ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԳՅՈՒՂԱՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

Ա.Խ. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԵՐԵՎԱՆ 2003

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1 y73
Դ 171

Ուսումնական ձեռնարկը հավանության է արժանացել ՀԳԱ-ի տնտեսագիտական ֆակուլտետի մեթոդական խորհրդի (25.12.2002 թ., արձանագրություն 2) և ՀԳԱ-ի ուսումնամեթոդական հանձնաժողովին կից խմբագրական կոլեգիայի կողմից (18.09. 2003 թ. արձանագրություն 2):

Մասնագիտական խմբագիր՝ Բ.Հ. Շահնազարյան
Խմբագիր՝ Ռ.Ա. Հայրապետյան

71 **Դանիելյան Ա.Խ. Գծային ծրագրավորման մեթոդներ:** Ուսումնական ձեռնարկ: Եր., Հայկական գյուղատնտեսական ակադեմիա, 2003, 136 էջ.

Ձեռնարկում հանգամանորեն շարադրված են գծային ծրագրավորման խնդիրների լուծման մեթոդները, բերված են օրինակներ և տրված են մաթեմատիկական հիմնավորումներ:

Ձեռնարկը նախատեսված է տնտեսագիտական, ճարտարագիտական և տեխնոլոգիական մասնագիտությունների ուսանողների համար:

Դ $\frac{1602010000}{0173\ (01)-2003}$ 2003 ԳՄԴ 22.1 y73

ISBN 99930-964-7-4

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ներածություն

Այս գրքույկով նպատակ ենք դրել տարրական գիտելիքներ հաղորդել ընթերցողին, գծային ծրագրավորման հայտնի որոշ խնդիրների և նրանց լուծման մեթոդների վերաբերյալ:

Գծային ծրագրավորումը կիրառական մաթեմատիկայի բաժիններից մեկն է, որն ուսումնասիրում է օպտիմալացման խնդիրների որոշակի տեսակների առանձնահատկությունները և մշակում դրանց տեսական հիմունքներն ու լուծման արդյունավետ մեթոդները: Այն մշակում է մեթոդներ գծային ֆունկցիայի օպտիմալ արժեքների որոնման, որոշման համար: Դա կատարվում է ելնելով ալգորիթմի վերջավոր լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանից և իրականացվում է վերջավոր թվով հավասարումների կամ անհավասարումների համակարգերի համար:

Սովորաբար, տնտեսության օպտիմալ պլանավորման, կառավարման, ինչպես նաև ժողովրդական տնտեսությանը վերաբերող մի շարք խնդիրներ բերվում են գծային ծրագրավորման: Այդպիսի խնդիրները ընդհանրապես ունեն բազմաթիվ լուծումներ, որոնցից էլ անհրաժեշտ է ընտրել լավագույնը:

Գրքույկը, բաղկացած է յոթ գլուխներից:

Առաջին և չորրորդ գլուխներում բերված են գծային հանրահաշվի մի շարք գաղափարներ, (որոնց միջոցով ներկայացվում և հիմնավորվում են գծային ծրագրավորման որոշ հարցեր):

Երկրորդ գլուխը նվիրված է գծային ծրագրավորման ընդհանուր խնդրի ձևակերպմանը և բերված են մասնավոր օրինակներ:

Մնացած չորս գլուխներում հիմնականում բերված են գծային ծրագրավորման խնդիրների լուծման մեթոդները: Հատկապես մանրամասն շարադրված են սիմպլեքս և պոտենցիալների մեթոդներով խնդիրների լուծման ալգորիթմները: Տրված են գծային ծրագրավորման երկակի խնդիրների ձևակերպումը և նրանց կազմման եղանակները:

Գրքույկը նախատեսված է բուհական համակարգի ինչպես նեղ մասնագտական, այնպես էլ տնտեսագիտական ոլորտի գիտական աշխատողների և ուսանողների համար:

Գլուխ 1. Գծային հանրահաշվի որոշ տարրեր

§1. Երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտներ

Ինչպես հայտնի է գծային հանրահաշվի տեսությունից, երկրորդ կարգի դետերմինանտի գաղափարը կապված է երկու անհայտով երկու հավասարումների համակարգի լուծման հետ: Տրված է հետևյալ համակարգը.

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Նրա լուծումը կարելի է ստանալ տարբեր եղանակներով, որոնցից մեկը փոփոխականների արտաքսման եղանակն է, որով և կատարենք լուծումը: Բազմապատկենք (1)-ի առաջին հավասարման երկու մասը b_2-ով $(b_2 \neq 0)$, իսկ երկրորդի երկու մասը՝ b_1-ով $(b_1 \neq 0)$, այնուհետև գումարելով ստացված հավասարումները՝ կստանանք.

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x_1 = c_1b_2 - c_2b_1$$

Նույն ձևով արտաքսելով x_1-ը կստանանք՝

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x_2 = a_1c_2 - a_2c_1$$

Եթե $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$, ապա (1)-ի լուծումը կհանդիսանա հետևյալ թվերը՝

$$x_1 = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad x_2 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{2}$$

Նկատենք, որ x_1 և x_2 փոփոխականների գործակիցները (1) հա-

մակարգում կազմում են հետևյալ աղյուսակը

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

որը կոչվում է երկրորդ կարգի քառակուսի մատրից, իսկ $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$ արտահայտությունը՝ այդ մատրիցի դետերմինանտ կամ երկրորդ կարգի դետերմինանտ, որը նշանակում ենք հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{4}$$

Եթե նշանակենք

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

ապա (2) բանաձևերը կգրվեն՝

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} \tag{5}$$

տեսքով և կոչվում են Կրամերի բանաձևեր:

Կախված դերմինանտի արժեքներից, (1) համակարգը կարող է ունենալ տարբեր լուծումներ.

I. Եթե $\Delta \neq 0$, ապա համակարգը ունի միակ լուծում.

II. Եթե $\Delta = 0$, ապա հնարավոր է երկու դեպք.

ա) Եթե $\Delta x_1 = 0, \Delta x_2 = 0$ (համարիչ դետերմինանտները միաժամանակ $= 0$ կամ $\neq 0$), ապա համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

բ) Եթե $\Delta x_1 \neq 0$, $\Delta x_2 \neq 0$, ապա համակարգը լուծում չունի:

Երրորդ կարգի դետերմինանտը ստացվում է երրորդ կարգի քառակուսի մատրիցից.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Երրորդ կարգի դետերմինանտ կոչվում է հետևյալ թիվը.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \tag{7}$$

Դիտողություն: Մատրիցի կամ դետերմինանտի մեջ մտնող տառերը կոչվում են նրա տարրեր (էլեմենտներ):

Օրինակ: Հաշվել դետերմինանտի արժեքը.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot(-3)+0\cdot(-2)\cdot2+3\cdot(-4)-4\cdot5\cdot2-$$
$$0\cdot3\cdot(-3)-1\cdot(-2)\cdot(-1)=-15-12-40-2=-69$$

§2. n-րդ կարգի դետերմինանտներ

Ելնելով երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտների սահմանումից, կարող ենք նույն օրինաչափությամբ տալ n-րդ կարգի դետերմինանտ հասկացությունը, որը ունի n թվով տողեր և սյուներ:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Դետերմինանտի արժեքը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով.

$$A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \tag{1}$$

Այս բանաձևը տալիս է n-րդ կարգի դետերմինանտի վերածումը ըստ i-րդ տողի տարրերի: Բանաձևում A_{ij} արտահայտությունները կոչվում են a_{ij} տարրերի հանրահաշվական լրացումներ:

Եթե A դետերմինանտի մեջ ջնջենք i-րդ տողը և j-րդ սյունը, ապա կստանանք $(n-1)$-րդ կարգի դետերմինանտ, որին անվանում են a_{ij} տարրի մինոր և նշանակում են M_{ij}:

Որևէ տարրի (a_{ij}) հանրահաշվական լրացումը (A_{ij}) հավասար է համապատասխան մինորը (M_{ij}) բազմապատկած $(-1)^{i+j}$-ով, որտեղ i-ն և j-ն a_{ij} ի տողի և սյան համարներն են:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Թվենք մի քանի հատկություններ:

Հատկություն 1: Եթե դետերմինանտի որևէ տողի (սյան) բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի, ապա դետերմինանտը հավասար է զրոյի:

Հատկություն 2: Դետերմինանտի երկու տողեր (սյուներ) տեղափոխվելիս այն կբազմապատկվի -1-ով:

Հատկություն 3: Եթե դետերմինանտը պարունակում է երկու միևնույն տարրերից կազմված տողեր (սյուներ), ապա նրա արժեքը հավասար է զրոյի:

Հատկություն 4: Եթե դետերմինանտի ցանկացած տող (սյուն) ունի ընդհանուր բազմապատկիչ, ապա այն կարելի է դետերմինանտի նշանի տակից դուրս բերել:

Հատկություն 5: Եթե դետերմինանտի որևէ տողի (սյան) տարրերը կազմված են երկու գումարելիներից, ապա այդ դետերմինանտը կարելի է ներկայացնել երկու դետերմինանտների գումարի տեսքով այնպես, որ երկու դետերմինանտներում էլ բոլոր տարրերը լինեն նույնը, բացառությամբ այն տողի (սյան), որտեղ գտնվում է գումարը: Առաջին դետերմինանտի նշված տողում (սյունում) գրվում է գումարելիներից առաջինը, իսկ երկրորդում՝ երկրորդը:

Հատկություն 6: Դետերմինանտի արժեքը չի փոխվում, եթե նրա որևէ տողի (սյան) տարրերին համապատասխանաբար ավելացնենք մեկ այլ տողի (սյան) տարրեր՝ նախօրոք որևէ թվով բազմապատկելով:

Հատկություն 7: Դետերմինանտի արժեքը չի փոխվի, եթե նրա տողերը փոխարինենք սյուներով:

Հատկություն 8: Եթե դետերմինանտի տողի (սյան) տարրերը համապատասխանաբար բազմապատկենք նրա մեկ այլ տողի (սյան) տարրերի հանրահաշվական լրացումներով և վերցնենք նրանց գումարը, ապա այն հավասար կլինի զրոյի:

Օրինակ: Հաշվել չորրորդ կարգի դետերմինանտի արժեքը:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Արտահայտենք Δ-ն ըստ երկրորդ տողի տարրերի և նրանց հանրահաշվական լրացումների միջոցով:

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} =$$

$$4\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\cdot(54+20-24) + 3\cdot(18+4+18-8) - (6+27-10) -$$

$$-2\cdot(18-30+36-30) = -115$$

§3. Մատրիցներ

Մատրիցը ցանկացած աղյուսակ է, որի տարրերը դասավորված են տողերով և սյուներով: Այն կարող է լինել քառակուսի կամ ուղղանկյուն: Կամայական մատրիցը, որն ունի m թվով տողեր և n թվով սյուներ, ունի հետևյալ տեսքը.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

որտեղ a_{ij}-ն նրա տարրերն են:

Մատրիցի ցանկացած տող կարելի է դիտել որպես n-չափանի վեկտոր.

$$\overline{A_1} = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{A_m} = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$$

Բերենք որոշ հասկացություններ մատրիցների մասին:

Մատրիցի ռանգը նրա գծորեն անկախ տողերի քանակն է, այն համընկնում է վեկտորների համակարգի ռանգի հետ:

Մատրիցի նկատմամբ կարելի է կատարել էլեմենտար (տարրական) ձևափոխություններ, որով նա կմնա իրեն համարժեք:

Էլեմենտար ձևափոխություններ են համարվում.

ա) զրոյական տողի ջնջում (հեռացում)

բ) երկու կամայական տողերի տեղափոխում

գ) երկու կամայական սյուների տեղափոխում

դ) որևէ տողի տարրերին կարելի է ավելացնել մեկ այլ տողի համապատասխան տարրեր՝ նախօրոք դրանք բազմապատկելով ցանկացած թվով:

Թեորեմ: Էլեմենտար ձևափոխություններից մատրիցի ռանգը չի փոխվում (ապացույցը չենք բերի):

Եթե մատրիցի տողերը փոխարինենք սյուներով, ապա կստանանք նախորդի տրանսպոնացվածը:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Քառակուսի մատրիցի $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{mn}$ տարրերը կազմում են գլխավոր անկյունագիծը:

Այն քառակուսի մատրիցը, որի գլխավոր անկյունագծի տարրերը մեկ են, իսկ մնացածը զրոներ, անվանում են միավոր: Միավոր մատրիցն նշանակում են E տառով:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Այն մատրիցը, որի բոլոր տարրերը զրոներ են, կոչվում է զրոյական:

Երկու մատրիցներ հավասար են, եթե նրանց համապատասխան բոլոր տարրերը նույնն են:

§4. Գործողություններ մատրիցների հետ

Մատրիցները կարելի է գումարել, հանել, բազմապատկել և այլ ն:

Երկու մատրիցներ կարելի է գումարել (հանել) միայն այն դեպքում, եթե նրանք ունեն միևնույն թվով տողեր և միևնույն թվով սյուներ: Երկու մատրիցներ գումարելիս (հանելիս) անհրաժեշտ է նրանց համապատասխան տարրերը գումարել (հանել): Մատրիցների գումարման համար գործում են կոմուտատիվ (տեղափոխելիության) և ասոցիատիվ (զուգորդման) օրենքները:

$$A + B = B + A$$

$$(A+B)+C = A+(B+C)+B+(A+C)$$

Օրինակ: Գտնել A և B մատրիցների գումարը և տարբերությունը:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Երկու մատրիցներ կարելի է բազմապատկել միայն այն դեպքում, եթե առաջին մատրիցի սյուների քանակը հավասար է երկրորդի տողերի քանակին: Արտադրյալ մատրիցը կունենա այնքան տող, որքան առաջինը և այնքան սյուն, որքան երկրորդը: Արտադրյալ մատրիցի i-րդ տողի j-րդ սյան տարրը ստացվում է առաջին արտադրիչ մատրիցի i-րդ տողի տարրերը բազմապատկելով երկրորդ մատրիցի j-րդ սյան համապատասխան տարրերով և վերցնելով նրանց հանրահաշվական գումարը:

Երկու մատրիցների համար գոյություն չունի բազմապատկման տեղափոխելիության օրենքը:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Զուգորդման և բաշխական օրենքները , ինչպես թվերի նկատմամբ, իրավացի են:

$$(AB)C = A(BC)$$
$$(A+B)C = AC + BC$$

Օրինակ: Բազմապատկենք A և B մատրիցները:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3\cdot4+6\cdot3+4\cdot5 & 3\cdot7+6\cdot0+4\cdot2 \\ 2\cdot4+1\cdot3+0\cdot5 & 2\cdot7+1\cdot0+0\cdot2 \\ 3\cdot4+0\cdot3+2\cdot5 & 3\cdot7+0\cdot0+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 29 \\ 11 & 14 \\ 22 & 25 \end{pmatrix}$$

Մատրիցը որևէ թվով բազմապատկել, նշանակում է նրա բոլոր տարրերը բազմապատկել այդ նույն թվով:

Եթե

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

ապա

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Եթե որևէ մատրից ձախից կամ աջից բազմապատկենք միավոր մատրիցով, ապա այն կմնա անփոփոխ:

Օրինակ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

կամ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Եթե քառակուսի մատրիցի ռանգը հավասար է նրա կարգին $(r = n)$, ապա կարելի է կառուցել այնպիսի մատրից, որը ձախից կամ աջից արված մատրիցով բազմապատկելիս ստացվի միավոր մատրից: Այդ մատրիցն սկզբնականի համար կլինի հակադարձ: Եթե նշանակենք A-ի հակադարձ մատրիցն A^{-1}-ով, ապա՝

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Ելնելով հակադարձ մատրիցի գաղափարից, բերենք նրա կիրառությունը՝ հավասարումների համակարգը լուծելիս: Տրված է գծային հավասարման հետևյալ համակարգը:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

Նշանակենք՝

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Այս դեպքում (1)-ը կգրվի մատրիցային հավասարման միջոցով, հետևյալ տեսքով՝

$$AX = B \quad (2)$$

Բազմապատկենք ձախից (2)-ի երկու մասերը A մատրիցի հակադարձով:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Քանի որ $A^{-1}A = E$, իսկ $E \cdot X = X$, կստանանք՝

$$X = A^{-1}B$$

Եթե նշանակենք $A^{-1}B = C$, որտեղ C-ն սյուն մատրից է, ապա արդյունքում կստանանք՝

$$X = C$$

կամ

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 \\ x_2 &= c_2 \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= c_n \end{aligned}$$

որը և կլինի (1) համակարգի լուծումը:

§5. Հասկացություններ n-չափանի տարածության մեջ

Ինչպես հայտնի է անալիտիկ երկրաչափությունից, հարթության վրա կետը բնորոշվում է երկու թվերով, իսկ եռաչափ տարածության մեջ՝ երեք թվերով: Այդ նույն օրինաչափությամբ n-չափանի տարածության մեջ կետը կբնորոշվի n թվերով:

n-չափանի տարածության մեջ կետը տրվում է $x_1, x_2, \dots, x_n$ թվերի կարգավորված խմբով, որոնք կոչվում են կետի կոորդինատներ: Կետը նշանակում են $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ տեսքով:

n-չափանի տարածության մեջ ուղիղ գիծ կոչվում է $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները հանդիսանում են t պարամետրից կախված գծային ֆունկցիաներ.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 t + b_1 \\ x_2 &= a_2 t + b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= a_n t + b_n \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Այստեղ t փոփոխականի փոփոխման տիրույթն է $t \in (-\infty, \infty)$:

Եթե t պարամետրի փոփոխման տիրույթը սահմանափակենք երկու եզրերից, ապա (1) պարամետրական հավասարումը կպատկերի ուղղի հատված կամ ուղղակի հատված: Հատվածի համար՝ $t \in [\alpha, \beta]$: Եթե հատվածի ծայրակետերը նշանակենք X_1 և X_2, ապա նրանց կոորդինատները կստացվեն (1)-ից $t = \alpha$ և $t = \beta$ արժեքների տեղադրմամբ:

n-չափանի տարածության հետ կապված է մեկ այլ՝ հիպերհարթություն հասկացությունը: Այն հարթության ընդհանրացված հասկացություն է: «Հիպեր» նախածանցը այստեղ ունի որոշակի իմաստ: Քանի որ n-չափանի տարածության մեջ հնարավոր են տարբեր տիպի «հարթություններ»՝ միաչափ «հարթություն» (ուղիղ գիծ), երկչափ «հարթություն» և այլն, վերջապես $(n-1)$-չափանի «հարթությունը»: $(n-1)$-չափանի «հարթությունը» n-չափանի տարածության մեջ անվանում են «հիպերհարթություն»:

Սահմանում: n-չափանի տարածության մեջ հիպերհարթություն կոչվում է $X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ կետերի համախումբը, որոնց կոորդինատները բավարարում են առաջին աստիճանի հետևյալ հավասարմանը՝

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

որտեղ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ գործակիցներից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից:

§6. n-չափանի վեկտորներ

Վեկտորական մեծությունը դա ցանկացած մեծություն է, որը ունի ուղղություն: N-չափանի տարածության մեջ վեկտորը, ինչպես կետը, բնորոշվում է n թվերի կարգավորված խմբով: N-չափանի վեկտորը նշանակում են հետևյալ ձևերից մեկով.

$$\overline{X}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

կամ

$$\overline{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

որտեղ $x_1,x_2,\cdots,x_n$ թվերը համարվում են վեկտորի կոորդինատներ:

Եթե տրված են $X(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ և $Y(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ կետերը, ապա ասում ենք, որ նրանցով որոշվում է $\overline{xy}$ վեկտորը՝ հետևյալ կոորդինատներով.

$$y_1-x_1,y_2-x_2,\cdots,y_n-x_n$$

X կետը կոչվում է $\overline{XY}$ վեկտորի սկզբնակետ, իսկ Y-ը՝ վերջնակետ: Այսպիսով, վեկտորի կոորդինատները հավասար են նրա վերջնակետի և սկզբնակետի կոորդինատների տարբերությանը: Եթե վեկտորի բոլոր կոորդինատները զրոներ են, ապա այն կկոչվի զրոյական և կհամընկնի կոորդինատների սկզբնակետի հետ (մոդուլը հավասար է զրոյի, ուղղություն չունի):

Եթե վեկտորի սկզբնակետը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, ապա այդպիսի վեկտորը կոչվում է վերջնակետի շառավիղ վեկտոր: Շառավիղ վեկտորի կոորդինատները համընկնում են վեկտորի վերջնակետի կոորդինատների հետ:

Ցանկացած երկրաչափական վեկտոր բնութագրվում է մոդուլով և ուղղությունով: Եթե հայտնի է վեկտորի կոորդինատները, ապա միարժեք կերպով որոշվում է նրա մոդուլը և ուղղությունը: N-չափանի տարածության մեջ $\overline{X}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ վեկտորի մոդուլը որոշվում է

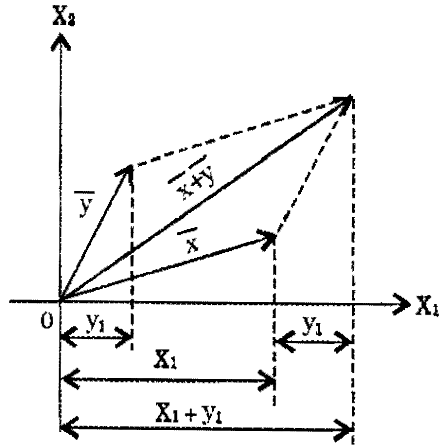
$$\left|\overline{X}\right|=+\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

բանաձևով:

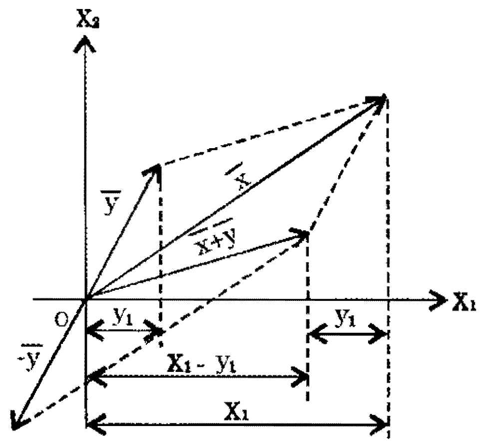
Երկրաչափական երկու վեկտորներ հավասար են, եթե հավասար են նրանց մոդուլները, իսկ ուղղությունները համընկնում են: Վեկտորների հավասարությունը բխում է նաև նրանց համապատասխան կոորդինատների հավասարությունից: Այդ հատկությունը օգտագործվում է n-չափանի վեկտորների հավասարությունը սահմանելիս:

n-չափանի երկու վեկտորներ հավասար են, եթե հավասար են նրանց համանուն կոորդինատները:

Հարթության վրա երկրաչափական երկու վեկտորների գումարը (գծ. 1) և տարբերությունը (գծ. 2) ներկայացված է զուգահեռագծի կանոնով:



գծ.1



գծ.2

Տարածելով այս հասկությունը n-չափանի վեկտորների վրա՝ կստանանք հետևյալ սահմանումը. n-չափանի երկու վեկտորների գումարը մի երրորդ վեկտոր է, որի կոորդինատները ստացվում են գումարելի վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գումարից:

Եթե $\overline{X}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$; $\overline{Y}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, ապա

$$\overline{X}+\overline{Y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$
$$\overline{X}-\overline{Y}=(x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots,x_n-y_n)$$

Ինչպես երևում է, n-չափանի վեկտորների գումարը և տարբերությունը նույնպես n-չափանի վեկտոր է:

Վեկտորների գումարը և տարբերությունը կարելի է տարածել ցանկացած թվով վեկտորների վրա:

Վեկտորը կարելի է բազմապատկել ցանկացած թվով, որը նշանակում է բազմապատկել նրա յուրաքանչյուր կոորդինատ. $\overline{\lambda x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$:

Կախված λ-ի արժեքից, բազմապատկելիս վեկտորի մոդուլը և ուղղությունը կարող են փոփոխվել: Եթե $\lambda>0$, ապա վեկտորի մոդուլը կմեծանա λ անգամ, իսկ ուղղությունը կպահպանվի (եթե $0<\lambda<1$,

մոդուլը կփոքրանա λ անգամ): Եթե $\lambda<0$, ապա վեկտորի մոդուլը կմեծանա λ անգամ, իսկ ուղղությունը կդառնա հակառակը:

Վեկտորների նկատմամբ գծային գործողությունները կատարելիս, անհրաժեշտ է նկատի ունենալ հետևյալ հատկությունները.

ա) տեղափոխելիություն՝

$$\overline{X}+\overline{Y}=\overline{X}+\overline{Y} \text{ և } \lambda\overline{X}=\overline{X}\lambda,$$

բ) զուգորդման՝

$$\overline{X}+(\overline{Y}+\overline{Z})=(\overline{X}+\overline{Y})+\overline{Z}=(\overline{Z}+\overline{X})+\overline{Y}$$
$$\lambda(K\overline{X})=K(\lambda\overline{X})=\lambda K\overline{X}$$

գ) բաշխական՝

$$\lambda(\overline{X}+\overline{Y})=\lambda\overline{X}+\lambda\overline{Y},$$
$$\overline{X}(\lambda+K)=\overline{X}\lambda+\overline{X}K$$

§7. Վեկտորի գծային կախվածությունը

Ենթադրենք n-չափանի տարածության մեջ ունենք $\overline{X}_1,\overline{X}_2,\cdots,\overline{X}_m$ վեկտորների խումբ: Բազմապատկենք այդ վեկտորները համապատասխանաբար կամայական $K_1,K_2,\ldots K_m$ թվերով և կազմենք նոր՝ $\overline{X}$-վեկտորը:

$$\overline{X}=K_1\overline{X}_1+K_2\overline{X}_2+\cdots+K_m\overline{X}_m$$

Այս ձևով կազմված ցանկացած վեկտորը կոչվում է տրված $\overline{X}_1,\overline{X}_2,\cdots,\overline{X}_m$ վեկտորների գծային կոմբինացիա, իսկ թվերը՝ $K_1,K_2,\ldots K_m$ այդ գծային կոմբինացիայի գործակիցներ:

Օրինակ. Տրված են $\overline{X}_1(1,4,2,0)$, $\overline{X}_2(3,0,-1,4)$ և $\overline{X}_3(2,1,4,-3)$ վեկտորները: Գտնել նրանց գծային կոմբինացիան $4\overline{X}_1-2\overline{X}_2+\overline{X}_3$ տեսքով:

$$4\overline{X}_1=(4,16,8,0),$$

$$-2\overline{X}_2=(-6,0,2,-8),$$
$$\overline{X}_3=(2,1,4,-3):$$

Գումարելով ստացված երեք վեկտորները կստանանք.

$$4\overline{X}_1-2\overline{X}_2+\overline{X}_3=(0,17,14,-11):$$

Երբ $\overline{X}$ վեկտորը հանդիսանում է $\overline{X}_1,\overline{X}_2,\cdots,\overline{X}_m$ վեկտորների գծային կոմբինացիան, ապա ասում ենք, որ $\overline{X}$-ը $\overline{X}_1,\overline{X}_2,\cdots,\overline{X}_m$ վեկտորներով արտահայտվում է գծորեն:

Բոլոր n-չափանի վեկտորների բազմությունը, որոնց համար սահմանված են գումարման, հանման և վեկտորների բազմապատկումը թվով գործողությունները, կոչվում է n-չափանի վեկտորական տարածություն:

Այժմ տանք վեկտորների համակարգի գծորեն կախվածության հասկացությունը: Ասենք, որ $\overline{X}_1,\overline{X}_2,\cdots,\overline{X}_m$ վեկտորները գծորեն կախված են, կամ նրանք կազմում են գծորեն կախված համակարգ, եթե նրանցից որևէ մեկը արտահայտվում է մնացածներից գծորեն: Հակառակ դեպքում, ասում ենք, որ նրանք գծորեն անկախ են, կամ կազմում են գծորեն անկախ համակարգ:

Օրինակ. Հետևյալ վեկտորների համակարգը՝

$$\overline{X}_1=(3,1,-2)$$
$$\overline{X}_2=(-2,1,4)$$
$$\overline{X}_3=(-1,3,6)$$

գծորեն կախված է, քանի որ $\overline{X}_3=\overline{X}_1+2\overline{X}_2$:

Ներմուծենք վեկտորների բազիս (հենք) և ռանգ հասկացությունները:

Ենթադրենք, տրված են m վեկտորների հետևյալ համակարգը, որոնք ունեն միևնույն չափողականությունը:

$$\overline{X}_1,\overline{X}_2,\cdots,\overline{X}_m \qquad (1)$$

Առանձնացնենք այդ վեկտորներից r-ը.

$$\overline{X}_{i_1},\overline{X}_{i_2},\cdots,\overline{X}_{i_r} \qquad (2)$$

Ասում ենք, որ (2) ենթահամակարգը հանդիսանում է (1) համակարգի համար առավելագույն գծորեն անկախ ենթահամակարգ, կամ հենք, եթե (2) վեկտորները գծորեն անկախ են, իսկ (1) համակարգի յուրաքանչյուր այլ վեկտոր հանդիսանում է նրանց գծային կոմբինացիան: Հասկանալի է, որ եթե (2) ենթահամակարգին ավելացնենք (1) համակարգի որևէ վեկտոր, ապա այն կվերածվի գծորեն կախված ենթահամակարգի:

Օրինակ: Տրված է հետևյալ երեք վեկտորների համակարգը: Պարզել հենքում վեկտորների քանակը:

$$\overline{X}_1=(3,1,-2,4)$$
$$\overline{X}_2=(0,2,-1,3)$$
$$\overline{X}_3=(0,4,-2,6)$$

Վեկտորների այս համակարգում $\overline{X}_1$ և $\overline{X}_2$ վեկտորները կազմում են հենք, քանի որ նրանց կոորդինատները համեմատական չեն: Հեշտ է տեսնել, որ $\overline{X}_3=0\cdot\overline{X}_1+2\overline{X}_2$ ($\overline{X}_3$-ը գծորեն կախված է $\overline{X}_1$ և $\overline{X}_2$ վեկտորներից): $\overline{X}_1$ և $\overline{X}_3$ վեկտորները նույնպես կազմում են հենք (կոորդինատները համեմատական չեն): Հետևաբար հենք կազմում են $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ և $\overline{X}_1$, $\overline{X}_3$ զույգերը: Հենքում վեկտորների քանակը հավասար է երկուսի:

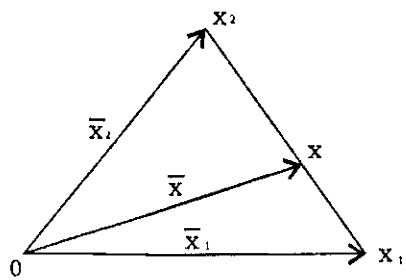
Այս օրինակից հետևում է, որ վեկտորների համակարգում կարող են լինել տարբեր հենքեր, սակայն հենքերում վեկտորների քանակը պետք է լինի նույնը: Գոյություն ունի թեորեմ, որը հաստատում է այդ դատողությունը:

Թեորեմ: Միևնույն վեկտորական համակարգի երկու տարբեր հենքեր պարունակում են միևնույն թվով վեկտորներ (ապացույցը տես ...):

Սահմանում: Վեկտորական համակարգի ռանգ կոչվում է համակարգի ցանկացած հենքի վեկտորների քանակը: Այլ խոսքով, համակարգի ռանգը հավասար է հենքում վեկտորների քանակին:

§8. Ուռուցիկ բազմություններ

Մինչ ուռուցիկ բազմության սահմանումը անցնելը, բերենք անալիտիկ երկրաչափությունից հայտնի մի բանաձև, որը արտահայտում է X_1,X_2 հատվածի կամայական X կետի շառավիղ – վեկտորը նրա ծայրակետերի շառավիղ – վեկտորների միջոցով (գծ. 3):



գծ.3

$$\overline{X}=\frac{\overline{X}_1+\lambda\overline{X}_2}{1+\lambda} \qquad (1)$$

Նկատենք նաև, որ (1)-ը ներկայացնում է X_1,X_2 հատվածը λ հարաբերությամբ բաժանող X կետի կոորդինատները որոշող բանաձև: Նշված բանաձևում $\lambda=\frac{X_1X}{XX_2}$ և փոփոխվում է $[0,\infty)$ միջակայքում:

Եթե X կետը համընկնում է X_1-ի հետ, ապա $\lambda=0$, իսկ եթե X-ը ձգտում է համընկնել X_2-ի հետ, ապա $\lambda\to\infty$:

Ապացուցվում է, որ (1) բանաձևը իրավացի է նաև n-չափանի տարածության համար:

Ընդունելով, որ (1)-ը իրավացի է n-չափանի տարածության համար, կատարենք որոշ ձևափոխություններ.

$$\overline{X}=\frac{\overline{X}_1}{1+\lambda}+\frac{\lambda\overline{X}_2}{1+\lambda}=\frac{1}{1+\lambda}\overline{X}_1+\frac{1+\lambda-1}{1+\lambda}\overline{X}_2=\frac{1}{1+\lambda}\overline{X}_1+\left(1-\frac{1}{1+\lambda}\right)\overline{X}_2$$

կամ

$$\overline{X}=S\overline{X}_1+(1-S)\overline{X}_2, \qquad (2)$$

որտեղ՝ $S=\frac{1}{1+\lambda}$:

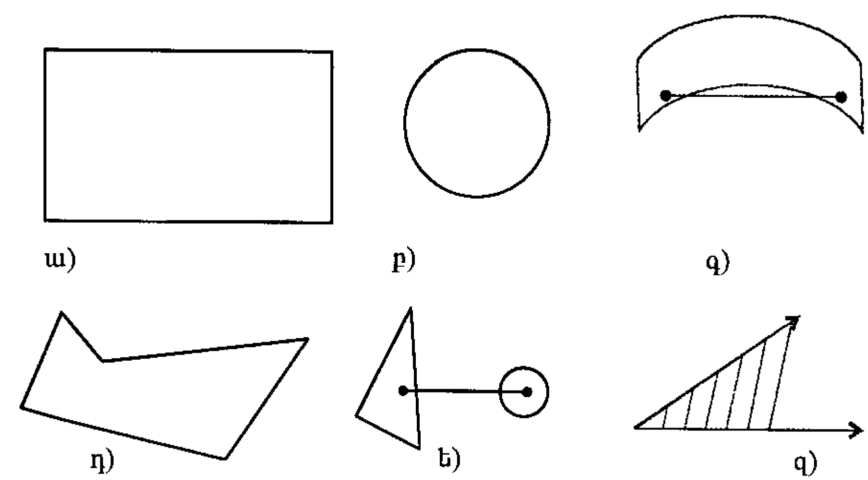
Եթե λ-ն աճի 0-ից մինչև անվերջ, ապա S-ը կնվազի 1-ից մինչև զրո:

Այսպիսով X_1,X_2 հատվածի ցանկացած X կետի շառավիղ – վեկտորը ներկայացվում է (2) բանաձևով, ուր S-ը ստանում է 1-ից զրո բոլոր հնարավոր արժեքները: Եթե $S=1$, ապա՝ $X=X_1$, եթե $S=0$, ապա՝ $X=X_2$:

Սահմանում: A բազմությունը կոչվում է ուռուցիկ, եթե $\overline{X}_1\in A$, $\overline{X}_2\in A$ և $0<S\le 1$ պայմաններից հետևում է, որ $S\overline{X}_1+$ $+(1-S)\overline{X}_2\in A$:

Երկրաչափորեն այդ նշանակում է, որ որևէ բազմությանը պատկանող կամայական երկու կետերը միացնող հատվածի բոլոր կետերը նույնպես պատկանում են այդ բազմությանը:

Երկրաչափական պատկերների տեսքով բերենք ուռուցիկ և ոչ ուռուցիկ բազմությունների օրինակներ:



գծ. 4

Բերված բազմություններից ուռուցիկ են ա), բ), գ)

Ուռուցիկ բազմությունների օրինակներ են հանդիսանում հատվածը, ուղիղ գիծը, շրջանը, հիպերհարթությունը, փակ կիսատարածությունը, բաց տարածությունը, գունդը: Բերված բազմությունների օրինակները բոլորն էլ ենթակա են ապացույցի, սակայն մենք բերենք միայն ապացույց հիպերհարթության համար:

Ունենք հիպերհարթության հավասարումը՝

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b=0 \qquad (3)$$

տեսքով, որը n-չափանի տարածությունը բաժանում է երկու մասերի, որոնցից մեկի համար գոյություն ունի՝

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b\geq 0 \qquad (4)$$

իսկ մյուսի համար՝

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b\leq 0 \qquad (5)$$

պայմանները: Հիպերհարթությունով n-չափանի տարածությունը բաժանվում է երկու մասերի. անվանենք դրանք կիսատարածություններ:

Ցույց տանք, որ կիսատարածությունը հանդիսանում է ուռուցիկ բազմություն (հիպերհարթության համար կապացուցվի նման ձևով):

Ենթադրենք $x_1\left(x_1',x_2',\cdots,x_n'\right)$ և $x_2\left(x_1'',x_2'',\cdots,x_n''\right)$ կետերը պատկանում են (4) կիսատարածությանը: Ապացուցենք, որ ցանկացած X կետը, որը պատկանում է X_1X_2 հատվածին, նույնպես պատկանում է այդ կիսատարածությանը:

Օգտվելով (2)-ից X կետի կոորդինատները ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\left.\begin{aligned} X_1&=SX_1'+(1-S)X_1'' \\ X_2&=SX_2'+(1-S)X_2'' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n&=SX_n'+(1-S)X_n'' \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Տեղադրենք (6)-ը (4)-ի ձախ մասում և կատարենք որոշ խմբավորումներ:

$$a_1\left(SX_1'+(1-S)X_1''\right)+\cdots+a_n\left(SX_n'+(1-S)X_n''\right)+b=$$
$$=S\left(a_1X_1'+a_2X_2'+\cdots+a_nX_n'\right)+(1-S)\left(a_1X_1''+a_2X_2''+\cdots+a_nX_n''\right)+b$$

Փոխարինելով $b=Sb+(1-S)b$ համարժեք արտահայտությամբ, կստանանք՝

$$S\left[a_1X_1'+a_2X_2'+\cdots+a_nX_n'+b\right]+(1-S)\left[a_1X_1''+a_2X_2''+\cdots+a_nX_n''+b\right] \qquad (7)$$

Քանի որ X_1 և X_2 կետերը պատկանում են (4) կիսատարածությանը, ուստի՝ $a_1X_1'+a_2X_2'+\cdots+a_nX_n'+b\geq 0$ և $a_1X_1''+a_2X_2''+$ $+\cdots+a_nX_n''+b\geq 0$: Հետևաբար (7) արտահայտությունը նույնպես ոչ բացասական է (հիշենք, որ $\dot{S}\geq 0$ և $(1-S)\geq 0$):

Այսպիսով X կետը նույնպես պատկանում է (4) կիսատարածությանը:

Թեորեմ 1: Եթե A-ն և B-ն ուռուցիկ բազմություններ են, ապա նրանց հատումը՝ $(A\cap B)$ նույնպես ուռուցիկ բազմություն է:

Ապացույց: Ցույց տանք, որ $(A\cap B)$-ն ուռուցիկ բազմություն է:

Ենթադրենք X_1 և X_2 կետերը պատկանում են $(A\cap B)$ բազմությանը, այդ նշանակում է, որ նրանք պատկանում են նաև A և B բազմություններին: Բայց քանի որ A-ն և B-ն ուռուցիկ բազմություններ են, ապա $S\overline{X}_1+(1-S)\overline{X}_2\in A$ և $S\overline{X}_1+(1-S)\overline{X}_2\in B$, երբ $0<S\leq 1$: Հետևաբար $S\overline{X}_1+(1-S)\overline{X}_2\in(A+B)$, երբ $0<S\leq 1$: Այսինքն X_1 և X_2 կետերի հետ միասին $(A\cap B)$ բազմությանն է պատկանում նաև $S\overline{X}_1+(1-S)\overline{X}_2$-ը, երբ $0<S\leq 1$: Ուստի՝ $(A\cap B)$ բազմությունը ուռուցիկ է:

Թեորեմ 2: Գծային հավասարումների և անհավասարումների համակարգի լուծումների բազմությունն ուռուցիկ փակ բազմություն է:

Գլուխ 2. Գծային ծրագրավորման խնդիրը

§9. Գծային ծրագրավորման ընդհանուր խնդիրը

Գծային ծրագրավորման ընդհանուր խնդիրը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ: Տրված է գծային ֆունկցիա, գծային հավասարումների (անհավասարումների) համակարգ և փոփոխականների ոչ բացասական լինելու պայման:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\to ext \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n(=,\geq,\leq)b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n(=,\geq,\leq)b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n(=,\geq,\leq)b_m \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$x_j\geq 0 \qquad \left(j=\overline{1,n}\right) \tag{3}$$

կամ

$$f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to ext$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(=,\geq,\leq)b_i$$

$$\left(i=\overline{1,m}\right) \qquad x_j\geq 0,$$

որտեղ $c_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$, $a_{ij}\left(i=\overline{1,m};\,j=\overline{1,n}\right)$ հաստատուն թվեր են:

Պահանջվում է գտնել փոփոխականների արժեքների այնպիսի բազմություն, որոնք (1) գծային ֆունկցիային հաղորդեն exstremum (մինիմում կամ մաքսիմում) արժեք և բավարարեն (2) և (3)-ին:

(1)-(3) կոչվում է գծային ծրագրավորման խնդիր (այնուհետև ԳԾԽ) ընդհանուր տեսքով:

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ անվանում են խնդրի նպատակային ֆունկցիա, երբեմն գծային ձև, (2) առնչությունը՝ սահմանափակումների համակարգ, իսկ (3)–ը փոփոխականների ոչ բացասական լինելու պայման: Ընդհանուր առմամբ (3)-ը նույնպես կարելի է համարել սահմանափակումների համակարգի մի մաս, սակայն այդ պայմանը ընդհանուր է գրեթե բոլոր ԳԾԽ-ների համար, ուստի այն դիտվում է որպես առանձին պայման:

Կախված ԳԾԽ-ների դրվածքից, կարող է դրվել պայման նպատակային ֆունկցիայի մինիմում կամ մաքսիմում արժեքը որոշելու: Ինչ վերաբերում է սահմանափակումների համակարգին, նրա յուրաքանչյուր առնչություն կարող է տրվել $=$, $\geq$ կամ $\leq$ հարաբերակցությունների տեսքով, իսկ (3) պայմանը՝ կամ $\geq$, կամ $\leq$, կամ նրանցից ոչ մեկը:

Լուծել այս խնդիրը նշանակում է գտնել սահմանափակումների համակարգի այն ոչ բացասական լուծումը՝ $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0$, որը նպատակային ֆունկցիային հաղորդի ext արժեք (մինիմում կամ մաքսիմում):

Սահմանում 1: Ամեն մի ոչ բացասական լուծում, որը բավարարում է ԳԾԽ-ի սահմանափակումների համակարգին, կոչվում է թույլատրելի լուծում (հաճախ նաև՝ խնդրի պլան):

Սահմանում 2: Այն թույլատրելի լուծումը (պլանը), որը նպատակային ֆունկցիային հաղորդում է ext. արժեք, կոչվում է օպտիմալ լուծում (օպտիմալ պլան):

Այսպիսով, ըստ ներմուծված տերմինաբանության, լուծել ԳԾԽ-ը կնշանակի պլանների բազմություններից ընտրել օպտիմալ պլանը:

Քանի որ ԳԾԽ-ներում անհրաժեշտ է գտնել նպատակային ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքները, ուստի հարց է առաջանում արդյո՞ք հնարավոր չէ լուծումը փնտրել դիֆերենցիալ հաշվի հայտնի մեթոդներով: Սակայն, ինչպես հայտնի է մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից, մի քանի փոփոխականներից ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքները գտնելու համար, նրա մասնական ածանցյալները միաժամանակ հավասարեցնում են զրոյի: Մինչդեռ ԳԾԽ-ներում նպատակային ֆունկցիան գծային է և նրա մասնական ածանցյալները հավասարվում են $x_1,x_2,\cdots,x_n$ փոփոխականների գործակիցներին, որոնք հաստատուն թվեր են և միաժամանակ զրո չեն կարող լինել: Բացի դրանից, դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդները հնարավորություն են տալիս որոշելու ֆունկցիայի միայն այն էքստրեմալ կետերը, որոնք ընկած են որոշման տիրույթի ներսում, այլ ոչ թե եզրում: Մինչդեռ նպատակային ֆունկցիայի գծային լինելը թելադրում է, որ նրա էքստրեմալ արժեքները ստացվում են միայն որոշման (լուծման) տիրույթի եզրային կետերում: Հետևաբար, ԳԾԽ-ների լուծման և հետազոտման համար դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդները պիտանի չեն, ուստի պետք է փնտրել որակապես նոր մեթոդներ, որը և կշարադրենք հետագա նյութերում:

Այժմ բերենք ԳԾԽ-ների գրառման այլ տեսքեր:

ա) Մատրիցային գրառում

$$f = CB \to ext$$
$$AX(=,\geq,\leq)B$$
$$X \geq 0,$$

որտեղ $C = (C_1, C_2, \cdots, C_n)$ տող մատրից է, իսկ B-ն և X-ը սյուն մատրիցներ են.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}:$$

բ) Վեկտորական գրառում.

$$f = \bar{c} \cdot \bar{x} \to ext$$
$$A \cdot \overline{X}(=,\geq,\leq)\overline{B}$$
$$\overline{X} \geq 0,$$

որտեղ $\overline{C} = \overline{C}(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, $\overline{X} = \overline{X}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\overline{B} = \overline{B}(b_1, b_2, \cdots, b_m)$ n-չափանի վեկտորներ են, իսկ A-ն նույն մատրիցն է, ինչ վերևում:

§10. Գծային ծրագրավորմանը բերվող խնդիր-օրինակներ

Մինչ գծային ծրագրավորման ընդհանուր խնդրի ձևակերպումը՝ բերենք մի քանի տիպային խնդիրների օրինակներ:

1. Տրանսպորտային խնդիր: Գոյություն ունեն այս խնդրի տարբեր ձևակերպումներ, որոնք տարբերվում են իրարից դրված պայմաններով: Կան նաև այլ խնդիրներ, որոնք կապ չունեն տրանսպորտային փոխադրումների հետ, սակայն պատկանում են տրանսպորտային տիպի խնդիրների դասին: Դասական տրանսպորտային խնդրի ձևակերպումը հետևյալն է:

Ենթադրենք ունենք m առաքող կետեր՝ $A_1, A_2, \cdots, A_m$, ուր տեղավորված են համասեռ (միատեսակ) բեռներ, և n սպառման կետեր՝ $B_1, B_2, \cdots, B_n$: Տրված է յուրաքանչյուր A_i առաքման կետում բեռների $a_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ ծավալը և յուրաքանչյուր B_j սպառողի՝ $b_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ պահանջարկը: Ընդունենք պայման, որ առաքող և սպառող կետերում բեռների գումարային քանակները հավասար են: Այս պայմանը կոչվում է տրանսպորտային խնդրի փակ լինելու պայման, որը գրվում է հետևյալ տեսքով.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \tag{1}$$

Խնդրում հայտնի է նաև միավոր բեռի տեղափոխման տրանսպորտային $c_{ij}\left(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}\right)$ ծախսերը ցանկացած $A_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ առաքող կետից մինչև $B_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ սպառողը: Հասկանալի է, որ տրանսպորտային ծախսերի այդ գաղափարը ոչ միշտ է արտահայտում իր անմիջական տնտեսագիտական իմաստը: Սակայն այստեղ այդ ծախսերը կարելի է դիտել որպես պայմանական հասկացություն, որը տարբեր խնդիրներում կարող է լինել տարբեր ցուցանիշ՝ ինքնարժեք, հեռավորություն, ժամանակ, վառելիքի ծախս և այլն: Սովորաբար այդ ծախսերը տրվում են հետևյալ մատրիցի տեսքով.

$$C_{ij}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}:$$

Պահանջվում է կազմակերպել բեռների տեղափոխումն այնպես, որ առաքող կետերից բեռները լրիվ տեղափոխվեն, սպառողները ստանան պահանջված քանակությամբ բեռները և որ տեղափոխումների համար կատարած տրանսպորտային գումարային ծախսը լինի նվազագույնը:

Այժմ, ելնելով խնդրի պայմաններից, տանք նրա մաթեմատիկական ձևակերպումը, որը նշանակում է նաև տալ տրանսպորտային խնդրի տնտեսա-մաթեմատիկական մոդելը: Այդ նպատակով նշանակենք A_i կետից B_j սպառողը տեղափոխվող բեռի քանակը X_{ij}

$$X_{ij}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Ենթադրելով, որ տեղափոխումների համար կատարվող ծախսը ուղիղ համեմատական է տեղափոխվող բեռի քանակությանը, կարող ենք հաշվել ընդհանուր գումարային ծախսերը հետևյալ տեսքով.

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}\rightarrow \min \qquad (2)$$

Այն պայմանը, որ բեռները առաքող կետերից պետք է լրիվ տեղափոխվեն, արտահայտվում է հետևյալ գծային հավասարումների միջոցով.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m \end{cases}$$

կամ

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\left(i=\overline{1,m}\right) \qquad (3)$$

Հաջորդ պայմանը, որ սպառման կետերում յուրաքանչյուր սպառողի պահանջարկը պետք է բավարարվի, կգրվի n գծային հավասարումների տեսքով

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n \end{cases}$$

կամ

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\left(j=\overline{1,n}\right) \qquad (4)$$

Քանի որ, ըստ խնդրի բնույթի, փոփոխական մեծությունները ոչ բացասական թվեր են (նրանք արտահայտում են տեղափոխվող բեռների ծավալները առաքման կետերից դեպի սպառողները), ապա՝

$$X_{ij}\geq 0\left(i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n}\right):$$

(3) և (4)-ը խնդրի սահմանափակումների համակարգն է, իսկ F-ը՝ նպատակային ֆունկցիան է (երբեմն անվանում են գծային ձև):

Մաթեմատիկորեն լուծել այս խնդիրը նշանակում է գտնել սահմանափակումների համակարգի այն ոչ բացասական լուծումը, որը նպատակային ֆունկցիային կհասցնի մինիմում արժեքի: Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կլինի (1)- (5)-ը ներկայացնող գծային ծրագրավորման խնդիրը:

2. Ռեսուրսների օպտիմալ օգտագործման խնդիրը:

Ենթադրենք որևէ տնտեսություն ցանկանում է կազմակերպել n արտադրատեսակների արտադրություն, իր տրամադրության տակ եղած m տեսակի սահմանափակ ծավալի ռեսուրսներով: Թող i-րդ ռեսուրսի տվյալ քանակը տնտեսությունում լինի $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$: Խնդրում հայտնի է յուրաքանչյուր j-րդ արտադրատեսակի մեկ միավորի արտադրության վրա կատարվող i-րդ ռեսուրսի ծախսը՝ $a_{ij}\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$, ինչպես նաև j-րդ պատրաստի արտադրանքի մեկ միավորի իրացումից ստացված շահույթը՝ $c_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ (կարող է լինել նաև տնտեսագիտական այլ ցուցանիշ):

Պահանջվում է պլանավորել արտադրությունն այնպես (այսինքն յուրաքանչյուր արտադրատեսակից որքան արտադրել), որպեսզի ռեսուրսների տրված պաշարների օգտագործման դեպքում ստացված գումարային շահույթը լինի առավելագույնը:

Խնդրի մաթեմատիկական տեսքը ստանալու համար կատարենք նշանակումներ: Եթե X_j-ով նշանակենք j-րդ արտադրատեսակից արտադրվելիք քանակը, ապա գումարային շահույթը կլինի՝

$$L=\sum_{j=1}^{n}C_jX_j\to\max \qquad (6)$$

Կազմենք սահմանափակումների համակարգը, ելնելով ռեսուրսների սահմանափակ լինելու պայմանից.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\le b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\le b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\le b_m \end{array}\right\} \qquad (7)$$

կամ

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\left(i=\overline{1,m}\right)\\ x_j\ge 0,\left(j=\overline{1,n}\right) \end{array}\right\} \qquad (8)$$

(6)-(8)-ը կազմում են խնդրի մաթեմատիկական մոդելը, որը իրենից ներկայացնում է գծային ծրագրավորման խնդիր:

Դիտողություն: Բացի (7) սահմանափակումներից, հնարավոր է, որ խնդրում առանձին ռեսուրսների օգտագործման վերաբերյալ լինեն լրացուցիչ սահմանափակումներ: Օրինակ՝ ռեսուրսի սահմանափակում ներքևից, որը կբացառի տվյալ ռեսուրսի թերի օգտագործումը: Հնարա-

վոր է սահմանափակում լինի արտադրատեսակների քանակի վերաբերյալ: Օրինակ, եթե գրենք $x_3\ge a$ տեսքի սահմանափակում, ապա դա կնշանակի, որ երրորդ արտադրատեսակից պետք է արտադրել ոչ պակաս՝ քան a քանակությամբ:

3. *Սննդային ռացիոնի խնդիրը:* Ենթադրենք տնտեսությունն անասուններին կերակրելու համար հատկացնում է n կերատեսակներ, որոնք պարունակում են m տեսակի սննդանյութեր: Հայտնի է, որ յուրաքանչյուր j-րդ կերատեսակի մեկ միավորը i-րդ սննդանյութից պարունակում է $b_{ij}\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$ քանակությամբ: Որպեսզի պահպանվի անասունների մթերատվությունը, անհրաժեշտ է կերերի միջոցով օրվա ընթացքում i-րդ սննդանյութից տրվի ոչ պակաս, քան $d_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ քանակություն:

Խնդրում հայտնի է նաև անասնակերերի $c_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ գները (եթե կերը գնովի է) կամ ինքնարժեքը (եթե կերը արտադրվում է տնտեսությունում):

Պահանջվում է կազմակերպել անասունների կերակրումը այնպես (այսինքն որ կերատեսակից, օրվա ընթացքում, որքան տրվի անասուններին), որպեսզի ապահովվի նրանց մթերատվությունը և որ օրվա ծախսը լինի նվազագույնը:

Խնդրի մաթեմատիկական գրառումը (մոդելը) կազմելու համար նշանակենք x_j-ով j-րդ կերատեսակի այն քանակը, որը պետք է տրվի անասուններին մեկ օրվա ընթացքում մեկ գլխի հաշվով:

Պարզ է, որ օրվա գումարային ծախսը կլինի՝

$$S=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\min \qquad (9)$$

Սահմանափակումների համակարգը կազմենք, ելնելով այն պայմանից, որ օրվա ընթացքում i-րդ սննդանյութերից անասուններին պետք է տրվի ոչ պակաս, քան d_i քանակությամբ:

$$
\begin{cases}
b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \ge d_1 \\
b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \ge d_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots + b_{mn}x_n \ge d_m
\end{cases} \tag{10}
$$

կամ

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j \ge d_i, \left(i = \overline{1,m}\right)$$

Փոփոխականների ոչ բացասական լինելու պայմանը բխում է նրանից, որ անասուններին տրվելիք կերերի քանակը $\left(x_j\right)$ բացասական չի կարող լինել:

$$x_j \ge 0 \qquad \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{11}$$

Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը իրենից ներկայացնում է (9)-(11) գծային ծրագրավորման խնդիրը:

Դիտողություն: Հնարավոր է (10) սահմանափակումների համակարգում օգտագործվեն այլ սահմանափակումներ: Օրինակ՝ անասուններին օրվա ընթացքում տրվելիք սննդանյութերի քանակի վերաբերյալ սահմանափակում վերևից, ինչպես նաև օրվա ընթացքում անասունների կերաբաժնում առանձին կերերի քանակի վերաբերյալ սահմանափակում՝ վերևից, ներքևից կամ երկուսը միասին: Օրինակ, եթե ունենք $x_5 \ge b$ տիպի սահմանափակում, ապա դա կնշանակի, որ 5-րդ կերատեսակը կերաբաժնում պետք է լինի ոչ պակաս քան b միավոր:

Վերը նշված երեք խնդիրների և նմանատիպ այլ խնդիրների լուծման մեթոդները կտրվեն հետագա գլուխներում:

§11. Գծային ծրագրավորման խնդրի հատկությունները

Սահմանում 1: Գծային ծրագրավորման խնդիրը կոչվում է կանոնական, եթե սահմանուփակումների համակարգի բոլոր առնչությունները գրված են հավասարությունների տեսքով՝ փոփոխականների ոչ

բացասական լինելու պայմանի առկայությամբ:

Այսինքն, կանոնական տեսքով կկոչվի հետևյալ գծային ծրագրավորման խնդիրը.

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{ext.}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\left(i = \overline{1,m}\right)$$

$$x_j \ge 0\left(j = \overline{1,n}\right),$$

կամ՝

ա) $f = CX \to \text{ext.}$ $\quad$ բ) $f = \left(\overline{C}\overline{X}\right) \to \text{ext,}$

$AX = B$ $\quad$ $A\overline{X} = \overline{B}$

$X \ge 0$ $\quad$ $\overline{X} \ge 0$

Սահմանում 2: Գծային ծրագրավորման խնդիրը կոչվում է սիմետրիկ, եթե սահմանափակումների համակարգի բոլոր առնչությունները գրված են միևնույն իմաստի (≥ կամ ≤) անհավասարությունների տեսքով, իսկ բոլոր փոփոխականներից պահանջվում է ոչ բացասական լինելու պայմանը:

Այսինքն, գծային ծրագրավորման խնդրի սիմետրիկ տեսքը կլինի.

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{էքստ.}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\left(i = \overline{1,m}\right)$$

$$x_j \ge 0\left(j = \overline{1,n}\right):$$

կամ՝

ա) $f = CX \to \text{ext.}$բ) $f = \left(\overline{C}\overline{X}\right) \to \text{ext.}$

$AX \le B$ $\quad$ $A\overline{X} \le \overline{B}$

$X \ge 0$ $\quad$ $\overline{X} \ge 0$

Նախորդ երեք խնդիր-օրինակներից երևում է, որ նրանք, չնայած ըստ բովանդակության, տարաբնույթ են, սակայն այնուամենայնիվ ունեն որոշակի ընդհանրություններ: Առաջին հերթին նրանց ընդհանրությունը կայանում է նրանում, որ երեք խնդիրներում էլ պահանջվում է գտնել լավագույն տարբերակը: Այսպես, տրանսպորտային խնդրում՝ տեղափոխումների լավագույն պլանը, ռեսուրսների խնդրում՝ առավելագույն եկամտաբեր արտադրության կազմակերպումը, ռացիոնի խնդրում՝ անասունների կերակրման լավագույն ռացիոնի կազմումը, որի դեպքում օրվա ծախսը կլինի նվազագույնը:

Եթե այդ խնդիրները դիտենք զուտ մաթեմատիկական տեսանկյունից, ապա կտեսնենք, որ յուրաքանչյուր խնդրում պահանջվում է փնտրել n -փոփոխականների արժեքների համախումբ այնպես, որ.

ա) ինչ-որ գծային ֆունկցիա ստանա մինիմում (մաքսիմում) արժեք,

բ) բավարարեն գծային հավասարումների (անհավասարումների) համակարգի,

գ) այդ արժեքները լինեն ոչ բացասական:

Նկատենք, որ այդ խնդիրներում սահմանափակումների համակարգը ունի կանոնական կամ սիմետրիկ տեսք: Ցույց տանք, որ կարելի է նրանց մի տեսքից մյուսին անցնել պարզ ձևափոխությունների միջոցով:

Ենթադրենք, գծային ծրագրավորման խնդրի սահմանափակումների համակարգը տրված է այնպես, ինչպես ռեսուրսների օպտիմալ օգտագործման խնդրում.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}\right\}$$

Սիմետրիկ տեսքով տրված սահմանափակումների այս համակարգը կանոնական տեսքի բերելու համար ներմուծում ենք լրացուցիչ փոփոխականներ՝ $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$, որոնք գումարելով տրված համակարգի ձախ մասերին, վերածում ենք դրանց հավասարումների, որը և պետք էր ցույց տալ:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{array}\right\}$$

Եթե գծային ծրագրավորման խնդրի սահմանափակումների համակարգը տրված է $\ge$ տեսքով, ինչպես ռացիոնի խնդրում, ապա լրացուցիչ փոփոխականները գումարում ենք համակարգի յուրաքանչյուր սահմանափակման ձախ մասերին՝ բացասական նշանով:

Օրինակ: Տրված է հետևյալ համակարգը.

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 \ge 4 \\ x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 7 \end{array}\right\}$$

Լրացուցիչ փոփոխականները՝ x_3, x_4, x_5 ներմուծելուց հետո կստանանք՝

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_5 = 7 \end{array}\right\},$$

որը իրենից ներկայացնում է կանոնական տեսքով գծային ծրագրավորման խնդրի սահմանափակումների համակարգ:

Այժմ լուծենք հակառակ խնդիրը: Սահմանափակումների համակարգը կանոնական տեսքից բերենք սիմետրիկ տեսքի:

Ենթադրենք գծային ծրագրավորման խնդրի սահմանափակումների համակարգը տրված է կանոնական տեսքով.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (12)$$

Այս համակարգը անհավասարումների (սիմետրիկ) տեսքի բերելու համար լուծենք այն որևէ մեթոդով (օրինակ, փոփոխականների հաջորդաբար արտաքսման): Հասկանալի է, որ որոշ թվով քայլերից հետո կհամոզվենք համակարգի կամ անհամատեղելիության մեջ, կամ էլ կլուծենք այն, ինչ որ թվով փոփոխականների նկատմամբ (օրինակ, $x_1, x_2, \cdots, x_r$): Այստեղ r-ը տրված համակարգի (12) փոփոխականների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգն է:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a'_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'_{1n}x_n + b'_1 \\ x_2 = a'_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'_{2n}x_n + b'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = a'_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'_{rn}x_n + b'_r \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Քանի որ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \cdots, x_r \ge 0$ (ըստ գծային ծրագրավորման խնդրի պայմանի), ուստի (13) համակարգի ձախ մասերի ոչ բացասական լինելուց հետևում է աջ մասերի ոչ բացասական լինելը:

$$\left.\begin{array}{l} a'_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'_{1n}x_n + b'_1 \ge 0 \\ a'_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'_{2n}x_n + b'_2 \ge 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'_{rn}x_n + b'_r \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Ստանում ենք $n-r$ փոփոխականներից՝ $x_{r+1}, \cdots, x_n, r$ գծային հավասարումների համակարգ: Այսպիսով, կանոնական տեսքով տրված գծային ծրագրավորման խնդրի համակարգը բերվեց սիմետրիկ տեսքի:

Մնում է ցույց տալ, որ (12) և (14) համակարգերը համարժեք են: Ենթադրենք, գտել ենք (14) համակարգի մի որևէ՝ $x^0_{r+1}, \ldots, x^0_n$ լուծում: Այդ դեպքում, (13)-ից գտնելով $x^0_1, x^0_2, \cdots, x^0_r$ ոչ բացասական արժեքները, կստանանք, որ $x^0_1, x^0_2, \cdots, x^0_r, x^0_{r+1}, \cdots, x^0_n$ թվերի համախումբը հանդիսանում է (12) սկզբնական համակարգի լուծումը: Այժմ ցույց տանք հակառակը: Իրոք՝ ինչպիսին էլ որ լինի (12) համակարգի $x^0_1, x^0_2, \cdots, x^0_r, x^0_{r+1}, \cdots, x^0_n$ լուծումը, $x^0_{r+1}, \ldots, x^0_n$ թվերի համախումբը կլինի (14)-ի լուծումը:

Նկատենք նաև, որ գծային ծրագրավորման խնդիրներում

պահանջվում է գտնել նպատակային ֆունկցիայի մինիմում կամ մաքսիմում արժեքը: Հեշտ է տեսնել, որ մի տեսքից մյուսին կարելի է անցնել $\max f = -\min(-f)$ պարզ ձևափոխությամբ, որը նշանակում է մի խնդրից մյուսին կարելի է անցնել f-ը փոխարինելով $-f$-ով:

Այսպիսով գծային ծրագրավորման խնդիրներում նշանակություն չունի, թե սահմանափակումների համակարգը ինչ տեսքով է տրված և նպատակային ֆունկցիայից ինչ է պահանջվում գտնել:

Բերենք օրինակ: Գծային ծրագրավորման խնդիրը տրված է հետևյալ տեսքով

$$f = 5x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \to \max$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 - 1 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 - 12x_5 + 10 = 0 \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5}\right)$$

Բերենք այս խնդիրն իրեն համարժեք խնդրի այնպես, որ սահմանափակումների համակարգը լինի անհավասարումների տեսքով: Այդ նպատակով համակարգի II և III հավասարումներից արտաքսենք x_3-ը (դա նշանակում է առաջին հավասարումից որոշենք x_3-ը և նրա արժեքը տեղադրենք II և III հավասարումների մեջ): Որից հետո I և III հավասարումից արտաքսենք x_4-ը: Այնուհետև I և II հավասարումներից՝ x_5-ը: Կստանանք՝

$$f = 21x_1 - 9x_2 \to \max$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 101x_1 - 102x_2 \\ x_4 = 95x_1 - 93x_2 - 1 \\ x_5 = 22x_1 - 22x_2 + 1 \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5}\right)$$

Այնուհետև, ի նկատի ունենալով փոփոխականների ոչ բացասական լինելու պայմանը, սկզբնական խնդիրը կգրենք հետևյալ տեսքով.

$$f = 21x_1 - 9x_2 \to \max$$

$$\left.\begin{array}{l} 101x_1 - 102x_2 \geq 0 \\ 95x_1 - 93x_2 - 1 \geq 0 \\ 22x_1 - 22x_2 + 1 \geq 0 \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Գլուխ 3. Գծային ծրագրավորման խնդրի երկրաչափական մեկնաբանումը

Գծային ծրագրավորման պարզագույն խնդիրները, որոնք պարունակում են մեկ կամ երկու փոփոխականներ, կարելի է լուծել երկրաչափական եղանակով: Չնայած այդ տիպի խնդիրները գործնական նշանակություն չեն կարող ունենալ, սակայն նրանց ուսումնասիրումը կարևոր է գծային ծրագրավորման խնդրի որոշ հատկություններ բացահայտելիս, ինչպես նաև երկրաչափորեն լուծման մեթոդները ընկալելիս:

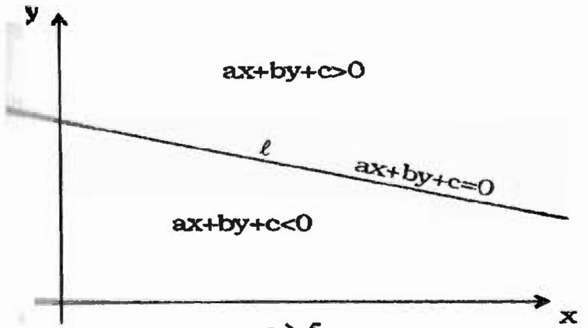
§12. Երկու փոփոխականներով գծային անհավասարումների համակարգերի լուծումը

Ենթադրենք տրված է երկու փոփոխականներով գծային անհավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 \geq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_mx + b_{my} + c_m \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Որպեսզի կարողանանք ցույց տալ, թե ինչ է իրենից ներկայացնում (1)-ի լուծումը, նախ ստանանք նրա մեջ մտնող որևէ անհավասարության լուծում: (1)-ի մեջ մտնող յուրաքանչյուր անհավասարում կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$ax + by + c \geq 0 \qquad (2)$$



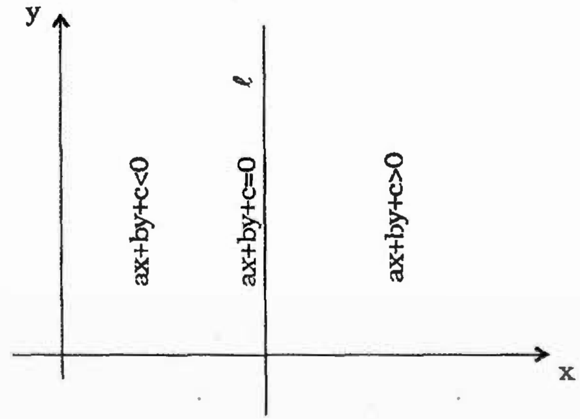
գծ.5

Այստեղ հարց է դրվում պարզել, թե ինչ տիրույթ է իրենից ներկայացնում (x,y) կետերի այն բազմությունը, որոնք բավարարում են (2)-ին: Այդ հարցին պատասխանելու համար դիտարկենք l-գիծը, որը որոշվում է

$ax+by+c=0$ հավասարումով:

Այն, ինչպես հայտնի է, հարթության վրա պատկերվում է ուղիղ գծի տեսքով, որը հարթությունը բաժանում է երկու կիսահարթությունների (գծ.5), որոնցից մեկի համար տեղի ունի $ax+by+c\ge 0$, իսկ մյուսի՝ $ax+by+c\le 0$ անհավասարումը: L գիծը կարող է պատկանել կիսահարթություններից յուրաքանչյուրին:

Գործնականում, որպեսզի պարզենք, հատկապես որ կիսահարթությանն է պատկանում (2) անհավասարումը, քննարկենք երկու դեպք:



գծ.6

1. $b\neq 0$: Այս դեպքում հնարավոր է.

ա) $b>0$, որի դեպքում (2) անհավասարումը բերվում է $y\ge kx+d$ տեսքի, իսկ

բ) $b<0$ դեպքում՝ $y\le kx+d$ տեսքի:

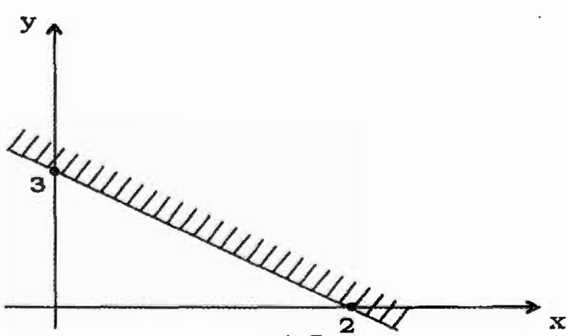
(ա) դեպքում (2) անհավասարման լուծումը լինում է l գծից վերև, իսկ (բ) դեպքում՝ ներքև ընկած կիսահարթության կետերի բազմությունը:

2. $b=0$: Այս դեպքում (2)-ը բերվում է.

ա) $x\ge h$ տեսքի, եթե $a>0$ և

բ) $x\le h$ տեսք, եթե $a<0$:

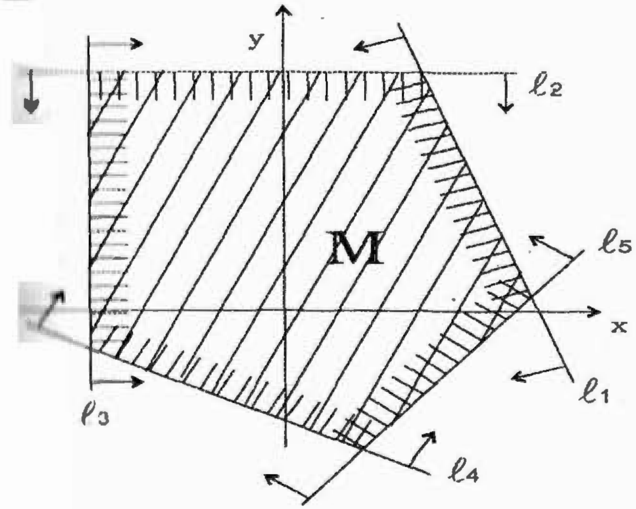
Քանի որ երկրորդ դեպքում $ax+c=0$ ուղիղը ուղղահայաց է աբսցիսների առանցքին, ուստի կիսահարթությունները կլինեն l ուղղից աջ և ձախ



գծ.7

(գծ.6) կողմերում: ա) դեպքում (2)-ի լուծումը կլինի l ուղղից աջ կիսահարթության կետերի բազմությունը, իսկ (բ) դեպքում՝ ձախ:

Այսպիսով, (2) անհավասարությունը համապատասխանում է կիսահարթության կետերի բազմություն:



գծ.8

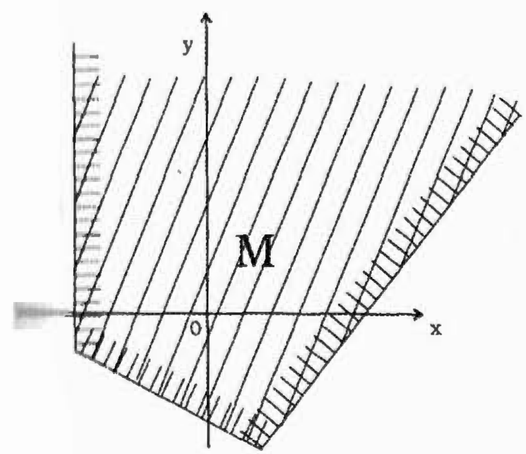
Օրինակ: Գտնել հետևյալ անհավասարմանը համապատասխանող կիսահարթությունը:

$$2x+3y-6\ge 0$$

Տրված անհավասարումը բերվում է իրեն համարժեք

$$y\ge -\frac{1}{3}x+2$$

տեսքի, հետևաբար նրան համապատասխան կիսահարթությունը ընկած կլինի ուղղից վերև (գծ.7):



գծ.9

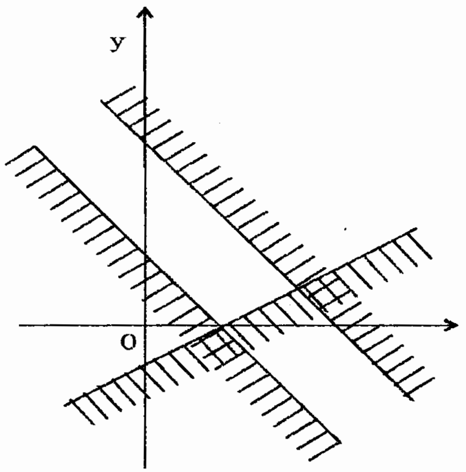
Այժմ (1)-ի լուծումը ստանալու համար նույն կոորդինատական համակարգում կառուցում ենք նրա յուրաքանչյուր անհավասարման կիսահարթությունը և գտնում նրանց հատումը: Հեշտ է տեսնել, որ վերջավոր թվով կիսահարթությունների հատումը իրենից ներկայացնում է ինչ որ բազմանկյուն: Գծագիր

8-ում ցույց է տրված հնարավոր տարբերակներից մեկը, ուր ընգծված է լուծման M տիրույթը:

M տիրույթը կոչվում է (1) համակարգերի **լուծումների տիրույթ**: Անմիջապես նկատենք, որ լուծումների տիրույթը **միշտ չէ, որ փակ է**: Այն կարող է լինել բաց (գծ.9) և դատարկ (գծ.10): **Քանի որ (1)** համակարգի լուծումների տիրույթը բազմանկյունաձև **է, ուստի նրան** (M) անվանում են նաև լուծումների բազմություն:

Նկատենք նաև, որ (1) համակարգի լուծումների M **տիրույթը իրե**նից ներկայացնում է ուռուցիկ բազմանկյուն:

Այսպիսով, այն կետերի երկրաչափական տեղը, **որոնց կոորդի**նատները բավարարում **են** (1) համակարգի **բոլոր անհավա**սարումներին, **կամ լուծումների** տիրույթին, **հանդիսանում** է M ուռուցիկ **բազմանկյուն տի**րույթ: Այն **ստացվում է (1)-ի** բոլոր **անհավասարումներին** համապատասխանող **կիսա**հարթությունների **հատումից**:



գծ.10

Նույն **օրինաչափությամբ**, եթե համակարգը **գրենք երեք** փոփոխականների **և վերջա**պես n **փոփոխականների** համար, ապա **համակարգի** լուծումը **եռաչափ տարածութ**յան մեջ կներկայացնի ուռուցիկ բազմանիստ, **իսկ n- չափանի** տարածության մեջ՝ n- չափանի ուռուցիկ բազմանիստ, **որոնք նույնպես** կարող են լինել բաց, փակ կամ դատարկ:

§13. Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծումը **հարթության վրա**

Տրված է գծային ծրագրավորման **խնդիրը** հետևյալ **տեսքով. Գտնել**

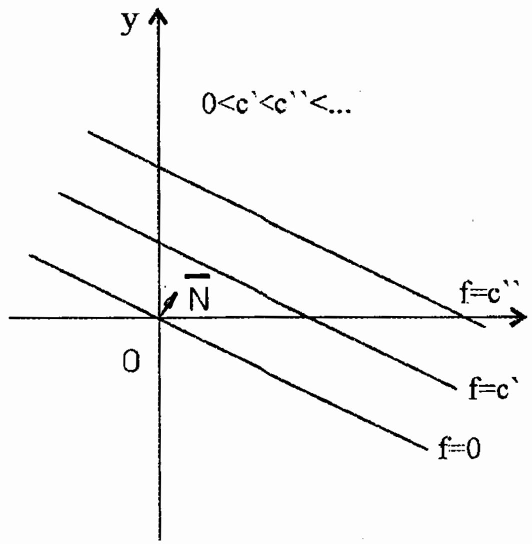
$$f = c_1x + c_2y \to \max(\min) \quad , \qquad (1)$$

հետևյալ պայմաններով.

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + d_1 \ge 0 \\ a_2x + b_2y + d_2 \ge 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_mx + b_my + d_m \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$x \ge 0, y \ge 0 \quad : \qquad (3)$$

Այս խնդրի լուծումը ստանալու համար կոորդինատական հարթության վրա կառուցում ենք (2) համակարգի լուծումների բազմանկյունը:



գծ.11

Եթե ի նկատի ունենանք նաև (3) պայմանը, ապա լուծումների բազմանկյունը կստացվի կոորդինատական առաջին քառորդում: Տրված խնդրի լուծումը հանգում է հետևյալին. լուծումների բազմանկյունից գտնել այնպիսի կետ, որի կոորդինատները տեղադրելով գծային ձևի ֆունկցիայի մեջ, ստացվի նրա մաքսիմում կամ մինիմում արժեքը:

Այժմ պարզենք (1) նպատակային ֆունկցիայի երկրաչափական իմաստը: Այդ նպատակով նախ ֆունկցիան հավասարեցնենք զրոյի (կարելի է հավասարեցնել ցանկացած թվի):

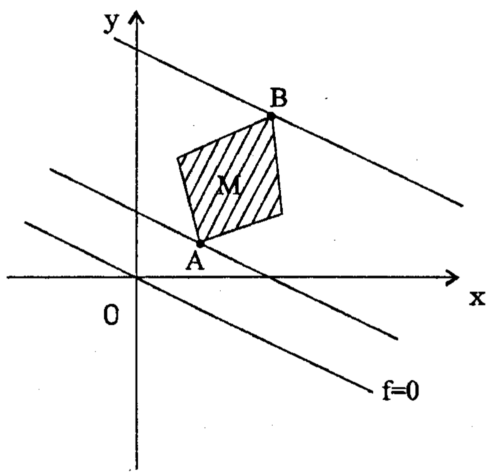
$$f = 0$$

կամ

$$c_1x + c_2y = 0 \quad : \qquad (4)$$

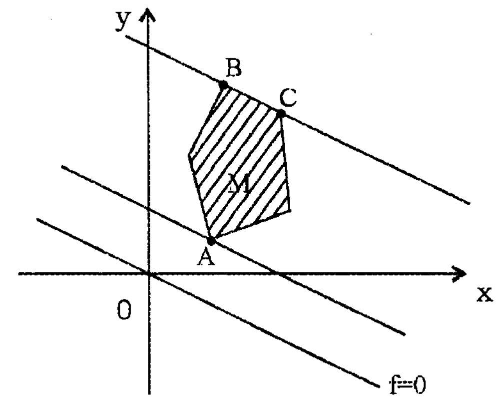
Ստացված առաջին աստիճանի հավասարումը (4) հարթության վրա պատկերվում է ուղիղ գծի տեսքով, որը անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և ուղղահայաց է $\overline{N}(c_1, c_2)$ վեկտորին (գծ.11): Այնուհետև ֆունկցիային տալով տարբեր արժեքներ ($f = c', f = c'', \cdots$), ստանում ենք զուգահեռ գծերի ընտանիք, **որոնք կոչվում են** նպատակային ֆունկցիայի մակարդակի ուղիղ **գծեր**: **Մեծացնելով** ֆունկցիայի արժեքը 0-ից մինչև ∞, մակարդակի **գծերը «լցնում» են** մի ամբողջ կիսահարթություն, որի սահմանն է $f = 0$ գիծը:

Եթե ֆունկցիայի արժեքը փոքրացնենք 0-ից **մինչև $-\infty$, ապա** մակարդակի գծերը «կշարժվեն» հակառակ ուղղությամբ՝ **«լցնելով»** հարթության երկրորդ կեսը: Արդյունքում կարող ենք **ասել, որ եթե ֆունկ**ցիայի **արժեքը փոփոխվում** է $-\infty$-ից **մինչև ∞, ապա** մակարդակի **գծերը «լցնում են»** ամբողջ **հարթությունը**: Տեղաշարժելով $f = 0$ գիծը դեպի լուծումների **բազմանկյունը**, մակարդակի **գծերից** կգտնենք այն **երկուսը, որոնք** M տիրույթը **ընդգրկում** են իրենց միջև և **լուծումների** բազմության **հետ ունեն** առնվազն **մեկ կետ** (**գծ.12**): Այդ գծերը, **որոնք անցնում** են A և B **կետերով, լուծում**ների բազմանկյան համար, կոչվում են հենման **գծեր**: **Պարզ է**, որ հենման գծերը M տիրույթի հետ ունեն մեկ ընդհանուր **կետ**: **Հենման** գծերից այն, որը առաջինն է հանդիպում M տիրույթի **հետ**, համապատասխանում է f ֆունկցիայի մինիմում **արժեքին** (գծ.12 A կետով անցնող գիծը), իսկ վերջինը՝ մաքսիմում արժեքին (B **կետով** անցնող գիծ): Սակայն հնարավոր է այնպիսի դեպք, **երբ հենման գծերից** մեկը (կամ երկուսն էլ) համընկնի լուծումների բազմանկյան **կողմերից** որևէ մեկի հետ (գծ.13): Այս դեպքում այդ հատվածի (BC) **բոլոր կետերի** համար f ֆունկցիան կստանա միևնույն մաքսիմում **արժեքը**:



գծ.12

Նպատակային ֆունկցիայի օպտիմալ **արժեքները գտնելու համար** անհրաժեշտ է որոշել A և B կետերի կոորդինատները (12) և նրանց



գծ.13

համար հաշվել f ֆունկցիայի արժեքները: Այդ կետերի կոորդինատները կըգտնվեն, եթե լուծենք այն ուղիղների հավասարումներով կազմված համակարգը, որոնց հատումից ստացվել է տվյալ կետը:

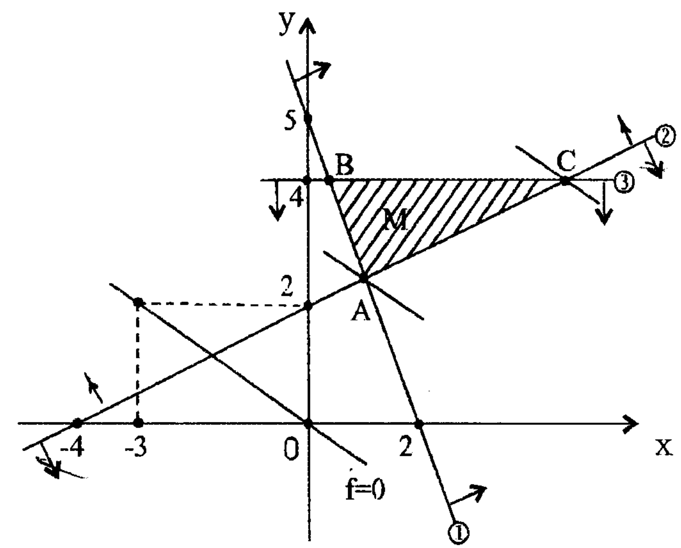
Օրինակ 1: Գտնել

$$f = 2x + 3y \to ext,$$

եթե

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 2y \geq 10 \\ -x + 2y \geq 4 \\ y \leq 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

Խնդիրը լուծելու համար, նախ գտնենք լուծումների բազմանկյունը, որի համար կառուցենք յուրաքանչյուր սահմանափակման կիսահարթությունը (գծ. 14): Ինչպես երևում է գծագրից, հենման գըծերը անցնում են A և C կետերով, ընդ որում A կետում f ֆունկցիան կընդունի մինիմում, իսկ C կետում՝ մաքսիմում արժեք:



գծ.14

A կետը առաջացել է ① և ② ուղիղների հատումից, հետևաբար նրա կոորդինատները գտնելու համար պետք է լուծել այդ հավասարումներից կազմված համակարգը.

$$\left.\begin{aligned} 5x+2y&=10 \\ -x+2y&=4 \end{aligned}\right\}:$$

Լուծելով այն, կստանանք. $x=1, y=\frac{5}{2}$:

Հետևաբար՝ $f_{min}=f_A=2\cdot 1+3\cdot\frac{5}{2}=9\frac{1}{2}$:

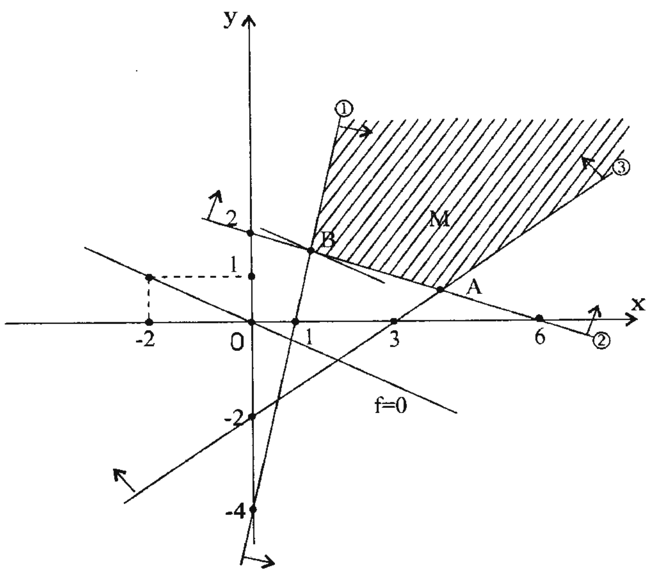
C կետը առաջացել է ② և ③ ուղիղների հատումից, ուստի՝

$$\left.\begin{aligned} -x+2y&=4 \\ y&=4 \end{aligned}\right\}, x=4, y=4:$$

$$f_{\max}=f_C=2\cdot 4+3\cdot 4=20:$$

Օրինակ 2:
Գտնել
$f=x+2y\to ext$,
երբ

$$\left.\begin{aligned} 4x-y&\ge 4 \\ x+3y&\le 6 \\ 2x-3y&\le 6 \end{aligned}\right\}\begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \end{matrix}$$



գծ.15

Կառուցենք լուծման տիրույթը (M. գծ. 15) և գտնենք հենման գծերը: Ինչպես երևում է գծագրից, լուծման տիրույթը բաց է, իսկ հենման գիծը, որն անցնում է B կետով, համապատասխանում է f ֆունկցիայի մինիմում արժեքին: Քանի որ տիրույթը բաց է, ուստի այս դեպքում ֆունկցիայի մաքսիմում արժեք գոյություն չունի (անվերջ մեծ է): Ինչպես նախորդ օրինակում, նույն ձևով գտնում ենք B կետի կոորդինատները և նրա համար հաշվում ֆունկցիայի մինիմում արժեքը:

$$\left.\begin{aligned} 4x-y&=4 \\ x+3y&=6 \end{aligned}\right\}, x=\frac{18}{3}, y=\frac{20}{13}$$

$$f_{\min}=f_B=\frac{18}{13}+2\cdot\frac{20}{13}=4\frac{6}{13}:$$

§14. Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծումը եռաչափ և n-չափանի տարածությունների մեջ

Ելնելով հարթության վրա գծային ծրագրավորման խնդրի լուծումից, օրինաչափորեն կառուցում ենք եռաչափ և n-չափանի տարածությունների մեջ նրանց լուծումը:

Եռաչափ տարածության մեջ գծային ծրագրավորման խնդիրը ունի հետևյալ տեսքը.

$$f=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3\to ext \quad , \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+b_1&\ge 0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+b_2&\ge 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+b_m&\ge 0 \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0 : \tag{3}$$

Պահանջվում է գտնել (2) սահմանափակումների համակարգի այն ոչ բացասական լուծումը, որը (1) նպատակային ֆունկցիային կհասցնի օպտիմալ (մինիմում կամ մաքսիմում) արժեքի:

Այդ նպատակով երկրաչափորեն կառուցում ենք (2) համակարգի յուրաքանչյուր անհավասարմանը համապատասխանող կիսատարածությունը: Որից հետո գտնում ենք այդ կիսատարածությունների հատումը՝ նկատի ունենալով (3) պայմանները: Կիսատարածությունների հատումը, եթե այն փակ է, կներկայացնի ուռուցիկ բազմանիստ: Այնուհետև գտնում ենք հենման հարթությունները, նախօրոք կառուցելով $f=0$ հարթությունը և տեղաշարժելով այն ինքն իրեն զուգահեռ: Հենման հարթություններին համապատասխանող ֆունկցիայի արժեքները կլինեն նրա օպտիմալ արժեքները: Եթե հենման հարթությունը շոշափում է բազմանիստի կողը կամ նիստը, ապա այդ կողի կամ նիստի բոլոր կետերում f ֆունկցիան կընդունի միևնույն օպտիմալ արժեքը:

n-չափանի տարածությունների մեջ գծային ծրագրավորման խնդիրը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով:

Տրված է նպատակային ֆունկցիան, սահմանափակումների համակարգը և փոփոխականների ոչ բացասական լինելու պայմանները՝

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to ext \quad , \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \geq 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \geq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + b_m \geq 0 \end{array}\right\} , \tag{5}$$

$$x_j \geq 0, j = \left(\overline{1,n}\right) : \tag{6}$$

Գտնել սահմանափակումների համակարգի այն ոչ բացասական լուծումը, որը ֆունկցիային հասցնի օպտիմալ արժեքի:

Եթե (5)-ի որևէ անհավասարում դարձնենք հավասարում, ապա այն իրենից կներկայացնի հիպերհարթություն, որը n-չափանի տարածությունը կբաժանի երկու հիպերկիսատարածությունների: Այդ հիպերկիսատարածություններից մեկը կհանդիսանա (5)-ի մեջ մտնող որևէ անհավասարման լուծումը: n-չափանի տարածություն մեջ կառուցելով (որը միայն պետք է պատկերացնենք) (5)-ի բոլոր հիպեր- կիսատարածությունները, կգտնենք նաև նրանց հատումը: Այն իրենից կներկայացնի ուռուցիկ հիպերբազմանիստ (եթե այն փակ է): Այնուհետև, կառուցելով $f=0$ հիպերհարթությունը, կգտնենք հենման հիպերհարթությունները, որոնք կհամապատասխանեն նպատակային

ֆունկցիայի օպտիմալ արժեքներին:

Հիշենք, որ n-չափանի տարածություն մեջ կետը $x_1, x_2, \cdots, x_n$ թվերի կարգավորված խումբն է, որը գրվում է $X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ տեսքով:

Սահմանում: X կետը կոչվում է n-չափանի տարածություն մեջ M ուռուցիկ բազմանիստի գագաթ, եթե այն պատկանում է M տիրույթին, բայց ամեն մի հատված, որը պարունակում է X կետը, ամբողջովին ընկած չէ M տիրույթում:

Գլուխ 4. Ժորդանյան արտաքսումներ

§15. Սովորական ժորդանյան արտաքսումներ

Մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրների լուծման մեթոդների հիմքում հիմնականում ընկած է ժորդանյան արտաքսումների մեթոդը, որի էությունը բացատրելու համար քննարկենք գծային համասեռ ֆունկցիաների (գծային ձևերի) հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{is}x_s + \cdots + a_{in}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rs}x_s + \cdots + a_{rn}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{ms}x_s + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases} \tag{1}$$

որտեղ a_{ij} գործակիցները հայտնի թվեր են:

Այստեղ $y_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ փոփոխականներն անվանենք հենքային (բազիսային), իսկ $\chi_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ փոփոխականները՝ ազատ: Ժորդանյան ձևափոխությունների իմաստը (1) համակարգից մի ուրիշին անցնելիս օրինակաչափություն գտնելն է, երբ հենքային փոփոխականներից մեկը փոխարինվում է ազատ փոփոխականներից որևէ մեկով:

Այդ նպատակով (1) համակարգի նկատմամբ կկատարենք հետևյալ ձևափոխությունը:

Վերցնենք (1) համակարգի որևէ հավասարում (որոշակիության համար r-երորդը).

$$y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rs}x_s + \cdots + a_{rn}x_n$$

Լուծենք այն x_s փոփոխականի նկատմամբ, որի համար

անհրաժեշտ է, որ x_s-ի գործակիցը հավասար չլինի զրոյի ($a_{rs} \neq 0$): Կստանանք՝

$$x_s = \frac{1}{a_{rs}}\left(-a_{r1}x_1 - a_{r2}x_2 - \cdots a_{rs-1}x_{s-1} + y_r - a_{rs+1}x_{s+1} - \cdots - a_{rn}x_n\right) \tag{2}$$

Տեղադրենք (2)-ից x_s-ի արժեքը (1)-ի մնացած $(m-1)$ հավասարումների մեջ: Տեղադրումը կատարենք միայն մի հավասարման (օրինակ i-րդ) համար.

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{is-1}x_{s-1} +$$

$$+ a_{is}\left[\frac{1}{a_{rs}}\left(-a_{r1}x_1 - a_{r2}x_2 - \cdots - a_{rs-1}x_{s-1} + y_r - a_{rs+1}x_{s+1} - \cdots - a_{rn}x_n\right)\right] +$$

$$+ a_{is+1}x_{s+1} + \cdots + a_{in}x_n$$

Ազատվելով փակագծերից և կատարելով նման անդամների խմբավորում կստանանք՝

$$y_i = \left(a_{i1} - \frac{a_{is}\cdot a_{r1}}{a_{rs}}\right)x_1 + \left(a_{i2} - \frac{a_{is}\cdot a_{r2}}{a_{rs}}\right)x_2 + \cdots + \left(a_{is-1} - \frac{a_{is}\cdot a_{rs-1}}{a_{rs}}\right)x_{s-1} +$$

$$+ \frac{a_{is}}{a_{rs}}y_r + + \left(a_{is+1} - \frac{a_{is}\cdot a_{rs+1}}{a_{rs}}\right)x_{r+1} + \cdots + \left(a_{in} - \frac{a_{is}\cdot a_{rn}}{a_{rs}}\right)x_n \tag{3}$$

(3) ճիշտ է (1) համակարգի յուրաքանչյուր հավասարման համար, բացի r-րդ հավասարումից, որից արդեն օգտվել ենք: Այդ պատճառով (3)-ի մեջ i-ի փոփոխման տիրույթն է $i = 1,2,\cdots,r-1,r+1,\cdots,m$: (1) համակարգի բոլոր հավասարումների մեջ x_j փոփոխականի գործակիցների ստացումը կատարվում է նույն օրինաչափությամբ, ինչ ստացվել է (3)-ի մեջ:

Օգտվելով դրանից (3)-ի մեջ կատարենք x_j փոփոխականների գործակիցների նշանակումներ հետևյալ տեսքով՝

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}\cdot a_{rj}}{a_{rs}} \tag{4}$$

(4)-ը ճիշտ է բոլոր փոփոխականների գործակիցները որոշելիս, բացի $i=r$ և $j=s$, քանի որ i-րդ հավասարումից ենք որոշել j-րդ փոփոխականը:

Այժմ համախմբելով (2) և (3)-ը և հաշվի առնելով (4)-ը, (1) համակարգը կփոխարինենք փոխադարձաբար համարժեք հետևյալ համակարգով՝

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1s-1}x_{s-1} + \dfrac{a_{1s}}{a_{rs}}y_r + b_{1s+1}x_{s+1} + \cdots + b_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{R-1} = b_{r-11}x_1 + b_{r-12}x_2 + \cdots + b_{r-1s-1}x_{s-1} + \dfrac{a_{r-1s}}{a_{rs}}y_r + b_{r-1s+1}x_{s+1} + \cdots + b_{r-1n}x_n \\ x_S = -\dfrac{a_{r1}}{a_{rs}}x_1 + \dfrac{a_{r2}}{a_{rs}}x_2 - \cdots - \dfrac{a_{rs-1}}{a_{rs}}x_{s-1} + \dfrac{1}{a_{rs}}y_r - \dfrac{a_{rs+1}}{a_{rs}}x_{s+1} - \cdots - \dfrac{a_{rn}}{a_{rs}}x_n \\ y_{r+1} = b_{r+11}x_1 + b_{r+12}x_2 + \cdots + b_{r+1}x_{s-1} + \dfrac{a_{r+1S}}{a_{2S}}y_r + b_{r+1S+1} + \cdots + b_{r+1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots + b_{ms-1}x_{s-1} + \dfrac{a_{ms}}{a_{rs}}x_r + b_{ms+1}x_{s+1} + \cdots + b_{mn}x_n \end{cases} \qquad (5)$$

Այսպիսով (1) համակարգից անցում կատարեցինք (5)-ին այնպես, որ y_r հենքային փոփոխականը փոխարինվեց x_s ազատ փոփոխականով, որով էլ վերջանում է Ժորդանյան արտաքսումների մեկ քայլը:

§16. Ժորդանյան արտաքսումները աղյուսակային տեսքով

Ինչպես տեսանք §15-ում, ժորդանյան արտաքսումների մեկ քայլ կատարելու համար անհրաժեշտ է (1) համակարգի ձախ և աջ մասի փոփոխականներից մեկը փոխարինել մյուսով: Փոխարինելիս ստանում ենք (5) համակարգը, որի գործակիցների հաշվարկը կատարում ենք (4) բանաձևով, բացի r-րդ տողից և s-րդ սյունից:

Գործնականում փոփոխականների նշված փոխարինման դեպքում կարիք չկա (5)-ին անցնելիս կատարել §15-ում նշված ձևափոխությունները: Կարելի է այդ ձևափոխությունները կատարել

[illegible] փոփոխականների գործակիցների նկատմամբ ներկայացնելով [illegible] աղյուսակների միջոցով հետևյալ կերպ: (1) համակարգի համար կազմում ենք հետևյալ աղյուսակը (աղ.1), որից հետո ընտրում ենք, թե որ փոփոխականը որով ենք փոխարինելու (եթե y_r-ին՝ x_s-ով, ապա $a_{rs} \neq 0$):

Աղյուսակ 1.

	x_1	x_2	…	x_{s-1}	x_s	x_{s+1}	…	x_n
y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1s-1}	a_{1s}	a_{1s+1}	…	a_{1n}
y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2s-1}	a_{2s}	a_{2s+1}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{is-i}	a_{is}	a_{is+1}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_r	a_{r1}	a_{r2}	…	a_{rs-1}	$\boxed{a_{rs}}$	a_{rs+1}	…	a_{rn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{ms-1}	a_{ms}	a_{ms+1}	…	a_{mn}

Այս աղյուսակում r-րդ տողը անվանում ենք գլխավոր տող, իսկ s-րդ սյունը՝ գլխավոր սյուն: Նրանց հատման տեղում գտնվող տարրը՝ a_{rs}-ը գլխավոր տարր:

Օգտվելով (5)-ից կազմում ենք աղյուսակ 2-ը, նկատի ունենալով, որ y_r փոփոխականը փոխարինվում է x_s-ով:

Նկատենք, որ (1) համակարգից (5)-ին անցնելը համարժեք է աղյուսակ 1-ից անցմանը աղյուսակ 2-ին:

Այժմ տեսնենք, թե ինչպես է ստացվում աղյուսակ 2-ը: Այդ նպատակով օգտվենք (4) նշանակումներից և աղյուսակ 2-ում r-րդ տողի և s-րդ սյան տարրերի տեսքից: Հեշտ է տեսնել, որ աղյուսակ 2-ը ստացվում է աղյուսակ 1-ից հետևյալ քայլերի օգնությամբ՝

ա) գլխավոր տարրը փոխարինված է իր հակադարձով,

բ) գլխավոր տողի մնացած տարրերը բաժանված են գլխավոր տարրի վրա և վերցված են հակառակ նշանով,

գ) գլխավոր սյան մնացած տարրերը բաժանված են գլխավոր տարրի վրա,

դ) աղյուսակ 2-ի մնացած տարրերը լրացվում են օգտվելով (4) նշանակումներից (Ժորդանյան բանաձևից), որտեղ $i \neq r, j \neq s$:

Աղյուսակ 2

	x_1	x_2	…	x_{s-1}	y_r	x_{s+1}	…	x_n
y_1	b_{11}	b_{12}	…	b_{1s-1}	$\frac{a_{1s}}{a_{rs}}$	b_{1s+1}	…	b_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_{r-1}	b_{r-11}	b_{r-12}	…	b_{r-1s-1}	$\frac{a_{r-1s}}{a_{rs}}$	b_{r-1s+1}	…	b_{r-1n}
x_s	$-\frac{a_{r1}}{a_{rs}}$	$-\frac{a_{r2}}{a_{rs}}$	…	$-\frac{a_{rs-1}}{a_{rs}}$	$\frac{1}{a_{rs}}$	$-\frac{a_{rs+1}}{a_{rs}}$	…	$-\frac{a_{rn}}{a_{rs}}$
y_{r+1}	b_{r+11}	b_{r+12}	…	b_{r+1s-1}	$\frac{a_{r+1s}}{a_{rs}}$	b_{r+1s+1}	…	b_{r+1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_m	b_{m1}	b_{m2}	…	b_{ms-1}	$\frac{a_{ms}}{a_{rs}}$	b_{ms+1}	…	b_{mn}

Օրինակ: Ենթադրենք տրված է հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ y_3 = 2x_1 + x_3 \end{cases}$$

Պահանջվում է փոխել y_2 և x_3 փոփոխականների տեղերը: Այդ նպատակով կազմենք Ժորդանյան աղյուսակ (աղյուսակ 3), որտեղ գլխավոր տարրը ընդգծված է աղյուսակում:

Աղյուսակ 3.

	x_1	x_2	x_3
y_1	2	3	-2
y_2	4	-5	$\boxed{3}$
y_3	2	0	1

Աղյուսակ 4.

	x_1	x_2	y_2
y_1	14/3	-1/3	-2/3
x_3	-4/3	5/3	1/3
y_3	2/3	5/3	1/3

Կատարենք Ժորդանյան սովորական արտաքսումների մեկ քայլ աղյուսակ 3-ի նկատմամբ: Կստանանք աղյուսակ 4-ը, որը համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} y_1 = 14/3\,x_1 - 1/3\,x_2 - 2/3\,y_2 \\ x_3 = -4/3\,x_1 + 5/3\,x_2 + 1/3\,y_2 \\ y_3 = 2/3\,x_1 + 5/3\,x_2 + 1/3\,y_2 \end{cases}$$

§17. Ժորդանյան վերափոխված արտաքսումներ

§15-ի գծային ֆունկցիաների (1) համակարգը ներկայացնենք այլ տեսքով.

$$y_i = (-a_{i1})\cdot(-x_1) + (-a_{i2})\cdot(-x_2) + \dots + (-a_{is})\cdot(-x_s) + \dots + (-a_{in})\cdot(-x_n), \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \qquad (1)$$

Հարմարության համար նշանակենք $-a_{ij} = d_{ij}$, $i = 1,2,\cdots,m$; $j = 1,2,\cdots,n$:

Այս դեպքում §15-ի (1) համակարգը, որը համարժեք է (1)-ին, կստանա հետևյալ տեսքը.

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = d_{11}(-x_1) + d_{12}(-x_2) + \dots + d_{1s}(-x_s) + \dots + d_{1n}(-x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_i = d_{i1}(-x_1) + d_{i2}(-x_2) + \dots + d_{is}(-x_s) + \dots + d_{in}(-x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_r = d_{r1}(-x_1) + d_{r2}(-x_2) + \dots + d_{rs}(-x_s) + \dots + d_{rn}(-x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = d_{m1}(-x_1) + d_{m2}(-x_2) + \dots + d_{ms}(-x_s) + \dots + d_{mn}(-x_n) \end{array}\right\} \quad (2)$$

Կազմենք (2) համակարգի համար ժորդանյան աղյուսակ, վերցնելով աղյուսակի վերևի տողում x_j փոփոխականները բացասական նշաններով, ինչպես որ համակարգում են:

Որոշելով (7) համակարգի r-րդ գծային ձևից x_s փոփոխականը, ինչպես նախորդ պարագրաֆում և տեղադրելով մնացած գծային ձևերի մեջ՝ կստանանք մի համակարգ, ուր ֆունկցիաները կլինեն $y_1, y_2, \cdots, y_{r-1}, x_s, y_{r+1}, \cdots, y_m$, իսկ արգումենտները՝ $x_1, x_2, \cdots, x_{s-1}, y_r, x_{s+1}, \cdots, x_n$:

Աղյուսակ 5.

	$-x_1$	$-x_2$	$\dots$	$-x_s$	$\dots$	$-x_n$
y_1	d_{11}	d_{12}	$\dots$	d_{1s}	$\dots$	d_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_i	d_{i1}	d_{i2}	$\dots$	d_{is}	$\dots$	d_{in}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_r	d_{r1}	d_{r2}	$\dots$	$\boxed{d_{rs}}$	$\dots$	d_{rn}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	d_{m1}	d_{m2}	$\dots$	d_{ms}	$\dots$	d_{mn}

Այդ համակարգին կհամապատասխանի հետևյալ աղյուսակը (աղյուսակ 6): (2) համակարգից անցումը մյուսի կատարվում է այնպես, ինչպես նախորդ պարագրաֆում, որը և թողնում ենք ընթերցողին:

Աղյուսակ (5)-ի d_{rs}-ը գլխավոր տարրն է, որով անցնող տողը և սյունը համապատասխանաբար կոչվում են գլխավոր տող և սյուն: Աղյուսակ 6-ը ստացվում է աղյուսակ 5-ից հետևյալ քայլերի միջոցով.

ա) գլխավոր տարրը (աղյուսակ 1) փոխարինում ենք իր հակադարձով և գրում աղյուսակ 4-ի համապատասխան տեղում,

բ) գլխավոր տողի մնացած տարրերը բաժանում ենք գլխավոր տարրի վրա և գրում հաջորդ աղյուսակի (աղյուսակ 4) համապատասխան տողում,

գ) գլխավոր սյան մնացած տարրերը բաժանում ենք գլխավոր տարրի վրա և հակառակ նշանով գրում հաջորդ աղյուսակի համապատասխան սյունում,

դ) մնացած տարրերը լրացնում ենք օգտվելով ժորդանյան (4) բանաձևից (§15):

Աղյուսակ 6.

	$-x_1$	$-x_2$	$\dots$	$-x_{s-1}$	$-y_r$	$-x_{s+1}$	$\dots$	$-x_n$
y_1	b_{11}	b_{12}	$\dots$	b_{1s-1}	$-\frac{d_{1s}}{d_{rs}}$	b_{1s+1}	$\dots$	b_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_{r-1}	b_{r-11}	b_{r-12}	$\dots$	b_{r-1s-1}	$-\frac{d_{r-1s}}{d_{rs}}$	b_{r-1s+1}	$\dots$	b_{r-1n}
x_s	$\frac{d_{r1}}{d_{rs}}$	$\frac{d_{r2}}{d_{rs}}$	$\dots$	$\frac{d_{rs-1}}{d_{rs}}$	$\frac{1}{d_{rs}}$	$\frac{d_{rs+1}}{d_{rs}}$	$\dots$	$\frac{d_{rn}}{d_{rs}}$
y_{r+1}	b_{r+11}	b_{r+12}	$\dots$	b_{r+1s-1}	$-\frac{d_{r+1s}}{d_{rs}}$	b_{r+1s+1}	$\dots$	b_{r+1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	b_{m1}	b_{m2}	$\dots$	b_{ms-1}	$-\frac{d_{ms}}{d_{rs}}$	b_{ms+1}	$\dots$	b_{mn}

Օրինակ: Տրված է հետևյալ համակարգը: Կատարել Ժորդանի վերափոխված ձևափոխությունների մեկ քայլ:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ y_3 = 3x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

Տրված համակարգի համար կազմում ենք ժորդանյան վերափոխված արտաքսումների առաջին աղյուսակը (աղյուսակ 1): Եթե այդ աղյուսակում ցանկանում ենք փոխել y_2 և x_3 փոփոխականների տեղերը, ապա նրա երկրորդ տողն ու երրորդ սյունը կկոչվեն գլխավոր, իսկ նրանց հատման տեղում գտնվող տարրը –3-ը՝ գլխավոր: Կիրառելով աղյուսակ 1-ի նկատմամբ ժորդանյան ձևափոխված արտաքսումների չորս քայլերը՝ կստանանք աղյուսակ 2-ը:

Աղյուսակ 1.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
y_1	-3	2	-1
y_2	2	-5	$\boxed{-3}$
y_3	0	-3	-4

Աղյուսակ 2.

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$
y_1	-11/3	11/3	-1/3
x_3	-2/3	5/3	-1/3
y_3	-8/3	11/3	-4/3

Ստացված աղյուսակից, եթե վերականգնենք համակարգը, ապա այն կունենա հետևյալ տեսքը, որտեղ y_2 և x_3 փոփոխականները փոխել են իրենց տեղերը:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{11}{3}x_1 - \frac{11}{3}x_2 + \frac{1}{3}y_2 \\ x_3 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}y_2 \\ y_3 = \frac{8}{3}x_1 - \frac{11}{3}x_2 + \frac{4}{3}y_2 \end{cases}$$

§18 Ժորդանյան արտաքսումների կիրառությունները

Նախքան ժորդանյան արտաքսումների կիրառություններին անցնելը, բերենք գծային հանրահաշվից հայտնի թեորեմը իր ապացույցով:

Ստեյնիցի թեորեմը: Եթե ժորդանյան աղյուսակում, երբ $m \leq n$, տողերը գծորեն անկախ են, ապա ժորդանյան արտաքսումների m հաջորդական քայլերի արդյունքում կարելի է փոխել $y_i (i = \overline{1,m})$ փոփոխականների տեղերը նույնքան թվով x_j փոփոխականներով:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ փոփոխականների տողերի փոխարինումն անհնար է այն դեպքում, երբ գլխավոր տարրը զրո է (զրոյի վրա չի կարելի բաժանել):

Այժմ ենթադրենք, որ ժորդանյան արտաքսումների r քայլերի արդյունքում ($r < m$) հանգել ենք հետևյալ աղյուսակին (աղյուսակ 7):

Աղյուսակ 7.

	y_1	y_2	$\cdots$	y_r	x_{r+1}	$\cdots$	x_n
x_1	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	b_{1r}	b_{1r+1}	$\cdots$	b_{1n}
x_2	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	b_{2r}	b_{2r+1}	$\cdots$	b_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_r	b_{r1}	b_{r2}	$\cdots$	b_{rr}	b_{rr+1}	$\cdots$	b_{rn}
y_{r+1}	c_{r+11}	c_{r+12}	$\cdots$	c_{r+1r}	0	$\cdots$	0
y_{r+2}	c_{r+21}	c_{r+22}	$\cdots$	c_{r+2r}	0	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mr}	0	$\cdots$	0

Եթե հետագա քայլերով y փոփոխականները հնարավոր չէ փոխարինել x-երով, ապա նշանակում է, որ աղյուսակ 9-ի ներքևի աջ անկյունում ընկած տարրերը պետք է լինեն միայն զրոներ: Սակայն զրոների առկայությունից էլ հետևում է, որ $y_{r+1}, \ldots, y_m$ փոփոխականները արտահայտվում են $y_1, y_2, \ldots, y_r$ փոփոխականներով հետևյալ կերպ՝

$$y_{r+1} = c_{r+11}y_1 + c_{r+12}y_2 + \cdots + c_{r+1r}y_r$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_m = c_{m1}y_1 + c_{m2}y_2 + \cdots + c_{mr}y_r$$

իսկ սա գծային կախում է y-ների միջև, որը հակասում է թեորեմի պայմանին: Հետևաբար բոլոր y-ները կարելի է փոխարինել x-երով, ինչը պահանջվում էր ապացուցել:

Այժմ բերենք ժորդանյան արտաքսումների կիրառությունները՝ օրինակների տեսքով:

ա) Մատրիցի ռանգի հաշվումը:

Մատրիցի ռանգը առվելագույն թվով գծորեն անկախ տողերի (սյուների) քանակն է:

Օրինակ 1: Տրված է հետևյալ մատրիցը: Պահանջվում է հաշվել նրա ռանգը:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6 & 8\\ -3 & 4 & -7 & -1\\ 1 & -2 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Կազմենք ժորդանյան աղյուսակ (աղյուսակ 1):

Աղյուսակ 1.

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	$\boxed{-1}$	-2	6	8
y_2	-3	4	-7	-1
y_3	1	-2	4	2
y_4	-1	0	1	3

Աղյուսակ 2.

	y_1	x_2	x_3	x_4
x_1	-1	-2	6	8
y_2	3	10	-25	-25
y_3	-1	-4	10	10
y_4	1	$\boxed{2}$	-5	-5

Նկատենք նախ, որ ժորդանյան առաջին աղյուսակից որպես գլխավոր տարր կարելի է վերցնել զրոյից տարբեր ցանկացած թիվ: Այդ նկատի առնելով, որպես գլխավոր տարր վերցնենք աղյուսակ 1-ի առաջին տողի առաջին տարրը: Կատարելով սովորական ժորդանյան արտաքսումների մեկ քայլ, աղյուսակ 1-ի նկատմամբ, կստանանք աղյուսակ 2-ը: Այժմ, որպես գլխավոր տարր, 2-րդ աղյուսակում վերցնենք չորրորդ տողի երկրորդ սյան տարրը և կատարենք ևս մեկ քայլ: Կստանանք աղյուսակ 3-ը:

Աղյուսակ 3

	y_1	y_4	x_3	x_4
x_1	0	-1	1	3
y_2	-2	5	0	0
y_3	1	-2	0	0
x_2	-1/2	1/2	5/2	5/2

Ինչպես երևում է աղյուսակ 3-ից, հետագա արտաքսումները հնարավոր չեն, քանի որ գլխավոր տարրը զրո չի կարող լինել (երկրորդ և երրորդ տողերի երրորդ ու չորրորդ սյուներում զրոներ են): Հետևաբար տրված մատրիցը ունի գծորեն անկախ միայն երկու տողեր: Ուստի նրա ռանգը հավասար է երկուսի: Մատրիցի մնացած երկու տողերը (երկրորդ և երրորդ) կախված են առաջինից ու չորրորդից հետևյալ կապով՝

$$y_2=-2y_1+5y_4$$

$$y_3=y_1-2y_4$$

Օրինակ 2: Գտնել մատրիցի ռանգը:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\\ -2 & -4\\ 4 & 8\end{pmatrix}$$

Կազմենք Ժորդանյան սկզբնական աղյուսակ (աղյուսակ 1) և կատարենք արտաքսումների մեկ քայլ՝ ընդունելով որպես գլխավոր տարր 1-ը:

Աղյուսակ 1.

	x_1	x_2
y_1	$\boxed{1}$	2
y_2	3	6
y_3	-2	-4
y_4	4	8

Աղյուսակ 2.

	y_1	x_2
x_1	1	-2
y_2	3	0
y_3	-2	0
y_4	4	0

Ստացված աղյուսակում (աղ.2) հնարավոր չեն հետագա արտաքսումներ՝ զրոների առկայության պատճառով: Հետևաբար, մատրիցի ռանգը հավասար է մեկի և այն ունի մեկական գծորեն անկախ տող ու սյուն: Մնացած երեք տողերը կախված են առաջին (y_1) փոփոխականից:

$$y_2=3y, y_3=-2y_1, y_4=4y_1 :$$

բ) Գծային հավասարումների համակարգի լուծումը:

Ենթադրենք տրված է գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Հայտնի է, որ փոփոխականների արժեքների այն համակարգը, որը բավարարում է համակարգի բոլոր հավասարումներին, կոչվում է նրա լուծում: Եթե համակարգն ունի գոնե մեկ լուծում, ապա այն կոչվում է համատեղելի, եթե չունի ոչ մի լուծում, ապա կկոչվի անհամատեղելի:

Ժորդանյան արտաքսումների օգնությամբ (1) համակարգը կարելի է լուծել տարբեր եղանակներով: Բերենք նրանցից մի քանիսը:

Առաջին եղանակ: Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ (1) համակարգում փոփոխականների և հավասարումների քանակները հավասար են ($m = n$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

Ենթադրենք, որ (2) համակարգի հավասարումները գծորեն անկախ են: Կազմենք ժորդանյան աղյուսակ (2) համակարգի տվյալներով (աղյուսակ 8): Քանի որ համակարգի հավասարումները գծորեն անկախ են, ապա ժորդանյան արտաքսումների n քայլերի կիրառումով կարելի է փոխել ազատ անդամների և $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ փոփոխականների տեղերը: Կստանանք աղյուսակ 9-ը:

Աղյուսակ 8.

	x_1	x_2	...	x_n
b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
b_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

Աղյուսակ 9.

	b_1	b_2	...	b_n
x_1	b_{11}	b_{12}	...	b_{1n}
x_2	b_{21}	b_{22}	...	b_{2n}
...	...	...	...	...
x_n	b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nn}

Աղյուսակ 9-ում b_j և b_{ij} թվերը հաստատուն հայտնի թվեր են, հետևաբար $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ փոփոխականների արժեքները կարելի է հաշվել՝ $x_j = b_{j1}\cdot b_1 + b_{j2}\cdot b_2 + \cdots + b_{jn}\cdot b_n$ տեսքով:

Քանի որ x_j փոփոխականները որոշված են միակ ձևով, ուստի համակարգն ունի միակ լուծում:

Նկատենք նաև, որ աղյուսակ 9-ի տարրերից կազմված մատրիցը հանդիսանում է աղյուսակ 8-ի համապատասխան մատրիցի հակադարձը.

$$B_{nxn} = A^{-1}_{nxn} \qquad (3)$$

Նկատի ունենալով (3)-ը, կարող ենք ասել, որ այդ մեթոդը հնարավորություն է տալիս գտնել մատրիցի հակադարձը և, հետևաբար՝ նաև գծային հավասարումների համակարգի լուծումը հակադարձ մատրիցի միջոցով:

Եթե ներկայացնենք գծային հավասարումների համակարգը մատրիցի տեսքով՝ $AX = B$ և բազմապատկելով հավասարման երկու մասերը ձախից A մատրիցի հակադարձով (A^{-1}-ով), նաև նկատի ունենալով, որ $A^{-1}\cdot A$ հավասար է միավոր մատրիցին, կստանանք՝

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$$

$$X = A^{-1}\cdot B$$

Բերենք օրինակներ:

Օրինակ 4: Լուծել հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -7 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

Կազմենք ժորդանյան աղյուսակ և հաջորդաբար կատարենք ժորդանյան սովորական արտաքսումներ: Կստանանք՝

Աղյուսակ 1.

	x_1	x_2	x_3
-3	$\boxed{1}$	3	-2
-7	2	7	-5
10	3	-4	1

Աղյուսակ 2.

	-3	x_2	x_3
x_1	1	-3	2
-7	2	$\boxed{1}$	-1
10	3	-13	7

Աղյուսակ 3.

	-3	-7	x_3
x_1	7	-3	-1
x_2	-2	1	1
10	29	-13	$\boxed{-6}$

Աղյուսակ 4.

	-3	-7	10
x_1	13/6	-5/6	1/6
x_2	17/6	-7/6	-1/6
x_3	29/6	-13/6	-1/6

Վերջին աղյուսակից ստանում ենք համակարգի եզակի լուծումը.

$$x_1 = \frac{13}{6}\cdot(-3) - \frac{5}{6}\cdot(-7) + \frac{1}{6}\cdot 10 = 1$$

$$x_2 = \frac{17}{6}\cdot(-3) - \frac{7}{6}\cdot(-7) - \frac{1}{6}\cdot 10 = -2$$

$$x_3 = \frac{29}{6}\cdot(-3) - \frac{13}{6}\cdot(-7) - \frac{1}{6}\cdot 10 = -1$$

Օրինակ 5: Լուծել հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ -9x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 2 \\ -7x_1 + 3x_2 - x_3 = 14 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Կազմենք ժորդանյան սկզբնական աղյուսակ (աղյուսակ 1): Կատարելով հաջորդական արտաքսումներ, կստանանք աղյուսակ 3-ը:

Աղյուսակ 1.

	x_1	x_2	x_3
4	3	-2	4
2	-9	5	-7
14	-7	3	$\boxed{-1}$
2	-2	1	-1

Աղյուսակ 2.

	x_1	x_2	14
4	-25	10	-4
2	40	-16	7
x_3	-7	3	-1
2	$\boxed{5}$	-2	1

Աղյուսակ 3.

	2	x_2	14
4	-5	0	1
2	8	0	-1
x_3	-7/5	1/5	2/5
x_1	1/5	2/5	-1/5

Այս աղյուսակում հետագա ձևափոխություններ անհնար է կատարել, քանի որ գլխավոր տարր հնարավոր չէ ընտրել (աղյուսակի համապատասխան տեղում զրոներ են): Եթե վերծանենք վերջին աղյուսակը, կտեսնենք, որ ազատ անդամների համար գոյություն ունի հավասարության պայմանը՝

$$4 = -5 \cdot 2 + 1 \cdot 14 = 4$$
$$2 = 8 \cdot 2 + (-1) \cdot 14 = 2$$

իսկ x_3 և x_1 փոփոխականների համար ունենք հետևյալ հավասարումները

$$x_1 = 1/5 \cdot 2 + 2/5\, x_2 - 1/5 \cdot 14 = -12/5 + 2/5\, x_2$$
$$x_3 = -7/5 \cdot 2 + 1/5\, x_2 + 2/5 \cdot 14 = 14/5 + 1/5\, x_2$$

Տալով x_2 փոփոխականին կամայական արժեքներ, x_1 և x_3 փոփոխականների համար կստանանք որոշակի արժեքներ, որոնք կբավարարեն տրված համակարգին: Այս դեպքում ասում ենք, որ համակարգը համատեղելի է և անթիվ բազմությամբ լուծումներ ունի, կամ լուծումը անորոշ է:

Օրինակ 6: Լուծել հավասարումների համակարգը:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$$

Կազմել ժորդանյան սկզբնական աղյուսակը և կատարելով սովորական ժորդանյան արտաքսումների հաջորդական քայլեր, կստանանք աղյուսակ 3.

Աղյուսակ 1.

	x_1	x_2	x_3
	1	2	3
5	3	1	4
6	4	3	7

Աղյուսակ 2.

	3	x_2	x_3
x_1	1	-2	-3
5	3	-5	-5
6	4	-5	-5

Աղյուսակ 3.

	3	5	x_3
x_1	-1/5	2/5	-1
x_2	3/5	-1/5	-1
6	1	1	0

Հետագա ձևափոխություն հնարավոր չէ, քանի որ գլխավոր տարրը կլինի զրո: Եթե վերջին աղյուսակից հաշվենք ազատ անդամը, կտեսնենք, որ այն բերում է հակասության՝

$$6 \neq 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5$$

Հետևաբար, տրված համակարգը լուծում չունի (անհամատեղելի է):

Օրինակ 7: Լուծել հավասարումների համակարգը:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ -x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}$$

Արտագրենք համակարգը հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 10 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4 = 0 \end{cases}$$

Կազմենք ժորդանյան սկզբնական աղյուսակ և կատարենք ձևափոխություններ, նկատի ունենալով, որ մի աղյուսակից մյուսին անցնելիս գլխավոր սյունը բաց ենք թողնում:

Աղյուսակ 1.

	x_1	x_2	x_3	1
0	1	-1	3	-10
0	2	3	2	-7
0	-1	5	6	-4

Աղյուսակ 2.

	x_2	x_3	1
x_1	1	-3	10
0	5	-4	13
0	4	9	-14

Աղյուսակ 3.

	x_3	1
x_1	-11/5	37/5
x_2	4/5	-13/5
0	61/5	-122/5

Աղյուսակ 4.

	1
x_1	3
x_2	-1
x_3	2

Պատասխան՝ $x_1=3$, $x_2=-1$, $x_3=2$:

Գլուխ 5. Սիմպլեքս մեթոդ

Հայտնի է, որ գծային ծրագրավորման խնդիրները պարունակում են մեծ թվով փոփոխականներ և սահմանափակումներ: Բնական է, որ այդպիսի խնդիրների լուծումը կախված է մեծ ծավալի հաշվարկների հետ, որոնք կատարվում են ժամանակակից արագագործ համակարգիչների միջոցով: Այն ալգորիթմները, որոնք ընկած են մեքենայական ծրագրերի հիմքում, կարող են օգտակար լինել միայն որոշակի տիպի խնդիրների համար: Սակայն կան նաև ընդհանուր մեթոդներ, որոնք հնարավորություն են տալիս լուծելու ցանկացած գծային ծրագրավորման խնդիր: Այդ մեթոդների թվին պատկանում է այսպես կոչված սիմպլեքս մեթոդը:

§19. Սիմպլեքս մեթոդի էությունը:

Դիտարկենք գծային ծրագրավորման խնդիրը, որտեղ սահմանափակումների համակարգը տրված է հավասարումների տեսքով.

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \min \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,n}) \tag{3}$$

Սիմպլեքս մեթոդով աշխատելիս անհրաժեշտ է, որ (2) համակարգը բերվի այնպիսի տեսքի, ուր ինչ-որ r թվով փոփոխականներ ($r \leq m$) արտահայտված լինեն մյուսներով այնպես, որ արտահայտություններում ազատ անդամները լինեն դրական: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ այդ փոփոխականները, որոնք արտահայտվում են մյուսներով, սկզբի` $x_1, x_2, \cdots, x_r$ փոփոխականներն են: Կատարելով նշված ձևափոխությունները կստանանք.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_1' + a_{1,r+1}'x_{r+1} + \cdots + a_{1n}'x_n \\ x_2 &= b_2' + a_{2,r+1}'x_{r+1} + \cdots + a_{2n}'x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r &= b_r' + a_{r,r+1}'x_{r+1} + \cdots + a_{rn}'x_n \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

որտեղ`

$$b_1' \geq 0, b_2' \geq 0, \ldots, b_r' \geq 0 \tag{4}$$

Ստացված (3) համակարգի ձախ մասի փոփոխականները` $x_1, x_2, \ldots, x_r$ կոչվում են հենքի (բազիսային), իսկ մնացած փոփոխականները` ազատ: Տեղադրելով հենքի փոփոխականների արժեքները (1)-ի մեջ, նպատակային ֆունկցիան նույնպես կգրենք արտահայտված ազատ փոփոխականներով` $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$:

$$f = c_0 + c_{r+1}'x_{r+1} + c_{r+2}'x_{r+2} + \cdots + c_n'x_n \tag{5}$$

(3)-ի և (5)-ի ազատ փոփոխականներին տալով զրո արժեք $(x_{r+1} = \cdots = x_n = 0)$, կստանանք հենքի փոփոխականների և նպատակային ֆունկցիայի արժեքները.

$$x_1 = b_1', x_2 = b_2', \cdots, x_r = b_r', f = c_0$$

Այդ լուծումը կոչվում է հենքային և համառոտ գրվում է`

$$B(b_1', b_2', \cdots, b_r', 0, 0, \cdots, 0), f_B = c_0$$

տեսքով: Քանի որ ենթադրել ենք (4) պայմանի գոյությունը, ապա այդ լուծումը կլինի թույլատրելի:

Գծային ծրագրավորման խնդրի լուծումը սիմպլեքս մեթոդով կատարելիս հանգում ենք որոշակի քայլերի հաջորդականության, որոնց էությունը կայանում է նրանում, որ մի բազիսային լուծումից անցում է կատարվում մեկ ուրիշի: Մի բազիսային լուծումից ուրիշի անցնել նշանակում է մեկ կամ մի քանի բազիսային փոփոխականներ փոխարինել նույն քանակությամբ ազատ փոփոխականներով: Մի բազիսային լուծումից մյուսին անցումը կատարվում է փնտրելով որոշակի նպատակ:

Սիմպլեքս մեթոդի էությունը կայանում է նրանում, որ մի բազիսային լուծումից (բազիսից) անցում կատարել մեկ ուրիշի այնպես, որ նպատակային ֆունկցիայի արժեքը փոքրանա, ծայրահեղ դեպքում չմեծանա (եթե փնտրվում է նպատակային ֆունկցիայի min-ը). $f_{p'} \le f_p$: Ակնհայտ է, որ մի բազիսից մյուսին անցնելիս (3) համակարգը կփոփոխվի: Կատարելով k թվով քայլեր կհասնենք այն բանին, որ խնդիրը լուծում ունի և կստանանք այդ լուծումը կամ կհամոզվենք, որ խնդիրը լուծում չունի: ✓

Օրինակ 1: Ենթադրենք տրված է գծային ծրագրավորման խնդիր հետևյալ տեսքով.

$$f = 2x_4 - 3x_5 \to \min$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 8 - 2x_4 + 3x_5 \\ x_2 &= 6 - x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= 4 + 3x_4 - x_5 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,5})$$

Խնդրում x_1, x_2, x_3 փոփոխականները կազմում են հենք: Համապատասխանաբար բազիսային լուծումը կլինի՝ (8,6,4,0,0), իսկ նպատակային ֆունկցիայի արժեքը կլինի հավասար զրոյի ($f = 0$):

Այժմ տեսնենք այդ լուծումը օպտիմալ է թե ոչ: Քանի որ x_5 փոփոխականը ֆունկցիայի մեջ մտնում է բացասական գործակցով, ուստի նրա արժեքը զրոյից մեծացնելիս ֆունկցիայի արժեքը կփոքրանա, իհարկե պահպանելով x_4 արժեքը զրո (հետևաբար այդ լուծումը օպտիմալ չէ): Սակայն x_5 արժեքը մեծացնելիս անհրաժեշտ է հետևել համակարգի հավասարումներին այնպես, որ x_1, x_2, x_3 փոփոխականները չդառնան բացասական:

Նկատենք, որ x_5 արժեքը մեծացնելիս համակարգի առաջին հավասարումից կհետևի, որ x_1-ի արժեքը նույնպես կմեծանա և հետևաբար վտանգ չկա, որ x_1-ը կդառնա բացասական: Երկրորդ հավասարումը թույլ է տալիս x_5-ին մեծանալ մինչև 3, իսկ երրորդը՝ մինչև 4:

Այսպիսով, որպեսզի հենքի ոչ մի փոփոխական չդառնա բացասական, անհրաժեշտ է x_5-ի արժեքը մեծացնել մինչև 3:

Քանի որ դա թույլ է տալիս համակարգի երկրորդ հավասարումը, ուստի x_5 ազատ փոփոխականը անհրաժեշտ է բերել հենք, այնտեղից արտաքսելով՝ x_2-ը: Որպեսզի ավարտենք սիմպլեքս ձևափոխությունների մեկ քայլը, անհրաժեշտ է համակարգի երկրորդ հավասարումից որոշել x_5-ը և այն տեղադրել մնացած հավասարումների և ֆունկցիայի մեջ:

Կատարելով նշված ձևափոխությունները, տրված խնդիրը կբերվի հետևյալ տեսքի.

$$f = -9 + 3/2x_2 + 7/2x_4 \to \min$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 17 - 3/2x_2 - 7/2x_4 \\ x_5 &= 3 - 1/2x_2 - 1/2x_4 \\ x_3 &= 1 + 1/2x_2 + 7/2x_4 \end{aligned}\right\},$$

որի հենքային լուծումը կլինի (17,0,1,0,3), իսկ $f = -9$:

Այսպիսով հենքային մի լուծումից անցում կատարեցինք մեկ ուրիշի այնպես, որ նպատակային ֆունկցիայի արժեքը նվազեց:

Այժմ, քանի որ x_2 և x_4 փոփոխականները մտնում են ֆունկցիայի մեջ դրական գործակիցներով, ֆունկցիայի արժեքը այլևս հնարավոր չէ փոքրացնել, հետևաբար ստացված լուծումը կլինի օպտիմալ:

$$f_{\min} = -9, \text{ երբ } x_1 = 17; x_2 = 0; x_3 = 1; x_4 = 0; x_5 = 3:$$

Օրինակ 2:

$$f = -3x_3 - 2x_4 \to \min$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 + x_3 - x_4 \\ x_2 &= 3 - x_3 + 2x_4 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4})$$

Այստեղ հենքը կազմված է x_1 և x_2 փոփոխականներից: Բազիսային լուծումը կլինի (2,3,0,0), իսկ $f = 0$: Այժմ այլ բազիսային լուծմանն անցնելու համար նկատենք, որ նպատակային ֆունկցիայի մեջ x_3-ի գործակիցը բացասական է, հետևաբար կարելի է նրա արժեքը զրոյից մեծացնելով ֆունկցիայի արժեքը փոքրացնել (x_4-ի արժեքը պահպանելով զրո): Եթե x_3-ի արժեքը զրոյից մեծացնելիս հետևենք համակարգին, ապա կտեսնենք, որ նրա առաջին հավասարումը թույլ է տալիս x_3-ին մեծանալու ցանկացած չափով (քանի որ ունի դրական գործակից), իսկ երկրորդ հավասարումը՝ մինչև 3 (եթե գերազանցի 3-ը, ապա x_2-ը կդառնա բացասական):

Այժմ սիմպլեքս ձևափոխությունների մեկ քայլը ավարտելու համար, համակարգի երկրորդ հավասարումից անհրաժեշտ է որոշել x_3-ը և նրա արժեքը տեղադրել x_1-ի և ֆունկցիայի մեջ: Կատարելով այդ ձևափոխությունները, կստանանք՝

$$f=-9+3x_2-8x_4\to\min$$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=5-x_2+x_4\\x_3&=3-x_2+2x_4\end{aligned}\right\}$$

$$x_j\ge0,(j=\overline{1,4})$$

որի բազիսային լուծումը կլինի (5,0,3,0), $f=-9$:

Ինչպես երևում է նպատակային ֆունկցիայից, նրա մեջ մտնող x_4 փոփոխականի գործակիցը բացասական է, հետևաբար նրա արժեքը զրոյից մեծացնելիս ֆունկցիայի արժեքը կփոքրանա: Սակայն x_4-ը համակարգի հավասարումների մեջ մտնում է դրական գործակիցներով, իսկ դա նշանակում է, որ x_4-ի արժեքը մեծացնելիս վտանգ չկա, որ x_1 և x_3 փոփոխականները կդառնան բացասական:

Այսպիսով, x_4-ի արժեքը կարելի է անվերջ չափով մեծացնել, որով ֆունկցիայի արժեքը անվերջ կնվազի ($f\to-\infty$): Ստացվում է, որ ֆունկցիան սահմանափակ չէ ներքևից, իսկ դա նշանակում է խնդրի օպտիմալ լուծում գոյություն չունի:

§20. Սիմպլեքս մեթոդը ընդհանուր տեսքով

Այժմ ընդհանուր տեսքով ցույց տանք, թե ինչպես է մի բազիսային լուծումից անցում կատարվում մեկ այլ լուծմանը: Նշենք, որ այստեղ մանրամասն չենք բերի այն բոլոր ձևափոխությունները, որոնք կատարեցինք նախորդ երկու օրինակները քննարկելիս: Ընդհանուր առմամբ, այդ ձևափոխությունները կատարվում են նույնատիպ աղյուսակների միջոցով: Սակայն, այստեղ ցույց տանք թե ինչ դատողության հիման վրա են կատարվում աղյուսակային ձևափոխությունները: Այդ նպատակով ենթադրենք, որ գծային ծրագրավորման խնդիրը տրված է հետևյալ տեսքով.

$$f=\gamma_0-\gamma_{r+1}x_{r+1}-\cdots-\gamma_jx_j-\cdots-\gamma_nx_n\to min \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1j}x_j-\cdots-a_{1n}x_n\\x_2&=b_2-a_{2r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2j}x_j-\cdots-a_{2n}x_n\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_r&=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rj}x_j-\cdots-a_{rn}x_n\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$x_p\ge0,(p=\overline{1,n})$$

որտեղ $b_i\ge0,(i=\overline{1,r})$: Խնդրում $x_1,x_2,\cdots,x_r$ փոփոխականները համարվում են բազիսային, իսկ նրան համապատասխան բազիսային լուծումը կլինի՝

$$Բ\,(b_1,b_2,\cdots,b_r,0,0,\cdots,0),\ f_{Բ}=\gamma_0 \quad (3)$$

Այժմ, մի բազիսից մյուսին անցնելու համար քննարկենք երկու դեպք:

I դեպք: Ենթադրենք նպատակային ֆունկցիայի մեջ $\gamma_{r+1},\gamma_{r+2},\cdots,\gamma_n$ գործակիցները ոչ դրական են: Այս դեպքում այլ բազիսային լուծման անցնելու անհրաժեշտություն չկա, քանի որ ֆունկցիայի արժեքը կմեծանա: Իրոք, եթե անցում կատարենք այլ բազիսի, ապա $x_{r+1},\cdots,x_n$ ազատ փոփոխականներից որևէ մեկը պետք է բերենք բազիս, իսկ դա կնշանակի, որ այն կստանա զրոյից մեծ արժեք: Այդ փոփոխականի գործակիցը քանի որ ֆունկցիայի մեջ բացասական է, ուստի այդ արտադրյալը գումարելով γ_0-ին՝ ֆունկցիայի արժեքը կմեծանա: Հետևաբար, այս դեպքում, ֆունկցիան կստանա իր մինիմում արժեքը, **եթե** $x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_n = 0$, որը կնշանակի, որ (3) բազիսային լուծումը հանդիսանում է օպտիմալ:

II դեպք: Ենթադրենք, $\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \cdots, \gamma_n$ գործակիցների մեջ կա գոնե մեկը, որը դրական է: Որոշակիության համար ընդունենք $\gamma_j > 0$, որտեղ $j \in [r+1, n]$: Եթե գործակիցները մեկից ավել են, ապա ընտրում ենք նրանցից ամենամեծը և համարում γ_j (այն ավելի արագ կփոքրացնի ֆունկցիայի արժեքը): Այժմ, պահպանելով ազատ փոփոխականների զրոյական արժեքները, բացի x_j-ից, փոքրացնենք ֆունկցիայի արժեքը՝ x_j-ն մեծացնելու միջոցով: Սակայն x_j-ն մեծացնելիս պետք է հետևել (2) համակարգին այնպես, որ բազիսային փոփոխականները բացասական չդառնան: Այդ նպատակով քննարկենք երկու դեպք.

ա) Ենթադրենք (2) համակարգի մեջ $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{rj}$ գործակիցները բոլորը դրական են: Այս դեպքում ցանկացած $x_j > 0$ համար կունենանք.

$$x_1 \ge b_1, x_2 \ge b_2, \cdots, x_r \ge b_r,$$

որից հետևում է, որ $x_1, x_2, \cdots, x_r$ փոփոխականները չեն կարող բացասական դառնալ: Ինչ վերաբերում է նպատակային ֆունկցիային, ապա նրա արժեքը անվերջ կնվազի x_j-ն անվերջ մեծացնելիս (քանի որ $\gamma_j > 0$): Այս դեպքում նպատակային ֆունկցիան սահմանափակ չի լինի ներքևից և հետևաբար նրա օպտիմալ արժեքը գոյություն չունի: Ուստի ասում ենք, որ խնդիրը լուծում չունի:

բ) Ենթադրենք $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{rj}$ գործակիցների մեջ՝ $a_{kj} > 0$, որտեղ $k \in [1, r]$: Այս դեպքում x_j-ն կարելի է մեծացնել ոչ ավելի քան $\frac{b_k}{a_{kj}}$ չափով, հակառակ դեպքում x_k-ն կդառնա բացասական: Այնուհետև,

բոլոր $a_{kj} > 0$ գործակիցների համար կազմում ենք $\frac{b_k}{a_{kj}}$ հարաբերությունները և ընտրում նրանցից փոքրը: Որոշակիության համար ենթադրենք՝

$$min\left(\frac{b_k}{a_{kj}}\right) = \frac{b_i}{a_{ij}}$$

բոլոր այն k-երի համար, որոնց դեպքում $a_{kj} > 0$: Եթե այդ մինիմում հարաբերությունը ստացվում է մի քանի k-երի դեպքում, ապա որպես i կարող ենք վերցնել նրանցից ցանկացածը: Կրճատ գրելու համար նշանակենք $\frac{b_i}{a_{ij}} = p$: Ակնհայտ է, որ $p \ge 0$ և x_j-ն կարելի է մեծացնել մինչև p:

Ընդունելով՝

$$x_{r+1} = 0, \cdots, x_{j-1} = 0, x_j = p, x_{i+1} = 0, \cdots, x_r = 0, \qquad (4)$$

կստանանք մնացած փոփոխականների արժեքները.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_1 - a_{1j}p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i = b_i - a_{ij}p = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = b_r - a_{rj}p \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Նոր բազիսը կազմված է $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \cdots, x_r$ փոփոխականներից, իսկ բազիսային լուծումը՝ Բ'-ը կլինի (4) և (5)-ը: Նպատակային ֆունկցիայի արժեքը այդ բազիսային լուծման համար կլինի՝

$$f\,\text{Բ}' = \gamma_0 - \gamma_j p \le f\,\text{Բ} \qquad (6)$$

Նկատենք, որ եթե $p = 0$, ապա չնայած բազիսը փոխվում է, սակայն բազիսային լուծումը և նպատակային ֆունկցիայի արժեքը մնում են նույնը: Դա հատուկ դեպք է և կոչվում է վերասերված:

Որպեսզի ավարտենք սիմպլեքս ձևափոխությունների մեկ քայլը, մնում է (1) հա ակարգի i-րդ հավասարումից որոշել x_j փոփոխականը և նրա արժեքը տեղադրել մնացած հավասարումների և ֆունկցիայի մեջ: Այդ գործողությունները կարելի է կատարել՝ ելնելով ժորդանյան ձևափոխություններից: Կատարելով նշված ձևափոխությունները՝ (1)-(2) խնդիրը կբերվի այլ տեսքի, որտեղ x_i բազիսային փոփոխականը փոխարինված է x_j ազատ փոփոխականով: Ստացված խնդրի նկատմամբ նույնպես պետք է ուսումնասիրել I և II դեպքերը: Ձևափոխությունների այդ շարքը անհրաժեշտ է կատարել այնքան անգամ, քանի դեռ չենք հանգել I-ի (որի դեպքում գտնվում է օպտիմալ լուծումը) կամ II-ի (ա) դեպքին (խնդիրը լուծում չունի):

§21. Սիմպլեքս - աղյուսակներ

Գործնականում, սիմպլեքս մեթոդով խնդիրներ լուծելիս, անհրաժեշտություն չկա մի բազիսային լուծումից անցում կատարել մեկ այլ բազիսի այնպես, ինչպես նկարագրվեց նախորդ պարագրաֆում: Ձևափոխությունների այդ շարքը կատարվում է աղյուսակների միջոցով: Տրված (1)-(2) խնդրի (§20) տվյալներով կազմում ենք սիմպլեքս առաջին աղյուսակ: Այնուհետև մի աղյուսակից մյուսին անցնելու միջոցով ստանում ենք խնդրի օպտիմալ լուծումը: Մինչև առաջին աղյուսակի կազմելը՝ նախ (1)-(2) խնդիրը (§20) գրենք հետևյալ տեսքով.

$$f+\gamma_{r+1}x_{r+1}-\cdots-\gamma_j x_j-\cdots-\gamma_n x_n=\gamma_0 \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 \qquad\qquad +a_{1r+1}x_{r+1}+\cdots+a_{1j}x_j+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\qquad\quad x_i \quad +a_{ir+1}x_{r+1}+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n=b_i\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\qquad\qquad x_r+a_{rr+1}x_{r+1}+\cdots+a_{rj}x_j+\cdots+a_{rn}x_n=b_r
\end{array}\right\} \tag{2}$$

Կազմենք սիմպլեքս առաջին աղյուսակը:

Աղյուսակ 1

Բազի-սային փոփոխ.	Ազատ անդամ-ներ	x_1	…	x_i	…	x_r	x_{r+1}	…	x_j	…	x_n
x_1	b_1	1	…	0	…	0	a_{1r+1}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	b_i	0	…	1	…	0	a_{ir+1}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_r	b_r	0	…	0	…	1	a_{rr+1}	…	a_{rj}	…	a_{rn}
f	γ_0	0	…	0	…	0	γ_{r+1}	…	γ_j	…	γ_n

Առաջին աղյուսակի բազիսային լուծումը կլինի՝

$$Բ1(b_1,b_2,\cdots,b_j,\cdots,b_r,0,0,\cdots,0),$$

$$fբ=\gamma_0$$

Սիմպլեքս ձևափոխությունների մեկ քայլը ըստ (§20)-ի կատարելիս (1)-(2) խնդիրը կբերվի հետևյալ տեսքի (որտեղ.

$$x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_r$$

բազիսը փոխարինվում է $x_1,\cdots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\cdots,x_r$ բազիսով).

$$f+\gamma'_{r+1}x_{r+1}-\cdots-\gamma'_j x_j-\cdots-\gamma'_n x_n=\gamma'_0 \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 \qquad\qquad +b_{1r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{1i}x_i+\cdots+b_{1n}x_n=b'_1\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\qquad x_j \qquad +b_{jr+1}x_{r+1}+\cdots+b_{ji}x_i+\cdots+b_{jn}x_n=b'_j\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\qquad\qquad x_r+b_{rr+1}x_{r+1}+\cdots+b_{ri}x_i+\cdots+b_{rn}x_n=b'_r
\end{array}\right\} \tag{4}$$

(3)-(4) խնդրի տվյալներով կազմում ենք նույնատիպ աղյուսակ:

Աղյուսակ 2.

Բ	Ազատ անդամ-ներ	x_1	…	x_i	…	x_r	x_{r+1}	…	x_j	…	x_n
x_1	b_1'	1	…	b_{1i}	…	0	b_{1r+1}	…	0	…	b_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_j	b_j'	0	…	b_{ji}	…	0	b_{jr+1}	…	1	…	b_{jn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_r	b_r'	0	…	b_{ri}	…	1	b_{rr+1}	…	0	…	b_{rn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
f	γ_0'	0	…	γ_i'	…	0	γ_{r+1}'	…	0	…	γ_n'

Երկրորդ աղյուսակի բազիսային լուծումը կլինի՝

$$Բ2(b_1', b_2', \cdots, 0, \cdots, b_r', 0, 0, \cdots, b_j', \cdots, 0),$$

$$f_{Բ2} = \gamma_0'$$

Նկարագրենք այն ալգորիթմը, որով աշխատելիս առաջին աղյուսակից անցում կկատարվի երկրորդին: Այդ անցումը իրականացնելու համար նախ նշենք առաջին աղյուսակում գլխավոր տարրը գտնելու քայլերը:

Առաջին քայլ: Առաջին աղյուսակի նպատակային ֆունկցիայի տողում փնտրում ենք դրական թվերից ամենամեծը (բացի ազատ անդամից): Ըստ §20-ի դա γ_j-ն է, որը ցույց կտա գլխավոր սյունը:

Երկրորդ քայլ: Կազմում ենք ազատ անդամների և գլխավոր սյան դրական անդամների հարաբերությունը: Ընտրում ենք այդ հարաբերություններից փոքրը: Ըստ §20-ի դա $\frac{b_i}{a_{ij}}$-ն է, որը ցույց է տալիս գլխավոր տողը:

Երրորդ քայլ: Նշում ենք գլխավոր տողի և սյան հատման տեղում գտնվող տարրը և համարում նրան գլխավոր:

Ունենալով գլխավոր տարրը առաջին աղյուսակում, նշենք այն քայլերը, որոնց օգնությամբ կիրականացվի անցում հաջորդ (երկրորդ) աղյուսակին:

I. Գլխավոր տողի բոլոր անդամները բաժանում ենք գլխավոր տարրի վրա և գրում հաջորդ աղյուսակի համապատասխան տողում:

II. Լրացնում ենք բազիսային փոփոխականների սյուները: Տվյալ բազիսային փոփոխականի սյունում իր դիմաց գրվում է 1, իսկ այդ սյան մնացած վանդակներում՝ զրոներ. (քանի որ բազիսային փոփոխականը մտնում է միայն մի սահմանափակման մեջ):

III. Մնացած ազատ վանդակները լրացնում ենք Ժորդանի բանաձևով՝

$$b_{pq} = a_{pq} - \frac{a_{pj} \cdot a_{iq}}{a_{ij}},$$

որտեղ b_{pq}-ն թիվ 2-րդ աղյուսակի p-րդ տողի q-րդ սյան տարրն է:

Օրինակ 1: Լուծել գծային ծրագրավորման հետևյալ խնդիրը.

$$f = 90 - 2x_4 - 3x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 3x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 6 + 4x_4 - x_5 \\ x_3 = 8 + 2x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,5})$$

Աղյուսակ 1.

Բ	Ազատ անդամ.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	4	1	0	0	3	-2
x_2	6	0	1	0	-4	1
x_3	8	0	0	1	-2	$\boxed{2}$
f	90	0	0	0	2	3

Աղյուսակ 1-ի բազիսային լուծումն է.

$$Բ1(4,6,8,0,0), \quad f_{Բ1} = 90:$$

Համաձայն նկարագրված ալգորիթմի f-ի տողում ազատ անդամից (90) բացի, փնտրում ենք դրական թվերից ամենամեծը (3-ը), որը ցույց է տալիս գլխավոր սյունը (x_s-ի սյունը): Այնուհետև x_5-ի սյունում վերցնում ենք դրական թվերը և կազմում հարաբերություն նրանց համապատասխան ազատ անդամների (6 և 8) և այդ թվերի միջև (6/1 և 8/2): Ընտրում ենք այդ հարաբերություններից փոքրը՝ 8/2: Այն ցույց է տալիս գլխավոր տողը: Սլաքներով աղյուսակում նշված են գլխավոր սյունը և տողը, որոնց հատման տեղում գտնվում է գլխավոր տարրը: Գլխավոր տարրը ցույց է տալիս, որ բազիսից պետք է դուրս մղվի x_3-ը և նրա փոխարեն բազիս մտնի x_5-ը: Նոր բազիսը, պարզ է, կազմված է x_1, x_2, x_5 փոփոխականներից:

Այժմ կազմում ենք աղյուսակ 2-ը, որը լրացնում ենք վերը նշված ալգորիթմի երեք քայլերով:

Աղյուսակ 2.

Բ	Ազատ անդամ.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	12	1	0	1	$\boxed{1}$	0
x_2	2	0	1	-1/2	-3	0
x_5	4	0	0	1/2	-1	1
f	78	0	0	-3/2	5	0

Աղյուսակ 2-ի բազիսային լուծումն է.

$$Բ2(12,2,0,0,4),\ f_{Բ2}=78:$$

Այնուհետև կրկնում ենք բոլոր այն դատողությունները, որոնք կատարվեցին աղյուսակ 1-ից 2-ին անցնելիս: Գլխավոր տարրը կլինի 1-ը, որը x_4-ին բերում է բազիս՝ x_1-ի փոխարեն: Կատարելով ձևափոխությունների ևս մեկ քայլ, կստանանք աղյուսակ 3-ը:

Աղյուսակ 3.

Բ	Ազատ անդամ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	12	1	0	1	1	0
x_2	38	3	1	5/2	0	0
x_5	16	1	0	3/2	0	1
f	18	-5	0	-13/2	0	0

Քանի որ f-ի տողում ազատ անդամից բացի դրական անդամ չկա, ուստի աղյուսակ 3-ի բազիսային լուծումը օպտիմալ է: $f_{min}=18$, որը ստացվում է այն դեպքում, երբ $x_1=0$, $x_2=38$, $x_3=0$, $x_4=12$, $x_5=16$:

Օրինակ 2: Գծային ծրագրավորման խնդիրը տրված է հետևյալ տեսքով.

$$f=-3x_3-2x_4\to\min$$

$$\begin{cases}x_1=2+x_3-x_4\\ x_2=3-3x_3+2x_4\end{cases}$$

$$x_j\geq 0,(j=\overline{1,4})$$

Կազմենք սիմպլեքս աղյուսակ.

Աղյուսակ 1.

Բ	Ազատ անդամ.	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	2	1	0	-1	1
x_2	3	0	1	$\boxed{1}$	-2
f	0	0	0	3	2

Աղյուսակ 1-ի համապատասխան բազիսային լուծումն է.

$$Բ1(2,3,0,0),\ f_{Բ1}=0:$$

f-ի տողում դրական թվերից ամենամեծը 3-ն է, հետևաբար x_3-ի սյունը կլինի գլխավոր: Այդ սյան միակ դրական թիվը 1-ն է, որով անցնող տողը կլինի գլխավոր, իսկ ինքը՝ կլինի գլխավոր տարր: Հաջորդ բազիսը կազմված կլինի x_1 և x_3 փոփոխականներից: Լրացնենք աղյուսակ 2-ը, օգտվելով համապատասխան ալգորիթմից:

Աղյուսակ 2.

Բ	Ազատ անդամ.	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	5	1	1	0	-2
x_3	3	0	1	1	-2
f	-9	0	-3	0	8

Աղյուսակ 2-ի բազիսային լուծումն է՝

$$Բ2(5,0,3,0), \quad f_{Բ_2} = -9:$$

f -ի տողում միակ դրական տարրը 8-ն է, որի միջոցով գտնվում է գլխավոր սյունը: Սակայն այդ սյունում դրական տարր չկա, հետևաբար նշանակում է, որ նպատակային ֆունկցիան սահմանափակ չէ ներքևից ($f_{min} \to -\infty$): Այս դեպքում ասում ենք, որ խնդրի օպտիմալ լուծում գոյություն չունի (խնդիրը լուծում չունի):

Դիտողություն: Եթե գծային ծրագրավորման խնդրում պահանջվում է գտնել նպատակային ֆունկցիայի մաքսիմում արժեքը, ապա նախքան սիմպլեքս առաջին աղյուսակը լրացնելը, խնդիրը բերում ենք մինիմումը գտնելուն, իսկ այնուհետև լուծումը տանում նույն ալգորիթմով:

Օրինակ: Եթե $f = 5x_1 - 4x_2 \to max$, ապա $-f = -5x_1 + 4x_2 \to$ $\to min$:

§22. Սկզբնական հենքի (բազիսի) գտնելը

Մինչև այժմ, գծային ծրագրավորման խնդիրները սիմպլեքս մեթոդով լուծելիս, ենթադրել ենք, որ սահմանափակումների համակարգը տրված է որևէ հենքի նկատմամբ որոշված տեսքով: Գծային ծրագրավորման որոշ խնդիրներում սկզբնական հենքը որոշվում է անմիջականորեն, սակայն ընդհանուր դեպքում անհրաժեշտ է այն փնտրել:

Կախված սահմանափակումների համակարգից, սկզբնական հենքի որոշումը կարելի է գտնել տարբեր եղանակներով: Քննարկենք դրանք առանձին - առանձին:

1. Ենթադրենք, գծային ծրագրավորման խնդրում սահմանափակումների համակարգը տրված է միայն ($\le$) անհավասարումների

տեսքով՝

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,n}) \quad (2)$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max \quad (3)$$

Այս դեպքում ներմուծում ենք լրացուցիչ փոփոխականներ $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$, որոնք գումարելով (1) համակարգի համապատասխան անհավասարումների ձախ մասերին՝ ստանում ենք հետևյալ խնդիրը.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1, m+n}) \quad (5)$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max \quad (6)$$

Լուծելով (4) համակարգը լրացուցիչ փոփոխականների նկատմամբ, կստանանք՝

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ x_{n+2} &= b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{n+m} &= b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1, m+n}) \quad (8)$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max \quad (9)$$

Այսպիսով, (1)-(3) խնդիրը բերվեց (7)-(9) խնդրի, որը լուծված է հենքային փոփոխականների նկատմամբ: Հենքային փոփոխականներն են $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$, իսկ ազատ փոփոխականները՝ $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

Այնուհետև (7)-(9) խնդրի համար անհրաժեշտ է կազմել սիմպլեքս աղյուսակ և մի աղյուսակից մյուսին անցնելու միջոցով գտնել խնդրի օպտիմալ լուծումը:

Օրինակ: Տրված է գծային ծրագրավորման խնդիր: Գտնել սկզբնական հենքը:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8 \\ x_1 + 4x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 9 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$f = 8x_1 + 3x_2 \to \max$$

Ներմուծելով լրացուցիչ փոփոխականներ, կստանանք՝

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_5 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,5})$$

$$f = 8x_1 + 3x_2 \to \max$$

Որոշելով $x_3, x_4 x_5$ փոփոխականները համակարգից, կստանանք՝

$$\begin{cases} x_3 = 8 - (2x_1 + 3x_2) \\ x_4 = 6 - (x_1 + 4x_2) \\ x_5 = 9 - (5x_1 + 2x_2) \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,5})$$

$$f = 8x_1 + 3x_2 \to \max$$

Այստեղ հենքային փոփոխականներն են $x_3, x_4 x_5$-ը, իսկ ազատ փոփոխականները՝ $x_1, x_2 x_3$-ը: Այնուհետև խնդրի լուծումը տարվում է սիմպլեքս մեթոդով (§21):

2. Ենթադրենք գծային ծրագրավորման խնդրում սահմանափակումների համակարգը տրված է միայն հավասարումների տեսքով՝

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,n}) \tag{11}$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max \tag{12}$$

Այս դեպքում ներմուծում ենք օժանդակ փոփոխականներ՝ $y_1, y_2, \cdots, y_m$ և (10)-(12) խնդիրը բերում հետևյալ տեսքի՝

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ y_2 &= b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ &\cdots\cdots \\ y_m &= b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,n}), \quad y_i \ge 0, (i = \overline{1,n}) \tag{14}$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max \tag{15}$$

(13)-(15) խնդրում հենքային փոփոխականներն են $y_1, y_2, \ldots, y_m$, իսկ ազատ փոփոխականները՝ $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

Ինչպես հայտնի է, սիմպլեքս մեթոդով աշխատելիս, անցում է կատարվում մի հենքային լուծումից մեկ ուրիշին, որի համար անհրաժեշտ է ունենալ նպատակային ֆունկցիա կախված նոր փոփոխականներից կախված: Այդ նպատակով ներմուծենք օժանդակ նպատակային ֆունկցիա հետևյալ տեսքով՝

$$F = y_1 + y_2 + \dots + y_m \to \min \qquad (16)$$

Տեղադրելով (13)-ից $y_1, y_2, \dots, y_m$ փոփոխականների արժեքները F-ի մեջ, և կատարելով նման անդամների միացում, ստանում ենք F ֆունկցիայի տեսքը՝ արտահայտված ազատ փոփոխականներով:

$$F = (b_1 + b_2 + \dots + b_m) - ((a_{11} + a_{21} + \dots + a_{m1})x_1 +$$
$$+ (a_{12} + a_{22} + \dots + a_{m2})x_2 + \dots + (a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{mn})x_n) \to \min \quad (17)$$

Այժմ, օգտվելով (13)-(17)-ից կազմում ենք սիմպլեքս աղյուսակը, ուր ստուգման տողը և սյունը լրացնում ենք օգտվելով (16)-ից: Այնուհետև սիմպլեքս ձևափոխությունների օգնությամբ $y_i (i = \overline{1,m})$ փոփոխականները դուրս են բերվում հենքից և ստանում զրո արժեք: Քանի որ $y_1, y_2, \dots, y_m$ փոփոխականների արժեքները, ըստ էության, հավասար են զրոյի (որպես հավասար մեծությունների տարբերություններ), ուստի F ֆունկցիայի min արժեքը նույնպես պետք է հավասարվի զրոյի:

Քանի որ $F \geq 0$, իսկ $\min F \geq 0$, ուստի հնարավոր է երկու տարբերակ.

ա) $\min F > 0$: Սա նշանակում է, որ (13) համակարգը չունի ոչ մի ոչ բացասական լուծում, որի համար $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_m = 0$ (հակառակ դեպքում $\min F \geq 0$): Սկզբնական (10) համակարգը նույնպես չունի ոչ մի ոչ բացասական լուծում: Այստեղից հետևում է, որ ցանկացած գծային ծրագրավորման խնդիր (10) սահմանափակումներով լուծում չունի:

բ) $\min F = 0$: Այս դեպքում (10) սահմանափակումներով գծային ծրագրավորման խնդիրն ունի լուծում, որը գտնելու համար, նախ պետք է փնտրել սկզբնական հենքը, արտահայտված հիմնական փոփոխականներով:

Եթե խնդրի սկզբնական հենքային լուծումը փնտրելիս հանգել ենք (բ) տարբերակին, ապա շարունակում ենք խնդրի լուծումը՝ որոնելով f նպատակային ֆունկցիայի max արժեքը: Այդ նպատակով վերջին սիմպլեքս աղյուսակից բաց ենք թողնում F-ի համապատասխան տողը

և $y_1, y_2, \dots, y_m$ փոփոխականների սյուները: Ստանում ենք մի աղյուսակ, որտեղ հենքային փոփոխականները խնդրի հիմնական փոփոխականներն են, որը և համապատասխանում է սկզբնական հենքային լուծմանը:

Նշենք, որ այդ աղյուսակում ստուգման տողը և սյունը լրացվում են f ֆունկցիայի փոփոխականների գործակիցներով:

Օրինակ: Տրված է գծային ծրագրավորման հետևյալ խնդիրը՝

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= \frac{7}{2} \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= \frac{3}{2} \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \left(j = \overline{1,4}\right)$$

$$f = -5x_1 + 10x_2 - 7x_3 + 3x_4 \to \max$$

Ներմուծելով օժանդակ փոփոխականներ և միաժամանակ max–ի խնդիրը բերելով min-ի կարող ենք գրել.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{7}{2} - (x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4) \\ y_2 &= \frac{3}{2} - (2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4) \\ y_3 &= 4 - (2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4) \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \left(j = \overline{1,4}\right), y_i \geq 0, \left(i = \overline{1,3}\right)$$

$$-f = (-5x_1 + 10x_2 - 7x_3 + 3x_4) \to \min$$

Օժանդակ նպատակային ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$F = y_1 + y_2 + y_3 \to \min$$

Տեղադրելով այստեղ y_1, y_2, y_3-ի արժեքները կստանանք՝

$$F = 9 - (5x_1 + 2x_2 + 18x_3 + 6x_4) \to \min$$

Օգտվելով խնդրի ձևափոխված տեսքից՝ կազմենք սիմպլեքս 1 աղյուսակը, ուր ստուգման տողը և սյունը լրացվում է ըստ F ֆունկցիայի փոփոխականների գործակիցների:

Աղյուսակ 1.

Հենքի փոփոխականներ	Ազատ անդամներ	Ստուգման տող	0	0	0	0	1	1	1
		Ստուգման սյուն	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
y1	7/2	1	1	1	7	2	1	0	0
y2	3/2	1	2	-1	$\boxed{3}$	3	0	1	0
y3	4	1	2	2	8	1	0	0	1
-f	0		-5	10	-7	3	0	0	0
F	9		5	2	18	6	0	0	0

Կատարելով սիմպլեքս ձևափոխությունները, կստանանք հետևյալ աղյուսակները՝

Աղյուսակ 2.

Հենքի փոփոխականներ	Ազատ անդամներ	Ստուգման տող	0	0	0	0	1	1	1
		Ստուգման սյուն	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
y1	0	1	-11/3	$\boxed{10/3}$	0	-5	1	-7/3	0
x3	1/2	0	2/3	-1/3	1	1	0	1/3	0
y3	0	1	-10/3	14/3	0	-7	0	-8/3	1
-f	7/2		-1/3	23/3	0	10	0	7/3	0
F	0		-7	8	0	-12	0	-6	0

Աղյուսակ 3.

Հենքի փոփոխականներ	Ազատ անդամներ	Ստուգման տող	0	0	0	0	1	1	1
		Ստուգման սյուն	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
x2	0	0	-11/10	1	0	-15/10	3/10	-7/10	0
x3	1/2	0	3/10	0	1	5/10	1/10	1/10	0
-y3	0	1	$\boxed{18/10}$	0	0	0	-14/10	6/10	1
-f	7/2		81/10	0	0	215/10	-27/10	77/10	0
F	0		18/10	0	0	0	-24/10	-4/10	0

Աղյուսակ 4.

Հենքի փոփոխականներ	Ազատ անդամներ	Ստուգման տող	0	0	0	0	1	1	1
		Ստուգման սյուն	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
x_2	0	0	0	1	0	-15/10	-10/18	-6/18	11/18
x_3	1/2	0	0	0	1	5/10	6/18	0	-3/18
x_1	0	0	1	0	0	0	-14/18	6/18	10/18
$-f$	7/2		0	0	0	215/10	4	5	-81/18
F	0		0	0	0	0	-1	-1	-1

Քանի որ աղյուսակ 4-ում օժանդակ փոփոխականները՝ y_1, y_2, y_3 հենքից բացակայում են (դուրս են եկել հենքից), իսկ օժանդակ ֆունկցիան (F) հասել է իր min արժեքին (min F=0), նշանակում է, որ սկզբնական հենքային լուծումը գտնված է:

Այժմ աղյուսակ 4-ից բաց ենք թողնում F-ի տողը և y_1, y_2, y_3 օժանդակ փոփոխականների սյուները՝ ստանում ենք աղյուսակ 5-ը, որտեղ ստուգման տողը և սյունը լրացնում ենք օգտվելով f ֆունկցիայի հետևյալ տեսքից.

$$-f = -(-5x_1 + 10x_2 - 7x_3 + 3x_4) \to \min$$

Աղյուսակ 5.

Հենքի փոփոխականներ	Ազատ անդամներ	Ստուգման տող	5	-10	7	-3
		Ստուգման սյուն	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	0	-10	0	1	0	$\boxed{-15/10}$
x_3	1/2	7	0	0	1	$\boxed{5/10}$
x_1	0	5	1	0	0	0
$-f$	7/2		0	0	0	215/10

Ընտրելով աղյուսակ 5-ում գլխավոր տարր և կատարելով անցում հաջորդ աղյուսակի, կստանանք՝

Աղյուսակ 6.

Հենքի փոփոխա-կաններ	Ազատ անդամ-ներ	Սյունակի վերևի շարք: Ստուգման տող Տողի տակ: Ստուգման սյուն	5	-10	7	-3
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	3/2	-10	0	1	3	0
x_4	1	-3	0	0	2	1
x_1	0	5	1	0	0	0
$-f$	-18		0	0	-43	0

Խնդրի լուծումն ավարտվում է աղյուսակ 6-ով, քանի որ նպատակային ֆունկցիայի տողում բոլոր տարրերը ոչ դրական են (օպտիմալության պայմանը բավարարվում է): Օպտիմալ լուծումը կլինի՝

$x_1 = 0, x_2 = 3/2, x_3 = 0, x_4 = 1$, իսկ max f =18

3. Ենթադրենք, գծային ծրագրավորման խնդրում սահմանափակումների համակարգը տրված է միայն ($\geq$) տեսքով: Այս դեպքում, ներմուծելով լրացուցիչ փոփոխականներ, սահմանափակումների համակարգը բերում ենք հավասարումների տեսքի, բայց ի տարբերություն առաջին դեպքի, լրացուցիչ փոփոխականները այս դեպքում չենք կարող համարել հենքային, քանի որ տվյալ հենքային լուծումը կլինի ոչ թույլատրելի: Այդ պատճառով սահմանափակումների համակարգը հավասարումների տեսքի բերելուց հետո, խնդրի լուծումը տարվում է այնպես, ինչպես նկարագրվեց երկրորդ դեպքում:

Այսպես, ենթադրենք գծային ծրագրավորման խնդիրը տրված է հետևյալ տեսքով.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3})$$

$$f = 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 \rightarrow max :$$

Ներմուծենք լրացուցիչ փոփոխականներ

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,6})$$

$$f = 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 \rightarrow \max :$$

Եթե համակարգը լուծենք լրացուցիչ փոփոխականների նկատմամբ, կստանանք՝

$$\begin{cases} x_4 = -8 + 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ x_5 = -12 + x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_6 = -6 + 2x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,6})$$

$$f = 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 \rightarrow \max :$$

Այս դեպքում լրացուցիչ փոփոխականները հենքային համարել չենք կարող, քանի որ նրանց արժեքները կլինեն բացասական ($x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = -8, x_5 = -12, x_6 = -6$), որը ոչ թույլատրելի լուծում է:

Այդ պատճառով սահմանափակումների համակարգը հավասարումների տեսքի բերելուց հետո սկզբնական հենքի որոշումը պետք է շարունակել այնպես, ինչպես նկարագրվել է երկրորդ դեպքում:

$$\begin{cases} y_1 = 8 - (3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4) \\ y_2 = 12 - (x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_5) \\ y_3 = 6 - (2x_1 + x_2 + x_3 - x_6) \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,6}), y_i \geq 0, \left(i = \overline{1,3}\right)$$

$$-f = -(4x_1 + 7x_2 - 3x_3) \rightarrow \min$$

$$F = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \min :$$

4. Ենթադրենք գծային ծրագրավորման խնդրում սահմանափակումների համակարգը տրված է խառը տեսքով: Այս դեպքում

յուրաքանչյուր սահմանափակման համար վարվում ենք այնպես, ինչպես նկարագրվեց նախորդ երեք դեպքերում: Եթե գծային ծրագրավորման խնդրի համակարգում կա գոնե մեկ սահմանափակում հավասարման (=) կամ մեծ ու հավասար (≥) տեսքով, ապա սկզբնական հենքի փնտրելը հանգում է երկրորդ դեպքին:

Օրինակ 1.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 30 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \le 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1 \ge 0 \; x_2 \ge 0 \qquad\qquad x_5 \ge 0, \left(j = \overline{1,5}\right)$$

$$f = 5x_1 + 4x_2 \to max \qquad\qquad f = 5x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} y_1 = 30 - \left(x_1 + 4x_2 - x_3\right) \\ x_4 = 6 - \left(2x_1 - 3x_2\right) \\ x_5 = 10 - \left(-x_1 + 3x_2\right) \end{cases}$$

$$x_5 \ge 0, \quad \left(j = \overline{1,5}\right), \; y_1 \ge 0$$

$$f = 5x_1 + 4x_2 \to max$$

$$F = y_1 \to min$$

կամ $F = 30 - \left(x_1 + 4x_2 - x_3\right) \to min$

Օրինակ 2:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \le 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 9 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 9 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}) \qquad\qquad x_j \ge 0, (j = \overline{1,5})$$

$$f = 5x_1 - 3x_2 \to min \qquad\qquad f = 5x_1 - 3x_2 \to min$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 = 12 - \left(3x_1 + x_2 - x_3\right) \\ y_1 = 9 - \left(2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5\right) \\ y_2 = 10 - \left(4x_1 + 2x_2 + 3x_3\right) \end{cases}$$

$$f = 5x_1 - 3x_2 \to min$$

$$F = y_1 + y_2 \to min$$

կամ $F = 19 - \left(6x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_5\right) \to min$

Օրինակ 3:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge 8 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 \ge 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_5 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}) \qquad\qquad x_j \ge 0, (j = \overline{1,5})$$

$$f = 4x_1 + 7x_2 \to max \qquad\qquad f = 4x_1 + 7x_2 \to max$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 7 - (2x_1 + 3x_2 + 2x_3) \\ y_2 = 8 - (3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4) \\ y_3 = 9 - (x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_5) \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,5}), y_i \ge 0, (i = \overline{1,3})$$

$$-f = -(4x_1 + 7x_2) \to min$$

$$F = y_1 + y_2 + y_3 \to min$$

կամ $F = 24 - (6x_1 + 6x_2 + 7x_3 - x_4 - x_5) \to min$

Դիտողություն: Սիմպլեքս աղյուսակները (§21) կազմելիս ստուգման տողը և սյունը բաց ենք թողել, այն չծանրաբեռնելու նպատակով: Սակայն §22-ի օրինակում նրանք վերականգնել ենք: Այդ օրինակի 6-րդ աղյուսակի միջոցով ցույց տանք նրանց օգտագործման ձևերը: Նկատենք, որ նրանց միջոցով ստուգում ենք նպատակային ֆունկցիայի տողում թվերի ճշտությունը:

Նպատակային ֆունկցիայի տողում ազատ անդամը ստացվում է ստուգման սյան և համապատասխան ազատ անդամների արտադրյալների հանրահաշվական գումարից:

$$-18 = -10 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0$$

Նպատակային ֆունկցիայի տողի ցանկացած անդամ (բացի ազատ անդամից) ստացվում է ստուգման և համապատասխան սյան անդամների արտադրյալների հանրահաշվական գումարից հանած ստուգման տողի համապատասխան անդամը:

Օրինակ: $-43 = -10 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 - 7$:

§23 Սիմպլեքս մեթոդը Ժորդանի վերափոխված ձևափոխություններով

Ենթադրենք ունենք գծային ծրագրավորման խնդիր ընդհանուր տեսքով.

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow max \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n \le b_r \\
a_{r+11}x_1 + a_{r+12}x_2 + \cdots + a_{r+1n}x_n \le b_{r+1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k \\
a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \cdots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,n}) \qquad (3)$$

Լրացուցիչ ոչ բացասական $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+k}$ փոփոխականներ ներմուծելով, (2) համակարգը բերենք հավասարումների տեսքի: Ստացված խնդրի համար կազմում ենք Ժորդանի վերափոխված աղյուսակ (§17)՝ հատկացնելով նպատակային ֆունկցիային առանձին տող: Այնուհետև հաջորդական աղյուսակների միջոցով ստանում ենք խնդրի լուծումը: Լուծման հաջորդականությունը ներկայացնենք հետևյալ քայլերով:

Առաջին քայլ: Եթե խնդրում կան ազատ նշանի փոփոխականներ, ապա նրանք արտաքսում ենք մի աղյուսակից մյուսին անցնելու միջոցով:

Երկրորդ քայլ: Եթե զրոյական տողերում կան բացասական նշանի ազատ անդամներ, ապա (-1)-ով բազմապատկելով կբերենք ոչ բացասականի: Այնուհետև Ժորդանի վերափոխված ձևափոխությունների միջոցով արտաքսում ենք զրոները:

Երրորդ քայլ: Եթե որևէ տողը պարունակում է բացասական նշանի

ազատ անդամ, գլխավոր տարրը ընտրելով այդ տողից, ձևափոխում ենք այն ոչ բացասականի:

Չորրորդ քայլ: Շարունակում ենք մի աղյուսակից մյուսին անցնելը՝ գլխավոր տարրը ընտրելով սիմպլեքս մեթոդի ալգորիթմով մինչև օպտիմալության հայտանիշի տեղի ունենալը:

Ցույց տանք լուծման ալգորիթմը օրինակի միջոցով:

Օրինակ: Լուծել գծային ծրագրավորման հետևյալ խնդիրը.

$$f = 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - 6 \rightarrow max$$

$$\left.\begin{array}{l}
2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\
3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 16 \\
4x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 \ge 25 \\
x_1 + 4x_3 + 5x_4 \le 23
\end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1.4})$$

Համակարգի առաջին երկու հավասարումները գրենք զրոյական տեսքով, իսկ երրորդ ու չորրորդ անհավասարումների համար ներմուծենք լրացուցիչ փոփոխականներ: Մաքսիմումի խնդիրը բերենք մինիմումի և արտագրենք այն հետևյալ տեսքով.

$$-f = 6 - 5x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 \rightarrow min$$

$$\left.\begin{array}{l}
0 = 3 - 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \\
0 = 16 - 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \\
x_5 = -25 + 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 \\
x_6 = 23 - x_1 - 4x_3 - 5x_4
\end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,6})$$

Կազմենք Ժորդանի վերափոխված աղյուսակ

Աղյուսակ 1.

Բազիս (հենք)	Ազատ անդամներ	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0	3	2	$\boxed{1}$	3	-1
0	16	3	-1	1	2
x_5	-25	-4	1	-2	-6
x_6	23	1	0	4	5
$-f$	6	5	-3	-1	4

Առաջին տողի հենքից արտաքսենք զրոն, որի համար գլխավոր տարր ընտրենք այդ տողից 1-ը և անցնենք հաջորդ աղյուսակին՝ կատարելով Ժորդանի վերափոխված ձևափոխությունները:

Կստանանք՝

Աղյուսակ 2.

Բազիս (հենք)	Ազատ անդամներ	$-x_1$	$-x_3$	$-x_4$
x_2	3	$\boxed{2}$	3	-1
0	19	5	4	1
x_5	-28	-6	-5	-5
x_6	23	1	4	5
$-f$	15	11	8	1

Այս աղյուսակում գլխավոր տարրը գտնում ենք 11-ի ու $min\left(\frac{3}{2},\frac{19}{5},\frac{-28}{-6},\frac{23}{1}\right)=\frac{3}{2}$ -ի միջոցով և անցնում հաջորդ աղյուսակի:

Աղյուսակ 3.

Բազիս (հենք)	Ազատ անդամներ	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
x_1	3/2	1/2	3/2	-1/2
0	23/2	-5/2	-7/2	7/2
x_5	-19	3	4	$\boxed{-8}$
x_6	43/2	-1/2	5/2	11/2
$-f$	-3/2	-11/2	-17/2	13/2

Ընտրելով գլխավոր տարրը նույն սկզբունքով, այս քայլում ազատվում ենք բացասական ազատ անդամից:

Աղյուսակ 4.

Բազիս (հենք)	Ազատ անդամներ	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$
x_1	43/16	5/16	20/16	-1/16
0	51/16	-19/16	-28/16	$\boxed{7/16}$
x_4	19/8	-3/8	-4/8	-1/8
x_6	135/16	25/16	84/16	11/16
$-f$	-271/16	-49/16	-84/16	13/16

Ընտրելով գլխավոր տարրը 7/16, ազատվում ենք երկրորդ զրոյական տողից:

Աղյուսակ 5.

Բազիս (հենք)	Ազատ անդամներ	$-x_2$	$-x_3$
x_1	22/7	1/7	1
x_5	51/7	-19/7	-4
x_4	23/7	-5/7	-1
x_6	24/7	24/7	8
$-f$	-160/7	-6/7	-2

Քանի որ 5-րդ աղյուսակում նպատակային ֆունկցիայի տողի բոլոր տարրերը (ազատ անդամը չենք հաշվում) ոչ դրական են, ուստի ստացվել է խնդրի օպտիմալ լուծումը:

$$f_{\max} = \frac{160}{7},\ \text{երբ}\ x_1 = \frac{22}{7}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = \frac{23}{7}:$$

Գլուխ 6. Գծային ծրագրավորման երկակիության տեսություն

Մաթեմատիկայի տարբեր բաժիններում հանդիպում են, այսպես կոչված երկակիության թեորեմներ, որոնցից յուրաքանչյուրը թույլատրում է՝ ըստ տրված տեսության, որոշակի հաստատված օրենքներով, կառուցել մեկ այլ պնդում այնպես, որ առաջինի իրավացիությունից անմիջապես բխում է երկրորդի իրավացիությունը:

Գծային ծրագրավորման մեջ նույնպես հանդիպում են երկակիության թեորեմների հիանալի օրինակներ: Չնայած այն բանին, որ ըստ այդ թեորեմների խնդիրների լուծումները կատարվում են կրկնակի, այնուամենայնիվ նրանք ունեն սկզբունքային կարևոր հետևանքներ:

դաս. 13

§ 24. ԳԾ փոխադարձ երկակի խնդիրների ձևակերպումը

Ենթադրենք, տրված է ԳԾ որևէ խնդիր: Անվանենք այն սկզբնական (նախնական):

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \text{-------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{3}$$

Նույն տվյալներով տրված է ԳԾ մեկ այլ խնդիր.

$$\varphi = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \text{-------------------} \\ v_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{array}\right\} \tag{5}$$

$$y_i \geq 0, \ \left(i=\overline{1,m}\right) \tag{6}$$

Համեմատելով (1) – (3) և (4) - (6) խնդիրները, կնկատենք հետևյալ օրինաչափությունները.

1. (5) սահմանափակումների համակարգի փոփոխականների գործակիցներից կազմված մատրիցը հանդիսանում է (2) համակարգի համապատասխան մատրիցի տրանսպոնացվածը (տողերը փոխարինված սյուներով):

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} \ a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12} \ a_{22} \ldots a_{m2} \\ ---------- \\ a_{1n} \ a_{2n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots a_{2n} \\ ---------- \\ a_{m1} \ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. (5) սահմանափակումների համակարգը կազմված է m փոփոխականներից և n թվով սահմանափակումներից, իսկ (2) համակարգը՝ n փոփոխականներից ու m սահմանափակումներից:

3. Յուրաքանչյուր խնդրում սահմանափակումների համակարգի ազատ անդամները մյուս խնդրի նպատակային ֆունկցիայի փոփոխականների գործակիցներն են:

4. (1) - (3) խնդրում սահմանափակումների համակարգը տրված է ≤ տեսքով, իսկ նպատակային ֆունկցիայից պահանջվում է գտնել մաքսիմում արժեքը: (4) - (6) խնդրում սահմանափակումների համակարգը տրված է ≥ տեսքով, իսկ նպատակային ֆունկցիայից՝ մինիմում արժեքը:

Վերը նշված չորս պայմանների առկայության դեպքում կասենք, որ ԳԾ այդ խնդիրները կլինեն փոխադարձ երկակի: Եթե որպես նախնական խնդիր ընդունենք երկրորդը, ապա առաջինը կլինի նրա երկակին: Դա հեշտ է տեսնել, եթե նկատի ունենանք հետևյալ պարզ ձևափոխությունները.

բազմապատկելով (5) համակարգի երկու մասերը -1-ով, այն կբերվի (2)-ի տեսքին և հակառակը՝ եթե (2)-ի երկու մասերը բազմապատկենք -1-ով, ապա այն կբերվի (5)-ի տեսքին: Նպատակային ֆունկցիաներն էլ կարելի է բերել մեկը մյուսին, եթե φ_{min}-ը ձևափոխենք $-\varphi_{max}$ տեսքի:

Այսպիսով նշանակություն չունի, թե այդ երկու խնդիրներից որը

համարենք սկզբնական: Նշենք, որ այդ տեսքով ներկայացված ԳԾ խնդիրները կոչվում են սիմետրիկ երկակի խնդիրներ:

§ 25. ԳԾ խնդրի երկակին կազմելու կանոնները

Ենթադրենք ԳԾ խնդիրը տրված է կամայական տեսքով:

$$f=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \to \max \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \ (\leq,=,\geq) b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \ (\leq,=,\geq) b_2 \\ ---------------------- \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \ (\leq,=,\geq) b_m \end{array}\right\}, \tag{2}$$

որտեղ՝ $x_1(\leq, \ \geq)\ 0, \ldots, x_n(\leq, \geq)\ 0,$ (3),

կամ նրանց վրա ընդհանրապես պայմաններ դրված չեն:

Վերցնենք նույն տվյալներով, մեկ այլ ԳԾ խնդիր.

$$\varphi=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m \to \min \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m (\leq,=,\geq) c_1 \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m (\leq,=,\geq) c_2 \\ --------------------- \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m (\leq,=,\geq) c_n \end{array}\right\} \tag{5}$$

$$y_1(\geq, \ \leq)\ 0, \ldots, y_m(\geq, \leq)\ 0, \tag{6}$$

կամ նրանց վրա ընդհանրապես պայմաններ դրված չեն:

Ինչպես տեսանք (§24), սիմետրիկ երկակի խնդիրից մեկի միջոցով կարելի է կազմել նրա երկակին ելնելով չորս օրենքներից:

Այժմ նկարագրենք այն օրենքները, երբ ԳԾ խնդիրները տրված են կամայական տեսքերով:

1. (5) համակարգում j-րդ անհավասարության նշանը պետք է համընկնի (3)-ի x_j փոփոխականի վրա դրված անհավասարության նշանի հետ, կամ վերցվում է ճիշտ հավասարություն, եթե x_j-ի վրա սահմանափակում չի դրված:

2. Երկակի խնդրի (6) պայմաններում y_i փոփոխականի վրա դրված սահմանափակման անհավասարության նշանը վերցվում է (2)

համակարգի i-րդ սահմանափակման նշանին հակառակ: Եթե (2) համակարգի i-րդ սահմանափակումը գրված է հավասարության տեսքով, ապա y_i փոփոխականի վրա սահմանափակում չի դրվում:

Ինչպես տեսնում ենք, (3)-ի և (5)-ի վրա դրված սահմանափակումների նշանները համընկնում են, իսկ (6) և (2) սահմանափակումների անհավասարությունների նշանները այլ իմաստի են: Հետևաբար երկակի խնդիր կազմելու կանոնները սիմետրիկ չեն և կախված են այն բանից, թե ուղիղ խնդիրը մաքսիմումի, թե մինիմումի պահանջով է:

Բերենք օրինակներ, որոնց միջոցով ընթերցողը կարող է ավելի լավ յուրացնել երկակի խնդիր կազմելու կանոնները:

Օրինակ 1: Կազմել տրված խնդրի երկակին:

$$f=4x_1+5x_2+8x_3\to max,$$

$$\left.\begin{array}{l}3x_1+2x_2-x_3\le 4\\ x_1+3x_2+2x_3\le 6\end{array}\right\},$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$$

Երկակի խնդիրը կլինի՝

$$\varphi=4y_1+6y_2\to min$$

$$\left.\begin{array}{l}3y_1+y_2\ge 4\\ 2y_1+3y_2\ge 5\\ -y_1+2y_2\ge 8\end{array}\right\}$$

$$y_1\ge 0,\ y_2\ge 0:$$

Օրինակ 2: Տրված է ԳԾԽ-ը հետևյալ տեսքով.

$$f=4x_1-3x_2+5x_4\to max,$$

$$\left.\begin{array}{l}3x_1-5x_2+2x_4\le 6\\ x_1-2x_2+x_3-2x_4=5\\ 2x_2-3x_3+5x_4\ge 0\end{array}\right\},\qquad \begin{array}{l}y_1\ge 0\\ y_2 \text{ կամայական է}\\ y_3\le 0\end{array}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\le 0,\ x_4\ge 0:$$

կազմենք երկակի խնդիրը:

$$\varphi=6y_1+5y_2+0\cdot y_3\to min,$$

$$\left.\begin{array}{l}3y_1+y_2\ge 4\\ -5y_1-2y_2+2y_3\le -3\\ y_2-3y_3=0\\ 2y_1-2y_2+5y_3\ge 5\end{array}\right\},$$

$y_1\ge 0$, y_2 կամայական է, $y_3\le 0$

Օրինակ 3: Կազմել տրված խնդրի երկակին:

$$f=2x_1+8x_2-3x_3+x_4\to min$$

$$\left.\begin{array}{l}3x_1+2x_2-x_3=3\\ 2x_1-5x_2-2x_3+x_4\le 7\\ -5x_1+3x_2+3x_4\ge 5\end{array}\right\},$$

y_1 կամայական է

$y_2\le 0$

$y_3\ge 0$

$x_1\le 0,\ x_2\ge 0,\ x_4\ge 0:$

Երկակի խնդիրը կլինի.

$$\varphi=3y_1+7y_2+5y_3\to max,$$

$$\left.\begin{array}{l}3y_1+2y_2-5y_3\ge 2\\ 2y_1-5y_2+3y_3\le 8\\ -y_1-2y_2=-3\\ y_2+3y_3\le 1\end{array}\right\},$$

y_1 կամայական է, $y_2\le 0$, $y_3\ge 0$:

§ 26 Պնդումներ ԳԾ փոխադարձ երկակի խնդիրների նկատմամբ

Թեորեմա: -Եթե ԳԾ սկզբնական խնդիրը ունի լուծում, ապա նրա նկատմամբ երկակի խնդիրը նույնպես ունի լուծում և այդ լուծումները իրար հավասար են:

$$f_{max}=\varphi_{min} \qquad (1)$$

Եթե երկակի խնդրում (§ 24, (4) - (6)) նպատակային ֆունկցիան սահմանափակ չէ ներքևից (խնդիրը լուծում չունի), ապա սկզբնական խնդրի (§ 24, (1) - (3)) սահմանափակումների համակարգը չունի ոչ մի ոչ բացասական լուծում (խնդիրը լուծում չունի):

Թեորեմի ապացույցն ընթերցողին կներկայացնենք § 28-ում:

Իրականում երկակի խնդիրների կապը ավելի խորն է, քան ասվել է թեորեմում: Մասնավորապես այն արտահայտվում է նրանում, որ եթե սիմպլեքս մեթոդը կիրառվի մի խնդրի լուծման համար, ապա այն միանշանակ կտա նաև երկակի խնդրի լուծումը:

Նկատենք, որ (1) հարաբերակցության պարզագույն հետևանք է $f \le \varphi$ անհավասարությունը, որը կապում է f և φ նպատակային ֆունկցիաների արժեքները՝ (1) և (5) համակարգերի (§ 24) ցանկացած ոչ բացասական լուծումների համար: Այս նպատակով իրավացի է հետևյալ լեմմը:

Լեմմ: Եթե $\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$ վեկտորը (2) համակարգի (§ 24) մի որևէ թույլատրելի լուծում է, իսկ $\left(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0\right)$ վեկտորը (5) համակարգի մի որևէ թույլատրելի լուծում, ապա այդ լուծումների համար տեղի ունի $f_0 \le \varphi_0$ անհավասարությունը:

Ապացույց: (2) համակարգի մեջ (§ 24) $x_1, x_2, \dots, x_n$ փոփոխականների փոխարեն տեղադրենք $\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$ վեկտորի կոորդինատները, այնուհետև բազմապատկենք նույն համակարգի առաջին անհավասարման երկու մասերը y_1^0-ով, երկրորդը՝ y_2^0-ով և այլն. m-րդը՝ y_m^0-ով, որից հետո գումարելով ստացված անհավասարությունների ձախ և աջ մասերը առանձին-առանձին (ի նկատի ունենանք, որ անհավասարությունները բազմապատկում ենք ոչ բացասական թվերով) կստանանք՝

$$a_{11}y_1^0x_1^0 + a_{12}y_1^0x_2^0 + \dots + a_{mn}y_m^0x_n^0 \le b_1y_1^0 + b_2y_2^0 + \dots + b_my_m^0 \qquad (2)$$

Նույն կերպ վարվենք (5) համակարգի նկատմամբ (§ 24): $\left(y_1, y_2, \dots, y_m\right)$ փոփոխականների փոխարեն տեղադրենք $\left(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0\right)$ վեկտորի կոորդինատները: Բազմապատկենք այդ համակարգի յուրաքանչյուր անհավասարության երկու մասերը համապատասխանաբար $\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$ վեկտորի կոորդինատներով և գումարելով իրար կստանանք՝

$$a_{11}y_1^0x_1^0 + a_{21}y_2^0x_1^0 + \dots + a_{mn}y_m^0x_n^0 \ge c_1x_1^0 + c_2x_2^0 + \dots + c_nx_n^0 \qquad (3)$$

Հեշտ է տեսնել, որ (2) և (3) անհավասարությունների ձախ մասերը նույն մեծություններն են: Նրանք ունեն $a_{ij}x_i^0y_j^0$ տեսքը բոլոր $i=\overline{1,m}$ և $j=\overline{1,n}$ համար: Նշանակելով (2) և (3) անհավասարությունների ձախ մասերը A-ով և ի նկատի ունենալով, որ (2)-ի աջ մասը φ_0-ն է, իսկ (3)-ի աջ մասը՝ f_0-ն կստանանք՝

$$f_0 \le A \le \varphi_0 \text{ կամ } f_0 \le \varphi_0$$

Լեմմն ապացուցված է:

Դիտողություն: Լեմմից հետևում է, որ եթե $f_0=\varphi_0$, ապա $f_0=\max f$, $\varphi_0=\min\varphi$, այսինքն f_0 և φ_0 արժեքները համապատասխանում են օպտիմալ լուծմանը:

§ 27 Գծային, համասեռ հավասարումների փոխադարձաբար երկակի համակարգեր

Ենթադրենք՝ տրված են գծային, համասեռ հավասարումների երկու համակարգեր, որոնք լուծված են ինչ որ հենքի (բազիսի) նկատմամբ: Անվանենք ձախ մասերի փոփոխականներին հենքի, իսկ աջ մասերին՝ ազատ:

$$\left.\begin{aligned} x_{k_1} &= a_{k_1,\ell_1}x_{\ell_1} + a_{k_1,\ell_2}x_{\ell_2} + \dots + a_{k_1\ell_n}x_{\ell_n} \\ x_{k_2} &= a_{k_2,\ell_1}x_{\ell_1} + a_{k_2,\ell_2}x_{\ell_2} + \dots + a_{k_2\ell_n}x_{\ell_n} \\ &- \\ x_{k_m} &= a_{k_m,\ell_1}x_{\ell_1} + a_{k_m,\ell_2}x_{\ell_2} + \dots + a_{k_m\ell_n}x_{\ell_n} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} y_{p_1} &= b_{p_1q_1}y_{q_1} + b_{p_1q_2}y_{q_2} + \dots + b_{p_1q_m}y_{q_m} \\ y_{p_2} &= b_{p_2q_1}y_{q_1} + b_{p_2q_2}y_{q_2} + \dots + b_{p_2q_m}y_{q_m} \\ &- - - - - - - - - - - - - - - - - - \\ y_{p_n} &= b_{p_nq_1}y_{q_1} + b_{p_nq_2}y_{q_2} + \dots + b_{p_nq_m}y_{q_m} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Այս համակարգերը կոչվում են փոխադարձ երկակի, եթե նրանք բավարարում են երկակիության հետևյալ պայմաններին.

1. Երկու համակարգերն էլ պետք է լուծված լինեն հենքի փոփոխականների նկատմամբ, ընդ որում մի համակարգի հենքի փոփոխականների քանակը հավասար է մյուսի ազատ փոփոխականների քանակին: Ակնհայտ է, որ (1) համակարգի հենքի փոփոխականների քանակը m է, ազատ փոփոխականները՝ n, իսկ (2) համակարգում հակառակն է:

2. (1) և (2) համակարգերի միջև պետք է տեղի ունենա փոփոխականների համապատասխանության պայմանը. ընդ որում մի համակարգի հենքի փոփոխականներին պետք է համապատասխանի մյուս համակարգի ազատ փոփոխականները և հակառակը:

Այս պայմանը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով.

$$\begin{array}{cccccc} x_{k_1} & x_{k_2} \ldots & x_{k_m} & x_{\ell_1} & x_{\ell_2} \ldots & x_{\ell_n} \\ | & | & | & | & | & | \\ y_{q_1} & y_{q_2} \ldots & y_{q_m} & y_{p_1} & y_{p_2} \ldots & y_{p_n} \end{array}$$

3. (1) և (2) համակարգերի գործակիցների միջև պետք է տեղի ունենա հետևյալ պայմանը.

$$a_{k_i,\ell_j} = -b_{p_j,q_i}$$

Օրինակ: $a_{k_5,\ell_6} = -b_{p_6 q_5}$

Համասեռ համակարգերի նկատմամբ իրավացի է հետևյալ լեմմը:

Լեմմ: Եթե (1) և (2) փոխադարձ երկակի համակարգերից որևէ մեկում անցում կատարենք նոր հենքի, իսկ մյուս համակարգում՝ համապատասխան հենքի, ապա ստացված նոր համակարգերի փոխադարձ երկակիությունը կպահպանվի:

Նախ նկատենք, որ եթե (1) համակարգում կատարում ենք հենքի մեկ փոփոխականի փոխարինում մեկ ազատ փոփոխականով, ապա համապատասխան գործակիցը պետք է լինի զրոյից տարբեր:

Օրինակ: Եթե x_{k_1} -ը փոխարինում ենք x_{ℓ_2} -ով, ապա անհրաժեշտ է, որ $a_{k_1\ell_2} \neq 0$:

Եթե կատարում ենք երկու փոփոխականների փոխարինում, ապա համապատասխան երկրորդ կարգի դետերմինանտը պետք է լինի զրոյից տարբեր:

Օրինակ: Եթե x_{k_1} -ը և x_{k_2} փոփոխականները փոխարինում ենք x_{ℓ_1} ու x_{ℓ_2} -ով, ապա անհրաժեշտ է, որ հետևյալ երկրորդ կարգի դետերմինանտը լինի զրոյից տարբեր՝

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{k_1,\ell_1} & a_{k_1,\ell_2} \\ a_{k_2,\ell_1} & a_{k_2,\ell_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Ցույց տանք, որ եթե (1) համակարգում x_{k_1} և x_{k_2} փոփոխականների փոխարինումը x_{ℓ_1} ու x_{ℓ_2} -ով թույլատրելի է ($\Delta \neq 0$), ապա (2) համակարգում համապատասխան փոփոխականների փոխարինումը նույնպես թույլատրելի է:

Իրոք, քանի որ (2)-ի մեջ y_{p_1} և y_{p_2} հենքի փոփոխականները փոխարինվում են y_{q_1} և y_{q_2} -ով, ապա նրանց համապատասխան դետերմինանտը կլինի.

$$\begin{vmatrix} b_{p_1,q_1} & b_{p_1,q_2} \\ b_{p_2,q_1} & b_{p_2,q_2} \end{vmatrix},$$

որի զրոյից տարբեր լինելը կբխի երկակիության երրորդ պայմանից՝

$$\begin{vmatrix} b_{p_1,q_1} & b_{p_1,q_2} \\ b_{p_2,q_1} & b_{p_2,q_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_{k_1,\ell_1} & -a_{k_2,\ell_1} \\ -a_{k_1,\ell_2} & -a_{k_2,\ell_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{k_1,\ell_1} & a_{k_1,\ell_2} \\ a_{k_2,\ell_1} & a_{k_2,\ell_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Այժմ անցնենք լեմմի ապացույցին:

Ապացույցը կատարենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: Սկզբում ենթադրենք, որ հենքի միայն մեկ փոփոխականն է փոխարինվում ազատ փոփոխականով: Որոշակիության համար ընդունենք, x_{k_1} -ը փոխարինվում է x_{ℓ_1} -ով: Այս դեպքում անհրաժեշտ է, որ $a_{k_1,\ell_1} \neq 0$: Համապատասխան փոփոխականների փոխարինումը (2) համակարգում կլինի y_{q_1} -ի և y_{p_1} -ի միջև, որի հնարավորությունը բխում է $b_{p_1 q_1} = -a_{k_1\ell_1} \neq 0$ պայմանից:

Որպեսզի ստանանք (1) համակարգը նոր հենքի նկատմամբ, անհրաժեշտ է նրա առաջին հավասարումից որոշել x_{ℓ_1}-ը և տեղադրել նրա արժեքը մնացած հավասարումների մեջ (ինչպես դա կատարվել է Ժորդանի ձևափոխություններում (§15), թողնում ենք ընթերցողին): Նույն ձևով (2) համակարգում կատարվում են համապատասխան ձևափոխություններ:

Ստացված նոր համակարգերը համեմատելով և ստուգելով երկակիության երեք պայմաններ կհամոզվենք, որ նրանք փոխադարձ երկակի են: Սրանով ավարտվում է լեմմի ապացույցը մեկ փոփոխականի փոխարինման դեպքի համար:

Ենթադրենք, որ լեմմն ապացուցված է այն դեպքում, երբ կատարվել r -1 թվով հենքի փոփոխականների փոխարինում: Ելնելով այդ ենթադրությունից, ապացուցենք, որ լեմմն իրավացի է նաև, երբ հենքում կատարվում է r թվով փոփոխականների փոխարինում: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots x_{k_r}$ հենքի փոփոխականները փոխարինվում են $x_{\ell_1}, x_{\ell_2}, \dots x_{\ell_r}$ ազատ փոփոխականներով, իսկ դրա համար անհրաժեշտ է.

$$\begin{vmatrix} a_{k_1,\ell_1} & a_{k_1,\ell_r} \\ a_{k_r,\ell_1} & a_{k_r,\ell_r} \end{vmatrix} \neq 0:$$

Բայց դրանից կհետևի, որ (r-1)-րդ կարգի մինորներից պաս սայը զրոյից տարբեր է (հակառակ դեպքում դետերմինանտի արժեքը կլինի զրո): Պարզության համար ենթադրենք, որ զրոյից տարբեր մինորը գտնվում է վերին ձախ անկյունում, այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} a_{k_1,\ell_1} & a_{k_1,\ell_{r-1}} \\ a_{k_{r-1},\ell_1} & a_{k_r,\ell_{r-1}} \end{vmatrix} \neq 0:$$

Սա կնշանակի, որ (1) համակարգում թույլատրելի է (r-1) թվով հենքի փոփոխականների փոխարինում: Եթե կատարենք ևս մեկ հենքի փոփոխականի փոխարինում, որի ապացույցը կատարվում է, ապա կստանանք r թվով փոփոխականների փոխարինման համար լեմմի ապացույցը:

§28 Երկակիության թեորեմի ապացույցը

Նախ անվանենք (1) - (3) խնդիրը I, իսկ (4)-(6) խնդիրը՝ II (§24): Ներմուծելով լրացուցիչ փոփոխականներ I և II խնդիրների սահմանափակումների համակարգը բերենք հավասարումների տեսքի: Միաժամանակ II խնդիրը մինիմումից բերենք մաքսիմումի տեսքը՝ Φmax=-φmin միջոցով:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= -a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n + b_1 \\ &\text{-----------------} \\ x_{n+m} &= -a_{m1}x_1 - \dots - a_{mn}x_n + b_m \end{aligned}\right\} \\ x_j \geq 0, \left(j = \overline{1, n+m}\right) \\ f_{max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \qquad \text{I}'$$

$$\left.\begin{aligned} y_{m+1} &= a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m - c_1 \\ &\text{-----------------} \\ y_{m+n} &= a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m - c_n \end{aligned}\right\} \\ y_j \geq 0, \left(i = \overline{1, m+n}\right) \\ \Phi_{max} = -b_1y_1 - b_2y_2 - \dots - b_my_m \qquad \text{II}'$$

Հիշենք, որ թեորեմի գլխավոր պնդումն այն է, եթե I խնդիրը լուծում ունի, ապա II խնդիրը նույնպես ունի լուծում և որ՝ fmax=φmin կամ

fmax= Φmax

Տանք I′ և II′ խնդիրներին գծային, համասեռ հավասարումների համակարգի տեսք: Այդ նպատակով նպատակային ֆունկցիաները՝ ձևափոխենք հավասարումների և ներառելով նոր փոփոխականներ՝ t=1, S=1 տեսքով, ընդգրկենք համակարգի մեջ:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n + b_1 t \\ & \text{-------------------------} \\ x_{n+m} &= -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \dots - a_{mn}x_n + b_m t \\ f &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0\cdot t \end{aligned}\right\} \qquad I''$$

$$\left.\begin{aligned} y_{m+1} &= a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m - c_1 s \\ & \text{-----------------} \\ y_{m+n} &= a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m - c_n s \\ \Phi &= -b_1y_1 - b_2y_2 - \dots - b_my_n - 0\cdot s \end{aligned}\right\} \qquad II''$$

Հեշտ է ցույց տալ, որ I'' և II'' համակարգերը, որոնք համարժեք են I և II խնդիրներին, փոխադարձ երկակի են: Դա երևում է երկակիության երեք պայմանների ստուգումից, որոնցից երկրորդը՝ փոփոխականների համապատասխանության պայմանը կգրվի հետևյալ տեսքով՝

xl	x2	xn	t	xn+1	xn+m	f
|	|	|	|	|	|	|
m+1	ym+2	...ym+n	Φ	y1	ym	S

Մյուս երկու պայմանները ակնհայտ երևում են համեմատելով I' և II'' համակարգերի համապատասխան գործակիցները և փոփոխականների քանակները:

Քանի որ I' և II'' համակարգերը փոխադարձ երկակի են, ուստի նրանք երկակի կմնան մի բազիսից մեկ այլի անցնելիս (ըստ լեմմի):

Ինչպես հայտնի է I և II խնդիրները լուծվում են սիմպլեքս մեթոդով, որի էությունն է անցում հաջորդաբար տարբեր հենքերի, մինչև ստացածի օպտիմալ լուծումը: Օպտիմալ լուծմանը համապատասխանող ֆունկցիայի արժեքը հավասարվում է իր ազատ անդամին: Քանի որ ազատ անդամի դերը տանում են t-ի և s-ի գործակիցները, իսկ այդ գործակիցները, համաձայն լեմմի (§27), իրար հավասար են հակառակ նշաններով, ուստի՝

$$f_{max} = -\Phi_{max} \text{ կամ } f_{max} = \varphi_{min}$$

Սրանով ապացուցվում է թեորեմի հիմնական պնդումը:

Թեորեմի երկրորդ մասի ապացույցը կատարենք հակասող ընդունելության եղանակով: Ենթադրենք, որ II խնդրում նպատակային ֆունկցիան սահմանափակ չէ ներքևից՝ φmin=-∞: Սա նշանակում է, որ φ-ն կարող է ստանալ ցանկացած A բացասական թվից փոքր արժեք: Ցույց տանք, որ այս դեպքում I խնդրի սահմանափակումների համակարգը չունի ոչ մի ոչ բացասական լուծում:

Ենթադրենք, որ այնուամենայնիվ այդպիսի լուծում գոյություն ունի՝ $x_1 = x_1^o,\ x_2 = x_2^o, \dots,\ x_n = x_n^o$: Այս դեպքում, ըստ լեմմի (§26), նպատակային ֆունկցիաների արժեքների միջև գոյություն ունի f0≤φ0 կապը: Ստացվում է, որ $c_1x_1^0 + c_2x_2^o + \dots + c_nx_n^o$ թիվը պետք է լինի ոչ մեծ, քան ցանկացած բացասական թիվ, որը ակնհայտ անհնար է: Եկանք հակասության, որից էլ հետևում է, որ I խնդրի սահմանափակումների համակարգը ոչ բացասական լուծումներ չունի:

§29 ԳԾ երկակի խնդիրների տնտեսագիտական իմաստը

Ինչպես հայտնի է, ԳԾ խնդիրներն ունեն որոշակի տնտեսագիտական իմաստ, կամ այդ խնդիրները ձևավորվում են՝ ելնելով տնտեսագիտական ինչ-որ հարցեր պարզաբանելու իմաստից: Տնտեսագիտական բացատրություն (մեկնաբանում) ունեն նաև ԳԾ երկակի խնդիրները:

Բերենք ԳԾ խնդիրների երկակին կազմելու և նրանց տնտեսագիտական իմաստը մեկնաբանելու օրինակներ:

Առաջին օրինակ: Կազմել ԳԾ ռեսուրսների խնդրի (§10) երկակին և տալ նրա տնտեսագիտական մեկնաբանումը:

Հիշենք, որ ռեսուրսների օպտիմալ օգտագործման խնդրում, տնտեսությունը ունի ռեսուրսներ և ցանկանում է կազմակերպել արտադրություն: Խնդրի մաթեմատիկական գրառումը ունի հետևյալ տեսքը.

$$f = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \to max \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_m &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$x_j \ge 0,\ (j=\overline{1,n})$, որտեղ

P_j – j-րդ արտադրանքի միավորի արժեքն է (կարող է լինել այլ ցուցանիշ),

b_i –i-րդ ռեսուրսի առկա ծավալն է,

a_{ij}- տեխնոլոգիական գործակից է, որը ցույց է տալիս j-րդ արտադրատեսակի մեկ միավորի վրա կատարվող i-րդ ռեսուրսի ծախ...

x_j- j-րդ արտադրատեսակի արտադրության ծավալն է:

Այս նույն տվյալներով ձևակերպենք երկակի խնդիրը:

Ենթադրենք, որևէ ձեռնարկություն, արտադրություն կազմակերպելու նպատակով, որոշում է գնել բոլոր այն ռեսուրսները, որոնք պատկանում են տնտեսությանը: Այս դեպքում, անհրաժեշտ է, ռեսուրսների գնման համար սահմանել օպտիմալ գներ:

Նշանակենք i-րդ ռեսուրսի միավորի գնման գինը u_i-ով: Գնման գների սահմանումը պետք է որոշվի հետևյալ պայմաններից.

1. Գնող ձեռնարկությունը ցանկանում է, որ ռեսուրսների գնման ընդհանուր արժեքը ձգտի նվազագույնի:
2. Վաճառող տնտեսությունը պետք է ստանա յուրաքանչյուր տեսակի ռեսուրսի համար ոչ պակաս, քան այն գումարը, որը կստանար, եթե ինքը այն վերածեր պատրաստի արտադրանքի: Հակառակ դեպքում տնտեսությանը նպատակահարմար չէ ռեսուրսների վաճառքը:

Նկատեք, որ վերը նշված երկու պայմաններն արտահայտում են գնող և վաճառող տնտեսությունների շահերը:

Ռեսուրսների ընդհանուր գինը կորոշվի ռեսուրսների պաշարը (b_i) բազմապատկելով համապատասխան գնման գնով: Ստացված գումարը կներկայացնի երկակի խնդրի նպատակային ֆունկցիան:

$$\varphi=b_1u_1+b_2u_2+\ldots+ b_mu_m \to min \qquad (3)$$

Ելնելով երկրորդ պայմանից, կազմենք սահմանափակումների համակարգը, հետևյալ դատողությամբ: Մեկ միավորի առաջին արտադրատեսակի վրա առաջին տեսակի ռեսուրսի ծախսը կազմում է a_{11}

միավոր, որը գնվում է u_1 գնով, երկրորդ ռեսուրսի ծախսը՝ a_{21} միավոր u_2 գնով և այլն, m-րդ ռեսուրսի ծախսը՝ a_{m1} միավոր u_m գնով: Ռեսուրսների այն քանակը, որը ծախսվում է մեկ միավոր առաջին արտադրատեսակի արտադրության վրա, անհրաժեշտ է, որ տնտեսությունը վաճառի $a_{11}u_1+a_{21}u_1+\ldots +a_{m1}u_m$ գնով, որը պետք է լինի ոչ պակաս, քան այդ արտադրատեսակի մեկ միավորի արժեքը՝ p_1: Ստացվում է առաջին սահմանափակումը:

$$a_{11}u_1+a_{21}u_2+\ldots +a_{m1}u_m \ge p_1 \qquad (4)$$

Նույն դատողությամբ, կազմելով հարաբերակցություն մյուս արտադրանքների վերաբերյալ, կստանանք սահմանափակումների հետևյալ համակարգը.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m &\ge p_1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m &\ge p_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m &\ge p_n \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Քանի որ գները բացասական չեն կարող լինել, ուստի

$$u_1\ge0,\ u_2\ge0,\ \ldots,\ u_m\ge0, \qquad (6)$$

Այսպիսով երկակի խնդիրը ստացանք (3), (5), (6) տեսքով:

Ընթերցողը կարող է համոզվել (1) - (2) և (3), (5), (6) խնդիրների փոխադարձ երկակի լինելու մեջ, եթե ստուգի երկակիության պայմանները:

Երկրորդ օրինակ: Կազմել տրանսպորտային խնդրի երկակին և տալ նրա տնտեսագիտական մեկնաբանումը:

Ենթադրենք՝ պարարտանյութ մատակարարող որևէ կազմակերպություն ունի երեք առաքող և չորս գյուղացիական համայնքներ, ուր պետք է կատարի վաճառք: Կազմակերպությանը հայտնի է պարարտանյութի քանակը ըստ առաքող կետերի և սպառողների նվազագույն պահանջի, ինչպես նաև մեկ պարկ պարարտանյութի տեղափոխման ծախսը՝ յուրաքանչյուր առաքող կետից մինչև ցանկացած սպառողը: Խնդրի տվյալները բերենք աղյուսակի տեսքով:

Աղյուսակ 1

Առաքող կետերը	Գյուղացիական համայնքներ				Առաքող կետերում պարարտանյութերի քանակը
	I	II	III	IV	
Ա	$C_{11}=2$	$C_{12}=5$	$C_{13}=1$	$C_{14}=3$	1700
Բ	$C_{21}=6$	$C_{22}=4$	$C_{23}=3$	$C_{24}=2$	1100
Գ	$C_{31}=3$	$C_{32}=2$	$C_{33}=5$	$C_{34}=4$	1400
սպառողի պահանջը (պարկ)	800	1000	1500	900	4200

Պահանջվում է կազմակերպել պարարտանյութի տեղափոխումը այնպես, որ տեղափոխումների համար կատարվող ընդհանուր ծախսը լինի նվազագույնը:

Ուղիղ խնդրի մաթեմատիկական գրառումը կլինի.

$$f=2x_{11}+5x_{12}+x_{13}+3x_{14}+6x_{21}+4x_{22}+3x_{23}+2x_{24}+3x_{31}+2x_{32}+5x_{33}+4x_{34}\to min \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &\le 1700 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &\le 1100 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &\le 1400 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31} &\ge 800 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} &\ge 1000 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} &\ge 1500 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34} &\ge 900 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$x_{ij}\ge 0, \left(i=\overline{1,3};\ i=\overline{1,4}\right), \qquad (9)$$

որտեղ x_{ij}-ն i-րդ առաքող կետից j-րդ գյուղացիական համայնքը տեղափոխվող պարարտանյութի քանակն է պարկերով:

Այժմ ձևակերպենք երկակի խնդիրը: Ենթադրենք, պարարտանյութ առաքող կազմակերպությունը, տեղափոխման գործը պայմանավորվում

է հանձնարարել մեկ այլ տրանսպորտային ձեռնարկության, պայմանով, որ տեղափոխումն իրականացնելու համար պահանջվող ծախսերը, ինչ-որ իմաստով, լինեն սկզբնական կազմակերպության համար ընդունելի: Մինչդեռ, տրանսպորտային ձեռնարկությունը, ծանոթանալով պատվիրատուի պահանջներին, առաջարկում է վարձատրման հետևյալ կարգը: Գնել առաքման կետերում եղած պարարտանյութը՝ վաճառման կետերում այն վերավաճառելու պայմանով, այնպես որ վաճառքի և գնման գների տարբերությունից ստացված գումարը համարվի տրանսպորտային ծառայության վարձ:

Այս պայմաններով առաջանում է հետևյալ խնդիրը:

Ինչպիսի՞ գնման և վաճառքի ընդունելի գներ սահմանել, որ առաջարկություն չլինի սկզբնական կազմակերպության կողմից և, որ վերավաճառքի ու գնման գների տարբերությունից ստացված ընդհանուր տրանսպորտային վարձը լինի առավելագույնը՝ վերավաճառող տնտեսության համար:

Երկակի խնդրի մաթեմատիկական գրառումը (մոդելը) կատարելու համար նշանակենք i-րդ առաքման կետում մեկ պարկ պարարտանյութի գնման գինը u_i-ով (i=1,2,3), j-րդ (j=1,2,3,4) վաճառման կետում՝ v_j-ով, իսկ վերավաճառման և գնման գների տարբերությունից ստացվող երաշխավորված վարձը՝ φ-ով: Կստանանք.

$$\varphi=800v_1+1000v_2+1500v_3+900v_4-1700u_1-1100u_2-1400u_3\to max \qquad (10)$$

Նկատենք նաև, որ որպեսզի գնման և վերավաճառքի սահմանված գները լինեն ընդունելի, բնական է պահանջել, որ j-րդ կետում վերավաճառքի v_j-ն i-րդ առաքման կետում u_i գնման գների տարբերությունը չգերազանցի i-րդ առաքման կետից j-րդ վաճառման կետը մեկ պարկ պարարտանյութ տեղափոխելու c_{ij} տարիֆային տրանսպորտային ծախսը:

Կստանանք հետևյալ համակարգը՝

$$v_j-u_i\le c_{ij}, \left(i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4}\right) \qquad (11)$$

Եթե նկատի ունենանք, որ տրանսպորտային ձեռնարկության համար գնման գինը կարելի է մեկնաբանել նաև որպես վաճառքի գին՝ վերցրած բացասական նշանով, ապա (11)-ը կարելի է ներկայացնել $v_j+z_i\le c_{ij}$ տեսքով, որտեղ $z_j=-u_i$: Հաշվի առնելով այդ ձևափոխությունը, երկակի խնդրի սահմանափակումների համակարգը գրենք, ելնելով խնդրի տվյալներից.

$$
\left.\begin{array}{ll}
v_1+z_1\le 2 & v_3+z_1\le 1\\
v_1+z_2\le 6 & v_3+z_2\le 3\\
v_1+z_3\le 3 & v_3+z_3\le 5\\
v_2+z_1\le 5 & v_4+z_1\le 3\\
v_2+z_2\le 4 & v_4+z_2\le 2\\
v_2+z_3\le 2 & v_4+z_3\le 4
\end{array}\right\} \quad (12)
$$

$$z_1\le 0,\ z_2\le 0,\ z_3\le 0,\ v_1\ge 0,\ v_2\ge 0,\ v_3\ge 0,\ v_4\ge 0, \quad (13)$$

Ընթերցողին թողնենք համոզվել ... (7)-(9) և (10), (12), (13) խնդիրները փոխադարձ երկակի են:

Գլուխ 7. Տրանսպորտային խնդրի լուծումը

§30. Տրանսպորտային խնդրի լուծման ալգորիթմը

Տրանսպորտային խնդիրը (տես §10), ինչպես նաև գծային ծրագրավորման այլ խնդիրները, կարելի է լուծել սիմպլեքս մեթոդով: Սակայն, կախված տրանսպորտային խնդրի սահմանափակումների համակարգի հատուկ կառուցվածքից, սիմպլեքս մեթոդը նպատակահարմար չէ կիրառել այն տեսքով, ինչպես նկարագրվել է §20–ում: Մենք կբերենք հայտնի մեկ այլ եղանակ, որը սիմպլեքս մեթոդի ինչ-որ տարբերակն է՝ հատուկ հարմարեցված հենց այդ խնդրին:

Նկարագրենք այդ մեթոդը՝ հետևյալ ալգորիթմով.

Առաջին քայլ: Գտնել սկզբնական որևէ թույլատրելի լուծում՝ հյուսիս-արևմտյան կամ ամենաքիչ ծախսումների մեթոդով.

Երկրորդ քայլ: Ստուգել այդ լուծման օպտիմալությունը՝ պոտենցիալների կամ բաշխական մեթոդով.

Երրորդ քայլ: Եթե տվյալ լուծումը օպտիմալ չէ, ապա անցնել մեկ այլ լուծման՝ շղթա (ցիկլ) կազմելու մեթոդով

Չորրորդ քայլ: Անցնել երկրորդ քայլին:

§31 Տրանսպորտային խնդրում հենքի փոփոխականների քանակը

Տրանսպորտային խնդրի լուծման ընթացքում կարևոր նշանակություն ունի հենքում փոփոխականների քանակի սահմանումը:

Ապացուցենք, որ տրանսպորտային խնդրում հենքի փոփոխականների քանակը m+n–1 է, որտեղ m-ը և n-ը համապատասխանաբար առաքող և սպառող կետերի քանակն է: Ապացուցման համար օգտվենք տրանսպորտային խնդրի սահմանափակումների համակարգից.

$$
\left.\begin{array}{l}
x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1\\
x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2\\
\text{------------------}\\
x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m
\end{array}\right\} \quad (1)
$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2 \\ \text{-------------------------} \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Ցույց տանք, որ (1) և (2) համակարգերը կարելի է լուծել նրա m+n-1 փոփոխականների նկատմամբ, որը կհամարվի նաև վերը պնդման ապացույցը: Այդ նպատակով (1) համակարգից, բացի առաջին հավասարումից, որոշենք x_{i1} $(i=\overline{2,m})$ փոփոխականները: Կստանանք m-1 հավասարումներից կազմված հետևյալ համակարգը.

$$x_{i1}=a_i-x_{i2}-\cdots-x_{in} \qquad (3)$$

Այժմ (2) համակարգից, բացի առաջին հավասարումից, որոշենք x_{1j} $(i=\overline{2,n})$ փոփոխականները: Կստանանք հետևյալ համակարգը կազմված n-1 հավասարումներից.

$$x_{1j}=b_j-x_{2j}-\cdots-x_{mj}: \qquad (4)$$

(1), (2) համակարգերի առաջին հավասարումներից որոշենք x_{11}-ը և ցույց տանք, որ նրանք ններն են:

$$x_{11}=a_1-x_{12}-x_{13}-\cdots-x_{1n}, \qquad (5)$$

$$x_{11}=b_1-x_{21}-x_{31}-\cdots-x_{m1}: \qquad (6)$$

Տեղադրենք (4)-ից x_{1j}-ի արժեքները (5)-ի մեջ, իսկ (3)-ից x_{i1}-ի արժեքները (6)-ի մեջ: x_{11}-ի համար կստացվեն հետևյալ արտահայտությունները`

$$x_{11}=a_1-(b_2-x_{22}-\cdots-x_{m2})-\cdots-(b_n-x_{2n}-\cdots-x_{mn})=a_1-b_2-\cdots-b_n-\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{m}x_{ij},$$

$$x_{11}=b_1-(a_2-x_{22}-\cdots-x_{2n})-\cdots-(a_m-x_{m2}-\cdots-x_{mn})=b_1-a_2-\cdots-a_m-\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{m}x_{ij}:$$

Վերջին երկու արտահայտությունների աջ մասերի հավասարությունը բխում է նրանց ազատ անդամների նույնը լինելուց ևստացվում է տրանսպորտային խնդրի փակ լինելու պայմանից:

Այսպիսով, (1) և (2) համակարգերի առաջին հավասարումներից որոշված արտահայտությունները համընկնում են, հետևաբար դրանցից մեկը մյուսի հետևանքն է: Ստացվում է, որ (1) և (2) համակարգերը կարելի է լուծել (m-1)+(n-1)+1=m+n-1 փոփոխականների նկատմամբ, որով ապացուցվում է սկզբնական պնդումը:

§ 32 Սկզբնական հենքի գտնելը

Ինչպես նշվել է խնդրի լուծման ալգորիթմում, սկզբնական թույլատրելի լուծումը կարելի է գտնել հյուսիս-արևմտյան անկյան կամ ամենաքիչ ծախսումների մեթոդով:

Նկարագրենք հյուսիս-արևմտյան անկյան մեթոդը: Ենթադրենք, տրված են երեք առաքող և չորս սպառող կետեր: Առաքող` $A_1$, $A_2$, $A_3$ կետերում տեղավորված են $a_1, a_2, a_3$ բեռներ, իսկ սպառող` B_1, B_2, B_3, B_4 կետերում պահանջվում է` $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$: Տրված է նաև խնդրի փակ լինելու պայմանը` $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3+b_4$: Տեղադրենք հայտնի մեծությունները հետևյալ աղյուսակում

Աղյուսակ 1

Սպառող / Առաքող	B_1	B_2	*B3*	*B4*	*Առաքման կետերում պաշարը*
A_1	b_1	a_1-b_1	*0*	*0*	a_1
A_2	0	$b_2+b_1-a_1$	$a_2+a_1-b_2-b_1$	*0*	a_2
A_3	0	0	$b_3+b_2+b_1-a_2-b_1$	*b4*	a_3
Սպառողների պահանջը	b_1	b_2	*b3*	*b4*	

Աղյուսակի առաջին վանդակը (հյուսիս-արևմտյան անկյան մեթոդով) լրացնելու համար ընտրում ենք a_1 և b_1 թվերից փոքրը՝

$$x_{11} = \min(a_1, b_1)$$

Եթե $x_{11} - a_1$, ապա այդ վանդակում գրում ենք a_1, իսկ այդ վանդակով անցնող տողի մնացած վանդակներում՝ զրոներ:

Եթե $x_{11} = b_1$, ապա այդ վանդակում գրում ենք b_1, իսկ այդ վանդակով անցնող սյան մնացած վանդակներում՝ զրոներ: Որոշակիության համար ենթադրենք min $(a_1, b_1) = b_1$: Սա նշանակում է, որ $x_{11} = b_1$, $x_{21} = 0$, $x_{31} = 0$:

x_{12}-ի արժեքը գտնելու համար ընտրում ենք b_2-ի և $a_1 - b_1$ թվերից փոքրը: Որոշակիության համար ենթադրենք

$\min(b_2,\ a_1 - b_1) = a_1 - b_1$: Սա կնշանակի, որ $x_{12} = a_1 - b_1$, $x_{13} = 0$, $x_{14} = 0$:

Այնուհետև, վարվելով նույն ձևով, լրացնում ենք աղյուսակի մնացած վանդակները, բացի վերջինից, նկատի ունենալով հետևյալը՝

$$x_{22} = \min(b_2 - (a_1 - b_1); a_2) = b_2 + b_1 - a_1; \qquad x_{32} = 0$$

$$x_{23} = \min(b_3; \quad a_2 - (b_2 + b_1 - a_1)) = a_2 + a_1 - b_2 - b_1; \qquad x_{24} = 0$$

$$x_{33} = \min(b_3 - (a_2 + a_1 - b_2 - b_1); a_3) = b_3 + b_2 + b_1 - a_2 - a_1:$$

Նախքան վերջին x_{34} փոփոխականին համապատասխանող վանդակը լրացնելը, նկատենք, որ A3 առաքող կետում բեռի քանակը մնացել է $a_3 - (b_3 + b_2 + b_1 - a_2 - a_1)$, իսկ B4 սպառողը առայժմ ոչինչ չի ստացել: Ցույց տանք, որ A3 կետում մնացած բեռի քանակը հավասար է B4- ի պահանջին:

$$b_4 = a_3 - (b_3 + b_2 + b_1 - a_2 - a_1):$$

Հեշտ է նկատել, որ դա բխում է խնդրի փակ լինելու պայմանից՝ $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$: Հետևաբար վերջին վանդակում կարելի է գրել b4 (x_{34}=b4): Այսպիսով՝ ստացվում է թույլատրելի հենքային (բազիսային) լուծումը, որտեղ x11, x12, x22, x33 և x34 փոփոխականները կոչվում են հենքի, իսկ մնացածը՝ x13= x14= x21= x24= x31= x32= 0 կոչվում են՝ ազատ: Նկատենք, որ հենքի փոփոխականների քանակը բավարարում է m+n-1 պայմանին (3+4-1)=6:

Օրինակ: Ենթադրենք առաքվող կետերում տեղավորված բեռներն են $a_1 = 30$, $a_2 = 40$, $a_3 = 20$, սպառողների պահանջն է համապատասխանաբար՝ $b_1 = 10$, $b_2 = 35$, $b_3 = 15$, $b_4 = 30$:

Ելնելով այս տվյալներից, կազմենք աղյուսակ:

Աղյուսակ 2

Սպառողներ / Առաքողներ	B_1	B_2	B_3	B_4	Առաքման կետերում բեռների պաշարը
A_1	10	20	0	0	30
A_2	0	15	15	10	40
A_3	0	0	0	20	20
Սպառողների պահանջը	10	35	15	30	90

Աղյուսակը լրացնում ենք ելնելով հետևյալ դատողություններից.

$$x_{11} = \min(10;30) = 10; \quad x_{21} = 0; x_{31} = 0$$

$$x_{12} = \min(35;20) = 20; \quad x_{13} = 0; x_{14} = 0$$

$$x_{22} = \min(15;40) = 15; \quad x_{32} = 0$$

$$x_{23} = \min(15;25) = 15; \quad x_{33} = 0$$

$$x_{24} = \min(30;10) = 10$$

$$x_{34} = 20:$$

Աղյուսակից երևում է, որ հենքի փոփոխականներն են x_{11},x_{12}, x_{22}, x_{23} ,x_{24} և x_{34}, իսկ ազատ փոփոխականները՝ x_{13}= x_{14}= x_{21}=x_{31}= =x_{32}=x_{34}=0:

Ամենաքիչ ծախսումների մեթոդով խնդրի սկզբնական լուծումը գտնելիս վարվում ենք նույն ձևով, ինչպես նշվեց վերը, միայն թե սկզբից լրացնում ենք այն վանդակը, որտեղ ծախսը ամենաքիչն է:

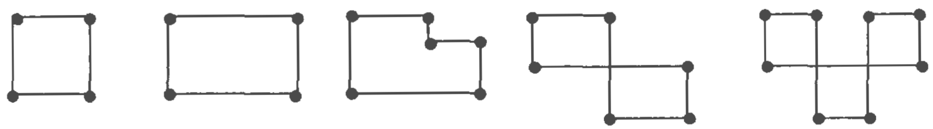
§ 33 Տեղափոխումների մատրիցի մեջ շղթա հասկացությունը

Տեղափոխումների մատրիցի մեջ շղթա կոչվում է այն բեկյալը, որի գագաթները ընկած են նրա տարրերի վրա, իսկ կողմերը, որոնք կոչվում են օղակներ, ընկած են մատրիցի տողերում կամ սյուներում: Ակնհայտ է, որ երկու հարևան օղակները փոխուղղահայաց են, հետևաբար մի օղակից հարևան օղակին անցնելիս կատարվում է պտույտ տվյալ գագաթի շուրջը $\frac{\pi}{2}$ կամ $-\frac{\pi}{2}$ անկյունով, կախված այն բանից պտույտը ժամսլաքի ուղղությամբ է թե՝ հակառակ:

Սահմանում 1: Տեղափոխումների մատրիցի մեջ շղթան կոչվում է հաշվարկային, եթե այն փակ է, և գագաթներից մեկը ընկած է ազատ, իսկ մնացածը՝ հենքի փոփոխականների վրա (աղյուսակի վանդակներում):

Սահմանում 2: Յուրաքանչյուր ազատ փոփոխականի համար գոյություն ունի հաշվարկային շղթա, այն էլ միակը:

Հաշվարկային շղթաները ունենում են հիմնականում հետևյալ երկրաչափական պատկերների տեսքերը՝



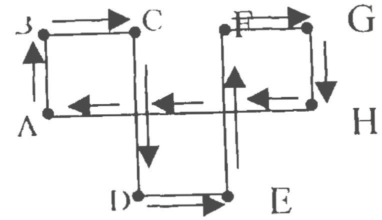
Շղթաների գագաթները ընդգծված են:

Սահմանում 3: Հաշվարկային շղթայի յուրաքանչյուր գագաթից դուրս է գալիս երկու օղակ:

Թեորեմ 1 : Հաշվարկային շղթայի գագաթների քանակը զույգ է:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ հաշվարկային շղթան շրջանցելիս, յուրաքանչյուր գագաթի շուրջը կատարվում է պտույտ $\frac{\pi}{2}$ անկյունով: Ընդունենք ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ գագաթի շուրջը կատարած պտույտը $-\frac{\pi}{2}$, իսկ հակառակ ուղղությամբ՝ $\frac{\pi}{2}$ անկյուն:

Օրինակ:



Եթե շղթան շրջանցենք ABCDEFGH ուղղությամբ , ապա A,B,C, F,G,H գագաթների մոտ շրջանցումը կատարվում է ժամսլաքի, իսկ D և E կետերում՝ հակառակ ուղղությամբ:

Նշանակենք m-ով շղթայի այն գագագթների քանակը, ուր պտույտը կատարվում է դրական անկյունով, իսկ n-_ով՝ բացասական: Պարզ է, որ շղթայի բոլոր գագաթների թիվը կլինի m+n: Ցույց տանք, որ m+n-ը զույգ է:

Քանի որ հաշվարկային շղթան փակ է, իսկ շրջանցումը կատարվում է բոլոր գագաթներով, ուստի անկյունների ընդհանուր գումարը կլինի 2π -ի պատիկ՝ 2πk (k>0 և ամբողջ թիվ է): Մյուս կողմից՝ դրական անկյունների գումարը կլինի $\frac{\pi}{2}m$, իսկ բացասականներինը՝ $-\frac{\pi}{2}n$: Այնպես որ՝ $\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{2}n=2\pi k$: Վերջինը պարզեցնելուց հետո կստանանք՝ $m-n=2k$:

Սա նշանակում է, որ $(m-n)$-ը զույգ է: Եթե $(m-n)$-ին գումարենք $2n$ զույգ թիվը, ապա այն կմնա զույգ.

$$m-n+2n=m+n$$

Այսպիսով՝ $(m+n)$-ը զույգ է:

Թեորեմ 2: Հաշվարկային շղթայի տողերով կամ սյուներով տեղավորված գագաթների քանակը զույգ է: (Ապացույցը չի բերվում):

Ունենալով շղթայի գաղափարը բերենք տրանսպորտային խնդրի լուծման օպտիմալության ստուգման բաշխական մեթոդը:

§ 34 Բաշխական մեթոդ

Այս մեթոդի էությունն այն է, որ յուրաքանչյուր ազատ փոփոխականի համար կազմվում է հաշվարկային շղթա: Շղթայի գագաթներում տեղադրվում են ծախսերի մատրիցի տարրերը: Գագաթներին վերագրվում են նշաններ: Այն գագաթը, որը համապատասխանում է ազատ փոփոխականին՝ համարվում է դրական, մնացած գագաթների նշանները փոխվում են շրջանցելով շղթայի բոլոր գագաթները: Գագաթների նշանները վերագրվում են ծախսերի մատրիցի տարրերին և հաշվարկվում նրանց հանրահաշվական գումարը: Այդ գումարը կոչվում է շղթայի գնահատական:

Եթե բոլոր հաշվարկային շղթաների գնահատականները ոչ բացասական են, ապա տվյալ լուծումը օպտիմալ է: Օպտիմալության այս հայտանիշը ուժի մեջ է եթե լուծվում է մինիմումի խնդիր: Մաքսիմումի խնդիր լուծելիս օպտիմալ լուծում կստացվի, եթե բոլոր հաշվարկային շղթաների գնահատականները ոչ դրական են:

Օրինակ: Ենթադրենք տրանսպորտային խնդրի տվյալներն են՝

$$a_1 = 20 \qquad b_1=10$$
$$a_2 = 60 \qquad b_2=30 \qquad c_{ij}=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$
$$a_3 = 50 \qquad b_3=70$$
$$b_4=20$$

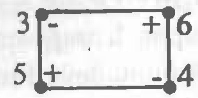
Խնդրի տվյալները լրացնենք աղյուսակում և հյուսիս-արևմտյան անկյան եղանակով ստանանք որևէ թույլատրելի լուծում: Այն կունենա հետևյալ տեսքը.

Աղյուսակ 3

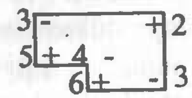
Սպառող / Առաքող	B_1	B_2	B_3	B_4	Առաքվող բեռները
A_1	7 10	3 10	6 0	2 0	20
A_2	2 0	5 20	4 40	1 0	60
A_3	3 0	2 0	6 30	3 20	50
Սպառողների պահանջը	10	30	70	20	130

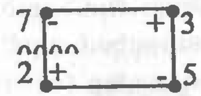
Այս աղյուսակին համապատասխանող լուծումն է $X_{11}=10$, $X_{12}=10$, $X_{22}=20$, $X_{23}=40$, $X_{33}=30$, $X_{34}=20$, որոնք հենքի փոփոխականներն են, իսկ՝ $X_{13}= X_{14}= X_{21}= X_{24}= X_{31}= X_{32}=0$՝ ազատ: Ընդհանուր ծախսը կլինի 600:

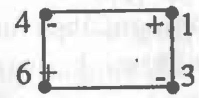
Այս լուծման օպտիմալությունը բաշխական մեթոդով ստուգելու համար կազմենք ազատ փոփոխականների հաշվարկային շղթաները և հաշվենք նրանց գնահատականները:

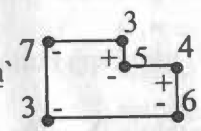
X_{13}-ի համար՝  $6-4+5-3=4>0$,

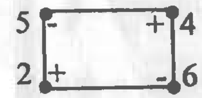
X_{14}-ի շղթան, որը ցույց է տրված աղյուսակ 3-ում գծիկներով կլինի՝

 $2-3+6-4+5-3=3>0$,

X_{21}-ը՝  $2-7+3-5=-7<0$,

X_{24}-ը՝  $1-3+6-4=0$.

X_{31}-ը՝  $3-7+3-5+4-6=-8<0$,

X_{32}-ը՝  $2-5+4-6=-5<0$:

Քանի որ ցիկլերում կան բացասական գնահատականներ, ուստի տվյալ լուծումը օպտիմալ չէ:

§ 35 Պոտենցիալների մեթոդ

Այս մեթոդը, ինչպես բաշխականը, հնարավորություն է տալիս ստուգելու սկզբնական (կամ ցանկացած) բազիսային լուծման օպտիմալությունը: Բերենք մեթոդի ալգորիթմը առանց ապացույցի:

Առաջին քայլ: Յուրաքանչյուր բազիսային փոփոխականի համար կազմենք հավասարում հետևյալ տեսքով.

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}, (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}), \qquad (1)$$

որտեղ α_i և β_j մեծությունները առաքող և սպառող կետերի պայմանական պոտենցիալներն են, իսկ c_{ij}-ն ծախսերի մատրիցի i-րդ տողի j-րդ սյան համապատասխան ամղամն է:

Քանի որ հենքի փոփոխականների թիվը հավասար է m+n-1-ի, ուստի (1)-ը իրենից կներկայացնի m+n հավասարումներից m+n-1 անհայտներով գծային հավասարումների համակարգ՝ α_i և β_j անհայտների նկատմամբ: Այդպիսի համակարգերը փակ չեն և ընդհանուր դեպքում ունեն անթիվ բազմությամբ լուծումներ: Որևէ լուծում գտնելու համար, անհայտներից մեկին տալիս ենք կամայական արժեք: Ընդունված է առաջին անհայտ մեծությանը տալ զրո արժեք ($\alpha_1=0$): Մնացած անհայտների արժեքները կորոշվեն (1)-ից՝ միարժեքորեն:

Երկրորդ քայլ: Ունենալով α_i և β_j մեծությունների արժեքները, ազատ փոփոխականների համար անհրաժեշտ է հաշվել կեղծ ծախսերը՝ հետևյալ տեսքով.

$$c'_{pq} = \alpha_p + \beta_q, \qquad (2)$$

որտեղ p-ն և q-ն ազատ անհայտների տողերի և սյուների համարներն են:

Երրորդ քայլ: Ազատ փոփոխականների համար հաշվել ծախսերի և կեղծ ծախսերի տարբերությունը՝ հետևյալ տեսքով.

$$s_{pq} = c_{pq} - c'_{pq} \qquad (3)$$

Եթե (3) արտահայտությամբ որոշվող տարբերությունները ոչ բացասական են, ապա տվյալ լուծումը օպտիմալ է, պայմանով, որ խնդիրը դրված է մինիմումը գտնելու վերաբերյալ: Եթե խնդրում պայման է դրված գտնել նպատակային ֆունկցիայի մաքսիմում արժեքը, ապա օպտիմալության հայտանիշը կբավարարվի, երբ (3) բանաձևով որոշվող տարբերությունները լինեն ոչ դրական:

Օրինակ: Պոտենցիալների մեթոդով ստուգել խնդրի որևէ

թույլատրելի լուծման օպտիմալությունը:

Ստուգումը կատարենք նախորդ պարագրաֆում ստացված թույլատրելի լուծման համար (աղյուսակ 3):

Առաջին քայլում հենքի փոփոխականների համար կազմենք համակարգ և ստանանք նրա լուծումը:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1+\beta_1=7 & \alpha_1=0 & \beta_1=7 \\
\alpha_1+\beta_2=3 & & \beta_2=3 \\
\alpha_2+\beta_2=5 & \alpha_2=2 & \\
\alpha_2+\beta_3=4 & & \beta_3=2 \\
\alpha_3+\beta_3=6 & \alpha_3=4 & \\
\alpha_3+\beta_4=3 & & \beta_4=-1
\end{array}$$

Երկրորդ քայլում ազատ փոփոխականների համար հաշվենք կեղծ ծախսումները:

$$\begin{aligned}
c'_{13}&=\alpha_1+\beta_3=0+2=2\\
c'_{14}&=\alpha_1+\beta_4=0+(-1)=-1\\
c'_{21}&=\alpha_2+\beta_1=2+7=9\\
c'_{24}&=\alpha_2+\beta_4=2+(-1)=1\\
c'_{31}&=\alpha_3+\beta_1=4+7=11\\
c'_{32}&=\alpha_3+\beta_2=4+3=7
\end{aligned}$$

Երրորդ քայլում հաշվենք ծախսերի և կեղծ ծախսերի տարբերությունները՝ ազատ փոփոխականների համար:

$$\begin{aligned}
s_{13}&=c_{13}-c'_{13}=6-2=4\\
s_{14}&=c_{14}-c'_{14}=2-(-1)=3\\
s_{21}&=c_{21}-c'_{21}=2-9=-7\\
s_{24}&=c_{24}-c'_{24}=1-1=0\\
s_{31}&=c_{31}-c'_{31}=3-11=-8\\
s_{32}&=c_{32}-c'_{32}=2-7=-5
\end{aligned}$$

Քանի որ այս տարբերությունների թվում կան բացասական մեծություններ, ուստի տվյալ լուծումը օպտիմալ չէ:

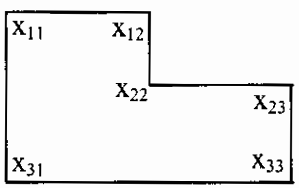
Դիտողություն: Նկատենք, որ այս տարբերությունները, հաշված ազատ փոփոխականների համար նույնն են, ինչ բաշխական մեթոդով կատարած ստուգումներից ստացած շղթայի գնահատականները:

§ 36 Բազիսային մի լուծումից մյուսի անցումը

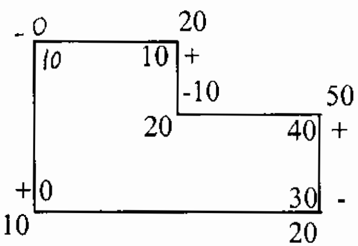
Այժմ պարզենք, թե ինչպես է անցում կատարվում մի բազիսային լուծումից մեկ այլ լուծման: Քանի որ մի լուծումից մեկ այլ բազիսային լուծման անցնելու համար ազատ անհայտներից մեկը պետք է փոխարինել հենքի անհայտով, ուստի առաջին հերթին անհրաժեշտ է պարզել, թե որ անհայտը պետք է բերել հենք: Այդ նպատակով, եթե աշխատում ենք պոտենցիալների մեթոդով, ընտրում ենք բացասական տարբերություններից ամենափոքրը: Ըստ նախորդ պարագրաֆի դա -8-ն է: Այն համապատասխանում է X_{31} ազատ անհայտին, որը և պետք է բերել հենք:

Եթե աշխատում ենք բաշխական մեթոդով, ապա ազատ անհայտը ընտրում ենք շղթաների բացասական գնահատականներից ամենափոքրը:

Որպեսզի պարզենք, թե X_{31}-ի փոխարեն հենքից որ անհայտը դուրս կմղվի, տեղափոխումների մատրիցից օգտվելով կազմում ենք X_{31} ազատ փոփոխականի հաշվարկային շղթան: Ըստ §34-ի աղյուսակ 2-ի X_{31}-ի հաշվարկային շղթան կազմում է X_{31}, X_{11}, X_{12}, X_{22}, X_{23} և X_{33} փոփոխականներից, որը կունենա հետևյալ երկրաչափական գծապատկերի տեսքը:



կամ թվերով՝



Շղթայի գագաթներին վերագրում ենք նշաններ ըստ §34: Ընտրում ենք բացասական գագաթներում գտնվող թվերից փոքրը՝ min(10,20,30)=10: 10-ը համապատասխանում է X_{11} այն հենքի փոփոխականին, որը պետք է դուրս գա հենքից և, հետևաբար, ստանա զրո արժեք: Շղթայի մնացած գագաթներում գտնվող թվերը անհրաժեշտ է փոփոխել այնպես, որ նրա տողերով կամ սյուներով շարժվելիս «հին» (գծագրում՝ ներսի) և «նոր» թվերի գումարը պահպանվի: Ելնելով այդ պայմանից, շղթայում թվերը կձևափոխվեն հետևյալ կերպ. բացասական գագաթներում գտնվող թվերը կպակասեն 10-ով, իսկ դրական գագաթներինը՝ կավելանա 10-ով: Շղթայում այդ թվերը գրված են գծագրից դուրս:

Հաջորդ լուծումը ստանալու համար մնում է §34-ի աղյուսակ 2-ը ձևափոխել այնպես, որ շղթայի «հին» թվերի փոխարեն տեղադրվեն «նոր» թվերը: Այդ ձևափոխությունները կատարելուց հետո կստանանք հետևյալ աղյուսակը.

Աղյուսակ 3

Սպառող / Առաքող	B_1	B_2	B_3	B_4	Առաքվող բեռներ
A_1	7 0	3 20	6 0	2 0	20
A_2	2 0	5 10	4 50	1 0	60
A_3	3 10	2 0	6 20	3 20	50
Սպառողների պահանջը	10	30	70	20	130

Աղյուսակ 3-ին համապատասխանող լուծումը կլինի $x_{12}=20$, $x_{22}=10$, $x_{23}=50$, $x_{31}=10$, $x_{33}=20$, $x_{34}=20$, իսկ ընդհանուր ծախսը՝ 520:

Այսպիսով, ցույց տվեցինք, որ աղյուսակ 2-ի համապատասխան լուծումը օպտիմալ չէ և անցանք մեկ ուրիշ լուծման այնպես, որ ընդհանուր ծախսը նվազեց:

Մի աղյուսակից (լուծումից) մեկ ուրիշի անցումը շարունակում ենք այնքան, քանի դեռ օպտիմալության պայմանը չի բավարարվել:

Դիտողություն 1: Տրանսպորտային խնդրում մի հենքից մյուսին անցնելիս հնարավոր է, որ բացասական գագաթներում գտնվող թվերից փոքրը լինի ոչ միակը: Այս դեպքում որևէ մեկը համարում ենք ազատ փոփոխական, իսկ մնացածը՝ հենքի: Որպեսզի առանձնանա զրո արժեքով հենքի փոփոխականը ազատ փոփոխականներից ընդգծում ենք այն որևէ նշանով: Օրինակ՝ Մ:

Դիտողություն 2: Հաշվարկային շղթա կազմելիս Մ –ը կարող է մասնակցել որպես հենքի փոփոխական (պոտենցիալների մեթոդով աշխատելիս այդ փոփոխականի համար նույնպես կազմեք հավասարում):

Դիտողություն 3: Իրական կյանքում հանդիպում են տրանսպորտային խնդրի այլ դրվածքներ:

Երբ առաքող կետերում բեռների ընդհանուր քանակը գերազանցում է սպառողների պահանջը, կամ հակառակը: Այս դեպքում խնդիրը լուծելիս պետք է ներմուծել ֆիկտիվ սպառող կամ ֆիկտիվ առաքող:

Երբ տեղափոխվող բեռները համասեռ չեն.

Երբ տրանսպորտային միջոցները տարբեր են.

Այսպիսի դեպքերում, խնդիրը լուծելիս, պետք է ցուցաբերել առանձնահատուկ մոտեցում, քանի որ միևնույն բեռը երբեմն հնարավոր չէ տեղափոխել տարբեր տրանսպորտային միջոցներով:

Գրականության ցանկ

1. Հարությունյան Ա. Գ., Սուքիասյան Ս. Ա. Գծային ծրագրավորման մի քանի մեթոդներ և խնդիրներ, Երևան, 1970.
2. Մ. Ա. Սահակյան, Ս. Դ. Սարգսյան, Ֆ. Ծ. Կարապետյան, Մաթեմատիկական ծրագրավորում, Երևան 1983.
3. Մ. Ա. Սահակյան, Հ. Լ. Սարգսյան, Ս. Դ. Սարգսյան, Ռ. Ն. Տոնոյան Տնտեսության վերլուծության, մաթեմատիկական եղանակներ ԷԿԱԳՄԱՀԲ, Երևան 1997.
4. Մելս Սահակյան Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ, գործույթների հետազոտումը տնտեսության կառավարման խնդիրներում, խնդիրներ և վարժություններ ՀՀԳԱԱ «Գիտություն» հրատարակչություն, Երևան 2001.
5. Вентцель Е. С. Элементы динамического программирования. Изд. "Наука", М., 1964.
6. Гасс С. Линейное программирование, М., 1961.
7. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения, изд. "Наука", М., 1971.
8. Данциг Дж. Б. Линейное программирование, его приложения и обощения, Изд. "Прогресс", М., 1973.
9. Заславский Ю. Л. Сборник задач по линейному программированию, Изд. "Наука", М., 1973.
10. Зуховицкий С. И. Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование в экономике, Изд. "Наука", М., 1973.
11. Кантарович Л. В. Горстко А. Б. Оптимальные решения в экономике, Изд. "Наука", М., 1972.
12. Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е. Элементы линейной алгебры и линейного програмирования, Изд. "Наука", М., 1965.
13. Ланге О. Оптимальные решения, Изд. "Прогресс", М.,1967.
14. Полунин И. Ф. Курс математического программирования, Изд. "Высшая школа", Минск, 1975.
15. Б. А. Шахназарян Математические методы и модели анализа и решения в экономике, Изд. "Зангак- 97", Ереван 2001.
16. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования, Изд. "Советское радио", М., 1964

ԱԶԱՏ ԽԱՉԱՏՈՒՐԻ ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ
ДАНИЕЛЯН АЗАТ ХАЧАТУРОВИЧ

ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ
МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ուսումնական ձեռնարկ
Учебное пособие

ԵՐԵՎԱՆ 2003 **ЕРЕВАН**

Ստորագրված է տպագրության 19.11.2003թ.:
Թղթի չափսը 60x84 1/16: 8,5 տպ. մամուլ: 6,8 հրատ. մամուլ
Պատվեր 283 Տպաքանակ 500

Հայկական գյուղատնտեսական ակադեմիայի տպարան Տերյան 74