ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԳՐԱՐԱՅԻՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ռ.Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Հ.Խ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԵՐԵՎԱՆ
ՀԱԱՀ
2013

ՀՏԴ 51(075.8)
ԳՄԴ 22.11 у73
Հ 422

Հաստատված է Հայաստանի ազգային ագրարային համալսարանի գիտական խորհրդի կողմից

Գրախոսներ՝ ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ալ.Խաչատրյան
մ.գ.թ., դոցենտ Ռ.Առաքելյան
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ա.Խաչատրյան
ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ Ս.Համբարձումյան
ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ Ա.Հայրապետյան

Հ 422 Ռ.Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ
Բարձրագույն մաթեմատիկա / Ռ.Մ.Հարությունյան, Հ.Խ.Խաչատրյան.-Եր.: ՀԱԱՀ, 2013. - 96 էջ:

Ձեռնարկը նախատեսված է բակալավրիատի ագրարային, ճարտարագիտական, տեխնոլոգիական և տնտեսագիտական մասնագիտությունների հեռակա ուսուցման I կուրսի ուսանողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև այդ խմբերում դասավանդող դասախոսների համար:

ՀՏԴ 51(075.8)
ԳՄԴ 22.11 у73

ISBN 978-9939-54-614-8

Ներածություն

Մաթեմատիկական մեթոդները ներկայումս լայն կիրառություն են ստացել գիտության, տեխնիկայի և տնտեսության ամենատարբեր խնդիրների լուծման ժամանակ: Այդ մեթոդների նշանակությունը էապես աճել է ժողովրդական տնտեսության բոլոր բնագավառներում՝ հաշվողական տեխնիկայի զանգվածային կիրառության պայմաններում:

Բուհում մաթեմատիկայի դասավանդման նպատակը կայանում է.

1.Համագիտական, համաճարտարագիտական ճյուղերի ուսումնասիրման համար ուսանողներին անհրաժեշտ մաթեմատիկական ապարատի հետ ծանոթացման,

2.Տնտեսագիտական և մասնագիտական, գործնական և տեսական խնդիրների լուծման համար ուսանողների մոտ մաթեմատիկայի և նրա կիրառությունների, ուսումնական գրականությունն ինքնուրույն ուսումնասիրման,

3.Տրամաբանական մտածողության զարգացման, ինչպես նաև մաթեմատիկայի կուլտուրայի, մաթեմատիկական հետազոտություններում հնարքների մշակման, ճարտարագիտական խնդիրների մաթեմատիկական լեզվի փոխադրման, այդ խնդիրների լուծման համար հաշվողական տեխնիկայի օգտագործման ընդհանուր մակարդակի բարձրացման մեջ:

Բարձրագույն մաթեմատիկայի ընդհանուր դասընթացը, որն ուսումնասիրվում է ճարտարագիտական, տեխնոլոգիական, տնտեսագիտական, ագրոնոմիական և անասնաբուժական մասնագիտությունների հեռակա ուսուցման ուսանողների կողմից, բաղկացած է՝ անալիտիկ երկրաչափություն, գծային հանրահաշվի տարրեր, մաթեմատիկական անալիզ, դիֆերենցիալ հավասարումներ, հավանականությունների տեսություն և մաթեմատիկական վիճակագրություն առարկաներից:

Ուսումնական նյութի բաշխումն ըստ կիսամյակների կարող է փոփոխություն կրել կախված մասնագիտություններից:

Ուսանողի աշխատանքը ուսումնական նյութի վրա բաղկացած է հետևյալ տարրերից՝

ա) նյութի ուսումնասիրում դասագրքերով,

բ) խնդիրների լուծում,

գ) ստուգողական աշխատանքների կատարում:

Սույն ձեռնարկում բարձրագույն մաթեմատիկայի ամբողջ դասընթացը տրոհված է բաժինների, իսկ բաժինները՝ համապատասխան թեմաների: Յուրաքանչյուր թեմայի սկզբում տրվում են դասագրքերի այն գլուխներն ու պարագրաֆները, որոնք ուսանողը պետք է կարդա, ինչպես նաև խնդիրները, որոնք անհրաժեշտ է լուծել: Ձեռնարկն ընդգրկում է ստուգողական աշխատանքների առաջադրանքներ:

Բարձրագույն մաթեմատիկայի ուսումնասիրման մեթոդիկան հեռակա ուսուցման ուսանողների կողմից

Հեռակա բաժնի ուսանողների ուսուցման հիմնական ձևը հանդիսանում է ուսումնական նյութի վրա ինքնուրույն աշխատանքը: Հեռակա ուսուցման ուսանողներին օգնելու համար բուհը կազմակերպում է դասախոսությունների ընթերցում և գործնական պարապմունքներ: Բացի դրանից, ուսանողը կարող է դիմել դասախոսին գրավոր աշխատանքին վերաբերող հարցերով: Ուսանողին ցուցումներ տրվում են նաև գրավոր աշխատանքի ստուգման ժամանակ՝ գրախոսության ընթացքում: Սակայն ուսանողը պետք է հիշի, որ միայն համակարգված, ինքնուրույն և համառ աշխատանքի դեպքում բուհի օգնությունը կլինի արդյունավետ:

Դասագրքի ընթերցանությունը

1. Ուսումնասիրելով նյութն ըստ դասագրքի, անհրաժեշտ է անցնել հաջորդ հարցին՝ միայն նախորդի ճիշտ ընկալելուց հետո, թղթի վրա կատարելով բոլոր հաշվարկները (այդ թվում և նրանք, որոնք իրենց պարզության պատճառով դասագրքում բաց են թողնված), վերարտադրելով դասագրքում եղած գծագրերը:

2. Հատուկ ուշադրություն պետք է դարձնել դասընթացի հիմնական հասկացությունների սահմանումների վրա, որոնք արտացոլում են իրական օբյեկտների և գործընթացների քանակական կողմը կամ տարածական հատկությունները: Առանց դրա անհնար է մաթեմատիկայի արդյունավետ ուսումնասիրությունը: Ուսանողը պետք է մանրակրկիտ վերլուծի այն օրինակները, որոնք պարզաբանում են սահմանումները և կարողանա ինքնուրույն կառուցել նմանատիպ օրինակներ:

3. Անհրաժեշտ է հիշել, որ յուրաքանչյուր թեորեմ բաղկացած է առաջադրությունից և պնդումից: Բոլոր առաջադրությունները անպայման պետք է օգտագործվեն ապացուցման մեջ: Պետք է հստակ պատկերացնել, թե թեորեմի պայմանները ապացուցման ժամանակ որ մասում են օգտագործվել: Օգտակար է կազմել բարդ

թեորեմների ապացուցումների սխեմաները: Շատ թեորեմների ճիշտ ընկալմանը օգնում է մաթեմատիկական օբյեկտների այնպիսի օրինակների վերլուծությունը, որոնք օժտված են, ինչպես նաև օժտված չեն, նշված թեորեմի առաջադրություններում և պնդումներում առկա հատկություններով:

4 . Դասագրքի նյութի ուսումնասիրման ժամանակ օգտակար է այն կոնսպեկտավորել, որտեղ խորհուրդ է տրվում դուրս գրել սահմանումները, թեորեմների ձևակերպումները, բանաձևերը, հավասարումները և այլն: Կոնսպեկտի լուսանցքներում պետք է նշել հարցերը, որոնք առանձնացվում է ուսանողի կողմից դասախոսից խորհրդատվություն ստանալու համար:

5 .Ուսանողի աշխատանքի գրավոր ձևակերպումը բացառիկ կարևոր նշանակություն ունի: Գրառումները պետք է լինեն մաքուր, խնամքով և դասավորված որոշակի կարգով: Ուսումնասիրվող նյութի արտաքին լավ ձևավորումը, ուսանողին կսովորեցնի ոչ միայն աշխատանքի մեջ անհրաժեշտ կարգին, այլև թույլ կտա նրան խուսափել բազմաթիվ սխալներից, որոնք առաջանում են անփույթ, անկանոն գրառումներից:

6 .Հետևությունները, որոնք ստացվում են բանաձևերի տեսքով, խորհուրդ է տրվում կոնսպեկտում ընդգծել կամ շրջագծել, որպեսզի վերընթերցումների ժամանակ նրանք առանձնանան և լավ տպավորվեն:

Խնդիրների լուծումը

1.Դասագրքի ընթերցումը պետք է ուղեկցվի խնդիրների լուծումներով, որի համար խորհուրդ է տրվում հատկացնել առանձին տետր:

2 .Խնդիրների լուծումների ժամանակ, անհրաժեշտ է հիմնավորել լուծման յուրաքանչյուր փուլը, ելնելով դասընթացի տեսական դրույթներից: Եթե ուսանողը տեսնում է խնդրի լուծման մի քանի եղանակ, ապա նա պետք է համեմատի դրանք և ընտրի ամենահարմարը: Օգտակար է մինչև հաշվումները սկսելը կազմել խնդրի լուծման պլանը:

3 .Խնդիրների և վարժությունների լուծումները անհրաժեշտ է շարադրել մանրամասն, ընդ որում խորհուրդ է տրվում օժանդակ հաշվումներն առանձնացնել հիմնականներից: Սխալ գրառումները պետք է չջնջել, չլղոզել, այլ վրան գիծ քաշել: Գծագրերը կարելի է կատարել ձեռքով, բայց խնամքով և տրված պայմաններին համապատասխան: Եթե գծագիրը պահանջում է հատուկ

մանրակրկիտ կատարում, օրինակ, եթե անհրաժեշտ է, հաշվումների միջոցով ստացված լուծումը ստուգել գրաֆիկորեն, ապա պետք է օգտվել քանոնից, փոխադրիչից և նշել մասշտաբը:

4.Յուրաքանչյուր խնդրի լուծում պետք է հասցվի մինչև վերջնական պատասխանը, որը պահանջում է պայմանը, և հնարավորության դեպքում, արտածվի խնդրի լուծմանը վերաբերող բանաձևը ընդհանուր տեսքով: Հետագայում, ստացված բանաձևի մեջ պետք է տեղադրել համապատասխան թվային արժեքները (եթե այդպիսիք կան):

5.Ստացված պատասխանը պետք է ստուգել այն եղանակներով, որոնք բխում են տրված խնդրի էությունից: Եթե, օրինակ, լուծվել է որոշակի ֆիզիկական կամ երկրաչափական բովանդակության խնդիր, ապա օգտակար է, նախ, ստուգել ստացված պատասխանի չափը: Օգտակար է նաև, եթե հնարավոր է, խնդիրը լուծել տարբեր եղանակներով և համեմատել ստացված արդյունքները:

6.Որոշակի դասի խնդիրների լուծումը պետք է շարունակել այնքան, մինչև դրանց լուծելու հնարքներին հստակ տիրապետումը:

Խորհրդատվություն (կոնսուլտացիա)

1.Եթե տեսական նյութի ուսումնասիրման կամ խնդիրների լուծման ժամանակ ուսանողի մոտ առաջանում են հարցեր, որոնց պարզաբանումը ինքնուրույն չի ստացվում (տերմինների անհասկանալիություն, թեորեմների ձևակերպումներ, առանձին խնդիրներ և այլն), նա կարող է դիմել դասախոսին՝ նրանից գրավոր կամ բանավոր խորհրդատվություն ստանալու համար:

2.Իր հարցումներում ուսանողը պետք է հստակ նշի, առկա դժվարությունների բնույթը: Եթե նա չի կարողացել հասկանալ տեսական բացատրությունները կամ թեորեմի ապացուցումը, կամ էլ բանաձևի արտածումը դասագրքով, ապա պետք է նշի դժվարություն հարուցած առկա հարցը: Եթե ուսանողը դժվարանում է խնդիր լուծելու ժամանակ, ապա պետք է նշի այդ դժվարության բնույթը, բերի առաջարկվող լուծման պլանը:

Ստուգողական աշխատանքներ

1.Մաթեմատիկայի ընդհանուր դասընթացի ուսումնասիրության ընթացքում ուսանողը պետք է կատարի մի շարք ստուգողական աշխատանքներ, որոնց գլխավոր նպատակը ուսանողին դասընթացի յուրացման մեջ օգնություն ցուցաբերելն է: Այդ աշխատանքների գրախոսությունները ուսանողին թույլ են տալիս դատելու իր կողմից համապատասխան բաժնի յուրացման աստիճանի մասին, ցույց են տալիս նրա մոտ եղած բացերը, օգնում են ձևավորելու դասախոսի հետ խորհրդատվության հարցերը:

2.Մինչ ստուգողական աշխատանքը կատարելը, անհրաժեշտ է նախապես լուծել տվյալ նյութին վերաբերող բավականաչափ խնդիրներ: Փորձը ցույց է տալիս, որ այս պահանջի չկատարումը հաճախ պատճառ է հանդիսանում ստուգողական աշխատանքի այս կամ խնդիրը լուծել չկարողանալուն:

3.Ստուգողական աշխատանքները պետք է կատարվեն ինքնուրույն: Որպես օրենք, աշխատանքների ոչ ինքնուրույն կատարումը ուսանողին զրկում է տվյալ նյութը յուրացնելու հնարավորությունից և արդյունքում նա կարող է բանավոր քննությանը ներկայանալ անպատրաստ:

4. Գրաքննված աշխատանքները բոլոր ուղղումներով և լրացումներով պետք է պահպանել: Մինչ դասախոսի կողմից ստուգողական աշխատանքի դրական «ստուգված է» գնահատական ստանալը, ուսանողը այդ առարկայից քննության չի թույլատրվում:

Դասախոսություններ և գործնական աշխատանքներ

Քննաշրջանում հեռակա ուսուցման ուսանողների համար կազմակերպվում են դասախոսություններ և գործնական աշխատանքներ: Դրանք հիմնականում կրում են ակնարկային բնույթ: Դրանց նպատակը դասընթացի համապատասխան բաժնի ընդհանուր կառուցվածքի ուրվագծելն է, կարևորագույն փաստերի ընդգծումը, գլխավոր գործնական կիրառությունների նախանշումը: Հնարավոր է նաև ծրագրի առանձին հարցերի քննարկում, որոնք բացակայում են կամ ոչ այնքան լրիվությամբ են տրված առաջարկվող ձեռնարկներում:

I Բաժին
Անալիտիկ երկրաչափություն և գծային հանրահաշիվ

Թեմա 1. *Կոորդինատական համակարգ: Գծերը և նրանց հավասարումները*

Դասագիրք՝ [1] մաս I, գլուխ I §§$1-4$, վարժություններ $1,3,8,11$, §5, վարժություններ $15,18$, §6, վարժություններ $22,23,26,27,28,$ §§$7-9$ վարժություններ $12,33,$ §10 վարժություններ $30-32$, §11 վարժություններ $36-37$:

Ցուցումներ

Անալիտիկ երկրաչափության մեջ յուրաքանչյուր գիծ դիտարկվում է որպես կետերի բազմություն, որոնք օժտված են որոշակի հատկությամբ: Այսպես, օրինակ, շրջանագիծը հարթության վրա այն կետերի բազմությունն է, որոնք հավասարահեռ են ինչ-որ կետից, որը կոչվում է շրջանագծի կենտրոն:

Անալիտիկ երկրաչափության մեջ դիտարկվում են հետևյալ երկու հիմնական խնդիրները՝

1) կազմել տրված գծի հավասարումը,

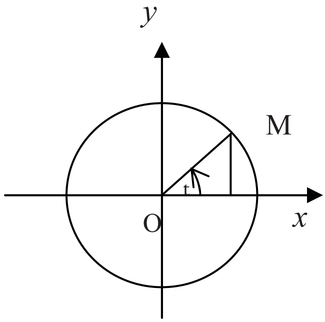
2) կառուցել (կամ հետազոտել) գիծը նրա հավասարման միջոցով:

Անալիտիկ երկրաչափության մեջ խնդիրների լուծումները, որպես օրենք, կատարվում են հանրահաշվական եղանակով, հետևաբար, նկարները և երկրաչափական կառուցումներն այստեղ ունեն երկրորդական դեր:

Նկատենք, որ գոյություն չունեն գծերի հավասարումները կազմելու և տրված հավասարումներին համապատասխանող գծերի կառուցման ընդհանուր եղանակներ: Որպես օրինակներ դիտարկենք գծերի հավասարումները կազմելու և համապատասխան գծապատկերները կառուցելու հետևյալ խնդիրները.

Խնդիր 1: Կազմել r շառավղով և կոորդինատական սկզբնակետը որպես կենտրոն ունեցող շրջանագծի պարամետրական հավասարումը:

Լուծում: Թող $M(x,y)$-ը տրված շրջանագծի կամայական կետ է, իսկ t-ն OM շառավղով և Ox առանցքով կազմված անկյունը, հաշված ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությամբ (նկ. 1)



Նկ.1

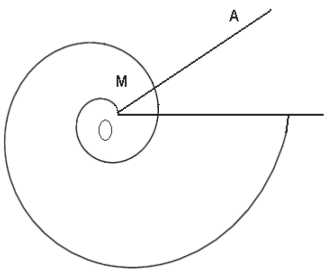
Դժվար չէ տեսնել, որ

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t \qquad (1)$$

հավասարումներն իրենցից ներկայացնում են դիտարկվող շրջանագծի պարամետրական հավասարումը: Իսկապես, (1)-ից արտաքսելով t-ն կստանանք $x^2 + y^2 = r^2$, ինչն իրենից ներկայացնում է շրջանագծի հավասարումը դեկարտյան կոորդինատներով:

Խնդիր 2: OA ճառագայթի O կետից A-ի ուղղությամբ շարժվում է M կետը v հաստատուն գծային արագությամբ: OA ճառագայթը պտտվում է հարթության մեջ ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությամբ ω հաստատուն անկյունային արագությամբ (նկ. 2):

Կազմել M կետի գծած հարթ կորի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով:



Նկ.2

Լուծում: Որոշենք M շարժվող կետի դիրքը նրա բևեռային կոորդինատներով: Որպես բևեռ վերցնենք O կետը, իսկ բևեռային առանցք՝ OA ճառագայթի սկզբնական դիրքը: Դիցուք t ժամանակահատվածում OA ճառագայթը պտտվել է φ անկյունով, այդ դեպքում նրա պտտման անկյունային արագությունը կլինի $\omega = \dfrac{\varphi}{t}$:

Այդ ժամանակահատվածում M կետը ճառագայթով կանցնի r հեռավորություն O բևեռից, նրա գծային արագությունը կլինի

$$v = \frac{r}{t}:$$

r և ω թվերը M շարժվող կետի բևեռային կոորդինատներն են: Քանի որ v-ն և ω-ն ըստ պայմանի հաստատուններ են, հաստատուն կլինի նաև նրանց հարաբերությունը՝ $\dfrac{v}{\omega} = a$:

Տեղադրելով այդ բանաձևի մեջ արագությունների ստացված արտահայտությունները, կգտնենք

$$\frac{r}{t}:\frac{\varphi}{t}=a\,,\quad \text{կամ}\quad \frac{r}{\varphi}=a,\ \text{որտեղից}\quad r=a\varphi:$$

Մենք ստացանք գծի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով, որը կոչվում է Արքիմեդի պարուրագիծ: Արժե նշել, որ Արքիմեդի պարուրագիծը բևեռային կոորդինատներով ունի անհամեմատ ավելի պարզ տեսք, քան դեկարտյան կոորդինատներով:

Թեմա 2. *Ուղիղ գիծ*

Դասագիրք՝ $[1]$ մաս I, գլուխ III §§$1-13$, վարժություններ $1-8$, 10, $13-19, 21, 24, 27,$ §§$14-17$ վարժություններ $30, 33, 35, 42,$ $49-53, 58-61$:

Ցուցումներ

Դասագրքում ապացուցվում է, որ յուրաքանչյուր ուղիղ դեկարտյան կոորդինատներով որոշվում է x-ի և y-ի նկատմամբ առաջին կարգի հավասարումով և հակառակը՝ x-ի և y-ի նկատմամբ առաջին կարգի հավասարումը որոշում է ինչ-որ ուղիղ:

Դիցուք հարթության վրա տրված է

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

ուղիղը և $M_1(x_1,y_1)$ կետը: Պարզ է, որ $Ax_1+By_1+C=0$, եթե M_1-ը գտնվում է (1) ուղղի վրա և $Ax_1+By_1+C\neq 0$՝ հակառակ դեպքում: Ցույց տանք, որ (1) ուղիղը հարթությունը բաժանում է 2 կիսահարթությունների, որոնցից մեկը բնութագրվում է նրանով, որ նրա բոլոր կետերի համար $Ax+By+C>0$, իսկ մյուսը նրանով, որ՝ $Ax+By+C<0$:

Դիցուք $M_1(x_1,y_1)$ և $M_2(x_2,y_2)$ երկու կետեր են, որոնք չեն գտնվում (1) ուղղի վրա: M_1M_2 հատվածի ցանկացած կետի կոորդինատները (բացի M_2 կետից) կարելի է գրել՝

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\,,\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\,,\quad 0\le\lambda<\infty\ \text{տեսքով:}$$

Նշանակենք $\frac{1}{1+\lambda}=t, 0<t\leq 1,$ այս դեպքում

$\lambda=\frac{1-t}{t},\ x=tx_1+(1-t)x_2,\ y=ty_1+(1-t)y_2$

Այսպիսով, M_1M_2 հատվածի ցանկացած $M(x,y)$ կետի համար

$\delta=$

$= Ax+By+C=A[tx_1+(1-t)x_2]+B[ty_1+(1-t)y_2]+C+(Ct-Ct)=$

$= \quad t(Ax_1+By_1+C)+(1-t)(Ax_2+By_2+C)=t\delta_1+(1-t)\delta_2,$

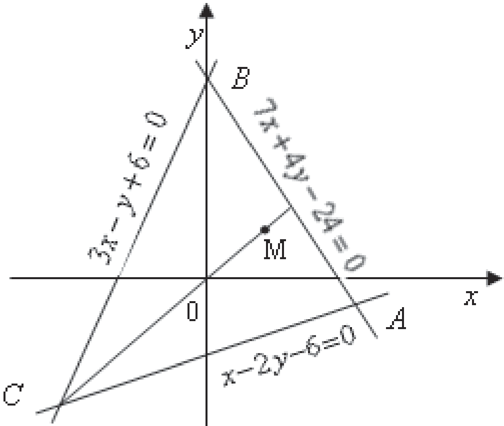
որտեղ $\delta_1=Ax_1+By_1+C$, $\delta_2=Ax_2+By_2+C$:

Եթե δ_1-ը և δ_2-ը նույն նշանի են, ապա δ-ն ևս M_1M_2 հատվածի յուրաքանչյուր կետի համար կունենա այդ նույն նշանը, իսկ դա նշանակում է, որ M_1M_2 հատվածը չի հատվում (1) ուղղի հետ, և, հետևաբար, M_1 և M_2 կետերը ընկած են այդ ուղղի միևնույն կողմում:

Եթե δ_1-ը և δ_2-ը տարբեր նշաններ ունեն, ապա $\delta=t\delta_1+(1-t)\delta_2$ ֆունկցիան $[0,1]$ հատվածի ծայրակետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ և, հետևաբար, նրա ինչ-որ t_0 կետում $\delta=t_0\delta_1+(1-t_0)\delta_2=0$, այսինքն, M_1M_2 հատվածը հատում է (1) ուղիղը, իսկ M_1 և M_2 կետերն ընկած են այդ ուղղի տարբեր կողմերում: Այսպիսով, $\delta=Ax+By+C$ արտահայտությունը (1) ուղղով որոշվող մի կիսահարթության կետերի համար դրական է, իսկ մյուսի համար՝ բացասական:

Այդ հանգամանքը հարմար է օգտագործել խնդիրներ լուծելու ժամանակ:

Խնդիր: Եռանկյան կողմերը տրված են $x-2y-6=0,$ $3x-y+6=0$ և $7x+4y-24=0$ հավասարումներով: Կազմել $7x+4y-24=0$ կողմի դիմացն ընկած ներքին անկյան կիսորդի հավասարումը (նկ. 3)



Նկ. 3

Լուծում:

$$\begin{cases} x-2y-6=0 \\ 7x+4y-24=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-y+6=0 \\ 7x+4y-24=0 \end{cases}$$

Թող $M(\tilde{x},\tilde{y})$-ը անկյան կիսորդի կամայական կետ է, ընկած եռանկյան ներսում: Այդ դեպքում այդ կետն ընկած է $3x-y+6=0$ ուղղի այն կողմում, որտեղ A կետն է, և, հետևաբար, $3\tilde{x}-\tilde{y}+6>0$, ուստի այն ընկած է $x-2y-6=0$ ուղղի այն կողմում, որտեղ և B կետն է, հետևաբար, $\tilde{x}-2\tilde{y}-6<0$: Այսպիսով, $M(\tilde{x},\tilde{y})$ կետից մինչև եռանկյան կողմերը եղած d_1 և d_2 հեռավորությունները որոշվում են

$$d_1=\frac{3\tilde{x}-\tilde{y}+6}{\sqrt{10}}, \qquad d_2=-\frac{\tilde{x}-2\tilde{y}-6}{\sqrt{5}}$$ բանաձևերով:

Քանի որ $M(\tilde{x},\tilde{y})$-ը անկյան կիսորդի կետ է, ապա $d_1=d_2$ այստեղից կգտնենք կիսորդի հավասարումը`

$$(3+\sqrt{2})\tilde{x}-(1+2\sqrt{2})\tilde{y}-6(\sqrt{2}-1)=0$$

կամ էլ, քանի որ M-ը անկյան կիսորդի կամայական կետ է, վերջնականապես, կստանանք

$$(3+\sqrt{2})x-(1+2\sqrt{2})y-6(\sqrt{2}-1)=0$$

Թեմա 3 . *II կարգի կորերի տարրական տեսությունը*

Դասագիրք` $[1]$, մաս I գլուխ IV , §§$1-2$, վարժություններ 1,3,4, §3 , վարժություններ 18 (ա,բ,գ), 19 (գտնել առանցքների երկարությունները և ֆոկուսների կոորդինատները), §4 , վարժություններ 51 (ա,բ,ե,զ), 52 (գտնել առանցքների երկարությունները և ֆոկուսների կոորդինատները), $62, 70$, $\S 5$, վարժություններ $75, 77$, $\S 8$ (մինչև (9) բանաձևը ներառյալ), վարժություններ 18 (դ,ե,զ), 19 (գտնել էքսցենտրիսիտետը), $\S 9$ (մինչև (11) բանաձևը ներառյալ), վարժություններ 51 (գ,դ), 52 (գտնել էքսցենտրիսիտետը), $\S 7, 16$ ։

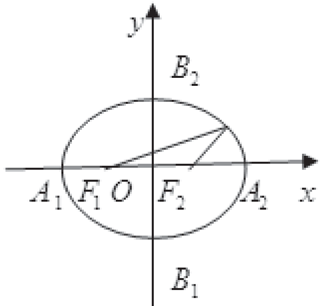
Ցուցումներ

Էլիպս

Էլիպս կոչվում է հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների գումարը այդ հարթության տրված երկու կետերից (ֆոկուսներից) հաստատուն է: Էլիպսի կանոնական հավասարման տեսքն է՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \left(b^2=a^2-c^2, a>b\right):$$

Այս դեպքում էլիպսի ֆոկուսներն են՝ $F_1(-c,0)$ և $F_2(c,0)$ (նկ. 4): Կոորդինատական O սկզբնակետը էլիպսի համաչափության կենտրոնն է, իսկ կոորդինատական առանցքները՝ էլիպսի համաչափության առանցքները:



Նկ. 4

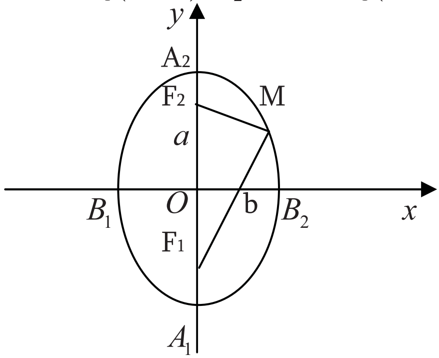
$A_1(-a,0), A_2(a,0)$, $B_1(-b,0), B_2(b,0)$ կետերը կոչվում են էլիպսի գագաթներ, իսկ $a=OA_2$ և $b=OB_2$ հատվածների երկարությունները՝ մեծ և փոքր կիսաառանցքներ: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1$ կոչվում է էլիպսի էքսցենտրիսիտետ: Էքսցենտրիսիտետը բնութագրում է էլիպսի ձգվածությունը, քանի որ այն արտահայտվում է կիսաառանցքների հարաբերությամբ՝

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Եթե էլիպսի ֆոկուսները գտնվում են Oy առանցքի վրա, ապա նրա հավասարումն է՝ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b)$:

Այս դեպքում գագաթները և ֆոկուսները կլինեն՝

$A_1(0,-a), A_2(0,a), B_1(-b,0), B_2(b,0)$ և $F_1(0,-c)$ և $F_2(0,c)$ (նկ. 5):



Նկ. 5

Խնդիր 1 : Գտնել $9x^2+4y^2=36$ էլիպսի կիսառանցքները, ֆոկուսների կոորդինատները և էքսցենտրիսիտետը:

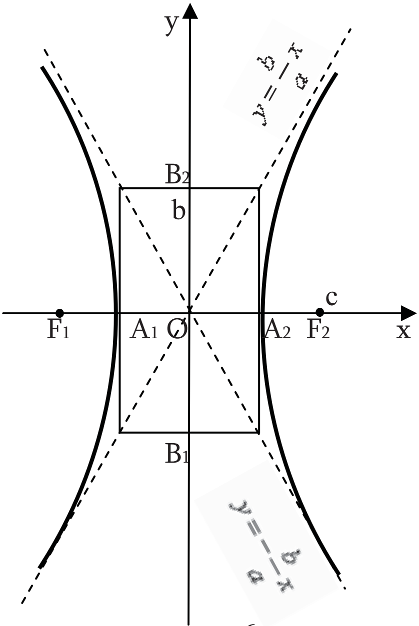
Լուծում: Հավասարման երկու մասը բաժանելով 36-ի, էլիպսի հավասարումը կբերվի հետևյալ տեսքի՝ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$: Այստեղից հետևում է, որ էլիպսի մեծ կիսաառանցքը՝ $b=3$, իսկ փոքր կիսաառանցքը՝ $a=2$: Ընդ որում, էլիպսի մեծ կիսաառանցքն ընկած է Oy առանցքի վրա: $c=\sqrt{b^2-a^2}$ բանաձևով գտնենք c-ն՝ $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$: Հետևաբար, ֆոկուսի կոորդինատները կլինեն $F_1(0,-\sqrt{5})$, և $F_2(0,\sqrt{5})$ իսկ էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{5}}{3}$:

Հիպերբոլ

Հիպերբոլ է կոչվում հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների տարբերության բացարձակ արժեքը այդ հարթության տրված երկու կետերից (ֆոկուսներից) զրոյից տարբեր հաստատուն է: Հիպերբոլի կանոնական հավասարումն է՝

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \left(b^2=c^2-a^2\right) \qquad (1)$$

ընդ որում, Ox առանցքն անցնում է հիպերբոլի ֆոկուսներով, իսկ կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում է F_1F_2 հատվածի միջնակետում: $F_1(-c,0)$ և $F_2(c,0)$ կետերը նրա ֆոկուսներն են: Հիպերբոլը Ox առանցքի հետ հատվում է $A_1(-a,0)$ և $A_2(a,0)$ կետերում, որոնք կոչվում են նրա իրական գագաթներ, իսկ $a = OA_2$ -ը՝ հիպերբոլի իրական կիսաառանցք: $B_1(0,-b)$ և $B_2(0,b)$ կետերը կոչվում են հիպերբոլի կեղծ գագաթներ, իսկ $b = OB_2$ -ը կեղծ կիսաառանցք: $y = \pm\frac{b}{a}x$ ուղիղները կոչվում են հիպերբոլի ասիմպտոտներ:



Նկ. 6

Եթե հիպերբոլի ֆոկուսները գտնվում են Oy առանցքի վրա, ապա նրա հավասարումն ունի

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad (2)$$

տեսքը: Այս դեպքում հիպերբոլի ասիմպտոտներն են $x = \pm\frac{b}{a}y$ ուղիղները, որտեղ a -ն և b -ն, ինչպես և վերևում, իրական և կեղծ կիսաառանցքներն են: (2) հիպերբոլի գագաթներն են ֆոկուսները՝

$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$, $B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$, $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$, որտեղ $c^2 = a^2 + b^2$:

Խնդիր: Կառուցել $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ հիպերբոլի գրաֆիկը, որոշել նրա ֆոկուսները, գագաթները, էքսցենտրիսիտետը, ասիմպտոտները:

Լուծում: Տրված հիպերբոլի կիսառանցքներն են $a=2,\ b=3$ (նկ. 6), հետևաբար, նրա գագաթներն են $A_1(-2{,}0)$, $A_2(2{,}0)$, $B_1(0{,}-3)$, $B_2(0{,}3)$: Նրանց միջոցով կառուցենք հիմնական ուղղանկյունը: Նրա անկյունագծերով անցնող $y=\pm\frac{3}{2}x$ ուղիղները հանդիսանում են հիպերբոլի ասիմպտոտները: Գծենք դրանք: Որից հետո A_1 և A_2 գագաթներով տանենք հիպերբոլի ճյուղերը մոտեցնելով դրանք ասիմպտոտներին:

$c=\sqrt{a^2+b^2}$ բանաձևից գտնենք c-ի մեծությունը՝

$$c=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\quad(\approx 3{,}6)$$

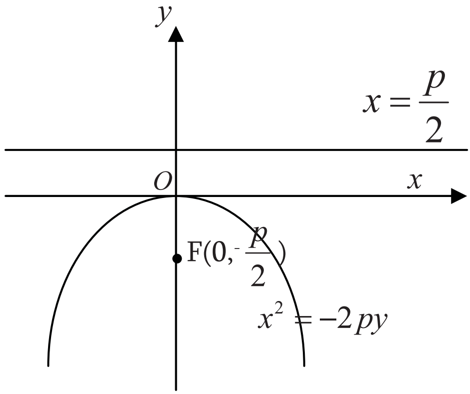
Այստեղից հետևում է, որ հիպերբոլի ֆոկուսներն են $F_1\left(-\sqrt{13},0\right)$ և $F_2\left(\sqrt{13},0\right)$, իսկ էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{2}(\approx 1.8)$:

Պարաբոլ

Պարաբոլը դա հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնք հավասարահեռ են տրված կետից (ֆոկուսից) և տրված ուղղից (դիրեկտրիսից), որը չի անցնում ֆոկուսով, և որոնք ընկած են այդ հարթության մեջ:

Պարաբոլի կանոնական հավասարումն ունի $y^2=2px\,(p>0)$ տեսքը, որտեղ p-ն ֆոկուսի հեռավորությունն է դիրեկտրիսից: Ընդ որում, կոորդինատական համակարգն ընտրված է այնպես, որ Ox առանցքն ուղղահայաց է դիրեկտրիսին, իսկ նրա դրական ուղղությունը համընկնում է դիրեկտրիսից դեպի ֆոկուս ուղղությանը: Օրդինատների առանցքը զուգահեռ է դիրեկտրիսին և անցնում է դիրեկտրիսի և ֆոկուսի միջնակետով, որտեղից դիրեկտրիսի հավասարումն է $x=-\frac{p}{2}$-ը, իսկ ֆոկուսի կոորդինատները՝ $F\left(\frac{p}{2},0\right)$: Կոորդինատների սկզբնակետը հանդիսանում է պարաբոլի գագաթը, իսկ աբսցիսների առանցքը նրա համաչափության առանցքն է: Պարաբոլի էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon=\frac{c}{a}=1$:

Խնդիր: Պարաբոլը, որի գագաթը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, անցնում է $A(1,-2)$ կետով և համաչափ է Oy առանցքի նկատմամբ: Գտնել նրա հավասարումը:



Նկ. 7

Լուծում: Քանի որ նշված պարաբոլը համաչափ է Oy առանցքի նկատմամբ, և ունի բացասական օրդինատ, հետևաբար նա կունենա նկ. 7 - ում տրված տեսքը: Տեղադրելով A կետի կոորդինատները $x^2=-2py$ հավասարման մեջ, կստանանք $p=\frac{1}{4}$: Հետևաբար, փնտրվող հավասարումը կլինի $x^2=-\frac{1}{2}y$ կամ $y=-2x^2$: Պարաբոլի ֆոկուսն է $F\left(0,-\frac{1}{8}\right)$, դիրեկտրիսը՝ $y=\frac{1}{8}$:

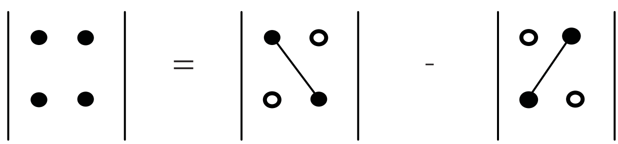
Թեմա 4 . *II և III կարգի որոշիչներ*

Դասագիրք՝ $[1]$, մաս I գլուխ VI :

Ցուցումներ

Երկրորդ կարգի որոշիչը, համաձայն սահմանման, հաշվվում է՝

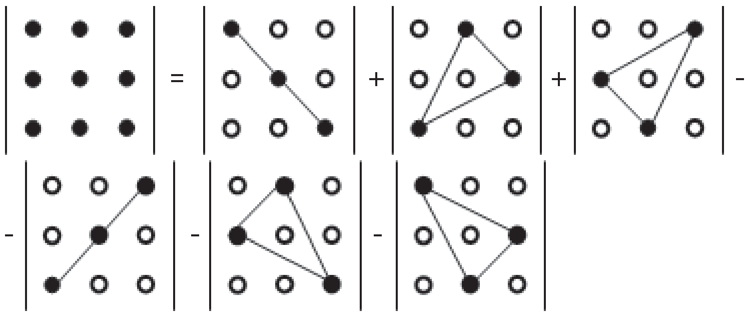
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$ բանաձևով, որը ցուցադրվում է հետևյալ սխեմայի միջոցով՝



III կարգի որոշիչի հաշվման բանաձևը, համաձայն սահմանման, հետևյալն է՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

III կարգի որոշիչները հաշվելու համար հարմար է օգտվել Սարյուսի կանոնից, որը կարելի է պատկերել այսպես՝



Խնդիր $\mathbf{1}$: a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+3 & 5 \\ -1 & a-3 \end{vmatrix}$$

որոշիչը զրո է դառնում:

Լուծում: Նախ հաշվենք տրված որոշիչը

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+3 & 5 \\ -1 & a-3 \end{vmatrix} = (a+3)(a-3) - 5(-1) = a^2 - 4$$

Հետևաբար, $\Delta = 0$, երբ $a = \pm 2$:

Խնդիր $\mathbf{2}$: Հաշվել Վանդերմոնդի որոշիչը՝

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

Լուծում: Օգտվելով որոշիչների հատկություններից, I սյան տարրերը հանենք II սյան տարրերից և գրենք II սյան փոխարեն, I սյան տարրերը հանենք III սյան տարրերից և գրենք III-ի փոխարեն, կստանանք՝

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z^2-x^2) - (y^2-x^2)(z-x) =$$

$$= (y-x)(z-x)(z+x-y-x) = (y-x)(z-x)(z-y):$$

Հաշվումներ կատարելու ժամանակ օգտվել ենք որոշիչի վերլուծությունից ըստ I տողի:

Այստեղից հետևում է, որ Վանդերմոնդի որոշիչը 0 կդառնա միայն այն դեպքում, երբ x, y, z թվերից որևէ երկուսը իրար հավասար են, կամ որ նույնն է, որոշիչի որևէ 2 սյուն համընկնում են:

Թեմա 5. *Կոորդինատները տարածության մեջ: Վեկտորական հանրահաշվի տարրերը*

Դասագիրք՝ $[1]$ մաս 2, գլուխ I , $\S 1$, վարժություններ $1-3$, $\S 2$, վարժություններ $5-7, 9, 11$, $\S\S 3, 4$ վարժություններ $13, 14, 18, 23, 25$, գլուխ II, $\S\S 1-6$, վարժություններ $4-6$, $\S\S 7-10$, վարժություններ $7-9, 13$, $\S\S 11-13$, վարժություններ $18, 19$, $\S\S 14, 15$, վարժություններ $22, 24-27, 29, 30$:

Ցուցումներ

$\mathbf{x}$ վեկտորը, ներկայացված $\mathbf{x} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3$ տեսքով, որտեղ $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$-ը տարբեր վեկտորներ են, իսկ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$-ը՝ թվեր, կոչվում է, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ վեկտորների գծային կոմբինացիա: $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ վեկտորները կոչվում են գծորեն կախված, եթե գոյություն ունեն $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ միաժամանակ ոչ բոլորը հավասար զրոյի թվեր, այնպիսիք, որ

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Եթե այդպիսի $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ թվեր գոյություն չունեն, ապա $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ վեկտորները կոչվում են գծորեն անկախ:

Նկատենք, որ երկու վեկտորներ հարթության մեջ գծորեն կախված են այն և միայն այն ժամանակ, երբ նրանք համագիծ են, երեք վեկտորներ տարածության մեջ գծորեն կախված են այն և միայն

այն ժամանակ, երբ նրանք համահարթ են: Տարածության մեջ չորս վեկտորներ (և ավել) միշտ գծորեն կախված են: Հետևաբար, տարածության գծորեն անկախ վեկտորների թիվը ամենաշատը հավասար է 3-ի, հարթության վրա՝ 2-ի, ուղղի վրա՝ 1-ի:

Գծորեն անկախ վեկտորների համախմբությունը, որոնց միջոցով գծորեն արտահայտվում է տարածության յուրաքանչյուր վեկտոր, կոչվում է այդ տարածության բազիս: Տարածության բազիս կազմող վեկտորները կոչվում են բազիսային:

Տարածության մեջ գծորեն անկախ վեկտորների առավելագույն թիվը կոչվում է այդ տարածության չափ: Ուղիղ գիծը, սովորաբար, կոչում են միաչափ տարածություն՝ V_1: Որևէ ուղղի վրա գտնվող վեկտորների բազիսը բաղկացած է մեկ վեկտորից: Հարթությունը կոչվում է երկչափ տարածություն՝ V_2: Հարթության վրա բազիս կազմող վեկտորների թիվը հավասար է 2-ի: Սովորական տարածությունը անվանում ենք եռաչափ՝ V_3, նրա բազիսը բաղկացած է 3 վեկտորներից: Երբեմն V_1, V_2 տարածությունները անվանում են V_3-ի ենթատարածություններ:

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

V_3-ի ցանկացած **x** վեկտոր միարժեք ներկայացվում է այդ տարածության երեք՝ $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ գծորեն անկախ վեկտորների գծային կոմբինացիայի միջոցով, այսինքն՝

$$\mathbf{x} = x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + x_3\,\boldsymbol{e}_3 \qquad (2)$$

(2) արտահայտությունը անվանում են **x** վեկտորի վերլուծություն $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ բազիսում: x_1, x_2, x_3 գործակիցները (2) վերլուծության մեջ կոչվում են **x** վեկտորի կոորդինատներ այդ բազիսում:

Փոխուղղահայաց միավոր վեկտորներից կազմված բազիսը կոչվում է օրթոնորմավորված:

Խնդիր: Պարզել հետևյալ վեկտորների համահարթությունը՝

$\boldsymbol{a} = 3\,\boldsymbol{i} + 5\,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k}$, $\mathbf{c} = 5\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} + 4\,\boldsymbol{k}$

Լուծում: Համաձայն վեկտորների գծային կախվածության սահմանման $\boldsymbol{a}$, **b** և **c** վեկտորները կլինեն գծորեն կախված, եթե գոյություն ունեն միաժամանակ ոչ բոլորը զրոյին հավասար $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ թվեր այնպիսիք, որ $\lambda_1\,\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\,\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\,\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0}$

Վերցնելով $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ կստանանք

$\boldsymbol{a}+2\ \boldsymbol{b}$-c$=\mathbf{0}$, այսինքն $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ և c վեկտորները գծորեն կախված են և, հետևաբար, համահարթ են:

Թեմա 6. *Անալիտիկ երկրաչափությունը տարածության մեջ*

Ձեռնարկ՝ $[4]$ գլուխ III, §1, $[5]$գլուխ II, §1, $2.1.1-2.1.10$, $2.1.17-2.1.22$, §2, $2.2.1-2.2.10$, $2.2.20-2.2.30$, $2.2.37-2.2.41$:

Ցուցումներ

Հարթություն

$$Ax+By+Cz=0 \qquad (1)$$

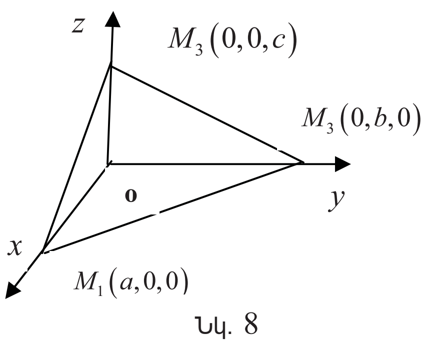
հավասարումը կոչվում է հարթության ընդհանուր հավասարում: $\mathbf{N}\{A,B,C\}$ վեկտորը, որի կոորդինատները հանդիսանում են x,y,z փոփոխականների գործակիցները, ուղղահայաց է (1) հարթությանը, և կոչվում է հարթության նորմալ:

Եթե հավասարման մեջ A,B,C,D բոլոր գործակիցները 0-ից տարբեր են, ապա (1) հավասարումը բերվում է՝

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (2)$$

տեսքի, որը կոչվում է հարթության հավասարում հատվածներով: Այստեղ a,b,c-ն այն հատվածների մեծություններն են, որոնք հատում է հարթությունը կոորդինատների առանցքներից (նկ. 8):

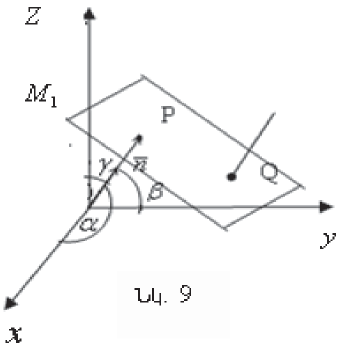
Հարթության նորմալ հավասարումը: Կետի հեռավորությունը հարթությունից



Նկ. 8

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (3)$$

հավասարումը կոչվում է հարթության նորմալ հավասարում, որտեղ α, β, γ-ն կոորդինատական սկզբնակետից հարթությանը իջեցրած ուղղահայացի անկյուններն են կոորդինատական առանցքների դրական ուղղությունների հետ, իսկ p-ն՝ հարթության հեռավորությունն է սկզբնակետից:



Նկ. 9

(3) նորմալ հավասարումը (1)-ից տարբերվում է նրանով, որ նրանում x, y, z-ի գործակիցները հանդիսանում են $\bar{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ միավոր վեկտորի կոորդինատները, որն ուղղահայաց է հարթությանը, իսկ ազատ անդամը բացասական է:

(1) ընդհանուր հավասարումը բերվում է նորմալ տեսքի, եթե այն բազմապատկենք նորմավորող բազմապատկչով`

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (4)$$

ընդ որում նշանը վերցվում է D ազատ անդամի նշանին հակառակ:

M_1 կետի δ շեղում հարթությունից կոչվում է նրա d հեռավորությունը հարթությունից, վերցված դրական նշանով, եթե M_1-ը և O-ն ընկած են հարթության տարբեր կողմերում, և բացասական նշանով, եթե M_1-ը և O-ն ընկած են հարթության նույն կողմում: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ կետի շեղումը (3) հարթությունից որոշվում է

$$\delta = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p \qquad (5)$$

բանաձևով:

Հետևաբար, կետի հեռավորությունը հարթությունից գտնելու համար, պետք է հարթության հավասարումը բերել նորմալ տեսքի և նրա ձախ մասում x, y, z-ի փոխարեն տեղադրել M_1-ի կոորդինատները, կստանանք δ-ն, իսկ $d = |\delta|$:

Խնդիր 1: Ox առանցքի վրա գտնել կետ, որը գտնվում է $2x + y - 2z + 4 = 0$ հարթությունից $d = \frac{1}{3}$ հեռավորության վրա:

Լուծում: Քանի որ կետը գտնվում է Ox-ի վրա, նրա կոորդինատները կունենան $(x,0,0)$ տեսքը: Հարթության հավասարումը բերենք նորմալ տեսքի

$$-\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} = 0$$

$$\delta = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}0 - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3},$$

բայց $d = |\delta| = \frac{1}{3}$, այսինքն $\delta = \pm\frac{1}{3}$,հետևաբար, $-\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = \pm\frac{1}{3}$, որտեղից էլ $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$: Խնդրի պայմանին բավարարում են երկու՝ $M_1\left(-\frac{5}{2},0,0\right)$ և $M_2\left(-\frac{3}{2},0,0\right)$ կետերը:

Խնդիր: Ցույց տալ, որ $x - y - z - 10 = 0$; $4x + 11z + 43 = 0$ և $7x - 5y - 31 = 0$ հարթությունները ունեն միակ ընդհանուր կետը: Գտնել այն:

Լուծում: Գրենք այդ հարթությունների $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{N}_3$ նորմալները կոորդինատներով՝ $\mathbf{N}_1\{1,-1,-1\}$, $\mathbf{N}_2\{4,0,11\}$, $\mathbf{N}_3\{7,-5,0\}$ և հաշվենք նրանց խառը արտադրյալը՝

$$\mathbf{N}_1\,\mathbf{N}_2\,\mathbf{N}_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 11 \\ 7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Քանի որ $\mathbf{N}_1\,\mathbf{N}_2\,\mathbf{N}_3 \neq 0$, ապա այդ հարթությունները հատվում են մի կետում: Որպեսզի գտնենք այդ կետի կոորդինատները, լուծենք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} x - y - z = 10 \\ 4x + 11z = -43 \\ 7x - 5y = 31 \end{cases}$$

Կիրառելով Կրամերի կանոնը այդ համակարգի համար կստանանք.

$\Delta = -2$, $\Delta_x = -6$, $\Delta_y = 4$, $\Delta_z = 10$, հետևաբար, $x = \frac{-6}{-2} = 3$, $y = \frac{4}{-2} = -2$, $z = \frac{10}{-2} = -5$:

Այսպիսով, այդ հարթությունների ընդհանուր կետն է $P(3,-2,-5)$:

Հարթության հավասարումը կազմելու հիմնական խնդիրները

Խնդիր 1: Գտնել հարթության հավասարումը, որն անցնում է տրված $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետով և ուղղահայաց է $\mathbf{N}\{A, B, C\}$ վեկտորին:

Լուծում: Դիցուք $M(x, y, z)$-ը հարթության կամայական կետ է: Ըստ պայմանի $\overline{M_0M}\{x-x_0, y-y_0, z-z_o\}$ վեկտորն ուղղահայաց է $\mathbf{N}$ վեկտորին, հետևաբար, դրանց սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի, այսինքն՝ $\mathbf{N}\,\overline{M_0M}=0$: Գրելով այդ պայմանը կոորդինատներով՝ կստանանք.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_o)=0 \qquad (6)$$

որը փնտրվող հավասարումն է:

Խնդիր 2: Գտնել հաթության հավասարումը, որն անցնում է տրված $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետով և զուգահեռ է տրված երկու ոչ համագիծ $\boldsymbol{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ և $\boldsymbol{b}\,(b_x, b_y, b_z)$ վեկտորներին:

Լուծում: Վերցնենք հարթության կամայական $M(x, y, z)$ կետ: $\overline{M_0M}\{x-x_{0,}y-y_0, z-z_o\}$, $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կլինեն համահարթ, քանի որ նրանք ընկած են զուգահեռ հարթությունների վրա, հետևաբար, նրանց խառը արտադրյալը հավասար կլինի զրոյի՝ $\overline{M_0M}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}=0$: Գրենք այդ առնչությունները կոորդինատներով

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0 \qquad (7)$$

Բացելով որոշիչը կստանանք փնտրվող հարթության հավասարումը:

Խնդիր 3: Գտնել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(x_1, y_1, z_1)$ և $M_2(x_2, y_2, z_2)$ տրված երկու կետերով և զուգահեռ է $\boldsymbol{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ վեկտորին ($\overline{M_1M_2}$-ը և $\boldsymbol{a}$-ն համագիծ չեն):

Լուծում: Թող $M(x, y, z)$– ը հարթության կամայական կետ է: Այդ դեպքում $\overline{M_1M}\{x-x_{1,}y-y_1, z-z_1\}$, $\overline{M_2M}\{x-x_2, y-y_2, z-z_2\}$ և $\boldsymbol{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ վեկտորները կլինեն համահարթ: Այդ վեկտորների խառը արտադրյալը հավասարեցնելով 0-ի կստանանք

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

որը փնտրվող հավասարումն է:

Խնդիր 4: Գտնել հարթության հավասարումը, որն անցնում է տրված $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ և $M_3(x_3, y_3, z_3)$ երեք կետերով:

Լուծում: Վերցնենք հարթության կամայական $M(x, y, z)$ կետը, և M_1-ը միացնենք M_1, M_2 և M_3 կետերի հետ, կստանանք երեք համահարթ վեկտորներ, որոնց խառը արտադրյալը հավասար կլինի 0-ի:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

Ստացված (9) հավասարումը փնտրվողն է:

Երկու ուղիղների փոխադարձ դիրքերը

Դիցուք տրված են երկու ուղիղներ իրենց կանոնական հավասարումներով:

$$\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1}, \quad \frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2} \qquad (10)$$

Այդ ուղիղները անցնում են $M_1(a_1, b_1, c_1)$ և $M_2(a_2, b_2, c_2)$ կետերով և ունեն, համապատասխանաբար, $\mathbf{S_1}\{m_1, n_1, p_1\}$ և $\mathbf{S_2}\{m_2, n_2, p_2\}$ ուղղորդ վեկտորները:

Այդ ուղիղներով կազմված անկյունը հաշվում են

$$\cos\varphi = \frac{\overline{S}_1\overline{S}_2}{|\overline{S}_1||\overline{S}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^{\,2} + n_1^{\,2} + p_1^{\,2}}\,.\sqrt{m_2^{\,2} + n_2^{\,2} + p_2^{\,2}}} \qquad (11)$$

բանաձևով:

(11)-ից հետևում են այդ ուղիղների ուղղահայացության՝

$\mathbf{S_1}\,\mathbf{S_2} = 0$, կամ

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0 \qquad (12)$$

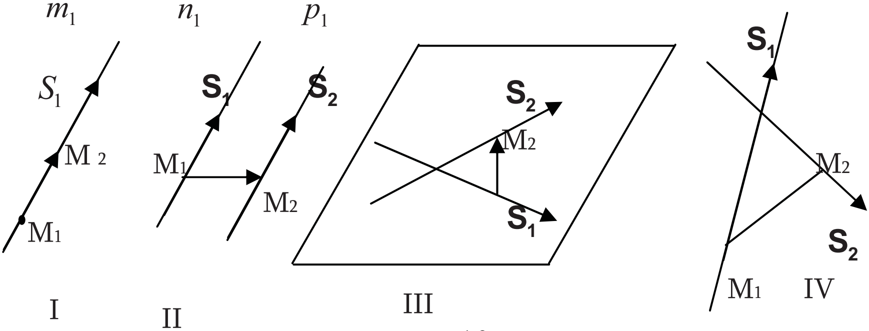
և զուգահեռության՝

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \tag{13}$$

պայմանները:

Հնարավոր են ուղիղների փոխադարձ դասավորության 4 դեպք (նկ. 10)

I. Ուղիղները համընկնում են՝ $\overline{M_1M_2} \parallel \mathbf{S_1}$, այսինքն $\frac{a_2-a_1}{m_1}=\frac{b_2-b_1}{n_1}=\frac{c_2-c_1}{p_1}$



Նկ. 10

II. Ուղիղները զուգահեռ են.

$\overline{M_1M_2} \nparallel \mathbf{S_1}$, բայց $\mathbf{S_2} \parallel \mathbf{S_1}$, այսինքն $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$

III. Ուղիղները հատվում են

$\mathbf{S_1} \nparallel \mathbf{S_2}$, բայց $\overline{M_1M_2}$, $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$ վեկտորները համահարթ են, այսինքն

$$D=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \tag{14}$$

IV. Ուղիղները խաչվում են

$\overline{M_1M_2}$, $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$ համահարթ չեն, այսինքն $D \neq 0$

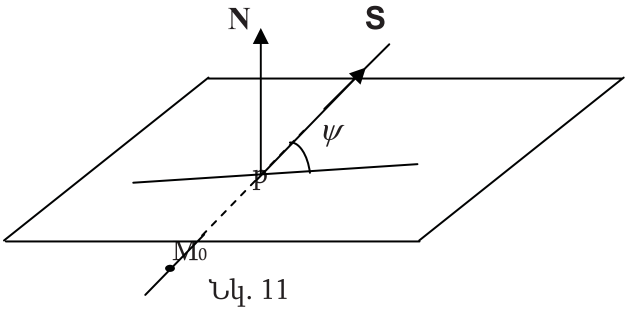
Ուղղի և հարթության վերաբերյալ հիմնական խնդիրները.

1. Ուղղի և հարթության փոխադարձ դասավորությունը:

Ենթադրենք տրված են

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{15}$$

ուղիղը և
$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (16)$$
հարթությունը:
Ըստ սահմանման ուղղի և հարթության կազմած ψ անկյունը դա ուղղի և հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի կազմած սուր անկյունն է: Այդ անկյունը որոշվում է հետևյալ բանաձևից՝
$$\sin\psi = \frac{\left|\overline{NS}\right|}{\left|\overline{N}\right| \cdot \left|\overline{S}\right|} = \frac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (17)$$

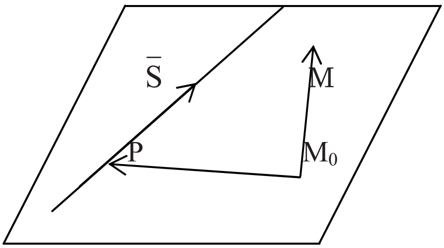


Նկ. 11

Ուղղի և հարթության զուգահեռության պայմանն է՝ $\mathbf{N}\,\mathbf{S} = 0$, այսինքն՝
$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (18)$$
Ուղղահայացության պայմանը՝ $\mathbf{N} \parallel \mathbf{S}$ այսինքն՝
$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (19)$$
Ուղղի և հարթության հատման P կետը կգտնենք հետևյալ կերպ. ուղղի հավասարումը բերում ենք պարամետրական տեսքի՝ $x = a + mt, y = b + nt, z = c + pt,$ որից հետո այդ արժեքները տեղադրում ենք (16)-ում և գտնում t պարամետրի արժեքը, որը համապատասխանում է P հատման կետին: Եթե այդ տեղադրության ժամանակ (16) հավասարումը նույնության է վերածվում, ապա (15) ուղիղը գտնվում է (16) հարթության վրա, դա տեղի ունի, երբ կետը գտնվում է (16) հարթության մեջ:
$Am + Bn + Cp = 0$ (հարթության և ուղղի զուգահեռության պայմանը) և $Aa + Bb + Cc + D = 0$:

Տրված ուղղով և նրանից դուրս գտնվող կետով անցնող հարթության հավասարումը

Թող տրված են $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետը և $\dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}=\dfrac{z-c}{p}$ ուղիղը: Պահանջվում է գտնել դրանցով անցնող հարթության հավասարումը: Ուղղի հավասարումից հետևում է, որ ուղիղը որոշվում է $P(a,b,c)$ կետով և $\mathbf{S}\{m,n,p\}$ ուղղորդ վեկտորով (նկ. 12):



Նկ. 12

Թող $M(x,y,z)$ կետը հարթության ընթացիկ կետ է: $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\overline{M_0P}\{a-x_0, b-y_o, c-z_0\}$ և $\boldsymbol{S}\{m,n,p\}$ վեկտորները գտնվում են մի հարթության մեջ և, հետևաբար, նրանց խառը արտադրյալը հավասար է 0-ի:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a-x_0 & b-y_0 & c-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0 \qquad (20)$$

Թեմա 7. *Գծային ձևափոխություններ, մատրիցներ և գծային հավասարումների համակարգեր*

Դասագիրք՝ $[3]$ գլուխ 2, $\S\S 1,2$ պարժություն 1, $\S 3$, պարժություն $2,3$: Գլուխ 3, $\S 6$ պարժություններ $5,6$

Ցուցումներ

I. Գծային ձևափոխություններ և մատրիցներ

Թող V_3 տարածության յուրաքանչյուր **x** վեկտորին ինչ-որ օրենքով համապատասխանության մեջ է դրված **y** վեկտորը այդ տարածությունից, այսինքն տրված է $\mathbf{x}$ վեկտորական արգումենտի $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ վեկտորական ֆունկցիան:

Եթե V_3 տարածության մեջ տրված է $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ ֆունկցիան, ապա ասում են, որ այդ տարածության մեջ տրված է վեկտորների ձևափոխություն: Ընդ որում $\mathbf{y}$ վեկտորը անվանում են $\mathbf{x}$ վեկտորի պատկեր և գրում են $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ կամ $\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$, որտեղ $\mathbf{A}$ պայմանա-նշանը նշանակում է վեկտորի ձևափոխություն: $\mathbf{A}$ ձևափոխությունը կոչվում է գծային, եթե բավարարվում է հետևյալ պայմանը.

$$\mathbf{A}(\lambda_1 \mathbf{x_1} + \lambda_2 \mathbf{x_2}) = \lambda_1 \mathbf{A}(\mathbf{x_1}) + \lambda_2 \mathbf{A}(\mathbf{x_2}) \qquad (1)$$

որտեղ $\mathbf{x_1}$-ը և $\mathbf{x_2}$-ը դիտարկվող տարածության վեկտորներ են, իսկ λ_1, λ_2-ը՝ կամայական իրական թվեր:

Գծային ձևափոխությունների օրինակներ

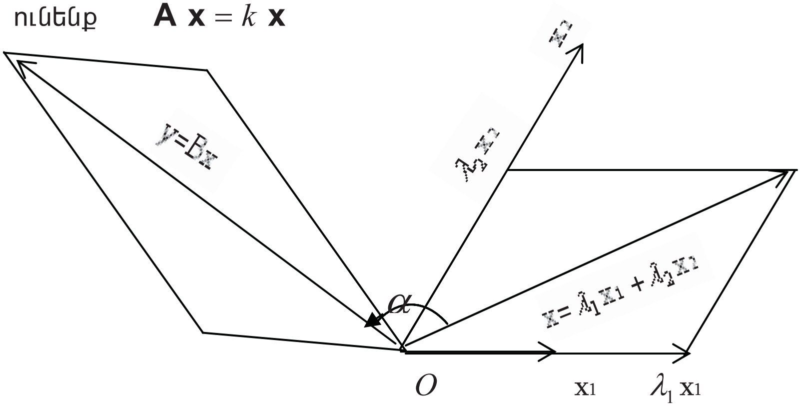
1. $\mathbf{E}$ ձևափոխությունը, որը V_2 տարածության յուրաքանչյուր $\mathbf{x}$ վեկտորին համապատասխանության մեջ է դնում ինքն իրեն, գծային է: Ստուգենք դա: Ըստ պայմանի.

$\mathbf{E}\,\mathbf{x} = \mathbf{x}$

$\mathbf{E}(\lambda_1 \mathbf{x_1} + \lambda_2 \mathbf{x_2}) = \lambda_1 \mathbf{x_1} + \lambda_2 \mathbf{x_2} = \lambda_1 \mathbf{E}(\mathbf{x_1}) + \lambda_2 \mathbf{E}(\mathbf{x_2})$

որտեղից երևում է, որ (1)-ը տեղի ունի: $\mathbf{E}$ գծային ձևափոխությունը կոչվում է միավոր կամ նույնական:

2. $\mathbf{A}$ ձևափոխությունը, որը յուրաքանչյուր $\mathbf{x} \in V_2$ ձգում է k անգամ (k-ն 0-ից տարբեր ցանկացած թիվ է) հանդիսանում է գծային և կոչվում է նմանության ձևափոխություն: Ըստ պայմանի ունենք $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = k\,\mathbf{x}$



Նկ.13

A ձևափոխությունը կիրառելով $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x_1} + \lambda_2 \mathbf{x_2}$ վեկտորի վրա կստանանք $\mathbf{A}(\lambda_1 \mathbf{x_1} + \lambda_2 \mathbf{x_2}) = k(\lambda_1 \mathbf{x_1} + \lambda_2 \mathbf{x_2}) =$ $= \lambda_1 (k \mathbf{x_1}) + \lambda_2 (k \mathbf{x_2}) = \lambda_1 \mathbf{A}(\mathbf{x_1}) + \lambda_2 \mathbf{A}(\mathbf{x_2})$ որտեղից հետևում է, որ (1) պայմանը տեղի ունի:

3. **B** ձևափոխությունը, որը տրված հարթության վրա յուրաքանչյուր $\mathbf{x}$ վեկտոր պտտում է որևէ O կետի շուրջը նույն ուղղությամբ և նույն α անկյունով հանդիսանում է գծային և կոչվում է պտտման ձևափոխություն:

Իսկապես, թող $\mathbf{y} = \mathbf{B}\,\mathbf{x}$, որտեղ $\mathbf{y}$ վեկտորը ստացվում է $\mathbf{x}$ վեկտորը տրված α անկյունով պտտելով (նկ.13): Նկարից երևում է, որ (1) պայմանը տեղի ունի: Հետևաբար, **B** ձևափոխությունը գծային է:

Գծային ձևափոխության մատրիցը: Վերցնենք V_3 տարածության մեջ $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ ինչ-որ բազիս և բազիսի վեկտորներից յուրաքանչյուրի նկատմամբ կիրառենք **A** գծային ձևափոխությունը:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\boldsymbol{e}_1) &= \mathbf{f_1} = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3 \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{e}_2) &= \mathbf{f_2} = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3 \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{e}_3) &= \mathbf{f_3} = a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \qquad (2)$$

Այստեղ $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ վեկտորները իրենցից ներկայացնում են $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ վեկտորների պատկերները արտահայտված $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ բազիսով:

Ցույց տանք, որ (2) բանաձևերով որոշվում է **A** գծային ձևափոխությունը: Վերցնենք կամայական $\mathbf{x} \in V_3$ և ներկայացնենք այն $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ բազիսում:

$$\mathbf{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

այդ դեպքում

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1\mathbf{A}(\boldsymbol{e}_1) + x_2\mathbf{A}(\boldsymbol{e}_2) + x_3\mathbf{A}(\boldsymbol{e}_3)$$

Օգտվելով (2) ձևափոխություններից և խմբավորելով նման անդամները՝ կստանանք

$\mathbf{y} = x_1(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3) + x_2(a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{23}\boldsymbol{e}_3) + x_3(a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\boldsymbol{e}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\boldsymbol{e}_3$:

Նշանակելով **y** վեկտորի կոորդինատները $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ բազիսում y_1, y_2, y_3–ով կստանանք V_3 տարածության մեջ ցանկացած վեկտորի գծային ձևափոխության կոորդինատները՝

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \qquad (3)$$

(3) բանաձևերից երևում է, որ ցանկացած **x** վեկտորի պատկերի կոորդինատները միարժեքորեն որոշվում են $a_{ij}(i, j = 1,2,3)$ գործակիցների միջոցով, տրված (2) բանաձևերով:

Այսպիսով V_3 տարածության մեջ գործող **A** գծային ձևափոխությանը տրված $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ բազիսում համապատասխանեցվել է (3) հավասարումների աջ մասի գործակիցներից կազմված աղյուսակը.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

A–ն կոչվում է տրված բազիսում **A** գծային ձևափոխության մատրից: A մատրիցը հաճախ գրում են այսպես.

$A = (a_{ij})$, որտեղ $i, j = 1, 2, 3$:

Կարելի է ցույց տալ, որ կամայական (4) տեսքի մատրից տրված բազիսում տալիս է ինչ-որ գծային ձևափոխություն:
Հետևաբար, V_3 տարածության մեջ գործող գծային ձևափոխության և 3-րդ կարգի քառակուսային մատրիցների միջև ստեղծվում է փոխմիարժեք համապատասխանություն: Նկատենք նաև, որ V_3 տարածության վեկտորների յուրաքանչյուր գծային ձևափոխությանը համապատասխանում է այդ տարածության վեկտորների

կոորդինատների գծային ձևափոխություն: Պարզենք, ինչ տեսք ունեն դիտարկած օրինակների գծային ձևափոխությունների մատրիցները:

1. $\mathbf{E}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$: $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ և $\mathbf{x}$ վեկտորների կոորդինատները ցանկացած $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ բազիսում կապված են $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ հարաբերություններով: Այդ հարաբերությունները գրելով (3) բանաձևի տեսքով, կստանանք՝

$$y_1 = 1x_1 + 0x_2 + 0x_3$$
$$y_2 = 0x_1 + 1x_2 + 0x_3$$
$$y_3 = 0x_1 + 0x_2 + 1x_3,$$

որտեղից հետևում է, որ $\mathbf{E}$ գծային ձևափոխության E մատրիցը կունենա

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

տեսքը: $\mathbf{E}$ միավոր գծային ձևափոխության E մատրիցը կոչվում է միավոր մատրից:

2. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = k\,\mathbf{x}$: $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ և $\mathbf{x}$ վեկտորների կոորդինատները $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ կամայական բազիսում կապված են $y_1 = kx_1$, $y_2 = kx_2$, $y_3 = kx_3$ հարաբերություններով:Այդ հարաբերությունները գրելով (3) բանաձևերի տեսքով՝ կստանանք

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$ մատրիցը:

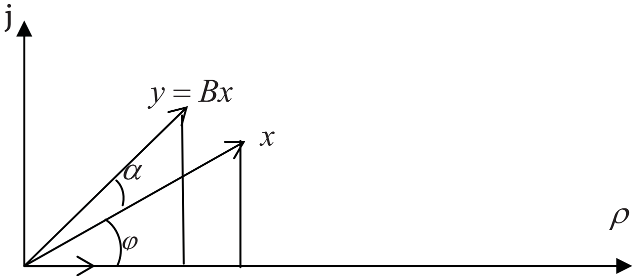
3. Թող $\mathbf{B}$-ն ինչ-որ H հարթության մեջ (V_2 տարածության) գծային պտտման ձևափոխություն է: H հարթության մեջ վերցնենք $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ օրթոնորմալ բազիսը և մտցնենք բևեռային կոորդինատների համակարգը (նկ.14): Այդ դեպքում $\mathbf{x}$ վեկտորի կոորդինատները կգրվեն $x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$ տեսքով, որտեղ ρ-ն և φ-ն $\mathbf{x}$ վեկտորի բևեռային կոորդինատներն են:

Քանի որ $\mathbf{y} = \mathbf{B}(\mathbf{x})$ վեկտորը ստացվում է O կետի շուրջը $\mathbf{x}$ վեկտորի α անկյունով պտտումից (տես նկ.14), ապա նրա կոորդինատները կգրվեն

$$y_1 = \rho\cos(\varphi+\alpha) = \rho(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi)$$

$$y_2 = \rho\sin(\varphi+\alpha) = \rho(\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha)$$

տեսքով:



Նկ.14

Բացելով փակագծերը և տեղադրելով $\rho\cos\varphi$ և $\rho\sin\varphi$-ի փոխարեն, համապատասխանաբար, x_1 և x_2, կստանանք վեկտորի կոորդինատների գծային ձևափոխության բանաձևերը հարթության վրա

$$y_1 = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha\,,$$

$$y_2 = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha$$

որտեղից հետևում է, որ B ձևափոխության մատրիցը V_2 տարածության օրթոնորմալ բազիսում կլինի՝

$$B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ մատրիցը:

Գործողություններ գծային ձևափոխությունների և նրանց մատրիցների հետ

Թող $\mathbf{A}$-ն և $\mathbf{B}$-ն գծային ձևափոխություններ են, որոնք գործում են V_3 տարածության մեջ: $\mathbf{A}$ և $\mathbf{B}$ գծային ձևափոխությունները համարվում են հավասար, եթե $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{B}\,\mathbf{x}$, $\forall\ \mathbf{x} \in V_3$:

Թող (a_{ij}) և (b_{ij}) (որտեղ $i, j = 1,2,3$) մատրիցներ են, որոնք համապատասխանում են $\mathbf{A}$ և $\mathbf{B}$ գծային ձևափոխություններին V_3 տարածության $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ ինչ-որ բազիսում: $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{B}\,\mathbf{x}$

հավասարման մեջ համարելով $\mathbf{x} = \boldsymbol{e}_j$, և օգտվելով (2) բանաձևերից կստանանք.

$$a_{1j}\,\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\,\boldsymbol{e}_2 + a_{3j}\,\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{A}\,\boldsymbol{e}_j = \mathbf{B}\,\boldsymbol{e}_j = b_{1j}\,\boldsymbol{e}_1 + b_{2j}\,\boldsymbol{e}_2 + b_{3j}\,\boldsymbol{e}_3 \qquad (5)$$

$(j = 1,2,3)$: Քանի որ $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3$ վեկտորները բազիս են կազմում, ապա երկու հավասար վեկտորների համապատասխան կոորդինատները կլինեն իրար հավասար, այսինքն (5) հավասարման մեջ $a_{ij} = b_{ij}$:

Այստեղից հետևում է, որ հավասար գծային ձևափոխությունները տրված բազիսում ունեն հավասար մատրիցներ

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i, j = 1,2,3) \qquad (6)$$

Ակնհայտ է , որ արդարացի է և հակառակ պնդումը:

Թող կամայական $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ վեկտորը $\mathbf{B}$ գծային ձևափոխության միջոցով փոխակերպվում է ինչ-որ $\mathbf{B}\,\mathbf{x} = \mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$ վեկտորի, իսկ $\mathbf{y}$ վեկտորը $\mathbf{A}$ գծային ձևափոխության միջոցով փոխանցվում է $\mathbf{A}\,\mathbf{y} = \mathbf{z} = \{z_1, z_2, z_3\}$ վեկտորին: Արդյունքում $\forall\,\mathbf{x}$ վեկտոր ինչ-որ $\mathbf{C}$ ձևափոխության միջոցով փոխանցվում է $\mathbf{z}$ վեկտորին:

Այսպիսի $\mathbf{C}$ ձևափոխությունը կոչվում է տրված երկու $\mathbf{A}$ և $\mathbf{B}$ ձևափոխությունների արտադրյալ՝ $\mathbf{C}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{x})$:

$\mathbf{x}$ վեկտորի նկատմամբ $\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$ արտադրյալ ձևափոխության կիրառումը նշանակում է, որ սկզբից $\mathbf{x}$ վեկտորի նկատմամբ կիրառվում է $\mathbf{B}$ գծային ձևափոխությունը, որից հետո նոր վեկտորի նկատմամբ կիրառվում է $\mathbf{A}$ գծային ձևափոխությունը: Հեշտ է տեսնել, որ երկու գծային ձևափոխությունների արտադրյալը $\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{x})$-ը ևս հանդիսանում է գծային ձևափոխություն `

$$\mathbf{C}\,(\lambda_1\,\mathbf{x_1} + \lambda_2\,\mathbf{x_2}) = \mathbf{A}\,[\mathbf{B}\,(\lambda_1\,\mathbf{x_1} + \lambda_2\,\mathbf{x_2})] = \mathbf{A}\,(\lambda_1\,\mathbf{B}\,\mathbf{x_1} + \lambda_2\,\mathbf{B}\,\mathbf{x_2}) =$$

$$= \lambda_1\,\mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{x_1}) + \lambda_2\,\mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{x_2}) = \lambda_1\,\mathbf{C}\,\mathbf{x_1} + \lambda_2\,\mathbf{C}\,\mathbf{x_2}$$

$C = AB$ գծային ձևափոխության $C = (c_{ij})$ մատրիցը կոչվում է A և B մատրիցների արտադրյալ: Կարելի է ցույց տալ, որ

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

մատրիցի համար, որն իրենից ներկայացնում է $C = AB$ գծային ձևափոխության մատրիցը, c_{ij} տարրերը հաշվվում են հետևյալ կանոնով.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}; \quad i, j = 1,2,3:$$

Այսպիսով $\mathbf{C}$ մատրիցի i-րդ տողի և j-րդ սյան հատման տարրը ստանալու համար $(i, j = 1,2,3)$ պետք է բազմապատկել A մատրիցի i-րդ տողի և $\mathbf{B}$ մատրիցի j-րդ սյան համապատասխան տարրերը և ստացված արտադրյալները գումարել:

Գծային ձևափոխությունների գրության մատրիցային ձևը

Մենք արդեն ստացել ենք

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$
$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

բանաձևերը, որոնք որոշում են V_3 տարածության ցանկացած **x** վեկտորի գծային ձևափոխության կոորդինատները:

6-րդ թեմայի ուսումնասիրման ժամանակ ստացել ենք, որ սևեռված (ֆիքսած) բազիսում վեկտորների և նրանց կոորդինատների միջև գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն: Վեկտորների կոորդինատները գրենք վեկտոր-սյունյակների տեսքով: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր **x** վեկտորին միարժեքորեն կհամապատասխանեցվի **x**-ի կոորդինատներից կազմված **X** վեկտոր-սյունյակը դիտարկվող բազիսում: Մտցնելով

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

նշանակումները կստանանք (3) հավասարումները մատրիցային տեսքով

$$\mathbf{Y} = A\,\mathbf{X} \qquad (3')$$

Վեկտորների յուրաքանչյուր $\mathbf{y} = A\,\mathbf{x}$ գծային ձևափոխությանը կհամապատասխանի այդ վեկտորների կոորդինատների գծային՝ $\mathbf{Y} = A\,\mathbf{X}$ ձևափոխությունը և հակառակը, վեկտորների կոորդինատների յուրաքանչյուր գծային ձևափոխությանը համապատասխանում է այդ վեկտորների գծային ձևափոխությունը, դրա համար էլ վեկտորների գծային ձևափոխության փոխարեն, սովորաբար, դիտարկում են նրանց կոորդինատների համապատասխան ձևափոխությունը:

Խնդիր 1: Տրված են երկու գծային ձևափոխությունների կոորդինատները

$$\tilde{x}_1 = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \qquad y_1 = \tilde{x}_1 + 4\tilde{x}_2 + 3\tilde{x}_3$$

$$\tilde{x}_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 \qquad \text{և} \qquad y_2 = 5\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3$$

$$\tilde{x}_3 = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \qquad y_3 = 3\tilde{x}_1 + 6\tilde{x}_2 + 7\tilde{x}_3$$

Պահանջվում է գտնել կոորդինատների այն գծային ձևափոխությունը, որը y_1, y_2, y_3-ը կարտահայտի x_1, x_2, x_3-ի միջոցով:

Լուծում: կոորդինատների առաջին գծային ձևափոխության մատրիցը նշանակենք A-ով, իսկ երկրորդը՝ B-ով.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

x, $\tilde{x}$ և **y** վեկտորների սյունյակները նշանակենք համապատասխանաբար X, $\tilde{X}$, Y –ով, այսինքն

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}:$$

Այդ դեպքում տրված կոորդինատների գծային ձևափոխությունները մատրիցային եղանակով կգրվեն այսպես՝ $\tilde{X} = AX$, $Y = B\tilde{X}$, իսկ դրանց համապատասխանող վեկտորների գծային ձևափոխությունները՝

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \mathbf{Ax}, \ \mathbf{y} = \mathbf{B\tilde{x}}:$$

Ստացված բանաձևերն արտահայտում են այն փաստը, որ **A** գծային ձևափոխությունը **x** վեկտորը տանում է $\tilde{x}$-ին, իսկ $\tilde{x}$ վեկտորը **B** ձևափոխությամբ բերվում է **y** վեկտորին: **x** վեկտորը **y** վեկտորին ձևափոխող գծային ձևափոխությունը կգրվի

$\mathbf{y} = B(Ax)$ կամ $\mathbf{y} = BA\,\mathbf{x}$ տեսքով,

իսկ նրան համապատասխանող կոորդինատների գծային ձևափոխությունը՝

$$\mathbf{Y} = BA\,\mathbf{X} \tag{7}$$

Բազմապատկելով B և A մատրիցները կստանանք

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}$$

Տեղադրելով ստացված BA մատրիցը (7) -ում կունենանք՝

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$y_1 = 15x_1 + 0x_2 + 7x_3$$
$$y_2 = 6x_1 - 4x_2 + 24x_3$$
$$y_3 = 33x_1 - 14x_2 + 23x_3$$

Այն ինչ պահանջվում էր:

Խնդիր 2: Տրված է կոորդինատների գծային ձևափոխությունը՝

$$y_1 = 3x_1 - x_2 - x_3\ ,$$
$$y_2 = 2x_1 + x_2 + 2x_3\,,$$
$$y_3 = x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

Պահանջվում է գտնել հակադարձ ձևափոխությունը:

Լուծում: Տրված գծային ձևափոխությունը գրենք մատրիցային տեսքով

$$\mathbf{Y} = A\,\mathbf{X} \tag{8}$$

որտեղ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Հաշվենք

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -35,$$

քանի որ $\Delta \neq 0$, ապա A մատրիցը կունենա հակադարձ մատրից`

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

որտեղ A_{ij}-ն a_{ij} տարրի հանրահաշվական լրացումն է: Հաշվենք մեր մատրիցի հանրահաշվական լրացումները:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5:$$

Այսպիսով`

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{35} & \frac{1}{7} & \frac{1}{35} \\ -\frac{6}{35} & \frac{1}{7} & \frac{8}{35} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

(8)-ի երկու մասը ձախ կողմից բազմապատկելով A^{-1}-ով կստանանք. $A^{-1}Y = A^{-1}AX$:

Հաշվի առնելով, որ $A^{-1}A = E$, որտեղ E-ն միավոր մատրից է, կունենանք.

$A^{-1}Y = X$, կամ

$$X = A^{-1}Y \tag{9}$$

Տեղադրելով A^{-1}-ը (9)-ում` կստանանք

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{35} & \frac{1}{7} & \frac{1}{35} \\ -\frac{6}{35} & \frac{1}{7} & \frac{8}{35} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

որտեղից՝

$$x_1 = \frac{8}{35}\, y_1 + \frac{1}{7}\, y_2 + \frac{1}{35}\, y_3$$

$$x_2 = -\frac{6}{35}\, y_1 + \frac{1}{7}\, y_2 + \frac{8}{35}\, y_3$$

$$x_3 = -\frac{1}{7}\, y_1 + \frac{2}{7}\, y_2 - \frac{1}{7}\, y_3$$

ինչը և պահանջվում էր:

Մինորներ և մատրիցի ռանգը

Թող տրված է

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{մատրիցը:}$$

Տրված մատրիցի k-րդ կարգի մինոր է կոչվում k-րդ կարգի քառակուսի որոշիչը $(k < m, k < n)$, որը ստացվում է տրված մատրիցի ինչ-որ տողեր և սյուներ ջնջելով:

Այսպես.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{մատրիցի համար}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

որոշիչները հանդիսանում են 2-րդ և 3-րդ կարգի մինորներ, համապատասխանաբար: δ որոշիչը ստացվել է A մատրիցի III և IV սյուները և III տողը ջնջելով, Δ_1-ը A մատրիցի IV սյունը ջնջելով, Δ_2-ը A մատրիցի III սյունը ջնջելով:

Մատրիցի ռանգ կոչվում է նրա մեջ մտնող ամենաբարձր կարգի զրոյից տարբեր մինորի կարգը: Եթե A մատրիցի ռանգը հավասար է r-ի, ապա դա նշանակում է, որ A մատրիցի մեջ կա r-րդ կարգի ոչ 0-ական մինոր և r-րդից բարձր կարգի ցանկացած մինոր հավասար է 0-ի: A մատրիցի ռանգը նշանակում են $r(A)$:

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը՝ եթե A մատրիցն ունի r–րդ կարգի զրոյից տարբեր Δ_r մինոր, իսկ A մատրիցի այդ մինորը եզրագծող բոլոր $(r+1)$-րդ կարգի մինորները հավասար են զրոյի, ապա այդ մատրիցի ռանգը հավասար է r-ի:

Այս թեորեմը հիմք է հանդիսանում մատրիցի ռանգը հաշվելու հետևյալ կանոնի համար:

Գտնում ենք որևէ II կարգի ոչ 0-ական մինոր: Որից հետո հաշվում ենք նրան եզրագծող բոլոր մինորների կարգերը, մինչև չենք գտնում նրանց մեջ ոչ 0-ականը:
Եթե գտնում ենք 0-ից տարբեր r-րդ կարգի Δ_r մինոր, ապա հաշվում ենք այդ մինորը եզրագծող $(r+1)$-րդ կարգի մինորները: Եթե նրանք բոլորը հավասար են 0-ի, կամ այդպիսիք չկան առհասարակ (երբ, մատրիցն ունի r տող կամ r սյուն), ապա մատրիցի ռանգը հավասար է r-ի

Խնդիր 3. Հաշվել $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$ մատրիցի $r(A)$-ն:

Լուծում: Քանի որ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$ և նրան եզրագծող III կարգի մինորները

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 0$$ ուրեմն, $r(A)=2$:

Գծային հավասարումների համակարգեր

Ուսանողը պետք է կարողանա լուծել գծային հավասարում-ների համակարգերը Գաուսի (փոփոխականների հաջորդական արտաքսման մեթոդ) եղանակով, Կրամերի բանաձևերով և մատրիցային եղանակներով:

Գաուսի եղանակ

Այս եղանակի էությունը կայանում է նրանում, որ անհայտների հաջորդական արտաքսման միջոցով տրված համակարգը բերվում է նրան համարժեք աստիճանաձև (կամ, մասնավորապես, եռանկյունաձև) համակարգի:

Աստիճանաձև համակարգ է կոչվում գծային հավասարումների

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= f_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= f_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{kk}x_k + \cdots a_{kn}x_n &= f_k \end{aligned} \qquad (*)$$

տեսքի համակարգը, որտեղ $k \le n, a_{ij} \ne 0, i = 1,2,\cdots,k$:

Եթե $k = n$, ապա $(*)$ համակարգը կոչվում է եռանկյունաձև:

Խնդիր 4: Գաուսի եղանակով լուծել հավասարումների հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

Լուծում: Արտաքսելով x_1-ը II և III հավասարումներից, կստանանք տրված համակարգին համարժեք.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8 \\ \frac{11}{2}x_2 + 8x_3 = 35 \\ \frac{5}{2}x_2 + x_3 = 8 \end{cases} \quad \text{կամ} \quad \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8 \\ 11x_2 + 16x_3 = 70 \\ 5x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$$

համակարգը: Վերջին համակարգի III հավասարմանը գումարելով այդ համակարգի երկրորդ հավասարումը, նախօրոք այն բազմապատկելով $\left(-\frac{5}{11}\right)$ թվով, կստանանք`

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_2+2x_3=8 \\ \qquad 11x_2+16x_3=70 \\ \qquad\qquad 29x_3=87 \end{cases}$$

Որտեղից` $x_3=3, x_2=2, x_1=1$: Գործնականում գծային հավասարումների համակարգերը Գաուսի եղանակով լուծման ժամանակ բոլոր ձևափոխությունները, կապված անհայտների հաջորդական արտաքսման հետ, հարմար է կիրառել ոչ թե գծային հավասարումների, այլ նրա ընդլայնված մատրիցի վրա: Ստացվող մատրիցները այս դեպքում կոչվում են համարժեք և միացվում են ~ նշանով:

Խնդիր 5: Գաուսի եղանակով լուծել հավասարումների համակարգը

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=1 \\ 5x_1-3x_2+2x_3=5 \\ x_1+3x_2+3x_3=18 \end{cases}$$

Լուծում: Գրենք տրված համակարգի ընդլայնված մատրիցը, ուղղահայաց գծով առանձնացնելով ազատ անդամների սյունյակը.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 18 \end{array}\right)$$

գումարելով II և III տողերին I տողը նախօրոք բազմապատկելով (-5) և (-1) թվերով, համապատասխանաբար, կստանանք

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 17 \end{array}\right)$$

III տողին գումարելով II տողը նախօրոք այն բազմապատկելով

(-4)-ով կստանանք՝

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{array}\right) \sqcup \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = 1, x_2 = 4, x_1 = 3:$$

<u>Կրամերի կանոնը:</u> Եթե n անհայտով n գծային հավասարումների համակարգի որոշիչը զրո չէ, ապա այն ունի միակ լուծում, որը հաշվում են Կրամերի բանաձևերով՝

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1,2,\cdots,n \tag{11}$$

որտեղ Δ-ն համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված որոշիչն է, իսկ Δ_i-ն Δ-ից ստացվող որոշիչը, x_i փոփոխականի գործակիցները փոխարինված ազատ անդամներով:

Խնդիր 6: Կրամերի բանաձևերով լուծել հետևյալ գծային հավասարումների համակարգը

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Լուծում: Այդ համակարգի որոշիչը՝

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0:$$

Հաշվենք Δ_j որոշիչները, որոնք ստացվում են համակարգի Δ որոշիչից նրա x_j փոփոխականի գործակիցների սյունը փոխարինելով ազատ անդամներով.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -5,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5,$$

որտեղից $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1:$

Մատրիցային եղանակ: Թող տրված է n անհայտով n գծային հավասարումների համակարգ՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = f_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = f_n \end{cases} \qquad (12)$$

որի գործակիցներից կազմված որոշիչը զրո չէ: Օգտվելով երկու մատրիցների արտադրյալի սահմանումից, համակարգը կարելի է գրել

$$AX = F \qquad (13)$$

տեսքով, որտեղ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}$$

մատրիցը փոփոխականների գործակիցներից կազմված մատրիցն է,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ - անհայտների վեկտոր սյունն է, $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_n \end{pmatrix}$ - ը՝ ազատ անդամներից կազմված վեկտորը:

(13) հավասարումը կոչում են գծային հավասարումների համակարգ մատրիցային տեսքով: Քանի որ $\det A \neq 0$, A–ն ունի հակադարձ մատրից՝ A^{-1}: (13) -ը ձախից բազմապատկելով A^{-1} -ով կստանանք

$$A^{-1}AX = A^{-1}F \qquad (14)$$

կամ $X = A^{-1}F$, այսինքն (12) -ի լուծումը:

Խնդիր 7: Մատրիցային եղանակով լուծել հետևյալ գծային հավասարումների համակարգը

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Լուծում: Նշանակենք

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}6\\3\\5\end{pmatrix}$$

Այս դեպքում տրված գծային հավասարումների համակարգը կգրվի

$$AX=F \tag{15}$$

մատրիցային հավասարման միջոցով: A մատրիցի որոշիչը՝

$$\det A=\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=5\neq 0$$

Հետևաբար, A մատրիցը չվերասերված է և ունի հակադարձ՝

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{3}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

մատրիցը, որտեղ A_{ij}-ն a_{ij} տարրի հանրահաշվական լրացումն է:

Բազմապատկելով (15)-ի երկու կողմերը A^{-1}-ով ձախից կստանանք նրա լուծումը մատրիցային տեսքով՝

$$X=A^{-1}F \tag{16}$$

Մեր դեպքում

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix}=3,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}=2$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=3$$

Տեղադրելով A^{-1} մատրիցը (16) հավասարման մեջ, կստանանք տրված համակարգի լուծումը՝

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{3}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\3\\5\end{pmatrix}$$

$x_1=\frac{1}{5}6+\frac{3}{5}3+\left(-\frac{2}{5}\right)5=1$, հանգունորեն կգտնենք $x_2=-2, x_3=3$:

Նկատենք, որ Կրամերի բանաձևերով և մատրիցային եղանակով գծային հավասարումների համակարգը կարելի է լուծել լոկ այն դեպքում, երբ

1) հավասարումների թիվը հավասար է անհայտների թվին, և

2) համակարգի որոշիչը $\neq 0$-ի:

Եթե այդ պայմաններից գոնե մեկը խախտվում է, ապա այդ եղանակները կիրառելի չեն:

Թեմա 8. *Վեկտորական տարածություններ*

Դասագիրք՝ [3] գլուխ 3, §§ 2, 3 արժություններ 2, 3, §§5, 7 վարժություններ 7, 8:

Ցուցումներ

5-րդ թեմայի ուսումնասիրման ժամանակ պարզել ենք, որ տրված բազիսում երկրաչափական վեկտորների և նրանց կոորդինատների միջև առկա է փոխմիարժեք համապատասխանություն:

Ընդհանրացնենք արդեն սահմանված վեկտորի գաղափարը: n-չափանի **x** վեկտոր կանվանենք n հատ՝ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ թվերի կարգավորված համախմբությունը և այն կգրենք $\mathbf{x}=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ տեսքով: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ թվերը, որոնք կազմում են **x** վեկտորը կանվանենք նրա կոորդինատներ:

Վեկտորը, որի բոլոր կոորդինատները հավասար են 0-ի կոչվում է զրոյական վեկտոր և նշանակվում է $\mathbf{0}$ տեսքով:

Սահմանենք n-չափանի վեկտորների հավասարությունը, ինչպես նաև դրանց հետ գծային գործողությունները:
Երկու n չափանի $\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ և $\mathbf{y}=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ վեկտորները համարվում են հավասար, եթե նրանց համապատասխան կոորդինատները հավասար են: Այդ փաստը գրանցվում է $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ տեսքով:

Երկու n-չափանի $\mathbf{x}$ և $\mathbf{y}$ վեկտորների գումար կանվանենք այն n-չափանի $\mathbf{z}$ վեկտորը՝ $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$, որի կոորդինատները հավասար են գումարելի վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գումարներին:

$\mathbf{x}$ վեկտորի արտադրյալը λ թվով կոչվում է $\mathbf{y}=\lambda\,\mathbf{x}$ n չափանի վեկտորը, որի կոորդինատները ստացվում են $\mathbf{x}$ վեկտորի բոլոր կոորդինատները բազմապատկելով λ թվով:

$(-1)\mathbf{x}$ վեկտորը կոչվում է $\mathbf{x}$ վեկտորի հակադիր վեկտոր և նշանակում են $-\mathbf{x}$ տեսքով, այսինքն՝ $(-1)\mathbf{x}=-\mathbf{x}$:
Ինչպես տեսնում ենք այս սահմանումներից, երկու n չափանի վեկտորների գումարը, ինչպես նաև գումարի արտադրյալը թվով n չափանի վեկտոր է:
Թող $\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $\mathbf{y}=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$: Այս դեպքում

1. $\mathbf{x}=\mathbf{y}$, եթե $x_i=y_i$, որտեղ $i=1,2,\cdots,n$
2. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\{x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n\}$
3. $\lambda\,\mathbf{x}=\{\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n\}$

Հեշտ է ստուգել, որ n-չափանի վեկտորների գծային ձևափոխությունները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$
2. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$
3. $\mathbf{x}+0=\mathbf{x}$
4. $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=0$
5. $1.\,\mathbf{x}=\mathbf{x}$
6. $(\alpha\beta)\mathbf{x}=\alpha(\beta\,\mathbf{x})$
7. $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\,\mathbf{x}+\beta\,\mathbf{x}$
8. $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\,\mathbf{x}+\alpha\,\mathbf{y}$

Այստեղ α-ն և β-ն կամայական իրական թվեր են, իսկ 0-ով նշանակվել է զրոյական վեկտորը:

n չափանի բոլոր վեկտորների բազմությունը, վերը նշված գծային գործողություններով, կոչվում է թվաբանական կամ վեկտորական (n չափանի) տարածություն: Այսպիսի տարածությունը սովորաբար նշանակում են R^n-ով:
X գծային վեկտորական տարածություն է կոչվում $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots \in X$ տարրերից կազմված բազմությունը (ցանկացած բնույթի), որոնց համար որոշված են գծային գործողությունները, որոնք բավարարում են վերը նշված $1-8$ պահանջներին (աքսիոմներին): Այդպիսի տարրերը կոչվում են X գծային տարածության վեկտորներ:
Մեր կողմից մտցված ընդհանուր տեսքի վեկտորները կիրառություն են գտնում շատ բնագավառներում, մասնավորապես տնտեսագիտական հաշվարկներում:
Օրինակ. թող ինչ-որ ձեռնարկություն արտադրում է մի արտադրանք անփոփոխ տեխնոլոգիայով և օգտագործում է n հումքային նյութեր: Այդ դեպքում եթե x_k-ն k-րդ հումքային նյութի ինչ-որ քանակություն է, չափված որոշակի միավորներով, ապա $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ տեսքի վեկտորները կարող են ցույց տալ ձեռնարկության հումքի օրական պահանջարկը, ձեռնարկության պահեստներում պահվող հումքի պահուստը , ձեռնարկության կողմից արտադրվող ինչ-որ քանակի արտադրանքի համար անհրաժեշտ հումքի պահանջարկը, և այլն: Նման վեկտորները, ակնհայտ է, կազմում են գծային վեկտորական տարածություն:
Մի ուրիշ գծային (վեկտորական) տարածություն կկազմեն $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ վեկտորները, որտեղ a_i-ն k-րդ հումքային նյութի արժեքն է (դրամներով), որն օգտագործվել է ձեռնարկության կողմից ինչ-որ քանակության արտադրանքի արտադրության համար:
Գծային վեկտորական տարածության օրինակներ են հանդիսանում նաև.
1) տարածության ազատ վեկտորների բազմությունը, որը կոչվում է V_3 եռաչափ վեկտորական տարածություն,
2) հարթության վրա վեկտորների բազմությունը, որը կոչվում է երկչափ վեկտորական տարածություն՝ V_2,
3) ինչ-որ ուղղի վրա գտնվող վեկտորների բազմությունը,որը կոչվում է V_1 միաչափ վեկտորական տարածություն,
4) ֆիքսած տիպի ուղղանկյուն մատրիցների բազմությունը:

Թող տրված են k հատ $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, ... , $\mathbf{x_k}$ վեկտորներ: Յուրաքանչյուր վեկտոր բազմապատկենք λ_i թվով $(i=1,2,\cdots,k)$: Արդյունքում կստանանք $\lambda_1\,\mathbf{x_1}$, $\lambda_2\,\mathbf{x_2}$, …, $\lambda_k\,\mathbf{x_k}$ k նոր վեկտորներ: Գումարելով այդ k վեկտորները կստանանք՝

$$\mathbf{y}=\lambda_1\,\mathbf{x_1}+\lambda_2\,\mathbf{x_2}+\ldots+\lambda_k\,\mathbf{x_k}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\,\mathbf{x_i}$$ վեկտորը:

$\mathbf{y}=\lambda_1\,\mathbf{x_1}+\lambda_2\,\mathbf{x_2}+\ldots+\lambda_k\,\mathbf{x_k}$ վեկտորը կոչվում է $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$,…, $\mathbf{x_k}$ վեկտորների գծային կոմբինացիա: $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ հաստատունները կոչվում են գծային կոմբինացիայի գործակիցներ:

Ակնհայտ է, որ $\mathbf{y}$ վեկտորի կոորդինատները իրենցից ներկայացնում են $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, ..., $\mathbf{x_k}$ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գծային կոմբինացիան: $\mathbf{x_i}$ $(i=1,2,\cdots k)$ վեկտորները, կոչվում են գծորեն կախված եթե գոյություն ունի զրոյական վեկտորին հավասար այդ վեկտորների գծային կոմբինացիան՝

$$\lambda_1\,\mathbf{x_1}+\lambda_2\,\mathbf{x_2}+\ldots+\lambda_k\,\mathbf{x_k}=0 \qquad (1)$$

որտեղ ոչ բոլոր λ_i գործակիցներն են հավասար զրոյի:

Նկատենք, որ եթե $\mathbf{x_i}$ վեկտորներից որոշ մասը գծորեն կախված են, ապա գծորեն կախված կլինեն նաև բոլորը միասին, քանի որ մնացած վեկտորները (1) հարաբերության մեջ կարելի է վերցնել զրոյական գործակիցներով:

$\mathbf{x_i}$ $(i=1,2,\cdots k)$ վեկտորները, որոնք գծորեն կախված չեն, կոչվում են գծորեն անկախ: Այլ բառերով $\mathbf{x_i}$ $(i=1,2,\cdots k)$ վեկտորները կոչվում են գծորեն անկախ, եթե (1) հավասարությունը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ բոլոր λ_i գործակիցները հավասար են զրոյի:

Գծային կոմբինացիայի և գծային կախվածության հասկացությունների միջև գոյություն ունի հետևյալ կապը՝ որպեսզի $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, ..., $\mathbf{x_k}$ վեկտորները լինեն գծորեն կախված, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանցից մեկը լինի մնացածների գծային կոմբինացիան:

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ $\mathbf{x_1}=\{1,0,0\}$, $\mathbf{x_2}=\{0,1,0\}$, $\mathbf{x_3}=\{0,0,1\}$ վեկտորները գծորեն անկախ են:

Լուծում: $\lambda_1\,\mathbf{x_1}+\lambda_2\,\mathbf{x_2}+\lambda_3\,\mathbf{x_3}=0$ հավասարությունը համարժեք է հետևյալ թվային հավասարությունների համակարգին՝

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_1\,1+\lambda_2\,0+\lambda_3\,0=0\\ \lambda_1\,0+\lambda_2\,1+\lambda_3\,0=0\\ \lambda_1\,0+\lambda_2\,0+\lambda_3\,0=0\end{array}\right| \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,$$

ինչը նշանակում է $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ վեկտորների գծորեն անկախությունը:

V_3 եռաչափ տարածության մեջ $\mathbf{x_1}$ և $\mathbf{x_2}$ երկու վեկտորների գծորեն կախվածությունը նշանակում է, որ նրանք համագիծ են, իսկ երեք՝ $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ վեկտորների գծորեն կախվածությունը՝ նրանք համահարթ են: Վեկտորների գծորեն կախվածության վերաբերյալ տեղի ունի հետևյալ հիմնական թեորեմը.

Թեորեմ. եթե $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$,..., $\mathbf{y_k}$ վեկտորները հանդիսանում են $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$,..., $\mathbf{x_n}$ վեկտորների գծային կոմբինացիան, ապա $k>n$ դեպքում նրանք գծորեն կախված են:

Այդ թեորեմից հետևում է, որ n չափանի վեկտորների ցանկացած համախմբություն, բաղկացած ավելի քան n վեկտորներից գծորեն կախված են:

Ապացուցման համար բավական է նկատել, որ ցանկացած n չափանի $\mathbf{y}$ վեկտոր կարելի է ներկայացնել հետևյալ n չափանի n հատ վեկտորների՝

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0),\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0),\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)$$

գծային կոմբինացիայի՝ $\mathbf{y}=\boldsymbol{e}_1\,y_1+y_2\,\boldsymbol{e}_2+...+y_n\,\boldsymbol{e}_n$ տեսքով:

Տարածության ցանկացած վեկտորների համախմբություն կոչվում է այդ տարածության բազիս, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1) տվյալ համախմբության բոլոր վեկտորները գծորեն անկախ են,

2) այդ տարածության ցանկացած վեկտոր ներկայացվում է այդ համախմբության վեկտորների գծային կոմբինացիայի տեսքով:

Բազիսների օրինակներ են հանդիսանում.

1) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ վեկտորների համախմբությունը V_3 տարածության մեջ :

2) $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $\cdots$, $e_n=(0,0,1)$ վեկտորների համախմբությունը R_3 տարածության մեջ:

Թող e_1, e_2, ..., e_n վեկտորները կազմում են n չափանի տարածության բազիս: Այդ դեպքում այդ տարածության ցանկացած **x** վեկտոր կարելի է գրել ըստ այդ բազիսի վերլուծության.

$$\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

Այդ վերլուծության $x_1, x_2, \cdots, x_n$ գործակիցները կոչվում են **x** վեկտորի կոորդինատներ այդ բազիսում:

Նկատենք, որ թվաբանական տարածության n-չափանի վեկտորի կոորդինատները համընկնում են $e_1=(1,0,\cdots,0)$, $e_2=(0,1,\cdots,0)$, ..., $e_n=(0,0,\cdots,1)$ բազիսում նրա կոորդինատների հետ:

Խնդիր 2: Ապացուցել, որ $\mathbf{x_1}=(1,0,0)$, $\mathbf{x_2}=(1,1,0)$, $\mathbf{x_3}=(1,1,1)$ վեկտորները R_3 տարածության մեջ կազմում են բազիս և գտնել $\mathbf{y}=(1,3,1)$ վեկտորի կոորդինատներն այդ բազիսում:

Լուծում: Կազմենք $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ վեկտորների բաղադրիչներից կազմված մատրից , ընդունելով դրանք որպես նրա սյուներ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Այդ մատրիցի ռանգը որոշելու համար հաշվենք որոշիչը

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Հետևաբար, $r=3$ և քանի որ մատրիցի ռանգը հավասար է վեկտորների սյուների թվին՝ նրանք գծորեն անկախ են, իսկ եռաչափ տարածության մեջ ցանկացած 3 գծորեն անկախ վեկտորներ կազմում են բազիս:

2) **y**-վեկտորի կոորդինատները $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ բազիսում նշանակելով λ_1, λ_2, λ_3-ով, կստանանք վեկտորական հավասարում՝

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{x_1} + \lambda_2 \mathbf{x_2} + \lambda_3 \mathbf{x_3} ,$$

որը համարժեք է հետևյալ հավասարումների համակարգին.

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 3 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ 1 = \lambda_3 \end{cases}$$

Լուծելով այդ համակարգը կստանանք՝ $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_1 = -2$:

Վեկտորական տարածության չափ կոչվում է այդ տարածության գծորեն անկախ վեկտորների մաքսիմալ թիվը:

Արժե նկատել, որ տարածության չափը համընկնում է նրա բազիսային վեկտորների թվին:

Վեկտորական տարածության ենթատարածություն է կոչվում դիտարկվող տարածության L վեկտորների բազմությունը, որոնք բավարարում են հետևյալ երկու պայմաններին.

1) եթե $\mathbf{x} \in L$ և $\mathbf{y} \in L$, ապա $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in L$

2) եթե $\mathbf{x} \in L$ և λ կամայական իրական թիվ է, ապա $\lambda\,\mathbf{x} \in L$:

Պարզագույն ենթատարածությունների օրինակներ են հանդիսանում հենց իրենք՝ տարածությունները, ինչպես նաև ենթատարածությունները, բաղկացած միայն զրոյական վեկտորներից: Ավելի իմաստալից օրինակ կստանանք, դիտարկելով R^n-ի վեկտորների այն L բազմությունը, որոնց, ասենք, առաջին կոորդինատը հավասար է զրոյի:

Ենթատարածության բազիսը և չափը սահմանվում են այնպես, ինչպես դրանք սահմանվել են վեկտորական տարածության համար:

Կարելի է ցույց տալ, որ համասեռ գծային հավասարումների լուծումների բազմությունը կազմում է R^n տարածության $n-r$ չափանի ենթատարածություն, որտեղ n-ը համակարգի անհայտների թիվն է, իսկ r-ը՝ համակարգի ռանգը:

Խնդիր 3: Գտնել համասեռ հավասարումների համակարգի լուծումների ենթատարածության բազիսը և չափը՝

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ 3x - 6y + 3z = 0 \end{cases}$$

Լուծում: Տրված համակարգի ռանգը հավասար է մեկի (ակնհայտ է), հետևաբար II և III հավասարումները դեն նետելով, իսկ առաջինը լուծելով x-ի նկատմամբ, կունենանք՝

$$x = 2y - z$$

Ազատ փոփոխականներին հերթով տալով $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ որոշիչի սյուների տարրերին հավասար արժեքներ, կստանանք գծորեն անկախ $c_1 = (2,1,0)$, $c_2 = (-1,0,1)$ վեկտորները, որոնք համակարգի լուծումներ են: Քանի որ $(n-r)$-ը դիտարկվող դեպքում հավասար է 2-ի (լուծումների ենթատարածության չափը), ապա c_1 և c_2 վեկտորները կազմում են այդ ենթատարածության բազիս:

Գծային տարածությունը կոչվում է էվկլիդյան, եթե նրա ցանկացած **x** և **y** վեկտորների զույգին համապատասխանեցվում է ինչ-որ թիվ, որը կոչվում է այդ վեկտորների սկալյար արտադրյալ և այն նշանակում են $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ տեսքով, ընդ որում բավարարվում են հետևյալ պայմանները (աքսիոմները).

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$
2. $(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x_1}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x_2}, \mathbf{y})$
3. $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, որտեղ λ-ն կամայական թիվ է
4. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, եթե $\mathbf{x} \neq 0$ և $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, եթե $\mathbf{x} = 0$:

Գծային տարածությունը, որտեղ ներմուծված չէ սկալյար արտադրյալի հասկացությունը, կոչվում է աֆինական տարածություն:

$\sqrt{(x,x)}$ թիվը կոչվում է **x** վեկտորի երկարություն (մոդուլ) և նշանակվում է $|x|$-ով:

Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը բավարարում է $|(x,y)| \leq |x| \cdot |y|$ անհավասարությանը, որը կոչվում է Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարություն:

x և **y** ոչ զրոյական երկու վեկտորների համար էվկլիդյան տարածության մեջ մտցվում է նաև անկյան գաղափարը՝

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x|.|y|}$$

բանաձևով:

Էվկլիդյան տարածության երկու **x** և **y** վեկտորներ կոչվում են օրթոգոնալ, եթե նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար է 0-ի, այսինքն՝ $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$:

Էվկլիդյան տարածության {$\mathbf{e}_i$} բազիսը կոչվում է օրթոնորմավորված, եթե

1) այն օրթոգոնալ է և 2) $|e_i| = 1$, այսինքն, եթե

$$\left(e_i, e_j\right) = \begin{cases} 1, \text{ եթե } i = j \\ 0, \text{ եթե } i \neq j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

Էվկլիդյան տարածության օրինակ կարող է ծառայել հարթության կամ եռաչափ տարածության ազատ վեկտորների համախմբությունը, որտեղ սկալյար արտադրյալի դերը կկատարի սովորական սկալյար արտադրյալը մտցված

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x||y| . \cos\varphi \qquad \text{բանաձևով:}$$

Դժվար չէ տեսնել, որ $\boldsymbol{i}$, **j**, **k** վեկտորները կազմում են V_3 եռաչափ տարածության օրթոնորմավորված բազիս:

Խնդիր 4: Արտածել տրված $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ և $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ երկու կամայական վեկտորների սկալյար արտադրյալի հաշվման բանաձևը օրթոնորմավորված բազիսի կոորդինատներով:

Լուծում: Թող $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$-ը էվկլիդյան տարածության օրթոնորմավորված բազիս է, և

$$\mathbf{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n$$

$$\mathbf{y} = y_1 \boldsymbol{e}_1 + y_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n \boldsymbol{e}_n$$

Դիտարկենք **x** և **y** վեկտորների սկալյար արտադրյալը.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n,\ y_1 \boldsymbol{e}_1 + y_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n \boldsymbol{e}_n)$$

Օգտվելով սկալյար արտադրյալի աքսիոմներից, կստանանք.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + x_1 y_2 (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_1 y_n (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n) + x_2 y_1 (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + \ldots$$
$$+ x_2 y_n (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_n) + \ldots + x_n y_1 (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) + x_n y_2 (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_n y_n (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \left(e_i, e_j\right)$$

Հաշվի առնելով, որ

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, \text{ եթե } i = j \\ 0, \text{ եթե } i \neq j, \end{cases}$$

կստանանք

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

Սահմանենք գծային ձևափոխության սեփական վեկտորի և սեփական արժեքի հասկացությունները: Ցանկացած $\mathbf{x}$ ոչ զրոյական վեկտոր կոչվում է գծային ձևափոխության սեփական վեկտոր, եթե

$$A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \qquad (2)$$

որտեղ λ-ն ինչ-որ թիվ է, որը կոչվում է տրված ձևափոխության սեփական արժեք:

Եթե ինչ-որ բազիսում A գծային ձևափոխությունը և $\mathbf{x}$ վեկտորը տրված են

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

վեկտորներով, ապա (2) հավասարմանը կհամապատասխանի մատրիցային հավասարում, որը համարժեք է թվային հավասարումներին՝

$$\begin{cases} a_{11}\ell + a_{12}m + a_{13}n = \lambda\ell \\ a_{21}\ell + a_{22}m + a_{23}n = \lambda m \\ a_{31}\ell + a_{32}m + a_{33}n = \lambda n \end{cases} \text{ կամ } \begin{cases} (a_{11}-\lambda)\ell + a_{12}m + a_{13}n = 0 \\ a_{21}\ell + (a_{22}-\lambda)m + a_{23}n = 0 \\ a_{31}\ell + a_{32}m + (a_{33}-\lambda)n = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Ստացված համասեռ գծային հավասարումների համակարգը ℓ, m, n փոփոխականների նկատմամբ կունենա 0-ից տարբեր լուծումներ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա որոշիչը հավասար է 0-ի (զրոյական լուծումը մեզ չի հետաքրքրում, քանի որ $x \neq 0$): Այստեղից հետևում է, որ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Վերջին հավասարումը կոչվում է տրված գծային ձևափոխության բնութագրիչ հավասարում: (4)-ի ցանկացած λ

իրական արմատ հանդիսանում է գծային ձևափոխության սեփական արժեք: λ թվին համապատասխանող սեփական վեկտորի կոորդինատները գտնվում են (3) համակարգից:

Դիտողություն. Եթե **x**-ը տրված ձևափոխության սեփական վեկտոր է, ապա նրան կոլինեար ոչ զրոյական վեկտորը ևս կլինի այդ ձևափոխության սեփական վեկտոր՝ այդ նույն սեփական արժեքով:

Խնդիր 5 : Գտնել ինչ-որ բազիսում

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

մատրիցով տրված գծային ձևափոխության սեփական վեկտորներն ու սեփական արժեքները:

Լուծում: Կազմենք A մատրիցի համար բնութագրիչ հավասարումը՝

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

$$(2-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda)+3+2(-3-\lambda)+5(-2-\lambda)=0$$

$$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0,(\lambda+1)^3=0,\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1:$$

Ստացված սեփական արժեքները տեղադրենք հավասարումների

$$\begin{cases} (2-\lambda)\ell-1\cdot m+2n=0 \\ 5\ell+(-3-\lambda)m+3n=0 \\ -1\ell+0m+(-2-\lambda)n=0 \end{cases}$$

համակարգում, որտեղ ℓ,m,n-ը **x** սեփական վեկտորի կոորդինատներն են:

Այդ դեպքում $\begin{cases} 3\ell-m+2n=0 \\ 5\ell-2m+3n=0 \\ -\ell-n=0 \end{cases}$

$$\frac{l}{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}} = \frac{m}{-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}} = \frac{n}{\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{vmatrix}} = t$$

Որտեղից, $\ell = 1 \cdot t$, $m = 1 \cdot t, n = -1 \cdot t$, հետևաբար, **x** $= \{1,1,-1\} t$, որտեղ t-ն 0-ից տարբեր կամայական իրական թիվ է:

Թեմա 9 . *Քառակուսային ձևեր և նրանց բերումը կանոնական տեսքի*

Դասագիրք՝ $[3]$, մատրիցներ գլուխ III § 25:

Ցուցումներ

Երկու x_1 և x_2 փոփոխականների քառակուսային ձև է կոչվում այդ փոփոխականների նկատմամբ համասեռ, երկրորդ կարգի բազմանդամը՝

$$\phi\left(x_1, x_2\right) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 ,$$

որտեղ a_{11}, a_{12}, a_{22}-ը քառակուսային ձևի գործակիցներ են: Եթե ընդունենք, որ $a_{12} = a_{21}$ ապա $\phi\left(x_1, x_2\right)$-ը կարելի է գրել

$\phi\left(x_1, x_2\right) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ տեսքով:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ մատրիցը կոչվում է քառակուսային ձևի մատրից:

Քառակուսային ձևը անվանում են կանոնական տեսքի, եթե այն ունի միայն փոփոխականների քառակուսիներ, այսինքն, եթե $a_{12} = a_{21} = 0$: Քառակուսային ձևի կանոնական տեսքի բերման մեթոդները կիրառվում են II կարգի կորերի հավասարումների կանոնական տեսքի բերելու ժամանակ:

Խնդիր: $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 20 = 0$ կորի հավասարումը բերել կանոնական տեսքի :

Լուծում: Կորի հավասարումը գրենք

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 = 20 \text{ տեսքով:}$$

Տրված հավասարման ավագ անդամների քառակուսային ձևը ունի $17x^2 + 12xy + 8y^2$ տեսքը:

Կազմենք բնուգագրիչ հավասարումը

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(17-\lambda)(8-\lambda)-36=0,\ \lambda^2-25\lambda+100=0,\ \lambda_1=5,\ \lambda_2=20:$$

Տրված քառակուսային ձևի կանոնական տեսքը կլինի $5x^2+20y^2$:

Որպեսզի գտնենք բազիսը, որտեղ ձևն ունի այդպիսի տեսք, գրենք համակարգը՝

$$\begin{cases} (17-\lambda)\ell+6m=0 \\ 6\ell+(8-\lambda)m=0 \end{cases}$$

Տեղադրելով նրա մեջ ստացված բնութագրիչ թվերը կստանանք՝

$$\begin{cases} 12\ell+6m=0 \\ 6\ell+3m=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3\ell+6m=0 \\ 6\ell-12m=0 \end{cases}$$

$$\frac{l}{m}=\frac{1}{-2},\quad \frac{l}{m}=\frac{2}{1}\quad \ell=t, m=-2t, \ell=2t, m=t:$$

Վերցնելով համակարգի նորմավորված լուծումները, կգտնենք վեկտորները, որոնք կազմում են այդ բազիսը.

$$i=\{\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\},\ j=\{\frac{2}{5},\frac{1}{\sqrt{5}}\}:$$

Կորի կանոնական հավասարումը կլինի՝

$5x^2+20y^2=20$, կամ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ (էլիպս):

ԲԱԺԻՆ II
Անալիզի ներածություն: Մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցյալ հաշիվ

Թեմա 1. *Փոփոխական մեծություն և ֆունկցիա*

Դասագիրք [2] գլուխ 1, խնդիրների ժողովածու [5]

Փոփոխական մեծություն և թիվ

Ցուցումներ

Ուսանողին խորհուրդ է տրվում կրկնել անհավասարությունների հետ գործողությունները, քանի որ մաթեմատիկական անալիզում հաճախ են առնչվում նրանց հետ: Լայն կիրառություն ունի նաև մոդուլի կամ մեծության բացարձակ արժեքի հասկացությունը՝

$$|u| = \begin{cases} u, & \text{երբ } u \geq 0, \\ -u, & \text{երբ } u < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Բերենք որոշ հարաբերություններ, որոնք օգտակար են հաշվի առնել տարբեր ձևափոխությունների կատարման ժամանակ.

$$|u|^2 = u^2 \qquad (2)$$

$$\sqrt{u^2} = |u| \qquad (3)$$

$$\log_a u^2 = \log_a |u|^2 = 2\log_a |u| \left(u \neq 0\right) \qquad (4)$$

Այդ հավասարումները տեղի ունեն u-ի ցանկացած արժեքների դեպքում, բացառությամբ (4)-ի, որը տեղի ունի, երբ $u \neq 0$, իսկ $\sqrt{u^2} = u$ ճիշտ է միայն $u \geq 0$ համար, իսկ $\log_a u^2 = 2\log_a u$ երբ $u > 0$:

Ֆունկցիա

Ցուցումներ

Ֆունկցիայի հասկացությունը մաթեմատիկական անալիզի հիմնական հասկացությունն է: Ֆունկցիան համարվում է տրված, եթե տրված է նրա արգումենտի փոփոխման տիրույթը: Իսկ երբ ֆունկցիան տրվում է անալիտիկական եղանակով, ապա հաճախ չի տրվում արգումենտի փոփոխման տիրույթը, այս դեպքերում ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, կամ էլ որ նույնն է արգումենտի փոփոխման տիրույթը, դա արգումենտի այն արժեքների բազմությունն է, որոնց համար ֆունկցիան իմաստ ունի:

Խնդիր $\mathbf{1}$: Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝

ա) $y=\sqrt{x-1}$, բ) $y=\sqrt{2-x}$, գ) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$,

դ) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{2-x}$, ե) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$:

Լուծում: ա) $y=\sqrt{x-1}$ ֆունկցիայի արժեքները հաշվել հնարավոր է միայն $(x-1)$-ի ոչ բացասական արժեքների դեպքում, հետևաբար, $y=\sqrt{x-1}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը որոշվում է $x-1\geq 0$ կամ $x\geq 1$ անհավասարման միջոցով:

բ) Դատելով նախորդին հանգունորեն, կստանանք, որ $y=\sqrt{2-x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կորոշվի $x\leq 2$ անհավասարման միջոցով:

գ) Այստեղ պետք է պահանջել որ $\sqrt{x-1}$ և $\sqrt{2-x}$ արտահայտությունները գոյություն ունենան միաժամանակ, այսինքն $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կստացվի

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases}$$

անհավասարումների համակարգի լուծումից:

Հետևաբար, ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կլինի $1\leq x\leq 2$:

դ) Դատելով նախորդ դեպքին հանգունորեն, մենք պետք է հաշվի առնենք, որ ունենք բաժանում $\sqrt{x-1}$-ի վրա, իսկ քանի որ 0-ի վրա բաժանել չի կարելի, հետևաբար, $x-1\geq 0$ պայմանը պետք է փոխարինել $x-1>0$ պայմանով, և, հետևաբար, այս դեպքում ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կստացվի

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases}$$

հավասարումների համակարգի լուծման արդյունքում:

Եվ այսպես, ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կլինի $1<x\leq 2$:

ե) Նույնպիսի դատողություններով ստանում ենք, որ $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կլինի

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 2-x>0 \end{cases}$$

համակարգի լուծումը՝ այսինքն $1<x<2$:

Խնդիր 2: Գտնել $y=\arccos\dfrac{2x}{x+1}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

Լուծում: Քանի որ $y=\arccos u$ ֆունկցիան որոշված է միայն $-1\le u\le 1$ համար, ապա տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կստանանք.

$-1\le\dfrac{2x}{x+1}\le 1$ անհավասարումների համակարգից: Նկատենք, որ $\dfrac{2x}{x+1}=2-\dfrac{2}{x+1}$: Անհավասարումների վերջին համակարգը ձևափոխենք $-1\le 2-\dfrac{2}{x+1}\le 1$, $-3\le-\dfrac{2}{x+1}\le -1$, $3\ge\dfrac{2}{x+1}\ge 1$:

Անցնելով հակադարձ մեծություններին, կստանանք՝

$$\frac{1}{3}\le\frac{x+1}{2}\le 1\ ,\quad \frac{2}{3}\le x+1\le 2\ ,\quad -\frac{1}{3}\le x\le 1:$$

Այսպիսով, տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կլինի $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$ հատվածը:

Այժմ դիտարկենք ֆունկցիաների գրաֆիկների կառուցման օրինակներ:

Խնդիր 3: Կառուցել

$$y=1-\sqrt{\left|2x^2-4\right|} \qquad (5)$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Լուծում: Այս դեպքում (5) հավասարումը հեշտ ձևափոխվում է դեռևս անալիտիկ երկրաչափությունից ծանոթ գծի հավասարման: Կատարենք այդ ձևափոխությունը:

$$(y-1)^2 = 2\left|x^2-2\right|(y\le 1)$$

Լրացուցիչ $y \le 1$ պայմանը անհրաժեշտ է, քանի որ արմատից ազատվելու նպատակով $y-1=-\sqrt{\left|2x^2-4\right|}$ հավասարման երկու մասը քառակուսի բարձրացնելով ստացված

$$(y-1)^2 = \left|2x^2-4\right|$$

հավասարումը բացի սկզբնական տրված $y-1=-\sqrt{\left|2x^2-4\right|}$ ճյուղից տալիս է նաև

$y-1=\sqrt{\left|2x^2-4\right|}$ ավելորդ ճյուղը:

Դիտարկենք երկու դեպքերը.

1. $x^2-2\ge 0$, պայմանից կստանանք $\left|x^2-2\right| = x^2-2$ և հավասարումը կընդունի

$$\frac{x^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1\,(y\le 1) \qquad (6)$$

տեսքը: Այս հավասարումը հիպերբոլի հավասարում է (նրա “ներքևի” կեսի, քանի որ $y\le 1$) $C(0,1)$ կենտրոնով $a=\sqrt{2}$ իրական կիսաառանցքով և $b=2$ կեղծ կիսաառանցքով:

2. $x^2-2<0$, այս դեպքում $\left|x^2-2\right| = -\left(x^2-2\right)$ և հավասարումը կընդունի

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \quad (y\le 1) \qquad (7)$$

Այս հավասարումը էլիպսի հավասարում է (նրա “ներքևի” կեսի, քանի որ $y\le 1$) այն նույն կենտրոնով և նույն կիսաառանցքներով (մեծ կիսաառանցքը $a=2$, փոքրը՝ $b=\sqrt{2}$), ինչը (6) հիպերբոլինն է, էլիպսի ֆոկուսները ընկած են Oy առանցքի վրա:

Այժմ դժվար չէ կառուցել $y=1-\sqrt{\left|2x^2-4\right|}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 15): Նրա P_1A_1 և P_2A_2 աղեղները հանդիսանում են (6)

հիպերբոլի աղեղներ, իսկ A_1BA_2 աղեղը (7) էլիպսի աղեղն է: Վերջում պարզենք թե ինչպիսին է

$$y = f(x) \tag{8}$$

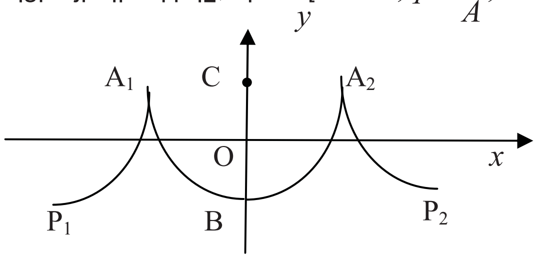
ֆունկցիայի գրաֆիկից,

$$x = pX + m, y = qY + m \tag{9}$$

գծային ձևափոխություններով կառուցվում

$$Y = Af(pX + m) + B \tag{10}$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը, որտեղ $A \neq 0, q = \frac{1}{A}, n = -\frac{B}{A}, p \neq 0$,



Նկ.15

(9) գծային ձևափոխություններից կստանանք՝

$$X = \frac{1}{p}x - \frac{m}{p}, \quad Y = Ay + B \tag{11}$$

Սա (9) ձևափոխության հակադարձն է:

(11) ձևափոխությունը կարելի է իրականացնել մի քանի պարզ ձևափոխությունների շղթայով, որոնք հանդիսանում են նրա մասնավոր դեպքերը: Դիտարկենք այդ ձևափոխությունները և պարզաբանենք նրանց երկրաչափական իմաստը:

1. $x_1 = \frac{1}{x}, \quad y_1 = y \, (p > 0)$ ձևափոխությունը գրաֆիկի սեղմում է $y = f(x)$ առանցքի նկատմամբ $\frac{1}{p}$ գործակցով, այսինքն գրաֆիկի յուրաքանչյուր կետ տեղափոխվում է Ox առանցքին զուգահեռ ուղղով մոտենալով Oy առանցքին p անգամ, երբ $p > 1$ և հեռանում է նրանից $\frac{1}{p}$ անգամով, երբ $p < 1$: Երբ $p = 1$, ապա բոլոր կետերը

մնում են անշարժ, այսինքն այդ դեպքում ձևափոխությունը նույնական է:

Արդյունքում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ձևափոխվում է $y_1=f(px_1)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

Եթե $p>0$, ապա նախապես պետք է դիտարկել սեղմման ձևափոխությունը Oy առանցքի նկատմամբ $\frac{1}{|p|}$ գործակցով, որը կփոխադրի $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $y_1'=f(|p|x_1')$-ի, որից հետո կատարել Oy առանցքի նկատմամբ համաչափ ձևափոխություն, այսինքն՝ $x_1=-x_1', y_1=y_1'$ ձևափոխությունը: Այս ձևափոխության դեպքում յուրաքանչյուր կետ ձևափոխվում է y-ների առանցքի նկատմամբ համաչափ կետի: $y_1'=f(|p|x_1')$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ձևափոխվում է $y_1=f(-|p|x_1)=f(px_1)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, որը համաչափ է Oy առանցքի նկատմամբ: Oy առանցքի սեղմումը և այդ նույն առանցքի նկատմամբ համաչափ ձևափոխությունը նպատակահարմար է կատարել միաժամանակ, առանց միջանկյալ գրաֆիկի կառուցման, որը ստացվում է $\frac{1}{|p|}$ գործակցով սեղմում կատարելու ժամանակ:

2. $x_2=x_1$, $y_2=Ay_1\ (A>0)$ ձևափոխությունը Ox առանցքի նկատմամբ A գործակցով սեղմում է, այսինքն յուրաքանչյուր կետ տեղափոխվում է Oy առանցքին զուգահեռ ուղղով, մոտենալով Ox առանցքին $\frac{1}{A}$ անգամ, եթե $A<1$, կամ հեռանում է նրանից A անգամ, եթե $A>1$, երբ $A=1$ ապա բոլոր կետերը մնում են անշարժ, այսինքն, ունենք նույնական ձևափոխություն:

Այս ձևափոխության ժամանակ է $y_1=f(px_1)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ձևափոխվում է $y_2=f(px_2)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Եթե $A<0$, ապա 1 դեպքին համանման Ox առանցքի նկատմամբ սեղմումը լրացվում է այդ նույն առանցքի նկատմամբ համաչափությամբ:

3. $x_3 = x_2 - \frac{m}{p}, y_3 = y_2$ ձևափոխությունը Ox առանցքի ուղղությամբ զուգահեռ տեղափոխում է $\left|\frac{m}{p}\right|$ մեծությամբ: Եթե $\frac{m}{p} < 0$, ապա տեղափոխությունը կատարվում է Ox առանցքի դրական, իսկ եթե $\frac{m}{p} > 0$՝ բացասական ուղղությամբ, երբ $m = 0$, ապա ձևափոխությունը կլինի նույնական:

Այսպիսով, $y_3 = Af\left[p\left(x_3 + \frac{m}{p}\right)\right] = Af\left(px_3 + m\right)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y_2 = f\left(px_2\right)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից տեղաշարժման ձևափոխության միջոցով:

4. $X = x_3, Y = y_3 + B$ ձևափոխությունը Oy առանցքի ուղղությամբ զուգահեռ տեղափոխություն է $|B|$ մեծությամբ: Երբ $B > 0$, ապա տեղափոխությունը կատարվում է դրական ուղղությամբ, իսկ երբ $B < 0$, ապա Oy-ի բացասական ուղղությամբ է, երբ $B = 0$ ձևափոխությունը նույնական է:

Արդյունքում $Y = Af\left(pX + m\right) + B$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y_3 = Af\left(px_3 + m\right)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը Oy առանցքի ուղղությամբ տեղաշարժով:

(3) և (4) ձևափոխությունները կարելի է դիտարկել որպես մեկ ձևափոխություն $X = x_2 - \frac{m}{p}, \quad Y = y_2 + B$ և մեկնաբանել այն որպես տեղափոխության ձևափոխություն, որի մեծությունն ու ուղղությունը որոշվում են $\boldsymbol{S}\left\{-\frac{m}{n}, B\right\}$ վեկտորով: Այս դեպքում երկու կառուցումները փոխարինվում են մեկով:

Դիտարկված ձևափոխությունները կարելի է կատարել և այլ կարգով, բայց պետք է այս դեպքում նկատի ունենալ, որ երբ ձևափոխությունը սկսվում է տեղափոխությունից, և ոչ թե սեղմումից, ապա տեղափոխվող մեծությունը այն չի լինի ինչ (3) և (4) կառուցումների ժամանակ էր: Իսկապես, եթե (11) բանաձևերը գրենք

$$X=\frac{1}{p}(x-m),\quad Y=A\left(y+\frac{B}{A}\right) \qquad (12)$$

տեսքով, ապա կարելի է սկզբից կատարել տեղափոխությունը, որը կորոշվի

$\boldsymbol{S}\left\{-\frac{m}{n},B\right\}$ վեկտորով, այսինքն $x_1=x-m,\quad y_1=y+\frac{B}{A}$: Իսկ հետագայում կատարել $X=\frac{1}{p}x_1,\quad Y=Ay_1$ սեղմումը:

Տեղափոխության մեծությունն ու ուղղությունն այժմ կորոշվեն m և $\frac{B}{A}$ մեծություններով և ոչ թե $\frac{m}{p}$ և B-ով, ինչպես կար (3) և (4) ձևափոխության ժամանակ:

Խնդիր 4: $y=\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխությունից ստանալ $y=-2\sin(2x+2)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

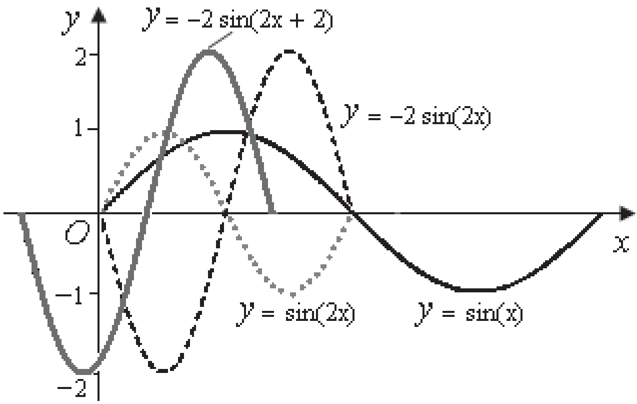
Լուծում: Այդ կառուցումը կարելի է կատարել հետևյալ ձևափոխությունների շղթայի օգնությամբ` $y=\sin x$, $y_1=\sin 2x_1$, $y_2=-2\sin 2x_2$, $y=-2\sin 2(x+1)$: Երկրաչափորեն այն կբերի հետևյալ կառուցումներին (նկ.16)

1) Կառուցենք $y=\sin x$ ֆունկցիայի մեկ ալիքը:

2) Սինուսոիդի վրա վերցնենք մի քանի կետեր և երկու անգամ փոքրացնենք նրանց աբսցիսները չփոխելով օրդինատները` $x_1=\frac{1}{2}x,\quad y_1=y$: Միացնենք այդ կետերը հոծ գծով կստանանք $y_1=\sin 2x_1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

3) Նոր ստացված գրաֆիկի կետերի օրդինատները մեծացնենք 2 անգամ, իսկ հետո փոխենք նրանց նշանները, չփոխելով աբսցիսները` $y_2=-2y_1,\quad x_2=x_1$: Միացնելով այդ կետերը հոծ գծով կստանանք $y_2=-2\sin 2x_2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

4) 3)-ում ստացված կետերը տեղափոխենք աբսցիսների առանցքի



Նկ.16

ուղղությամբ -1 միավորով (այսինքն 1 միավոր ձախ՝ $x = x_2 - 1, \quad y = y_2$): Միացնելով ստացված կետերը հոծ գծով կստանանք $y = -2\sin 2\left(x+1\right) = -2\sin\left(2x+2\right)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Խնդիրը լուծված է:

Ուսանողին խորհուրդ է տրվում կատարել կառուցումը սկսելով տեղափոխությունից, այսինքն փոխելով վերը շարադրված շղթան՝ $y = \sin x$, $y_1 = \sin\left(x_1 + 2\right)$, $y_2 = \sin\left(2x_2 + 2\right)$, $y = -2\sin\left(2x+2\right)$ ձևափոխությունների շղթայով:

Թեմա 2. ***Ֆունկցիայի սահմանը և անընդհատությունը***

Սահման

[5], Գլուխ IV, §2, 4.2.1−4.2.10:

Ցուցումներ

Կարևոր է հաստատագրել, որ ֆունկցիայի սահմանը՝ $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right)$, լիովին որոշվում է $x = a$ կետի շրջակայքի կետերում ֆունկցիայի արժեքներով, առանց $x = a$ կետի: $x = a$ կետում ֆունկցիան կարող է և որոշված չլինել: Հենց դրա վրա էլ հիմված է ֆունկցիայի նույնական ձևափոխության հնարավորությունը սահմանի նշանի տակ, $x = a$ կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում, որից $x = a$ կետը հեռացված է:

Խնդիր 1: Գտնել $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x-x^2}{2-3x+x^2}$

Լուծում: Այստեղ չի կարելի կիրառել քանորդի սահմանի վերաբերյալ թեորեմը, քանի որ հայտարարի սահմանը հավասար է զրոյի՝

$$\lim_{x\to 1}\left(2-3x+x^2\right)=2-3\lim_{x\to 1}x+\left(\lim_{x\to 1}x^2\right)=2-3\cdot 1+1^2=0$$

Բայց համարիչի սահմանը ևս հավասար է զրոյի: Տրված արտահայտության մեջ համարիչը և հայտարարը ունեն ընդհանուր $\left(x-1\right)$ արտադրիչը: Առանձնացնենք այդ արտադրիչը և կրճատենք նրանով, համարելով որ $x\neq 1$

$$\frac{2-x-x^2}{2-3x+x^2}=\frac{\left(2+x\right)\left(1-x\right)}{\left(2-x\right)\left(1-x\right)}=\frac{2+x}{2-x}$$

$$f\left(x\right)=\frac{2-x-x^2}{2-3x+x^2} \quad \text{և} \quad \varphi\left(x\right)=\frac{2+x}{2-x}$$

ֆունկցիաներն ունեն տարբեր որոշման տիրույթներ, թեկուզև այդ տարբերությունը արտահայտվում է լոկ $x=1$ կետով ($f\left(x\right)$-ը այդ կետում որոշված չէ, $\varphi\left(x\right)$-ը որոշված է) :

“Զրոյով կրճատել չի կարելի” պնդման իմաստը տվյալ դեպքում վերաբերում է $x=1$ կետը պարունակող տիրույթին: Ցանկացած այլ տիրույթում, որը չի պարունակում $x=1$ կետը՝ $f\left(x\right)\equiv\varphi\left(x\right)$, այսինքն, կրճատումը կարելի է: Իսկ քանի որ $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)$ լիովին որոշվում է $f\left(x\right)$-ի վարքով $x=a$ կետի շրջակայքում, առանց $x=a$ կետի, ապա $\lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1}\varphi\left(x\right)$: Բայց $\lim\limits_{x\to 1}\varphi\left(x\right)$ հաշվելու համար կարելի է կիրառել քանորդի սահմանի վերաբերյալ թեորեմը

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2+x}{2-x}=\frac{2+\lim\limits_{x\to 1}x}{2-\lim\limits_{x\to 1}x}=\frac{2+1}{2-1}=3$$

Հետևաբար, $\lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x-x^2}{2-3x+x^2}=3$

Այս խնդրի լուծումը կարճ կգրվի այսպես

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-x-x^2}{2-3x+x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(2+x)(1-x)}{(2-x)(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2+x}{2-x}=\frac{2+1}{2-1}=3$$

Խնդրի լուծումը ավելի է հեշտանում, երբ $x\to\infty$: Այս դեպքում, արդեն պետք չէ խոսել ֆունկցիայի արժեքների մասին «սահմանային կետում» (այդպիսին այս դեպքում չկա):

Խնդիր 2: Գտնել $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})$

Լուծում: Երբ $x\to+\infty$, $\sqrt{x+2}$ և $\sqrt{x-3}$ մեծությունները հանդիսանում են անվերջ մեծ մեծություններ: Հետևաբար, այս դեպքում մենք ունենք երկու անվերջ մեծ դրական մեծությունների տարբերություն: Այդպիսի տարբերության մասին առանց լրացուցիչ հետազոտությունների որոշակի ոչինչ ասել հնարավոր չէ ($+\infty-\infty$ տեսքի անորոշություն): Դրա համար նախապես ձևափոխենք տրված ֆունկցիայի արտահայտությունը՝

$$f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}=\frac{(x+2)-(x-3)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}=\frac{5}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}$$

Այժմ, նոր ստացված արտահայտության հայտարարում մենք ունենք ոչ թե տարբերություն, այլ երկու անվերջ մեծ մեծությունների գումար, որն իր հերթին անվերջ մեծ է, հետևաբար, տրված մեծությունը հանդիսանում է անվերջ փոքր, այսինքն՝

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}=0$$

Խնդիր 3: Գտնել $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^6+3x^2+1}-\sqrt{x^6-5x^2+2})$:

Լուծում: Նորից ունենք երկու դրական անվերջ մեծ մեծությունների տարբերություն: Ձևափոխենք ֆունկցիայի արտահայտությունը՝

$$f(x)=\sqrt{x^6+3x^2+1}-\sqrt{x^6-5x^2+2}=$$

$$=\frac{x^6+3x^2+1-x^6+5x^2-2}{\sqrt{x^6+3x^2+1}+\sqrt{x^6-5x^2+2}}=\frac{8x^2-1}{\sqrt{x^6+3x^2+1}+\sqrt{x^6-5x^2+2}}$$

Սակայն այս դեպքում այդ ձևափոխությունը բավարար չէ, քանի որ ստացվեց երկու անվերջ մեծ մեծությունների հարաբերություն ($\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն): Շարունակենք ձևափոխությունները՝

բաժանելով հայտարարը և համարիչը x^2 վրա

$$\frac{8x^2-1}{\sqrt{x^6+3x^2+1}+\sqrt{x^6-5x^2+2}}=\frac{8-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{x^2-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^4}}}$$

Այժմ մենք համարիչում ունենք սահմանափակ, իսկ հայտարարում անվերջ մեծ մեծություն, հետևաբար, արդյունքում մենք կստանանք անվերջ փոքր մեծություն: Եվ այսպես

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^6+3x^2+1}-\sqrt{x^6-5x^2+2})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{x^2-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^4}}}=0$$

Խնդիր 4 : Գտնել $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-\sqrt{x^2+1}\right)$

Լուծում: Այստեղ ևս մենք ունենք երկու դրական անվերջ մեծ մեծությունների տարբերություն: Սակայն այս դեպքում նպատակահարմար է ձևափոխությունները կատարել այլ կերպ, այսպես՝

$$f(x)=\sqrt{2x^2-3}-\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=|x|\left(\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right):$$

Ստացանք $|x|$ անվերջ մեծ մեծության արտադրյալը

$\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ մեծությանը, որն անվերջ փոքր չէ: Հետևաբար,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^3-3}-\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to+\infty}|x|(\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})=+\infty$$

Դիտողություն. 4 խնդրում բերված ձևափոխությունը չէր կարելի կիրառել 2 և 3 խնդիրներում, քանի որ արդյունքում մենք կստանայինք անվերջ մեծ մեծության արտադրյալը անվերջ փոքրի վրա ($\infty \cdot 0$ տեսքի անորոշություն):

Ֆունկցիայի անընդհատությունը

Խնդրագիրք$[5]$, Գլուխ IV, $\S 2$, $4.2.14-4.2.16$:

Ցուցումներ

Անընդհատությունը հանդիսանում է ֆունկցիայի հիմնական հատկություններից մեկը, որը դիտարկվում է մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում: $f(x)$ ֆունկցիայի համար, որը x_0 կետում անընդհատ է տեղի ունի

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0) \qquad (1)$$

հավասարությունը, այսինքն $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի համար սահմանի նշանի և ֆունկցիայի նշանի տեղերը կարելի է փոխել: Մասնավորապես, այդ հատկությունը տեղի ունի, երբ $f(x)$-ը տարրական ֆունկցիա է, քանի որ տարրական ֆունկցիան անընդհատ է իր որոշման տիրույթի ցանկացած կետում (տես $[2]$ դասագիրքի գլուխ II $\S 9$):

(1) հավասարությունը հնարավորություն է տալիս շատ հեշտ գտնել անընդհատ ֆունկցիայի (մասնավորապես տարրական) սահմանները: Ֆունկցիայի սահմանի գտնելը հանգում է ֆունկցիայի արժեքի հաշվելուն սահմանային կետում:

Իսկ եթե $f(x_0)$–ն որոշված չէ, ապա (1) հավասարությունը կորցնում է իմաստը: Բայց քանի որ մենք արդեն գիտենք (տես նախորդ կետը), սահմանի նշանի տակ կարող ենք ձևափոխություններ կատարել, որոնք նույնական են x_0-ի շրջակայքում, որից x_0-ն հեռացված է, ապա առանձնակի հետաքրքրություն է ներկայացնում $f(x)$ ֆունկցիայի փոխարինումը $\varphi(x)$-ով, որն այդ x_0 կետում անընդհատ է: Այս դեպքում, ակնհայտ է,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \qquad (2)$$

Խնդիր: Գտնել $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$

Լուծում: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$ ֆունկցիան հանդիսանում է տարրական ֆունկցիա:

Բայց երբ $x_0 = 4$ այն որոշված չէ և, հետևաբար, այդ կետում խզվում է: Այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի արգումենտի մնացած բոլոր արժեքների դեպքում ունենք՝

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+5}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)(\sqrt{x}+2)} =$$

$$= \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(x+5-9)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x}+2} = \varphi(x)$$

$\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x}+2}$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0 = 4$ կետում:

Հետևաբար,

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{4+5}+3}{\sqrt{4}+2} = \frac{3}{2}$$

Թեմա 3. *Ածանցյալ և դիֆերենցիալ*

Դասագիրք $[2]$ գլուխ III

Ածանցյալ

Խնդրագիրք$[5]$

$\S 3, 4.3.3-4.3.75, 4.3.95-4.3.100, 4.3.105-4.3.106$:

Դիֆերենցիալ

Խնդրագիրք$[5]$ $\S 3, 4.3.108-4.3.109$:

Թեմա 4. *Դիֆերենցելի ֆունկցիաների հատկությունները*

Դասագիրք $[2]$ գլուխ IV

Ռոլլի, Լագրանժի, Կոշու թեորեմները

Խնդրագիրք$[5]$, $\S 4$, $4.4.4$:

Լոպիտալի կանոնը

Խնդրագիրք $\left[5\right]$, §4, 4.4.5 :

Թեյլորի բանաձևը

Խնդրագիրք $\left[5\right]$, §4, 4.4.6 :

Ցուցումներ

Թեյլորի բանաձևն ունի մեծ տեսական և գործնական նշանակություն: Մասնավորապես, նրա օգնությամբ կարելի է հաշվել $f\left(x\right)$ ֆունկցիայի մոտավոր արժեքը այդ ֆունկցիայի և նրա ածանցյալների հայտնի արժեքներով ինչ-որ a կետում և գնահատել այդ հաշվարկի ճշտությունը: Այսպես, օրինակ, համարելով Թեյլորի բանաձևում $n=1$, կստանանք՝

$$f\left(x\right)=f\left(a\right)+f'\left(a\right)\left(x-a\right)+R_1\left(x\right) \qquad (1)$$

որտեղ $R_1\left(x\right)=\dfrac{1}{2}f''(\xi)\left(x-a\right)^2 \qquad \xi\in\left(a,x\right)$

Թեյլորի բանաձևում $f\left(a\right)$-ն իրենից ներկայացնում է $f\left(x\right)$ ֆունկցիայի արժեքը $x=a$ կետում, II անդամը այդ ֆունկցիայի ածանցյալի արժեքն է այդ նույն կետում բազմապատկած $\Delta x=\left(x-a\right)$-ով: Անտեսելով R_1 մնացորդային անդամը կստանանք ֆունկցիայի մոտավոր արժեքը դիֆերենցիալի միջոցով:

$$f\left(x\right)\approx f\left(a\right)+f'\left(a\right)\left(x-a\right) \qquad (2)$$

Իսկ այժմ մենք կարող ենք գնահատել դիտարկվող դեպքում առաջացող շեղումը: Այն չի գերազանցում

$$\left|R_1\right|=\frac{1}{2}\,|\,f''(\xi)\,|\left(x-a\right)^2 \qquad (3)$$

մեծությունը:

Խնդիր 1: Օգտվելով $y=e^x$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալից հաշվել $e^{0,1}$ մեծության մոտավոր արժեքը, որից հետո Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամի օգնությամբ գնահատել այդ հաշվարկի ճշտությունը:

Լուծում: Այստեղ $f\left(x\right)=e^x$, $f'\left(x\right)=e^x$, $f''\left(x\right)=e^x$:

Վերցնելով $a=0, x=0.1$ կստանանք $f\left(a\right)=f'\left(a\right)$: $\left(2\right)$ և $\left(3\right)$ բանաձևերից $e^{0.1}\approx 1+1\cdot 0,1=1,1$; $\left|R_1\right|$-ը գնահատելու համար նկատենք, որ $\zeta<0,1$; $e^{\zeta}<e^{0,1}<e^{0,5}=\sqrt{e}<\sqrt{3}<2$, հետևաբար,

$$\left|R_1\right| = \frac{1}{2}\cdot 0,01\cdot\ e^{\xi} < \frac{1}{2}\ \cdot\ 0,01\cdot 2 = 0,01$$

Եվ այսպես, $e^{0,1} = 1,1 \quad \delta = 0,01$ ճշտությամբ:

Թեյլորի բանաձևը հնարավորություն է տալիս հաշվել ֆունկցիայի արժեքը նախօրոք տրված ցանկացած ճշտությամբ: Այդ անելու համար անդամների թիվը, որոնք պիտի ապահովեն տրված ճշտությունը կորոշվի

$$\left|R_n\right| < \delta \tag{4}$$

անհավասարումից, որտեղ δ-ն թույլատրելի շեղումն է:

Խնդիր 2: Օգտագործելով Թեյլորի բանաձևը Լագրանժի մնացորդային անդամի տեսքով, հաշվել $e^{0,1}$ և $e^{0,2}$-ը $0,001$ ճշտությամբ:

Լուծում: $f\left(x\right) = e^{x}$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը Լագրանժի մնացորդային անդամով ունի

$e^{x} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x}{2!}+...+\frac{x}{n!}+R_n$ տեսքը, որտեղ $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{x}$, $0<\theta<1$:

Այստեղից կստանանք

$$e^{x} \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x}{n!} \tag{5}$$

$0<x<1$ անհավասարություններին բավարարող x-ի ցանկացած արժեքի համար ունենք $0<\theta x<x<1$, որտեղից $e^{0}<e^{\theta x}<e^{x}<e<3$ կամ $1<e^{\theta x}<3$: Հետևաբար,

$$\left|R_n\right| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} < \frac{3x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ակնհայտ է, որ (4) պայմանը տեղի ունի, եթե $\frac{3x^{n+1}}{(n+1)!}<\delta$ կամ

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}<\frac{\delta}{3} \tag{6}$$

$0<x<1$ միջակայքի համար (5) բանաձևի շեղման տրումը (6) տեսքով հարմար է նրանով, որ հաջորդաբար հաշվելով (5)-ի գումարելիները՝

$$u_k = \frac{x^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (7)$$

բանաձևով, մենք միաժամանակ հնարավորություն ունենք տեսնել ու նաև, հասել ենք արդյոք տրված δ ճշտությանը:
Վերցնելով $\delta = 0,001$ և $x = 0,1$ կստանանք

$$u_0 = 1 \qquad = 1,000$$

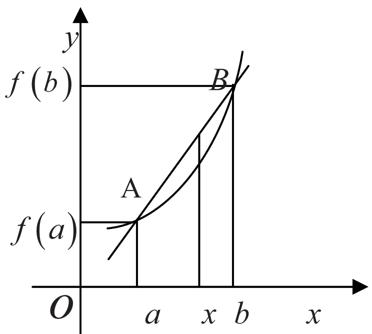
$$u_1 = \frac{0,1}{1!} \qquad = 0,100$$

$$u_2 = \frac{(0,1)^2}{2!} = \frac{0,01}{2!} \qquad = 0,005$$

$$u_3 = \frac{(0,1)^3}{3!} = \frac{0,001}{2 \cdot 3} < \frac{0,001}{3}$$

$$e^{0.1} \approx \qquad 1,105$$

Այսպիսով, մենք գտանք, որ $e^{0,1} \approx 1,105$: Այստեղ (6) պայմանը բավարարվում է, երբ $k = n + 1 = 3$ այսինքն, երբ $n = 2$: Հանգունորեն կգտնենք, որ $e^{0.2} \approx 1.221$ (այստեղ պահանջվող ճշտությունը ստացվում է, երբ $n = 3$):
Երկրաչափորեն Թեյլորի բանաձևով ֆունկցիայի մոտարկումը բազմանդամով նշանակում է ֆունկցիայի գրաֆիկի փոխարինում համապատասխան բազմանդամի գրաֆիկով: Մասնավորապես, երբ



Նկ. 17

$n = 1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը փոխարինվում է ուղղով՝ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողով:
Նկատենք, որ այստեղ ենթադրվում է, որ հայտնի են նույն սկզբնական կետում ֆունկցիայի և նրա ածանցյալի արժեքները:
Եթե հայտնի են ֆունկցիայի երկու մոտ արժեքներ և անհրաժեշտ է մոտավոր հաշվել միջանկյալ արժեքները, ապա կիրառվում է գծային ինտերպոլացիայի մեթոդը: Այն կայանում է կորի այդ AB

տեղամասի AB հատվածով փոխարինման մեջ, որն անցնում է $A(a,f(a)), B(b,f(b))$ կետերով (նկ.17): Այդ ուղղի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

Ընդունելով $f(x)\approx y$, որտեղ $f(x)$-ը ֆունկցիայի գրաֆիկի կետի օրդինատն է, իսկ y-ը՝ լարի, կստանանք $f(x)$ ֆունկցիայի մոտավոր հաշվման բանաձև՝

$$f(x)\approx f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad (8)$$

Խնդիր 3: Օգտագործելով 2 խնդրի լուծման ժամանակ ստացված $e^{0,1}$ և $e^{0,2}$ արժեքները, հաշվել $e^{0,14}$-ը գծային ինտերպոլացիայի եղանակով:

Լուծում: Վերցնելով $f(x)=e^x$, $a=0,1;\quad b=0,2;\quad x=0,14$ և օգտագործելով $e^{0,1}\approx 0,105$ և $e^{0,2}\approx 1,221$ արժեքները, (8) բանաձևից կստանանք

$$e^{0,14}\approx 1.105+\frac{1,221-1,105}{0,2-0,1}(0,14-0,10)\approx 1,151:$$

Նկատենք, որ այս նույն սկզբունքի վրա է հիմնված այսպես կոչված ուղղումների (համեմատական մասերի) կիրառումը եռանկյունաչափական ֆունկցիաների լոգարիթմների և այլ աղյուսակներում (ֆունկցիայի աճը համարվում է համեմատական արգումենտների աճին):

Թեմա 5. *Ֆունկցիայի էքստրեմումները*

Դասագիրք $[2]$ գլուխ V, $\S 1,2$, $[5]\S 4$, $4.4.9$: $[2]$, $\S 6$, վարժություններ $3,12,14,22,25,27,30$, $\S 7$, վարժություններ $32,34$, $\S 8$, վարժություններ $40,44,52,54$:

Թեմա 6. *Ֆունկցիաների գրաֆիկների կառուցումը*

Դասագիրք $[2]$, գլուխ V

Կորի ուռուցիկությունը և գոգավորությունը: Ասիմպտոտներ:
$§9$, վարժություններ $62, 63, 67-71$, $§10$, վարժություններ $73, 75, 76, 78, 108, 110$:

Ֆունկցիայի հետազոտման ընդհանուր պլանն ու գրաֆիկի կառուցումը
$§11$, $§12$, վարժություններ $84, 92, 95, 96, 99, 103, 134$:

Թեմա 7. *Հավասարումների մոտավոր լուծումը*

Դասագիրք $[2]$, գլուխ VI, $§8$, վարժություններ $31, 32, 34$, $[5]$ $§4, 4.4.7$:

Թեմա 8. *Կորի կորությունը*

Դասագիրք $[2]$ գլուխ VI

Հարթ գծի կորությունը
$§1, 2, 3$ վարժություններ $2, 4, 5$, $§4, 5$

Կորության շառավիղ, կենտրոն և շրջան, էվոլյուտա և էվոլվենտա
$§6$ վարժություններ $10-12$, $19, 23, 25, 26, 29, 41$, $§7$ (թեորեմների ապացուցումները կարելի է բաց թողնել)

Թեմա 9. *Կոմպլեքս թվեր: Բազմանդամներ*

Դասագիրք $[2]$, գլուխ VII

Կոմպլեքս թվեր: Կոմպլեքս փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիա
$§1$ վարժություններ 7, $§2$ վարժություններ $1-4$, $§3$ վարժություններ $5, 6, 10$, $§4, 5$:

Բազմանդամներ
$§$ $6, 7, 8$, վարժություններ $11, 14-16$:

Ինտերպոլացում
$§$ 9 վարժություններ $17, 18$:

Խնդիրներ ստուգողական աշխատանքների համար

Անալիտիկ երկրաչափություն հարթության վրա

$1 \div 10$ խնդիրներում տրվում են ինչ-որ ABC եռանկյան գագաթները: Պահանջվում է՝

ա) հաշվել AB կողմի երկարությունը,

բ) կազմել C գագաթից տարված բարձրության հավասարումը,

գ) կազմել AB գծի հավասարումը,

դ) հաշվել B գագաթի հեռավորությունը AC կողմից,

ե) կազմել A գագաթի ներքին անկյան կիսորդի հավասարումը,

զ) հաշվել A անկյունը:

1. $A(-6;-4), \quad B(-10,-1), \quad C(6,1)$:

2. $A(12;0), \quad B(18,8), \quad C(0;5)$:

3. $A(-2;-6), \quad B(-6,-3), \quad C(10,-1)$:

4. $A(8;2), \quad B(14,10), \quad C(-4,7)$:

5. $A(2;-4), \quad B(-2,-1), \quad C(14,1)$:

6. $A(2;-1), \quad B(8,7), \quad C(-10,4)$:

7. $A(5;-3), \quad B(1,0), \quad C(17,2)$:

8. $A(14;-6), \quad B(20,2), \quad C(2,-1)$:

9. $A(3;4), \quad B(-1,7), \quad C(15,9)$:

10. $A(1;-2), \quad B(7,6), \quad C(-11,3)$:

11. Կազմել էլիպսի հավասարումը, որի էքսցենտրիսիտետը հավասար է 0.8-ի, իսկ նրա ինչ-որ կետից տրված ֆոկալ շառավիղները՝ 2-ի և 3-ի: Ընդունելով, որ էլիպսի մեծ կիսաառանցքը համընկնում է աբսցիսների առանցքի հետ, իսկ նրա կենտրոնը՝ կոորդինատների սկզբնակետի հետ:

12. $9x^2 - 16y^2 = 144$ հիպերբոլի վրա գտնել այն կետերը, որոնց հեռավորությունները ձախ և աջ ֆոկուսներից հարաբերում են ինչպես $1:2$:

13. Գտնել $y^2=2px$ պարաբոլի պարամետրը և դիրեկտրիսի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ պարաբոլն անցնում է $y=x$ ուղղի և $x^2+y^2-6x=0$ շրջանագծի հատման կետերով:

14. $\frac{x^2}{441}+\frac{y^2}{216}=1$ էլիպսի վրա գտնել այն կետերը, որոնցում ֆոկալ շառավիղները կլինեն փոխուղղահայաց:

15. Հիպերբոլի ֆոկուսները գտնվում են $F_1\left(\sqrt{7};0\right)$ և $F_2\left(-\sqrt{7},0\right)$ կետերում: Հիպերբոլն անցնում է $A(2;0)$ կետով: Գտնել նրա ասիմպտոտներն ու նրանցով կազմված անկյունը:

16. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք հավասարահեռ են $A(2;2)$ կետից և աբսցիսների առանցքից:

17. Կազմել կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցից յուրաքանչյուրը $A(3;0)$ կետից երկու անգամ ավելի հեռու է գտնվում, քան օրդինատների առանցքից:

18. Կազմել կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար սկզբնակետից ունեցած հեռավորության հարաբերությունը $3x+16=0$ ուղղից հավասար է $0{,}6$-ի:

19. Կազմել կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցից յուրաքանչյուրի հեռավորությունը $A(1;0)$ կետից երկու անգամ փոքր է, քան $B(-2;0)$ կետից:

20. Կազմել այն շրջանագծերի կենտրոնների երկրաչափական տեղը, որոնք շոշափում են աբսցիսների առանցքը և անցնում՝ $A(0;3)$ կետով:

$21\div30$ խնդիրներում տրված են $A_1A_2A_3A_4$ բուրգի գագաթների կոորդինատները: Պահանջվում է վեկտորական հանրահաշվի միջոցներով գտնել՝

ա) A_1A_2 և A_1A_4 կողերով կազմված անկյունը,

բ) $A_1A_2A_3$ կողի մակերեսը,

գ) A_1A_3 վեկտորի պրոյեկցիան A_1A_4 վեկտորի վրա,

դ) բուրգի ծավալը:

21. $A_1\left(3;1;4\right),\quad A_2\left(-1;6;1\right),\quad A_3\left(-1;1;6\right),\quad A_4\left(0;4;-1\right)$:

22. $A_1\left(3;3;9\right),\quad A_2\left(6;9;1\right),\quad A_3\left(1;7;3\right),\quad A_4\left(8;5;8\right)$:

23. $A_1(3;5;4)$, $A_2(5;8;3)$, $A_3(1;9;9)$, $A_4(6;4;8)$:

24. $A_1(2;4;3)$, $A_2(7;6;3)$, $A_3(4;9;3)$, $A_4(3;6;7)$:

25. $A_1(9;5;5)$, $A_2(-3;7;1)$, $A_3(5;7;8)$, $A_4(6;9;2)$:

26. $A_1(0;7;1)$, $A_2(4;1;5)$, $A_3(4;6;3)$, $A_4(3;9;8)$:

27. $A_1(5;5;4)$, $A_2(3;8;4)$, $A_3(3;5;10)$, $A_4(5;8;2)$:

28. $A_1(6;1;1)$, $A_2(4;6;6)$, $A_3(4;2;0)$, $A_4(1;2;6)$:

29. $A_1(7;5;3)$, $A_2(9;4;4)$, $A_3(4;5;7)$, $A_4(7;9;6)$:

30. $A_1(6;6;2)$, $A_2(5;4;7)$, $A_3(2;4;7)$, $A_4(7;3;0)$:

$31 \div 40$ խնդիրներում ապացուցել գծային հավասարումների համակարգի համատեղելիությունը և լուծել այն երկու եղանակներով՝
ա) Գաուսի եղանակով,
բ) մատրիցային եղանակով:

31. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31 \\ 4x_1 + 11x_2 = -43 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = -23 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$

40 $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 14 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$

$41 \div 50$ Գտնել նշված սահմանները, առանց օգտվելու Լոպիտալի կանոնից.

41. ա) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^5 - 4x^2 + 1}{2x^5 + 3x^3 - x}$, բ) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$,

գ) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x - 3}$, դ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg^2 4x}{x \sin 3x}$,

ե) $\lim\limits_{x\to 2} (7 - 3x)^{\frac{x}{2x-4}}$:

42. ա) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3 + 3x^2 - 1}{2x^3 - 3x + 1}$, բ) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 3x + 2}$,

գ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 3x}$, դ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$,

ե) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)[\ln(x+2)-\ln(x+3)]$:

43. ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-3x^2+1}{3x^5-2x+3}$, բ) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$,

գ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{4x}$, դ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$,

ե) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3)[\ln(2-4x)-\ln(1-4x)]$:

44. ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-3x^2-2}{2x^6+4x+5}$, բ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$,

գ) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$, դ) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin 2x ctg^2 5x$,

ե) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x^2}{x-2}}$:

45. ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+2}{3x^3+2x^2-x}$, բ) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$,

գ) $\lim\limits_{x\to 0}x ctg 7x$, դ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$,

ե) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$:

46. ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+2}{5x^4-3x-2}$, բ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$,

գ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$, դ) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$,

ե) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+5)[\ln(2x-3)-\ln(2x+3)]$:

47. ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^4+2}{3x^5-2x-1}$, բ) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$,

գ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$, դ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x tg 2x}$, ե) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$ ։

48 . ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x+1}{x^3-2x^2-1}$, բ) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$,

գ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}$, դ) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x ctg 3x$,

ե) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+4)[\ln(2x+7)-\ln(2x-3)]$։

49 . ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+1}{2x^5-2x+3}$, բ) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x^2-17x-28}{x^2-9x+14}$,

գ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$, դ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctg 6x}$,

ե) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{x}{x-1}}$ ։

50 . ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-4x^2+1}{6x^3+3x+2}$, բ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}$,

գ) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\sqrt{2x+1}-5}$, դ) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 8x ctg 3x$,

ե) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)[\ln(x-1)-\ln(x+1)]$։

$51 \div 60$ Տրված է $y=f(x)$ ֆունկցիան և արգումենտի x_1 և x_2 արժեքները։

Պահանջվում է.

ա) Պարզել, տրված ֆունկցիան անընդհատ է թե խզվող x-ի այդ երկու արժեքներից յուրաքանչյուրի համար,

բ) ֆունկցիայի խզվող լինելու դեպքում գտնել նրա աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանները,

գ) կատարել սխեմատիկ գծագիրը։

51. $f(x)=4^{\frac{1}{x-5}}$; $x_1=5$, $x_2=7$,

52. $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$; $x_1=2$, $x_2=3$,

53. $f(x)=7^{\frac{1}{x-4}}$; $x_1=4$, $x_2=5$,

54. $f(x)=8^{\frac{1}{x-3}}$; $x_1=3$, $x_2=6$,

55. $f(x)=9^{\frac{1}{x-7}}$; $x_1=7$, $x_2=9$,

56. $f(x)=16^{\frac{1}{x-2}}$; $x_1=2$, $x_2=6$,

57. $f(x)=3^{\frac{1}{x-4}}$; $x_1=4$, $x_2=6$,

58. $f(x)=9^{\frac{1}{x-6}}$; $x_1=6$, $x_2=8$,

59. $f(x)=7^{\frac{1}{x-3}}$; $x_1=3$, $x_2=5$,

60. $f(x)=8^{\frac{1}{x-2}}$; $x_1=2$, $x_2=5$:

$61 \div 70$ Կիրառելով $y=e^x$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը Լագրանժի մնացորդային անդամով, հաշվել $0,001$-ի ճշտությամբ e^a-ի և e^b-ի արժեքները: Որից հետո գծային ինտերպոլյացիայի մեթոդով հաշվել e^{x_1} և e^{x_2}-ի մոտավոր արժեքները:

61. $a=0.51$, $b=0.54$, $x_1=0.52$, $x_2=0.53$:
62. $a=0.55$, $b=0.58$, $x_1=0.56$, $x_2=0.57$:
63. $a=0.59$, $b=0.62$, $x_1=0.60$, $x_2=0.61$:
64. $a=0.63$, $b=0.66$, $x_1=0.64$, $x_2=0.65$:
65. $a=0.67$, $b=0.70$, $x_1=0.68$, $x_2=0.69$:
66. $a=0.71$, $b=0.74$, $x_1=0.72$, $x_2=0.73$:
67. $a=0.75$, $b=0.78$, $x_1=0.76$, $x_2=0.77$:
68. $a=0.79$, $b=0.82$, $x_1=0.80$, $x_2=0.81$:
69. $a=0.83$, $b=0.86$, $x_1=0.84$, $x_2=0.85$:
70. $a=0.87$, $b=0.90$, $x_1=0.88$, $x_2=0.89$:

$71 \div 80$ Գտնել $y=f(x)$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները $[a,b]$ հատվածում:

71. $f(x)=\dfrac{x+6}{x^2+13}$, $[-5,5]$:

72. $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos x$, $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$:

73. $f(x)=\frac{x-3}{x^2+16}$, $[-5,5]$:

74. $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$, $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$:

75. $f(x)=\frac{x+3}{x^2+7}$, $[-3,7]$:

76. $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos x$, $\left[-\frac{3\pi}{2},-\pi\right]$:

77. $f(x)=\frac{x-5}{x^2+11}$, $[-3,7]$:

78. $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$, $\left[-2\pi,-\frac{3}{2}\pi\right]$:

79. $f(x)=\frac{x-4}{x^2+9}$, $[-4,6]$:

80. $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos x$, $\left[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right]$:

81. Պահանջվում է պատրաստել վերևից բաց V ծավալով գլանային բաք, ընդ որում հատակի նյութի քառակուսի մետրն արժե P_1 դրամ, իսկ պատի վրա գնացող նյութինը՝ P_2 դրամ: Հատակի շառավղի և բաքի բարձրության ինչպիսի հարաբերության դեպքում բաքի վրա ծախսվող նյութի ծախսը կլինի փոքրագույնը:

82. Ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում $(1;2)$ կետով տարված է ուղիղ, որը կոորդինատական առանցքների հետ կազմում է եռանկյուն I քառորդում: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն կոորդինատական առանցքներից ուղղով կտրված հատվածները, որպեսզի ստացված եռանկյան մակերեսը լինի փոքրագույնը:

83. 11 սմ լայնություն ունեցող թիթեղյա շերտից պահանջվում է պատրաստել վերևից բաց ջրհորդան, որի լայնակի հատույթն ունի հավասարասրուն սեղանի ձև: Ջրհորդանի հատակը պետք է ունենա 7 սմ լայնություն: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի ջրհորդանի լայնությունը վերևում, որպեսզի այն տեղավորի ամենաշատ քանակությամբ ջուր:

84. Ուղղանկյուն հաճանի լայնակի հատույթի սեղմման դիմադրությունը համեմատական է այդ հատույթի մակերեսին: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն d տրամագծով գերանից պատրաստված հաճանի հատույթի չափսերը, որպեսզի նրա դիմադրությունը լինի մեծագույնը:

85. Ուղղանկյուն հաճանի լայնակի հատույթի ծռման դիմադրությունը համեմատական է այդ հատույթի լայնության և բարձրության քառակուսու արտադրյալին: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն d տրամագծով կլոր գերանից կտրված հաճանի հատույթի չափսերը, որ նրա ծռման դիմադրությունը լինի ամենամեծը:

86. Ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում $(1;4)$ կետով տարված է ուղիղ, որը հատվում է կոորդինատների դրական կիսաառանցքների հետ: Գրել այն ուղղի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ կոորդինատային առանցքներից կտրված հատվածների քառակուսիների գումարը ստանում է փոքրագույն արժեք:

87. Կտորից պատրաստված V ծավալ ունեցող վրանն ունի ուղիղ շրջանային կոնի ձև: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի կոնի բարձրության հարաբերությունը հիմքի շառավղին, որպեսզի վրանի վրա ծախսվի ամենաքիչ քանակությամբ կտոր:

88. 30 սմ լայնությամբ թիթեղի շերտից պահանջվում է պատրաստել վերևից բաց ջրհորդան, որի լայնակի հատույթն ունի հավասարասրուն սեղանի ձև: Ջրհորդանի հատակի լայնությունը պետք է լինի 10 սմ: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի ջրհորդանի հատակի և կողքի պատերի կազմած անկյունը, որպեսզի այն տեղավորի ջրի ամենամեծ քանակություն:

89. Ուղղանկյուն հաճանի լայնակի հատույթի ծռման աղեղը հակադարձ համեմատական է նրա հատույթի լայնության և բարձրության խորանարդի արտադրյալին: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն հաճանի չափսերը, որը կտրվել է d տրամագծով կլոր գերանից, որպեսզի ծռման աղեղը լինի փոքրագույնը (ամենակոշտը):

90. Գտնել V ծավալով գլանի շառավղի և բարձրության հարաբերությունը, որի դեպքում այն կունենա փոքրագույն լրիվ մակերևույթ:

$91 \div 100$ Դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդներով հետազոտել ֆունկցիաները և կառուցել նրանց գրաֆիկները, օգտագործելով հետազոտման արդյունքները:

91. ա) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$, բ) $y = \dfrac{e^x}{x}$:

92. ա) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$, բ) $y=\ln(2x^2+3)$:

93. ա) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$, բ) $y=x^3e^{-x}$:

94. ա) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$, բ) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$:

95. ա) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$, բ) $y=x-\ln(x+1)$:

96. ա) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, բ) $y=e^{\frac{1}{x+2}}$:

97. ա) $y=\dfrac{x^3+16}{x}$, բ) $y=\dfrac{1}{e^{2x-1}}$:

98. ա) $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$, բ) $y=x^2\ln x$:

99. ա) $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$, բ) $y=\ln\dfrac{x+1}{x+2}$:

100. ա) $y=\dfrac{2}{x^2+x+1}$, բ) $y=x-\ln x$:

Ցուցումներ

Ստուգողական աշխատանքները կատարելու վերաբերյալ

Ուսանողը պետք է կատարի ստուգողական աշխատանքի այն տարբերակը, որը նրան հանձնարարում է դասախոսը:
Ստուգողական աշխատանքի կատարման ժամանակ անհրաժեշտ է պահպանել հետևյալ կանոնները.

1. Աշխատանքի վերնագրում պետք է պարզ գրված լինի ուսանողի անուն, ազգանուն, հայրանունը, ստուգողական աշխատանքի տարբերակը և աշխատանքի բուհ ներկայացվող ժամկետը:
2. Ստուգողական աշխատանքը կատարվում է տետրերում, և ոչ թերթերի վրա, անպայմանորեն գրիչով (ոչ կարմիր գույնով), լուսանցքներով՝ դասախոսի դիտողությունների համար:

3. Ստուգողական աշխատանքի խնդիրների լուծումները կատարվում են և դասավորվում համարների աճման կարգով, որը նշված է ստուգողական աշխատանքներում, և մինչ խնդրի լուծումը պետք է լրիվությամբ գրվի նրա պայմանը:
4. Խնդիրների լուծումները և դրանց վերաբերող բացատրությունները պետք է շարադրել մանրամասն, խնամքով, առանց բառերի կրճատումների, գծագրերը կարելի է կատարել ձեռքով: Ստուգողական աշխատանքները, որոնք կատարվել են վերը շարադրված պահանջների խախտումներով կամ կատարվել է ուսանողի կողմից իր տարբերակին ոչ համապատասխան, չի ընդունվում և վերադարձվում է առանց ստուգման:

Ուսանողը բուհից ստանալով գրաքննված աշխատանքը՝ պետք է ուղղի նշված սխալներն ու թերությունները:

Եթե աշխատանքը "ստուգված" չի ստանում, ապա այն կարճ ժամանակում պետք է ուսանողի կողմից նորից ամբողջությամբ կատարվի, կամ պետք է նորից լուծել նշումներով խնդիրները: Ուղղված աշխատանքը պետք է ներկայացնել հնի հետ միասին:

Ստուգված ստուգողական աշխատանքները ներկայացվում են դասախոսին ստուգարքին կամ քննությանը:

Ստուգարքներ և քննություններ

Ստուգարքներին և քննություններին պարզվում է նախ և առաջ ծրագրի բոլոր տեսական և գործնական հարցերի հստակ յուրացումը և ստացած գիտելիքները գործնական խնդիրների լուծման մեջ կիրառելու հմտությունը: Սահմանումները, թեորեմները, կանոնները պետք է ձևակերպվեն հստակ և գործի իմացությամբ, խնդրի լուծումը պարզագույն դեպքում պետք է կատարվի անսխալ, յուրաքանչյուր գրավոր և գծագրական աշխատանք պետք է լինի հստակ և խնամքով կատարված: Միայն այս պայմանների կատարման դեպքում գիտելիքները կարող են ճանաչվել առաջադրվող ծրագրի պահանջներին բավարարող: Քննությանը պատրաստվելու ժամանակ խորհուրդ է տրվում ուսումնական նյութը կրկնել դասագրքով և կոնսպեկտով:

Հիմնական գրականություն

1. Ի.Ի. Պրիվալով, “Անալիտիկ երկրաչափություն”, Երևան, 1970
2. Ն. Ս.Պիսկունով, “Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվ”, h.I, Երևան, 1976
3. Кремер Н. Ш. “Вышая математика для экономистов”, М. 2006
4. Дюбюк П. Е. и др. “Сборник задач по курсу высшей математике”, “Высшая школа”, М.1965
5. Ա.Խ.Խաչատրյան, Հ.Վ. Համբարձումյան “Բարձրագույն մաթեմատիկայի խնդիրների և վարժությունների ժողովածու” Երևան, 2000

Լրացուցիչ գրականություն

1. Ս.Կ.Պետրոսյան, “Բարձրագույն մաթեմատիկա”, h.I Ստեփանակերտ, 2007
2. А.С.Солодовников, В.А.Бабайцев, А.В.Браилов, И.Г.Шандра, “Математика в экономике”, М., 2003, ч. 1
3. Глаголев А.А., Солнцева Т.В., “Курс высшей математики “, М. “Высшая школа”, 1971

Բովանդակություն

ԲԱԺԻՆ I

Անալիտիկ երկրաչափություն և գծային հանրահաշիվ

ԲԱԺԻՆ II

Անալիզի ներածություն: Մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցյալ հաշիվ

ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ ՌՈԲԵՐՏ ՄԻՍԱԿԻ
ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ ՀՐԱՆՏ ԽՈՐԵՆԻ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԵՐԵՎԱՆ 2013

АРУТЮНЯН РОБЕРТ МИСАКОВИЧ
ХАЧАТРЯН ГРАНТ ХОРЕНОВИЧ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЕРЕВАН 2013

Թղթի չափսը 60x84 $^{1}/_{16}$, 5,75 տպ. մամուլ, 4,6 հրատ. մամուլ
Պատվեր 88:   Տպաքանակ 200:

ՀԱՀ-ի տպարան, Տերյան 74