \qquad z > 0$$

$$f(z) = 0, \qquad z \leq 0:$$

Ստացված ինտեգրալը հաշվելով, կունենանք

$$f(z) = a^2 \int_0^{+\infty} ye^{-ay(1+z)}\, dy = -\frac{a^2 y}{a(1+z)}\, e^{-ay(1+z)}\Big|_0^{+\infty} +$$

$$+ a^2 \int_0^{+\infty} e^{-ay(1+z)} \frac{dy}{a(1+z)} = -\frac{1}{(1+z)^2}\, e^{-ay(1+z)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{(1+z)^2},$$

Հետևաբար

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \dfrac{1}{(1+z)^2}, & z > 0: \end{cases}$$

50

31. χ^2 պատահական մեծությունը: *Դիցուք* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *մեծությունները անկախ պատահական մեծություններ են, որոնցից յուրաքանչյուրը ենթակա է հավանականությունների նորմալ բաշխմանը՝* a *և* σ *պարամետրերով:*

Դիտարկենք

$$\chi^2 = \frac{(X_1 - a)^2}{\sigma^2} + \frac{(X_2 - a)^2}{\sigma^2} + \cdots + \frac{(X_n - a)^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - a)^2 \quad (153)$$

պատահական մեծությունը և գտնենք $\chi_1 = \frac{\chi}{\sqrt{n}} > 0$ *մեծության հավանականությունների բաշխումը:*

Պարզության համար վերցնենք այն մասնավոր դեպքը, երբ n=3, *այսինքն՝ երբ*

$$\chi^2 = \frac{(X_1 - a)^2}{\sigma^2} + \frac{(X_2 - a)^2}{\sigma^2} + \frac{(X_3 - a)^2}{\sigma^2}.$$

$$\chi_1 = \frac{\chi}{\sqrt{3}}, \qquad 0 < \chi < +\infty:$$

Նշանակելով $\Phi(y)$-ով η մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան, ըստ սահմանման կստանանք

$$\Phi(y) = 0, \qquad y \leqslant 0$$

$$\Phi(y) = P\left(\frac{Z}{\sqrt{3}} < y\right) = P\left(\frac{Z^2}{3} < y^2\right) = P(Z^2 < 3y^2) =$$

$$= P[(X_1 - a)^2 + (X_2 - a)^2 + (X_3 - a)^2 < 3\sigma^2 y^2], \qquad y > 0.$$

Այսպիսով, ցանկացած դրական y-ի համար որոնելի հավանականությունը հավասար է այն հավանականությանը, որ $M(X_1, X_2, X_3)$ կետը, որն ունի X_1, X_2, X_3 պատահական կոորդինատներ, կընկնի

$$(X_1 - a)^2 + (X_2 - a)^2 + (X_3 - a)^2 = 3\sigma^2 y^2$$

սֆերայի ներսը, որի կենտրոնը $C(a, a, a)$ կետն է, իսկ շառավիղը՝ $\sqrt{3}\sigma y$-ը: Քանի որ ըստ պայմանի X_1, X_2, X_3 պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրը հետևում է միևնույն նորմալ բաշխմանը՝

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad f_2(x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-a)^2}{2\sigma^2}},$$

$$f_3(x_3) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_3-a)^2}{2\sigma^2}},$$

և նրանք անկախ են, ուրեմն (X_1, X_2, X_3) եռաչափ պատահական մեծության բաշխման խտությունը՝ $f(x_1, x_2, x_3)$ ներկայանում է որպես առանձին պատահական մեծությունների հավանականությունների խտությունների արտադրյալ՝

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-a)^2}{\sigma^2} + \frac{(x_2-a)^2}{\sigma^2} + \frac{(x_3-a)^2}{\sigma^2}\right]},$$

իսկ որոնելի հավանականությունը՝ որպես այդ խտության ինտեգրալ տարածված տվյալ սֆերայով սահմանափակված տիրույթի վրա.

$$\Phi(y) = \iiint\limits_D \frac{1}{2\pi\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-a)^2}{\sigma^2} + \frac{(x_2-a)^2}{\sigma^2} + \frac{(x_3-a)^2}{\sigma^2}\right]} dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Այս ինտեգրալի մեջ փոփոխականների փոխարինում կատարելով՝

$$\frac{x_1-a}{\sigma}=y_1\,,\quad \frac{x_2-a}{\sigma}=y_2,\quad \frac{x_3-a}{\sigma}=y_3,$$

կստանանք

$$\Phi(y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3\iiint\limits_{D_1} e^{-\frac{1}{2}\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)}\,dy_1\cdot dy_2\cdot dy_3,$$

որտեղ D_1*-ը*

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2=3y^2$$

սֆերայով սահմանափակված տիրույթն է։

Ստացված ինտեգրալը հաշվելու համար անցնենք սֆերիկ կոոր-դինատների՝

$$y_1=\rho\sin\theta\cdot\cos\varphi$$
$$y_2=\rho\sin\theta\cdot\sin\varphi$$
$$y_3=\rho\cos\theta.$$

այդ դեպքում կստանանք

$$\Phi(y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3\iiint\limits_{D} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi,$$

Հաշվելով կգտնենք

$$\Phi(y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{\sqrt{3}y}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{3}y}\rho^2e^{-\frac{\rho^2}{2}}\,d\rho.$$

այսինքն՝

$$\Phi(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{3}y}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^2\,d\rho,$$

Պատահական η մեծության բաշխման խտությունը՝

$$\varphi(y) = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\, y^2 e^{-\frac{3y^2}{2}}, \qquad 0 < y < +\infty \quad (154)$$

Այս ստացված բաշխումը ներկայացնում է գազի մոլեկուլների արագությունների բաշխման Մաքսվելի հայտնի օրենքը։

Ընդհանուր դեպքում, երբ տրված պատահական մեծությունների թիվը հավասար է n-ի, նմանօրինակ, բայց ավելի աշխատատար հաշվումներով ստացվում է՝

$$\varphi(y) = \frac{\sqrt{2n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{y\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} e^{-\frac{ny^2}{2}}, \qquad 0 < y < +\infty, \quad (155)$$

որտեղ

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx \quad (156)$$

Երբ $n = 3$, նկատի ունենալով, որ $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, (155)-ից կստանանք Մաքսվելի օրենքը։

Գիտենալով $\eta = \frac{\chi}{\sqrt{n}}$ պատահական մեծության $\varphi(y)$ խտությունը (155), կարելի է որոշել նաև χ մեծության խտությունը։ Իրոք, χ մեծության բաշխման ֆունկցիան և խտությունը, համապատասխանաբար, նշանակելով $G(z)$-ով և $g(z)$-ով, ցանկացած $z > 0$ համար, կստանանք

$$G(z) = P(\chi < z) = P\left(\frac{\chi}{\sqrt{n}} < \frac{z}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\eta < \frac{z}{\sqrt{n}}\right) = \int_0^{\frac{z}{\sqrt{n}}} \varphi(y)\,dy$$

Դիֆերենցելով $G(z)$-ը և տեղադրելով $\varphi(y)$-ի արժեքը, կունենանք

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad 0 < z < +\infty$$

կամ.

$$g(z)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}z^{n-1}e^{-\frac{z^2}{2}},\qquad 0<z<+\infty: \qquad (157)$$

Այժմ արդեն կարելի է ստանալ χ^2-ու խտությունը. χ^2-ու բաշխման ֆունկցիան և խտությունը համապատասխանաբար նշանակելով $H(x)$-ով և $h(x)$-ով, ցանկացած $x>0$ համար կունենանք

$$H(x)=P(\chi^2<x)=P(\chi<\sqrt{x})=\int_0^{\sqrt{x}} g(z)\,dz.$$

դիֆերենցելով $H(x)$-ը և տեղադրելով $g(z)$-ի արժեքը, կունենանք

$$h(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,g(\sqrt{x})=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},\qquad 0<x<+\infty. \qquad (158)$$

n-ը անվանում են χ^2-ու բաշխման ազատության աստիճանների թիվ:

32. **Հավանականությունների Ստյուդենտի բաշխումը:** Պատահական η մեծության հետ միասին, որ հետևում է հավանականությունների (155) բաշխմանը, դիտարկենք պատահական ξ մեծությունը, որն ունի հավանականությունների նորմալ բաշխում

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\,e^{-\frac{nx^2}{2}},\qquad -\infty<x<+\infty \qquad (159)$$

խտությամբ՝ $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ պարամետրերով։

Որոշենք ξ և η անկախ պատահական մեծությունների $\omega=\frac{\xi}{\eta}$ հարաբերության $f(z)$ խտությունը։

Դրա համար օգտագործենք նախապես ստացված (152) բանաձևը՝ երկու անկախ պատահական մեծությունների քանորդի բաշխման խտության համար։ (155)-ի և (159)-ի համաձայն կունենանք

$$f(z)=\int_0^{\infty} y\,\frac{\sqrt{2n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{y\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}.e^{-\frac{ny^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\,e^{-\frac{nz^2y^2}{2}}\,dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}\left(\frac{y\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}e^{-\frac{ny^2}{2}(1+z^2)}\,ny\,dy,$$

Կատարելով

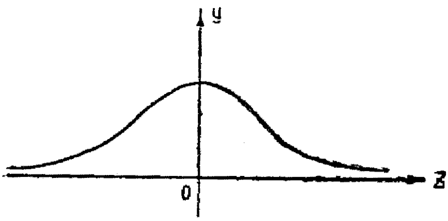
$$u = \frac{ny^2}{2}(1 + z^2)$$

փոփոխականի փոխարինում, կստանանք

$$f(z) = \frac{(z^2+1)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty u^{\frac{n-1}{2}} e^{-u} du$$

կամ (156)-ի համաձայն՝

$$f(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (1+z^2)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < z < +\infty: \qquad (160)$$



Նկ. 26

Այսպիսով, եթե ξ և η պատահական մեծությունների բաշխման խտությունները համապատասխանաբար արտահայտվում են (159) և (155) բանաձևերով, նրանց հարաբերության բաշխման խտությունը կարտահայտվի (160) բանաձևով:

Մեր ստացած հավանականությունների բաշխումը (160) կոչվում է Ստյուդենտի* հավանականությունների բաշխում:

Ստյուդենտի հավանականությունների բաշխման խտությունը պատկերվում է մի կորով, որը սիմետրիկ է $z = 0$ ուղղի նկատմամբ և ունի մի մաքսիմում, երբ $z = 0$, որը հավասար է $\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$-ի: Ստյուդենտի հավանականությունների բաշխման կորը պատկերված է նկ. 26-ում:

---

* Ստյուդենտ անգլիացի վիճակագիր Գոսսետի կեղծ անունն է, որը առաջին անգամ գտել է այս բաշխումը էմպիրիկ ճանապարհով:

Մասնավոր դեպքում, երբ n-ը հավասար է մեկի, (160)-ից ստանում ենք

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+z^2},\qquad -\infty<z<+\infty \tag{161}$$

խտությունը, որը Կոշու բաշխման խտությունն է։ Հեշտ է տեսնել, որ Կոշու հավանականությունների բաշխմանն է հետևում $\omega=\frac{X}{|Y|}$ *պատահական մեծությունը, որտեղ X-ը և Y-ը ունեն (0,1) պարամետրերով հավանականությունների նորմալ բաշխում։*

33. Խնդիրներ

1. Մետաղյա դրամը նետվում է երկու անգամ։ Կազմել գերբի հանդես գալու թվի բաշխման օրենքը։

2. Վեց դետալներից չորսը խոտան են։ Կազմել պատահականորեն վերցված (չվերադարձվող սխեմայով) երեք դետալների թվում եղած խոտան դետալների թվի բաշխման օրենքը։

3. Սարքի անխափան աշխատանքի ժամանակամիջոցը X պատահական մեծություն է, որն ունի հավանականությունների $F(x)=1-e^{-\frac{x}{T}}$ $(x\geq 0,\ T>0)$ *բաշխման ֆունկցիա։*

Գտնել անխափան աշխատանքի ժամանակամիջոցի T-ից ոչ պակաս լինելու հավանականությունը։

4. X պատահական մեծությունն ունի հավանականությունների բաշխման հետևյալ ֆունկցիան՝

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ x^2, & 0<x\leq 1\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Գտնել 4 անկախ փորձերի ընթացքում այդ պատահական մեծության ընդունած արժեքների երկու անգամ (0,25; 0,75) միջակայքում գտնվելու հավանականությունը։

5. X պատահական մեծությունը ենթարկվում է հավանականությունների նորմալ բաշխմանը՝ $a=0$ *և* σ *պարամետրերով. հայտնի* է $P(-a \leq X < a) = 0{,}5$ հավանականությունը: Գտնել σ պարամետրը և խտության արտահայտությունը:

6. (X, Y) պատահական վեկտորն ունի հետևյալ խտությունը՝

$$f(x,y) = \frac{a}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}.$$

գտնել *1)* a գործակիցը.

2) X և Y պատահական մեծությունների միաչափ խտության ֆունկցիաները: Պարզել X և Y պատահական մեծությունների կախվածության հարցը:

7. (X, Y, Z) պատահական վեկտորը հավասարաչափ է բաշխված $2H$ բարձրության և հիմքի R շառավիղ ունեցող գլանում, որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, ծնիչը զուգահեռ է OZ առանցքին: Գտնել այդ վեկտորի յուրաքանչյուր պրոյեկցիայի բաշխման խտության ֆունկցիան և պարզել այդ պրոյեկցիաների անկախության հարցը:

8. X պատահական մեծությունն ունի $f(x)$ $(-a < x < a)$ խտությունը:

Գտնել՝

1) $Y = 2X$ և *2)* $Y = -2X$ պատահական մեծությունների խտության ֆունկցիաները:

9. Ենթադրելով, որ շրջանի շառավիղը հավասարաչափ է բաշխված (a, b) հատվածում, գտնել շրջանի մակերեսի բաշխման ֆունկցիան:

10. X-ը և Y-ը անկախ պատահական մեծություններ են հետևյալ բաշխման օրենքներով՝

X՝	−1,	1
	0,4,	0,6,

Y՝	0,	1,	2
	0,2	0,4	0,4:

Գտնել $X + Y$ և $X \cdot Y$ պատահական մեծությունների բաշխման օրենքները:

11. X պատահական մեծության խտությունը $f(x)$ է. գտնել $Y = \min(X, X^2)$ (այսինքն՝ $Y = X$, եթե $X < X^2$ և $Y = X^2$, եթե $X^2 < X$) պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:

12. Գտնել երկու անկախ ցուցչային բաշխումների ենթարկվող պատահական մեծությունների տարբերության բաշխման խտության ֆունկցիան:

IV ԳԼՈՒԽ

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐԸ

Մինչև այժմ պատահական մեծությունները բնութագրվում էին իրենց հավանականությունների բաշխման ֆունկցիաներով։ Այս գլխում ծանոթանանք պատահական մեծությունների թվային բնութագրիչների հետ՝ մաթեմատիկական սպասման, դիսպերսիայի և, ընդհանրապես, մոմենտների հետ:

34. Պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը կամ միջին արժեքը: *Դիցուք տրված է* X *դիսկրետ պատահական մեծությունը.*

$$X\text{՝}\quad x_1,\quad x_2,\ \cdots\ x_n$$

$$p_1,\quad p_2,\ \cdots\ p_n\text{։}$$

Դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասում կամ միջին արժեք կոչվում է այդ մեծության բոլոր հնարավոր արժեքների և համապատասխան հավանականությունների արտադրյալների գումարը:

X *պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը նշանակելով* E(X)*-ով, ըստ սահմանման կունենանք*

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\text{։} \qquad (162)$$

Օրինակ 1. Վիճակախաղում շահումները բաշխված են հետևյալ կերպ.

m_1 *շահում, յուրաքանչյուրը* x_1 *ռուբլու արժողությամբ,*

m_2 » » x_2 » »

. . . . . .

m_k » » x_k » »,

որտեղ $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. որոշել շահումի միջին արժեքն այդ վիճակախաղում մի տոմսի համար:

Շահումի X մեծությունը կլինի պատահական մեծություն՝ հետևյալ բաշխման օրենքով.

$$X' \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_k$$

$$\frac{m_1}{n}, \quad \frac{m_2}{n}, \quad \ldots \quad \frac{m_k}{n}.$$

ուստի շահումի մաթեմատիկական սպասումը կլինի

$$E(X) = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \cdots + x_k \frac{m_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{n},$$

Օրինակ 2. Երկու մարդ՝ A և B, մասնակցում են խաղին հետևյալ պայմաններով. A-ն խաղաքարտերի ծրարից (որը պարունակում է 36 քարտ) պատահական ձևով հանում է մի քարտ. եթե այդ քարտը ստացվի պատկեր, շահում է 3 ռուբլի, իսկ եթե պատկեր չստացվի, կորցնում է 1 ռուբլի: Որոշել A խաղացողի շահումի մաթեմատիկական սպասումը:

A խաղացողի X շահումը պատահական մեծություն է, որի հնարավոր արժեքներն են 3 և −1: A խաղացողի համար 3 ռուբլի շահելու հավանականությունը հավասար է պատկերի հանդես գալու հավանականությանը, այսինքն՝ $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, իսկ 1 ռուբլի կորցնելու հավանականությունը՝ $\frac{2}{3}$-ի:

Ուստի A խաղացողի X շահումի բաշխման օրենքը կլինի՝

$$X' \quad 3, \quad -1$$

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3},$$

Հետևաբար, որոնելի մաթեմատիկական սպասումը՝

$$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ ռուբլի:}$$

Օրինակ 3. Պատահարի հավանականությունը տվյալ փորձում հավասար է p-ի. որոշել պատահարի երևումների թվի մաթեմատիկական սպասումը այդ փորձում:

Մի փորձում պատահարի երևումների X թիվը պատահական մեծություն է, որի հնարավոր արժեքներն են 0 և 1, A պատահարի՝ մի փորձի ընթացքում 0 անգամ իրականանալու հավանականությունը հավասար է (1—p)-ի, իսկ 1 անգամ իրականանալու հավանականությունը՝ p-ի։ Հետևաբար, որոնելի մաթեմատիկական սպասումը՝

$$EX = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p. \tag{163}$$

որևէ փորձում A պատահարի երևումների թվի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է պատահարի հանդես գալու հավանականությանը այդ փորձում։

Եթե տրված է պատահական մեծություն, որն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$$\begin{array}{l} x_1, \ x_2, \cdots x_n \\ p_1, \ p_2, \cdots p_n, \end{array}$$

ապա ցանկացած f(X) ֆունկցիայի հավանականությունների բաշխման օրենքը կլինի

$$\begin{array}{l} f(x_1), \ f(x_2), \cdots f(x_n) \\ p_1, \ p_2, \cdots p_n, \end{array}$$

որտեղ առաջին տողում մի շարք i և j ինդեքսների դեպքում կարող է լինել $f(x_i) = f(x_j)$։

Հետևաբար, f(X)-ի մաթեմատիկական սպասումը կամ միջին արժեքը կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝

$$Ef(X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) p_i. \tag{164}$$

Եթե տրված է (X, Y) երկչափ պատահական մեծությունը, ապա ցանկացած φ(X, Y) ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը կարտահայտվի

$$E\varphi(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \varphi(x_i, y_k) \, p_{ik} \tag{165}$$

բանաձևով, որտեղ $p_{ik} = P(X = x_i \cap Y = y_k)$։

Եթե $Y = y_k$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$, *ապա* X *պատահական մեծության պայմանական մաթեմատիկական սպասումը (98)-ի համաձայն կլինի*

$$E_y(X) = E_{y_k}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{ik}\, x_i}{p_{\cdot k}}\cdot \quad (k = 1, 2, \cdots m)\text{։}$$

Նույն ձևով, եթե $X = x_i$ $(i = 1, 2, \cdots n)$, *ապա* Y *պատահական մեծության պայմանական մաթեմատիկական սպասումը (99)-ի համաձայն կլինի*

$$E_x(Y) = E_{x_i}(Y) = \sum_{k=1}^{m} \frac{p_{ik}\, y_k}{p_{i\cdot}}, \qquad (i = 1, 2, \cdots n)\text{։}$$

Պարզ է, որ

$$E\,E_y(X) = E(X)$$

և

$$E\,E_x(Y) = E(Y)\text{։}$$

Դիտարկենք դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման հատկությունները։

1. Եթե պատահական մեծությունը հաստատուն է, ապա նրա մաթեմատիկական սպասումը հավասար է հենց իրեն, *այսինքն՝*

$$E(C) = C, \tag{166}$$

որովհետև հաստատուն մեծությունը կարող է դիտվել որպես պատահական մեծություն, որն ունի մեկ հնարավոր արժեք, որի հավանականությունը հավասար է միավորի։

2. Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել մաթեմատիկական *սպասման նշանի տակից, այսինքն՝*

$$E(CX) = C\,E(X)\text{։} \tag{167}$$

Իրոք, եթե X *պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝*

$$X\text{՝}\quad x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n$$

$$p_1,\ p_2,\ \cdots\ p_n,$$

ապա CX *մեծությունը կունենա հետևյալ բաշխման օրենքը՝*

$$Cx_1,\ Cx_2,\ \cdots\ Cx_n$$

$$p_1,\ p_2,\ \cdots\ p_n,$$

ուստի

$$E(CX) = \sum_{i=1}^{n} Cx_i p_i = C \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = CE(X)։$$

3. Պատահական մեծությունների գումարի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումների գումարին, այսինքն՝

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_s) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_s)։ \quad (168)$$

Ապացուցենք այս հատկությունը երկու պատահական մեծությունների՝ X-ի և Y-ի համար, այսինքն՝ ցույց տանք, որ

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)։$$

Ենթադրենք, թե (X, Y) երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը որոշվում է p_{ik} հավանականություններով, այսինքն՝

$$p_{ik} = P(X = x_i \cap Y = y_k).$$

այդ դեպքում (164) բանաձևի համաձայն կունենանք

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (x_i + y_k)\, p_{ik}։$$

Տրոհելով այս գումարը երկու մասի, գումարման կարգը երկրորդ գումարի մեջ փոփոխելով և (94) ու (95) բանաձևերից օգտվելով, կստանանք

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} x_i p_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} y_k p_{ik} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{m} p_{ik} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} y_k \sum_{i=1}^{n} p_{ik} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i\cdot} + \sum_{k=1}^{m} y_k p_{\cdot k} = E(X) + E(Y)։$$

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակը կիրառելով, կարելի է այս հատկությունը տարածել ցանկացած վերջավոր թվով պատահական մեծությունների վրա։

4. Անկախ պատահական մեծությունների արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումների արտադրյալին, այսինքն՝

$$E(X_1 X_2 \cdots X_s) = E(X_1) E(X_2) \cdots E(X_s): \qquad (169)$$

Նախ ապացուցենք այս հատկությունը երկու անկախ պատահական մեծությունների համար, այսինքն՝ ցույց տանք, որ

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y):$$

Դիցուք X և Y պատահական մեծությունները համապատասխանաբար ունեն հետևյալ բաշխման օրենքները՝

$$\begin{array}{llll} X' & x_1, \; x_2, \cdots x_n & \qquad Y' & y_1, \; y_2, \cdots y_m \\ & p_{1\cdot}, \; p_{2\cdot}, \cdots p_{n\cdot}, & & p_{\cdot 1}, \; p_{\cdot 2}, \cdots p_{\cdot m}: \end{array}$$

Քանի որ X-ը և Y-ը անկախ են, ապա (X,Y) երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը լրիվին որոշվում է, և

$$p_{ik} = P(X = x_i \cap Y = y_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_k) = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot k}:$$

$$i = 1, 2, \cdots n,$$

$$k = 1, 2, \cdots m:$$

Այդ դեպքում քննարկվող մաթեմատիկական սպասումը կլինի

$$E(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} x_i y_k p_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} x_i y_k p_{i\cdot} \, p_{\cdot k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_{i\cdot} \, x_i \sum_{k=1}^{m} p_{\cdot k} y_k = E(X) \cdot E(Y):$$

Ենթադրենք, թե նշված հատկությունն ապացուցված է $s-1$ մեծությունների համար, այսինքն՝

$$E(X_1 X_2 \cdots X_{s-1}) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdots E(X_{s-1}),$$

ապացուցենք, որ այն ճիշտ կլինի նաև s մեծությունների համար:

Իրոք, $X_1 \cdot X_2 \cdots X_s$ *արտադրյալը դիտելով որպես երկու անկախ պատահական մեծությունների՝* $X_1 \cdot X_2 \cdots X_{s-1}$-*ի և* X_s-*ի, արտադրյալ, կստանանք*

$$E(X_1X_2 \cdots X_{s-1}X_s) = E(X_1X_2 \cdots X_{s-1}) \cdot E(X_s) =$$
$$= E(X_1) \cdot E(X_2) \cdots E(X_{s-1})E(X_s),$$

այսինքն՝ այդ հատկությունը ճիշտ է նաև s *պատահական մեծությունների համար։*

Օրինակ 4. Որոշել բացված կետերի գումարի մաթեմատիկական սպասումը s *զառերի նետման ժամանակ։*

Յուրաքանչյուր զառի վրա բացված կետերի թիվը համապատասխանաբար նշանակենք $X_1, X_2, \cdots X_s$*։ Այս պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրն ունի հավանականությունների նույն բաշխման օրենքը.*

$$\begin{array}{lcccccc} X_k & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}; \end{array} \qquad k = 1, 2, \cdots s$$

Ուստի

$$E(X_k) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{7}{2}, \quad k = 1, 2, \cdots s.$$

Հետևաբար, ըստ (168) բանաձևի կստանանք

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_s) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_s) = \frac{7s}{2},$$

Եթե դիսկրետ պատահական մեծության հնարավոր արժեքների բազմությունը հաշվելի է և հետևյալ բաշխման օրենքն է

$$\begin{array}{lllll} X & x_1 & x_2, & \cdots x_n, & \cdots \\ & p_1, & p_2, & \cdots p_n, & \cdots \end{array}$$

ապա X դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասում կամ միջին արժեք կոչվում է հետևյալ շարքի գումարը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n, \qquad (170)$$

եթե միայն այդ շարքը բացարձակ զուգամիտում է (այսինքն՝ զուգամիտում է $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| p_n$ շարքը):

Պատահական X մեծության մաթեմատիկական սպասումն առաջվա նման նշանակելու ենք E(X), այնպես որ

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n.$$

Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ *շարքը տարամիտում է կամ բացարձակ զուգամիտող չէ (այսինքն՝ տարամիտում է* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| p_n$ *շարքը), ապա ասում ենք, որ պատահական մեծությունը մաթեմատիկական սպասում չունի։*

Եթե φ(X) ֆունկցիան որոշված է X պատահական մեծության հնարավոր արժեքների բազմության վրա, ապա նրա մաթեմատիկական սպասումը կամ միջին արժեքը կլինի

$$E[\varphi(X)] = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) p_n, \qquad (171)$$

եթե միայն $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| p_n$ *շարքը զուգամիտում է։*

Ակներև է, որ φ(x) ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը միշտ գոյություն ունի, եթե այդ ֆունկցիան սահմանափակ է։

Եթե երկու փոփոխականների φ(x, y) ֆունկցիան որոշված է երկչափ պատահական մեծության հնարավոր արժեքների բազմության վրա, ապա նրա մաթեմատիկական սպասումը կլինի

$$E\varphi(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(x_n, y_m) p_{nm}, \qquad (172)$$

եթե հավասարության աջ մասում գտնվող շարքը բացարձակ զուգամետ է:

Մաթեմատիկական սպասումների հատկությունները, որոնք սահմանվեցին վերջավոր թվով արժեքներ ունեցող պատահական մեծությունների համար, ուժի մեջ են մնում նաև դիսկրետ պատահական մեծությունների համար, որոնց հնարավոր արժեքները կազմում են հաշվելի բազմություն:

Ենթադրենք, թե անընդհատ պատահական X մեծությունն ունի f(x) հավանականությունների բաշխման խտություն: Եթե

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է, այսինքն՝ զուգամիտում է հետևյալ ինտեգրալը

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x)\,dx,$$

ապա նա կոչվում է X անընդհատ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասում կամ միջին արժեք: X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը նշանակելով E(X)-ով, կունենանք

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx: \qquad (173)$$

Եթե X անընդհատ պատահական մեծությունը բաշխված է [a, b] միջակայքում, ապա մաթեմատիկական սպասումը (173)-ի համաձայն կլինի

$$E(X) = \int_{a}^{b} x\, f(x)\,dx, \qquad (174)$$

քանի որ այս դեպքում $f(x)=0$, երբ $x<a$ կամ $x>b$:

Անընդհատ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման սահմանումը դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման սահմանման բնական ընդլայնումն է: Իրոք, եթե

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

թվերով $[a, b]$ միջակայքը տրոհենք n մասերի և դիտարկենք X_n դիսկրետ պատահական մեծությունը, որի հնարավոր արժեքներն են

$$x_0, \ x_1, \ x_2, \ \ldots \ x_{n-1},$$

իսկ համապատասխան հավանականությունները՝

$$f(x_k) \ (x_{k+1} - x_k) \qquad (k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n-1),$$

Նկատում ենք, որ

$$\int_a^b x \, f(x) \, dx = E(X)$$

հանդիսանում է X_n պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման՝

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k f(x_k)(x_{k+1} - x_k),$$

սահմանը, երբ $n \to \infty$ և $\max\limits_{1 \leq k \leq n-1} \Delta x_k \to 0$:

Եթե $\varphi(x)$ ֆունկցիան X պատահական մեծության անընդհատ ֆունկցիան է, նրա մաթեմատիկական սպասումը կներկայանա հետևյալ ինտեգրալով՝

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \, f(x) \, dx, \tag{175}$$

եթե միայն այս ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է:

Պատահական մեծության համար, որ բաշխված է $[a, b]$ միջակայքում, $\varphi(x)$ ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$E[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) \, f(x) \, dx: \tag{176}$$

Երբ $Y = y$, X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը (117)-ի համաձայն կլինի

$$E_y(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot f(x, y)}{f_2(y)} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x/y) \, dx, \tag{177}$$

Նման ձևով, երբ $X=x$, Y պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը կլինի

$$E_x(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(x,y)}{f_1(x)}\,dy=\int_{-\infty}^{-\infty} y\,f_2(y/x)\,dy\text{։} \qquad (178)$$

Եթե (X, Y) երկչափ պատահական մեծությունն ունի բաշխման անընդհատ $f(x, y)$ խտությունը, իսկ $\varphi(X, Y)$ ֆունկցիան X և Y պատահական մեծությունների անընդհատ ֆունկցիան է, այդ $\varphi(X, Y)$ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը որոշվում է մեկ պատահական մեծության ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասման նմանողությամբ, այսինքն՝

$$E\varphi(X, Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y)f(x, y)\,dx\,dy \qquad (179)$$

բանաձևով, եթե միայն այս անիսկական ինտեգրալը զուգամիտում է, այն էլ բացարձակ կերպով։

Մաթեմատիկական սպասումների այն հատկությունները, որոնք ապացուցվել են դիսկրետ պատահական մեծությունների համար, ճշտությամբ տարածվում են նաև անընդհատ պատահական մեծությունների վրա։

1. Հաստատուն գործակիցը կարելի է դուրս բերել մաթեմատիկական սպասման նշանի տակից՝

$$E(CX)=CE(X), \qquad (180)$$

քանի որ

$$E(CX)=\int_{-\infty}^{+\infty}Cx\,f(x)\,dx=C\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)\,dx=C\cdot E(X)\text{։}$$

2. Պատահական մեծությունների գումարի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ մեծությունների մաթեմատիկական սպասումների գումարին, այսինքն՝

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_s)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_s)\text{։} \qquad (181)$$

Ապացուցենք այս հատկությունը X և Y երկու պատահական մեծությունների համար։ Եթե $f(x, y)$-ը (X, Y) երկչափ պատահական մեծության բաշխման խտությունն է, ըստ (179) բանաձևի

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\,dx\,dy.$$

X և Y պատահական մեծությունների բաշխման խտությունները համապատասխանաբար նշանակելով $f_1(x)$ և $f_2(y)$, ակներև ձևափոխություններից հետո կստանանք

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}ydy\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)dx+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}y\,f_2(y)dy=E(X)+E(Y).$$

3. Անկախ պատահական մեծությունների արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է նրանց մաթեմատիկական սպասումների արտադրյալին, այսինքն՝

$$E(X_1\cdot X_2\cdots X_s)=E(X_1)\cdot E(X_2)\cdots E(X_s). \qquad (182)$$

Ապացուցենք այս հատկությունը երկու պատահական մեծությունների համար։ Ըստ (179) բանաձևի ունենք

$$E(X\cdot Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,dx\,dy.$$

Քանի որ ըստ պայմանի X-*ը և* Y-*ը անկախ պատահական մեծություններ են, ուրեմն*

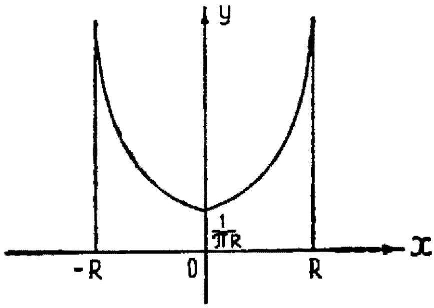
$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y),$$

որտեղ $f_1(x)$-*ը և* $f_2(y)$-*ը համապատասխանաբար* X *և* Y *պատահական մեծությունների բաշխման խտություններն են։ Ուստի*

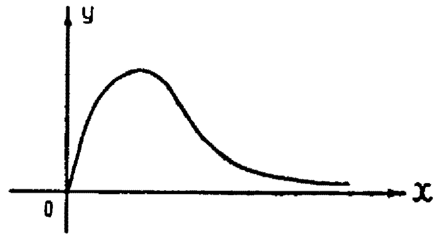
$$E(X\cdot Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,f_1(x)\,f_2(y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)\,dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_2(y)dy=$$

$$=E(X)\cdot E(Y).$$

Օրինակ 1. Որոշենք X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, եթե նա ունի հավանականությունների բաշխման հետևյալ խտությունը (նկ. 27)՝



Նկ. 27



Նկ. 28

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}, \qquad x\in(-R,\ R)$$

$$f(x)=0, \qquad x\overline{\in}(-R,\ R)։$$

Ըստ (174) բանաձևի ունենք

$$E(X)=\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=0։$$

Օրինակ 2. Պատահական X մեծությունն ունի Ռելեի հավանականությունների բաշխման խտությունը (նկ. 28).

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0 & x\leq 0։\end{cases}$$

Որոշել նրա մաթեմատիկական սպասումը։

Ունենք՝

$$E(X)=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma^2}\left(-\sigma^2x\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}+\sigma^2\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\right)=$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Օրինակ 3. X *պատահական մեծությունը հետևում է Կոշու հավանականությունների բաշխմանը՝*

$$f(x) = \frac{H}{\pi} \frac{1}{x^2 + H^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

որոշել այդ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը։

Ունենք

$$E(X) = \frac{H}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2 + H^2},$$

եթե միայն այս ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է։

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|\,dx}{x^2 + H^2} = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2 + H^2}$$

ինտեգրալը տարամիտում է, քանի որ գոյություն չունի վերջավոր սահմանը՝

$$\lim_{x \to \infty} \ln(x^2 + H^2)\text{։}$$

Հետևաբար, պատահական մեծությունը, որն ունի Կոշու բաշխումը, մաթեմատիկական սպասում չունի։

35. Պատահական մեծության դիսպերսիան: *Պատահական մեծության մյուս կարևոր բնութագիրը նրա դիսպերսիան է։* Պատահական մեծության դիսպերսիա կոչվում է պատահական մեծության՝ իր մաթեմատիկական սպասումից ունեցած շեղման քառակուսու մաթեմատիկական սպասումը: *Պատահական* X *մեծության դիսպերսիան նշանակելով* D(X)*-ով, ըստ սահմանման կունենանք*

$$D(X) = E[X - E(X)]^2\text{։} \qquad (183)$$

Եթե դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$$\begin{array}{ll} X\text{՝} & x_1, \; x_2, \; \cdots \; x_n, \; \cdots \\ & p_1, \; p_2, \; \cdots \; p_n, \; \cdots, \end{array}$$

ապա

$$D(X) = [x_1 - E(X)]^2 p_1 + [x_2 - E(X)]^2 p_2 + \cdots + \\ + [x_n - E(X)]^2 p_n + \cdots$$

կամ

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2 p_i։ \tag{184}$$

Անընդհատ X *պատահական մեծության դիսպերսիան (175)-ի համաձայն կներկայանա հետևյալ բանաձևով՝*

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\,dx, \tag{185}$$

որտեղ f(x)*-ը պատահական մեծության խտությունն է։*

Պատահական մեծության դիսպերսիան այնքան ավելի մեծ կլինի, որքան միջին հաշվով ավելի շատ կշեղվեն պատահական մեծության առանձին արժեքները իրենց մաթեմատիկական սպասումից։ Մասնավորապես, եթե պատահական մեծությունը հաստատուն է, նրա դիսպերսիան, ինչպես այդ հետևում է սահմանումից, հավասար է զրոյի։ Այսպիսով, պատահական մեծության դիսպերսիան բնութագրում է այդ մեծության շեղման աստիճանը իր մաթեմատիկական սպասումից, կամ, ինչպես ասում են, նրա ցրումը։

Պատահական X *մեծության դիսպերսիան հաշվելու համար երբեմն հարմար է օգտվել հետևյալ բանաձևից՝*

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2, \tag{186}$$

այսինքն՝ պատահական մեծության դիսպերսիան հավասար է այդ մեծության քառակուսու մաթեմատիկական սպասումի՝ հանած այդ նույն մեծության մաթեմատիկական սպասման քառակուսին։

Իրոք, օգտվելով դիսպերսիայի սահմանումից և կիրառելով մաթեմատիկական սպասումների (166), (167) և (168) հատկությունները, կունենանք

$$D(X)=E\{X^2-2E(X)\cdot X+[E(X)]^2\}=E(X)^2-2E(X)\cdot E(X)+$$

$$+[E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2։$$

Կանգ առնենք դիսպերսիայի պարզագույն հատկությունների ուսումնասիրության վրա։

1) Հաստատուն մեծության դիսպերսիան հավասար է զրոյի՝

$$D(C)=0։ \tag{187}$$

2) Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել դիսպերսիայի նշանի տակից քառակուսի աստիճանով, այսինքն՝

$$D(CX) = C^2 D(X)։ \qquad (188)$$

Իրոք, կիրառելով մաթեմատիկական սպասումների հատկությունները, ստանում ենք

$$D(CX) = E[CX - E(CX)]^2 = E[CX - C \cdot E(X)]^2 = E\{C^2[X - E(X)]^2\} =$$
$$= C^2 \cdot E[X - E(X)]^2 = C^2 \cdot D(X)։$$

3) Անկախ պատահական մեծությունների գումարի դիսպերսիան հավասար է այդ մեծությունների դիսպերսիաների գումարին, այսինքն՝

$$D(X_1 + X_2 + \cdots + X_s) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_s)։ \qquad (189)$$

Ապացուցենք այս հատկությունը առաջին հերթին երկու անկախ պատահական մեծությունների համար, այսինքն՝ ապացուցենք, որ

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)։$$

Ըստ սահմանման ունենք

$$D(X + Y) = E[(X + Y) - E(X + Y)]^2 = E\{[X - E(X)] +$$
$$+ [Y - E(Y)]\}^2 = E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2 +$$
$$+ 2E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\}։$$

Քանի որ X *և* Y *պատահական մեծություններն անկախ են, ապա անկախ կլինեն նաև* $X - E(X)$ *և* $Y - E(Y)$ *պատահական մեծությունները, ուստի (169) բանաձևի համաձայն կստանանք*

$$E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E[X - E(X)] \cdot E[Y - E(Y)] =$$
$$= [E(X) - E(X)] \cdot [E(Y) - E(Y)] = 0$$

և հետևաբար,

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)։$$

Այժմ ենթադրենք, թե (189) հավասարությունը ճիշտ է $(s - 1)$ *գումարելիների համար, այսինքն՝*

$$D(X_1 + X_2 + \cdots + X_{s-1}) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + (X_{s-1}).$$

ապացուցենք, որ այն ճիշտ կլինի նաև s *գումարելիների համար։*

Քանի որ $X_1+X_2+\cdots+X_{s-1}$ *և* X_s *պատահական մեծությունները անկախ են, ապա*

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_{s-1}+X_s)=D(X_1+X_2+\cdots+X_{s-1})+$$
$$+D(X_s)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_{s-1})+D(X_s),$$

ինչ պահանջվում էր ապացուցել։

Պատահական մեծության դիսպերսիայի քառակուսի արմատի արժեքը կոչվում է միջին քառակուսային շեղում: *Նշանակելով այն* $\sigma(X)$*-ով, կունենանք*

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{E(X-E(X))^2}\text{։} \tag{190}$$

Եթե $Y=y_k\ (k=1,2,\cdots,m\cdots)$, *ապա դիսկրետ* X *պատահական մեծության պայմանական դիսպերսիան (98)-ի համաձայն կլինի*

$$D_y(X)=D_{y_k}(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ik}}{p_{.k}}(x_i-E_y(X))^2,\ k=1,2,\cdots,m\text{։} \tag{191}$$

Նման ձևով, եթե $X=x_i\ (i=1,2,\cdots n\cdots)$, *ապա դիսկրետ* Y *պատահական մեծության պայմանական դիսպերսիան (99)-ի համաձայն կլինի*

$$D_x(Y)=D_{x_i}(Y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_{ik}}{p_{i.}}[y_k-E_x(Y)]^2,\quad i=1,2,\cdots,n\text{։} \tag{192}$$

Երբ $Y=y$, X *անընդհատ պատահական մեծության պայմանական դիսպերսիան (132)-ի համաձայն կլինի*

$$D_y(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E_y(X)]^2\frac{f(x,y)}{f_2(y)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E_y(X)]^2 f_1(x/y)dx\text{։} \tag{193}$$

Նման ձևով, եթե $X=x$, *ապա* Y *անընդհատ պատահական մեծության պայմանական դիսպերսիան կլինի*

$$D_x(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}[y-E_x(Y)]^2\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy=\int_{-\infty}^{\infty}[y-E_x(Y)]^2 f_2(y/x)dy\text{։} \tag{194}$$

Օրինակ 1. Որոշել X *պատահական մեծության դիսպերսիան, եթե նա ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝*

$$X\text{՝}\quad 1,\quad 3,\quad 6$$
$$\quad 0{,}2,\quad 0{,}5,\quad 0{,}3\text{։}$$

Նախ որոշում ենք մաթեմատիկական սպասումը՝

$$E(X) = 1\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}5 + 6\cdot 0{,}3 = 3{,}5\text{։}$$

$[X - E(x)]^2$ *պատահական մեծությունը կունենա հետևյալ բաշխման օրենքը՝*

$$6{,}25,\quad 0{,}25,\quad 6{,}25,$$
$$0{,}2\quad 0{,}5\quad 0{,}3\text{։}$$

Այդ պատճառով որոնելի դիսպերսիան կլինի

$$D(x) = 6{,}25\cdot 0{,}2 + 0{,}25\cdot 0{,}5 + 6{,}25\cdot 0{,}3 = 3{,}25\text{։}$$

Օրինակ 2. Որոշել X *պատահական մեծության դիսպերսիան, եթե նա ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝*

$$-2,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 4,\quad 6,\quad 8,\quad 16,$$
$$0{,}05\quad 0{,}05\quad 0{,}2\quad 0{,}3\quad 0{,}15\quad 0{,}1\quad 0{,}1\quad 0{,}05\text{։}$$

Ունենք

$$E(X) = -2\cdot 0{,}05 + 0{,}2 + 2\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}15 + 6\cdot 0{,}1 + 8\cdot 0{,}1 +$$
$$+ 16\cdot 0{,}05 = 3{,}5\text{։}$$

Պատահական X^2 *մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝*

$$X^2\text{՝}\quad 4,\quad 0,\quad 1,\quad 4,\quad 16,\quad 36,\quad 64,\quad 256$$
$$0{,}05,\quad 0{,}05,\quad 0{,}2,\quad 0{,}3,\quad 0{,}15,\quad 0{,}1\quad 0{,}1\quad 0{,}05.$$

ուստի

$$E(X^2) = 4\cdot 0{,}05 + 1\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}3 + 16\cdot 0{,}15 + 36\cdot 0{,}1 + 64\cdot 0{,}1 +$$
$$+ 256\cdot 0{,}05 = 26{,}8\text{։}$$

Հետևաբար, (186) բանաձևի համաձայն որոնելի դիսպերսիան կլինի

$$D(X) = 26{,}8 - (3{,}5)^2 = 14{,}55\text{։}$$

Դիտարկված երկու պատահական մեծություններն ունեն միևնույն մաթեմատիկական սպասումը. երկրորդ պատահական մեծության դիսպերսիան մեծ է առաջինի դիսպերսիայից։ Դա բնական է, որովհետև նրա ցրումն իր մաթեմատիկական սպասման շուրջը ավելի մեծ է, քան առաջին պատահական մեծությանը։

Օրինակ 3. Որոշել պատահարի երևումների թվի դիսպերսիան մի փորձի ընթացքում։

A պատահարի երևումների թիվը՝ X *ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝*

$$X\text{՝}\quad \begin{matrix} 0, & 1 \\ q, & p, \end{matrix}$$

որտեղ p-*ն և* q-*ն համապատասխանաբար* A *և* $\overline{A}$ *պատահարների հանդես գալու հավանականություններն են տվյալ փորձում։ Պարզ է, որ* $E(X)=p$ *և* $[X-E(X)]^2$ *պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝*

$$\begin{matrix} p^2, & q^2 \\ q, & p. \end{matrix}$$

ուստի որոնելի դիսպերսիան կլինի

$$D(X)=p^2q+q^2p,$$

կամ

$$D(X)=pq, \tag{195}$$

այսինքն՝ մեկ փորձում պատահարի երևումների թվի դիսպերսիան հավասար է այդ նույն փորձում տվյալ պատահարի և նրա հակադիր պատահարի հավանականությունների արտադրյալին։

Օրինակ 4. s *զառ գցելիս որոշել բացված կետերի գումարի դիսպերսիան։*

Յուրաքանչյուր զառի վրա բացված կետերի թիվը համապատասխանաբար նշանակենք $X_1, X_2, \cdots X_s$-*ով։ Այս պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրն ունի նույն բաշխման օրենքը՝*

$$X_k\text{՝}\quad \begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, \end{matrix} \qquad k=1,2,\cdots s$$

ընդ որում

$$E(X_k)=\frac{7}{2},$$

(186)-ի համաձայն կունենանք

$$D(X_k)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$$

$$k=1,2,\cdots s։$$

Այդ պատճառով (189) բանաձևի հիման վրա գումարի դիսպերսիան կլինի

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_s)=\frac{35}{12}s։$$

Օրինակ 5. Եթե X պատահական մեծությունն ունի

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{R^2-x^2}}, & x \in (-R, R), \\ 0, & x \overline{\in} (-R, R) \end{cases}$$

խտությունը, ապա $EX = 0$, *իսկ դիսպերսիան կլինի*

$$D(X) = E(X^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = -\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx +$$

$$+\frac{R^2}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = R^2 - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi R^2}{2} = \frac{R^2}{2},$$

Օրինակ 6. Եթե X պատահական մեծությունն ունի

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & 0 < x < +\infty \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

խտությունը, ապա $E(X) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, *իսկ դիսպերսիան կլինի*

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx - \frac{\pi\sigma^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(-x^2\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_0^{\infty} + 2\sigma^2\int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx\right) - \frac{\pi\sigma^2}{2} = 2\int_0^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx -$$

$$-\frac{\pi\sigma^2}{2} = 2\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{2} = \frac{\sigma^2\cdot(4-\pi)}{2},$$

36. Պատահական մեծության մոմենտները: Պատահական մեծության k կարգի սկզբնական մոմենտ կոչվում է պատահական մեծության k-երորդ աստիճանի մաթեմատիկական սպասումը.

$$V_k = E(X^k), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{196}$$

Եթե X-ը դիսկրետ պատահական մեծություն է՝

$$X\text{՝} \quad \begin{matrix} x_1, & x_2, & \cdots & x_n, & \cdots \\ p_1, & p_2, & \cdots & p_n, & \cdots, \end{matrix}$$

ապա

$$V_k = x_1^k p_1 + x_2^k p_2 + \cdots + x_n^k p_n + \cdots$$

կամ

$$V_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i: \qquad (197)$$

Եթե X-ը անընդհատ պատահական մեծություն է՝ f(x) խտությամբ, ապա

$$V_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx: \qquad (198)$$

k-ին 0, 1, 2 ··· արժեքները տալով, կստանանք զրոյական կարգի, առաջին կարգի, երկրորդ կարգի և այլ մոմենտներ՝

$$V_0 = 1,$$

$$V_1 = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

$$V_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

դիսկրետ պատահական մեծության և

$$V_0 = 1,\ V_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx, \quad V_2 = E X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx, \cdots$$

անընդհատ պատահական մեծության համար։

Նկատենք, որ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը առաջին կարգի սկզբնական մոմենտն է։

Պատահական X մեծության փոխարեն քննարկելով X − E(X) շեղումը, հանգում ենք կենտրոնական մոմենտների հասկացությանը։ k կարգի կենտրոնական մոմենտ կոչվում է X − E(X) շեղման k աստիճանի մաթեմատիկական սպասումը, այսինքն՝

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \qquad (199)$$

Դիսկրետ պատահական մեծության համար կունենանք

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^k p_i, \qquad (200)$$

իսկ անընդհատ պատահական մեծության համար՝

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f(x)\, dx. \qquad (201)$$

Մասնավորապես՝

$$\mu_0 = 1,$$

առաջին կարգի կենտրոնական մոմենտը հավասար է զրոյի, քանի որ

$$\mu_1 = E[X - E(X)] = E(X) - E(X) = 0.$$

Երկրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը համընկնում է պատահական մեծության դիսպերսիայի հետ՝

$$\mu_2 = E[X - E(X)]^2.$$

Երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը՝

$$\mu_3 = E[X - E(X)]^3,$$

բնութագրում է X պատահական մեծության բաշխման սիմետրիան։

Իրոք, եթե, օրինակ, X պատահական մեծությունն ունի սիմետրիկ բաշխում E(X)-ի նկատմամբ, այսինքն՝ յուրաքանչյուր դրական X − E(X) շեղմանը համապատասխանում է հավասար հավանականությամբ նույնպիսի շեղում՝ մինուս նշանով, ապա երրորդ կենտրոնական մոմենտի համար

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{\infty} [x_i - E(X)]^3 p_i$$

արտահայտության մեջ այդ համապատասխան գումարելիները փոխադարձաբար ոչնչացնում են իրար, և երրորդ կենտրոնական մոմենտն այս դեպքում հավասարվում է զրոյի։ Իսկ եթե երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը զրոյի հավասար չէ, այդ նշանակում է, որ պատահական մեծության բաշխումը սիմետրիկ չէ։ Սիմետրիկ բաշխումների համար ակներև է ոչ միայն այն, որ երրորդ կենտրոնական մոմենտը հավասար է զրոյի, այլև, որ զրոյի են հավասար բոլոր կենտ կարգի կենտրոնական մոմենտները։

Պատահական մեծության ցանկացած k կարգի մոմենտն ունի k աստիճանի չափում, հետևաբար k աստիճանի արմատ k կարգի մոմենտից ունի նույն չափումը, ինչ և պատահական մեծությունը։ Պատահական մեծության սիմետրիայի անչափողական բնութագիրն ստանալու համար դիտարկում են $\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$ մեծությունը. $A = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$ մեծությունը կոչվում է պատահական մեծության սիմետրիայի գործակից: Պատահական մեծության էքսցես կոչվում է $B = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ մեծությունը:

Եթե պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է զրոյի, ապա կենտրոնական մոմենտները համընկնում են սկզբնական մոմենտների հետ: Իսկ ընդհանրապես կենտրոնական մոմենտներն արտահայտվում են սկզբնական մոմենտների միջոցով. արտածենք այդ առնչությունը:

Նշանակելով $E(X) = a$ *և կիրառելով մաթեմատիկական սպասման մեր ապացուցած հատկությունները, կունենանք*

$$\mu_k = E(X-a)^k = E(X^k - C_k^1 a \cdot X^{k-1} + C_k^2 a^2 X^{k-2} - \cdots + (-1)^k a^k) = E(X^k) - C_k^1 a E(X^{k-1}) + C_k^2 a^2 E(X^{k-2}) - \cdots + (-1)^k a^k$$

կամ

$$\mu_k = V_k - C_k^1 a V_{k-1} + C_k^2 a^2 V_{k-2} - \cdots + (-1)^k a^k, \tag{202}$$

Հակադարձաբար, սկզբնական V_k *մոմենտները կարելի է արտահայտել* μ_k *կենտրոնական մոմենտների միջոցով: Դրա համար սկզբնական մոմենտների արտահայտության մեջ* X*-ը փոխարինենք* $(X-a)+a$*-ով. նույն ձևով կստանանք*

$$V_k = E(X^k) = E[(X-a)+a]^k = E[(X-a)^k + C_k^1 (x-a)^{k-1} a + C_k^2 (X-a)^{k-2} a^2 + \cdots + a^k = E[(X-a)^k] + C_k^1 a E[(X-a)^{k-1}] + C_k^2 a^2 E[(X-a)^{k-2}] + \cdots + a^k$$

կամ

$$V_k = \mu_k + a C_k^1 \mu_{k-1} + a^2 C_k^2 \mu_{k-2} + \cdots + a^k, \tag{203}$$

(202) բանաձևում k *ինդեքսին զանազան արժեքներ տալով, գտնում ենք*

$$\mu_0 = 1$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = V_2 - V_1^2$$

$$\mu_3 = V_3 - 3a V_2 + 2a^3,$$

Եթե պատահական X մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը

$$X^{\backprime}\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\cdots n,\cdots$$

$$p_0,\quad p_1,\quad p_2,\quad p_3,\cdots p_n\cdots,$$

ապա

$$\Pi(z)=p_0+p_1z+p_2z^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}p_nz^n. \qquad (206)$$

Այսպիսով, ծնորդ ֆունկցիան կներկայանա որպես աստիճանային շարքի գումար, որը դասավորված է z-ի աստիճաններով, իսկ X պատահական մեծության՝ n արժեքը ընդունելու հավանականությունը՝ z^n-ի գործակիցն է։ Նկատենք, որ քննարկվող աստիճանային շարքն ունի միավորից ոչ պակաս զուգամիտման շառավիղ, քանի որ, երբ $z=1$, ապա

$$p_0+p_1+p_2+\cdots+p_n+\cdots$$

թվային շարքը զուգամետ է, և նրա գումարը հավասար է միավորի։ Հետևաբար, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_nz^n$ շարքը զուգամիտում է (այն էլ բացարձակ կերպով) $-1\leqslant z\leqslant+1$ միջակայքում։

(206) հավասարությունը դիֆերենցելով և ընդունելով $z=1$, կստանանք

$$\Pi'(1)=\sum_{n=0}^{\infty}np_n,\qquad \Pi''(1)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)p_n,$$

$$\Pi'''(1)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(n-2)p_n.$$

Այն շարքերը, որոնք գտնվում են ստացված հավասարությունների աջ մասերում, համապատասխանաբար ներկայացնում են հետևյալ մաթեմատիկական սպասումները.

$$E(X),\quad E[X(X-1)],\qquad E[X(X-1)(X-2)],\cdots$$

ուստի,

$$E(X)=\Pi'(1),\qquad E[X(X-1)]=\Pi''(1),$$

$$E[X(X-1)(X-2)]=\Pi'''(1),\cdots \qquad (207)$$

եթե այդ մաթեմատիկական սպասումները գոյություն ունեն։

Անցնելով X *մեծության սկզբնական մոմենտներին, կունենանք*

$$V_1 = \Pi'(1), \quad V_2 - V_1 = \Pi''(1), \quad V_3 - 3V_2 + 2V_1 = \Pi'''(1), \cdots$$

կամ

$$V_1 = \Pi'(1), \quad V_2 = \Pi'(1) + \Pi''(1), \quad V_3 = \Pi'''(1) + 3\Pi''(1) + \Pi'(1). \tag{208}$$

Օրինակ 1. *Որոշել հավանականությունների ծնորդ ֆունկցիան* A *պատահարի երևումների* m *թվի համար* n *անկախ փորձերի ժամանակ, ինչպես նաև՝ այդ պատահական մեծության առաջին երեք մոմենտները։*

Քանի որ m-*ի յուրաքանչյուր արժեքի հավանականությունն արտահայտվում է*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots n$$

բանաձևով, ուրեմն m *մեծության հավանականությունների ծնորդ ֆունկցիան կլինի*

$$\Pi(z) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} z^m$$

կամ

$$\Pi(z) = (pz + q)^n.$$

Այս ֆունկցիան երեք անգամ դիֆերենցելով և ընդունելով $z = 1$, *կստանանք*

$$\Pi'(1) = n(p + q)^{n-1} p = np,$$

$$\Pi''(1) = n(n-1)(p+q)^{n-2} p^2 = n(n-1)p^2,$$

$$\Pi'''(1) = n(n-1)(n-2)(p+q)^{n-3} p^3 = n(n-1)(n-2)p^3,$$

որտեղից ըստ (208) բանաձևերի կունենանք

$$V_1 = E(m) = np,$$

$$V_2 = E(m^2) = np + n(n-1)p^2 = npq + n^2p^2,$$

$$V_3 = E(m^3) = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np.$$

Օրինակ 2. n *գնդակներից բաղկացած խմբից, որոնց մեջ կան խոտանված գնդակներ, հաջորդաբար գնդակներ են վերցնում այնքան անգամ, մինչև հանդես գա որևէ խոտան գնդակ։ Որոշել կատարված փորձերի թվի մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան, եթե վերցված գնդակը յուրաքանչյուր փորձից հետո կրկին վերադարձվում է խմբի մեջ։*

Վերցված դետալի ստանդարտ լինելու հավանականությունը՝

$$p = \frac{n-m}{n},$$

իսկ վերցված դետալի խոտան լինելու հավանականությունը՝

$$q = \frac{m}{n}.$$

Փորձերի X թիվը պատահական մեծություն է հետևյալ բաշխման օրենքով՝

$$\begin{array}{llllll} X` & 0, & 1, & 2, & 3, \cdots \\ & q, & pq, & p^2q, & p^3q, \cdots, \end{array}$$

նրա ծնորդ ֆունկցիան է

$$\Pi(z) = q + pqz + p^2qz^2 + \cdots$$

կամ

$$\Pi(z) = \frac{q}{1-pz}.$$

(207)-ի համաձայն ունենք

$$E(X) = \Pi'(1) = \frac{qp}{(1-p)^2} = \frac{p}{q},$$

$$E[X(X-1)] = \Pi''(1) = \frac{2p^2}{q^2},$$

որտեղից

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q}$$

կամ

$$E(X) = \frac{n-m}{m}, \qquad D(X) = \frac{n(n-m)}{m^2}.$$

Այժմ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ։ Անկախ պատահական մեծությունների գումարի ծնորդ ֆունկցիան հավասար է այդ պատահական մեծությունների ծնորդ ֆունկցիաների արտադրյալին։

Իրոք, դիցուք X և Y անկախ պատահական մեծությունները համապատասխանաբար ունեն $\Pi_1(z)$ *և* $\Pi_2(z)$ *ծնորդ ֆունկցիաները. այդ դեպքում* $Z = X + Y$ *մեծության* $\Pi(z)$ *ծնորդ ֆունկցիան անկախ պատահական մեծությունների արտադրյալի մաթեմատիկական սպասման հատկության համաձայն կլինի*

$$\Pi(z) = E(z^{X+Y}) = E(z^X \cdot z^Y) = E(z^X) \cdot E(z^Y)$$

կամ

$$\Pi(z) = \Pi_1(z) \cdot \Pi_2(z)\text{:} \qquad (209)$$

Օգտվելով այս թեորեմից, հեշտ է ստանալ (144) բանաձևը քննարկվող դիսկրետ բաշխումների կոմպոզիցիայի համար։ Իրոք, դիցուք տրված են X *և* Y *պատահական մեծությունները և հետևաբար՝ նրանց ծնորդ ֆունկցիաները՝*

$$\Pi_1(z) = P(X=0) + P(X=1)z + P(X=2)z^2 + \cdots + P(X=n)z^n + \cdots$$

$$\Pi_2(z) = P(Y=0) + P(Y=1)z + P(Y=2)z^2 + \ldots + P(Y=m)z^m + \ldots\text{:}$$

Z *մեծության ծնորդ ֆունկցիան ներկայացնելով*

$$\Pi(Z) = P(Z=0) + P(Z=1)z + P(Z=2)z^2 + \ldots + P(Z=k)z^k + \ldots$$

տեսքով, (209) հավասարության հիման վրա ստանում ենք հետևյալ նույնությունը՝

$$P(Z=0) + P(Z=1)z + P(Z=2)z^2 + \ldots + P(Z=k)z^k + \ldots =$$

$$= [P(X=0) + P(X=1)z + P(X=2)z^2 + \ldots + P(X=n)z^n + \ldots] \cdot$$

$$\cdot [P(Y=0) + P(Y=1)z + P(Y=2)z^2 + \ldots + P(Y=m)z^m + \ldots],$$

որտեղից, z*-ի միատեսակ աստիճանների գործակիցները հավասարեցնելով, կունենանք*

$$P(Z=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0),$$

$$P(Z=1) = P(X=0)P(Y=1) + P(X=1) \cdot P(Y=0),$$

$$P(Z=2) = P(X=0)P(Y=2) + P(X=1)P(Y=1) +$$
$$+ P(X=2)P(Y=0),$$

. . . .

կամ, ընդհանրապես

$$P(Z=k) = P(X=0)P(Y=k) + P(X=1) \cdot P(Y=k-1) + \ldots +$$
$$+ P(X=k)P(Y=0),$$

այսինքն՝

$$P(Z=k) = \sum_{n=0}^{k} P(X=n)P(Y=k-n)\text{:} \qquad (210)$$

38. Մի քանի կարևոր բաշխումների բնութագրիչները։ 1. Հավա-

նականությունների բինոմական բաշխումը: *Եթե կատարվում են* n *անկախ փորձեր և այդ փորձերից յուրաքանչյուրի ժամանակ* A *պատահարի իրականացումն ունի նույն* p *հավանականությունը, ապա, ինչպես ցույց տվեցինք, այդ* n *փորձերում* A *պատահարի* m *անգամ իրականանալու հավանականությունը արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots n:$$

m-*ը պատահական մեծություն է, որի հավանականությունների բաշխման օրենքը հետևյալն է՝*

$$\begin{array}{llllll} m' & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots & n-1, & n \\ & q^n, & C_n^1 pq^{n-1}, & C_n^2 p^2q^{n-2}, & C_n^3 p^3q^{n-3}, & \ldots & C_n^{n-1} p^{n-1}q, & p^n, \end{array}$$

որը մենք անվանեցինք հավանականությունների բինոմական բաշխում: m-*ի մաթեմատիկական սպասումը՝*

$$E(m) = 0 \cdot q^n + 1 \cdot C_n^1 p \cdot q^{n-1} + 2C_n^2 p^2 q^{n-2} + 3C_n^3 p^3 q^{n-3} + \ldots +$$

$$+ (n-1) C_n^{n-1} p^{n-1} q + np^n = npq^{n-1} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2!} p^2 q^{n-2} +$$

$$+ 3 \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} p^3 q^{n-3} + \ldots + (n-1) np^{n-1} q + np^n = np\,(q^{n-1} +$$

$$+ \frac{n-1}{1!} pq^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} p^2 q^{n-3} + \ldots + (n-1) p^{n-2} q + p^{n-1}) =$$

$$= np\,(q+p)^{n-1}$$

կամ

$$E(m) = np, \tag{211}$$

այսինքն՝ պատահարի հանդես գալու թվի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է փորձերի թվի և մի փորձում պատահարի հավանականության արտադրյալին:

m-*ի մաթեմատիկական սպասումը կարելի է որոշել նաև այլ եղանակով: Դիցուք* X_k-*ն* A *պատահարի երևումների թիվն է* k-*երորդ փորձում: Այդ դեպքում* n *փորձերի ընթացքում* A *պատահարի երևումների* m *թիվը կներկայացվի որպես առանձին փորձերում պատահարի երևումների թվի գումար, այսինքն՝*

$$m = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \tag{212}$$

Քանի որ $E(X_k) = p$, երբ $k = 1, 2, \ldots n$, ապա (168) բանաձևը կիրառելով, կունենանք

$$E(m) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = \underbrace{p + p + \ldots + p}_{n \text{ անգամ}} = np:$$

m մեծության վերոհիշյալ արտահայտությունից օգտվելով որպես գումար, հեշտ է որոշել նաև m-ի դիսպերսիան: Իրոք, քանի որ քննարկվող փորձերն անկախ են, ուրեմն (189) բանաձևի համաձայն կունենանք

$$D(m) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n):$$

(195)-ի համաձայն պատահարի երևումների թվի դիսպերսիան մի առանձին փորձում հավասար է pq, ուստի

$$D(m) = \underbrace{pq + pq + \ldots + pq}_{n \text{ անգամ}}$$

կամ

$$D(m) = npq: \tag{213}$$

Օգտվելով

$$E(CX) = C\,E(X), \qquad D(CX) = C^2 D(X)$$

հավասարություններից, որոշում ենք A պատահարի երևան գալու $\frac{m}{n}$ հաճախության մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան n փորձերի ժամանակ.

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = p, \quad D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}, \tag{214}$$

Եթե փորձերի n թիվը ձգտում է անվերջության, ապա պատահարի երևան գալու հաճախության դիսպերսիան այդ փորձերում ձգտում է զրոյի. հետևաբար, մեծ թվով փորձերում $\frac{m}{n}$ հաճախության ցրումը իր p մաթեմատիկական սպասման շուրջը փոքր է:

2. Պուասսոնի հավանականությունների բաշխումը: Պուասսոնի հավանականությունների բաշխումն է

$$p_n = e^{-a}\frac{a^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ (0! = 1), \tag{215}$$

որտեղ $a > 0$ հաստատուն է: Որոշենք Պուասսոնի բաշխման ծնող ֆունկցիան: Ըստ սահմանման

$$\Pi(z) = e^{-a} + e^{-a}\frac{a}{1!}z + e^{-a}\frac{a^2}{2!}z^2 + \ldots + e^{-a}\frac{a^n}{n!}z^n + \ldots =$$

$$= e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!}z + \frac{a^2}{2!}z^2 + \ldots + \frac{a^n}{n!}z^n + \ldots\right) = e^{-a}e^{az}$$

կամ

$$\Pi(z) = e^{a(z-1)}. \qquad (216)$$

Պուասոնի բաշխման առաջին երեք մոմենտները գտնում ենք (208) բանաձևերով.

$$V_1 = a, \quad V_2 = a + a^2, \quad V_3 = a^3 + 3a^2 + a, \ \ldots,$$

որտեղից

$$E(X) = a, \quad D(X) = V_2 - V_1^2 = a + a^2 - a^2 = a. \qquad (217)$$

Այսպիսով, Պուասոնի հավանականությունների բաշխման մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան հավասար են բաշխման պարամետրին:

3. Հավանականությունների հավասարաչափ բաշխում: *Եթե* X *պատահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված* [a, b] *միջակայքում, նրա խտությունը կլինի*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & x < a, \ x > b, \end{cases}$$

իսկ մաթեմատիկական սպասումը՝

$$E(X) = \int_a^b x \frac{dx}{b-a} = \frac{a+b}{2}. \qquad (218)$$

այսպիսով, պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը համընկնում է պատահական մեծության հնարավոր արժեքների միջակայքի միջնակետի հետ:

X *մեծության դիսպերսիան՝*

$$D(X) = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (219)$$

Տեսնում ենք, որ պատահական մեծության դիսպերսիան կախված է միայն [a, b] *միջակայքի երկարությունից և այդ երկարության աճող ֆունկցիան է, որը և պետք էր սպասել, որովհետև որքան մեծ է պատահական մեծության հնարավոր արժեքների միջակայքի երկարությունը, այնքան շատ են ցրված պատահական մեծության արժեքները մաթեմատիկական սպասման շուրջը:*

Հավասարաչափ բաշխված X *պատահական մեծության համար* *գոյություն ունենան ցանկացած կարգի սկզբնական և կենտրոնական մոմենտներ.*

$$V_k = E(X^k) = \int_a^b x^k \frac{dx}{b-a} = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(b-a)(k+1)},$$

$$\mu_k = E\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^k\right] = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^k \frac{dx}{b-a} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)(b-a)}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{a-b}{2}\right)^{k+1}\right]:$$

Այսպիսով՝

$$V_k = \frac{1}{k+1}\left[b^k + ab^{k-1} + a^2b^{k-2} + \ldots + a^k\right]. \qquad (220)$$

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & \text{եթե } k\text{-ն կենտ է,} \\ \dfrac{(b-a)^k}{2^k(k+1)}, & \text{եթե } k\text{-ն զույգ է։} \end{cases} \qquad (221)$$

4. Հավանականությունների նորմալ բաշխում: *Եթե X պատահական մեծությունն ունի նորմալ բաշխում, նրա խտությունը կլինի*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

իսկ մաթեմատիկական սպասումը՝

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} [(x-a)+a] e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-a) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a,$$

քանի որ առաջին ինտեգրալը հավասար է զրոյի, իսկ

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1,$$

որպես խտության ինտեգրալ։

X պատահական մեծության դիսպերսիան՝

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

կամ, ըստ մասերի ինտեգրելով՝

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[-\sigma^2 (x-a)\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \right] =$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2,$$

քանի որ

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[(x-a) \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \right] = 0։$$

Այսպիսով, հավանականությունների նորմալ բաշխման դեպքում

$$a = E(X), \qquad \sigma^2 = D(X), \tag{222}$$

այսինքն՝ a պարամետրը պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումն է, իսկ σ^2 պարամետրը՝ այդ մեծության դիսպերսիան։ a պարամետրը կոչվում է բաշխման կենտրոն։

Անցնենք կենտրոնական մոմենտների հաշվմանը։ Ըստ սահմանման

$$\mu_n = E\left[(X-a)^n\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^n e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt։$$

Երբ n-ը կենտ թիվ է, ենթինտեգրալային $t^n e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ ֆունկցիան դառնում է t-ի կենտ ֆունկցիան. այդ պատճառով $\mu_n = 0$, իսկ այն դեպքում, երբ n-ը զույգ է ($n = 2k$), կունենանք

$$\mu_{2k} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} (x-a)^{2k} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \Big[-\sigma^2 (x-a)^{2k-2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$+ (2k-1)\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^{2k-2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \Big] =$$

$$= \sigma^2 (2k-1) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^{2k-2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \sigma^2 (2k-1)\, \mu_{2k-2},$$

քանի որ

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x-a)^{2k-1} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0$$

և

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^{2k-2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu_{2k-2}.$$

Այսպիսով՝

$$\mu_{2k} = (2k-1)\,\sigma^2 \mu_{2k-2}.$$

μ_{2k-2}-*ի նկատմամբ այս բանաձևը կիրառելով, կստանանք*

$$\mu_{2k} = \sigma^2 (2k-1)\,\sigma^2 (2k-3)\,\mu_{2k-4} = \sigma^4 (2k-1)(2k-3)\,\mu_{2k-4}.$$

բանաձևը k *անգամ կիրառելով, կստանանք*

$$\mu_{2k} = \sigma^{2k} (2k-1)(2k-3)\ldots 3 \cdot 1 \cdot \mu_0.$$

Բայց քանի որ $\mu_0 = 1$, *ուրեմն*

$$\mu_{2k} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2k-1)\,\sigma^{2k}. \qquad (223)$$

Մասնավորապես՝

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \sigma^2, \quad \mu_3 = 0, \quad \mu_4 = 3\sigma^4 = 3\mu_2^2.$$

Իմանալով նորմալ բաշխման կենտրոնական մոմենտները, կարելի է (203) բանաձևերով որոշել նաև բաշխման սկզբնական մոմենտները։

Նորմալ բաշխման սիմետրիայի գործակիցը՝ $A = 0$, *իսկ էքսցեսը՝*

$$B = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{1 \cdot 3\sigma^4}{\sigma^4} = 3.$$

5. Հավանականությունների ցուցչային բաշխում։ *Եթե* X *պատահական մեծությունն ունի ցուցչային բաշխում, նրա խտությունը կլինի*

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}\qquad \lambda>0,$$

իսկ մաթեմատիկական սպասումը՝

$$E(X)=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda x}x\,dx=\lambda\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right)=$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\lambda},$$

քանի որ

$$\lim_{x\to\infty}x\,e^{-\lambda x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}=0\text{:}$$

X պատահական մեծության k-րդ կարգի սկզբնական մոմենտը՝

$$V_k=\lambda\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}dx=\lambda\left(-\frac{x^k}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\frac{k}{\lambda}\int_0^\infty x^{k-1}e^{-\lambda x}dx\right)$$

կամ

$$V_k=\frac{1}{\lambda}kV_{k-1},\tag{224}$$

քանի որ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^{\lambda x}}=0,\qquad \int_0^\infty x^{k-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}V_{k-1}\text{:}$$

(224) հավասարությունից ստանում ենք

$$V_k=\frac{1}{\lambda}k(k-1)\frac{1}{\lambda}V_{k-2}=\frac{1}{\lambda}k\cdot\frac{1}{\lambda}(k-1)\ldots\frac{1}{\lambda}\cdot 1\cdot V_0$$

կամ

$$V_k=\frac{k!}{\lambda^k},\tag{225}$$

քանի որ $V_0=1$: Այստեղից $V_2=E(X^2)=\frac{2}{\lambda^2}$

$$\text{և}\quad D(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}\text{:}$$

Այսպիսով՝

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},\qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}\text{:}\tag{226}$$

39. Բազմաչափ պատահական մեծության բնութագրիչները: *Երկչափ $Z=(X, Y)$ պատահական մեծության* միջին *կամ մաթեմատիկական սպասում (մաթսպասում) կոչվում է հետևյալ երկչափ վեկտորը՝*

$$E(Z)=(E(X),\ E(Y)), \tag{227}$$

որի կոորդինատներն են առանձին պատահական մեծությունների միջինները: *Դիսպերսիան սահմանելու համար մտցնենք սկզբնական և կենտրոնական մոմենտների գաղափարը:*

Երկչափ $Z=(X, Y)$ պատահական մեծության (k, l)-րդ կարգի սկզբնական մոմենտ *կոչվում է X^k և Y^l պատահական մեծությունների արտադրյալի միջինը, այսինքն՝*

$$V_{kl}=E X^k Y^l, \qquad k, l=0, 1, 2, \dots \tag{228}$$

մեծությունը: Եթե $Z=(X, Y)$ պատահական վեկտորը դիսկրետ պատահական մեծություն է՝ p_{ij} $(i, j=1, 2, 3, \dots)$ բաշխման օրենքով, ապա

$$V_{kl}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i^k y_j^l p_{ij}, \tag{229}$$

իսկ եթե $Z=(X, Y)$ պատահական մեծությունը անընդհատ պատահական վեկտոր է՝ $f(x, y)$ խտությամբ, ապա

$$V_{kl}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^l f(x, y)\, dx\, dy: \tag{230}$$

Մասնավոր դեպքում $V_{k0}=E(X^k)$ $(k=0, 1, 2, \dots)$ մեծությունը X *պատահական մեծության* k-*րդ կարգի մոմենտն է, իսկ $V_{0l}=E(Y^l)$* $(l=0, 1, 2, \dots)$ *մեծությունը՝* Y *պատահական մեծության l-րդ կարգի մոմենտը, կիրառությունների մեջ նշանակություն ունի $V_{11}=E(XY)$ մոմենտը:*

Երկչափ $Z=(X, Y)$ պատահական մեծության (k, l)-րդ կարգի կենտրոնական մոմենտ *կոչվում է $(X-E(X))^k$ և $(Y-E(Y))^l$ պատահական մեծությունների արտադրյալի միջինը, այսինքն՝*

$$\mu_{kl}=E[(X-E(X))^k\cdot(Y-E(Y))^l], \quad k, l=0, 1, 2, \dots \tag{231}$$

մեծությունը: Եթե երկչափ $Z=(X, Y)$ պատահական վեկտորը դիսկրետ պատահական մեծություն է՝ p_{ij} $(i, j=1, 2, 3, \dots)$ բաշխման օրենքով, ապա

$$\mu_{kl} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i - E(X))^k (y_j - E(Y))^l p_{ij}, \tag{232}$$

իսկ եթե երկչափ $Z = (X, Y)$ *պատահական մեծությունը անընդհատ պատահական մեծություն է՝* $f(x, y)$ *խտությամբ, ապա*

$$\mu_{kl} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k (y - E(y))^l f(x, y)\, dxdy\text{:} \tag{233}$$

Մասնավոր դեպքում $\mu_{k0} = E[(X - E(X))^k]$, $(k = 0, 1, \ldots)$ *մեծությունը* X *պատահական մեծության* k-*րդ կարգի կենտրոնական մոմենտն է, իսկ* $\mu_{0l} = E[(Y - E(Y))]^l$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ *մեծությունը՝* Y *պատահական մեծության* l-*րդ կարգի կենտրոնական մոմենտը: Կիրառություններում մեծ նշանակություն ունի*

$$\mu_{11} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \tag{234}$$

մոմենտը, որը կոչվում է X *և* Y *պատահական մեծությունների* կոռելյացիոն *մոմենտ. հեշտ է տեսնել, որ կոռելյացիոն մոմենտը միաժամանակ հավասար է՝*

$$\mu_{11} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)\text{:}$$

Եթե X *և* Y *պատահական մեծությունները անկախ են միմյանցից, ապա պարզ է, որ կոռելյացիոն մոմենտը հավասար է զրոյի, որովհետև այդ դեպքում*

$$\mu_{11} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = E(X) \cdot E(Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0\text{:}$$

Հակադարձը ընդհանրապես ճիշտ չէ. կոռելյացիոն մոմենտը կարող է հավասարվել զրոյի նաև կախյալ պատահական մեծությունների համար:

Այդ դեպքում X *և* Y *պատահական մեծությունները կոչվում են* չկոռելյացված:

Սիմետրիկ մատրիցան՝

$$B = \begin{pmatrix} \mu_{20} & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \mu_{02} \end{pmatrix} \tag{235}$$

անվանում են $Z = (X, Y)$ *երկչափ պատահական մեծության* կոռելյացիոն մատրիցա *կամ* դիսպերսիա:

X *և* Y *պատահական մեծությունների* կոռելյացիայի r_{xy} գործակից կոչվում է X և Y պատահական մեծությունների կոռելյացիոն մոմենտի և նրանց միջին քառակուսային շեղումների արտադրյալի հարաբերությունը, *այսինքն՝*

$$r_{xy} = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20} \cdot \mu_{02}}}$$

կամ

$$r_{xy} = \frac{E\,[(X - E\,(X))\,(Y - E\,(Y))]}{\sqrt{E\,[(X - E\,(X))^2] \cdot E\,[(Y - E\,(Y))^2]}} \tag{236}$$

մեծությունը։ Եթե X և Y պատահական մեծություններն անկախ են միմյանցից, նրանց կոռելյացիայի գործակիցը հավասար է զրոյի, բայց նրա զրո լինելուց, ընդհանրապես, չի հետևում պատահական մեծությունների անկախությունը։

Պատահական մեծությունների կոռելյացիայի գործակիցը բացարձակ արժեքով չի գերազանցում մեկից և հավասարվում է մեկի կամ մինուս մեկի միայն այն դեպքում, եթե պատահական մեծությունների միջև գոյություն ունի գծային կապ։ Իրոք, դիտենք

$$\left(\frac{X - E\,(X)}{\sqrt{D\,(X)}} \pm \frac{Y - E\,(Y)}{\sqrt{D\,(Y)}} \right)^2$$

պատահական մեծությունը, որը բացասական չէ և որի միջին արժեքը ոչ բացասական թիվ է՝

$$E \left[\left(\frac{X - E\,(X)}{\sqrt{D\,(X)}} \pm \frac{Y - E\,(Y)}{\sqrt{D\,(Y)}} \right)^2 \right] \geqslant 0, \qquad (337($$

Ձախ մասը ձևափոխելով, ստանում ենք

$$E \left[\frac{(X - E\,(X))^2}{D\,(X)} \pm 2\, \frac{(X - E\,(X)) \cdot (Y - E\,(Y))}{\sqrt{D\,(X) \cdot D\,(Y)}} + \frac{(Y - E\,(Y))^2}{D\,(Y)} \right] =$$

$$= \frac{E\,[X - E\,(X)]^2}{D\,(X)} \pm 2\, \frac{E\,[(X - E\,(X)) \cdot (Y - E\,(Y))]}{\sqrt{D\,(X) \cdot D\,(Y)}} + \frac{E\,[(Y - E\,(Y))^2]}{D\,(Y)} =$$

$$= 2(1 \pm r_{xy}) \geqslant 0,$$

որտեղից հետևում է, որ

$$|\,r_{xy}\,| \leqslant 1. \tag{238}$$

Ստացված անհավասարության մեջ հավասարության նշանը տեղի ունի միմիայն այն դեպքում, երբ հավասարության նշանը տեղի ունի (237) անհավասարության մեջ, որի դեպքում

$$\frac{X - E\,(X)}{\sqrt{D\,(X)}} = \pm \frac{Y - E\,(Y)}{\sqrt{D\,(Y)}}, \tag{239}$$

Օրինակ 1. *Հաշվել* X *և* Y *դիսկրետ պատահական մեծությունների կոռելյացիայի գործակիցը, երբ բաշխման օրենքը տրված է հետևյալ աղյուսակով՝*

X \ Y	0	1	2	3	4	p
1	0,03;	0,04;	0,03;	0	0	0,10
2	0,05;	0,05;	0,10;	0,05;	0	0,25
3	0;	0,10;	0,10;	0,05;	0,05;	0,30
4	0;	0,05;	0,10;	0,05;	0,05;	0,25
5	0;	0;	0,03;	0,04;	0,03;	0,10
q	0,08;	0,24;	0,36;	0,19;	0,13;	1

Հաշվում ենք նախ X *և* Y *պատահական մեծությունների միջին արժեքները՝*

$$E(X)=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}25+3\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}25+5\cdot 0{,}1=3{,}00,$$

$$E(Y)=0\cdot 0{,}8+1\cdot 0{,}24+2\cdot 0{,}36+3\cdot 0{,}19+4\cdot 0{,}13=2{,}05,$$

որից հետո հաշվում ենք X *և* Y *պատահական մեծությունների դիսպերսիաները՝*

$$D(X)=(-2)^2\cdot 0{,}1+(-1)^2\cdot 0{,}25+0\cdot 0{,}3+1^2\cdot 0{,}25+2^2\cdot 0{,}1=1{,}3$$

$$D(Y)=(-2{,}05)^2\cdot 0{,}08+(-1{,}05)^2\cdot 0{,}24+(-0{,}05)^2\cdot 0{,}36+ \\ +(0{,}95)^2\cdot 0{,}19+(1{,}95)^2\cdot 0{,}13=1{,}4:$$

Կոռելյացիոն մոմենտը՝

$$\begin{aligned}\mu_{11}=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\ &0\cdot 1\cdot 0{,}03+1\cdot 1\cdot 0{,}04+2\cdot 1\cdot 0{,}03+\\ &+0\cdot 2\cdot 0{,}05+1\cdot 2\cdot 0{,}05+2\cdot 2\cdot 0{,}1+\\ &+3\cdot 2\cdot 0{,}05+1\cdot 3\cdot 0{,}1+2\cdot 3\cdot 0{,}1+\\ &+3\cdot 3\cdot 0{,}05+4\cdot 3\cdot 0{,}05+1\cdot 4\cdot 0{,}05+\\ &+2\cdot 4\cdot 0{,}1+3\cdot 4\cdot 0{,}05+4\cdot 4\cdot 0{,}05+\\ &+2\cdot 5\cdot 0{,}03+3\cdot 5\cdot 0{,}04+4\cdot 5\cdot 0{,}03-\\ &-3\cdot 2\cdot 05=0{,}60,\end{aligned}$$

ուստի $$r_{xy} = \frac{0,6}{\sqrt{1,3 \cdot 1,2}} \approx 0,48։$$

Օրինակ 2. X պատահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված $[-1, 1]$ միջակայքում, և $Y = X^2$։ Որոշել X և Y պատահական մեծությունների կոռելյացիայի գործակիցը։ Ունենք

$$E(X) = 0, \qquad E(XY) = E(X^3) = 0,$$

ուրեմն $\mu_{11} = 0$ և $r_{xy} = 0$, թեպետ X և Y պատահական մեծությունների միջև գոյություն ունի ֆունկցիոնալ կապ։

s-չափանի $Z = (X_1, X_2, \dots X_s)$ պատահական մեծության *միջին* կամ մաթեմատիկական սպասում կոչվում է հետևյալ s-չափանի վեկտորը՝

$$E(Z) = (E(X_1), E(X_2), \dots E(X_s)), \tag{240}$$

որի կոորդինատներն են առանձին պատահական մեծությունների միջինները։

Եթե X_i և X_j $(i, j = 1, 2, \dots s)$ պատահական մեծությունների կոռելյացիոն մոմենտը նշանակենք μ_{ij}-ով, ապա s-րդ կարգի սիմետրիկ մատրիցան՝

$$B = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1s} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_{s1} & \mu_{s2} & \cdots & \mu_{ss} \end{pmatrix}, \tag{241}$$

որի գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող էլեմենտները ներկայացնում են տված պատահական մեծությունների դիսպերսիաները, կոչվում է տվյալ s-չափանի պատահական մեծության կոռելյացիոն մատրիցա կամ դիսպերսիա:

Օրինակ 3. Տված է $Z = (X, Y)$ երկչափ պատահական մեծություն, որն ունի նորմալ հավանականությունների բաշխում. նրա խտությունը՝

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

Որոշենք մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան։ Այս դեպքում, ինչպես ցույց տվեցինք, X և Y պատահական մեծությունները նույնպես նորմալ են բաշխված և նրանց խտությունները համապատասխանաբար կլինեն՝

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \qquad f_2(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

Այստեղից անմիջապես հետևում է, որ

$$E(X) = a_1, \quad E(Y) = a_2, \quad D(X) = \sigma_1, \quad D(Y) = \sigma_2,$$

ուրեմն Z-ի մաթեմատիկական սպասումը կլինի

$$E(Z) = (a_1, a_2): \tag{242}$$

Z-ի դիսպերսիան ստանալու համար հաշվենք Z-ի μ_{xy} կոռելյացիոն մոմենտը. կունենանք

$$E(X\cdot Y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,y\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} dx\cdot dy$$

կամ

$$E(X\cdot Y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \int\limits_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{y-a_2}{\sigma_2} - r\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2 + (1-r^2)\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}\right]} dx dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{y-a_2}{\sigma_2} - r\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2} dy,$$

Փոփոխականի փոխարինում կատարելով՝

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{y-a_2}{\sigma_2} - r\,\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right),$$

ստանում ենք

$$E(X\cdot Y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\sigma_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[a_2 + \sigma_2\sqrt{1-r^2}\,u + \frac{r\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1)\right] e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\sigma_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\left[a_2\sqrt{2\pi} + \frac{r\,\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1)\sqrt{2\pi}\right]\cdot e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\sigma_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a_1)\left[a_2\sqrt{2\pi} + \frac{r\,\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1)\sqrt{2\pi}\right]\cdot e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx +$$

$$+\frac{a}{2\pi\sigma_1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[a_2\sqrt{2\pi}+\frac{r\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1)\sqrt{2\pi}\right]e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\left(\frac{r\sigma_2}{\sigma_1}\sigma_1\sqrt{2\pi}\,\sigma_1^2+a_1\cdot a_2\sigma_1\sqrt{2\pi}\right)$$

կամ

$$E(X\cdot Y)=a_1a_2+r\sigma_1\sigma_2,$$

ուրեմն

$$\mu_{xy}=\sigma_1\sigma_2 r:$$

Այստեղից

$$r_{xy}=\frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sigma_1\cdot\sigma_2}=r: \qquad (243)$$

Եթե X և Y պատահական մեծությունները լինեն անկախ, կոռելյացիայի r գործակիցը հավասար կլինի զրոյի: Ընդհակառակը, եթե կոռելյացիայի r գործակիցը հավասար է զրոյի, հավանականությունների բաշխման f(x, y) խտությունը կներկայանա

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

տեսքով, որտեղից եզրակացնում ենք, որ X և Y պատահական մեծությունները անկախ են: Այսպիսով, երբ (X, Y) երկչափ պատահական մեծությունը ենթարկվում է հավանականությունների երկչափ նորմալ բաշխմանը, ապա X և Y մեծությունների անկախ լինելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ մեծությունների կոռելյացիայի գործակիցը հավասար լինի զրոյի:

(235)-ի համաձայն դիսպերսիոն կամ կոռելյացիոն մատրիցան կլինի

$$B=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}, \qquad (244)$$

Քանի որ B մատրիցայի դետերմինանտը՝

$$|B|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-r^2)>0,$$

որեմն գոյություն ունի B մատրիցայի B^{-1} հակադարձ մատրիցա՝

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{(1-r^2)\sigma_1^2} & -\frac{r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} \\ -\frac{r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-r^2)} \end{pmatrix}, \tag{245}$$

որի էլեմենտները խտության ցուցչի գործակիցներն են: Ուստի երկչափ նորմալ բաշխման խտությունը կարելի է գրել

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{|B|}}\,e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}c_{ij}(x_i-a_i)(x_j-a_j)} \tag{246}$$

տեսքով, որտեղ B-ն (X_1, X_2) երկչափ պատահական մեծության կովարիացիոն մատրիցան է, $A=(a_1, a_2)$-ն մաթեմատիկական սպասումն է, իսկ $C=(c_{ij})$ մատրիցան B մատրիցայի հակադարձ մատրիցան է:

Ընդհանրապես, եթե $Z=(X_1, X_2, \dots X_n)$ n-չափանի պատահական մեծությունը ենթարկվում է նորմալ բաշխմանը (134) խտությամբ, նրա մաթեմատիկական սպասումը կլինի

$$A=(a_1, a_2, \dots a_n)$$

վեկտորը, իսկ դիսպերսիայի կամ կովարիացիոն մատրիցան՝ B մատրիցան (135), որը $C=(c_{ij})$ գործակիցներից կազմված մատրիցայի հակադարձ մատրիցան է:

40. Կոռելյացիա: Դիտարկենք $Z=(X, Y)$ երկչափ պատահական մեծությունը: Հայտնի է, որ եթե մեկ պատահական մեծությունը փորձում ընդունում է որոշակի արժեք, մյուս պատահական մեծությունը մնում է անորոշ՝ ենթարկվում է համապատասխան պայմանական հավանականությունների բաշխմանը: Օրինակ, եթե երկչափ պատահական մեծությունը դիսկրետ պատահական մեծություն է p_{ik} բաշխման օրենքով, ապա $X=x_i$ պայմանում Y պատահական մեծության պայմանական բաշխման օրենքը կլինի

$$Y^{\backprime}\quad \begin{matrix} y_1, & y_2, & \dots & y_k, & \dots \\ p'_{i1}, & p'_{i2}, & \dots & p'_{ik}, & \dots \end{matrix} \qquad i=1, 2, \dots n, \dots,$$

իսկ $Y=y_k$ պայմանում X պատահական մեծության պայմանական բաշխման օրենքը՝

$$X^{\backprime}\quad \begin{matrix} x_1, & x_2, & \dots & x_i, & \dots \\ p''_{ik}, & p''_{2k}, & \dots & p''_{ik}, & \dots \end{matrix} \qquad k=1, 2, \dots m, \dots,$$

որտեղ p'_{ik} և p''_{ik} հավանականություններն արտահայտվում են (98) և (99) բանաձևերով: Նման ձևով, եթե տվյալ երկչափ պատահական մեծությունը անընդհատ պատահական մեծություն է՝ $f(x, y)$ խտությամբ՝ ապա $X = x$ պայմանում Y պատահական մեծության պայմանական խտությունը կլինի

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f(x)},$$

իսկ $Y = y$ պայմանում X պատահական մեծության պայմանական խտությունը՝

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f(y)},$$

որտեղ $f(x)$-ը և $f(y)$-ը համապատասխանաբար X-ի և Y-ի խտություններն են:

X-ի և Y-ի այսպիսի կախվածության դեպքում ասում են, որ X-ը և Y-ը գտնվում են կոռելյացիոն կապի մեջ, կամ X-ի և Y-ի միջև գոյություն ունի կոռելյացիա:

Եթե X-ը և Y-ը գտնվում են կոռելյացիոն կապի մեջ, ապա մեկ պատահական մեծության որոշակի արժեքին համապատասխանում է մյուս պատահական մեծության որոշակի պայմանական մաթեմատիկական սպասման արժեք, այսինքն՝ պատահական մեծության պայմանական մաթեմատիկական սպասումը մյուս պատահական մեծության ֆունկցիան է: Որևէ $Z = (X, Y)$ երկչափ պատահական մեծության համար, եթե $E_y(X)$-ով նշանակենք X-ի պայմանական մաթեմատիկական սպասումը Y-ի պայմանում, և $E_x(Y)$-ով՝ Y-ի պայմանական մաթեմատիկական սպասումը X-ի պայմանում, կստանանք

$$E_x(Y) = \varphi(X)$$

և (247)

$$E_y(X) = \psi(Y).$$

Այս հավասարումները կոչվում են ռեգրեսիայի հավասարումներ. առաջինը՝ Y-ը ըստ X-ի ռեգրեսիայի հավասարում, իսկ երկրորդը՝ X-ը ըստ Y-ի ռեգրեսիայի հավասարում: Ռեգրեսիայի հավասարումների գրաֆիկները կոչվում են ռեգրեսիայի գծեր:

Դիտարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ ռեգրեսիայի գծերը ուղիղ են, այսինքն՝

$$E_x(Y) = aX + b,$$

$$E_y(X) = cY + d.$$

Այս դեպքում որոշենք, թե ինչպես կարտահայտվեն a, b, c, d պարամետրերը $Z=(X, Y)$ պատահական մեծության բնութագրերի միջոցով։

Ենթադրենք, թե $Z=(X, Y)$-ը անընդհատ պատահական վեկտոր է՝ $f(x, y)$ խտությամբ։ Այդ դեպքում X և Y պատահական մեծությունների խտությունները համապատասխանաբար կլինեն

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy, \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

և

$$E_x(y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y)\, dy}{f_1(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y/x)\, dy,$$

$$E_x(Y) = aX + b \tag{248}$$

հավասարման պարամետրերը որոշելու համար նկատենք, որ հավասարման երկու մասերում գտնվում են պատահական մեծություններ։ Անցնելով մաթեմատիկական սպասումներին, կունենանք

$$E(E_x(Y)) = a\,E(X) + b$$

կամ, քանի որ

$$E(E_x(Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, E_x(Y)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y/x) \cdot y \cdot dy\right] dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x, y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y)\, dy = E(Y),$$

կստանանք

$$E(Y) = a\,E(X) + b. \tag{249}$$

(248) հավասարումից (249) հավասարումը հանելով, կստանանք

$$E_x(Y) - E(Y) = a(X - E(X)). \tag{250}$$

Այս հավասարման երկու մասերը բազմապատկելով $(X - E(X))$-ով և նորից մաթեմատիկական սպասման անցնելով, կունենանք

$$E\left[(X - E(X))(E_x(Y) - E(Y))\right] = a\,E\left[(X - E(X))^2\right].$$

Հաշվենք հավասարման ձախ մասը.

$$E\left[(X-E(X))(E_x(Y)-E(Y))\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(y/x)\,dy-\right.$$

$$\left.-E(Y)\right]f_1(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))\left[\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(x,y)\,dy-\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{\infty}E(Y)\cdot f(x,y)\,dy\right]dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))\int_{-\infty}^{\infty}(y-E(Y))\cdot f(x,y)\,dy\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))(y-E(Y))\cdot f(x,y)\,dx\cdot dy=$$

$$=E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]:$$

Հետևաբար կունենանք

$$E\left[(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\right]=a\cdot D(X):$$

Այստեղից

$$a=\frac{E\left[(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\right]}{D(X)}=\frac{E\left[(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\right]}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}\cdot\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}$$

կամ

$$a=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}r_{xy},\qquad (251)$$

որտեղ $\sigma_x^2=D(X)$, $\sigma_y^2=D(Y)$, *իսկ* r_{xy}*-ը* X *և* Y *պատահական մեծությունների կոռելյացիայի գործակիցն է: Ստացված* a*-ի արժեքը (250) հավասարման մեջ տեղադրելով, կստանանք*

$$E_x(Y)-E(Y)=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}r_{xy}\cdot(X-E(X)):\qquad (252)$$

Նույն ձևով կարելի է ստանալ նաև երկրորդ ռեգրեսիայի հավասարումը՝

$$E_y(X)-E(X)=\frac{\sigma_x}{\sigma_y}r_{xy}\cdot(Y-E(Y)):\qquad (253)$$

$S_1=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}r_{xy}$ *և* $S_2=\frac{\sigma_x}{\sigma_y}r_{xy}$ *գործակիցները կոչվում են ռեգրեսիայի* ուրեմն գոյություն ունի B մատրիցայի B^{-1} հակադարձ մատրիցա՝

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{(1-r^2)\sigma_1^2} & -\dfrac{r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} \\ -\dfrac{r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} & \dfrac{1}{\sigma_2^2(1-r^2)} \end{pmatrix}, \tag{245}$$

որի էլեմենտները խառը ցուցչի գործակիցներն են։ Ուստի երկչափ նորմալ բաշխման խտությունը կարելի է գրել

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{|B|}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2} c_{ij}(x_i-a_i)(x_j-a_j)} \tag{246}$$

տեսքով, որտեղ B-ն (X_1, X_2) երկչափ պատահական մեծության կովարիացիոն մատրիցան է, $A=(a_1, a_2)$-ն մաթեմատիկական սպասումն է, իսկ $C=(c_{ij})$ մատրիցան B մատրիցայի հակադարձ մատրիցան է։

Ընդհանրապես, եթե $Z=(X_1, X_2, \dots X_n)$ n-չափանի պատահական մեծությունը ենթարկվում է նորմալ բաշխմանը (134) խտությամբ, նրա մաթեմատիկական սպասումը կլինի

$$A=(a_1, a_2, \dots a_n)$$

վեկտորը, իսկ դիսպերսիան կամ կոռելյացիոն մատրիցան՝ B մատրիցան (135), որը $C=(c_{ij})$ գործակիցներից կազմված մատրիցայի հակադարձ մատրիցան է։

40. Կոռելյացիա։ Դիտարկենք $Z=(X, Y)$ երկչափ պատահական մեծությունը։ Հայտնի է, որ եթե մեկ պատահական մեծությունը փորձում ընդունում է որոշակի արժեք, մյուս պատահական մեծությունը մնում է անորոշ՝ ենթարկվում է համապատասխան պայմանական հավանականությունների բաշխմանը։ Օրինակ, եթե երկչափ պատահական մեծությունը դիսկրետ պատահական մեծություն է p_{ik} բաշխման օրենքով, ապա $X=x_i$ պայմանում Y պատահական մեծության պայմանական բաշխման օրենքը կլինի

$$Y^{\backprime}\quad \begin{matrix} y_1, & y_2, & \dots & y_k, & \dots \\ p'_{i1}, & p'_{i2}, & \dots & p'_{ik}, & \dots \end{matrix} \qquad i=1,\ 2,\ \dots\ n, \dots,$$

իսկ $Y=y_k$ պայմանում X պատահական մեծության պայմանական բաշխման օրենքը՝

$$X^{\backprime}\quad \begin{matrix} x_1, & x_2, & \dots & x_i, & \dots \\ p''_{ik}, & p''_{2k}, & \dots & p''_{ik}, & \dots \end{matrix} \qquad k=1,\ 2,\ \dots\ m, \dots,$$

որտեղ p'_{ik} և p''_{ik} հավանականություններն արտահայտվում են (98) և (99) բանաձևերով: Նման ձևով, եթե ամբողջ երկչափ պատահական մեծությունը անընդհատ պատահական մեծություն է՝ $f(x, y)$ խտությամբ՝ ապա $X = x$ պայմանում Y պատահական մեծության պայմանական խտությունը կլինի

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f(x)},$$

իսկ $Y = y$ պայմանում X պատահական մեծության պայմանական խտությունը՝

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f(y)},$$

որտեղ $f(x)$-ը և $f(y)$-ը համապատասխանաբար X-ի և Y-ի խտություններն են:

X-ի և Y-ի այսպիսի կախվածության դեպքում ասում են, որ X-ը և Y-ը գտնվում են կոռելյացիոն կապի մեջ, կամ X-ի և Y-ի միջև գոյություն ունի կոռելյացիա:

Եթե X-ը և Y-ը գտնվում են կոռելյացիոն կապի մեջ, ապա մեկ պատահական մեծության որոշակի արժեքին համապատասխանում է մյուս պատահական մեծության որոշակի պայմանական մաթեմատիկական սպասման արժեք, այսինքն՝ պատահական մեծության պայմանական մաթեմատիկական սպասումը մյուս պատահական մեծության ֆունկցիան է: Որևէ $Z = (X, Y)$ երկչափ պատահական մեծության համար, եթե $E_y(X)$-ով նշանակենք X-ի պայմանական մաթեմատիկական սպասումը Y-ի պայմանում, և $E_x(Y)$-ով՝ Y-ի պայմանական մաթեմատիկական սպասումը X-ի պայմանում, կստանանք

$$E_x(Y) = \varphi(X)$$

և (247)

$$E_y(X) = \psi(Y).$$

Այս հավասարումները կոչվում են ռեգրեսիայի հավասարումներ. առաջինը՝ Y-ը ըստ X-ի ռեգրեսիայի հավասարում, իսկ երկրորդը՝ X-ը ըստ Y-ի ռեգրեսիայի հավասարում: Ռեգրեսիայի հավասարումների գրաֆիկները կոչվում են ռեգրեսիայի գծեր:

Քննարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ ռեգրեսիայի գծերը ուղիղ են, այսինքն՝

$$E_x(Y) = aX + b,$$

$$E_y(X) = cY + d.$$

Այս դեպքում որոշենք, թե ինչպես կարտահայտվեն a, b, c, d *պարամետրերը* $Z=(X, Y)$ *պատահական մեծության բնութագրերի միջոցով:*

Ենթադրենք, թե $Z=(X, Y)$*-ը անընդհատ պատահական վեկտոր է՝* $f(x, y)$ *խտությամբ: Այդ դեպքում* X *և* Y *պատահական մեծությունների խտությունները համապատասխանաբար կլինեն*

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy, \qquad f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx$$

և

$$E_x(y)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(x, y)\,dy}{f_1(x)}=\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y/x)\,dy.$$

$$E_x(Y)=aX+b \qquad (248)$$

հավասարման պարամետրերը որոշելու համար նկատենք, որ հավասարման երկու մասերում գտնվում են պատահական մեծություններ: Անցնելով մաթեմատիկական սպասումներին, կունենանք

$$E(E_x(Y))=aE(X)+b$$

կամ, քանի որ

$$E(E_x(Y))=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)E_x(Y)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y/x)\cdot y\cdot dy\right]dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x, y)\,dy\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_2(y)\,dy=E(Y),$$

կստանանք

$$E(Y)=aE(X)+b: \qquad (249)$$

(248) հավասարումից (249) հավասարումը հանելով, կստանանք

$$E_x(Y)-E(Y)=a(X-E(X)): \qquad (250)$$

Այս հավասարման երկու մասերը բազմապատկելով $(X-E(X))$*-ով և նորից մաթեմատիկական սպասման անցնելով, կունենանք*

$$E[(X-E(X))(E_x(Y)-E(Y))]=aE[(X-E(X))^2]:$$

Հաշվենք հավասարման ձախ մասը․

$$E\left[(X-E(X))(E_x(Y)-E(Y))\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))\cdot\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(y/x)\,dy-\right.$$

$$\left.-E(Y)\right]f_1(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(x,y)\,dy-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{-\infty}^{\infty}E(Y)\cdot f(x,y)\,dy\right]dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-E(Y))\cdot f(x,y)\,dy\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))(y-E(Y))\cdot f(x,y)\,dx\cdot dy=$$

$$=E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]։$$

Հետևաբար կունենանք

$$E\left[(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\right]=a\cdot D(X)։$$

Այստեղից

$$a=\frac{E\left[(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\right]}{D(X)}=\frac{E\left[(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\right]}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}\cdot\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}$$

կամ

$$a=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,r_{xy},\qquad (251)$$

որտեղ $\sigma_x^2=D(X)$, $\sigma_y^2=D(Y)$, իսկ r_{xy}-ը X և Y պատահական մեծությունների կոռելյացիայի գործակիցն է։ Ստացված a-ի արժեքը (250) հավասարման մեջ տեղադրելով, կստանանք

$$E_x(Y)-E(Y)=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,r_{xy}\cdot(X-E(X))։\qquad (252)$$

Նույն ձևով կարելի է ստանալ նաև երկրորդ ռեգրեսիայի հավասարումը՝

$$E_y(X)-E(X)=\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\,r_{xy}\cdot(Y-E(Y))։\qquad (253)$$

$S_1=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,r_{xy}$ և $S_2=\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\,r_{xy}$ գործակիցները կոչվում են ռեգրեսիայի գործակիցներ. առաջինը՝ Y-ի ռեգրեսիայի գործակից ըստ X-ի, իսկ երկրորդը՝ X-ի ռեգրեսիայի գործակից ըստ Y-ի։

Եթե $Z = (X, Y)$ երկչափ պատահական մեծության ռեգրեսիայի գծերը ուղիղ չեն, ապացված

$$Y - E(Y) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r_{xy} \cdot (X - E(X)), \tag{254}$$

$$X - E(X) = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} r_{xy} (Y - E(Y)) \tag{255}$$

համապատասխան ուղիղները, այնուամենայնիվ, կապված են տվյալ $Z = (X, Y)$ պատահական մեծության հետ որոշ իմաստով. այսպես՝

$$Y - E(Y) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r_{xy} (X - E(X))$$

ուղիղը այն ուղիղն է, որը բոլոր ուղիղներից ամենալավ է արտահայտում X և Y պատահական մեծությունների կապը միմյանց հետ, այսինքն՝ բոլոր $Y = aX + b$ ուղիղներից այն ուղիղն է, որի համար

$$J = E[Y - (aX + b)]^2 \tag{256}$$

արտահայտությունը փոքրագույնն է։ Իրոք, J մեծությունը ձևափոխելով, կունենանք

$$J = E[(Y - E(Y)) - a(X - E(X)) + (E(Y) - aE(X) - b)]^2 =$$

$$= E[(Y - E(Y))^2] + a^2 E(X - E(X))^2 + (E(Y) - aE(X) - b)^2 -$$

$$- 2aE[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] + 2E(Y - E(Y)) \cdot (E(Y) -$$

$$- aE(X) - b)] - 2a \cdot E[(X - E(X)) \cdot (E(Y) - a \cdot E(X) - b)]։$$

Քանի որ

$$E[(X - E(X))^2] = D(X), \qquad E[(Y - D(Y))^2] = D(Y),$$

$$E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] = r_{xy} \cdot \sqrt{D(X) \cdot D(Y)} = r_{xy}\sigma_x\sigma_y,$$

$$E[(Y - E(Y)) \cdot (E(Y) - a \cdot E(X) - b)] = 0,$$

$$E[(X - E(X)) \cdot (E(Y) - a \cdot E(X) - b)] = 0,$$

կստանանք

$$J = \sigma_y^2 + a^2\sigma_x^2 - 2ar_{xy}\sigma_x \cdot \sigma_y + (E(Y) - aE(X) - b)^2$$

կամ

$$J=(a\sigma_x-r_{xy}\sigma_y)^2+(1-r_{xy}^2)\sigma_y^2+(E(Y)-aE(X)-b)^2:$$

Այս արտահայտությունը կունենա իր փոքրագույն արժեքը, եթե a-*ն և* b-*ն բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝*

$$a\sigma_x-r_{xy}\sigma_y=0, \qquad E(Y)-aE(X)-b=0,$$

այսինքն, երբ

$$a=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

և

$$b=-aE(X)+E(Y)$$

կամ

$$b=-r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}E(X)+E(Y):$$

Այսպիսով, որոնելի ուղղի հավասարումը կլինի

$$Y=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X-r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}E(X)+E(Y)$$

կամ

$$Y-E(Y)=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-E(X)):$$

41. Խնդիրներ

• *1. Վիճակախաղում խաղարկվում է 250 ռ. արժողությամբ մոտոցիկլետ, 50 ռ. արժողությամբ հեծանիվ և 40 ռ. արժողությամբ ժամացույց: Գտնել մեկ տոմսով շահած գումարի մաթ. սպասումը, եթե տոմսերի ընդհանուր թիվը 100 է:*

2. X *պատահական մեծությունն ընդունում է ամբողջ դրական արժեքներ՝ այնպիսի հավանականություններով, որոնք կազմում են նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա: Գտնել այդ պրոգրեսիայի առաջին անդամը՝* p *և* q *հայտարարը, եթե* $E(X)=10$, *և* $P(X \leq 10)$ *հավանականությունը:*

3. X *պատահական մեծությունն ընդունում է միայն երկու հավասարահնարավոր արժեքներ՝* x_1 *և* x_2:

Ապացուցել, որ

$$D(X)=\frac{(x_2-x_1)^2}{4},$$

4. X պատահական մեծությունը բաշխված է հետևյալ օրենքով՝

$$X' \quad -1, \quad 0, \quad 1$$
$$0{,}2 \;\; 0{,}3 \;\; 0{,}5:$$

Գտնել $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X^4)$:

5. l երկարությամբ հատվածի վրա պատահականորեն նետված են երկու կետեր: Գտնել այդ կետերի միջև եղած հեռավորության միջին արժեքը և դիսպերսիան:

6. X պատահական մեծությունը բաշխված է $(0,1)$ միջակայքում $f(x)=2x$ խտության ֆունկցիայով:

Գտնել $\eta = X^2$ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան:

7. X-ը և Y-ը անկախ և $(0,1)$, $(1,3)$ միջակայքում համապատասխանաբար հավասարաչափ բաշխված պատահական մեծություններ են: Գտնել $Z = X \cdot Y$ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան:

8. X-ը ցուցչային բաշխման է ենթարկվում λ պարամետրով, իսկ φ-ն՝ հավասարաչափ բաշխման $(0, 2\pi)$ միջակայքում: Որոշել $Y = \sin(X + \varphi)$ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան, եթե X-ը և φ-ն անկախ են:

9. (X, Y) պատահական մեծության հավանականությունների բաշխումը տրված է հետևյալ աղյուսակով.

Y \ X	-1	0	1
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$

Գտնել կոռելյացիոն մատրիցան:

10. Տված է $f(x, y) = \dfrac{2}{\pi (x^2 + y^2 + 1)^2}$ երկչափ խտությունը: Գտնել $E(X)$-ը, $E(Y)$-ը և կոռելյացիոն մատրիցան:

V ԳԼՈՒԽ

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ

42. Չեբիշևի անհավասարությունը: *Ենթադրենք X պատահական մեծությունն ունի E(X) մաթեմատիկական սպասում և D(X) դիսպերսիա. այդ դեպքում* այն հավանականությունը, որ X պատահական մեծության շեղումը իր միջին արժեքից մեծ է կամ հավասար է ցանկացած ε թվին, փոքր է կամ հավասար D(X) և ε^2 թվերի հարաբերությանը՝

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (257)$$

Ապացուցենք այս հավասարությունը նախ դիսկրետ պատահական մեծության համար, որի բաշխման օրենքն է

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & \cdots & x_n, \cdots \\ p_1, & p_2, & p_3, & \cdots & p_n, \cdots \end{matrix}$$

հետևաբար՝

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}x_np_n, \qquad D(X)=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-E(X))^2p_n.$$

Ցանկացած $\varepsilon>0$ *թվի համար պատահական մեծության բոլոր արժեքները բաժանենք երկու դասի՝ այն* x_n *արժեքները, որոնց համար* $|x_n-E(X)|\geq\varepsilon$, *և այն* x_n *արժեքները որոնց համար* $|x_n-E(x)|<\varepsilon$: *Պարզ է, որ*

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)=\sum{}'p_n,$$

որտեղ $\sum'$ *գումարը տարածված է* n*-ի այն արժեքների վրա, որոնց համապատասխանող* x_n*-ը պատկանում է առաջին դասին: Քանի որ* n*-ի այդ արժեքների դեպքում*

$$\frac{1}{\varepsilon^2}(x_n-E(X))^2\geq1,$$

Պ. Լ. Չեբիշև, ռուս մեծ մաթեմատիկոս (1821—1891).

որեմն

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum' (x_n - E(X))^2 p_n\text{:}$$

Վերջապես, Σ' գումարը մի գումարով տարածված n-ի բոլոր արժեքների վրա փոխարինելով, կստանանք

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - E(X))^2 p_n = \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել։

Այժմ, եթե X-ը անընդհատ պատահական մեծություն է՝ f(x) խտությամբ և

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx,$$

նման դատողությունների օգնությամբ կստանանք

$$P(|X - E(x)| \geqslant \varepsilon) = \int_{|x-E(x)| \geqslant \varepsilon} f(x) dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x-E(x)| \geqslant \varepsilon} (x - E(X))^2 f(x) dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx = \frac{D(x)}{\varepsilon^2}\text{:}$$

Ստացված (257) անհավասարությունը կոչվում է Չեբիշևի անհավասարություն։ Այդ անհավասարությունը հավանականության համար տալիս է մի վերին եզր, որը բավականին տարբերվում է այդ հավանականությունից։

Օրինակ. Տրված է

2,	4,	8,	10,	12
0,1,	0,2,	0,4,	0,2,	0,1

պատահական մեծությունը։ Որոշենք հավանականության վերին եզրը, որ պատահական մեծության շեղումն իր միջին արժեքից մեծ է կամ հավասար է հինգի։ Այստեղ ունենք

$$E(X) = 7{,}4, \qquad D(X) = 8{,}84.$$

Հետևաբար, Չեբիշևի անհավասարության համաձայն

$$P(|X-7{,}4|\geqslant 5)\leqslant\frac{8{,}84}{25}=0{,}35\text{:}$$

Սակայն այդ հավանականության իսկական արժեքն է

$$P(|X-7{,}4|\geqslant 5)=P(X=2)=0{,}1\text{:}$$

(257) անհավասարությունից հակադիր պատահարի համար հետևում է

$$P(|X-E(X)|<\varepsilon)\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (258)$$

անհավասարությունը:

43. **Չեբիշևի թեորեմը:** *Բազմաթիվ փորձերի արդյունքները ցույց են տվել, որ միավորին մոտ հավանականություն ունեցող պատահարները համարյա միշտ տեղի են ունենում, իսկ այն պատահարները, որոնց հավանականությունը մոտ է զրոյի, ընդհանրապես շատ հազվադեպ են տեղի ունենում: Այդ պատճառով գործնական մեծ նշանակություն ունեն այն պատահարները, որոնց հավանականությունը մոտ է մեկի կամ զրոյի. ընդ որում առանձին հետաքրքրություն են ներկայացնում այն պատահարները, որոնք վերաբերում են մեծ թվով պատահական մեծությունների գումարին, որոնցից յուրաքանչյուրը միայն աննշան ազդեցություն ունի գումարի վրա: Հավանականությունների տեսության մեջ* մեծ թվերի օրենք անվան տակ հասկանում են մի շարք սահմանային թեորեմներ, որոնք հաստատում են, որ միավորին մոտ հավանականությամբ տեղի կունենան որոշ պատահարներ, որոնք վերաբերում են բավականին մեծ թվով պատահական մեծությունների գումարին:

Մեծ թվերի օրենքի ամենաընդհանուր թեորեմը՝ անկախ պատահական մեծությունների համար, Չեբիշևի թեորեմն է:

Դիտարկենք անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը՝

$$X_1,\ X_2,\cdots X_n,\cdots$$

Ենթադրենք, թե այդ պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումներն են

$$a_k=E(X_k),\qquad k=1,2,\cdots n,\cdots$$

և դիսպերսիաները՝

$$b_k=D(X_k),\qquad k=1,2,\cdots n,\cdots\text{:}$$

Այդ դեպքում դիտարկված մեծությունների միջին թվաբանականը՝

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k}{n},$$

Նույնպես կլինի պատահական մեծություն հետևյալ մաթեմատիկական սպասումով՝

$$E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n}։$$

Չեբիշևի թեորեմը։ Եթե $X_1, X_2, \cdots X_n, \ldots$ անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականություն է, ընդ որում այդ պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրն ունի մաթեմատիկական սպասում ու դիսպերսիա և դիսպերսիաների հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա մեկին ձգտող հավանականությամբ, երբ փորձերի թիվը ձգտում է անվերջության, կարելի է պնդել, որ պատահական մեծությունների միջին թվաբանականը տարբերվում է այդ պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումների միջին թվաբանականից ավելի քիչ, քան ցանկացած $\varepsilon>0$ թիվը, *այսինքն՝*

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1։\qquad(259)$$

Թեորեմի ապացուցման համար

$$X=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$

պատահական մեծության նկատմամբ կիրառենք Չեբիշևի (258) անհավասարությունը։ Հաշվի առնելով, որ

$$E(X)=E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

և

$$D(X)=D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n^2},$$

կստանանք

$$P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}>1-$$

$$-\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n^2\varepsilon^2};$$

Ըստ ենթադրության

$$b_k\leqslant L,\qquad k=1,2,\cdots n,$$

որտեղից

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{\varepsilon^2n^2}\leqslant\frac{nL}{\varepsilon^2n^2}=\frac{L}{\varepsilon^2n}.$$

Հետևաբար՝

$$P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}>1-\frac{L}{\varepsilon^2n}; \qquad (260)$$

Բայց երբ $n\to\infty$, $1-\frac{L}{\varepsilon^2n}$ *մեծությունը, եթե* ε*-ը ցանկացած թիվ է, ձգտում է միավորի. հետևաբար՝*

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k}{n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n}\right|<\varepsilon\right\}\geqslant1;$$

Սակայն, քանի որ հավանականությունը միավորից մեծ լինել չի կարող, նշանակում է նրա սահմանն էլ միավորից մեծ լինել չի կարող. ուստի

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k}{n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1;$$

Նկատենք, որ մեծ թվով դիտումների համար (260) անհավասարությունը թույլ է տալիս որոշել

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k}{n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n}\right|<\varepsilon$$

անհավասարության իրականացման հավանականության ստորին եզրը՝ դրական ε-ի ցանկացած արժեքի դեպքում, և կարող է երբեմն հաջողությամբ կիրառվել խնդիրներ լուծելու ժամանակ։

Գործնականում առանձնապես կարևոր է ապացուցված թեորեմի այն մասնավոր դեպքը, երբ

$$X_1, X_2, \cdots X_n, \cdots$$

անկախ պատահական մեծությունները ունեն նույն մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան՝

$$E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = E(X) = a,$$

$$D(X_1) = D(X_2) = \cdots = D(X_n) = D(X) = b\text{։}$$

(260) անհավասարությունից ունենք

$$P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \frac{b}{\varepsilon^2 n}, \tag{261}$$

որտեղից

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1\text{։} \tag{262}$$

Այսպիսով, եթե անկախ պատահական մեծությունները ունեն նույն մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան, ապա միավորի ձգտող հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ այդ միջին թվաբանականը քիչ է տարբերվում պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումից, եթե փորձերի թիվը մեծանում է անվերջորեն։

(261) անհավասարությունը երբեմն կարող է օգտագործվել այն անհավասարության իրականացման հավանականության ստորին եզրը որոշելու համար, որ ցույց է տրված փակագծերում։

Չեբիշևի թեորեմի մասնավոր դեպքը, որ քննարկվեց այստեղ, հիմք է տալիս միջին թվաբանականի համար, որը հաճախ կիրառվում է չափումների արդյունքները մշակելիս։ Միևնույն անհայտ ֆիզիկական a մեծության չափումների արդյունքները նշանակենք $X_1, X_2, \cdots X_n$։ Այդ դեպքում որպես այդ մեծության մոտավոր արժեք ընդունված է վերցնել այդ չափումների արդյունքների միջին թվաբանականը, այսինքն՝ ընդունել, որ

$$a \approx \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\text{։} \tag{263}$$

$X_1, X_2, \cdots X_n$ մեծությունները կարելի է դիտարկել որպես պատահական մեծություններ, ընդ որում եթե չափումները կատարվել են միատեսակ պայմաններում և զերծ են սիստեմատիկ սխալներից, ապա

$$E(X_1)=E(X_2)=\cdots E(X_n)=a:$$

Չեբիշևի ապացուցված թեորեմի համաձայն, երբ չափումների n թիվը բավականաչափ մեծ է, մեկին մոտ հավանականությամբ կարելի է պնդել որ, իրոք, չափումների արդյունքների միջին թվաբանականը ինչքան ցանկանանք քիչ կտարբերվի a-ի որոնելի մեծությունից:

Այժմ կիրառենք Չեբիշևի ապացուցված ընդհանուր թեորեմը այնպիսի անկախ փորձերի նկատմամբ, որոնցից յուրաքանչյուրի մեջ մեզ հետաքրքրում է ոչ թե պատահական մեծության ընդունած արժեքը, այլ որևէ A պատահարի հանդես գալը կամ չգալը: Ենթադրենք, թե կատարվում են անկախ փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրի ժամանակ կարող է իրականանալ կամ A պատահարը, կամ $\bar{A}$ պատահարը: Դիցուք A պատահարի հավանականությունը k-րդ փորձի ժամանակ հավասար է p_k-ի, իսկ հակադիր պատահարի հավանականությունը այդ նույն փորձի ժամանակ՝ $q_k (p_k+q_k=1)$: A պատահարի երևումների թիվը այդ n փորձերի ժամանակ, ինչպես միշտ, նշանակենք m-ով: Փորձերի նման սխեման կոչվում է «Պուասոնի փորձերի սխեմա»: Յուրաքանչյուր փորձի հետ կապենք մի X_k պատահական մեծություն, որը հավասար է պատահարի երևումների թվին այդ փորձի ժամանակ: Ակներև է, որ այդ մեծությունը կարող է ընդունել 0 արժեք՝ q_k հավանականությամբ, կամ միավոր արժեք՝ p_k հավանականությամբ: Այդ դեպքում X_k պատահական մեծությունը կունենա հավանականությունների հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$$X_k \quad \begin{matrix} 0, & 1 \\ q_k, & p_k, \end{matrix} \qquad k=1,\ 2,\ \cdots n,\ \cdots:$$

$X_1,\ X_2,\ \cdots X_n,\ \cdots$ պատահական մեծություններն անկախ են, որովհետև քննարկվող փորձերն անկախ են: Այս պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումները և դիսպերսիաները կլինեն՝

$$a_k=E(X_k)=0\cdot q_k+1\cdot p_k=p_k,$$

$$b_k=D(X_k)=E(X_k-p_k)^2=(-p_k)^2\cdot q_k+(1-p_k)^2p_k=p_k(1-p_k),$$

երբ $k = 1, 2, 3, \ldots n, \ldots$։ Ինչպես դժվար չէ տեսնել, դիսպերսիաները սահմանափակված են միևնույն թվով՝

$$b_k \leqslant \frac{1}{4} \text{*)},$$

Հետևաբար, քննարկվող պատահական մեծությունների նկատմամբ կիրառելի է ինչպես (260) անհավասարությունը, այնպես էլ Չեբիշևի սահմանային թեորեմը։ Ուշադրություն դարձնելով այն հանգամանքին, որ $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ գումարը ներկայացնում է A պատահարի երևումների m թիվը՝ անկախ n փորձերի ժամանակ, կստանանք

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}{n}\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \tag{264}$$

և

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1 \text{։} \tag{265}$$

Ստացված սահմանային հավասարությունը Պուասոնի թեորեմի բովանդակությունն է։

Թեորեմ։ Եթե անկախ փորձերի թիվը անվերջ մեծանում է, ապա միավորի ձգտող հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ պատահարի հանդես գալու հաճախության շեղումը՝ տարբեր փորձերում նրա հանդես գալու հավանականությունների միջին թվաբանականից, կարող է փոքր լինել ինչքան ցանկանանք:

Մասնավոր դեպքում, երբ A պատահարը բոլոր փորձերի ժամանակ ունի նույն հավանականությունը՝ $P(A)=p$, այսինքն՝

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p,$$

ապա (264) անհավասարությունը կընդունի

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

տեսքը, իսկ սահմանային (265) հավասարությունը կլինի

---

*) Այս բխում է $f(x) = x(1-x)$ ֆունկցիայի դիտարկումից. $0 \leqslant x \leqslant 1$ միջակայքում նա ընդունում է իր ամենամեծ արժեքը, երբ $x = \frac{1}{2}$։

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

Ստացված սահմանային հավասարությունը կազմում է Հ. Բեռնուլիի նախապես ապացուցված թեորեմի բովանդակությունը:

Օրինակ. Հայտնի է, որ դետալի X *չափը պատահական մեծություն է, որի մաթեմատիկական սպասումը՝* $a=5$, *իսկ դիսպերսիան* $\sigma^2=4$: *Վերցնում ենք պատահական* $n=1000$ *դետալներ: Որոշել այն հավանականության ստորին եզրը, որ վերցրած դետալների չափերի միջին թվաբանականը կշեղվի դետալի չափի մաթեմատիկական սպասումից 0,5-ից քիչ:*

(261) անհավասարությունից օգտվելով, գտնում ենք

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{k=1}^{1000} X_k}{n} - 5\right| < 0{,}5\right\} > 1 - \frac{4}{0{,}25 \cdot 1000} \approx \frac{123}{125},$$

44. Մարկովի*) թեորեմը: *Ա. Ա. Մարկովը ընդհանրացրել է Չեբիշևի թեորեմը կախյալ պատահական մեծությունների համար: Դիցուք տրված է*

$$X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_n,\ \ldots$$

պատահական մեծությունների հաջորդականությունը: Ենթադրենք պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրն ունի մաթեմատիկական սպասում՝

$$EX_k = a_k, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

և

$$B_n = D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

Թեորեմ: Եթե $\frac{B_n}{n^2}$ հարաբերությունը ձգտում է զրոյի, երբ փորձերի թիվը ձգտում է անվերջության (Մարկովի պայմանը), ապա մեկին ձգտող հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ պատահական մեծությունների միջին թվաբանականը այդ պատահական մե-

*) Ռուս մեծ մաթեմատիկոս (1856-1922):

ծությունների մաթեմատիկական սպասումների միջին թվաբանականից տարբերվում է ավելի քիչ, քան ցանկացած $\varepsilon>0$ թիվը, այսինքն՝

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}\right|<\varepsilon\right)=1. \tag{266}$$

Իրոք, $X=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n}$ *պատահական մեծության նկատմամբ կիրառելով Չեբիշևի*

$$P(|X-E(X)|<\varepsilon)>1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

անհավասարությունը, և հաշվի առնելով, որ

$$E(X)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

և

$$D(X)=D\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\frac{B_n}{n^2},$$

կստանանք

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{B_n}{n^2\varepsilon^2}.$$

Այժմ, եթե $n\to\infty$, *Մարկովի պայմանի համաձայն ամեն մի ցանկացած* $\varepsilon>0$ *թվի համար, սահմանին անցնելով, կունենանք*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Պարզ է, որ Մարկովի թեորեմից որպես մասնավոր դեպք հետևում է Չեբիշևի թեորեմը, եթե ենթադրենք, որ պատահական մեծու-

թյունները անկախ են միմյանցից և դիսպերսիաների համապատասխան հաջորդականությունը սահմանափակ է։ Իրոք, այդ դեպքում

$$B_n = D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k),$$

$$\frac{B_n}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} D(X_k)}{n^2} \leqslant \frac{nL}{n^2} = \frac{L}{n}$$

և բավարարված է Մարկովի պայմանը՝

$$\lim_{n \to \infty} \frac{B_n}{n^2} = 0։$$

Ընդհանուր դեպքում, երբ պատահական մեծությունները անկախ չեն իրարից, գումարի B_n դիսպերսիան արտահայտվում է ավելի բարդ ձևով։ Ստանանք այդ արտահայտությունը։ Ունենք

$$\begin{aligned}
B_n &= D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E[(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - (a_1 + a_2 + \\
&\quad + \cdots + a_n)]^2 = E[(X_1 - a_1) + (X_2 - a_2) + \cdots + (X_n - a_n)]^2 = \\
&= E[(X_1 - a_1)^2 + (X_2 - a_2)^2 + \cdots + (X_n - a_n)^2 + \\
&\quad + 2(X_1 - a_1)(X_2 - a_2) + \cdots + 2(X_{n-1} - a_{n-1})(X_n - a_n)] = \\
&= E[(X_1 - a_1)^2] + E[(X_2 - a_2)^2] + \cdots + E[(X_n - a_n)^2] + \\
&\quad + 2E[(X_1 - a_1)(X_2 - a_2)] + \cdots + 2E[(X_{n-1} - a_{n-1})(X_n - a_n)]։
\end{aligned}$$

Նշանակելով

$$\mu_{ij} = E[(X_i - a_i)(X_j - a_j)], \qquad i, j = 1, 2, \cdots n,$$

կստանանք

$$B_n = \mu_{11} + \mu_{22} + \cdots + \mu_{nn} + 2(\mu_{12} + \mu_{13} + \cdots + \mu_{n-1\,n})$$

կամ

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ii} + 2\sum_{i<j} \mu_{ij}։ \tag{267}$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$\mu_{ii} = E[(X_i - a_i)^2] = D(X_i), \qquad i = 1, 2, \cdots n,$$

իսկ μ_{ij}-ն, երբ $i \neq j$, դառնում է X_i և X_j պատահական մեծությունների կոռելյացիոն մոմենտը։ Մասնավոր դեպքում, երբ X_k $(k=1, 2, \cdots n)$ պատահական մեծություններն անկախ են, ապա $\mu_{ij}=0$, երբ $i \neq j$, և (267) բանաձևից ստացվում է

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

բանաձևը, որը հայտնի էր անկախ պատահական մեծությունների համար։

Օրինակ. Դիտենք անկախ փորձերի հաջորդականություն, ընդ որում A պատահարի հավանականությունը ամեն մի առանձին փորձում հավասար է p-ի՝

$$P(A) = p, \qquad P(\overline{A}) = 1 - p = q.$$

Միացնենք ամեն անգամ երկու հարևան i և $(i+1)$-րդ փորձերի արդյունքները և ենթադրենք, թե X_i պատահական մեծությունն ընդունում է 2 արժեքը, եթե A-ն հանդես է գալիս թե՛ i-րդ և թե՛ $(i+1)$-րդ փորձերում, ընդունում է 0 արժեքը, երբ A պատահարը հանդես է գալիս այդ փորձերից միայն մեկում, և -2 արժեքը, երբ A պատահարը հանդես չի գալիս այդ փորձերից ոչ մեկում։ X_i պատահական մեծության բաշխման օրենքը կլինի

$$\begin{array}{cccc} X_i & -2, & 0, & 2, \\ & q^2, & 2pq, & p^2, \end{array}$$

իսկ $X_i X_{i+1}$ պատահական մեծության բաշխման օրենքը՝

$$\begin{array}{cc} 0, & 4, \\ 1 - p^3 - q^3, & p^3 + q^3. \end{array}$$

Հետևաբար՝

$$a_i = E(X_i) = 2p^2 - 2q^2 = 2(p - q), \qquad i = 1, 2, \cdots$$

$$\mu_{ii} = D(X_i) = 4p^2 + 4q^2 - 4(p - q)^2 = 8pq, \qquad i = 1, 2, \cdots$$

և

$$\mu_{ij} = E[(X_i - a_i)(X_j - a_j)] = 0, \qquad |i - j| > 1,$$

քանի որ, երբ $|i-j|>1$, X_i և X_j պատահական մեծությունները գտնվում են միմյանցից անկախ, իսկ եթե $|i-j|=1$, կունենանք

$$\mu_{ij}=E[(X_i-a_i)(X_j-a_j)]=E(X_iX_j)-a_i\cdot a_j=$$

$$=4(p^3+q^3)-4(p-q)^2=4pq:$$

(267) բանաձևի համաձայն կստանանք

$$B_n=8npq+2(n-1)\cdot 4pq=8(2n-1)pq,$$

այնպես որ

$$\frac{B_n}{n^2}=\frac{(16n-8)pq}{n^2}\to 0, \qquad n\to\infty.$$

բավարարված է Մարկովի պայմանը և, հետևաբար՝

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}-2(p-q)\right|<\varepsilon\right)=1$$

ցանկացած $\varepsilon>0$ *թվի համար:*

45. Պատահական մեծության բնութագրող ֆունկցիան և նրա հատկությունները: *Պատահական X մեծության բնութագրող ֆունկցիա՝* $\varphi(t)$ *կոչվում է* e^{itX} *մեծության մաթեմատիկական սպասումը կամ միջին արժեքը, այսինքն՝*

$$\varphi(t)=E(e^{itX}), \tag{268}$$

որտեղ t-ն իրական պարամետր է, իսկ i-ն՝ կեղծ միավոր:

Եթե X-ը դիսկրետ պատահական մեծություն է, հավանականությունների հետևյալ բաշխման օրենքով՝

$$X\text{՝} \qquad x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n,\ \cdots$$

$$\qquad\quad p_1,\ p_2,\ \cdots\ p_n,\ \cdots,$$

ապա

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{itx_n}, \tag{269}$$

իսկ եթե X-ը անընդհատ պատահական մեծություն է՝ հավանականությունների բաշխման $f(x)$ *խտությամբ, ապա*

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f(x)dx. \tag{270}$$

Հեշտ է տեսնել, որ (269) շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{itx_n}=\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos tx_n + i\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin tx_n$$

բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է t-ի նկատմամբ ցանկացած վերջավոր միջակայքում։ Իրոք՝

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{itx_n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left|e^{itx_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1. \tag{271}$$

Ճիշտ այդպես էլ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f(x)dx$$

անիսկական ինտեգրալը բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է t-ի համար ցանկացած վերջավոր միջակայքում, քանի որ

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f(x)dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}|f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{272}$$

Այսպիսով, ցանկացած դիսկրետ կամ անընդհատ պատահական մեծություն ունի բնութագրող ֆունկցիա։

Կանգ առնենք բնութագրող ֆունկցիայի մի քանի հատկությունների վրա.

1. Բնութագրող $\varphi(t)$ ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է t-ի բոլոր արժեքների համար։

Իրոք, երբ X-ը դիսկրետ պատահական մեծություն է, այդ բխում է նրանից, որ (269) շարքը զուգամիտում է հավասարաչափ կերպով և նրա յուրաքանչյուր անդամը ներկայացնում է անընդհատ ֆունկցիա։ Իսկ այն դեպքում, երբ X-ը անընդհատ պատահական մեծություն է, դա բխում է (270) ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտումից։

2. Բնութագրող $\varphi(t)$ ֆունկցիան հավասար է միավորի, երբ $t=0$,

$$\varphi(0)=1: \qquad (273)$$

Իրոք, (269)-ի և (270)-ի մեջ տեղադրելով $t=0$, կստանանք

$$\varphi(0)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n=1, \quad \varphi(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1:$$

3. Բնութագրող ֆունկցիայի մոդուլը t արգումենտի բոլոր արժեքների համար չի անցնում միավորից՝

$$|\varphi(t)|\leq 1: \qquad (274)$$

Այդ անմիջականորեն երևում է (271)-ից և (272)-ից։

4. Եթե պատահական X մեծությունն ունի բոլոր կարգերի սկզբնական մոմենտները՝ մինչև n-րդ կարգը ներառյալ, ապա նրա բնութագրող ֆունկցիան դիֆերենցելի է n անգամ, ընդ որում

$$\varphi^{(k)}(0)=i^k E(X^k), \quad k\leq n: \qquad (275)$$

Պատահական մեծության համար ըստ սահմանման k-րդ կարգի մոմենտի գոյությունը նշանակում է նույն կարգի բացարձակ մոմենտի գոյություն։ Այսպես, դիսկրետ պատահական մեծության դեպքում, եթե գոյություն ունի $V_k=E(X^k)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n x_n^k$ մոմենտը, ապա գոյություն ունի նաև բացարձակ մոմենտը՝

$$\bar{V}_k=E(|X|^k)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n|x_n|^k:$$

(269) հավասարությունը առայժմ ձևականորեն k անգամ դիֆերենցելով, գտնում ենք

$$\varphi^{(k)}(t)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{itx_n}(ix_n)^k$$

կամ

$$\varphi^{(k)}(t)=i^k\sum_{n=1}^{\infty} x_n^k p_n e^{itx_n}: \qquad (276)$$

Քանի որ

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n^k p_n e^{itx_n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^k p_n |e^{itx_n}| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^k p_n = E(|X|^k) = \overline{V}_k,$$

ուրեմն, երբ $k \leqslant n$ *(276) շարքերը* t*-ի նկատմամբ զուգամիտում են հավասարաչափ կերպով, դրանով արդարանում է (269) հավասարության* k*-ապատիկ դիֆերենցման հնարավորությունը: (276)-ի մեջ ընդունելով* $t=0$*, ստանում ենք*

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k p_n$$

կամ

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k).$$

Նույն ձևով այս բանաձևը հաստատվում է նաև այն դեպքում, երբ պատահական մեծությունն անընդհատ է:

5. *Եթե* X *պատահական մեծության բնութագրող ֆունկցիան* $\varphi_X(t)$ *ֆունկցիան է, ապա* $Y=aX+b$ *պատահական մեծության բնութագրող ֆունկցիան՝*

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(at) \cdot e^{ibt}. \tag{277}$$

Իրոք,

$$\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(aX+b)}) = E(e^{itaX} \cdot e^{ibt}) = e^{ibt} \cdot E(e^{iatX}) = e^{ibt} \cdot \varphi_X(at).$$

6. Անկախ պատահական մեծությունների գումարի բնութագրող ֆունկցիան հավասար է այդ պատահական մեծությունների բնութագրող ֆունկցիաների արտադրյալին, *այսինքն՝ եթե* $X_1, X_2, \cdots X_s$ *անկախ պատահական մեծությունների բնութագրող ֆունկցիաներն են* $\varphi_{X1}(t), \varphi_{X2}(t), \cdots \varphi_{Xs}(t)$ *ֆունկցիաները, իսկ* $\varphi_X(t)$*-ն նրանց գումարի՝* $X=X_1+X_2+\cdots+X_s$*-ի բնութագրող ֆունկցիան է, ապա*

$$\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \cdots \varphi_{X_s}(t), \tag{278}$$

այլ կերպ ասած՝ պատահական մեծության բնութագրող ֆունկցիան, որի բաշխումը ներկայացնում է $X_1, X_2, \cdots X_s$ պատահական մեծությունների բաշխման ֆունկցիաների կոմպոզիցիան, հավասար է այդ պատահական մեծությունների բնութագրող ֆունկցիաների արտադրյալին:

Իրոք,

$$\varphi_x(t) = E(e^{it(X_1+X_2\ldots+X_s)}) = E[e^{itX_1}\cdot e^{itX_2}\cdot\ldots\cdot e^{itX_s}] =$$

$$= E(e^{itX_1})\cdot E(e^{itX_2})\cdots E(e^{itX_s}) = \varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t)\cdots\varphi_{X_s}(t):$$

Բնութագրող ֆունկցիայի լոգարիթմի k-րդ կարգի ածանցյալը $t=0$ կետում՝ բազմապատկած i^k-ով, կոչվում է պատահական մեծության k-րդ կարգի սեմիինվարիանտ. *այն C_k-ով նշանակելով, կունենանք*

$$C_k = i^k[\ln\varphi(t)]^{(k)}\big|_{t=0}:$$

Առաջին և երկրորդ կարգի սեմիինվարիանտները ստացվում են հետևյալ կերպ՝

$$C_1 = i[\ln\varphi(t)]'\big|_{t=0} = i\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\bigg|_{t=0} = i\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = -E(X)$$

$$C_2 = i^2[\ln\varphi(t)]''\big|_{t=0} = -\frac{\varphi(t)[\varphi''(t)]-[\varphi'(t)]^2}{[\varphi(t)]^2}\bigg|_{t=0} = -\frac{\varphi(0)\varphi''(0)-[\varphi'(0)]^2}{[\varphi(0)]^2} =$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2 = D(X)$$

կամ

$$E(X) = -C_1, \qquad D(X) = C_2:$$

46. Մի քանի բաշխումների բնութագրող ֆունկցիաները: *Դիտարկենք մի քանի առավել հաճախ պատահող բաշխումների բնութագրող ֆունկցիաները:*

1. *Որոշենք A պատահույթի երևումների թվի բնութագրող ֆունկցիան n անկախ փորձերի ժամանակ:*

Ենթադրենք, թե յուրաքանչյուր անկախ փորձում A պատահույթի հավանականությունը հաստատուն է և հավասար է p-ի, իսկ հակադիր պատահույթի հավանականությունը հավասար է q-ի ($p+q=1$): Այդ դեպքում A պատահույթի երևումների X_k թիվը յուրաքանչյուր առանձին փորձի ժամանակ կլինի պատահական մեծություն հետևյալ բաշխման օրենքով՝

X_k 0, 1, $k = 1, 2, \cdots n$:

q, p

Այս պատահական մեծության բնութագրող ֆունկցիան՝

$$\varphi_k(t)=q+pe^{it}, \quad k=1,2,\cdots n\text{:}$$

Նկատենք, որ X_k մեծության բաշխման օրենքը, հետևաբար նաև նրա բնութագրող ֆունկցիան կախում չունեն k թվից։

Քանի որ A պատահարի երևումների m թիվը n փորձերի ժամանակ հավասար է՝

$$m=X_1+X_2+\cdots+X_n,$$

իսկ $X_1, X_2, \cdots X_n$ մեծությունները անկախ են, ուրեմն m մեծության բնութագրող ֆունկցիան կլինի

$$\varphi(t)=(q+pe^{it})^n\text{:} \qquad (279)$$

Ընդհանուր դեպքում, երբ A պատահարի հավանականությունը անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում տարբեր է, k-րդ փորձում այդ հավանականությունը նշանակելով p_k-ով, իսկ հակադիր $\bar{A}$ պատահարի հավանականությունը՝ $q_k(p_k+q_k=1)$-ով, A պատահարի երևումների m թվի բնութագրող ֆունկցիան այդ n փորձերում կունենա հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\varphi(t)=(q_1+p_1e^{it})\cdot\cdots\cdot(q_n+p_ne^{it})$$

կամ

$$\varphi(t)=\prod_{k=1}^{n}(q_k+p_ke^{it})\text{:} \qquad (280)$$

2. *Որոշենք*

$$\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

պատահական մեծության նորմավորված շեղման բնութագրող ֆունկցիան, որտեղ m-ը, p-ն և q-ն ունեն այն նույն իմաստը, ինչ նրանք ունեին նախորդ խնդրում։*

Այդ պատահական մեծությունը գծային է m-ի նկատմամբ, ուստի (277) բանաձևի մեջ ընդունելով

$$a=\frac{1}{\sqrt{npq}}, \qquad b=-\frac{np}{\sqrt{npq}},$$

և (279)-ից օգտվելով, գտնում ենք նրա բնութագրող ֆունկցիան՝

$$\varphi(t)=\left(q+pe^{\frac{it}{\sqrt{npq}}}\right)^n\cdot e^{-\frac{inpt}{\sqrt{npq}}}=\left(qe^{-\frac{ipt}{\sqrt{npq}}}+pe^{\frac{i(1-p)t}{\sqrt{npq}}}\right)^n$$

---

* X *պատահական մեծության նորմավորված շեղում կոչվում է* $\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ *մեծությունը։ Ակներև է, որ*

$$E\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)=0, \qquad D\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)=1,$$

կամ

$$\varphi(t)=\left(qe^{-it\sqrt{\frac{p}{nq}}}+pe^{it\sqrt{\frac{q}{np}}}\right)^{n}, \tag{281}$$

3. Որոշենք Պուասոնի հավանականությունների բաշխման բնութագրող ֆունկցիան։

X պատահական մեծությունը, որը ենթարկվում է Պուասոնի հավանականությունների բաշխմանը, կարող է ընդունել ցանկացած ամբողջ ոչ բացասական n արժեքը հետևյալ հավանականությամբ՝

$$p_n=e^{-a}\frac{a^n}{n!}, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ldots.$$

ապա նրա բնութագրող ֆունկցիան՝

$$\varphi(t)=E(e^{itX})=\sum_{n=0}^{\infty}e^{itn}e^{-a}\frac{a^n}{n!}=e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ae^{it})^n}{n!}$$

կամ

$$\varphi(t)=e^{a\cdot(e^{it}-1)}: \tag{282}$$

4. Այժմ գտնենք X պատահական մեծության բնութագրող ֆունկցիան, եթե նա ունի հավանականությունների հավասարաչափ բաշխում [a, b] միջակայքում։

Հավանականությունների հավասարաչափ բաշխման դեպքում հավանականությունների բաշխման խտությունն է՝

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{1}{b-a}, & a\leq x\leq b\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

ապա բնութագրող ֆունկցիան կլինի

$$\varphi(t)=E(e^{itX})=\int_a^b e^{itx}\frac{dx}{b-a}=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx$$

կամ

$$\varphi(t)=\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{it(b-a)}: \tag{283}$$

Մասնավորապես, եթե X պատահական մեծությունը $[-a, a]$ միջակայքում բաշխված է հավասարաչափ, կստանանք

$$\varphi(t)=\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2ait}$$

կամ

$$\varphi(t)=\frac{\sin at}{at}. \qquad (284)$$

Այս դեպքում բնութագրող ֆունկցիան իրական է։

5. Որոշենք Սիմպսոնի բաշխման բնութագրող ֆունկցիան։ Սիմպսոնի հավանականությունների բաշխումը ստացվում է որպես $[a, b]$ միջակայքում հավանականությունների հավասարաչափ բաշխումների կոմպոզիցիա, ուստի նրա բնութագրող ֆունկցիան ստացվում է որպես երկու հավանականությունների հավասարաչափ բաշխումների բնութագրող ֆունկցիաների արտադրյալ, այսինքն՝

$$\varphi(t)=-\frac{(e^{ibt}-e^{iat})^2}{(b-a)^2\cdot t^2}. \qquad (285)$$

Մասնավոր դեպքում, երբ հավանականությունների հավասարաչափ բաշխումը տեղի է ունենում $[-a, a]$ միջակայքում, կունենանք

$$\varphi(t)=\frac{\sin^2 at}{a^2t^2}, \qquad (286)$$

6. Որոշենք հավանականությունների նորմալ բաշխման բնութագրող ֆունկցիան։

Նախ՝ ենթադրենք, թե X պատահական մեծությունն ունի հավանականությունների նորմալ բաշխում՝ 0 և 1 պարամետրերով, այսինքն՝ հավանականությունների բաշխման խտությունը ներկայանում է հետևյալ ֆունկցիայով՝

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Այդ դեպքում այդ պատահական մեծության բնութագրող ֆունկցիան՝

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Փոփոխականի փոխարինում կատարելով՝

$$x = s + it,$$

կստանանք

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(s+it) - \frac{1}{2}(s+it)^2} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty - it}^{\infty - it} e^{-\frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2}} ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty - it}^{\infty - it} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

կամ

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad (287)$$

այս դեպքում ևս բնութագրող ֆունկցիան իրական է: Ընդհանրապես եթե պատահական մեծությունը զրոյի նկատմամբ ունի հավանականությունների սիմետրիկ բաշխում (նրա խտությունը՝ $f(x)$ բավարարում է $f(x)=f(-x)$ պայմանին), բնութագրող ֆունկցիան իրական է:

Այժմ ենթադրենք, թե Y պատահական մեծությունն ունի հավանականությունների նորմալ բաշխում՝ a և σ պարամետրերով, այսինքն՝ նրա խտությունը՝

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}:$$

Այդ դեպքում ընդունելով

$$X = \frac{Y-a}{\sigma},$$

X-ի համար կստանանք հավանականությունների բաշխման հետևյալ խտությունը՝

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

որի բնութագրող ֆունկցիան՝

$$\varphi_1(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

Հետևաբար, Y մեծության որոնելի բնութագրող ֆունկցիան կգտնվի (277) բանաձևով՝

$$\varphi(t) = e^{i a t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \qquad (288)$$

47. Բնութագրող ֆունկցիայի շրջման բանաձևը: *Դիտարկենք X անընդհատ պատահական մեծությունը, որի հավանականությունների բաշխման խտությունը հավասար է f(x)-ի, իսկ բնութագրող ֆունկցիան՝ φ(t)-ի: Սահմանման համաձայն*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx.$$

Քանի որ f(x) ֆունկցիան անընդհատ է և ինտեգրելի է ամբողջ առանցքի վրա, կարող է ներկայացվել Ֆուրյեի ինտեգրալով՝

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(t-x)} dt^{*}$$

կամ

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt,$$

Նկատի ունենալով, որ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt = \varphi(\alpha),$$

նախորդ հավասարությունից ստանում ենք

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \varphi(\alpha) d\alpha. \qquad (289)$$

Քանի որ φ(α)-ն X պատահական մեծության բնութագրող ֆունկցիան է, (289) բանաձևը թույլ է տալիս φ(t) բնութագրող ֆունկցիայի միջոցով որոշել այդ մեծության բաշխման f(x) խտությունը: Այս բանաձևը կոչվում է շրջման բանաձև:

(270) բանաձևի համաձայն պատահական մեծության բաշխման խտությունը որոշում է այդ մեծության բնութագրող ֆունկցիան մի-

* *Վ. Ի. Սմիրնով, Բարձրագույն մաթեմատիկա,* II *հատոր,* § *160:*

արժեք կերպով: Շրջման բանաձևը ցույց է տալիս, որ հակադարձաբար պատահական մեծության բնութագրող ֆունկցիան որոշում է այդ մեծության բաշխման խտությունը նույնպես միարժեք:

Այսպիսով, անընդհատ պատահական մեծությունների համար բաշխման ֆունկցիաների և բնութագրող ֆունկցիաների միջև համապատասխանությունը փոխադարձ միարժեք է: Կարելի է ապացուցել, որ այս հատկությունը տեղի ունի ցանկացած պատահական մեծության համար:

Օգտվելով բնութագրող ֆունկցիաներից, կարելի է ստանալ տարբեր հավանականությունների բաշխումների կոմպոզիցիան:

Դիցուք X և Y անկախ պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրը համապատասխանաբար ունի Պուասոնի բաշխում՝ a և b պարամետրերով՝

$$P(X=k)=e^{-a}\frac{a^k}{k!}, \qquad P(Y=k)=e^{-b}\frac{b^k}{k!}:$$

Նրանց բնութագրող ֆունկցիաները (282) բանաձևի համաձայն կլինեն

$$\varphi_1(t)=e^{a(e^{it}-1)}, \qquad \varphi_2(t)=e^{b(e^{it}-1)}:$$

6-րդ հատկության համաձայն $X+Y$ գումարի բնութագրող ֆունկցիան՝ $\varphi(t)$-ն, ստացվում է այդ բնութագրող ֆունկցիաների իրար հետ բազմապատկելով, այսինքն՝

$$\varphi(t)=e^{a(e^{it}-1)}\cdot e^{b(e^{it}-1)}$$

կամ

$$\varphi(t)=e^{(a+b)(e^{it}-1)}:$$

Ստացանք նույն տեսքի բնութագրող ֆունկցիա, բայց $(a+b)$ պարամետրով: Նկատի ունենալով, որ հավանականությունների բաշխումը միարժեք կերպով է որոշվում իր բնութագրող ֆունկցիայի միջոցով, եզրակացնում ենք, որ այդպիսի ֆունկցիա ունի միայն Պուասոնի բաշխումը և, հետևաբար, Պուասոնի բաշխումների կոմպոզիցիան՝ a և b պարամետրերով, կրկին ներկայացնում է Պուասոնի բաշխում՝ $(a+b)$ պարամետրով:

Եթե X և Y անկախ պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրը ենթարկվում է հավանականությունների նորմալ բաշխմանը՝ (a_1, σ_1) և (a_2, σ_2) համապատասխանաբար պարամետրերով, ապա նրանց բնութագրող ֆունկցիաները ըստ (288) բանաձևի կլինեն

$$\varphi_1(t) = e^{ia_1 t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}}, \qquad \varphi_2(t) = e^{ia_2 t - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}},$$

Իսկ նրանց գումարի $\varphi(t)$ *բնութագրող ֆունկցիան կստացվի որպես արտադրյալ՝*

$$\varphi(t) = e^{i(a_1+a_2)t - \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} t^2},$$

որ ներկայացնում է հավանականությունների նորմալ բաշխման բնութագրող ֆունկցիան՝ $a_1 + a_2$ *և* $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ *պարամետրերով։ Այսպիսով ավելի պարզ ճանապարհով հաստատեցինք նախապես ապացուցված փաստը, որ հավանականությունների նորմալ բաշխումների կոմպոզիցիան կրկին հավանականությունների նորմալ բաշխումն է։*

48. Սահմանային թեորեմներ՝ բնութագրող ֆունկցիաների համար։
Բնութագրող ֆունկցիայի համար առանց ապացուցման բերենք երկու սահմանային թեորեմներ, որոնք հետագայում մեզ անհրաժեշտ են լինելու։

Ուղիղ սահմանային թեորեմ: *Եթե բաշխման ֆունկցիաների հաջորդականությունը՝*

$$F_1(x),\ F_2(x),\ \cdots\ F_n(x),\ \cdots$$

զուգամետ է $F(x)$ *բաշխման ֆունկցիային՝ յուրաքանչյուր կետում, որտեղ այդ* $F(x)$ *ֆունկցիան անընդհատ է, ապա համապատասխան բնութագրող ֆունկցիաների հաջորդականությունը՝*

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots\ \varphi_n(t),\ \cdots$$

զուգամիտում է $\varphi(t)$ *բնութագրող ֆունկցիային, ընդ որում* $\varphi(t)$*-ն* $F(x)$ *բաշխման ֆունկցիայի բնութագրող ֆունկցիան է. այս զուգամիտությունը հավասարաչափ է յուրաքանչյուր* t*-ի վերջավոր միջակայքում։*

Հակադարձ սահմանային թեորեմ: *Եթե բնութագրող ֆունկցիաների հաջորդականությունը՝*

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots\ \varphi_n(t),\ \cdots$$

զուգամիտում է $\varphi(t)$ *բնութագրող ֆունկցիային, ապա համապատասխան բաշխման ֆունկցիաների հաջորդականությունը՝*

$$F_1(x),\ F_2(x).\ \cdots\ F_n(x),\ \cdots$$

զուգամիտում է $F(x)$ բաշխման ֆունկցիային՝ այդ ֆունկցիայի անընդհատության բոլոր կետերում. ընդ որում $\varphi(t)$-ն $F(x)$ բաշխման ֆունկցիայի բնութագրող ֆունկցիան է։

Որպես հակադարձ սահմանային թեորեմի կիրառման օրինակ կրկին ապացուցենք Լապլասի թեորեմը՝ բնութագրող ֆունկցիաների եղանակով։

Դիցուք m-ը, ինչպես միշտ, ներկայացնում է A պատահարի երևումների թիվը n անկախ փորձերում, իսկ p-ն և $q=(1-p)$-ն՝ համապատասխանաբար A և $\bar{A}$ պատահարների հավանականությունները այդ փորձերից յուրաքանչյուրում։ Այդ դեպքում, ինչպես ցույց տվեցինք (V, *46*)՝

$$X_n = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

նորմավորված պատահական մեծության բնութագրող ֆունկցիան՝

$$\varphi_n(t) = \left(qe^{-it\sqrt{\frac{p}{nq}}} + p\cdot e^{it\sqrt{\frac{q}{np}}}\right)^n,$$

Փակագծերում գտնվող յուրաքանչյուր գումարելին վերածելով Մակլորենի շարքի, կստանանք

$$qe^{-it\sqrt{\frac{p}{nq}}} + pe^{it\sqrt{\frac{q}{np}}} = q\cdot\left|1-it\sqrt{\frac{p}{nq}} + \frac{1}{2!}\left(it\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^2 + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k!}\left(-it\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^k + \cdots\right| + p\cdot\left|1 + it\sqrt{\frac{q}{np}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!}\left(it\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\left(it\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^k + \cdots\right|$$

կամ

$$q\cdot e^{-it\sqrt{\frac{p}{nq}}} + p.e^{it\sqrt{\frac{q}{np}}} = 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{3!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3\cdot\frac{q(-p)^3+pq^3}{(\sqrt{pq})^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^k \frac{q(-p)^k+pq^k}{(\sqrt{pq})^k} + \cdots = 1 - \frac{t^2}{2n}\left[1+\right.$$

$$+\frac{2}{3!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)\frac{q(-p)^3+pq^3}{(\sqrt{pq})^3}+\cdots+\frac{2}{k!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{k-2}\frac{q(-p)^k+pq^k}{(\sqrt{pq})^k}+\cdots\Bigg]=$$

$$=1-\frac{t^2}{2n}\cdot\left(1+R_n\right),$$

որտեղ

$$R_n = 2\sum_{K=3}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{k-2}\frac{q(-p)^k+pq^k}{(\sqrt{pq})^k},$$

Ակներև է, որ $R_n \to 0$, *երբ* n*-ը ձգտում է անվերջության։ Անցնելով* $\varphi_n(t)$ *բնութագրող ֆունկցիային, գտնում ենք*

$$\varphi_n(t)=\left[1-\frac{t^2}{2n}\left(1+R_n\right)\right]^n,$$

և երբ n*-ը ձգտում է անվերջության՝*

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{t^2}{2n}(1+R_n)\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n$$

կամ

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=e^{-\frac{t^2}{2}},$$

Ստացանք հավանականությունների նորմալ բաշխման բնութագրող ֆունկցիան՝ 0 և 1 պարամետրերով։ Հետևաբար, հակադարձ սահմանային թեորեմի համաձայն

$$\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

պատահական մեծության հավանականությունների սահմանային բաշխումը նորմալ բաշխում է՝ 0 և 1 պարամետրերով, այսինքն՝

$$P\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx, \qquad (290)$$

որտեղից

$$P\left(a<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<b\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

կամ

$$P\{a\sqrt{npq}+np<m<b\sqrt{npq}+np\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

որը և կազմում է Լապլասի թեորեմի բովանդակությունը։

49. Հավանականությունների տեսության կենտրոնական սահմանային թեորեմը: *Նախքան կենտրոնական սահմանային թեորեմը քննարկելը, մեկնաբանենք Լապլասի թեորեմը (290) հետևյալ եղանակով։*

Հիշելով, որ m-ը անկախ պատահական մեծությունների գումար է՝

$$m=X_1+X_2+\cdots+X_n,$$

որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է ընդունել միայն երկու արժեք՝ 0 և 1, համապատասխան q և p հավանականություններով, և որ յուրաքանչյուր X_k պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է p-ի, իսկ դիսպերսիան՝ pq-ի, կարող ենք (290) առնչությունը գրել հետևյալ կերպ՝

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-E(X_k))}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}D(X_k)}}<x\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\text{։}\qquad(291)$$

Հավանականությունների տեսության կենտրոնական սահմանային թեորեմը Լապլասի (291) թեորեմի ընդհանրացումն է՝ կամայական վերցված $X_1, X_2,\cdots X_n,\ldots$ անկախ պատահական մեծությունների համար, որոնք բավարարում են միայն մի քանի պայմանների, որոնց իմաստը ցույց է տրվելու ստորև։

Առաջին անգամ 1901 թվին ապացուցել է ակադեմիկոս Ա. Մ. Լյապունովը*)

Դիցուք տրված են

$$X_1,\ X_2,\cdots X_n,\ldots$$

* Ռուս մեծ մաթեմատիկոս (1857—1918)։

անկախ պատահական մեծությունները՝ համապատասխան

$$a_1, a_2, \cdots a_n, \ldots$$

մաթեմատիկական սպասումներով,

$$b_1, b_2, \cdots b_n, \ldots$$

դիսպերսիաներով և

$$c_1, c_2, \cdots c_n, \ldots$$

երրորդ բացարձակ կենտրոնական մոմենտներով։ Նշանակենք

$$B_n = b_1 + b_2 + \ldots b_n.$$

Այդ դեպքում Լյապունովի թեորեմը կձևակերպվի հետևյալ կերպ.
Թ ե ո ր ե մ. Եթե տեղի ունի

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k}{B_n^{3/2}} = 0 \qquad (292)$$

պայմանը, ապա

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} (X_k - a_k)}{\sqrt{B_n}}$$

պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման սահմանային ֆունկցիան, երբ n-*ը ձգտում է անվերջության, կլինի հավանականությունների նորմալ բաշխման ֆունկցիա՝ 0 և 1 պարամետրերով. այսինքն՝*

$$P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} (X_k - a_k)}{\sqrt{B_n}} < x \right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \qquad (293)$$

Ամենից առաջ նկատենք, որ եթե պատահական մեծությունները ունեն հավանականությունների նույն բաշխումը, ապա

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1} = \cdots = a,$$

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_n = \ldots = b \neq 0,$$

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \ldots = c,$$

և (292) պայմանը միշտ տեղի ունի, քանի որ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k}{B_n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{nc}{(nb)^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{c}{b\sqrt{nb}}=0:$$

Թեորեմն ապացուցենք այս մասնավոր դեպքի համար. այդ դեպքում կունենանք

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-a_k)}{\sqrt{B_n}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-a)}{\sqrt{nb}},$$

նշանակելով

$$\frac{X_k-a}{\sqrt{nb}}=Y_k,\qquad k=1,\,2,\cdots n,$$

կունենանք

$$E(Y_k)=0,\qquad D(Y_k)=\frac{1}{n},\qquad k=1,\,2,\cdots n$$

և

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k-a}{\sqrt{nb}}=\sum_{k=1}^{n}Y_k:$$

(X_k-a) պատահական մեծության բնութագրող ֆունկցիան նշանակելով $\varphi(x)$-ով և նրա նկատմամբ կիրառելով Մակլորենի բանաձևը՝

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+o(t^2),$$

կստանանք

$$\varphi(t)=1-\frac{b}{2}t^2+o(t^2),$$

քանի որ

$$\varphi'(0)=i\,E(X_k-a)=0,\qquad \varphi''(0)=i^2E[(X_k-a)^2]=-b:$$

Այդ դեպքում Y_k մեծության $\varphi(t)$ բնութագրող ֆունկցիան (277)-ի համաձայն կլինի

$$\varphi(t)=1-\frac{b}{2!}\left(\frac{t}{\sqrt{nb}}\right)^2+o\left[\left(\frac{t}{\sqrt{nb}}\right)^2\right]$$

կամ

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{nb}\right),$$

$\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ գումարի $\Psi_n(t)$ բնութագրող ֆունկցիան հավասար կլինի առանձին Y_k գումարելիների բնութագրող ֆունկցիաների արտադրյալին, այսինքն՝

$$\Psi_n(t) = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{nb}\right)\right]^n,$$

իսկ երբ n-ը ձգտում է անվերջության, ապա

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{nb}\right)\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n$$

կամ

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

Այսպիսով՝

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - a}{\sqrt{nb}}$$

պատահական մեծության բնութագրող ֆունկցիան, երբ n-ը ձգտում է անվերջության, ձգտում է հավանականությունների նորմալ բաշխման բնութագրող ֆունկցիային՝ 0 և 1 պարամետրերով։ Հետևաբար, բնութագրող ֆունկցիաների հակադարձ սահմանային թեորեմի համաձայն քննարկվող գումարի բաշխման ֆունկցիան, երբ n-ը անսահմանորեն աճում է, անսահման կերպով մոտենում է հավանականությունների նորմալ բաշխման ֆունկցիային, այսինքն՝

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - a)}{\sqrt{nb}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,$$

Այս թեորեմի ապացույցը ընդհանուր դեպքում բարդ է, ուստի այն բաց ենք թողնում։ Պարզենք միայն Լյապունովի (292) պայմանի իմաստը։

Եթե տվյալ X_k պատահական մեծությունների փոխարեն քննարկենք Y_{nk} պատահական մեծությունները, որոնք հավասար են՝

$$Y_{nk}=\frac{X_k-a_k}{\sqrt{B_n}}, \quad k=1,\ 2,\cdots,\ n\cdots,$$

ապա (292) պայմանը պահանջում է այդ մեծությունների յուրահատուկ փոքրություն՝ n-ի բավականաչափ մեծ արժեքների դեպքում: *Իրոք, Y_{nk} պատահական մեծությունների համար (292) պայմանը գրվում է հետևյալ կերպ՝*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}E(|Y_{nk}|^3)=0,$$

որը $E(|Y_{nk}|^3)$-ի ոչ բացասականության շնորհիվ իրականանում է այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\lim_{n\to\infty}E(|Y_{nk}|^3)=0, \qquad k=1,2,\cdots,n:$$

Այժմ գնահատենք այն հավանականությունը, որ Y_{nk} պատահական մեծությունը իր բացարձակ արժեքով փոքր չէ որևէ կամայական դրական ε թվից, այսինքն՝

$$P(|Y_{nk}|\geqslant\varepsilon):$$

Օրինակ, ենթադրելով, որ Y_{nk} մեծությունը անընդհատ պատահական մեծություն է՝ $f_{nk}(y)$ բաշխման խտությամբ, կստանանք

$$P(|Y_{nk}|\geqslant\varepsilon)=\int\limits_{|y|\geqslant\varepsilon}f_{nk}(y)dy$$

կամ

$$P(|Y_{nk}|\geqslant\varepsilon)\leqslant\int\limits_{|y|\geqslant\varepsilon}\frac{|y|^3}{\varepsilon^3}f_{nk}(y)dy,$$

քանի որ $|y|\geqslant\varepsilon$-ն անհավասարությունից հետևում է, որ $\left|\frac{|y|^3}{\varepsilon^3}\right|\geqslant 1$:

Ստացված անհավասարության աջ մասում ինտեգրալի տակ գտնվող արտահայտության դրական լինելու հետևանքով կունենանք

$$P(|Y_{nk}|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|^3f_{nk}(y)dy$$

կամ

$$P(|Y_{nk}| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^3} E|Y_{nk}|^3, \qquad k=1, 2, \cdots n,$$

այնպես որ $E|Y_{nk}|^3 \to 0$, երբ $n \to \infty$, պայմանից հետևում է, որ

$$P(|Y_{nk}| \geqslant \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0, \qquad k=1, 2, \cdots n, \cdots$$

կամ

$$P(|Y_{nk}| < \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 1, \qquad k=1, 2, \cdots n:$$

Այսպիսով, Լյապունովի պայմանը, X_k $(k=1, 2, \cdots n)$ պատահական մեծությունների վրա դրվելով, պահանջում է, որպեսզի

$$\left| \frac{X_k - a_k}{\sqrt{B_n}} \right| < \varepsilon, \qquad k=1, 2, \cdots n$$

անհավասարության իրականացման հավանականությունը ε-ի ցանկացած արժեքի համար $(\varepsilon > 0)$ ձգտի մեկի:

Հավանականությունների նորմալ բաշխումից օգտվում էին մինչև կենտրոնական սահմանային թեորեմի հաստատվելը: Գործնականում ընդունում էին, որ դիտվող բոլոր պատահական մեծությունները մոտավորապես ունեն հավանականությունների նորմալ բաշխում: Լյապունովի թեորեմով որոշվեց հավանականությունների նորմալ բաշխման կիրառելիության սահմանները՝ պարզելով այն պայմանները, որոնք բավարար են նրա իրականացման համար, այսինքն՝ դիտվող պատահական մեծությունը մոտավորապես հետևում է հավանականությունների նորմալ բաշխմանը, երբ նա ամբողջ գումարի համեմատությամբ փոքր և համարյա անկախ պատահական մեծությունների գումար է:

Օրինակ, արտադրության մեջ դետալի չափի մեջ կատարած սխալը, որն առաջանում է նրա պատրաստման ժամանակ, հաստոցի, գործիքի, նախապատրաստվածքի և այլ փոքրիկ պատահական սխալների գումարման արդյունքն է, ուստի այդ սխալը մոտավորապես հետևում է նորմալ բաշխմանը:

Յուրաքանչյուր մեծության չափման արդյունքին ուղեկցում է որևէ սխալ, որը բազմաթիվ, շատ փոքր մեծությամբ, իրարից անկախ պատահական սխալների (ինչպես չափող գործիքի սխալը, դիտողի անձնական սխալները և այլն) գումարն է: Ուստի չափման սխալները նույնպես հետևում են նորմալ բաշխմանը:

Կիրառենք Լյապունովի թեորեմը մի մասնավոր դեպքի՝ Պուասոնի փորձերի սխեմայի նկատմամբ: Ենթադրենք, թե կատարվում են անկախ փորձեր, և k-րդ փորձում A պատահարի հավանականությունը հավասար է p_k-ի, իսկ հակադիր $\overline{A}$ պատահարի հավանականությունը՝ q_k-ի $(p_k+q_k=1)$։ Այդ դեպքում A պատահարի երևումների m թիվն այդ n փորձերում, ինչպես ցույց տվեցինք, կարելի է ներկայացնել գումարի տեսքով՝

$$m = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

որտեղ X_k պատահական մեծությունն ունի

X_k	0,	1
	q_k,	p_k

բաշխումը։ Գտել ենք, որ

$$a_k = E(X_k) = p_k, \qquad b_k = D(X_k) = p_k q_k, \qquad k = 1, 2, \cdots n\text{։}$$

Երրորդ բացարձակ մոմենտը՝

$$c_k = E\,|X_k - p_k|^3 = q_k\,|0 - p_k|^3 + p_k\,|1 - p_k|^3$$

կամ

$$c_k = q_k p_k (p_k^2 + q_k^2), \qquad k = 1, 2, \cdots n\text{։}$$

Ստուգենք Լյապունովի պայմանը, հաշվելով

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k}{B_n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} q_k p_k (p_k^2 + q_k^2)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k q_k\right)^{3/2}}.$$

քանի որ $p_k^2 + q_k^2 < 1$, $(k = 1, 2, \cdots n)$, ապա

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} q_k p_k (p_k^2 + q_k^2)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k q_k\right)^{3/2}} < \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} q_k p_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k q_k\right)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k q_k}},$$

և եթե

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k q_k$$

շարքը տարամիտող է, ապա Լյապունովի պայմանը տեղի ունի և, հետևաբար՝

$$P\left\{\frac{m-\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k q_k}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad (294)$$

երբ n-ը ձգտում է անվերջության. այսինքն՝ Պուասսոնի փորձերի սխեմայում ևս

$$\frac{m-\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k q_k}}$$

պատահական մեծության բաշխումը փորձերի թվի անսահման աճի դեպքում ձգտում է Գաուսի բաշխմանը, եթե

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k q_k$$

շարքը տարամետ է։

Լյապունովի թեորեմից ստացվում է այն սահմանային հավանականությունը, որ դիտարկվող գումարը՝ $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{X_k - a_k}{\sqrt{B_n}}$, կգտնվի տրված սահմաններում.

$$P\left\{x_1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sqrt{B_n}} < x_2\right\} \to \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (295)$$

երբ n-ը անսահմանորեն աճում է։ Այստեղ $\Phi(t)$-ն Լապլասի ֆունկցիան է։

Նկատի ունենալով, որ փակագծերում գտնվող անհավասարությունը համարժեք է

$$\frac{x_1\sqrt{B_n}}{n} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} < \frac{x_2\sqrt{B_n}}{n}$$

անհավասարությանը, (295) սահմանային առնչությունը կարելի է գրել նաև հետևյալ կերպ՝

$$P\left\{\frac{x_1\sqrt{B_n}}{n} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} < \frac{x_2\sqrt{B_n}}{n}\right\} \to \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \qquad (296)$$

կամ, մասնավոր դեպքում, երբ փորձերը կատարվում են միևնույն պատահական մեծության նկատմամբ՝

$$P\left\{x_1\sqrt{\frac{b}{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n} - a < x_2\sqrt{\frac{b}{n}}\right\} \to \Phi(x_2) - \Phi(x_1)\text{։} \qquad (297)$$

Այսպիսով, Լյապունովի թեորեմից ստացվում են հետևյալ մոտավոր բանաձևերը՝

$$P\left\{x_1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sqrt{B_n}} < x_2\right\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (298)$$

$$P\left\{\frac{x_1\sqrt{B_n}}{n} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} \leqslant \frac{x_2\sqrt{B_n}}{n}\right\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (299)$$

իսկ այն դեպքում, երբ փորձերը կատարվում են միևնույն պատահական մեծության նկատմամբ՝

$$P\left\{x_1\sqrt{\frac{b}{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n} - a < x_2\sqrt{\frac{b}{n}}\right\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (300)$$

որոնք այնքան ավելի ճշգրիտ են, որքան մեծ է փորձերի n թիվը։

Ի վերջո բերենք մի քանի պարզագույն օրինակներ։

Օրինակ 1. Անկախ փորձերից յուրաքանչյուրի ժամանակ X_k ($k=1, 2, \cdots n$) պատահական մեծությունը, որ k-րդ փորձի արդյունքն է, ունի հավանականությունների բաշխման միևնույն խտությունը՝

$$f(x) = 2e^{-2x}, \qquad 0 < x < \infty։$$

Որոշել այն հավանականությունը, որ դիտված արժեքների միջին թվաբանականը $n = 100$ փորձերում գտնվում է հետևյալ սահմաններում՝

$$0 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n} < 1։$$

Պատահական X_k մեծությունը յուրաքանչյուր փորձում ունի հետևյալ մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան՝

$$a = E(X_k) = \int\limits_0^\infty 2xe^{-2x}dx = \frac{1}{2}$$

$$b = D(X_k) = E(X_k^2) - [E(X_k)]^2 = 2\int\limits_0^\infty x^2e^{-2x}dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}։$$

Լյապունովի պայմանը տեղի ունի, քանի որ X_k պատահական մեծությունները ունեն հավանականությունների միևնույն խտությունը, ուստի, (300) մոտավոր հավասարությունից օգտվելով, ստանում ենք

$$P\left\{\frac{1}{2} + \frac{x_1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n} < \frac{1}{2} + \frac{x_2}{2\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)։$$

$$\frac{x_1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2} = 0, \qquad \frac{x_2}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2} = 1$$

հավասարություններից ստացվում է

$$x_1 = -10, \qquad x_2 = +10$$

և, $\Phi(t)$ ֆունկցիայի աղյուսակից օգտվելով, գտնում ենք որոնելի հավանականությունը՝

$$P\left(0 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n} < 1\right) \approx 0{,}99999։$$

Այսպիսով, մեկին մոտ հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ փորձերի արդյունքների միջին թվաբանականը դուրս չի գա 0 և 1 թվերի սահմաններից։

Օրինակ 2. n անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում X_k $(k=1, 2, \cdots n)$ պատահական մեծությունը, որը k-երորդ փորձի արդյունքն է, ունի հավանականությունների բաշխման հետևյալ խտությունը՝

$$f(x) = 2xe^{-x^2}, \qquad 0 < x < \infty։$$

Քանի՞ փորձ պետք է կատարել, որպեսզի $2\Phi(t)=0{,}8$ հավանականությամբ կարելի լինի վստահ լինել, որ դիտված արժեքների միջին թվաբանականի շեղումը պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումից բացարձակ արժեքով չի անցնի 0,01-ից։

X_k պատահական մեծությունները յուրաքանչյուր փորձի ժամանակ ունեն հավանականությունների միևնույն բաշխումը, ընդ որում

$$a = E(X_k) = \int\limits_0^{\infty} 2x^2\, e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$b = D(X_k) = \int\limits_0^{\infty} 2x^3 e^{-x^2} dx - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Հետևաբար, (300) բանաձևի համաձայն ունենք

$$P\left\{-x\sqrt{\frac{1-\frac{\pi}{4}}{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} < x\sqrt{\frac{1-\frac{\pi}{4}}{n}}\right\} \approx 0{,}8,$$

Ըստ պայմանի

$$2\Phi(x) \approx 0{,}8,$$

որտեղից

$$\Phi(x) \approx 0.4 \qquad x \approx 1,28,$$

$$1,28\sqrt{\frac{1-\frac{\pi}{4}}{n}} \approx 0,01$$

հավասարումից

$$n \approx 4100,$$

Օ ր ի ն ա կ 3. Հայտնի է, որ կլոր դետալի կենտրոնի շեղումը (էքսցենտրիսիտետ) ենթարկվում է հավանականությունների բաշխման հետևյալ խտությանը՝

$$f(r) = re^{-\frac{r^2}{2}}, \qquad o < r < +\infty,$$

Որոշել, թե ինչպիսի՞ն է այն հավանականությունը, որ պատահական ձևով վերցված $n=200$*) դետալների մեջ էքսցենտրիսիտետի դիտված արժեքների միջին թվաբանականը կգտնվի

$$1,10 \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} r_k}{n} < 1,25$$

սահմաններում։

Պատահական r_k մեծությունը յուրաքանչյուր փորձում ունի հավանականությունների միևնույն բաշխումը, ընդ որում

$$a = E(r_k) = \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

$$b_k = D(r_k) = \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{r^2}{2}} dr - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2},$$

Ուստի, (300) բանաձևից գտնում ենք

---

* Փորձերի անկախությունն ապահովվում է նրանով, որ յուրաքանչյուր փորձից հետո դետալը վերադարձվում է խմբի մեջ։

$$P\left\{x_1\sqrt{\frac{2-\frac{\pi}{2}}{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} r_k}{n} - \frac{\sqrt{2\pi}}{2} < x_2\sqrt{\frac{2-\frac{\pi}{2}}{n}}\right\} \approx$$

$$\approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)։$$

x_1-ը և x_2-ը ստանալու համար կազմում ենք հետևյալ հավասարումները՝

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2} + x_1\sqrt{\frac{2-\frac{\pi}{2}}{200}} = 1,10$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2} + x_2\sqrt{\frac{2-\frac{\pi}{2}}{200}} = 1,25,$$

որտեղից

$$x_1 \approx -3, \qquad x_2 \approx 0,$$

հետևաբար՝

$$P\left\{1,10 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} r_k}{n} < 1,25\right\} \approx \Phi(0)-\Phi(-3)=\Phi(3)=0,498։$$

50. Խնդիրներ

1. Որոշել X-ի բնութագրող ֆունկցիան, եթե տված է նրա բաշխման օրենքը՝

$$X\text{՝} \quad -1, \quad 0, \quad 1$$

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}։$$

2. Որոշել X-ի բնութագրող ֆունկցիան, եթե նրա խտությունը՝

$$f(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|}, \qquad a>0։$$

3. X-ի բնութագրող ֆունկցիան է f(x)-ը, որոշել Z=|X−Y|-ի բնութագրող ֆունկցիան, եթե X-ը և Y-ը անկախ պատահական մեծություններ են և ունեն նույն հավանականությունների բաշխումը։

4. X-ի բնութագրող ֆունկցիան՝

$$\varphi(t) = \cos t,$$

որոշել X-ի հավանականությունների բաշխումը։

5. X-ի բնութագրող ֆունկցիան՝

$$\varphi(t)=\frac{1}{2-e^{it}},$$

Որոշել նրա հավանականությունների բաշխումը։

6. X-ը ենթարկվում է Պուասսոնի բաշխմանը՝ λ պարամետրով. ապացուցել, որ երբ $\lambda \to \infty$, $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխումը ձգտում է (0,1) պարամետրերով նորմալ բաշխմանը։

7. Տրված է X_n $(n=1, 2,\ldots)$ պատահական մեծությունների հաջորդականություն, ընդ որում X_n-ի բաշխման օրենքն է

$$\begin{array}{cccc} X_n: & n^{\lambda}, & -n^{\lambda}, & 0 \\ & \frac{1}{2n^{\lambda}}, & \frac{1}{2n^{\lambda}}, & 1-\frac{1}{n^{\lambda}} \end{array} \qquad (0<\lambda<1)։$$

Ապացուցել, որ այդ պատահական մեծությունները բավարարում են Լյապունովի պայմանին, հետևաբար, նրանց համար կիրառելի է սահմանային թեորեմը։

VI ԳԼՈՒԽ

ԷՆՏՐՈՊԻԱ ԵՎ ԻՆՖՈՐՄԱՑԻԱ

51. Գաղափար փորձի էնտրոպիայի մասին։ *Եթե փորձի արդյունքը հավաստի է, այդպիսի փորձը չի պարունակում ոչ մի անորոշություն։ Եթե փորձն ունի մի քանի հնարավոր ելքեր, այդ փորձի արդյունքը սկզբից նախատեսել չի կարելի, այդպիսի փորձը պարունակում է անորոշություն։*

Տարբեր փորձեր անորոշության տեսակետից համեմատելու համար սահմանենք անորոշության աստիճանի գաղափարը։ Նախ՝ դիտարկենք այն փորձը, որ ունի l հավասարապես հավանական ելքեր։ Ակներև է, որ ինչքան մեծ է l-ը, այնքան ավելի մեծ կլինի նաև փորձի անորոշությունը։ Իրոք, զառ գցելու փորձը, որ ունի հավասարահնարավոր ելքեր՝ այն է 1, 2, 3, 4, 5, 6 կետերի բացվելը, ունի ավելի մեծ անորոշություն, քան դրամը նետելու փորձը, որ ունի միայն երկու հավասարահնարավոր ելք։ Քննարկենք երկու անկախ փորձեր՝ α_1 և α_2, որոնց հնարավոր ելքերը համապատասխանաբար հավասար են l_1-ի և

$_2$-ի։ Այդ երկու փորձերը միացնենք մի փորձի մեջ՝ $\alpha_1 \alpha_2$, այսինքն՝ քննարկենք այն բարդ փորձը, որը առաջին և երկրորդ փորձերի համատեղ իրականացումն է։ Այդ փորձի հնարավոր ելքերի թիվը հավասար կլինի $l_1 \cdot l_2$ արտադրյալին, իսկ այս միացյալ փորձի մեջ պարունակված անորոշության աստիճանը, ակներևաբար, պետք է հավասար լինի երկու փորձերի անորոշության աստիճանների գումարին։

Այսպիսով, եթե α փորձի անորոշության աստիճանը, երբ նա ունի l հավասարահնարավոր ելքեր, նշանակենք $f(l)$ ֆունկցիայով, ապա նշվածի հիման վրա բնական է սպասել, որ այդ ֆունկցիան բավարարի հետևյալ պայմաններին.

1) $f(1)=0$,

2) $f(l)$-ը l-ի աճող ֆունկցիան է,

3) $f(l_1 \cdot l_2) = f(l_1) + f(l_2)$։

Կարելի է ապացուցել, որ միակ ֆունկցիան, որը բավարարում է այս պայմաններին, $\log_a l$-ն է։ Այդ պատճառով բնական է որպես α փորձի անորոշության աստիճանի չափ, երբ նա ունի l հավասարահնարավոր ելքեր, ընդունել $\log_a l$ ֆունկցիան.

$$f(l)=\log_a l, \qquad a > 1 \tag{301}$$

Որպես լոգարիթմների հիմք կարելի է ընդունել ցանկացած թիվը, բայց սովորաբար գերապատվությունը տրվում է 2 թվին։ Եթե որպես լոգարիթմների հիմք ընդունենք 2 թիվը, ապա անորոշության աստիճանը միավորի կհավասարվի այն փորձում, որն ունի երկու հավասարահնարավոր ելքեր։ Անորոշության աստիճանի այդպիսի միավորը կոչվում է երկրորդային միավոր: Այսպիսով, անորոշության աստիճանի երկրորդային միավոր կոչվում է այն անորոշությունը, որ պարունակվում է երկու հավասարահնարավոր ելքեր ունեցող փորձի մեջ: Անորոշության աստիճանի տասնորդական միավոր կոչվում է այն անորոշությունը, որ պարունակվում է 10 հավասարահնարավոր ելքեր ունեցող փորձի մեջ։ Ակներև է, որ տասնորդական միավորում պարունակվում է $\log_2 10 = 3{,}32$ երկրորդային միավոր։

Այժմ անցնենք այն փորձին, որը պարունակում է տարբեր ոչ հավասարահնարավոր ելքեր։ Դրա համար նախապես $\log_a l$-ը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\log_a l = -\log_a \frac{1}{l} = -\Big(\underbrace{\frac{1}{l} + \cdots + \frac{1}{l}}_{l \text{ անգամ}}\Big)\log_a l$$

կամ

$$\log_a l = \underbrace{-\frac{1}{l}\log_a l - \frac{1}{l}\log_a l - \cdots - \frac{1}{l}\log_a \frac{1}{l}}_{l \text{ անգամ}},$$

Փորձի մեջ պարունակված անորոշության չափի գրության այս ձևը, երբ փորձն ունի l հավասարահնարավոր ելքեր, ցույց է տալիս, որ փորձի յուրաքանչյուր ելքը մտցնում է անորոշություն, որ հավասար է $-\frac{1}{l}\log_a\frac{1}{l}$-ի, այսինքն՝ այդ ելքի հավանականության և այդ հավանականության լոգարիթմի արտադրյալին՝ վերցրած մինուս նշանով. իսկ փորձում պարունակվող անորոշության ընդհանուր քանակը հավասար է բոլոր այդպիսի արտադրյալների գումարին՝ փորձի բոլոր հնարավոր ելքերի համար։ Այդ պատճառով, եթե α *փորձն ունի* s *ելքեր՝*

$$A_1, \quad A_2, \cdots A_s,$$

համապատասխան՝

$$P(A_1), \quad P(A_2), \cdots P(A_s),$$

հավանականություններով, բնական է որպես այս փորձում պարունակված անորոշության չափ ընդունել հետևյալ մեծությունը՝

$$-P(A_1)\cdot\log_a P(A_1) - P(A_2)\cdot\log_a P(A_2) - \cdots - P(A_s)\cdot\log_a P(A_s) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{s} P(A_k)\log_a P(A_k).$$

α փորձի մեջ պարունակվող անորոշության չափը ընդունված է անվանել այդ փորձի էնտրոպիա և նշանակել $H(\alpha)$-ով, այսինքն՝

$$H(\alpha) = -\sum_{k=1}^{s} P(A_k)\log_a P(A_k). \qquad (302)$$

Պայմանավորվենք, որ եթե (302) գումարի մեջ հավանականություններից որևէ մեկը հավասար է զրոյի, օրինակ, $P(A_k)=0$, *ապա համապատասխան գումարելին՝* $P(A_k)\cdot\log_a P(A_k)$, *պետք է ընդունենք զրոյի հավասար, այն բանի համաձայն, որ* $P(A_k)\log_a P(A_k)\to 0$, *եթե* $P(A_k)\to 0$։

Մասնավոր դեպքում, երբ փորձի ելքերը հավասարահնարավոր են, այսինքն՝

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_s),$$

ապա

$$H(\alpha) = -\frac{1}{s}\log_a\frac{1}{s} - \frac{1}{s}\log_a\frac{1}{s} - \cdots - \frac{1}{s}\log_a\frac{1}{s} = \log_a s\text{։}$$

Օրինակ 1. Նետվում է դրամը. որոշել այդ α փորձի էնտրոպիան։

Փորձն ունի երկու հավասարահնարավոր ելքեր, ուստի

$H(\alpha) = \log_2 2 = 1$ *երկրորդային միավոր։*

Օրինակ 2. Նետվում է զառ, որոշել այդ β փորձի էնտրոպիան։ Այս փորձն ունի վեց հավասարահնարավոր ելքեր, ուստի

$$H(\beta) = \log_2 6 = 2{,}58 \text{ երկ. միավոր։}$$

Օրինակ 3. Արկղից, որ պարունակում է 5 սպիտակ և 10 սև գնդակներ, հանում են մի գնդակ. գտնել այդ γ փորձի էնտրոպիան.

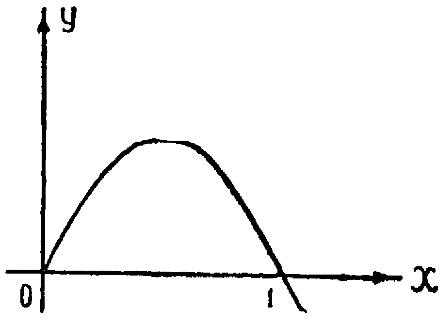
$$H(\gamma) = -\frac{5}{15}\log_2\frac{5}{15} - \frac{10}{15}\log_2\frac{10}{15} \approx 0{,}92 \text{ երկ. միավոր։}$$

52. Էնտրոպիայի հատկությունները։ *Նախքան էնտրոպիայի մի քանի հատկությունների ուսումնասիրության վրա կանգ առնելը, կառուցենք $y = -x\log_a x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որի հատկությունները մեզ օգտակար կլինեն հետագա շարադրանքի ժամանակ։ Այս ֆունկցիան որոշված է, երբ $x > 0$, ունի մի մաքսիմում, երբ $x = \frac{1}{e}$ և $y_{max} = \frac{1}{e}$. ձգտում է զրոյի, երբ $x \to 0$, դրական է, երբ $0 < x < 1$, և բացասական, երբ $x > 1$ և շրջման կետ չունի։ Նրա գրաֆիկը պատկերված է Նկ. 30-ում։*

Այժմ անցնենք α փորձի էնտրոպիային՝

$$H(\alpha) = -\sum_{k=1}^{s} P(A_k)\log_a P(A_k),$$

որպես այդ փորձի անորոշության չափի։



Նկ. 30

1. Էնտրոպիան ոչ բացասական մեծություն է, *քանի որ*

$$0 < P(A_k) \leq 1 \text{ և հետևաբար, } \log_a P(A_k) \leq 0\text{։}$$

2. Էնտրոպիան հավասար է զրոյի այն և միայն այն դեպքում, երբ փորձի արդյունքը հավաստի է։ *Իրոք,*

$$\sum_{k=0}^{s} P(A_k)\log_a P(A_k)$$

գումարը, որը դրական գումարելիներ չունի, կարող է հավասար լինել զրոյի, եթե բոլոր գումարելիները հավասար են զրոյի, այսինքն, երբ $P(A_1)$, $P(A_2)$, $\cdots$ $P(A_s)$ *հավանականություններից մեկը հավասար է միավորի, իսկ մնացածները հավասար են զրոյի, որը նշանակում է* A_1, A_2, $\cdots$ A_s *պատահարներից մեկը հավաստի է, իսկ մնացածներն անհնար են։ Այսպիսով, եթե* փորձի արդյունքը հավաստի է, այդ փորձի անորոշության չափը հավասար է զրոյի և, հակառակը, այն փորձը, որը հավաստի ելք ունի, անորոշություն չի պարունակում։

3. s ելքեր ունեցող բոլոր փորձերի մեջ ամենամեծ էնտրոպիան ունի այն փորձը, որի բոլոր ելքերը հավասարահնարավոր են, *այսինքն՝ եթե* α*-ով նշանակենք* s *ելք ունեցող ցանկացած փորձը, իսկ* α_0*-ով՝ այն փորձը, որի բոլոր* s *ելքերը հավասարահնարավոր են, ապա*

$$H(\alpha) \leqslant H(\alpha_0) \tag{303}$$

կամ

$$-\sum_{k=1}^{s} P(A_k)\log_a P(A_k) \leqslant \log_a s\text{։}$$

Ապացուցենք այս հատկությունը միայն երկու՝ A_1 *և* A_2 *ելքեր ունեցող փորձի համար։ Դիտարկենք* $y=-x\log_a x$ *ֆունկցիայի կառուցված գրաֆիկը (նկ. 31)։* X*-երի առանցքի վրա վերցնենք* $OA_1=P(A_1)$ *և* $OA_2=P(A_2)$ *հատվածները. այդ ժամանակ* $A_1B=-P(A_1)\log_a P(A_1)$, $A_2B_2=-P(A_2)\log_a P(A_2)$ *և քանի որ* $P(A_1)+P(A_2)=1$, *կստանանք* $OA_1=A_2A$։ X*-երի առանցքի վրա վերցնենք* $OS=\frac{1}{2}$ *հատվածը. ասվածի հիման վրա* S *կետը կլինի* A_1A_2 *հատվածի միջնակետը, և* $A_1BB_2A_2$ *սեղանի միջին գիծը՝* SS_1*-ը, կլինի*

$$SS_1=\frac{1}{2}(A_1B+A_2B_2)=\frac{1}{2}\left[-P(A_1)\log_a P(A_1)-P(A_2)\log_a P(A_2)\right]\text{։}$$

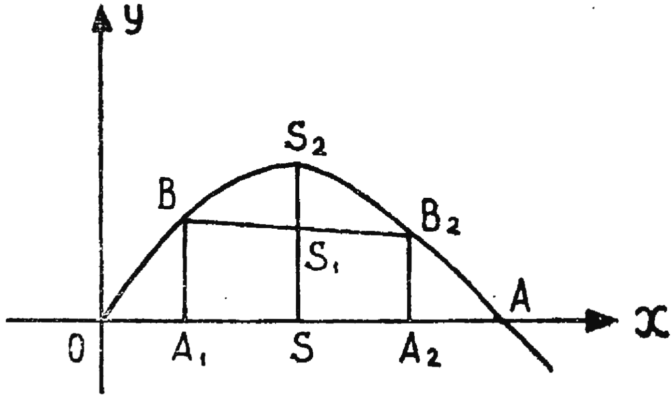
SS_2 *հատվածը հավասար է* $-\frac{1}{2}\log_a\frac{1}{2}$։ *Քանի որ դիտարկվող կորը գոգավորությամբ ուղղված է ներքև, ուրեմն* $SS_1 \leqslant SS_2$ *կամ*

$$\frac{1}{2}\left[-P(A_1)\log_a P(A_1)-P(A_2)\log_a P(A_2)\right] \leqslant -\frac{1}{2}\log_a\frac{1}{2}.$$

հետևաբար՝

$$-P(A_1)\log_a P(A_1) - P(A_2)\log_a P(A_2) \leqslant \log_a 2,$$

ինչ պահանջվում էր ապացուցել։ Ակներև է, որ գրված առնչությունում հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ այն և միայն այն դեպքում, երբ $SS_1 = SS_2$, *այսինքն՝ երբ* $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$։



Նկ. 31

Սահմանված հատկությունը համընկնում է էնտրոպիայի իմաստի հետ՝ որպես փորձի անորոշության չափի. և, իրոք, փորձի միևնույն թվով ելքերի ժամանակ փորձի անորոշության աստիճանը, երբ ելքերը հավասարահնարավոր են, ամենամեծն է. նրա արդյունքն ավելի դժվար է նախատեսել, քան այն փորձի արդյունքը, որի ելքերը հավասարահնարավոր չեն։

✱ 53. Միացյալ փորձերի էնտրոպիան: *Էնտրոպիան սահմանելիս պահանջեցինք, որ երկու անկախ փորձերի՝ α-ի և β-ի միացման ժամանակ, որոնք ունեն s և l հավասարահնարավոր ելքեր, միացյալ αβ փորձի էնտրոպիան հավասար լինի առանձին փորձերի՝ α-ի և β-ի էնտրոպիաների գումարին, այսինքն՝*

$$H(\alpha\beta) = H(\alpha) + H(\beta)։ \qquad (304)$$

Ցույց տանք, որ այս հատկությունը տեղի ունի նաև այն ընդհանուր դեպքում, երբ փորձերի ելքերը հավասարահնարավոր չեն։ Ենթադրենք, թե α փորձն ունի

$$A_1, A_2, \cdots A_s$$

ելքերը, որոնք համապատասխանաբար ունեն

$$P(A_1),\ P(A_2), \cdots\ P(A_s)$$

հավանականությունները, իսկ β փորձն ունի

$$B_1,\ B_2, \cdots\ B_l$$

ելքերը, որոնք համապատասխանաբար ունեն

$$P(B_1),\ P(B_2),\ \cdots\ P(B_l)$$

հավանականությունները։

Այդ ժամանակ

$$H(\alpha) = -\sum_{i=1}^{s} P(A_i)\log_a P(A_i)$$

$$H(\beta) = -\sum_{k=1}^{l} P(B_k)\log_a P(B_k),$$

Միացյալ $\alpha\beta$ փորձն ունի այն ելքերը, որոնք բերված են հետևյալ աղյուսակում.

A_1B_1	A_1B_2	A_1B_3	. . .	A_1B_l
A_2B_1	A_2B_2	A_2B_3	. . .	A_2B_l
A_3B_1	A_3B_2	A_3B_3	. . .	A_3B_l
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_sB_1	A_sB_2	A_sB_3	. . .	A_sB_l

Յուրաքանչյուր A_iB_k ելքի հավանականությունը հաշվվում է հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի համաձայն՝ անկախ պատահարների համար (փորձերն անկախ են)՝

$$P(A_i \cap B_k) = P(A_i) \cdot P(B_k), \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \cdots s \\ k = 1, 2, \cdots l. \end{matrix}$$

ուստի αβ փորձի էնտրոպիան կլինի

$$H(\alpha\beta) = -\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{l} P(A_i)\cdot P(B_k)\log_a[P(A_i)\cdot P(B_k)]$$

կամ

$$H(\alpha\beta) = -\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{l} P(A_i)P(B_k)\log_a P(A_i) - \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{l} P(A_i)P(B_k)\log_a P(B_k) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{s} P(A_i)\log_a P(A_i)\sum_{k=1}^{l} P(B_k) - \sum_{k=1}^{l} P(B_k)\log_a P(B_k)\sum_{i=1}^{s} P(A_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{s} P(A_i)\log_a P(A_i) - \sum_{k=1}^{l} P(B_k)\log_a P(B_k),$$

այսինքն՝

$$H(\alpha\beta) = H(\alpha) + H(\beta)։$$

★ *Օրինակ 1. Երկու արկղից, որոնցից մեկը պարունակում է 2 սպիտակ և 3 սև գնդակներ, իսկ մյուսը՝ 3 սպիտակ և 3 սև գնդակներ միաժամանակ հանում են մեկական գնդակ։ Որոշել այս փորձի էնտրոպիան։*

Տվյալ փորձը երկու անկախ փորձերի միացումն է։ Այս փորձերից մեկը առաջին արկղից գնդակ հանելն է, իսկ երկրորդը՝ երկրորդ արկղից գնդակ հանելը։ Ուստի

$$H(\alpha\beta) = H(\alpha) + H(\beta) = -\frac{2}{5}\lg\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\lg\frac{3}{5} + \lg 2 = 0{,}593 \text{ ս. մ.։}$$

Օրինակ 2. Կատարվում են n *անկախ փորձեր, ընդ որում նրանցից յուրաքանչյուրում* A *պատահույթի հավանականությունը նույնն է և հավասար է* p*-ի։ Գտնել այդ բոլոր* n *փորձերից միավորված փորձի էնտրոպիան։*

Մի փորձի ժամանակ էնտրոպիան կլինի

$$H(\alpha_k) = -p\log_a p - (1-p)\log_a(1-p), \qquad k = 1, 2, \dots n։$$

Միավորված փորձում (304) բանաձևի համաձայն էնտրոպիան կլինի

$$H(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n) = -\sum_{k=1}^{n}(p\log_a p + (1-p)\log_a(1-p))$$

կամ

$$H(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)=-n(p\log_a p+(1-p)\log_a(1-p))։$$

Այժմ քննարկենք երկու կախյալ փորձեր՝ α և β, որոնց միավորումն ունի այն ելքերը, որոնք նշված են վերը բերված աղյուսակում։ Յուրաքանչյուր $(A_i\cap B_k)$ ելքի հավանականությունը այժմ նույնպես հաշվվում է հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի համաձայն՝ միայն կախյալ պատահարների համար, այսինքն՝

$$P(A_i\cap B_k)=P(A_i)\cdot P_{A_i}(B_k),\quad i=1,2,\cdots s,\ k=1,\ 2,\cdots l։$$

Ուստի $\alpha\beta$ *միավորված փորձի էնտրոպիան՝*

$$H(\alpha\beta)=-\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{l}P(A_i\cap B_k)\log_a P(A_i\cap B_k),$$

այժմ կարտահայտվի հետևյալ կերպ՝

$$H(\alpha\beta)=-\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{l}P(A_i)\cdot P_{A_i}(B_k)\log_a[P(A_i)\cdot P_{A_i}(B_k)]=$$

$$=-\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{l}P(A_i)P_{A_i}(B_k)\log_a P(A_i)-\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{l}P(A_i)P_{A_i}(B_k)\log_a P_{A_i}(B_k)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{s}P(A_i)\log_a P(A_i)\sum_{k=1}^{l}P_{A_i}(B_k)-\sum_{i=1}^{s}P(A_i)\sum_{k=1}^{l}P_{A_i}(B_k)\log_a P_{A_i}(B_k),$$

որտեղ

$$\sum_{k=1}^{l}P_{A_i}(B_k)=1,\qquad i=1,2,\cdots s,$$

իսկ

$$-\sum_{k=1}^{l}P_{A_i}(B_k)\log_a P_{A_i}(B_k)$$

գումարը հանդիսանում է β *փորձի էնտրոպիան այն պայմանով, որ* α

փորձում տեղի է ունեցել A_i պատահարը։ Նշանակելով այն $H_{A_i}(\beta)$-ով, այսինքն՝

$$H_{A_i}(\beta) = -\sum_{k=1}^{l} P_{A_i}(B_k)\log_a P_{A_i}(B_k), \qquad i=1, 2, \cdots s,$$

կստանանք

$$H(\alpha\beta) = H(\alpha) + \sum_{i=1}^{s} P(A_i)H_{A_i}(\beta)։$$

այս հավասարման աջ մասում ստացված գումարը ներկայացնում է այն պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը կամ միջին արժեքը, որի բաշխման օրենքն է

$$\begin{matrix} H_{A_1}(\beta), & H_{A_2}(\beta),\cdots H_{A_s}(\beta) \\ P(A_1), & P(A_2),\cdots P(A_s), \end{matrix}$$

այսինքն՝ β փորձի պայմանական էնտրոպիայի միջին արժեքը։ Մենք այն անվանելու ենք β փորձի պայմանական էնտրոպիա α փորձի իրականացման պայմանով և նշանակելու ենք $H_\alpha(\beta)$-ով.

$$H_\alpha(\beta) = \sum_{i=1}^{s} P(A_i)H_{A_i}(\beta)։ \tag{305}$$

Այսպիսով, վերջնականապես կստանանք

$$H(\alpha\beta) = H(\alpha) + H_\alpha(\beta)։ \tag{306}$$

Քանի որ $\beta\alpha$ փորձը համընկնում է $\alpha\beta$ փորձի հետ, ուրեմն

$$H(\alpha\beta) = H(\beta) + H_\beta(\alpha)։ \tag{307}$$

Այսպիսով, միավորված $\alpha\beta$ փորձի էնտրոպիան հավասար է փորձերից մեկի էնտրոպիայի և մյուս փորձի պայմանական էնտրոպիայի գումարին՝ առաջին փորձի իրականացման պայմանով։

Օրինակ. Մի սափորից, որ պարունակում է a սպիտակ և b սև գնդակներ, հանում ենք երկու գնդակ։ Որոշել այդ փորձի էնտրոպիան։

Բնութագրվող փորձը երկու պարզ փորձերի միավորումն է՝ առաջին գնդակի հանումը և երկրորդ գնդակի հանումը։ Ուստի

$$H(I, II) = H(I) + H_I(II),$$

որտեղ $H(I)$*-ը մեկ փորձի էնտրոպիան է, իսկ* $H_I(II)$*-ը՝ մյուս փորձ պայմանական էնտրոպիան՝ առաջին փորձի իրականացման պայմանու*
I *փորձի էնտրոպիան՝*

$$H(I) = -\frac{a}{a+b}\lg\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b}\lg\frac{b}{a+b},$$

իսկ պայմանական $H_I\,(II)$ *էնտրոպիան որոշելու համար գտնում ենք* $H_{սպ}(II)$ *և* $H_{սև}(II)$*, որոնք ներկայացնում են երկրորդ փորձի էնտրո-պիան այն պայմանով, որ առաջին փորձում համապատասխանաբար երևան են եկել սպիտակ և սև գնդակներ. ունենք՝*

$$H_{սպ}\,(II) = -\frac{a-1}{a+b-1}\lg\frac{a-1}{a+b-1} - \frac{b}{a+b-1}\lg\frac{b}{a+b-1},$$

$$H_{սև}\,(II) = -\frac{a}{a+b-1}\lg\frac{a}{a+b-1} - \frac{b-1}{a+b-1}\lg\frac{b-1}{a+b-1},$$

որտեղից

$$H_I\,(II) = \frac{a}{a+b}\left(-\frac{a-1}{a+b-1}\lg\frac{a-1}{a+b-1} - \frac{b}{a+b-1}\lg\frac{b}{a+b-1}\right) + $$
$$+\frac{b}{a+b}\left(-\frac{a}{a+b-1}\lg\frac{a}{a+b-1} - \frac{b-1}{a+b-1}\lg\frac{b-1}{a+b-1}\right).$$

ուրեմն

$$H(I\ II) = -\frac{a}{a+b}\lg\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b}\lg\frac{b}{a+b} +$$
$$+\frac{a}{a+b}\left(-\frac{a-1}{a+b-1}\lg\frac{a-1}{a+b-1} - \frac{b}{a+b-1}\lg\frac{b}{a+b-1}\right) +$$
$$+\frac{b}{a+b}\left(-\frac{a}{a+b-1}\lg\frac{a}{a+b-1} - \frac{b-1}{a+b-1}\lg\frac{b-1}{a+b-1}\right)$$ *ա. մ.,*

54. Պայմանական էնտրոպիան և նրա հատկությունները: *Կրկին վերադառնանք* β *փորձի պայմանական էնտրոպիային՝* α *փորձի իրա կանացման պայմանով.*

$$H_\alpha(\beta) = \sum_{i=1}^{s} P(A_i)\cdot H_{A_i}(\beta),$$

որտեղ

$$H_{A_i}(\beta) = -\sum_{k=1}^{l} P_{A_i}(B_k)\log_a P_{A_i}(B_k),$$

քննարկենք նրա պարզագույն հատկությունները։

Ամենից առաջ ակներև է, որ $H_\alpha(\beta) \geqslant 0$, *քանի որ* $H_{A_i}(\beta) \geqslant 0$ $P(A_i) \geqslant 0$։ *Այնուհետև ակներև է, որ, եթե բոլոր* $P(A_1)$, $P(A_2)$, ... $P(A_s)$ *հավանականությունները տարբեր են զրոյից, այսինքն՝* α *փորձն իրոք ունի* s *տարբեր ելքեր, ապա* $H_\alpha(\beta)$ *պայմանական էնտրոպիան հավասարվում է զրոյի միայն այն դեպքում, երբ*

$$H_{A_1}(\beta) = H_{A_2}(\beta) = \cdots = H_{A_s}(\beta) = 0,$$

իսկ այդ նշանակում է, որ նրանից հետո, երբ հայտնի է դառնում α *փորձի արդյունքը,* β *փորձն այլևս չի պարունակում ոչ մի անորոշություն, այլ խոսքով* α *փորձի արդյունքը լիովին որոշում է* β *փորձի արդյունքը։ Այսպիսով,* β փորձի պայմանական էնտրոպիայի զրոյի հավասարվելը՝ α փորձի իրականացման պայմանով, նշանակում է, որ α փորձի իրականացումից հետո β փորձի արդյունքը լիովին որոշված է: *Այս դեպքում (306) բանաձևի համաձայն*

$$H(\alpha\beta) = H(\alpha),$$

այսինքն՝ միավորված αβ փորձում պարունակվող անորոշությունը հավասար է միայն α փորձում պարունակվող անորոշությանը:

Եթե α *և* β *փորձերն անկախ են, ապա*

$$H_{A_1}(\beta) = H_{A_2}(\beta) = \cdots = H_{A_s}(\beta) = H(\beta),$$

(305) բանաձևի համաձայն

$$H_\alpha(\beta) = H(\beta)։$$

Այս դեպքում (306) բանաձևի համաձայն միավորված αβ *փորձի էնտրոպիան՝*

$$H(\alpha\beta) = H(\alpha) + H(\beta)։$$

Ունենք մի արդյունք, որ սկզբից արդեն ստացված էր։

Վերջապես նշենք, որ պայմանական $H_\alpha(\beta)$ *էնտրոպիան չի կարող ավելի մեծ լինել* $H(\beta)$ *էնտրոպիայից, այսինքն՝*

$$0 \leqslant H_\alpha(\beta) \leqslant H(\beta)։ \qquad (308)$$

Ապացուցենք այս հատկությունն այն մասնավոր դեպքի համար երբ α փորձն ունի միայն երկու հավասարահնարավոր ելքեր՝ A_1 *և* A_2 *Այդ դեպքում*

$$H_\alpha(\beta) = P(A_1)\cdot H_{A_1}(\beta) + P(A_2)H_{A_2}(\beta) = \frac{1}{2}H_{A_1}(\beta) + \frac{1}{2}H_{A_2}(\beta),$$

և մեր խնդիրն է ապացուցել հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\frac{1}{2}H_{A_1}(\beta) + \frac{1}{2}H_{A_2}(\beta) \leqslant H(\beta)$$

կամ ավելի մանրամասն

$$\frac{1}{2}[-P_{A_1}(B_1)\log_a P_{A_1}(B_1) - P_{A_1}(B_2)\log_a P_{A_1}(B_2) - \cdots -$$

$$-P_{A_1}(B_s)\log_a P_{A_1}(B_s)] + \frac{1}{2}[-P_{A_2}(B_1)\log_a P_{A_2}(B_1) -$$

$$-P_{A_2}(B_2)\log_a P_{A_2}(B_2) - \cdots - P_{A_2}(B_s)\log_a P(B_s)] \leqslant$$

$$\leqslant -P(B_1)\log_a P(B_1) - P(B_2)\log_a P(B_2) - \cdots - P(B_s)\log_a P(B_s)]\text{։}$$

Նորից դիտարկենք $y = -x\lg x$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 32)։ Դիցուք* $OP = P_{A_1}(B_1)$ *և* $OQ = P_{A_2}(B_1)$. *այդ դեպքում*

$$PP_1 = -P_{A_1}(B_1)\log_a P_{A_1}(B_1),$$

$$QQ_1 = -P_{A_2}(B_1)\log_a P_{A_2}(B_1),$$

հետևաբար՝

$$SS_1 = -\frac{1}{2}P_{A_1}(B_1)\log_a P_{A_1}(B_1) - \frac{1}{2}P_{A_2}(B_1)\log_a P_{A_2}(B_1),$$

որպես PP_1Q_1Q *սեղանի միջին գիծ։*

Քանի որ

$$OS = \frac{1}{2}OP + \frac{1}{2}OQ = P(A_1)P_{A_1}(B_1) + P(A_2)P_{A_2}(B_1) = P(B_1),$$

ուրեմն

$$SS_2 = -P(B_1)\log_a P(B_1),$$

հետևաբար՝

$$-\frac{1}{2}P_{A_1}(B_1)\log_a P_{A_1}(B_1) - \frac{1}{2}P_{A_2}(B_1)\log_a P_{A_2}(B_1) \leqslant -P(B_1)\log_a P(B_1)\text{։}$$

Նման ձևով ապացուցում ենք, որ

$$\frac{1}{2}P_{A_1}(B_2)\log_a P_{A_1}(B_2)-\frac{1}{2}P_{A_2}(B_2)\log_a P_{A_2}(B_2)\leqslant -P(B_2)\log_a P(B_2),$$

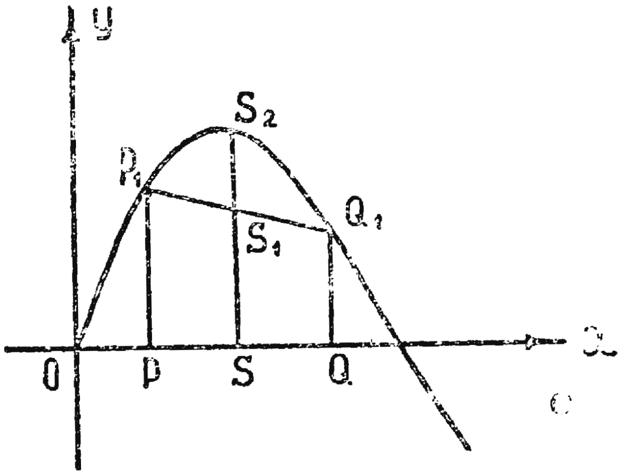
. . . .

. . . .

$$-\frac{1}{2}P_{A_1}(B_s)\log_a P_{A_1}(B_s)-\frac{1}{2}P_{A_2}(B_s)\log_a P_{A_2}(B_s)\leqslant -P(B_s)\log_a P(B_s),$$

գումարելով այս անհավասարությունները, կհանգենք այն անհավասարությանը, որ պահանջվում էր ապացուցել:

Ստացված արդյունքը՝ $H_\alpha(\beta)\leqslant H(\beta)$, *լավ է համընկնում էնտրոպիայի իմաստի՝ որպես β փորձի անորոշության չափի, հետ. պարզ*



Նկ. 32

է որ α փորձի արդյունքը իմանալուց հետո, β փորձի անորոշության աստիճանը կարող է միայն փոքրանալ կամ, ծայրահեղ դեպքում, փոխել իր արժեքը:

Այսպիսով, β փորձի պայմանական $H_\alpha(\beta)$ էնտրոպիան՝ α փորձի իրականացման պայմանով, որպես α փորձի իրականացումից հետո β փորձի անորոշության աստիճանի միջին բավարարում է $0\leqslant H_\alpha(\beta)\leqslant H(\beta)$ պայմանին, ընդունելով զրոյի, երբ α փորձը լիովին որոշում է β փորձի արդյունքը, և $H(\beta)$-ի, երբ β փորձը կախում չունի α փորձից:

55. Գաղափար ինֆորմացիայի մասին: *Դիտարկենք երկու փորձ՝ α և β, և β փորձի անորոշության աստիճանը՝ արտահայտված նրա էնտրոպիայով՝* $H(\beta)$: *Այն բանից հետո, երբ տեղի է ունեցել α փորձը, փորձի էնտրոպիան հավասարվում է* $H_\alpha(\beta)$ *պայմանական էնտրո-*

պիային, որը հավասար է զրոյի, եթե α փորձի արդյունքով լրիվին որոշվում է β փորձի արդյունքը, և հավասար է սկզբնական H(β) էնտրոպիային, եթե α և β փորձերն անկախ են, իսկ ընդհանրապես միշտ ավելի փոքր է փորձի սկզբնական էնտրոպիայից.

$$0 \leqslant H_{\alpha}(\beta) \leqslant H(\beta)։$$

Հետևյալ տարբերությունը՝

$$I(\alpha,\ \beta) = H(\beta) - H_{\alpha}(\beta), \qquad (309)$$

ցույց է տալիս, թե ինչքան է փոքրացել β փորձի անորոշության աստիճանն այն բանից հետո, երբ կատարվել է α փորձը, այսինքն ինչքան տեղեկություններ ենք ստանում β փորձի նկատմամբ α փորձը կատարելով։

Այս $I(\alpha, \beta)$ մեծությունը, որ որոշվում է (309) բանաձևով կոչվում է α փորձի մեջ պարունակված ինֆորմացիայի քանակությունը β փորձի նկատմամբ, *կամ կրճատ*՝ α-ի պարունակած ինֆորմացիան β-ի վերաբերյալ:

Ակներև է, որ $H_{\beta}(\beta)=0$, քանի որ β փորձն իր իրականանալուց հետո այլևս անորոշություն չի պարունակի, ուստի (309)-ի համաձայն ստանում ենք

$$I(\beta,\beta) = H(\beta),$$

այսինքն՝ β փորձի էնտրոպիան կարելի է դիտել որպես ինֆորմացիայի այն քանակությունը, որ մենք ստանում ենք β փորձի նկատմամբ այդ փորձը կատարելով:

(308) և (309) բանաձևերից բխում է, որ α-ի մեջ β-ի նկատմամբ պարունակված ինֆորմացիայի քանակությունը ոչ բացասական թիվ է, այսինքն՝.

$$I(\alpha,\ \beta) \geqslant 0։$$

Այնուհետև ցույց տանք, որ α փորձի մեջ պարունակվող ինֆորմացիայի քանակությունը β-ի նկատմամբ հավասար է β-ի մեջ պարունակվող ինֆորմացիայի քանակությանը α-ի նկատմամբ, այսինքն

$$I(\alpha,\ \beta) = I(\beta,\alpha)։ \qquad (310)$$

Իրոք՝ $\quad I(\alpha,\ \beta) = H(\beta) - H_{\alpha}(\beta),$

իսկ

$$I(\beta, \alpha)=H(\alpha)-H_{\beta}(\alpha)\text{։}$$

քանի որ α և β փորձերի միացումը տալիս է նույն բարդ փորձը՝ αβ կամ βα և $H(\alpha\beta)=H(\beta\alpha)$, ապա (306) բանաձևի համաձայն

$$H(\alpha)+H_{\alpha}(\beta)=H(\beta)+H_{\beta}(\alpha)\text{։}$$

այստեղից

$$H(\alpha)-H_{\beta}(\alpha)=H(\beta)-H_{\alpha}(\beta)$$

կամ

$$I(\beta, \alpha)=I(\alpha, \beta)\text{։}$$

β փորձի նկատմամբ α փորձի մեջ պարունակված ինֆորմացիայի քանակությունը հավասար է β փորձի էնտրոպիային, եթե β փորձը լրիվին կանխորոշվում է α փորձով, քանի որ այս դեպքում $H_{\alpha}(\beta)=0$։

β փորձի նկատմամբ α փորձի մեջ պարունակված ինֆորմացիայի քանակությունը հավասար է զրոյի, եթե α և β փորձերն անկախ են, քանի որ այս դեպքում

$$H_{\alpha}(\beta)=H(\beta)\text{։}$$

Օրինակ 1. α փորձը այն է, որ երկու անգամ գնդակ է հանվում մի սափորից, որ պարունակում է 4 սև և 6 սպիտակ գնդակներ, իսկ β փորձը՝ այն, որ այդ նույն սափորից հանվում է երրորդ գնդակը։ Ի՞նչ քանակությամբ ինֆորմացիա է պարունակվում α փորձի մեջ β փորձի նկատմամբ։

Սպիտակ գնդակը հանելու հավանականությունը երրորդ փորձում գտնում ենք լրիվ հավանականության բանաձևով՝

$$P=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{4}{8}+\frac{C_6^1\cdot C_4^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{5}{8}+\frac{C_4^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{6}{8}=\frac{3}{5},$$

Իսկ սև գնդակի հավանականությունը երրորդ փորձում կլինի $\frac{2}{5}$։ Հետևաբար՝

$$H(\beta)=-\frac{3}{5}\lg\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\lg\frac{2}{5}=0{,}292 \text{ ա. մ.։}$$

Իսկ β փորձի պայմանական էնտրոպիան՝ α փորձի պայմանով կլինի

$$H_{\alpha}(\beta)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}\left(-\frac{1}{2}\lg\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lg\frac{1}{2}\right)+\frac{C_6^1\cdot C_4^1}{C_{10}^2}\left(-\frac{5}{8}\lg\frac{5}{8}-\frac{3}{8}\lg\frac{3}{8}\right)+\frac{C_4^2}{C_{10}^2}\left(-\frac{6}{8}\lg\frac{6}{8}-\frac{2}{8}\lg\frac{2}{8}\right)=0{,}270 \text{ ա. մ.։}$$

Հետևաբար՝

$$I(\alpha,\beta)=0{,}292-0{,}270=0{,}022 \text{ ա. մ.։}$$

α փորձի մեջ պարունակված ինֆորմացիայի քանակությունը փորձի նկատմամբ, որը սահմանվում է (309) բանաձևով, կարելի է արտահայտել մի բանաձևով, որը հնարավորություն կտա ավելի ընդհանրացնելու այդ գաղափարը։ Տեղադրելով (309) բանաձևի մեջ $H(\beta)$*-ի և* $H_\alpha(\beta)$*-ի արժեքները, (302) և (305) բանաձևերի համաձայն կստանանք*

$$I(\alpha,\beta)=-\sum_{i=1}^{l} P(B_i)\log_a P(B_i)-\sum_{k=1}^{s} P(A_k)H_{A_k}(\beta),$$

որտեղ

$$H_{A_k}(\beta)=-\sum_{i=1}^{l} P_{A_k}(B_i)\log_a P_{A_k}(B_i), \qquad k=1,2,\cdots s\text{։}$$

Քանի որ

$$\sum_{k=1}^{s} P(A_k\cap B_i)=P(B_i),\ P(A_k)\cdot P_{A_k}(B_i)=P(A_k\cap B_i),$$

ապա

$$I(\alpha,\beta)=-\sum_{i=1}^{l}\log_a P(B_i)\sum_{k=1}^{s} P(A_k\cap B_i)+$$

$$+\sum_{k=1}^{s} P(A_k)\sum_{i=1}^{l} P_{A_k}(B_i)\log_a P_{A_k}(B_i)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{l} P(A_k\cap B_i)\log_a P(B_i)+\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{l} P(A_k\cap B_i)\log_a P_{A_k}(B_i)$$

կամ

$$I(\alpha,\beta)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{l} P(A_k\cap B_i)\log_a\frac{P_{A_k}(P_i)}{P(B_i)},$$

և վերջապես՝

$$I(\alpha,\beta)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{l} P(A_k\cap B_i)\log_a\frac{P(A_k\cap B_i)}{P(A_k)\cdot P(B_i)}, \qquad (311)$$

Այժմ դիտենք երկչափ $Z = (X, Y)$ պատահական մեծությունը, որի արժեքներն են (x_k, y_i) $(k = 1, 2, \cdots s;\ i = 1, 2, \cdots l)$ զույգերը, իսկ այդ զույգերին համապատասխանող հավանականություններն են $p(x_k, y_i)$ թվերը. X պատահական մեծության x_k արժեքին կհամապատասխանի $p_1(x_k) = \sum_{i=1}^{l} p(x_k, y_i)$ $(k = 1, 2, \cdots s)$ հավանականությունը, իսկ Y պատահական մեծության y_i արժեքին՝ $p_2(y_i) = \sum_{k=1}^{s} p(x_k, y_i)$ $(i = 1, 2, \cdots l)$ հավանականությունը։ Եթե A_k $(k = 1, 2, \cdots s)$ պատահարն այն է, որ X պատահական մեծությունը ընդունում է x_k արժեքը, իսկ B_i $(i = 1, 2, \cdots l)$ պատահարն այն է, որ Y պատահական մեծությունն ընդունում է y_i արժեքը, ապա $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ինֆորմացիայի քանակությունը կարելի է համարել որպես X պատահական մեծության մեջ պարունակված ինֆորմացիայի քանակություն Y պատահական մեծության նկատմամբ։ Նշանակելով այն $I(X,Y)$-ով, կունենանք

$$I(X, Y) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{l} p(x_k, y_i) \log_a \frac{p(x_k, y_i)}{p_1(x_k)\, p_2(y_i)} \qquad (312)$$

այն դեպքում, երբ $Z = (X, Y)$ պատահական մեծությունը դիսկրետ մեծություն է։

Այժմ ենթադրենք, թե երկչափ $Z = (X, Y)$ պատահական մեծությունը անընդհատ պատահական մեծություն է՝ $f(x, y)$ խտությամբ. X և Y պատահական մեծությունների խտությունները համապատասխանաբար հավասար են՝

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy, \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx.$$

Այս դեպքում ևս կարելի է ստանալ $I(X, Y)$ ինֆորմացիայի արտահայտությունը (312) բանաձևի մեջ $p(x_k, y_i)$, $p_1(x_k)$ և $p_2(y_i)$, $(k = 1, 2, \cdots s,\ i = 1, 2, \cdots l)$ հավանականությունները փոխարինելով համապատասխան էլեմենտար հավանականություններով՝ $f(x_k, y_i)\, \Delta x_k\, \Delta y_i$, $f(x_k)\, \Delta x_k$ և $f_2(y_i)\, \Delta y_i$, ինչպես և ինֆորմացիայի քանակությունը այս դեպքում *սահմանել որպես ստացված ինտեգրալային գումարի սահմանը, երբ* $\max\limits_k \Delta x_k = \lambda$, $\max\limits_i \Delta y_i = \mu$ *մեծությունները միաժամանակ ձգտում են զրոյի, այսինքն՝*

$$I(X, Y) = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \mu \to 0}} \sum_{k, i} f(x_k, y_i) \log_a \frac{f(x_k, y_i)}{f_1(x_k) f_2(y_i)} \Delta x_k \Delta y_i$$

$$I(X, Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log_a \frac{f(x, y)}{f_1(x) f_2(y)} dx dy. \qquad (313)$$

Այսպիսով, X պատահական մեծության մեջ պարունակվող ինֆորմացիայի քանակությունը Y պատահական մեծության նկատմամբ, եթե այդ պատահական մեծությունները անընդհատ են, արտահայտվում է (313) բանաձևով։

Օրինակ։ $Z=(X, Y)$ *պատահական մեծությունը ենթարկվում է երկչափ նորմալ բաշխման՝*

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

խտությամբ։ Որոշել X պատահական մեծության մեջ պարունակվող ինֆորմացիայի քանակությունը Y պատահական մեծության նկատմամբ։ Այս դեպքում

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad f_2(y) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

ուստի (313) բանաձևի համաձայն կունենանք

$$I(X,Y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} \cdot$$

$$\cdot \left\{-\log_a \sqrt{1-r^2} + \log_a e \cdot \left[\frac{r}{1-r^2} \frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{r^2}{2(1-r^2)} \frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{r^2}{2(1-r^2)} \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} dx\, dy.$$

Հաշվելով այս ինտեգրալը, կստանանք՝

$$I(X,\ Y)=-\log_a\sqrt{1-r^2}+\log_a e\cdot\left[\frac{r}{1-r^2}\,E\left[\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]-\frac{r^2D(X)}{2(1-r^2)\sigma_1^2}-\frac{r^2D(Y)}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\right]=-\log_a\sqrt{1-r^2}+\log_a e\cdot\left[\frac{r^2}{1-r^2}-\frac{r^2}{2(1-r^2)}-\frac{r^2}{2(1-r^2)}\right]$$

կամ

$$I(X,\ Y)=-\log_a\sqrt{1-r^2}։ \tag{314}$$

Եթե X *և* Y *պատահական մեծությունները մասնավոր դեպքում անկախ են միմյանցից, ապա* $r=0$ *և* $I(X,\ Y)=0$, *իսկ եթե* $|r|\to 1$, *ապա* $I(X,\ Y)\to+\infty$։

56. Խնդիրներ

1. Երկու արկղերից յուրաքանչյուրում գտնվում է 20 գնդակ, ընդ որում առաջինում՝ 10 սպիտակ և 10 սև, իսկ երկրորդում՝ 15 սպիտակ և 5 սև գնդակ։ Յուրաքանչյուր արկղից հանվում է պատահական գնդակ։ Որոշել ո՞ր արկղի դեպքում փորձի արդյունքը ավելի որոշակի է։

2. Որոշել X *պատահական մեծության էնտրոպիան, եթե նրա բաշխման օրենքն է*

$$X`\qquad -2,\qquad -1,\qquad 0,\qquad 1,\qquad 2$$

$$\qquad\quad \frac{1}{8},\qquad \frac{1}{8},\qquad \frac{1}{2},\qquad \frac{1}{8},\qquad \frac{1}{8}։$$

3. $Z=(X,\ Y)$ *երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը տրվում է հետևյալ աղյուսակով՝*

X \ Y	0	1	2
−1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Որոշել X*-ի նկատմամբ* Y*-ի մեջ պարունակվող ինֆորմացիայի քանակությունը։*

4. $Z=(X,\ Y)$ *պատահական մեծությունն ունի*

$$f(x,\ y)=C(x+y)e^{-(x+y)},\ \textit{երբ}\ x>0,\quad y>0$$

և $$f(x,\ y)=0,\qquad \textit{հակառակ դեպքում։}$$

Որոշել X*-ի նկատմամբ* Y*-ի մեջ պարունակվող ինֆորմացիայի քանակը։*

VII ԳԼՈՒԽ

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՊՐՈՑԵՍՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

57. Պատահական պրոցեսի սահմանումը

Դիտարկենք իրական t *պարամետրի արժեքների* T *բազմությունը և* (Ω, F, P) *հավանականային տարածությունը:*

T բազմության վրա պատահական X պրոցես կանվանենք այնպիսի մի վերջավոր իրական X (t) ֆունկցիան, որը ամեն մի ֆիքսած t-ի համար ($t \in T$) դառնում է որոշակի պատահական մեծություն՝ *որոշված տվյալ հավանականային տարածության վրա: Այն հանգամանքը, որ* X *մեծությունը* T *բազմության վրա որոշված պատահական պրոցես է, կգրենք հետևյալ կերպ՝*

$$X = X(t), \quad t \in T: \qquad (315)$$

T *բազմությունը կոչվում է պատահական պրոցեսի* որոշման տիրույթ: *Եթե* t *պարամետրին տանք տարբեր արժեքներ՝* r, s, p, … T *բազմությունից, կստանանք պատահական մեծություններ՝*

$$X(r), \; X(s), \; X(p), \; \ldots : \qquad (316)$$

Իսկ եթե t *պարամետրն ընդունում է բոլոր հնարավոր արժեքները* T *բազմությունից, ապա կստանանք տվյալ պատահական պրոցեսին համապատասխանող պատահական մեծությունների մի բազմություն:*

Այսպիսով՝

$$X = X(t), \quad t \in T$$

պատահական պրոցեսը ներկայացնում է մեկ t պարամետրից կախված պատահական մեծությունների մի ընտանիք, որոնք որոշված են միևնույն հավանականային տարածության վրա: $X = X(t)$ *պատահական պրոցեսի արժեքը՝* $t = t_0$ *կետում, այսինքն՝* $X(t_0)$ *պատահական մեծությունը, անվանում ենք տվյալ պատահական պրոցեսի* հատույթը t_0 *կետում:*

Նկատենք, որ եթե t*-ն ցանկացած պարամետր է, ապա գրականության մեջ «պատահական պրոցես» տերմինի փոխարեն օգտագործվում է «պատահական ֆունկցիա» տերմինը, թողնելով «պատահական պրոցես» տերմինը միայն այն դեպքի համար, երբ* t*-ն արտահայտում է ժամանակ: Մենք ամեն անգամ կօգտագործենք «պատահական պրոցես» տերմինը, անկախ* t *պարամետրի բնույթից:*

Մասնավոր դեպքում, եթե T *բազմությունը վերջավոր է և պարունակում է* $t_1, t_2, \dots t_n$ *էլեմենտները, պատահական* $X = X(t)$ *պրոցեսը՝ որոշված այդ բազմության վրա, ներկայացնում է վերջավոր թվով պատահական մեծությունների ընտանիք՝*

$$\{X(t_1),\ X(t_2),\ \dots X(t_n)\},$$

այսինքն՝ n-*չափանի պատահական մեծություն: Այդ պատահական մեծությունը ուսումնասիրվել է այս դասագրքի նախորդ գլուխներում: Այս գլխի համարյա բոլոր բաժիններում ուսումնասիրվում են պատահական պրոցեսներ, որոնց համար* T *բազմությունը պարունակում է անվերջ թվով էլեմենտներ, և «պատահական պրոցես» տերմինը սովորաբար վերաբերում է միայն այդ դեպքին:*

Երկու ամենակարևոր դեպքերը հետևյալն են.

ա) T *բազմությունը հաշվելի է՝*

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \dots t_n,\ \dots$$

կամ

$$\dots t_{-n},\ t_{-n+1},\ \dots t_{-1},\ t_0,$$

կամ

$$\dots t_{-n},\ t_{-n+1},\ \dots t_{-2},\ t_{-1},\ t_0,\ t_1,\ t_2,\ \dots t_n,\ \dots:$$

Այս դեպքում պատահական պրոցեսը ներկայացնում է պատահական մեծությունների հաջորդականություն՝

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ \dots X_n,\ \dots \tag{317}$$

կամ

$$\dots X_{-n},\ X_{-n+1},\ \dots X_{-1},\ X_0, \tag{318}$$

կամ

$$\dots X_{-n},\ \dots X_{-2},\ X_{-1},\ X_0,\ X_1,\ X_2\ \dots X_n,\ \dots \tag{319}$$

Համապատասխան $X = X(t)$ *պատահական պրոցեսը կոչվում է* դիսկրետ պարամետրով պատահական պրոցես:

բ) T *բազմությունը ներկայացնում է միջակայք՝ վերջավոր կամ անվերջ: Համապատասխան* $X(t)$ *պրոցեսը պատահական մեծությունների մի ընտանիք է՝ կախված անընդհատ փոփոխվող պարամետրից: Այս դեպքում պատահական պրոցեսը կոչվում է* անընդհատ պարամետրով պատահական պրոցես:

Ենթադրենք $X = X(t)$ *պատահական պրոցեսը դիտվում է ժամանակի այն պահերին, որոնք պատկանում են* T *բազմությանը. ինչպես տեսանք, պատահական պրոցեսի նկատմամբ* T *ժամանակամիջոցում կատարվում է մի փորձ: ժամանակի յուրաքանչյուր* t *պահին, որը* *պատկանում է T-ին, X (t) պատահական մեծությունը կընդունի որոշակի թվային արժեք և երբ t-ն կընդունի բոլոր հնարավոր արժեքները՝ T բազմությունից, X = X (t) պրոցեսը կդառնա որոշակի ֆունկցիա՝ x = x (t), որոշված T բազմության վրա։*

Այսպիսով, եթե

$$X = X(t), \quad t \in T$$

պատահական պրոցեսի նկատմամբ կատարվում է մի փորձ, ապա այդ փորձի արդյունքը մի որոշակի ֆունկցիա է՝

$$x = x(t), \quad t \in T \qquad (320)$$

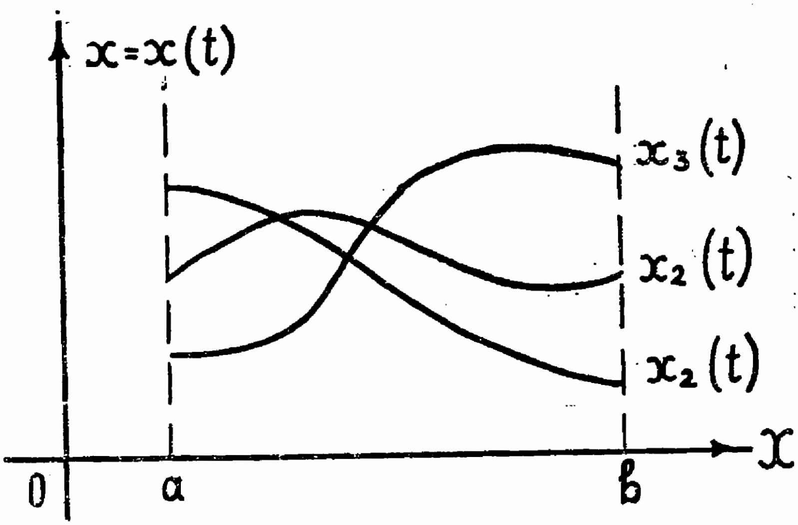
Պատահական պրոցեսի իրագործում կամ պատահական պրոցեսի վերցվածքային ֆունկցիա կոչվում է որոշակի վերջավոր և իրական ֆունկցիան t փոփոխականից ($t \in T$), որին փորձի ժամանակ վերածվում է պատահական պրոցեսը։ *Պատահական պրոցեսի հնարավոր իրագործումները կազմում են մի $\{x(t)\}$ բազմություն, որը կնշանակենք Ω_1։ Նկ. 33-ում բերված են պատահական պրոցեսի երեք իրագործումները, երբ T բազմությունը ներկայացնում է [a, b] միջակայքը։*

Ամփոփելով, նկատում ենք, որ պատահական պրոցեսի գաղափարը ընդգրկում է և՛ պատահական մեծության, և՛ սովորական ֆունկցիայի հասկացությունները, այսինքն՝ պարամետրի յուրաքանչյուր ֆիքսած արժեքի համար պատահական պրոցեսը դառնում է պատահական մեծություն, իսկ ամեն մի փորձում, որը կատարվում է պատահական պրոցեսի նկատմամբ, այն դառնում է որոշակի ֆունկցիա։

Այժմ ցույց տանք, թե ինչպես է կառուցվում պատահական պրոցեսի հավանականային տարածությունը։ Տված է

$$X = X(t), \quad t \in T$$

պատահական պրոցեսը, որը յուրաքանչյուր t պահին ($t \in T$) ներկայացնում է մի պատահական մեծություն՝ որոշված (Ω, F, P) հավանականային տարածության վրա։ Դիտենք $\omega \in \Omega$ էլեմենտար պատահարը, որին համապատասխանում է պատահական պրոցեսի x (t) իրագործումը։ x (t)-ն վերջավոր իրական ֆունկցիա է կամ երկրաչափորեն վերջավոր իրական X ֆունկցիոնալ տարածության մի կետ։ x (t) ֆունկցիան կանվանենք ω էլեմենտար պատահարի պատկեր։ Երբ ω էլեմենտար պատահարն անցնում է էլեմենտար պատահարների տարածության բոլոր էլեմենտները, նրա համապատասխան x (t) պատկերը կազմում է Ω_1 բազմությունը, որը X ֆունկցիոնալ տարածության մի մասն է։ Ω_1-ը X տարածության մեջ տված պրոցեսին համապատասխանող էլեմենտար պատահարների բազմությունն է՝



Նկ. 33

$$\Omega_1 = \{ x(t) \}.$$

Նշանակենք A_1-ով այն $x(t)$ իրագործումների բազմությունը, որոնք ներկայացնում են որևէ A բազմության մեջ մտնող էլեմենտար պատահարների պատկերները։ Պարզ է, որ A_1 պատահարն այն է, որ փորձում հանդես կգա A_1 բազմությանը պատկանող որևէ $x(t)$ իրագործում։ A_1 պատահարը կանվանենք A պատահարի պատկեր։ Այդ A_1 ենթաբազմությունների բազմությունը, որոնց A նախապատկերները պատկանում են F-ին, նշանակենք F_1-ով։ Ակներև է, որ եթե F բազմությունը ներկայացնում է բորելյան դաշտ, ապա նույնը կարելի է ասել F_1-ի մասին.

$$F_1 = \{ A_1 \}.$$

Քանի որ A_1 պատահարը հանդես է գալիս միայն այն դեպքում, երբ հանդես է գալիս նրան համապատասխանող A պատահարը, բնական է ընդունել, որ նրանց հավանականությունները պետք է լինեն հավասար, այսինքն՝

$$P_1(A_1) = P(A).$$

Այսպիսով, կառուցված է տվյալ պատահական պրոցեսին համապատասխանող հավանականային տարածությունը՝

$$(\Omega_1,\ F_1,\ P_1):$$

Պատահական պրոցեսը համարվում է տրված, եթե որոշակի տվյալների միջոցով հնարավոր է կառուցել նրան համապատասխանող հավանականային տարածություն: Ինչպիսին են այդ տվյալները, կտեսնենք հաջորդ պարագրաֆում:

58. Պատահական պրոցեսի վերջավորչափանի բաշխման ֆունկցիաները

Ինչպես հայտնի է, յուրաքանչյուր բազմաչափ պատահական մեծություն՝

$$X = (X_1,\ X_2,\ \dots\ X_n),$$

նկարագրվում է իր հավանականությունների՝ $F(x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n)$ *բաշխման ֆունկցիայի միջոցով:*

Քննարկենք

$$X = X(t),\ t \in T$$

պատահական պրոցեսը և այդ պրոցեսի համար կառուցենք հավանականությունների ցանկացած չափանի բաշխման ֆունկցիաները: Ամեն մի $t_1 \in T$ *արժեքի համար քննարկենք* $X(t_1)$ *միաչափ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան, այսինքն՝*

$$F_1(x_1,\ t_1) = P(X(t_1) < x_1):$$

Ամեն մի $t_1,\ t_2 \in T$ *զույգի համար քննարկենք* $\big(X(t_1),\ X(t_2)\big)$ *երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան՝*

$$F_2(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2) = P(X(t_1) < x_1\ \cap\ X(t_2) < x_2):$$

Ընդհանրապես ցանկացած բնական n *թվի և* $t_1,\ t_2,\ \dots\ t_n \in T$ *արժեքների համար քննարկենք* n*-չափանի* $\big(X(t_1),\ X(t_2),\ \dots\ X(t_n)\big)$ *պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան՝*

$$F_n(x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n,\ t_1,\ t_2,\ \dots\ t_n) = P(X(t_1) < x_1 \cap X(t_2) < x_2 \cap \dots$$
$$\dots \cap X(t_n) < x_n): \qquad (321)$$

Կազմված բաշխման ֆունկցիաների ընտանիքը կոչվում է տվյալ պատահական պրոցեսի հավանականությունների բաշխման վերջավորչափանի ֆունկցիաների ընտանիք: *Այսպիսով, ամեն մի պատահական* պրոցեսին համապատասխանում է այդ պրոցեսի հետ կապված վերջավորչափանի հավանականությունների բաշխման ֆունկցիաների մի ընտանիք (321):

Ակներև է, որ այդ բաշխման ֆունկցիաների ընտանիքը չի կարող լինել ցանկացած, և պետք է բավարարի որոշ պայմանների՝ սիմետրիայի պայմանին և համաձայնեցվածության պայմանին: Սիմետրիայի հատկությունն այն է, որ պետք է տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը՝

$$F_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n) = F(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_n}, t_{i_1}, t_{i_2}, \dots t_{i_n}), \quad (322)$$

որտեղ $(i_1, i_2, \dots i_n)$-ը ներկայացնում է $1, 2 \dots n$ ինդեքսներից կազմված ցանկացած տեղափոխություն: Այդ հատկությունը անմիջապես հետևում է հավանականությունների բաշխման ֆունկցիայի սահմանումից՝

$$F_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n) = P(X(t_1) < x_1 \cap X(t_2) < x_2 \cap \dots$$
$$\dots \cap X(t_n) < x_n) = P(X(t_{i_1}) < x_{i_1} \cap X(t_{i_2}) < x_{i_2} \cap \dots \cap X(t_{i_n}) < x_{i_n}) =$$
$$= F_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_n}, t_{i_1}, t_{i_2}, \dots t_{i_n}):$$

Համաձայնեցվածության հատկությունն այն է, որ $(n+m)$-չափանի բաշխման ֆունկցիայից ստացվում է n-չափանի բաշխման ֆունկցիա հետևյալ կերպ՝

$$F_{n+m}(x_1, x_2, \dots x_n, +\infty, +\infty, \dots +\infty, t_1, t_2, \dots t_n, t_{n+1}, \dots t_{n+m}) =$$
$$= F_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n):$$

Իրոք՝

$$F_{n+m}(x_1, x_2, \dots x_n, +\infty, +\infty, \dots +\infty, t_1, t_2, \dots t_n, t_{n+1}, \dots t_{n+m}) =$$
$$= P(X(t_1) < x_1 \cap X(t_2) < x_2 \cap \dots \cap X(t_n) < x_n \cap X(t_{n+1}) < +\infty \cap \dots$$
$$\dots \cap X(t_{n+m}) < +\infty) = P(X(t_1) < x_1 \cap X(t_2) < x_2 \cap \dots \cap X(t_n) < x_n) =$$
$$= F_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n): \quad (323)$$

Կարելի է ապացուցել հետևյալ կարևոր փաստը. տված $X = X(t), t \in T$ պրոցեսի համար կառուցված հավանականությունների բաշխման վերջավորչափանի ֆունկցիաների ընտանիքը լրիվ որոշում է պատահական պրոցեսը, այսինքն՝ նրա (Ω_1, F_1, P_1) հավանականային տարածությունը: Նշանակում է, բաշխման այդ ֆունկցիաների միջոցով կարելի է որոշել P_1 հավանականությունը ամեն մի A_1 պատահույթի համար, որը պատկանում է F_1 բորելյան դաշտին: Այսպիսով, $F_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots$

t_n) ($n=1, 2, 3, \dots$) *ֆունկցիաները կազմում են հենց այն տվյալները, որոնց միջոցով որոշվում է պատահական պրոցեսը:*

$X = X(t)$ պատահական պրոցեսը T բազմության վրա կանվանենք անընդհատ պատահական պրոցես, եթե

$$\bigl(X(t_1),\ X(t_2),\ \dots\ X(t_n)\bigr)$$

n-չափանի պատահական մեծությունը ցանկացած բնական n-ի համար և ցանկացած $t_1, t_2, \dots t_n \in T$ արժեքների համար անընդհատ պատահական մեծություն է: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն հետևյալ ածանցյալները՝

$$\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1, t_1),$$

$$\frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$$

և ընդհանրապես՝

$$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n): \quad \textit{(324)}$$

(324) բանաձևով որոշված ֆունկցիաների ընտանիքը կոչվում է տվյալ անընդհատ պատահական պրոցեսի վերջավորչափանի հավականությունների խտությունների ընտանիք: *Անընդհատ պատահական պրոցեսը որոշվում է իր վերջավորչափանի հավանականությունների խտությունների միջոցով, քանի որ*

$$\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n)\, dx_1, dx_2 \dots dx_n =$$
$$= F_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n),$$

Վերջավորչափանի հավանականությունների խտությունները բավարարում են սիմետրիայի պայմանին՝

$$f_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_n}, t_{i_1}, t_{i_2}, \dots t_{i_n}) = f_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n) \qquad \textit{(325)}$$

և համաձայնեցվածության պայմանին

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{n+m}(x_1, x_2, \dots x_{n+m}, t_1, t_2, \dots t_{n+m})\, dx_{n+1}\, dx_{n+2} \dots dx_{n+m} =$$
$$= f_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n): \qquad \textit{(326)}$$

$X=X(t)$ պատահական պրոցեսը T բազմության վրա կանվանենք դիսկրետ պատահական պրոցես, եթե

$$(X(t_1),\ X(t_2), \ldots X(t_n))$$

n-չափանի պատահական մեծությունը ցանկացած բնական n-ի արժեքի համար և ցանկացած $t_1,\ t_2, \ldots t_n \in T$ արժեքների համար դիսկրետ պատահական մեծություն է: *Դիսկրետ պատահական պրոցեսը լրիվ որոշվում է իր բաշխման օրենքների միջոցով. դրանք են մեկչափանի բաշխման օրենքը՝*

$$p_1(x_1,\ t_1) = P(X(t_1)=x_1), \qquad t_1 \in T,$$

երկչափանի բաշխման օրենքը՝

$$p_2(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2)=P(X(t_1)=x_1\ \cap X(t_2)=x_2), \qquad t_1,\ t_2, \in T,$$

և, ընդհանրապես, n-չափանի բաշխման օրենքը՝

$$p_n\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ t_1,\ t_2, \ldots t_n) =$$
$$= P(X(t_1)=x_1 \cap X(t_2)=x_2 \cap \ldots \cap X(t_n)=x_n), \quad t_1,\ t_2, \ldots t_n \in T: \quad (327)$$

(327) բանաձևով որոշված ֆունկցիաների ընտանիքը կոչվում է տվյալ պատահական պրոցեսի վերջավորչափանի բաշխման օրենքների ընտանիք: *Վերջավորչափանի բաշխման օրենքները բավարարում են սիմետրիայի պայմանին՝*

$$p_n(x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, t_2, \ldots t_n) = p_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots t_{i_n}) \qquad (328)$$

և համաձայնեցվածության պայմանին՝

$$\sum_{x_{n+1}} \sum_{x_{n+2}} \ldots \sum_{x_{n+m}} p_{n+m}(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots x_{n+m}, t_1, t_2, \ldots t_n, \ldots t_{n+m}) =$$
$$= p_n(x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, t_2, \ldots t_n): \qquad (329)$$

Ինչպես նշվեց, հավանականությունների վերջավորչափանի բաշխման ֆունկցիաների ընտանիքը լրիվ որոշում է $X = X(t)$ պատահական պրոցեսի բորելյան F_1 դաշտի բոլոր պատահարների հավանականությունները: Եթե այդ պատահական պրոցեսը դիսկրետ ժամանակով պատահական պրոցես է, նրան համապատասխանող բորելյան F_1 դաշտը այնքան ընդարձակ է, որ պարունակում է բոլոր պատահարները, որոնց մենք հանդիպում ենք կիրառությունների մեջ: Իսկ եթե այդ պատահական պրոցեսը անընդհատ ժամանակով պատահական պրոցես է, ապա դրությունը բոլորովին այլ է: Ակներև է, որ վերջավորչափանի հավանականությունների բաշխման ֆունկցիաները թույլ են տալիս *որոշել միայն այնպիսի պատահարների հավանականությունները, որոնք որոշ պայմաններ են դնում պատահական պրոցեսի վրա վերջավոր կամ հաշվելի թվով* t *պարամետրի արժեքների համար: Այնինչ, եթե պատահական պրոցեսը անընդհատ ժամանակով պատահական պրոցես է, մեզ կարող են հետաքրքրել նաև այնպիսի պատահարները, որոնց մեջ պայմաններ են դնում* $X(t)$ *պրոցեսի վրա ոչ թե հաշվելի բազմության* t*-ի արժեքների համար, այլև* t*-ի բոլոր արժեքների համար որևէ միջակայքից: Օրինակ,* $X(t)>a$, *երբ* $t_1<t<t_2$ *պատահարը կամ մի այլ պատահար, որ պրոցեսի իրագործումները տվյալ միջակայքում անընդհատ ֆունկցիաներ են և այլն: Այսպիսի պատահարների հավանականությունները ընդհանրապես չեն կարող որոշվել վերջավորչափանի հավանականությունների բաշխման ֆունկցիաների ընտանիքի միջոցով: Այսպիսի պատահարների հավանականությունների որոշումը մի խնդիր է, որը կարող է նյութ ծառայել առանձին հետազոտությունների համար:*

Վերջապես նկատենք, որ պատահական պրոցեսը կիրառություններում կարող է տրվել և այլ ձևով: Օրինակ, պատահական պրոցեսը ներկայացվում է մի բանաձևի միջոցով, որը պարունակում է t *պարամետր և մի շարք պատահական մեծություններ, որոնց համար հայտնի են կամ բաշխման ֆունկցիաները, կամ հավանականային բնութագրիչները:*

59. Պատահական պրոցեսի բնութագրիչները

Դիտարկենք

$$X=X(t), \qquad t\in T$$

պատահական պրոցեսը: Պատահական պրոցեսի հիմնական բնութագրիչը նրա մաթեմատիկական սպասումը *կամ* միջին արժեքն է՝

$$m_X(t)=E[X(t)], \quad t\in T: \tag{330}$$

Պատահական պրոցեսի մաթեմատիկական սպասում կամ միջին արժեք կոչվում է այնպիսի ֆունկցիան՝ որոշված T բազմության վրա, որը յուրաքանչյուր ֆիքսած $t\in T$ արժեքի համար հավասար է համապատասխան $X(t)$ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասմանը: *Պատահական ֆունկցիայի միջին արժեքը մի ֆունկցիա է, որի շուրջը համախմբվում են այդ պատահական ֆունկցիայի իրագործումները: Նկ. 34-ում բերված են պատահական պրոցեսի տարբեր իրագործումները և նրա միջին արժեքը* $[a,b]$ *միջակայքում:*

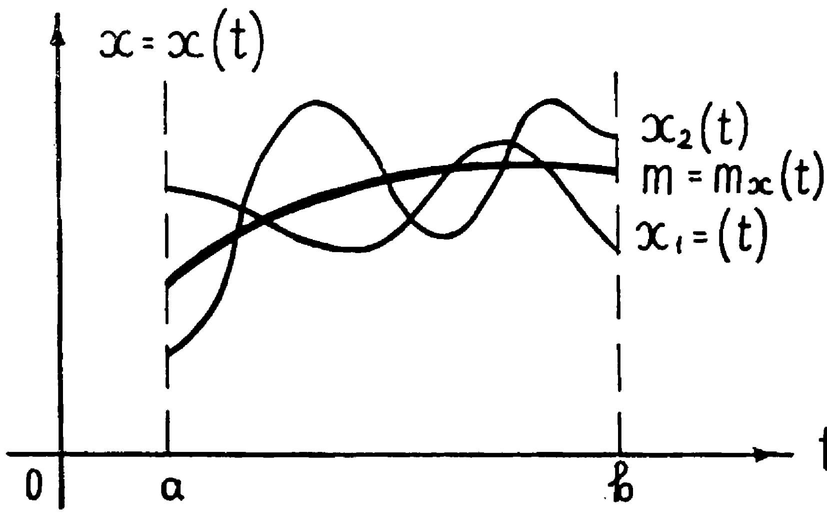
Անընդհատ պատահական պրոցեսի միջին արժեքը արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$m_x(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x,t)\,dx, \qquad (331)$$

իսկ դիսկրետ պրոցեսինը՝

$$m_x(t)=\sum_x xp(x,\ t)\text{։} \qquad (332)$$

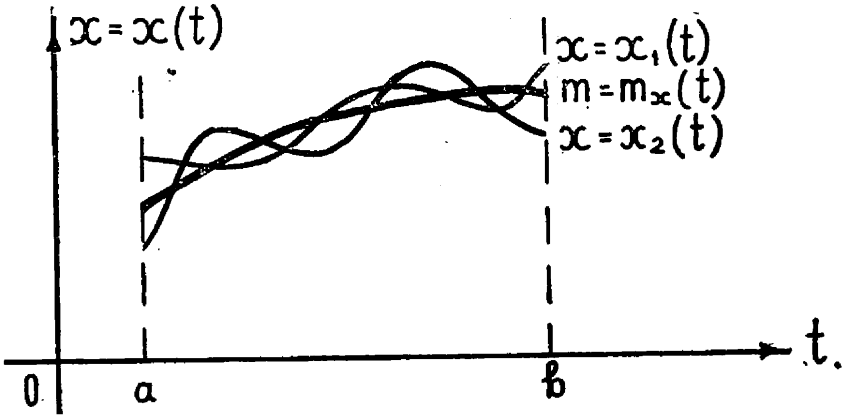
Քանի որ պատահական պրոցեսի միջին արժեքը t *պարամետրի յուրաքանչյուր արժեքի համար ներկայացնում է պատահական մեծության միջին արժեք, ուրեմն այն օժտված է սովորական միջին արժեքի բոլոր հատկություններով։*



Նկ. 31

Պատահական պրոցեսի դիսպերսիան մի որոշակի ոչ պատահական t-ի ֆունկցիա է՝ որոշված T բազմության վրա, որը յուրաքանչյուր t արժեքի համար հավասար է համապատասխան X(t) պատահական մեծության դիսպերսիային։ *Պատահական պրոցեսի դիսպերսիան բնութագրում է, այդ պատահական պրոցեսի իրագործումների ցրումը պատահական պրոցեսի միջին արժեքի շուրջը։*

Օրինակ, նկ. 34-ում և 35-ում բերված պատահական պրոցեսներն ունեն միմյանցից քիչ տարբերվող միջին արժեքներ, սակայն նկ. 34-ում բերված պրոցեսն ունի ավելի մեծ դիսպերսիա։



Նկ. 35

Եթե տված պատահական պրոցեսը անընդհատ է և f(x, t) ֆունկցիան նրա միաչափանի հավանականությունների խտությունն է, դիսպերսիան կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝

$$b_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x(t))^2 f(x,\ t)\,dx\text{։} \qquad (333)$$

Եթե պատահական պրոցեսը դիսկրետ է և p(x, t) ֆունկցիան նրա միաչափանի բաշխման օրենքն է, դիսպերսիան կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝

$$b_x(t)=\sum_{x}(x-m_x(t))^2 p(x,\ t)\text{։} \qquad (334)$$

Քանի որ պատահական պրոցեսի դիսպերսիան t-ի յուրաքանչյուր արժեքի համար ներկայացնում է պատահական մեծության դիսպերսիա, ուրեմն նա ունի նույն հատկությունները, ինչ ունի պատահական մեծության դիսպերսիան։

Պատահական պրոցեսի կարևոր բնութագրիչը, որը նկարագրում է նրա հատույթների գծային կախվածությունը միմյանցից, պատահական պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիան է։ Պատահական պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիան որոշակի ոչ պատահական ֆունկցիա է՝ որոշված T^2

բազմության վրա, որը յուրաքանչյուր s և t զույգի համար հավասար է $(X(s), X(t))$ երկչափ պատահական մեծության կոռելյացիոն մոմենտին, այսինքն՝

$$K_X(s, t)=E[X(s)-m_X(s)][X(t)-m_X(t)], \qquad s, t\in T. \qquad (335)$$

Հետևաբար, եթե որևէ s և t զույգի համար $X(s)$ և $X(t)$ պատահական մեծությունները անկախ են միմյանցից, այդ արժեքների համար կոռելյացիոն ֆունկցիան հավասարվում է 0-ի։ Սակայն, եթե կոռելյացիոն ֆունկցիան 0-ի է հավասարվում որևէ զույգ s և t արժեքների դեպքում, ապա դրանից ընդհանրապես չի հետևում, որ $X(s)$ և $X(t)$ պատահական մեծությունները միմյանցից անկախ են։ Բայց մի կարևոր դեպքում, երբ $X(s)$ և $X(t)$ պատահական մեծությունները ենթարկվում են երկչափ նորմալ բաշխման, կոռելյացիոն ֆունկցիայի 0-ի հավասարվելուց հետևում է այդ պատահական մեծությունների անկախությունը։ Պատահական պրոցեսի նորմավորված կոռելյացիոն ֆունկցիան՝

$$R_x(s,t) = \frac{K_x(s,t)}{\sqrt{D_x(s)\cdot D_x(t)}} = \frac{E[X(s)-m_x(s)][X(t)-m_x(t)]}{\sqrt{D_x(s)\cdot D_x(t)}}, \qquad (336)$$

յուրաքանչյուր ֆիքսած s և t արժեքների համար բնութագրում է $X(s)$ և $X(t)$ պատահական մեծությունների միջև եղած գծային կապի չափը՝ բացարձակ արժեքով հասնելով իր մեծագույն միավոր արժեքին, եթե նրանց միջև գոյություն ունի ֆունկցիոնալ գծային կապ։ Այսպիսով, նորմավորված կոռելյացիոն ֆունկցիան բնութագրում է տվյալ պատահական պրոցեսի երկու ցանկացած $X(s)$ և $X(t)$ հատույթների միջև եղած գծային կապի չափը։

Անընդհատ պատահական պրոցեսի համար, որի հավանականությունների երկչափանի խտությունը $f(x,y,s,t)$ է, կոռելյացիոն ֆունկցիան արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$K_x(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x(s))(y-m_x(t))f(x,y,s,t)\,dx\,dy, \qquad (337)$$

իսկ եթե պատահական պրոցեսը դիսկրետ է, որի երկչափանի բաշխման օրենքը $p(x,y,s,t)$ ֆունկցիան է, այն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$K_x(s,t) = \sum_x \sum_y (x-m_x(s))(y-m_x(t))\,p(x,y,s,t). \qquad (338)$$

(335) բանաձևից, մաթեմատիկական սպասման հատկությունների օգ-

տագործելով, կոռելյացիոն ֆունկցիայի համար ստացվում է մի այլ բանաձև՝

$$K_x(s, t) = E[X(s) X(t)] - m_x(s) \cdot m_x(t): \qquad (339)$$

Մասնավորապես, եթե $m_x(t) = 0$, կոռելյացիոն ֆունկցիան՝

$$K_x(s, t) = E[X(s) \cdot X(t)]: \qquad (340)$$

Առհասարակ $X(t)$ պատահական պրոցեսի փոխարեն դիտելով $X(t) - m_x(t)$ պատահական պրոցեսը, որի միջին արժեքը հավասար է 0-ի, կարելի է առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրել, որ պատահական պրոցեսի միջին արժեքը հավասար է 0-ի, ուրեմն նրա կոռելյացիոն ֆունկցիան արտահայտվում է (340) բանաձևով:

Նշենք կոռելյացիոն ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները.

1. $K_x(s, s) = b_x(s) \geqslant 0$: (341)

Իրոք՝

$$K_x(s, s) = E[X(s) - m_x(s)][X(s) - m_x(s)] = E[X(s) - m_x(s)]^2 = b_x(s):$$

2. $K_x(s, t) = K_x(t, s)$: (342)

Իրոք՝

$$K_x(s, t) = E[X(s) - m_x(s)][X(t) - m_x(t)] = E[X(t) - m_x(t)][X(s) - m_x(s)] = K_x(t, s)$$

3. $|K_x(s, t)| \leqslant \sqrt{K_x(s, s) \cdot K_x(t, t)}$,

կամ 1)-ի համաձայն

$$|K_x(s, t)| \leqslant \sqrt{b_x(s) \cdot b_x(t)}: \qquad (343)$$

4. Ցանկացած բնական n թվի $t_1, t_2, \ldots t_n \in T$ արժեքների և $z_1, z_2, \ldots z_n$ կոմպլեքս թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_x(t_i, t_j) z_i \overline{z_j} \geqslant 0 \; ^{*)}$$

Իրոք՝

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_x(t_i, t_j) z_i \overline{z_j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} z_i \overline{z_j} E[X(t_i) - m_x(t_i)][X(t_j) - m(t_j)] =$$

* Կարելի է ցույց տալ, որ կոռելյացիոն ֆունկցիայի չորրորդ հատկությունից հետևում են առաջին երեք հատկությունները:

$$
= E\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big[X(t_i)-m(t_i)\Big]\Big[X(t_j)-m(t_j)\Big]z_i\overline{z_j}\right\} =
$$

$$
= E\left\{\sum_{i=1}^{n}\Big[X(t_i)-m(t_i)\Big]z_i\sum_{j=1}^{n}\Big[X(t_j)-m(t_j)\Big]\overline{z_j}\right\} =
$$

$$
= E\left|\sum_{j=1}^{n}\Big[X(t_j)-m(t_j)\Big]z_j\right|^2 \geqslant 0:
$$

60. Մի քանի պատահական պրոցեսների օրինակներ: 1. Նորմալ պատահական պրոցես: $X = X(t)$, $t \in T$ պրոցեսը կոչվում է նորմալ պատահական պրոցես, *եթե նրա բոլոր՝ վերջավորչափանի հավանականությունների խտությունները հանդիսանում են նորմալ բաշխման խտություններ:*

Թեորեմ. Նորմալ պատահական պրոցեսը լրիվ որոշվում է $a=a(t)$ $(t \in T)$ *և* $r(s,t)$ $(s,t \in T)$ *ֆունկցիաների միջոցով. ընդ որում* $r(s,t)$*-ն բավարարում է հետևյալ պայմանին՝ ցանկացած բնական* n, $t_1, t_2, \ldots t_n \in T$ *և կոմպլեքս* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *թվերի համար՝*

$$
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r(t_i, t_j) z_i \overline{z_j} > 0, \tag{345}
$$

այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի մի նորմալ պատահական պրոցես՝ $X(t)$, *որի մաթեմատիկական սպասումը համընկնում է տվյալ* $a(t)$ *ֆունկցիայի հետ՝*

$$
E[X(t)] = a(t),
$$

և որի կովարիացիոն ֆունկցիան համընկնում է տված $r(s,t)$ *ֆունկցիայի հետ՝*

$$
r(s,t) = E[X(s) - a(s)][X(t) - a(t)]:
$$

Թեորեմը ապացուցենք այն մասնավոր դեպքի համար, երբ $a(t)$ *և* $r(s,t)$ *ֆունկցիաները իրական են: Այդպիսի նորմալ պատահական պրոցեսի գոյությունը կապացուցենք այդ պրոցեսը կառուցելով: Որոնելի նորմալ պատահական պրոցեսի միջին արժեքը պետք է լինի* $a(t)$, *իսկ դիսպերսիան՝* $r(t,t) > 0$. *Հետևաբար, նրա միաչափանի հավա-*

նականությունների խտությունը կարտահայտվի հետևյալ ձևով

$$f_1(x_1,\ t_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot r(t_1,\ t_1)}}\, e^{-\frac{[x_1-a(t_1)]^2}{2r(t_1,\ t_1)}}; \tag{346}$$

Հավանականությունների երկչափանի խտությունը կազմելու համար հաշվի առնենք, որ $(X(t_1),\ X(t_2))$ երկչափ նորմալ պատահական մեծության միջին արժեքը $(a(t_1),\ a(t_2))$ է, իսկ կոռելյացիոն մատրիցան՝

$$B(t_1,\ t_2)=\begin{pmatrix} r(t_1,\ t_1) & r(t_1,\ t_2) \\ r(t_2,\ t_1) & r(t_2,\ t_2) \end{pmatrix}, \tag{347}$$

որի դետերմինանտը (345) պայմանի համաձայն մեծ է զրոյից: Հետևաբար, որոնելի նորմալ պրոցեսի հավանականությունների երկչափանի խտությունը՝

$$f_2(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{r(t_1,\ t_1)\, r(t_2,\ t_2)-[r(t_1,\ t_2)]^2}}\cdot \tag{348}$$

$$\cdot e^{-\frac{r(t_1,\ t_1)\cdot r(t_2,\ t_2)}{2\{r(t_1,\ t_1)\cdot r(t_2,\ t_2)-[r(t_1,\ t_2)]^2\}}\cdot\left[\frac{[x_1-a(t_1)]^2}{r(t_1,\ t_1)}-2r(t_1,\ t_2)\frac{(x_1-a(t_1))(x_2-a(t_2))}{r(t_1,\ t_1)\cdot r(t_2,\ t_2)}+\frac{(x_2-a(t_2))^2}{r(t_2,\ t_2)}\right]};$$

Ընդհանրապես որոնելի նորմալ պրոցեսի հավանականությունների n-չափանի խտությունը կազմելու համար հաշվի առնենք, որ $(X(t_1),\ X(t_2),\ \dots\ X(t_n))$ n-չափանի նորմալ պատահական մեծության միջին արժեքը պետք է լինի $(a(t_1),\ a(t_2),\ \dots\ a(t_n))$-ը, իսկ կոռելյացիոն մատրիցան՝

$$B(t_1,\ t_2,\ \dots\ t_n)=\begin{pmatrix} r(t_1,\ t_1) & r(t_1\ t_2) & \dots & r(t_1,\ t_n) \\ r(t_2,\ t_1) & r(t_2,\ t_2) & \dots & r(t_2,\ t_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r(t_n,\ t_1) & r(t_n,\ t_2) & \dots & r(t_n,\ t_n) \end{pmatrix}, \tag{349}$$

որի դետերմինանտը (345) պայմանի համաձայն մեծ է զրոյից: Հե-

տևաբար, որոնք էլ նորմալ պրոցեսի n-*չափանի հավանականությունների խտությունը՝*

$$f_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|B(t_1, t_2, \dots t_n)|}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_i - a(t_i))(x_j - a(t_j))}, \qquad (350)$$

որտեղ $C = (c_{ij})$ *մատրիցան* B *մատրիցայի հակադարձ մատրիցան է՝*

$$C(t_1, t_2, \dots t_n) = [B(t_1, t_2, \dots t_n)]^{-1}. \qquad (351)$$

Այսպիսով, տված $a(t)$ *և* $r(s, t)$ *ֆունկցիաների միջոցով կառուցված են նորմալ պրոցեսի բոլոր վերջավորչափանի հավանականությունների խտությունները։ Հետևաբար, այդ ֆունկցիաների միջոցով որոշվում է նորմալ պրոցեսը։*

2. Պուասոնի պատահական պրոցեսը։ *Դիտարկենք մի* $X(t)$ $(t \geq 0)$ *պատահական պրոցես, որը յուրաքանչյուր* t *պահին ներկայացնում է* A *պատահարի հանդես գալու թիվը* $[0, t)$ *ժամանակամիջոցում։ Ենթադրենք՝*

ա) A *պատահարի հանդես գալու թվերը իրար չծածկող ժամանակամիջոցներում անկախ պատահական մեծություններ են։*

բ) A *պատահարի* t *տևողություն ունեցող ժամանակամիջոցում հանդես գալու թվի հավանականությունների բաշխումը կախված է միայն այդ ժամանակամիջոցի երկարությունից և կախված չէ ժամանակամիջոցի սկզբից։*

գ) Δt *ժամանակամիջոցում* A *պատահարի առնվազն մեկ անգամ հանդես գալու* $\varphi(\Delta t)$ *հավանականությունը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝*

$$\varphi(\Delta t) = a\Delta t + \varepsilon\Delta t,$$

$a > 0$ *կախված չանի* t-*ից և* $\varepsilon \to 0$, *երբ* $\Delta t \to 0$։

դ) Δt *երկարություն ունեցող ժամանակամիջոցում* A *պատահարի առնվազն երկու անգամ հանդես գալու* $\psi(\Delta t)$ *հավանականությունը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝*

$$\psi(\Delta t) = \delta\Delta t,$$

որտեղ $\delta \to 0$, *երբ* $\Delta t \to 0$:

Որոշենք $P_k(t)$ *հավանականությունը, որ* $[0,t)$ *կամ որ նույնն է* (բ)-ի համաձայն $[t_0, t_0+t)$ ժամանակամիջոցում պատահարը հանդես կգա k (k=0, 1, 2, ...) անգամ, այսինքն՝

$$P_k(t) = P(X(t) = k)\text{։} \qquad (352)$$

Նախ գտնենք $P_0(t)$-ն, այսինքն՝ t ժամանակամիջոցում A պատահարի ոչ մի անգամ տեղի չունենալու հավանականությունը։ Դրա համար հաշվենք $P_0(t+\Delta t)$-ն՝ օգտվելով (ա) պայմանից և կիրառելով հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը անկախ պատահարների համար. ունենք

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\cdot P_0(\Delta t)\text{։}$$

Բայց $P_0(\Delta t)$-ն Δt տևողության ժամանակամիջոցում պատահարի ոչ մի անգամ տեղի չունենալու հավանականությունն է. (գ) պայմանի համաձայն

$$P_0(\Delta t) = 1 - (a\cdot\Delta t + \varepsilon\Delta t),$$

քանի որ A պատահարի իրականացման հավանականությունների գումարը առնվազն մեկ անգամ, և ոչ մի անգամ որպես հակադիր պատահարների հավանականությունների գումար, հավասար է մեկի։ Ուստի

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1 - a\Delta t + \varepsilon\Delta t)$$

կամ

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -aP_0(t) - \varepsilon P_0(t)\text{։}$$

Եթե Δt-ն ձգտում է 0-ի, ստացված հավասարության աջ մասի սահմանը կլինի $-aP_0(t)$. հետևաբար, սահման կունենա նաև հավասարության ձախ մասը, որը հավասար կլինի $P_0(t)$-ի ածանցյալին։ Ստացված հավասարության մեջ սահմանին անցնելով, երբ $\Delta t \to 0$, կստանանք

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -a\cdot P_0(t)\text{։} \qquad (353)$$

Այս դիֆերենցյալ հավասարումը լուծելով և $P_0(0) = 1$-ին ուշադրություն դարձնելով, կստանանք

$$P_0(t) = e^{-at}\text{։} \qquad (354)$$

Այժմ ենթադրենք, թե $k > 0$։ A պատահարը $[0, t+\Delta t)$ ժամանակամիջոցում հանդես կգա k անգամ հետևյալ դեպքերում՝ կամ $[0, t)$

ժամանակամիջոցում k անգամ, իսկ $[t, t+\Delta t)$ ժամանակամիջոցում՝ ոչ մի անգամ, կամ $[0, t)$ ժամանակամիջոցում $(k-1)$ անգամ, իսկ $[t, t+\Delta t)$ ժամանակամիջոցում՝ մեկ անգամ ..., կամ, վերջապես, $[0, t)$ ժամանակամիջոցում ոչ մի անգամ, իսկ $[t, t+\Delta t)$ ժամանակամիջոցում՝ k անգամ։ Ուստի, հավանականությունների գումարման և բազմապատկման թեորեմները կիրառելով, կունենանք

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)\cdot P_0(\Delta t) + P_{k-1}(t)\cdot P_1(\Delta t) + P_{k-2}(t)\cdot P_2(\Delta t) + \cdots + P_0(t)\cdot P_k(\Delta t)։$$

Բայց

$$P_0(\Delta t) = 1 - (a\Delta t + \varepsilon\Delta t),$$

$$P_1(\Delta t) = a\cdot\Delta t + \varepsilon\Delta t - \delta\cdot\Delta t,$$

քանի որ A պատահարի իրականացման հավանականությունը՝ $a\cdot\Delta t + \varepsilon\Delta t$, առնվազն մի անգամ $[t, t+\Delta t)$ ժամանակամիջոցում տրվում է, որպես այդ պատահարի ճիշտ մի անգամ իրականանալու $P_1(\Delta t)$ հավանականության և նույն ժամանակամիջոցում պատահարի մեկից ավելի անգամ իրականանալու $\delta\cdot\Delta t$ հավանականության գումար. իսկ $P_{k-2}(t)\cdot P_2(\Delta t) + \ldots + P_0(t)\cdot P_k(\Delta t)$ գումարը անվերջ փոքր է Δt-ի համեմատությամբ, երբ $\Delta t \to 0$, որովհետև

$$P_{k-2}(t)\cdot P_2(\Delta t) + \ldots + P_0(t)\cdot P_k(\Delta t) < P_2(\Delta t) + \ldots + P_k(\Delta t) <$$
$$< \psi(\Delta t) = \delta\cdot\Delta t։$$

Ուստի

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)\cdot(1 - a\Delta t) + P_{k-1}(t)\, a\Delta t + \varepsilon_1\Delta t,$$

որտեղ ε_1-ը ձգտում է զրոյի, երբ Δt-ն ձգտում է զրոյի։ Այս հավասարությունից ստանում ենք

$$\frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -aP_k(t) + aP_{k-1}(t) + \varepsilon_1,$$

կամ, անցնելով սահմանին, երբ $\Delta t \to 0$, կունենանք

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -aP_k(t) + aP_{k-1}(t)։ \qquad (3.5.5)$$

Այս դիֆերենցիալ հավասարման լուծելու համար ընդունենք

$$P_k(t) = P_k^*(t)\cdot e^{-at}.$$

այդ դեպքում հավասարումը կընդունի

$$-P^*_k(t)\,ae^{-at}+P_k^{*\prime}(t)\,e^{-at}=-a\,P_k^*(t)e^{-at}+aP^*_{k-1}(t)e^{-at}$$

կամ

$$\frac{dP_k^*(t)}{dt}=aP^*_{k-1}(t)$$

տեսքը: Այստեղից

$$P_k^*(t)=a\int\limits_0^t P^*_{k-1}(t)\,dt+C.$$

Այժմ որոշենք C *հաստատունը. քանի որ* $k>0$, *ուրեմն* $P_k(0)=0$ *որպես* A *պատահարի զրո ժամանակամիջոցում* k *անգամ հանդես գալու հավանականություն: Հետևաբար,* $P_k^*(0)=0$, *իսկ* $C=0$: *Քանի որ* $P_0(t)=e^{-at}$, *ուրեմն*

$$P_0^*(t)=1,$$

իսկ

$$P_1^*(t)=a\int\limits_0^t dt=at,$$

$$P_2^*(t)=a\int\limits_0^t atdt=\frac{(at)^2}{2!}$$

և, ընդհանրապես՝

$$P_k^*(t)=\frac{(at)^k}{k!}.$$

Հետևաբար՝

$$P_k(t)=e^{-at}\frac{(at)^k}{k!},\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{356}$$

Այսպիսով, A պատահարի t ժամանակամիջոցում հանդես գալու k թիվն ունի Պուասոնի at պարամետրով հավանականությունների բաշխում: k-ի միջին արժեքը հավասար է at-ի, իսկ պատահարի հանդես գալու միջին թիվը ժամանակի միավորի ընթացքում՝ a-ի:

Միաժամանակ ստացանք քննարկվող պատահական պրոցեսի մեկչափանի հավանականությունների բաշխման օրենքը. (352)-ի և (356)-ի համաձայն կունենանք

$$P_1(x_1,t_1)=P(X(t_1)=x_1)=\frac{(at_1)^{x_1}}{x_1!}e^{-at_1}, \tag{357}$$

(ա) ենթադրության շնորհիվ հնարավոր է մեկչափանի բաշխման

օրենքից ելնելով, ստանալ բոլոր վերջավորչափանի բաշխման օրենքները: Իրոք, եթե $p_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$*-ով նշանակենք* $(t_2 > t_1)$ *երկչափանի բաշխման օրենքը, ապա*

$$\begin{aligned} p_2(x_1, x_2, t_1, t_2) &= P(X(t_1) = x_1 \cap X(t_2) = x_2) = \\ &= P(X(t_1) = x_1 \cap X(t_2) - X(t_1) = x_2 - x_1) = \\ &= P(X(t_1) = x_1) \cdot P(X(t_2) - X(t_1) = x_2 - x_1)), \end{aligned}$$

քանի որ $X(t_1) = x_1$ *և* $X(t_2) - X(t_1) = x_2 - x_1$ *պատահարներն անկախ են: Մեր ենթադրության համաձայն* $[t_1, t_2)$ *ժամանակամիջոցում* A *պատահարի երևումների* $X(t_2) - X(t_1)$ *թվի բաշխման օրենքը համընկնում է նույն երկարությունն ունեցող* $[0, t_2 - t_1)$ *ժամանակամիջոցում* A *պատահարի երևումների* $X(t_2 - t_1)$ *թվի բաշխման օրենքի հետ: Հետևաբար՝*

$$p_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = p_1(x_1, t_1) \cdot p_1(x_2 - x_1, t_2 - t_1): \qquad (358)$$

(357) բանաձևի համաձայն այս երկչափանի բաշխման օրենքը կլինի

$$p_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = e^{-at_1}\frac{(at_1)^{x_1}}{x_1!}e^{-a(t_2-t_1)}\frac{[a(t_2-t_1)]^{x_2-x_1}}{(x_2-x_1)!}: \qquad (359)$$

Այս դատողությունները կրկնելով, կստանանք եռաչափանի և ընդհանրապես n*-չափանի բաշխման օրենքները՝*

$$p_n(x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, t_2, \ldots t_n) = \prod_{k=1}^{n} e^{-a(t_k-t_{k-1})}\frac{[a(t_k-t_{k-1})]^{x_k-x_{k-1}}}{(x_k-x_{k-1})!}, \qquad (360)$$

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n,$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ակներև է, որ դիտարկվող պատահական պրոցեսը ներկայացնում է դիսկրետ պատահական պրոցես՝ անընդհատ ժամանակով: Այս պատահական պրոցեսը կոչվում է Պուասոնի պատահական պրոցես:

Այժմ որոշենք Պուասոնի պրոցեսի բնութագրիչները: (356) բանաձևից եզրակացնում ենք, որ Պուասոնի պրոցեսի միջին արժեքը՝

$$m_x(t) = at, \qquad (361)$$

իսկ դիսպերսիան՝

$$b_x(t) = at: \qquad (362)$$

Կոռելյացիոն ֆունկցիան ստանալու համար վարվում ենք հետև-

յալ կերպ։ Քանի որ յուրաքանչյուր ֆիքսած s-ի և t-ի $(s<t)$ համար $X(s)$ և $X(t)-X(s)$ պատահական մեծությունները միմյանցից անկախ են, ուրեմն

$$E\left(X(s)\cdot[X(t)-X(s)]\right)=E[X(s)]\cdot E[X(t)-X(s)]=as\cdot(at-as),$$

մյուս կողմից՝

$$E\left(X(s)\cdot[X(t)-X(s)]\right)=E[X(s)\cdot X(t)]-as-a^2s^2.$$

Հետևաբար՝

$$E[X(s)\cdot X(t)]=as+a^2st,$$

իսկ

$$K_x(s,t)=as, \quad s<t$$

կամ

$$K_x(s,t)=a\cdot\min(s,t). \tag{363}$$

Վերոհիշյալ չորս պայմանները, որոնց իրականացման դեպքում տեղի է ունենում (356) բանաձևը, մասնավորապես, իրականանում են աբոնենտների հեռախոսակայանի կանչերի դեպքում։ Հեռախոսակայանում կանչերի երևան գալը որոշ ժամանակամիջոցում տեղի է ունենում պատահականորեն և միմյանցից անկախ (/ա/ պայման)։ Եթե հեռախոսակայանի կանչերով հետաքրքրվենք միայն օրվա որոշ ժամերին (օրինակ՝ ցերեկվա ժամերին), ապա տվյալ ժամանակամիջոցում կանչերի թիվը կախված է միայն այդ ժամանակամիջոցի երկարությունից և համարյա կախում չունի նրա սկզբից (/բ/ պայման)։ Ժամանակի փոքր ժամանակամիջոցի համար գեթ մի անգամ կանչ լինելու հավանականությունը կարելի է համարել համեմատական այդ ժամանակամիջոցի երկարությանը. իրոք, եթե վերցնենք երկու ժամանակամիջոցներ, որոնցից մեկը երկու անգամ մեծ է մյուսից, ապա մեկ կանչի հավանականությունը առաջին ժամանակամիջոցում համարյա, երկու անգամ ավելի մեծ է, քան երկրորդում. ասում ենք «համարյա», քանի որ հեռախոսակայանի կանչերը տարբեր ժամանակամիջոցներում անհամատեղելի պատահարներ չեն (/գ/ պայման)։ Վերջապես, երբ Δt-ն փոքր է, $\psi(\Delta t)$ հավանականությունը, որ $(t, t+\Delta t)$ ժամանակամիջոցում հեռախոսակայանում տեղի կունենա երկու կանչ, հավասար է մոտավորապես այդ ժամանակամիջոցում առնվազն մի կանչ տեղի ունենալու $\varphi(\Delta t)$ հավանականության քառակուսուն (հավանականությունների բազմապատկման թեորեմ). բայց վերջինը Δt-ի կարգի է, հետևաբար $\psi(\Delta t)=\delta\Delta t$, որտեղ δ-ն ձգտում է զրոյի՝ Δt-ի հետ միասին (/դ/ պայման)։

Այստեղից հեռախոսակայանում t տևողությամբ վերջավոր ժամանակամիջոցում ուղիղ k կանչեր տեղի ունենալու հավանականությունը արտահայտվում է (356) բանաձևով։ Այդ նույն բանաձևով է արտահայտվում նաև ժամանակի t տևողությամբ ժամանակամիջոցում ռադիոակտիվ էլեմենտի k ատոմների տրոհվելու հավանականությունը. մասնավորապես

$$P_0(t) = e^{-at}$$

t ժամանակամիջոցում ոչ մի ատոմ չքայքայվելու հավանականությունն է։ Ֆիզիկայում ռադիոակտիվ էլեմենտի կիսաքայքայման T պարբերություն անվանում են այն ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում ատոմի չքայքայվելու հավանականությունը հավասար է կեսի, հետևաբար այն որոշվում է

$$e^{-aT} = \frac{1}{2}$$

պայմանից. հավասարումը լուծելով, կստանանք

$$T = \frac{\ln 2}{a}.$$

Եթե X-ով նշանակենք այն ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում պատահարը հանդես չի գալիս, ապա

$$P(X > t) = e^{-at}$$

և

$$P(X < t) = 1 - e^{-at}.$$

որոշելով այն հավանականությունը, որ A պատահարի հաջորդաբար հանդես գալու երկու պահերի միջև ընկած ժամանակամիջոցը փոքր է t-ից։ Ստացանք հավանականությունների ցուցչային բաշխում։

3. Բրոունյան պատահական պրոցես։ Դիտարկենք մի ֆիզիկական խնդիր։ Դիցուք մասնիկը X առանցքի ուղղությամբ ժամանակի ընթացքում շարժվում է X = 0 կետից t = 0 պահին։ Պատահականորեն ամեն մի պահին նա ընդունում է որևէ դիրք՝ այդ X առանցքի վրա։ Նշանակենք մասնիկի աբսցիսը t պահին՝ X = X(t)։ Ամեն մի t-ի (t > 0) արժեքի համար X(t)-ն մի պատահական մեծություն է։ Ենթադրենք, թե բավարարված են հետևյալ պայմանները։

1) Ցանկացած (t_1, t_2) և (t_3, t_4) չհատվող ժամանակամիջոցներում մասնիկի X աբսցիսի համապատասխան ΔX_1 և ΔX_2 պատահական աճերը միմյանցից անկախ պատահական մեծություններ են։

2) Ցանկացած (t_1, t_2) ժամանակամիջոցում մասնիկի պատահա-

կան X արացիսի պատահական ΔX աճի հավանականությունների բաշխումը կախված է միայն այդ ժամանակամիջոցի երկարությունից և կախում չունի այդ ժամանակամիջոցի սկզբից։

3) Մաոնիկի $X(t)$ պատահական արացիսը t պահին անընդհատ պատահական մեծություն է, այսինքն՝ $X(t)$-ի

$$F(x, t) = P(X(t) < x)$$

բաշխման ֆունկցիան ունի ածանցյալ՝

$$f(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x},$$

ամեն մի $t > 0$ արժեքի համար։ Բացի դրանից, ենթադրենք, որ գոյություն ունեն $f(x, t)$ ֆունկցիայի մինչև երրորդ կարգի ածանցյալները, որոնք սահմանափակ են ամեն մի $t > 0$ արժեքի համար՝

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant M(t), \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| \leqslant M(t), \quad \left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right| \leqslant M(t):$$

4) Փոքր՝ Δt ժամանակամիջոցում X պատահական մեծության ΔX պատահական աճի մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան նույն կարգի անվերջ փոքր մեծություններ են, ինչ որ Δt-ն, երբ $\Delta t \to 0$, այսինքն՝

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, \Delta t)\, dx = A,$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, \Delta t)\, dx = B > 0. \tag{364}$$

վերջապես ենթադրենք, որ

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 f(x, \Delta t)\, dx = 0։ \tag{365}$$

Այս պայմաններից ելնելով, պահանջվում է որոշել $X(t)$ պատահական մեծության $f(x, t)$ խտությունը յուրաքանչյուր $t > 0$ պահի համար։

Դրա համար դիտարկենք $(0, t)$ և $(t, t+\Delta t)$ հարևան միջակայքերը և նրանց միացումից ստացված $(0, t+\Delta t)$ միջակայքը։ t պահին մաոնիկի արացիսը $X(t)$ է, $t+\Delta t$ պահին՝ $X(t+\Delta t)=X(t)+X(\Delta t)$։

$X(t)$-ի խտությունը $f(x, t)$ ֆունկցիան է, $X(\Delta t)$-ի խտությունը՝ $f(x, \Delta t)$ ֆունկցիան (երկրորդ պայմանի համաձայն կախում չունի t-ից), իսկ $X(t+\Delta t)$-ի խտության $f(x, t+\Delta t)$ ֆունկցիան կստացվի

$$f(x, t+\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, \Delta t) f(x-s, t)\, ds \tag{366}$$

բանաձևից՝ որպես անկախ պատահական մեծությունների գումարի խտություն (146) բանաձևի համաձայն: Այս հավասարումից $f(x, t)$-ն ստանալու համար $f(x-s, t)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառենք Թեյլորի բանաձևը, օգտագործելով նրա մինչև երրորդ կարգի ածանցյալները. ունենք

$$f(x-s, t) = f(x, t) - \frac{s}{1!}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{s^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{s^3}{3!}\frac{\partial^3 f(\sigma, t)}{\partial x^3},$$

որտեղ σ-ն գտնվում է $(x-s)$-ի և x-ի միջև: Տեղադրենք այս արտահայտությունը (366) բանաձևի մեջ. կստանանք

$$f(x, t+\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) f(s, \Delta t)\, ds - \int_{-\infty}^{\infty} s \frac{\partial f}{\partial x} f(s, \Delta t)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(s, \Delta t)\, ds - \frac{1}{3!}\int_{-\infty}^{\infty} s^3 \frac{\partial^3 f(\sigma, t)}{\partial x^3} f(s, \Delta t)\, ds$$

կամ

$$f(x, t+\Delta t) = f(x, t) - \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} s f(s, \Delta t)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}\int_{\infty}^{\infty} s^2 f(s, \Delta t)\, ds - \frac{1}{6}\int_{\infty}^{\infty} s^3 \frac{\partial^3 f(\sigma, t)}{\partial x^3} f(s, \Delta t)\, ds$$

և վերջապես՝

$$\frac{f(x, t+\Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} = -\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\cdot\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} s\cdot f(s, \Delta t)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}\cdot\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} s^2 f(s, \Delta t)\, ds - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} s^3 \frac{\partial^3 f(\sigma, t)}{\partial x^3} f(s, \Delta t)\, ds: \tag{367}$$

Այժմ գնահատենք վերջին՝

$$J = -\frac{1}{6}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} s^3 \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} f(s, \Delta t)\, ds$$

մեծությունը, երբ $\Delta t \to 0$. Երրորդ պայմանից օգտվելով, կունենանք

$$|J| \leqslant \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{|\Delta t|}\int_{-\infty}^{\infty} |s|^3 \left|\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3}\right| f(s, \Delta t)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{6|\Delta t|}\int_{-\infty}^{\infty} |s|^3 M(t)\, f(s, \Delta t)\, ds = \frac{M(t)}{6}\cdot\frac{1}{|\Delta t|}\int_{-\infty}^{\infty} |s|^3 f(s, \Delta t)\, ds,$$

որտեղից (365) պայմանի համաձայն

$$\lim_{\Delta t \to 0} J = 0:$$

Ուստի (367) հավասարության մեջ, սահմանին անցնելով, երբ $\Delta t \to 0$, կստանանք

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x, t+\Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} = -\frac{\partial f}{\partial x}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} s\, f(s, \Delta t)\, ds +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} s^2 f(s, \Delta t)\, ds$$

կամ (364) պայմանների համաձայն՝

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -A\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}B\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{368}$$

Հեշտ է ստուգել, որ այս հավասարմանը բավարարում է

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Bt}}\, e^{-\frac{(x-At)^2}{2Bt}} \tag{369}$$

ֆունկցիան. հայտնի է, որ այդ ֆունկցիան (368) հավասարման միակ լուծումն է, որը բավարարում է

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)\, dx = 1 \tag{370}$$

պայմանին՝ յուրաքանչյուր $t > 0$ արժեքի համար:

Այսպիսով, եկանք այն եզրակացության, որ մասնիկի պատահական $X(t)$ աբսցիսը արված ենթադրությունների դեպքում ենթարկվում է նորմալ բաշխման, որի մաթեմատիկական սպասումն է

$$E[X(t)] = At, \tag{371}$$

իսկ դիսպերսիան՝

$$D[X(t)] = Bt: \tag{372}$$

Ուրեմն (369)-ի համաձայն $X(t)$ պատահական պրոցեսի մեկչափանի խտությունն է

$$f_1(x_1, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B t_1}} e^{-\frac{(x_1 - A t_1)^2}{2 B t_1}} = f(x_1, t_1): \tag{373}$$

Եթե մասնիկը t_0 պահին ուներ սկզբնական x_0 աբսցիսը, ապա տրանելի խտությունը կլինի՝

$$f_{x_0}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B(t - t_0)}} e^{-\frac{(x - x_0 - A(t - t_0))^2}{2B(t - t_0)}} = f(x - x_0, t - t_0): \tag{374}$$

Երկչափ $[X(t_1), X(t_2)]$ $(t_1 < t_2)$ պատահական մեծության խտությունը (114)-ի և (374)-ի համաձայն կստացվի որպես $X(t_1)$ պատահական մեծության $f_1(x_1, t_1)$ խտության և $X(t_2)$ պատահական մեծության պայմանական ($X(t_1) = x_1$ պայմանում) $f(x_2 - x_1, t_2 - t_1)$ խտության արտադրյալ. այսինքն՝

$$f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = f(x_1, t_1) \cdot f(x_2 - x_1, t_2 - t_1): \tag{375}$$

Այս դատողությունները կիրառելով, հնարավոր է ստանալ այդ պրոցեսի հավանականությունների երկչափանի խտությունը և հավանականությունների ցանկացած n-չափանի խտությունը.

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, t_2, \ldots t_n) = f(x_1, t_1) \cdot f(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \ldots \tag{376}$$
$$\ldots f(x_n - x_{n-1}, t_n - t_{n-1})$$

կամ

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, \ldots t_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi B)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})}} e^{-\frac{1}{2B} \sum_{k=1}^{n} \frac{[(x_k - x_{k-1}) - A(t_k - t_{k-1})]^2}{t_k - t_{k-1}}} \tag{377}$$

$$(t_0 = 0, \quad x_0 = 0)\text{։}$$

Քննարկված պատահական պրոցեսը ներկայացնում է անընդհատ ժամանակով անընդհատ պատահական պրոցես, որը կանվանենք բրոունյան պատահական պրոցես: *Հեշտ է տեսնել, որ բրոունյան պրոցեսը նորմալ պատահական պրոցես է։*

Որոշենք բրոունյան պատահական պրոցեսի բնութագրիչները. (373) բանաձևից ստանում ենք այդ պրոցեսի մաթեմատիկական սպասումը՝

$$m_x(t) = At \tag{378}$$

և դիսպերսիան՝

$$b_x(t) = Bt\text{։} \tag{379}$$

Այդ պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիան ստանալու համար հաշվենք սկզբում $E[X(s)\cdot(X(t) - X(s))]$ *մեծությունը, ենթադրելով, որ* $s < t$։ *Քանի որ* $X(s)$ *և* $X(t) - X(s)$ *մեծությունները յուրաքանչյուր* s*-ի և* t*-ի արժեքների համար անկախ պատահական մեծություններ են, կունենանք*

$$E[X(s)(X(t) - X(s))] = E[X(s)]\cdot E[X(t) - X(s)] = A^2 s(t-s),$$

մյուս կողմից՝

$$E[X(s)(X(t) - X(s))] = E[X(s)\cdot X(t)] - E[X(s)]^2 =$$
$$= E[X(s)X(t)] - D[X(s)] - [E(X(s))]^2 = E[X(s)X(t)] -$$
$$- Bs - A^2s^2\text{։}$$

Բաղդատելով այդ երկու հավասարությունները, կստանանք

$$E[X(s)X(t)] - Bs - A^2s^2 = A^2s(t-s)$$

և

$$E[X(s)X(t)] = Bs + A^2st\text{։}$$

Ստացված արժեքը (339) բանաձևի մեջ տեղադրելով, կստանանք

$$K_x(s, t) = Bs, \quad s < t$$

կամ

$$K_x(s, t) = B \cdot \min(s, t)\text{։} \tag{380}$$

4. *Օրինակ*. Այժմ քննարկենք մի պատահական պրոցես, որը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$X(t) = \xi \cos \lambda t + \eta \sin \lambda t, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{381}$$

որտեղ ξ-ն և η-ն պատահական մեծություններ են, λ-ն հաստատուն է, իսկ t-ն պարամետր է։ Ամեն մի $t = t_0$ ֆիքսված արժեքի համար այդ պատահական պրոցեսը դառնում է պատահական մեծություն՝

$$X(t_0) = \xi \cos \lambda t_0 + \eta \sin \lambda t_0\text{։}$$

Եթե որևէ փորձում ξ-ն և η-ն համապատասխանաբար ստանում են ξ_0 և η_0 արժեքները, ապա պատահական պրոցեսը դառնում է որոշակի ֆունկցիա՝

$$x_0(t) = \xi_0 \cos \lambda t + \eta_0 \sin \lambda t,$$

որը ներկայացնում է տված պատահական պրոցեսի իրագործումներից մեկը։ Տվյալ պատահական պրոցեսի բոլոր իրագործումների բազմությունը համընկնում է

$$x(t) = \xi \cos \lambda t + \eta \sin \lambda t$$

ֆունկցիաների բազմության հետ, եթե ξ և η պատահական մեծությունները ընդունում են իրենց բոլոր հնարավոր արժեքները։ Ներկայացնելով $X(t)$ պատահական պրոցեսի բանաձևը հետևյալ տեսքով՝

$$X(t) = \zeta \cdot \sin(\lambda t + \varphi),$$

որտեղ

$$\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \qquad \sin \varphi = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \qquad \cos \varphi = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

նկատում ենք, որ տվյալ պատահական պրոցեսի իրագործումները ներկայացնում են պատահական ζ ամպլիտուդով և պատահական φ սկզբնական փազով սինուսոիդներ։ Տվյալ պատահական պրոցեսը ներկայացնում է անընդհատ ժամանակով պատահական պրոցես։ Ենթադրենք, թե ζ և φ պատահական մեծությունները անկախ են և $\zeta > 0$ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների խտությունը՝

$$p(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x > 0,$$

իսկ φ *պատահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված* $[0,2\pi]$ *միջակայքում։ Այդ պայմաններում հնարավոր է որոշել* t-*ի բոլոր հնարավոր արժեքների համար* $X(t) < h$ *անհավասարության տեղի ունենալու հավանականությունը։ Իրոք՝*

$$P = P(X(t) < h) = P(\zeta < h) = \int_0^h xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - e^{-\frac{h^2}{2}},$$

61. Ստացիոնար պատահական պրոցես։ *Պատահական* $X = X(t)$, $t \in T$ *պրոցեսը* կոչվում է ստացիոնար պատահական պրոցես, *եթե* t *պարամետրի ցանկացած տեղաշարժի դեպքում այդ պատահական պրոցեսի վերջավորչափանի հավանականությունների բաշխման ֆունկցիաները չեն փոխվում, այսինքն՝*

$$F_n(x_1, x_2, \ldots x_n, t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots t_n + \tau) =$$
$$= F_n(x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, t_2, \ldots t_n), \tag{382}$$

որտեղ

$$n = 1, 2, 3, \ldots, \quad t_1, t_2, \ldots t_n \in T, \quad t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots t_n + \tau \in T.$$

Մասնավորապես՝

$$F_1(x_1, t_1) = F_1(x_1, t_1 + \tau) \tag{383}$$

$$F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = F_2(x_1, x_2, t_1 + \tau, t_2 + \tau) \tag{384}$$

կամ եթե $\tau = -t_1$, *կստանանք*

$$F_1(x_1, t_1) = F_1(x_1, 0) \tag{385}$$

$$F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = F_2(x_1, x_2, 0, t_2 - t_1); \tag{386}$$

այսինքն՝ ստացիոնար պատահական պրոցեսի համար միաչափանի հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան կախում չունի t_1 *պարամետրից, իսկ* երկչափանի հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան կախված չէ առանձին-առանձին t_1 և t_2 պարամետրի արժեքներից, այլ կախված է նրանց $t_2 - t_1$ տարբերությունից։ *Ընդհանուր դեպքում կունենանք*

$$F_n(x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, t_2, \ldots t_n) = F_n(x_1, x_2, \ldots x_n, 0, t_2 - t_1,$$
$$t_3 - t_1, \ldots t_n - t_1), \tag{387}$$

այսինքն՝ ստացիոնար պատահական պրոցեսի վերջավորչափանի հավանականությունների բաշխման ֆունկցիաները *կախում չունեն ժամանակի հաշվառման սկզբնակետից, և պրոցեսի ընթացքը ցանկացած ժամանակամիջոցում, անկախ ժամանակի սկզբից, ենթարկվում է նույն հավանականությունների բաշխմանը։ Եթե պատահական* $X=X(t)$ *պրոցեսը անընդհատ ստացիոնար պատահական պրոցես է այն իմաստով, որ գոյություն ունեն այդ ստացիոնար պատահական պրոցեսի վերջավորչափանի հավանականությունների խտություններ, ապա այդ խտությունները կբավարարեն նույն պայմանին, այսինքն՝*

$$f_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n) = \\ = f(x_1, x_2, \dots x_n, t_1+\tau, t_2+\tau, \dots t_n+\tau). \qquad (388)$$

Վերցնելով $\tau=-t$, *մասնավորապես կստանանք*

$$f_1(x_1, t_1) = f_1(x_1, 0) \qquad (389)$$

$$f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2, 0, t_2-t_1) \qquad (390)$$

իսկ ընդհանրապես՝

$$f_n(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n) = \\ = f_n(x_1, x_2, \dots x_n, 0, t_2-t_1, t_3-t_1, \dots t_n-t_1), \qquad (391)$$

այսինքն՝ միաչափանի հավանականությունների խտությունը կախված չէ t_1 պարամետրից, իսկ n-չափանի հավանականությունների խտությունը՝ t *ժամանակի հաշվառման սկզբից։*

Ստացիոնար պատահական պրոցեսները այնպիսի ֆիզիկական պրոցեսների բնութագրերն են, որոնց համար փորձի հայտնի պայմանները չեն փոխվում ժամանակի ընթացքում։ Օրինակ՝ էլեկտրական հոսանքի ուժը կամ լարվածությունը էլեկտրական շղթայում ստացիոնար պրոցեսներ են, եթե այդ էլեկտրական շղթան գտնվում է ստացիոնար ռեժիմում։ Ընդհանրապես, կիրառությունների մեջ հանդիպող պատահական պրոցեսները մեծ մասամբ լինում են ստացիոնար պրոցեսներ կամ նրանց կարելի է բավական մեծ ճշտությամբ համարել մոտավորապես ստացիոնար պատահական պրոցեսներ։

Դիտարկենք $X=X(t)$, $t \in T$ *ստացիոնար պատահական պրոցեսը, որն ունի*

$$m(t) = E[X(t)], \quad b(t) = D[X(t)]$$

մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան, և

$$K(s, t) = E[X(s) - m(s)][X(t) - m(t)]$$

կոռելյացիոն ֆունկցիան։

Թ ե ո ր ե մ. Ստացիոնար պատահական պրոցեսի մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան կախում չունեն ժամանակից՝

$$m(t) = m, \qquad b(t) = b, \tag{392}$$

իսկ կոռելյացիոն ֆունկցիան կախված է միայն ժամանակի մոմենտների տարբերությունից՝

$$K(s, t) = K(0, t-s)。 \tag{393}$$

Իսկապես, քանի որ ստացիոնար պատահական պրոցեսի համար $X(t)$ *և* $X(t+\tau)$ *պատահական մեծությունները ցանկացած* t*-ի և* τ*-ի համար ունեն նույն համանականության բաշխման ֆունկցիաները, ուրեմն*

$$E[X(t)] = E[X(t+\tau)]$$

և, վերցնելով $\tau = -t$, *կստանանք*

$$m(t) = E[X(t)] = E[X(0)] = m。$$

Այնուհետև, քանի որ ստացիոնար պատահական պրոցեսի համար

$$[X(s) - m(s)][X(t) - m(t)],$$

$$[X(s+\tau) - m(s+\tau)][X(t+\tau) - m(t+\tau)]$$

պատահական մեծությունները ցանկացած s, t*-ի և* τ*-ի համար ունեն նույն հավանականությունների բաշխման ֆունկցիաները, ուրեմն*

$$K(s, t) = E[X(s) - m(s)][X(t) - m(t)] =$$
$$= E[X(s+\tau) - m(s+\tau)][X(t+\tau) - m(t+\tau)] = K(s+\tau, t+\tau).$$

վերցնելով $\tau = -s$, *կստանանք*

$$K(s, t) = K(0, t-s)。$$

Այսպիսով, եթե տված պատահական պրոցեսը ստացիոնար է, նրա մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան հաստատուն մեծություններ են, *իսկ* կոռելյացիոն ֆունկցիան կախված է միայն մոմենտների տարբերությունից: *Սակայն հակադարձը, ընդհանրապես,* *ճիշտ չէ. եթե պատահական պրոցեսի միջին արժեքը և դիսպերսիան կախված չեն ժամանակից, իսկ կոռելյացիոն ֆունկցիան կախված է միայն մոմենտների տարբերությունից, ապա դրանից չի հետևում, որ պատահական պրոցեսը ստացիոնար է։*

Պատահական $X = X(t)$, $t \in T$ *պրոցեսը կոչվում է* ստացիոնար պատահական պրոցես լայն իմաստով, *եթե նրա միջին արժեքը և դիսպերսիան կախված չեն ժամանակից՝*

$$m(t) = m, \qquad b(t) = b,$$

իսկ կոռելյացիոն ֆունկցիան կախված է մեկ փոփոխականից

$$K(s,\ t) = K_1(t - s) = K_1\ (\tau)։$$

Ակներև է, որ յուրաքանչյուր ստացիոնար պրոցես ստացիոնար պրոցես է լայն իմաստով, բայց յուրաքանչյուր ստացիոնար պրոցես լայն իմաստով կարող է չներկայացնել ստացիոնար պրոցես սովորական իմաստով։ Նորմալ պատահական պրոցեսների համար ստացիոնարությունը սովորական իմաստով և լայն իմաստով համընկնում են։ Իսկապես, եթե նորմալ պատահական պրոցեսը ստացիոնար պրոցես է լայն իմաստով, նշանակում է նրա մաթեմատիկական սպասումը կախում չունի t *ժամանակից, իսկ կոռելյացիոն ֆունկցիան կախված է միայն* $t - s = \tau$ *մոմենտների տարբերությունից։ Բայց քանի որ նորմալ պատահական պրոցեսը լրիվ որոշվում է այդ երկու ֆունկցիաների միջոցով, այսինքն՝ որոշվում են նորմալ պրոցեսի բոլոր վերջավոր չափանի հավանականությունների խտությունները, ապա այդ վերջավոր չափանի հավանականությունների խտությունները կլինեն ֆունկցիաներ՝ ժամանակի մոմենտների տարբերություններից, և կմնան անփոփոխ ժամանակի ցանկացած տեղաշարժի դեպքում. որեմն պատահական պրոցեսը կլինի ստացիոնար պատահական պրոցես նաև սովորական իմաստով։ Սրանից հետո ստացիոնար պատահական պրոցեսի մասին խոսելիս նկատի կունենանք ստացիոնար պատահական պրոցեսը լայն իմաստով։*

Ենթադրենք $X = X(t)$, $t \in T$ *պատահական պրոցեսը ստացիոնար է և*

$$m(t) = E[X(t)] = m,$$

$$b(t) = D[X(t)] = b,$$

$$K(\tau) = E[X(s) - m][X(s + \tau) - m]։$$

Ստացիոնար պատահական պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիայի հատկությունները ստացվում են կոռելյացիոն ֆունկցիայի ընդհանուր հատկություններից։ (341), (342), (343), (344) բանաձևերից հետևում է, որ

$$1.\ K(0) = b = D[X(t)] \geqslant 0, \tag{394}$$

$$2.\ K(-\tau) = K(\tau), \tag{395}$$

$$3.\ |K(\tau)| \leqslant K(0) = b\text{։} \tag{396}$$

4. Ցանկացած բնական՝ $n, t_1, t_2, \ldots t_n \in T$, և կոմպլեքս՝ $z_1, z_2, \ldots z_n$, թվերի համար

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K(t_i - t_j)\, z_i \overline{z}_j \geqslant 0\text{։} \tag{397}$$

Տրիվիալ դեպքը արտաքսելու համար միշտ կհամարենք, որ $K(0) = b > 0$. երբեմն առանց ընդհանրությունը խախտելու կենթադրենք, որ $K(0) = 1$, որը նշանակում է $X(t)$ պրոցեսի փոխարեն կդիտարկենք այդ պրոցեսը՝ բազմապատկած համապատասխան հաստատունով։

Կիրառությունների մեջ մեծ նշանակություն ունեն կոմպլեքս ստացիոնար պատահական պրոցեսները։ Դիցուք $Z(t) = [X(t), Y(t)]$-ն երկչափ պատահական պրոցես է, այսինքն՝ մեկ պարամետրից կախված երկչափ պատահական մեծությունների ընտանիք է։ Այդ երկչափանի՝ $Z(t) = [X(t), Y(t)]$ պատահական պրոցեսի փոխարեն բնական է ուսումնասիրել մեկ կոմպլեքս պրոցես՝ $Z(t) = X(t) + iY(t)$, որի մաթեմատիկական սպասում կամ միջին արժեք է կոչվում

$$m_z(t) = E[Z(t)] = E[X(t)] + i\,E[Y(t)],\ t \in T \tag{398}$$

իրական t փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիան, դիսպերսիա է կոչվում իրական t փոփոխականի հետևյալ ոչ բացասական ֆունկցիան՝

$$D[Z(t)] = E\,|Z(t) - m_z(t)|^2, \qquad t \in T \tag{399}$$

կամ

$$D[Z(t)] = D[X(t)] + D[Y(t)],$$

և կոռելյացիոն ֆունկցիա է s և t իրական փոփոխականների հետևյալ կոմպլեքս ֆունկցիան՝

$$K_z(s, t) = E\,[Z(t) - m_z(t)]\overline{[Z(s) - m_z(s)]}, \qquad s, t \in T\text{։} \tag{400}$$

կոռելյացիոն ֆունկցիայի պարզագույն հատկություններն են.

$$1.\ K_z(t,\ t) = D[Z(t)] \geqslant 0 \tag{401}$$

$$2.\ K_z(s,\ t) = \overline{K_z(t,\ s)}, \tag{402}$$

$$3.\ |K_z(s,\ t)| \leqslant \sqrt{b_z(s) \cdot b_z(t)}, \tag{403}$$

4. Ցանկացած բնական՝ n, իրական՝ $t_1, t_2, \dots t_n \in T$ և կոմպլեքս՝ $z_1, z_2, \dots z_n$, թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K(t_i,\ t_j)\, z_i\, \bar{z_j} \geqslant 0, \tag{404}$$

Օրինակ 1. Որոշենք

$$Z(t) = \xi \cdot e^{i\lambda t}, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{405}$$

կոմպլեքս պատահական պրոցեսի միջին արժեքը և կոռելյացիոն ֆունկցիան, որտեղ λ-ն իրական հաստատուն է, իսկ ξ-ն՝ պատահական մեծություն, ընդ որում $E(\xi) = 0$, $D(\xi) = b$։

Կստանանք

$$m_Z(t) = E[\xi \cdot e^{i\lambda t}] = e^{i\lambda t} \cdot E(\xi) = 0$$

և

$$K(s,\ t) = E[\xi e^{i\lambda s}\ \overline{\xi e^{i\lambda t}}] = E[|\xi|^2\ e^{i\lambda(s-t)}] = be^{i\lambda(s-t)},$$

Մասնավորապես պատահական պրոցեսի դիսպերսիան կլինի

$$b(t) = K(t,\ t) = b.$$

(405) պրոցեսը ներկայացնում է պարզագույն կոմպլեքս պրոցես։

Կոմպլեքս՝ $Z(t) = X(t) + iY(t)$, պատահական պրոցեսը կոչվում է ստացիոնար, եթե $X(t)$ և $Y(t)$ պատահական պրոցեսները ստացիոնար են, այսինքն՝

$$m_Z = E[Z(t)] = E[X(t)] + i\,E[Y(t)] = m_X + im_Y \tag{406}$$

կախված չէ t-ից, իսկ կոռելյացիոն ֆունկցիան՝

$$K_Z(s,\ t) = K_Z(t-s), \tag{407}$$

ֆունկցիա է միայն մեկ փոփոխականից։ Կոմպլեքս ստացիոնար պատահական պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիան ունի հետևյալ հատկությունները.

$$1.\ K_Z(0) \geqslant 0, \tag{408}$$

$$2.\ K_Z(\tau) = \overline{K_Z(-\tau)}, \tag{409}$$

$$3.\ |K_Z(\tau)| \leqslant K(0)\text{։} \tag{410}$$

4. Ցանկացած բնական՝ n, իրական՝ $t_1, t_2, \dots t_n \in T$ և կոմպլեքս՝ $z_1, z_2, \dots z_n$, թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K(t_i - t_j)\, z_i\, \overline{z_j} \geqslant 0 \tag{411}$$

Օրինակ 2. Դիտարկենք մի պատահական պրոցես, որը տրված է հետևյալ բանաձևով՝

$$X(t) = \xi_1 e^{i\lambda_1 t} + \xi_2 e^{i\lambda_2 t}, \qquad -\infty < t < +\infty, \tag{412}$$

որտեղ λ_1-ը և λ_2-ը իրական հաստատուններ են, իսկ ξ_1-ը և ξ_2-ը՝ պատահական մեծություններ, ընդ որում

$$E(\xi_1) = E(\xi_2) = 0,$$

$$E|\xi_1|^2 = D(\xi_1) = b_1,$$

$$E|\xi_2|^2 = D(\xi_2) = b_2\text{։}$$

Այդ պատահական պրոցեսի միջին արժեքը՝

$$m(t) = E[X(t)] = 0,$$

իսկ կոռելյացիոն ֆունկցիան՝

$$K(s,t) = E[X(s)\cdot\overline{X(t)}] = E[(\xi_1 e^{i\lambda_1 s} + \xi_2 e^{i\lambda_2 s})\overline{(\xi_1 e^{i\lambda_1 t} + \xi_2 e^{i\lambda_2 t})}] =$$

$$= E[(\xi_1 e^{i\lambda_1 s} + \xi_2 e^{i\lambda_2 s})(\overline{\xi}_1 e^{-i\lambda_1 t} + \overline{\xi}_2 e^{-i\lambda_2 t})] =$$

$$= e^{i\lambda_1(s-t)} E(\xi_1 \overline{\xi}_1) + e^{i\lambda_1 s - i\lambda_2 t} E(\xi_1 \overline{\xi}_2) + e^{i\lambda_2 s - i\lambda_1 t} E(\xi_2 \overline{\xi}_1) +$$

$$+ e^{i\lambda_2(s-t)} E(\xi_2 \overline{\xi}_2)\text{։}$$

Այստեղից նկատում ենք, որ $X(t)$ պատահական պրոցեսի ստացիոնար լինելու համար ξ_1 և ξ_2 պատահական մեծությունները պետք է լինեն չկոռելացված, այսինքն՝

$$E(\xi_1 \bar{\xi}_2) = E(\bar{\xi}_1 \xi_2) = 0: \tag{413}$$

Իրոք, պրոցեսի միջին արժեքը հավասար է զրոյի, կախված չէ t-ից, իսկ կոռելյացիոն ֆունկցիան՝

$$K(s, t) = b_1 e^{i\lambda_1(s-t)} + b_2 e^{i\lambda_2(s-t)} \tag{414}$$

կամ

$$K(\tau) = b_1 e^{i\lambda_1\tau} + b_2 e^{i\lambda_2\tau} \tag{415}$$

և ֆունկցիա է միայն $\tau = s - t$ տարբերությունից: Պատահական պրոցեսի դիսպերսիան՝

$$b = K(0) = b_1 + b_2:$$

Այժմ (412) պատահական պրոցեսի իրական համանմանը ստանալու համար տեղադրենք

$$\lambda_1 = -\lambda, \ \lambda_2 = \lambda > 0, \ \xi_1 = \frac{\eta}{2} + i\frac{\xi}{2}, \quad \xi_2 = \frac{\eta}{2} - i\frac{\xi}{2}.$$

կստանանք՝

$$X(t) = \left(\frac{\eta}{2} + i\frac{\xi}{2}\right)e^{-i\lambda t} + \left(\frac{\eta}{2} - i\frac{\xi}{2}\right)e^{i\lambda t}$$

կամ

$$X(t) = \eta\cos\lambda t + \xi\sin\lambda t: \tag{416}$$

Այդ պատահական պրոցեսի միջին արժեքը և կոռելյացիոն ֆունկցիան ստանալու համար նկատենք, որ

$$E(\eta) = E(\xi) = 0, \quad b_1 = E|\xi_1|^2 = \frac{1}{4}E(\eta^2) + \frac{1}{4}E(\xi^2) =$$

$$= E|\xi_2|^2 = b_2 = b,$$

$$E(\xi_1\bar{\xi}_2) = E(\bar{\xi}_1\xi_2) = \frac{1}{4}E(\eta^2) - \frac{1}{4}E(\xi^2) + \frac{1}{2}E(\xi\eta) = 0,$$

որտեղից

$$E(\eta^2) = E(\xi^2) = 2b, \quad E(\xi\eta) = 0:$$

Հետևաբար՝

$$m(t) = E[X(t)] = 0$$

և

$$K(s,\ t) = E\left[(\eta \cos \lambda t + \xi \sin \lambda t)(\eta \cos \lambda s + \xi \sin \lambda s)\right] =$$
$$= \cos \lambda t \cdot \cos \lambda s \cdot E(\eta^2) + \cos \lambda t \cdot \sin \lambda s \cdot E(\eta \xi) + \sin \lambda t \cdot \cos \lambda s\ E(\xi \cdot \eta) +$$
$$+ \sin \lambda t \cdot \sin \lambda s \cdot E(\xi^2) = 2b \cos \lambda t \cdot \cos \lambda s + 2b \sin \lambda t \cdot \sin \lambda s$$

կամ

$$K(\tau) = 2b \cos \lambda \tau.$$

այս արդյունքը կարելի էր ստանալ նաև անմիջապես (415) բանաձևից: Մասնավորապես պատահական պրոցեսի դիսպերսիան կլինի

$$D[X(t)] = 2b.$$

62. Խինչինի թեորեմը: Սպեկտրալ խտություն և սպեկտրալ ֆունկցիա: *Այստեղ կապացուցենք մի շատ կարևոր արդյունք, որը վերաբերում է ստացիոնար պատահական պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիայի ընդհանուր տեսքին:*

Թեորեմ. Որպեսզի անընդհատ $K(\tau)$ $(-\infty < \tau < +\infty,\ K(0) = 1)$ ֆունկցիան, որի համար

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(\tau)|\, d\tau < +\infty \qquad (417)$$

լինի ստացիոնար պատահական պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն հնարավոր լինի ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} f(\lambda)\, d\lambda \qquad (418)$$

որտեղ $f(\lambda)$-ն հավանականությունների բաշխման խտությունն է: *Ապացուցենք սկզբում այդ պայմանի բավարարությունը, այսինքն՝ այդպիսի $K(\tau)$-ն որևէ ստացիոնար պատահական պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիան է: Դրա համար բավական է ապացուցել, որ $K(\tau)$ ֆունկցիան ունի (411) հատկությունը: Իրոք՝*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K(t_k - t_j)\, z_k \overline{z_j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} z_k \overline{z_j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t_k - t_j)} f(\lambda)\, d\lambda =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} z_k \overline{z_j}\, e^{i\lambda t_j}\cdot \overline{e^{i\lambda t_k}}\, f(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} z_k e^{i\lambda t_k}\cdot \overline{\sum_{j=1}^{n} z_j e^{i\lambda t_j}}\, f(\lambda)\, d\lambda =$$

$$=\int_{\infty}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{n} z_j e^{i\lambda t_j}\right|^2\cdot f(\lambda)\, d\lambda \geqslant 0։$$

Անհրաժեշտությունն ապացուցելու համար ենթադրենք, որ $X(t)$ *պատահական պրոցեսը ստացիոնար պատահական պրոցես է և* $K(\tau)$*-ն նրա անընդհատ կոռելյացիոն ֆունկցիան է։*

(*417*) *պայմանի համաձայն* $K(\tau)$ *ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել Ֆուրյեի ինտեգրալով՝*

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} f(\lambda)\, d\lambda, \tag{418}$$

որտեղ

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau}\, K(\tau)\, d\tau։ \tag{419}$$

Եթե ապացուցենք, որ $K(\tau)$ *ֆունկցիան բնութագրող ֆունկցիա է, ապա դրանից կհետևի, որ* $f(\lambda)$ *ֆունկցիան հավանականությունների խտությունն է։* $K(\tau)$*-ի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K(t_i - t_j)\, z_i \overline{z_j} \geqslant 0 \tag{420}$$

ցանկացած բնական՝ n, *իրական՝* $t_1, t_2, \ldots t_n \in T$ *և կոմպլեքս՝* $z_1, z_2, \ldots z_n$ *թվերի համար։ Դիտարկենք մի անընդհատ* $z = z(t)$ *իրական* t *փոփոխականի ֆունկցիա* $[a, b]$ *միջակայքում։ Քանի որ* $K(\tau)$ *ֆունկցիան անընդհատ է, ուրեմն գոյություն ունի*

$$\int_a^b\int_a^b K(t-s)\, z(s)\, \overline{z(t)}\, ds\, dt$$

ինտեգրալը, որը

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K(t_j - s_k)\, z(s_k)\, \overline{z(t_j)}\, \Delta s_k\, \Delta t_j$$

ինտեգրալային գումարի սահմանն է, երբ $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta s_k \to 0$,

$\mu = \max_{1 \le j \le n} \Delta t_j \to 0$։ *Կոռելյացիոն ֆունկցիայի (420) հատկությունից հե-տևում է, որ ինտեգրալային գումարը բացասական չէ. հետևաբար՝*

$$\int_a^b \int_a^b K(t-s) z(s) \overline{z(t)}\, ds\, dt \geq 0: \tag{421}$$

Մասնավորապես, ցանկացած $A > 0$ *և* λ *իրական թվերի համար կու-նենանք*

$$g(\lambda, A) = \frac{1}{2\pi A} \int_0^A \int_0^A K(t-s) e^{i\lambda s}\, e^{-i\lambda t}\, ds\, dt \geq 0:$$

Այս ինտեգրալի մեջ կատարենք փոփոխականների փոխարինում՝

$$u = t, \qquad v = t - s.$$

այդ դեպքում

$$0 \leq u \leq A, \quad u - A \leq v \leq u, \quad du dv = dt \cdot ds$$

և

$$g(\lambda, A) = \frac{1}{2\pi A} \int_0^A du \int_{u-A}^u K(v) e^{-\lambda v i} dv:$$

Փոփոխելով ինտեգրման կարգը, կստանանք

$$g(\lambda, A) = \frac{1}{2\pi A} \int_{-A}^0 K(v) e^{-\lambda v i} dv \int_0^{A+v} du + \frac{1}{2\pi A} \int_0^A K(v) e^{-\lambda v i} dv \int_v^A du =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^0 \left(1 + \frac{v}{A}\right) K(v) e^{-i\lambda v} dv + \frac{1}{2\pi} \int_0^A \left(1 - \frac{v}{A}\right) K(v) e^{-i\lambda v}\, dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^0 \left(1 - \frac{|v|}{A}\right) K(v) e^{-i\lambda v}\, dv + \frac{1}{2\pi} \int_0^A \left(1 - \frac{|v|}{A}\right) K(v) e^{-i\lambda v}\, dv$$

կամ

$$g(\lambda, A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \left(1 - \frac{|v|}{A}\right) K(v) e^{-i\lambda v}\, dv: \tag{422}$$

Մտցնելով հետևյալ նշանակումը՝

$$\mu(v) = \begin{cases} 1 - \frac{|v|}{A}, & |v| \leq A, \\ 0, & |v| > A, \end{cases} \tag{423}$$

կունենանք

$$g(\lambda, A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(v) K(v) e^{-i\lambda v} dv: \qquad (424)$$

Կարելի է ցույց տալ, որ $g(\lambda, A)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է ըստ λ-ի՝ ամբողջ իրական առանցքի վրա, այսինքն՝

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda, A) d\lambda < +\infty: \qquad (425)$$

Այսպիսով, ցանկացած $A > 0$ թվի համար $g(\lambda, A)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ինտեգրելի է և (424)-ի համաձայն ներկայացնում է $\mu(v) K(v)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի ձևափոխությունը: Ինչպես հայտնի է, այդ պայմաններում իրավացի է Ֆուրյեի ձևափոխության շրջումը և

$$\mu(\tau) \cdot K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda, A) e^{i\lambda\tau} d\lambda:$$

Մասնավորապես, $\tau = 0$ դեպքում կստանանք

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda, A) d\lambda = A(0) = 1: \qquad (426)$$

Այսպիսով, $g(\lambda, A)$ ֆունկցիան յուրաքանչյուր $A > 0$ թվի համար հավանականությունների խտություն է, իսկ $\mu(\tau) \cdot K(\tau)$ ֆունկցիան՝ նրա Ֆուրյեի ձևափոխությունը, այսինքն՝ նրան համապատասխանող բնութագրող ֆունկցիան: Բայց երբ $A \to +\infty$, ապա $\mu(\tau) \cdot K(\tau) \to K(\tau)$, որը, ըստ ենթադրության, անընդհատ ֆունկցիա է: Հետևաբար, բնութագրող ֆունկցիաների վերաբերյալ սահմանային թեորեմի համաձայն $K(\tau)$ ֆունկցիան նույնպես հավանականությունների որևէ բաշխման համապատասխանող բնութագրող ֆունկցիա է, այսինքն՝ (419)-ի մեջ $f(\lambda)$-ն հավանականությունների խտություն է, այն ինչ որ պետք էր ապացուցել:

$f(\lambda)$ ֆունկցիան կոչվում է տվյալ ստացիոնար պատահական պրոցեսի **սպեկտրալ խտություն**: Սպեկտրալ խտությունը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$f(\lambda) \geqslant 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda = 1: \qquad (427)$$

Այսպիսով, եթե (417) պայմանը բավարարված է, ստացիոնար պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիան կունենա

$$K(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} f(\lambda)\,d\lambda$$

տեսքը։ Սպեկտրալ $f(\lambda)$ *խտությունը արտահայտվում է հետևյալ կերպ՝*

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} K(\tau)\,d\tau\text{։}$$

Մասնավոր դեպքում, եթե ստացիոնար պրոցեսը իրական է, կոռելյացիոն ֆունկցիան կլինի

$$K(\tau)=2\int_{0}^{\infty} \cos\lambda\tau\, f(\lambda)\,d\lambda, \tag{428}$$

որտեղ

$$f(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos\lambda\tau\, K(\tau)\,d\tau \tag{429}$$

կամ

$$K(\tau)=\int_{0}^{\infty} \cos\lambda\tau\, g(\lambda)\,d\lambda, \tag{430}$$

որտեղ

$$g(\lambda)=2f(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos\lambda\tau\, K(\tau)\,d\tau \tag{431}$$

իրական ստացիոնար պրոցեսի սպեկտրալ խտությունն է։

Օրինակ 1. *Ստացիոնար պատահական պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիան արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$K(\tau)=a\,e^{-\alpha|\tau|},\qquad a>0,\qquad \alpha>0.$$

որոշել այդ պրոցեսի սպեկտրալ խտությունը։ Հեշտ է տեսնել, որ այդ սպեկտրալ խտությունը գոյություն ունի, քանի որ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(\tau)|\,d\tau = a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}\,d\tau = a\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau}\,d\tau+\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau}\,d\tau\right]=$$

$$=a\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\tau}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\tau}\Big|_{0}^{\infty}\right]=\frac{2a}{\alpha}<+\infty\text{։}$$

Հաշվելով սպեկտրալ խտությունը, կստանանք

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} a\, e^{-\alpha|\tau|-i\lambda\tau}\,d\tau=\frac{\alpha}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\lambda)\tau}\,d\tau+\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+i\lambda)\tau}\,d\tau\right]=$$

$$=\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha-i\lambda}+\frac{1}{\alpha+i\lambda}\right)=\frac{\alpha}{\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2},$$

Օրինակ 2. Տված է ստացիոնար պատահական պրոցեսի սպեկտրալ ֆունկցիան՝

$$f(\lambda)=\frac{C}{\lambda^2+p\lambda+q}, \qquad 4q-p^2>0։$$

Որոշել այդ պատահական պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիան։ (418) բանաձևի համաձայն կունենանք

$$K(\tau)=C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda\tau}\,d\lambda}{\lambda^2+p\lambda+q},$$

Այս ինտեգրալը ձևափոխելով, կստանանք

$$K(\tau)=C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda\tau}\,d\lambda}{\left(\lambda-\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}.$$

Նշանակելով

$$\frac{p}{2}=a, \qquad \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=b$$

և օգտագործելով մնացքների մասին թեորեմը, կստանանք

$$K(\tau)=C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda\tau}\,d\lambda}{(\lambda-a)^2+b^2}=C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau\lambda}\,d\lambda}{(\lambda-a-bi)(\lambda-a+bi)}=$$

$$=2\pi iC\operatorname*{Res}_{a+bi}\frac{e^{i\tau\lambda}}{(\lambda-a)^2+b^2}=2\pi Ci\left.\frac{e^{i\tau\lambda}}{2(\lambda-a)}\right|_{\lambda=a+bi}=C\pi i\,\frac{e^{i\tau(a+bi)}}{bi}$$

կամ

$$K(\tau)=\frac{\pi C}{b}\,e^{i\tau(a+bi)}=\frac{\pi C}{b}(\cos a\tau+i\sin a\tau)\,e^{-b\tau},$$

որտեղ

$$a=\frac{p}{2}, \qquad b=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},$$

Օրինակ 3. **Սպիտակ աղմուկ։** *Դիտարկենք ստացիոնար* $X(t)$ *պատահական պրոցեսը, որի կոռելյացիոն ֆունկցիան արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$K(\tau) = 2\pi c\,\delta(\tau), \tag{432}$$

որտեղ $c > 0$ *հաստատուն է, իսկ* $\delta(\tau)$*-ն դելտա ֆունկցիան է, այսինքն՝*

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \neq 0 \\ \infty & \tau = 0 \end{cases} \tag{433}$$

և

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\,d\tau = 1. \tag{434}$$

Քանի որ $K(\tau) = 0$, *երբ* $\tau \neq 0$, *ապա* $X(t)$*-ն չկոռելացված արժեքներով ստացիոնար պատահական պրոցես է, և քանի որ* $K(0) = \infty$, *ապա* $X(t)$ *պրոցեսի դիսպերսիան անսահման է։ Այդպիսի պատահական պրոցեսների հազիվ թե հանդիպենք կիրառությունների մեջ, քանի որ անընդհատ* t *պարամետրի դեպքում այդպիսի պրոցեսի իրագործումները ոչ ռեգուլյար ֆունկցիաներ են։ Սակայն կիրառությունների մեջ հանդիպում ենք պատահական պրոցեսի, որը* մոտավորապես *այդպիսին է և կոչվում է «սպիտակ աղմուկ»։ Սպիտակ աղմուկ է առաջին օրինակում դիտարկված պրոցեսը* α*-ի բավականաչափ մեծ արժեքի դեպքում։ Իրոք, այս դեպքում սպեկտրալ խտությունը՝*

$$f(\lambda) = \frac{a}{\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} = \frac{a}{\alpha\cdot\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha+\frac{\lambda^2}{\alpha}} \approx \frac{a}{\alpha\pi} = c, \tag{435}$$

կլինի համարյա հաստատուն։ Միաժամանակ

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\,d\tau = a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}d\tau = \frac{2a}{\alpha} \approx 2\pi c$$

և

$$\frac{1}{2\pi c}\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\,d\tau \approx 1. \tag{436}$$

Բայց երբ $\alpha \to \infty$, *ապա* $K(\tau) \to 0$ $(\tau \neq 0)$, *ուրեմն* α*-ի բավականաչափ մեծ արժեքի դեպքում*

$$K(\tau) \approx 0 \tag{437}$$

և (436)-ի համաձայն $K(0)$ պետք է լինի բավականաչափ մեծ։ Հետևաբար, $\frac{1}{2\pi c}K(\tau)$-ն ներկայացնում է մոտավորապես դելտա ֆունկցիա և

$$K(\tau)\approx 2\pi c\,\delta(\tau)։ \tag{438}$$

Եթե Խինչինի թեորեմից հանենք կոռելյացիոն ֆունկցիայի մասին (417) ենթադրությունը, ստացիոնար պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիան կլինի

$$K(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\,dF(\lambda), \tag{439}$$

որտեղ $F(\lambda)$-ն հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան է, և ինտեգրալը հասկացվում է Ստիլտյեսի իմաստով։ $F(\lambda)$ ֆունկցիան կոչվում է ստացիոնար պրոցեսի սպեկտրալ ֆունկցիա։

Քանի որ $F(\lambda)$ ֆունկցիան ներկայացնում է հավանականությունների բաշխման ֆունկցիա, ուրեմն ունի հետևյալ հատկությունները՝ $0\leqslant F(\lambda)\leqslant 1$, չնվազող է, անընդհատ է ձախից, $F(-\infty)=0$ և $F(+\infty)=1$։

Մասնավոր դեպքում, երբ $X(t)$ պատահական պրոցեսը իրական է, ապա նրա կոռելյացիոն ֆունկցիան (439)-ի համաձայն կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$K(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda\tau\,dF(\lambda), \tag{440}$$

ընդ որում

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\lambda\tau\,dF(\lambda)=0։ \tag{441}$$

(441) հավասարությունը ցույց է տալիս, որ այս դեպքում $F(\lambda)$ բաշխումը սիմետրիկ է $\lambda=0$ կետի նկատմամբ. այդ պատճառով կունենանք

$$F(\lambda)+F(-\lambda+0)=1, \qquad \lambda>0։$$

$F(\lambda)$-ի փոխարեն մտցնենք նոր $G(\lambda)$ ֆունկցիա հետևյալ բանաձևով՝

$$G(\lambda)=F(\lambda)-F(-\lambda+0)=2F(\lambda)-1, \qquad \lambda>0։ \tag{442}$$

$G(\lambda)$ ֆունկցիան ունի հետևյալ հատկությունները՝ $0\leqslant G(\lambda)\leqslant 1$, չնվազող է, անընդհատ է ձախից, $G(0)=0$, $G(+0)=F(+0)-F(0)$ և $G(+\infty)=1$. բացի դրանից, $G(\lambda)$-ն յուրաքանչյուր $\lambda>0$ կետում ունի երկու անգամ ավելի մեծ թռիչք, քան $F(\lambda)$ ֆունկցիան այդ նույն կետում։ (440) բանաձևի համաձայն կունենանք

$$K(\tau) = 2 \int_0^{\infty} \cos \lambda\tau \, dF(\lambda) \tag{443}$$

և

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} \cos \lambda\tau \, dG(\lambda)։ \tag{444}$$

$G(\lambda)$ ֆունկցիան ներկայացնում է իրական ստացիոնար պատահական պրոցեսի սպեկտրալ ֆունկցիա:

Այժմ քննարկենք

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e^{i\lambda_n t}, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{445}$$

պատահական պրոցեսը, որը $\xi_n e^{i\lambda_n t}$ էլեմենտար պրոցեսներից կազմված շարքի գումարն է, որտեղ λ_n-ը իրական թվերի, իսկ ξ_n-ը՝ պատահական մեծությունների հաջորդականություն է, ընդ որում՝

$$E(\xi_n) = 0, \quad D\xi_n = E(|\xi_n|^2) = b_n, \quad E(\xi_i \overline{\xi_j}) = 0, \quad i \neq j$$

և

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty։$$

Քանի որ

$$D(\xi_n e^{i\lambda_n t}) = E(|\xi_n|^2) = b_n$$

և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքը զուգամետ է, կարելի է ցույց տալ, որ (445)-ի աջ մասում գտնվող շարքը զուգամետ է որոշ իմաստով*։

---

* Տվյալ դեպքում շարքը զուգամետ է միջին քառակուսայինի իմաստով։ Ասում են, որ $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ շարքը զուգամետ է միջին քառակուսայինի իմաստով, եթե գոյություն ունի այնպիսի X պատահական մեծություն, որ

$$\lim_{n\to\infty} E \left| \sum_{k=1}^{n} X_k - X \right|^2 = 0։$$

Գործողությունները կատարելով, կստանանք

$$m_X(t) = E[X(t)] = 0,$$

իսկ կոռելյացիոն ֆունկցիան՝

$$K(s,\ t) = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e^{i\lambda_n s} \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e^{i\lambda_n t}}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E[\xi_n \bar{\xi}_k] e^{i\lambda_n s - i\lambda_k t} = \sum_{n=1}^{\infty} E[|\xi_n|^2] e^{i\lambda_n (s-t)},$$

կամ

$$K(s,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{i\lambda_n (s-t)}։$$

Եվ, վերջապես՝

$$K(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{i\lambda_n \tau}, \tag{446}$$

Եթե դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \leq \lambda_1 \\ b_1, & \lambda_1 < \lambda \leq \lambda_2 \\ b_1 + b_2, & \lambda_2 < \lambda \leq \lambda_3 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ b_1 + b_2 + \dots + b_n, & \lambda_n < \lambda \leq \lambda_{n+1} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots & \end{cases} \tag{447}$$

ապա (446) բանաձևը հնարավոր է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\, dF(\lambda)։ \tag{448}$$

Խինչինի թեորեմի համաձայն $F(\lambda)$ *ֆունկցիան ներկայացնում է (445) պատահական պրոցեսի սպեկտրալ ֆունկցիա։ Քանի որ (447) սպեկտրալ ֆունկցիան աստիճանաձև ֆունկցիա է, այսինքն՝* $F(\lambda)$

ֆունկցիան որևէ դիսկրետ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիա է, ապա (445) պատահական պրոցեսը կոչվում է դիսկրետ սպեկտրով ստացիոնար պատահական պրոցես: *Մենք քննարկեցինք (445) պատահական պրոցեսը և ստացանք նրա սպեկտրալ ֆունկցիան (447), որը աստիճանաձև ֆունկցիա է։ Կարելի է ապացուցել նաև հակադարձը. ամեն մի աստիճանաձև սպեկտրալ ֆունկցիայի համապատասխանում է (445) տեսքի ստացիոնար պատահական պրոցես:*

(445) պատահական կոմպլեքս պրոցեսի իրական համանմանը կլինի հետևյալ պատահական պրոցեսը՝

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \cos\lambda_n t + \xi_n \sin\lambda_n t, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{449}$$

որտեղ λ_n*-ը դրական թվերի, իսկ* η_n*-ը և* ξ_n*-ը՝ պատահական մեծությունների հաջորդականություններ են, ընդ որում*

$$E(\eta_n) = E(\xi_n) = 0, \; D(\eta_n) = E(\eta_n^2) = D(\xi_n) = E(\xi_n^2) = 2b_n,$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

$$E(\eta_i \cdot \eta_j) = E(\xi_i \cdot \xi_j) = 0, \quad i \neq j,$$

$$E(\eta_i\, \xi_j) = 0, \quad i,j = 1, 2, \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty.$$

Այդ դեպքում

$$m(t) = E\left[X(t)\right] = 0,$$

$$K(\tau) = 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\lambda_n\tau,$$

իսկ սպեկտրալ $G(\lambda)$ *ֆունկցիան կլինի*

$$G(\lambda) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1 \\ 2b_1, & \lambda_1 < \lambda \leqslant \lambda_2 \\ 2(b_1+b_2), & \lambda_2 < \lambda \leqslant \lambda_3 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ 2(b_1+b_2+\cdots+b_n), & \lambda_n < \lambda \leqslant \lambda_{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots & \end{cases} \tag{450}$$

Հետևաբար, $K(\tau)$ կոռելյացիոն ֆունկցիան հնարավոր է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$K(\tau)=\int_0^{\infty}\cos\lambda\tau\, dG(\lambda)\text{։} \qquad (451)$$

63. Մարկովյան շղթաներ։

Ենթադրենք

$$X=X(t),\quad t\in T$$

դիսկրետ պատահական պրոցես է, այսինքն՝ յուրաքանչյուր t-ի համար, որը պատկանում է T բազմությանը, X(t) պատահական մեծության հնարավոր արժեքներն են

$$x_1,\ x_2,\dots x_k\text{։}$$

T բազմությունը, որի վրա որոշված է տվյալ պատահական պրոցեսը, ենթադրենք մի հաջորդականություն է՝

$$t_1,\ t_2,\dots t_n,\dots$$

այսինքն՝ տվյալ պատահական պրոցեսը դիսկրետ պարամետրով պատահական պրոցես է, և ներկայացնում է մի հաջորդականություն՝

$$X^{(1)},\ X^{(2)},\dots X^{(n)},\dots\text{։}$$

$x_1,\ x_2,\dots x_k$ արժեքները կարելի է դիտել որպես մի ֆիզիկական սիստեմի վիճակներ. այդ դեպքում $X^{(n)}=x_i\ (i=1,2,\dots k)$ պատահարը այն է, որ սիստեմը t_n պահին գտնվում է i-րդ վիճակում։

Տվյալ $X=X^{(n)}$ դիսկրետ արժեքներով և դիսկրետ պարամետրով պատահական պրոցեսը կանվանենք մարկովյան պրոցես կամ մարկովյան շղթա, եթե պայմանական հավանականությունը, որ $X^{(n+1)}=x_{i_{n+1}}$ այն պայմանով, որ $X^{(1)}=x_{i_1}$, $X^{(2)}=x_{i_2},\dots X^{(n-1)}=x_{i_{n-1}}$, $X^{(n)}=x_{i_n}$ կախված է միայն նրանից, թե ինչ արժեք է ընդունել $X^{(n)}$-ը և բոլորովին կախում չունի նրանից, թե ինչ արժեքներ են ընդունել $X^{(1)},\ X^{(2)},\dots X^{(n-1)}$ մեծությունները, այսինքն՝

$$P\left(X^{(n+1)}=x_{i_{n+1}}/X^{(1)}=x_{i_1}\cap X^{(2)}=x_{i_2}\cap\dots\cap X^{(n)}=x_{i_n}\right)=$$
$$=P\left(X^{(n+1)}=x_{i_{n+1}}/X^{(n)}=x_{i_n}\right)\text{։}^{*} \qquad (452)$$

---

* P(A/B)-ն A պատահարի հավանականությունն է B պատահարի պայմանով։

Նշանակենք

$$P_{ij}(n) = P\,(X^{(n+1)} = x_j / X^{(n)} = x_i) \qquad i, j = 1, 2, \cdots k, \qquad (453)$$

որը կանվանենք i-րդ վիճակից՝ t_n պահին, j-րդ վիճակի՝ t_{n+1} պահին անցման հավանականություն: Այստեղ կքննարկենք մարկովյան պրոցեսի մասնավոր դեպքը, երբ այդ անցման հավանականությունը կախում չունի n-ից: Այդպիսի մարկովյան շղթան կանվանենք համասեռ մարկովյան շղթա կամ համասեռ մարկովյան պրոցես: Ուրեմն համասեռ մարկովյան պրոցեսի համար անցման

$$P_{ij} = P\,(X^{(n+1)} = x_j / X^{(n)} = x_i) \qquad i, j = 1, 2, \ldots k \qquad (454)$$

հավանականությունները կախում չունեն t_n ժամանակից, և P_{ij} հավանականությունը ներկայացնում է x_i վիճակից՝ t_n պահին, x_j վիճակի՝ t_{n+1} պահին անցման հավանականություն: Այդ անցման P_{ij} $(i, j=1, 2 \ldots k)$ հավանականությունները կազմում են հետևյալ մատրիցան՝

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1k} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{k1} & P_{k2} & \cdots & P_{kk} \end{pmatrix}, \qquad (455)$$

որը կոչվում է անցման հավանականությունների մատրիցա: Այդ մատրիցայի էլեմենտներն ունեն հետևյալ հատկությունները՝

$$0 \leqslant P_{ij} \leqslant 1, \quad i, \; j = 1, \; 2, \ldots k \qquad (456)$$

և

$$\sum_{j=1}^{k} P_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots k, \qquad (457)$$

քանի որ յուրաքանչյուր տողի էլեմենտների գումարը սիստեմի որոշակի վիճակից հնարավոր վիճակներից որևէ վիճակի անցման հավանականությունն է:

Մտցնենք հետևյալ նշանակումը՝

$$P_i^{(n)} = P\,(X^{(n)} = x_i), \quad i = 1, 2, \ldots k$$

և այդ թվերից կազմած վեկտորը՝

$$P^{(n)} = (P_1^{(n)}, \; P_2^{(n)}, \ldots P_k^{(n)}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (458)$$

Այդ դեպքում $X^{(n)}$ *պատահական մեծության մեկչափանի բաշխման օրենքը կլինի*

$$X^{(n)}\text{՝} \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_k$$
$$P_1^{(n)},\ P_2^{(n)}, \ldots P_k^{(n)}\text{։}$$

Նշանակենք

$$P_{ij}^{(s)}(n) = P\left(X^{(s+n)} = x_j \,\middle|\, X^{(s)} = x_i\right), \quad i, j = 1, 2, \ldots k, \qquad (459)$$

որը կանվանենք x_i *վիճակից՝* t_s *պահին,* x_j *վիճակի՝* t_{s+n} *պահին, անցման հավանականություն. պարզ է, որ* $P_{ij}^{(1)} = P_{ij}$*։ Համասեռ շղթայի համար այդ հավանականությունները կախում չեն ունենա* s*-ից.*

$$P_{ij}^{(s)}(n) = P_{ij}(n)\text{։}$$

Թեորեմ 1. $P_{ij}(n)$ *հավանականությունները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝*

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{n} P_{ir}(m) \cdot P_{rj}(n-m), \quad 0 < m < n\text{։} \qquad (460)$$

Իրոք, դիտելով

$$X^{(s+m)} = x_1, \quad X^{(s+m)} = x_2, \ldots X^{(s+m)} = x_k$$

պատահարները՝ որպես հիպոթեզներ, և կիրառելով լրիվ հավանականության բանաձևը, կստանանք

$$P(X^{(s+n)} = x_j / X^{(s)} = x_i) =$$
$$= P(X^{(s+n)} = x_1 / X^{(s)} = x_i) \cdot P(X^{(s+n)} = x_j / X^{(s)} = x_i \cap X^{(s+m)} = x_1) +$$
$$+ P(X^{(s+m)} = x_2 / X^{(s)} = x_i) \cdot P(X^{(s+n)} = x_j / X^{(s)} = x_i \cap X^{(s+m)} = x_2) +$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + $$
$$+ P(X^{(s+m)} = x_k / X^{(s)} = x_i) \cdot P(X^{(s+n)} = x_j / X^{(s)} = x_i \cap X^{(s+m)} = x_k)\text{։}$$

Քանի որ տվյալ պատահական պրոցեսը մարկովյան պրոցես է, ապա այդ հավանականությունը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$P(X^{(s+n)} = x_j / X^{(s)} = x_i) =$$
$$= P(X^{(s+m)} = x_1 / X^{(s)} = x_i) \cdot P(X^{(s+n)} = x_j / X^{(s+m)} = x_1) +$$
$$+ P(X^{(s+m)} = x_2 / X^{(s)} = x_i) \cdot P(X^{(s+n)} = x_j / X^{(s+m)} = x_2) + \cdots +$$
$$+ P(X^{(s+m)} = x_k / X^{(s)} = x_i) \cdot P(X^{(s+n)} = x_j / X^{(s+m)} = x_k)\text{։}$$

(459) նշանակումը օգտագործելով, կարելի է այդ հավասարությունը գրել հետևյալ կերպ՝

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m)\cdot P_{rj}(n-m), \qquad i, j = 1, 2, \dots, k։$$

Այս հավասարությունը հնարավոր է գրել նաև մատրիցային ձևով։ Դրա համար դիտարկենք

$$\pi_n = \big(P_{ij}(n)\big) \tag{461}$$

մատրիցան, որտեղ

$$\pi_1 = \big(P_{ij}(1)\big) = (P_{ij})։ \tag{462}$$

(460) հավասարությունը ցույց է տալիս, որ π_n մատրիցան ներկայացնում է π_m և π_{n-m} մատրիցաների արտադրյալ՝

$$\pi_n = \pi_m\cdot\pi_{n-m}, \qquad m = 1, 2, \dots n-1$$

ուրեմն՝

$$\pi_n = \pi_1\cdot\pi_{n-1}։$$

Այս հավասարությունը n անգամ օգտագործելով, կստանանք

$$\pi_n = \pi_1\,\pi_{n-1} = \pi_1^2\,\pi_{n-2} = \cdots = \pi_1^{n-1}\,\pi_1$$

կամ

$$\pi_n = \pi_1^n։ \tag{463}$$

Թ ե ո ր ե մ 2. Մարկովյան պրոցեսի մեկչափանի բաշխման օրենքը լրիվ որոշվում է, եթե հայտնի են մեկչափանի բաշխման օրենքը՝ $t=t_1$ պահին և անցման հավանականությունների (455) մատրիցան։ Դիցուք հայտնի են հավանականությունների բաշխման օրենքը՝ $t=t_1$ պահին, այսինքն՝

$$P^{(1)} = (P_1^{(1)},\ P_2^{(1)}, \cdots P_k^{(1)})$$

վեկտորը, և անցման հավանականությունների

$$\pi_1 = (P_{ij})$$

մատրիցան։ Այս մատրիցայի միջոցով հնարավոր է որոշել

$$\pi_n = (P_{ij}(n))$$

մատրիցան՝ (463) բանաձևի համաձայն, ուրեմն և՝ $P_{ij}(n)$ *հավանականությունները։ Այժմ, դիտելով*

$$X^{(1)} = x_1,\ \ X^{(1)} = x_2, \cdots X^{(1)} = x_k$$

հիպոթեզները և կիրառելով լրիվ հավանականության բանաձևը, կստանանք

$$P(X^{(s)} = x_i) = P(X^{(1)} = x_1) \cdot P(X^{(s)} = x_i / X^{(1)} = x_1) +$$
$$+ P(X^{(1)} = x_2) \cdot P(X^{(s)} = x_i / X^{(1)} = x_2) + \cdots +$$
$$+ P(X^{(1)} = x_k) \cdot P(X^{(s)} = x_i / X^{(1)} = x_k)$$

կամ

$$P(X^{(s)} = x_i) = \sum_{r=1}^{k} P(X^{(1)} = x_r) \cdot P(X^{(s)} = x_i / X^{(1)} = x_r)։$$

Մեր նշանակումները օգտագործելով, կստանանք

$$P_i^{(s)} = \sum_{r=1}^{k} P_r^{(1)}\ P_{ri}(s-1), \qquad i = 1,\ 2, \cdots k, \qquad (464)$$

այսինքն՝

$$P^{(s)} = (P_1^{(s)},\ P_2^{(s)}, \cdots P_k^{(s)}), \qquad s = 1,\ 2, \cdots$$

վեկտորը, որը պրոցեսի մեկնարկային բաշխման օրենքն է՝ $t = t_s$ *պահին։ Հաշվի առնելով (464) բանաձևը, կարելի է այդ վեկտորը արտահայտել հետևյալ կերպ՝*

$$P^{(s)} = P^{(1)} \cdot \pi_1^{(s-1)}, \quad s = 1, 2, \ldots \qquad (465)$$

Օրինակ 1. Դիտարկենք հետևյալ դիսկրետ ժամանակով դիսկրետ պատահական պրոցեսը։ Մասնիկը, որը գտնվում է ուղղի

$$a,\ a+1,\ a+2, \ldots b$$

կետերից մեկում (a-*ն և* b-*ն ամբողջ թվեր են), պատահական հարվածների ազդեցության տակ սկսում է շարժվել կամ դեպի աջ՝ մեկ միավոր հեռավորության վրա՝* p *հավանականությամբ, կամ դեպի ձախ՝ մեկ միավոր հեռավորության վրա՝* q *հավանականությամբ* $(p+q=1)$, *եթե նա չի գտնվում* a *և* b *կետերում. եթե նա գտնվում է* a *կետում, ապա տեղափոխվում է դեպի աջ, իսկ եթե գտնվում է* b *կետում, ապա տեղափոխվում է դեպի ձախ. դրա համար* $x=a$ *և* $x=b$ *պատերը կոչվում են անդրադարձնող պատեր։ Եթե* $X(t)$-*ով նշանակենք մասնիկի դիրքը* t *պահին, ապա* $X(t)$ *պատահական պրոցեսի հնարավոր արժեք-*

ները կլինեն

$$a,\ a+1,\ a+2, \ldots b,$$

և քանի որ մասնիկի դիրքը փոփոխվում է դիսկրետ $t_1, t_2, \ldots$ մոմենտներում, ապա այդ $X(t)$ պատահական պրոցեսը կլինի դիսկրետ պատահական պրոցես՝ դիսկրետ ժամանակով։ Հեշտ է տեսնել, որ տվյալ պատահական պրոցեսը ներկայացնում է դիսկրետ ժամանակով դիսկրետ մարկովյան պատահական պրոցես, որովհետև այն բանի պայմանական հավանականությունը, որ մասնիկը տվյալ պահին կգրավի որոշակի վիճակ այն պայմանում, որ հայտնի են մասնիկի վիճակները նախորդ պահերին, կախված է միայն նրանից, թե ինչ վիճակում է եղել մասնիկը անմիջապես նախորդ պահին և կախված չէ նրանից, թե ինչ է եղել ավելի առաջ։ Հեշտ է տեսնել, որ հավանականությունների անցման մատրիցան կլինի՝

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (466)$$

Օրինակ 2. Եթե առաջին օրինակի մեջ համարենք, որ $x=a$ և $x=b$ պատերը ոչ թե անդրադարձնող, այլ կլանող են, ապա մարկովյան պատահական պրոցեսի հավանականությունների անցման մատրիցան կլինի

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad (467)$$

Օրինակ 3. Սիստեմը կարող է գտնվել x_1, x_2, x_3 վիճակներից մեկում և տված է անցման հավանականությունների մատրիցան՝

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

որոշել անցման հավանականությունների π_2 մատրիցան։ (463) բանաձևի համաձայն

$$\pi_2 = \pi_1^2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{72} & \frac{13}{72} & \frac{48}{72} \\ \frac{3}{72} & \frac{21}{72} & \frac{48}{72} \\ \frac{7}{72} & \frac{9}{72} & \frac{56}{72} \end{pmatrix},$$

Ինչպես տեսանք, $P_{ij}(n)$ հավանականությունները, որ սիստեմը t_{s+n} պահին կգտնվի x_j վիճակում, եթե հայտնի է, որ t_s պահին նա գտնվել է x_i վիճակում, արտահայտվում են (463) բանաձևով։ Հետաքրքիր է, որ որոշ պայմաններում, երբ n-ը անսահմանորեն աճում է, այդ պայմանական հավանականությունը կախում չի ունենում նրանից, թե ինչ վիճակում է գտնվել սիստեմը t_s պահին, այսինքն՝ հեռավոր անցյալում։ Այդ պնդումը ձևակերպվում է այսպես.

Սահմանային թեորեմ. Եթե գոյություն ունի այնպիսի n_0 թիվ, որի համար $\pi_{n_0} = (P_{ij}(n_0))$ մատրիցայի բոլոր էլեմենտները դրական են, ապա գոյություն ունեն հետևյալ սահմանները.

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}(n) = P_j, \quad j = 1, 2, \dots k, \tag{468}$$

անկախ i թվի արժեքից, ընդ որում

$$0 \leqslant P_j \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \dots k \tag{469}$$

և

$$\sum_{j=1}^{k} P_j = 1, \tag{470}$$

Թեորեմի ապացուցման համար դիտենք երկու հաջորդականություններ՝

$$\min_i P_{ij}(n), \quad \max_i P_{ij}(n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

ամեն մի առանձին $j = 1, 2, \ldots k$ արժեքի համար. պարզ է, որ

$$\min_i P_{ij}^{(n)} \leqslant P_{ij}^{(n)} \leqslant \max_i P_{ij}^{(n)}\text{։} \tag{471}$$

Մենք ցույց կտանք, որ այդ երկու հաջորդականությունները ձգտում են միևնույն սահմանին, երբ $n \to \infty$, որտեղից և կհետևի թեորեմի պնդումը։ (460) բանաձևի մեջ տեղադրելով $m = 1$ և (471)-ից օգտվելով, կստանանք

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir} P_{rj}(n-1) \geqslant \min_r P_{rj}(n-1) \sum_{r=1}^{k} P_{ir} = \min_r P_{rj}(n-1).$$

քանի որ այս անհավասարությունը տեղի ունի $i = 1, 2 \cdots k$ ամեն մի արժեքի համար, ապա

$$\min_i P_{ij}(n) \geqslant \min_i P_{ij}(n-1)\text{։}$$

Ուրեմն $\min\limits_i P_{ij}(n)$ հաջորդականությունը, երբ $n \to \infty$, չնվազող սահմանափակ հաջորդականություն է. հետևաբար գոյություն ունի այդ հաջորդականության սահմանը, երբ $n \to \infty$.

$$\lim_{n \to \infty} \min_i P_{ij}(n) = \underline{P_j}, \qquad j = 1, 2, \cdots k\text{։}$$

Նույն ձևով կարելի է ապացուցել, որ գոյություն ունի

$$\lim_{n \to \infty} \max_i P_{ij}(n) = \overline{P}_j, \qquad j = 1, 2, \cdots k\text{։}$$

Այժմ ենթադրելով, որ $n > n_0$, դիտարկենք հետևյալ տարբերությունը՝

$$P_{ij}(n) - P_{lj}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(n_0) \cdot P_{rj}(n-n_0) - \sum_{r=1}^{k} P_{lr}(n_\delta) \cdot P_{rj}(n-n_0) =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} \left[P_{ir}(n_0) - P_{lr}(n_0) \right] \cdot P_{rj}(n-n_0)\text{։} \tag{472}$$

$[P_{ir}(n_o) - P_{lr}(n_o)]$ $(r = 1, 2, \cdots k)$ *տարբերությունները կարող են լինել կամ դրական, կամ բացասական, կամ զրո. այդ տարբերությունը նշանակենք $\beta_{il}^{(r)}$-ով, երբ այն դրական է, $-\beta'^{(r)}_{il}$-ով, երբ բացասական է։ Քանի որ*

$$\sum_{r=1}^{k} P_{ir}(n_o) = \sum_{r=1}^{k} P_{lr}(n_0) = 1,$$

ուրեմն

$$\sum_{r=1}^{k} [P_{ir}(n_o) - P_{lr}(n_o)] = \sum_{(r)} \beta_{il}^{(r)} - \sum_{(r)} \beta'^{(r)}_{il}(r) = 0,$$

ընդ որում, առաջին գումարը տարածված է r-ի այն արժեքների վրա, որոնց համար քննարկվող տարբերությունը դրական է, իսկ երկրորդ գումարը՝ r-ի այն արժեքների վրա, որոնց համար այդ տարբերությունը բացասական է։ Այդ հավասարությունից եզրակացնում ենք, որ

$$\sum_{(r)} \beta_{il}^{(r)} = \sum_{(r)} \beta'^{(r)}_{il} = h_{il}.$$

Քանի որ ըստ ենթադրության

$$P_{ir}(n_o) > 0, \quad (i, \ r = 1, 2, \dots k),$$

ուրեմն

$$\sum_{(r)} \beta_{il}(r) = \sum_{(r)} [P_{ir}(n_o) - P_{lr}(n_o)] < \sum_{(r)} P_{ir}(n_o) <$$

$$< \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(n_o) = 1$$

և

$$0 \leqslant h_{il} < 1.$$

Եթե նշանակենք

$$h = \max_{i,\,l} h_{il},$$

կունենանք

$$0 \leqslant h < 1. \qquad (473)$$

Նորից վերադառնանք (472) հավասարությանը՝

$$P_{ij}(n) - P_{lj}(n) = \sum_{r=1}^{k} [P_{ir}(n_0) - P_{lr}(n_0)]\cdot P_{rj}(n-n_0),$$

որը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$P_{ij}(n) - P_{lj}(n) = \sum_{(r)} \beta_{il}^{(r)} P_{rj}(n-n_0) - \sum_{(r)} \beta_{il}^{\prime(r)} P_{rj}(n-n_0),$$

որտեղից

$$|P_{ij}(n) - P_{lj}(n)| = \left| \sum_{(r)} \beta_{il}^{(r)} P_{rj}(n-n_0) - \sum_{(r)} \beta_{ij}^{\prime(r)} P_{rj}(n-n_0) \right|։$$

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է համարել, որ աջ մասում գտնվող երկու գումարներից առաջինը ավելի մեծ է, քան երկրորդը։ Այդ դեպքում այդ հավասարությունից հետևում են այսպիսի անհավասարություններ՝

$$P_{ij}(n) - P_{lj}(n)| \leqslant \left| \max_r P_{rj}(n-n_0) \sum_{(r)} \beta_{il}^{(r)} - \min_r P_{rj}(n-n_0) \sum_{(r)} \beta_{il}^{\prime(r)} \right| =$$

$$= \left| \max_r P_{rj}(n-n_0)\cdot h_{il} - \min_r P_{rj}(n-n_0)\cdot h_{il} \right| \leqslant$$

$$\leqslant h\cdot \left| \max_r P_{rj}(n-n_0) - \min_r P_{rj}\, n-n_0) \right| \leqslant$$

$$\leqslant h \max_{i,l} |P_{il}(n-n_0) - P_{lj}(n-n_0)|։$$

Հետևաբար՝

$$\max_{i,l} |P_{ij}(n) - P_{lj}(n)| \leqslant h \max_{i,l} |P_{ij}(n-n_0) - P_{lj}(n-n_0)|։$$

Օգտագործենք ստացված անհավասարությունը $\left[\frac{n}{n_0}\right]$ *անգամ. կստանանք*

$$\max_{i,l} |P_{ij}(n) - P_{lj}(n)| \leqslant h^{\left[\frac{n}{n_0}\right]} \max_{i,l} \left| P_{ij}\left(n - \left[\frac{n}{n_0}\right] n_0\right) - \right.$$

$$\left. - P_{lj}\left(n - \left[\frac{n}{n_0}\right] n_0\right) \right|։$$

Հաշվի առնելով, որ

$$\max_{i,\, l} \left|P_{ij}\left(n-\left[\frac{n}{n_0}\right]n_0\right)-P_{lj}\left(n-\left[\frac{n}{n_0}\right]n_0\right)\right|\leqslant 1,$$

կստանանք

$$\max_{i,\, l} |P_{ij}(n)-P_{lj}(n)|\leqslant h^{\left[\frac{n}{n_0}\right]},$$

Երբ $n\to\infty$, ապա $\left[\frac{n}{n_0}\right]\to\infty$, այդ պատճառով (473)-ի շնորհիվ կունենանք

$$\lim_{n\to\infty}\max_{i,l}|P_{ij}(n)-P_{lj}(n)|=0.$$

հետևաբար՝

$$\lim_{n\to\infty}\max_{i} P_{ij}(n)=\lim_{n\to\infty}\min_{i} P_{ij}(n)=P_j,$$

(471) անհավասարություններից հետևում է

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n)=P_j, \qquad j=1, 2, \cdots k, \tag{474}$$

Հետևյալ անհավասարություններից՝

$$0\leqslant P_{ij}(n)\leqslant 1,$$

անցնելով սահմանին, երբ $n\to\infty$, կստանանք

$$0\leqslant P_j\leqslant 1.$$

Բացի դրանից՝

$$\sum_{j=1}^{k} P_j=\sum_{j=1}^{k}\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k} P_{ij}(n)=\lim_{n\to\infty} 1=1.$$

Այսպիսով, սահմանային թեորեմը լրիվ ապացուցված է։

P_j ($j=1, 2, \cdots k$) հավանականությունները անվանում ենք Մարկովի շղթայի ֆինալային հավանականություններ։ Կարելի է ստանալ այն գծային հավասարումների սիստեմը, որին բավարարում են այդ հավանականությունները։ Դրա համար (460) հավասարության մեջ տեղադրենք $m=n-1$. կստանանք

$$P_{ij}(n)=\sum_{r=1}^{k} P_{ir}(n-1)P_{rj}$$

և, անցնելով սահմանին, կունենանք

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{rj} \lim_{n\to\infty} P_{ir}(n-1)$$

կամ

$$P_j = \sum_{r=1}^{k} P_r \cdot P_{rj}, \qquad j = 1, 2, \cdots k։$$

Այդ հավասարումների սիստեմը մանրամասնորեն կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$\begin{aligned} &(P_{11}-1)\cdot P_1 + P_{21}\cdot P_2 + P_{31}\cdot P_3 + \cdots + P_{k1} P_k = 0 \\ &P_{12}\cdot P_1 + (P_{22}-1)\cdot P_2 + P_{32}\cdot P_3 + \cdots + P_{k2} P_k = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &P_{1k}\cdot P_1 + P_{2k} P_2 + P_{3k}\cdot P_3 + \cdots + (P_{kk}-1) P_k = 0, \end{aligned} \qquad (475)$$

Քանի որ բոլոր $P_j\,(j = 1, 2, \cdots k)$ հավանականությունները չեն կարող միանգամից հավասար լինել զրոյի, այս գծային սիստեմը այդ հավանականությունների համար պետք է ունենա ոչ զրոյական լուծում. հետևաբար, այդ համասեռ սիստեմի դետերմինանտը հավասար է զրոյի՝

$$\begin{vmatrix} P_{11}-1 & P_{21} & \cdots & P_{k1} \\ P_{12} & P_{22}-1 & \cdots & P_{k2} \\ P_{1k} & P_{2k} & \cdots & P_{kk}-1 \end{vmatrix} = 0,$$

Այս հավասարությունը ցույց է տալիս, որ միավորը անցման հավանականությունների π_1 մատրիցայի սեփական արժեքն է և, որ P_j $(j = 1, 2, \ldots k)$ հավանականությունները միարժեք չեն որոշվում։ Սակայն կարելի է ցույց տալ, որ (470) պայմանը թույլ է տալիս նրանց որոշել միարժեք։

Օրինակ 4. Օրինակ (3)-ում π_2 մատրիցայի բոլոր էլեմենտները դրական են, հետևաբար գոյություն ունեն երեք վիճակների ֆինալային հավանականություններ՝

$$P_1 = \lim_{n\to\infty} P_{i1}(n); \quad P_2 = \lim_{n\to\infty} P_{i2}(n), \quad P_3 = \lim_{n\to\infty} P_{i3}(n),$$

որոնք կախված չեն i*-ից և բավարարում են հետևյալ (475) հավասարումների սիստեմին՝*

$$(P_{11}-1)\,P_1+P_{21}\,P_2+P_{31}\cdot P_3=0$$

$$P_{12}\cdot P_1+(P_{22}-1)\cdot P_2+P_{32}\,P_3=0$$

$$P_{13}\,P_1+P_{23}\,P_2+(P_{33}-1)\,P_3=0։$$

Տեղադրելով P_{ij} *անցման հավանականությունների արժեքները (3) օրինակից, կստանանք*

$$\left(\frac{1}{3}-1\right)P_1+\frac{1}{12}P_3=0$$

$$\frac{1}{6}P_1+\left(\frac{1}{2}-1\right)P_2+\frac{1}{12}P_3=0$$

$$\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_2+\left(\frac{5}{6}-1\right)P_3=0$$

կամ

$$-\frac{2}{3}P_1+\frac{1}{12}P_3=0$$

$$\frac{1}{6}P_1-\frac{1}{2}P_2+\frac{1}{12}P_3=0$$

$$\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_2-\frac{1}{6}P_3=0։$$

Արտահայտելով P_1*-ը և* P_2*-ը* P_3*-ի միջոցով, կունենանք*

$$P_1=\frac{1}{8}P_3,\qquad P_2=\frac{5}{24}P_3.$$

Հաշվի առնելով, որ $P_1+P_2+P_3=1$, *կստանանք* $P_3=\frac{3}{4}$, $P_1=\frac{3}{32}$, $P_2=\frac{5}{32}$։

64. Խնդիրներ.

1. $X(t)=(t^2+1)\cdot\xi$, *որտեղ* ξ*-ն (0,1) պարամետրերով նորմալ բաշխված պատահական մեծություն է։ Որոշել պատահական պրոցեսի մեկչափանի և երկչափանի բաշխման ֆունկցիաները։*

2. Որոշել բրոունյան պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիան, օգտագործելով նրա երկչափանի բաշխման խտությունը։

3. Որոշել Պուասոնի պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիան, օգտագործելով նրա երկչափանի բաշխման օրենքը։

4. Որոշել

$$X(t) = \xi e^{-t^2}$$

պատահական պրոցեսի մաթեմաթիկական սպասումը, դիսպերսիան և կոռելյացիոն ֆունկցիան, եթե ξ-ն նորմալ բաշխված պատահական մեծություն է՝ (a, σ) պարամետրերով։

5. Որոշել նորմալ պրոցեսի մեկ-, երկու- և եռաչափանի հավանականությունների խտությունները, եթե հայտնի են այդ պրոցեսի $a(t) = at$ մաթեմատիկական սպասումը և $r(s, t) = \cos(t - s)$ կոռելյացիոն ֆունկցիան։

6. Տված է $X(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ պատահական պրոցեսը, որտեղ $a > 0$ և $\omega > 0$ հաստատուններ են, իսկ φ-ն հավասարաչափ է բաշխված $(0, 2\pi)$ հատվածի վրա։ Ցույց տալ, որ այդ պրոցեսը ստացիոնար է։

7. Որոշել $Y(t) = [X(t)]^2$ պատահական պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիան, եթե $X(t)$-ն նորմալ պատահական պրոցես է 0 մաթեմատիկական սպասումով և $\sigma^2 \min(s, t)$ կոռելյացիոն ֆունկցիայով։

8. Ստացիոնար պատահական $X(t)$ պրոցեսն ունի

$$K(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{\tau_0}, & |\tau| \leqslant \tau_0 \\ 0, & |\tau| > \tau_0 \end{cases}$$

կոռելյացիոն ֆունկցիան։ Որոշել նրա սպեկտրալ խտությունը։

9. Ստացիոնար պատահական $X(t)$ պրոցեսն ունի

$$f(\lambda) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)}, \qquad \alpha > 0$$

սպեկտրալ խտությունը։ Որոշել նրա կոռելյացիոն ֆունկցիան։

10. Ստացիոնար պատահական $X(t)$ պրոցեսն ունի

$$f(\lambda) = \begin{cases} C, & \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2 \\ 0, & \lambda < \lambda_1,\ \lambda > \lambda_2, \end{cases} \qquad C > 0$$

սպեկտրալ խտությունը։ Որոշել նրա ցանկացած երկու հատույթների կոռելյացիայի գործակիցը։

11. Որոշել $Y(t) = [X(t)]^2$ պատահական պրոցեսի սպեկտրալ ֆունկցիան, եթե $X(t)$-ն ստացիոնար նորմալ պատահական պրոցես է $m = 0$ մաթեմատիկական սպասումով և $K(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}$ $(a > 0)$ կոռելյացիոն ֆունկցիայով։

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ

65. *Ամեն մի* X *պատահական մեծություն լրիվ նկարագրվում է իր* F(x) *բաշխման ֆունկցիայով։ Եթե այն հայտնի է, ապա հնարավոր է որոշել* X*-ի արժեքի՝ ցանկացած միջակայքում գտնվելու հավանականությունը, նրա միջինը և դիսպերսիան՝*

$$a = E(X), \qquad \sigma^2 = D(X) = E(X - a)^2,$$

սկզբնական և կենտրոնական մոմենտները՝

$$V_k = E[X^k], \qquad \mu_k = E(X - a)^k, \quad k = 1, \ 2, \ldots,$$

Եթե F(x) *ֆունկցիան պարունակում է որոշակի պարամետրեր, ապա թվային բնութագրերը դառնում են այդ պարամետրերի ֆունկցիաները։*

Գործնականում, սովորաբար, հայտնի չի լինում մեզ հետաքրքրող X *պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան և հետևաբար՝ բաշխման ֆունկցիայի մեջ մտնող պարամետրերի և պատահական մեծության բնութագրիչների թվային արժեքները։ Այդ անհայտների մասին գաղափար կազմելու համար հարկ է լինում պատահական մեծության նկատմամբ կատարել մի շարք փորձեր կամ դիտումներ։ Օրինակ, եթե* X *պատահական մեծությունը գործարանում պատրաստված միանման դետալների չափն է, ապա այդ* X *պատահական մեծության նկատմամբ կատարված փորձի էությունը այն է, որ վերցնում ենք պատահական դետալը և որոշում նրա չափը, այսինքն՝* X*-ի համապատասխան թվային արժեքը։*

Ենթադրենք n *փորձերը՝ կատարված* X *պատահական մեծության նկատմամբ, տալիս են*

$$X_1, \ X_2, \cdots X_n$$

արդյունքները։ Պարզ է, որ փորձերը կատարելուց հետո այդ արդյունքները հայտնի թվեր են, իսկ փորձից առաջ նրանցից յուրաքանչյուրը, որպես փորձի հնարավոր արդյունք, մի պատահական մեծություն է, որն ունի նույն բաշխման ֆունկցիան և հետևաբար՝ նույն բնութագրիչները, ինչպես և ինքը՝ դիտվող պատահական մեծությունը։

Մաթեմատիկական վիճակագրության հիմնական խնդիրներից մեկն է, ելնելով փորձերի արդյունքներից, ստանալ վիճակագրական գնահատականներ՝ անհայտ բաշխման ֆունկցիայի, բնութագրիչների և պա-

րամետրերի համար։ Այդ նշանակում է, մի կողմից յուրաքանչյուրի համար փորձերի $X_1, X_2, \ldots X_n$ արդյունքներից որոշել այնպիսի մի ֆունկցիա, որը, որոշ իմաստով, լավ գնահատական լինի գնահատվող մեծության համար։ Օրինակ՝ $\frac{m}{n}$ հաճախությունը (որպես Բեռնուլիի փորձերի արդյունքների ֆունկցիա) «լավ» գնահատական է անհայտ p հավանականության համար, այն իմաստով, որ

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = p,$$

$$D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n} \to 0, \qquad n \to \infty$$

Մյուս կողմից, հարկ է լինում որոշել այդպիսի գնահատականների ճըշտությունը և վստահելիությունը, այսինքն՝ այն պատահական միջակայքը, որտեղ կարելի է պնդել, որ ընկած է գնահատվող մեծությունը՝ տված հավանականությամբ։

Մաթեմատիկական վիճակագրության կարևորագույն խնդիրներից մեկը տարբեր հիպոթեզների ստուգումն է՝ ելնելով փորձերի արդյունքներից։ Բազմաթիվ հարցերից, որոնք առաջանում են այստեղ, մենք կդիտարկենք հիմնականում միայն մեկը՝ անհայտ բաշխման ֆունկցիայի կամ անհայտ խտության մասին որևէ հիպոթեզի ստուգման հարցը։

Վերջապես նշենք, որ բերված խնդիրները դրվում են նաև երկչափ կամ ընդհանրապես բազմաչափ պատահական մեծությունների նկատմամբ։

66. Վերցվածքային բազմության բնութագրիչները: *Դիցուք X պատահական մեծության բաշխման* $F(x)$ *ֆունկցիան և* $a = E(X)$, $\sigma^2 = D(X)$, $V_k = E(X)^k$, $\mu_k = E[X - a]^k$ *բնութագրիչները մեզ անհայտ են։ Այդ* ξ *պատահական մեծության նկատմամբ կատարվել են n անկախ փորձեր, որոնք տվել են*

$$X_1, X_2, \cdots X_n$$

արդյունքները։ Ստացված արժեքների բազմությունը անվանում են **վերցվածքային բազմություն** *կամ* **վերցվածք**, *իսկ փորձերի թիվը՝* **վերցվածքային բազմության ծավալ:**

Փորձերի արդյունքներից կազմված միջին թվաբանականը՝

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \qquad (476)$$

կանվանենք X *պատահական մեծության վերցվածքային միջին, իսկ*

$$S^2=\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2}{n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n} \qquad (477)$$

մեծությունը, որը դիտված արժեքների միջինից ունեցած շեղման քառակուսու միջին արժեքն է, կանվանենք X *պատահական մեծության* վերցվածքային դիսպերսիա: *Այն բնութագրում է դիտված արժեքների ցրումը միջինի շուրջը։ Ընդհանրապես*

$$\overline{V_k}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k}{n}, \qquad \overline{\mu_k}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k}{n}, \quad k=1,\ 2,\ 3\cdots \qquad (478)$$

մեծությունները համապատասխանաբար կանվանենք X *պատահական մեծության վերցվածքային սկզբնական և կենտրոնական մոմենտներ։ Մասնավոր դեպքում, երբ պատահական մեծության* a *մաթեմատիկական սպասումը հայտնի է, վերցվածքային դիսպերսիան և կենտրոնական մոմենտները կլինեն*

$$S_0^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-a)^2}{n}, \qquad \overline{\mu_k}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-a)^k}{n}։ \qquad (479)$$

Օրինակ. Հինգ փորձերի ընթացքում X *պատահական մեծության նկատմամբ ստացվել է հետևյալ վերցվածքային բազմությունը՝*

2,5, 2,4, 2,6, 2,5, 2,7։

(476) և (477) բանաձևերի համաձայն վերցվածքային միջինը՝

$$\overline{X}=\frac{2,5+2,4+2,6+2,5+2,7}{5}=2,54,$$

իսկ վերցվածքային դիսպերսիան՝

$$S^2=\frac{(0,04)^2+(0,14)^2+(0,06)^2+(0,04)^2+(0,16)^2}{5}=0,0104։$$

Բերված վերցվածքային բնութագրիչները պատահական մեծության անհայտ բնութագրիչների համապատասխան վիճակագրական գնահատականներն են։

67. Վերցվածքային բաշխման ֆունկցիան և վերցվածքային խտության ֆունկցիան: *Այժմ կառուցենք անհայտ բաշխման ֆունկցիայի գնահատականը: Դրա համար դասավորենք դիտման արդյունքները աճման կարգով՝*

$$X_1 \leqslant X_2 \leqslant \cdots \leqslant X_n.$$

Ցանկացած x *թվի համար* $m(x)$*-ով նշանակենք դիտված այն արժեքների թիվը, որոնք փոքր են* x*-ից: Այդ արժեքների հաճախությունը կլինի* $\frac{m(x)}{n}$*: Այսպիսով,* X *պատահական մեծության* վերցվածքային բաշխման $F_n(x)$ ֆունկցիա *կանվանենք դիտված այն արժեքների* $\frac{m(x)}{n}$ *հաճախությունը, որոնք փոքր են* x*-ից՝*

$$F_n(x) = \frac{m(x)}{n}.$$

Ակներև է, որ

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_1 \\ \dfrac{1}{n}, & x_1 < x \leqslant x_2 \\ \dfrac{2}{n}, & x_2 < x \leqslant x_3 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \dfrac{k}{n}, & x_k < x \leqslant x_{k+1} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ 1, & x > x_n. \end{cases} \tag{480}$$

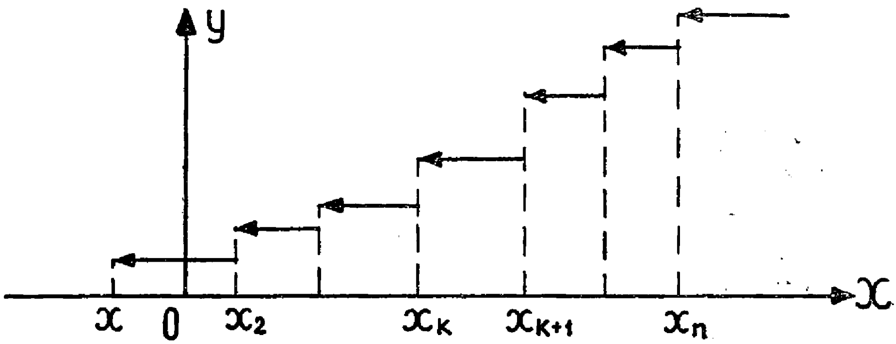
$F_n(x)$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը բերված է նկ. 36-ում:* $F_n(x)$ *վերցվածքային բաշխման ֆունկցիան ունի նույն հատկությունները, ինչ որ* X *պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:*

Անհայտ բաշխման $F(x)$ *ֆունկցիայի և վերցվածքային* $F_n(x)$ *ֆունկցիայի միջև կապը հաստատվում է հետևյալ թեորեմի համաձայն:*

Գլիվենկոյի թեորեմ: Եթե $F(x)$ բաշխման ֆունկցիան անընդհատ է, ապա $F_n(x)$-ի և $F(x)$-ի առավելագույն շեղման ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվից փոքր լինելու հավանականությունը ձգտում է մեկի, *երբ փորձերի* n *թիվը ձգտում է անվերջության, այսինքն՝*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon\right) = 1. \tag{481}$$

Ապացուցելու համար ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար որոշենք այնպիսի ամբողջ դրական s թիվը, որ տեղի ունենա



Նկ. 36

$$\frac{1}{s} < \frac{\varepsilon}{2}$$

անհավասարությունը. x^1_i $(i = 1, 2, \dots s)$-ով նշանակենք

$$F(x_i) = \frac{i}{s}$$

հավասարման արմատը։ Քանի որ $F(x)$-ը անընդհատ և չնվազող ֆունկցիա է, այդպիսի x^1_i արմատ միշտ գոյություն ունի։ Այդ դեպքում

$$F(x^1_i) - F(x^1_{i-1}) = \frac{1}{s} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n = 1, 2, \dots s. \qquad (482)$$

Քննարկենք $F_n(x) - F(x)$ տարբերությունը։ Եթե x-ը գտնվում է

$$x^1_{i-1} \leqslant x < x^1_i$$

միջակայքում, տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$F_n(x^1_{i-1}) - F(x^1_i) < F_n(x) - F(x) < F_n(x^1_i) - F(x^1_{i-1})$$

կամ, (482)-ի համաձայն՝

$$F_n(x^1_{i-1}) - F(x^1_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{2} < F_n(x) - F(x) < F_n(x^1_i) - F(x^1_i) + \frac{\varepsilon}{2},$$

Հետևաբար, ցանկացած ε-ի համար կունենանք

$$-\max_{1<i<s}|F_n(x^1_i) - F(x^1_i)| - \frac{\varepsilon}{2} < F_n(x) - F(x) <$$

$$< \max_{1<i<s}|F_n(x^1_i) - F(x^1_i)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

կամ

$$|F_n(x)-F(x)|<\max_{1\leqslant i\leqslant s}|F_n(x_i^1)-F(x_i^1)|+\frac{\varepsilon}{2},$$

Քանի որ ստացված անհավասարության աջ մասը կախում չունի x-ից, ուրեմն այն ճիշտ է $F_n(x)$ և $F(x)$ ֆունկցիաների առավելագույն շեղման համար՝

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-F(x)|<\max_{1\leqslant i\leqslant s}|F_n(x_i^1)-F(x_i^1)|+\frac{\varepsilon}{2},$$

P_i-ով նշանակենք X պատահական մեծության x_i^1-ից փոքր լինելու հավանականությունը և m_i-ով՝ դիտված այն արժեքների թիվը, որոնք փոքր են x_i^1-ից. պարզ է, որ

$$P_i=F(x_i^1),\qquad \frac{m_i}{n}=F_n(x_i^1),\qquad i=1,2,\ldots s,$$

և մեր ստացած անհավասարությունը կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-F(x)|<\max_{1\leqslant i\leqslant s}\left|\frac{m_i}{n}-P_i\right|+\frac{\varepsilon}{2}, \tag{483}$$

որտեղ $\frac{m_i}{n}$-ը $X<x_i^1$ պատահարի հաճախությունն է, իսկ P_i-ն՝ նույն պատահարի հավանականությունը։

Այժմ դիտենք $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\left|\frac{m_i}{n}-P_i\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$ պատահարը. պարզ է, որ այն տեղի ունի միայն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի

$$\left|\frac{m_1}{n}-P_1\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2},\qquad \left|\frac{m_2}{n}-P_2\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2},\ldots\left|\frac{m_s}{n}-P_s\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

պատահարներից առնվազն մեկը. հետևաբար՝

$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant s}\left|\frac{m_i}{n}-P_i\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\sum_{i=1}^{s}P\left(\left|\frac{m_i}{n}-P_i\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

Բեռնուլիի թեորեմի համաձայն n-ը կարելի է վերցնել այնքան մեծ, որ այդ հավանականություններից յուրաքանչյուրը լինի ցանկացած $\frac{\eta}{s}$ թվից ավելի փոքր. ուստի

$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant s}\left|\frac{m_i}{n}-P_i\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{s}\frac{\eta}{s}=\eta$$

և

$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant s}\left|\frac{m_i}{n}-P_i\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right)<1-\eta\text{։} \qquad (484)$$

Այսպիսով, (483) և (484) առնչություններից ցանկացած $\eta>0$ և $\varepsilon>0$ թվերի համար կարելի է ընտրել այնպիսի N թիվ, որ երբ $n>N$, ապա

$$P\left(\sup_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-F(x)|<\varepsilon\right)>1-\eta$$

կամ

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\sup_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-F(x)|<\varepsilon\right)=1\text{։}$$

Գոյություն ունի ավելի խիստ արդյունք.

$$P\left(\sup_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-F(x)|\to 0\right)=1,$$

որի ապացուցման վրա կանգ չենք առնի։ Այստեղից հետևում է՝ երբ փորձերի թիվը բավականաչափ մեծ է, կարելի է անհայտ $F(x)$-ը փոխարինել $F_n(x)$-ով։

Վերցվածքային $F_n(x)$ բաշխման ֆունկցիան անհայտ $F(x)$ բաշխման ֆունկցիայի գնահատականն է։

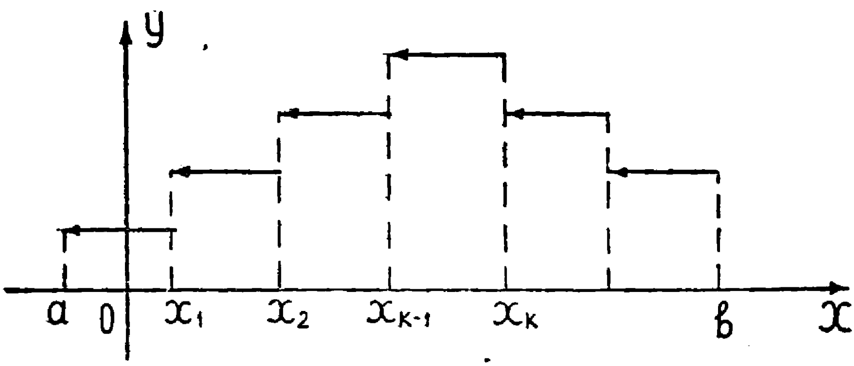
Այժմ ենթադրենք, թե X պատահական մեծությունն անընդհատ պատահական մեծություն է և նրա $f(x)$ խտությունը անհայտ է։ Կառուցենք X պատահական մեծության վերցվածքային խտությունը: Դրա համար (a, b) միջակայքը, որտեղ ընկած են փորձերից ստացված X_1, $X_2, \dots X_n$ արժեքները, բաժանենք r հավասար միջակայքերի՝

$$(a, x_1^1],\ (x_1^1, x_2^1], \dots (x_{k-1}^1, x_k^1], \dots (x_{r-1}^1, b),$$

որոնցից յուրաքանչյուրի երկարությունը $h=\frac{b-a}{r}$ է։ m_k $(k=1,2,\dots r)$-ով նշանակենք վերցվածքային բազմության այն արժեքների թիվը, որոնք ընկած են k-րդ $(x_{k-1}^1, x_k^1]$ միջակայքում. այդ դեպքում $\frac{m_k}{n}$ $(k=1,2\dots r)$ հարաբերությունը դառնում է X պատահական մեծության $(x_{k-1}^1, x_k^1]$ միջակայքի մեջ ընկնելու հաճախությունը։ X պատահական *մեծության* վերցվածքային խտություն *է կոչվում հետևյալ ֆունկ- ցիան՝*

$$
f_n(x) = \begin{cases}
0, & x \leqslant a \\
\dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{m_1}{n}, & a < x \leqslant x_1^1 \\
\dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{m_2}{n} & x_1^1 < x \leqslant x_2^1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\dfrac{1}{h} \, \dfrac{m_k}{n}, & x_{k-1}^1 < x \leqslant x_k^1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\dfrac{1}{h} \, \dfrac{m_r}{n}, & x_{r-1}^1 < x \leqslant b \\
0, & x > b
\end{cases} \qquad (486)
$$

Վերցվածքային խտության գրաֆիկը բերված է Նկ. 37-ում և կոչվում է հիստոգրամ։



Նկ. 37

Վերցվածքային $f_n(x)$ *խտությունն ունի հավանականությունների խտու- թյան հատկությունները՝*

1. $f_n(x) \geqslant 0,$

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = 1$։

Առաջինը ակներև է, իսկ երկրորդը հետևում է այն բանից, որ f(x) *ֆունկցիայի գրաֆիկով և* X *առանցքով սահմանափակված մակերեսը՝*

$$h\cdot\frac{m_1}{nh}+h\cdot\frac{m_2}{nh}+\cdots+h\frac{m_r}{nh}=$$

$$=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}\cdots+\cdots\frac{m_r}{n}=1.$$

Թեորեմ. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա վեցվածքային խտության և անհայտ խտության առավելագույն շեղման՝ ցանկացած $\varepsilon>0$ թվից փոքր լինելու հավանականությունը ձգտում է *մեկի*, երբ փորձերի n թիվը ձգտում է անվերջության, *այսինքն՝*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (487)$$

ավելի ուժեղ պնդումն այն է, որ

$$P\left(\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|f_n(x)-f(x)\right|\to 0\right)=1.$$

այստեղից, եթե փորձերի թիվը բավականաչափ մեծ է, կարելի է անհայտ $f(x)$ *խտությունը փոխարինել* $f_n(x)$*-ով։*

$f_n(x)$ *վերցվածքային խտությունը* X *պատահական մեծության անհայտ* $f(x)$ *խտության գնահատականն է։*

68. Վերցվածքային բնութագրիչների հաշվումը: *Եթե վերցվածքային բազմության ծավալը մեծ է, այդ բազմության բնութագրիչները հաշվելու համար կազմում են, այսպես կոչված,* վիճակագրական շարք *(ինչպես նկարագրվեց վերևում)։ Ամբողջ* (a, b) *միջակայքը, որի մեջ ընկած են դիտման արդյունքները, բաժանում են որոշակի հավասար մասերի։ Այդպիսի միջակայքերի* r *թիվը խորհուրդ է տրվում վերցնել 10—20, եթե փորձերի թիվն անցնում է 200-ից։ Հաշվվում է յուրաքանչյուր միջակայքի մեջ ընկած արժեքների* $m_i(i=1, 2, \ldots r)$ *թիվը։ Ստացված շարքը, որը կազմված է նշված միջակայքերից և նրանց համապատասխանող* m_i *թվերից, կոչվում է* վիճակագրական շարք: *Վիճակագրական շարքը տրվում է այսպիսի աղյուսակով՝*

X	$(a, x'_1]$	$(x'_1, x'_2]$	...	$(x'_{i-1}, x'_i]$	...	(x'_{r-1}, b)
m	m_1	m_2	...	m_i	...	m_r ,

(488)

որտեղ $h=\frac{b-a}{r}$-ը յուրաքանչյուր միջակայքի երկարությունն է։ Վիճակագրական շարքը պատկերվում է գրաֆիկորեն՝ հիստոգրամի տեսքով (նկ. 37)։

Եթե վերցվածքային բազմության համար կառուցված է վիճակագրական շարք, ապա (476), (477) և (478) բանաձևերում պատահական մեծության վերցվածքային բնութագրիչների համար բոլոր այն արժեքները,որոնք ընկած են նույն $(x_{i-1}^1, x_i^1]$ միջակայքում, համարում են մոտավորապես հավասար այդ միջակայքի x_i միջին արժեքին, և քանի որ այդպիսի արժեքների թիվը հավասար է m_i-ի, վերցվածքային բնութագրիչները ներկայացվում են հետևյալ մոտավոր բանաձևերով՝

$$\overline{X} \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} m_i x_i}{n}, \qquad S^2 \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} (x_i - \overline{X})^2 m_i}{n} \tag{489}$$

$$\overline{V}_k \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^k m_i}{n}, \qquad \overline{\mu}_k \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} (x_i - \overline{X})^k m_i}{n}, \quad k=1,\ 2,\ 3, \ldots \tag{490}$$

Այս բանաձևերի մեջ այն սխալները, որոնք ստացվում են փորձերի արդյունքների խմբավորման հետևանքով, այնքան ավելի փոքր կլինեն, որքան փոքր է մասնավոր միջակայքի h երկարությունը։ Գոյություն ունեն բանաձևեր, որոնցով հնարավոր է որոշել այդ սխալները։*

Պատահական մեծության վերցվածքային բնութագրիչները ըստ վիճակագրական շարքի հաշվելիս կարելի է մտցնել որոշ պարզեցումներ։ Դրա համար դիտենք հետևյալ օժանդակ մեծությունները.

$$b_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} (x_i - c)^k \cdot m_i}{n}, \qquad k=1,\ 2,\ 3, \cdots \tag{491}$$

$$a_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} \left(\frac{x_i - c}{h}\right)^k \cdot m_i}{n}, \qquad k=1,\ 2,\ 3, \cdots \tag{492}$$

որտեղ c-ն կամայական թիվ է։ Վերցվածքային միջինը ձևափոխում ենք հետևյալ եղանակով՝

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{r} x_i m_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{r}(x_i-c+c)\cdot m_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{r}(x_i-c)m_i}{n}+c$$

կամ

$$\overline{X}=b_1+c, \tag{493}$$

քանի որ

$$\sum_{i=1}^{r} m_i=n.$$

Վերցվածքային դիսպերսիան ձևափոխում ենք հետևյալ կերպ՝

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{r}(x_i-\overline{X})^2\cdot m_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{r}[(x_i-c)+(c-\overline{X})]^2 m_i}{n}=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{r}[(x_i-c)^2-2(x_i-c)(\overline{X}-c)+(\overline{X}-c)^2]\cdot m_i}{n}=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{r} m_i(x_i-c)^2}{n}-2(\overline{X}-c)^2+(\overline{X}-c)^2$$

կամ (491)-ի և (493)-ի համաձայն

$$S^2=b_2-b_1^2, \tag{494}$$

Երրորդ և չորրորդ՝ կարգի կենտրոնական մոմենտների համար նման հաշվումներ կատարելով, կստանանք

$$\overline{\mu}_3=b_3-3b_2b_1+2b_1^3, \tag{495}$$

$$\overline{\mu}_4=b_4-4b_3b_1+6b_2b_1^2-3b_1^4. \tag{496}$$

Ինչպես դժվար չէ տեսնել, վերցվածքային կենտրոնական մոմենտների արժեքները կախում չունեն c մեծությունից։ Հարմարության համար c-ն ընտրվում է այնպես, որ $x_i - c$ տարբերությունները ըստ հնարավորության լինեն փոքր։

Երկրորդ պարզեցումը, որ մտցվում է բնութագրիչները հաշվելիս, այն է, որ h երկարություն ունեցող միջակայքերի փոխարեն մտցվում են միավոր երկարություն ունեցող միջակայքեր՝ $x_i - c$ մեծությունների փոխարեն գիտարկելով $\frac{x_i - c}{h}$ մեծությունները։ Ակներև է, որ

$$b_k = \frac{\sum_{i=1}^{r} (x_i - c)^k \cdot m_i}{n} = h^k \frac{\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{x_i - c}{h}\right)^k m_i}{n}$$

կամ

$$b_k = h^k \cdot a_k\text{։}$$

Ուստի ըստ (493), (494), (495) և (496) բանաձևերի կստանանք

$$\overline{X} = ha_1 + c,$$

$$S^2 = h^2 (a_2 - a_1^2),$$

$$\overline{\mu}_3 = h^3 (a_3 - 3a_2a_1 + 2a_1^3), \qquad (497)$$

$$\overline{\mu}_4 = h^4 (a_4 - 4a_3a_1 + 6a_2a_1^2 - 3a_1^4)\text{։}$$

Օրինակ. Չափված են 160 դետալների չափերը՝ 0,5 մմ ճշտությամբ։ Ստացված չափերի շեղումները իրենց նոմինալ արժեքից վերածվել են 10 միջակայքերի և ստացվել է հետևյալ վիճակագրական շարքը.

X	—16-ից մինչև —12	—12-ից մինչև —8	—8-ից մինչև —4	—4-ից մինչև 0	0-ից մինչև 4	4-ից մինչև 8	8-ից մինչև 12	12-ից մինչև 16	16-ից մինչև 20	20-ից մինչև 24
m	4	11	18	23	28	27	22	16	8	3
$\frac{m}{n}$	0,025	0,069	0,113	0,144	0,17	0,169	0,138	0,100	0,050	0,018

Հաշվել X մեծության վերցվածքային միջինը, դիսպերսիան և երրորդ ու չորրորդ կարգի մոմենտները։

Մեր դեպքում $n=160$ և $h=4$։ Ընդունելով $c=2$, նախ հաշվենք a_1, a_2, a_3 և a_4 մեծությունները, հաշվումները դասավորելով հետևյալ աղյուսակում.

x	−14	−10	−6	−2	2	6	10	14	18	22
m	4	11	18	23	28	27	22	16	8	3
$\frac{x-c}{h}$	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$\left(\frac{x-c}{h}\right)^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
$\left(\frac{x-c}{h}\right)^3$	−64	−27	−8	−1	0	1	8	27	64	125
$\left(\frac{x-c}{h}\right)^4$	256	81	16	1	0	1	16	81	256	625
$m\cdot\left(\frac{x-c}{k}\right)$	−16	−33	−36	23	0	27	44	48	32	15
$m\left(\frac{x-c}{h}\right)^2$	64	99	72	23	0	27	88	144	128	75
$m\left(\frac{x-c}{h}\right)^3$	−256	−297	−144	−23	0	27	176	432	512	375
$m\left(\frac{x-c}{h}\right)^4$	1024	891	288	23	0	27	352	1296	2048	1875

Համապատասխան տողերի թվերը գումարելով, կստանանք

$$\sum m\left(\frac{x-c}{h}\right)=58, \qquad \sum m\left(\frac{x-c}{h}\right)^2=720,$$

$$\sum m\left(\frac{x-c}{h}\right)^3=802, \qquad \sum m\left(\frac{x-c}{h}\right)^4=7824\text{։}$$

Հետևաբար՝

$$a_1=\frac{58}{160}\approx 0{,}362, \qquad a_2=\frac{720}{160}\approx 4{,}500,$$

$$a_3=\frac{802}{160}\approx 5{,}012, \qquad a_4=\frac{7824}{160}\approx 48{,}90\text{։}$$

(497) բանաձևերով գտնում ենք

$$\overline{X} \approx 4 \cdot 0{,}362 + 2 \approx 3{,}448,$$

$$\overline{\mu}_2 = S^2 \approx 16(4{,}500 - (0{,}362)^2) \approx 69{,}92,$$

$$\overline{\mu}_3 \approx 64(5{,}012 - 3 \cdot 0{,}362 \cdot 4{,}500 + 2 \cdot (0{,}362)^3) \approx 14{,}02,$$

$$\overline{\mu} \approx 256(48{,}90 - 4 \cdot 5{,}012 \cdot 0{,}362 + 6 \cdot 4{,}500 \cdot (0{,}362)^2 -$$

$$-3(0{,}362)^4 \approx 11558։$$

69. Երկչափ պատահական մեծության վերցվածքային բնութագրիչները։ *Ենթադրենք երկչափ* $Z = (X, Y)$ *պատահական մեծության բաշխման* $F(x, y)$ *ֆունկցիան և հետևաբար՝ նրա բաշխման բնութագրիչները՝*

$$a_z = (a_x, a_y), \tag{498}$$

միջին արժեքը և դիսպերսիան՝

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}, \tag{499}$$

որտեղ՝

$$a_x = E(X), \quad a_y = E(Y), \quad \sigma_x^2 = D(X), \quad \sigma_y^2 = D(y),$$

$$\mu_{11} = E[X - a_x)(Y - a_y)] \tag{500}$$

անհայտ են։

Այդ պատահական մեծության նկատմամբ կատարված n *անկախ փորձերը տվել են* n *ծավալ ունեցող վերցվածքային բազմություն՝*

$$Z_1 = (X_1, Y_1), \quad Z_2 = (X_2, Y_2), \ \dots \ Z_n = (X_n, Y_n)\text{․}$$

ինչպես և մեկ պատահական մեծության համար, կարելի է կազմել երկչափ $Z = (X, Y)$ *պատահական մեծության վերցվածքային բնութագրիչները։*

Այդ բնութագրիչներն են. վերցվածքային միջինը՝

$$\overline{Z} = (\overline{X}, \overline{Y}),$$

որտեղ

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \qquad \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}, \tag{501}$$

վերցվածքային դիսպերսիան՝

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} S_x^2 & \overline{\mu}_{11} \\ \overline{\mu}_{11} & S_y^2 \end{pmatrix}, \tag{502}$$

որտեղ

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n}; \qquad S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2}{n} \tag{503}$$

և

$$\overline{\mu}_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{n}, \tag{504}$$

ընդ որում $\overline{\mu}_{11}$-*ը վերցվածքային կոռելյացիայի մոմենտն է։ Այդ վերցվածքային բնութագրիչները երկչափ պատահական մեծության համապատասխան անհայտ բնութագրիչների վիճակագրական գնահատականներն են։ Իմանալով անհայտ բնութագրիչների գնահատականները, հնարավոր է ստանալ նաև բաշխման անհայտ պարամետրերի գնահատականները. օրինակ,* X *և* Y *պատահական մեծությունների կոռելյացիայի գործակցի գնահատականը կլինի*

$$\overline{r}_{xy} = \frac{\overline{\mu}_{11}}{S_x S_y}, \tag{505}$$

ռեգրեսիայի՝

$$\hat{\delta}_1 = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} r_{xy}, \qquad \hat{\delta}_2 = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r_{xy}, \tag{506}$$

գործակիցների գնահատականները կլինեն՝

$$\overline{\delta}_1 = \frac{S_x}{S_y} \overline{r}_{xy}, \qquad \overline{\delta}_2 = \frac{S_y}{S_x} \overline{r}_{xy}, \tag{507}$$

70. Երկչափ պատահական մեծության վերցվածքային բնութագրիչների հաշվումը: *Եթե փորձերի* n *թիվը բավականաչափ մեծ է, ապա փորձերի արդյունքներից կազմվում է կոռելյացիայի աղյուսակ հետևյալ եղանակով։ Ամբողջ* (a, b) *և* (c, d) *միջակայքերը, որոնց մեջ* ընկած են դիտված X-ի և համապատասխանաբար՝ Y-ի արժեքները, բաժանվում են մի քանի (10—20) մասնավոր միջակայքերի՝

$$(a,\ x_1'],\quad (x_1',\quad x_2'],\ \cdots (x_{i-1}',\ x_i'],\ \ldots (x_{r-1}',\ b),$$

$$(c,\ y_1'],\quad (y_1',\quad y_2'],\cdots\ (y_{j-1}',\ y_j'],\ \ldots (y_{s-1}',\ d)$$

որտեղ r-ը և s-ը համապատասխան մասնավոր միջակայքերի թվերն են և հետևաբար՝ $\frac{b-a}{r} = h_x$ և $\frac{d-c}{s} = h_y$ թվերը համապատասխան միջակայքերի երկարություններն են։

Նշանակենք m_{ij}-ով $(i = 1,\ 2, \ldots r;\ \ j = 1,\ 2,\ \ldots s)$ այն $Z_k = (X_k,\ Y_k)$ $(k = 1,\ 2, \ldots n)$ զույգերի թիվը, որոնց համար X_k-ն ընկած է i-րդ $(x_{i-1}',\ x_i']$ միջակայքում, իսկ Y_k-ն՝ j-րդ $(y_{j-1}',\ y_j']$ միջակայքում. այդ դեպքում կոռելյացիայի աղյուսակը կունենա հետևյալ տեսքը՝

X \ Y	$(c,\ y_1']$	$(y_1',\ y_2']$	...	$(y_{j-1}',\ y_j']$	...	$(y_{s-1}',\ d)$
$(a,\ x_1']$	m_{11}	m_{12}	...	m_{1j}	...	m_{1s}
$(x_1',\ x_2']$	m_{21}	m_{22}	...	m_{2j}	...	m_{2s}
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
$(x_{i-1}',\ x_i']$	m_{i1}	m_{i2}	...	m_{ij}	...	m_{is}
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
$(x_{r-1}',\ b]$	m_{r1}	m_{r2}	...	m_{rj}	...	m_{rs}

Ինչպես վիճակագրական շարքի միջոցով պատահական մեծության համար վերցվածքային բնութագրիչները հաշվելիս, այնպես էլ այստեղ կոռելյացիայի աղյուսակի միջոցով երկչափ պատահական մեծության վերցվածքային բնութագրիչները հաշվելիս, կընդունենք, որ X-ի բոլոր այն արժեքները, որոնք ընկած են $(x^{1}_{i-1}, x^{1}_{i}]$ $(i=1, 2, \dots r)$ միջակայքում, հավասար են այդ միջակայքի միջին $x_i = \frac{x^{1}_{i-1}+x^{1}_{i}}{2}$ $(i=1, 2, \dots r)$ արժեքին և նման ձևով Y-ի բոլոր արժեքները, որոնք ընկած են j-րդ $(y^{1}_{j-1}, y^{1}_{j}]$ $(j=1, 2, \dots s)$ միջակայքում, բոլորը հավասար են միևնույն $y_j = \frac{y^{1}_{j-1}+y^{1}_{j}}{2}$ $(j=1, 2, \dots s)$ արժեքին։ Այդ դեպքում կոռելյացիայի աղյուսակի համար վերցվածքային բնութագրիչները կներկայացվեն հետևյալ մոտավոր բանաձևերով՝

$$\overline{X} \approx \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} m_{ij}x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{r} m_{i\cdot}x_i}{n},$$

$$\overline{Y} \approx \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} m_{ij}y_j}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{s} m_{\cdot j}y_j}{n}, \qquad (508)$$

$$S_x^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} m_{ij}(x_i-\overline{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{r} m_{i\cdot}(x_i-\overline{X})^2}{n}, \qquad (509)$$

$$S_y^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} m_{ij}(y_j-\overline{Y})^2}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{s} m_{\cdot j}(y_j-\overline{Y})^2}{n}, \qquad (510)$$

$$\overline{\mu}_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} m_{ij}(x_i-\overline{X})(y_j-\overline{Y})}{n}, \qquad (511)$$

ընդ որում՝

$$m_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{s} m_{ij}, \quad m_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{r} m_{ij}, \qquad n=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} m_{ij}, \tag{512}$$

Կոռելյացիայի աղյուսակը կարելի է պատկերել հետևյալ տեսքով՝

X \ Y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_s	$m_{i\cdot}$
x_1	m_{11}	m_{12}	...	m_{1j}	...	m_{1s}	$m_{1\cdot}$
x_2	m_{21}	m_{22}	...	m_{2j}	...	m_{2s}	$m_{2\cdot}$
...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	m_{i1}	m_{i2}	...	m_{ij}	...	m_{is}	$m_{i\cdot}$
...	...	...	...	...	...	...	...
x_r	m_{r1}	m_{r2}	...	m_{rj}	...	m_{rs}	$m_{r\cdot}$
$m_{\cdot j}$	$m_{\cdot 1}$	$m_{\cdot 2}$	...	$m_{\cdot j}$	...	$m_{\cdot s}$	n

Վերցվածքային բնութագրիչները ըստ կոռելյացիայի աղյուսակի հաշվելիս կարելի է մտցնել որոշ պարզեցումներ, x_i $(i = 1, 2, \dots r)$ մեծությունը փոխարինելով $\frac{x_i-\alpha}{h_x}$ մեծությամբ, իսկ $y_j (j = 1, 2, \dots s)$ մեծությունը $\frac{y_j-\beta}{h_y}$ մեծությամբ, որտեղ α-ն և β-ն կամայական թվեր են։ Այդ դեպքում 497-ից կունենանք

$$\overline{X}=h_x a_1+\alpha, \qquad \overline{Y}=h_y b_1+\beta, \tag{513}$$

$$S_x^2=h_x^2(a_2-a_1^2), \qquad S_y^2=h_y^2(b_2-b_1^2),$$

որտեղ

$$a_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} m_{i\cdot}\left(\frac{x_i-\alpha}{h_x}\right)^k}{n}, \quad b_k = \frac{\sum\limits_{j=1}^{s} m_{\cdot j}\left(\frac{y_j-\beta}{h_y}\right)^k}{n}, \quad k=1,\ 2։ \qquad (514)$$

Այժմ ստանանք նման բանաձև նաև վերցվածքային կոռելյացիոն մոմենտի համար, ունենք

$$\mu_{11} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{s} m_{ij}(x_i-\overline{X})(y_j-\overline{Y})}{n} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{s} m_{ij}\left[(x_i-\alpha)-(\overline{X}-\alpha)\right]\left[(y_j-\beta)-(\overline{Y}-\beta)\right]}{n} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{s} m_{ij}(x_i-\alpha)(y_j-\beta)}{n} - (\overline{X}-\alpha)\cdot(\overline{Y}-\beta).$$

նշանակելով

$$c_{xy} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{s} m_{ij}\left(\frac{x_i-\alpha}{h_x}\right)\left(\frac{y_j-\beta}{h_y}\right)}{n},$$

կստանանք

$$\overline{\mu}_{11} = h_x h_y c_{xy} - (\overline{X}-\alpha)(\overline{Y}-\beta)$$

և

$$\overline{r}_{xy} = \frac{c_{xy}}{\sqrt{(a_2-a_1^2)(b_2-b_1^2)}} - \frac{(\overline{X}-\alpha)(\overline{Y}-\beta)}{S_x\cdot S_y}, \qquad (515)$$

Օրինակ. $Z=(X,\ Y)$ երկչափ պատահական մեծության նկատմամբ կատարված $n=100$ փորձերի արդյունքները բերված են հետևյալ կոռելյացիայի աղյուսակում.

X \ Y	$2\frac{1}{2}$	5	$7\frac{1}{2}$	10	$12\frac{1}{2}$	15	$m_{i\cdot}$
1	1	1	2	1	0	0	5
3	0	2	5	4	3	1	15
5	0	2	8	10	2	1	23
7	0	1	3	11	7	3	25
9	0	0	2	4	8	4	18
11	0	0	1	4	4	2	11
13	0	0	0	1	1	1	3
$m_{\cdot j}$	1	6	21	35	25	12	100

Որոշել $Z=(X,\ Y)$ *պատահական մեծության վերցվածքային բնութագրիչները։ Ունենք* $r=7,\ s=6,\ h_x=2,\ h_y=2\frac{1}{2}$. *Վերցնենք* $\alpha=7,\ \beta=10$ *և կազմենք* $\frac{x_i-\alpha}{h_x},\ \frac{y_j-\beta}{h_y}$ *արժեքների համապատասխան օժանդակ աղյուսակը.*

	−3	−2	−1	0	1	2	$m_{i\cdot}$
−3	1	1	2	1	0	0	5
−2	0	2	5	4	3	1	15
−1	0	2	8	10	2	1	23
0	0	1	3	11	7	3	25
1	0	0	2	4	8	4	18
2	0	0	1	4	4	2	11
3	0	0	0	1	1	1	3
$m_{\cdot j}$	1	6	21	35	25	12	100

Օգտվելով այս աղյուսակից, ստանում ենք

$$a_1 = -0{,}190, \qquad b_1 = 0{,}130, \qquad a_2 = 2{,}170, \qquad b_2 = 1{,}270,$$

$$c_{xy} = 0{,}740$$

և

$$\overline{X} = -0{,}19 \cdot 2 + 7 = 6{,}62, \qquad \overline{Y} = 0{,}13 \cdot \frac{5}{2} + 10 = 10{,}325,$$

$$S_x^2 = 4(2{,}17 - (0{,}19)^2) = 8{,}536, \qquad S_y^2 = \frac{25}{4}(1{,}27 - (0{,}13)^2) =$$

$$= 7{,}832,$$

$$\overline{r}_{xy} = \frac{0{,}740}{1{,}460 \cdot 1{,}119} + \frac{0{,}38 \cdot 0{,}325}{2{,}798 \cdot 2{,}922} = 0{,}468:$$

Կարելի է ստանալ նաև ռեգրեսիայի ուղիղ գծերի գործակիցների գնահատականները. ունենք

$$\overline{\delta_1} = \frac{\sqrt{8{,}536}}{\sqrt{7{,}832}} \cdot 0{,}468 = 0{,}489, \qquad \overline{\delta_2} = \frac{\sqrt{7{,}832}}{\sqrt{8{,}536}} \cdot 0{,}468 = 0{,}448:$$

71. Վերցվածքային բնութագրիչների մաթեմատիկական սպասումները և դիսպերսիաները: X *պատահական մեծության հետ կատարված* n *անկախ փորձերի արդյունքները նշանակենք*

$$X_1, \quad X_2, \cdots X_n:$$

Նկատի ունենալով, որ X_j*-ի արժեքները* ($j = 1, 2, \cdots n$)*, որպես փորձի արդյունքներ, պատահական մեծություններ են, վերցվածքային միջինը՝*

$$\overline{X} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n},$$

նույնպես կլինի պատահական մեծություն: Որոշենք նրա մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան, եթե

$$E(X) = a, \qquad D(X) = \sigma^2:$$

Կիրառելով պատահական մեծությունների գումարի մաթեմատիկական սպասման վերաբերյալ թեորեմը, կստանանք

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\,[\,E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)]\text{։}$$

Քանի որ յուրաքանչյուր $X_j (j = 1,\ 2,\ \cdots n)$ *պատահական մեծություն ունի նույն բաշխումը, ինչ որ* X *պատահական մեծությունը, ուրեմն*

$$E(X_j) = a, \quad j=1,\ 2,\ \cdots\ n,$$

հետևաբար՝

$$E(x) = a, \tag{516}$$

այսինքն՝ պատահական մեծության վերցվածքային միջինի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ մեծության մաթեմատիկական սպասմանը:

Վերցվածքային միջինի դիսպերսիան կստացվի անկախ գումարելիների գումարի դիսպերսիայի վերաբերյալ թեորեմի օգնությամբ.

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n^2}\right) = \frac{D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}{n^2} =$$

$$= \frac{D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)}{n^2},$$

և քանի որ $D(X_j) = D(X)$, *ուրեմն*

$$D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}, \tag{517}$$

այսինքն՝ պատահական մեծության վերցվածքային միջինի դիսպերսիան հավասար է այդ մեծության դիսպերսիային՝ բաժանած փորձերի թվի վրա:

Կիրառելով

$$\overline{X} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}$$

պատահական մեծության նկատմամբ Չեբիշևի անհավասարությունը, կստանանք

$$P\left(\,|\,\overline{X} - E(\overline{X})\,| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2},$$

որտեղ $\varepsilon > 0$ ցանկացած թիվ է։ Այս հավասարության մեջ $\overline{E(X)}$-ի և $D(\overline{X})$-ի արժեքները տեղադրելով, գտնում ենք

$$P(|\overline{X}-a| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

որտեղից հետևում է, որ

$$\lim_{n \to \infty} P(|\overline{X}-a| \geqslant \varepsilon) = 0\text{։} \qquad (518)$$

Այսպիսով, մեծ թվով փորձերի ժամանակ միավորին մոտ հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ X մեծության մաթեմատիկական սպասումը քիչ է տարբերվում այդ մեծության վերցվածքային միջինից։

$\overline{X}$-ը $a = E(X)$ միջին արժեքի վիճակագրական գնահատականն է, և, ինչպես տեսանք, $E(\overline{X}) = a$։ Վիճակագրական գնահատականը, լինելով փորձերի արդյունքների ֆունկցիա, կոչվում է որևէ անհայտ բնութագրիչի կամ պարամետրի անշեղելի գնահատական, եթե նրա մաթեմատիկական սպասումը հավասար է գնահատվող բնութագրիչին կամ պարամետրին։ Ուստի $\overline{X}$-ը a-ի անշեղելի գնահատականն է։ Մյուս կողմից, փորձերի արդյունքների որևէ՝ $\overline{\Theta} = \overline{\Theta}(X_1, X_2, \cdots X_n)$, ֆունկցիան կոչվում է անհայտ Θ բնութագրի կամ պարամետրի ունակային գնահատական, եթե $\overline{\Theta}$-ի՝ Θ-ից ոչ քիչ տարբերվելու հավանականությունը ձգտում է զրոյի, երբ վերցվածքի ծավալը (փորձերի թիվը) ձգտում է անվերջության, այսինքն՝

$$\lim_{n \to \infty} P(|\overline{\Theta}-\Theta| \geqslant \varepsilon) = 0\text{։} \qquad (519)$$

(287)-ի համաձայն $\overline{X}$-ը անհայտ $a = E(X)$ միջինի համար նաև ունակային գնահատական է։ Քանի որ $\overline{X}$-ը $a = E(X)$ միջինի համար թե՛ անշեղելի, թե՛ ունակային գնահատական է, ապա մեծ թվով փորձերի ժամանակ կարելի է անհայտ a-ն փոխարինել իր $\overline{X}$ գնահատականով։

Դիտարկենք մասնավոր դեպք, երբ X պատահական մեծությունը որևէ A պատահարի հանդես գալու թիվն է մեկ փորձում, այսինքն՝ նրա հավանականությունների բաշխման օրենքն է՝

X՝	0,	1
	q,	p,

որտեղ $p = P(A)$, $q = P(\bar{A})$, $(p + q = 1)$։ Այդ պատահական մեծության նկատմամբ կատարված n անկախ փորձերը կտան մի վերցվածք՝ $X_1, X_2, \ldots, X_n$, որը ներկայացնում է 0 և 1 թվերից կազմված մի հաջորդականություն, ընդ որում $X_i = 0$, եթե i-րդ փորձում հանդես է եկել $\bar{A}$ պատահարը և $X_i = 1$, եթե հակառակն է։ Այդ X պատահական մեծության անհայտ E(X) մաթեմատիկական սպասման, այսինքն՝ անհայտ $P(A) = p$ հավանականության, գնահատականն է վերցվածքի $\bar{X}$ միջին թվաբանականը, այսինքն՝ $\frac{m}{n}$ հաճախությունը։ Այդ գնահատականը անշեղելի է, քանի որ

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = p,$$

և ունակային, քանի որ համաձայն Բեռնուլիի թեորեմի

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon \right) = 0։$$

Վերցվածքային դիսպերսիան՝ S^2-ն, նույնպես պատահական մեծություն է. որոշենք նրա մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան։ Այն կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^2}{n} - 2\bar{X}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j}{n} + \bar{X}^2 =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=1} X_j^2}{n} - 2\,\bar{X}^2 + \bar{X}^2$$

կամ

$$S^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^2}{n} - \bar{X}^2, \qquad (520)$$

Անցնելով մաթեմատիկական սպասմանը, կստանանք

$$E(S^2) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E(X_j^2) - E\,(\bar{X}^2) = \frac{1}{n}\sum_{j=}^{n}\sigma^2 - D\,(\bar{X}) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

կամ

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2, \tag{521}$$

Տեսնում ենք, որ S^2-ն $\sigma^2 = D(X)$ անհայտ դիսպերսիայի համար անշեղելի գնահատական չէ, բայց քանի որ

$$E\left(\frac{n}{n-1}\,S^2\right) = \sigma^2,$$

ուրեմն

$$S_1^2 = \frac{n}{n-1}\,S^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2}{n-1} \tag{522}$$

մեծությունը σ^2-ու համար արդեն անշեղելի գնահատական է։ Ինչպես տեսանք (479), եթե a մաթեմատիկական սպասումը հայտնի է, վերցվածքային դիսպերսիա է հանդիսանում S_0^2 մեծությունը. S_0^2-ն անշեղելի գնահատական է անհայտ σ^2 դիսպերսիայի համար, քանի որ

$$E(S_0^2) = E\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-a)^2}{n}\right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i-a)^2}{n} = \frac{n\sigma^2}{n} = \sigma^2,$$

Այժմ հաշվենք S^2 մեծության դիսպերսիան. ունենք

$$D(S^2) = \frac{1}{n^2}\,E\left[\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2\right]^2 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\,\mu_2, \tag{523}$$

Սկզբում հաշվենք

$$A = E\left[\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2\right]^2$$

մեծությունը, կատարենք մի քանի պարզ ձևափոխություններ՝

$$A = E\left[\sum_{j=1}^{n}(X_j-a-\overline{X}+a)^2\right]^2 = E\left[\sum_{j=1}^{n}(X_j-a)^2 -\right.$$

$$-2(\overline{X}-a)\sum_{j=1}^{n}(X_j-a)+\sum_{j=1}^{n}(\overline{X}-a)^2\Big]^2=$$

$$=E\left[\sum_{j=1}^{n}(X_j-a)^2-\frac{2}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}(X_j-a)\Big)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}(X_j-a)\Big)^2\right]^2$$

կամ

$$A=E\left[\sum_{j=1}^{n}(X_j-a)^2-\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}(X_j-a)\Big)^2\right]^2,$$

Պարզության համար մտցնելով նոր պատահական մեծությունները՝

$$z_j=X_j-a, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots n,$$

որոնց համար.

$$E(z_j)=0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots n,$$

կունենանք

$$A=E\left[\sum_{j=1}^{n}z_j^2-\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}z_j\Big)^2\right]^2,$$

Տարբերությունը քառակուսի բարձրացնելով, կստանանք

$$A=E\left[\Big(\sum_{j=1}^{n}z_j^2\Big)^2-\frac{2}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}z_j^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}z_j\Big)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{j=1}^{n}z_j\Big)^4\right]=E\left[\Big(\sum_{j=1}^{n}z_j^2\Big)^2\right]-$$

$$-\frac{2}{n}E\left[\sum_{j=1}^{n}z_j^2\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n}z_j\Big)^2\right]+\frac{1}{n^2}E\left[\Big(\sum_{j=1}^{n}z_j\Big)^4\right],$$

Այժմ հաշվի առնելով, որ z_i *և* z_j *պատահական մեծությունները անկախ են,* $i \neq j$, *և այդ պատճառով՝*

$$E(z_j^4) = \mu_4, \qquad E(z_i^2\ z_j^2) = \mu_2^2, \qquad i \neq j$$

$$Ez_k^2 z_i z_j = 0, \qquad i \neq j, \qquad k = 1,\ 2,\ \cdots n,$$

կունենանք

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} z_j^2\right)^2\right] = E\left(\sum_{j=1}^{n} z_j^4 + 2\sum_{i<j} z_j^2\, z_i^2\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} E(z_j^4) + 2\sum_{i<j} E(z_i^2\ z_j^2) = n\mu_4 + n\cdot(n-1)\,\mu_2^2,$$

$$E\left[\sum_{j=1}^{n} z_j^2\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right)^2\right] = E\left(\sum_{j=1}^{n} z_j^4 + 2\sum_{i<j} z_i^2\ z_i^2 + \sum_{k,\,i<j} z_k^2 z_i z_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} E(z_j^4) + 2\sum_{i<j} E(z_i^2 z_j^2) + 2\sum_{k,\,i<j} E(z_k^2 z_i z_j) =$$

$$= n\mu_4 + n(n-1)\,\mu_2^2,$$

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right)^4\right] = \sum_{j=1}^{n} E(z_j^4) + 6\sum_{<j} E(z_i^2\ z_j^2) = n\mu_4 + 3n(n-1)\,\mu_2^2,$$

Ստացված արժեքները տեղադրելով A-*ի արտահայտության մեջ, կստանանք*

$$A = n\mu_4 + n(n-1)\,\mu_2^2 - \frac{2}{n}\left(n\mu_4 + n(n-1)\,\mu_2^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{n^2}(n\mu_4 + 3n\ (n-1)\mu_2^2),$$

վերջապես, (523)-ի մեջ տեղադրելով, կունենանք

$$D(S^2) = \frac{\mu_4 + (n-1)\,\mu_2^2}{n} - \frac{2(\mu_4 + (n-1)\mu_2^2)}{n^2} +$$

$$+ \frac{\mu_4 + 3\,(n-1)\ \mu_2^2}{n^3} - \frac{(n-1)^2}{n^2}\,\mu_2^2$$

կամ

$$D(S^2)=\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n}-\frac{2(\mu_4-2\mu_2^2)}{n^2}+\frac{\mu_4-3\mu_2^2}{n^3}, \tag{524}$$

Մեծ թվով փորձերի ժամանակ S^2 *դիսպերսիայի մոտավոր արժեքը՝*

$$D(S^2)\approx\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n}, \tag{525}$$

իսկ պատահական S_1^2 *մեծության դիսպերսիան՝*

$$D(S_1^2)=D\left(\frac{n}{n-1}S^2\right)=\frac{n(\mu_4-\mu_2^2)}{(n-1)^2}, \tag{526}$$

Այժմ S_1^2 *պատահական մեծության նկատմամբ կիրառելով Չեբիշևի անհավասարությունը, կստանանք*

$$P(|S_1^2-\sigma^2|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D(S_1^2)}{\varepsilon^2},$$

որտեղ ε*-ը ցանկացած թիվ է։ Այս անհավասարության մեջ, անցնելով սահմանին՝ երբ* n*-ը ձգտում է անվերջության, և հաշվի առնելով (526) բանաձևը, գտնում ենք*

$$\lim_{n\to\infty}P(|S_1^2-\sigma^2|\geqslant\varepsilon)=0, \tag{527}$$

միաժամանակ նաև

$$\lim_{n\to\infty}P(|S^2-\sigma^2|\geqslant\varepsilon)=0։ \tag{528}$$

Այսպիսով, եթե փորձերի թիվը ձգտում է անվերջության, միավորի ձգտող հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ X պատահական մեծության անհայտ դիսպերսիան՝ σ^2*-ն, քիչ է տարբերվում* S^2 *մեծությունից։ Հետևաբար՝* S_1^2*-ն և* S^2*-ն անհայտ* $D(X)=\sigma^2$ *դիսպերսիայի ունակային գնահատականներն են։ Մեծ թվով փորձերի ժամանակ կարելի է անհայտ* σ^2 *դիսպերսիան փոխարինել իր* S^2 *գնահատականով։*

Քննարկելով ավելի բարձր կարգի վերցվածքային մոմենտները, կարելի է ցույց տալ, որ բավական մեծ թվով փորձերի ժամանակ տեղի ունի մոտավոր հավասարություն՝ պատահական մեծության անհայտ կենտրոնական մոմենտների և համապատասխան վերցվածքային մոմենտների միջև։

72. Անհայտ պարամետրերի գնահատականները։ *Սովորաբար X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան պարունակում է որոշակի հաստատուններ, որոնք կոչվում են բաշխման պարամետ-*

րեր. օրինակ, նորմալ բաշխման ֆունկցիան պարունակում է բաշխման երկու պարամետրեր՝ a և $\sigma > 0$, իսկ բինոմական բաշխումը՝ մեկ պարամետր՝ $p > 0$։

Այստեղ կքննարկենք այդ պարամետրերի գնահատականների կառուցման խնդիրը՝ փորձերի արդյունքների տվյալներից, երբ բաշխման ֆունկցիայի տեսքը հայտնի է, իսկ նրա մեջ մտնող պարամետրերն անհայտ են։

Այսպիսով, X պատահական մեծությունն ունի $F(x, \Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k)$ որոշակի բաշխման ֆունկցիա, որի մեջ մտնող Θ_1, $\Theta_2, \cdots \Theta_k$ պարամետրերն անհայտ են։ Այդ X պատահական մեծության նկատմամբ կատարված n անկախ փորձերը տվել են

$$X_1, X_2, \cdots X_n$$

վերցվածքային բազմությունը։ Պահանջվում է կառուցել անհայտ՝ Θ_1, $\Theta_2, \cdots \Theta_k$ պարամետրերի համար համապատասխան գնահատականներ։

Շարադրենք այդ խնդրի լուծման երկու եղանակ։

Առաջին եղանակը կոչվում է «մոմենտների եղանակ». այդ եղանակի էությունն այն է, որ, իմանալով անհայտ մոմենտների գնահատականները, կարելի է ստանալ նաև անհայտ պարամետրերի գնահատականները, քանի որ մոմենտները այդ պարամետրերի ֆունկցիաներն են

$$
\begin{aligned}
E(X) &= a(\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k),\\
D(X) &= b(\Theta_1, \Theta_2 \cdots \Theta_k), \qquad (529)\\
E(X^l) &= m_l(\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k), \qquad l = 3, 4, \cdots\\
E[(X - E(X))^l] &= \mu_l(\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k), \qquad l = 3, 4, \cdots։
\end{aligned}
$$

Այս հավասարությունների մեջ անհայտ միջին արժեքը, դիսպերսիան և մոմենտները փոխարինելով իրենց համապատասխան հայտնի գնահատականներով՝ $\overline{X}$, S^2, $\overline{m}_k$ (կամ μ_k) մեծություններով, կստանանք անհայտ Θ_1, Θ_2, $\cdots$ Θ_k պարամետրերի համապատասխան գնահատականների համար հետևյալ հավասարումների սիստեմը՝

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= a(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \cdots \overline{\Theta}_k),\\
S^2 &= b(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \cdots \overline{\Theta}_k), \qquad (530)\\
\overline{\mu}_l &= \mu_l(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \cdots \overline{\Theta}_k), \quad l = 3, 4, \cdots k,
\end{aligned}
$$

որը $\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \cdots \overline{\Theta}_k$-երի նկատմամբ լուծելով, կստանանք որոնելի գնահատականները։

Անհայտ պարամետրերի գնահատականների կառուցման երկրորդ եղանակը կոչվում է «ճշմարտանմանության մաքսիմումի եղանակ»։ Այդ եղանակի սկզբունքն այն է, որ փորձերում ստացված $X_1, X_2, \ldots X_n$ արժեքները հանդիսանում են պատահական մեծության ամենահավանական արժեքները, այդ պատճառով անհայտ պարամետրերի ամենալավ գնահատականները կլինեն այն արժեքները, որոնց դեպքում փորձերում ստացված $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ արդյունքը կունենա մեծագույն հավանականությունը։

Շարադրենք այս եղանակը այն դեպքի համար, երբ պատահական մեծությունը դիսկրետ պատահական մեծություն է։ X պատահական մեծության բաշխման օրենքը նշանակենք $p(x/\Theta_1, \Theta_2, \Theta_k)$-ով, այսինքն՝

$$P(X=x)=p(x/\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k), \tag{531}$$

որտեղ

$$\sum_x p(x/\Theta_1, \Theta_2 \cdots \Theta_k)=1,$$

և $\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k$ մեծությունները բաշխման պարամետրերն են։ Այս դեպքում n անկախ փորձերում $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ արդյունքի հանդես գալու հավանականությունը բազմապատկման թեորեմի համաձայն կլինի

$$P_n(X_1, X_2, \cdots X_n/\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k)=p(X_1/\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k)\cdot \tag{532}$$

$$\cdot p(X_2/\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k)\cdot \ldots \cdot p(X_n/\theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k)։$$

Ելնելով ճշմարտանմանության մաքսիմումի սկզբունքից, $\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k$ պարամետրերը պետք է ունենան այնպիսի արժեքներ, որ այդ հավանականությունը ստանա մեծագույն արժեք. դրա համար անհրաժեշտ է, որ

$$\frac{\partial P_n}{\partial \theta_1}=0, \qquad \frac{\partial P_n}{\partial \theta_2}=0, \ \cdots \qquad \frac{\partial P_n}{\partial \theta_k}=0։ \tag{533}$$

Լուծելով այս սիստեմը անհայտ $\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k$ պարամետրերի նկատմամբ, կստանանք

$$
\begin{aligned}
\overline{\Theta}_1 &= \overline{\Theta}_1(X_1, X_2, \cdots X_n),\\
\overline{\Theta}_2 &= \overline{\Theta}_2(X_1, X_2, \cdots X_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\overline{\Theta}_k &= \overline{\Theta}_k(X_1, X_2, \cdots X_n)։
\end{aligned}
\tag{534}
$$

Եթե այս արժեքները, իրոք, $P_n(X_1, X_2, \cdots X_n/\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k)$ ֆունկցիան դարձնում են մեծագույն, ապա հենց այս արժեքները հանդիսանում են անհայտ $\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_k$ պարամետրերի գնահատականները։

(532) ֆունկցիան կոչվում է ճշմարտանմանության ֆունկցիա։

Այն դեպքում, երբ X պատահական մեծությունն անընդհատ պատահական մեծություն է, (532) ճշմարտանմանության ֆունկցիայի արտահայտության մեջ $p(x/\Theta_1, \Theta_2 \cdots \Theta_k)$ ֆունկցիան կլինի պատահական մեծության խտությունը։

Օրինակ 1. X *պատահական մեծությունն ունի ցուցչային բաշխում՝*

$$
F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\theta x}, & x > 0, \end{cases}
$$

որը պարունակում է $\Theta > 0$ անհայտ պարամետրը։ X-ի մաթեմատիկական սպասումը՝

$$
E(X) = \int_0^\infty x f(x)\, dx = \Theta \int_0^\infty x e^{-\Theta x}\, dx = \frac{1}{\Theta},
$$

իսկ այդ մաթեմատիկական սպասման գնահատականը՝

$$
\overline{X} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n},
$$

Ըստ մոմենտների եղանակի համաձայն Θ պարամետրի $\overline{\Theta}$ գնահատականը ստացվում է

$$
\overline{X} = \frac{1}{\overline{\Theta}}
$$

համասարումից.

$$\Theta = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k},$$

Օ ր ի ն ա կ 2. X պատահական մեծությունն ունի Պուասսոնի բաշխման օրենքը՝ $a > 0$ անհայտ պարամետրով։ n անկախ փորձերի արդյունքը տվել է

$$X_1, X_2, \cdots X_n$$

վերցվածքային բազմությունը։ Քանի որ Պուասսոնի բաշխման օրենքի դեպքում

$$p(x/a) = P(X = x) = e^{-a} \frac{a^x}{x!},$$

$$P_n(x_1, x_2, \cdots x_n/a) = e^{-an} \frac{a^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{a^{x_2}}{x_2!} \cdots \frac{a^{x_n}}{x_n!}$$

կամ

$$P_n(x_1, x_2, \cdots x_n/a) = e^{-an} \frac{a^{x_1+x_2+\ldots+x_n}}{x_1!\, x_2! \cdots x_n!},$$

Ճշմարտանմանության մաքսիմումի եղանակի համաձայն a անհայտ պարամետրը պետք է ունենա այնպիսի արժեք, որ $P_n(X_1, X_2, \cdots X_n/a)$ ճշմարտանմանության ֆունկցիան լինի մեծագույնը։ Դրա համար անհրաժեշտ է, որ

$$\frac{\partial P_n(X_1, X_2 \cdots X_n/a)}{\partial a} = 0,$$

այսինքն՝

$$-n \cdot e^{-an} \frac{a^{X_1+X_2+\ldots+X_n}}{X_1!\, X_2! \cdots X_n!} +$$

$$+ e^{-an} \frac{(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \cdot a^{X_1+X_2+\ldots+X_n-1}}{X_1!\, X_2! \cdots X_n!} = 0\text{։}$$

Պարզեցնելով, ստանում ենք

$$-n + \frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{a} = 0$$

հավասարումը, որտեղից

$$a = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n},$$

Երկրորդ կարգի ածանցյալի միջոցով կարելի է ցույց տալ, որ ստացված a*-ի արժեքը, իրոք,* $P_n\,(X_1, X_2, \cdots X_n/a)$ *հավանականությունը դարձնում է մեծագույն: Այսպիսով,* a *պարամետրի գնահատականը կլինի*

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n}$$

վերցվածքային միջինը:

Օրինակ 3. X *պատահական մեծությունն ունի նորմալ բաշխում՝*

$$p(x/a,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

խտությամբ, որի a *և* σ *պարամետրերն անհայտ են:* n *անկախ փորձերի արդյունքը տվել է* $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ *վերցվածքային բազմությունը:* $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ n*-չափանի պատահական մեծության խտությունը կլինի*

$$P_n(x_1, x_2, \cdots x_n/a,\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-a)^2},$$

Ճշմարտանմանության սկզբունքի համաձայն անհայտ a *և* σ *պարամետրերը պետք է ընտրել այնպիսի արժեքներ, որ ճշմարտանմանության* $P_n\,(X_1, X_2, \cdots X_n/a, \sigma)$ *ֆունկցիան լինի մեծագույնը. դրա համար անհրաժեշտ է, որ*

$$\frac{\partial P}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial P_n}{\partial \sigma} = 0$$

կամ

$$\frac{1}{\sigma^{n+2}(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)^2} \cdot \sum_{k=1}^{n}(X_k-a)=0,$$

$$\frac{1}{\sigma^{n+1}(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)^2}\left[-n+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)\right]=0.$$

Այս հավասարումների սիստեմը լուծելով, կստանանք

$$a=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{n}=\overline{X},$$

$$\sigma^2=\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2}{n}=S^2:$$

Կարելի է ստուգել, որ ստացված արժեքները, իրոք, $P_n(X_1, X_2, \cdots X_n/a, \sigma)$ ֆունկցիան դարձնում են մեծագույն։ Հետևաբար՝

$$\overline{a}=\overline{X}, \qquad \overline{\sigma^2}=S^2:$$

Այսպիսով, ճշմարտանմանության մաքսիմումի եղանակը տվյալ դեպքում տվեց անհայտ $a=E(X)$ պարամետրի համար անշեղելի և ունակային գնահատական, իսկ $\sigma^2=D(X)$ պարամետրի համար՝ ունակային գնահատական։

Նկարագրված ճշմարտանմանության մաքսիմումի եղանակը կարելի է կիրառել նաև երկչափ պատահական մեծությունների նկատմամբ։ Դիցուք երկչափ $Z=(X, Y)$ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխումը տրվում է $p(x, y/\Theta_1, \Theta_2)$* ֆունկցիայի միջոցով

* Պարզության համար սահմանափակվում ենք երկու պարամետրերով. ակներև է, որ բերված դատողությունները ճիշտ են նաև ցանկացած թվով պարամետրերի համար։

(խտության կամ բաշխման օրենք), որտեղ Θ_1-ը և Θ_2-ը անհայտ պարամետրեր են: Որոշենք այդ անհայտ պարամետրերի գնահատականները, եթե հայտնի են երկչափ պատահական մեծության նկատմամբ կատարված n անկախ փորձերի արդյունքները՝

$$X_1,\ X_2,\ \cdots X_n \tag{535}$$

$$Y_1,\ Y_2,\ \cdots\ Y_n:$$

Տվյալ անհայտ Θ_1, Θ_2 պարամետրերին համապատասխանում է

$$P_n(X_1,\ X_2,\ \cdots\ X_n,\ Y_1,\ Y_2,\ \cdots\ Y_n/\Theta_1,\ \Theta_2) =$$

$$= p(X_1,\ Y_1/\Theta_1,\ \Theta_2)\cdot p(X_2,\ Y_2/\ \Theta_1,\ \Theta_2)\ \cdots\ p(X_n,\ Y_n/\Theta_1,\ \Theta_2)$$

ճշմարտանմանության ֆունկցիան: Համաձայն ճշմարտանմանության մաքսիմումի եղանակի Θ_1 և Θ_2 պարամետրերը պետք է լինեն այնպիսին, որպեսզի այդ ճշմարտանմանության ֆունկցիան ընդունի իր մեծագույն արժեքը:

73. Փոքրագույն քառակուսիների եղանակը: Դիցուք երկչափ $Z = (X,\ Y)$ պատահական մեծությունն այնպիսին է, որ X-ի հավանականությունների $f(x)$ խտությունը ցանկացած է և չի պարունակում անհայտ պարամետր, իսկ Y-ի պայմանական խտությունը նորմալ խտություն է, ընդ որում յուրաքանչյուր ֆիքսած X-ի համար Y-ի պայմանական $E_x(Y)$ մաթեմատիկական սպասումը մի ցանկացած, ըստ պարամետրերի դիֆերենցելի՝ $\varphi(X/a,\ b,\ \cdots g)$ ֆունկցիա է, որտեղ a, b,$\cdots$ g-ն անհայտ պարամետրեր են՝

$$E_x(Y) = \varphi(X/a,\ b,\ \cdots g): \tag{537}$$

Մասնավորապես, եթե $Z = (X,\ Y)$ երկչափ պատահական մեծությունը ենթարկվում է նորմալ բաշխման, ապա $f(x)$-ը արտահայտվում է (130) բանաձևով, իսկ Y պատահական մեծության պայմանական խտությունը՝ (131) բանաձևով, որտեղից եզրակացնում ենք, որ

$$E_x(Y) = b + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X - a), \tag{538}$$

որտեղ a, b, σ_1, σ_2, r մեծությունները երկչափ նորմալ բաշխման պարամետրերն են:

Ընդհանուր դեպքում Z պատահական մեծության երկչափ խտությունը՝

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[y-\varphi(x/a, b, \cdots g)]^2}, \qquad (539)$$

իսկ ճշմարտանմանության ֆունկցիան՝

$$P_n(X_1, X_2, \cdots X_n, Y_1, Y_2, \cdots Y_n/a, b, \cdots g) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} f(X_1) f(X_2) \cdots f(X_n) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[Y_i - \varphi(X_i/a, b, \cdots g)]^2} : \qquad (540)$$

Այս ֆունկցիայի մեծագույն լինելու համար անհրաժեշտ է, որ a, b,...g պարամետրերը

$$\Psi(a, b, \cdots g) = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - \varphi(X_i/a, b, \cdots g)]^2 \qquad (541)$$

ֆունկցիան դարձնեն մինիմում: Դրա համար անհայտ a, b,$\cdots$g պարամետրերը պետք է բավարարեն

$$\frac{\partial\Psi}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial b} = 0, \cdots \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial g} = 0 \qquad (542)$$

հավասարումների սիստեմին: Տեղադրելով ածանցյալների արժեքները, այդ հավասարումների սիստեմը կգրվի հետևյալ տեսքով՝

$$\sum_{i=1}^{n} [Y_i - \varphi(X_i/a, b, \cdots g)] \frac{\partial\varphi}{\partial a} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} [Y_i - \varphi(X_i/a, b, \cdots g)] \frac{\partial\varphi}{\partial b} = 0, \qquad (543)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} [Y_i - \varphi(X_i/a, b, \cdots g)] \frac{\partial\varphi}{\partial g} = 0:$$

Ինչպես գիտենք

$$Y = \varphi(X/a, b, \cdots g) \tag{544}$$

հավասարումը ներկայացնում է Y *պատահական մեծության ռեգրեսիայի գիծը ըստ* X-*ի։ Այսպիսով,* երբ Y պատահական մեծությունը ցանկացած X-ի համար ունի հաստատուն դիսպերսիայով և (544) ռեգրեսիայով նորմալ բաշխում, ապա ռեգրեսիայի հավասարման մեջ մըտնող պարամետրերը ստացվում են (543) հավասարումների սիստեմից: *Այդ հավասարումների սիստեմը կոչվում է* նորմալ հավասարումների սիստեմ: *(541) արտահայտության մինիմում լինելը կազմում է* փոքրագույն քառակուսիների եղանակի սկզբունքը՝ *այն է, որ* երբ Z=(X, Y) պատահական մեծության նկատմամբ կատարված փորձերից ստացվել է (535) վերցվածքը, ապա որոշ պայմանների դեպքում (544) ռեգրեսիայի գծի հավասարման մեջ մտնող անհայտ պարամետրերը պետք է լինեն այնպիսին, որպեսզի Y-ի դիտված արժեքների և նրա պայմանական միջին արժեքների շեղումների քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույնը:

Դիցուք ռեգրեսիայի գիծն ունի հետևյալ հավասարումը՝

$$y = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k, \tag{545}$$

այդ դեպքում նորմալ հավասարումների (544) սիստեմը կլինի

$$\sum_{i=1}^{n} [Y_i - (a_0X_i^k + a_1X_i^{k-1} + \cdots + a_{k-1}X_i + a_k)] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} [Y_i - (a_0X_i^k + a_1X_i^{k-1} + \cdots + a_{k-1}X_i + a_k)]X_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} [Y_i - (a_0X_i^k + a_1X_i^{k-1} + \cdots + a_{k-1}X_i + a_k)]X_i^2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{546}$$

$$\sum_{i=1}^{n} [Y_i - (a_0X_i^k + a_1X_i^{k-1} + \cdots + a_{k-1}X_i + a_k)] \cdot X_i^k = 0$$

կամ

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} X_i^k + a_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^{k-1} + \cdots + a_{k-1} \sum_{i=1}^{n} X_i + na_k = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} X_i^{k+1} + a_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^k + \cdots + a_{k-1} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 +$$

$$+ a_k \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \qquad (547)$$

. . . .

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} X_i^{2k} + a_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^{2k-1} + \cdots + a_{k-1} \sum_{i=1}^{n} X_i^{k+1} +$$

$$+ a_k \sum_{i=1}^{n} X_i^k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k Y_i,$$

Կարելի է ցույց տալ, որ այս գծային սիստեմի դետերմինանտը զրոյից տարբեր է. հետևաբար, սիստեմը կունենա մեկ լուծում անհայտ պարամետրերի նկատմամբ, որը հենց կլինի որոնելի լուծումը։ Լուծելով այդ սիստեմը a_0, a_1, $\cdots$ a_k անհայտների նկատմամբ և տեղադրելով ստացված արժեքները (545) հավասարման մեջ, կստանանք ռեգրեսիայի հավասարումը։

Մասնավոր դեպքում, երբ ռեգրեսիան գծային է, այսինքն՝ (545) հավասարումն ունի

$$y = a_0 x + a_1 \qquad (548)$$

տեսքը, (547) հավասարումների սիստեմը կլինի

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + na_1 = \sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad (549)$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i,$$

Մտցնելով $\overline{X}$ և $\overline{Y}$ վերցվածքային միջինները, հարմար է ռեգրեսիայի (542) հավասարումը գրել հետևյալ տեսքով՝

$$y - \overline{Y} = a(x - \overline{X}) + b\text{։} \tag{550}$$

Այդ դեպքում համապատասխան (549) հավասարումների սիստեմը կլինի

$$a \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) + n\,b = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y}), \tag{551}$$

$$a \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 + b \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})\text{։}$$

Քանի որ

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y}) = 0,$$

կստանանք

$$b = 0, \qquad a = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}\text{։} \tag{552}$$

a-*ի արտահայտությունը ձևափոխելով, կունենանք*

$$a = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2}} \cdot$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}}$$

կամ

$$a = \overline{\mu}_{11} \frac{S_y}{S_x}, \qquad (553)$$

Ուրեմն որոնելի (550) Y-ի ռեգրեսիայի գիծը ըստ X-ի կլինի

$$y - \overline{Y} = \frac{S_y}{S_x} \overline{\mu}_{11}(x - \overline{X}). \qquad (554)$$

Նման ձևով, ուղղագիծ ռեգրեսիայի դեպքում կարելի է որոշել X-ի ռեգրեսիայի գիծը ըստ Y-ի.

$$x - \overline{X} = \frac{S_x}{S_y} \overline{\mu}_{11}(y - \overline{Y}). \qquad (555)$$

Ստացված ռեգրեսիայի գծերը չեն համընկնում, անցնում են M_0 $(\overline{X}\ \overline{Y})$ *կետով, և նրանց անկյունային գործակիցների արտադրյալը հավասար է* $\overline{\mu}^2_{11}$ ։

Հետաքրքիր է, որ ուղղագիծ ռեգրեսիայի դեպքում փոքրագույն քառակուսիների եղանակով մեր ստացած (554) և (555) ռեգրեսիայի գծերի հավասարումները նույնն են, ինչ որ վերևում արտածած տեսական ռեգրեսիայի գծերի հավասարումները։

74. Լավագույն գնահատականներ։ X *պատահական մեծության* $p(x/\Theta)$ *խտությունը պարունակում է մեկ* Θ *անհայտ պարամետր. X-ի նկատմամբ կատարած փորձերը տվել են*

$$X_1,\ X_2,\ \cdots\ X_n$$

վերցվածքը։ Θ *անհայտ պարամետրի որևէ գնահատականը նշանակենք* $\overline{\Theta}$*-ով։ Լավ գնահատականից պահանջվում է, որպեսզի նա լինի նախ անշեղելի, այսինքն՝ նրա մաթեմատիկական սպասումը հավասար լինի գնահատվող պարամետրին կամ գոնե նրանից քիչ տարբերվի։ Կազմենք գնահատականի դիսպերսիան.*

$$\sigma^2_{\overline{\Theta}} = E[(\overline{\Theta} - E(\overline{\Theta}))^2], \qquad (556)$$

լավ գնահատականից պահանջվում է նաև, որպեսզի այդ դիսպերսիան լինի փոքրագույնը։ Եթե $\overline{\Theta}$*-ը ընտրենք այնպես, որ այդ դիսպերսիան լինի զրո, օրինակ,* $\overline{\Theta}$*-ը վերցնենք անկախ փորձերի արդյունքներից* *որևէ հաստատունի հավասար, այդ դեպքում* $\overline{\Theta}$*-ի մաթեմատիկական սպասումը կարող է շատ տարբերվել* Θ*-ից: Այսպիսով՝*

$$b(\Theta) = E(\overline{\Theta}) - \Theta$$

շեղումը և $\sigma^2_{\overline{\Theta}}$ *դիսպերսիան չի կարելի միանգամից փոքրացնել: Կարելի է միայն գտնել հետևյալ խնդիրը՝* տվյալ $b(\Theta)$ շեղում ունեցող $\overline{\Theta}$ գնահատականներից անհայտ Θ պարամետրի համար ընտրել այն, որի համար $\sigma^2_{\overline{\Theta}}$ դիսպերսիան փոքրագույնն է: *Այդպիսի գնահատականը կոչվում է* փոքրագույն դիսպերսիայով գնահատական: Լավագույն գնահատական *է կոչվում այն անշեղելի գնահատականը, որի դիսպերսիան փոքրագույնն է:*

Լեմմա. Եթե X *և* Y *պատահական մեծությունները ունեն երկրորդ կարգի՝*

$$E[X^2], \quad E[Y^2],$$

մոմենտներ, ապա

$$E[(XY)]^2 \leqslant E(X^2) \cdot E(Y^2). \tag{558}$$

Ապացուցելու համար դիտարկենք $E[(\lambda X - Y)^2]$ *մեծությունը, որը ցանկացած իրական* λ *թվի համար ոչ բացասական է. այսինքն՝*

$$\lambda^2 E(X^2) - 2\lambda E(XY) + E(Y^2) \geqslant 0.$$

Ստացվեց քառակուսի եռանդամ՝ λ*-ի նկատմամբ, որը բացասական չէ. ուրեմն նրա դիսկրիմինանտը փոքր է կամ հավասար զրոյի՝*

$$[E(XY)]^2 - E(X^2) \cdot E(Y^2) \leqslant 0$$

կամ

$$[E(XY)]^2 \leqslant E(X^2) \cdot E(Y^2).$$

Հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\lambda X - Y = 0$$

կամ

$$Y = \lambda X, \tag{559}$$

այսինքն՝ X *և* Y *պատահական մեծությունները տարբերվում են հաստատուն գործակցով: Իրոք, եթե* $Y = kX$, *ապա* $[E(XY)]^2 = [E(kX^2)]^2 = E(X^2) \cdot E(k^2X^2) = E(X^2) \cdot E(Y^2)$, *իսկ եթե* $[E(XY)]^2 = E(X^2) \cdot E(Y^2)$, ապա $\lambda^2E(X^2) - 2\lambda E(XY) + E(Y^2) = 0$ հավասարումը համարժեք է $E[(\lambda X - Y)^2] = 0$ կամ $\lambda X - Y = 0$ հավասարմանը և ունի մեկ արմատ՝

$$\lambda = \frac{Y}{X} \qquad Y = \lambda X:$$

$\sigma^2_{\bar{\Theta}}$-ի փոքրագույն արժեքը որոշելու համար ստանանք մի անհավասարություն: Այդ անհավասարությունը ստանալու համար կառուցենք ճշմարտանմանության ֆունկցիան՝

$$P(x/\Theta) \doteq P(x_1, x_2, \cdots x_n/\Theta) = p(x_1/\Theta)\cdot p(x_2/\Theta)\cdots p(x_n/\Theta), \qquad (560)$$

որտեղ $(x_1, x_2, \cdots x_n)$-ը տված պատահական վերցվածքն է:

$P(x/\Theta)$ ֆունկցիայի նկատմամբ անենք հետևյալ ենթադրությունները՝ $P(x/\Theta) \neq 0$, գոյություն ունի $\frac{\partial P(x\ \Theta)}{\partial \Theta}$ ածանցյալը և դիտարկվող ինտեգրալների ածանցյալը ըստ Θ-ի հավասար է համապատասխան ինտեգրալների ածանցյալներին: Դիտարկենք

$$L(x/\Theta) = \ln P(x/\Theta) \qquad (561)$$

ֆունկցիան և նրա ածանցյալը ըստ Θ պարամետրի՝

$$L'(x/\Theta) = \frac{P'(x/\Theta)}{P(x/\Theta)}: \qquad (562)$$

Հետևյալ՝

$$0 + b(\Theta) = E(\bar{\Theta}) = \int \bar{\Theta} P(x/\Theta)\, dx^* \qquad (563)$$

և

$$1 = \int P(x/\Theta)\, dx \qquad (564)$$

հավասարությունները ածանցենք ըստ Θ-ի. կստանանք՝

$$1 + b'(\Theta) = \int \bar{\Theta} P'(x/\Theta) dx, \qquad (565)$$

$$0 = \int P'(x/\Theta)\, dx$$

* Ինտեգրալն այստեղ n-ապատիկ է և $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$:

կամ

$$1+b'(\Theta)=\int\overline{\Theta}\,\frac{P'(x/\Theta)}{P(x/\Theta)}\,P(x/\Theta)dx=\int\overline{\Theta}\,L'(x/\Theta)\,P(x/\Theta)\,dx,$$

$$0=\int\frac{P'(x/\Theta)}{P(x/\Theta)}\,P(x/\Theta)\,dx=\int L'(x/\Theta)\,P(x/\Theta)\,dx։$$

Գրելով այդ հավասարությունները հետևյալ տեսքով՝

$$1+b'(\Theta)=E[\overline{\Theta}L'(x/\Theta)],$$

$$0=E[L'(x)/\Theta)] \qquad (566)$$

առաջինից հանելով երկրորդը՝ $E(\overline{\Theta})$-ով բազմապատկած, կստանանք

$$1+b'(\Theta)=E[\overline{\Theta}L'(x/\Theta)]-E[L'(x/\Theta)\cdot E(\Theta)]$$

կամ

$$1+b'(\Theta)=E\,[L'(x/\Theta)\cdot[\overline{\Theta}-E(\overline{\boldsymbol{\Theta}})]\,]։ \qquad (567)$$

Հավասարման երկու կողմերը բարձրացնենք քառակուսի և կիրառենք Ամման. կստանանք

$$[1+b'(\Theta)]^2\leq E[L'(x/\Theta)]^2\cdot E[\overline{\Theta}-E(\overline{\Theta})^2]\,;$$

կամ

$$[1+b'(\Theta)]^2\leqslant\sigma^2_{\overline{\Theta}}\cdot E[L'(x/\Theta)]^2։$$

Ենթադրելով, որ

$$I(\Theta)=E[L'(x/\Theta)]^2>0, \qquad (568)$$

կունենանք

$$\sigma^2_{\overline{\Theta}}\geq\frac{[1+b'(\Theta)]^2}{I(\Theta)}\,։ \qquad (569)$$

Այսպիսով, տեսնում ենք, որ Θ գնահատականի դիսպերսիայի փոքրագույն արժեքն է՝

$$\sigma^2_{\overline{\Theta}}\ (\textit{փոքր})\ =\ \frac{[1+b'(\Theta)]^2}{I(\Theta)}\,։ \qquad (570)$$

Մասնավոր դեպքում, $(b(\Theta)=0)$ լավագույն գնահատականի դիսպերսիան է՝

$$\sigma^2_{\overline{\Theta}}\ (\textit{փոքր})=\frac{1}{I(\Theta)}, \qquad (571)$$

Տրված (569) անհավասարությունը կոչվում է «ինֆորմացիայի անհավասարություն», իսկ $I(\Theta)$ (568) մեծությունը՝ Ֆիշերի ինֆորմացիա (անգլիացի գիտնականի անունով, որն առաջին անգամ տվել է այդ գաղափարը)։

Ստանանք մի հայտանիշ, որի միջոցով հնարավոր է իմանալ, թե տվյալ գնահատականը անհայտ պարամետրի համար փոքրագույն դիսպերսիայով է, թե ոչ։

Թեորեմ. Որպեսզի $\overline{\Theta}$ գնահատականը տվյալ անհայտ Θ պարամետրի համար լինի փոքրագույն դիսպերսիայով, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ճշմարտանմանության $P(x/\Theta)$ ֆունկցիան բերվի հետևյալ տեսքի՝

$$P(x/\Theta) = h(x) \cdot e^{A\overline{\Theta}+B}, \qquad (572)$$

որտեղ A-ն և B-ն կախված են միայն Θ-*ից*, իսկ $h(x)$-ը՝ միայն x-ից։

Եթե $\overline{\Theta}$ գնահատականը փոքրագույն դիսպերսիայով է, այսինքն՝ տեղի ունի (570) հավասարությունը, ապա $L'(x/\Theta)$ և $\overline{\Theta} - E(\overline{\Theta})$ պատահական մեծությունները տարբերվում են միմյանցից մի ոչ պատահական արտադրիչով՝

$$L'(x/\Theta) = \lambda(\Theta)\,[\overline{\Theta} - E(\overline{\Theta})] = \lambda(\Theta) \cdot \overline{\Theta} - \lambda(\Theta) \cdot E(\overline{\Theta}),$$

որտեղ $\lambda(\Theta)$-ն կարող է կախված լինել միայն Θ-ից։ Այս հավասարությունը ըստ Θ-ի ինտեգրելով, կունենանք

$$L(x/\Theta) = A(\Theta) \cdot \overline{\Theta} + B(\Theta) + C(x),$$

քանի որ $\overline{\Theta}$-ն կախված չի Θ-ից, իսկ $E(\overline{\Theta})$-ն կախված է միայն Θ-ից. այստեղ $A(\Theta)$-ն և $B(\Theta)$-ն կախված են միայն Θ-ից, իսկ $C(x)$-ը՝ միայն x-ից։ Անցնելով ճշմարտանմանության ֆունկցիային, կստանանք

$$P(x/\Theta) = h(x) \cdot e^{A(\Theta) \cdot \overline{\Theta} + B(\Theta)},$$

Ընդհակառակը, եթե

$$P(x/\Theta) = h(x) e^{A(\Theta) \cdot \overline{\Theta} + B(\Theta)},$$

ապա

$$L(x)/\Theta) = \ln h(x) + A(\Theta) \cdot \overline{\Theta} + B(\Theta)$$

և

$$L'(x/\Theta) = A'(\Theta)\cdot\overline{\Theta} + B'(\Theta)\text{։} \qquad (573)$$

Այս հավասարման մեջ մաթեմատիկական սպասմանը անցնելով, և (566) հավասարություններից երկրորդը հաշվի առնելով կստանանք

$$A'(\Theta)\cdot E(\overline{\Theta}) + B'(\Theta) = 0,$$

որտեղից

$$B'(\Theta) = - A'(\Theta)E(\overline{\Theta})$$

և (573)-ից

$$L'(x/\Theta) = A'[\overline{\Theta} - E(\overline{\Theta})]\text{։}$$

Քանի որ $L'(x/\Theta)$ և $\overline{\Theta} - E(\overline{\Theta})$ պատահական մեծությունները իրարից տարբերվում են միայն ոչ պատահական արտադրիչով, ապա լեմմայի համաձայն

$$[E[L'(x/\Theta)\cdot(\overline{\Theta} - E(\overline{\Theta}))]]^2 = E[L'(x/\Theta)]^2\cdot E[(\overline{\Theta} - E(\overline{\Theta}))^2]. \qquad (574)$$

(567) հավասարությունից ստանում ենք

$$[1 + b'(\Theta)]^2 = E[L'(x/\Theta)]^2\sigma^2_{\overline{\Theta}},$$

որտեղից

$$\sigma^2_{\overline{\Theta}} = \frac{[1 + b'(\Theta)]^2}{E[L'(x/\Theta)]^2},$$

այսինքն $\overline{\Theta}$-ն փոքրագույն ցրվածությամբ գնահատական է Θ-ի համար։

Ինֆորմացիայի անհավասարությունը և թեորեմը ապացուցեցինք այն դեպքում, երբ փորձերը կատարվում են անընդհատ պատահական մեծության նկատմամբ, սակայն նրանք մնում են ճիշտ և այն դեպքում, երբ փորձերը կատարվում են դիսկրետ պատահական մեծության նկատմամբ։

Օրինակ 1. Ցույց տանք, որ նորմալ բաշխման դեպքում $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ գնահատականը լավագույն գնահատական է անհայտ a մաթեմատիկական սպասման համար: Պարզության համար ենթադրենք թե $\sigma^2=1$: Պատահական մեծության խտությունն է

$$p(x/a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2}},$$

ճշմարտանմանության ֆունկցիան՝

$$P(x/a) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-a)^2}$$

կամ

$$P(x/a) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2 + a\sum\limits_{k=1}^{n}x_k - \frac{na^2}{2}}:$$

Ճշմարտանմանության ֆունկցիան կարելի է գրել հետևյալ կերպ

$$P(x/a) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2}\, e^{na\overline{X} - \frac{n}{2}a^2}$$

որտեղից երևում է, որ նա ունի (572) տեսքը, ընդ որում $A(a)=na$,

$B(a) = -\frac{n}{2}a^2$ և $h(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2}$, որտեղ $\overline{X}$-ը ան-

հայտ a պարամետրի լավագույն գնահատականն է:

Օրինակ 2. A պատահարի $P(A)=p$ հավանականությունը անհայտ է. n անկախ փորձերում նա հանդես է եկել m անգամ: Ինչպես հայտնի է $\frac{m}{n}$ հաճախությունը անհայտ p-ի համար և՛ անշեղելի, և ունակային գնահատական է։ Ցույց տանք, որ նա նաև լավագույն գնահատական է։ Այստեղ ճշմարտանմանության ֆունկցիան է՝

$$P(m/p) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

որը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$P(m/p) = C_n^m e^{m\ln p + (n-m)\ln(1-p)}:$$

Ցուցիչը ձևափոխելով, կստանանք

$$P(m/p) = C_n^m e^{\frac{m}{n}(n\ln p - n\ln(1-p)) + n\ln(1-p)},$$

որտեղից երևում է, որ $P(m/p)$ ճշմարտանմանության ֆունկցիան բերվել է (572) տեսքի, ընդ որում

$$h(m) = C_n^m, \quad A(p) = n\ln p - n\ln(1-p), \quad B(p) = n\ln(1-p).$$

Հետևաբար $\frac{m}{n}$ հաճախությունը անհայտ հավանականության լավագույն գնահատականն է։

75. Վստահելի հավանականություն և վստահելի միջակայք։ *Դիցուք X պատահական մեծության բաշխման θ պարամետրը (կամ բնութագրիչը) անհայտ է և $\bar\theta = \bar\theta(X_1, X_2, \dots X_n)$-ը նրա գնահատականն է։ Այդ θ գնահատականը θ անհայտ պարամետրի կետային գնահատականն է։ Եթե θ անհայտ պարամետրի θ գնահատականը որոշ իմաստով լավ գնահատական է θ-ի համար, ապա այն կարելի է ընդունել որպես անհայտ θ պարամետրի մոտավոր արժեք։*

Այժմ դիտարկենք անհայտ θ պարամետրի (բնութագրիչի) միջակայքային գնահատականը։ (θ', θ'') միջակայքը կանվանենք θ անհայտ պարամետրի վստահելի միջակայք՝ տվյալ γ վստահելի հավանականությամբ, եթե γ հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ անհայտ θ պարամետրը գտնվում է (θ', θ'') միջակայքում։ *Ընդհանրապես θ անհայտ պարամետրը պատահական մեծություն չէ, իսկ θ′ և θ″ մեծությունները պատահական մեծություններ են՝ կախված $X_1, X_2, \dots X_n$ վերցվածքից՝* $\theta' = \theta'(X_1, X_2, \dots X_n)$, $\theta'' = \theta''(X_1, X_2 \dots X_n)$, *այնպես որ γ-ն (θ', θ'') պատահական միջակայքի θ անհայտ պարամետրը ծածկելու հավանականությունն է։ (θ', θ'') միջակայքը θ անհայտ պարամետրի միջակայքային գնահատականն է։*

Անհայտ θ պարամետրի վստահելի միջակայքը գտնելու համար, սովորաբար, կառուցում են մի այնպիսի U ֆունկցիա՝ կախված $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ վերցվածքից և անհայտ պարմետրից, որը մոնոտոն է θ-ի նկատմամբ և որի հավանականությունների բաշխումը հայտնի է ու կախում չունի θ-ից՝

$$P(X' < U(X_1, X_2, \cdots X_n, \theta) < X'') = \Phi(X', X''): \qquad (574)$$

Այնուհետև

$$\Phi(X', X'') = \gamma \qquad (575)$$

հավասարումից, որոշում են համապատասխան X'_γ և X''_γ արժեքները և, $X'_\gamma < U < X''_\gamma$ անհավասարությունները լուծելով θ անհայտ պարամետրի նկատմամբ, ստանում են տվյալ γ-ին համապատասխանող

$$(\theta'_\gamma(X_1, X_2, \cdots X_n), \qquad \theta''_\gamma(X_1, X_2, \cdots X_n)) \qquad (576)$$

վստահելի միջակայքը: Վստահելի միջակայքի θ'_γ և θ''_γ ծայրերը կախված են γ վստահելի հավանականությունից և (575) հավասարումից միարժեք չեն որոշվում. տվյալ γ-ի համար այն $(\theta'_\gamma, \theta''_\gamma)$ վստահելի միջակայքը կլինի լավագույնը, որին համապատասխանող վստահելի միջակայքը կլինի փոքրագույնը:

Անհայտ պարամետրի վստահելի միջակայքի որոշումը բարդանում է այն դեպքում, երբ $\Phi(X', X'')$ ֆունկցիան կախված է անհայտ պարամետրից: Սակայն, երբ փորձերի թիվը շատ է, անհայտ պարամետրը կարելի է փոխարինել իր կետային գնահատականով:

Նկարագրված եղանակը մնում է ուժի մեջ և այն դեպքում, երբ գնահատվում են երկու կամ ավելի թվով պարամետրեր:

Հաջորդ պարագրաֆներում մենք կստանանք վստահելի միջակայքերը $a=E(X)$ և $\sigma^2=D(X)$ բնութագրիչների համար՝ մեծ թվով փորձերի դեպքում. իսկ նորմալ բաշխման դեպքում՝ նույն պարամետրերի վստահելի միջակայքերը նաև այն դեպքում, երբ փորձերի թիվը վերջավոր է:

76. Անհայտ բնութագրիչի վստահելի միջակայքը մեծ թվով փորձերի ժամանակ: *Ենթադրենք n անկախ փորձերը X պատահական մեծության նկատմամբ տալիս են*

$$X_1, X_2, \cdots X_n$$

վերցվածքային բազմությունը։ Որոշենք անհայտ $a = E(X)$ մաթեմատիկական սպասման վստահելի միջակայքը, եթե $\sigma^2 = D(X)$ մեծությունը հայտնի է։

Լյապունովի սահմանային թեորեմի համաձայն ունենք՝

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sigma x_1}{\sqrt{n}} < \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - a < \frac{\sigma x_2}{\sqrt{n}} \right\} = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

որտեղ $\Phi(t)$-ն Լապլասի ֆունկցիան է, որի արժեքները բերված են II աղյուսակում։

Ընդունելով, մասնավորապես, $x_1 = -x$, $x_2 = x$ և $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$ մեծությունը փոխարինելով $\overline{X}$-ով, կստանանք

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X} - a| < \frac{\sigma x}{\sqrt{n}} \right) = 2\Phi(x)\text{։} \qquad (577)$$

n-ի բավականաչափ մեծ արժեքների համար տեղի ունի հետևյալ մոտավոր հավասարությունը.

$$P\left(|\overline{X} - a| < \frac{\sigma x}{\sqrt{n}} \right) \approx 2\Phi(x) \qquad (578)$$

կամ

$$P\left(\overline{X} - \frac{\sigma x}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \frac{\sigma x}{\sqrt{n}} \right) \approx 2\Phi(x)\text{։} \qquad (579)$$

Տված γ վստահելի հավանականության դեպքում կունենանք

$$2\Phi(x) = \gamma$$

հավասարումը, որտեղից կորոշվի համապատասխան x_γ արժեքը. հետևաբար վստահելի միջակայքը $a = E(X)$ անհայտ բնութագրիչների համար մեծ թվով փորձերի դեպքում կլինի

$$\left(\overline{X} - \frac{\sigma x_\gamma}{\sqrt{n}}, \qquad \overline{X} + \frac{\sigma x_\gamma}{\sqrt{n}} \right), \qquad (580)$$

Երբ անհայտ է նաև $\sigma^2 = D(X)$ դիսպերսիան, կարելի է այն փոխարինել իր ունակային S^2 գնահատականով. այնպես որ, եթե անհայտ են *թե՛* $\sigma^2 = D(X)$*-ը և թե՛* $a = E(X)$*-ը և փորձերի թիվը բավականաչափ մեծ է, նորից վստահելի* γ *հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ անհայտ* $a = E(X)$ *միջինի վստահելի միջակայքը կլինի*

$$\left(\overline{X} - \frac{Sx_{\gamma}}{\sqrt{n}}, \qquad X + \frac{Sx_{\gamma}}{\sqrt{n}}\right), \tag{581}$$

Մասնավոր դեպքում ենթադրենք X պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$$\begin{matrix} 0, & 1 \\ q, & p, \end{matrix}$$

որտեղ p*-ն A պատահարի հանդես գալու անհայտ հավանականությունն է անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում. ուստի անհայտ կլինի նաև* $E(X) = p$ *միջին արժեքը։ Ելնելով փորձի* $X_1, X_2, \cdots X_n$ *արդյունքներից, պահանջվում է որոշել* p*-ի վստահելի հավանականությունը և վստահելի միջակայքը։ Տվյալ դեպքում* $\overline{X} = \frac{m}{n}$*, քանի որ* $\sum_{k=1}^{n} X_k$*-ն կլինի* n *փորձերում պատահարի հանդես գալու* m *թիվը, իսկ* S^2*-ն կստացվի (520) բանաձևի համաձայն՝*

$$S^2 = \frac{m}{n} - \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right),$$

քանի որ $\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ *գումարը նույնպես հավասար է A պատահարի հանդես գալու* m *թվին։*

Կիրառելով ստացված արդյունքը (580) այս մասնավոր դեպքի նկատմամբ, γ *վստահելի հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ երբ փորձերի թիվը բավականաչափ մեծ է, A պատահարի անհայտ հավանականության վստահելի միջակայքը կլինի*

$$\left(\frac{m}{n} - x\sqrt{\frac{m(n-m)}{n^3}}, \qquad \frac{m}{n} + x\sqrt{\frac{m(n-m)}{n^3}}\right), \tag{581}$$

Այժմ որոշենք $\sigma^2 = D(X)$ *անհայտ դիսպերսիայի վստահելի միջակայքը մեծ թվով փորձերի դեպքում, եթե հայտնի է* $a = E(X)$ *միջինը։ Դրա համար կկիրառենք Լյապունովի (310) թեորեմը փորձի հետևյալ արդյունքների նկատմամբ՝*

$$(X_1 - a)^2, \quad (X_2 - a)^2, \cdots (X_n - a)^2,$$

որը կատարված է $(X-a)^2$ պատահական մեծության նկատմամբ։ Քանի որ նշված փորձի արդյունքները անկախ պատահական մեծություններ են և ունեն հավանականությունների միևնույն բաշխումը, ընդ որում՝

$$E[(X_k-a)^2]=D(X_k)=\sigma^2, \qquad k=1,\ 2, \cdots n$$

և

$$\sigma_1^2=D[(X_k-a)^2]=E[(X_k-a)^4]-[E[(X_k-a)^2]]^2=$$
$$=\mu_4-\mu_2^2, \qquad k=1,\ 2,\ \cdots\ n,$$

ապա (310)-ի համաձայն կունենանք

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sigma_1 x_1}{\sqrt{n}}<\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-a)^2}{n}-\sigma^2<\frac{\sigma_1 x_2}{\sqrt{n}}\right\}=$$
$$=\Phi(x_2)-\Phi(x_1). \tag{582}$$

Ընդունելով $x_1=-x$, $x_2=x$ և նշանակելով

$$S_0^2=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-a)^2}{n},$$

կստանանք

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|S_0^2-\sigma^2|<x\sqrt{\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n}}\right)=2\Phi(x). \tag{583}$$

Եթե փորձերի թիվը բավականաչափ մեծ է, μ_2 և μ_4 մեծությունները իրենց $\bar{\mu}_2$ և $\bar{\mu}_4$ գնահատականներով փոխարինելով կունենանք հետևյալ մոտավոր բանաձևը՝

$$P\left(|\sigma^2-S_0^2|<x\sqrt{\frac{\bar{\mu}_4-\bar{\mu}_2^2}{n}}\right)\approx 2\Phi(x), \tag{577}$$

Այսպիսով, երբ փորձերի թիվը բավականաչափ մեծ է, γ վստահելի հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ անհայտ $\sigma^2=D(X)$ դիսպերսիան, երբ $a=E(X)$ միջինը հայտնի է, կգտնվի

$$\left(S_0^2-x_\gamma\sqrt{\frac{\bar{\mu}_4-\bar{\mu}_2^2}{n}}, \qquad S_0^2+x_\gamma\sqrt{\frac{\bar{\mu}_4-\bar{\mu}_2^2}{n}}\right) \tag{578}$$

վստահելի միջակայքում, որտեղ x_γ-ն $2\Phi(x) = \gamma$ հավասարման արմատն է։

Եթե $\sigma^2 = D(X)$-ի հետ միասին անհայտ է նաև $a = E(X)$ միջինը, ապա S_0^2-ու մեջ, a-ն իր $\overline{X}$ գնահատականով փոխարինելով, կստանանք S^2 և այդ դեպքում σ^2-ու վստահելի միջակայքը կլինի

$$\left(S^2 - x_\gamma \sqrt{\frac{\overline{\mu_4} - \overline{\mu_2^2}}{n}}, \quad S^2 + x_\gamma \sqrt{\frac{\overline{\mu_4} - \overline{\mu_2}^2}{n}}\right)\text{։} \qquad (579)$$

Օրինակ։ Որոշել դետալի չափի միջին a արժեքի և անհայտ դիսպերսիայի վստահելի միջակայքերը (VIII, 68)-ում բերված թվային օրինակում՝ $\gamma = 0,8$ վստահելի հավանականությամբ։

Ընդունելով, որ $n = 160$ փորձերի թիվը բավականաչափ մեծ է, a անհայտի համար կարող ենք օգտագործել ստացված վստահելի միջակայքը՝

$$\left(\overline{X} - \frac{x_\gamma S}{\sqrt{n}}, \quad \overline{X} + \frac{x_\gamma S}{\sqrt{n}}\right)\text{։}$$

Քանի որ $2\Phi(x) = 0,8$, ապա II աղյուսակից որոշում ենք $x_\gamma = 1,28$, և տեղադրելով ստանում ենք անհայտ a-ի

$$(2,601, \quad 4,295)$$

վստահելի միջակայքը՝ $\gamma = 0,8$ վստահելի հավանականությամբ։

σ^2-ու անհայտ դիսպերսիայի համար ունենք

$$\left(S^2 - x_\gamma \sqrt{\frac{\overline{\mu_4} - \overline{\mu_2}^2}{n}}, \quad S^2 + x_\gamma \sqrt{\frac{\overline{\mu_4} - \overline{\mu_2}^2}{n}}\right)$$

վստահելի միջակայքը, որտեղից, $\overline{\mu_2}$-ի, $\overline{\mu_4}$-ի, S^2-ու և x-ի արժեքները տեղադրելով, կստանանք

$$(61,66, \quad 78,18)$$

միջակայքը՝ $\gamma = 0,8$ վստահելի հավանականությամբ։

77. Նորմալ բաշխման անհայտ պարամետրի վստահելի միջակայքը։ Ենթադրենք X պատահական մեծությունը ենթարկվում է նորմալ բաշխմանը՝ a և σ անհայտ պարամետրերով. n անկախ փորձերը այդ պատահական մեծության նկատմամբ տալիս են

$$(X_1, X_2, \ldots X_n)$$

վերցվածքային բազմությունը։ Որոշել յուրաքանչյուր պարամետրի վստահելի հավանականությունը և վստահելի միջակայքը։

Սկզբում քննարկենք այն դեպքը, երբ a պարամետրն անհայտ է, իսկ σ պարամետրը հայտնի է։ Քանի որ յուրաքանչյուր X_k $(k=1, 2, \cdots n)$ պատահական մեծություն ունի նույն նորմալ բաշխումը՝ a և σ պարամետրերով, ապա $\overline{X} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n}$ միջին թվաբանականը նույնպես պիտի ունենա նորմալ բաշխում՝ $E(\overline{X}) = a$ և $\sqrt{D(\overline{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ պարամետրերով. ուստի

$$P\left(|\overline{X}-a| < \frac{\sigma x}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(x)\text{։} \tag{580}$$

Ստացված հավանականությունը կախում չունի անհայտ a պարամետրից և, հետևաբար՝ $2\Phi(x) = \gamma$ վստահելի հավանականությամբ, երբ σ պարամետրը հայտնի է, կարելի է պնդել, որ a անհայտ պարամետրը կգտնվի

$$\left(\overline{X} - \frac{\sigma x_\gamma}{\sqrt{n}},\ \ \overline{X} + \frac{\sigma x_\gamma}{\sqrt{n}}\right) \tag{581}$$

վստահելի միջակայքում, որտեղ x_γ-ն $2\Phi(x) = \gamma$ հավասարման արմատն է։

Այժմ ենթադրենք, թե անհայտ է նորմալ բաշխման σ պարամետրը, իսկ a պարամետրը հայտնի է։ Եթե a պարամետրը հայտնի է, ապա

$$S_0^2 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - a)^2}{n}$$

մեծությունն անհայտ պարամետր չի պարունակում։ (III, 31)-ի համաձայն

$$\chi^2 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - a)^2}{\sigma^2} = \frac{nS_0^2}{\sigma^2}$$

մեծությունն ունի

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad x > 0$$

խտությունը։ Հետևաբար ցանկացած $\alpha > 0$, $\beta > 0$ թվերի համար կունենանք

$$P\left(\frac{S_0^2 n}{\beta} < \sigma^2 < \frac{S_0^2 n}{\alpha}\right) = P\left(\alpha < \frac{nS_0^2}{\sigma^2} < \beta\right)$$

կամ

$$P\left(\frac{S_0^2 n}{\beta} < \sigma^2 < \frac{S_0^2 n}{\alpha}\right) = \int_\alpha^\beta f_n(x)dx = P_n(\alpha, \beta)\text{։} \tag{582}$$

Ստացված հավանականությունը կախում չունի անհայտ σ պարամետրից։ Այսպիսով, $\gamma = P_n(\alpha, \beta)$ վստահելի հավանականությամբ, երբ a պարամետրը հայտնի է, կարելի է պնդել, որ σ անհայտ պարամետրի արժեքը կգտնվի

$$\left(\frac{S_0^2\sqrt{n}}{\sqrt{\beta_\gamma}}, \qquad \frac{S_0^2\sqrt{n}}{\sqrt{\alpha_\gamma}}\right) \tag{583}$$

վստահելի միջակայքում, որտեղ α_γ-ն և β_γ-ն $P_n(\alpha, \beta) = \gamma$ հավասարման արմատներն են։

Վստահելի γ հավանականությունը պարզ է, որ α և β թվերը միարժեք կերպով չի որոշում. հետևաբար՝ միարժեք կերպով չի որոշվում և σ անհայտ պարամետրի վստահելի միջակայքը։ Այն կարելի է որոշել միարժեք կերպով, պահանջելով, որ

$$P\left(\sigma^2 \geqslant \frac{S_0^2 n}{\alpha_\gamma}\right) = P\left(\sigma^2 \leqslant \frac{S_0^2 n}{\beta_\gamma}\right) = \frac{1-\gamma}{2}.$$

այդ դեպքում α-ն և β-ն կորոշվեն հետևյալ հավասարումներից՝

$$\int_0^\alpha f_n(x)dx = \frac{1-\gamma}{2}, \qquad \int_\beta^\infty f_n(x)dx = \frac{1-\gamma}{2}\text{։}$$

Գրքի վերջում բերված V աղյուսակում տրված են

$$P_n(x) = \int_x^{\infty} f_n(x)dx = P(\chi^2 \geqslant x)$$

ֆունկցիայի արժեքները՝ տարբեր n*-ի և* x*-ի արժեքների համար. այդ աղյուսակից օգտվելով, կարելի է որոշել այն* β *արժեքը, որի համար*

$$P_n(\beta) = \frac{1-\gamma}{2},$$

և այն α*-ի արժեքը, որի համար*

$$1 - P_n(\alpha) = \frac{1-\gamma}{2}$$

կամ

$$P_n(\alpha) = \frac{1+\gamma}{2}.$$

Այդպես α*-ն և* β*-ն որոշելով, միարժեք կերպով կորոշվի նաև* σ *պարամետրին համապատասխանող (582) վստահելի միջակայքը։*

Վերջապես քննարկենք այն դեպքը, երբ նորմալ բաշխման a *և* σ *երկու պարամետրերն էլ անհայտ են։ Որոշենք յուրաքանչյուր պարամետրի վստահելի հավանականությունը և վստահելի միջակայքը։ Դրա համար գիտենք այդ պարամետրերի համապատասխան գնահատականները՝*

$$\overline{X} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}, \qquad S^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2}{n}, \tag{584}$$

և որոշենք

$$U = \frac{\overline{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \tag{585}$$

պատահական մեծության բաշխման խտությունը։ (584)-ից ստանում ենք

$$n(\overline{X} - a) = \sum_{k=1}^{n} (X_k - a) \tag{586}$$

և

$$nS^2 = \sum_{k=1}^{n} (X_k - a)^2 - n(\overline{X} - a)^2: \tag{587}$$

Նշանակելով $X_k - a = z_k$, կունենանք

$$n\overline{Z} = \sum_{k=1}^{n} z_k \tag{588}$$

և

$$nS^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 - n\overline{Z}^2, \tag{589}$$

որտեղ

$$\overline{Z} = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k}{n}, \tag{590}$$

Այժմ $z_1, z_2, \cdots z_n$ պատահական մեծություններից անցնենք $y_1, y_2, \cdots y_n$ պատահական մեծություններին՝ հետևյալ գծային ձևափոխության օգնությամբ։

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{z_1}{\sqrt{n}} + \frac{z_2}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{z_n}{\sqrt{n}} = \overline{Z} \cdot \sqrt{n}, \\ y_2 &= \alpha_{21} z_1 + \alpha_{22} z_2 + \cdots + \alpha_{2n} z_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \alpha_{n1} z_1 + \alpha_{n2} z_2 + \cdots + \alpha_{nn} z_n, \end{aligned} \tag{591}$$

որտեղ α_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots n)$ գործակիցներն ընտրված են այնպես, որ տեղի ունեն

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot \alpha_{kj} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} \tag{592}$$

պայմանները. պարզ է, որ $\alpha_{1j} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(j = 1, 2 \cdots n)$ գործակից-

ները այդ պայմաններին բավարարում են, որովհետև $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 =$

$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$. *կարելի է ցույց տալ, որ այդպիսի* $\alpha_{ij} (i,j = 1, 2 \cdots n)$ *թվեր, իրոք, գոյություն ունեն։*

Հեշտ է հաշվել, որ այդ դեպքում

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2, \tag{593}$$

$z_1, z_2, \cdots z_n$ *անկախ պատահական մեծությունները նորմալ բաշխման են ենթարկվում* $E(z_k) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots n)$ *միջին արժեքով և* $D(z_k) = \sigma^2$ $(k = 1, 2, \cdots n)$ *միևնույն դիսպերսիայով։ Հետևաբար,* $y_1, y_2 \cdots y_n$ *պատահական մեծություններն անկախ են և (591)-ի համաձայն նույնպես կենթարկվեն նորմալ բաշխման՝ նույն* $E(y_k) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots n)$ *միջին արժեքով և* $D(y_k) = \sigma^2$ *դիսպերսիայով, քանի որ*

$$c_{ij} = E(y_i y_j) = E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} z_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl} z_l\right)\right] =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_{jl} E(z_k z_l) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma^2, & i = j \end{cases}$$

(589), (591) և (592) հավասարություններից ստանում ենք

$$\sqrt{n}\, \bar{Z} = y_1 \qquad nS^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - y_1^2$$

կամ

$$n\bar{Z}^2 = y_1^2, \qquad nS^2 = \sum_{k=2}^{n} y_k^2, \tag{594}$$

Ուստի

$$\frac{\overline{X}-a}{S}=\frac{\overline{Z}}{S}=\frac{\sqrt{n}\,\overline{Z}}{\sqrt{n}\,S}=\frac{y_1}{\sqrt{\sum\limits_{k=2}^{n} y_k^2}}=$$

$$=\frac{\dfrac{y_1}{\sigma\sqrt{n-1}}}{\sqrt{\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{y_k^2}{\sigma^2(n-1)}}}, \tag{595}$$

որտեղ համարիչն ունի նորմալ բաշխում՝ 0 *և* $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$ *պարամետրերով, իսկ հայտարարն ունի* $\frac{\chi}{\sqrt{n-1}}$ *պատահական մեծության բաշխումը՝* $(n-1)$ *ազատության աստիճաններով: Քանի որ համարիչը և հայտարարը անկախ պատահական մեծություններ են, ապա* (III, 32)*-ի համաձայն* (595) *հարաբերությունը ենթարկվում է Ստյուդենտի բաշխմանը* $(n-1)$ *ազատության աստիճանների թվով՝*

$$p_{n-1}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}(1+x^2)^{-\frac{n}{2}}$$

խտությամբ: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ մեզ հետաքրքրող

$$U=\frac{\dfrac{\overline{X}-a}{S}}{\sqrt{n-1}} \tag{596}$$

պատահական մեծությունը կունենա

$$g_{n-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{n-1}}\,p_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \tag{597}$$

խտությունը։ Այդ պատճառով ցանկացած $x > 0$ *թվի համար կունենանք*

$$P\left(\bar{X} - \frac{xS}{\sqrt{n-1}} < a < \bar{X} + \frac{xS}{\sqrt{n-1}}\right) = P\left(-x < \frac{\bar{X}-a}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} < x\right) =$$

$$= \int_{-x}^{x} g_{n-1}(x)\,dx = 2\int_{0}^{x} g_{n-1}(x)dx = G_{n-1}(x)։ \qquad (598)$$

ստացված հավանականությունը կախում չունի անհայտ a *և* σ *պարամետրերից. հետևաբար՝* $\gamma = G_{n-1}(x)$ վստահելի հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ անհայտ a պարամետրի վստահելի միջակայքը կլինի

$$\left(\bar{X} - \frac{x_\gamma S}{\sqrt{n-1}}, \qquad \bar{X} + \frac{x_\gamma S}{\sqrt{n-1}}\right), \qquad (599)$$

որտեղ x_γ*-ն* $g_{n-1}(x) = \gamma$ *հավասարման արմատն է։*

$G_{n-1}(x)$ *ֆունկցիայի արժեքները, կախված* n*-ից և* x*-ից, բերված են* III *աղյուսակում։*

Այս *պատահական մեծությունը կոչվում է Ստյուդենտի հարաբերություն. նա ունի (597) խտությունը։*

σ *անհայտ պարամետրի վստահելի միջակայքը որոշելու համար դիտենք*

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{k=2}^{n} y_k^2}{\sigma^2}$$

պատահական մեծությունը, որը χ^2 *պատահական մեծությունն է՝* $(n-1)$ *ազատության աստիճանների թվով, որի խտությունը (*III*, 31)-ի համաձայն կլինի*

$$f_{n-1}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \qquad x > 0։$$

Ուստի ցանկացած $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *թվերի համար կունենանք*

$$P\left(\alpha < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \beta\right) = P\left(\frac{nS^2}{\beta} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\alpha}\right) =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f_{n-1}(x)\,dx = P_{n-1}(\alpha, \beta)։$$

Ստացված հավանականությունը կախում չունի a *և* σ *անհայտ պարամետրերից, հետևաբար,* $\gamma = P_{n-1}(\alpha, \beta)$ վստահելի հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ σ անհայտ պարամետրի վստահելի միջակայքը կլինի

$$\left(\frac{S\sqrt{n}}{\sqrt{\beta_\gamma}}, \quad \frac{S\sqrt{n}}{\sqrt{\alpha_\gamma}}\right), \tag{600}$$

որտեղ α_γ*-ն և* β_γ*-ն* $P_{n-1}(\alpha, \beta) = \gamma$ *հավասարման արմատներն են։ Տրված* γ *հավանականության համար* α *և* β *թվերը միարժեք կերպով չեն որոշվում։ Պահանջելով, որ*

$$\int_{0}^{\alpha} f_{n-1}(x)dx = \int_{\beta}^{\infty} f_{n-1}(x)\,dx = \frac{1-\gamma}{2},$$

կարելի է α*-ն և* β*-ն միարժեք կերպով որոշել հետևյալ հավասարումներից՝*

$$P_{n-1}(\beta) = \frac{1-\gamma}{2}$$

և

$$P_{n-1}(\alpha) = \frac{1+\gamma}{2},$$

որտեղ

$$P_{n-1}(x) = \int_{x}^{\infty} f_{n-1}(x)dx = P(\chi^2 \geq x)։$$

$P_{n-1}(x)$ *ֆունկցիայի արժեքները՝ կախված* n*-ից և* x*-ից, բերված են* V *աղյուսակում։*

Օրինակ. Գործարանում ստացված մետաղալարի պարտիայից ձգման ճիգը որոշելու նպատակով փորձարկեցին 20 նմուշ։ Այդ փորձերի արդյունքները բերված են հետևյալ աղյուսակում.

630	687	673	698	678	678	672	663	666	677
690	713	669	675	656	670	672	695	696	693

Ենթադրելով, որ ձգող ճիգերը, որոնց դիմանում են մետաղալարի առանձին նմուշները, ունեն հավանականությունների նորմալ բաշխում, որոշել այդ բաշխման անհայտ a *և* σ *պարամետրերի վստահելի միջակայքերը՝* $\gamma = 0{,}9$ *վստահելի հավանականությամբ։ Հաշվում ենք վերցվածքային միջինը՝* $\overline{X} = 678$, *և վերցվածքային դիսպերսիան՝* $S^2 = 305$, *որտեղից* $S = 17{,}5$*։ Քանի որ վստահելի հավանականությունը հավասար է 0,9, աղյուսակից գտնում ենք՝* $x = 1{,}75$, *այստեղից*

$$\overline{X} - \frac{xS}{\sqrt{n-1}} \approx 671, \qquad \overline{X} + \frac{xS}{\sqrt{n-1}} \approx 685,$$

և a*-ի վստահելի միջակայքը կլինի*

$$(671,\ 685)։$$

Անհայտ σ *պարամետրի վստահելի միջակայքը գտնելու համար* V *աղյուսակից որոշում ենք* $\alpha = 10$, $\beta = 30$, *այստեղից՝*

$$\sqrt{\frac{20 \cdot 305}{30}} \approx 15, \qquad \sqrt{\frac{20 \cdot 305}{10}} \approx 24,$$

և σ*-ի վստահելի միջակայքը կլինի (15, 24)։*

78. Անհայտ բաշխման ֆունկցիայի վերաբերյալ հիպոթեզի ստուգումը: *Այժմ դիտարկենք մաթեմատիկական վիճակագրության կարևոր խնդիրներից մեկը։ Դիցուք* X *պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան անհայտ է։ Այդ անհայտ բաշխման ֆունկցիայի մասին արվում է այն հիպոթեզը, թե այդ ֆունկցիան համընկնում է, որևէ միանգամայն որոշ* F(x) *ֆունկցիա։ Այդ հիպոթեզը ստուգելու համար* X *պատահական մեծության նկատմամբ կատարվում են* n *անկախ փորձեր, որոնց արդյունքները տալիս են* $X_1, X_2, \ldots X_n$ *վերցվածքային բազմությունը։ Հարց է առաջանում, թե փորձի արդյունքները համաձայնվում են արված հիպոթեզի հետ, թե ոչ։*

Այդպիսի հիպոթեզի ստուգման համար գոյություն ունեն տարբեր եղանակներ, որոնցից կշարադրենք երկուսը։

Առաջին եղանակը հիմնված է Կոլմոգորովի թեորեմի վրա, որը կձևա-

կերպենք առանց ապացուցելու։ Եթե նախորդ կետում բերված Գլիվենկոյի թեորեմը հաստատում է վերցվածքային բաշխման ֆունկցիայի մոտիկությունը անհայտ բաշխման ֆունկցիային, ապա Կոլմոգորովի թեորեմը հնարավորություն է տալիս որոշելու, թե մեծ թվով փորձերի ժամանակ նրանց միջև ինչպիսի հավանականությամբ կարող է տեղի ունենալ այս կամ այն շեղումը։

Կոլմոգորովի թեորեմը. Եթե X պատահական մեծության F(x) բաշխման ֆունկցիան անընդհատ է, ապա

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{-\infty<x<+\infty} \mid F_n(x)-F(x) \mid < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = K(\lambda), \qquad (601)$$

որտեղ

$$K(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2} \text{:} \qquad (602)$$

Այսպիսով, մեծ թվով փորձերի դեպքում տեղի ունի հետևյալ մոտավոր հավասարությունը՝

$$P\left(\sup_{-\infty<x<+\infty} \mid F_n(x)-F(x) \mid < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) \approx K(\ )\text{:} \qquad (603)$$

K(λ) ֆունկցիայի արժեքները՝ կախված λ-ից, բերված են I' աղյուսակում։

Այժմ հիպոթեզը ստուգելու համար վերցնենք բավականաչափ փոքր $\alpha>0$ թիվ և ընդունենք, որ այն պատահարը, որի հավանականությունը փոքր է կամ հավասար α-ի, գործնականում չի կարող տեղի ունենալ մեկ փորձի ժամանակ։ Սովորաբար α-ն ընդունում են 0,01, 0,05 և 0,1 թվերից մեկնումեկին հավասար։ Օգտվելով IV աղյուսակից, որոշում ենք այն $\lambda=\lambda_\alpha$ թիվը, որը $K(\lambda)=1-\alpha$ հավասարման արմատն է։ Այդ դեպքում

$$P\left(\sqrt{n}\sup_x \mid F_n(x)-F(x) \mid \geqslant \lambda_\alpha\right) = \alpha\text{:}$$

Դիտումների արդյունքների համաձայն կառուցում ենք $F_n(x)$ բաշխման ֆունկցիան և հետո հաշվում $A_n=\sqrt{n}\sup_x \mid F_n(x)-F(x) \mid$ մեծությունը ըստ մեր հիպոթեզի։ Եթե պարզվի, որ հաշված A_n մեծությունը մեծ է կամ հավասար λ_α, այսինքն՝

$$\sqrt{n}\sup_x \mid F_n(x)-F(x) \mid \geqslant \lambda_\alpha,$$

հիպոթեզը պետք է մերժել, որովհետև իրականացել է մի պատահար, որ մեր պայմանի համաձայն գործնականորեն անհնար է: Իսկ եթե պարզվի, որ

$$\sqrt{n}\,\sup \mid F_n(x) - F(x) \mid < \lambda_0,$$

ապա մենք պետք է համարենք, որ փորձերի տվյալները համաձայնվում են հիպոթեզի հետ: Բայց այդ չի նշանակում, իհարկե, որ հիպոթեզը պետք է ընդունել: Այն ընդունելու համար պետք է կատարել դիտումների էլի մի քանի սերիաներ և այդ սերիաներից յուրաքանչյուրի համար ստուգել նույն հիպոթեզը: Եթե ամեն անգամ համաձայնության գոյություն ունենա փորձի տվյալների և արված հիպոթեզի միջև, ապա վերջինս կարելի կլինի ընդունել: Հիպոթեզների ստուգման նկարագրված եղանակը կոչվում է Կոլմոգորովի կրիտերիա: Երբեմն օգտակար է լինում ստուգել հիպոթեզը անհայտ բաշխման ֆունկցիայի վերաբերյալ որևէ այլ կրիտերիայի միջոցով:

Հիպոթեզի ստուգման երկրորդ կրիտերիան, որը մենք այստեղ կշարադրենք, χ^2 կրիտերիան է:

Լուծվում է նույն խնդիրը X պատահական մեծության նկատմամբ կատարված դիտումների $X_1, X_2, \cdots X_n$ արդյունքների համաձայնության վերաբերյալ այն հիպոթեզի հետ, որ X պատահական մեծությունն ունի որոշակի $F(x)$ ֆունկցիա, որպես իր բաշխման ֆունկցիա:

Վերցվածքային բազմության

$$X_1,\ X_2,\ \cdots\ X_n$$

էլեմենտներից կառուցենք վիճակագրական շարք, որը բաղկացած է (x_{i-1}^1, x_i^1) $(i = 1, 2, \cdots r)$ մասնավոր միջակայքերից և $m_i (i=1,2,\ldots r)$ թվերից, որոնք այդ i-րդ միջակայքում գտնված արդյունքների թվերն են, հետևաբար, $\frac{m_i}{n}$ $(i = 1, 2, \cdots r)$ թվերը այդ միջակայքում ընկնելու հաճախությունները են:

Արված հիպոթեզի դեպքում X պատահական մեծության՝ (x_{i-1}^1, x_i^1) միջակայքում ընկնելու հավանականությունը կլինի

$$p_i = F(x_i^1) - F(x_{i-1}^1), \qquad i = 1, 2, \ldots r:$$

Դիտարկենք հետևյալ գումարը՝

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} C_i \left(\frac{m_i}{n} - p_i\right)^2,$$

այսինքն՝ $(x_{i-1}^1, x_i^1]$ միջակայքում ընկնելու հաճախությունների համապատասխան հավանականությունների շեղումների քառակուսիների գումարը որոշակի դրական C_i գործակիցներով։ Այդ գործակիցները հարմար է ընդունել

$$C_i = \frac{n}{p_i}, \qquad i = 1, 2, \dots r,$$

այնպես որ դիտարկվող χ^2 մեծությունը՝

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i}\left(\frac{m_i}{n} - p_i\right)^2$$

կամ

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \tag{604}$$

Կարելի է ապացուցել, որ երբ $n \to \infty$, այդ χ^2 պատահական մեծության բաշխման խտությունը ձգտում է

$$R_{r-1}(x) = \frac{1}{2^{\frac{r-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{r-1}{2}\right)}\, x^{\frac{r-3}{2}}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad x > 0 \tag{605}$$

ֆունկցիային, որտեղ $(r-1)$ թիվը ազատության աստիճանների թիվն է։

Այժմ ենթադրենք, թե $F(x)$ բաշխման ֆունկցիան պարունակում է որևէ l թվով $\Theta_1, \Theta_2, \dots \Theta_l$ պարամետրեր. այդ դեպքում

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{[m_i - n\,p_i(\Theta_1, \Theta_2, \dots \Theta_l)]^2}{n\,p_i(\Theta_1, \Theta_2, \dots \Theta_l)},$$

Եթե $\Theta_1, \Theta_2, \dots \Theta_l$ պարամետրերի արժեքները հայտնի են, ապա χ^2 պատահական մեծությունը կունենա նույն (605) սահմանային խտությունը։ Իսկ եթե այդ պարամետրերը անհայտ են և փոխարինվում են իրենց վերցվածքային գնահատականներով, ապա p_i մեծություններն արդեն հաստատուն մեծություններ չեն լինի, այլ կլինեն վերցվածքային արժեքների ֆունկցիաներ։ Հետևաբար χ^2-ու սահմանային խտությունը արդեն չի արտահայտվի (605) բանաձևով։ Այդ սահմանային խտությունը *կախված կլինի ընդհանրապես նրանից, թե ինչ եղանակով են գնահատվում անհայտ պարամետրերը։ Ապացուցված է, որ χ^2-ու սահմանային խտությունը, երբ բաշխման ֆունկցիան պարունակում է l թվով անհայտ պարամետրեր, որոնք ըստ վերցվածքի գնահատվում են χ^2-ու մինիմումի եղանակով, բերված (605) խտությունն է՝* $k = r - l - 1$ *ազատության աստիճանների թվով, այսինքն՝*

$$R_k(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\, x^{\frac{k}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}, \qquad x > 0.$$

Այժմ ցույց տանք, թե ինչպես կարելի է ստուգել մեր մտցրած հիպոթեզը χ^2 կրիտերիայի միջոցով։

Դիցուք α թիվն այնքան փոքր է, որ մի փորձում գործնականորեն անհնարին է այն պատահարի իրականացումը, որն ունի այդ հավանականությունը։

Իմանալով χ^2 մեծության բաշխման խտությունը V *աղյուսակից, գտնենք $\chi^2 = \chi^2_\alpha$ թիվը, որը բավարարում է*

$$\int_0^x R_k(x)\,dx = 1 - \alpha$$

հավասարմանը, որտեղ k-*ն ազատության աստիճանների թիվն է տվյալ դեպքում։ Այդ դեպքում*

$$P(\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha) = \alpha.$$

Այժմ, ըստ տվյալ փորձերի արդյունքների, հաշվենք χ^2 մեծությունը։ Այդ մեծությունը կամ կլինի մեծ, կամ հավասար χ^2_α-ին, կամ փոքր χ^2_α-ից։ Եթե $\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha$, նշանակում է իրականացել է մի պատահար, որ գործնականորեն կարելի է անհնար համարել, այնպես որ X *պատահական մեծության՝* F(x) *բաշխման ֆունկցիա ունենալու հիպոթեզը պետք է մերժվի։*

Իսկ եթե $\chi^2 < \chi^2_\alpha$, ապա շեղումները $\frac{m_i}{n}$-ի և p_i-ի միջև պատահական են և պետք է համարել, որ նրանք էական չեն։ Այդ դեպքում մեր մտցրած հիպոթեզը համաձայնվում է դիտումների արդյունքների հետ։

Ինչ վերաբերում է այն հարցին, թե մենք կարո՞ղ ենք արդյոք տվյալ դեպքում ընդունել այս հիպոթեզը, ապա պետք է կրկնել այն ամենը, ինչ որ ասվեց վերևում Կոլմոգորովի կրիտերիայի կապակցությամբ։

Նկատենք, որ χ^2 կրիտերիան կիրառելիս դիտումների բոլոր m_i $(i = 1, 2, \cdots r)$ թվերը, որոնք ընկնում են i-երորդ կարգում, 10-ից փոքր չպետք է լինեն։ Ուստի, եթե m_i թվերից որոշները այս պայմանին չեն բավարարում, ապա կրիտերիան կիրառելուց առաջ խորհուրդ է տրվում որոշ կարգեր միացնել այնպես, որ յուրաքանչյուր կարգում դիտումների թիվը լինի տասից մեծ կամ տասին հավասար։

Օ ր ի ն ա կ։ Այս գլխի 68 կետում մենք կառուցեցինք վիճակագրական շարք տվյալ փորձերի արդյունքների համար և որոշեցինք նրա վերցվածքային պարամետրերը։ Ենթադրենք, թե պատահական մեծությունը, որի հետ կատարվում են դիտումները, ունի հավանականությունների նորմալ բաշխման ֆունկցիա հետևյալ խտությամբ՝

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

և ստուգենք այդ հիպոթեզը χ^2 կրիտերիայի միջոցով։ Անհայտ a և σ պարամետրերը գնահատենք χ^2 մինիմումի եղանակով։ Հայտնի է, որ դիտումների խմբավորման դեպքում այդ գնահատականները համընկնում են համապատասխան $\overline{X}$ և S վերցվածքային գնահատականների, այսինքն՝ $a \approx \overline{X} = 3,\ 45$, $\sigma \approx S = 8{,}37$ հետ. այդ դեպքում

$$f(x) = \frac{1}{8{,}37\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-3{,}45)^2}{2\cdot 8{,}37}},$$

Այս ֆունկցիայի միջոցով հաշվելով պատահական մեծության $(x_i^1,\ x_{i+1}^1]$ $(i = 1,\ 2, \cdots r)$ միջակայքի մեջ ընկնելու հավանականությունը, կստանանք հետևյալ աղյուսակը.

x	−16, −12	−12, −8	−8, −4	−4, 0	0, 4	4, 8	8, 12	12, 16	16, 20	20, 24
m	4	11	18	23	28	27	22	16	8	3
$\frac{m}{n}$	0,0938		0,1125	0,1438	0,1750	0,1688	0,1375	0,1000	0,0688	
p	0,0751		0,1014	0,1542	0,1870	0,1775	0,1407	0,0871	0,0599	

Վերը արված դիտողության համաձայն առաջին երկու և վերջին երկու կարգերը միացնենք մի կարգի մեջ։

Օգտվելով այս աղյուսակից, (604) բանաձևով հաշվում ենք χ^2*-ին, հաշիվները դասավորելով հետևյալ աղյուսակում.*

X	−16,−12 −12,−8	−8,−4	−4,0	0,4	4,8	8,12	12,16	16,20 20,24
$\frac{m}{n}-p$	−0,0187	−0,0111	0,0104	0,0120	0,0087	0,0032	−0,0129	−0.0089
$\left(\frac{m}{n}-p\right)^2$	0,0004	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
$\frac{\left(\frac{m}{n}-p\right)^2}{p}$	0,0053	0,0014	0,0006	0,0005	0,0005	0,0006	0,0012	0,0016

Ունենք $\chi^2 = 0{,}0117 \cdot 160 = 1{,}87, \qquad k = 8-1-2=5$։

Վերցնում ենք $\alpha = 0{,}1$. V *աղյուսակից ստանում ենք* $\chi^2_\alpha = 9$։ *Քանի որ* $\chi^2 < \chi^2_\alpha$, *ապա* χ^2 *կրիտերիայի հիման վրա եզրակացնում ենք, որ հավանականությունների նորմալ բաշխման վերաբերյալ հիպոթեզը համաձայնվում է փորձնական տվյալների հետ և հիմք չկա այն մերժելու։*

Խնդիրներ

1. X *մեծության հինգ անկախ չափումները տվել են հետևյալ արդյունքները՝*

№	1	2	3	4	5
x_i	153	148	147	160	156

Որոշել X*-ի վերցվածքային միջինը և վերցվածքային դիսպերսիան։*

2. *Չափվել է 1000 տղամարդկանց հասակները և ստացվել է հետևյալ վիճակագրական շարքը.*

Հասակը	Զորամ. թիվը
143—146	1
146—149	2
149—152	8
152—155	26
155—158	65
158—161	120
161—164	181
164—167	201
167—170	170
170—173	120
173—176	64
176—179	28
179—182	10
182—185	3
185—188	1

Որոշել վերցվածքային միջինը և վերցվածքային դիսպերսիան։

3. Որոշել վերցվածքային դիսպերսիայի մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան, եթե պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հայտնի է։

4. Հետևյալ կոռելյացիոն աղյուսակի համար հաշվել կոռելյացիայի գործակիցը և ռեգրեսիայի ուղիղ գծերը՝

X \ Y	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45
0—4	119	9	0	0	0	0	0	0	0
4—8	9	59	7	0	0	0	0	0	0
8—12	1	4	28	3	0	0	0	0	0
12—16	0	0	8	12	4	0	0	0	0
16—20	0	0	1	6	7	1	1	0	0
20—24	0	0	0	1	1	8	3	0	0
24—28	0	0	0	0	0	2	1	0	0
28—32	0	0	0	0	0	0	3	2	1
32—36	0	0	0	0	0	0	0	1	0
36—40	0	0	0	0	0	0	0	0	1

5. Որոշել վերցվածքային կոռելյացիոն մոմենտի մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան, եթե երկչափ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հայտնի է։

6. Որոշել վերցվածքային կոռելյացիոն մոմենտի մաթեմատիկական սպասումը, եթե երկչափ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հայտնի չէ։

7. X պատահական մեծությունն ունի նորմալ բաշխում՝ անհայտ a մաթեմատիկական սպասումով և հայտնի $\sigma = 1$ պարամետրով։ Նրա նկատմամբ կատարված փորձերը տվել են հետևյալ արդյունքները՝

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	250	249	247	253	249	246	247	253	249	253

Որոշել անհայտ a պարամետրի վստահելի միջակայքը՝ 0,9 վստահելի հավանականությամբ։

8. 100 փորձերում A պատահարը հանդես է եկել 40 անգամ։ Որոշել A պատահարի հավանականության վստահելի միջակայքը 0,95 և 0,99 վստահելի հավանականությամբ։

9. X պատահական մեծությունն ունի նորմալ բաշխում անհայտ պարամետրերով։ Փորձերը տվել են հետևյալ վերցվածքը՝

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_k	5,31	5,28	5,25	5,38	5,30	5,35	5,25	5,29	5,27	5,29

Որոշել 0,95 վստահելի հավանականությամբ անհայտ պարամետրերի վստահելի միջակայքերը։

10. Ռադիոակտիվ էլեմենտի քայքայված ատոմների n_i թիվը և նրա v_i կրկնությունը տարբեր, 7,5 վ տևող, 2608 փորձերի ժամանակ բերված է հետևյալ աղյուսակում.

n_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
V_i	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	10	4	2

χ^2- կրիտերիայի միջոցով ստուգել հիպոթեզը այն մասին, որ 7,5 վայրկյանում քայքայվող ատոմների a թիվը ենթարկվում է Պուասոնի հավանականությունների բաշխմանը, եթե p = 0,05։

ԱՂՅՈՒՍԱԿՆԵՐ

Աղյուսակ I

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3202	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0386	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0027	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0013	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0,12	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0,00	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Աղյուսակ II

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0039	0079	0119	0159	0199	0239	0279	0318	0358
0,1	0398	0438	0477	0517	0556	0596	0635	0674	0714	0753
0,2	0792	0831	0870	0909	0948	0987	1025	1064	1102	1140
0,3	1179	1217	1255	1293	1330	1368	1405	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1627	1664	1700	1736	1772	1808	1843	1879
0,5	1914	1949	1984	2019	2054	2088	2122	2156	2190	2224
0,6	2257	2290	2323	2356	2389	2421	2453	2485	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2733	2763	2793	2823	2852
0,8	2881	2910	2938	2967	2995	3023	3051	3078	3105	3132
0,9	3159	3185	3212	3238	3263	3289	3314	3339	3364	3389
1,0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3576	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3707	3728	3749	3769	3790	3810	3829
1,2	3849	3868	3887	3906	3925	3943	3961	3979	3997	4014
1,3	4032	4049	4065	4082	4098	4114	4130	4146	4162	4177
1,4	4192	4207	4220	4236	4250	4264	4278	4292	4305	4318
1,5	4331	4344	4357	4369	4382	4394	4406	4417	4429	4440
1,6	4452	4463	4473	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4544
1,7	4554	4563	4572	4581	4590	4599	4608	4616	4624	4632
1,8	4640	4648	4656	4663	4671	4678	4685	4692	4699	4706
1,9	4712	4719	4725	4732	4738	4744	4750	4755	4761	4767
2,0	4772	4777	4783	4788	4793	4798	4803	4807	4812	4816
2,1	4821	4825	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4853	4857
2,2	4861	4864	4867	4871	4874	4877	4880	4884	4887	4889
2,3	4892	4895	4898	4901	4903	4906	4908	4911	4913	4915
2,4	4918	4920	4922	4924	4925	4928	4930	4932	4934	4936
2,5	4937	4939	4941	4943	4944	4945	4947	4949	4950	4952
2,6	4953	4954	4956	4957	4958	4959	4960	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4972	4973
2,8	4974	4975	4976	4976	4977	4978	4978	4979	4980	4980
2,9	4981	4981	4982	4983	4983	4984	4984	4985	4985	4986

3,0	0,49865	3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977	3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968								
4,5	499999								
5,0	499999997								

$$G_n(x) = 2\int_0^x g_n(y)dy$$

x \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,064	0,070	0,074	0,075	0,076	0,077	0,077	0,078	0,078	0,079
0,2	0,126	0,140	0,146	0,148	0,150	0,152	0,153	0,154	0,155	0,155
0,3	0,186	0,204	0,216	0,220	0,224	0,226	0,228	0,229	0,230	0,230
0,4	0,242	0,273	0,284	0,90	0,295	0,296	0,298	0,300	0,301	0,302
0,5	0,296	0,334	0,348	9,356	0,362	0,366	0,368	0,370	0,371	0,372
0,6	0,344	0,390	0,410	0,420	0,426	0,430	0,432	0,434	0,436	0,437
0,7	0,388	0,444	466	478	484	490	494	496	498	
0,8	430	492	518	532	540	546	550	554	556	500
0,9	466	536	566	580	590	598	602	606	608	558
										610
1,0	500	578	608	626	636	644	650	654	656	
1,1	530	644	648	668	678	686	692	696	700	660
1,2	558	648	684	704	716	724	730	736	740	702
1,3	582	676	716	736	750	758	766	770	774	742
1,4	606	704	744	766	780	788	796	800	804	778
1,5	626	728	770	792	806	816	822	824	832	808
1,6	644	750	792	816	830	840	846	852	856	836
1,7	661	768	812	836	850	860	868	872	876	860
1,8	678	786	830	854	868	878	886	890	894	880
1,9	692	802	846	870	884	894	900	906	910	898
										914
2,0	704	816	860	884	898	908	914	920	924	
2,2	728	842	884	908	920	930	936	940	944	929
2,4	748	862	904	926	938	946	952	956	960	948
2,6	766	876	920	940	952	960	964	968	972	962
2,8	782	892	932	952	962	968	974	977	980	974
										982
3,0	796	904	942	960	970	976	980	984	985	986
3,2	808	914	950	968	976	982	984	988	990	991
3,4	818	924	958	972	980	986	988	990	992	994
3,6	828	930	964	978	984	988	992	993	994	995
3,8	836	938	968	980	988	992	994	995	996	997
										998
4,0	844	942	972	984	990	993	995	996	997	999
4,2	852	948	976	986	992	994	996	997	998	999
4,4	858	952	978	988	993	996	997	998	999	999
4,6	864	956	980	990	994	996	997	998	999	
4,8	870	960	982	991	995	996	998	999	999	1000
5,0	874	962	984	992	996	997	998	999	1000	
5,2	880	964	986	993	996	998	999	999		
5,4	884	968	988	994	907	998	999			
5,6	888	970	989	995	998	999				
5,8	892	972	990	996	998	999				
6,0	894	974	990	996	999					

	12	13	14	15	16	17	18	19	20	∞
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,068	0,068	0,068	0,038	0,068	0,068	0,068	0,068	0,068	0,063
0,2	0,154	0,155	0,156	0,156	0,157	0,157	0,157	0,157	0,157	0,158
0,3	0,230	0,232	0,233	0,233	0,234	0,234	0,235	0,235	0,235	0,236
0,4	0,305	0,306	0,306	0,307	0,307	0,308	0,368	0,308	0,308	0,310
0,5	0,372	0,374	0,375	0,376	0,377	0,377	0,378	0,378	0,379	0,382
0,6	0,440	0,441	0,442	0,442	0,443	0,443	0,443	0,444	0,444	0,451
0,7	0,502	0,503	0,504	0,505	0,506	0,506	0,507	0,507	0,558	0,516
0,8	0,561	0,562	0,563	0,563	0,564	0,564	0,565	0,565	0,566	0,576
0,9	0,612	0,614	0,615	0,616	0,617	0,618	0,619	0,619	0,620	0,632
1,0	0,663	0,665	0,667	0,668	0,668	0,669	0,669	0,670	0,670	0,682
1,1	0,706	0,708	0,709	0,710	0,711	0,712	0,713	0,714	0,714	0,727
1,2	0,745	0,747	0,749	0,751	0,752	0,753	0,754	0,755	0,756	0,770
1,3	0,780	0,782	0,784	0,785	0,786	0,787	0,778	0,789	0,790	0,806
1,4	0,813	0,815	0,816	0,817	0,818	0,819	0,820	0,821	0,822	0,838
1,5	0,838	0,840	0,842	0,844	0,846	0,847	0,888	0,849	0,850	0,866
1,6	0,862	0,864	0,866	0,868	0,870	0,871	0,872	0,873	0,874	0,890
1,7	0,883	0,885	0,887	0,889	0,890	0,891	0,892	0,893	0,894	0,911
1,8	0,900	0,902	0,904	0,906	0,908	0,909	0,910	0,911	0,912	0,923
1,9	0,917	0,919	0,921	0,923	0,924	0,925	0,926	0,927	0,928	0,942
2,0	0,930	0,932	0,934	0,935	0,936	0,937	0,938	0,938	0,942	0,954
2,2	0,950	0,952	0,954	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,972
2,4	0,964	0,966	0,968	0,969	0,970	0,971	0,972	0,973	0,974	0,984
2,6	0,976	0,977	0,978	0,979	0,980	0,981	0,982	0,983	0,983	0,991
2,8	0,983	0,984	0,985	0,986	0,986	0,987	0,987	0,938	0,998	0,995
3,0	0,988	0,989	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992	0,992	0,997
3,2	0,992	0,993	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996	0,998
3,4	0,995	0,996	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,999
3,6	0,997	0,997	0,997	0,968	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	
3,8	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	
4,0	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	
4,2	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	
4,4	1,000	1,000								

$$K(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$$

λ	K(λ)	λ	K(λ)	λ	K(λ)
0,28	0,000001	0,75	0,372833	1,22	0,898104
0,29	0,000004	0,76	0,389640	1,23	0,902972
0,30	0,000009	0,77	0,406372	1,24	0,907648
0,31	0,000021	0,78	0,423002	1,25	0,912132
0,32	0,000046	0,79	0,439505	1,26	0,916432
0,33	0,000091	0,80	0,455857	1,27	0,920556
0,34	0,000171	0,81	0,472041	1,28	0,924505
0,35	0,000303	0,82	0,488030	1,29	0,928288
0,36	0,000511	0,83	0,503808	1,30	0,931908
0,37	0,000826	0,84	0,519366	1,31	0,935370
0,38	0,001285	0,85	0,534682	1,32	0,938682
0,39	0,001929	0,86	0,549744	1,33	0,941848
0,40	0,002808	0,87	0,564546	1,34	0,944872
0,41	0,003972	0,88	0,579070	1,35	0,947756
0,42	0,005476	0,89	0,593316	1,36	0,950512
0,43	0,007377	0,90	0,607270	1,37	0,953142
0,44	0,009730	0,91	0,620928	1,38	0,955650
0,45	0,012590	0,92	0,634286	1,39	0,958040
0,46	0,016005	0,93	0,647338	1,40	0,960318
0,47	0,020022	0,94	0,660082	1,41	0,962486
0,48	0,024682	0,95	0,672516	1,42	0,964552
0,49	0,030017	0,96	0,684636	1,43	0,966516
0,50	0,036055	0,97	0,696444	1,44	0,968382
0,51	0,042814	0,98	0,707940	1,45	0,970158
0,52	0,050306	0,99	0,719126	1,46	0,971846
0,53	0,058534	1,00	0,730000	1,47	0,973448
0,54	0,067497	1,01	0,740566	1,48	0,974970
0,55	0,077183	1,02	0,750826	1,49	0,976412
0,56	0,087577	1,03	0,760780	1,50	0,977782
0,57	0,098656	1,04	0,770434	1,51	0,979080
0,58	0,110395	1,05	0,779794	1,52	0,980310
0,59	0,122760	1,06	0,788860	1,53	0,981476
0,60	0,135718	1,07	0,797636	1,54	0,982578
0,61	0,449229	1,08	0,806128	1,55	0,983622
0,62	0,163225	1,09	0,814342	1,56	0,984610
0,63	0,177753	1,10	0,822282	1,57	0,985544
0,64	0,192677	1,11	0,829950	1,58	0,986426
0,65	0,207987	1,12	0,837356	1,59	0,987260
0,66	0,223637	1,13	0,844502	1,60	0,988048
0,67	0,239582	1,14	0,851394	1,61	0,988791
0,68	0,255780	1,15	0,858038	1,62	0,989492
0,69	0,272189	1,16	0,864442	1,63	0,990154
0,70	0,288765	1,17	0,860612	1,64	0,990777
0,71	0,305471	1,18	0,876548	1,65	0,991364
0,72	0,322265	1,19	0,882258	1,66	0,991917
0,73	0,339113	1,20	0,887750	1,67	0,092438
0,74	0,355981	1,21	0,893030	1,68	0,992928

λ	K(λ)	λ	K(λ)	λ	K(λ)
1,69	0,993387	2,00	0,999329	2,31	0,999954
1,70	0,993828	2,01	0,999380	2,32	0,999958
1,71	0,994230	2,02	0,999428	2,33	0,999962
1,72	9,994612	2,03	0,999475	2,34	0,999965
1,73	0,994972	2,04	0,999516	2,35	0,999968
1,74	0,995309	2,05	0,999552	2,36	0,999970
1,75	0,995625	2,06	0,999588	2,37	0,999973
1,76	0,995922	2,07	0,999620	2,38	0,999976
1,77	0,996200	2,08	0,999650	2,39	0,999978
1,78	0,996460	2,09	0,999680	2,40	0,999980
1,79	0,996704	2,10	0,999705	2,41	0,999982
1,80	0,996932	2,11	0,999723	2,42	0,999984
1,81	0,997146	2,12	0,999750	2,43	0,999985
1,82	0,997346	2,13	0,999770	2,44	0,999987
1,83	0,997533	2,14	0,999790	2,45	0,999986
1,84	0,997707	2,15	0,999806	2,46	0,999989
1,85	0,997870	2,16	0,999822	2,47	0,999990
1,86	0,998023	2,17	0,999838	2,48	0,999991
1,87	0,998145	2,18	0,999852	2,49	0,999992
1,88	0,998297	2,19	0,999864	2,50	0,9999925
1,89	0,998421	2,20	0,999874	2,55	0,9999956
1,90	0,998536	2,21	0,999886	2,60	0,9999974
1,91	9,998644	2,22	0,999896	2,65	0,9999984
1,92	0,998744	2,23	0,999904	2,70	0,9999990
1,93	0,998837	2,24	0,999912	2,75	0,9999994
1,94	0,998924	2,25	0,999920	2,80	0,9999997
1,95	0,999004	2,26	0,999926	2,85	0,99999982
1,96	0,999079	2,27	0,999934	2,90	0,99999990
1,97	0,999149	2,28	0,999940	2,95	0,99999994
1,98	0,999213	2,29	0,999944	3,00	0,99999997
1,99	0,999273	2,30	0,999949		

Պատահական թվեր

3393	0270	4228	6069	9407	1865	8549	3217	2351	8410
9108	2330	2157	7416	0398	6173	1703	8132	9065	6717
7891	3590	2502	5945	3402	0491	4328	2365	6175	7695
9085	6307	6910	9174	1753	1797	9229	3422	9861	8357
2638	2908	6368	0398	5495	3283	0031	5955	6544	3883
1313	8338	0623	8600	4950	5414	7131	0134	7241	0651
3897	4202	3814	3505	1599	1649	2784	1994	5775	1406
4380	9543	1646	2850	8415	9120	8062	2421	6161	4634
1618	6309	7909	0874	0401	4301	4517	9197	3350	0434
4858	4676	7363	9141	6133	0549	1972	3461	7116	1496
5354	9142	0847	5393	5416	6505	7156	5634	9703	6221
0905	6986	9396	3975	9255	0537	2479	4589	0562	5345
1420	0470	8679	2328	3939	1292	0406	5428	3789	2882
3218	9080	6604	1813	8209	7039	2086	3369	4437	3798
9697	8431	4387	0622	6893	8788	2320	9358	5904	9539
0912	4964	0502	9683	4636	2861	2876	1273	7870	2030
4636	7072	4868	0601	3894	7182	8417	2367	7032	1003
2515	4734	9878	6761	5636	2949	3979	8650	3430	0635
5964	0412	5012	2369	6461	0678	3693	2928	3740	8047
7848	1523	7904	1521	1455	7089	8094	9872	0898	7174
5192	2571	3643	0707	3434	6818	5729	8614	4298	4129
8438	8325	9886	1805	0226	2310	3675	5058	2515	2388
8166	6349	0319	5436	6838	2460	6433	0644	7428	8556
9158	8263	6504	2562	1160	1526	1816	9690	1215	9590
6061	3525	4048	0382	4224	7148	8259	6526	5340	4064
5407	2818	0520	5941	1740	5149	9844	2847	1502	0763
0469	0435	2858	7116	3297	8454	5146	9803	1694	7949
7805	8428	5745	8141	8465	4795	1895	4487	2323	1068
7294	1214	0170	9643	7891	7304	8278	2315	7139	5594
5480	2843	9803	3828	1717	6312	0334	6252	1200	7264
2017	0106	1414	9736	3886	4753	3589	3864	0073	3626
0858	1727	3020	1831	2878	2838	1319	2199	6457	5798
8396	8903	2156	1031	6182	5094	1931	9188	1672	1510
7813	4209	5295	0605	9080	6940	9657	3423	2191	3636
2712	2516	0968	7526	2176	4057	9023	2327	4311	0281
7141	7871	2878	2990	3907	8375	6005	9452	7702	9468
2418	9661	0436	1223	9708	9354	0707	4238	0756	2190
5230	6208	2742	1087	9639	6813	1963	2620	8913	7777
3517	1376	7866	6584	6381	0218	1101	3192	5965	5250
0319	0951	3976	6372	3518	1859	9038	3474	5150	3621
7526	7460	5644	8640	0643	0916	3238	0177	2592	0264
5172	1898	6030	6677	8827	7821	9933	9523	4563	7391
2023	0950	1896	4729	1789	1111	1157	0266	0438	7535
3632	3816	4575	0738	4923	4131	0819	3361	3992	6702
0761	2838	6166	8534	5353	5737	1204	2325	2036	4714
7016	8946	5601	8984	2419	2783	8590	3063	5848	9072
8805	6267	4375	4632	7808	8335	3880	4311	8913	3182
2064	9558	0393	3464	2736	3804	0474	6169	4134	7038
4213	4917	8188	2680	9255	2981	9758	0123	2914	1370
0806	1435	4151	6129	3524	1766	0515	2039	4041	9498

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Առաջաբան

ԵՐԿՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԱԲԱՆ 4
ԵՐՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԱԲԱՆ 4
ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ 5

I գլուխ. Հիմնական սահմանումներ և թեորեմներ

1. *Պատահարներ* 7
2. *Հավանականության դասական սահմանումը* 10
3. *Հավանականության վիճակագրական սահմանումը* 16
4. *Երկրաչափական հավանականություններ* 18
5. *Հավանականությունների գումարման թեորեմը* 21
6. *Պատահարի պայմանական հավանականությունը և հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը* 25
7. *Լրիվ հավանականության և Բայեսի բանաձևերը* 33
8. *Անվերադարձ վերցվածք* 37
9. *Հավանականության աքսիոմատիկ սահմանումը* 40
10. *Խնդիրներ* 46

II գլուխ. Փորձերի կրկնություն

11. *Բեռնուլիի փորձերը* 48
12. *Պատահարի երևումների ամենահավանական թիվը* 51
13. *Բեռնուլիի փորձերի ընդհանրացումը* 55
14. *Վերադարձային վերցվածք* 56
15. *Մուավր-Լապլասի թեորեմը* 59
16. *Մուավր-Լապլասի ինտեգրալային թեորեմը* 66
17. *Բեռնուլիի թեորեմը* 71
18. *Պուասոնի թեորեմը* 73
19. *Խնդիրներ* 76

III գլուխ. Պատահական մեծությունը և նրա հավանականությունների բաշխումը

20. *Պատահական մեծություն* 77
21. *Դիսկրետ պատահական մեծություն* 81

22. *Անընդհատ պատահական մեծություն* 82
23. *Հավանականությունների մի քանի անընդհատ բաշխումներ* 88
24. *Բազմաչափ պատահական մեծություն* 95
25. *Դիսկրետ բազմաչափ պատահական մեծություն* 100
26. *Անընդհատ բազմաչափ պատահական մեծություն* 106
27. *Պատահական մեծության ֆունկցիայի բաշխումը* 123
28. *Անցումը ցանկացած բաշխում ունեցող պատահական մեծությունից հավասարաչափ բաշխում ունեցող պատահական մեծությանը* 129
29. *Անկախ պատահական մեծությունների գումարի բաշխումը* 131
30. *Անկախ պատահական մեծությունների քանորդի բաշխումը* 141
31. *χ^2 պատահական մեծությունը* 143
32. *Հավանականությունների Ստյուդենտի բաշխումը* 147
33. *Խնդիրներ* 149

IV գլուխ. Պատահական մեծության բնութագրիչները

34. *Պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը կամ միջին արժեքը* 151
35. *Պատահական մեծության դիսպերսիան* 164
36. *Պատահական մեծության մոմենտները* 170
37. *Պատահական մեծության ծնող ֆունկցիան* 175
38. *Մի քանի կարևոր բաշխումների բնութագրիչները* 179
39. *Բազմաչափ պատահական մեծության բնութագրիչները* 187
40. *Կոռելյացիա* 194
41. *Խնդիրներ* 199

V գլուխ. Հավանականությունների տեսության սահմանային թեորեմները

42. *Չեբիշևի անհավասարությունը* 201
43. *Չեբիշևի թեորեմը* 203
44. *Մարկովի թեորեմը* 209
45. *Պատահական մեծության բնութագրող ֆունկցիան և նրա հատկությունները* 213
46. *Մի քանի բաշխումների բնութագրող ֆունկցիաները* 217
47. *Բնութագրող ֆունկցիայի շրջման բանաձևը* 222
48. *Սահմանային թեորեմներ՝ բնութագրող ֆունկցիաների համար* 224
49. *Հավանականությունների տեսության կենտրոնական սահմանային թեորեմը* 227
50. *Խնդիրներ* 239

VI գլուխ. Էնտրոպիա և ինֆորմացիա

51. *Գաղափար փորձի էնտրոպիայի մասին* 240
52. *Էնտրոպիայի հատկությունները* 243
53. *Միացյալ փորձերի էնտրոպիան* 245
54. *Պայմանական էնտրոպիա և նրա հատկությունները* 250

55. Գաղափար ինֆորմացիայի մասին 253
56. Խնդիրներ 259

VII գլուխ. Պատահական պրոցեսների հիմնական հասկացությունները

57. Պատահական պրոցեսի սահմանումը 260
58. Պատահական պրոցեսի վերջավոր չափանի բաշխման ֆունկցիաները . 264
59. Պատահական պրոցեսի բնութագրիչները 268
60. Մի քանի պատահական պրոցեսների օրինակներ 273
61. Ստացիոնար պատահական պրոցես 288
62. Խինչինի թեորեմը։ Սպեկտրալ խտություն և սպեկտրալ ֆունկցիա . . 296
63. Մարկովյան շղթաներ 307
64. Խնդիրներ 319

VIII գլուխ. Մաթեմատիկական վիճակագրության տարրերը

65. 321
66. Վերցվածքային բազմության բնութագրիչները 322
67. Վերցվածքային բաշխման ֆունկցիան և վերցվածքային խտության ֆունկցիան 324
68. Վերցվածքային բնութագրիչների հաշվումը 329
69. Երկչափ պատահական մեծության վերցվածքային բնութագրիչները . . 334
70. Երկչափ պատահական մեծության վերցվածքային բնութագրիչների հաշվումը 335
71. Վերցվածքային բնութագրիչների մաթեմատիկական սպասումները և դիսպերսիաները 341
72. Անհայտ պարամետրերի գնահատականները 318
73. Փոքրագույն քառակուսիների եղանակը 355
74. Լավագույն գնահատականներ 360
75. Վստահելի հավանականություն և վստահելի միջակայք 367
76. Անհայտ բնութագրիչների վստահելի միջակայքը մեծ թվով փորձերի ժամանակ 368
77. Նորմալ բաշխման անհայտ պարամետրի վստահելի միջակայքը 372
78. Անհայտ բաշխման ֆունկցիայի վերաբերյալ հիպոթեզի ստուգումը . . 381
79. Աղյուսակներ 390

Գոհար Համբարձումի Համազասպյան

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Խմբագիր՝ Կ. Ս. Լաքոյան
Նկարիչ և գեղ. խմբագիր՝ Խ. Հ. Գյուլամիրյան
Տեխ. խմբագիր՝ Ա. Կ. Տոնոյան
Վերստուգող սրբագրիչ՝ Գ. Ն. Երզնկյան

Պատվեր 1960 *Տպաքանակ 6000*

Հանձնված է շարվածքի 22/X 1976 թ.։
Ստորագրված է տպագրության 20/VI 1977 թ.։
Թուղթ № 2,60×$90^{1}/_{16}$։ Տպ. 25,0 մամ.,
հրատ. 23,3 մամ.։
Գինը՝ 1 ռ. 10 կոպ.։
ИБ—№ 138
«Լույս» հրատարակչություն, Երևան—9, Կիրովի 19 ա։
Издательство „Луйс", Ереван—9, Кирова 19—а.

ՀՍՍՀ Մինիստրների սովետի հրատարակչությունների, պոլիգրաֆիայի և գրքի առևտրի գործերի պետական կոմիտեի Հակոբ Մեղապարտի անվան պոլիգրաֆկոմբինատ, Երևան—9, Տերյան 91։
Полиграфкомбинат им. Акопа Мегапарта Госкомитета Совета Министров Арм. ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Ереван-9, ул. Теряна 91.