2-314
517.2
Դ-64

Ն. Ս. ՊԻՍԿՈՒՆՈՎ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇԻՎՆԵՐ

ԲՈՒՀՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

1

Ն. Ս. ՊԻՍԿՈՒՆՈՎ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇԻՎՆԵՐ

ԲՈՒՀ-ՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ՀԱՏՈՐ ԱՌԱՋԻՆ

Թույլատրված է ՍՍՀՄ բարձրագույն և միջնակարգ մասնագիտական կրթության մինիստրության կողմից որպես դասագիրք բարձրագույն տեխնիկական ուսումնական հաստատությունների ուսանողների համար

«ԼՈՒՅՍ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 1976

517—4
П—64

Թարգմանված է տասնմեկերորդ հրատարակությունից

Թարգմանիչ՝ Հ. Հ. ԲԱԲԱՅԱՆ
Մասնագետ խմբագիր՝
Վ. Խ. ԹՈՐԳՈՄՅԱՆ

П 702 1976
60406 158 1976

Николай Семенович Пискунов
ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
Для втузов, том I
(на армянском языке)
Издательство „Луйс"
Ереван 1976

© «Լույս» հրատարակչություն, թարգմանված է հայերեն, 1976

ԻՆՆԵՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԱԲԱՆԸ

Սույն դասագրքի իններորդ հրատարակությունը տարբերվում է նախորդ՝ 8-րդ հրատարակությունից։ Այս հրատարակությունը լիովին համապատասխանում է բուհ-ների համար մաթեմատիկայի 400—450 ժամվա համար նախատեսված ծրագրին։

Դասագրքի մեջ մտցված է երկու նոր գլուխ (XX և XXI)։

XX *գլուխը («Հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության տարրերը») բովանդակում է ՍՍՀՄ ԲՄՄԿՄ մաթեմատիկայի պարտադիր ծրագրի համապատասխան բաժնով նախատեսված նյութը։*

XXI *գլուխը («Մատրիցաներ», «Գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների և լուծումների սիստեմների մատրիցային գրառումը») նույնպես բովանդակում է պարտադիր ծրագրով նախատեսված նյութը։ Բայց, դրանից բացի, այս գլխում մեծ ուշադրություն է դարձված գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների և գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների լուծումների մատրիցային գրառմանը։ Օգտագործված է փոփոխական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների հաջորդական մոտավոր լուծումների մատրիցային գրառումը։ Այս նյութն անհրաժեշտ է զետեղել բուհ-ների համար դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվների դասընթացում այն բանի համար, որ ներկայումս էլեկտրատեխնիկայի, ավտոմատիկայի, ռադիոտեխնիկայի վերաբերյալ շատ գրքերում դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների լուծումների ուսումնասիրությունը կատարվում է մատրիցաների տեսության ապարատի օգնությամբ։*

Նոր են գրված XVI *գլխի 26, 27, 28 պարագրաֆները։ Այստեղ քննարկված է դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման հաջորդական մոտեցումների մեթոդը, ապացուցվում են դիֆերենցիալ հավասարման լուծման գոյության մասին թեորեմը և միակության մասին թեո-*

լեմը։ Ուշադրություն է դարձված դիֆերենցիալ հավասարումների մասին ամբողջ գլխի խստապահանջ շարադրմանը։

Նշանակալիորեն ընդլայնված է XIII գլխի («Գաղափար Լյապունովի կայունության տեսության մասին») 31-րդ պարագրաֆը։ Տվյալ հրատարակության մեջ այն կոչվում է այսպես. «Գաղափար Լյապունովի կայունության տեսության մասին։ Դիֆերենցիալ հավասարման հետագծերի վարքը եզակի կետի շրջակայքում»։ Այսպես դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների լուծումների կայունության դիտարկմանը զուգահեռ քննարկված է ֆազային հարթության վրա եզական կետի շրջակայքում հետագծի վարքը։ Դա անհրաժեշտ էր անել այն բանի համար, որ էլեկտրատեխնիկայի, ռադիոտեխնիկայի, ավտոմատիկայի, դասընթացներում համապատասխան հարցերն ուսումնասիրելիս անհրաժեշտ է ազատորեն օգտվել այդ գաղափարներից։ Կոմպլեքս թվերի շարադրմամբ նորից գրված են մի քանի պարագրաֆներ։ Զգալի չափով ընդլայնված է XI գլխի § 2-ը, որտեղ տրված է անընդհատ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալի գոյության ապացույցը։ Լրացուցիչ գրված է XI գլխի («Իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիայի ինտեգրումը») § 11-ը։ Գրված են XVI գլխի նոր § 24-ն և § 25-ը, որոնք նվիրված են կոմպլեքս անդամներով շարքերին և կոմպլեքս փոփոխականի աստիճանային շարքերին։ XVII գլխի նոր գրված § 12-ը նվիրված է կոմպլեքս տեսքով Ֆուրյեի շարքերին։ Ընդլայնված է Ֆուրյեի ինտեգրալի մասին հարցի շարադրումը։ Լուսաբանված են հատուկ կիրառական գրականության մեջ օգտագործվող հասկացությունները (սպեկտր, սպեկտրալ ֆունկցիա)։

Նոր են գրված XIX գլխի § 15-ը՝ «Ֆուրյեի շարքն ըստ ֆունկցիաների օրթոգոնալ սիստեմի» և XVII գլխի § 16-ը՝ «Գաղափար գծային ֆունկցիոնալ տարածության մասին։ Անալոգիա ֆունկցիայի՝ Ֆուրյեի շարքի վերլուծության և վեկտորների վերլուծության միջև»։ Այս նյութը շարադրված է այնպես, որպեսզի ուսանողներն ու ինժեներները կարողանան հասկանալ այս մաթեմատիկական ապարատի վրա հենվող գիտության ուրիշ ճյուղերի նյութը։

XIX գլխում գրված է նոր § 20-ը՝ «Դելտա-ֆունկցիան և նրա պատկերը»։

VIII գլխում զետեղված է § 19-ը՝ «Ֆունկցիայի ստացումը փորձնական տվյալների հիման վրա՝ ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի»։ Այս պարագրաֆի բովանդակությունը կազմում է հավելված I-ը, որը նախկինում տեղավորված էր այս դասագրքի առաջին հատորի վերջին մասում։

VII գլխում տրված են § 10-ը՝ «Նյուտոնի ինտերպոլյացիոն բանաձևը» և § 11-ը՝ «Թվային դիֆերենցում»։ Այս պարագրաֆների բովանդակությունը նախկինում զետեղված էր հավելված II-ում։

Մի քանի լրացումներ են կատարված V, VII, IX, XII, XIII գլուխներում։

XIII գլուխը («Դիֆերենցիալ հավասարումներ») ամբողջապես տեղափոխված է երկրորդ հատոր։

Հեղինակ

ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԱԲԱՆԸ

Հինգերորդ հրատարակության մեջ լրիվ, անփոփոխ պահպանված է չորրորդ հրատարակության ամբողջ տեքստը, բայց այդ նյութը բաժանված է երկու հատորի (դասագրքի այս և նախորդ հրատարակությունների օգտագործման հարմարության համար գլուխների համարակալումը նույնպես թողնված է անփոփոխ)։

Ամբողջ դասագրքի բովանդակությունը որոշվում է բուհ-ների համար մաթեմատիկայի դասընթացի՝ 300—450 ժամվա համար նախատեսված ծրագրերով։ Դասագիրքը նախատեսվում է ինչպես ստացիոնար, այնպես էլ հեռակա բուհ-ներում, մաթեմատիկայի դասընթացի ուսումնասիրման համար։ Դա հաշվի է առնվել նյութի շարադրման ժամանակ, մասնավորապես, այդ նպատակով դասագրքում քննարկված են շատ օրինակներ, որոնք լուսաբանում են շարադրված տեսական նյութը և տալիս են խնդիրների լուծման նմուշները։

Առաջին հատորը ընդգրկում է բուհ-ների առաջին կուրսի ծրագրին համապատասխանող նյութը, բացառությամբ XIII գլխի («Դիֆերենցիալ հավասարումների»), որը, որպես կանոն, անցնում են երկրորդ կուրսում։ Բայց քանի որ մի քանի բուհ-ներում հաջորդ դիսցիպլինների համար անհրաժեշտ դիֆերենցիալ հավասարումների մասին նախնական տեղեկություններ արվում են առաջին կուրսում, ապա այդ գլխի մի մասը (§§ 1—28) ևս տեղավորված է առաջին հատորում։

Նշենք, որ թվով 300 ժամվա համար նախատեսված բուհ-ների ծրագրում պարունակվող նյութը համարյա լրիվ կա առաջին հատորում (բայց այն բովանդակում է նաև այդ ծրագրի շրջանակի մեջ չմտնող նյութ)։

Երկրորդ հատորը (XIII գլխի վերջը՝ §§ 29—34, XIV—XIX գլուխները) պարունակում է բուհ-ների երկրորդ կուրսի ծրագրին համապատասխանող նյութը։

Առաջին հատորի առաջին երկու գլուխները («Թիվ։ Փոփոխական։ Ֆունկցիա» և «Սահման։ Ֆունկցիայի անընդհատությունը») գրված են հնարավորին չափ համառոտ։ Սովորաբար այդ գլուխներում շարադրվող մի քանի հարցեր, առանց գործին վնասելու, տեղափոխված են երկրորդ և հաջորդ գլուխներ։ Դա հնարավորություն է տվել ավելի վաղ անցնել դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական գաղափարին՝ ածանցյալին, որ պահանջում են բուհական դասընթացի տրիշ դիսցիպլիններ (նյութի նման դասավորության նպատակահարմարությունը հաստատվում է աշխատանքի փորձով)։

Բուհ-ների բարձրագույն մաթեմատիկայի ծրագրում այնպիսի հարցեր մտցնելու կապակցությամբ, որոնք անհրաժեշտ են ավտոմատիկայի և հաշվողական տեխնիկայի հետ կապված բուհ-ական դիսցիպլիններին մաթեմատիկայի դասընթացով ապահովելու համար, դասագրքում մանրամասնորեն շարադրված են համապատասխան բաժիններ. «Դիֆերենցիալ հավասարումների և դիֆերենցիալ հավասարումներ սիստեմների թվային ինտեգրումը»*, «Գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների ինտեգրումը», «Գաղափար Լյապունովի կայունության տեսության մասին», «Համիլտոնի օպերատորը», «Ֆուրյեի ինտեգրալը» և այլն։

XVIII գլխում քննարկվում են մաթեմատիկական ֆիզիկայի հիմնական հավասարումները։ Մեծ ուշադրություն է դարձված այն ֆիզիկական երևույթների բնույթի պարզաբանմանը, որոնք բերվում են տարբեր տիպի հավասարումների և համապատասխան եզրային խնդիրների։ Մեծ ուշադրություն է դարձված մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման թվային մեթոդներին։

XIX գլխում շարադրված են օպերացիոն հաշվի հիմնական գաղափարները և դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման օպերացիոն մեթոդը։ Դա պահանջվում է հաջորդող շատ դիսցիպլինների և մասնավորապես էլեկտրատեխնիկականների համար։

Վարժությունների համար դասագրքի մեջ մտցված են մեծ թվով խնդիրներ և օրինակներ, որոնցից շատերը լուսաբանում են մաթեմատիկայի կապը գիտության ուրիշ ճյուղերի հետ։ Խնդիրները և օրինակները հատուկ ընտրված են ըստ դասընթացի յուրաքանչյուր բաժնի, որը նպաստում է շարադրվող նյութի յուրացմանը։ Այս հանգամանքը նույնպես գիրքը հարմար է դարձնում մաթեմատիկայի դասընթացի ինքնուրույն ուսումնասիրության համար, մասնավորապես հեռակայող ուսանողների համար։

---

* Սովորաբար շարադրվող անալիզի թվային մեթոդները նույնպես շարադրված են այս դասագրքում։

Վենդերոդ հրատարակությունը հինգերորդից տարբերվում է միայն նրանով, որ առաջին հատորի վերջում տրված է հավելված, որտեղ շարադրված է ինժեներների համար կարևոր՝ «Ֆունկցիայի ստացումը փորձնական տվյալների հիման վրա՝ ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի» հարցը։

Յոթերորդ հրատարակությունը վեցերորդից տարբերվում է միայն նրանով, որ առաջին հատորի վերջում տրված է հավելված «Նյուտոնի ինտերպոլյացիոն բանաձևը։ Թվային դիֆերենցում»։

ԳԼՈՒԽ I

ԹԻՎ։ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ։ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

§ 1. Իրական թվեր։ Իրական թվերի պատկերումը թվային առանցքի կետերով

Մաթեմատիկայի հիմնական գաղափարներից մեկը թիվն է։ Թվի գաղափարը ծագել է հնում և երկարատև ժամանակաընթացքում այն ընդլայնվել ու ընդհանրացվել է։

Ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական ամբողջ և կոտորակային թվերը զրո թվի հետ կոչվում են ռացիոնալ թվեր։ Յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ կարող է ներկայացվել p և q երկու ամբողջ թվերի $\frac{p}{q}$ հարաբերության տեսքով, օրինակ $\frac{5}{7}$, $1{,}25=\frac{5}{4}$։

Մասնավորապես, p ամբողջ թիվը կարելի է դիտել որպես երկու ամբողջ թվերի $\frac{p}{1}$ հարաբերություն, օրինակ

$$6=\frac{6}{1}, \qquad 0=\frac{0}{1}.$$

Ռացիոնալ թվերը կարող են պատկերացվել վերջավոր կամ անվերջ պարբերական կոտորակների տեսքով։ Այն թվերը, որոնք ներկայացվում են անվերջ, բայց ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակներով, կոչվում են իռացիոնալ թվեր. այդպիսին են $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $5-\sqrt{2}$ և այլ թվերը։

Բոլոր ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի համախումբը կոչվում է իրական թվերի բազմություն։ Իրական թվերը կարգավորված են ըստ մեծության, այսինքն՝ x և y իրական թվերի յուրաքանչյուր զույգի համար տեղի ունի

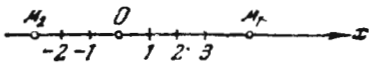
$$x<y, \quad x=y, \quad x>y$$

առնչություններից մեկը, և միայն մեկը։

Իրական թվերը կարելի է պատկերել թվային առանցքի կետերով։ Թվային առանցք կոչվում է այն անվերջ ուղիղը, որի վրա ընտրված են. 1) որևէ O կետ, որը կոչվում է հաշվանքի սկիզբ, 2) դրական ուղղություն, որը ցույց է տրվում սլաքով և 3) երկարությունները չափելու համար մասշտաբ։

Թվային առանցքը հաճախ դասավորում են հորիզոնական դիրքով, իսկ դրական ուղղությունը ընտրում են ձախից աջ։

Եթե x_1 թիվը դրական է, ապա նրան պատկերում են M_1 կետով, որն ընկած է O կետից աջ՝ նրանից $OM_1=x_1$ հեռավորության վրա, եթե x_2 թիվը բացասական է՝ M_2 կետով, որն ընկած է O կետից ձախ և նրանից ունի $OM_2=x_2$ հեռավորություն (նկ. 1)։ O կետը պատկերում է զրո թիվը։ Ակնհայտ է, որ յուրաքանչյուր իրական թիվ պատկերվում է թվային առանցքի որոշակի կետով։ Երկու տարբեր իրական թվեր պատկերվում են թվային առանցքի տարբեր կետերով։



Նկ. 1

Իրավացի է նաև հետևյալ պնդումը. թվային առանցքի յուրաքանչյուր կետ միայն մեկ իրական թվի (ռացիոնալ կամ իռացիոնալ) պատկերն է։

Այսպիսով, բոլոր իրական թվերի և թվային առանցքի բոլոր կետերի միջև գոյություն ունի փոխադարձ միարժեք համապատասխանություն՝ յուրաքանչյուր թվին համապատասխանում է իրենն պատկերող կետը և ընդհակառակը, յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է իրենով պատկերվող միակ թիվը։ Դա հնարավորություն է տալիս շատ դատողություններում որոշ իմաստով համանշանակորեն գործածել «x թիվ» հասկացությունը և «x կետ» հասկացությունը։ Վերջին հանգամանքից լայնորեն օգտվելու ենք դասընթացում։

Առանց ապացույցի նշենք իրական թվերի բազմության հետևյալ կարևոր հատկությունը. երկու կամայական իրական թվերի միջև կգտնվեն ինչպես ռացիոնալ, այնպես էլ իռացիոնալ թվեր։ Երկրաչափական տերմիններով այդ պնդումը ձևակերպվում է այսպես. թվային առանցքի երկու կամայական կետերի միջև կգտնվեն ինչպես ռացիոնալ, այնպես էլ իռացիոնալ կետեր։

Վերջում նշենք հետևյալ թեորեմը, որը որոշ իմաստով ներկայացնում է «մոտարկակ տեսության և պրակտիկայի միջև»։

Թեորեմ։ Յուրաքանչյուր α իռացիոնալ թիվ կարելի է ցանկացած ստուգությամբ արտահայտել ռացիոնալ թվերի միջոցով։

Իրոք, ենթադրենք պահանջվում է $\alpha>0$ իռացիոնալ թիվը հաշվել $\frac{1}{n}$ (օրինակ, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ և այլն) ճշտությամբ։

Ինչպիսին էլ լինի α-ն, այն գտնվում է N և N+1 երկու ամբողջ թվերի միջև։ N-ի և N+1-ի միջև եղած հատվածը բաժանենք n մասերի. այդ դեպքում α-ն ընկած կլինի $N+\frac{m}{n}$ և $N+\frac{m+1}{n}$ ռացիոնալ թվերի միջև։ Քանի որ այդ թվերի տարբերությունը հավասար է $\frac{1}{n}$-ի, ապա, հետևաբար, նրանցից յուրաքանչյուրը α-ն արտահայտում է տրված ճշտության աստիճանով՝ առաջինը պակասորդով, իսկ երկրորդը՝ ավելորդով։

Օրինակ. $\sqrt{2}$ իռացիոնալ թիվն արտահայտվում է ներքոհիշյալ ռացիոնալ թվերով.

1,4 և 1,5 մինչև $\frac{1}{10}$ ճշտությամբ,

1,41 և 1,42 մինչև $\frac{1}{100}$ ճշտությամբ,

1,414 և 1,415 մինչև $\frac{1}{1000}$ ճշտությամբ և այլն։

§ 2. Իրական թվի բացարձակ մեծությունը

Հետագայի համար ներդնենք իրական թվի բացարձակ մեծության գաղափարը։

Սահմանում։ x իրական թվի բացարձակ մեծություն (կամ մոդուլ, նշանակվում է $|x|$), կոչվում է հետևյալ պայմաններին՝

$$|x|=x, \quad \text{եթե } x\geq 0,$$

$$|x|=-x, \quad \text{եթե } x<0$$

բավարարող ոչ բացասական իրական թիվը։

Օրինակներ։ $|2|=2$; $|-5|=5$; $|0|=0$։

Սահմանումից հետևում է, որ ցանկացած x-ի համար իրավացի է $x\leq|x|$ անհավասարությունը։

Դիտարկենք բացարձակ մեծությունների մի քանի հատկություններ։

1. Մի քանի իրական թվերի հանրահաշվական գումարի բացարձակ մեծությունը մեծ չէ գումարելիների բացարձակ մեծությունների գումարից.

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

Ապացույց։ Ենթադրենք $x+y \geqslant 0$, *այդ դեպքում*

$$|x+y| = x+y \leqslant |x|+|y| \quad (\text{քանի որ } x \leqslant |x|,\ y \leqslant |y|).$$

Իսկ եթե $x+y<0$, *այդ դեպքում*

$$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leqslant |x|+|y|,$$ *որը պահանջվում էր ապացուցել։*

Բերված ապացույցը հեշտությամբ տարածվում է ցանկացած թվով գումարելիների վրա։

Օրինակներ։ $|-2+3| < |-2|+|3| = 2+3 = 5$ *կամ* $1<5$,
$|-3-5| = |-3|+|-5| = 3+5 = 8$ *կամ* $8 = 8$.

2. Տարբերության բացարձակ մեծությունը փոքր չէ նվազելիի հանելիի բացարձակ մեծությունների տարբերությունից.

$$|x-y| \geqslant |x|-|y|, \quad |x|-|y|.$$

Ապացույց։ Ընդունենք, թե $x-y=z$, *այդ դեպքում* $x=y+z$ *և ըստ ապացուցածի*

$$|x| = |y+z| \leqslant |y|+|z| = |y|+|x-y|,$$

որտեղից

$$|x|-|y| \leqslant |x-y|,$$

որը պահանջվում էր ապացուցել։

3. Արտադրյալի բացարձակ մեծությունը հավասար է արտադրիչների բացարձակ մեծությունների արտադրյալին.

$$|xyz| = |x||y||z|.$$

4. Քանորդի բացարձակ մեծությունը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի բացարձակ մեծությունների քանորդին։

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Վերջին երկու հատկություններն անմիջապես հետևում են բացարձակ մեծության սահմանումից։

§ 3. Փոփոխական և հաստատուն մեծություններ

Զատելով այնպիսի ֆիզիկական մեծություններ, ինչպիսիք են ժամանակը, երկարությունը, մակերեսը, ծավալը, մասսան, ճնշումը, ջերմաստիճանը և այլն, արդյունքում ստացվում են ֆիզիկական մեծությունները որոշող թվային արժեքներ։ Մաթեմատիկան զբաղվում է մեծություններով, վերանալով նրանց կոնկրետ բովանդակությունից։ Հետագայում խոսելով մեծությունների մասին, մենք նկատի կունենանք նրանց թվային արժեքները։ Տարբեր երևույթներում որոշ մեծություններ փոփոխվում են, այսինքն՝ նրանց թվային արժեքները փոխվում են, մյուս մեծություններ պահպանում են իրենց թվային արժեքները։ Այսպես, կետի հավասարաչափ շարժման ընթացքում ժամանակը և հեռավորությունը փոխվում են, իսկ արագությունը մնում է հաստատուն։

Փոփոխական մեծություն *կոչվում է այն մեծությունը, որն ընդունում է տարբեր թվային արժեքներ։ Այն մեծությունը, որի թվային արժեքները չեն փոփոխվում, կոչվում է* հաստատուն մեծություն։ *Հետագայում փոփոխական մեծությունները մենք կնշանակենք* x, y, z, u, . . . *և այլ տառերով, իսկ հաստատուն մեծությունները՝* a, b, c, . . . *և այլ տառերով։*

Դիտողություն։ Մաթեմատիկայում հաստատուն մեծությունը հաճախ դիտվում է որպես այնպիսի փոփոխականի մասնավոր դեպք, որի բոլոր թվային արժեքները միևնույնն են։

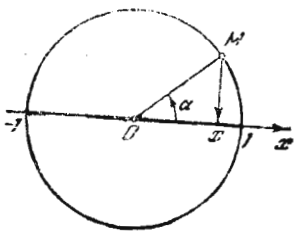
Պետք է նշել, որ կոնկրետ ֆիզիկական երևույթներ ուսումնասիրելիս կարող է պատահել, որ միևնույն անուն ունեցող մեծությունը մի երևույթում լինի հաստատուն, իսկ մյուսում՝ փոփոխական։ Օրինակ, հավասարաչափ շարժման արագությունը հաստատուն մեծություն է, իսկ հավասարաչափ արագացող շարժման արագությունը՝ փոփոխական։ Այն մեծությունները, որոնք ցանկացած երևույթի մեջ պահպանում են իրենց արժեքը, կոչվում են բացարձակ հաստատուն։ *Օրինակ, շրջանագծի երկարության հարաբերությունը տրամագծին հաստատուն մեծություն է՝* $\pi = 3{,}14159\ldots$։

Ինչպես կտեսնենք ամբողջ դասընթացի ընթացքում փոփոխական մեծության գաղափարը դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվների հիմնական գաղափարն է։ «Մաթեմատիկայում շրջադարձային կետ հանդիսացավ դեկարտյան փոփոխական մեծությունը, — գրում է Ֆ. Էնգելսը «Բնության դիալեկտիկայում»։ Շնորհիվ դրան մաթեմատիկայում մուտք գործեցին շարժումն ու դիալեկտիկան, և շնորհիվ դրան էլ անհապաղ անհրաժեշտ դարձավ դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվը»։

§ 4. Փոփոխական մեծության փոփոխման տիրույթը

Փոփոխական մեծությունն ընդունում է տարբեր թվային արժեքներ։ Դիտարկվող խնդրի բնույթից կախված այդ արժեքների համախումբը կարող է լինել տարբեր։ Օրինակ, սովորական պայմաններում տաքացվող ջրի ջերմաստիճանը կփոխվի սենյակի ջերմաստիճանից, որը հավասար է 15—18°C, մինչև եռման կետը՝ 100°C։ Իսկ $x=\cos\alpha$ *փոփոխական մեծությունը կարող է ընդունել* -1*-ից մինչև* $+1$ *բոլոր արժեքները։*

Փոփոխական մեծության արժեքները երկրաչափորեն պատկերվում են թվային առանցքի կետերով։ Այսպես, α-ի բոլոր հնարավոր արժեքների համար $x=\cos\alpha$ *փոփոխականի արժեքները պատկերվում են թվային առանցքի* -1 *կետից մինչև* $+1$ *կետերի միջև ընկած հատվածի կետերի բազմությամբ, ներառյալ և՛* -1 *և՛* $+1$ *կետերը (նկ. 2)։*



Նկ. 2

Սահմանում։ Փոփոխական մեծության բոլոր թվային արժեքների բազմությունը կոչվում է այդ փոփոխականի փոփոխման տիրույթ։

Նշենք փոփոխական մեծության փոփոխման հետևյալ տիրույթները, որոնք հետագայում հանդիպելու են ավելի հաճախ։

Միջակայք *կամ* ինտերվալ *կոչվում է այն բոլոր* x *թվերի բազմությունը, որոնք ընկած են տված* a *և* b (a<b) *թվերի միջև, ընդ որում այդ թվերն իրենք չեն պատկանում դիտարկվող թվերի բազմությանը. այն նշանակում են այսպես՝* (a,b) *կամ* $a<x<b$ *անհավասարություններով։*

Հատված *կամ* սեգմենտ *կոչվում է այն բոլոր* x *թվերի բազմությունը, որոնք ընկած են տված* a *և* b *երկու թվերի միջև, ընդ որում* a *և* b *երկու թվերը պատկանում են դիտարկվող բազմությանը. այն նշանակում են այսպես՝* [a, b] *կամ էլ* $a\leqslant x\leqslant b$ *անհավասարություններով։ Հաճախ հատվածն անվանում են փակ միջակայք կամ* փակ ինտերվալ։

Եթե a *և* b *թվերից մեկը, օրինակ* a*-ն, միացվում է միջակայքին, իսկ մյուսը՝ ոչ, ապա ստացվում է* կիսափակ միջակայք, *որը կարելի է տալ* $a\leqslant x<b$ *անհավասարություններով և նշանակել* [a,b)։

Եթե միացվում է b *թիվը, իսկ* a*-ն չի միացվում, ապա ստացվում է* (a, b] *կիսափակ միջակայքը, որը կարելի է տալ* $a<x\leqslant b$ *անհավասարություններով։*

Եթե x *փոփոխականն ընդունում է* a*-ից մեծ բոլոր հնարավոր արժեքները, ապա այդպիսի ինտերվալը նշանակում են այսպես՝* $(a, +\infty)$ *և տալիս են* $a<x<+\infty$ *պայմանական անհավասարություններով։ Նման ձևով դիտարկվում են*

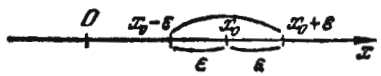
$$a\leqslant x<+\infty,\quad -\infty<x<c,\quad -\infty<x\leqslant c,\quad -\infty<x<+\infty$$

պայմանական անհավասարություններով տրված անվերջ ինտերվալները կամ կիսափակ անվերջ ինտերվալները։

Օրինակ։ $x=\cos\alpha$ *փոփոխականի փոփոխման տիրույթը α-ի բոլոր հնարավոր արժեքների դեպքում իրենից ներկայացնում է* [—1, 1] *հատվածը և որոշվում է* $-1\leqslant x\leqslant 1$ *անհավասարություններով։*

Վերևում տրված սահմանումները կարելի է ձևակերպել՝ «թիվ» հասկացության փոխարեն օգտագործելով «կետ» հասկացությունը օրինակ՝

Հատված *կոչվում է բոլոր այն* x *կետերի բազմությունը, որոնք ընկած են տված* a *և* b *կետերի (հատվածի ծայրակետերի) միջև, ընդ որում հատվածի ծայրակետերը պատկանում են դիտարկվող բազմությանը։*



Նկ. 3

Տված x_0 *կետի շրջակայք կոչվում է այդ կետն իր ներսն ընդգրկող կամայական* (a, b) *ինտերվալը, այսինքն՝ այնպիսի* (a, b) *ինտերվալ, որի ծայրակետերը բավարարում են* $a<x_0<b$ *պայմանին։ Հաճախ դիտարկվում է* x_0 *կետի այնպիսի* (a, b) *շրջակայք, որի համար* x_0*-ն հանդիսանում է միջնակետ։ Այդ դեպքում* x_0*-ն կոչվում է* շրջակայքի կենտրոն. $\frac{b-a}{2}$ *մեծությունը կոչվում է շրջակայքի* շառավիղ։ *Նկ. 3-ում պատկերված է* x_0 *կետի* ε *շառավղով* $(x_0-\varepsilon\ x_0+\varepsilon)$ *շրջակայքը։*

§ 5. Կարգավորված փոփոխական մեծություն։ Աճող և նվազող փոփոխական մեծություններ։ Սահմանափակ փոփոխական մեծություն

Կասենք, որ x *փոփոխականը* կարգավորված փոփոխական մեծություն է, *եթե հայտնի է այդ փոփոխական մեծության փոփոխման տիրույթը և նրա յուրաքանչյուր ցանկացած երկու արժեքների*

մասին կարելի է ասել, թե որ արժեքն է նախորդը և որը՝ հաջորդը: Այստեղ «նախորդ» և «հաջորդ» հասկացությունները կապված չեն ժամանակի հետ, այլ հանդիսանում են փոփոխական մեծության արժեքների «կարգավորման», այսինքն՝ փոփոխական մեծության համապատասխան արժեքների կարգավորված եղանակ:

Կարգավորման փոփոխական մեծության մասնավոր դեպք է այն փոփոխական մեծությունը, որի արժեքները կազմում են x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... թվային հաջորդականություն: Այստեղ $k'<k$ դեպքում $x_{k'}$ արժեքը «նախորդ» է, իսկ x_k արժեքը՝ «հաջորդ», անկախ այն բանից, թե այդ արժեքներից որն է մեծ:

Սահմանում 1: Փոփոխական մեծությունը կոչվում է աճող, եթե նրա յուրաքանչյուր հաջորդ արժեք մեծ է իր նախորդ արժեքից: Փոփոխական մեծությունը կոչվում է նվազող, եթե նրա յուրաքանչյուր հաջորդ արժեք փոքր է նախորդից:

Աճող փոփոխական մեծությունները և նվազող փոփոխական մեծությունները կոչվում են մոնոտոն փոփոխվող փոփոխական մեծություններ կամ պարզապես մոնոտոն մեծություններ:

Օրինակ: Շրջանին ներգծած կանոնավոր բազմանկյան s մակերեսը, այդ բազմանկյան կողմերի թիվը կրկնապատկելիս հանդիսանում է աճող փոփոխական մեծություն: Շրջանին արտագծած կանոնավոր բազմանկյան մակերեսը, այդ բազմանկյան կողմերի թիվը կրկնապատկելիս հանդիսանում է նվազող փոփոխական մեծություն: Նկատենք, որ ոչ ամեն փոփոխական մեծություն է անպայման աճող կամ նվազող: Այսպես, օրինակ, $x=\sin\alpha$ փոփոխականը մոնոտոն մեծություն չէ, երբ α-ն $[0, 2\pi]$ հատվածում աճող մեծություն է: Այն սկզբում աճում է 0-ից մինչև 1, այնուհետև նվազում է 1-ից մինչև —1, և, վերջապես, աճում է —1-ից մինչև 0:

Սահմանում 2: x փոփոխական մեծությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե գոյություն ունի այնպիսի $M>0$ հաստատուն, որ փոփոխականի բոլոր հաջորդ արժեքները, սկսած որևէ մեկից բավարարում են հետևյալ պայմանին՝

$$-M\leqslant x\leqslant M, \text{ այսինքն՝ } |x|\leqslant M:$$

Այլ կերպ ասած, փոփոխական մեծությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե կարելի է ցույց տալ այնպիսի $[-M, M]$ հատված, որ փոփոխականի բոլոր հաջորդ արժեքները, սկսած որևէ մեկից, պատկանեն այդ հատվածին: Բայց չպետք է կարծել, թե փոփոխական մեծությունն անպայման պետք է ընդունի $[-M, M]$ հատվածի բոլոր արժեքները: Օրինակ, $[-2, 2]$ հատվածում բոլոր հնարավոր ռացիոնալ

արժեքներն ընդունող փոփոխական մեծությունը սահմանափակ է, չնայած դրան նա չի ընդունում $[-2, 2]$ հատվածի բոլոր, այն է՝ իռացիոնալ արժեքները:

§ 6. Ֆունկցիա

Բնության տարբեր երևույթներ ուսումնասիրելիս ու տեխնիկական խնդիրներ լուծելիս հարկ է լինում մաթեմատիկայում դիտարկել մի մեծության փոփոխությունը, կախված մի այլ մեծության փոփոխությունից: Այսպես, օրինակ, շարժումն ուսումնասիրելիս անցած ճանապարհը դիտվում է որպես ժամանակի փոփոխությունից կախված փոփոխական: Այստեղ անցած ճանապարհը ժամանակի ֆ ո ւ ն կ ց ի ա ն է:

Դիտարկենք այլ օրինակ: Հայտնի է, որ շրջանի մակերեսը շառավղի միջոցով արտահայտվում է այսպես՝ $Q=\pi R^2$: Եթե R շառավիղն ընդունի տարբեր թվային արժեքներ, ապա Q մակերեսը նույնպես կընդունի տարբեր թվային արժեքներ: Այսպիսով, մեկ փոփոխականի փոփոխությունը առաջ է բերում մեկ այլ փոփոխականի փոփոխություն: Այստեղ շրջանի Q մակերեսը R շառավղի ֆունկցիան է: Ձևակերպենք «ֆունկցիա» հասկացության սահմանումը:

Սահմանում 1: Եթե որևէ տիրույթին պատկանող x փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է մի այլ y փոփոխականի մեկ որոշակի արժեք, ապա y-ը հանդիսանում է x-ի ֆունկցիա, կամ սիմվոլիկ գրությամբ՝ $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ և այլն:

x փոփոխականը կոչվում է անկախ փոփոխական կամ արգումենտ: x և y փոփոխականների կախումը կոչվում է ֆունկցիոնալ կախում: $y=f(x)$ ֆունկցիոնալ կախման սիմվոլիկ գրառման մեջ f տառը ցույց է տալիս, որ x արժեքի հետ պետք է կատարել ինչ որ գործողություններ՝ y-ի արժեքը ստանալու համար: $y=f(x)$, $u=\varphi(x)$ և այլն գրառման փոխարեն հաճախ գրում են $y=y(x)$, $u=u(x)$ և այլն, այսինքն y, u և այլն տառերը նշանակում են և կախյալ փոփոխական, և՛ x-ի հետ գործողությունների համախմբի սիմվոլ:

$y=C$ գրառումը, որտեղ C-ն հաստատուն է, նշանակում է ֆունկցիա, որի արժեքը x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում միշտ նույնն է և հավասար է C-ի:

Սահմանում 2: x-ի այն արժեքների բազմությունը, որոնց համար որոշվում են y ֆունկցիայի արժեքները f(x) կանոնի համա-

ձայն, կոչվում է ֆունկցիայի որոշման տիրույթ (կամ ֆունկցիայի գոյության տիրույթ):

Օրինակ 1. $y=\sin x$ *ֆունկցիան որոշված է* x*-ի բոլոր արժեքների դեպքում: Հետևաբար, նրա որոշման տիրույթը կլինի* $-\infty<x<\infty$ *անվերջ ինտերվալը:*

Դիտողություն 1: Եթե ունենք x *և* $y=f(x)$ *երկու փոփոխական մեծությունների ֆունկցիոնալ կախում և եթե* x *և* $y=f(x)$ *դիտենք որպես կարգավորված փոփոխական մեծություններ, ապա արգումենտի* x^* *և* x^{**} *երկու արժեքներին համապատասխանող ֆունկցիայի երկու՝* $y^*=f(x^*)$ *և* $y^{**}=f(x^{**})$ *արժեքներից հաջորդը կլինի այն, որը համապատասխանում է արգումենտի հաջորդ արժեքին: Այդ պատճառով էլ, բնական է, օրինակ, հետևյալ սահմանումը:*

Սահմանում 3: Եթե $y=f(x)$ *ֆունկցիան այնպիսին է, որ* x *արգումենտի մեծ արժեքին համապատասխանում է ֆունկցիայի մեծ արժեքը, ապա* $y=f(x)$ *ֆունկցիան կոչվում է աճող: Համանման ձևով սահմանվում է նվազող ֆունկցիան:*

Օրինակ 2. $Q=\pi R^2$ *ֆունկցիան* $0<R<+\infty$ *դեպքում աճող ֆունկցիա է, քանի որ* R*-ի մեծ արժեքին համապատասխանում է* Q*-ի մեծ արժեքը:*

Դիտողություն 2: Երբեմն ֆունկցիա հասկացության սահմանման մեջ թույլ են տալիս, որ x*-ի որևէ տիրույթին պատկանող յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է* y*-ի ոչ թե մեկ, այլ մի քանի արժեք, կամ նույնիսկ* y*-ի արժեքների անվերջ բազմություն: Այս դեպքում ֆունկցիան անվանում են բազմարժեք՝ ի տարբերություն վերը սահմանված ֆունկցիայի, որին անվանում են միարժեք: Հետագայում, խոսելով ֆունկցիայի մասին, մենք նկատի կունենանք միայն միարժեք ֆունկցիաները: Եթե անհրաժեշտությունից ելնելով հարկ լինի երբեմն գործ ունենալ բազմարժեք ֆունկցիաների հետ, ապա մենք կանենք հատուկ վերապահումներ:*

§ 7. Ֆունկցիայի տրման եղանակները

I. Ֆունկցիայի տրման աղյուսակային եղանակը

Այս եղանակի դեպքում որոշակի կարգով գրվում են արգումենտի $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *արժեքները և ֆունկցիային համապատասխան* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *արժեքները.*

x	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots\cdots$	y_n

Այդպիսին են օրինակ, եռանկյունաչափական ֆունկցիաների աղյուսակները, լոգարիթմների աղյուսակները և այլն:

Երևույթների էքսպերիմենտալ ուսումնասիրման հետևանքով նույնպես կարող են ստացվել չափվող մեծությունների միջև եղած ֆունկցիոնալ կախումն արտահայտող աղյուսակներ: Այսպես, օրինակ, օդերևույթաբանական հարթակում (площадка) տվյալ օրվա ընթացքում օդի ջերմաստիճանի չափման հետևանքով ստացվում է հետևյալ աղյուսակը.

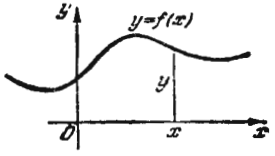
T ջերմաստիճանի արժեքը՝ (աստիճաններով) կախված t ժամանակից (ժամերով)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	—1	—2	—2	—0,5	1	3	3,5	4

Այս աղյուսակը T-ն որոշում է որպես t-ի ֆունկցիա:

II. Ֆունկցիայի տրման գրաֆիկական եղանակը

Եթե հարթության վրա կոորդինատային ուղղանկյուն սիստեմում ունենք $M(x, y)$ *կետերի որևէ բազմություն, ընդ որում այդ կետերից ոչ մի զույգ չի գտնվում* Oy *առանցքին զուգահեռ ուղղի վրա, ապա կետերի այդ բազմությունը որոշում է որևէ* $y=f(x)$ *միարժեք ֆունկցիա. արգումենտի արժեքներ են հանդիսանում կետերի աբսցիսները, իսկ ֆունկցիայի արժեքները համապատասխան օրդինատներն են (նկ. 4):*



Նկ. 4

(xOy) հարթության կետերի այն բազմությունը, որոնց աբսցիսները հանդիսանում են անկախ փոփոխականի արժեքները, իսկ օրդինատները՝ ֆունկցիայի համապատասխան արժեքներն են, կոչվում է տվյալ ֆունկցիայի գրաֆիկ:

III. Ֆունկցիայի տրման անալիտիկ եղանակը

Նախ պարզաբանենք «անալիտիկ արտահայտություն» հասկացությունը: Անալիտիկ արտահայտություն կանվանենք այնպիսի հայտնի մաթեմատիկական գործողությունների ամբողջության սիմվոլիկ նշանակումը, որոնք որոշակի հաջորդականությամբ կատարվում են թվերի ու տառերի հետ, որոնցով նշանակված են հաստատուն կամ փոփոխական մեծություններ: Նշենք, որ հայտնի մաթեմատիկական գործողությունների ամբողջություն ասելով կհասկանանք ոչ

միայն միջնակարգ դպրոցի դասընթացից հայտնի մաթեմատիկական գործողությունները (գումարում, հանում, արմատ հանել և այլն), այլև այնպիսիները, որոնք կատարվեն դասընթացի ուսումնասիրումը զգընթաց:

Օրինակ, անալիտիկ արտահայտություններ են հանդիսանում.

$$x^4-2,\quad \frac{\lg x-\sin x}{5x^2+1},\quad 2^x-\sqrt{5+3^x} \text{ և այլն:}$$

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիոնալ կախումն այնպիսին է, որ f-ը նշանակում է անալիտիկ արտահայտություն, ապա ասում են, որ x-ի y ֆունկցիան տրված է անալիտիկորեն:

Անալիտիկորեն տրված ֆունկցիաներ են, օրինակ՝

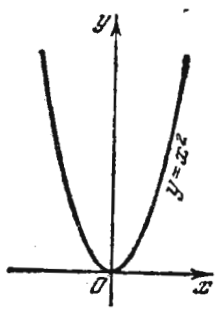
1) $y=x^4-2$, 2) $y=(x+1)(x-1)^{-1}$, 3) $y=\sqrt{1-x^2}$,

4) $y=\sin x$, 5) $Q=\pi R^2$ և այլն:

Այստեղ ֆունկցիաները տրված են անալիտիկորեն՝ մեկ բանաձևի օգնությամբ* (բանաձև ասելով հասկացվում է երկու անալիտիկ արտահայտությունների հավասարությունը): Նման դեպքում կարելի է խոսել ֆունկցիայի որոշման բնական տիրույթի մասին:

Անալիտիկորեն տրված ֆունկցիայի որոշման բնական տիրույթ է x-ի արժեքների այն բազմությունը, որոնց դեպքում աջակողմյան անալիտիկ արտահայտությունն ունի միանգամայն որոշակի արժեք: Այսպես, $y=x^4-2$ ֆունկցիայի որոշման բնական տիրույթն է $-\infty<x<\infty$ անվերջ ինտերվալը, քանի որ այդ ֆունկցիան որոշված է x-ի բոլոր արժեքների համար: $y=(x+1)(x-1)^{-1}$ ֆունկցիան որոշված է x-ի բոլոր արժեքների համար, բացի $x=1$ արժեքից, քանի որ այս արժեքի համար հայտարարը դառնում է զրո: $y=\sqrt{1-x}$ ֆունկցիայի համար որոշման բնական տիրույթ կլինի $-1\leqslant x\leqslant 1$ հատվածը և այլն:

Դիտողություն: Երբեմն անհրաժեշտ է լինում դիտարկել ֆունկցիայի որոշման բնական տիրույթը ոչ թե ամբողջությամբ, այլ միայն նրա որևէ մասը: Այսպես, շրջանի Q մակերեսի կախումը նրա R շառավղից որոշվում է $Q=\pi R^2$ ֆունկցիայով: Այս երկրաչափական հարցը դիտարկելիս տվյալ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը հանդիսանում է $0<R<+\infty$ անվերջ ինտերվալը: Մինչդեռ տվյալ ֆունկցիայի որոշման բնական տիրույթը հանդիսանում է $-\infty<R<+\infty$ անվերջ ինտերվալը:



Նկ. 5

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան տրված է անալիտիկորեն, ապա կոորդինատների xOy հարթության վրա այն կարող է պատկերվել գրաֆիկորեն: Այսպես, $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը հանդիսանում է նկ. 5-ում պատկերված պարաբոլը:

8. Հիմնական տարրական ֆունկցիաներ: Տարրական ֆունկցիաներ

Հիմնական տարրական ֆունկցիաներ են կոչվում անալիտիկ եղանակով տրված հետևյալ ֆունկցիաները.

I. Աստիճանային ֆունկցիա՝ $y=x^\alpha$, որտեղ α-ն իրական թիվ է*:

II. Ցուցչային ֆունկցիա՝ $y=a^x$, որտեղ a-ն մեկից տարբեր դրական թիվ է:

III. Լոգարիթմական ֆունկցիա՝ $y=\log_a x$, որտեղ լոգարիթմների հիմքը՝ a-ն մեկից տարբեր դրական թիվ է:

IV. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ՝

$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$,

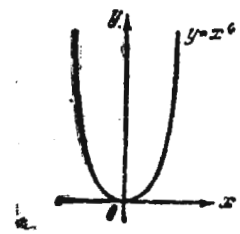
$y=\operatorname{ctg} x$, $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec} x$:

V. Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ՝

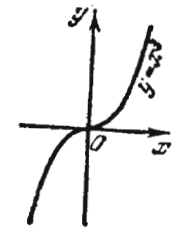
$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$,

$y=\operatorname{arcctg} x$, $y=\operatorname{arcsec} x$, $y=\operatorname{arccosec} x$:

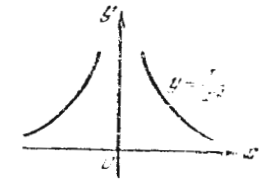
Դիտարկենք հիմնական տարրական ֆունկցիաների որոշման տիրույթները և գրաֆիկները:



Նկ. 6



Նկ. 7



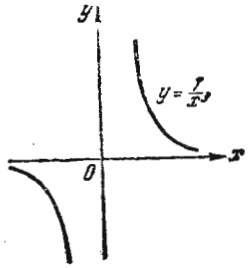
Նկ. 8

* Եթե α-ն իրական է, այդ ֆունկցիան հաշվվում է լոգարիթմելու և պոտենցելու միջոցով՝ $\log y=\alpha\log x$: Այդ դեպքում ենթադրվում է, որ $x>0$:

Աստիճանային ֆունկցիա, $y=x^{\alpha}$։

1. α-ն դրական ամբողջ թիվ է։ Ֆունկցիան որոշված է $-\infty<x<+\infty$ անվերջ ինտերվալում։ Այս դեպքում α-ի մի քանի արժեքների համար ֆունկցիաների գրաֆիկներն ունեն նկ. 6-ում և նկ. 7-ում պատկերված տեսքը։

2. α-ն ամբողջ բացասական թիվ է։ Այս դեպքում ֆունկցիան որոշված է x-ի բոլոր արժեքների համար, բացի $x=0$ արժեքից։ α-ի մի քանի արժեքների համար ֆունկցիաների գրաֆիկներն ունեն նկ. 8-ում և նկ. 9-ում պատկերված տեսքը։



Նկ. 9

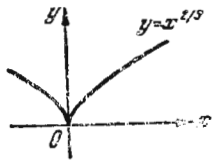
10, 11, 12 նկարներում պատկերված են աստիճանային ֆունկցիաների գրաֆիկները α-ի կոտորակաձևացիոնալ արժեքների դեպքում։

Ցուցչային ֆունկցիա, $y=a^x$, $a>0$ և $a\neq1$։ Այս ֆունկցիան որոշված է x-ի բոլոր արժեքների դեպքում։ Նրա գրաֆիկն ունի նկ. 13-ում պատկերված տեսքը։

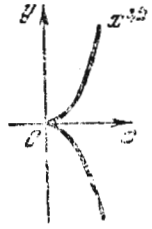
Լոգարիթմական ֆունկցիա, $y=\log_a x$, $a>0$ և $a\neq1$։ Այս ֆունկցիան որոշված է $x>0$ դեպքում։ Նրա գրաֆիկը պատկերված է նկ. 14-ում։

Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ։ x անկախ փոփոխականը $y=\sin x$ և այլ բանաձևերում արտահայտվում է ռադիաններով։

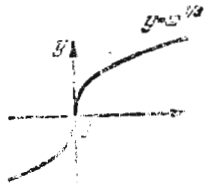
Թվարկած բոլոր եռանկյունաչափական ֆունկցիաները պարբերական են։ Ձևակերպենք պարբերական ֆունկցիայի ընդհանուր սահմանումը։



Նկ. 10



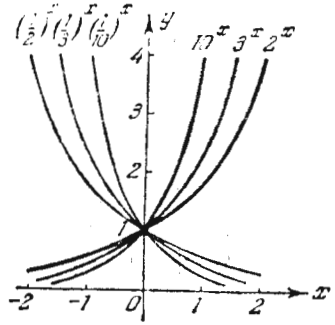
Նկ. 11



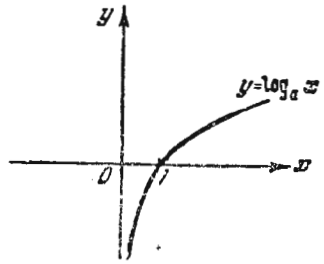
Նկ. 12

Սահմանում 1։ $y=f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է պարբերական, եթե գոյություն ունի այնպիսի C հաստատուն թիվ, որն ավելացնելով (կամ հանելով) x կամայական արգումենտին, ֆունկցիայի արժեքը չի փոփոխվում՝ $f(x+C)=f(x)$. այդպիսի ամենափոքր թիվը

կոչվում է ֆունկցիայի պարբերություն. հետագայում այն կնշանակենք 2l-ով։



Նկ. 13



Նկ. 14

Սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ $y=\sin x$ ֆունկցիան պարբերական է. նրա պարբերությունը հավասար է 2π-ի՝ $\sin x=\sin(x=2\pi)$։ $\cos x$-ի պարբերությունը նույնպես հավասար է 2π-ի։ $y=\operatorname{tg}x$ և $y=\operatorname{ctg}x$ ֆունկցիաների պարբերությունը հավասար է π-ի։

$y=\sin x$ և $y=\cos x$ ֆունկցիաները որոշված են x-ի բոլոր արժեքների դեպքում։ $y=\operatorname{tg}x$ և $y=\sec x$ ֆունկցիաները որոշված են ամենուրեք, բացի

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

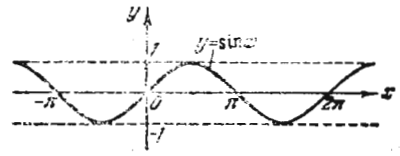
կետերից։ $y=\operatorname{ctg}x$ և $y=\operatorname{cosec}x$ ֆունկցիաները որոշված են x-ի բոլոր արժեքների դեպքում, բացի

$$x=k\pi \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

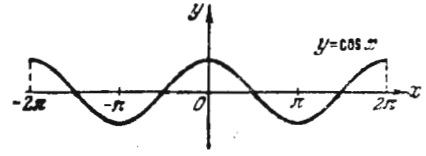
կետերից։

Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գրաֆիկները պատկերված են նկ. նկ. 15—19-ում։

Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները մանրամասն դիտարկենք ավելի ուշ։

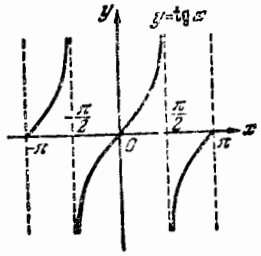


Նկ. 15

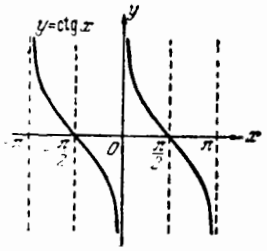


Նկ. 16

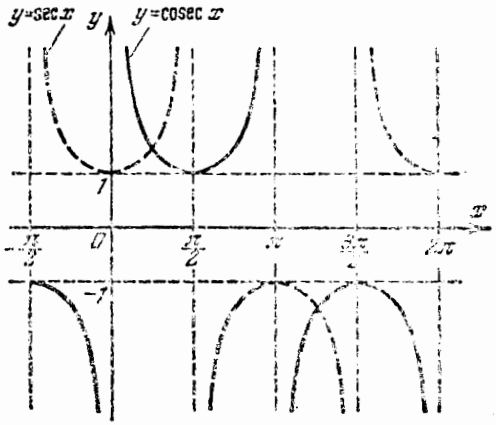
Այնուհետև մուծենք ֆունկցիայից ֆունկցիայի հասկացությունը։ Եթե y-ը հանդիսանում է u-ի ֆունկցիա, իսկ u-ն իր հերթին կախ-



Նկ. 17



Նկ. 18



Նկ. 19

ված է x փոփոխականից, ապա y-ը նույնպես կախված կլինի x-ից։ Ենթադրենք y=F(u) և u=φ(x)։ Ստանում ենք x-ից կախված y ֆունկցիա

$$y=F[\varphi(x)].$$

Վերջին ֆունկցիան կոչվում է ֆունկցիայի ֆունկցիա կամ բարդ ֆունկցիա։

Օրինակ 1։ Ենթադրենք y=sinu, u=x²։ y=sin(x²) ֆունկցիան հանդիսանում է x-ի բարդ ֆունկցիա։

Դիտողություն։ y=F[φ(x)] ֆունկցիայի գոյության տի-

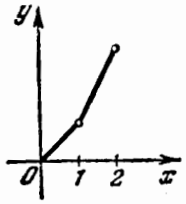
բույթը կամ u=φ(x) ֆունկցիայի ամբողջ գոյության տիրույթն է, կամ էլ նրա այն մասը, որտեղ որոշված են u-ի՝ F(u) ֆունկցիայի որոշման տիրույթից դուրս չեկող արժեքները։

Օրինակ 2։ $y=\sqrt{1-x^2}$ $(y=\sqrt{u},\ u=1-x^2)$ ֆունկցիայի գոյության տիրույթը հանդիսանում է [−1, 1] հատվածը, քանի որ |x|>1 դեպքում u<0 և, հետևաբար, x-ի այդ արժեքների դեպքում $\sqrt{u}$ ֆունկցիան որոշված չէ (չնայած, որ u=1−x² ֆունկցիան որոշված է x-ի բոլոր արժեքների համար)։ Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատների սկզբնակետում կենտրոն ունեցող և միավոր շառավղով շրջանագծի վերին կեսն է։

«Ֆունկցիայի ֆունկցիա» օպերացիան կարող է իրագործվել ոչ թե մեկ, այլ ցանկացած թվով ֆունկցիաների միջոցով։ Օրինակ, y=ln|sin(x²+1)| ֆունկցիան ստացվում է հետևյալ օպերացիաների հետևանքով (հետևյալ ֆունկցիաների միջոցով).

$$v=x^2+1,\quad u=\sin v,\quad y=\ln u.$$

Այնուհետև սահմանենք տարրական ֆունկցիայի գաղափարը։



Նկ. 20

Սահմանում 2։ Տարրական ֆունկցիա կոչվում է այն ֆունկցիան, որը կարող է տրված լինել y=f(x) տեսքի մեկ բանաձևով, որտեղ աջակողմյան արտահայտությունը կազմված է հիմնական տարրական ֆունկցիաներից և հաստատուններից՝ վերջավոր թվով գումարման, հանման, բազմապատկման, բաժանման և ֆունկցիայից ֆունկցիա վերցնելու գործողությունների օգնությամբ։

Սահմանումից հետևում է, որ տարրական ֆունկցիաները անալիտիկորեն տրված ֆունկցիաներ են։

Տարրական ֆունկցիաների օրինակներ.

$$y=|x|=\sqrt{x^2},\qquad y=\sqrt{1+4\sin^2 x},\qquad y=\frac{\log x+4\sqrt[3]{x}-2\operatorname{tg}x}{10^x-x+10}.$$

Ոչ տարրական ֆունկցիայի օրինակ.

y=1·2·3 . . . ·n(y=f(n)) ֆունկցիան տարրական չէ, քանի որ y-ը ստանալու համար կատարվելիք գործողությունների քանակը n-ի մեծացման հետ մեծանում է, այսինքն՝ այն սահմանափակ չէ։

Դիտողություն։ Նկ. 20-ում պատկերված ֆունկցիան տարրական է, թեև այն տրվում է երկու բանաձևերի օգնությամբ՝

$$f(x)=x,\ \text{եթե}\ 0\leqslant x\leqslant 1,\quad f(x)=2x-1,\ \text{եթե}\ 1\leqslant x\leqslant 2։$$

Այդ ֆունկցիան կարելի է տալ նաև մեկ բանաձևով՝

$$f(x)=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}|x-1|=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2},$$

երբ $0\leq x\leq 2$։

(Տես նաև V գլխի վարժությունների 139—144 օրինակները)։

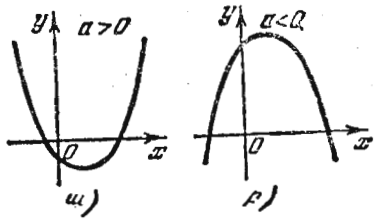
§ 9. Հանրահաշվական ֆունկցիաներ

Հանրահաշվական ֆունկցիաների թվին են պատկանում հետևյալ տեսքի տարրական ֆունկցիաները.

$$\text{I.}\quad y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիան կամ բազմանդամը, որտեղ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ հաստատուն թվեր են, որոնք կոչվում են գործակիցներ. n-ը ամբողջ ոչ բացասական թիվ է, որը կոչվում է բազմանդամի աստիճան։ Ակնհայտ է, որ այդ ֆունկցիան որոշված է x-ի բոլոր արժեքների դեպքում, այսինքն՝ որոշված է անվերջ ինտերվալում։

Օրինակ 1. $y=ax+b$, գծային ֆունկցիա։ $b=0$ դեպքում $y=ax$ գծային ֆունկցիան արտահայտում է y-ի համեմատական կախումը x-ից։ $a=0$ դեպքում $y=b$ ֆունկցիան հաստատուն է։



Նկ. 21

Օրինակ 2. $y=ax^2+bx+c$, քառակուսային ֆունկցիա։ Քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը պարաբոլ է (նկ. 21)։

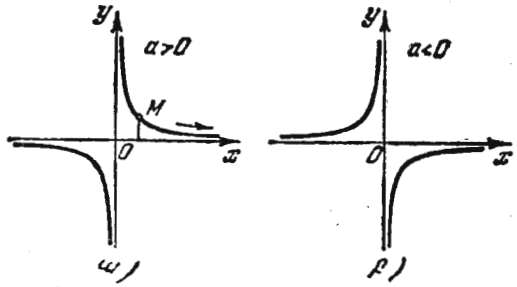
Այդ ֆունկցիաները մանրամասն դիտարկվել են անալիտիկ երկրաչափության մեջ։

II. Կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիա։ Այս ֆունկցիան սահմանվում է որպես երկու բազմանդամների հարաբերություն,

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m};$$

կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիա է հանդիսանում, օրինակ, $y=\frac{a}{x}$ ֆունկցիան, որն արտահայտում է հակադարձ համեմատական կախումը։ Նրա գրաֆիկը պատկերված է նկ. 22-ում։ Ակնհայտ է, որ կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիան որոշված է x-ի բոլոր արժեքների դեպքում, բացի այն արժեքներից, որոնց համար հայտարարը զրո է դառնում է զրո։

III. Ռացիոնալ ֆունկցիա։ Եթե $y=f(x)$ բանաձևի աջ մասում կատարվում են գումարման, հանման, բազմապատկման, բաժանման և ռացիոնալ ոչ ամբողջ ցուցիչներով աստիճան բարձրացնելու գործողություններ, ապա x-ի y ֆունկցիան կոչվում է իռացիոնալ։ Իռացիոնալ ֆունկցիաների օրինակներ են՝ $y=\frac{2x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^2}}$, $y=\sqrt{x}$ և այլն։



Նկ. 22

Դիտողություն 1։ Թվարկված երեք տեսակի հանրահաշվական ֆունկցիաները չեն սպառում բոլոր հանրահաշվական ֆունկցիաները։ Հանրահաշվական ֆունկցիա կոչվում է ցանկացած $y=f(x)$ ֆունկցիան, որը բավարարում է

$$P_0(x)y^n+P_1(x)y^{n-1}+\ldots+P_n(x)=0 \qquad (1)$$

տեսքի հավասարմանը, որտեղ $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ x-ի որևէ բազմանդամներ են։

Կարելի է ապացուցել, որ թվարկված երեք տեսակի ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը բավարարում է (1) տեսքի որևէ հավասարման, բայց հավասարմանը բավարարող ոչ ամեն ֆունկցիա է, որը հանդիսանում է վերը թվարկված ֆունկցիաներից մեկնումեկի տեսքի։

Դիտողություն 2։ Այն ֆունկցիան, որը հանրահաշվական չէ, կոչվում է տրանսցենդենտ։

Տրանսցենդենտ ֆունկցիաների օրինակներ են. $y=\cos x$, $y=10^x$ և այլն։

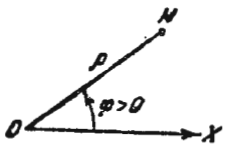
§ 10. Կոորդինատների բևեռային սիստեմ

Կետի դիրքը հարթության վրա կարելի է որոշել, այսպես կոչված, կոորդինատների բևեռային սիստեմի օգնությամբ։

Հարթության վրա ընտրենք որևէ O կետ, որը կոչվում է բևեռ

և այդ կետից դուրս եկող ճառագայթ, որը կոչվում է բևեռային առանցք: M կետի դիրքը հարթության վրա կարելի է որոշել երկու թվերով՝ ρ թվով, որն արտահայտում է M կետի հեռավորությունը բևեռից և բևեռային առանցքի հետ OM հատվածի կազմած անկյան մեծությունն արտահայտող φ թվով: φ անկյան համար հաշվանքի դրական ուղղությունն է համարվում ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությունը: ρ և φ թվերը կոչվում են M կետի բևեռային կոորդինատներ (նկ. 23):

ρ շառավիղ-վեկտորը միշտ կհամարենք ոչ բացասական: Եթե φ բևեռային անկյունը վերցնենք $0 \leq \varphi < 2\pi$ միջակայքում, ապա հարթության յուրաքանչյուր կետին, բացի բևեռից, համապատասխանում է ρ և φ թվերի միանգամայն որոշակի զույգ: Բևեռի համար ρ=0, իսկ φ-ն կամայական է:



Նկ. 23

Կապ հաստատենք բևեռային և ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատների միջև: Ենթադրենք կոորդինատների ուղղանկյուն սիստեմի սկզբնակետը համընկնում է բևեռի հետ, իսկ Ox առանցքի դրական ուղղությունը՝ բևեռային առանցքի հետ: Նկ. 24-ից անմիջապես հետևում է.

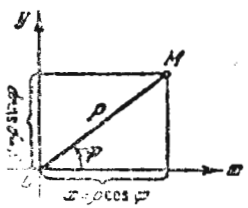
$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

և հակադարձը, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$,

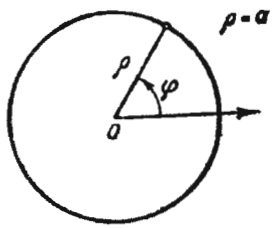
Ծանոթություն: φ-ն որոնելիս պետք է հաշվի առնել, թե որ քառորդում է գտնվում կետը, և վերցնել φ-ի համապատասխան արժեքը:

ρ=F(φ) հավասարումը տրված կոորդինատների բևեռային սիստեմում որոշում է որոշակի գիծ:

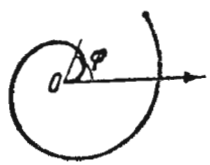
Օրինակ 1. ρ=a հավասարումը, որտեղ a=const, բևեռային կոորդինատներով որոշում է բևեռում կենտրոն ունեցող և a շառավղով շրջանագիծ:



Նկ. 24



Նկ. 25



Նկ. 26

Նկ. 24-ում ցույց տրված կամավորությունն ունեցող ուղղանկյուն կոորդինատային սիստեմում այդ շրջանագծի (նկ. 25) հավասարումը կլինի.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \quad \text{կամ} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

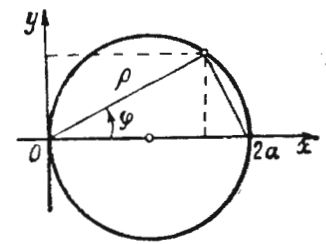
Օրինակ 2. ρ=aφ, որտեղ a=const.
Կազմենք ρ-ի արժեքների աղյուսակ՝ φ-ի մի քանի արժեքների դեպքում.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	4π
ρ	0	≈0,78a	≈1,57a	≈2,36a	≈3,14a	≈4,71a	≈6,28a	≈9,42a	≈12,56a

Համապատասխան կորը պատկերված է նկ. 26-ում: Այդ կորը կոչվում է Արքիմեդի սպիրալ:

Օրինակ 3. ρ=2a cosφ
Սա a շառավղով շրջանագծի հավասարումն է, որի կենտրոնը գտնվում է ρ₀ a, φ 0 կետում (նկ. 27): Գրենք այդ շրջանագծի հավասարումը ուղղանկյուն կոորդինատներով: Տվյալ հավասարման մեջ տեղադրելով $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, կունենանք՝

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{կամ} \quad x^2+y^2-2ax=0,$$



Նկ. 27

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԱՌԱՋԻՆ ԳԼԽԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

1. Տրված է $f(x) = x^2 + 6x - 4$ ֆունկցիան. Ստուգել, որ f(1)=3, f(3)=23:

2. $f(x) = x^2 + 1$: Հաշվել. ա) f(4): Պատ. 17: բ) $f(\sqrt{2})$: Պատ. 3: գ) f(a+1): Պատ. a^2+2a+2: դ) f(a)+1: Պատ. a^2+2: ե) $f(a^2)$: Պատ. a^4+1: զ) $f[(a)]^2$: Պատ. a^4+2a^2-1: է) f(2a): Պատ. $4a^2+1$ արժեքները:

3. $\varphi(x) = \frac{x-1}{3x+5}$: Գրել $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ և $\frac{1}{\varphi(x)}$ արտահայտությունները: Պատ. $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{3+5x}$; $\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{3x+5}{x-1}$:

4. $\psi(x) = \sqrt{x^2+4}$: Գրել ψ(2x) և ψ(0) արտահայտությունները: Պատ. $\psi(2x) = 2\sqrt{x^2+1}$: ψ(0)=2:

5. f(θ) tgθ: Ստուգել $f(2\theta) = \frac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$ հավասարությունը:

6. $\varphi(x) = \lg\frac{1-x}{1+x}$: Ստուգել $\varphi(a)+\varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$ հավասարությունը:

7. f(x)=lgx: φ(x)=x³: Գրել հետևյալ արտահայտությունները. ա) f[φ(2)]: Պատ. 3lg2: բ) f[φ(a)]: Պատ. 3lga: գ) φ[f(a)]: Պատ. [lga]³:

8. Գտնել $y=2x^2+1$ ֆունկցիայի գոյության բնական տիրույթը։ Պատ. $-\infty<x<+\infty$։

9. Գտնել ֆունկցիաների գոյության բնական տիրույթները. ա) $\sqrt{1-x^2}$։ Պատ. $-1\leq x\leq 1$։ բ) $\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$։ Պատ. $-3\leq x\leq 7$։ գ) $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[5]{x-b}$։ Պատ. $-\infty<x<+\infty$։ դ) $\frac{a+x}{a-x}$։ Պատ. $x\neq a$։ ե) $\arcsin^2 x$։ Պատ. $-1\leq x\leq 1$։ զ) $y=\lg x$։ Պատ. $x>0$։ է) $y=a^x (a>0)$։ Պատ. $-\infty<x<+\infty$։

Կառուցել ֆունկցիաների գրաֆիկները.

10. $y=-3x+5$։ 11. $y=\frac{1}{2}x^2+1$։ 12. $y=3-2x^2$։ 13. $y=x^2+2x-1$։ 14. $y=\frac{1}{x-1}$։ 15. $y=\sin 2x$։ 16. $y=\cos 3x$։ 17. $y=x^2-4x+6$։ 18. $y=\frac{1}{1-x^2}$։ 19. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$։ 20. $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$։ 21. $y=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$։ 22. $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{4}$։ 23. $y=3^x$։ 24. $y=2^{-x^2}$։ 25. $y=\log_2\frac{1}{x}$։ 26. $y=x^3+1$։ 27. $y=4-x^3$։ 28. $y=\frac{1}{x^2}$։ 29. $y=x^4$։ 30. $y=x^5$։ 31. $y=\sqrt{x}$։ 32. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$։ 33. $y=\sqrt[3]{x}$։ 34. $y=|x|$։ 35. $y=\log_2|x|$։ 36. $y=\log_2(1-x)$։ 37. $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$։ 38. $y=4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$։

39. $f(x)$ ֆունկցիան $[-1;\ 1]$ հատվածում որոշվում է հետևյալ ձևով.

$$f(x)=1+x,\ \text{երբ}\ -1\leq x\leq 0;$$
$$f(x)=1-2x,\ \text{երբ}\ 0\leq x\leq 1։$$

Կառուցել բևեռային հավասարումներով տրված կորերը.

41. $\rho=\frac{a}{\varphi}$ (հիպերբոլական սպիրալ)։ 42. $\rho=a^{\varphi}$ (լոգարիթմական սպիրալ)։ 43. $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (լեմնիսկատ)։ 44. $\rho=a(1-\cos\varphi)$ (կարդիոիդ)։ 45. $\rho=a\sin 3\varphi$։

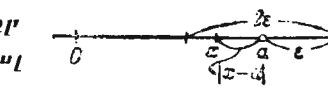
ԳԼՈՒԽ II

ՍԱՀՄԱՆ։ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. Փոփոխական մեծության սահմանը։ Անվերջ մեծ փոփոխական մեծություն

Այս պարագրաֆում մենք դիտարկելու ենք կարգավորված փոփոխական մեծություններ, որոնք փոփոխվում են հատուկ այն է՝ «փոփոխական մեծությունը ձգտում է սահմանի» տերմիններով բնորոշվող ձևով։ Փոփոխականի սահման գաղափարը հետագա ողջ դասընթացում խաղալու է հիմնական դեր, քանի որ նրա հետ անմիջականորեն կապված են մաթեմատիկական անալիզի հիմնական գաղափարները՝ ածանցյալը, ինտեգրալը և այլն։

Սահմանում 1։ a հաստատուն թիվը կոչվում է x փոփոխական մեծության սահման, եթե յուրաքանչյուր նախապես տրված կամավոր փոքր դրական ε թվի համար կարելի է ցույց տալ x փոփոխականի այնպիսի արժեք, որ փոփոխականի բոլոր հաջորդ արժեքները բավարարեն հետևյալ անհավասարությանը.



Նկ. 28

$$|x-a|<\varepsilon։$$

Եթե a թիվը x փոփոխական մեծության սահմանն է, ապա ասում են, որ x-ը ձգտում է a սահմանին, և գրում են.

$$x\to a\ \text{կամ}\ \lim x=a^*։$$

Երկրաչափական տերմիններով սահմանի սահմանումը կարող է ձևակերպվել հետևյալ կերպ.

a հաստատուն թիվը x փոփոխականի սահմանն է, եթե a կետում կենտրոն ունեցող և ε շառավղով բավականաչափ փոքր շրջակայքի համար կգտնվի x-ի այնպիսի արժեք, որին հաջորդող արժեքներին համապատասխանող բոլոր կետերը կգտնվեն այդ շրջակայքում (նկ. 28)։ Քննարկենք սահմանի ձգտող փոփոխականների մի քանի օրինակներ։

---

* „lim" լատինական limes—սահման բառի համառոտ ձևն է։

Օրինակ 1։ x փոփոխական մեծությունը հաջորդաբար ընդունում է հետևյալ արժեքները.

$$x_1=1+1,\quad x_2=1+\frac{1}{2},\quad x_3=1+\frac{1}{3},\ \ldots,\ x_n=1+\frac{1}{n},\ \ldots$$

Ապացուցենք, որ այդ փոփոխականն ունի սահման, որը հավասար է մեկի։ Ունենք

$$|x_n-1|=\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{n}.$$

Ցանկացած ε-ի համար, սկսած n համարից, որտեղ $\frac{1}{n}<\varepsilon$ կամ $n>\frac{1}{\varepsilon}$ փոփոխականի բոլոր հաջորդ արժեքները կբավարարեն հետևյալ անհավասարությանը. $|x_n-1|<\varepsilon$, ինչը պահանջվում էր ապացուցել։

Նկատենք, որ այստեղ փոփոխական մեծությունը ձգտում է սահմանի՝ նվազելով։

Օրինակ 2։ x փոփոխական մեծությունը հաջորդաբար ընդունում է հետևյալ արժեքները.

$$x_1=1-\frac{1}{2},\ x_2=1+\frac{1}{2^2},\ x_3=1-\frac{1}{2^3},\ x_4=1+\frac{1}{2^4},\ \ldots,\ x_n=1+(-1)^n\frac{1}{2^n},\ \ldots$$

Այդ փոփոխականն ունի սահման, որը հավասար է մեկի։ Իրոք,

$$|x_n-1|=\left|1+(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}-1\right|=\frac{1}{2^n}.$$

Ցանկացած ε-ի համար $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$ (որից հետևում է՝ $2^n>\frac{1}{\varepsilon}$, $n\lg 2>\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ կամ $n>\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$) առնչությունը բավարարող n համարից սկսած x-ի բոլոր հաջորդ արժեքները կբավարարեն հետևյալ առնչությունը՝

$$|x_n-1|<\varepsilon:$$

Նշենք, որ այստեղ փոփոխական մեծության արժեքները մեկ մեծ են սահմանից, մեկ փոքր։ Փոփոխական մեծությունը ձգտում է սահմանին՝ «տատանվելով նրա շուրջը»։

Դիտողություն 1։ Ինչպես նշվել է I գլխի § 3-ում, c հաստատուն մեծությունը հաճախ դիտում են որպես փոփոխական մեծություն, որի բոլոր արժեքներն իրար հավասար են՝ $x=c$։

Ակնհայտ է, որ հաստատունի սահմանը հավասար է այդ հաստատունին, քանի որ ցանկացած ε-ի դեպքում միշտ տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.

$$|x-c|=|c-c|=0<\varepsilon.$$

Դիտողություն 2։ Սահմանի սահմանումից հետևում է, որ փոփոխական մեծությունը չի կարող երկու սահման ունենալ։ Իրոք, եթե $\lim x=a$ և $\lim x=b$ $(a<b)$, ապա կամայորեն ընտրված փոքր ε-ի դեպքում x-ը միաժամանակ պետք է բավարարի հետևյալ երկու անհավասարություններին.

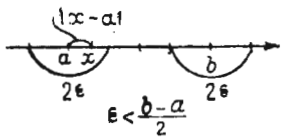
$$|x-a|<\varepsilon \text{ և } |x-b|<\varepsilon,$$

իսկ դա անհնարին է, երբ $\varepsilon<\frac{b-a}{2}$ (նկ. 29)։

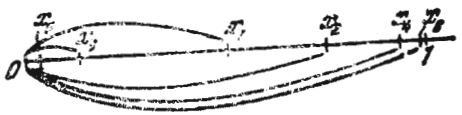
Դիտողություն 3։ Չպետք է կարծել, որ ամեն մի փոփոխական մեծություն սահման ունի։ Ենթադրենք x փոփոխական մեծությունը հաջորդաբար ընդունում է հետևյալ արժեքները.

$$x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=1-\frac{1}{4},\quad x_3=\frac{1}{8},\ \ldots,\ x_{2k}=1-\frac{1}{2^{2k}},\quad x_{2k+1}=\frac{1}{2^{2k+1}}$$

(նկ. 30)։ Բավականաչափ մեծ k-ի դեպքում x_{2k} և դուրս համար անեցող բոլոր հաջորդող արժեքները ցանկացած չափով քիչ կտարբերվեն 1-ից, իսկ հաջորդող x_{2k+1} արժեքը և x-ի՝ նրանից հետո եկող կենտ համարներն ունեցող բոլոր արժեքները ցանկացած չա-



Նկ. 29



Նկ. 30

փով քիչ կտարբերվեն զրոյից։ Հետևաբար, x փոփոխականը սահմանի չի ձգտում։

Սահմանի սահմանման մեջ մատնանշված է, որ եթե փոփոխական մեծությունը ձգտում է a սահմանին, ապա a-ն հաստատուն թիվ է։ Բայց «ձգտում է» հասկացությունն օգտագործվում է նաև փոփոխական մեծության փոփոխման մեկ բոլորովին այլ եղանակ բնութագրելու համար. դա երևում է հետևյալ սահմանումից։

Սահմանում 2։ x փոփոխականը ձգտում է անվերջության, եթե նախապես տրված յուրաքանչյուր M դրական թվի համար կարելի է ցույց տալ x-ի այնպիսի արժեք, որից սկսած փոփոխականի բոլոր հաջորդ արժեքները կբավարարեն $|x|>M$ անհավասարությանը։

Եթե x փոփոխականը ձգտում է անվերջության, ապա այն անվանում են անվերջ մեծ փոփոխական մեծություն և գրում են՝ $x\to\infty$։

Օրինակ 3։ x փոփոխական մեծությունն ընդունում է հետևյալ արժեքները.

$$x_1=-1,\quad x_2=2,\quad x_3=-3,\ \ldots,\ x_n=(-1)^n n,\ \ldots$$

Սա անվերջ մեծ փոփոխական մեծություն է, քանի որ կամայական $M>0$ *թվի համար փոփոխականի բոլոր արժեքները, սկսած մի որոշ համարից, բացարձակ մեծությամբ կլինեն* M*-ից մեծ։*

x *փոփոխական մեծությունը «ձգտում է պլյուս անվերջության»՝* $x\to+\infty$, *եթե կամավոր* $M>0$ *դեպքում փոփոխականի բոլոր արժեքները, սկսած որոշ համարից, կբավարարեն* $M<x$ *անհավասարությանը։*

Պլյուս անվերջության ձգտող փոփոխական մեծության օրինակ կարող է ծառայել $x_1=1,\ x_2=2,\ \ldots,\ x_n=n,\ \ldots$, *արժեքներն ընդունող* x *փոփոխականը։*

x *փոփոխական մեծությունը «ձգտում է մինուս անվերջության»՝* $x\to-\infty$, *եթե կամավոր* $M>0$ *թվի դեպքում փոփոխականի բոլոր արժեքները, սկսած որևէ մեկից, կբավարարեն* $x<-M$ *անհավասարությանը։*

Օրինակ՝ $x_1=1,\ x_2=-2,\ \ldots,\ x_n=-n,\ \ldots$, *արժեքներն ընդունող* x *փոփոխականը ձգտում է մինուս անվերջության։*

2. Ֆունկցիայի սահմանը

Այս պարագրաֆում կքննարկենք ֆունկցիայի փոփոխման մի քանի դեպքեր, երբ արգումենտը ձգտում է որոշակի a *սահմանի կամ անվերջության։*

Սահմանում 1։ Դիցուք $y=f(x)$ *ֆունկցիան որոշված է* a *կետի որևէ շրջակայքում։* $y=f(x)$ *ֆունկցիան ձգտում է* b *սահմանին* ($y\to b$), *երբ* x*-ը ձգտում է* a*-ի* ($x\to a$), *եթե յուրաքանչյուր* ε *դրական թվի համար, որքան էլ այն փոքր լինի, կարելի է գտնել այնպիսի* δ *դրական թիվ այնպես, որ* a*-ից տարբեր բոլոր* x*-երի համար, որոնք բավարարում են*

$$|x-a|<\delta$$

անհավասարությանը, տեղի ունենա հետևյալ՝*

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

անհավասարությունը։

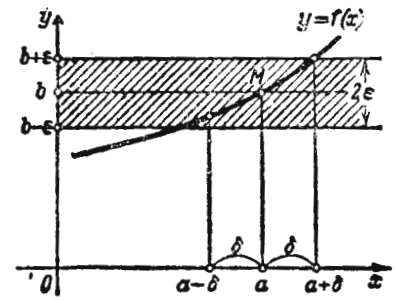
* *Այստեղ նկատի են առնվում* $|x-a|<\delta$ *անհավասարությանը բավարարող* x*-ի այն արժեքները, որոնք պատկանում են ֆունկցիայի որոշման տիրույթին։ Համանման հանդամանքներ կհանդիպեն նաև հետագայում։ Այսպես, ֆունկցիայի վարքը քննարկելիս, երբ* $x\to\infty$ *կարող է պատահել, որ ֆունկցիան որոշված է* x*-ի ամբողջ դրական արժեքների դեպքում։ Հետևաբար, այս դեպքում* $x\to\infty$, *ընդունելով միայն ամբողջ դրական արժեքներ։ Հետագայում այս մասին վերապահում չենք անի։*

Եթե b*-ն* $f(x)$ *ֆունկցիայի սահմանն է, երբ* $x\to a$, *ապա գրում են*

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

կամ $f(x)\to b$, *երբ* $x\to a$։

Եթե $f(x)\to b$, *երբ* $x\to a$, *ապա* $y=f(x)$ *ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա դա ցույց է տրվում հետևյալ կերպ (նկ. 31). քանի որ* $|x-a|<\delta$ *անհավասարությունից հետևում է,* $|f(x)-b|<\varepsilon$ *անհավասարությունը, ապա այդ նշանակում է, որ այն բոլոր կետերի համար, որոնք* a *կետից հեռացված են ոչ ավել, քան* δ*-ն է* $y=f(x)$ *ֆունկցիայի գրաֆիկի* M *կետերը գտնվում են* $y=b-\varepsilon$ *և* $y=b+\varepsilon$ *ուղիղներով սահմանափակված* 2ε *լայնությամբ շերտի ներսը։*



Նկ. 31

Դիտողություն 1։ $f(x)$ *ֆունկցիայի սահմանը, երբ* $x\to a$ *կարելի է սահմանել նաև հետևյալ կերպ։*

Դիցուք x *փոփոխական մեծությունը արժեքներ է ընդունում այնպես (կարգավորված է այնպես), որ եթե*

$$|x^*-a|>|x^{**}-a|,$$

ապա x^{**}*-ը հանդիսանում է հաջորդ, իսկ* x^**-ը՝ նախորդ արժեքը, իսկ եթե*

$$|\bar{x}^*-a|=|\bar{x}^{**}-a| \text{ և } \bar{x}^*<\bar{x}^{**},$$

ապա $\bar{x}^{**}$*-ը հաջորդ արժեքն է, իսկ* $\bar{x}^*$*-ը՝ նախորդ։*

Այլ կերպ ասած, թվային ուղղի երկու կետերից հաջորդ է հանդիսանում այն կետը, որն ավելի մոտ է a *կետին. հավասար հեռավորությունների դեպքում հաջորդ է հանդիսանում այն կետը, որը* a *կետից ավելի աջ է գտնվում։*

Դիցուք նշված ձևով կարգավորված x *փոփոխական մեծությունը ձգտում է* a *սահմանին* ($x\to a$ *կամ* $\lim x=a$)։

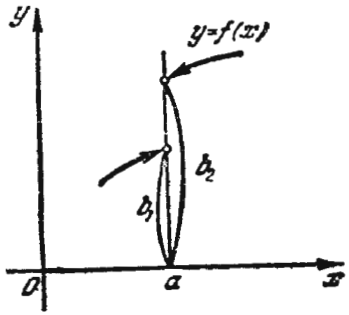
Այնուհետև դիտարկենք $y=f(x)$ *փոփոխական մեծությունը։ Ընդ որում, ինչպես և ամենուրեք, հետագայում ֆունկցիայի երկու արժեքներից հաջորդ կհամարենք այն, որը համապատասխանում է արգումենտի հաջորդ արժեքին։*

Եթե այդ ձևով սահմանված y փոփոխական մեծությունը ձգտում է որևէ b սահմանի, երբ $x \to a$, ապա կգրենք

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

և կասենք, որ $y = f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է b սահմանին, երբ $x \to a$:

Հեշտ է ցույց տալ, որ ֆունկցիայի սահմանի երկու սահմանումները համարժեք են:



Նկ. 32

Դիտողություն 2: Եթե f(x)-ը ձգտում է b_1 սահմանին, երբ x-ը ձգտում է որևէ a թվի՝ ընդունելով միայն a-ից փոքր արժեքներ, ապա գրում են $\lim_{x \to a-0} f(x) = b_1$ և b_1-ը անվանում են a կետում f(x) ֆունկցիայի ձախակողմյան սահման: Եթե x-ը ընդունում է միայն a-ից մեծ արժեքներ, ապա գրում են՝ $\lim_{x \to a+0} f(x) = b_2$ և b_2-ը անվանում են a կետում f(x) ֆունկցիայի աջակողմյան սահման (նկ. 32):

Կարելի է ապացուցել, որ եթե աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանները գոյություն ունեն և հավասար են, այսինքն՝ $b_1 = b_2 = b$, ապա b-ն էլ հենց կլինի վերոհիշյալ իմաստով սահմանած սահմանը a կետում: Եվ հակադարձը, եթե գոյություն ունի a կետում ֆունկցիայի սահմանը, ապա գոյություն ունեն նաև a կետում ֆունկցիայի աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանները և նրանք իրար հավասար են:

Օրինակ 1: Ապացուցենք, որ $\lim_{x \to 2}(3x+1) = 7$: Իրոք, դիցուք տրված է կամայական $\varepsilon > 0$ թիվը.

$$|(3x+1) - 7| < \varepsilon$$

անհավասարությունը տեղի ունենալու համար անհրաժեշտ է, որ տեղի ունենան հետևյալ անհավասարությունները.

$$|3x-6| < \varepsilon, \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad -\frac{\varepsilon}{3} < x-2 < \frac{\varepsilon}{3}:$$

Այսպիսով, ցանկացած ε-ի դեպքում $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$ անհավասարությունը բավարարող x-ի բոլոր արժեքների համար 3x+1 ֆունկցիայի արժեքը 7-ից կտարբերվի ավելի քիչ, քան ε-ն է: Իսկ դա էլ նշանակում է, որ 7-ը ֆունկցիայի սահմանն է, երբ $x \to 2$:

Դիտողություն 3: Ֆունկցիայի սահմանի գոյությունը համար չի պահանջվում, երբ $x \to a$, որ ֆունկցիան որոշված լինի $x = a$ կետում: Սահմանը գտնելիս դիտարկվում են ֆունկցիայի արժեքները a կետի շրջակայքի՝ a-ից տարբեր կետերում, այդ պնդումը ակնառու կերպով ցուցադրվում է հետևյալ օրինակով:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$: Այստեղ $\frac{x^2-4}{x-2}$ ֆունկցիան $x = 2$ կետում որոշված չէ:

Պետք է ապացուցել, որ կամայական $\varepsilon > 0$ համար կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$, որ տեղի կունենա հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| < \varepsilon, \tag{1}$$

երբ $|x-2| < \delta$: Բայց $x \neq 2$ դեպքում (1) անհավասարությունը համարժեք է

$$\left| \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4 \right| = |(x+2) - 4| < \varepsilon$$

կամ $|x-2| < \varepsilon$ (2)

անհավասարությանը: Այսպիսով, կամայական ε-ի դեպքում (1) անհավասարությունը տեղի կունենա, եթե տեղի ունենա (2) անհավասարությունը (այստեղ $\delta = \varepsilon$): Իսկ դա հենց նշանակում է, որ երբ $x \to 2$ թվային ֆունկցիայի սահմանը 4-ն է:

Քննարկենք ֆունկցիայի փոփոխման մի քանի դեպքեր, երբ $x \to \infty$:

Սահմանում 2: f(x) ֆունկցիան ձգտում է b սահմանին, երբ $x \to \infty$, եթե յուրաքանչյուր կամայական փոքր դրական ε թվի համար կարելի է ցույց տալ այնպիսի N դրական թիվ, որ $|x| > N$ անհավասարությանը բավարարող x-ի բոլոր արժեքների համար տեղի կունենա հետևյալ անհավասարությունը.

$$|f(x) - b| < \varepsilon:$$

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) = 1 \quad \text{կամ, այլ գրառմամբ,} \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1:$$

Պետք է ապացուցել, որ կամայական $\varepsilon > 0$ դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right| < \varepsilon, \tag{3}$$

հենց որ $|x|>N$, ընդ որում N-ը որոշվում է կախված ε-ի ընտրությունից, (3) անհավասարությունը համարժեք է $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$ անհավասարությանը, որը տեղի կունենա, երբ

Նկ. 33

$$|x|>\frac{1}{\varepsilon}=N.$$

Դա նշանակում է, որ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1 \text{ (նկ. 33)}.$$

Իմանալով $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, սիմվոլների իմաստը, ակնհայտ է

«$f(x)$-ը ձգտում է b-ի, երբ $x\to+\infty$» և
«$f(x)$-ը ձգտում է b-ի, երբ $x\to-\infty$»

արտահայտությունների իմաստը, որոնք սիմվոլիկ ձևով գրվում են այսպես՝

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b.$$

§ 3. Անվերջության ձգտող ֆունկցիա: Սահմանափակ ֆունկցիաներ

Մենք դիտարկել ենք դեպքեր, երբ $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է որոշակի b սահմանի, երբ $x\to a$ կամ երբ $x\to\infty$:

Դիտարկենք այնպիսի դեպք, երբ $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է անվերջության արգումենտի փոփոխման մի որոշ եղանակի դեպքում:

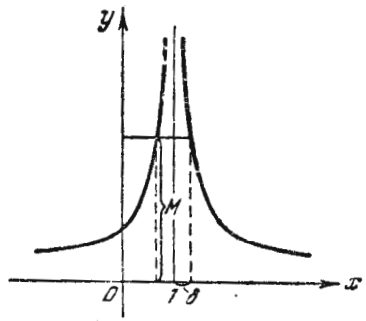
Սահմանում 1: $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է անվերջության, երբ $x\to a$, այսինքն՝ հանդիսանում է անվերջ մեծ մեծություն, երբ $x\to a$, եթե յուրաքանչյուր M դրական թվի համար, որքան էլ այն մեծ լինի, կարելի է գտնել այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ a-ից տարբեր x-ի բոլոր արժեքների համար, որոնք բավարարում են $|x-a|<\delta$ պայմանին, տեղի ունի $|f(x)|>M$ անհավասարությունը:

Եթե $f(x)$-ը ձգտում է անվերջության, երբ $x\to a$, ապա գրում են.

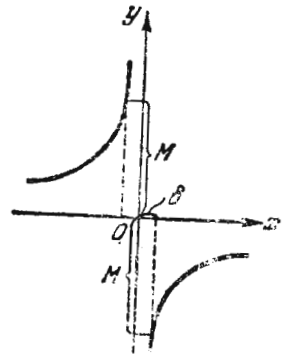
$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

կամ $f(x)\to\infty$, երբ $x\to a$: Եթե $x\to a$ դեպքում $f(x)$-ը ձգտում է անվերջության և ընդ որում ընդունում է միայն դրական արժեքներ

կամ միայն բացասական արժեքներ, համապատասխանաբար գրում են $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ կամ $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$:



Նկ. 34



Նկ. 35

Օրինակ 1. Ապացուցենք, որ $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty$: Իրոք, ցանկացած $M>0$ թվի համար կունենանք.

$$\frac{1}{(1-x)^2}>M,$$

եթե միայն

$$(1-x)^2<\frac{1}{M},\ |1-x|<\frac{1}{\sqrt{M}}=\delta.$$

$\frac{1}{(1-x)^2}$ ֆունկցիան ընդունում է միայն դրական արժեքներ (նկ. 34),

Օրինակ 2. Ապացուցենք, որ $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)=\infty$, Իրոք, ցանկացած $M>0$ թվի համար կունենանք

$$\left|-\frac{1}{x}\right|>M,$$

եթե միայն

$$|x|=|x-0|<\frac{1}{M}=\delta.$$

Այստեղ $\left(-\frac{1}{x}\right)>0$ $x<0$ դեպքում և $\left(-\frac{1}{x}\right)<0$ $x>0$ դեպքում (նկ. 35),

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է անվերջության, երբ $x\to\infty$, ապա գրում են.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

և, մասնավորապես, կարող է

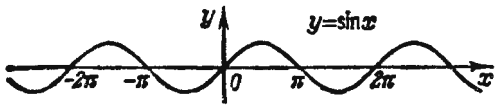
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty:$$

Օրինակ,

$$\lim_{x\to\infty} x^2=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty \text{ և այլն:}$$

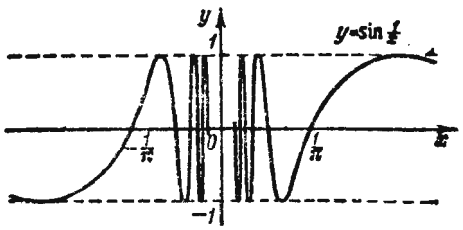
Դիտողություն 1: $y=f(x)$ ֆունկցիան, երբ $x\to a$ կամ երբ $x\to\infty$ կարող է չձգտել վերջավոր սահմանի կամ անվերջության:

Օրինակ 3: $-\infty<x<+\infty$ անվերջ ինտերվալում որոշված $y=\sin x$ ֆունկցիան, երբ $x\to\infty$ չի ձգտում ոչ վերջավոր սահմանի, ոչ էլ անվերջության (նկ. 36):



Նկ. 36

Օրինակ 4: $y=\sin\frac{1}{x}$ ֆունկցիան, որը որոշված է x-ի բոլոր արժեքների դեպքում, բայց $x=0$ արժեքից, երբ $x\to 0$ չի ձգտում ոչ վերջավոր սահմանի ոչ էլ անվերջության: Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 37-ում:



Նկ. 37

Սահմանում 2: $y=f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է սահմանափակ x արգումենտի տվյալ փոփոխման միջակայքում, եթե գոյություն ունի այնպիսի M դրական թիվ, որ դիտարկվող միջակայքին պատկանող x-ի բոլոր արժեքների համար տեղի ունի $|f(x)|\leq M$ անհավասարությունը: Իսկ եթե այդպիսի M թիվ գոյություն չունի, ապա տվյալ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անսահմանափակ:

Օրինակ 5: $y=\sin x$ ֆունկցիան, որը որոշված է $-\infty<x<\infty$ ինտերվալում, սահմանափակ է, քանի որ x-ի բոլոր արժեքների համար

$$|\sin x|\leq 1=M:$$

Սահմանում 3: $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է սահմանափակ, երբ $x\to a$, եթե գոյություն ունի a կետում կենտրոն ունեցող շրջակայք, որտեղ տվյալ ֆունկցիան սահմանափակ է:

Սահմանում 4: $y=f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է սահմանափակ, երբ $x\to\infty$, եթե գոյություն ունի այնպիսի $N>0$ թիվ, որ $|x|>N$ անհավասարությանը բավարարող x-ի բոլոր արժեքների համար $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է:

Սահմանի ձգտող ֆունկցիայի սահմանափակության մասին հարցը լուծվում է հետևյալ թեորեմի միջոցով.

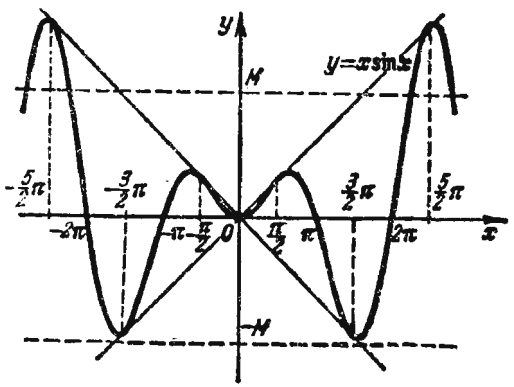
Թեորեմ 1: Եթե $\lim_{x\to a} f(x)=b$, ընդ որում b-ն վերջավոր թիվ է, ապա $f(x)$ ֆունկցիան, երբ $x\to a$, սահմանափակ է:

Ապացույց: $\lim_{x\to a} f(x)=b$ հավասարությունից հետևում է, որ ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ $a-\delta<a+\delta$ շրջակայքում տեղի կունենա

$$|f(x)-b|<\varepsilon \text{ կամ } |f(x)<|b|+\varepsilon$$

անհավասարությունը:
Իսկ դա նշանակում է, որ $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է, երբ $x\to a$:

Դիտողություն 2: $f(x)$ սահմանափակ ֆունկցիայի սահմանումից հետևում է, որ եթե $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ կամ $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, այսինքն, եթե $f(x)$-ը անվերջ մեծ է, ապա այն անսահմանափակ է: Հակադարձը ճիշտ չէ՝ սակայն սահմանափակ ֆունկցիան կարող է անվերջ մեծ չլինել:



Նկ. 38

Օրինակ, $y=x\sin x$ ֆունկցիան, երբ $x\to\infty$ անսահմանափակ է, քանի որ ցանկացած $M>0$ թվի համար կարելի է գտնել x-ի այնպիսի արժեքներ, որ $|x\sin x|>M$: Բայց $y=x\sin x$ ֆունկցիան անվերջ մեծ չէ, քանի որ այն $x=0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots$ դեպքում դառնում է 0: $y=x\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 38-ում:

Թեորեմ 2: Եթե $\lim_{x\to a} f(x)=b\neq 0$, ապա $y=\frac{1}{f(x)}$ ֆունկցիան, երբ $x\to a$ սահմանափակ ֆունկցիա է:

Ապացույց։ Թեորեմի պայմանից հետևում է, որ կամայական $\varepsilon>0$ դեպքում $x=a$ կետի որևէ շրջակայքում կունենանք $|f(x)-b|<\varepsilon$, կամ $||f(x)|-|b||<\varepsilon$, կամ $-\varepsilon<|f(x)|-|b|<\varepsilon$, կամ $|b|-\varepsilon<|f(x)|<|b|+\varepsilon$։

Վերջին անհավասարություններից հետևում է.

$$\frac{1}{|b|-\varepsilon}>\frac{1}{|f(x)|}>\frac{1}{|b|+\varepsilon};$$

վերցնելով, օրինակ, $\varepsilon=\frac{1}{10}|b|$, կստանանք՝

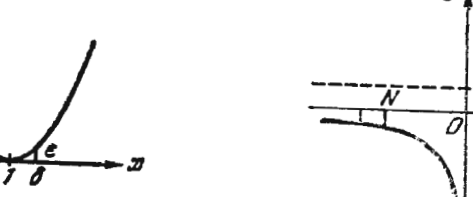
$$\frac{10}{9|b|}>\frac{1}{|f(x)|}>\frac{10}{11|b|},$$

Իսկ դա նշանակում է, որ $\frac{1}{f(x)}$ ֆունկցիան սահմանափակ է։

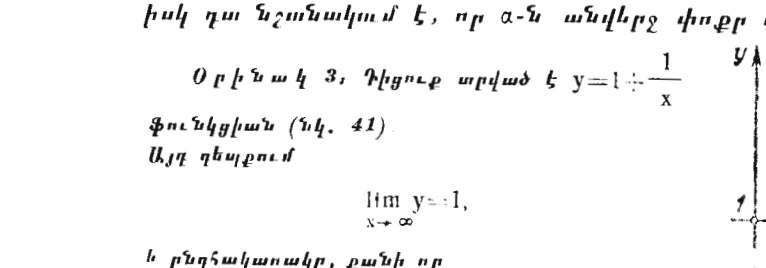
§ 4. Անվերջ փոքրերը և նրանց հիմնական հատկությունները

Այս պարագրաֆում կդիտարկենք ֆունկցիաներ, որոնք արգումենտի մի որոշ եղանակով փոփոխվելու դեպքում ձգտում են զրոյի։

Սահմանում 1։ $\alpha=\alpha(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անվերջ փոքր, երբ $x\to a$ կամ երբ $x\to\infty$, եթե $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ կամ $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$։



Նկ. 39



Նկ. 40

Սահմանի սահմանումից հետևում է՝ եթե, օրինակ, $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, ապա դա նշանակում է, որ նախօրոք տրված կամայական փոքր ε դրական թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ $|x-a|<\delta$ անհավասարությանը բավարարող բոլոր x-երի համար կբավարարվի $|\alpha(x)|<\varepsilon$ պայմանը։

Օրինակ 1։ $\alpha=(x-1)^2$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է, երբ $x\to1$, քանի որ $\lim\limits_{x\to1}\alpha=\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0$ (նկ. 39)։

Օրինակ 2։ $\alpha=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է, երբ $x\to\infty$ (նկ. 40, տես § 2-ի 3-րդ օրինակը)։

Հաստատենք հետագայի համար կարևոր հետևյալ առնչությունը.

Թեորեմ 1։ Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան ներկայացվում է b հաստատուն թվի և α անվերջ փոքրի գումարի տեսքով՝

$$y=b+\alpha, \qquad (1)$$

ապա

$$\lim y=b \text{ (երբ } x\to a \text{ կամ } x\to\infty)։$$

Հակադարձը, եթե $\lim y=b$, ապա կարելի է գրել $y=b+\alpha$, որտեղ α-ն անվերջ փոքր է։

Ապացույց։ (1) հավասարությունից հետևում է՝ $|y-b|=|\alpha|$։ Բայց կամայական ε-ի դեպքում α-ի բոլոր արժեքները, սկսած մի որոշ արժեքից, բավարարում են $|\alpha|<\varepsilon$ առնչությանը, հետևաբար, y-ի բոլոր արժեքների համար, սկսած մի որոշ արժեքից, տեղի կունենա $|y-b|<\varepsilon$ անհավասարությունը, իսկ դա նշանակում է, որ $\lim y=b$։

Հակադարձը, եթե $\lim y=b$, ապա կամայական ε-ի համար y-ի բոլոր արժեքները, սկսած մի որոշ արժեքից, կբավարարեն $|y-b|<\varepsilon$ անհավասարությունը։ Բայց եթե նշանակենք $y-b=\alpha$, ապա, հետևաբար, α-ի բոլոր արժեքների համար, սկսած մի որոշ արժեքից, $|\alpha|<\varepsilon$, իսկ դա նշանակում է, որ α-ն անվերջ փոքր է։

Օրինակ 3։ Դիցուք տրված է $y=1+\frac{1}{x}$ ֆունկցիան (նկ. 41)։ Այդ դեպքում

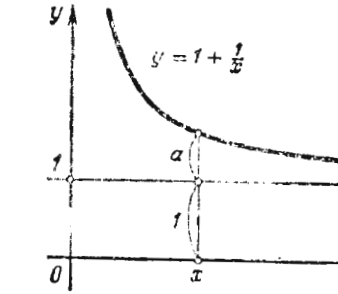
$$\lim_{x\to\infty} y=1,$$

և ընդհակառակը, քանի որ

$$\lim_{x\to\infty} y=1,$$

ապա y փոփոխականը կարելի է ներկայացնել 1 սահմանի և անվերջ փոքրի (տվյալ դեպքում $\frac{1}{x}$-ի) գումարի տեսքով, այսինքն՝

$$y=1+\alpha։$$



Նկ. 41

Թեորեմ 2։ Եթե $\alpha=\alpha(x)$-ը ձգտում է զրոյի, երբ $x\to a$ (կամ երբ $x\to\infty$), բայց զրո չի դառնում, ապա $y=\frac{1}{\alpha}$-ն ձգտում է անվերջության։

Ապացույց։ Ցանկացած, որքան ասես, մեծ M դրական թվի

համար տեղի կունենա $\frac{1}{|\alpha|} > M$ անհավասարությունը, եթե տեղի ունենա $|\alpha| < \frac{1}{M}$ անհավասարությունը: Վերջին անհավասարությունը տեղի կունենա α-ի բոլոր արժեքների համար, սկսած մի որևէ արժեքից, քանի որ $\alpha(x) \to 0$:

Թեորեմ 3: Երկու, երեք և ընդհանրապես որոշակի թվով անվերջ փոքրերի հանրահաշվական գումարը անվերջ փոքր ֆունկցիա է:

Ապացույց: Ապացույցը կատարենք երկու գումարելիների համար, քանի որ ցանկացած թվով գումարելիների համար այն կատարվում է համանման ձևով:

Դիցուք $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, որտեղ $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$: Ապացուցենք, որ կամայական բավականաչափ փոքր $\varepsilon > 0$ համար կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$, որ $|x - a| < \delta$ անհավասարությունը բավարարելիս տեղի կունենա նաև $|u| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Քանի որ $\alpha(x)$-ը անվերջ փոքր է, ապա կգտնվի այնպիսի δ_1, որ a կենտրոնով և δ_1 շառավղով շրջակայքում կլինի՝

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

Քանի որ $\beta(x)$-ը անվերջ փոքր է, ապա կգտնվի այնպիսի δ_2, որ a կենտրոնով և δ_2 շառավղով շրջակայքում կլինի՝

$$|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

δ-ն վերցնենք հավասար δ_1 և δ_2 մեծությունների փոքրին, այդ դեպքում a կենտրոնով և δ շառավիղ ունեցող շրջակայքում տեղի կունենան $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ անհավասարությունները, հետևաբար այդ շրջակայքում կլինի՝

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

այսինքն $|u| < \varepsilon$, այն ինչ պահանջվում էր ապացուցել:

Համանման ձևով ապացույցը կատարվում է այն դեպքի համար, երբ

$$\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} \beta(x) = 0:$$

Դիտողություն: Հետագայում մենք դիտարկելու ենք անվերջ փոքր մեծությունների այնպիսի գումարներ, որ յուրաքանչյուր գումարելիի փոքրացման հետ գումարելիների թիվն ավելանում է: Այս դեպքում թեորեմի պնդումը կարող է և ճիշտ չլինել: Դիտարկենք, օրինակ, $u = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}}_{x \text{ գումարելիներ}}$, որտեղ x-ը ընդունում է միայն ամբողջ դրական արժեքներ $(x = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$: Ակնհայտ է, որ երբ $x \to \infty$ յուրաքանչյուր գումարելի հանդիսանում է անվերջ փոքր, բայց $u = 1$ գումարը անվերջ փոքր չէ:

Թեորեմ 4: $\alpha = \alpha(x)$ անվերջ փոքր ֆունկցիայի և $z = z(x)$ սահմանափակ ֆունկցիայի արտադրյալը, երբ $x \to a$ (կամ $x \to \infty$), հանդիսանում է անվերջ փոքր մեծություն (ֆունկցիա):

Ապացույց: Ապացույցը կատարենք $x \to a$ դեպքի համար: Որևէ $M > 0$ համար կգտնվի $x = a$ կետի այնպիսի շրջակայք, որում կբավարարվի $|z| < M$ անհավասարությունը: Ամեն մի $\varepsilon > 0$ համար կգտնվի այնպիսի շրջակայք, որտեղ տեղի կունենա $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$ անհավասարությունը: Այդ երկու շրջակայքերից ամենափոքրում տեղի կունենա

$$|\alpha z| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \text{ անհավասարությունը:}$$

Իսկ դա նշանակում է, որ αz-ը անվերջ փոքր է: $x \to \infty$ դեպքի համար ապացույցը կատարվում է համանման ձևով: Այս թեորեմից բխում են՝

Հետևանք 1: Եթե $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = 0$, ապա $\lim \alpha\beta = 0$, քանի որ $\beta(x)$-ը սահմանափակ մեծություն է: Դա իրավացի է ցանկացած վերջավոր թվով բազմապատկիչների համար:

Հետևանք 2: Եթե $\lim \alpha = 0$ և $c = \text{const}$, ապա $\lim c\alpha = 0$:

Թեորեմ 5: $\alpha(x)$ անվերջ փոքր մեծության՝ զրոյից տարբեր սահման ունեցող ֆունկցիայի վրա բաժանումից առաջացած $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ քանորդը անվերջ փոքր մեծություն է:

Ապացույց: Դիցուք $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim z(x) = b \neq 0$: § 3-ի 2-րդ թեորեմից հետևում է, որ $\frac{1}{z(x)}$ մեծությունը սահմանափակ է: Այդ պատճառով $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x) \cdot \frac{1}{z(x)}$ կոտորակը հանդիսանում է անվերջ

փոքր մեծության և սահմանափակ մեծության արտադրյալ, այսինքն՝ այն անվերջ փոքր է։

§ 5. Հիմնական թեորեմներ սահմանների վերաբերյալ

Այս, ինչպես և նախորդ, պարագրաֆում մենք կքննարկենք ֆունկցիաներ, որոնք կախված են միևնույն x արգումենտից, ընդ որում $x \to a$ *կամ* $x \to \infty$։

Ապացույցը կկատարենք այդ դեպքերից մեկի համար, քանի որ մյուսի համար ապացույցը կատարվում է համանման ձևով։ Հաճախ չենք գրի ոչ $x \to a$, *ոչ էլ* $x \to \infty$, *հասկանալով մեկը կամ մյուսը։*

Թեորեմ 1։ Երկու, երեք և ընդհանրապես որոշակի թվով փոփոխականների հանրահաշվական գումարի սահմանը հավասար է այդ փոփոխականների սահմանների հանրահաշվական գումարին՝

$$\lim(u_1+u_2+\dots+u_k)=\lim u_1+\lim u_2+\dots+\lim u_k;$$

Ապացույց։ Ապացույցը կատարենք երկու գումարելիների համար, քանի որ ցանկացած թվով գումարելիների համար այն կատարվում է նույն ձևով։ Ենթադրենք $\lim u_1=a_1$, $\lim u_2=a_2$։ *Այդ դեպքում § 4-ի 1-ին թեորեմի հիման վրա կարող ենք գրել՝*

$$u_1=a_1+\alpha_1 \quad u_2=a_2+\alpha_2,$$

որտեղ α_1*-ը և* α_2*-ը անվերջ փոքրեր են։ Հետևաբար,*

$$u_1+u_2=(a_1+a_2)+(\alpha_1+\alpha_2);$$

Քանի որ (a_1+a_2)*-ը հաստատուն մեծություն է, իսկ* $(\alpha_1+\alpha_2)$*-ը անվերջ փոքր է, ապա նորից § 4-ի 1-ին թեորեմի համաձայն եզրակացնում ենք, որ*

$$\lim(u_1+u_2)=(a_1+a_2)=\lim u_1+\lim u_2;$$

Օրինակ 1։

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1+0=1;$$

Թեորեմ 2։ Երկու, երեք և ընդհանրապես որոշակի թվով փոփոխականների արտադրյալի սահմանը հավասար է այդ փոփոխականների սահմանների արտադրյալին՝

$$\lim u_1\cdot u_2\cdot\dots\cdot u_k=\lim u_1\cdot\lim u_2\cdot\dots\cdot\lim u_k;$$

Ապացույց։ Համառոտության համար ապացույցը բերենք երկու բազմապատկիչների համար։ Դիցուք $\lim u_1=a_1$, $\lim u_2=a_2$։ *Հետևաբար,*

$$u_1=a_1+\alpha_1, \qquad u_2=a_2+\alpha_2,$$

$$u_1u_2=(a_1+\alpha_1)(a_2+\alpha_2)=a_1a_2+a_1\alpha_2+a_2\alpha_1+\alpha_1\alpha_2;$$

a_1a_2 *արտադրյալը հաստատուն է։* $a_1\alpha_2+a_2\alpha_1+\alpha_1\alpha_2$ *մեծությունը § 4-ի թեորեմների համաձայն անվերջ փոքր մեծություն է։ Հետևաբար,*

$$\lim u_1u_2=a_1a_2=\lim u_1\cdot\lim u_2;$$

Հետևանք։ Հաստատուն բազմապատկիչը կարելի է դուրս բերել սահմանի նշանից։

Իրոք, եթե $\lim u_1=a_1$, c*-ն հաստատուն է և, հետևաբար,* $\lim c=c$, *ապա* $\lim(cu_1)=\lim c\cdot\lim u_1=c\lim u_1$, *այն ինչ պահանջվում էր ապացուցել։*

Օրինակ 2։

$$\lim_{x\to 2}5x^3=5\lim_{x\to 2}x^3=5\cdot 8=40;$$

Թեորեմ 3։ Երկու փոփոխականների քանորդի սահմանը հավասար է այդ փոփոխականների սահմանների քանորդին, եթե հայտարարի սահմանը զրոյից տարբեր է.

$$\lim\frac{u}{v}=\frac{\lim u}{\lim v}, \text{ եթե } \lim v\neq 0;$$

Ապացույց։ Դիցուք $\lim u=a$, $\lim v=b\neq 0$։ *Հետևաբար,* $u=a+\alpha$, $v=b+\beta$, *որտեղ* α*-ն և* β*-ն անվերջ փոքրեր են։*

Գրենք հետևյալ նույնությունը՝

$$\frac{u}{v}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}=\frac{a}{b}+\left(\frac{a+\alpha}{b+\beta}-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{\alpha b-\beta a}{b(b+\beta)},$$

կամ

$$\frac{u}{v}=\frac{a}{b}+\frac{\alpha b-\beta a}{b(b+\beta)};$$

$\frac{a}{b}$ *կոտորակը հաստատուն թիվ է, իսկ* $\frac{\alpha b-\beta a}{b(b+\beta)}$ *կոտորակը § 4-ի 4 և 5 թեորեմների համաձայն անվերջ փոքր փոփոխական մեծություն է։*

քանի որ $\alpha b-\beta a$-ն անվերջ փոքր է, իսկ $b(b+\beta)$ հայտարարն ունի $b^2\neq 0$ սահմանը։ Հետևաբար,

$$\lim \frac{u}{v}=\frac{a}{b}=\frac{\lim u}{\lim v}.$$

Օրինակ 3.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+5}{4x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x-2)}=\frac{3\lim\limits_{x\to 1}x+5}{4\lim\limits_{x\to 1}x-2}=\frac{3\cdot 1+5}{4\cdot 1-2}=\frac{8}{2}=4.$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք կոտորակի սահմանի վերաբերյալ ապացուցած թեորեմից, քանի որ, երբ $x\to 1$, հայտարարի սահմանը տարբեր է զրոյից։ Իսկ եթե հայտարարի սահմանը զրո է, ապա կոտորակի սահմանի վերաբերյալ թեորեմը չի կարող կիրառվել։ Այդ դեպքում հատուկ քննարկումներ են պահանջվում։

Օրինակ 4. Գտնել $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

Այստեղ համարիչը և հայտարարը, երբ $x\to 2$, ձգտում են զրոյի և հետևաբար, թեորեմ 3-ը կիրառելի չէ։ Կատարենք հետևյալ նույնական ձևափոխությունը.

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

Այս ձևափոխությունը իրավացի է x-ի՝ 2-ից տարբեր բոլոր արժեքների համար։ Ուստի, նկատի ունենալով սահմանի սահմանումը, կարող ենք գրել.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Օրինակ 5. Գտնել $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)}$, երբ $x\to 1$ հայտարարը ձգտում է զրոյի, իսկ համարիչը զրոյի չի ձգտում (համարիչը ձգտում է մեկի)։ Հետևաբար, հակադարձ մեծության սահմանը զրո է, այսինքն

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}x}=\frac{0}{1}=0.$$

Այստեղից նախորդ պարագրաֆի թեորեմ 2-ի հիման վրա կունենանք՝

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty.$$

Թեորեմ 4. Եթե $u=u(x)$, $z=z(x)$, $v=v(x)$ երեք ֆունկցիաների համապատասխան արժեքների միջև տեղի ունի $u\leqslant z\leqslant v$ անհավասարությունը, ընդ որում $u(x)$-ը և $v(x)$-ը, երբ $x\to a$ (կամ երբ $x\to\infty$), ձգտում են միևնույն b սահմանին, ապա $z=z(x)$-ը, երբ $x\to a$ (կամ երբ $x\to\infty$) ձգտում է նույն սահմանին։

Ապացույց։ Որոշակիության համար կդիտարկենք ֆունկցիաների փոփոխությունը, երբ $x\to a$։ $u\leqslant z\leqslant v$ անհավասարություններից հետևում են

$$u-b\leqslant z-b\leqslant v-b$$

անհավասարությունները.
ըստ տված պայմանի

$$\lim_{x\to a}u=b,\quad \lim_{x\to a}v=b.$$

Հետևաբար, ցանկացած $\varepsilon>0$ դեպքում կգտնվի a կետում կենտրոն ունեցող որևէ շրջակայք, որտեղ տեղի կունենա $|u-b|<\varepsilon$ անհավասարությունը։

Նույն ձևով կգտնվի a կետում կենտրոն ունեցող որևէ շրջակայք, որում տեղի կունենա $|v-b|<\varepsilon$ անհավասարությունը։
Մատնանշած շրջակայքերից փոքրում տեղի կունենան

$$-\varepsilon<u-b<\varepsilon \quad \text{և} \quad -\varepsilon<v-b<\varepsilon$$

անհավասարությունները, և հետևաբար տեղի կունենան

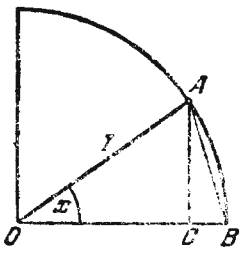
$$-\varepsilon<z-b<\varepsilon$$

անհավասարությունները, այսինքն՝

$$\lim_{x\to a}z=b.$$

Թեորեմ 5. Եթե $x\to a$ դեպքում (կամ $x\to\infty$ դեպքում) y ֆունկցիան ընդունում է ոչ բացասական արժեքներ՝ $y\geqslant 0$ և ընդ որում ձգտում է b սահմանին, ապա b-ն հանդիսանում է ոչ բացասական թիվ՝ $b\geqslant 0$։

Ապացույց։ Դիցուք $b<0$, այդ դեպքում $|y-b|\geqslant|b|$, այսինքն՝ $|y-b|$ տարբերության մոդուլը մեծ չէ $|b|$ դրական թվից և, հետևաբար, չի ձգտում զրոյի, երբ $x\to a$։ Բայց այդ դեպքում, երբ $x\to a$, y-ը չի ձգտում b-ի, որը հակասում է թեորեմի պայմանին։ Նշանակում է, այն ենթադրությունը, որ $b<0$, բերում է հակասության։ Հետևաբար, $b\geqslant 0$։



Նկ. 42

Նման ձևով ապացուցվում է, որ եթե $y\leqslant 0$, ապա $\lim y\leqslant 0$։

Թեորեմ 6։ Եթե $u=u(x)$ և $v=v(x)$ երկու ֆունկցիաների, որոնք ձգտում են սահմանների, երբ $x\to a$ (կամ երբ $x\to\infty$), համապատասխան արժեքների միջև տեղի ունի $v\geqslant u$ անհավասարությունը, ապա $\lim v\geqslant\lim u$։

Ապացույց։ Ըստ պայմանի $v-u\geqslant 0$, հետևաբար (ըստ թեորեմ 5-ի), $\lim(v-u)\geqslant 0$ կամ $\lim v-\lim u\geqslant 0$, այսինքն $\lim v\geqslant\lim u$։

Օրինակ 6։ Ապացուցենք, որ $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$։

Նկ. 42-ից հետևում է, որ եթե $OA=1$, $x>0$, ապա $AC=\sin x$, $\smile AB=x$, $\sin x<x$։ Ակնհայտ է, որ երբ $x<0$, ապա $|\sin x|<|x|$։ 5 և 6 թեորեմների հիման վրա այդ անհավասարություններից հետևում է, որ $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$։

Օրինակ 7։ Ապացուցենք, որ $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=0$։

Իրոք, $\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|\leqslant|\sin x|$։ Հետևաբար, $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=0$։

Օրինակ 8։ Ապացուցենք, որ $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$։ Նկատենք, որ

$$\cos x=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

հետևաբար,

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)=1-2\lim_{x\to 0}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=1-0=1։$$

Փոփոխականների սահմանի մասին մի քանի ուսումնասիրություններում հարկ է լինում լուծել երկու ինքնուրույն խնդիրներ.

1) ապացուցել, որ փոփոխականի սահմանը գոյություն ունի, և գտնել այն եզրերը, որոնց ներսում է գտնվում դիտարկվող սահմանը,

2) հաշվել դիտարկվող սահմանը՝ անհրաժեշտ ճշտությամբ։

Երբեմն առաջին հարցը լուծվում է հետագայի համար կարևոր հետևյալ թեորեմի օգնությամբ։

Թեորեմ 7։ Եթե v փոփոխական մեծությունն աճող է, այսինքն՝ ցանկացած հաջորդ արժեքը մեծ է նախորդից, և այն սահմանափակ է, այսինքն՝ $v<M$, ապա այդ փոփոխական մեծությունն ունի սահման՝ $\lim v=a$, որտեղ $a\leqslant M$։

Համանման պնդում տեղի ունի և նվազող սահմանափակ փոփոխական մեծության համար։

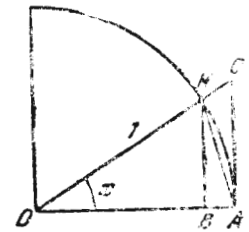
Այս թեորեմն այստեղ չենք ապացուցի, քանի որ այն հիմնված է իրական թվերի տեսության վրա, որն այստեղ մենք չենք տալիս։*

* *Այս թեորեմի ապացույցը բերված է օրինակ,* Г. М. Фихтенгольц Основы математического анализа" т. I. Физматгиз, 1960, *գրքում։*

Հաջորդ երկու պարագրաֆներում կստանանք երկու ֆունկցիաների սահմաններ, որոնք մաթեմատիկայում մեծ կիրառություն ունեն։

§ 6. $\frac{\sin x}{x}$ ֆունկցիայի սահմանը, երբ $x\to 0$

$\frac{\sin x}{x}$ *ֆունկցիան որոշված չէ* $x=0$ *դեպքում, քանի որ կատարակի համարիչն ու հայտարարը դրա են դառնում։ Գտնենք այդ ֆունկցիայի սահմանը, երբ* $x\to 0$։ *Դիտարկենք 1 շառավղով շրջանագիծը (նկ. 43).* MOB *կենտրոնական անկյունը նշանակենք* x*-ով, ընդ որում* $0<x<\frac{\pi}{2}$։ *Նկ. 43-ից անմիջապես հետևում է.*



Նկ. 43

մակերես $\triangle MOA<$ *մակերես սեկտոր* $MOA<$ $<$ *մակերես* $\triangle COA$։ *(1)*

Մակերես $\triangle MOA=\frac{1}{2}OA\cdot MB=$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin x;$$

Մակերես սեկտոր $MOA=\frac{1}{2}OA\cdot\overset{\frown}{AM}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x=\frac{1}{2}x$։

Մակերես $\triangle COA=\frac{1}{2}OA\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$։

(1) անհավասարությունները $\frac{1}{2}$*-ով կրճատելուց հետո գրվում են այսպես՝*

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x։$$

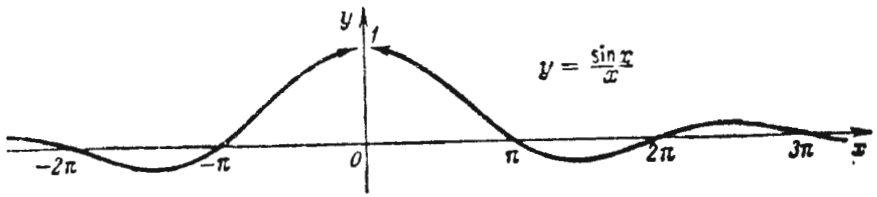
Բոլոր անդամները բաժանենք $\sin x$*-ի վրա՝*

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

կամ

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x։$$

Մենք այս անհավասարությունները արտածեցինք ենթադրելով, որ $x>0$. Նկատելով, որ $\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\frac{\sin x}{x}$ և $\cos(-x)=\cos x$, եզրակացնում ենք, որ այն ճիշտ է և $x<0$ դեպքում: Սակայն $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to 0}1=1$,



Նկ. 44

Հետևաբար, $\frac{\sin x}{x}$ փոփոխականը ընկած է երկու մեծությունների միջև, որոնք ունեն 1-ի հավասար միևնույն սահման. ալսպիսով, նախորդ պարագրաֆի թեորեմ 4-ի հիման վրա

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$y=\frac{\sin x}{x}$ ֆունկցիալի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 44-ում:

Օրինակներ

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1,$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}k\frac{\sin kx}{kx}=k\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{(kx)}=k\cdot 1=k \qquad (k=\text{const}),$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0,$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}\quad(\alpha=\text{const},\ \beta=\text{const}),$$

§ 7. e թիվը

Դիտարկենք $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ փոփոխական մեծությունը, որտեղ n-ը աճող փոփոխական մեծություն է, որն ընդունում է 1, 2, 3, ... բնական թվերի հաջորդականությունը:

Թեորեմ 1: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ փոփոխական մեծությունը, երբ $n\to\infty$, ունի սահման, որն ընկած է 2 և 3 թվերի միջև:

Ապացույց: Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի համաձայն կարող ենք գրել՝

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n; \qquad (1)$$

Կատարելով ակնհայտ հանրահաշվական ձևափոխություններ, կստանանք՝

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right); \qquad (2)$$

Վերջին հավասարությունից հետևում է, որ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ փոփոխական մեծությունը n-ի աճման դեպքում աճող փոփոխական մեծությունն է:

Իրոք, n արժեքից n+1 արժեքին անցնելիս վերջին գումարի յուրաքանչյուր գումարելին աճում է՝

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \text{ և այլն,}$$

և ավելանում է ևս մեկ անդամ: (Վերլուծության բոլոր անդամները դրական են:)

Ցույց տանք, որ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ փոփոխական մեծությունը սահմա-

նափակ է։ Նկատելով, որ $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$ և այլն, (2) արտահայտությունից ստանում ենք՝

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}$$

անհավասարությունը։

Այնուհետև, նկատելով, որ

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3},\ \ldots,\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}},$$

կարող ենք գրել հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Այս անհավասարության աջ մասի ընդգծված անդամները կազմում են $q=\frac{1}{2}$ հայտարարով և $a=1$ առաջին անդամով երկրաչափական պրոգրեսիա, ուստի

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left|1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right|=$$

$$=1+\frac{a-aq^n}{1-q}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3.$$

Հետևաբար, բոլոր n-երի համար ստանում ենք.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

(2) հավասարությունից հետևում է, որ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 2.$$

Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ անհավասարությունները՝

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3 \qquad (3)$$

Դրանով հաստատվում է, որ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ փոփոխական մեծությունը սահմանափակ է։

Այսպիսով, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ փոփոխական մեծությունը աճող և սահմանափակ է, ուստի § 5-ի թեորեմ 7-ի հիման վրա այն ունի սահման։ Այդ սահմանը նշանակվում է e տառով։

Սահմանում։ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ փոփոխական մեծության սահմանը, երբ $n\to\infty$, կոչվում է* e թիվ՝

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

§ 5-ի թեորեմ 6-ի հիման վրա (3) անհավասարությունից հետևվում է, որ e թիվն էլ է բավարարում $2\leqslant e\leqslant 3$ անհավասարությանը։ Թեորեմն ապացուցված է։

e-ն իռացիոնալ թիվ է։ Ավելի աջ ցույց կտրվի ցանկացած ճշտությամբ նրա հաշվման մեթոդը։ Ստորակետից հետո տասը ճշգրիտ նիշով նրա արժեքն է՝

$$e=2{,}7182818284\ldots.$$

Թեորեմ 2։ $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ֆունկցիան, երբ x-ը ձգտում է անվերջության, ձգտում է e սահմանին՝

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Ապացույց։ Հաստատվեց, որ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$, երբ $n\to\infty$, եթե n-ը ընդունում է ամբողջ դրական արժեքներ։ Դիցուք, այժմ x-ը

* Դարձյալ է ցույց տալ, որ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$, երբ $n\to+\infty$, եթե n-ը չի հանդիսանում մոնոտոն աճող փոփոխական մեծություն։

ձգտում է անվերջության՝ ընդունելով ինչպես կատարակային, այնպես էլ բացասական արժեքներ։

1) Դիցուք $x \to +\infty$։ Նրա յուրաքանչյուր արժեք պարփակված է երկու ամբողջ թվերի միջև՝

$$n \leqslant x < n+1;$$

Ընդ որում տեղի կունենան հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

$$1+\frac{1}{n} \geqslant 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}:$$

Երբ $x \to \infty$, ապա, ակնհայտ է, և $n \to \infty$։ Գտնենք այն փոփոխականների սահմանները, որոնց միջև պարփակված է $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ փոփոխականը.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

հետևաբար (ըստ § 5-ի թեորեմ 4-ի),

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e: \qquad (4)$$

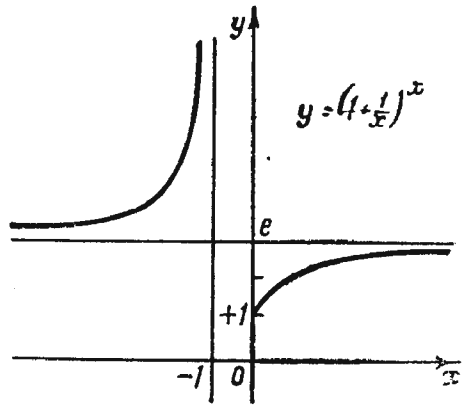
2) Դիցուք $x \to -\infty$։ Մտցնենք նոր փոփոխական՝ $t = -(x+1)$ կամ $x = -(t+1)$։ Երբ $t \to +\infty$, ապա $x \to \infty$։ Կարող ենք գրել.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right) = e \cdot 1 = e:$$

Թեորեմն ապացուցված է։ $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 45-ում։



Նկ. 45

Եթե (4) հավասարության մեջ ընդունենք $\frac{1}{x} = \alpha$, ապա երբ $x \to \infty$ կունենանք՝ $\alpha \to 0$ (բայց $\alpha \neq 0$) և մենք ստանում ենք՝ $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$։

Օրինակներ.

1. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} = e \cdot 1 = e:$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\cdot e\cdot e=e^{3},$$

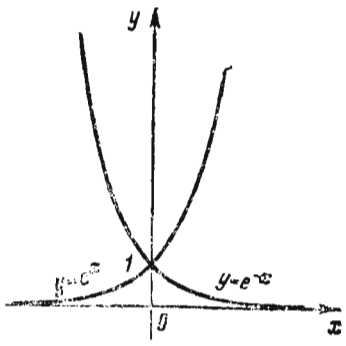
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=e^{2},$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+4}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=e^{4}\cdot 1=e^{4},$$

Դիտողություն։ e *հիմքով* $y=e^{x}$ *ցուցչային ֆունկցիան մաթեմատիկայի հետագա դասընթացում խաղում է բացառիկ կարևոր դեր։ Այդ ֆունկցիան մեծ դեր է խաղում նաև մեխանիկայում (տատանումների տեսություն) տարբեր երևույթներ ուսումնասիրելիս, էլեկտրատեխնիկայում և ռադիոտեխնիկայում, ռադիոքիմիայում և այլն։ Այդ ֆունկցիան հաճախ անվանում են* էքսպոնենտ (Exponential function)։ $y=e^{x}$ *և* $y=e^{-x}$ *ցուցչային ֆունկցիաների գրաֆիկները պատկերված են նկ. 46-ում։*

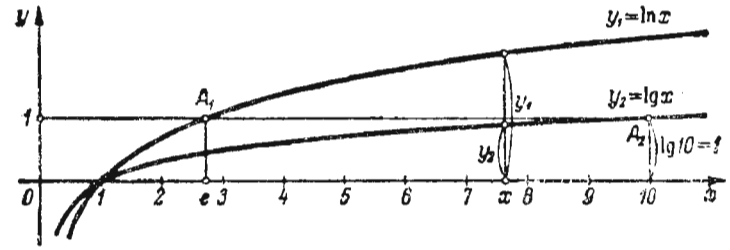


Նկ. 46

§ 8. Բնական լոգարիթմներ

Առաջին գլխի § 8-ում սահմանվել է $y=\log_a x$ *լոգարիթմական ֆունկցիան։* a *թիվը կոչվում է լոգարիթմների հիմք։ Եթե* $a=10$, *ապա* y*-ը կոչվում է* x *թվի տասնորդական լոգարիթմ և նշանակվում է՝* $y=\lg x$։ *Դպրոցական դասընթացից հայտնի են տասնորդական լոգարիթմների արժեքների աղյուսակները, որոնք կոչվում են* բրիգյան՝ *անգլիացի գիտնական Բրիգգի (1556—1630) անունով։*

$e=2{,}71828\cdots$ *հիմքով լոգարիթմները կոչվում են* բնական *կամ* նեպերյան՝ *լոգարիթմական աղյուսակների առաջին հայտնագործողներից մեկի՝ մաթեմատիկոս Նեպերի (1550—1617) անունով։ Հետևաբար, եթե* $e^{y}=x$, *ապա* y*-ը անվանում են* x *թվի բնական լոգարիթմ և* $y=\log_e x$*-ի փոխարեն գրում են՝* $y=\ln x$։ $y=\ln x$ *և* $y=\lg x$ *ֆունկցիաների գրաֆիկները կառուցված են նկ. 47-ում։*



Նկ. 47

Այնուհետև, հաստատենք կապ միևնույն x *թվի տասնորդական և բնական լոգարիթմների միջև։ Դիցուք* $y=\lg x$ *կամ* $x=10^{y}$։ *Վերջին հավասարության աջ և ձախ մասերը լոգարիթմենք ըստ* e *հիմքի, կստանանք* $\ln x=y\ln 10$։ *Որտեղից որոշում ենք՝* $y=\frac{1}{\ln 10}\ln x$ *կամ, տեղադրելով* y*-ի արժեքը, կունենանք* $\lg x=\frac{1}{\ln 10}\ln x$։

Այսպիսով, եթե հայտնի է x *թվի բնական լոգարիթմը, այդ թվի տասնորդական լոգարիթմը գտնում են այն (բնական լոգարիթմը)* x*-ից անկախ* $M=\frac{1}{\ln 10}\approx 0{,}434294$ *բազմապատկիչով բազմապատկելու միջոցով։* M *թիվը կոչվում է բնական լոգարիթմներից տասնորդականին անցման մոդուլ՝*

$$\lg x=M\ln x.$$

Եթե այս նույնության մեջ ընդունենք $x=e$, *ապա կստանանք* M *թվի արտահայտությունը տասնորդական լոգարիթմներով՝*

$$\lg e=M\quad(\ln e=1).$$

Բնական լոգարիթմները տասնորդականների միջոցով արտահայտվում են այսպես՝

$$\ln x=\frac{1}{M}\lg x,$$

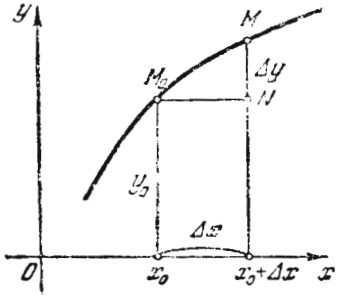
որտեղ

$$\frac{1}{M}\approx 2{,}302585.$$

Դիտողություն։ Թվերի բնական լոգարիթմների հաշվման համար գոյություն ունեն հատուկ աղյուսակներ (օրինակ, տես И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев, Справочник по математике, физматгиз, 1967)։

§ 9. Ֆունկցիաների անընդհատությունը

Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է որևէ՝ x_0 արժեքի համար և x_0 կետաբանով սրևէ շրջակայքում։ Դիցուք $y_0=f(x_0)$։ Եթե x-ը ստանա որևէ դրական կամ բացասական (միևնույնն է) Δx աճ և ընդունի $x=x_0+\Delta x$ արժեք, ապա նաև y ֆունկցիան կստանա որևէ Δy աճ։ Ֆունկցիայի Δy աճը կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝



Նկ. 48

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)։$$

Սահմանում 1։ $y=f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $x=x_0$ կետում (կամ x_0 կետում), եթե այն որոշված է x_0 կետի որևէ շրջակայքում (ակընհայտ է, նաև x_0 կետում) և եթե

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \qquad (1)$$

կամ, որ միևնույնն է,

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0։ \qquad (2)$$

Անընդհատության (2) պայմանը կարելի է գրել նաև այսպես՝

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$$

կամ

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0), \qquad (3)$$

բայց

$$x_0=\lim_{x\to x_0}x։$$

Հետևաբար, (3) հավասարությունը կարելի է գրել այսպես՝

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0}x\right), \qquad (4)$$

այսինքն՝ անընդհատ ֆունկցիայի սահմանը գտնելու համար, երբ $x\to x_0$, բավական է ֆունկցիայի արտահայտության մեջ x արգումենտի փոխարեն տեղադրել նրա x_0 արժեքը։

Երկրաչափական նկարագրությամբ ֆունկցիայի անընդհատությունը ստված կետում նշանակում է, որ $x_0+\Delta x$ և x_0 կետերում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի օրդինատների տարբերությունը բացարձակ մեծությամբ ցանկացած չափով փոքր է, եթե միայն $|\Delta x|$-ը բավականաչափ փոքր է։

Օրինակ 1։ Ապացուցենք, որ $y=x^2$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կամայական կետում։ Իրոք,

$$y_0=x_0^2,\quad y_0+\Delta y=(x_0+\Delta x)^2,\quad \Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+\Delta x^2,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0\Delta x+\Delta x^2)=2x_0\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$$

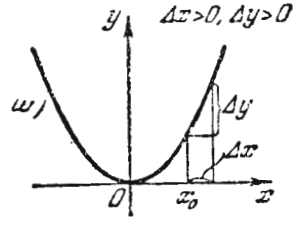
Δx-ը ցանկացած եղանակով զրոյի ձգտելիս (նկ. 49, ա և բ)։

Օրինակ 2։ Ապացուցենք, որ $y=\sin x$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կամայական կետում։ Իրոք,

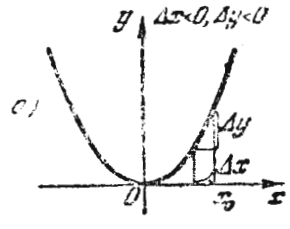
$$y_0=\sin x_0,\quad y_0+\Delta y=\sin(x_0+\Delta x).$$

$$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)։$$

Ցույց է տրվել, որ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=0$ (օրինակ 7, § 5)։ $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ ֆունկցիան սահմանափակ է։ Հետևաբար, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$։



Նկ. 49, ա



Նկ. 49, բ

Համանման ձևով կարելի է ապացուցել, որ յուրաքանչյուր հիմնական տարրական ֆունկցիա անընդհատ է ամեն մի կետում, որտեղ այն որոշված է։

Այնուհետև ապացուցենք հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ 1։ Եթե $f_1(x)$ և $f_2(x)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են x_0 կետում, ապա նրանց $\Psi(x)=f_1(x)+f_2(x)$ գումարը նույնպես x_0 կետում անընդհատ ֆունկցիա է։

Ապացույց։ Քանի որ $f_1(x)$ և $f_2(x)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են, ապա (3) հավասարության հիման վրա կարող ենք գրել՝

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=f_1(x_0) \text{ և } \lim_{x\to x_0} f_2(x)=f_2(x_0);$$

Սահմանների վերաբերյալ թեորեմ 1-ի հիման վրա էլ՝

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\lim_{x\to x_0}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim_{x\to x_0} f_1(x)+\lim_{x\to x_0} f_2(x)=$$

$$=f_1(x_0)+f_2(x_0)=\psi(x_0);$$

Եվ այսպես, $\psi(x)=f_1(x)+f_2(x)$ գումարը անընդհատ ֆունկցիա է թեորեմն ապացուցված է։

Որպես հետևանք նշենք, որ թեորեմն իրավացի է ցանկացած վերջավոր թվով գումարելիների համար։

Հենվելով սահմանների հատկությունների վրա, կարելի է ապացուցել նաև հետևյալ թեորեմները։

ա) Երկու անընդհատ ֆունկցիաների արտադրյալը անընդհատ ֆունկցիա է։

բ) Երկու անընդհատ ֆունկցիաների քանորդը անընդհատ ֆունկցիա է, եթե հայտարարը զրոյական կետում զրո չէ։

գ) Եթե $u=\varphi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $x=x_0$ կետում և $f(u)$ ֆունկցիան անընդհատ է $u_0=\varphi(x_0)$ կետում, ապա $f[\varphi(x)]$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում։

Այս թեորեմներն օգտագործելով, կարելի է ապացուցել հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ 2։ Ամեն մի տարրական ֆունկցիա անընդհատ է յուրաքանչյուր կետում, որտեղ այն որոշված է*։

Օրինակ 3։ $y=x^2$ ֆունկցիան անընդհատ է ցանկացած x_0 կետում, ուստի

$$\lim_{x\to x_0} x^2=x_0,$$

$$\lim_{x\to 3} x^2=3^2=9.$$

Օրինակ 4։ $y=\sin x$ ֆունկցիան անընդհատ է ցանկացած կետում, ուստի

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

Օրինակ 5։ $y=e^x$ ֆունկցիան անընդհատ է ցանկացած կետում, ուստի

$$\lim_{x\to a} e^x=e^a,$$

Օրինակ 6։ $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right],$$

Քանի որ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ և $\ln z$ ֆունկցիան անընդհատ է $z>0$ դեպքում, և, հետևաբար, երբ $z=e$, ապա

$$\lim_{x\to 0}\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$$

Սահմանում 2։ Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է որևէ (a, b) միջակայքի $(a<b)$ յուրաքանչյուր կետում, ապա ասում են, որ ֆունկցիան անընդհատ է այդ միջակայքում։

Եթե ֆունկցիան որոշված է և $x=a$ կետում, և միաժամանակ $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, ապա ասում են, որ $f(x)$-ը $x=a$ կետում անընդհատ է աջից։ Եթե $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$, ապա ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան $x=b$ կետում անընդհատ է ձախից։

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է (a, b) միջակայքի յուրաքանչյուր կետում և միջակայքի ծայրերում՝ համապատասխանաբար աջից և ձախից, ապա ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է փակ միջակայքում կամ $[a, b]$ հատվածում։

Օրինակ 7։ $y=x^2$ ֆունկցիան անընդհատ է ցանկացած $[a, b]$ հատվածում, որը հետևում է օրինակ 1-ից։

Եթե ինչ-որ $x=x_0$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի համար տեղի չունի անընդհատության պայմաններից թեկուզ մեկը, այսինքն՝ եթե $x=x_0$ կետում ֆունկցիան որոշված չէ կամ գոյություն չունի $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ սահմանը կամ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$, երբ $x\to x_0$, կամայական ձևով, թեկուզ վերջին արտահայտության աջ և ձախ մասերը գոյություն ունեն, ապա $x=x_0$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիան խզվող է։ $x=x_0$ կետը այդ դեպքում կոչվում է ֆունկցիայի խզման կետ։

* Այս հարցը մանրամասն շարադրված է Г. М. Фихтенгольц, „Основы математического анализа„, т. I, Физматгиз, 1968, գրքում։

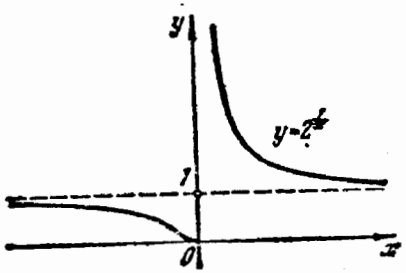
Օրինակ 8։ $y=\frac{1}{x}$ *ֆունկցիան խզվող է* $x=0$ *կետում։ Իրոք, երբ* $x=0$ *ֆունկցիան որոշված չէ՝*

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty,$$

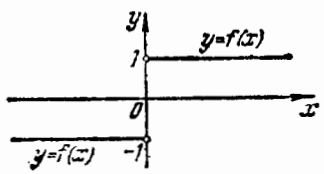
հեշտ է ցույց տալ, որ այդ ֆունկցիան անընդհատ է $x\neq 0$ *ցանկացած արժեքի դեպքում։*

Օրինակ 9։ $y=2^{\frac{1}{x}}$ *ֆունկցիան խզվող է* $x=0$ *կետում։ Իրոք,* $\lim\limits_{x\to 0+0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}2^{\frac{1}{x}}=0$, $x=0$ *դեպքում ֆունկցիան որոշված չէ (նկ. 50)։*

Օրինակ 10։ Դիտարկենք $f(x)=\frac{x}{|x|}$ *ֆունկցիան։ Երբ* $x<0$, $\frac{x}{|x|}=-1$, *իսկ երբ* $x>0$, $\frac{x}{|x|}=1$։ *Հետևաբար,* $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{x}{|x|}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x}{|x|}=1$։ $x=0$ *դեպքում ֆունկցիան որոշված չէ։ Այսպիսով, մենք հաստատեցինք, որ* $f(x)=\frac{x}{|x|}$ *ֆունկցիան խզվող է* $x=0$ *կետում (նկ. 51)։*



Նկ. 50



Նկ. 51

Օրինակ 11։ $y=\sin\frac{1}{x}$ *ֆունկցիան, որը դիտարկվել էր § 3-ի օրինակ 4-ում,* $x=0$ *կետում խզվող է։*

Սահմանում 3։ Եթե $f(x)$ *ֆունկցիան այնպիսին է, որ գոյություն ունեն* $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)$ *և* $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)$ *վերջավոր սահմանները, բայց՝ կամ* $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$, *կամ* $f(x)$ *ֆունկցիայի արժեքը* $x=x_0$ *կետում որոշված չէ, ապա* $x=x_0$*-ն կոչվում է առաջին սեռի խզման կետ։ (Այսպես,* $x=0$ *կետը, օրինակ 10-ում դիտարկված ֆունկցիայի համար հանդիսանում է առաջին սեռի խզման կետ)։*

§ 10. Անընդհատ ֆունկցիաների մի քանի հատկությունները

Այս պարագրաֆում կքննարկենք հատվածում անընդհատ ֆունկցիաների մի քանի հատկություններ։ Այդ հատկությունները կձևակերպվեն թեորեմների ձևով, որոնք կբերենք առանց ապացույցների։*

Թեորեմ 1։ Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է որևէ $[a, b]$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ հատվածում, ապա $[a, b]$ հատվածում կգտնվի առնվազն մեկ այնպիսի $x=x_1$ կետ, որ ֆունկցիայի արժեքն այդ կետում կբավարարի հետևյալ առնչությանը՝

$$f(x_1)\geqslant f(x),$$

որտեղ x-ը հատվածի ցանկացած ուրիշ կետ է, և կգտնվի առնվազն մեկ այնպիսի x_2 կետ, որ ֆունկցիայի արժեքն այդ կետում կբավարարի $f(x_2)\leqslant f(x)$ առնչությանը։

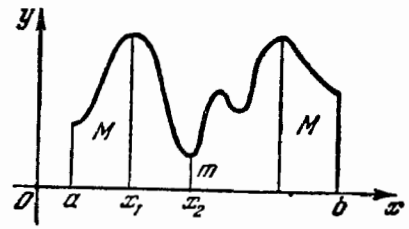
Ֆունկցիայի $f(x_1)$ *արժեքն անվանելու ենք* $y=f(x)$ *ֆունկցիայի մեծագույն արժեք* $[a, b]$ *հատվածում, իսկ ֆունկցիայի* $f(x_2)$ *արժեքն անվանելու ենք ֆունկցիայի փոքրագույն արժեք* $[a, b]$ *հատվածում։*

Այս թեորեմը համառոտակի ձևակերպում են այսպես՝

$a\leqslant x\leqslant b$ հատվածում անընդհատ ֆունկցիան այդ հատվածում առնվազն մեկ անգամ հասնում է M մեծագույն արժեքին և m փոքրագույն արժեքին։

Այս թեորեմի իմաստը ակնառու կերպով իլյուստրացվում է նկ. 52-ում։

Դիտողություն։ Ֆունկցիայի մեծագույն արժեքի մասին թեորեմի պնդումը կարող է ճշմարիտ չլինել, եթե ֆունկցիայի արժեքները դիտարկվեն $a<x<b$ *միջակայքում։ Այսպես, օրինակ, եթե մենք դիտարկենք* $y=x$ *ֆունկցիան* $0<x<1$ *միջակայքում, ապա նրա արժեքների մեջ չկա մեծագույնը և չկա փոքրագույնը։ Իրոք, միջակայքում չկա* x*-ի ոչ փոքրագույն, ոչ էլ մեծագույն արժեք։*

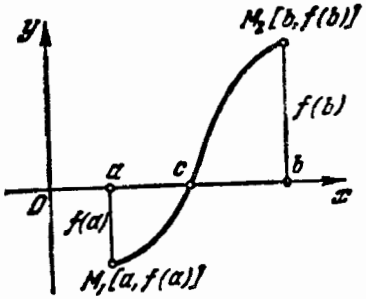


Նկ. 52

* *Այս թեորեմների ապացույցները կարելի է գտնել* Г. М. Фихтенгольц, „Основы математического анализа", т. I, Физматгиз, 1968 *գրքում։*

(Չկա ծայրագույն ձախ կետ, քանի որ մենք ինչպիսի x^* կետ էլ վերցնենք, կգտնվի նրանից ձախ կետ, օրինակ՝ $\frac{x^*}{2}$ կետը. նույնպես գոյություն չունի ծայրագույն աջ կետ, և հետևապես չկա $y=x$ ֆունկցիայի ոչ փոքրագույն, ոչ էլ մեծագույն արժեք)։

Թեորեմ 2։ Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում և այդ հատվածի ծայրերում ընդունում է տարբեր նշաններ ունեցող արժեքներ, այդ դեպքում a և b կետերի միջև կգտնվի առնվազն $x=c$ մեկ կետ, որտեղ ֆունկցիայի արժեքը դառնում է զրո՝



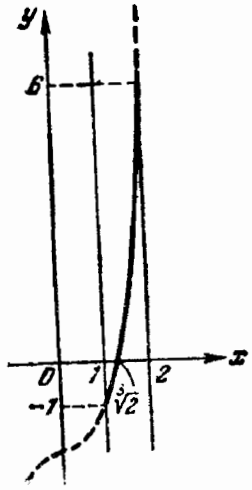
Նկ. 53

$$f(c)=0, \quad a<c<b։$$

Այս թեորեմն ունի պարզ երկրաչափական իմաստ։ $y=f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որը միացնում է $M_1[a,f(a)]$ և $M_2[b, f(b)]$ կետերը, որտեղ $f(a)<0$ և $f(b)>0$ (կամ $f(a)>0$ և $f(b)<0$), Ox առանցքը հատում է առնվազն մեկ կետում (նկ. 53)։

Օրինակ։ Տրված է $y=x^3-2$ ֆունկցիան, $y_{x=1}=-1$, $y_{x=2}=6$։ $[1, 2]$ հատվածում այն անընդհատ է։ Հետևաբար, այդ հատվածում գոյություն ունի կետ, որտեղ $y=x^3-2$ ֆունկցիան դառնում է 0։ Իրոք, երբ $x=\sqrt[3]{2}$, ապա $y=0$ (նկ. 54)։

Թեորեմ 3։ Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում։ Եթե այդ հատվածի ծայրերում ֆունկցիան ընդունում է $f(a)=A$ և $f(b)=B$ անհավասար արժեքներ, ապա ինչպիսին էլ լինի A և B թվերի միջև պարփակված μ թիվը, կգտնվի a-ի և b-ի միջև պարփակված $x=c$ այնպիսի կետ, որի համար $f(c)=\mu$։



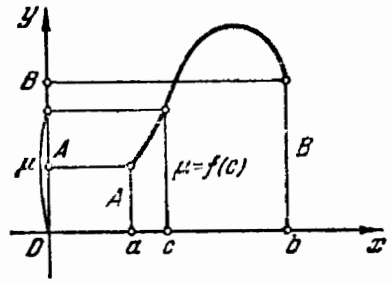
Նկ. 54

Այս թեորեմի իմաստը պարզորեն լուսաբանվում է նկ. 55-ի վրա։ Տվյալ դեպքում ամեն մի $y=\mu$ ուղիղ $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է։

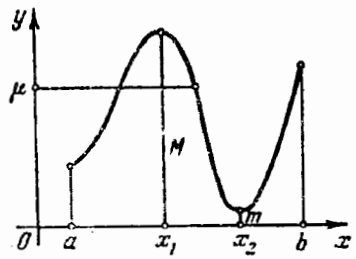
Դիտողություն։ Նշենք, որ թեորեմ 2-ը հանդիսանում է այս թեորեմի մասնավոր դեպքը, քանի որ եթե A-ն և B-ն ունեն տարբեր նշաններ, ապա որպես μ կարելի է վերցնել 0-ն և այդ դեպքում $\mu=0$-ն պարփակված կլինի A և B թվերի միջև։

Թեորեմ 3-ի հետևանքը։ Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է որևէ միջակայքում և ընդունում է մեծագույն ու փոքրագույն արժեքներ, ապա այդ միջակայքում առնվազն մեկ անգամ այն ընդունում է իր փոքրագույն և մեծագույն արժեքների միջև պարփակված ցանկացած արժեք։

Իրոք, դիցուք $f(x_1)=M$, $f(x_2)=m$։ Դիտարկենք $[x_1, x_2]$ հատվածը։ Այդ դեպքում թեորեմ 3-ի համաձայն նշված հատվածում



Նկ. 55



Նկ. 56

$y=f(x)$ ֆունկցիան ընդունում է M և m թվերի միջև պարփակված ցանկացած μ արժեք։ Բայց $[x_1, x_2]$ հատվածը պարփակված է դիտարկվող միջակայքի ներսը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է (նկ. 56-ում)։

§ 11. Անվերջ փոքրերի բաղդատումը

*Դիցուք α, β, γ, ··· մի քանի միաժամանակ անվերջ փոքր մեծություններ հանդիսանում են միևնույն x արգումենտի ֆունկցիաներ և ձգտում են զրոյի՝ x-ը որևէ a սահմանի կամ անվերջության ձգտելիս։ Բնութագրենք այդ փոփոխականների զրոյի ձգտելը, դիտարկելով նրանց հարաբերությունները**։

Հետագայում օգտվելու ենք հետևյալ սահմանումներից։

Սահմանում 1։ Եթե $\frac{\beta}{\alpha}$ հարաբերությունը ունի վերջավոր և զրոյից տարբեր սահման, այսինքն՝ եթե $\lim\frac{\beta}{\alpha}=A\neq 0$, և հետևա-

* Կենթադրենք, որ հայտարարում գտնվող անվերջ փոքրը a կետի որևէ շրջակայքում զրո չի դառնում։

բար, $\lim \frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{A}\neq 0$, *ապա* β *և* α *անվերջ փոքրերը կոչվում են* միևնույն կարգի անվերջ փոքրեր:

Օրինակ 1։ Դիցուք $\alpha=x$, $\beta=\sin 2x$, *որտեղ* $x\to 0$։ α *և* β *անվերջ փոքրերը միևնույն կարգի են, քանի որ*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2,$$

Օրինակ 2։ Երբ $x\to 0$ x, sin3x, tg2x, 7ln(1+x) *անվերջ փոքրերը հանդիսանում են միևնույն կարգի անվերջ փոքրեր։ Ապացույցը կատարվում է օրինակ 1-ում կատարված ապացույցի նմանությամբ։*

Սահմանում 2։ Եթե $\frac{\beta}{\alpha}$ *երկու անվերջ փոքրերի հարաբերությունը ձգտում է զրոյի, այսինքն՝ եթե* $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$ *(իսկ* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$*), ապա* β *անվերջ փոքրը կոչվում է* α *անվերջ փոքրի նկատմամբ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր, իսկ* α *անվերջ փոքրը կոչվում է* β *անվերջ փոքրի նկատմամբ ավելի ցածր կարգի անվերջ փոքր։*

Օրինակ 3։ Դիցուք $\alpha=x$, $\beta=x^n$, $n>1$, $x\to 0$։ β *անվերջ փոքրը ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան* α *անվերջ փոքրը, քանի որ*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}=0,$$

Այդ դեպքում α *անվերջ փոքրը ավելի ցածր կարգի անվերջ փոքր է, քան* β *անվերջ փոքրը։*

Սահմանում 3։ β *անվերջ փոքրը կոչվում է* α *անվերջ փոքրի նկատմամբ* k-*րդ կարգի անվերջ փոքր, եթե* β-*ն և* α^k-*ն միևնույն կարգի անվերջ փոքրեր են, այսինքն, եթե* $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=A\neq 0$։

Օրինակ 4։ Եթե $\alpha=x$, $\beta=x^3$, *ապա երբ* $x\to 0$ β *անվերջ փոքրը* α *անվերջ փոքրի նկատմամբ երրորդ կարգի անվերջ փոքր է, քանի որ*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta}{\alpha^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(x)^3}=1,$$

Սահմանում 4։ Եթե $\frac{\beta}{\alpha}$ *երկու անվերջ փոքրերի հարաբերությունը ձգտում է մեկի, այսինքն՝ եթե* $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$ *ապա* β *և* α *անվերջ փոքրերը կոչվում են համարժեք անվերջ փոքրեր* և գրում են՝* $\alpha\approx\beta$։

Օրինակ 5։ Դիցուք $\alpha=x$ *և* $\beta=\sin x$, *որտեղ* $x\to 0$։ α *և* β *անվերջ փոքրերը համարժեք են, քանի որ*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Օրինակ 6։ Դիցուք $\alpha=x$, $\beta=\ln(1+x)$, *որտեղ* $x\to 0$։ α *և* β *անվերջ փոքրերը համարժեք են, քանի որ*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

(տես օրինակ 6, § 9)։

Թեորեմ 1։ Եթե α-ն և β-ն համարժեք անվերջ փոքրեր են, ապա նրանց α − β տարբերությունը բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան α-ն և քան β-ն:

Ապացույց։ Իրոք,

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=1-\lim\frac{\beta}{\alpha}=1-1=0.$$

Թեորեմ 2։ Եթե երկու անվերջ փոքրերի α−β տարբերությունը նանդիսանում է բարձր կարգի անվերջ փոքր, քան α-ն և քան β-ն, ապա α-ն և β-ն համարժեք անվերջ փոքրեր են:

Ապացույց։ Ենթադրենք $\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=0$, *այդ դեպքում* $\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$ *կամ* $1-\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$, *կամ* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$, *այսինքն՝* $\alpha\approx\beta$։ *Եթե* $\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=0$, *ապա* $\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=0$, $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$, *այսինքն* $\alpha\approx\beta$։

Օրինակ 7։ Ենթադրենք $\alpha=x$, $\beta=x+x^3$, *որտեղ* $x\to 0$։ α *և* β *անվերջ փոքրերը համարժեք են, քանի որ նրանց* $\beta-\alpha=x^3$ *տարբերությունը հանդիսանում է բարձր կարգի անվերջ փոքր, քան α-ն և քան β-ն։ Իրոք,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0}x^2=0,$$

---

* *Այս դեպքում α-ն և β-ն հաճախ անվանում են հավասարազոր անվերջ փոքրեր։*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta-\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x^2}=0.$$

Օրինակ 8։ Երբ $x\to\infty$ $\alpha=\frac{x+1}{x^2}$ *և* $\beta=\frac{1}{x}$ *անվերջ փոքրերը համաժեք են, քանի որ նրանց* $\alpha-\beta=\frac{x+1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$ *տարբերությունը հանդիսանում է բարձր կարգի անվերջ փոքր, քան α-ն և քան β-ն։ α-ի և β-ի հարաբերության սահմանը հավասար է մեկի։*

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

Դիտողություն։ Եթե երկու անվերջ փոքրերի $\frac{\beta}{\alpha}$ *հարաբերությունը չունի սահման և անվերջության չի ձգտում, ապա β-ն և α-ն վերոհիշյալ իմաստով իրար հետ համեմատելի չեն։*

Օրինակ 9։ Դիցուք $\alpha=x$, $\beta=x\sin\frac{1}{x}$, *որտեղ* $x\to 0$։ *α և β անվերջ փոքրերը համեմատելի չեն, քանի որ նրանց* $\frac{\beta}{\alpha}=\sin\frac{1}{x}$ *հարաբերությունը, երբ* $x\to 0$ *չի ձգտում ոչ վերջավոր սահմանի, ոչ էլ անվերջության (տես օրինակ 4, § 3)։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ II ԳԼԽԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Հաշվել նշված սահմանները՝

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}$։ Պատ. 4։ **2.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[2\sin x-\cos x+\operatorname{ctg} x]$։ Պատ. 2։

3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$։ Պատ. 0։ **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$ Պատ. 2։

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$։ Պատ. $\frac{4}{3}$։ **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}$։ Պատ. 1։ **7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$։ Պատ. $\frac{1}{2}$։ **8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$։ Պատ. $\frac{1}{3}$։

Ցուցում։ Գրենք $(k+1)^3-k^3=3k^2-3k+1$ *բանաձևը* $k=0, 1, 2, \ldots, n$ *համար՝*

$$1^3=1;$$
$$2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1;$$
$$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

Գումարելով աջ և ձախ մասերը, կստանանք՝

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3(1+2+\ldots+n)+(n+1),$$

$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1),$$

որտեղից

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{2x+5}$։ Պատ. ∞։ **10.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$։ Պատ. 0։

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$։ Պատ. $\frac{1}{2}$։ **12.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$։ Պատ. 4։ **13.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$։ Պատ. 3։ **14.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$։ Պատ. $\frac{1}{8}$։ **15.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$։ Պատ. 1։

16. $\lim\limits_{y\to -2}\frac{y^3-3y^2+2y}{y^2-y-6}$։ Պատ. $-\frac{2}{5}$։ **17.** $\lim\limits_{u\to -2}\frac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)}$։ Պատ. 0։

18. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$։ Պատ. $3x^2$։ **19.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right]$։ Պատ. -1։

20. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$։ Պատ. n (n-ը ամբողջ դրական թիվ է)։

21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$։ Պատ. $\frac{1}{2}$։ **22.** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$։ Պատ. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$։

23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$։ Պատ. $\frac{q}{p}$։ **24.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$։ Պատ. $\frac{2}{3}$։

25. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$։ Պատ. $\frac{\sqrt[m]{a}}{ma}$։ **26.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$։ Պատ. $\frac{2}{3}$։

27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$։ Պատ. 1։ **28.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$։ Պատ. 1, *երբ* $x\to+\infty$, -1, *երբ* $x\to-\infty$։ **29.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$։ Պատ. 0։

30. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$։ Պատ. $\frac{1}{2}$, *երբ* $x\to+\infty$, $-\infty$, *երբ* $x\to-\infty$։

31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$։ Պատ. 1։ **32.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$։ Պատ. 4։ **33.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$։ Պատ. $\frac{1}{9}$։ **34.** $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$։ Պատ. $\sqrt{2}$։ **35.** $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg} x$։ Պատ. 1։

36. $\lim\limits_{v\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos v}{\sin\left(v-\frac{\pi}{3}\right)}$։ Պատ. $\sqrt{3}$։ **37.** $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2}$։ Պատ. $\frac{2}{\pi}$։

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$, Պատ. $\dfrac{2}{3}$, **39.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$, Պատ. $2\cos a$:

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$, Պատ. $\dfrac{1}{2}$, **41.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3}\right)^x$, Պատ. e^2:

42. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$, Պատ. $\dfrac{1}{e}$, **43.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$, Պատ. $\dfrac{1}{e}$,

44. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$, Պատ. e, **45.** $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}$, Պատ. 1:

46. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$, Պատ. e^3, **47.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}$, Պատ. α:

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$, Պատ. e, **49.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$, Պատ. e^3:

50. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^m$, Պատ. 1, **51.** $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^\alpha)}{\alpha}$, Պատ. 1, երբ $\alpha\to+\infty$ 0, երբ $\alpha\to-\infty$: **52.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$, Պատ. $\dfrac{\alpha}{\beta}$, **53.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>1)$:

Պատ. $+\infty$, երբ $x\to+\infty$, 0, երբ $x\to-\infty$: **54.** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[a^{\frac{1}{n}}-1\right]$, Պատ. $\ln a$:

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$, Պատ. $\alpha-\beta$, **56.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$, Պատ. 1:

Որոշել հետևյալ ֆունկցիաների խզման կետերը.

57. $y=\dfrac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$, Պատ. *ֆունկցիան խզվում է, երբ* $x=-2;\ -1;\ 0;\ 2$:

58. $y=\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$, Պատ. *ֆունկցիան խզվում է, երբ* $x=0$ *և* $x=\pm\dfrac{2}{\pi}$ $\pm\dfrac{2}{3\pi};\ \ldots;\ \pm\dfrac{2}{(2n+1)\pi};\ \ldots$

59. *Գտնել* $y=1+2^{\frac{1}{x}}$ *ֆունկցիայի խզման կետերը և կառուցել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը։* Պատ. *ֆունկցիան խզվում է, երբ* $x=0$ $(y\to+\infty$, *երբ* $x\to 0+0$ $y\to 1$ *երբ* $x\to 0-0)$:

60. *Հետևյալ անվերջ փոքր մեծությունների (երբ* $x\to 0$*)* x^2, $\sqrt{x(1-x)}$, $\sin 3x$, $2x\cos x\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$, xe^{2x} *մեջ ընտրել* x *անվերջ փոքրի հետ միևնույն կարգի, ինչպես, նաև* x*-ի նկատմամբ բարձր և ցածր կարգի անվերջ փոքրերը։* Պատ. x*-ի հետ միևնույն կարգի անվերջ փոքրեր են՝* $\sin 3x$ *և* xe^{2x}, x*-ի հետ համեմատած բարձր կարգի անվերջ փոքրեր են* x^2 *և* $2x\cos x\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$: x*-ի հետ համեմատած ցածր կարգի անվերջ փոքր է՝* $\sqrt{x(1-x)}$:

61. *Ներքոհիշյալ անվերջ փոքր (երբ* $x\to 0$*) մեծությունների մեջ գտնել* x *անվերջ փոքրին համարժեք անվերջ փոքրերը՝* $2\sin x$, $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$, $x-3x^2$, $\sqrt{2x^2+x^3}$, $\ln(1-x)$, x^3+3x^4: Պատ. $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$, $x-3x^2$, $\ln(1+x)$:

62. *Համոզվել այն բանում, որ երբ* $x\to 1$ $1-x$ *և* $1-\sqrt[3]{x}$ *անվերջ փոքր մեծությունները փոքրության միևնույն կարգի են։ Արդյոք դրանք համարժեք են։* Պատ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=3$, *հետևաբար, տված անվերջ փոքրերը միևնույն կարգի են բայց համարժեք չեն։*

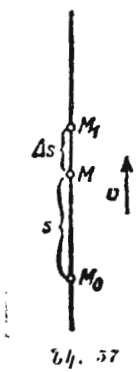
ԳԼՈՒԽ III

ԱԾԱՆՑՅԱԼ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

§ 1. Շարժման արագությունը

Քննարկենք որևէ պինդ մարմնի ուղղագիծ շարժումը, օրինակ, ուղղաձիգ վեր նետած քարի շարժումը կամ մխոցի շարժումը շարժիչի գլանում և այլն։ Վերանալով մարմնի կոնկրետ չափսերից և ձևից, հետագայում այն կպատկերացնենք շարժվող M կետի տեսքով։ Շարժվող կետի s հեռավորությունը, հաշված նրա որևէ M_0 սկզբնական դիրքից, կախված կլինի ժամանակից, այսինքն՝ s-ը կլինի t ժամանակի ֆունկցիա՝

$$s=f(t), \qquad (1)$$



Նկ. 57

Դիցուք t ժամանակի որևէ պահին* M շարժվող կետը գտնվում էր M_0 սկզբնական դիրքից s հեռավորության վրա, իսկ որևէ հաջորդ $t+\Delta t$ պահին կետը գտնվում էր սկզբնական դիրքից $s+\Delta s$ հեռավորության վրա գտնվող M_1 դիրքում (նկ. 57)։ Այսպիսով, Δt ժամանակամիջոցում s հեռավորությունը փոխվեց Δs մեծությամբ։ Այդ դեպքում ասում են, որ Δt ժամանակամիջոցում s մեծությունը ստացել է Δs աճ։

Դիտարկենք $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ հարաբերությունը. այն մեզ տալիս է կետի շարժման միջին արագությունը Δt ժամանակամիջոցում.

$$v_{միջ}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (2)$$

* Այստեղ, ինչպես և հետագայում, փոփոխականի կոնկրետ արժեքը կնշանակենք նույն տառով, ինչով նշանակված է ինքը՝ փոփոխականը։

Միջին արագությունը չի կարող բոլոր դեպքերում ճշգրտորեն բնութագրել t պահին M կետի տեղափոխման արագությունը։ Եթե, օրինակ, մարմինը Δt ժամանակամիջոցի սկզբին տեղափոխվել է շատ արագ, իսկ վերջում շատ դանդաղ, ապա միջին արագությունը, ակնհայտ է, չի կարող արտահայտել կետի շարժման մատնանշված առանձնահատկությունները և մեզ ճիշտ պատկերացում տալ շարժման t պահին նրա ունեցած իսկական արագության մասին։ Միջին արագության օգնությամբ այդ իսկական արագությունը ավելի ճշգրտորեն արտահայտելու համար պետք է Δt ժամանակամիջոցը վերցնել ավելի ու ավելի փոքր։ Կետի շարժման արագությունը առավել լրիվ է բնութագրում այն սահմանը, որին ձգտում է միջին արագությունը, երբ $\Delta t \to 0$։ Այդ սահմանն էլ հենց անվանում են շարժման արագություն տվյալ պահին՝

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}, \qquad (3)$$

Այսպիսով, ուղիղ պաճին շարժման արագությունն կոչվում է ճանապարհի Δs աճի և ժամանակի Δt աճի հարաբերության սահմանը, երբ ժամանակի աճը ձգտում է զրոյի։

(3) հավասարությունը գրենք ծավալուն տեսքով։ Քանի որ

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t),$$

ապա

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}, \qquad (3')$$

Հենց այդ էլ կլինի անհավասարաչափ շարժման արագությունը։ Այսպիսով, մենք տեսնում ենք, որ անհավասարաչափ շարժման արագության հասկացողությունը օրգանապես կապված է սահմանի հասկացողության հետ։ Միայն վերջինիս օգնությամբ կարելի է սահմանել անհավասարաչափ շարժման արագությունը։

(3′) բանաձևից հետևում է, որ v-ն կախված չէ ժամանակի Δt աճից, այլ կախված է t-ի արժեքից և f(t) ֆունկցիայի բնույթից.

Օրինակ։ Գտնել հավասարաչափ արագացող շարժման արագությունը ցանկացած t պահին և t=2 վրկ պահին, եթե ճանապարհի կախումը ժամանակից արտահայտվում է $s=\frac{gt^2}{2}$ բանաձևով։

Լուծում։ t պահին ունենք՝ $s=\frac{gt^2}{2}$, $t+\Delta t$ պահին կստանանք՝

$$s+\Delta s=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}=\frac{g(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)}{2},$$

Գտնենք Δs-ը՝

$$\Delta s=\frac{g(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)}{2}-\frac{gt^2}{2}=gt\Delta t+\frac{g\Delta t^2}{2}.$$

կազմենք $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ հարաբերությունը՝

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{gt\Delta t+g\frac{\Delta t^2}{2}}{\Delta t}=gt+\frac{1}{2}g\Delta t;$$

ըստ սահմանման, ունենք՝

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt.$$

Այսպիսով, ժամանակի ցանկացած t պահին արագությունը՝ $v=gt$, երբ $=2$ ունենք՝ $(v)_{t=2}=g\cdot 2=9,8\cdot 2=19,6\ \frac{մ}{վրկ}$.

§ 2. Ածանցյալի սահմանումը

Դիցուք ունենք որևէ միջակայքում որոշված

$$y=f(x) \qquad (1)$$

ֆունկցիան: Այդ միջակայքից վերցրած x արգումենտի յուրաքանչյուր արժեքի համար $y=f(x)$ ֆունկցիան ունի որոշակի արժեք:

Դիցուք x արգումենտը ստացել է որևէ (միևնույնն է՝ դրական կամ բացասական) Δx աճ: Այդ դեպքում y ֆունկցիան կստանա որևէ Δy աճ: Այսպիսով՝

արգումենտի x արժեքի դեպքում կունենանք՝ $y=f(x)$,

արգումենտի $x+\Delta x$ արժեքի դեպքում կունենանք՝ $y+\Delta y=$ $=f(x+\Delta x)$: Գտնենք ֆունկցիայի Δy աճը՝

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x). \qquad (2)$$

կազմենք ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերությունը՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \qquad (3)$$

Գտնենք այդ հարաբերության սահմանը, երբ $\Delta x\to 0$: Եթե այդ սահմանը գոյություն ունի, ապա այն անվանում են տրված $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ և նշանակում են $f'(x)$-ով: Այսպիսով, ըստ սահմանման

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

կամ

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \qquad (4)$$

Հետևաբար, տված $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ ըստ x արգումենտի կոչվում է ֆունկցիայի Δy աճի և արգումենտի Δx աճի հարաբերության սահմանը, երբ վերջինս կամայական ձևով ձգտում է զրոյի:

Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում x-ի յուրաքանչյուր արժեքի համար $f'(x)$-ը ունի որոշակի արժեք, այսինքն՝ ածանցյալը նույնպես x-ի ֆունկցիա է:

$f'(x)$ նշանակման հետ միասին ածանցյալի համար օգտագործվում են և ուրիշ նշանակումներ, օրինակ

$$y',\ y'_x,\ \frac{dy}{dx}.$$

$x=a$ կետում ածանցյալի կոնկրետ արժեքը նշանակվում է՝ $f'(a)$ կամ $y'|_{x=a}$:

$f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալի որոնման գործողությունը կոչվում է այդ ֆունկցիայի ածանցում կամ դիֆերենցում:

Օրինակ 1. Տրված է $y=x^2$ ֆունկցիան: Գտնել նրա y' ածանցյալը՝

1) կամայական x կետում,

2) $x=3$ կետում:

Լուծում. 1) Արգումենտի x արժեքի դեպքում $y=x^2$, իսկ արգումենտի $x+\Delta x$ արժեքի դեպքում՝ $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$: Գտնենք ֆունկցիայի աճը՝

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2,$$

կազմենք $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ հարաբերությունը՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

Անցնելով սահմանի, գտնենք տվյալ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x,$$

Եվ այսպես, $y=x^2$ ֆունկցիայի ածանցյալը կամայական կետում հավասար է՝

$$y'=2x,$$

2) երբ $x=3$ կստանանք՝

$$y'|_{x=3}=2\cdot 3=6,$$

Օրինակ 2. $y=\frac{1}{x}$, գտնել y'-ը։

Լուծում. Դատելով այնպես, ինչպես նախորդ օրինակում, ստանում ենք՝

$$y=\frac{1}{x};\quad y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x};$$

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)};$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right]=-\frac{1}{x^2},$$

Դիտողություն։ Նախորդ պարագրաֆում հաստատվեց, որ եթե շարժվող կետի s հեռավորության կախումը t ժամանակից արտահայտվում է $s=f(t)$ բանաձևով, ապա v արագությունը t պահին արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t},$$

Հետևաբար,

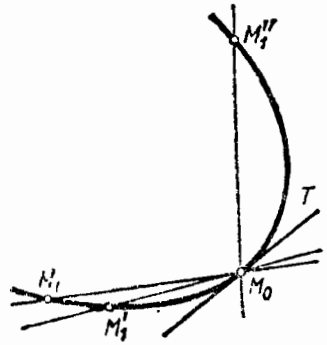
$$v=s'_t=f'(t),$$

այսինքն՝ արագությունը հավասար է ճանապարհի ածանցյալին* ըստ ժամանակի։

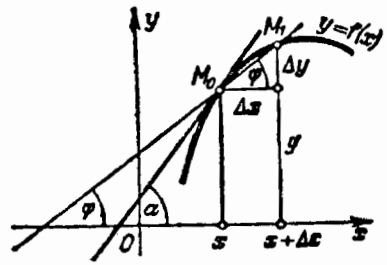
§ 3. Ածանցյալի երկրաչափական նշանակությունը

Մենք ածանցյալի գաղափարին հանգեցինք, քննարկելով շարժվող մարմնի (կետի) արագությունը, այսինքն՝ ելնելով մեխանիկական պատկերացումներից։ Այժմ կտանք ածանցյալի ոչ պակաս կարևոր՝ երկրաչափական մեկնաբանությունը։ Դրա համար մեզ ամենից առաջ անհրաժեշտ կլինի կորի տրված կետում շոշափողի սահմանումը։

Դիցուք, ունենք կոր և նրա վրա ամրացված M_0 կետ։ Կորի վրա վերցնենք M_1 կետ և տանենք M_0M_1 հատողը (նկ. 58)։ Եթե M_1



Նկ. 58



Նկ. 59

կետը կորի վրայով անսահմանափակորեն մոտենում է M_0 կետին, ապա M_0M_1 հատողը գրավում է M_0M_1', M_0M_1'' և այլն տարբեր դիրքեր։

Եթե կորի վրայով ցանկացած կողմից M_1 կետի՝ M_0 կետին անսահմանափակորեն մոտեցման դեպքում հատողը ձգտում է գրավել որոշակի M_0T ուղղի դիրքը, ապա M_0T ուղիղը կոչվում է կորի M_0 կետում շոշափող («ձգտում է գրավել» հասկացողությունը կճշտվի ստորև)։

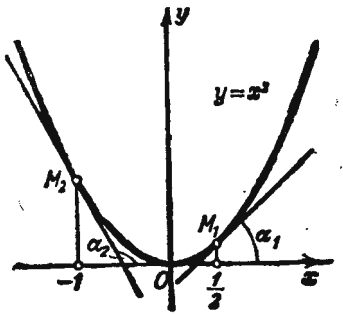
Դիտարկենք $f(x)$ ֆունկցիան և կոորդինատների ուղղանկյուն դեկարտյան սիստեմում այդ ֆունկցիային համապատասխանող $y=f(x)$ կորը (նկ. 59)։ x-ի որևէ արժեքի դեպքում ֆունկցիան ունի $y=f(x)$ արժեքը։ x-ի և y-ի այդ արժեքներին կորի վրա համապատասխանում է $M_0(x, y)$ կետը։ x արգումենտին տանք Δx աճ։ Արգումենտի $x+\Delta x$ նոր արժեքին համապատասխանում է ֆունկցիայի $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ «աճած» արժեքը։ Նրան համապատասխանող կետը կլինի՝ $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$։ Տանենք M_0M_1 հատողը և φ-ով նշանակենք հատողի կազմած անկյունը ox առանցքի դրական ուղղության հետ։ Կազմենք $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ հարաբերությունը։ Նկ. 59-ից անմիջականորեն եզրակացնում ենք, որ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\varphi, \qquad (1)$$

---

* Երբ մենք ասում ենք «ածանցյալը ըստ x-ի» կամ «ածանցյալը ըստ t ժամանակի» և այլն, ապա դրա տակ մենք հասկանում ենք, որ ածանցյալը հաշվելիս մենք արգումենտ ենք համարում x փոփոխականը կամ t ժամանակը և այլն։

Եթե այժմ Δx-ը ձգտի զրոյի, ապա M_1 կետը կորի վրայով կտեղափոխվի, մոտենալով M_0-ին։ M_0M_1 հատողը կպտտվի M_0 կետի շուրջը և Δx-ի փոփոխման հետ կփոփոխվի φ անկյունը։ Եթե $\Delta x \to 0$ դեպքում φ անկյունը ձգտում է որևէ α սահմանի, ապա M_0 կետով անցնող և աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության հետ α անկյուն կազմող ուղիղը կլինի որոնելի շոշափողը։ Դժվար չէ գտնել նրա անկյունային գործակիցը՝



Նկ. 60

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x);$$

Հետևաբար,

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad (2)$$

այսինքն՝ $f'(x)$ ածանցյալի արժեքը արգումենտի տված արժեքի դեպքում հավասար է $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի համապատասխան $M_0(x, y)$ կետում շոշափողի և ox առանցքի դրական ուղղության հետ կազմած անկյան տանգենսին։

Օրինակ։ Գտնել $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $M_2(-1,1)$ կետերում $y=x^2$ կորի շոշափողի թեքության անկյունների տանգենսները (նկ. 60)։

Լուծում։ § 2-ի օրինակ 1-ի հիման վրա ունենք $y'=2x$, հետևաբար,

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = y'\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = y'\Big|_{x=-1} = -2.$$

4. Ֆունկցիաների դիֆերենցելիությունը

Սահմանում։ Եթե

$$y = f(x) \qquad (1)$$

ֆունկցիան $x=x_0$ կետում ունի ածանցյալ, այսինքն՝ գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (2)$$

ապա ասում ենք, որ $x=x_0$ արժեքի դեպքում ֆունկցիան դիֆերենցելի է կամ (որ համարժեք է դրան) ունի ածանցյալ։

Եթե ֆունկցիան դիֆերենցելի է որևէ $[a, b]$ հատվածի կամ (a, b) միջակայքի յուրաքանչյուր կետում, ապա ասում են, որ այն դիֆերենցելի է $[a, b]$ հատվածում կամ, համապատասխանաբար, (a, b) միջակայքում։

Թեորեմ։ Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է որևէ $x=x_0$ կետում, ապա այդ կետում այն անընդհատ է։

Իրոք, եթե

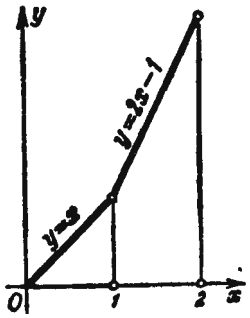
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

ապա

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma,$$

որտեղ γ-ն զրոյի ձգտող մեծություն է, երբ $\Delta x \to 0$։ Բայց այդ դեպքում այստեղից հետևում է, որ $\Delta y \to 0$, երբ $\Delta x \to 0$, որն էլ նշանակում է, որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում (տես II գլխի § 9)։

Այսպիսով, խզման կետերում ֆունկցիան ածանցյալ ունենալ չի կարող։ Հակադարձ եզրակացությունը ճիշտ չէ, այսինքն՝ այն բանից, որ $x=x_0$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, դեռ չի հետևում, որ այդ կետում այն դիֆերենցելի է։ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում կարող է և ածանցյալ չունենալ։ Դրանում համոզվելու համար քննարկենք մի քանի օրինակներ։



Նկ. 61

Օրինակ 1։ $f(x)$ ֆունկցիան $[0,2]$ հատվածում որոշված է հետևյալ կերպ (նկ. 61)։

$$f(x) = x, \quad \text{երբ} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$f(x) = 2x-1, \quad \text{երբ} \quad 1 < x \leqslant 2.$$

Այդ ֆունկցիան $x=1$ կետում չունի ածանցյալ, թեկուզև այդ կետում անընդհատ է։ Իրոք, երբ $\Delta x > 0$ ունենք՝

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(1+\Delta x)-1] - [2\cdot 1 - 1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

երբ $\Delta x < 0$ ստանում ենք՝

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[1+\Delta x] - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Այսպիսով, դիտարկված սահմանը կախված է այն բանից, թե ինչպիսին է Δx-ի

նշանը, իսկ դա նշանակում է, որ $x=1$ կետում ֆունկցիան ածանցյալ չունի*։ Երկրաչափորեն դրան համապատասխանում է այն փաստը, որ տրված «կորը» $x=1$ կետում չունի որոշակի շոշափող։

$x=1$ կետում ֆունկցիայի անընդհատությունը հետևում է նրանից, որ

$$\Delta y=\Delta x, \text{ երբ } \Delta x<0,$$

$$\Delta y=2\Delta x, \text{ երբ } \Delta x\geq 0,$$

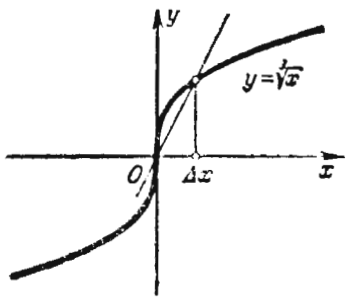
և հետևաբար, երկու դեպքում էլ $\Delta y\to 0$, երբ $\Delta x\to 0$։

Օրինակ 2։ $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիան, որի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 62-ում, որոշված և անընդհատ է անկախ փոփոխականի բոլոր արժեքների համար։ Պարզենք, արդյոք այդ ֆունկցիան ունի՞ ածանցյալ $x=0$ կետում. դրա համար գտնենք ֆունկցիայի արժեքը $x=0$ կետում և $x=0+\Delta x$ կետում։ Երբ $x=0$ ունենք $y=0$, երբ $x=0+\Delta x$ ունենք՝ $y+\Delta y=\sqrt[3]{\Delta x}$, հետևաբար,

$$\Delta y=\sqrt[3]{\Delta x}.$$

Գտնենք ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերության սահմանը՝

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}=+\infty.$$



Նկ. 62

Այսպիսով, $x=0$ կետում ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերության սահմանը ձգտում է անվերջության, երբ $\Delta x\to 0$ (և, նշանակում է, սահման չունի)։ Հետևաբար, դիտարկվող ֆունկցիան $x=0$ կետում դիֆերենցելի չէ։ Այդ կետում կորի շոշափողը Ox առանցքի հետ կազմում է $\frac{\pi}{2}$ անկյուն, այսինքն՝ համընկնում է Oy առանցքի հետ։

5. $y=x^n$ ֆունկցիայի ածանցյալը ամբողջ և դրական n-ի դեպքում

Ելնելով ածանցյալի ընդհանուր սահմանումից, տրված $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը գտնելու համար անհրաժեշտ է կատարել հետևյալ գործողությունները.

1) x արգումենտին տալ Δx աճ, հաշվել ֆունկցիայի աճած արժեքը՝

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x),$$

2) գտնել ֆունկցիայի համապատասխան աճը՝

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

3) կազմել ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերությունը՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

4) գտնել այդ հարաբերության սահմանը, երբ $\Delta x\to 0$.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Մենք այստեղ և հաջորդ պարագրաֆներում կիրառելու ենք այդ ընդհանուր եղանակը մի քանի տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները հաշվելու համար։

Թեորեմ։ $y=x^n$ ֆունկցիայի ածանցյալը, որտեղ n-ը ամբողջ դրական թիվ է, հավասար է nx^{n-1}-ի, այսինքն՝ եթե $y=x^n$, ապա

$$y'=nx^{n-1} \qquad (1)$$

Ապացույց։ Ունենք

$y=x^n$ ֆունկցիան։

1) Եթե x-ը ստանում է Δx աճ, ապա

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n$$

2) օգտվելով Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից, գտնում ենք.

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x+$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n-x^n$$

կամ

$$\Delta y=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n;$$

3) Գտնում ենք հետևյալ հարաբերությունը՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1};$$

4) Գտնում ենք այդ հարաբերության սահմանը՝

* Բուն ածանցյալի սահմանումն պահանջվում է, որպեսզի $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ հարաբերությունը, երբ $\Delta x\to 0$, ձգտի միևնույն սահմանին, անկախ այն բանից, թե ինչ ձևով է Δx-ը ձգտում զրոյի։

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1},$$

հետևաբար, $y'=nx^{n-1}$, *ինչը որ պահանջվում էր ապացուցել։*

Օրինակ 1։ $y=x^5$, $y'=5x^{5-1}=5x^4$։

Օրինակ 2։ $y=x$, $y'=1\cdot x^{1-1}$, $y'=1$։ *Վերջին արդյունքն ունի պարզ երկրաչափական բացատրություն. x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում* $y=x$ *ուղղի շոշափողը համընկնում է այդ ուղղի հետ և, հետևաբար, Ox առանցքի դրական ուղղության հետ կազմում է այնպիսի անկյուն, որի տանգենսը հավասար է 1-ի։*

Նշենք, որ (1) բանաձևը իրավացի է և՛ կոտորակային, և՛ բացասական n-ի դեպքում։ (Դա կապացուցվի § 12-ում)։

Օրինակ 3։ $y=\sqrt{x}$։

Այս ֆունկցիան ներկայացնենք աստիճանի տեսքով՝

$$y=x^{\frac{1}{2}};$$

այդ դեպքում ըստ (1) բանաձևի (հաշվի առնելով հենց նոր արված դիտողությունը) ստանում ենք՝

$$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

կամ

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

Օրինակ 4։

$$y=\frac{1}{x\sqrt{x}},$$

y-ը ներկայացնենք աստիճանային ֆունկցիայի տեսքով՝

$$y=x^{-\frac{3}{2}},$$

Այդ դեպքում

$$y'=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}},$$

§ 6. $y=\sin x$, $y=\cos x$ ֆունկցիաների ածանցյալները

Թեորեմ 1. $\sin x$-ի ածանցյալը $\cos x$ է, այսինքն՝

$$\text{եթե } y=\sin x, \text{ ապա } y'=\cos x: \qquad \text{(II)}$$

Ապացույց։ x *արգումենտին տանք* Δx *աճ. այդ դեպքում*

1) $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$;

2) $$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

4) $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

բայց քանի որ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1,$$

ապա

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x։$$

Վերջին հավասարությունը ստացվում է այն բանի հիման վրա, որ $\cos x$*-ը անընդհատ ֆունկցիա է։*

Թեորեմ 2։ $\cos x$ *ֆունկցիայի ածանցյալը* $-\sin x$ *է, այսինքն՝*

$$\text{եթե } y=\cos x, \text{ ապա } y'=-\sin x: \qquad \text{(III)}$$

Ապացույց։ x *արգումենտին տանք* Δx *աճ, այդ դեպքում*

$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x);$$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}=$$

$$=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

հաշվի առնելով, որ $\sin x$*-ը անընդհատ ֆունկցիա է, վերջնականապես ստանում ենք՝*

$$y'=-\sin x;$$

§ 7. Հաստատունի, հաստատունի և ֆունկցիայի արտադրյալի, գումարի, արտադրյալի, քանորդի ածանցյալները

Թեորեմ 1: Հաստատունի ածանցյալը հավասար է զրոյի, այսինքն՝

եթե $y=C$, որտեղ $C=\text{const}$, ապա $y'=0$; (IV)

Ապացույց: $y=C$ *ֆունկցիան* x*-ից կախված այնպիսի ֆունկցիա է, որի արժեքները* x*-ի բոլոր արժեքների դեպքում հավասար են* C*-ի:*

Հետևաբար, x*-ի ցանկացած արժեքի համար*

$$y=f(x)=C;$$

x *արգումենտին տանք* Δx *աճ* $(\Delta x\neq 0)$*: Քանի որ* y *ֆունկցիան պահպանում է* C *արժեքը արգումենտի բոլոր արժեքների դեպքում, ապա*

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)=C;$$

Ուրեմն, ֆունկցիայի աճը հավասար է՝

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=0,$$

ֆունկցիայի աճի հարաբերությունը արգումենտի աճին կլինի՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

և հետևաբար,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

այսինքն՝

$$y'=0;$$

Վերջին արդյունքն ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն: $y=C$ *ֆունկցիայի գրաֆիկն է* Ox *առանցքին զուգահեռ ուղիղը: Գրաֆիկի ցանկացած կետում շոշափողը, ակնհայտ է, համընկնում է այդ ուղղի հետ և, հետևաբար,* Ox *առանցքի հետ կազմում է այնպիսի անկյուն, որի* y' *տանգենսը հավասար է զրոյի:*

Թեորեմ 2: Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել ածանցյալի նշանից, այսինքն՝

եթե $y=Cu(x)$, որտեղ $C=\text{const}$, ապա $y'=Cu'(x)$; (V)

Ապացույց: *Դատելով այնպես, ինչպես և նախորդ թեորեմն ապացուցելիս, կունենանք.*

$$y=Cu(x),$$

$$y+\Delta y=Cu(x+\Delta x),$$

$$\Delta y=Cu(x+\Delta x)-Cu(x)=C[u(x+\Delta x)-u(x)],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=C\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=C\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x},$$ *այսինքն՝* $y'=Cu'(x)$;

Օրինակ 1:

$$y=3\frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$y'=3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=3\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=3\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}},$$

այսինքն՝

$$y'=-\frac{3}{2x\sqrt{x}};$$

Թեորեմ 3: Վերջավոր թվով դիֆերենցելի ֆունկցիաների

գումարի ածանցյալը հավասար է այդ ֆունկցիաների ածանցյալների գումարին*:

Օրինակ, երեք գումարելիների դեպքի համար ունենք՝

$$y=u(x)+v(x)+w(x);\quad y'=u'(x)+v'(x)+w'(x). \qquad (V)$$

Ապացույց: x *արգումենտի արժեքների համար*

$$y=u+v+w$$

(համառոտության համար ֆունկցիայի նշանակման մեջ x *արգումենտը բաց ենք թողնում):*

Արգումենտի $x+\Delta x$ *արժեքի համար ունենք՝*

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)+(w+\Delta w),$$

որտեղ Δy*-ը,* Δu*-ն,* Δv*-ն և* Δw*-ն* y, u, v *և* w *ֆունկցիաների՝* x *արգումենտի* Δx *աճին համապատասխանող աճերն են: Հետևաբար,*

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v++\Delta w,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta w}{\Delta x},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}$$

կամ

$$y'=u'(x)+v'(x)+w'(x).$$

Օրինակ 2.

$$y=3x^4-\frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

$$y'=3(x^4)'-\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'=3\cdot 4x^3-\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1},$$

այսինքն՝

$$y'=12x^3+\frac{1}{3}\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}.$$

Թեորեմ 4. Երկու դիֆերենցելի ֆունկցիաների արտադրյալի ածանցյալը հավասար է առաջին ֆունկցիայի ածանցյալի և երկրորդ ֆունկցիայի արտադրյալին գումարած առաջին ֆունկցիայի և երկրորդի ածանցյալի արտադրյալը, այսինքն՝

$$\text{եթե } y=uv, \text{ ապա } y'=u'v+uv', \qquad (VII)$$

Ապացույց: Դատելով այնպես, ինչպես և նախորդ թեորեմն ապացուցելիս, կստանանք՝

$$y=uv,$$

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v),$$

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=\Delta uv+u\Delta v+\Delta u\Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v+\lim_{\Delta x\to 0}u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}=$$

$$=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)v+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

(քանի որ u*-ն և* v*-ն կախված չեն* Δx*-ից):*

Դիտարկենք աջ մասի վերջին անդամը՝

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Քանի որ u(x)*-ը դիֆերենցելի ֆունկցիա է, ապա այն անընդհատ է: Հետևաբար,* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$*: Բացի դրանից,*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'\neq\infty.$$

Այսպիսով, դիտարկված անդամը հավասար է զրոյի, և մենք վերջնականապես ստանում ենք՝

$$y'=u'v+uv'.$$

Ապացուցած թեորեմի հիման վրա հեշտությամբ ստացվում է ցանկացած թվով ֆունկցիաների արտադրյալի դիֆերենցման կանոնը:

Այսպես, եթե ունենք երեք ֆունկցիաների $y=uvw$ *արտադրյալը, ապա աջ մասը ներկայացնելով որպես* u*-ի և* vw*-ի արտադրյալ, կստանանք*

$$y'=u'(vw)+u(vw)'=u'vw+u(v'w+vw')=u'vw+uv'w+uvw'.$$

Այս եղանակով կարող ենք համանման բանաձև ստանալ ցանկացած

---

* $y=u(x)-v(x)$ *արտահայտությունը հավասարազոր է* $y=u(x)+(-1)v(x)$*-ին և* $y'=[u(x)+(-1)v(x)]'=u'(x)+[-v(x)]'=u'(x)-v'(x)$*:*

(վերջավոր) թվով ֆունկցիաների արտադրյալի ածանցյալի համար։ Այն է, եթե $y=u_1u_2\cdots u_n$, ապա

$$y'=u_1'u_2\cdots u_{n-1}u_n+u_1u_2'\cdots u_{n-1}u_n+\cdots+u_1u_2\cdots u_{n-1}u_n'.$$

Օրինակ 3։ եթե $y=x^2\sin x$, ապա

$$y'=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x.$$

Օրինակ 4։ եթե $y=\sqrt{x}\sin x\cos x$, ապա

$$y'=(\sqrt{x})'\sin x\cos x+\sqrt{x}(\sin x)'\cos x+\sqrt{x}\sin x(\cos x)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x\cos x+\sqrt{x}\cos x\cos x+\sqrt{x}\sin x(-\sin x)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x\cos x+\sqrt{x}(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{\sin 2x}{4\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos 2x.$$

Թեորեմ 5։ Կոտորակի (այսինքն՝ երկու ֆունկցիաների քանորդի) ածանցյալը հավասար է մի կոտորակի, որի հայտարարը տրված կոտորակի հայտարարի քառակուսին է, իսկ համարիչը՝ հայտարարի և համարիչի ածանցյալի արտադրյալի և համարիչի ու հայտարարի ածանցյալի տարբերությունը, այսինքն՝

$$\text{եթե } y=\frac{u}{v},\ \text{ապա } y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \qquad \text{(VIII)}$$

Ապացույց։ Եթե Δy-ը, Δu-ն և Δv-ն x արգումենտի Δx աճին համապատասխանող y, u և v ֆունկցիաների աճերն են, ապա

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)},$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\dfrac{v\Delta u-u\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)},$$

Այստեղից, նկատելով, որ $\Delta v\to 0$, երբ $\Delta x\to 0$*, ստանում ենք՝

$$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Օրինակ 5։ եթե $y=\dfrac{x^3}{\cos x}$, ապա

$$y'=\frac{(x^3)'\cos x-x^3(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{3x^2\cos x+x^3\sin x}{\cos^2 x}.$$

Դիտողություն։ Եթե ունենք

$$y=\frac{u(x)}{C}$$

տեսքի ֆունկցիա, որտեղ C հայտարարը հաստատուն է, ապա այդ ֆունկցիան դիֆերենցելիս հարկ չկա օգտագործել (VIII) բանաձևը, այլ նպատակահարմար է օգտագործել (V) բանաձևը՝

$$y'=\left(\frac{1}{C}u\right)'=\frac{1}{C}u'=\frac{u'}{C}.$$

Իհարկե այս արդյունքն ստացվում է ըստ (VIII) բանաձևի։

Օրինակ 6։ եթե $y=\dfrac{\cos x}{7}$, ապա

$$y'=\frac{(\cos x)'}{7}=-\frac{\sin x}{7}.$$

8. Լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցյալը

Թեորեմ։ $\log_a x$ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է $\dfrac{1}{x}\log_a e$ այսինքն՝

$$\text{եթե } y=\log_a x,\ \text{ապա } y'=\frac{1}{x}\log_a e. \qquad \text{(IX)}$$

---

* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$, քանի որ $v(x)$-ը դիֆերենցելի է և, հետևաբար, անընդհատ ֆունկցիա է։

Ապացույց։ Եթե Δy*-ը* x *արգումենտի* Δx *աճին համապատասխանող* y *ֆունկցիայի աճն է, ապա*

$$y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x);$$

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Վերջին հավասարության աջ մասի արտահայտությունը բազմապատկելով x*-ով և բաժանելով* x*-ի վրա, կստանանք՝*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\,\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Նշանակենք $\frac{\Delta x}{x}$ *մեծությունը* α*-ով։ Ակնհայտ է՝* $\alpha\to 0$, *երբ* $\Delta x\to 0$ *և տված* x*-ի դեպքում։ Հետևաբար,*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Բայց ինչպես հայտնի է (տես § 7, գլ. II)։

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

Իսկ եթե լոգարիթմի նշանի տակ գտնվող արտահայտությունը ձգտում է e *թվին, ապա այդ արտահայտության լոգարիթմը ձգտում է* $\log_a e$*-ի (լոգարիթմական ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ)։ Դրա համար վերջնականապես ստանում ենք՝*

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

Նկատելով, որ $\log_a e=\frac{1}{\ln a}$, *ստացած բանաձևը կարելի է արտագրել այսպես.*

$$y'=\frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln a}.$$

Նշենք այս բանաձևի մի կարևոր մասնավոր դեպք. եթե $a=e$, *ապա* $\ln a=\ln e=1$, *այսինքն՝*

$$\text{եթե } y=\ln x, \text{ ապա } y'=\frac{1}{x}. \qquad (X)$$

§ 9. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը

Դիցուք տրված է $y=f(x)$ *բարդ ֆունկցիան, այսինքն այնպիսին, որ այն կարելի է ներկայացնել*

$$y=F(u),\ u=\varphi(x)$$

կամ $y=F[\varphi(x)]$ *տեսքով (տես § 8, գլ. I)։* $y=F(u)$ *արտահայտության մեջ* u *փոփոխականն անվանում են միջանկյալ արգումենտ։*

Որոշենք բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը։

Թեորեմ։ Եթե $u=\varphi(x)$ ֆունկցիան որևէ x կետում ունի $u'_x=\varphi'(x)$ ածանցյալ, իսկ $y=F(u)$ ֆունկցիան u-ի համապատասխան արժեքի դեպքում ունի $y'_u=F'(u)$ ածանցյալ, ապա $y=F[\varphi(x)]$ բարդ ֆունկցիան մատնանշված x կետում նույնպես ունի ածանցյալ, որը հավասար է՝

$$y'_x=F'_u(u)\varphi'(x),$$

որտեղ u-ի փոխարեն պետք է տեղադրվի $u=\varphi(x)$։ Կրճատ,

$$y'_x=y'_u u'_x,$$

այսինքն՝ բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է այդ ֆունկցիայի՝ ըստ միջանկյալ արգումենտի ածանցյալի և միջանկյալ արգումենտի՝ ըստ x-ի ածանցյալի արտադրյալին։

Ապացույց։ x*-ի որոշակի արժեքի դեպքում կունենանք.*

$$u=\varphi(x),\quad y=F(u).$$

Արգումենտի $x+\Delta x$ *աճած արժեքի համար՝*

$$u+\Delta u=\varphi(x+\Delta x),\qquad y+\Delta y=F(u+\Delta u).$$

Այսպիսով, Δx *աճին համապատասխանում է* Δu *աճ, որին համապատասխանում է* Δy *աճ, ընդ որում, երբ* $\Delta x\to 0$, *ապա* $\Delta u\to 0$ *և* $\Delta y\to 0$։

Ըստ պայմանի

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u,$$

Օգտվելով սահմանի սահմանումից, այս առնչությունից (երբ $\Delta u \neq 0$) ստանում ենք՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha, \qquad (1)$$

որտեղ $\alpha \to 0$, երբ $\Delta u \to 0$։ Արտագրենք (1) հավասարությունը.

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \Delta u, \qquad (2)$$

(2) հավասարությունն իրավացի է նաև $\Delta u = 0$ և կամայական α-ի դեպքում, քանի որ այն վերածվում է $0 = 0$ նույնության։ $\Delta u = 0$ դեպքում կընդունենք $\alpha = 0$։ (2) հավասարության բոլոր անդամները բաժանենք Δx-ի վրա.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}, \qquad (3)$$

Ըստ պայմանի

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0:$$

(3) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $\Delta x \to 0$ կստանանք՝

$$y'_x = y'_u u'_x, \qquad (4)$$

Օրինակ 1։ Դիցուք տված է $y = \sin(x^2)$ ֆունկցիան։ Գտնենք y'_x-ը։ Տված ֆունկցիան ներկայացնենք որպես ֆունկցիայի ֆունկցիա հետևյալ կերպ.

$$y = \sin u, \quad u = x^2,$$

Գտնում ենք

$$y'_u = \cos u, \quad u'_x = 2x,$$

Հետևաբար, ըստ (4) բանաձևի

$$y'_x = y'_u u'_x = \cos u \cdot 2x,$$

u-ի փոխարեն տեղադրելով նրա արտահայտությունը, վերջնականապես ստանում ենք.

$$y'_x = 2x \cos(x^2).$$

Օրինակ 2։ Տված է $y = (\ln x)^3$ ֆունկցիան։ Գտնենք y'_x-ը։ Տված ֆունկցիան ներկայացնենք հետևյալ կերպ՝

$$y = u^3, \quad u = \ln x,$$

Գտնում ենք

$$y'_u = 3u^2, \quad u'_x = \frac{1}{x},$$

Հետևաբար

$$y'_x = 3u^2 \frac{1}{x} = 3(\ln x)^2 \frac{1}{x},$$

Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ այն կարելի է ներկայացնել

$$y = F(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x)$$

տեսքով, ապա y'_x ածանցյալի որոնումը կատարվում է նախորդ թեորեմի հաջորդաբար կիրառման ճանապարհով։

Ըստ ապացուցած կանոնի ունենք,

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Այդ նույն թեորեմն օգտագործելով u'_x-ը գտնելու համար, կունենանք

$$u'_x = u'_v v_x$$

u'_x-ի արտահայտությունը տեղադրելով նախորդ հավասարության մեջ, ստանում ենք

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x \qquad (5)$$

կամ

$$y'_x = F'_u(u) \varphi'_v(v) \psi'_x(x).$$

Օրինակ 3։ Տված է $y = \sin[(\ln x)^3]$ ֆունկցիան։ Գտնենք y'_x-ը։ Տված ֆունկցիան ներկայացնենք հետևյալ կերպ

$$y = \sin u, \quad u = v^3, \; v = \ln x,$$

Գտնենք

$$y'_u = \cos u, \quad u'_v = 3v^2, \quad v'_x = \frac{1}{x},$$

Հետևաբար, ըստ (5) բանաձևի ստանում ենք

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = 3(\cos u) v^2 \frac{1}{x},$$

կամ վերջնականապես

$$y'_x = \cos[(\ln x)^3] \cdot 3(\ln x)^2 \frac{1}{x},$$

Նկատենք, որ դիտարկվող ֆունկցիան որոշված է միայն $x > 0$ դեպքում։

§ 10. $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\ln|x|$ ֆունկցիաների ածանցյալները

Թեորեմ 1: $\operatorname{tg} x$ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է $\frac{1}{\cos^2 x}$-ի, այսինքն՝ եթե $y=\operatorname{tg} x$, ապա

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}; \qquad \text{(XI)}$$

Ապացույց: Քանի որ

$$y=\frac{\sin x}{\cos x},$$

ապա ըստ կոտորակի ածանցման կանոնի (տես գլուխ III, § 7-ի (VIII) բանաձևը) ստանում ենք՝

$$y'=\frac{(\sin x')\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x};$$

Թեորեմ 2: $\operatorname{ctg} x$ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է $-\frac{1}{\sin^2 x}$-ի, այսինքն՝

եթե $y=\operatorname{ctg} x$, ապա $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ (XII)

Ապացույց: Քանի որ

$$y=\frac{\cos x}{\sin x},$$

ապա

$$y'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=$$

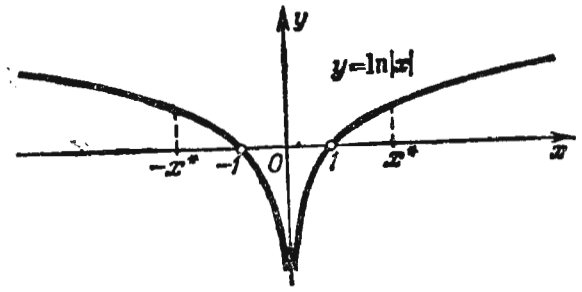
$$=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x};$$

Օրինակ 1: Եթե $y=\operatorname{tg}\sqrt{x}$, ապա

$$y'=\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}},$$

Օրինակ 2: Եթե $y=\ln\operatorname{ctg} x$, ապա

$$y'=\frac{1}{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{ctg} x)'=\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-\frac{1}{\cos x\sin x}=-\frac{2}{\sin 2x};$$



Նկ. 63

Թեորեմ 3: $\ln|x|$ ֆունկցիայի (նկ. 63) ածանցյալը հավասար է $\frac{1}{x}$-ի, այսինքն՝

եթե $y=\ln|x|$, ապա $y'=\frac{1}{x}$; (XIII)

Ապացույց: ա) Եթե $x>0$, ապա $|x|=x$, $\ln|x|=\ln x$ և դրա համար

$$y'=\frac{1}{x};$$

բ) Ենթադրենք $x<0$, այդ դեպքում $|x|=-x$: Բայց

$$\ln|x|=\ln(-x)$$

(նկատենք, որ եթե $x<0$, ապա $-x>0$): $y=\ln(-x)$ ֆունկցիան ներկայացնենք որպես բարդ ֆունկցիա, ընդունելով

$$y=\ln u, \qquad u=-x.$$

Այդ դեպքում

$$y'_x=y_u\cdot u'_x=\frac{1}{u}(-1)=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x};$$

Եվ այսպես, x-ի բացասական արժեքների համար նույնպես տեղի ունի

$$y'_x=\frac{1}{x}$$

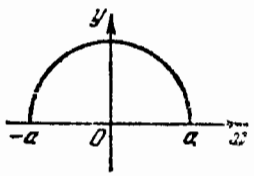
հավասարությունը։ Հետևաբար, (XIII) բանաձևն ապացուցված է $x \neq 0$ ցանկացած արժեքի համար։ ($x=0$ դեպքում $\ln|x|$ ֆունկցիան որոշված չէ։)

§ 11. Անբացահայտ ֆունկցիա և նրա դիֆերենցումը

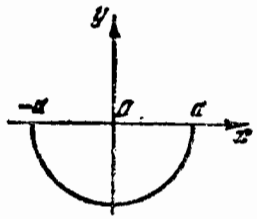
Դիցուք x և y երկու փոփոխականների արժեքները միմյանց հետ կապված են որևէ հավասարումով, որը սիմվոլիկ կերպով կնշանակենք այսպես.

$$F(x, y)=0, \tag{1}$$

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան, որը որոշված է որևէ (a, b) միջակայքում այնպիսին է, որ նրա (1) հավասարման մեջ y-ի փոխարեն f(x) արտահայտությունը տեղադրելիս այդ հավասարումը x-ի նկատմամբ վերածվում է նույնության, ապա $y=f(x)$ ֆունկցիան (1) հավասարումով որոշվող անբացահայտ ֆունկցիա է։



Նկ. 64



Նկ. 65

Այսպես, օրինակ

$$x^2+y^2-a^2=0 \tag{2}$$

հավասարումը անբացահայտ կերպով որոշում է հետևյալ սարբրական ֆունկցիաները (գծ. 64 և 65).

$$y=\sqrt{a^2-x^2}, \tag{3}$$

$$y=-\sqrt{a^2-x^2}; \tag{4}$$

Իրոք, այդ արժեքները (2) հավասարման մեջ տեղադրելուց հետո ստանում ենք

$$x^2+(a^2-x^2)-a^2=0$$

նույնությունը։

(3) և (4) արտահայտությունները ստացվեցին (2) հավասարումը y-ի նկատմամբ լուծելու ճանապարհով։ Բայց ոչ անբացահայտ ձևով տրված ամեն մի ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել բացահայտ տեսքով, այսինքն՝ կարելի է ներկայացնել $y=f(x)$ տեսքով*, որտեղ f(x)-ը սարբրական ֆունկցիա է։

Այսպես, օրինակ,

$$y^6-y-x^2=0$$

կամ

$$y-x-\frac{1}{4}\sin y=0,$$

հավասարումներով տված ֆունկցիաները չեն արտահայտվում սարբրական ֆունկցիաներով, այսինքն այդ հավասարումները հնարավոր չէ լուծել y-ի նկատմամբ։

Դիտողություն 1։ Նշենք, որ «բացահայտ ֆունկցիա» և «անբացահայտ ֆունկցիա» տերմինները բնորոշում են ոչ թե ֆունկցիայի բնույթը, այլ նրա տրման եղանակը։ Յուրաքանչյուր $y=f(x)$ բացահայտ ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել և որպես $y-f(x)=0$ անբացահայտ ֆունկցիա։

Յույց տանք, այնուհետև, անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցյալը գտնելու կանոնը՝ առանց այդ ֆունկցիան բացահայտի ձևափոխելու, այսինքն այն առանց $y=f(x)$ տեսքով ներկայացնելու։

Ենթադրենք ֆունկցիան տրված է հետևյալ հավասարումով՝

$$x^2+y^2-a^2=0,$$

Եթե այստեղ y-ը x-ի ֆունկցիա է, որը որոշվում է այդ հավասարությունով, ապա վերջինս նույնություն է։

Այդ նույնության երկու մասերն ածանցելով ըստ x-ի, ընդունելով, որ y-ը x-ի ֆունկցիա է, բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնի համաձայն կստանանք՝

$$2x+2yy'=0,$$

որտեղից

$$y'=-\frac{x}{y};$$

---

* Եթե ֆունկցիան տրված է $y=f(x)$ տեսքի հավասարումով, ապա ասում են, որ ֆունկցիան տրված է բացահայտ տեսքով կամ բացահայտ է։

Նկատենք, որ ածանցելով համապատասխան $y=\sqrt{a^2-x^2}$ *բացահայտ ֆունկցիան, կստանանք նույն արդյունքը՝*

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{y}:$$

Դիտարկենք x*-ից կախված* y *անբացահայտ ֆունկցիայի ևս մեկ օրինակ՝*

$$y^6-y-x^2=0:$$

Ածանցենք ըստ x*-ի՝*

$$6y^5y'-y'-2x=0,$$

որտեղից

$$y'=\frac{2x}{6y^5-1}:$$

Դիտողություն 2։ Բերված օրինակներից հետևում է, որ անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցյալի՝ արգումենտի տված արժեքին համապատասխանող արժեքը գտնելու համար պետք է իմանալ նաև x*-ի տրված արժեքին համապատասխանող* y *ֆունկցիայի արժեքը։*

§ 12. Ցանկացած իրական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի, ցուցչային ֆունկցիայի, բարդ ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալները

Թեորեմ 1։ x^n *ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է* nx^{n-1}, *որտեղ* n*-ը ցանկացած իրական թիվ է, այսինքն՝*

$$\text{եթե } y=x^n, \text{ ապա } y'=nx^{n-1}: \qquad (\mathrm{I}')$$

Ապացույց։ Դիցուք $x>0$։ *Լոգարիթմելով տրված ֆունկցիան, կունենանք*

$$\ln y=n\ln x:$$

Ստացված հավասարության երկու մասը ածանցենք ըստ x*-ի, համարելով, որ* y*-ը* x*-ի ֆունկցիա է՝*

$$\frac{y'}{y}=n\frac{1}{x}, \qquad y'=yn\frac{1}{x}:$$

Այստեղ տեղադրելով $y=x^n$ *արժեքը, վերջնականապես ստանում ենք*

$$y'=nx^{n-1}:$$

Հեշտ է ցույց տալ, որ այդ բանաձևը ճիշտ է և $x<0$ *համար, եթե միայն* x^n*-ը իմաստ ունի*։*

Թեորեմ 2։ a^x *ֆունկցիայի ածանցյալը, որտեղ* $a>0$, *հավասար է* $a^x\ln a$, *այսինքն՝*

$$\text{եթե } y=a^x, \text{ ապա } y'=a^x\ln a: \qquad (\mathrm{XIV})$$

Ապացույց։ Լոգարիթմելով $y=a^x$ *հավասարությունը, ստանում ենք՝*

$$\ln y=x\ln a:$$

Դիֆերենցենք ստացված հավասարությունը, համարելով y*-ը* x*-ի ֆունկցիա.*

$$\frac{1}{y}y'=\ln a, \qquad y'=y\ln a$$

կամ

$$y'=a^x\ln a:$$

Եթե $a=e$, *ապա* $\ln e=1$ *և մենք ստանում ենք հետևյալ բանաձևը՝*

$$y=e^x, \qquad y'=e^x: \qquad (\mathrm{XIV}')$$

Օրինակ 1։ Տրված է

$$y=e^{x^2}$$

ֆունկցիան։ Այն ներկայացնենք որպես բարդ ֆունկցիա, մուծելով u *միջանկյալ արգումենտը,*

$$y=e^u, \qquad u=x^2;$$

այս դեպքում

$$y'_u=e^u, \qquad u'_x=2x$$

և հետևաբար

$$y_x=e^u\cdot 2x=e^{x^2}2x:$$

Բարդ ցուցչային ֆունկցիա *կոչվում է այն ֆունկցիան, որի և՛ հիմքը, և՛ աստիճանի ցուցիչը* x*-ի ֆունկցիաներ են, օրինակ,* $(\sin x)^{x^2}$, $x^{\mathrm{tg}x}$, x^x, $(\ln x)^x$, *ընդհանրապես,*

$$y=[u(x)]^{v(x)}=u^v$$

տեսքի ամեն մի ֆունկցիա բարդ ցուցչային ֆունկցիա է։

---

* *Այդ բանաձևն արդեն ապացուցվել է (III գլխի § 5) այն դեպքի համար, երբ* n*-ը հանդիսանում է ամբողջ դրական թիվ։ Այժմ (I) բանաձևն ապացուցված է ընդհանուր դեպքում (ցանկացած* n *հաստատուն թվի համար)։*

Թեորեմ 3։

Եթե $y=u^v$, ապա $y'=vu^{v-1}u'+u^v v' \ln u$։ (XV)

Ապացույց։ Լոգարիթմենք y ֆունկցիան՝

$$\ln y=v \ln u։$$

Ածանցելով ստացված հավասարությունն ըստ x-ի, կունենանք,

$$\frac{1}{y}y'=v\frac{1}{u}u'+v' \ln u,$$

որտեղից

$$y'=y\left(v\frac{u'}{u}+v' \ln u\right)։$$

Այստեղ տեղադրելով $y=u^v$ արտահայտությունը, ստանում ենք,

$$y'=vu^{v-1}u'+u^v v' \ln u։$$

Այսպիսով, բարդ ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալը կազմված է երկու գումարելիներից՝ առաջին գումարելին ստացվում է, եթե ածանցելիս ենթադրվի, որ u-ն x-ի ֆունկցիա է, իսկ v-ն հաստատուն (այսինքն՝ եթե u^v-ն ֆունկցիան դիտվի որպես աստիճանային ֆունկցիա). երկրորդ գումարելին ստացվում է, եթե ենթադրվի, որ v-ն x-ի ֆունկցիա է, իսկ u=const (այսինքն՝ եթե u^v-ն դիտվի որպես ցուցչային ֆունկցիա)։

Օրինակ 2։ Եթե $y=x^x$, ապա $y'=xx^{x-1}(x)'+x^x(x)' \ln x$ կամ

$$y'=x^x+x^x \ln x=x^x(1+\ln x)։$$

Օրինակ 3։ Եթե $y=(\sin x)^{x^2}$, ապա

$$y'=x^2(\sin x)^{x^2-1}(\sin x)'+(\sin x)^{x^2}(x^2)' \ln \sin x=$$

$$=x^2(\sin x)^{x^2-1}\cos x+(\sin x)^{x^2}2x \ln \sin x։$$

Ածանցյալների որոնման համար այս պարագրաֆում կիրառված եղանակը, որի դեպքում նախագտնում են տվյալ ֆունկցիայի լոգարիթմի ածանցյալը, այնուհետև կիրառվում է ֆունկցիանները ածանցելիս։ Այս եղանակի կիրառումը հաճախ նշանակալիորեն պարզեցնում է հաշվումները։

---

* Հաճախ այդպիսի ֆունկցիան անվանում են ցուցչա-աստիճանային կամ աստիճանա-ցուցչային։

Օրինակ 4։ Պահանջվում է գտնել

$$y=\frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}$$

ֆունկցիայի ածանցյալը։

Լուծում։ Լոգարիթմելով գտնում ենք՝

$$\ln y=2 \ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-3 \ln(x+4)-x,$$

Ածանցենք վերջին հավասարության երկու մասը՝

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x+4}-1,$$

Բազմապատկելով y-ով և y-ի փոխարեն տեղադրելով $\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}$ ստանում ենք՝

$$y'=\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x+4}-1\right],$$

Դիտողություն։ $\frac{y'}{y}=(\ln y)'$ արտահայտությունը, որը հանդիսանում է $y=y(x)$ ֆունկցիայի բնական լոգարիթմի ածանցյալը ըստ x-ի, կոչվում է լոգարիթմական ածանցյալ։

§ 13. Հակադարձ ֆունկցիա և նրա դիֆերենցումը

Դիցուք տված է աճող (նկ. 66) կամ նվազող

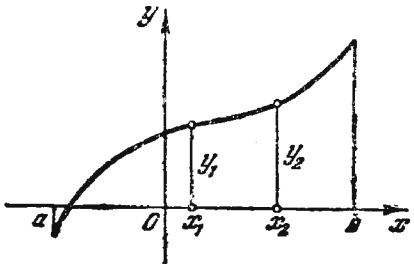
$$y=f(x) \qquad (1)$$

ֆունկցիա, որը որոշված է որևէ (a, b) (a<b) միջակայքում (տես գլ. I § 6)։ Դիցուք f(a)=c, f(b)=d։ *Որոշակիության համար հետագայում կդիտարկենք աճող ֆունկցիա։*

Դիտարկենք (a, b) միջակայքին պատկանող x_1 և x_2 երկու տարբեր արժեքներ։ Աճող ֆունկցիայի սահմանումից հետևում է, որ եթե $x_1<x_2$ և $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, ապա $y_1<y_2$։ Հետևաբար, x_1 և x_2 երկու տարբեր արժեքներին համապատասխանում են ֆունկցիայի երկու տարբեր՝ y_1 և y_2 արժեքներ։ Իրավացի է և հակադարձը, այսինքն՝ եթե $y_1<y_2$, $y_1=f(x_1)$, իսկ $y_2=f(x_2)$, ապա աճող ֆունկցիայի սահմանումից հետևում է, որ $x_1<x_2$։ Այսպիսով, x-ի արժեքների և y-ի

համապատասխան արժեքների միջև հաստատվում է փոխադարձ միարժեք համապատասխանություն:

y-ի արժեքները դիտելով որպես արգումենտի արժեքներ, իսկ x-ի արժեքները՝ որպես ֆունկցիայի արժեքներ, ստանում ենք x-ը որպես y-ի ֆունկցիա՝



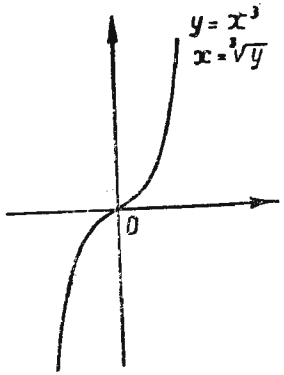
Նկ. 66

$$x=\varphi(y): \qquad (2)$$

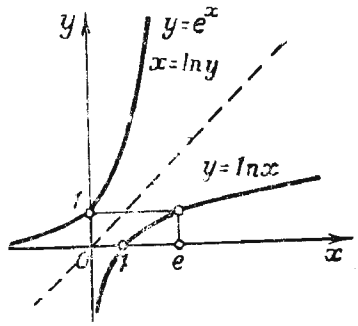
$y=f(x)$ ֆունկցիայի համար այդ ֆունկցիան կոչվում է հակադարձ: Ակնհայտ է, որ և $y=f(x)$ ֆունկցիան $x=\varphi(y)$ ֆունկցիայի համար հակադարձ է: Դատելով համանման ձևով, կարելի է ապացուցել, որ և նվազող ֆունկցիան ունի հակադարձը:

Դիտողություն 1: Առանց ապացուցելու նշենք, որ եթե $y=f(x)$ աճող (կամ նվազող) ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում, ընդ որում $f(a)=c$, $f(b)=d$, ապա հակադարձ ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ է $[c, d]$ հատվածում:

Օրինակ 1: Դիցուք տրված է $y=x^3$ ֆունկցիան: Այդ ֆունկցիան, որն աճող է $-\infty<x<+\infty$ միջակայքում, ունի իր հակադարձը, $x=\sqrt[3]{y}$ (նկ. 67):



Նկ. 67



Նկ. 68

Նկատենք, որ $x=\varphi(y)$ հակադարձ ֆունկցիան որոնվում է $y=f(x)$ հավասարումը x-ի նկատմամբ լուծման ճանապարհով:

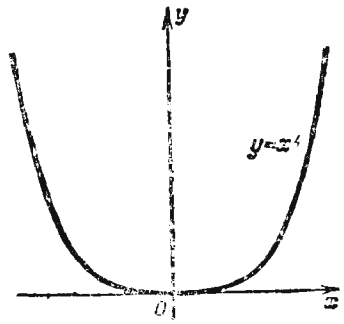
Օրինակ 2: Դիցուք տրված է $y=e^x$ ֆունկցիան: Այդ ֆունկցիան աճող է $-\infty<x<+\infty$ միջակայքում: Այն ունի հակադարձը՝ $x=\ln y$: Հակադարձ ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է՝ $0<y<+\infty$ (նկ. 68):

Դիտողություն 2: Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան որևէ միջակայքում ոչ աճող է, ոչ էլ նվազող, ապա այն կարող է ունենալ մի քանի հակադարձ ֆունկցիա*:

Օրինակ 3: $y=x^2$ ֆունկցիան որոշված է $-\infty<x<+\infty$ միջակայքում: Այն ոչ աճող է, ոչ նվազող և չունի հակադարձը: Եթե մենք դիտարկենք $0<x<+\infty$ միջակայքը, ապա այստեղ ֆունկցիան աճող է և նրա հակադարձ ֆունկցիան կլինի՝ $x=\sqrt{y}$: Իսկ $-\infty<x<0$ միջակայքում ֆունկցիան նվազող է և նրա համար հակադարձ է $x=-\sqrt{y}$ ֆունկցիան (նկ. 69):

Դիտողություն 3: Եթե $y=f(x)$ և $x=\varphi(y)$ ֆունկցիաներ փոխհակադարձ են, ապա նրանց գրաֆիկները միևնույն կորն է: Բայց եթե հակադարձ ֆունկցիայի արգումենտը մենք նորից նշանակենք x-ով, իսկ ֆունկցիան՝ y-ով և կառուցենք նրանց գրաֆիկները միևնույն կոորդինատային սիստեմում, ապա արդեն կստանանք երկու տարբեր գրաֆիկներ:

Հեշտ է տեսնել, որ այդ գրաֆիկները սիմետրիկ կլինեն առաջին կոորդինատային անկյան կիսորդի նկատմամբ:



Նկ. 69

Օրինակ 4: Նկ. 68-ում կառուցված են $y=e^x$ (կամ $x=\ln y$) և նրա հակադարձ՝ $y=\ln x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները: Այդ ֆունկցիաները դիտարկվել էին օրինակ 2-ում:

Այնուհետև ապացուցենք մի թեորեմ, որը թույլ է տալիս գտնել $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը, իմանալով հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Թեորեմ: Եթե

$$y=f(x) \qquad (1)$$

ֆունկցիայի համար գոյություն ունի հակադարձ ֆունկցիա՝

$$x=\varphi(y), \qquad (2)$$

որը դիտարկվող y կետում ունի $\varphi'(y)$ ածանցյալ, որը տարբեր է զրոյից, ապա համապատասխան x կետում $y=f(x)$ ֆունկցիան

* Մի անգամ ևս ընդգծենք, որ խոսելով այն մասին, որ y-ը x-ի ֆունկցիա է, մենք հասկանում ենք y-ի միարժեք կախումը x-ից:

ունի $f'(x)$ ածանցյալ, որը հավասար է $\frac{1}{\varphi'(y)}$, այսինքն՝ իրավացի է

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \qquad \text{(XVI)}$$

բանաձևը:

Այսպիսով, երկու փոխհակադարձ ֆունկցիաներից մեկի ածանցյալը հավասար է մեկը բաժանած այդ ֆունկցիաներից երկրորդի ածանցյալի վրա x-ի և y-ի համապատասխան արժեքների դեպքում:

Ապացույց: Վերցնենք Δy աճը. այդ դեպքում (2)-ի համաձայն

$$\Delta x = \varphi(y+\Delta y) - \varphi(y),$$

Քանի որ $\varphi(y)$-ը մոնոտոն ֆունկցիա է, ապա $\Delta x \neq 0$: Գրենք հետևյալ նույնությունը՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}, \qquad (3)$$

Քանի որ $\varphi(y)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա $\Delta x \to 0$, երբ $\Delta y \to 0$: (3) հավասարության երկու մասում անցնելով սահմանի, երբ $\Delta y \to 0$, կստանանք՝

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{կամ} \quad f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

այսինքն՝ ստացանք XVI բանաձևը:

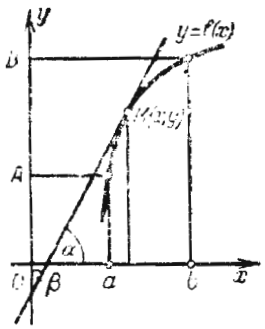
Դիտողություն: Օգտվելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման մասին թեորեմից, XVI բանաձևը կարելի է ստանալ այսպես. (2) հավասարության երկու մասը ածանցենք ըստ x-ի, համարելով y-ը x-ի ֆունկցիա: Կստանանք $1 = \varphi'(y) \cdot y'_x$, որտեղից

$$y'_x = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

---

* Երբ մենք գրում ենք $f'(x)$ կամ y'_x, ապա ընդունում ենք, որ ածանցյալը հաշվելիս իրոք անկախ փոփոխական վերցվում է x-ը, իսկ երբ գրում ենք $\varphi'(y)$, կամ x'_y, ապա մենք ընդունում ենք, որ ածանցյալը հաշվելիս անկախ փոփոխականի դերը կատարում է y-ը: Նկատենք, որ ըստ y-ի ածանցելիս չենք, որը ցույց է տրված (XVI) բանաձևի աջ մասում, պետք է y-ի փոխարեն տեղադրել f(x):

Ստացած արդյունքը անհասկանալի կերպով դիտարկենք հակադարձ: Դիտարկենք $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 70): Այդ նույն կորը նաև $x=\varphi(y)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն է, որտեղ արդեն x-ը դիտարկվում է իբրև ֆունկցիա, իսկ y-ը՝ որպես անկախ փոփոխական: Դիտարկենք այդ կորի որևէ M(x, y) կետը: Այդ կետում կորի շոշափողի կազմած անկյունները ox և oy առանցքների դրական ուղղությունների հետ նշանակենք, համապատասխանաբար, α-ով և β-ով: Ածանցյալի երկրաչափական նշանակության մասին § 3-ի արդյունքների հիման վրա ունենք.



Նկ. 70

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \varphi'(y) = \operatorname{tg}\beta. \qquad (4)$$

Նկ. 70-ից հետևում է, որ եթե $\alpha < \frac{\pi}{2}$, ապա $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$: Իսկ եթե $\alpha > \frac{\pi}{2}$, ապա ինչպես դժվար չէ նկատել, որ $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$: Հետևաբար, ցանկացած դեպքում $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$, որտեղից $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$ կամ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$: (4) բանաձևից տեղադրելով $\operatorname{tg}\alpha$-ի և $\operatorname{tg}\beta$-ի արտահայտությունները, ստանում ենք՝

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

§ 14. Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները եվ նրանց ածանցումը

1) $y = \arcsin x$ *ֆունկցիան:*

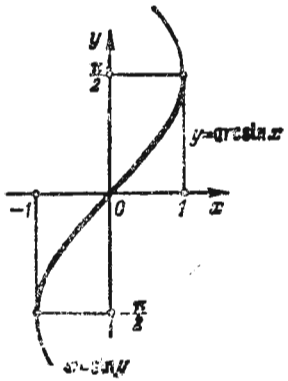
Դիտարկենք

$$x = \sin y \qquad (1)$$

ֆունկցիան և կառուցենք նրա գրաֆիկը, oy առանցքն ուղղելով ուղղաձիգ դեպի վեր (նկ. 71): Այդ ֆունկցիան որոշված է $-\infty < y < +\infty$ միջակայքում: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ հատվածում $x = \sin y$ ֆունկցիան աճող

է, նրա արժեքները լցնում են $-1 \leqslant x \leqslant 1$ հատվածը։ Ուստի $x=\sin y$ ֆունկցիան ունի հակադարձը, որը նշանակում են այսպես՝

$$y=\arcsin x;^*$$



Նկ. 71

Այդ ֆունկցիան որոշված է $-1 \leqslant x \leqslant 1$ հատվածում, նրա արժեքները լցնում են $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ հատվածը։ Նկ. 71-ում $y=\arcsin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է թավ գծով։

Թեորեմ 1։ $\arcsin x$ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, այսինքն,

$$\text{եթե } y=\arcsin x, \text{ ապա } y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{(XVII)}$$

Ապացույց։ (1) հավասարության հիման վրա գտնում ենք՝

$$x'_y=\cos y;$$

Ըստ հակադարձ ֆունկցիայի ածանցման կանոնի

$$y'_x=\frac{1}{x_y}=\frac{1}{\cos y},$$

բայց

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2},$$

ուստի

$$y'_x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

Արմատից առաջ վերցվում է պլյուս նշանը, քանի որ $y=\arcsin x$ ֆունկցիան արժեքներ է ընդունում $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ հատվածում, և հետևաբար, $\cos y \geqslant 0$։

Օրինակ 1։

$$y=\arcsin e^x,$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x)'=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}};$$

* Նշենք, որ եռանկյունաչափությունից հայտնի $y=\arcsin x$ հավասարությունը (1) հավասարության մի այլ դրսևորումն է։ Այստեղ (ավյալ x-ի դեպքում) y-ը նշանակում է այն անկյունների բազմությունը, որի սինուսը հավասար է x-ի։

Օրինակ 2։

$$y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2,$$

$$y'=2\arcsin\frac{1}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right)'=-2\arcsin\frac{1}{x}\,\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}};$$

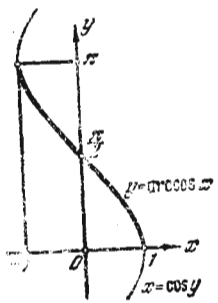
2) $y=\arccos x$ ֆունկցիան։

Ինչպես և վերևում, դիտարկենք

$$x=\cos y \quad (2)$$

ֆունկցիան և կառուցենք նրա գրաֆիկը, ուղղելով Oy առանցքը դեպի վեր (նկ. 72)։ Այդ ֆունկցիան որոշված է $-\infty<y<+\infty$ անվերջ միջակայքում, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ հատվածում $x=\cos y$ ֆունկցիան նվազող է և ունի հակադարձը, որը նշանակում են այսպես՝

$$y=\arccos x;$$



Նկ. 72

Այս ֆունկցիան որոշված է $-1 \leqslant x \leqslant 1$ հատվածում։ Ֆունկցիայի արժեքները լցնում են $\pi \geqslant y \geqslant 0$ հատվածը։ Նկ. 72-ում $y=\arccos x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է թավ գծով։

Թեորեմ 2։ $\arccos x$ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, այսինքն՝

$$\text{եթե } y=\arccos x, \text{ ապա } y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{(XVIII)}$$

Ապացույց։ (2) հավասարության հիման վրա գտնում ենք՝

$$x'_y=-\sin y;$$

Հետևաբար,

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}};$$

Բայց $\cos y=x$, ուստի

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}$ հավասարության մեջ արմատի առաջ վերցվում է պլյուս նշանը, քանի որ $y=\arccos x$ ֆունկցիայի արժեքները լցնում են $0\leqslant y\leqslant\pi$ հատվածը և, հետևաբար, $\sin y\geqslant 0$։

Օրինակ 3.

$$y=\arccos(\operatorname{tg} x),$$

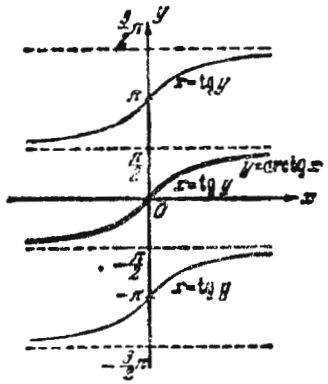
$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}(\operatorname{tg} x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}\,\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) $y=\operatorname{arc\,tg} x$ ֆունկցիան։

Դիտարկենք

$$x=\operatorname{tg} y \qquad (3)$$

ֆունկցիան և կառուցենք նրա գրաֆիկը (նկ. 73)։ Այդ ֆունկցիան որոշված է y-ի բոլոր արժեքների համար, բացի $y=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$ արժեքներից։ $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ միջակայքում $x=\operatorname{tg} y$ ֆունկցիան աճող է և ունի հակադարձը, որը նշանակում են այսպես՝ $y=\operatorname{arctg} x$։ Այս ֆունկցիան որոշված է $-\infty<x<+\infty$ միջակայքում։



Նկ. 73

Ֆունկցիայի արժեքները լցնում են $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ միջակայքը։ Նկ. 73-ում $y=\operatorname{arctg} x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է թավ գծով։

Թեորեմ 3. $\operatorname{arctg} x$ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է $\frac{1}{1+x^2}$, այսինքն՝

$$\text{եթե } y=\operatorname{arc\,tg} x, \text{ ապա } y'=\frac{1}{1+x^2}. \qquad (XIX)$$

Ապացույց. (3) հավասարության հիման վրա գտնում ենք

$$x'_y=\frac{1}{\cos^2 y},$$

հետևաբար,

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\cos^2 y,$$

բայց

$$\cos^2 y=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y},$$

քանի որ $\operatorname{tg} y=x$, ապա վերջնականապես ստանում ենք՝

$$y'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Օրինակ 4.

$$y=(\operatorname{arctg} x)^4,$$

$$y'=4(\operatorname{arctg} x)^3(\operatorname{arctg} x)'=4(\operatorname{arctg} x)^3\frac{1}{1+x^2}.$$

4) $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ ֆունկցիան։

Դիտարկենք

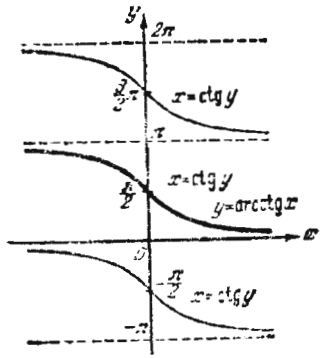
$$x=\operatorname{ctg} y \qquad (4)$$

ֆունկցիան։

Այս ֆունկցիան որոշված է y-ի բոլոր արժեքների դեպքում, բացի $y=k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$։ Ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 74-ում։ $0<y<\pi$ միջակայքում $x=\operatorname{ctg} y$ ֆունկցիան նվազող է և ունի հակադարձը, որը նշանակում են՝

$$y=\operatorname{arc\,ctg} x.$$

Հետևաբար, այս ֆունկցիան որոշված է $-\infty<x<+\infty$ միջակայքում, նրա արժեքները լցնում են $0<y<\pi$ միջակայքը։



Նկ. 74

Թեորեմ 4. $\operatorname{arc\,ctg} x$ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է $-\frac{1}{1+x^2}$, այսինքն՝

$$\text{եթե } y=\operatorname{arc\,ctg} x, \text{ ապա } y'=-\frac{1}{1+x^2}. \qquad (XX)$$

Ապացույց. (4)-ից ստանում ենք՝

$$x'_y=-\frac{1}{\sin^2 y}.$$

Հետևաբար,

$$y'_x=-\sin^2 y=-\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y}=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}. \quad \text{Բայց } \operatorname{ctg} y=x.$$

Ուստի

$$y'_x = -\frac{1}{1+x^2},$$

§ 15. Ածանցման հիմնական բանաձևերի աղյուսակ

Այժմ նախորդ պարագրաֆներում արտածված բոլոր հիմնական ածանցման բանաձևերը և կանոնները միավորենք մի աղյուսակի մեջ։

$$y = \text{const}, \quad y' = 0;$$

Աստիճանային ֆունկցիա՝

$$y = x^{\alpha}, \qquad y' = \alpha x^{\alpha-1},$$

մասնավորապես,

$$y = \sqrt{x}, \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y' = -\frac{1}{x^2};$$

Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ՝

$$y = \sin x, \qquad y' = \cos x,$$

$$y = \cos x, \qquad y' = -\sin x,$$

$$y = \operatorname{tg} x, \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ՝

$$y = \arcsin x, \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \arccos x, \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} x, \qquad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y = \operatorname{arc\,ctg} x, \qquad y' = -\frac{1}{1+x^2};$$

Ցուցչային ֆունկցիա՝

$$y = a^x, \qquad y' = a^x \ln a,$$

մասնավորապես

$$y = e^x, \qquad y' = e^x;$$

Լոգարիթմական ֆունկցիա՝

$$y = \log_a x, \qquad y' = \frac{1}{x}\log_a e,$$

մասնավորապես

$$y = \ln x, \qquad y' = \frac{1}{x};$$

Ածանցման ընդհանուր կանոններ.

$$y = Cu(x), \qquad y' = Cu'(x) \qquad (C = \text{const}),$$

$$y = u + v - w, \qquad y' = u' + v' - w',$$

$$y = uv, \qquad y' = u'v + uv',$$

$$y = \frac{u}{v}, \qquad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

$$\left.\begin{aligned} y &= f(u), \\ u &= \varphi(x), \end{aligned}\right\} \qquad y'_x = f'_u(u)\varphi'_x(x),$$

$$y = u^v, \qquad y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u;$$

Եթե $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$, *որտեղ* f-*ը և* φ-*ն փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են, ապա*

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \text{ որտեղ } y = f(x);$$

§ 16. Ֆունկցիայի պարամետրական տրումը

Տրված են երկու հավասարումներ՝

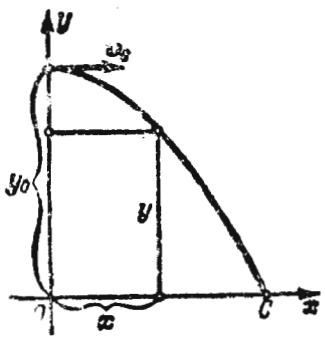
$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

որտեղ t-ն ընդունում է $[T_1, T_2]$ հատվածում պարունակվող արժեքներ: t-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում են x-ի և y-ի արժեքներ (φ-ն և ψ-ն ենթադրվում են միարժեք ֆունկցիաներ): Եթե x և y արժեքները դիտվեն որպես Oxy կոորդինատային հարթության վրա կետի կոորդինատներ, ապա t-ի յուրաքանչյուր արժեքին կհամապատասխանի հարթության որոշակի կետ: Երբ t-ն փոփոխվում է T_1-ից մինչև T_2, այդ կետը հարթության վրա գծում է որևէ կոր: (1) հավասարումները կոչվում են այդ կորի պարամետրական հավասարումներ, t-ն կոչվում է պարամետր, իսկ կորի որոշումը (1) հավասարումներով կոչվում է պարամետրական:

Ենթադրենք, այնուհետև, որ $x=\varphi(t)$ ֆունկցիան ունի հակադարձը՝ $t=\Phi(x)$: Այդ դեպքում, ակնհայտ է, y-ը x-ի ֆունկցիան է՝

$$y=\Psi[\Phi(x)]. \qquad (2)$$

Այսպիսով, (1) հավասարումները y-ը որոշում են որպես x-ի ֆունկցիա, և ասում են, որ x-ի y ֆունկցիան տրված է պարամետրական տեսքով: x-ից՝ y-ի անմիջական կախման $y=f(x)$ արտահայտությունը ստացվում է (1) հավասարումներից t պարամետրի արտաքսման ճանապարհով:



Նկ. 75

Կորերի պարամետրական տրումը լայնորեն կիրառվում է մեխանիկայում: Եթե Oxy հարթության մեջ շարժվում է որևէ նյութական կետ և մեզ հայտնի են կոորդինատային առանցքների վրա այդ կետի պրոյեկցիաների շարժման օրենքները,

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\Psi(t),\end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

որտեղ t-ն ժամանակն է, ապա (1′) հավասարումները հանդիսանում են շարժվող կետի հետագծի պարամետրական հավասարումները: Այդ հավասարումներից արտաքսելով t պարամետրը, կստանանք հետագծի հավասարումը $y=f(x)$ կամ $F(x, y)=0$ տեսքով: Դիտարկենք օրինակ, այսպիսի խնդիր.

Խնդիր: Որոշել բեռի հետագիծը և անկման վայրը, որը նետված է y բարձրությամբ v_0 արագությամբ հորիզոնական շարժվող ինքնաթիռից (օդի դիմադրությունը կարելի է անտեսել):

Լուծում: Վերցնենք կոորդինատների օրիգինը այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկ. 75-ում, ենթադրելով, որ ինքնաթիռը բեռը նետում է այն պահին, երբ այն հատում է Oy առանցքը: Ակնհայտ է, որ բեռի հորիզոնական տեղափոխությունը կլինի հավասարաչափ, v_0 հաստատուն արագությամբ՝

$$x=v_0t,$$

Ծանրության ուժի ազդեցությամբ ընկնող բեռի ազդանշի տեղափոխությունը կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝

$$s=\frac{gt^2}{2},$$

Հետևաբար, ժամանակի ցանկացած պահին բեռի հեռավորությունը երկրից կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝

$$y=y_0-\frac{gt^2}{2},$$

$$x=v_0t, \qquad y=y_0-\frac{gt^2}{2},$$

երկու հավասարումները կլինեն հետագծի պարամետրական հավասարումները: t պարամետրն արտաքսելու համար առաջին հավասարումից գտնենք $t=\frac{x}{v_0}$ արժեքը և այն տեղադրենք երկրորդ հավասարման մեջ: Այդ դեպքում կստանանք հետագծի հավասարումը հետևյալ ձևով՝

$$y=y_0-\frac{g}{2v_0^2}x^2,$$

Սա պարաբոլի հավասարումն է, որը ունի $M(0, y_0)$ գագաթ, ընդ որում Oy առանցքը ծառայում է որպես պարաբոլի սիմետրիայի առանցք:

Որոշենք OC հատվածի մեծությունը: C կետի աբսցիսը նշանակենք X-ով, նկատենք, որ այդ կետի օրդինատը՝ $y=0$: Տեղադրելով այդ արժեքները նախորդ բանաձևի մեջ, կունենանք՝

$$0=y_0-\frac{g}{2v_0^2}X^2,$$

որտեղից

$$X=v_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}}.$$

§ 17. Մի քանի կորերի հավասարումները պարամետրական ձևով

Շրջանագիծ: Տրված է շրջանագիծ, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է և շառավիղը հավասար է r-ի (նկ. 76):

Շրջանագծի որևէ $M(x, y)$ կետով տարած շառավղով և Ox առանցքով կազմված անկյունը նշանակենք t-ով: Այդ դեպքում շրջանագծի ցանկացած կետի կոորդինատները t պարամետրի միջոցով կարտահայտվեն հետևյալ կերպ՝

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos t,\\ y&=r\sin t,\end{aligned}\right\} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

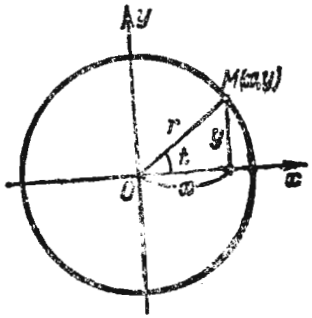
Դրանք էլ հենց շրջանագծի պարամետրական հավասարումներն են։ Եթե մենք այդ հավասարումներից արտաքսենք t պարամետրը, ապա կստանանք շրջանագծի հավասարումը, որը պարունակում է միայն x և y։

Քառակուսի բարձրացնելով պարամետրական հավասարումները և գումարելով գտնում ենք՝

$$x^2+y^2=r^2(\cos^2 t+\sin^2 t)$$

կամ

$$x^2+y^2=r^2$$



Նկ. 76

Էլիպս։ Տված է էլիպսի հավասարումը

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Ընդունենք

$$x=a\cos t. \qquad (2')$$

Տեղադրելով այս արտահայտությունը (1) հավասարման մեջ և կատարելով անհրաժեշտ ձևափոխությունները, կստանանք

$$y=b\sin t. \qquad (2'')$$

Հետևյալ հավասարումները՝

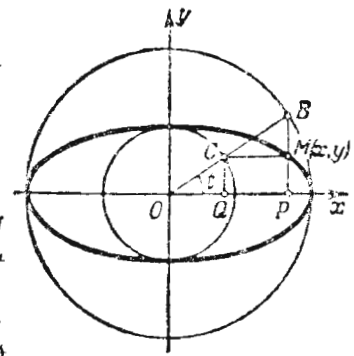
$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos t,\\ y&=b\sin t,\end{aligned}\right\} 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

հանդիսանում են էլիպսի պարամետրական հավասարումները։

Պարզաբանենք t պարամետրի երկրաչափական իմաստը։ Գծենք երկու շրջանագծեր, որոնց կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում և շառավիղներն են՝ a ու b (նկ. 77)։ Դիցուք M(x, y) կետն ընկած է էլիպսի վրա, իսկ B-ն մեծ շրջանագծի կետ է, որն ունի նույն աբսցիսը, ինչ որ M կետը։ OB շառավղի կազմած անկյունը Ox առանցքի հետ նշանակենք t-ով։ Գծագրից անմիջապես հետևում է.

$x=OP=a\cos t$ [կա (2′) հավասարումն է]

$CQ=b\sin t$։



Նկ. 77

(2″) հավասարության հիման վրա եզրակացնում ենք, որ CQ=y, այսինքն՝ CM ուղիղը զուգահեռ է Ox առանցքին։

Հետևաբար, (2) հավասարումների մեջ t-ն OB շառավղի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյունն է։ t անկյունը հաճախ անվանում են էքսցենտրիկ անկյուն։

Ցիկլոիդ։ Ցիկլոիդ կոչվում է այն կորը, որը գծում է շրջանագծի վրա գտնվող կետը, երբ այդ շրջանագիծը առանց սահելու գլորվում է ուղղի վրայով (նկ. 78)։ Դիցուք գլորվող շրջանագծի M կետը շարժման սկզբին համընկել էր կոորդինատների սկզբնակետի հետ։ Որոշենք M կետի կոորդինատները այն քանից հետո, երբ շրջանագիծը շարժվել է t անկյունով։ Գլորվող շրջանագծի շառավիղը նշանակենք a-ով։ Ինչպես երևում է նկ. 78-ից

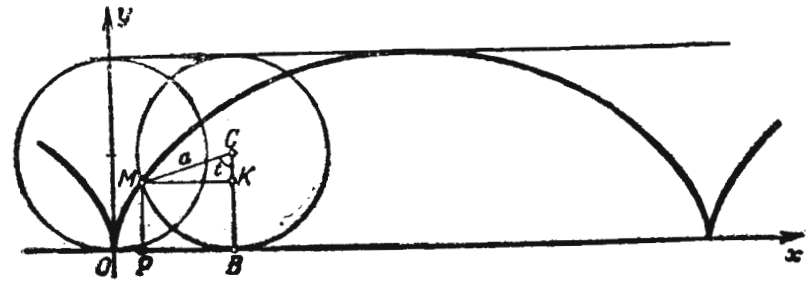
$$x=OP=OB-PB,$$

բայց քանի որ շրջանագիծը գլորվում է առանց սահելու, ապա

$$OB=\overset{\smile}{MB}=at, \qquad PB=MK=a\sin t.$$

Հետևաբար,

$$x=at-a\sin t=a(t-\sin t).$$



Նկ. 78

Այնուհետև,

$$y=MP=KB=CB-CK=a-a\cos t=a(1-\cos t).$$

Հետևյալ հավասարումները՝

$$\left.\begin{aligned} x&=a(t-\sin t),\\ y&=a(1-\cos t),\end{aligned}\right\} 0\leqslant t\leqslant 2\pi, \qquad (3)$$

հանդիսանում են ցիկլոիդի պարամետրական հավասարումները։ t-ն 0-ից մինչև 2π փոփոխվելիս M կետը կգծի ցիկլոիդի մեկ կամարը։

Վերջին հավասարումներից արտաքսենք t պարամետրը և ստանանք x-ի անմեջական կախումը y-ից։ $0\leqslant t\leqslant\pi$ հատվածում $y=a(1-\cos t)$ ֆունկցիան ունի հակադարձը՝

$$t=\arccos\frac{a-y}{a},$$

t-ի արտահայտությունը տեղադրելով (3) հավասարումներից առաջինի մեջ, ստանում ենք՝

$$x=a\arccos\frac{a-y}{a}-a\sin\left(\arccos\frac{a-y}{a}\right)$$

կամ

$$x=a\arccos\frac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2},\ \text{երբ}\ 0\leqslant x\leqslant\pi a.$$

Նկ. 78-ից անմիջապես նկատում ենք, որ երբ $\pi a \leqslant x \leqslant 2\pi a$, ապա

$$x = 2\pi a - \left(a \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}\right),$$

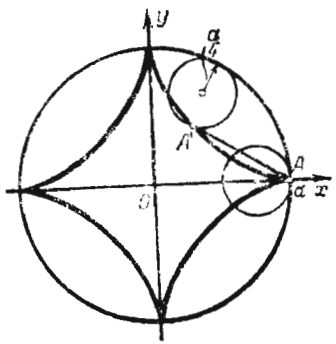
Նկատենք, որ

$$x = a(t - \sin t)$$

ֆունկցիան ունի հակադարձը, բայց այն չի արտահայտվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով։ Դրա համար էլ $y = f(x)$ ֆունկցիան չի արտահայտվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով։

Դիտողություն 1։ Ցիկլոիդի օրինակի վրա հեշտ է համոզվել, որ որոշ դեպքում ֆունկցիաների և կորերի ուսումնասիրության համար պարամետրական հավասարումները ավելի հարմար են, քան y-ի՝ x-ից կամ x-ի՝ y-ից ունեցած անմիջական կախումը։

Աստրոիդ։ Աստրոիդ կոչվում է այն կորը, որը տրվում է հետևյալ պարամետրական հավասարումներով՝



Նկ. 79

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t, \end{aligned}\right\} 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \qquad (4)$$

Երկու հավասարումների բոլոր անդամները բարձրացնելով $\frac{2}{3}$ աստիճան և գումարելով, կստանանք x-ի և y-ի միջև եղած կախումը՝

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(\cos^2 t + \sin^2 t),$$

կամ

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \qquad (5)$$

Աստրոիդ (տես § 12, գլ. V) ցույց կտրվի, որ այդ կորն ունի նկ. 79-ում ցույց տրված ձևը։ Այդ կորը կարելի է ստանալ որպես $\frac{a}{4}$ շառավիղ ունեցող շրջանագծի որևէ կետի հետագիծ, երբ այդ շրջանագիծն առանց սահելու գլորվում է a շառավղով մի այլ շրջանագծի վրայով (ընդ որում փոքր շրջանագիծը միշտ մնում է մեծի ներսը, տես նկ. 79)։

Դիտողություն 2։ Նշենք, որ (4) և (5) հավասարումները որոշում են ոչ մեկ $y = f(x)$ ֆունկցիա։ Նրանք որոշում են երկու անընդհատ ֆունկցիաներ $-a \leqslant x \leqslant a$ հատվածում։ Նրանցից մեկն ընդունում է ոչ բացասական արժեքներ, իսկ մյուսը՝ ոչ դրական արժեքներ։

§ 18. Պարամետրական տեսքով տրված ֆունկցիայի ածանցյալը

Դիցուք x-ի y ֆունկցիան տրված է պարամետրական հավասարումներով՝

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} t_0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (1)$$

Ենթադրենք, թե այդ ֆունկցիաները ունեն ածանցյալներ և որ $x = \varphi(t)$ ֆունկցիան ունի հակադարձը՝ $t = \Phi(x)$, որը նույնպես ունի ածանցյալ։ Այդ դեպքում պարամետրական հավասարումներով որոշվող $y = f(x)$ ֆունկցիան կարելի է դիտել որպես բարդ ֆունկցիա՝

$$y = \psi(t), \qquad t = \Phi(x),$$

որտեղ t-ն միջանկյալ արգումենտ է։

Բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնի համաձայն կստանանք՝

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'_t(t)\Phi'_x(x). \qquad (2)$$

Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցման մասին թեորեմի հիման վրա հետևում է՝

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Վերջին արտահայտությունը տեղադրելով (2) հավասարության մեջ, ստանում ենք.

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

կամ

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (XXI)$$

Արտածված բանաձևը հնարավորություն է տալիս գտնել պարամետրական տեսքով տրված ֆունկցիայի y'_x ածանցյալը, առանց գտնելու y-ի՝ x-ից ունեցած անմիջական կախման արտահայտությունը։

Օրինակ 1։ x-ի y ֆունկցիան տրված է հետևյալ պարամետրական հավասարումներով՝

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= a\sin t, \end{aligned}\right\} (0 < t < \pi).$$

Գտնել $\frac{dy}{dx}$ ածանցյալը. 1) t-ի ցանկացած արժեքի համար, 2) $t = \frac{\pi}{4}$ արժեքի համար։

Լուծում։

$$1)\ y'_x = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

$$2)\ (y'_x)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1.$$

Օրինակ 2. Գտնել

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

ցիկլոիդի կամայական կետում շոշափողի անկյունային գործակիցը $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$։

Լուծում. Շոշափողի անկյունային գործակիցը յուրաքանչյուր կետում հավասար է այդ կետում y'_x ածանցյալի արժեքին, այսինքն՝

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

Բայց

$$x'_t = a(1 - \cos t), \qquad y'_t = a \sin t.$$

Հետևաբար,

$$y'_x = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

Հետևաբար, ցիկլոիդի յուրաքանչյուր կետում շոշափողի անկյունային գործակիցը հավասար է $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$, որտեղ t-ն պարամետրի՝ այդ կետին համապատասխանող արժեքն է։ Բայց դա նշանակում է, որ x առանցքի նկատմամբ շոշափողի թեքության անկյունը հավասար է $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ ($-\pi$-ի և π-ի միջև գտնվող t-ի արժեքների համար)*։

§ 19. Հիպերբոլական ֆունկցիաներ

Մաթեմատիկական անալիզի շատ կիրառություններում հանդիպում են ցուցչային ֆունկցիաների $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ *և* $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ *տեսքի կոմբինացիաները։ Այս կոմբինացիաները դիտարկվում են որպես նոր ֆունկցիաներ և նշանակում են այսպես՝*

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \qquad (1)$$

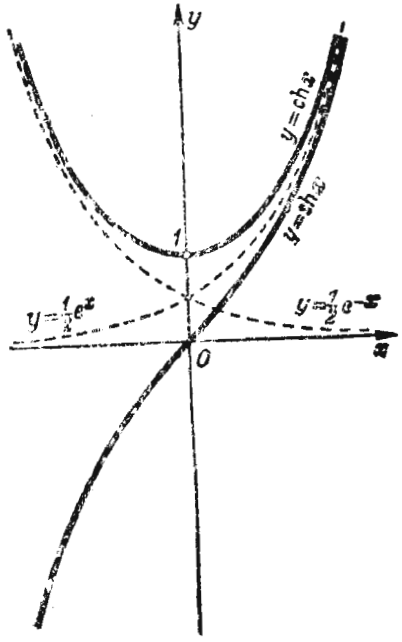
(1) ֆունկցիաներից առաջինը անվանում են հիպերբոլական սինուս, երկրորդը՝ հիպերբոլական կոսինուս։ Այդ ֆունկցիաների օգնությամբ կարելի է սահմանել ևս երկու ֆունկցիաներ

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \text{ և } \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x};$$

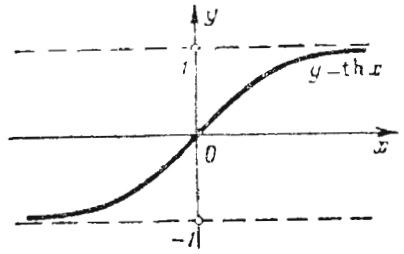
$$\left.\begin{aligned} \operatorname{th} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ հիպերբոլական տանգենս,} \\ \operatorname{cth} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ հիպերբոլական կոտանգենս։} \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

shx, chx, thx *ֆունկցիաները, ակնհայտ է, որոշված են* x-ի *բոլոր արժեքների համար։* cthx *ֆունկցիան էլ որոշված է ամենուրեք, բացի* $x = 0$ *կետից։ Հիպերբոլական ֆունկցիաների գրաֆիկները ներկայացված են* 80, 81 *և* 82 *գծագրերի վրա։*

shx *և* chx *ֆունկցիաների սահմանումներից* [(1) *բանաձևեր*] *հետևում են համապատասխան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջև եղած առնչություններին համանման առնչություններ՝*



Նկ. 80



Նկ. 81

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \qquad (2)$$
$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \qquad (3)$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b. \qquad (3')$$

---

* *Իրոք, անկյունային գործակիցը հավասար է* Ox *առանցքի նկատմամբ շոշափողի* α *թեքության անկյան տանգենսին։ Ուստի*

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$$

և $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$, *t-ի այն արժեքների համար, որոնց դեպքում* $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$ *-ը ընկած է 0-ի և* π*-ի միջև։*

Իրոք,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x =$$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1:$$

Այնուհետև, նկատելով, որ

$$\operatorname{ch}(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2},$$

ստանում ենք՝

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b):$$

Համանման ձևով ցույց է տրվում նաև (3′) առնչության իրավացիությունը: «Հիպերբոլական ֆունկցիաներ» անվանումը բացատրվում է նրանով, որ sh t և ch t ֆունկցիաները

$$x^2 - y^2 = 1$$

հիպերբոլը պարամետրական տեսքով ներկայացնելու համար խաղում են նույն դերը, ինչպիսին sin t և cos t եռանկյունաչափական ֆունկցիաները՝

$$x^2 + y^2 = 1$$

շրջանագիծը պարամետրական տեսքով ներկայացնելու համար:

Իրոք,

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

հավասարումներից արտաքսելով t պարամետրը, ստանում ենք՝

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

կամ

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ (շրջանագծի հավասարումը):}$$

Համանմանորեն հետևյալ հավասարումները՝

$$x = \operatorname{ch} t,$$
$$y = \operatorname{sh} t$$

հանդիսանում են հիպերբոլի պարամետրական հավասարումները:

Իրոք, այդ հավասարումները տեղադրելով քառակուսի բարձրացնելով և հանելով առաջինից երկրորդը, ստանում ենք.

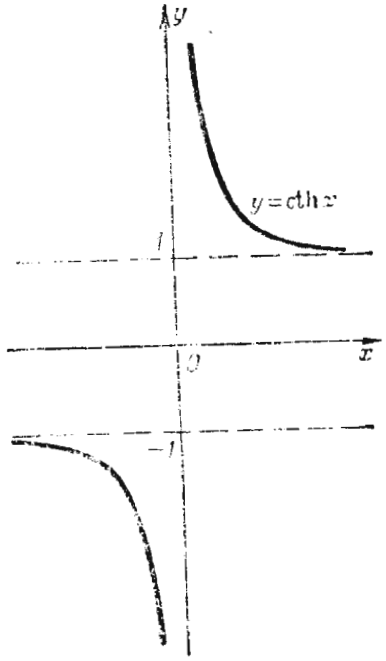
$$x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t,$$

Քանի որ աջ մասի արտահայտությունը (2) բանաձևի հիման վրա հավասար է 1-ի, ապա

$$x^2 - y^2 = 1,$$

իսկ սա էլ հենց հիպերբոլի հավասարումն է:

Դիտարկենք $x^2 + y^2 = 1$ հավասարում ունեցող շրջանագիծը (նկ. 83): $x = \cos t$, $y = \sin t$ հավասարումների մեջ t պարամետրը թվապես հավասար է AOM կենտրոնական անկյանը կամ AOM սեկտորի S մակերեսի կրկնապատիկին, քանի որ $t = 2S$:



Նկ. 83

Առանց ապացույցի նշենք, որ հիպերբոլի՝

$$x = \operatorname{ch} t,$$
$$y = \operatorname{sh} t$$

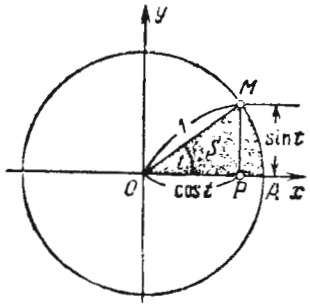
պարամետրական հավասարումների մեջ t պարամետրը նույնպես թվապես հավասար է AOM «հիպերբոլական սեկտորի» (նկ. 84) մակերեսի կրկնապատիկին:

Հիպերբոլական ֆունկցիաների ածանցյալները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

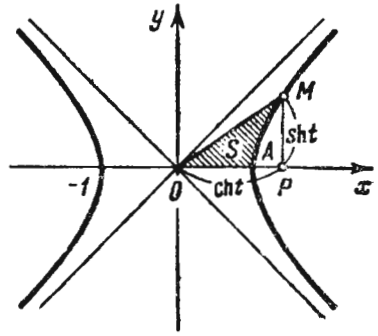
$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x, & (\operatorname{th} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \\ (\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x, & (\operatorname{cth} x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXII)}$$

որոնք բխում են հենց հիպերբոլական ֆունկցիաների սահմանումներից.

Օրինակ, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ֆունկցիայի համար ունենք՝



Նկ. 83



Նկ. 84

$$(\mathrm{sh}x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x;$$

§ 20. Դիֆերենցիալ

Դիցուք $y=f(x)$ *ֆունկցիան* $[a, b]$ *հատվածում դիֆերենցելի է։* $[a, b]$ *հատվածի որևէ* x *կետում այդ ֆունկցիայի ածանցյալը որոշվում է*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

հավասարությամբ։ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *հարաբերությունը, երբ* $\Delta x\to 0$, *ձգտում է որոշակի* $f'(x)$ *թվի և, հետևաբար,* $f'(x)$ *ածանցյալից տարբերվում է անվերջ փոքր մեծությամբ՝*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,$$

որտեղ $\alpha\to 0$, *երբ* $\Delta x\to 0$։

Վերջին հավասարության բոլոր անդամները բազմապատկելով Δx*-ով, կստանանք՝*

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x; \qquad (1)$$

Քանի որ ընդհանուր դեպքում $f'(x)\neq 0$, *ապա հաստատուն* x*-ի և փոփոխական* $\Delta x\to 0$ *դեպքում* $f'(x)\Delta x$*-ը* Δx*-ի նկատմամբ առաջին կարգի անվերջ փոքր է։* $\alpha\Delta x$ *արտադրյալն էլ* Δx*-ի նկատմամբ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություն է, քանի որ*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0;$$

Այսպիսով, ֆունկցիայի Δy *աճը կազմված է երկու գումարելիներից, որոնցից առաջին գումարելին (երբ* $f'(x)\neq 0$*) այսպես կոչված աճի գլխավոր մասն է, որը գծային է* Δx*-ի նկատմամբ։* $f'(x)\Delta x$ *արտադրյալն անվանում են ֆունկցիայի դիֆերենցիալ և նշանակում են* dy*-ով կամ* $df(x)$*-ով։*

Այսպիսով, եթե $y=f(x)$ *ֆունկցիան* y *կետում ունի* $f'(x)$ *ածանցյալ, ապա* $f'(x)$ *ածանցյալի և արգումենտի* Δx *աճի արտադրյալը կոչվում է ֆունկցիայի դիֆերենցիալ և նշանակում է* dy *սիմվոլով՝*

$$dy=f'(x)\Delta x; \qquad (2)$$

Դիտենք $y=x$ *ֆունկցիայի դիֆերենցիալը. այս դեպքում*

$$y'=(x)'=1,$$

և, հետևաբար, $dy=dx=\Delta x$ *կամ* $dx=\Delta x$։ *Այսպիսով,* x *անկախ փոփոխականի* dx *դիֆերենցիալը համընկնում է իր* Δx *աճի հետ։* $dx=\Delta x$ *հավասարությունը կարելի էր դիտել նաև որպես անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալի սահմանում, և այդ դեպքում քննարկված օրինակը ցույց կտար, որ դա չի հակասում ֆունկցիայի դիֆերենցիալի սահմանմանը։ Ցանկացած դեպքում (2) բանաձևը կարող ենք գրել այսպես՝*

$$dy=f'(x)dx;$$

Բայց այս առնչությունից հետևում է, որ

$$f'(x)=\frac{dy}{dx};$$

Հետևաբար, $f'(x)$ *ածանցյալը կարելի է դիտել որպես ֆունկցիայի դիֆերենցիալի և անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալի հարաբերություն։*

Անդրադառնանք (1) արտահայտությանը, որը, հաշվի առնելով (2)-ը, գրենք այսպես՝

$$\Delta y=dy+\alpha\Delta x; \qquad (3)$$

Այսպիսով, ֆունկցիայի աճը ֆունկցիայի դիֆերենցիալից տարբերվում է մի մեծությամբ, որը Δx*-ի նկատմամբ բարձր կարգի անվերջ փոքր է։ Եթե* $f'(x)\neq 0$, *ապա* $\alpha\Delta x$*-ը բարձր կարգի անվերջ փոքր է և* Δy*-ի նկատմամբ, և*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=1+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sigma\Delta x}{f'(y)\Delta x}=1+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sigma}{f'(x)}=1,$$

Դրա համար էլ մոտավոր հաշվումներում երբեմն օգտվում են

$$\Delta y\approx dy \qquad (4)$$

կամ ծավալուն տեսքով՝

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x \qquad (5)$$

մոտավոր հավասարությունից, որը կրճատում է հաշվումները։

Օրինակ 1։ Գտնել $y=x^2$ *ֆունկցիայի* dy *դիֆերենցիալը և* Δy *տար.*
1) x *և* Δx *կամայական արժեքների դեպքում,*
2) երբ $x=20$, $\Delta x=0{,}1$։
Լուծում։

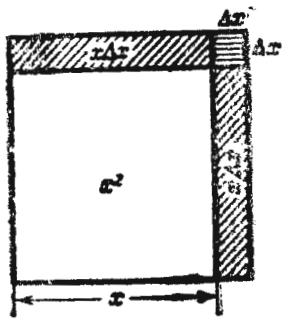
1) $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2,$

$dy=(x^2)'\Delta x=2x\Delta x,$

2) *Եթե* $x=20$, $\Delta x=0{,}1$, *ապա* $\Delta y=2\cdot 20\cdot 0{,}1+(0{,}1)^2=4{,}01,$

$dy=2\cdot 20\cdot 0{,}1=4{,}00.$

Δy-ը dy-ով փոխարինելիս սխալը հավասար է 0,01-ի։ Շատ դեպքերում այն կարելի է համարել փոքր Δy=4,01-ի համեմատությամբ և անտեսել։



Նկ. 85

Քննարկված խնդիրը ակնառու կերպով պատկերված է նկ. 85-ում։

Մոտավոր հաշվումներում օգտվում են նաև (5) հավասարությունից ստացվող հետևյալ մոտավոր հավասարությունից՝

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x, \qquad (6)$$

Օրինակ 2։ Ենթադրենք $f(x)=\sin x$, *այդ դեպքում* $f'(x)=\cos x$։ *Տվյալ դեպքում (6) մոտավոր հավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\sin(x+\Delta x)\approx\sin x+\cos x\cdot\Delta x, \qquad (7)$$

Հաշվենք $\sin 46^\circ$*-ի մոտավոր արժեքը։ Ընդունենք* $x=\frac{\pi}{4}$ *(որը համապատասխանում է 45 անկյանը),* $\Delta x=\frac{\pi}{180}$ *(համապատասխանում է 1° անկյանը),* $x+\Delta x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}$։ *Տեղադրելով (7)-ի մեջ, կունենանք՝*

$$\sin 46^\circ=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)\approx\sin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{4}$$

կամ

$$\sin 46^\circ\approx\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=0{,}7071+0{,}7071\cdot 0{,}0175=0{,}7194.$$

Օրինակ 3։ Եթե (7) բանաձևում ընդունենք $x=0$, $\Delta x=\alpha$, *ապա կստանանք հետևյալ մոտավոր հավասարությունը՝*

$$\sin\alpha\approx\alpha,$$

Օրինակ 4։ Եթե $f(x)=\operatorname{tg}x$, *ապա ըստ (6) բանաձևի կստանանք հետևյալ մոտավոր հավասարությունը՝*

$$\operatorname{tg}(x+\Delta x)\approx\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos^2 x}\Delta x,$$

երբ $x=0$, $\Delta x=\alpha$ *ստանում ենք*

$$\operatorname{tg}\alpha\approx\alpha.$$

Օրինակ 5։ Եթե $f(x)=\sqrt{x}$, *ապա ըստ (6) բանաձևի*

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

Ընդունելով $x=1$, $\Delta x=\alpha$ *ստանում ենք հետևյալ մոտավոր հավասարությունը՝*

$$\sqrt{1+\alpha}\approx 1+\frac{1}{2}\alpha.$$

Ֆունկցիայի դիֆերենցիալը գտնելու խնդիրը հավասարազոր է ածանցյալը գտնելուն, քանի որ վերջինս բազմապատկելով արգումենտի դիֆերենցիալով, կստանանք ֆունկցիայի դիֆերենցիալը։ Հետևաբար, ածանցյալներին վերաբերող թեորեմների և բանաձևերի մեծ մասը պահպանում է իր ուժը նաև դիֆերենցիալների համար։ Այսպես, օրինակ.

u և v երկու դիֆերենցելի ֆունկցիաների գումարի դիֆերենցիալը հավասար է այդ ֆունկցիաների դիֆերենցիալների գումարին՝

$$d(u+v)=du+dv:$$

u և v երկու դիֆերենցելի ֆունկցիաների արտադրյալի դիֆերենցիալը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$d(uv)=udv+vdu,$$

Ապացուցենք, օրինակ, վերջին բանաձևը։ Եթե $y=uv$, *ապա*

$$dy=y'dx=(uv'+vu')dx=uv'dx+vu'dx,$$

բայց

$$v'dx=dv,\ u'dx=du,$$

ուստի

$$dy=udv+vdu,$$

Համանմանորեն ապացուցվում են և մյուս բանաձևերը, օրինակ, քանորդի դիֆերենցիալը որոշող բանաձևը՝

$$\text{եթե}\quad y=\frac{u}{v},\quad \text{ապա}\quad dy=\frac{vdu-udv}{v^2}:$$

Լուծենք մի քանի օրինակներ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը հաշվելու վերաբերյալ:

Օրինակ 6: $y=tg^2x,\ dy=2tgx\frac{1}{\cos^2x}dx:$

Օրինակ 7: $y=\sqrt{1+\ln x},\ dy=\frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\frac{1}{x}dx:$

Գտնենք բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի համար արտահայտություն: Դիցուք

$$y=f(u),\quad u=\varphi(x),\ \text{կամ}\ y=f[\varphi(x)]:$$

Այդ դեպքում ըստ բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնի՝

$$\frac{dy}{dx}=f'_u(u)\varphi'(x),$$

հետևաբար,

$$dy=f'_u(u)\varphi'(x)dx,$$

բայց $\varphi(x)dx=du$, ուստի

$$dy=f'(u)du:$$

Այսպիսով, բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալն ունի նույն տեսքը, ինչ կունենար այն դեպքում, եթե u միջանկյալ արգումենտը լիներ անկախ փոփոխական: Այլ կերպ ասած, դիֆերենցիալի տեսքը կախված չի այն բանից՝ ֆունկցիայի արգումենտը հանդիսանում է անկախ փոփոխական, թե ուրիշ արգումենտի ֆունկցիա: Դիֆերենցիալի այս կարևոր հատկությունը, որ կոչվում է դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտություն, լայնորեն կօգտագործվի հետագայում:

Օրինակ 8: Տրված է $y=\sin\sqrt{x}$ ֆունկցիան: Գտնել dy-ը:

Լուծում: Տրված ֆունկցիան ներկայացնելով որպես բարդ ֆունկցիա՝

$$y=\sin u,\quad u=\sqrt{x},$$

գտնում ենք՝

$$dy=\cos u\frac{1}{2\sqrt{x}}dx,$$

բայց $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du$, ուստի կարելի է գրել՝

$$dy=\cos u du\ \text{կամ}\ dy=\cos\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}):$$

§ 21. Դիֆերենցիալի երկրաչափական նշանակությունը

Դիտարկենք

$$y=f(x)$$

ֆունկցիան և նրան համապատասխանող կորը (նկ. 86):

$y=f(x)$ կորի վրա վերցնենք $M(x, y)$ կամայական կետը, տանենք այդ կետում կորին շոշափող և նշանակենք α-ով այն անկյունը*, որը կազմում է շոշափողը Ox առանցքի դրական ուղղության հետ: Անկախ փոփոխականին տանք Δx աճ. այդ դեպքում ֆունկցիան կստանա $\Delta y=NM_1$ աճը: $y=f(x)$ կորի վրա $x+\Delta x$ և $y+\Delta y$ արժեքներին կհամապատասխանի $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ կետը:

MNT եռանկյունուց գտնում ենք՝

$$NT=MNtg\alpha,$$

քանի որ

$$tg\alpha=f'(x),\quad MN=\Delta x,$$

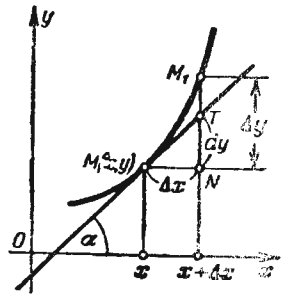
ապա

$$NT=f'(x)\Delta x,$$

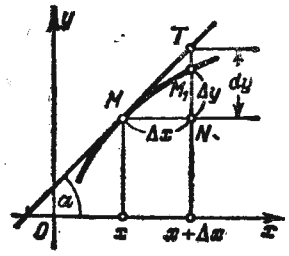
բայց դիֆերենցիալի սահմանման համաձայն $f'(x)\Delta x=dy$: Այսպիսով,

$$NT=dy:$$

Վերջին հավասարությունը նշանակում է, որ $f(x)$ ֆունկցիայի՝ x և Δx արժեքներին համապատասխանող դիֆերենցիալը հավասար է տրված կետում $y=f(x)$ կորի շոշափողի օրդինատի աճին:



Նկ. 86



Նկ. 87

---

* Ենթադրելով, որ $f(x)$ ֆունկցիան x կետում ունի վերջավոր ածանցյալ, ստանում ենք $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$:

Նկ. 86-ից անմիջապես հետևում է, որ $M_1T=\Delta y-dy$: Ըստ նախկինում ապացուցածի $\frac{M_1T}{NT}\to 0$, երբ $\Delta x\to 0$:

Չպետք է կարծել, թե միշտ Δy-ը մեծ է dy-ից: Այսպես, նկ. 87-ում $\Delta y=M_1N$, $dy=NT$, ընդ որում $\Delta y<dy$:

§ 22. Տարբեր կարգի ածանցյալներ

Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է որևէ $[a, b]$ հատվածում: Ընդհանրապես ասած, $f'(x)$ ածանցյալի արժեքները կախված են x-ից, այսինքն՝ $f'(x)$ ածանցյալը նույնպես իրենից ներկայացնում է x-ի ֆունկցիա: Ածանցելով այդ ֆունկցիան, մենք կստանանք այսպես կոչված ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալը:

Առաջին ածանցյալի ածանցյալը կոչվում է սկզբնական ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ կամ երկրորդ ածանցյալ և նշանակվում է y'' կամ $f''(x)$ սիմվոլով.

$$y''=(y')'=f''(x):$$

Այսպես, օրինակ, եթե $y=x^5$, ապա

$$y'=5x^4,\ y''=(5x^4)'=20x^3:$$

Երկրորդ ածանցյալի ածանցյալը կոչվում է երրորդ կարգի ածանցյալ կամ երրորդ ածանցյալ և նշանակվում է y''' կամ $f'''(x)$:

Ընդհանրապես, $f(x)$ ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալ կոչվում է $(n-1)$-րդ կարգի ածանցյալի ածանցյալը (առաջին կարգի) և նշանակվում է $y^{(n)}$ կամ $f^{(n)}(x)$ սիմվոլով՝

$$y^{(n)}=\{y^{(n-1)}\}'=f^{(n)}(x):$$

(Ածանցյալի կարգը առնվում է փակագծերի մեջ այն բանի համար, որ այն չդրվի աստիճանի ցուցչի տեղ):

Չորրորդ, հինգերորդ և բարձր կարգի ածանցյալները նշանակվում են նաև հռոմեական թվանշանների օգնությամբ՝ y^{IV}, y^{V}, y^{VI},...: Այսպիսի դեպքում ածանցյալի կարգը կարելի է գրել առանց փակագծերի: Օրինակ, եթե $y=x^5$, ապա

$$y'=5x^4,\ y''=20x^3,\ y'''=60x^2,\ y^{IV}=y^{(4)}=120x,\ y^{V}=y^{(5)}=120,$$

$$y^{(6)}=y^{(7)}=\ .\ .\ .=0:$$

Օրինակ 1: Տրված է $y=e^{kx}$ ($k=\text{const}$) ֆունկցիան: Գտնել նրա ցանկացած n-րդ կարգի ածանցյալի արտահայտությունը:

Լուծում: $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$,...,$y^{(n)}=k^ne^{kx}$,

Օրինակ 2: $y=\sin x$: Գտնել $y^{(n)}$-ը:

Լուծում:

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{IV}=\sin x=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right),$$

. . . . . .

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),$$

Համանման ձևով արտածվում են բանաձևեր և մի քանի ուրիշ տարրական ֆունկցիաների ցանկացած կարգի ածանցյալների համար: Ընթերցողն ինքը կարող է գտնել բանաձևեր՝ $y=x^k$, $y=\cos x$, $y=\ln x$ ֆունկցիաների n-րդ կարգի ածանցյալների համար:

Ցանկացած կարգի ածանցյալների դեպքի վրա հեշտությամբ ընդհանրացվում են § 7-ի 2 և 3 թեորեմներում մատնանշված կանոնները:

Տվյալ դեպքում տեղի ունեն

$$(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)},\quad (Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$$

ակնհայտ բանաձևերը:

Արտածենք բանաձև (այսպես կոչված Լայբնիցի բանաձևը), որը հնարավորություն է տալիս հաշվել երկու ֆունկցիաների $u(x)v(x)$ արտադրյալի n-րդ կարգի ածանցյալը: Այդ բանաձևն արտածելու համար նախ գտնենք մի քանի ածանցյալներ, իսկ այնուհետև սահմանենք ընդհանուր օրենք, որը պիտանի է ցանկացած ածանցյալը հաշվելու համար.

$$y=uv,$$
$$y'=u'v+uv',$$
$$y''=u''v+u'v'+u'v'=uv''+u''v+2u'v'+uv'',$$

$$y'''=u'''v+u''v'+2u''v'+2u'v''+u'v''+uv'''=$$
$$=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''',$$
$$y^{IV}=u^{IV}v+4u'''v'+6u''v''+4u'v'''+uv^{IV}.$$

Ածանցյալներ կազմելու օրենքը պահպանվում է ցանկացած կարգի ածանցյալների համար, որը կայանում է հետևյալում։

Պետք է $(u+v)^n$ արտահայտությունը վերածել Նյուտոնի երկանդամի բանաձևով և ստացված վերլուծության մեջ u-ի և v-ի աստիճանացույցերը փոխարինել ածանցյալի կարգի ցուցիչներով, ընդ որում վերլուծության ծայրանդամների մեջ պարունակվող զրո աստիճանները ($n^0=v^0$) անհրաժեշտ է փոխարինել ավելի ֆունկցիաներով (այսինքն «զրո կարգի ածանցյալներով»).

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\cdots uv^{(n)}.$$

Սա էլ հենց Լայբնիցի բանաձևն է։

Այս բանաձևի խիստ ապացույցը կարելի է կատարել լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով (այսինքն՝ ապացուցել, որ n-րդ կարգի համար այդ բանաձևի իրավացի լինելուց հետևում է (n+1)-րդ կարգի համար նրա իրավացի լինելը)։

Օրինակ 3։ $y=e^{ax}x^2$։ *Գտնել* $y^{(n)}$-ը։

Լուծում։

$$u=e^{ax},\qquad v=x^2,$$
$$u'=ae^{ax},\qquad v'=2x,$$
$$u''=a^2e^{ax},\qquad v''=2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u^{(n)}=a^ne^{ax},\quad v'''=v^{IV}=\cdots=0,$$
$$y^{(n)}=a^ne^{ax}x^2+na^{n-1}e^{ax}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}e^{ax}\cdot 2,$$

կամ

$$y^{(n)}=e^{ax}[a^nx^2+2na^{n-1}x+n(n-1)a^{n-2}].$$

§ 23. Տարբեր կարգի դիֆերենցիալներ

Դիցուք ունենք $y=f(x)$ *ֆունկցիան, որտեղ* x-ը *անկախ փոփոխական է։ Այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը՝*

$$dy=f'(x)dx$$

x-ի որոշ ֆունկցիա է, սակայն x-ից կարող է կախված լինել միայն

$f'(x)$ *առաջին արտադրիչը, իսկ երկրորդ արտադրիչը* (dx) *հանդիսանում է* x *անկախ փոփոխականի աճը և անկախ է այդ փոփոխականի արժեքից։ Քանի որ* dy-ը x-ի *ֆունկցիա է, ապա մենք իրավունք ունենք խոսելու այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի մասին։*

Ֆունկցիայի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը կոչվում է այդ ֆունկցիայի երկրորդ դիֆերենցիալ կամ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ և նշանակվում է d^2y-*ով՝*

$$d(dy)=d^2y.$$

Գտնենք երկրորդ դիֆերենցիալի արտահայտությունը։ Դիֆերենցիալի ընդհանուր սահմանման համաձայն ունենք՝

$$d^2y=[f'(x)dx]'dx.$$

Քանի որ dx-ը *կախված չէ* x-*ից, ապա ածանցելիս* dx-ը *դուրս է բերվում ածանցյալի նշանից, և մենք սանում ենք՝*

$$d^2y=f''(x)(dx)^2.$$

Ընդունված է, դիֆերենցիալի աստիճանը գրելիս, փակագծերը բաց թողնել. այսպես, օրինակ, $(dx)^2$-*ու փոխարեն գրել* dx^2, *դրա տակ հասկանալով* dx *արտահայտության քառակուսին,* $(dx)^3$-*ի փոխարեն գրում են* dx^3 *և այլն։*

Ֆունկցիայի երրորդ դիֆերենցիալ կամ երրորդ կարգի դիֆերենցիալ կոչվում է նրա երկրորդ դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը՝

$$d^ny=d(d^2y)=[f''(x)dx^2]'dx=f'''(x)dx^3.$$

Ընդհանրապես, n-*րդ կարգի դիֆերենցիալ կոչվում է* (n—1)-*րդ կարգի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը՝*

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=[f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}]'dx,$$
$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (1)$$

Օգտվելով տարբեր կարգի դիֆերենցիալներից, ցանկացած կարգի ածանցյալը կարելի է ներկայացնել որպես համապատասխան կարգի դիֆերենցիալների հարաբերություն.

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\quad f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\quad f^{(n)}_{(x)}=\frac{d^ny}{dx^n}. \qquad (2)$$

Դիտողություն։ (1) և (2) հավասարությունները ($n>1$ *դեպքում) ճշմարիտ են միայն այն դեպքի համար, երբ* x-*ը հանդիսանում է անկախ փոփոխական։ Իրոք, դիցուք ունենք հետևյալ բարդ ֆունկցիան՝*

$$y=F(u), \quad u=\varphi(x) \tag{3}$$

Մենք տեսանք, որ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալն ունի ինվարիանտ տեսք, անկախ այն բանից u-ն անկախ փոփոխական կլինի, թե x-ի ֆունկցիա.

$$dy=F'_u(u)du; \tag{4}$$

Երկրորդ դիֆերենցիալը և հաջորդ դիֆերենցիալները այդ հատկությամբ օժտված չեն։

Իրոք, (3)-ի և (4)-ի համաձայն ստանում ենք՝

$$d^2y=d(F'_u(u)du);$$

Բայց այստեղ $du=\varphi'(x)dx$ կախված է x-ից, ուստի ստանում ենք՝

$$d^2y=d(F'_u(u))du+F'_u(u)d(du)$$

կամ

$$d^2y=F''_{uu}(u)(du)^2+F'_u(u)d^2u, \text{ որտեղ } d^2u=\varphi''(x)(dx)^2; \tag{5}$$

Համանման ձևով գտնվում են d^3y-ը և այլն։

Օրինակ 1. Գտնել $y=\sin u$, $u=\sqrt{x}$ բարդ ֆունկցիայի dy-ը և d^2y-ը։

Լուծում.

$$dy=\cos u\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\cos u du;$$

Այնուհետև, (5) բանաձևի համաձայն ստանում ենք,

$$d^2y=-\sin u(du)^2+\cos u d^2u=-\sin u(du)^2+\cos u\cdot u''(dx)^2=$$

$$=-\sin u\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2(dx)^2+\cos u\left(-\frac{1}{4x^{3/2}}\right)(dx)^2;$$

§ 24. Անբացահայտ ֆունկցիաների և պարամետրական տեսքով տրված ֆունկցիաների տարբեր կարգի ածանցյալները

1. Օրինակի վրա ցույց տանք անբացահայտ ֆունկցիաների տարբեր կարգի ածանցյալներ գտնելու եղանակը։

Դիցուք x-ի y անբացահայտ ֆունկցիան որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0; \tag{1}$$

Այս հավասարության բոլոր անդամներն ածանցենք ըստ x-ի հիշելով, որ y-ը x-ի ֆունկցիա է.

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

այստեղից գտնում ենք՝

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}; \tag{2}$$

Վերջին հավասարությունը նորից ածանցենք ըստ x-ի (հաշվի առնելով, որ y-ը x-ի ֆունկցիա է)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2};$$

Այստեղ $\frac{dy}{dx}$ ածանցյալի փոխարեն տեղադրենք նրա արտահայտությունը (2) հավասարությունից, կստանանք՝

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y+x\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}}{y^2},$$

կամ պարզեցնելուց հետո

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3};$$

(1) հավասարումից հետևում է, որ

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

ուստի երկրորդ ածանցյալը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3};$$

Վերջին հավասարությունն ածանցելով ըստ x-ի, կգտնենք $\frac{d^3y}{dx^3}$-ը և այլն։

2. Այժմ քննարկենք պարամետրական տեսքով տրված ֆունկցիաների բարձր կարգի ածանցյալները գտնելու խնդիրը։

Դիցուք x-ի y ֆունկցիան տրված է

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\}\ t_0\leqslant t\leqslant T, \qquad (3)$$

պարամետրական հավասարումներով, ընդ որում $x=\varphi(t)$ ֆունկցիան $[t_0, T]$ հատվածում ունի հակադարձ ֆունկցիա՝ $t=\Phi(x)$։

§ 18-ում ապացուցվեց, որ այդ դեպքում $\frac{dy}{dx}$ ածանցյալը որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ՝

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \qquad (4)$$

Երկրորդ ածանցյալը գտնելու համար (4) հավասարությունն ածանցենք ըստ x-ի, նկատի ունենալով, որ t-ն x-ի ֆունկցիա է.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}, \qquad (5)$$

բայց

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)-\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}};$$

Վերջին արտահայտությունները տեղադրելով (5) բանաձևի մեջ, կստանանք՝

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3};$$

Վերջին բանաձևին կարելի է տալ հետևյալ, ավելի կոմպակտ տեսքը

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3};$$

Համանման ձևով կարելի է գտնել $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ ածանցյալները և այլն։

Օրինակ։ x-ի y ֆունկցիան տրված է պարամետրական տեսքով՝

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t.$$

Գտնել $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ածանցյալները։

Լուծում։

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t;\ \frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t;\ \frac{dy}{dt}=b\cos t;\ \frac{d^2y}{dt^2}=-b\sin t;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-a\sin t)(-b\sin t)-(b\cos t)(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3}=-\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3 t}.$$

§ 25. Երկրորդ ածանցյալի մեխանիկական նշանակությունը

Դիցուք համընթաց շարժվող մարմնի անցած s ճանապարհը, կախված t ժամանակից, արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$s=f(t). \qquad (1)$$

Ինչպես արդեն հայտնի է (տես գլ. III, § 1) տրված պահին մարմնի արագությունը հավասար է ճանապարհի ածանցյալին՝ ըստ ժամանակի՝

$$v=\frac{ds}{dt}. \qquad (2)$$

Դիցուք որևէ t պահին մարմնի արագությունը հավասար էր v-ի։ Եթե շարժումը հավասարաչափ չէ, ապա t պահից հետո անցած Δt ժամանակամիջոցում արագությունը կփոխվի և կստանա Δv աճ։

Δt ժամանակում միջին արագացում կոչվում է արագության Δv աճի և ժամանակի աճի հարաբերությունը՝

$$a_{միջ}=\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Արագացումը ավյալ պահին կոչվում է արագության աճի և ժամանակի աճի հարաբերության սահմանը, երբ ժամանակի աճը ձգտում է զրոյի՝

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

այլ կերպ ասած, արագացումը (ավյալ պահին) հավասար է արագության ածանցյալին՝ ըստ ժամանակի

$$a=\frac{dv}{dt},$$

Բայց քանի որ $v=\frac{ds}{dt}$, ապա

$$a=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d^2s}{dt^2},$$

այսինքն՝ ուղղագիծ շարժման արագացումը հավասար է ճանապարհի երկրորդ ածանցյալին՝ ըստ ժամանակի: Ելնելով (1) հավասարությունից, ստանում ենք՝

$$a=f''(t).$$

Օրինակ. Գտնել ազատ ընկնող մարմնի v արագությունը և a արագացումը, եթե s ճանապարհի կախումը t ժամանակից տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0, \qquad (3)$$

որտեղ $g=9{,}8\frac{\text{մ}}{\text{վրկ}^2}$ երկրի ձգողականության արագացումն է, իսկ $s_0=s_{t=0}$ s-ի արժեքն է, երբ $t=0$:

Լուծում. Ածանցելով գտնում ենք՝

$$v=\frac{ds}{dt}=gt+v_0, \qquad (4)$$

այս բանաձևից հետևում է, որ $v_0=(v)_{t=0}$.

Ածանցելով մի անգամ ևս, գտնում ենք՝

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=g.$$

Նկատենք, որ հակադարձը՝ եթե որևէ շարժման արագացում հաստատուն է և հավասար է g-ի, ապա արագությունը արտահայտվում է (4) հավասարությամբ, իսկ ճանապարհը՝ (3) հավասարությամբ, պայմանով, որ $(v)_{t=0}=V_0$ և $(s)_{t=0}=s_0$

§ 26. Շոշափողի և նորմալի հավասարումները: Ենթաշոշափողի և ենթանորմալի երկարությունները

Դիտարկենք $y=f(x)$ հավասարումն ունեցող կորը: Այդ կորի վրա վերցնենք $M(x_1, y_1)$ կետը (նկ. 88) և գրենք M կետում տվյալ կորի շոշափողի հավասարումը, ենթադրելով, որ այդ շոշափողը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին:

k անկյունային գործակիցն ունեցող և M կետով անցնող ուղղի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

Շոշափողի համար (տես § 3)

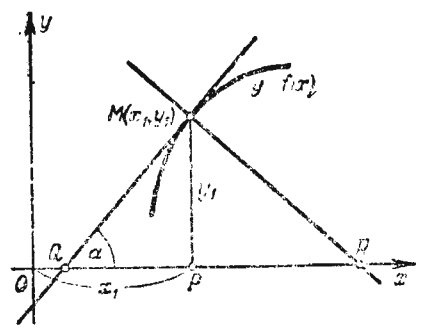
$$k=f'(x_1),$$

ուստի շոշափողի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

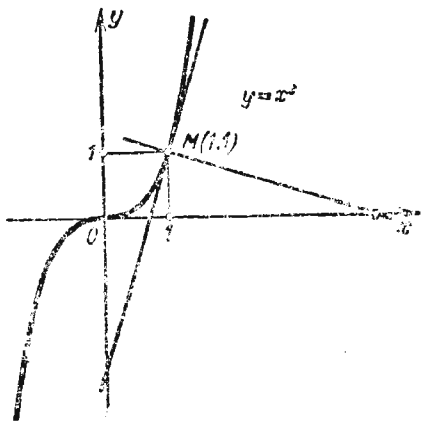
$$y-y_1=f'(x_1)(x-x_1).$$

Տված կետում կորի շոշափողի հետ միասին շատ հաճախ հարկ է լինում դիտարկել նորմալը:

Սահմանում: Տրված կետում կորի նորմալ կոչվում է այն ուղիղը, որն անցնում է տրված կետով և ուղղահայաց է այդ կետում կորի շոշափողին:



Նկ. 88



Նկ. 89

Նորմալի սահմանումից հետևում է, որ նրա k_n անկյունային գործակիցը շոշափողի k_t անկյունային գործակցի հետ կապված է

$$k_n=-\frac{1}{k_t}$$

հավասարությամբ, այսինքն՝

$$k_n=-\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Հետևաբար, $y=f(x)$ կորի $M(x_1, y_1)$ կետում նորմալի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y-y_1=-\frac{1}{f'(x_1)}(x-x_1).$$

Օրինակ 1. Գտնել $y=x^3$ կորի $M(1, 1)$ կետում շոշափողի և նորմալի հավասարումները։

Լուծում. Քանի որ $y'=3x^2$, ապա շոշափողի անկյունային գործակիցը հավասար է $(y')_{x=1}=3$։

Հետևաբար, շոշափողի հավասարումը կլինի՝

$$y-1=3(x-1) \text{ կամ } y=3x-2.$$

Նորմալի հավասարումը կլինի՝

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-1),$$

կամ

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

(տես նկ. 89)։

Շոշափողի՝ շոշափման կետի և Ox առանցքի միջև ընկած QM հատվածի T երկարությունը կոչվում է շոշափողի երկարություն։ Այդ հատվածի պրոյեկցիան Ox առանցքի վրա, այսինքն՝ QP հատվածը, կոչվում է ենթաշոշափող. ենթաշոշափողի երկարությունը նշանակվում է S_T-ով։ MR հատվածի N երկարությունը կոչվում է նորմալի երկարություն, իսկ Ox առանցքի վրա RM հատվածի RP պրոյեկցիան կոչվում է ենթանորմալ. ենթանորմալի երկարությունը նշանակում է T_N-ով։

$y=f(x)$ կորի և $M(x_1, y_1)$ կետի համար գտնենք T, S_T, N, S_N մեծությունները։

Նկ. 88-ից երևում է, որ

$$QP=|y_1 \operatorname{ctg}\alpha|=\left|\frac{y_1}{\operatorname{tg}\alpha}\right|=\left|\frac{y_1}{y_1'}\right|,$$

ուստի

$$S_T=\left|\frac{y_1}{y_1'}\right|,$$

$$T=\sqrt{y_1^2+\frac{y_1^2}{y_1'^2}}=\left|\frac{y_1}{y_1'}\sqrt{y_1'^2+1}\right|.$$

Այնուհետև, այդ նույն նկարից պարզ է, որ

$$PR=|y_1 \operatorname{tg}\alpha|=|y_1 y_1'|,$$

ուստի

$$S_N=|y_1 y_1'|,$$
$$N=\sqrt{y_1+(y_1 y_1')^2}=|y_1\sqrt{1+y_1'^2}|.$$

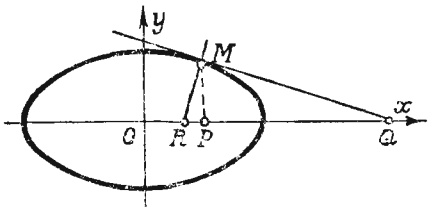
Այս բանաձևերը ստացվեցին այն ենթադրությամբ, որ $y_1>0$, $y_1'>0$։

Բայց նրանք պահպանվում են նաև ընդհանուր դեպքում։

Օրինակ 2. Գտնել

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t \qquad (1)$$

էլիպսի շոշափողի և նորմալի հավասարումները, շոշափողի և ենթաշոշափողի երկարությունները, նորմալի և ենթանորմալի երկարությունները $M(x_1\ y_1)$ կետում, որի համար $t=\frac{\pi}{4}$ (նկ. 90)։



Նկ. 90

Լուծում. (1) հավասարումներից գտնում ենք՝

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t; \quad \frac{dy}{dt}=b\cos t; \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}.$$

Գտնենք M շոշափման կետի կոորդինատները.

$$x_1=(x)_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_1=(y)_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Շոշափողի հավասարումն է՝

$$y-\frac{b}{\sqrt{2}}=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right), \text{ կամ } bx+ay-ab\sqrt{2}=0.$$

Նորմալի հավասարումն է՝

$$y-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right), \text{ կամ } (ax-by)\sqrt{2}-a^2+b^2=0.$$

Ենթաշոշափողի և ենթանորմալի երկարությունները կլինեն՝

$$S_T=\left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\right|=\frac{a}{\sqrt{2}}; \quad S_N=\left|\frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b}{a}\right)\right|=\frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Շոշափողի և նորմալի երկարությունները կլինեն՝

$$T=\left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2+1}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2};$$

$$N=\left|\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\left(-\frac{b}{a}\right)^2}\right|=\frac{b}{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}.$$

§ 27. Շառավիղ վեկտորի՝ ըստ բևեռային անկյան ածանցյալի երկրաչափական նշանակությունը

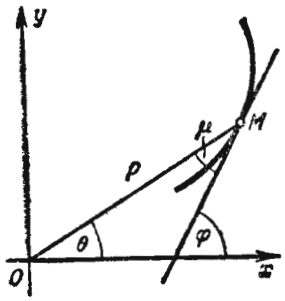
Ենթադրենք կորի հավասարումը տրված է բևեռային կոորդինատներով՝

$$\rho=f(\theta) \qquad (1)$$

Գրենք բևեռային կոորդինատներից դեկարտյանին անցնելու բանաձևերը.

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

ρ-ի փոխարեն (1) բանաձևերից այստեղ տեղադրելով նրա արտահայտությունը θ-ով, կունենանք՝



Նկ. 91

$$x=f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\sin\theta. \qquad (2)$$

(2) հավասարումները տվյալ կորի պարամետրական հավասարումներն են, ընդ որում պարամետր է հանդիսանում θ բևեռային անկյունը (նկ. 91).

Եթե φ-ով նշանակենք կորի որևէ M(ρ, θ) կետում շոշափողի և աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության կազմած անկյունը, ապա կունենանք՝

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}},\ \text{կամ}\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta}{\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta}. \qquad (3)$$

Նշանակենք μ-ով շառավիղ վեկտորի ուղղության և շոշափողի կազմած անկյունը: Ակնհայտ է, որ $\mu=\varphi-\theta$,

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta}.$$

Այստեղ tgφ-ի փոխարեն տեղադրելով նրա (3) արտահայտությունը և կատարելով ձևափոխություններ, կստանանք՝

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)\cos\theta-(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)\sin\theta}{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)\cos\theta+(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)\sin\theta}=\frac{\rho}{\rho'},$$

կամ

$$\rho'_\theta=\rho\operatorname{ctg}\mu. \qquad (4)$$

Այսպիսով, շառավիղ վեկտորի ածանցյալն ըստ բևեռային անկյան հավասար է շառավիղ վեկտորի երկարությանը, բազմապատկած տվյալ կետում շառավիղ վեկտորի և շոշափողի կազմած անկյան կոտանգենսով:

Օրինակ. Ցույց տալ, որ $\rho=e^{a\theta}$ լոգարիթմական սպիրալի շոշափողը շառավիղ վեկտորի հետ հաստատուն անկյան տակ:

Լուծում. Սպիրալի հավասարումից գտնում ենք. $\rho'=ae^{a\theta}$. Այնուհետև, (4) բանաձևի հիման վրա ստանում ենք՝

$$\operatorname{ctg}\mu=\frac{\rho'}{\rho}=a,\ \text{այսինքն՝}\quad \mu=\operatorname{arcctg}a=\text{const}.$$

Վարժություններ III գլխի վերաբերյալ

Գտնել ֆունկցիաների ածանցյալները, օգտվելով անմիջապես ածանցյալի սահմանումից:

1. $y=x^3$. Պատ. $3x^2$. 2. $y=\frac{1}{x}$. Պատ. $-\frac{1}{x^2}$. 3. $y=\sqrt{x}$. Պատ. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
4. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Պատ. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. 5. $y=\sin^2x$. Պատ. $2\sin x\cos x$. 6. $y=2x^2-x$. Պատ. $4x-1$.

Որոշել կորերի շոշափողների թեքման անկյունների տանգենսները.

7. $y=x^3$, ա) երբ $x=1$. Պատ. 3. բ) երբ $x=-1$. Պատ. 3. Կատարել գծագիրը.
8. $y=\frac{1}{x}$, ա) երբ $x=\frac{1}{2}$. Պատ. -4. բ) երբ $x=1$. Պատ. -1. Կատարել գծագիրը. 9. $y=\sqrt{x}$, երբ $x=2$. Պատ. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Գտնել ֆունկցիաների ածանցյալները.

10. $y=x^4+3x^2-6$. Ответ. $y'=4x^3+6x$. 11. $y=6x^3-x^2$. Ответ. $y'=18x^2-2x$.

12. $y=\frac{x^5}{a+b}-\frac{x^2}{a-b}-x$. Ответ. $y'=\frac{5x^4}{a+b}-\frac{2x}{a-b}-1$. 13. $y=\frac{x^3-x^2+1}{5}$.

Ответ. $y'=\frac{3x^2-2x}{5}$. 14. $y=2ax^3-\frac{x^2}{b}+c$. Ответ. $y'+6ax^2-\frac{2x}{b}$.

15. $y=6x^{7/2}+4x^{5/2}+2x$. Ответ. $y'=21x^{5/2}+10x^{3/2}+2$. 16. $y=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}$.

Ответ. $y'=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^2}$. 17. $y=\frac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$. Ответ. $y'=\frac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^{5/2}}$.

18. $y=\frac{x}{m}+\frac{m}{x}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{n^2}{x^2}$. Ответ. $y'=\frac{1}{m}-\frac{m}{x^2}+\frac{2x}{n^2}-\frac{2n^2}{x^3}$. 19. $y=\sqrt[3]{x^2}-$

$-2\sqrt{x}+5$. Ответ. $y'=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$. 20. $y=\frac{ax^2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{b}{x\sqrt{x}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$.

Ответ. $y'=\frac{5}{3}ax^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}bx^{-\frac{5}{2}}+\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}$. 21. $y=(1+4x^3)(1+2x^2)$. Ответ.

$y'=4x(1+3x+10x^3)$. 22. $y=x(2x-1)(3x+2)$. Ответ. $y'=2(9x^2+x-1)$.

23. $y=(2x-1)(x^2-6x-3)$. Ответ. $y'=6x^2-26x+12$. 24. $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$.

Ответ. $y'=\frac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$. 25. $y=\frac{a-x}{a+x}$. Ответ. $y'=-\frac{2a}{(a+x)^2}$. 26. $f(t)=$

$=\frac{t^3}{1+t^2}$. Ответ. $f'(t)=\frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$. 27. $f(s)=\frac{(s+4)^2}{s+3}$. Ответ. $f'(s)=$

$=\frac{(s-2)(s+4)}{(s+3)^2}$. 28. $y=\frac{x^3+1}{x^2-x-2}$. Ответ. $y'=\frac{x^4-2x^3-6x^2-2x+1}{(x^2-x-2)^2}$.

29. $y=x\frac{x^p}{x^m-a^m}$. Ответ. $y'=\frac{x^{p-1}[(p-m)x^m-pa^m]}{(x^m-a^m)^2}$. 30. $y=(2x^2-3)^2$.

Ответ. $y'=8x(2x^2-3)$. 31. $y=(x^2+a^2)^5$. Ответ. $y=10x(x^2+a^2)^4$.

32. $y=\sqrt{x^2+a^2}$. Ответ. $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 33. $y=(a+x)\sqrt{a-x}$. Ответ. $y'=$

$=\frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$. 34. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Ответ. $y'=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

35. $y=\frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$. Ответ. $y'=\frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 36. $y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$.

Ответ. $y'=\frac{2x+1}{\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$. 37. $y=(1+\sqrt[3]{x})^3$. Ответ. $y'=\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.

38. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. Ответ. $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\times$

$\times\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$. 39. $y=\sin^2 x$. Ответ. $y'=\sin 2x$.

40. $y=2\sin x+\cos 3x$. Ответ. $y'=2\cos x-3\sin 3x$. 41. $y=\mathrm{tg}(ax+b)$.

Ответ. $y'=\frac{a}{\cos^2(ax+b)}$. 42. $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$. Ответ. $y'=\frac{1}{1+\cos x}$.

43. $y=\sin 2x\cos 3x$. Ответ. $y'=2\cos 2x\cos 3x-3\sin 2x\sin 3x$. 44. $y=\mathrm{ctg}^2 5x$.

Ответ. $y'=-10\,\mathrm{ctg}\,5x\times\mathrm{cosec}^2 5x$. 45. $y=t\sin t+\cos t$. Ответ. $y'=t\cos t$.

46. $y=\sin^3 t\cos t$. Ответ. $y'=\sin^2 t(3\cos^2 t-\sin^2 t)$. 47. $y=a\sqrt{\cos 2x}$.

Ответ. $y'=-\frac{a\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$. 48. $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$. Ответ. $r'_\varphi=a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$.

49. $y=\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}{x}$. Ответ. $y'=-\frac{2(x\cos x+\sin x)}{x^2\sin^2 x}$. 50. $y=a\sin^4\frac{x}{2}$.

Ответ. $y'=2a\sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. 51. $y=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x$. Ответ. $y'=\mathrm{tg}\,x\sec^2 x$.

52. $y=\ln\cos x$. Ответ. $y'=-\mathrm{tg}\,x$. 53. $y=\ln\mathrm{tg}\,x$. Ответ. $y'=2/\sin 2x$. 54. $y=\ln\sin^2 x$.

Ответ. $y'=2\mathrm{ctg}\,x$. 55. $y=\frac{\mathrm{tg}\,x-1}{\sec x}$. Ответ. $y'=\sin x+\cos x$. 56. $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

Ответ. $y'=\frac{1}{\cos x}$. 57. $y=\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. Ответ. $y'=\frac{1}{\cos x}$.

58. $y=\sin(x+a)\cos(x+a)$. Ответ. $y'=\cos 2(x+a)$. 59. $f(x)=\sin(\ln x)$.

Ответ. $f'(x)=\frac{\cos(\ln x)}{x}$. 60. $f(x)=\mathrm{tg}(\ln x)$. Ответ. $f'(x)=\frac{\sec^2(\ln x)}{x}$.

61. $f(x)=\sin(\cos x)$. Ответ. $f'(x)=-\sin x\cos(\cos x)$. 62. $r=\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\varphi-\mathrm{tg}\varphi+\varphi$.

Ответ. $\frac{dr}{d\varphi}=\mathrm{tg}^4\varphi$. 63. $f(x)=(x\,\mathrm{ctg}\,x)^2$. Ответ. $f'(x)=2x\,\mathrm{ctg}\,x(\mathrm{ctg}\,x-x\,\mathrm{cosec}^2 x)$.

64. $y=\ln(ax+b)$. Ответ. $y'=a/(ax+b)$. 65. $y=\log_a(x^2+1)$.

Ответ. $y'=\frac{2x}{(x^2+1)\ln a}$. 66. $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$. Ответ. $y'=\frac{2}{1-x^2}$.

67. $y=\log_3(x^2-\sin x)$. Ответ. $y'=\frac{2x-\cos x}{(x^2-\sin x)\ln 3}$. 68. $y=\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$.

Ответ. $y'=\frac{4x}{1-x^4}$. 69. $y=\ln(x^2+x)$. Ответ. $y'=\frac{2x+1}{x^2+x}$. 70. $y=$

$=\ln(x^3-2x+5)$. Ответ. $y'=\frac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$. 71. $y=x\ln x$. Ответ. $y'=\ln x+1$.

72. $y=\ln^3 x$. Ответ. $y'=\frac{3\ln^2 x}{x}$. 73. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. Ответ. $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

74. $y=\ln(\ln x)$. Ответ. $y'=\frac{1}{x\ln x}$. 75. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Ответ. $f'(x)=$

$=\frac{1}{1-x^2}$. 76. $f(x)=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Ответ. $f'(x)=-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$.

77. $y=\sqrt{a^2+x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. Ответ. $y'=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. 78. $y=$

$=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$. Ответ. $y'=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$. 79. $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+$

$+\frac{1}{2}\ln\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Ответ. $y'=\frac{1}{\sin^3 x}$. 80. $y=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$. Ответ. $y'=\frac{1+\sin^2 x}{2\cos^3 x}$.

81. $y=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x+\ln\cos x$. Ответ. $y'=\mathrm{tg}^3 x$. 82. $y=e^{ax}$. Ответ. $y'=ae^{ax}$.

83. $y=e^{4x+5}$. Ответ. $y'=4e^{4x+5}$. 84. $y=a^{x^2}$. Ответ. $2xa^{x^2}\ln a$. 85. $y=7^{x^2+2x}$.

Պատ. $y'=2(x+1)7^{x^2+2x}\ln 7$. 86. $y=c^{a^2-x^2}$. Պատ. $y'=-2xc^{a^2-x^2}\ln c$.

87. $y=ac^{\sqrt{x}}$. Պատ. $y'=\frac{a}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$. 88. $r=a^{\theta}$. Պատ. $r'=a^{\theta}\ln a$.

89. $r=a^{\ln\theta}$. Պատ. $\frac{dr}{d\theta}=\frac{a^{\ln\theta}\ln a}{\theta}$. 90. $y=e^x(1-x^2)$.

Պատ. $y'=e^x(1-2x-x^2)$. 91. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. Պատ. $y'=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. 92. $y=$

$=\ln\frac{e^x}{1+e^x}$. Պատ. $y'=\frac{1}{1+e^x}$. 93. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Պատ. $y'=$

$=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$. 94. $y=e^{\sin x}$. Պատ. $y'=e^{\sin x}\cos x$. 95. $y=a^{\operatorname{tg}nx}$. Պատ. $y'=$

$=na^{\operatorname{tg}nx}\sec^2 nx\ln a$. 96. $y=e^{\cos x}\sin x$. Պատ. $y'=e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$.

97. $y=e^x\ln\sin x$. Պատ. $y'=e^x(\operatorname{ctg}x+\ln\sin x)$. 98. $y=x^ne^{\sin x}$.

Պատ. $y'=x^{n-1}e^{\sin x}(n+x\cos x)$. 99. $y=x^x$. Պատ. $y'=x^x(\ln x+1)$.

100. $y=x^{\frac{1}{x}}$. Պատ. $y'=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$. 101. $y=x^{\ln x}$. Պատ. $y'=x^{\ln x-1}\,nx^2$.

102. $y=e^{x^x}$. Պատ. $y'=e^{x^x}(1+\ln x)x^x$. 103. $y=(x|n)^{nx}$.

Պատ. $y'=n\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}\left(1+\ln\frac{x}{n}\right)$. 104. $y=x^{\sin x}$. Պատ. $x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\ln x\cos x\right)$.

105. $y=(\sin x)^x$. Պատ. $(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x)$. 106. $y=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

Պատ. $y'=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}(1+\sec^2 x\ln\sin x)$. 107. $y=\operatorname{tg}\frac{1-e^x}{1+e^x}$. Պատ. $y'=-\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}\times$

$\times\frac{1}{\cos^2\frac{1-e^x}{1+e^x}}$. 108. $y=\sin\sqrt{1-2^x}$. Պատ. $y'=-\frac{\cos\sqrt{1-2^x}}{2\sqrt{1-2^x}}2^x\ln 2$.

109. $y=10^{x\operatorname{tg}x}$. Պատ. $y'=10^{x\operatorname{tg}x}\ln 10\left(\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)$.

Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները, նախօրոք լոգարիթմելով այդ ֆունկցիաները։

110. $y=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$. Պատ. $y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}\right)$.

111. $y=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. Պատ. $y'=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\left(\frac{3}{x+1}+\right.$

$\left.+\frac{3}{4(x-2)}-\frac{2}{5(x-3)}\right)$. 112. $y=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$. Պատ. $y'=$

$=-\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$. 113. $y=\frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}\sqrt[3]{(x-3)^7}}$. Պատ. $y'=$

$=\frac{-161x^2+480x-271}{60\sqrt[5]{(x-1)^3}\sqrt[4]{(x-2)^7}\sqrt[3]{(x-3)^{10}}}$. 114. $y=\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Պատ. $y'=\frac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{3/2}}$. 115. $y=x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$. Պատ. $y'=$

$=5x^4(a+3x)^2(a-2x)(a^2+2ax-12x^2)$. 116. $y=\arcsin\frac{x}{a}$. Պատ. $y'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

117. $y=(\arcsin x)^2$. Պատ. $y'=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 118. $y=\operatorname{arctg}(x^2+1)$.

Պատ. $y'=\frac{2x}{1+(x^2+1)^2}$. 119. $y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$. Պատ. $y'=\frac{2}{1+x^2}$.

120. $y=\arccos(x^2)$. Պատ. $y'=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$. 121. $y=\frac{\arccos x}{x}$.

Պատ. $y'=\frac{-(x+\sqrt{1-x^2}\arccos x)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. 122. $y=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

Պատ. $y'=\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. 123. $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$.

Պատ. $y'=2\sqrt{a^2-x^2}$. 124. $y=\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\frac{x}{a}$. Պատ. $y'=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

125. $u=\operatorname{arctg}\frac{v+a}{1-av}$. Պատ. $\frac{du}{dv}=\frac{1}{1+v^2}$. 126. $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

Պատ. $y'=\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$. 127. $y=x\arcsin x$. Պատ. $y'=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

128. $f(x)=\arccos(\ln x)$. Պատ. $f'(x)=-\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

129. $f(x)=\arcsin\sqrt{\sin x}$. Պատ. $f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$.

130. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ (0\leqslant x<\pi)$. Պատ. $y'=\frac{1}{2}$. 131. $y=e^{\operatorname{arctg}x}$.

Պատ. $y'=\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}$. 132. $y=\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Պատ. $y'=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$.

133. $y=x^{\arcsin x}$. Պատ. $y'=x^{\arcsin x}\left(\frac{\arcsin x}{x}+\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. 134. $y=\arcsin(\sin x)$.

Պատ. $y'=\frac{\cos x}{|\cos x|}=\begin{cases}+1 & \text{I և IV քառորդներում։}\\ -1 & \text{II և III քառորդներում։}\end{cases}$ 135. $y=\operatorname{arctg}\frac{4\sin x}{3+5\cos x}$.

Պատ. $y'=\frac{4}{5+3\cos x}$. 136. $y=\operatorname{arctg}\frac{a}{x}+\ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. Պատ. $y'=\frac{2a^3}{x^4-a^4}$.

137. $y=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. Պատ. $y'=\frac{x^2}{1-x^4}$. 138. $y=\frac{3x^2-1}{3x^3}+$

$+\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg}x$. Պատ. $y'=\frac{x^5+1}{x^6+x^4}$. 139. $y=\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+$

$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Պատ. $y'=\frac{1}{x^3+1}$. 140. $y=\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+$

$+2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. Պատ. $y'=\frac{4\sqrt{2}}{1+x^4}$. 141. $y=\arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

Պատ. $-\frac{2n|x|^n}{x(x^{2n}+1)}$.

Անբացահայտ ֆունկցիաների դիֆերենցումը։

Գտնել $\frac{dy}{dx}$*-ը, եթե.* 142. $y^2=4px$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y}$։ 143. $x^2+y^2=a^2$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$։ 144. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$։ 145. $y^3-3y+2ax=0$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{3(1-y^2)}$։ 146. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$։ 147. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$։ 148. $y^2-2xy+b^2=0$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}$։ 149. $x^3+y^3-3axy=0$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$։ 150. $y=\cos(x+y)$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$։ 151. $\cos(xy)=x$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$։

Գտնել պարամետրական աստիճանով տրված ֆունկցիաների $\frac{dy}{dx}$*-ը։*

152. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$։ 153. $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$։ 154. $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t$։ 155. $x=\frac{3at}{1+t^2}$։ $y=\frac{3at^2}{1+t^2}$։ *Պատ.* $\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{1-t^2}$։ 156. $u=2\ln\operatorname{ctg} s$, $v=\operatorname{tg} s+\operatorname{ctg} s$։ *Ցույց տալ, որ* $\frac{du}{dv}=\operatorname{tg}2s$։

Գտնել կորերի շոշափողների թեքության անկյունների տանգենսները։

157. $x=\cos t$, $y=\sin t$; $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *կետում։ Կատարել գծագիրը։* *Պատ.* $\frac{1}{\sqrt{3}}$։

158. $x=2\cos t$, $y=\sin t$, $x=1$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ *կետում։ Կատարել գծագիրը։* *Պատ.* $\frac{\sqrt{3}}{6}$։

159. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, *երբ* $t=\frac{\pi}{2}$։ *Կատարել գծագիրը։* *Պատ.* 1։

160. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, *երբ* $t=\frac{\pi}{4}$։ *Կատարել գծագիրը։* *Պատ.* -1։

161. *Հորիզոնի նկատմամբ* α *անկյան տակ նետված մարմինը անօդ տարածության մեջ ծանրության ուժի ազդեցության տակ գծել է կոր (պարաբոլ), որի հավասարումն է՝* $x=(v_0\cos\alpha)t$, $y=(v_0\sin\alpha)t-\frac{gt^2}{2}\left(g=9{,}8\ \frac{մ}{վրկ^2}\right)$։ *Իմանալով, որ* $\alpha=60^\circ$, $v_0=50\ \frac{մ}{վրկ}$, *որոշել շարժման ուղղությունը, երբ՝* 1) $t=2$ *վրկ,* 2) $t=7$ *վրկ։ Կատարել գծագիրը։* *Պատ.* 1) $\operatorname{tg}\varphi_1=0{,}948$, $\varphi_1=43^\circ30'$։ 2) $\operatorname{tg}\varphi_2=-1{,}012$, $\varphi_2=+134{,}3^\circ$։

Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների դիֆերենցիալները։

162. $y=(a^2-x^2)^5$։ *Պատ.* $dy=-10x(a^2-x^2)^4dx$։ 163. $y=\sqrt{1+x^2}$։ *Պատ.* $dy=\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$։ 164. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+\operatorname{tg}x$։ *Պատ.* $dy=\sec^4xdx$։ 165. $y=\frac{x\ln x}{1-x}+\ln(1-x)$։ *Պատ.* $dy=\frac{\ln xdx}{(1-x)^2}$։

Հաշվել ֆունկցիաների աճը և դիֆերենցիալը։

166. $y=2x^2-x$ *երբ* $x=1$, $\Delta x=0{,}01$։ *Պատ.* $\Delta y=0{,}0302$, $dy=0{,}03$։ 167. *Տված է* $y=x^3+2x$։ *Գտնել* Δy*-ը և* dy*-ը երբ* $x=-1$, $\Delta x=0{,}02$։ *Պատ.* $\Delta y=0{,}098808$, $dy=0{,}1$։ 168. *Տված է* $y=\sin x$։ *Գտնել* dy*-ը երբ* $x=\frac{\pi}{3}$, $\Delta x=\frac{\pi}{18}$։ *Պատ.* $dy=\frac{\pi}{36}=0{,}0873$։ 169. *Իմանալով, որ* $\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866025$, $\cos60^\circ=\frac{1}{2}$, *գտնել* $\sin60^\circ3'$*-ի և* $\sin60^\circ18'$*-ի մոտավոր արժեքները։ Արդյունքները համեմատել ազդուսակի տվյալների հետ։* *Պատ.* $\sin60^\circ3'\approx0{,}866461$, $\sin60^\circ18'\approx0{,}868643$։ 170. *Գտնել* $\operatorname{tg}45^\circ4'30''$*-ի մոտավոր արժեքը։* *Պատ.* 1,00262։ 171. *Իմանալով, որ* $\log_{10}200=2{,}30103$, *գտնել* $\log_{10}200{,}2$*-ի մոտավոր արժեքը։* *Պատ.* 2,30146։

Տարբեր կարգի ածանցյալներ. 172. $y=3x^3-2x^2+5x-1$։ *Գտնել* y''*-ը։* *Պատ.* $18x-4$։ 173. $y=\sqrt[5]{x^3}$։ *Գտնել* y'''*-ը։* *Պատ.* $\frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}$։ 174. $y=x^6$։ *Գտնել* $y^{(6)}$*-ը։* *Պատ.* $6!$։ 175. $y=\frac{C}{x^n}$։ *Գտնել* y''*-ը։* *Պատ.* $\frac{n(n+1)C}{x^{n+2}}$։ 176. $y=\sqrt{a^2-x^2}$։ *Գտնել* y''*-ը։* *Պատ.* $-\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$։ 177. $y=2\sqrt{x}$։ *Գտնել* $y^{(4)}$*-ը։* *Պատ.* $-\frac{15}{8\sqrt{x^7}}$։ 178. $y=ax^2+bx+c$։ *Գտնել* y'''*-ը։* *Պատ.* 0։ 179. $f(x)=\ln(x+1)$։ *Գտնել* $f^{IV}(x)$*-ը։* *Պատ.* $-\frac{6}{(x+1)^4}$։ 180. $y=\operatorname{tg}x$։ *Գտնել* y'''*-ը։* *Պատ.* $6\sec^4x-4\sec^2x$։ 181. $y=\ln\sin x$։ *Գտնել* y'''*-ը։* *Պատ.* $2\operatorname{ctg} x\operatorname{cosec}^2x$։ 182. $f(x)=\sqrt{\sec2x}$։ *Գտնել* $f''(x)$*-ը։* *Պատ.* $f''(x)=3[f(x)]^5-f(x)$։ 183. $y=\frac{x^3}{1-x}$։ *Գտնել* $f^{IV}(x)$*-ը։* *Պատ.* $\frac{4!}{(1-x)^5}$։ 184. $p=(q^3+a^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{q}{a}$։ *Գտնել* $\frac{d^3p}{dq^3}$*-ը։* *Պատ.* $\frac{4a^3}{(a^2+q^2)^2}$։ 185. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$։ *Գտնել* $\frac{d^2y}{dx^2}$*-ն։* *Պատ.* $\frac{y}{a^2}$։ 186. $y=\cos ax$։ *Գտնել* $y^{(n)}$*-ը։* *Պատ.* $a^n\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$։ 187. $y=a^x$։ *Գտնել* $y^{(n)}$*-ը։* *Պատ.* $(\ln a)^na^x$։ 188. $y=$

$=\ln(1+x)$։ Գտնել $y^{(n)}$-ը։ Պատ. $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$։ 189. $y=\frac{1-x}{1+x}$։ Գտնել $y^{(n)}$-ը։ Պատ. $2(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$։ 190. $y=e^x x$։ Գտնել $y^{(n)}$-ը։ Պատ. $e^x(x+n)$։ 191. $y=x^{n-1}\ln x$։ Գտնել $y^{(n)}$-ը։ Պատ. $\frac{(n-1)!}{x}$։ 192. $y=\sin^2 x$։ Գտնել $y^{(n)}$-ը։ Պատ. $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$։ 193. $y=x\sin x$։ Գտնել $y^{(n)}$-ը։ Պատ. $x\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-n\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$։

194. Եթե $y=e^x\sin x$, ապա ցույց տալ, որ $y''-2y'+2y=0$։ 195. $y^2=4ax$։ Գտնել $\frac{d^2y}{dx^2}$-ն։ Պատ. $=\frac{4a^2}{y^3}$։ 196. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$։ Գտնել $\frac{d^2y}{dx^2}$-ն և $\frac{d^3y}{dx^3}$-ը։ Պատ. $-\frac{b^4}{a^2y^3}$; $\frac{3b^6x}{a^4y^5}$։ 197. $x^2+y^2=r^2$։ Գտնել $\frac{d^2y}{dx^2}$-ն։ Պատ. $-\frac{r^2}{y^3}$։

198. $y^2-2xy=0$։ Գտնել $\frac{d^3y}{dx^3}$-ը։ Պատ. 0։ 199. $\rho=\operatorname{tg}(\varphi+\rho)$։ Գտնել $\frac{d^3\rho}{d\varphi^3}$-ը։ Պատ. $-\frac{2(5+8\rho^2+3\rho^4)}{\rho^8}$։ 200. $\sec\varphi\cos\rho=C$։ Գտնել $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$-ն Պատ. $\frac{\operatorname{tg}^2\rho-\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^3\rho}$։ 201. $e^x+x=e^y+p$։ Գտնել $\frac{d^2y}{dx^2}$-ն։ Պատ. $\frac{(1-e^{x+y})(e^x-e^y)}{(e^y+1)^3}$։

202. $y^3+x^3-3axy=0$։ Գտնել $\frac{d^2y}{dx^2}$-ն Պատ. $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$։ 203. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$։ Գտնել $\frac{d^2y}{dx^2}$-ն։ Պատ. $-\frac{1}{4a\sin^4 t/2}$։ 204. $x=a\cos 2t$, $y=b\sin^2 t$։ Ցույց տալ, որ $\frac{d^2y}{dx^2}=0$։ 205. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$։ Գտնել $\frac{d^3y}{dx^3}$-ը։ Պատ. $-\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$։ 206. Ցույց տալ, որ $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(\operatorname{sh}x)=\operatorname{sh}x$; $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(\operatorname{sh}x)=\operatorname{ch}x$։

Շոշափողի և նորմալի հավասարումները։ Ենթաշոշափողի և ենթանորմալի երկարությունները

207. Գտնել $y=x^2-3x^2-x+5$ կորի $M(3, 2)$ կետում շոշափողի և նորմալի հավասարումները։ Պատ. Շոշափող՝ $8x-y-22=0$, նորմալ՝ $x+8y-19=0$։

208. Գտնել $x^2+y^2=r^2$ շրջանագծի $M(x_1, y_1)$ կետում շոշափողի և նորմալի հավասարումները, ենթաշոշափողի և ենթանորմալի երկարությունները։ Պատ. Շոշափող՝ $xx_1+yy_1=r^2$; նորմալ՝ $x_1y-y_1x=0$։ $s_T=\left|\frac{y_1^2}{x_1}\right|$, $s_N=|x_1|$։

209. Ցույց տալ, որ $y^2=4px$ պարաբոլի ցանկացած կետում ենթաշոշափողը հագեցած կիսվում է, իսկ ենթանորմալն էլ հաստատուն է և հավասար է 2p-ի։ Կատարել գծագիրը։

210. Գտնել $M(x_1, y_1)$ կետում ա) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսի, բ) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ հիպերբոլի շոշափողների հավասարումները։ Պատ. ա) $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$։ բ) $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$։

211. Գտնել $y=\frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ կորի («խոզոպոպ») շոշափողի և նորմալի հավասարումները այն կետում, որտեղ $x=2a$։ Պատ. Շոշափող՝ $x+2y=4a$, նորմալ՝ $y=2x-3a$։

212. Ցույց տալ, որ $3y=6x-5x^3$ կորի $M\left(1, \frac{1}{3}\right)$ կետում տարած նորմալը անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով։

213. Ցույց տալ, որ $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ կորի $M(a, b)$ կետում տարած շոշափողն է՝ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$։

214. Գտնել $y^2=20x$ պարաբոլի այն շոշափողի հավասարումը, որն Ox առանցքի հետ կազմում է 45° անկյուն։ Պատ. $y=x+5$ [(5, 10) կետում]։

215. Գտնել $x^2+y^2=52$ շրջանագծի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $2x+3y=6$ ուղղին։ Պատ. $2x+3y\pm 26=0$։

216. Գտնել $4x^2-9y^2=36$ հիպերբոլի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք ուղղահայաց են $2y+5x=10$ ուղղին։ Պատ. Այդպիսի շոշափողներ չկան։

217. Ցույց տալ, որ $xy=m$ հիպերբոլի շոշափողի այն հատվածը, որն ընկած է կոորդինատային առանցքների միջև, շոշափման կետում կիսվում է։

218. Ապացուցել, որ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ աստրոիդի շոշափողի այն հատվածը, որն ընկած է կոորդինատային առանցքների միջև, ունի հաստատուն երկարություն։

219. Ինչպիսի՞ α անկյան տակ են հատվում $y=a^x$ և $y=b^x$ կորերը։ Պատ. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\ln a-\ln b}{1+\ln a\ln b}$։

220. Գտնել $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ ցիկլոիդի ենթաշոշափողի, ենթանորմալի, շոշափողի և նորմալի երկարություններն այն կետում, որի համար $\theta=\frac{\pi}{2}$։ Պատ. $S^T=a$, $S^N=a$, $T=a\sqrt{2}$, $N=a\sqrt{2}$։

221. Գտնել S_T, S_N, T և N մեծությունները $x=4a\cos^3 t$, $y=4a\sin^3 t$ աստրոիդի համար։ Պատ. $S_T=|4a\sin^2 t\cos t|$, $S_N=|4a\sin^3 t\operatorname{tg} t|$, $T=4a\sin^2 t$, $N=|4a\sin^2 t\operatorname{tg} t|$։

Տարբեր խնդիրներ

Գտնել ֆունկցիաների ածանցյալները։ 222. $y=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$։ Պատ. $y'=\frac{1}{\cos^4 x}$։ 223. $y=\arcsin\frac{1}{x}$։ Պատ. $y'=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$։

224. $y=\arcsin(\sin x)$։ Պատ. $y'=\frac{\cos x}{|\cos x|}$։ 225. $y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\times\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ $(a>0,\ b>0)$։ Պատ. $y'=\frac{1}{a+b\cos x}$։ 226. $y=|x|$։ Պատ. $y'=\frac{x}{|x|}$։

227. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$։ Պատ. $y'=-\frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

228. Գնդի ծավալի և մակերևույթի համար $v=\frac{4}{3}\pi r^3$ և $s=4\pi r^2$ բանաձևերից հետևում է, որ $\frac{dv}{dr}=S$։ Բացատրել այդ արդյունքի երկրաչափական իմաստը։ Գտնել համանման առնչություն շրջանի մակերեսի և շրջանագծի երկարության միջև։

229. ABC եռանկյան մեջ a կողմը մյուս երկու՝ b և c կողմերի ու նրանց կազմած A անկյան միջոցով արտահայտվում է $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$ բանաձևով։ Հաստատուն b-ի և c-ի դեպքում a կողմը հանդիսանում է A անկյան ֆունկցիա։ Ցույց տալ, որ $\frac{da}{dA}=h_a$, որտեղ h_a-ն եռանկյան a հիմքին համապատասխանող բարձրությունն է։ Այդ արդյունքը պարզաբանել երկրաչափական կշռադատումներով։

230. Օգտվելով դիֆերենցիալի գաղափարից, պարզել $\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2b}$, $\sqrt[3]{a^3+b}\approx a+\frac{b}{3a^2}$ (որտեղ $|b|$-ն a-ի համեմատությամբ փոքր թիվ է) մոտավոր բանաձևերի ծագումը։

231. Ճոճանակի տատանման պարբերությունը՝ $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$։ T պարբերությունը հաշվելիս սխալի վրա ինչ ազդեցություն կունենա՝ 1) ճոճանակի l երկարության, 2) ծանրության ուժի g արագացման չափման ժամանակ թույլ տված 1% սխալը։ Պատ. 1) $\approx\frac{1}{2}\%$, 2) $\approx\frac{1}{2}\%$։

232. Տրակտրիսան օժտված է այն հատկությամբ, որ նրա ցանկացած կետի համար շոշափողի T հատվածը պահպանում է հաստատուն երկարություն։

Ապացուցել այդ, ելնելով

1) տրակտրիսայի

$$x=\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a}{2}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\qquad (a>0)$$

տեսքի հավասարումից,

2) կորի

$$x=a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right),\quad y=a\sin t$$

պարամետրական հավասարումներից։

233. Ապացուցել, որ $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$ ֆունկցիան բավարարում է $y''+3y'+2y=0$ հավասարմանը (որտեղ c_1-ը և c_2-ը հաստատուններ են)։

234. Ընդունելով $y=e^x\sin x$, $z=e^x\cos x$, ապացուցել $y''=2z$, $z''=-2y$ հավասարությունները։

235. Ցույց տալ, որ $y=\sin(\arcsin x)$ ֆունկցիան բավարարում է $(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0$ հավասարմանը։

236. Ապացուցել, որ եթե $(a+bx)e^{\frac{y}{x}}=x$, ապա $x^3\frac{d^2y}{dx^2}=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2$։

ԳԼՈՒԽ IV

ՄԻ ՔԱՆԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

§ 1. Թեորեմ ածանցյալի արմատների մասին (Ռոլլի թեորեմը)

Ռոլլի թեորեմը։ Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում, դիֆերենցելի է այդ հատվածի բոլոր ներքին կետերում և $x=a$ ու $x=b$ ծայրերում դառնում է զրո ($f(a)=f(b)=0$), ապա $[a, b]$ հատվածի ներսում գոյություն ունի առնվազն մեկ $x=c$ կետ $a<c<b$, որտեղ $f'(x)$ ածանցյալը դառնում է զրո, այսինքն՝ $f'(c)=0$*։

Ապացույց։ Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում, ապա այն այդ հատվածում ունի M մեծագույն արժեք և m փոքրագույն արժեք։

Եթե $M=m$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան հաստատուն է, այսինքն x-ի բոլոր արժեքների համար ունի հաստատուն արժեք՝ $f(x)=m$։ Բայց այդ դեպքում հատվածի ցանկացած կետում $f'(x)=0$, և թեորեմն ապացուցված է։

Ենթադրենք, թե $M\neq m$։ Այդ դեպքում այդ թվերից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի։

Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $M>0$ և ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքն ընդունում է $x=c$ կետում, այսինքն՝ $f(c)=M$։ Ըստ որում նկատենք, որ c-ն հավասար չէ ոչ a-ի, ոչ էլ b-ի, քանի որ ըստ պայմանի $f(a)=0$, $f(b)=0$։ Քանի որ $f(c)$-ն ֆունկցիայի մեծագույն արժեքն է, ապա $f(c+\Delta x)-f(c)\leqslant 0$ ինչպես $\Delta x>0$, այնպես էլ $\Delta x<0$ դեպքում։

* c թիվը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի արմատ, եթե $f(c)=0$։

Այստեղից հետևում է, որ

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leqslant 0, \text{ երբ } \Delta x>0, \qquad (1')$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geqslant 0, \text{ երբ } \Delta x<0: \qquad (1'')$$

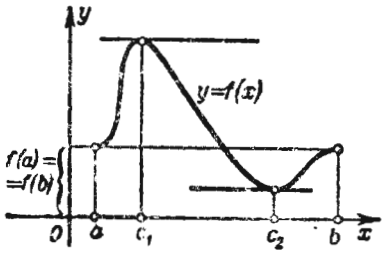
Քանի որ ըստ թեորեմի պայմանի ածանցյալը $x=c$ կետում գոյություն ունի, ապա անցնելով սահմանի, երբ $\Delta x\to 0$, կստանանք.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\leqslant 0, \text{ երբ } \Delta x>0,$$

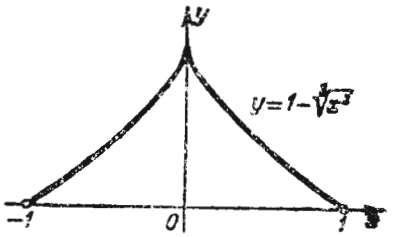
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\geqslant 0, \text{ երբ } \Delta x<0:$$

Բայց $f'(c)\leqslant 0$ և $f'(c)\geqslant 0$ առնչությունները համատեղելի են միայն այն դեպքում, եթե $f'(c)=0$: Հետևաբար, $[a, b]$ հատվածի ներսում գոյություն ունի c կետ, որի համար $f'(c)$ ածանցյալը հավասար է զրոյի:

Ածանցյալի արմատների մասին թեորեմն ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն. եթե յուրաքանչյուր կետում շոշափող ունեցող անընդհատ կորը Ox առանցքը հատում է a և b աբսցիսներ



Նկ. 92

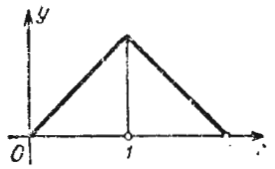


Նկ. 93

ունեցող կետերում, ապա այդ կորի վրա կգտնվի գոնե մեկ c, $a<c<b$ աբսցիս ունեցող կետ, որտեղ շոշափողը զուգահեռ է Ox առանցքին:

Դիտողություն 1: Ապացուցված թեորեմը մնում է իրավացի և այնպիսի դիֆերենցելի ֆունկցիայի համար, որը $[a, b]$ հատվածի ծայրերում զրո չի դառնում, բայց ընդունում է $f(a)=f(b)$ արժեքներ (նկ. 92): Այս դեպքում ապացույցը կատարվում է ճիշտ նույն ձևով:

Դիտողություն 2: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ նրա ածանցյալը գոյություն ունի $[a, b]$ հատվածի ոչ բոլոր ներքին կետերում, ապա թեորեմի պնդումը կարող է լինել ոչ ճիշտ (այսինքն՝ $[a, b]$ հատվածում կարող է չլինել այնպիսի c կետ, որտեղ $f'(x)$-ը դառնա զրո):



Նկ. 94

Այսպես, օրինակ,

$$y=f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$$

ֆունկցիան (նկ. 93) անընդհատ է $[-1,1]$ հատվածում և դառնում է զրո այդ հատվածի ծայրերում, բայց և այնպես ածանցյալը՝

$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

միջակայքի ներսում զրո չի դառնում: Դրա պատճառն այն է, որ միջակայքի ներսում գոյություն ունի $x=0$ կետ, որտեղ ածանցյալը գոյություն չունի (դառնում է անվերջ):

Նկ. 94-ում պատկերված գրաֆիկը մեզ տալիս է ևս մի ֆունկցիայի օրինակ, որի ածանցյալը զրո չի դառնում $[0,2]$ հատվածում:

Այդ ֆունկցիայի համար էլ տեղի չունեն Ռոլլի թեորեմի պայմանները, քանի որ $x=1$ կետում ֆունկցիան ածանցյալ չունի:

§ 2. Թեորեմ վերջավոր աճերի մասին (Լագրանժի թեորեմը)

Լագրանժի թեորեմը: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում և դիֆերենցելի է այդ հատվածի բոլոր ներքին կետերում, ապա $[a, b]$ հատվածի ներսում կգտնվի գոնե մեկ այնպիսի c կետ, $a<c<b$, որ

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a): \qquad (1)$$

Ապացույց: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ թիվը նշանակենք Q տառով, այսինքն՝ ընդունենք

$$Q=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (2)$$

և դիտարկենք

$$F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)Q \qquad (3)$$

հավասարությամբ որոշվող $F(x)$ ֆունկցիան։

Պարզենք $F(x)$ ֆունկցիայի երկրաչափական իմաստը։ Դրա համար նախ գրենք AB լարի (նկ. 95) հավասարումը, հաշվի առնելով, որ նրա անկյունային գործակիցն է՝ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=Q$ և, որ այն անցնում է $(a, f(a))$ կետով.

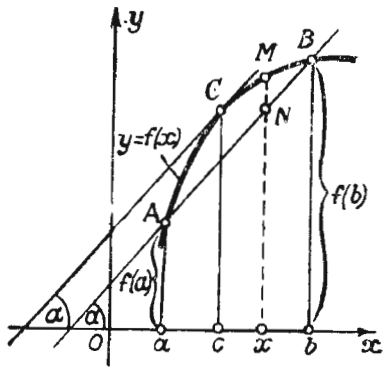
$$y-f(a)=Q(x-a),$$

որտեղից

$$y=f(a)+Q(x-a).$$

Բայց $F(x)=f(x)-[f(a)+Q(x-a)]$։ Հետևաբար, x-ի յուրաքանչյուր արժեքի համար $F(x)$-ը հավասար է $y=f(x)$ կորի և $y=f(a)+Q(x-a)$ լարի միևնույն աբսցիսն ունեցող կետերի օրդինատների տարբերությանը։

Հեշտ է նկատել, որ $F(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում, դիֆերենցելի է այդ հատվածի ներսում և դառնում է զրո հատվածի ծայրերում, այսինքն՝ $F(a)=0$, $F(b)=0$։ Հետևաբար, $F(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառելի է Ռոլլի թեորեմը։ Այդ թեորեմի համաձայն հատվածի ներսում գոյություն ունի այնպիսի $x=c$ կետ, որ



Նկ. 95

$$F'(c)=0.$$

Բայց

$$F'(x)=f'(x)-Q.$$

Նշանակում է

$$F'(c)=f'(c)-Q=0,$$

որտեղից

$$Q=f'(c).$$

Տեղադրելով Q-ի արժեքը (2) հավասարության մեջ, կունենանք.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (1')$$

որտեղից անմիջապես հետևում է (1) բանաձևը։ Այսպիսով, թեորեմն ապացուցված է։

Լագրանժի թեորեմի երկրաչափական իմաստը պարզելու համար դիմենք նկ. 95-ին։ Նկարից անմիջապես պարզ է, որ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ մեծությունն իրենից ներկայացնում է գրաֆիկի a և b աբսցիսներն ունեցող A և B կետերով անցնող լարի α թեքության անկյան տանգենսը։

Մյուս կողմից, $f'(c)$-ն կորի c աբսցիսն ունեցող կետում շոշափողի թեքության անկյան տանգենսն է։ Այսպիսով, (1′) հավասարության կամ նրան համարժեք (1) հավասարության երկրաչափական իմաստը կայանում է հետևյալում. եթե AB աղեղի բոլոր կետերում գոյություն ունի շոշափող, ապա A և B կետերի միջև այդ աղեղի վրա կգտնվի C կետ, որտեղ շոշափողը զուգահեռ է A և B կետերը միացնող լարին։

Այնուհետև, նշենք հետևյալը։ Քանի որ c արժեքը բավարարում է $a<c<b$ պայմանին, ապա $c-a<b-a$, կամ

$$c-a=\theta(b-a),$$

որտեղ θ-ն 0-ի և 1-ի միջև գտնվող որևէ թիվ է, այսինքն՝

$$0<\theta<1.$$

Բայց այդ դեպքում

$$c=a+\theta(b-a)$$

և (1) բանաձևին կարելի է տալ հետևյալ տեսքը.

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'[a+\theta(b-a)], \quad 0<\theta<1. \qquad (1'')$$

§ 3. Թեորեմ երկու ֆունկցիաների աճերի հարաբերության մասին (Կոշիի թեորեմը)

Կոշիի թեորեմը։ Եթե $f(x)$-ը և $\varphi(x)$-ը $[a, b]$ հատվածում անընդհատ և այդ հատվածի ներսում դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են, ընդ որում $\varphi'(x)$-ը հատվածի ներսի ոչ մի կետում զրո չի դառնում, ապա $[a, b]$ հատվածի ներսում կգտնվի այնպիսի $x=c$, $a<c<b$ կետ, որ

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \qquad (1)$$

Ապացույց։ Q թիվը որոշենք հետևյալ հավասարությամբ՝

$$Q=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}; \qquad (2)$$

Նշենք, որ $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$, քանի որ հակառակ դեպքում $\varphi(b)$-ն կհավասարվեր $\varphi(a)$-ի, և այդ դեպքում Ռոլլի թեորեմի համաձայն $\varphi'(x)$-ը զրո կդառնար հատվածի ներսում, որը հակասում է թեորեմի պայմանին։

Կազմենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$F(x)=f(x)-f(a)-Q[\varphi(x)-\varphi(a)]։$$

Ակնհայտ է, որ $F(a)=0$ և $F(b)=0$ (դա հետևում է $F(x)$ ֆունկցիայի և Q թվի սահմանումներից)։ Նկատելով, որ $F(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածում բավարարում է Ռոլլի թեորեմի բոլոր պայմաններին, եզրակացնում ենք, որ a-ի և b-ի միջև գոյություն ունի այնպիսի $x=c$ $(a<c<b)$ արժեք, որ $F'(c)=0$։ Բայց $F'(x)=f'(x)-Q\varphi'(x)$, հետևաբար,

$$F'(c)=f'(c)-Q\varphi'(c)=0,$$

որտեղից

$$Q=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}։$$

Տեղադրելով Q-ի արժեքը (2) հավասարության մեջ, կստանանք (1) հավասարությունը։

Դիտողություն։ Ինչպես կարող է թվալ առաջին հայացքից, Կոշիի թեորեմը չի կարելի ապացուցել՝ կիրառելով Լագրանժի թեորեմը $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ կոտորակի համարիչի և հայտարարի նկատմամբ։ Իրոք, մենք այդ դեպքում (կոտորակը $(b-a)$-ով կրճատելուց հետո) կստանայինք հետևյալ բանաձևը՝

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)}$$

որտեղ $a<c_1<b$, $a<c_2<b$։ Բայց քանի որ, ընդհանրապես ասած, $c_1\neq c_2$, ապա ստացված արդյունքը, ակնհայտ է, դեռևս չի տալիս Կոշիի թեորեմը։

§ 4. Երկու անվերջ փոքր մեծությունների հարաբերության սահմանը («$\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշությունների բացումը»)

Դիցուք $f(x)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաները որևէ $[a, b]$ հատվածում բավարարում են Կոշիի թեորեմի պայմաններին և զրո են դառնում այդ հատվածի $x=a$ կետում, այսինքն $f(a)=0$ և $\varphi(a)=0$։

$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ հարաբերությունը որոշված չէ $x=a$ կետում, բայց ունի լիովին որոշակի իմաստ $x\neq a$ արժեքների դեպքում։ Հետևաբար, կարելի է դնել այդ հարաբերության սահմանի որոնման հարցը, երբ $x\to a$։ Այս տիպի սահմանների հաշվումը սովորաբար կոչվում է «$\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշությունների բացումը»։

Այս բնույթի խնդրի հետ մենք գործ ենք ունեցել նաև առաջ, օրինակ, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ սահմանը քննարկելիս, տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները դտնելիս։ $\frac{\sin x}{x}$ արտահայտությունը $x=0$ դեպքում իմաստ չունի, այսինքն՝ $F(x)=\frac{\sin x}{x}$ ֆունկցիան որոշված չէ, երբ $x=0$, բայց մենք տեսել ենք, որ $\frac{\sin x}{x}$ արտահայտության սահմանը $x\to 0$ դեպքում գոյություն ունի և հավասար է 1-ի։

Թեորեմ (Լոպիտալի կանոնը)։ Դիցուք $f(x)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաները որևէ $[a, b]$ հատվածում բավարարում են Կոշիի թեորեմի պայմաններին և $x=a$ կետում դառնում են զրո, այսինքն՝ $f(a)=\varphi(a)=0$, այդ դեպքում, եթե գոյություն ունի $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ հարաբերության սահմանը, երբ $x\to a$, ապա գոյություն ունի և $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$-ը, ընդ որում

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}։$$

Ապացույց։ $[a, b]$ հատվածում վերցնենք որևէ $x\neq a$ կետ։

կիրառելով Կոշիի բանաձևը, կունենանք.

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

որտեղ ξ-ն ընկած է a-ի և x-ի միջև: Բայց ըստ պայմանի $f(a)=\varphi(a)=0$, նշանակում է

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \qquad (1)$$

Եթե $x\to a$, ապա և $\xi\to a$, քանի որ ξ-ն պարփակված է x-ի և a-ի միջև: Ըստ որում, եթե $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$, ապա $\lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ նույնպես գոյություն ունի և հավասար է A-ի: Այստեղից պարզ է, որ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A,$$

և վերջնականապես

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Դիտողություն 1: Թեորեմը տեղի ունի և այն դեպքում, եթե f(x) կամ φ(x) ֆունկցիաները որոշված չեն x=a կետում սակայն

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=0.$$

Այս դեպքը նախկինում քննարկված դեպքին բերելու համար f(x) և φ(x) ֆունկցիաները նախորոշենք x=a կետում այնպես, որ նրանք այդ կետում դառնան անընդհատ: Դրա համար բավական է ընդունել

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)=0;\quad \varphi(a)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=0,$$

քանի որ, ակնհայտ է, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ հարաբերության սահմանը, երբ $x\to a$, կախված չէ արդյոք այն բանից՝ f(x) և φ(x) ֆունկցիաները որոշված են x=a կետում, թե ոչ:

Դիտողություն 2: Եթե $f'(a)=\varphi'(a)=0$ և f'(x) ու φ'(x) ածանցյալները բավարարում են այն պայմաններին, որոնք մենք

դրել ենք թեորեմում f(x) և φ(x) ֆունկցիաների վրա, ապա, $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ հարաբերության նկատմամբ կիրառելով Լոպիտալի կանոնը, կգանք

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$$

բանաձևին և այլն:

Դիտողություն 3: Եթե $\varphi'(a)=0$, բայց $f'(x)\neq 0$, ապա թեորեմը կիրառելի է $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ հակադարձ հարաբերության նկատմամբ, որը ձգտում է զրոյի, երբ $x\to a$: Հետևաբար, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ հարաբերությունը ձգտում է անվերջության:

Օրինակ 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3}=\frac{5}{3}.$$

Օրինակ 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

Օրինակ 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

Այստեղ հարկ եղավ երեք անգամ կիրառել Լոպիտալի կանոնը, քանի որ առաջին, երկրորդ և երրորդ ածանցյալների հարաբերությունները x=0 դեպքում բերում են $\frac{0}{0}$ անորոշության:

Դիտողություն 4: Լոպիտալի կանոնը կիրառելի է և այն դեպքում, եթե

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0 \quad \text{և} \quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0.$$

Իրոք, ընդունելով $x=\frac{1}{z}$, տեսնում ենք, որ $z\to 0$, երբ $x\to\infty$ և հետևաբար,

$$\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)=0,\quad \lim_{z\to 0}\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=0,$$

Կիրառելով Լոպիտալի կանոնը $\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$ *հարաբերության նկատմամբ, գտնում ենք.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f(1/z)}{\varphi(1/z)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(1/z)\,(-1/z^2)}{\varphi'(1/z)\,(-1/z^2)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(1/z)}{\varphi'(1/z)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել։

Օրինակ 4։

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{k}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{k\cos\frac{k}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}k\cos\frac{k}{x}=k.$$

§ 5. Երկու անվերջ մեծ մեծությունների հարաբերության սահմանը («$\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշությունների բացումը»)

Այնուհետև, քննարկենք $x\to a$ *(կամ* $x\to\infty$*) դեպքում անվերջությունն ձգտող* $f(x)$ *և* $\varphi(x)$ *երկու ֆունկցիաների հարաբերության սահմանի հարցը։*

Թեորեմ։ Դիցուք $f(x)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ և դիֆերենցելի են a կետի շրջակայքի բոլոր $x\neq a$ կետերում, ընդ որում $\varphi'(x)$ ածանցյալը զրո չի դառնում. այնուհետև, դիցուք

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$$

և դիցուք գոյություն ունի

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A \qquad (1)$$

սահմանը։ Այդ դեպքում գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ սահմանը և

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A. \qquad (2)$$

Ապացույց։ a *կետի դիտարկվող շրջակայքում վերցնենք* α *և* x *երկու կետեր այնպես, որ* $\alpha<x<a$ *(կամ* $a<x<\alpha$*)։ Ըստ Կոշիի թեորեմի կունենանք.*

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \qquad (3)$$

որտեղ $\alpha<c<x$։ *(3) հավասարության ձախ մասը ձևափոխենք այսպես.*

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\,\frac{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}} \qquad (4)$$

(3) և (4) առնչություններից ստանում ենք,

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\,\frac{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}},$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\,\frac{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}, \qquad (5)$$

(1) պայմանից հետևում է, որ կամայական փոքր $\varepsilon>0$ *թվի համար կարելի է* α*-ն ընտրել* a*-ին այնքան մոտ, որ բոլոր* $x=c$ *կետերում, որտեղ* $\alpha<c<a$*, տեղի կունենա*

$$\left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}-A\right|<\varepsilon$$

կամ

$$A-\varepsilon<\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}<A+\varepsilon \qquad (6)$$

անհավասարությունը։

Այնուհետև դիտարկենք հետևյալ կոտորակը՝

$$\frac{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}},$$

α-ն պահելով հաստատուն այնպես, որ ապահովվի (6) անհավասարությունը, x-ը կմոտեցնենք a-ին։ Քանի որ $f(x)\to\infty$ և $\varphi(x)\to\infty$, երբ $x\to a$, ապա

$$\lim_{x\to a}\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}=1$$

և, հետևաբար, նախապես ընտրած $\varepsilon<0$ թվի համար a-ին բավականաչափ մոտ x-երի համար կունենանք.

$$\left|\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}-1\right|<\varepsilon,$$

կամ

$$1-\varepsilon<\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}<1+\varepsilon. \qquad (7)$$

Բազմապատկելով (6) և (7) անհավասարությունների համապատասխան անդամները, ստանում ենք.

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\,\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon)$$

կամ (5) հավասարության հիման վրա՝

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f(x)}{\varphi(x)}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

Քանի որ ε-ը կամայական փոքր թիվ է, երբ x-ը բավականաչափ մոտ է a-ին, ապա վերջին անհավասարություններից հետևում է, որ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A,$$

կամ (1)-ի հիման վրա՝

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել։

Դիտողություն 1։ Եթե (1) պայմանում $A=\infty$, այսինքն՝

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\infty,$$

ապա (2) հավասարությունը մնում է ճիշտ և այդ դեպքում։ Իրոք, նախորդ արտահայտությունից հետևում է.

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0.$$

Այդ դեպքում ըստ ապացուցած թեորեմի

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0,$$

որտեղից

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty.$$

Դիտողություն 2։ Ապացուցած թեորեմը հեշտությամբ տարածվում է այն դեպքի վրա, երբ $x\to\infty$։ Եթե

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty \text{ և } \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

գոյություն ունի, ապա

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (8)$$

Ապացույցը կատարվում է $x=\dfrac{1}{z}$ փոխարինման ճանապարհով, ինչպես այդ արվել է $\dfrac{0}{0}$ տեսքի անհավասարությունների դեպքում՝ համանման պայմաններում (տես § 4, դիտողություն 4)։

Օրինակ 1։

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty.$$

Դիտողություն 3։ Մի անգամ էլ նկատենք, որ (2) և (8) բանաձևերը իրավացի են միայն այն դեպքում, եթե աջ կողմի սահմանը (վերջավոր կամ անվերջ) գոյություն ունի։ Կարող է պատահել, որ ձախ մասի սահմանը գոյություն ունի այն ժամանակ, երբ աջ մասի սահմանը գոյություն չունի։ Բերենք օրինակ։ Ենթադրենք պահանջվում է գտնել

$$\lim_{x\to}\frac{x+\sin x}{x}.$$

Այս սահմանը գոյություն ունի և հավասար է 1-ի։ Իրոք,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1:$$

Բայց $\frac{(x+\sin x)'}{(x')}=\frac{1+\cos x}{1}=1+\cos x$ ածանցյալների հարաբերությունը, երբ $x\to\infty$, չի ձգտում որևէ սահմանի, այլ տատանվում է 0-ի և 2-ի միջև:

Օրինակ 2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{cx^2-d}=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{2cx}=\frac{a}{c},$$

Օրինակ 3:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\frac{2\cdot 3\cos 3x\sin 3x}{2\cos x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin 3x}{\sin x}\cdot\frac{(-1)}{1}=3\frac{(-1)}{1}\cdot\frac{(-1)}{1}=3:$$

Օրինակ 4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0:$$

Ընդհանրապես, յանկացած ամբողջ $n>0$ դեպքում

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\cdot\cdot\cdot 1}{e^x}=0:$$

Նախորդ դեպքերին են բերվում անորոշությունների ուրիշ դեպքեր, որոնք սիմվոլիկ ձևով գրվում են այսպես.

ա) $0\cdot\infty$, բ) 0^0, գ) ∞^0, դ) 1^∞, ե) $\infty-\infty$ և որոնց իմաստը կայանում է հետևյալում:

ա) Դիցուք $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$. պահանջվում է գտնել

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)]\text{-ը:}$$

Դա $0\cdot\infty$ տիպի անորոշություն է:

Եթե որոնելի արտահայտությունը արտագրենք

$$\lim_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

կամ

$$\lim_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

տեսքով, ապա, երբ $x\to a$, մենք կստանանք $\frac{0}{0}$ տեսքի կամ $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն:

Օրինակ 5:

$$\lim_{x\to 0}x^n\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n+1}}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{n}=0:$$

բ) Դիցուք

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=0;$$

պահանջվում է գտնել

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$$

կամ, ինչպես ասում են, բացել 0^0 տեսքի անորոշությունը:

Ընդունելով

$$y=[f(x)]^{\varphi(x)}$$

լոգարիթմենք ստացված հավասարության երկու մասերը.

$$\ln y=\varphi(x)\cdot[\ln f(x)]:$$

Երբ $x\to a$ կստանանք (աջից) $0\cdot\infty$ տեսքի անորոշություն: Գտնելով $\lim\limits_{x\to a}\ln y$-ը, հեշտ է ստանալ $\lim\limits_{x\to a}y$-ը: Իրոք, լոգարիթմական ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ $\lim\limits_{x\to a}\ln y=\ln\lim\limits_{x\to a}y$, և եթե $\ln\lim\limits_{x\to a}y=b$, ապա, ակնհայտ է, $\lim\limits_{x\to a}y=e^b$: Եթե մասնավորապես, $b=+\infty$ կամ $-\infty$, ապա, համապատասխանաբար, $\lim y=+\infty$ կամ 0:

Օրինակ 6: Պահանջվում է գտնել $\lim\limits_{x\to 0}x^x$: Ընդունելով $y=x^x$, գտնում ենք.

$$\ln\lim y=\lim\ln y=\lim\ln(x^x)=\lim(x\ln x);$$

$$\lim_{x\to 0}(x\ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}x=0,$$

հետևաբար, $\lim\lim y=0$, որտեղից $\lim y=e^0=1$, այսինքն՝

$$\lim_{x\to 0} x^x=1.$$

Համանման եղանակով սահմանները որոնվում են և մյուս դեպքերում։

§ 6. Թեյլորի բանաձևը

Ենթադրենք, թե $f(x)$ ֆունկցիան $x=a$ կետն ընդգրկող որևէ միջակայքում ունի ներառյալ մինչև $(n+1)$-րդ կարգի ածանցյալներ։ Գտնենք n-ից ոչ բարձր աստիճանի $y=p_n(x)$ այնպիսի բազմանդամ, որի արժեքը $x=a$ կետում հավասար լինի այդ կետում $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքին, իսկ նրա մինչև n-րդ կարգի ածանցյալների արժեքները $x=a$ կետում հավասարվում են այդ կետում $f(x)$ ֆունկցիայի համապատասխան ածանցյալների արժեքներին, այսինքն

$$P_n(a)=f(a),\ P'_n(a)=f'(a),\ P''_n(a)=f''(a),\ \cdots,\ P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a). \qquad (1)$$

Բնական է սպասել, որ այդպիսի բազմանդամը որևէ իմաստով «մոտիկ է» $f(x)$ ֆունկցիային։

Այդ բազմանդամը կորոնենք $(x-a)$-ի աստիճաններով անորոշ գործակիցներով բազմանդամի տեսքով՝

$$P_n(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+C_3(x-a)^3+\cdots+C_n(x-a)^n; \qquad (2)$$

$C_1, C_2, \cdots, C_n$ անորոշ գործակիցները որոշենք այնպես, որ (1) պայմանները բավարարվեն։

Նախապես գտնենք $P_n(x)$-ի ածանցյալները.

$$\left.\begin{aligned} P'_n(x)&=C_1+2C_2(x-a)+3C_3(x-a)^2+\cdots+nC_n(x-a)^{n-1},\\ P''_n(x)&=2C_2+3\cdot 2C_3(x-a)+\cdots+n(n-1)C_n(x-a)^{n-2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ P_n^{(n)}(x)&=\qquad\qquad n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot C_n; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(2) և (3) հավասարությունների ձախ և աջ մասերում x-ի փոխարեն տեղադրելով a արժեքը և (1) հավասարության հիման վրա փոխարինելով $P_n(a)$-ն $f(a)$-ով, $P'_n(a)=f'(a)$ և այլն, ստանում ենք.

$$\begin{aligned} f(a)&=C_0,\\ f'(a)&=C_1,\\ f''(a)&=2\cdot 1C_2,\\ f'''(a)&=3\cdot 2\cdot 1C_3,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ f^{(n)}(a)&=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1C_n, \end{aligned}$$

որտեղից գտնում ենք.

$$\left.\begin{aligned} &C_0=f(a),\quad C_1=f'(a),\quad C_2=\frac{1}{1\cdot 2}f''(a),\\ &C_3=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a),\ \cdots,\ C_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}f^{(n)}(a); \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Գտած $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ արժեքները տեղադրելով (2) բանաձևում, կստանանք որոնելի բազմանդամը.

$$P_n(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}f^{(n)}(a); \qquad (5)$$

$R_n(x)$-ով նշանակենք տրված $f(x)$ ֆունկցիայի և կառուցած $P_n(x)$ բազմանդամի արժեքների տարբերությունը (նկ. 96),

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x),$$

որտեղից

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),$$

կամ ծավալուն տեսքով՝

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x); \qquad (6)$$

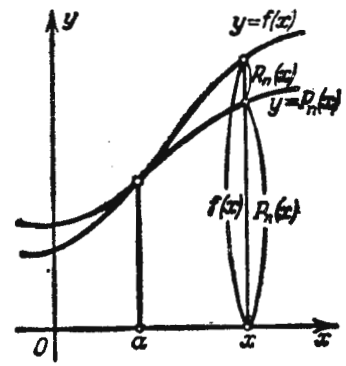
$R_n(x)$-ը կոչվում է մնացորդային անդամ։ x-ի այն արժեքների համար, որոնց դեպքում $R_n(x)$ մնացորդային անդամը փոքր է, $P_n(x)$ բազմանդամը տալիս է $f(x)$ ֆունկցիայի մոտավոր ներկայացումը։

Այսպիսով, (6) բանաձևը հնարավորություն է տալիս $y=f(x)$ ֆունկցիան փոխարինել $y=P_n(x)$ բազմանդամով՝ $R_n(x)$ մնացորդային անդամին հավասար ճշտությամբ։

Մեր հետագա խնդիրն է՝ x-ի տարբեր արժեքների համար գնահատել $R_n(x)$ մեծությունը։

Մնացորդային անդամը գրենք

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x) \qquad (7)$$



Նկ. 96

տեսքով, որտեղ Q(x)-ը որոնվող որևէ ֆունկցիա է, և համապատասխան գրան արտագրենք (6) բանաձևը.

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x); \qquad (6')$$

Ֆիքսած x-ի և a-ի համար Q(x) ֆունկցիան ունի որոշակի արժեք. այն նշանակենք Q-ով:

Այնուհետև քննարկենք t-ից կախված հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)-\cdots$$
$$\cdots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q,$$

(t-ն պարփակված է a-ի և x-ի միջև), որտեղ Q-ն ունի (6′) առընչությամբ որոշվող արժեքը. ըստ որում a-ն և x-ը ընդունում ենք որպես որոշակի թվեր:

Գտնենք F′(t) ածանցյալը.

$$F'(t)=-f'(t)+f'(t)-\frac{x-t}{1}f''(t)+\frac{2(x-t)}{2!}f''(t)-$$
$$-\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)+\cdots-\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)+$$
$$+\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q,$$

կամ կրճատելուց հետո՝

$$F'(t)=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(x-t)^n}{n!}Q; \qquad (8)$$

Եվ այսպես, a (a≤t≤x, երբ a<x և a≥t≥x, երբ a>x) արտցիան ունեցող կետի մոտակայքում գտնվող բոլոր t կետերում F(t) ֆունկցիան ունի ածանցյալ:

Այնուհետև, նկատենք, որ ((6′) բանաձևի հիման վրա)

$$F(x)=0, \quad F(a)=0:$$

Ուստի F(t) ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառելի է Ռոլի թեորեմը, և, հետևաբար, գոյություն ունի a-ի և x-ի միջև պարփակված այնպիսի

ξ=ξ արժեք, որի դեպքում F′(ξ)=0: Այստեղից (8) առնչության հիման վրա ստանում ենք.

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)+\frac{(x-\xi)^n}{n!}Q=0,$$

որտեղից

$$Q=f^{(n+1)}(\xi):$$

Այս արտահայտությունը տեղադրելով (7) բանաձևի մեջ, ստանում ենք.

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi):$$

Սա այսպես կոչված մնացորդային անդամի համար Լագրանժի տեսքն է: Քանի որ ξ-ն գտնվում է x-ի և a-ի միջև, ապա այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով*

$$\xi=a+\theta(x-a),$$

որտեղ θ-ն 0-ի և 1-ի միջև գտնվող թիվ է, այսինքն՝ 0<θ<1. այս դեպքում մնացորդային անդամի բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]:$$

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)) \qquad (9)$$

բանաձևը կոչվում է f(x) ֆունկցիայի համար Թեյլորի բանաձև:

Եթե Թեյլորի բանաձևում ընդունենք a=0, ապա այն կգրվի

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \qquad (10)$$

տեսքով, որտեղ θ-ն ընկած է 0-ի և 1-ի միջև: Թեյլորի բանաձևի այս մասնավոր տեսքը երբեմն անվանում են Մակլորենի բանաձև:

---

* Տես այս գլխի § 2-ի վերջը:

§ 7. e^x, $\sin x$, $\cos x$ ֆունկցիաների վերլուծությունը ըստ Թեյլորի բանաձևի

1. $f(x)=e^x$ ֆունկցիայի վերլուծությունը: Գտնելով $f(x)$ ֆունկցիայի հաջորդական ածանցյալները, կստանանք.

$$f(x)=e^x, \qquad f(0)=1,$$
$$f'(x)=e^x, \qquad f'(0)=1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=e^x, \qquad f^{(n)}(0)=1:$$

Տեղադրելով ստացված արտահայտությունները § 6-ի (10) բանաձևում կունենանք.

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ 0<\theta<1:$$

Եթե $|x|\leqslant 1$, ապա, վերցնելով $n=8$, կստանանք մնացորդային անդամի գնահատականը.

$$R_8<\frac{1}{9!}3<10^{-5}:$$

Երբ $x=1$ կստանանք բանաձև, որը հնարավորություն է տալիս գտնել, e թվի մոտավոր արժեքը.

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{8!};$$

տասնորդական կոտորակներում հաշվումները կատարելով վեց տասնորդական նիշերով*, իսկ այնուհետև արդյունքը կլորացնելով մինչև հինգ տասնորդական նիշ, գտնում ենք

$$e=2{,}71827:$$

Այսպես սխալը չի գերազանցում $\frac{3}{9!}$-կամ 0,00001 թվին:

Նշենք, որ ինչպիսին էլ լինի x-ը՝ մնացորդային անդամը՝

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\to 0, \quad \text{երբ } n\to\infty:$$

---

* Այսպես կլորացման դումարային սխալը հաշվումների ժամանակ կարող է նշանակալիորեն գերազանցել R_8-ին (օրինակ, եթե գումարելիների թիվը հավասար է 10-ի, այդ սխալը կարող է հասնել $5\cdot 10^{-5}$ մեծության):

Իրոք, քանի որ $\theta<1$, ապա $e^{\theta x}$ մեծությունը ֆիքսած x-ի դեպքում սահմանափակ է (այն փոքր է e^x-ից, երբ $x>0$, և փոքր է 1-ից, երբ $x<0$):

Ապացուցենք, որ ինչպիսին էլ լինի x ֆիքսած թիվը,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0, \text{ երբ } n\to\infty:$$

Իրոք,

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\left|\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{x}{n}\cdot\frac{x}{n+1}\right|:$$

Եթե x-ը ֆիքսած թիվ է, ապա կգտնվի այնպիսի N ամբողջ դրական թիվ, որ

$$|x|<N:$$

Նշանակենք $\frac{|x|}{N}=q$. այդ դեպքում, նկատելով, որ $0<q<1$, $n=N+1,\ N+2,\ N+3$ և այլն դեպքում կարող ենք գրել

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\left|\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{x}{n}\cdot\frac{x}{n+1}\right|=$$
$$=\left|\frac{x}{1}\right|\cdot\left|\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\frac{x}{3}\right|\cdot\cdots\cdot\left|\frac{x}{N-1}\right|\cdot\left|\frac{x}{N}\right|\cdot\cdots\cdot\left|\frac{x}{n}\right|\cdot\left|\frac{x}{n+1}\right|<$$
$$<\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{x}{N-1}\cdot q\cdot q\cdot\cdots\cdot q=\frac{x^{N-1}}{(n-1)!}q^{n-N+2},$$

որովհետև

$$\left|\frac{x}{N}\right|=q,\ \left|\frac{x}{N+1}\right|<q,\ \cdots,\ \left|\frac{x}{N+1}\right|<q:$$

Բայց $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ մեծությունը հաստատուն է, այսինքն՝ կախված չէ n-ից, իսկ q^{n-N+2}-ը ձգտում է զրոյի, երբ $n\to\infty$: Ուստի

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0: \tag{1}$$

Հետևաբար, և $R_n(x)=e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$, երբ $n\to\infty$:

Նախորդից հետևում է, որ ցանկացած x-ի դեպքում վերցնելով

բավականաչափ անդամներ, մենք կարող ենք e^x-ը հաշվել ցանկացած ճշտությամբ:

2. $f(x)=\sin x$ ֆունկցիայի վերլուծությունը: Գտնենք $f(x)=\sin x$-ի հաջորդական ածանցյալները.

$$f(x)=\sin x, \qquad f(0)=0,$$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0)=1,$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'''(0)=-1,$$

$$f^{IV}(x)=\sin x=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{IV}(0)=0,$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n+1)}(\xi)=\sin\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Ստացված արժեքները տեղադրելով § 6-ի (10) բանաձևի մեջ, կստանանք ըստ Մակլորենի բանաձևի $f(x)=\sin x$ ֆունկցիայի վերլուծությունը.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin n\frac{\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Քանի որ $\left|\sin\left[\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right|\leq 1$, ապա $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ x-ի բոլոր արժեքների համար:

Ստացված բանաձևը կիրառենք $\sin 20°$-ը մոտավորապես հաշվելու համար: Ընդունենք $n=3$, այսինքն՝ սահմանափակվենք վերլուծության առաջին երկու անդամներով.

$$\sin 20°=\sin\frac{\pi}{9}\approx\frac{\pi}{9}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3=0{,}343.$$

Գնահատենք կատարած սխալը, որը հավասար է մնացորդային անդամին.

$$|R_3|=\left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^4\frac{1}{4!}\sin(\xi+2\pi)\right|\leq\left(\frac{\pi}{9}\right)^4\frac{1}{4!}\approx 0{,}00062<0{,}001.$$

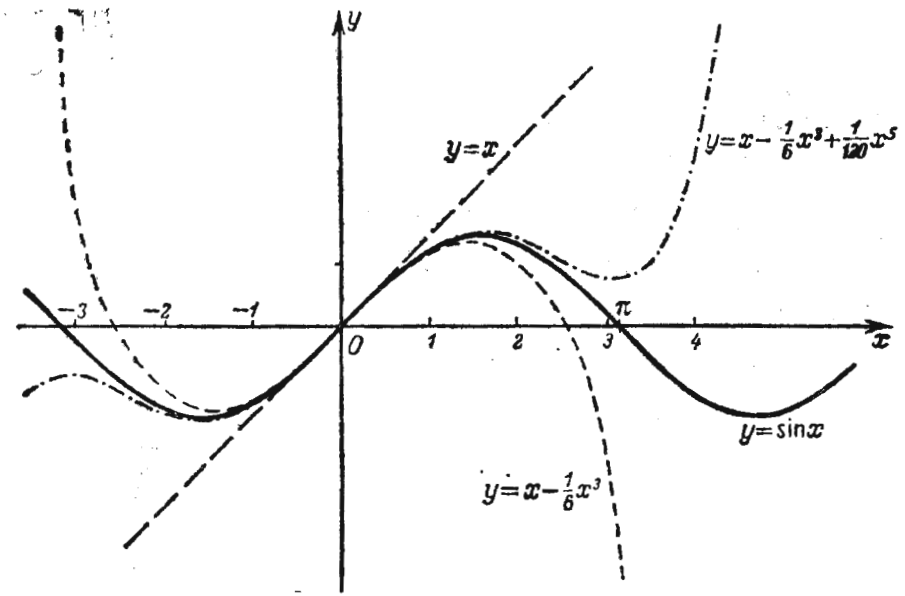
Հետևաբար սխալը փոքր է, քան 0,001-ը, այսինքն $\sin 20°=0{,}342$ 0,001-ի ճշտությամբ:

Նկ. 97-ում տրված են $f(x)=\sin x$ ֆունկցիայի և $s_1(x)=x$, $s_2(x)=x-\frac{x^3}{3!}$, $s_3(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ առաջին երեք մոտավորությունների գրաֆիկները:

3. $f(x)=\cos x$ ֆունկցիայի վերլուծությունը: Գտնելով $x=0$ կետում $f(x)=\cos x$ ֆունկցիայի հաջորդական ածանցյալների արժեքները և տեղադրելով Մակլորենի բանաձևի մեջ, կստանանք հետևյալ վերլուծությունը՝

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{x^n}{n!}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

$$|\xi|<|x|.$$



Նկ. 97

Այստեղ էլ $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ x-ի բոլոր արժեքների դեպքում:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ IV ԳԼԽԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ստուգել Ռոլի թեորեմի իրավացիությունը հետևյալ ֆունկցիաների համար։ 1. $y=x^2-3x+2$, $[1, 2]$ *հատվածում։* 2. $y=x^3+5x^2-6x$, $[0, 1]$ *հատվածում։* 3. $y=(x-1)(x-2)(x-3)$, $[1, 3]$ *հատվածում։* 4. $y=\sin^2 x$, $[0, \pi]$ *հատվածում։* 5. $f(x)=4x^3+x^2-4x-1$ *ֆունկցիան ունի 1 և —1 արմատները։ Գտնել* $f'(x)$ *ածանցյալի արմատը, որի մասին խոսվում է Ռոլի թեորեմում։*

6. *Ստուգել, որ* $y=\sqrt[3]{x^2-5x+6}$ *ֆունկցիայի արմատների միջև գտնվում է նրա ածանցյալի արմատը։*

7. *Ստուգել Ռոլի թեորեմի իրավացիությունը* $y=\cos^2 x$ *ֆունկցիայի համար՝* $\left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$ *հատվածում։*

8. $y=1-\sqrt[5]{x^4}$ *ֆունկցիան զրո է դառնում* $[-1, 1]$ *հատվածի ծայրերում։ Համոզվել այն բանում, որ այդ ֆունկցիայի ածանցյալը* $(-1, 1)$ *միջակայքի ոչ մի կետում զրո չի դառնում։ Բացատրել, ինչու այստեղ կիրառելի չէ Ռոլի թեորեմը։*

9. $y=\sin x$ *ֆունկցիայի համար* $[x_1, x_2]$ *հատվածում կազմել Լագրանժի բանաձևը։ Պատ.* $\sin x_2-\sin x_1=(x_2-x_1)\cos c$, $x_1<c<x_2$։

10. *Ստուգել Լագրանժի բանաձևի իրավացիությունը* $y=2x-x^2$ *ֆունկցիայի համար՝* $[0, 1]$ *հատվածում։*

11. *Որ կետում է* $y=x^n$ *կորի շոշափողը զուգահեռ* $M_1(0, 0)$ *և* $M_2(a, a^n)$ *կետերը միացնող լարին։ Պատ.* $c=\frac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$ *աբսցիսն ունեցող կետում։*

12. *Ո՞ր կետում է* $y=\ln x$ *կորի շոշափողը զուգահեռ* $M_1(1, 0)$ *և* $M_2(e, 1)$ *կետերը միացնող լարին։ Պատ.* $c=e-1$ *աբսցիսն ունեցող կետում։*

Օգտվելով Լագրանժի թեորեմից, ապացուցել հետևյալ անհավասարությունները։

13. $e^x \geqslant 1+x$: 14. $\ln(1+x)<x$, $(x>0)$: 15. $b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)$, *երբ* $b>a$ 16. $\operatorname{arctg} x<x$:

17. *Գրել կոշիի բանաձևը* $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=x^3$ *ֆունկցիաների համար* $[1, 2]$ *հատվածում և գտնել c-ն։ Պատ.* $c=\frac{14}{9}$։

Հաշվել հետևյալ սահմանները։

18. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$։ *Պատ.* $\frac{1}{n}$։ 19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$։ *Պատ.* 2։

20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$։ *Պատ.* 2։ 21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$։ *Պատ.* —2։

22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$։ *Պատ. Սահման գոյություն չունի* ($\sqrt{2}$, *երբ* $x\to+0$, $-\sqrt{2}$, *երբ* $x\to-0$)։ 23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$։ *Պատ.* $-\frac{1}{8}$։ 24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$։

Պատ. $\ln\frac{a}{b}$։ 25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$։ *Պատ.* $-\frac{1}{6}$։ 26. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$։ *Պատ.* $\cos a$։ 27. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y+\sin y-1}{\ln(1+y)}$։ *Պատ.* 2։ 28. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x}{3x^2+x^5}$։ *Պատ.* $\frac{1}{3}$։ 29. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+5}$։ *Պատ.* $\frac{3}{2}$։ 30. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}$ (*որտեղ* $n>0$)։ *Պատ.* 0։ 31. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arcctg} x}$։ *Պատ.* 1։ 32. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\ln\frac{x-1}{x}}$։ *Պատ.* —1։ 33. $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{ay}}$։ *Պատ.* 0, *երբ* $a>0$, ∞, *երբ* $a\leqslant 0$։

34. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$։ *Պատ.* 1։ 35. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$։ *Պատ.* 1։ 36. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{tg} 7x}{\ln\operatorname{tg} 2x}$։ *Պատ.* 1։ 37. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)-x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x}}$։ *Պատ.* 0։ 38. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$։ *Պատ.* $\frac{2}{\pi}$։

39. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right]$։ *Պատ.* $-\frac{1}{2}$։ 40. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right]$։ *Պատ.* —1։

41. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi)$։ *Պատ.* 0։ 42. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]$։ *Պատ.* $\frac{1}{2}$։

43. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x$։ *Պատ.* $\frac{1}{2}$։ 44. $\lim\limits_{x\to 0} x^{2^{\frac{1}{x^2}}}$։ *Պատ.* ∞։

45. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$։ *Պատ.* $\frac{1}{e}$։ 46. $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt[t]{t^2}$։ *Պատ.* 1։ 47. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$։ *Պատ.* 1։ 48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$։ *Պատ.* e^a։ 49. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$։ *Պատ.* $\frac{1}{e}$։

50. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$։ *Պատ.* 1։ 51. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$։ *Պատ.* $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$։

52. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$։ *Պատ.* $\frac{1}{e}$։

53. $x^4-5x^3+5x^2+x-2$ *բազմանդամը վերլուծել* $(x-2)$*-ի աստիճաններով։*

Պատ. $-7(x-2)-(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$։

54. $x^5+2x^4-x^2+x+1$ բազմանդամը վերլուծել $(x+1)$-ի աստիճաններով։

Պատ. $(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5$։

55. Գրել Թեյլորի բանաձևը $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի համար, երբ $a=1$, $n=3$։

Պատ. $\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{1}\cdot\frac{1}{2}-\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{(x-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{3}{8}-\frac{(x-1)^4}{4!}\cdot\frac{15}{16}\times$

$$\times[1+\theta(x-1)]^{-\frac{7}{2}},\ 0<\theta<1։$$

56. Գրել Մակլորենի բանաձևը $y=\sqrt{1+x}$ ֆունկցիայի համար, երբ $n=2$։

Պատ. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}},\ 0<\theta<1$։

57. Օգտվելով նախորդ օրինակի արդյունքից, գնահատել $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ մոտավոր հավասարության սխալը, երբ $x=0,2$։

Պատ. Փոքր է $\frac{1}{2\cdot 10^3}$-ից։

Պարզաբանել x-ի ոչ մեծ արժեքների դեպքում հետևյալ մոտավոր հավասարությունների ծագումը և գնահատել այդ հավասարությունների սխալը։

58. $\ln\cos x\approx-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}$։ 59. $\operatorname{tg}x\approx x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$։ 60. $\arcsin x\approx x+\frac{x^3}{6}$

61. $\operatorname{arctg}x\approx x-\frac{x^3}{3}$։ 62. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}\approx 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$։

63. $\ln(x+\sqrt{1-x^2})\approx x-x^2+\frac{5x^3}{6}$։

Օգտվելով Թեյլորի բանաձևից, հաշվել հետևյալ արտահայտությունների սահմանները։

64. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$։ Պատ. 1. 65. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{-x^2}}$։ Պատ. 0։

66. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{tg}x-\sin x)-x^3}{x^5}$։ Պատ. $\frac{1}{4}$։ 67. $\lim\limits_{x\to 0}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$։

Պատ. 0. 68. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{ctg}x}{x}\right)$։ Պատ. $\frac{1}{3}$։ 69. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$։ Պատ. $\frac{2}{3}$։

ԳԼՈՒԽ V

ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԱՐՔԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 1. Խնդրի դրվածքը

Բնության տարբեր երևույթների քանակական կողմի ուսումնասիրությունը բերում է այդ երևույթի մեջ մասնակցող փոփոխական մեծությունների միջև ֆունկցիոնալ կախվածությունը գտնելուն և ուսումնասիրմանը։ Եթե այդպիսի ֆունկցիոնալ կախվածությունը կարելի է արտահայտել անալիտիկորեն, այսինքն՝ մեկ կամ մի քանի բանաձևերով, ապա մենք ստանում ենք այդ ֆունկցիոնալ կախվածությունը մաթեմատիկական անալիզի միջոցներով ուսումնասիրելու հնարավորություն։ Օրինակ, դատարկության մեջ արկի թռիչքի երևույթն ուսումնասիրելիս ստացվում է բանաձև, որը տալիս է թռիչքի R հեռավորության կախումը α բարձրացման անկյունից և v_0 սկզբնական արագությունից՝

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g},$$

(g-ն ծանրության ուժի արագացումն է)։

Ստանալով այս բանաձևը, մենք հնարավորություն ունենք պարզելու, թե ինչպիսի α-ի դեպքում R հեռավորությունը կլինի ամենամեծը, և որ դեպքում՝ ամենափոքրը, ինչպիսին պետք է լինեն պայմանները, որպեսզի α անկյունը մեծացնելիս մեծանա հեռավորությունը և այլն։

Դիտարկենք այլ օրինակ։ Զսպակի (ռեսորա) (դնացք, ավտոմոբիլ) վրա բեռի տատանման ուսումնասիրության հետևանքով ստացել են բանաձև, որը ցույց է տալիս, թե ինչպես է հավասարակշռության դիրքից y բեռի շեղումը կախված t ժամանակից.

$$y=e^{-kt}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)։$$

k, A, B, ω մեծությունները, որոնք մասնակցում են այդ բանաձևում, տվյալ տատանողական սիստեմի համար ունեն լիովին որոշակի արժեք (նրանք կախված են զսպակի առաձգականությունից, բեռի մեծությունից և այլն, բայց չեն փոփոխվում ժամանակի ընթացքում) և դրա համար մեր կողմից դիտվում են որպես հաստատուններ:

Բերված բանաձևի հիման վրա կարելի է պարզել, թե t-ի ինչպիսի արժեքների դեպքում՝ y շեղումը կմեծանա t-ի մեծացման հետ, ինչպես է փոխվում ամենամեծ շեղման մեծությունը՝ կախված ժամանտկից, t-ի ինչպիսի արժեքների դեպքում են դիտվում այդ ամենամեծ շեղումները, t-ի ինչպիսի արժեքների դեպքում են ստացվում բեռի շարժման ամենամեծ արագությունները և մի շարք այլ հարցեր:

Թվարկած բոլոր հարցերը մտնում են «հետազոտել ֆունկցիայի վարքը» հասկացության մեջ: Ակնհայտ է, պարզաբանել այդ բոլոր հարցերը, հաշվելով ֆունկցիայի արժեքները առանձին կետերում (ինչպես մենք այդ արել ենք II գլխում) բավականին դժվար է:

Սույն գլխի նպատակն է ֆունկցիայի վարքի ուսումնասիրության առավել ընդհանուր եղանակների հաստատումը:

2. Ֆունկցիայի աճումը և նվազումը

Առաջին գլխի § 6-ում արվել էր աճող և նվազող ֆունկցիաների սահմանումը: Այժմ ածանցյալի դաղափարը կիրառենք ֆունկցիայի աճման և նվազման ուսումնասիրության համար:

Թեորեմ: 1) Եթե [a, b] հատվածում ածանցյալ ունեցող f(x) ֆունկցիան այդ հատվածում աճում է, ապա նրա ածանցյալը [a, b] հատվածում բացասական չէ, այսինքն $f'(x) \geqslant 0$:

2) Եթե f(x) ֆունկցիան անընդհատ է [a, b] հատվածում և դիֆերենցելի է (a, b) միջակայքում, ընդ որում $f'(x) > 0$ $a < x < b$ համար ապա այդ ֆունկցիան [a, b] հատվածում աճում է:

Ապացույց: Նախ ապացուցենք թեորեմի առաջին մասը: Դիցուք f(x)-ը [a, b] հատվածում աճում է: x արգումենտին տանք Δx աճը և դիտարկենք հետևյալ հարաբերությունը՝

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Քանի որ f(x)-ը աճող ֆունկցիա է, ապա

$$f(x+\Delta x) > f(x), \text{ երբ } \Delta x > 0$$

և

$$f(x+\Delta x) < f(x), \text{ երբ } \Delta x < 0:$$

Երկու դեպքում էլ

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0 \qquad (2)$$

և հետևաբար,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

այսինքն $f'(x) \geqslant 0$, ինչ պահանջվում էր ապացուցել: (Եթե լիներ $f'(x) < 0$, ապա Δx-ի բավականաչափ փոքր արժեքների համար (1) հարաբերությունը կլիներ բացասական, որը հակասում է (2) առնչությանը):

Այժմ կապացուցենք թեորեմի երկրորդ մասը: Դիցուք $f'(x) > 0$ (a, b) միջակայքին պատկանող x-ի բոլոր արժեքների համար:

Դիտարկենք [a, b] հատվածին պատկանող x_1 և x_2 $x_1 < x_2$ ցանկացած երկու արժեքներ:

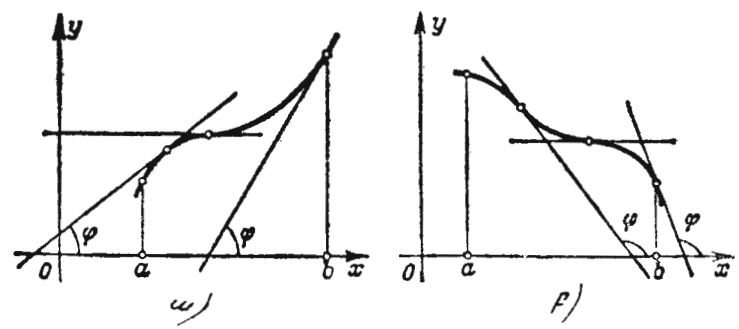
Ըստ վերջավոր աճերի Լագրանժի թեորեմի ունենք.

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \qquad (x_1<\xi<x_2):$$

Տրված պայմանի համաձայն $f'(\xi) > 0$, հետևաբար, $f(x_2)-f(x_1) > 0$, իսկ դա նշանակում է, որ f(x)-ը աճող ֆունկցիա է:

Համանման թեորեմ տեղի ունի նվազող (դիֆերենցելի) ֆունկցիայի համար, այն է՝

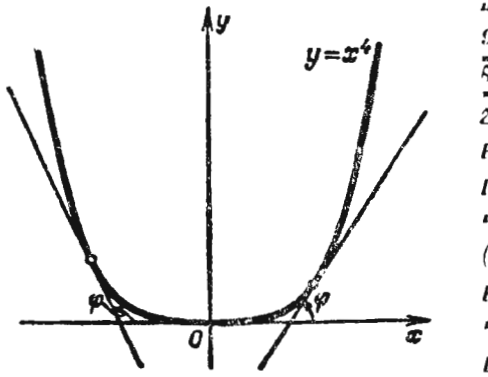
Եթե f(x)-ը նվազում է [a, b] հատվածում, ապա այդ հատվածում $f'(x) \leqslant 0$: Եթե $f'(x) < 0$ (a, b) միջակայքում, ապա [a, b] հատվածում f(x) ֆունկցիան նվազում է: (Իհարկե, այստեղ էլ ենթադրում ենք, որ ֆունկցիան անընդհատ է [a, b] հատվածի բոլոր



Նկ. 98

կետերում և (a, b)-ում ամենուրեք դիֆերենցելի է։)

Դիտողություն։ Ապացուցած թեորեմն արտահայտում է հետևյալ երկրաչափական փաստը։ Եթե [a, b] հատվածում f(x) ֆունկցիան աճում է, ապա այդ հատվածի յուրաքանչյուր կետում y=f(x) կորի շոշափողը Ox առանցքի հետ կազմում է φ սուր անկյուն (կամ առանձին կետերում հորիզոնական է). այդ անկյան տանգենսը բացասական չէ, f′(x)=tgφ≥0 (նկ. 98, ա)։ Եթե f(x) ֆունկցիան [a, b] հատվածում նվազում է, ապա շոշափողի թեքության անկյունը բութ է (կամ առանձին կետերում հորիզոնական է). այդ անկյան տանգենսը դրական չէ (նկ. 98 բ)։ Նույն ձևով մեկնաբանվում է նաև թեորեմի երկրորդ մասը։ Թեորեմը թույլ է տալիս ըստ ածանցյալի նշանի դատել ֆունկցիայի աճման կամ նվազման մասին։



Նկ. 99

Օրինակ։ Որոշել $y=x^4$ ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը։ Լուծում։ Ածանցյալը հավասար է

$$y'=4x^3,$$

$x>0$ դեպքում ունենք $y'>0$—ֆունկցիան աճում է, $x<0$ դեպքում ունենք $y'<0$ ֆունկցիան նվազում է (նկ. 99)։

§ 3. Ֆունկցիաների մաքսիմումը և մինիմումը

Մաքսիմումի սահմանումը։ f(x) ֆունկցիան x_1 կետում ունի մաքսիմում (maximum), եթե x_1 կետում f(x) ֆունկցիայի արժեքը մեծ է, քան նրա արժեքները որևէ միջակայքի բոլոր կետերում, որն ընդգրկում է x_1 կետը։ Այլ կերպ ասած, f(x) ֆունկցիան $x=x_1$ կետում ունի մաքսիմում, եթե $f(x_1+\Delta x)<f(x_1)$ ցանկացած Δx-երի (դրական և բացասական) համար, որոնք բացարձակ մեծությամբ բավականաչափ փոքր են*).

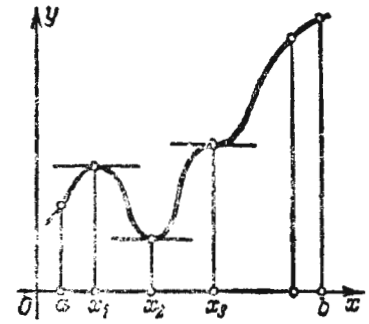
Եբբեմն այս սահմանումը ձևակերպում են այսպես. f(x) ֆունկցիան x_1 կետում ունի մաքսիմում, եթե կարելի է գտնել x_1 կետի այնպիսի (x, z), $(x<x<z)$ շրջակայք, որ այդ շրջակայքի՝ x_1-ից տարբեր բոլոր կետերում տեղի ունի $f(x)<f(x_1)$ անհավասարությունը։

Այսպես, օրինակ y=f(x) ֆունկցիան, որի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 100-ում, $x=x_1$ կետում ունի մաքսիմում։

Մինիմումի սահմանումը։ f(x) ֆունկցիան $x=x_2$ կետում ունի մինիմում (minimum), եթե

$$f(x_2+\Delta x)>f(x_2)$$

ցանկացած Δx-երի, ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական արժեքների դեպքում, որոնք բացարձակ մեծությամբ բավականաչափ փոքր են (նկ. 100)։



Նկ. 100

Օրինակ, $y=x^4$ ֆունկցիան, որը դիտարկվել է նախորդ պարագրաֆի վերջում (տես նկ. 99) x=0 կետում ունի մինիմում, քանի որ y=0, երբ x=0 և y>0 x-ի այլ արժեքների դեպքում։

Մաքսիմումի և մինիմումի սահմանումների կապակցությամբ պետք է ուշադրություն դարձնել հետևյալ հանգամանքների վրա։

1. Հատվածում որոշված ֆունկցիան կարող է հասնել մաքսիմումի և մինիմումի միայն դիտարկվող հատվածի ներսում պարփակված x-ի արժեքների դեպքում։

2. Պետք է մատնանշել, որ ֆունկցիայի մաքսիմումը և մինիմումը հանդիսանում են, համապատասխանաբար, նրա ամենամեծ և ամենափոքր արժեքները դիտարկվող հատվածում. մաքսիմումի կետում ֆունկցիան ունի ամենամեծ արժեք միայն այն արժեքների համեմատությամբ, որոնք այն ունի մաքսիմումի կետին բավականաչափ մոտ բոլոր կետերում, իսկ մինիմումի կետում՝ ամենափոքր արժեք միայն այն արժեքների համեմատությամբ, որոնք այն ունի մինիմումի կետին բավականաչափ մոտ բոլոր կետերում։

Այսպես, նկ. 101-ում պատկերված է [a, b] հատվածում որոշված ֆունկցիա, որը

$x=x_1$ և $x=x_3$ կետերում՝ ունի մաքսիմում,

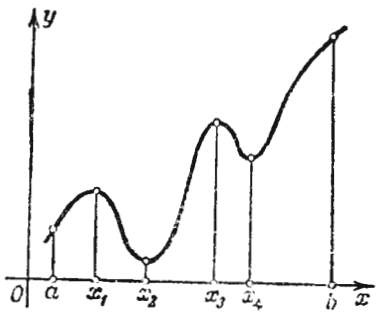
$x=x_2$ և $x=x_4$ կետերում՝ ունի մինիմում,

բայց ֆունկցիայի մինիմումը $x=x_4$ կետում մեծ է $x=x_1$ կետում ֆունկցիայի մաքսիմումից։ x=b կետում ֆունկցիայի արժեքը մեծ է դիտարկվող հատվածում ֆունկցիայի ցանկացած մաքսիմումից։

Ֆունկցիայի մաքսիմումները և մինիմումները անվանում են էքստրեմումներ* կամ ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքներ:

Ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքները չեն [a, b] հատվածում նրանց դասավորությունը որոշ չափով բնորոշում են ֆունկցիայի փոփոխությունը՝ կախված անկախ փոփոխականի փոփոխությունից:

Ստորև ցույց կտրվի էքստրեմալ արժեքների որոնման մեթոդը:



Նկ. 101

Թեորեմ 1 (էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանը): Եթե $y=f(x)$ դիֆերենցելի ֆունկցիան $x=x_1$ կետում ունի մաքսիմում կամ մինիմում, ապա նրա ածանցյալն այդ կետում դառնում է զրո, այսինքն $f'(x_1)=0$:

Ապացույց: Որոշակիության համար ենթադրենք որ $x=x_1$ կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում: Այդ դեպքում բացարձակ արժեքով բավականաչափ փոքր $\Delta x (\Delta x \neq 0)$ աճերի համար տեղի ունի

$$f(x_1+\Delta x)<f(x_1),$$

այսինքն

$$f(x_1+\Delta x)-f(x_1)<0.$$

Սակայն նման դեպքում

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

հարաբերության նշանը որոշվում է Δx-ի նշանով, այն է՝

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}>0, \text{ երբ } \Delta x<0,$$

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}<0, \text{ երբ } \Delta x>0.$$

Ածանցյալի սահմանման համաձայն ունենք՝

$$f'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}.$$

*Extremum—ծայրագույն (լատ.):

Եթե $f(x)$-ը $x=x_1$ կետում ունի ածանցյալ, ապա աջ մասի սահմանը կախված չէ այն բանից, թե Δx-ը ինչպես է ձգտում զրոյի (մնալով դրական կամ բացասական):

Բայց եթե $\Delta x\to 0$ մնալով բացասական, ապա

$$f'(x_1)\geqslant 0.$$

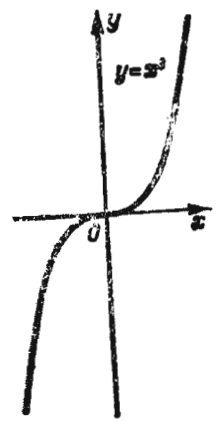
Իսկ եթե $\Delta x\to 0$, մնալով դրական, ապա $f'(x)\leqslant 0$:

Քանի որ $f'(x_1)$-ը որոշակի թիվ է, որը կախված չէ Δx-ի զրոյի ձգտելու եղանակից, ապա վերջին երկու անհավասարությունները համատեղելի են միայն այն դեպքում, եթե

$$f'(x_1)=0.$$

Համանման ձևով թեորեմն ապացուցվում է ֆունկցիայի մինիմումի դեպքի համար:

Ապացուցած թեորեմին համապատասխանում է հետևյալ ակնհայտ երկրաչափական փաստը. եթե մաքսիմումի և մինիմումի կետերում $f(x)$ ֆունկցիան ունի ածանցյալ, ապա այդ կետերում $y=f(x)$ կորի շոշափողը զուգահեռ է Ox առանցքին: Իրոք, այն բանից, որ $f'(x_1)=\operatorname{tg}\varphi=0$, որտեղ φ-ն շոշափողով և Ox առանցքով կազմած անկյունն է, հետևում է, որ $\varphi=0$ (նկ. 100):



Նկ. 102

1-ին թեորեմից անմիջականորեն բխում է հետևյանք՝ եթե x արգումենտի դիտարկվող բոլոր արժեքների համար $f(x)$ ֆունկցիան ունի ածանցյալ, ապա այն կարող է ունենալ էքստրեմում (մաքսիմում կամ մինիմում) միայն այն արժեքների դեպքում, որոնց համար ածանցյալը դառնում է զրո: Հակադարձ եզրակացությունը ճիշտ չէ. ոչ բոլոր արժեքների դեպքում, որոնց համար ածանցյալը դառնում է զրո, անպայման գոյություն ունի մաքսիմում կամ մինիմում: Այսպես, նկ. 100-ում պատկերված է ֆունկցիա, որի ածանցյալը $x=x_3$ կետում դառնում է զրո (շոշափողը հորիզոնական է), բայց այդ կետում ֆունկցիան չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում: Ճիշտ այդպես $y=x^3$ ֆունկցիան (նկ. 102) $x=0$ կետում ունի ածանցյալ, որը հավասար է զրոյի՝

$$(y')_{x=0}=(3x^2)_{x=0}=0,$$

բայց այդ կետում ֆունկցիան չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում: Իրոք, որքան էլ x կետը մոտ լինի 0 կետին, միշտ

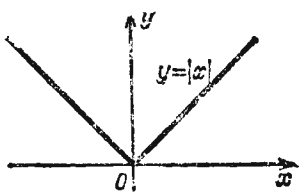
$$x^3<0, \text{ երբ } x<0,$$

$$x^3>0, \text{ երբ } x>0.$$

Մենք ուսումնասիրեցինք այն դեպքը, երբ ֆունկցիան որևէ հատվածի բոլոր կետերում ունի ածանցյալ։ Ինչպիսին է դործն այն կետերում, որտեղ ածանցյալը գոյություն չունի։ Օրինակների վրա ցույց կտանք, որ այդպիսի կետերում կարող է լինել կամ մաքսիմում կամ մինիմում, բայց կարող է և չլինել ոչ մեկը, ոչ էլ մյուսը։

Օրինակ 1։ $y=|x|$ ֆունկցիան $x=0$ կետում չունի ածանցյալ (այդ կետում կորը չունի որոշակի շոշափող), բայց այդ կետում տրված ֆունկցիան ունի մինիմում. $y=0$, երբ $x=0$, այն ժամանակ, երբ զրոյից տարբեր յուրաքանչյուր կետի համար ունենք՝ $y>0$ (նկ. 103)։

Օրինակ 2։ $y=(1-x)$ ֆունկցիան $x=0$ կետում չունի ածանցյալ, քանի որ $y'=-\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$ դառնում է անվերջություն $x=0$ կետում, բայց այդ կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում. $f(0)=1$, $f(x)<1$ զրոյից տարբեր x կետերում (նկ. 104)։

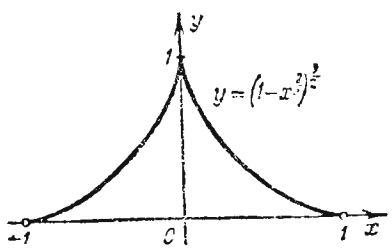


Նկ. 103

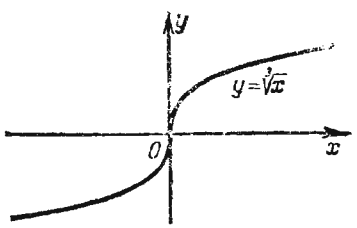
Օրինակ 3։ $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիան $x=0$ կետում ածանցյալ չունի ($y'\to\infty$, երբ $x\to 0$)։ Այդ կետում ֆունկցիան չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում. $f(0)=0$, $f(x)<0$, երբ $x<0$; $f(x)>0$, երբ $x>0$ (նկ. 105)։

Այսպիսով, ֆունկցիան կարող է ունենալ էքստրեմում միայն երկու դեպքում. կամ այն կետերում, որտեղ ածանցյալը գոյություն ունի և հավասար է զրոյի, կամ այն կետերում, որտեղ ածանցյալը գոյություն չունի։

Նկատենք, որ եթե որևէ կետում ածանցյալը գոյություն չունի (բայց գոյություն ունի նրան մոտ դտնվող կետերում), ապա այդ կետում ածանցյալը խզվում է։



Նկ. 104



Նկ. 105

Արգումենտի այն արժեքները, որոնց համար ածանցյալը դառնում է զրո կամ խզվում է, կոչվում են կրիտիկական կետեր կամ կրիտիկական արժեքներ։

Նախորդից հետևում է, որ ոչ ամեն մի կրիտիկական արժեքի դեպքում ֆունկցիան ունի մաքսիմում կամ մինիմում։ Բայց եթե այս կամ այն կետում ֆունկցիան հասնում է մաքսիմումի կամ մինիմումի, ապա այդ կետն անպայման կրիտիկական է։ Դրա համար ֆունկցիայի էքստրեմումները գտնելիս վարվում են հետևյալ կերպ. գտնում են բոլոր կրիտիկական կետերը, իսկ այնուհետև, ուսումնասիրելով յուրաքանչյուր կրիտիկական կետ, պարզում են այդ կետում կլինի ֆունկցիայի մաքսիմում կամ մինիմում, կամ էլ չի լինի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում։

Կրիտիկական կետերում ֆունկցիայի ուսումնասիրությունը հենվում է հետևյալ թեորեմների վրա։

Թեորեմ 2 (էքստրեմումի գոյության բավարար պայմաններ)։ Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x_1 կրիտիկական կետն ընդգրկող որևէ միջակայքում և դիֆերենցելի է այդ միջակայքի բոլոր կետերում (բացի, զուցե, x_1 կետից)։ Եթե այդ կետով ձախից աջ անցնելիս ածանցյալը նշանը փոխում է պլյուսից մինուսի, ապա $x=x_1$ կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում։ Իսկ եթե x_1 կետով ձախից աջ անցնելիս ածանցյալը նշանը փոխում է մինուսից պլյուսի, ապա ֆունկցիան այդ կետում ունի մինիմում։

Այսպիսով,

եթե ա) $\begin{cases} f'(x)>0, & \text{երբ } x<x_1, \\ f'(x)<0, & \text{երբ } x>x_1, \end{cases}$

ապա x_1 կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում.

եթե բ) $\begin{cases} f'(x)<0, & \text{երբ } x<x_1, \\ f'(x)>0, & \text{երբ } x>x_1, \end{cases}$

ապա x_1 կետում ֆունկցիան ունի մինիմում։ Ըստ որում պետք է նկատի ունենալ, որ ա) կամ բ) պայմանները պետք է տեղի ունենան x_1-ին բավականաչափ մոտ x-ի բոլոր արժեքների համար, այսինքն՝ x_1 կրիտիկական կետի որևէ բավականաչափ փոքր շրջակայքի բոլոր կետերում։

Ապացույց։ Սկզբից ընդունենք, որ ածանցյալը նշանը փոխում է պլյուսից մինուսի, այսինքն՝ x_1 կետին բավականաչափ մոտ բոլոր x-երի համար ունենք՝

$$f'(x)>0, \text{ երբ } x<x_1,$$
$$f'(x)<0, \text{ երբ } x>x_1.$$

$f(x)-f(x_1)$ տարբերության նկատմամբ կիրառելով Լագրանժի թեորեմը, կստանանք

$$f(x)-f(x_1)=f'(\xi)(x-x_1),$$

որտեղ ξ-ն x-ի և x_1-ի միջև ընկած կետ է։

1) Դիցուք $x<x_1$; այդ դեպքում

$$\xi<x_1,\ f'(\xi)>0,\ f'(\xi)(x-x_1)<0$$

և, հետևաբար,

$$f(x)-f(x_1)<0,$$

կամ

$$f(x)<f(x_1). \qquad (1)$$

2) Դիցուք $x>x_1$, այս դեպքում

$$\xi>x_1\ f'(\xi)<0,\ f'(\xi)(x-x_1)<0$$

և, հետևաբար,

$$f(x)-f(x_1)<0$$

կամ

$$f(x)<f(x_1). \qquad (2)$$

(1) և (2) առնչությունները ցույց են տալիս, որ x_1-ին բավականաչափ մոտ x-ի բոլոր արժեքների համար ֆունկցիայի արժեքները փոքր են, քան x_1 կետում ֆունկցիայի արժեքը։ Հետևաբար, x_1 կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում։

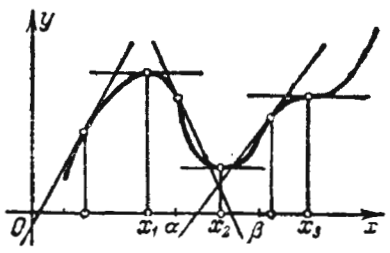
Նման ձևով ապացուցվում է թեորեմի երկրորդ մասը մինիմումի բավարար պայմանի մասին։

Նկ. 106-ը ակնառու կերպով մեկնաբանում է թեորեմ 2-ի իմաստը։

Դիցուք $x=x_1$ կետում ունենք $f'(x_1)=0$ և x_1 կետին բավականաչափ մոտ բոլոր x-երի համար տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$f'(x)>0,\ \text{երբ}\ x<x_1,$$

$$f'(x)<0,\ \text{երբ}\ x>x_1.$$



Նկ. 106

Այդ դեպքում, երբ $x<x_1$, կորի շոշափողը Ox առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն՝ ֆունկցիան աճում է, իսկ երբ $x>x_1$ շոշափողը Ox առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն՝ ֆունկցիան նվազում է։ Երբ $x=x_1$՝ ֆունկցիան աճումից անցնում է նվազման, այսինքն՝ ունի մաքսիմում։

Եթե x_2 կետում ունենք $f'(x_2)=0$ և x-ի բոլոր արժեքների համար, որոնք բավականաչափ մոտ են x_2 կետին, տեղի ունեն

$$f'(x)<0,\ \text{երբ}\ x<x_2,$$

$$f'(x)>0,\ \text{երբ}\ x>x_2$$

անհավասարությունները, ապա, երբ $x<x_2$ կորի շոշափողը Ox առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն՝ ֆունկցիան նվազում է, իսկ երբ $x>x_2$ կորի շոշափողը Ox առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն՝ ֆունկցիան աճում է։ Երբ $x=x_2$ ֆունկցիան նվազելուց անցնում է աճման, այսինքն՝ ունի մինիմում։

Եթե $x=x_3$ կետում ունենք $f'(x_3)=0$ և x-ի բոլոր արժեքների համար, որոնք բավականաչափ մոտ են x_3-ին, տեղի ունեն

$$f'(x)>0,\ \text{երբ}\ x<x_3,$$

$$f'(x)>0,\ \text{երբ}\ x>x_3$$

անհավասարությունները, ապա ֆունկցիան աճում է ինչպես $x<x_3$ դեպքում, այնպես էլ $x>x_3$ դեպքում։ Հետևաբար, երբ $x=x_3$ ֆունկցիան չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում։ Հենց այդպիսի դեպք տեղի ունի $y=x^3$ ֆունկցիայի համար, երբ $x=0$։

Իրոք, ածանցյալը՝ $y'=3x^2$, հետևաբար,

$$(y')_{x=0}=0,$$

$$(y')_{x<0}>0,$$

$$(y')_{x>0}>0,$$

իսկ դա նշանակում է, որ, երբ $x=0$, ֆունկցիան չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում (տես վերը նկ. 102)։

§ 4. Առաջին ածանցյալի օգնությամբ դիֆերենցելի ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի ուսումնասիրության սխեման

Նախորդ պարագրաֆի հիման վրա կարելի է ձևակերպել $y=f(x)$ դիֆերենցելի ֆունկցիայի մաքսիմումը և մինիմումը հետազոտելու համար հետևյալ կանոնը.

1. Գտնում ենք ֆունկցիայի առաջին ածանցյալը, այսինքն՝ $f'(x)$-ը։

2. Գտնում ենք x արգումենտի կրիտիկական արժեքները, որի համար՝

ա) առաջին ածանցյալը հավասարեցնում ենք զրոյի և գտնում ենք ստացված $f'(x)=0$ *հավասարման իրական արմատները։*

բ) գտնում ենք x*-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում* $f'(x)$ *ածանցյալը խզվում է։*

3. Ուսումնասիրում ենք ածանցյալի նշանը կրիտիկական կետից ձախ և աջ։ Քանի որ կրիտիկական կետերի միջև ածանցյալի նշանը մնում է հաստատուն, ապա, օրինակ, x_2 *կետից ձախ և աջ ածանցյալի նշանն ուսումնասիրելու համար (նկ. 106), բավական է որոշել ածանցյալի նշանը* α *և* β *կետերում* ($x_1<\alpha<x_2$, $x_2<\beta<x_3$, *որտեղ* x_1*-ը և* x_3*-ը մոտակա կրիտիկական կետերն են)։*

4. Հաշվում ենք $f(x)$ *ֆունկցիայի արժեքը արգումենտի յուրաքանչյուր կրիտիկական արժեքի համար։*

Այսպիսով, ունենք հնարավոր դեպքերի հետևյալ սխեմատիկ պատկերը.

$f'(x)$ *ածանցյալի նշանները* x_1 *կրիտիկական կետով անցնելիս*			*Կրիտիկական կետի բնույթը*
$x<x_1$	$x=x_1$	$x>x_1$	
+	$f'(x_1)=0$ *կամ խզվող է*	−	*Մաքսիմումի կետ*
−	$f'(x_1)=0$ *կամ խզվող է*	+	*Մինիմումի կետ*
+	$f'(x_1)=0$ *կամ խզվող է*	+	*Չկա ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում (ֆունկցիան աճում է)*
−	$f'(x_1)=0$ *կամ խզվող է*	−	*Չկա ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում (ֆունկցիան նվազում է)*

Օրինակ 1. *Հետազոտել* $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ *ֆունկցիան՝ նկատի ունենալով մաքսիմումը և մինիմումը.*

Լուծում։ 1) Գտնում ենք առաջին ածանցյալը՝

$$y'=x^2-4x+3,$$

2) Գտնում ենք ածանցյալի իրական արմատները՝

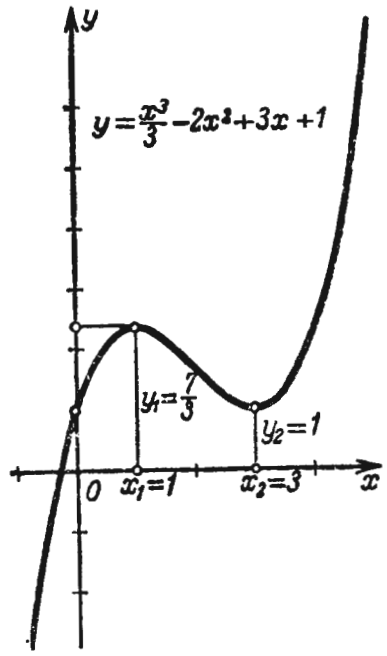
$$x^2-4x+3=0,$$

Հետևաբար,

$$x_1=1,\ x_2=3,$$

Ածանցյալն ամենուրեք անընդհատ է։ Նշանակում է այլ կրիտիկական կետեր չկան։

3) Հետազոտենք կրիտիկական արժեքները և հետաղոտության արդյունքները ֆիքսենք նկ. 107-ի վրա։



Նկ. 107

Հետազոտենք $x_1=1$ *առաջին կրիտիկական կետը։ Քանի որ* $y'=(x-1)(x-3)$, *ապա երբ* $x<1$ *ունենք* $y'=(-)\cdot(-)>0$ *և երբ* $x>1$ *ունենք* $y'=(+)\cdot(-)<0$.

Ուրեմն $x_1=1$ *արժեքի վրայով անցնելիս (ձախից աջ) ածանցյալը նշանը փոխում է պլյուսից մինուսի։ Հետևաբար, երբ* $x=1$ *ֆունկցիան ունի մաքսիմում, այն է՝*

$$(y)_{x=1}=\frac{7}{3},$$

Հետազոտենք $x_2=3$ *երկրորդ կրիտիկական կետը.*

Երբ $x<3$ *ունենք* $y'=(+)\cdot(-)<0$;

երբ $x>3$ *ունենք* $y'=(+)\cdot(+)>0$.

Նշանակում է, $x=3$ *արժեքով անցնելիս ածանցյալը նշանը փոխում է մինուսից պլյուսի։ Հետևաբար, երբ* $x=3$, *ֆունկցիան ունի մինիմում, այն է՝*

$$(y)_{x=3}=1.$$

Կատարված հետազոտության հիման վրա կառուցենք ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 107)։

Օրինակ 2. Հետազոտել $(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ *ֆունկցիան, նկատի ունենալով մաքսիմումը և մինիմումը։*

Լուծում։ 1) Գտնում ենք առաջին ածանցյալը՝

$$y'=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

2) Գտնում ենք արգումենտի կրիտիկական արժեքները. ա) գտնում ենք այն կետերը, որտեղ ածանցյալը դառնում է զրո։

$$y'=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}=0,\qquad x_1=\frac{2}{5},$$

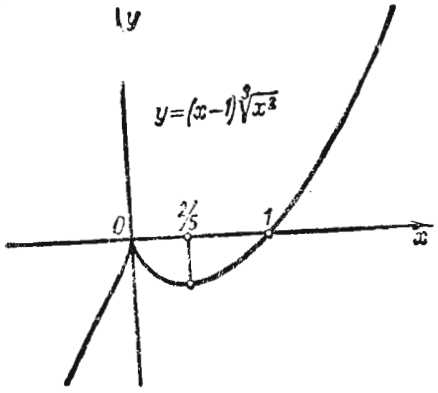
բ) գտնում ենք այն կետերը, որտեղ ածանցյալը խզվում է (տվյալ դեպքում դառնում է անվերջություն)։ Ակնհայտ է, այդպիսին կլինի $x_2=0$ *կետը։ (Նշենք, որ* $x_2=0$ *դեպքում դիտարկվող ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ է)։*

Այլ կրիտիկական կետեր չկան։

3) Հետազոտենք ստացված կրիտիկական կետերի բնույթը։ Հետազոտենք $x_1=\frac{2}{5}$ *կետը։ Նկատելով, որ*

$$(y')_{x<\frac{2}{5}}<0,\qquad (y')_{x>\frac{2}{5}}>0,$$

եզրակացնում ենք, որ երբ $x=\frac{2}{5}$ ֆունկցիան ունի մինիմում. Մինիմումի կետում ֆունկցիայի արժեքը հավասար է



Նկ 108

$$(y)_{x=\frac{2}{5}}=\left(\frac{2}{5}-1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}}=$$

$$=-\frac{3}{5}\sqrt{\frac{4}{25}}.$$

Հետազոտենք $x=0$ երկրորդ կրիտիկական կետը: Նկատելով, որ

$$(y')_{x=0}>0, \quad (y')_{x=0}<0,$$

եզրակացնում ենք, որ երբ $x=0$ ֆունկցիան ունի մաքսիմում, ընդ որում $(y_{x=0})=0$: Հետազոտվող ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 108-ում:

§ 5. Ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի հետազոտումը երկրորդ ածանցյալի օգնությամբ

Դիցուք ֆունկցիայի ածանցյալը դառնում է զրո, երբ $x=x_1$ այսինքն՝ $f'(x_1)=0$: Բացի այդ, դիցուք $f''(x)$ երկրորդ ածանցյալը գոյություն ունի և անընդհատ է x_1 կետի որևէ շրջակայքում: Այդ դեպքում իրավացի է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Դիցուք $f'(x_1)=0$: Այդ դեպքում $x=x_1$ կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում, եթե $f'(x_1)<0$, և մինիմում, եթե $f''(x_1)>0$:

Ապացույց: Նախ ցույց տանք թեորեմի առաջին մասը: Դիցուք

$$f''(x_1)=0 \text{ և } f''(x_1)<0.$$

Քանի որ, ըստ պայմանի, $f''(x)$-ը անընդհատ է $x=x_1$ կետի որևէ շրջակայքում, ապա, ակնհայտ է, կգտնվի $x=x_1$ կետը շրջապատող այնպիսի փոքր հատված, որի բոլոր կետերում $f''(x)$ երկրորդ ածանցյալը կլինի բացասական:

Քանի որ $f''(x)$-ը առաջին ածանցյալի ածանցյալն է՝ $f''(x)=(f'(x))'$, ապա $(f'(x))'<0$ պայմանից հետևում է, որ $(f'(x)$-ը նվազում է $x=x_1$ կետն ընդգրկող հատվածում (§ 2, գլ. V): Բայց $f'(x_1)=0$, հետևաբար, այդ հատվածում, երբ $x<x_1$ ունենք $f'(x)>0$, իսկ երբ $x>x_1$ ունենք $f'(x)<0$, այսինքն $f'(x)$ ածանցյալը $x=x_1$ կետով անցնելիս նշանը փոխում է պլյուսից մինուս, իսկ դա նշանակում է, որ x_1 կետում $f(x)$ ֆունկցիան ունի մաքսիմում: Թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է:

Համանմանորեն ապացուցվում է թեորեմի երկրորդ մասը. այն է՝ եթե $f''(x_1)>0$, ապա $f''(x)>0$ x_1 կետը շրջապատող որևէ հատվածի բոլոր կետերում, բայց այդ դեպքում այդ հատվածում $f''(x)=(f'(x))'>0$ և, հետևաբար, $f'(x)$-ը աճում է: Քանի որ $f'(x_1)=0$, ապա, նշանակում է, որ $f'(x)$-ը x_1 կետով անցնելիս նշանը փոխում է մինուսից պլյուսի, այսինքն $f(x)$ ֆունկցիան $x=x_1$ կետում ունի մինիմում:

Եթե կրիտիկական կետում $f''(x_1)=0$, ապա այդ կետում կարող է լինել կամ մաքսիմում, կամ մինիմում կամ՝ ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում:

Այդ դեպքում հետազոտությունը պետք է կատարել առաջին եղանակով (տես § 4, գլ. V):

Երկրորդ ածանցյալի օգնությամբ էքստրեմումների հետազոտության սխեման կարելի է արտահայտել հետևյալ աղյուսակում.

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Կրիտիկական կետի բնույթը
0	–	Մաքսիմումի կետ
0	+	Մինիմումի կետ
0	0	Անհայտ է

Օրինակ 1. Հետազոտել

$$y=2\sin x+\cos 2x$$

ֆունկցիան, նկատի ունենալով մաքսիմումը և մինիմումը:

Լուծում. Քանի որ ֆունկցիան պարբերական է 2π պարբերությամբ, ապա բավական է այն ուսումնասիրել $[0, 2\pi]$ հատվածում:

1) Գտնում ենք ածանցյալը՝

$$y'=2\cos x-2\sin 2x=2(\cos x-2\sin x\cos x)=2\cos x(1-2\sin x),$$

2) Գտնում ենք արգումենտի կրիտիկական արժեքները՝

$$2\cos x(1-2\sin x)=0,$$

$$x_1=\frac{\pi}{6}, \quad x_2=\frac{\pi}{2}, \quad x_3=\frac{5\pi}{6}, \quad x_4=\frac{3\pi}{2},$$

3) Գտնում ենք երկրորդ ածանցյալը.

$$y''=-2\sin x-4\cos 2x.$$

4) Հետազոտենք յուրաքանչյուր կրիտիկական կետի բնույթը.

$$(y'')_{x_1=\frac{\pi}{6}}=-2\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2}=-3<0,$$

հետևաբար, $x_1=\frac{\pi}{6}$ կետում ունենք մաքսիմում.

$$(y)_{x=\frac{\pi}{6}}=2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

Այնուհետև,

$$(y'')_{x=\frac{\pi}{2}}=-2\cdot 1+4\cdot 1=2>0,$$

հետևաբար, $x_2=\frac{\pi}{2}$ կետում ունենք մինիմում.

$$(y)_{x=\frac{\pi}{2}}=2\cdot 1-1=1,$$

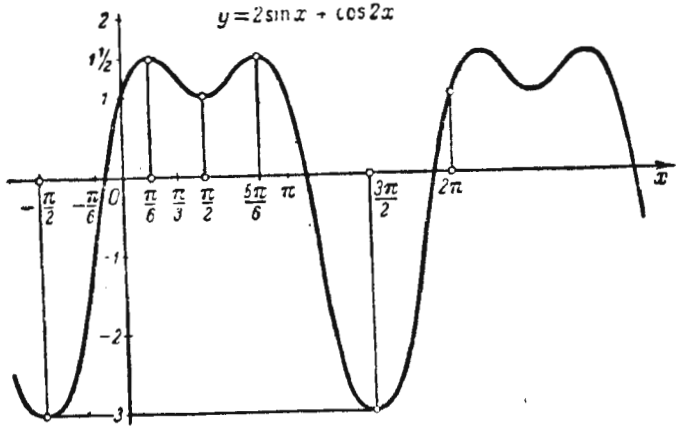
$x_3=\frac{5\pi}{6}$ կետում ունենք

$$(y'')_{x=\frac{5\pi}{6}}=-2\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2}=-3<0,$$

հետևաբար, $x_3=\frac{5\pi}{6}$ կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում.

$$(y)_{x=\frac{5\pi}{6}}=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

վերջապես,



Նկ. 109

$$(y'')_{x=\frac{3\pi}{2}}=-2(-1)-4(-1)=6>0,$$

հետևաբար, $x_4=\frac{3\pi}{2}$ կետում ունենք մինիմում.

$$(y)_{x=\frac{3\pi}{2}}=2(-1)-1=-3,$$

հետազոտվող ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 109-ում։

Այնուհետև, ցույց տանք օրինակների վրա, որ եթե որևէ $x=x_1$ կետում ունենք $f'(x_1)=0$, և $f''(x_1)=0$, ապա այդ կետում $f(x)$ ֆունկցիան կարող է ունենալ կամ մաքսիմում, կամ մինիմում, կամ չունենա ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում։

Օրինակ 2։ Հետազոտել

$$y=1-x^4$$

ֆունկցիան, նկատի ունենալով մաքսիմումը և մինիմումը։

Լուծում։ 1) Գտնում ենք կրիտիկական կետերը. $y'=-4x^3$, $-4x^3=0$ $x=0$։

2) Որոշում ենք երկրորդ ածանցյալի նշանը $x=0$ կետում.

$$x''=-12x^2,\ (y'')_{x=0}=0,$$

հետևաբար, տվյալ դեպքում երկրորդ ածանցյալի միջոցով չի կարելի պարզել կրիտիկական կետի բնույթը։

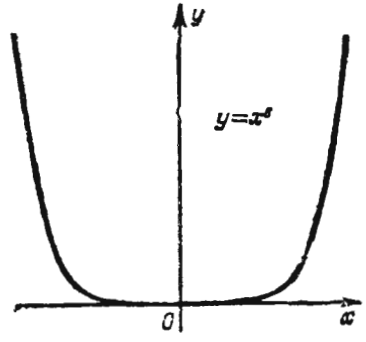
3) Կրիտիկական կետի բնույթն ուսումնասիրենք առաջին եղանակով (տես § 4, գլ. V).

$$(y')_{x<0}>0,\qquad (y')_{x>0}<0,$$

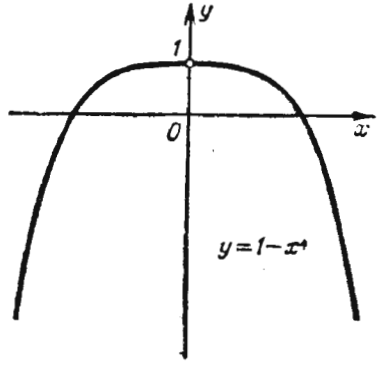
հետևաբար, $x=0$ կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում, այն է՝

$$(y)_{x=0}=1,$$

Դիտարկված ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 110-ում։



Նկ. 110



Նկ. 111

Օրինակ 3։ Նկատի ունենալով մաքսիմումը և մինիմումը հետազոտել

$$y=x^6$$

ֆունկցիան։

Լուծում։ Երկրորդ եղանակով գտնում ենք.

1) $y'=6x^5$, $y'=6x^5=0$, $x=0$։ 2) $y''=30x^4$, $(y'')_{x=0}=0$։

Հետևաբար, երկրորդ եղանակը պատասխան չի տալիս։ Դիմելով առաջին եղանակին, ստանում ենք.

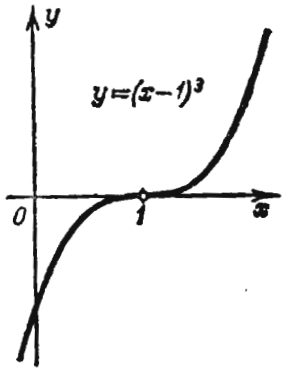
$$(y')_{x<0}<0,\qquad (y')_{x>0}>0,$$

հետևաբար, երբ $x=0$ ֆունկցիան ունի մինիմում (նկ. 111)։

Օրինակ 4։ Նկատի ունենալով մաքսիմումը և մինիմումը՝ հետազոտել

$$y=(x-1)^3$$

ֆունկցիան։



Նկ. 112

Լուծում։ Երկրորդ եղանակ.

$$y'=3(x-1)^2,\quad 3(x-1)^2=0,\quad x=1;$$

$$y''=6(x-1),\quad (y'')_{x=1}=0;$$

Այսպիսով, երկրորդ եղանակը պատասխան չի տալիս։

Առաջին եղանակով գտնում ենք.

$$(y')_{x<1}>0,\quad (y')_{x>1}>0;$$

Հետևաբար, երբ x=1 ֆունկցիան չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում (նկ. 112)։

§ 6. Ֆունկցիայի ամենամեծ և ամենափոքր արժեքները հատվածում

Դիցուք y=f(x) ֆունկցիան անընդհատ է [a, b] հատվածում։ Այդ դեպքում տրված հատվածում ֆունկցիան հասնում է ամենամեծ արժեքի (տես § 10, գլ. II)։ Ենթադրելու ենք, որ f(x) ֆունկցիան տրված հատվածում ունի վերջավոր թվով կրիտիկական կետեր։ Եթե ամենամեծ արժեքը հասնում է [a, b] հատվածի ներսում, ապա ակնհայտ է, որ այդ արժեքը կլինի ֆունկցիայի մաքսիմումներից մեկը (եթե կա մի քանի մաքսիմում), այն է՝ ամենամեծ մաքսիմումը։ Բայց կարող է պատահել, որ ամենամեծ արժեքը ֆունկցիան ընդունի հատվածի ծայրերից մեկում։

Եվ այսպես, ֆունկցիան [a, b] հատվածում իր ամենամեծ արժեքին հասնում է կամ այդ հատվածի ծայրերից մեկում, կամ այդ հատվածի այնպիսի ներքին կետում, որը մաքսիմումի կետ է։

Նույնը կարելի է ասել և ֆունկցիայի ամենափոքր արժեքի մասին. այն հասնում է կամ տվյալ հատվածի ծայրերից մեկում, կամ այնպիսի ներքին կետում, որը հանդիսանում է մինիմումի կետ։

Նախորդից հետևում է հետևյալ կանոնը. եթե պահանջվում է գտնել անընդհատ ֆունկցիայի ամենամեծ արժեքը [a, b] հատվածում, ապա պետք է.

1) գտնել ֆունկցիայի բոլոր մաքսիմումները հատվածում,

2) որոշել ֆունկցիայի արժեքները հատվածի ծայրերում, այսինքն՝ հաշվել f(a)-ն և f(b)-ն,

3) ֆունկցիայի վերը ստացված բոլոր արժեքներից ընտրել ամենամեծը. վերջինս էլ կլինի ֆունկցիայի ամենամեծ արժեքը հատվածում։

Համանման ձևով անհրաժեշտ է վարվել ֆունկցիայի ամենափոքր արժեքը որոշելիս։

Օրինակ։ Որոշել y^3-3x+3 ֆունկցիայի ամենամեծ և ամենափոքր արժեքները $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ հատվածում։

Լուծում։ Գտնում ենք ֆունկցիայի մաքսիմումները և մինիմումները $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ հատվածում.

$$y'=3x^2-3,\quad 3x^2-3=0,\quad x_1=1,$$

$$x_2=-1,\quad y''=6x,$$

այդ դեպքում

$$(y'')_{x=1}=6>0;$$

Հետևաբար, x=1 կետում առկա է մինիմում.

$$(y)_{x=1}=1;$$

Այնուհետև,

$$(y'')_{x=-1}=-6<0;$$

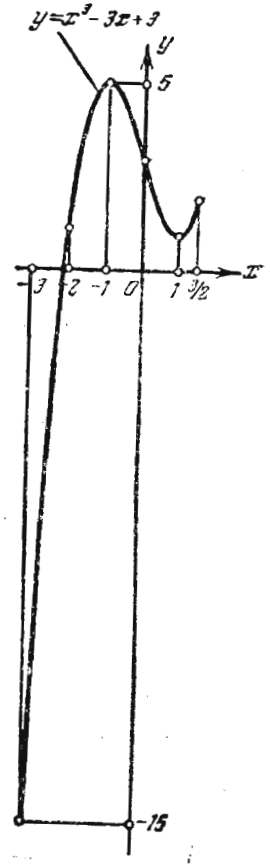
Հետևաբար, x=−1 կետում առկա է մաքսիմում.

$$(y)_{x=-1}=5;$$

2) Որոշում ենք ֆունկցիայի արժեքը հատվածի ծայրերում.

$$(y)_{x=\frac{3}{2}}=\frac{15}{8},\quad (y)_{x=-3}=-15;$$

Այսպիսով, $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ հատվածում դիտարկվող ֆունկցիայի ամենամեծ արժեքն է՝



Նկ. 113

$$(y)_{x=-1}=5,$$

իսկ ամենափոքր արժեքը՝

$$(y)_{x=-3}=-15;$$

Դիտարկված ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 113-ում։

§ 7. Ֆունկցիաների մաքսիմումի և մինիմումի տեսության կիրառումը խնդիրներ լուծելու նկատմամբ

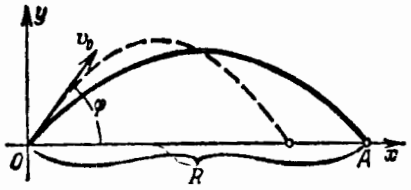
Մաքսիմումի և մինիմումի տեսության օգնությամբ լուծվում են երկրաչափության, մեխանիկայի և այլ շատ խնդիրներ։ Դիտարկենք այդ խնդիրներից մի քանիսը։

Խնդիր 1. Հորիզոնի նկատմամբ φ անկյան տակ թեքված հրանոթից արձակված v_0 սկզբնական արագությունն ունեցող գնդի թռիչքի (դատարկության մեջ) R=OA (նկ. 114) հեռավորությունը որոշվում է

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\varphi}{g}$$

բանաձևով (g-ն ծանրության ուժի արագացումն է)։ Որոշել φ անկյունը, որի դեպքում R հեռավորությունը կլինի ամենամեծը տրված v_0 սկզբնական արագության դեպքում։

Լուծում։ R *մեծությունը* φ *փոփոխական անկյան ֆունկցիան է։* $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ *հատվածում ուսումնասիրենք այդ ֆունկցիայի մաքսիմումը։*



Նկ. 114

$$\frac{dR}{d\varphi}=\frac{2v_0^2\cos 2\varphi}{g};\quad \frac{2v_0^2\cos 2\varphi}{g}=0;$$

կրիտիկական արժեքն է՝ $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2}=-\frac{4v_0^2\sin 2\varphi}{g};\qquad \left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{4}}=-\frac{4v_0^2}{g}<0;$$

Հետևաբար, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ *արժեքի դեպքում* R *թռիչքի հեռավորությունը ունի մաքսիմում.*

$$(R)_{\varphi=\frac{\pi}{4}}=\frac{v_0^2}{g};$$

R *ֆունկցիայի արժեքները* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *հատվածի ծայրերում հավասար են*

$$(R)_{\varphi=0}=0,\quad (R)_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=0;$$

Այսպիսով, գտնված մաքսիմումը հենց R-ի որոնվող ամենամեծ արժեքն է։

Խնդիր 2։ Ինչպիսի չափսեր պետք է տալ գլանին, որ տրված v ծավալի դեպքում նրա S լրիվ մակերեսությունը լինի ամենամեծը։

Լուծում։ Նշանակելով r-ով գլանի հիմքի շառավիղը և h-ով՝ գլանի բարձրությունը, կունենանք.

$$S=2\pi r^2+2\pi rh;$$

Քանի որ գլանի ծավալը տրված է, ապա տվյալ r-ի դեպքում h մեծությունը որոշվում է

$$v=\pi r^2h$$

բանաձևով, որտեղից

$$h=\frac{v}{\pi r^2};$$

h-ի այս արտահայտությունը տեղադրելով S-ի համար բանաձևի մեջ, ստանում ենք.

$$S=2\pi r^2+2\pi r\frac{v}{\pi r^2},\ \text{կամ}$$

$$S=2\left(\pi r^2+\frac{v}{r}\right);$$

Այստեղ v-ն տրված թիվ է։ Այսպիսով, S-ը մենք ներկայացրեցինք որպես r մեկ անկախ փոփոխականի ֆունկցիա։

Գտնենք այդ ֆունկցիայի ամենափոքր արժեքը $0<r<\infty$ *միջակայքում.*

$$\frac{dS}{dr}=2\left(2\pi r-\frac{v}{r^2}\right),$$

$$2\pi r-\frac{v}{r^2}=0,\quad r_1=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1}=2\left(2\pi+\frac{2v}{r^3}\right)_{r=r_1}>0;$$

Հետևաբար, $r=r_1$ *կետում S ֆունկցիան ունի մինիմում։ Նկատելով, որ* $\lim\limits_{r\to 0}S=\infty$ *և* $\lim\limits_{r\to\infty}S=\infty$, *այսինքն, որ r-ը զրոյի կամ անվերջության ձգտելիս S մակերևույթը անսահմանորեն աճում է, մենք գալիս ենք այն եզրակացության, որ* $r=r_1$ *կետում S ֆունկցիան ունի փոքրագույն արժեք։*

Բայց եթե $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, ապա

$$h=\frac{V}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2r:$$

Այսպիսով, որպեսզի տրված V ծավալի դեպքում գլանի S լրիվ մակերևույթը լինի ամենափոքրը, գլանի բարձրությունը պետք է հավասար լինի նրա տրամագծին:

§ 8. Ֆունկցիայի հետազոտությունը Թեյլորի բանաձևի օգնությամբ՝ նկատի ունենալով մաքսիմումը և մինիմումը

V գլխի § 5-ում նկատվել էր, որ եթե $x=a$ կետում ունենք $f'(a)=0$ և $f''(a)=0$, ապա այդ կետում կարող է լինել մաքսիմում կամ մինիմում, կամ էլ ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում: Ընդ որում մատնանշվել է, որ հարցի լուծման համար այդ դեպքում պետք է հետազոտությունը տանել առաջին եղանակով, այսինքն՝ $x=a$ կետից ձախ և աջ առաջին ածանցյալի նշանի ուսումնասիրության ճանապարհով:

Այժմ մենք ցույց տանք, որ այդ դեպքում հետազոտությունը կարելի է տանել գլ. VI-ի § 8-ում արտածած Թեյլորի բանաձևի օգնությամբ:

Բավականաչափ ընդհանրության համար ենթադրենք, որ ոչ միայն $f''(x)$, այլև $f(x)$ ֆունկցիայի ներառյալ մինչև n-րդ կարգի ածանցյալները $x=a$ կետում դառնում են զրո:

$$f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n)}_{(a)},=0 \qquad (1)$$

իսկ

$$f^{(n+1)}(a)\neq 0:$$

Այնուհետև, ենթադրենք, որ $x=a$ կետի շրջակայքում $f(x)$-ը ունի ներառյալ մինչև $(n+1)$-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ:

Գրենք Թեյլորի բանաձևը $f(x)$ ֆունկցիայի համար, ուշադրություն դարձնելով (1) հավասարությունների վրա.

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \qquad (2)$$

որտեղ ξ-ն a-ի և x-ի միջև պարփակված թիվ է:

Քանի որ $f^{(n+1)}(x)$-ը անընդհատ է a կետի շրջակայքում և $f^{(n+1)}(a)\neq 0$, ապա կգտնվի այնպիսի h փոքր դրական թիվ, որ $|x-a|<h$ անհավասարությանը բավարարող ցանկացած x-ի դեպքում՝ $f^{(n+1)}(x)\neq 0$: Ընդ որում, եթե $f^{(n+1)}(a)>0$, ապա և $(a-h, a+h)$ միջակայքի մյուս բոլոր կետերում $f^{(n+1)}(x)>0$: Եթե $f^{(n+1)}(a)<0$, ապա այդ միջակայքի բոլոր կետերում՝ $f^{(n+1)}(x)<0$:

(2) բանաձևն արտագրենք հետևյալ տեսքով՝

$$f(x)-f(a)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad (2')$$

և քննարկենք տարբեր մասնավոր դեպքեր:

Առաջին դեպք: n-ը կենտ է:

ա) Դիցուք $f^{(n+1)}(a)<0$: Այդ դեպքում կգտնվի $(a-h, a+h)$ միջակայք, որի բոլոր կետերում $(n+1)$-րդ ածանցյալը բացասական է: Եթե x-ը այդ միջակայքի կետ է, ապա ξ-ն նույնպես գտնվում է $(a-h)$-ի և $(a+h)$-ի միջև և, հետևաբար, $f^{(n+1)}(\xi)<0$: Քանի որ $(n+1)$-ը զույգ թիվ է, ապա $(x-a)^{n+1}>0$, երբ $x\neq a$, և այդ պատճառով (2′) բանաձևի աջ մասը բացասական է:

Հետևաբար, $x\neq a$ դեպքում $(a-h, a+h)$ միջակայքի բոլոր կետերում ունենք.

$$f(x)-f(a)<0,$$

իսկ դա նշանակում է, որ երբ $x=a$ ֆունկցիան ունի մաքսիմում:

բ) Դիցուք $f^{n+1}(a)>0$: Այդ դեպքում h-ի բավականաչափ փոքր արժեքի դեպքում $(a-h, a+h)$ միջակայքի բոլոր x կետերում $f^{(n+1)}(\xi)>0$: Հետևաբար (2′) բանաձևի աջ մասը կլինի դրական, այսինքն՝ երբ $x\neq a$ նշված միջակայքի բոլոր կետերում

$$f(x)-f(a)>0,$$

իսկ դա նշանակում է, որ $x=a$ կետում ֆունկցիան ունի մինիմում:

Երկրորդ դեպք: n-ը զույգ է:

Այդ դեպքում $(n+1)$-ը կենտ է և $(x-a)^{n+1}$ մեծությունն ունի տարբեր նշաններ, երբ $x<a$ և երբ $x>a$:

Եթե h-ը բացարձակ մեծությամբ բավականաչափ փոքր է, ապա $(a-h, a+h)$ միջակայքի բոլոր կետերում $(n+1)$-րդ ածանցյալը պահպանում է a կետում ունեցած նշանը: Հետևաբար, $f(x)-f(a)$ տարբերությունն ունի տարբեր նշաններ, երբ $x<a$ և երբ $x>a$: Բայց դա նշանակում է, որ $x=a$ կետում չկա ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում:

Նկատենք, որ երբ զույգ n-ի համար $f^{(n+1)}(a)>0$, ապա $f(x)<$

$<f(a)$ $x<a$ համար և $f(x)>f(a)$ $x>a$ համար։

Իսկ եթե զույգ n-ի համար $f^{(n+1)}(a)<0$, ապա $f(x)>f(a)$, երբ $x<a$ և $f(x)<f(a)$, երբ $x>a$։

Ստացած արդյունքները կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ։

Եթե $x=a$ կետում ունենք

$$f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=0$$

և առաջին զրո չդարձող $f^{(n+1)}(a)$ ածանցյալը զույգ կարգի ածանցյալ է, ապա a կետում

$f(x)$-ը ունի մաքսիմում, եթե $f^{(n+1)}(a)<0$,

$f(x)$-ը ունի մինիմում, եթե $f^{(n+1)}(a)>0$։

Իսկ եթե առաջին զրո չդարձող $f^{(n+1)}(a)$ ածանցյալը կենտ կարգի ածանցյալ է, ապա ֆունկցիան $x=a$ կետում չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում։ Այդ դեպքում

$f(x)$-ը աճում է, եթե $f^{(n+1)}(a)>0$,

$f(x)$-ը նվազում է, եթե $f^{(n+1)}(a)<0$։

Օրինակ։ Հետազոտել $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$ ֆունկցիան՝ նկատի ունենալով մաքսիմումը և մինիմումը։

Լուծում։ Գտնենք ֆունկցիայի կրիտիկական արժեքները

$$f'(x)=4x^3-12x^2+12x-4=4(x^3-3x^2+3x-1)։$$

$4(x^3-3x^2+3x-1)=0$ հավասարումից ստանում ենք

$$x=1$$

միակ կրիտիկական կետը (քանի որ տվյալ հավասարումն ունի միայն մեկ իրական արմատ)։

Ուսումնասիրենք $x=1$ կրիտիկական կետի բնույթը.

$f''(x)=12x^2-24x+12=0$, երբ $x=1$,

$f'''(x)=24x-24=0$, երբ $x=1$

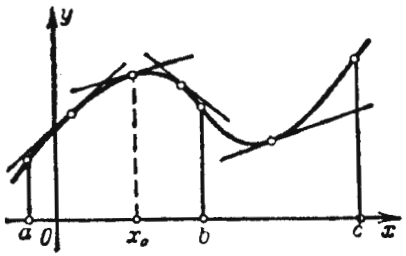
$f^{IV}(x)=24>0$, ցանկացած x-ի դեպքում։

Հետևաբար ֆունկցիան ունի մինիմում, երբ $x=1$։

§ 9. Կորի ուռուցիկությունը և գոգավորությունը։ Շրջման կետեր

Ուսումնասիրենք հարթության վրա $y=f(x)$ կորը, որը հանդիսանում է $f(x)$ միարժեք դիֆերենցելի ֆունկցիայի գրաֆիկ։

Սահմանում 1։ Մենք ասում ենք, որ կորը (a, b) միջակայքում շրջված է ուռուցիկությամբ դեպի վեր, եթե կորի բոլոր կետերն ընկած են այդ միջակայքում նրա ցանկացած շոշափողից ներքև։



Նկ. 115

Մենք ասում ենք, որ կորը (b, c) միջակայքում շրջված է ուռուցիկությամբ դեպի ներքև, եթե կորի բոլոր կետերը ընկած են այդ միջակայքում նրա ցանկացած շոշափողից վերև։

Կորը, որը շրջված է ուռուցիկությամբ դեպի վեր, կանվանենք ուռուցիկ, իսկ եթե շրջված է ուռուցիկությամբ դեպի ներքև՝ գոգավոր։

Նկ. 115-ում ցույց է տրված կոր, որն ուռուցիկ է (a, b) միջակայքում և գոգավոր՝ (b, c) միջակայքում։

Կորի ուռուցիկության ուղղությունը հանդիսանում է նրա ձևի կարևոր բնութագիր։ Սույն պարագրաֆը նվիրված է այնպիսի հատկանիշերի հաստատմանը, ըստ որոնց կարելի է, ուսումնասիրելով $y=f(x)$ ֆունկցիան, դատել տարբեր միջակայքերում նրա գրաֆիկի ուռուցիկության ուղղության մասին։

Ապացուցենք հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ 1։ Եթե (a, b) միջակայքի բոլոր կետերում $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալը բացասական է, այսինքն՝ $f''(x)<0$, ապա $y=f(x)$ կորն այդ միջակայքում շրջված է ուռուցիկությամբ դեպի վեր (կորն ուռուցիկ է)։

Ապացույց։ (a, b) միջակայքում վերցնենք կամայական $x=x_0$ կետ (նկ. 115) և $x=x_0$ աբսցիսն ունեցող կետում տանենք կորի շոշափողը։ Թեորեմը կապացուցվի, եթե մենք հաստատենք, որ (a, b) միջակայքում կորի բոլոր կետերն ընկած են այդ շոշափողից ներքև, այսինքն, որ $y=f(x)$ կորի ցանկացած կետի օրդինատ x-ի միևնույն արժեքի դեպքում փոքր է շոշափողի y օրդինատից։

Կորի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝ $y=f(x)$։

Իսկ $x=x_0$ կետում կորի շոշափողի հավասարումն ունի

$$\bar{y}-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$

կամ

$$\bar{y}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad (2)$$

տեսքը։

(1) և (2) հավասարումներից հետևում է, որ կորի և շոշափողի օրդինատների տարբերությունը x-ի միևնույն արժեքի դեպքում հավասար է

$$y-\bar{y}=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0):$$

$f(x)-f(x_0)$ տարբերության նկատմամբ կիրառելով Լագրանժի բանաձևը, կստանանք.

$$y-\bar{y}=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

(որտեղ c-ն ընկած է x_0-ի և x-ի միջև), կամ

$$y-\bar{y}=[f'(c)-f'(x_0)](x-x_0):$$

Քառակուսի փակագծերում եղած արտահայտության նկատմամբ նորից կիրառենք Լագրանժի թեորեմը. այդ դեպքում

$$y-\bar{y}=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0) \qquad (3)$$

(որտեղ c_1-ն ընկած է x_0-ի և x-ի միջև):

Նախ քննարկենք այն դեպքը, երբ $x>x_0$: Այդ դեպքում $x_0<c_1<c<x$. քանի որ

$$x-x_0>0, \quad c-x_0>0$$

և քանի որ, բացի դրանից, ըստ պայմանի

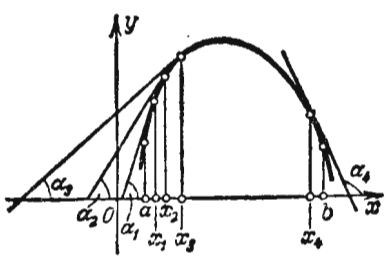
$$f''(c_1)<0,$$

ապա (3) հավասարությունից հետևում է, որ $y-\bar{y}<0$:

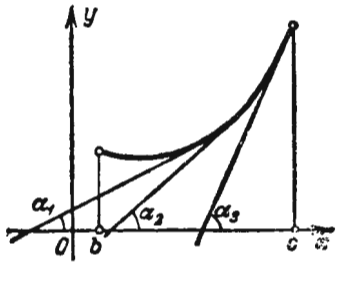
Քննարկենք այժմ այն դեպքը, երբ $x<x_0$: Այդ դեպքում $x<c<c_1<x_0$ և $x-x_0<0$, $c-x_0<0$, բայց քանի որ ըստ պայմանի $f''(c_1)<0$, ապա (3) հավասարությունից հետևում է, որ

$$y-\bar{y}<0:$$

Այսպիսով, մենք ապացուցեցինք, որ կորի ցանկացած կետ ընկած է կորի շոշափողից ներքև՝ ինչպիսին էլ լինեն x և x_0 արժեքները



Նկ. 116



Նկ. 117

(a, b) միջակայքում: Իսկ դա էլ նշանակում է, որ կորն ուռուցիկ է: Թեորեմն ապացուցված է:

Համանման ձևով ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1′: Եթե (b, c) միջակայքի բոլոր կետերում f(x) ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալը դրական է, այսինքն $f''(x)>0$, ապա $y=f(x)$ կորն այդ միջակայքում շրջված է ուռուցիկությամբ դեպի ներքև (կորը գոգավոր է):

Դիտողություն: (1) և (1′) թեորեմների բովանդակությունը կարելի է մեկնաբանել երկրաչափորեն: Դիտարկենք $y=f(x)$ կորը, որը (a, b) միջակայքում ուռուցիկությամբ շրջված է դեպի ներքև (նկ. 116): $f'(x)$ ածանցյալը հավասար է x աբսցիսն ունեցող կետում շոշափողի α թեքության անկյան տանգենսին, այսինքն $f'(x)=\mathrm{tg}\alpha$: Ուստի $f''(x)=[\mathrm{tg}\alpha]'_x$: Եթե $f''(x)<0$ (a, b) միջակայքի բոլոր x-երի համար, ապա դա նշանակում է, որ tgα-ն նվազում է x-ի աճման հետ միասին: Երկրաչափորեն ակնառու է այն փաստը, որ եթե tgα-ն նվազում է x-ի աճման հետ, ապա համապատասխան կորն ուռուցիկ է: Այս փաստի անալիտիկ ապացույցն էլ թեորեմ 1-ն է:

Նման ձևով երկրաչափորեն մեկնաբանվում է և թեորեմ 1′-ը (նկ. 117):

Օրինակ 1: Գտնել $y=2-x^2$ հավասարումով տրված կորի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը:

Լուծում: Երկրորդ ածանցյալը՝

$$y''=-2<0$$

x-ի բոլոր արժեքների համար: Հետևաբար կորն ամենուրեք շրջված է ուռուցիկությամբ դեպի վերև (նկ. 118):

Օրինակ 2: Կորը տված է հետևյալ հավասարումով՝

$$y=e^x,$$

քանի որ

$$y''=e^x>0$$

x-ի բոլոր արժեքների համար, ապա կորն ամենուրեք գոգավոր է, այսինքն՝ շրջված է ուռուցիկությամբ դեպի ներքև (նկ. 119):

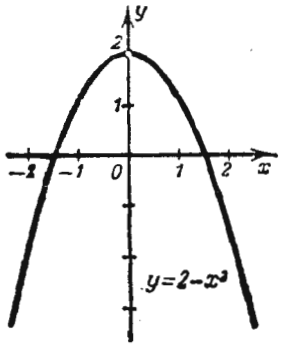
Օրինակ 3: Կորը որոշվում է հետևյալ հավասարումով՝

$$y=x^3,$$

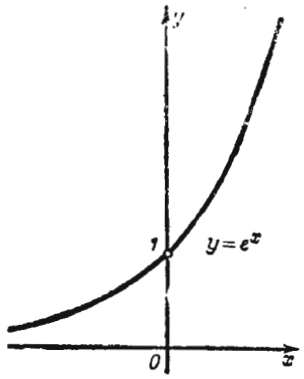
քանի որ

$$y''=6x,$$

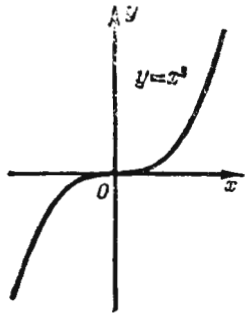
ապա $y''<0$, երբ $x<0$ և $y''>0$, երբ $x>0$: Հետևաբար, երբ $x<0$՝ կորը շրջված է ուռուցիկությամբ դեպի վեր, իսկ երբ $x>0$՝ ուռուցիկությամբ դեպի ներքև (նկ. 120):



Նկ. 118



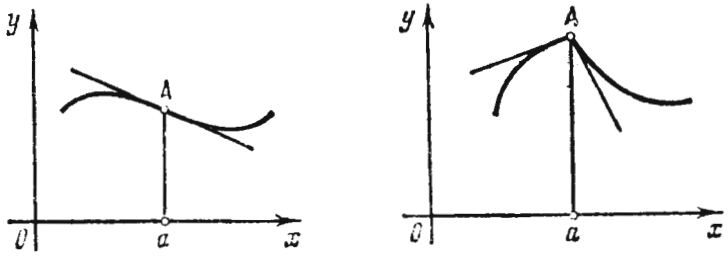
Նկ. 119



Նկ. 120

Սահմանում 2։ Անընդհատ կորի ուռուցիկ մասը գոգավորից բաժանող կետը կոչվում է կորի շրջման կետ։

120, 121, 122 նկարներում O, A և B կետերը շրջման կետեր են։



ա) բ)

Նկ. 121

Ակնհայտ է, որ շրջման կետում շոշափողը, եթե այն գոյություն ունի, հատում է կորը, քանի որ այդ կետի մի կողմում կորն ընկած է շոշափողից ներքև, իսկ մյուս կողմում՝ նրանից վերև։

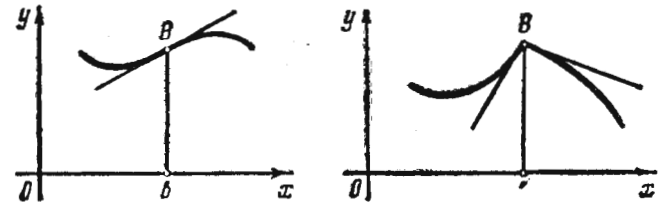
Այժմ հաստատենք կորի տվյալ կետը շրջման կետ հանդիսանալու բավարար պայմանները։

Թեորեմ 2։ Դիցուք կորը որոշվում է $y=f(x)$ հավասարումով։ Եթե $f''(a)=0$ կամ $f''(a)$-ն գոյություն չունի և $x=a$ արժեքով անցնելիս $f''(x)$ածանցյալը փոխում է նշանը, ապա կորի $x=a$ աբսցիսան ունեցող կետը շրջման կետ է։

Ապացույց։ 1) Դիցուք $f''(x)<0$, երբ, $x<a$ և $f''(x)>0$, երբ $x>a$։

Այդ դեպքում, երբ $x<a$ կորը շրջված է ուռուցիկությամբ դեպի վեր և ուռուցիկությամբ դեպի ներքև՝ երբ $x>a$։ Հետևաբար, կորի $x=a$ աբսցիսան ունեցող A կետը շրջման կետ է։

2) Եթե $f''(x)>0$, երբ $x<b$ և $f''(x)<0$, երբ $x>b$, ապա երբ $x<b$ կորը շրջված է ուռուցիկությամբ դեպի ներքև, իսկ երբ $x>b$ ուռուցիկությամբ դեպի վերև։ Հետևաբար, կորի $x=b$ աբսցիսան ունեցող B կետը շրջման կետ է (տես նկ. 122)։



ա) բ)

Նկ. 122

Օրինակ 4։ Գտնել $y=e^{-x^2}$ կորի (Գաուսի կոր) շրջման կետերը և որոշել ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը։

Լուծում։ 1) Գտնում ենք առաջին և երկրորդ ածանցյալները՝

$$y'=-2xe^{-x^2},$$

$$y''=2e^{-x^2}(2x^2-1).$$

2) Առաջին և երկրորդ ածանցյալները գոյություն ունեն ամենուրեք։ Գտնում ենք x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $y''=0$.

$$2e^{-x^2}(2x^2-1)=0,$$

$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

3) Հետազոտենք ստացված արժեքները.

երբ $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ունենք $y''>0$,

երբ $x>-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ունենք $y''<0$;

երկրորդ ածանցյալը x_1 կետով անցնելիս նշանը փոխում է, հետևաբար, երբ $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ կորի վրա առկա է շրջման կետ, որի կոորդինատներն են՝

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}}\right),$$

երբ $x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ ուստի $y''<0$.

երբ $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ ունենք $y''>0$։

Հետևաբար, երբ $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ նույնպես կորի վրա կա շրջման կետ. նրա կոորդինատներն են՝ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$։ Ասենք, երկրորդ շրջման կետի գոյությունը բխում է անմիջապես կորի՝ Oy առանցքի նկատմամբ սիմետրիկությունից։

4) Նախորդից հետևում է, որ

երբ $-\infty<x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$, կորը գոգավոր է,

երբ $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$, կորը ուռուցիկ է,

երբ $\frac{1}{\sqrt{2}}<x<+\infty$, կորը գոգավոր է։

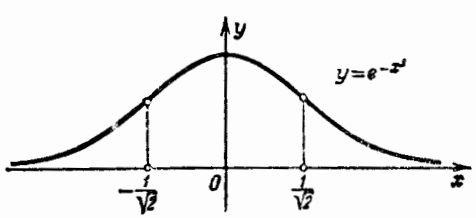
5) Առաջին ածանցյալի՝ $y'=-2xe^{-x^2}$ արտահայտությունից հետևում է, որ

$y'>0$, երբ $x<0$ այսինքն՝ ֆունկցիան աճում է,

$y'<0$, երբ $x>0$, այսինքն՝ ֆունկցիան նվազում է,

$y'=0$, երբ $x=0$։

Այդ կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում, այն է՝ $y=1$։



Նկ. 123

Կատարված հետազոտության հիման վրա հեշտ է կառուցել կորի գրաֆիկը (նկ. 123)։

Օրինակ 5։ Գտնել

$$y=x^4$$

կորի շրջման կետերը։

Լուծում։ 1) Գտնում ենք երկրորդ ածանցյալը.

$$y''=12x^2,$$

2) Որոշում ենք այն կետերը, որտեղ $y''=0$.

$$12x^2=0,\ x=0,$$

3) Հետազոտում ենք ստացված $x=0$ արժեքը.

$y''>0$, երբ $x<0$, կորը գոգավոր է,

$y''>0$, երբ $x>0$, կորը գոգավոր է։

Հետևաբար, կորը չունի շրջման կետեր (նկ. 124)։

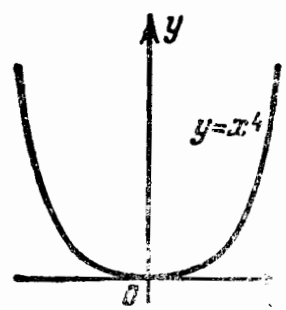
Օրինակ 6։ Գտնել $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ կորի շրջման կետերը։

Լուծում։ 1) Գտնում ենք առաջին և երկրորդ ածանցյալները.

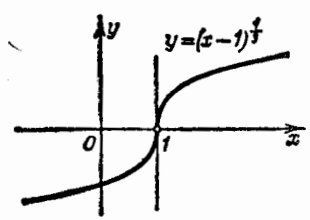
$$y'=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}},$$

$$y''=-\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}},$$

2) Երկրորդ ածանցյալը ոչ մի տեղ զրո չի դառնում, բայց երբ $x=1$ այն գոյություն չունի ($y''=\pm\infty$)։



Նկ. 124



Նկ. 125

3) Հետազոտենք $x=1$ արժեքը.

$y''>0$, երբ $x<1$, կորը գոգավոր է

$y''<0$, երբ $x>1$, կորը ուռուցիկ է։

Հետևաբար, (1,0 կետը շրջման կետ է։

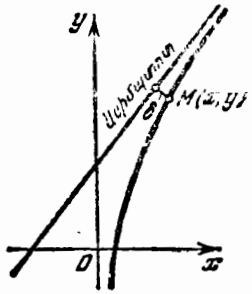
Նկատենք, որ $y'=\infty$, երբ $x=1$, այսինքն՝ այդ կետում կորն ունի ուղղաձիգ շոշափող (նկ. 125)։

§ 10. Ասիմպտոտներ

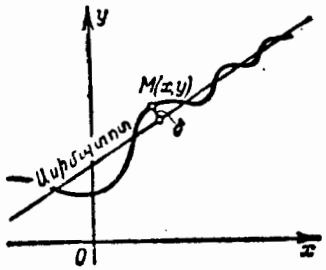
Շատ հաճախ հարկ է լինում հետազոտել $y=f(x)$ կորի ձևը, նշանակում է, և համապատասխան ֆունկցիայի փոփոխման բնույթը կորի փոփոխական կետի աբսցիսի կամ օրդինատի կամ միաժամանակ աբսցիսի և օրդինատի անսահմանափակ աճման (բացարձակ արժեքով) դեպքում։ Ընդ որում կարևոր մասնավոր դեպք է հանդիսանում այն, երբ հետազոտվող կորը անսահմանափակ մոտենում է որևէ ուղղի՝ նրա փոփոխական կետն անվերջություն հեռանալիս*)։

Սահմանում։ A ուղիղը կոչվում է կորի ասիմպտոտ, եթե կորի M փոփոխական կետի δ հեռավորությունն այդ ուղղից ձգտում է զրոյի, երբ M կետը հեռանում է անվերջություն (նկ. 126 և 127)։

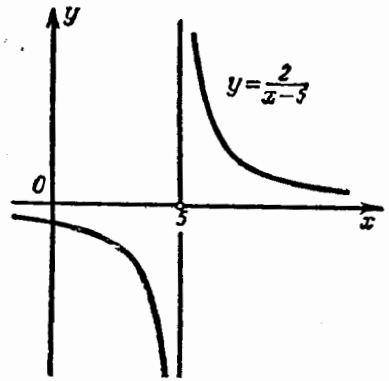
Հետագայում մենք կտարբերենք ուղղաձիգ (այսինքն՝ օրդինատների առանցքին զուգահեռ) և թեք (այսինքն՝ օրդինատների առանցքին ոչ զուգահեռ) ասիմպտոտներ։



Նկ. 126



Նկ. 127



Նկ. 128

1. Ուղղաձիգ ասիմպտոտներ։ Ասիմպտոտի սահմանումից հետևում է, որ եթե $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, կամ $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ կամ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, ապա $x=a$ ուղիղը $y=f(x)$ կորի ասիմպտոտն է, և հակադարձը, եթե $x=a$ ուղիղն ասիմպտոտ է, ապա տեղի ունի գրված հավասարություններից մեկը։

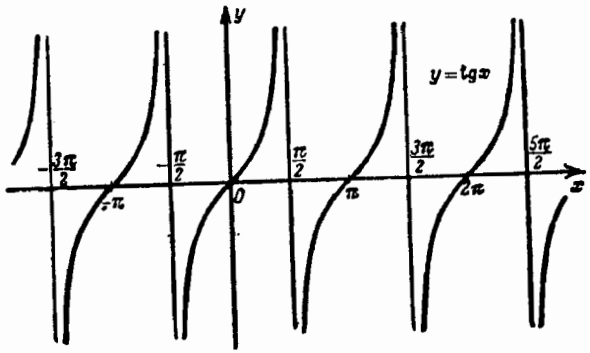
Հետևաբար, ուղղաձիգ ասիմպտոտների որոնման համար պետք է գտնել այնպիսի $x=a$ արժեքներ, որոնց մոտենալիս $y=f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է անվերջության։ Այդ դեպքում $x=a$ ուղիղը կլինի ուղղաձիգ ասիմպտոտ։

Օրինակ 1։ $y=\frac{2}{x-5}$ կորն ունի $x=5$ ուղղաձիգ ասիմպտոտը, քանի որ $y\to\infty$, երբ $x\to 5$ (նկ. 128)։

Օրինակ 2։ $y=\operatorname{tg}x$ կորն ունի անսահման թվով ուղղաձիգ ասիմպտոտներ.

$$x=\pm\frac{\pi}{2},\quad x=\pm\frac{3\pi}{2},\quad x=\pm\frac{5\pi}{2},\ \ldots$$

Սա հետևում է նրանից, որ $\operatorname{tg}x\to\infty$, երբ x-ը ձգտում է $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$,... կամ $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$,... արժեքների (նկ. 129)։



Նկ. 129

Օրինակ 3։ $y=e^{\frac{1}{x}}$ կորն ունի $x=0$ ուղղաձիգ ասիմպտոտը, քանի որ $\lim\limits_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}}=\infty$ (նկ. 130)։

II. Թեք ասիմպտոտներ։ Դիցուք $y=f(x)$ կորն ունի թեք ասիմպտոտ, որի հավասարումն ունի

$$y=kx+b \tag{1}$$

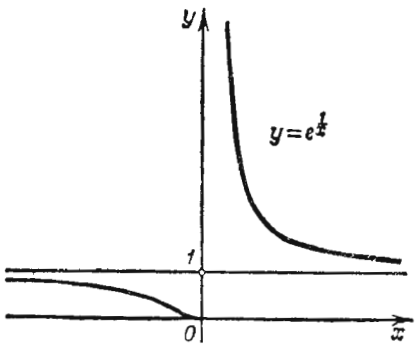
տեսքը։ Որոշենք k և b թվերը (նկ. 131)։ Դիցուք $M(x, y)$-ը կորի վրա գտնվող կետ է, իսկ $N(x, \bar{y})$-ը ասիմպտոտի վրա գտնվող կետ է, իսկ MP հատվածի երկարությունը հավասար է M կետից մինչև ասիմպտոտը եղած հեռավորությանը։ Ըստ պայմանի

$$\lim_{x\to+\infty} MP=0։ \tag{2}$$

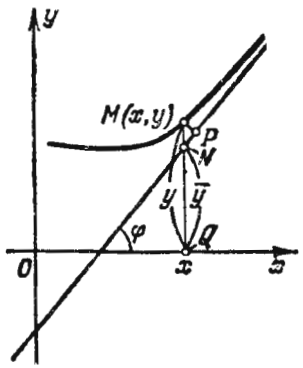
* Մենք ասում ենք, որ M փոփոխական կետը կորի վրայով շարժվում է անվերջություն, եթե այդ կետի հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից անսահմանորեն աճում է։

Եթե φ-ով նշանակենք ասիմպտոտի թեքման անկյունը Ox առանցքի նկատմամբ, ապա ΔNMP-ից գտնում ենք.

$$NM=\frac{MP}{\cos\varphi};$$



Նկ. 130



Նկ. 131

Քանի որ φ-ն հաստատուն անկյուն է (որը հավասար չէ $\frac{\pi}{2}$-ի), ապա նախորդ հավասարության համաձայն

$$\lim_{x\to+\infty} NM=0, \qquad (2')$$

և հակադարձը, (2′) հավասարությունից հետևում է (2) հավասարությունը: Բայց

$$NM=|QM-QN|=|y-\bar{y}|=|f(x)-(kx+b)|,$$

և (2) հավասարությունը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0; \qquad (3)$$

Այսպիսով, եթե (1) ուղիղն ասիմպտոտ է, ապա տեղի ունի (3) հավասարությունը և ընդհակառակը, եթե հաստատուն k-ի և b-ի դեպքում տեղի ունի (3) հավասարությունը, ապա y=kx+b ուղիղն ասիմպտոտ է: Այժմ որոշենք k-ն և b-ն: (3) հավասարության մեջ x-ը հանելով փակագծից դուրս, ստանում ենք.

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0;$$

Քանի որ $x\to+\infty$, ապա պետք է տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0;$$

Հաստատուն b-ի դեպքում $\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$: Հետևաբար, $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=0$ կամ

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}; \qquad (4)$$

Իմանալով k-ն, (3) հավասարությունից գտնում ենք b-ն.

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]; \qquad (5)$$

Այսպիսով, եթե y=kx+b ուղիղն ասիմպտոտ է, ապա k-ն և b-ն որոնվում են (4) և (5) բանաձևերով: Հակադարձը, եթե գոյություն ունեն (4) և (5) սահմանները, ապա տեղի ունի (3) հավասարությունը և y=kx+b ուղիղը ասիմպտոտ է: Եթե (4) կամ (5) սահմաններից թեկուզ մեկը գոյություն չունի, ապա կորն ասիմպտոտ չունի:

Նկատենք, որ մենք ուսումնասիրությունը կատարեցինք նկ. 131-ի նկատմամբ, երբ $x\to+\infty$, բայց բոլոր դատողություններն իրավացի են և $x\to-\infty$ դեպքի համար:

Օրինակ 4: Գտնել

$$y=\frac{x^2+2x-1}{x}$$

կորի ասիմպտոտները:

Լուծում: 1) Որոնենք ուղղաձիգ ասիմպտոտները.

$y\to+\infty$, երբ $x\to-0$,

$y\to-\infty$, երբ $x\to+0$:

Հետևաբար, x=0 ուղիղը հանդիսանում է տվյալ կորի ուղղաձիգ ասիմպտոտը:

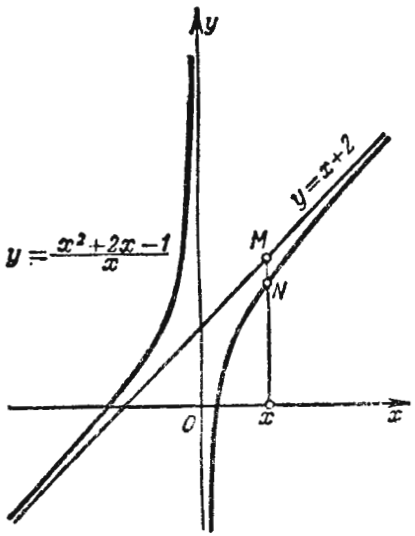
2) Որոնենք թեք ասիմպտոտները.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right]=1,$$

այսինքն

$$k=1,$$



Նկ. 132

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[y-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[2-\frac{1}{x}\right]=2,$$

այսինքն

$$b=2.$$

Հետևաբար, $y=x+2$ ուղիղը տրված կորի թեք ասիմպտոտն է։

Կորի և ասիմպտոտի փոխադարձ դասավորությունն ուսումնասիրելու համար դիտարկենք x-ի միևնույն արժեքի դեպքում կորի և ասիմպտոտի օրդինատների տարբերությունը.

$$\frac{x^2+2x-1}{x}-(x+2)=-\frac{1}{x},$$

$x>0$ դեպքում այդ տարբերությունը բացասական է, իսկ $x<0$ դեպքում՝ դրական. հետևաբար, $x>0$ դեպքում կորն ընկած է ասիմպտոտից ներքև, իսկ $x<0$ դեպքում, ասիմպտոտից վերև (նկ. 132).

Օրինակ 5. Գտնել

$$y=e^{-x}\sin x+x$$

կորի ասիմպտոտները.

Լուծում. 1) Ակնհայտ է, ուղղաձիգ ասիմպտոտներ չկան։

2) Որոնենք թեք ասիմպտոտները.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\sin x+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{-x}\sin x}{x}+1\right]=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[e^{-x}\sin x+x-x]=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\sin x=0.$$

Հետևաբար, $y=x$ ուղիղը հանդիսանում է թեք ասիմպտոտ, երբ $x\to+\infty$։

Տրված կորը չունի ասիմպտոտներ $x\to-\infty$ դեպքում։ Իրոք $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}$ գոյություն չունի, քանի որ

$$\frac{y}{x}=\frac{e^{-x}}{x}\sin x+1.$$

(Այստեղ առաջին գումարելին անսահմանափակորեն աճում է, երբ $x\to-\infty$, և, հետևաբար, սահման չունի)։

§ 11. Ֆունկցիաների հետազոտության և գրաֆիկների կառուցման ընդհանուր պլանը

«Ֆունկցիայի հետազոտություն» ասելով սովորաբար հասկացվում որոնել՝

1) ֆունկցիայի գոյության բնույթը տիրույթը,

2) ֆունկցիայի խզման կետերը,

3) ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը,

4) մաքսիմումի և մինիմումի կետերը, ինչպես նաև ֆունկցիայի մաքսիմալ և մինիմալ արժեքները,

5) գրաֆիկի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը, շրջման կետերը,

6) ֆունկցիայի գրաֆիկի ասիմպտոտները։

Կատարված հետազոտության հիման վրա կառուցվում է ֆունկցիայի գրաֆիկ (երբեմն նպատակահարմար է ուսումնասիրությանը զուգընթաց դծել գրաֆիկի տարրերը)։

Դիտողություն 1։ Եթե հետազոտվող $y=f(x)$ ֆունկցիան զույգ է, այսինքն այնպիսին է, որ արգումենտի նշանի փոփոխության դեպքում ֆունկցիայի արժեքը չի փոփոխվում, այսինքն եթե

$$f(-x)=f(x),$$

ապա բավական է ֆունկցիան հետազոտել և նրա գրաֆիկը կառուցել ֆունկցիայի որոշման տիրույթին պատկանող արգումենտի դրական արժեքների համար։ Արգումենտի բացասական արժեքների համար ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցվում է այն բանի հիման վրա, որ զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը սիմետրիկ է օրդինատների առանցքի նկատմամբ։

Օրինակ 1։ $y=x^3$ ֆունկցիան զույգ է, քանի որ $(-x)^2=x^2$ (տես նկ. 5)։

Օրինակ 2։ $y=\cos x$ ֆունկցիան զույգ է, քանի որ $\cos(-x)=\cos x$ (տես նկ. 16)։

Դիտողություն 2։ Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան կենտ է, այսինքն՝ այնպիսին է, որ արգումենտի նշանը փոխելիս ֆունկցիան փոխում է նշանը, այսինքն, եթե

$$f(-x)=-f(x),$$

ապա այդ ֆունկցիան բավական է հետազոտել արգումենտի դրական արժեքների համար։ Կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկը սիմետրիկ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ։

Օրինակ 3։ $y=x^3$ ֆունկցիան կենտ է, քանի որ $(-x)^3=-x^3$ (տես նկ. 7)

Օրինակ 4։ $y=\sin x$ ֆունկցիան կենտ է, քանի որ $\sin(-x)=-\sin x$ (տես նկ. 15)։

Դիտողություն 3։ Քանի որ ֆունկցիայի որոշ հատկությունների իմանալը թույլ է տալիս հետևություն անել նրա այլ հատկությունների մասին, ապա երբեմն նպատակահարմար է հետազոտության հաջորդականությունն ընտրել, ելնելով տրված ֆունկցիայի

կոնկրետ առանձնահատկություններից։ Այսպես, օրինակ, եթե մենք պարզել ենք, որ տրված ֆունկցիան անընդհատ է և դիֆերենցելի, և գտել ենք այդ ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի կետերը, ապա դրանով իսկ մենք որոշել ենք և ֆունկցիայի աճման ու նվազման տիրույթները։

Օրինակ 5։ Հետազոտել

$$y=\frac{x}{1+x^2}$$

ֆունկցիան և կառուցել նրա գրաֆիկը։

Լուծում։ 1) Ֆունկցիայի գոյության տիրույթն է $-\infty<x<+\infty$ միջակայքը։ Անմիջապես նշենք, որ $x<0$ դեպքում ունենք՝ $y<0$, իսկ $x>0$ դեպքում ունենք՝ $y>0$։

2) Ֆունկցիան ամենուրեք անընդհատ է։

3) Հետազոտենք ֆունկցիան ըստ մաքսիմումի և մինիմումի.

$$y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$$

հավասարումից գտնում ենք կրիտիկական կետերը՝

$$x_1=-1, \qquad x_2=1։$$

Ուսումնասիրենք կրիտիկական կետերի բնույթը.

երբ $x<-1$ ունենք $y'<0$,

երբ $x>-1$ ունենք $y'>0$։

Հետևաբար, $x=-1$ դեպքում ֆունկցիան ունի մինիմում.

$$y_{min}=(y)_{x=-1}=-0{,}5։$$

Այնուհետև,

երբ $x<1$ ունենք $y'>0$,

երբ $x>1$ ունենք $y'<0$։

Հետևաբար, $x=1$ դեպքում ֆունկցիան ունի մաքսիմում.

$$y_{max}=(y)_{x=1}=0{,}5։$$

4) Որոշենք ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը.

երբ $-\infty<x<-1$ ունենք $y'<0$ ֆունկցիան նվազում է,

երբ $-1<x<1$ ունենք $y'>0$ ֆունկցիան աճում է,

երբ $1<x<+\infty$ ունենք $y'<0$ ֆունկցիան նվազում է։

5) Որոշենք կորի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը և շրջման կետերը.

$$y''=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}=0$$

հավասարությունից ստանում ենք.

$$x_1=-\sqrt{3},\ x_2=0,\ x_3=\sqrt{3}։$$

Ուսումնասիրելով y''-ը որպես x-ի ֆունկցիա, գտնում ենք.

երբ $-\infty<x<-\sqrt{3}$ $\quad y''<0$, կորն ուռուցիկ է,

երբ $-\sqrt{3}<x<0$ $\quad y''>0$, կորը գոգավոր է,

երբ $0<x<\sqrt{3}$ $\quad y''<0$, կորն ուռուցիկ է,

երբ $\sqrt{3}<x<+\infty$ $\quad y''>0$, կորը գոգավոր է։

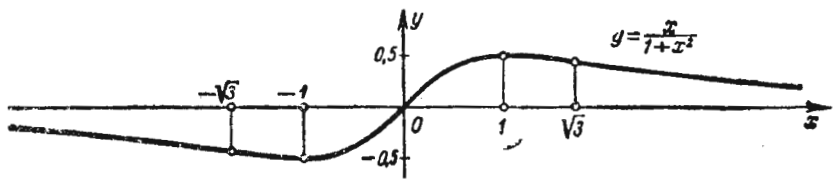
Հետևաբար, $x=-\sqrt{3}$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ կոորդինատներով կետը շրջման կետ է, ճիշտ նույն ձևով $(0, 0)$ և $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ կետերը շրջման կետեր են։

6) Որոշենք կորի ասիմպտոտները.

երբ $x\to+\infty$ $\quad y\to 0$,

երբ $x\to-\infty$ $\quad y\to 0$։

Հետևաբար, $y=0$ ուղիղը հանդիսանում է միակ թեք ասիմպտոտը։



Նկ. 133

Կորն ուղղաձիգ ասիմպտոտներ չունի, քանի որ x-ի ոչ մի վերջավոր արժեքի համար ֆունկցիան անվերջության չի ձգտում։ Հետազոտվող կորի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 133-ում։

Օրինակ 6։ Հետազոտել

$$y=\sqrt[3]{2ax^2-x^3} \qquad (a>0)$$

ֆունկցիան և կառուցել գրաֆիկը։

Լուծում։ 1) Ֆունկցիան որոշված է x-ի բոլոր արժեքների համար։

2) Ֆունկցիան ամենուրեք անընդհատ է։

3) Ուսումնասիրենք ֆունկցիայի մաքսիմումը և մինիմումը.

$$y'=\frac{4ax-3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}}=\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x(2a-x)^2}}.$$

Ածանցյալը գոյություն ունի ամենուրեք, բացառությամբ

$x_1=0$ և $x_2=2a$ կետերի։

Հետազոտենք ածանցյալի սահմանային արժեքները, երբ $x\to -0$ և երբ $x\to +0$։

$$\lim_{x\to -0}\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a-x)^2}}=-\infty,\qquad \lim_{x\to +0}\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a-x)^2}}=+\infty$$

երբ $x<0$ կունենանք $y'<0$, երբ $x>0$ կունենանք $y'>0$։

Հետևաբար, երբ $x=0$ ֆունկցիան ունի մինիմում։ Ֆունկցիայի արժեքն այդ կետում հավասար է զրոյի։

Այժմ ուսումնասիրենք ֆունկցիան $x_2=2a$ կրիտիկական կետում։ Երբ $x\to 2a$ ածանցյալը նույնպես ձգտում է անվերջության։ Բայց տվյալ դեպքում x-ի այն բոլոր արժեքների համար, որոնք մոտ են $2a$-ին ($2a$ կետից ինչպես աջ, այնպես էլ ձախ գտնվող), ածանցյալը բացասական է։ Հետևաբար, այդ կետում ֆունկցիան չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում։ $x_2=2a$ կետում, ինչպես նաև կետի մոտակայքում, ֆունկցիան նվազում է. այդ կետում կորն ունի ուղղաձիգ շոշափող։

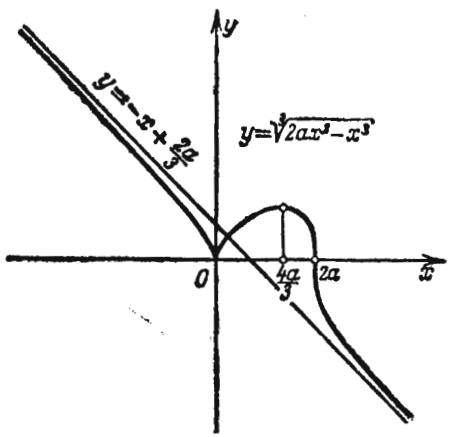
Երբ $x=\frac{4a}{3}$ ածանցյալը զառնում է զրո։ Հետազոտենք այդ կրիտիկական կետի բնույթը։ Դիտարկելով առաջին ածանցյալի արտահայտությունը, նկատում ենք, որ

$$\text{երբ } x<\frac{4a}{3},\ \text{ապա } y'>0,\quad \text{երբ } x>\frac{4a}{3},\ \text{ապա } y'<0։$$

Հետևաբար, երբ $x=\frac{4a}{3}$ ֆունկցիան ունի մաքսիմում.

$$y_{max}=\frac{2}{3}a\sqrt[3]{4}։$$

4) Կատարված ուսումնասիրության հիման վրա ստանում ենք ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը.



Նկ. 134

Երբ $-\infty<x<0$ ֆունկցիան նվազում է,

երբ $0<x<\frac{4a}{3}$ ֆունկցիան աճում է,

երբ $\frac{4a}{3}<x<+\infty$ ֆունկցիան նվազում է։

5) Որոշում ենք կորի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը և շրջման կետերը.

Երկրորդ ածանցյալը՝

$$y''=\frac{-8a^2}{9x^{\frac{4}{3}}(2a-x)^{\frac{5}{3}}}$$

ոչ մի կետում զրո չի դառնում։ Այնուամենայնիվ գոյություն ունեն երկու կետեր, որոնցում երկրորդ ածանցյալը խզվում է. դրանք $x_1=0$ և $x_2=2a$ կետերն են։

Ուսումնասիրենք երկրորդ ածանցյալի նշանն այդ կետերից յուրաքանչյուրի մոտակայքում.

Երբ $x<0$ ունենք $y''<0$, կորը շրջված է ուռուցիկությամբ վերև,

Երբ $x>0$ ունենք $y''<0$, կորը շրջված է ուռուցիկությամբ վերև։

Նշանակում է $x=0$ աբսցիսն ունեցող կետը շրջման կետ չի հանդիսանում։

Երբ $x<2a$ ունենք $y''<0$, կորը շրջված է ուռուցիկությամբ վերև, երբ $x>2a$ ունենք $y''>0$— կորը շրջված է ուռուցիկությամբ ներքև։ Նշանակում է, կորի վրա գտնվող $(2a, 0)$ կետը շրջման կետն է։

6) Որոշենք կորի ասիմպտոտները.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{2ax^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2a}{x}-1}=-1,$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2ax^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(2a^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x^2}=\frac{2a}{3};$$

Հետևաբար, $y=-x+\frac{2a}{3}$ ուղիղը $y=\sqrt[3]{2ax^2-x^3}$ կորի թեք ասիմպտոտն է։

Հետազոտվող ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 134-ում։

§ 12. Պարամետրական տեսքով տրված կորերի հետազոտությունը

Դիցուք կորը տրված է

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t),\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

պարամետրական հավասարումներով։ Այդ դեպքում կորի հետազոտությունը և կառուցումը կատարվում է համանման ձևով, ինչպես այդ արվել է $y=f(x)$ հավասարումով տրված կորի համար։

Հաշվում ենք

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\varphi'(t),\\ \frac{dy}{dt}&=\psi'(t),\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

ածանցյալները։ Այն կետերի համար, որոնց մոտակայքում կորը հանդիսանում է որևէ $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկ, հաշվում ենք

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\qquad(3)$$

ածանցյալը։ Գտնում ենք պարամետրի $t=t_1, t_2, \ldots, t_k$ արժեքները, որոնց համար $\varphi'(t)$ կամ $\psi'(t)$ ածանցյալներից գոնե մեկը դառնում է զրո կամ խզվում է։ (t-ի այդպիսի արժեքները մենք կանվանենք կրիտիկական արժեքներ)։ (t_1, t_2), (t_2, t_3), $\ldots$, (t_{k-1}, t_k) միջակայքերից յուրաքանչյուրում, հետևաբար, և (x_1, x_2), (x_2, x_3),$\ldots(x_{k-1}, x_k)$ (որտեղ $x_i=\varphi\cdot(t_i)$) միջակայքերից յուրաքանչյուրում ըստ (3) բանաձևի որոշում ենք $\frac{dy}{dx}$-ի նշանը, դրանով իսկ որոշում ենք աճման և նվազման տիրույթները։ Դա հնարավորություն է տալիս նաև որոշել պարամետրի $t_1, t_2, \ldots, t_k$ արժեքներին համապատասխանող կետերի բնույթը։ Այնուհետև հաշվում ենք.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}, \qquad (4)$$

Այս բանաձևի հիման վրա որոշում ենք կորի յուրաքանչյուր կետում ուռուցիկության ուղղությունը։

Ասիմպտոտները որոշելու համար գտնենք t-ի այնպիսի արժեքներ, որոնց ձգտելիս կամ x-ը կամ y-ը ձգտում են անվերջության և t-ի այնպիսի արժեքներ, որոնց ձգտելիս և՛ x-ը, և՛ y-ը ձգտում են անվերջության։ Այնուհետև հետազոտությունը կատարենք սովորական եղանակով։

Պարամետրական տեսքով տրված կորերի հետազոտության ընթացքում երևան եկող մի շարք առանձնահատկություններ պարզաբանենք օրինակների վրա։

Օրինակ 1։ Հետազոտել

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos^3 t,\\ y&=a\sin^3 t,\end{aligned}\right\}(a>0) \qquad (1')$$

հավասարումներով տված կորը։

Լուծում։ x և y մեծությունները որոշված են t-ի բոլոր արժեքների համար։ Բայց քանի որ $\cos^3 t$-ն և $\sin^3 t$-ն 2π պարբերություն ունեցող պարբերական ֆունկցիաներ են, բավական է t պարամետրի փոփոխությունը դիտարկել 0-ից մինչև 2π սահմաններում, ըստ որում x-ի փոփոխման տիրույթը կլինի $[-a, a]$ հատվածը. y-ի փոփոխման տիրույթը նույնպես կլինի $[-a, a]$ հատվածը։ Հետևաբար, դիտարկվող կորն ասիմպտոտներ չունի։ Այնուհետև, գտնում ենք.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=-3a\cos^2 t\sin t,\\ \frac{dy}{dt}&=3a\sin^2 t\cos t,\end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

Այս ածանցյալները դառնում են զրո, երբ $t=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$։ Որոշում ենք.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\operatorname{tg} t, \qquad (3')$$

(2′) և (3′) բանաձևերի հիման վրա կազմում ենք հետևյալ աղյուսակը.

t-ի փոփոխման տիրույթը	x-ի փոփոխման համապատասխան տիրույթը	y-ի փոփոխման համապատասխան տիրույթը	$\frac{dy}{dx}$-ի նշանը	y-ի՝ որպես x-ի [y=f(x)] ֆունկցիայի փոփոխման բնույթը
$0<t<\pi/2$	$a>x>0$	$0<y<a$	$-$	Նվազում է
$\pi/2<t<\pi$	$0>x>-a$	$a>y>0$	$+$	Աճում է
$\pi<t<3\pi/2$	$-a<x<0$	$0>y>-a$	$-$	Նվազում է
$3\pi/2<t<2\pi$	$0<x<a$	$-a<y<0$	$+$	Աճում է

Աղյուսակից հետևում է, որ (1′) հավասարումները որոշում են $y=f(x)$ տեսքի երկու անընդհատ ֆունկցիաներ. երբ $0\leqslant t\leqslant\pi$, ապա $y\geqslant 0$ (տես աղյուսակի առաջին երկու տողերը), երբ $\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$, ապա $y\leqslant 0$ (տես աղյուսակի վերջին երկու տողերը)։ (3′) բանաձևից հետևում է.

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{dx}=0$$

և

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{dy}{dx}=\infty,$$

Այդ կետերում կորն ունի ուղղաձիգ շոշափող։ Այնուհետև գտնում ենք

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi}=0,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2\pi}=0,$$

Այդ կետերում կորի շոշափողը հորիզոնական է։ Այնուհետև գտնում ենք.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t},$$

Այստեղից հետևում է.

$\frac{d^2y}{dx^2}>0$, երբ $0<t<\pi$, կորը դրդավոր է,

$\frac{d^2y}{dx^2}<0$, երբ $\pi<t<2\pi$, կորն ուռուցիկ է։

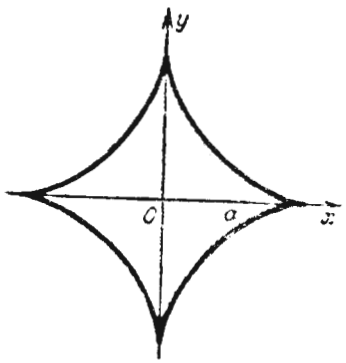
Հետազոտության արդյունքների հիման վրա կարող ենք կառուցել կորը (նկ. 135)։ Այդ կորը կոչվում է աստրոիդ։

Օրինակ 2։ Կառուցել

$$x=\frac{3at}{1+t^3}, \qquad y=\frac{3at^2}{1+t^3}\ (a>0) \tag{1''}$$

հավասարումներով տրված կորը (դեկարտի տերև)։

Լուծում։ Երկու ֆունկցիաներն էլ որոշված են t-ի բոլոր արժեքների համար, բացի t=—1 արժեքից, ըստ որում.



Նկ. 135

$$\lim_{t\to-1-0} x=\lim_{t\to-1-0}\frac{3at}{1+t^3}=+\infty,$$

$$\lim_{t\to-1-0} y=\lim_{t\to-1-0}\frac{3at^2}{1+t^3}=-\infty;$$

$$\lim_{t\to-1+0} x=-\infty, \qquad \lim_{t\to-1+0} y=+\infty։$$

Այնուհետև, նկատենք, որ

$x=0,\ y=0,$ *երբ* $t=0,$

$x\to0,\ y\to0,$ *երբ* $t\to+\infty,$

$x\to0,\ y\to0,$ *երբ* $t\to-\infty։$

Գտնենք $\frac{dx}{dt}$*-ն և* $\frac{dy}{dt}$*-ն։*

$$\frac{dx}{dt}=\frac{6a\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}{(1+t^3)^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}, \tag{2''}$$

t պարամետրի համար ստանում ենք հետևյալ չորս կրիտիկական արժեքները.

$$t_1=-1,\quad t_2=0,\quad t_3=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad t_4=\sqrt[3]{2}։$$

Այնուհետև գտնում ենք.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}, \tag{3''}$$

(1″), (2″) և (3″) բանաձևերի հիման վրա կազմում ենք աղյուսակ.

t-ի փոփոխման տիրույթը	x-ի փոփոխման համապատասխան տիրույթը	y-ի փոփոխման համապատասխան տիրույթը	$\frac{dy}{dx}$-ի նշանը	y-ի՝ որպես x-ի [y=f(x)] ֆունկցիայի փոփոխման բնույթը
$-\infty<t<-1$	$0<x<+\infty$	$0>y>-\infty$	—	Նվազում է
$-1<t<0$	$-\infty<x<0$	$+\infty>y>0$	—	Նվազում է
$0<t<1/\sqrt[3]{2}$	$0<x<a\sqrt[3]{4}$	$0<y<a\sqrt[3]{2}$	+	Աճում է
$1/\sqrt[3]{2}<t<\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4}>x>a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2}<y<a\sqrt[3]{4}$	—	Նվազում է
$\sqrt[3]{2}<t<+\infty$	$a\sqrt[3]{2}>x>0$	$a\sqrt[3]{4}>y>0$	+	Աճում է

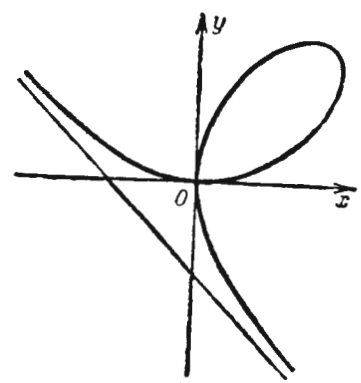
(3″) բանաձևից գտնում ենք.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0\\(x=0\\y=0)}}=0,\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\infty\\(x=0\\y=0)}}=\infty։$$

Հետևաբար, կոորդինատների սկզբնակետը կորը հատում է երկու անգամ՝ Ox առանցքին զուգահեռ շոշափողի հետ և Oy առանցքին զուգահեռ շոշափողի հետ։

Այնուհետև,

$$\frac{dy}{dx}=\infty, \quad \text{երբ} \quad t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\ (x=a\sqrt[3]{4},\ y=a\sqrt[3]{2}։$$



Նկ. 136

Այդ կետում կորի շոշափողն ուղղաձիգ է։

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=0, \quad \text{երբ} \quad t=\sqrt[3]{2}\ (x=a\sqrt[3]{2},\ y=a\sqrt[3]{4})։$$

Այդ կետում կորի շոշափողը հորիզոնական է։ Հետազոտենք ասիմպտոտի գոյության հարցը.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1-0}\frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=$$

$$=\lim_{t\to-1+}\frac{3at^2}{1+t^3}-(-\quad 3\quad)=$$

$$=\lim_{x\to-1-0}\left[\frac{3at(t+1)}{1+t^3}\right]=\lim_{t\to-1-0}\frac{3at}{1-t+t^2}=-a։$$

Հետևաբար, $y=-x-a$ *ուղիղը կորի ճյուղի ասիմպտոտն է, երբ* $x\to+\infty։$

Նման ձևով գտնում ենք.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=-a։$$

Այսպիսով, գտնված ուղիղը հանդիսանում է ասիմպտոտ և կորի այն ճյուղի համար, երբ $x \to -\infty$։

Կատարված հետազոտության հիման վրա կառուցում ենք կորը (նկ. 136)։

Կորի հետազոտության հետ կապված մի քանի հարցեր լրացուցիչ կքննարկվեն VIII գլխում (§ 19 «Կորի եզակի կետերը»)։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ V ԳԼԽԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Գտնել ֆունկցիաների էքստրեմումները։ **1.** $y=x^2-2x+3$։ Պատ. $y_{min}=2$, երբ $x=1$։ **2.** $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$։ Պատ. $y_{max}=\frac{7}{3}$, երբ $x=1$, $y_{min}=1$, երբ $x=3$։ **3.** $y=x^3-9x^2+15x+3$։ Պատ. $y_{max}=10$, երբ $x=1$, $y_{min}=-22$, երբ $x=5$։ **4.** $y=-x^4+2x^2$։ Պատ. $y_{max}=1$, երբ $x=\pm1$, $y_{min}=0$, երբ $x=0$։ **5.** $y=x^4-8x^2+2$։ Պատ. $y_{max}=2$, երբ $x=0$, $y_{min}=-14$, երբ $x=\pm2$։ **6.** $y=3x^5-125x^3+2160x$։ Պատ. Մաքսիմում՝ երբ $x=-4$ և $x=3$, մինիմում, երբ $x=-3$ և $x=4$։ **7.** $y=2-(x-1)^{\frac{2}{3}}$։ Պատ. $y_{max}=2$, երբ $x=1$։ **8.** $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{2}}$։ Պատ. Չկա ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում։ **9.** $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$։ Պատ. Մինիմում՝ երբ $x=\sqrt{2}$, մաքսիմում, երբ $x=-\sqrt{2}$։ **10.** $y=\frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$։ Պատ. Մաքսիմում, երբ $x=\frac{12}{5}$։ **11.** $y=2e^x+e^{-x}$։ Պատ. Մինիմում, երբ $x=-\frac{\ln 2}{2}$։ **12.** $y=\frac{x}{\ln x}$։ Պատ. $y_{min}=e$, երբ $x=e$։ **13.** $y=\cos x+\sin x$, $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$։ Պատ. $y_{max}=\sqrt{2}$, երբ $x=\frac{\pi}{4}$։ **14.** $y=\sin 2x-x$, $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$։ Պատ. Մաքսիմում, երբ $x=\frac{\pi}{6}$, մինիմում, երբ $x=-\frac{\pi}{6}$։ **15.** $y=x+\operatorname{tg}x$։ Պատ. Չկա ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում։ **16.** $y=e^x\sin x$։ Պատ. Մինիմում, երբ $x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$, մաքսիմում, երբ $x=2k\pi+\frac{3}{4}\pi$։ **17.** $y=x^4-2x^2+2$։ Պատ. Մաքսիմում, երբ $x=0$, երկու մինիմում՝ երբ $x=-1$ և երբ $x=1$։ **18.** $y=(x-2)^3(2x+1)$։ Պատ. $y_{min}\approx-8{,}24$, երբ $x=\frac{1}{8}$։ **19.** $y=x+\frac{1}{x}$։ Պատ. Մինիմում, երբ $x=1$, մաքսիմում, երբ $x=-1$։ **20.** $y=x^2(a-x)^2$։ Պատ. $y_{max}=\frac{a^4}{16}$, երբ $x=\frac{a}{2}$, $y_{min}=0$, երբ $x=0$ և երբ $x=a$։ **21.** $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}$։ Պատ. Մաքսիմում, երբ $x=\frac{a^2}{a-b}$, և մինիմում, երբ $x=\frac{a^2}{a+b}$։ **22.** $y=x+\sqrt{1-x}$։ Պատ. $y_{max}=\frac{5}{4}$։ երբ

$x=\frac{3}{4}$, $y_{min}=1$, երբ $x=1$։ **23.** $y=x\sqrt{1-x}$ $(x\leqslant1)$։ Պատ. $y_{max}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$, երբ $x=\frac{2}{3}$։ **24.** $y=\frac{x}{1+x^2}$։ Պատ. Մինիմում, երբ $x=-1$, մաքսիմում, երբ $x=1$։ **25.** $y=x\ln x$։ Պատ. Մինիմում, երբ $x=\frac{1}{e}$։ **26.** $y=x\ln^2x$։ Պատ. $y_{max}=4e^{-2}$, երբ $x=e^{-2}$, $y_{min}=0$, երբ $x=1$։ **27.** $y=\ln x-\operatorname{arctg}x$։ Պատ. Ֆունկցիան աճում է։ **28.** $y=\sin 3x-3\sin x$։ Պատ. Մինիմում, երբ $x=\frac{\pi}{2}$, մաքսիմում, երբ $x=\frac{3\pi}{2}$։ **29.** $y=2x+\operatorname{arctg}x$։ Պատ. Էքստրեմումներ չկան։ **30.** $y=\sin x\cos^2x$։ Պատ. Մինիմում, երբ $x=\frac{\pi}{2}$, երկու մաքսիմում, երբ $x=\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$ և երբ $x=\arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$։ **31.** $y=\arcsin(\sin x)$։ Պատ. Մաքսիմում երբ $x=(4m+1)\frac{\pi}{2}$, մինիմում, երբ $x=(4m+3)\frac{\pi}{2}$։

Գտնել ֆունկցիայի ամենամեծ և ամենափոքր արժեքները նշված հատվածներում. **32.** $y=-3x^4+6x^2-1$, $(-2\leqslant x\leqslant2)$։ Պատ. Ամենամեծ արժեքը՝ $y=2$, երբ $x=\pm1$, ամենափոքրը՝ $y=-25$, երբ $x=\pm2$։ **33.** $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$, $(-1\leqslant x\leqslant5)$։ Պատ. Ամենամեծ արժեքը՝ $y=\frac{23}{3}$, երբ $x=5$, ամենափոքր արժեքը՝ $y=-\frac{13}{3}$, երբ $x=-1$։ **34.** $y=\frac{x-1}{x+1}$ $(0\leqslant x\leqslant4)$։ Պատ. Ամենամեծ արժեքը՝ $y=\frac{3}{5}$ երբ, $x=4$ ամենափոքր արժեքը՝ $y=-1$, երբ $x=0$։ **35.** $y=\sin 2x-x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$։ Պատ. Ամենամեծ արժեքը՝ $y=\frac{\pi}{2}$, երբ $x=-\frac{\pi}{2}$ ամենափոքր արժեքը $y=\frac{\pi}{2}$, երբ $x=\frac{\pi}{2}$։

36. a կողմ ունեցող քառակուսի թիթեղյա թերթից ցանկանում են պատրաստել վերևից բաց հնարավորին չափ մեծ ծավալ ունեցող արկղ՝ թերթի անկյուններից հավասար քառակուսիներ կտրելով և թերթն այնուհետև ծալելով այնպես, որ առաջացվեն արկղի կողերը։ Ինչպիսին պետք է լինի կտրվող քառակուսու կողմը։ Պատ. $\frac{a}{6}$։

37. Ապացուցել, որ տրված շրջանին ներգծած բոլոր հնարավոր ուղղանկյուններից ամենամեծ մակերեսն ունի քառակուսին։ Ցույց տալ նաև, որ քառակուսին է, որն ունի ամենամեծ պարագիծը։

38. Ցույց տալ, որ տվյալ շրջանին ներգծած բոլոր հավասարասրուն եռանկյուններից ամենամեծ պարագիծն ունի հավասարակողմ եռանկյունը։

39. Գտնել ամենամեծ մակերեսն ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուն, որի

ներքնաձիգը տրված h հատվածն է։ Պատ. Յուրաքանչյուր էջի երկարությունը հավասար է $\frac{h}{\sqrt{2}}$։

40. Գտնել ամենամեծ ծավալ ունեցող ուղիղ գլանի բարձրությունը, որը կարելի է ներգծել R շառավղով գնդին։ Պատ. Բարձրությունը հավասար է $\frac{2R}{\sqrt{3}}$։

41. Գտնել ամենամեծ կողմնային մակերևույթ ունեցող ուղիղ գլանի բարձրությունը, որը կարելի է ներգծել տվյալ R շառավիղն ունեցող գնդին։ Պատ. Բարձրությունը հավասար է $R\sqrt{2}$։

42. Գտնել տվյալ R շառավղով գնդին արտագծած ամենափոքր ծավալ ունեցող ուղիղ կոնի բարձրությունը։ Պատ. Բարձրությունը հավասար է 4R (կոնի ծավալը հավասար է գնդի ծավալի կրկնապատիկին)։

43. Ռեզերվուարը, որը պետք է ունենա քառակուսի հատակ և բաց բերան, պետք է ներսից անաղալատել։ Ինչպիսի՞ պետք է լինեն 32 լիտր տարողություն ունեցող ռեզերվուարի չափերը, որպեսզի երեսապատման համար պահանջվի ամենաքիչ քանակությամբ անագ։

Պատ. Բարձրությունը՝ 0,2 մ, հիմքի կողմը՝ 0,4 մ (այսինքն՝ հիմքի կողմը պետք է 2 անգամ մեծ լինի բարձրությունից)։

44. Տանիքագործը ցանկանում է պատրաստել ամենամեծ տարողություն ունեցող բաց ջրհորդան, որի հատակն ու կողերն ունենան 10 սմ լայնություն և հատակի նկատմամբ կողերը միևնույն թեքություն ունենան։ Ինչպիսի՞ պետք է լինի ջրհորդանի լայնությունը վերևից։

Պատ. 20 սմ։

45. Ապացուցել, որ տրված տարողությամբ կոնական զուռնը պահանջում է ամենաքիչ քանակությամբ մատերիա, երբ նրա բարձրությունը $\sqrt{2}$ անգամ մեծ է հիմքի շառավղից։

46. Պահանջվում է պատրաստել վերևի կողմը բաց գլան, որի հատակն ու պատերն ունեն տրված հաստություն։ Ինչպիսի՞ պետք է լինեն գլանի չափերը, որպեսզի տրված տարողության դեպքում նրա վրա ծախսվի ամենաքիչ քանակությամբ նյութ։

Պատ. Եթե R-ը հիմքի ներքին շառավիղն է, v-ն՝ գլանի ներքին ծավալը, ապա $R=\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$։

47. Պահանջվում է պատրաստել երկու կիսաֆերաներով ավարտվող գլանից բաղկացած հաստատուն հաստություն ունեցող պատերով կաթսա այնպես, որ տրված v ծավալի դեպքում այն ունենա ամենափոքր արտաքին մակերևույթ։

Պատ. Կաթսան պետք է ունենա գնդի ձև, որի ներքին շառավիղն է՝ $R=\sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$։

48. Կառուցել հավասարակող սեղան, որը տրված S մակերեսի դեպքում ունենա ամենափոքր պարագիծ. սեղանի հիմքի անկյունը հավասար է α-ի։

Պատ. Կողմնային կողի երկարությունը հավասար է $\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$։

49. Տրված R շառավղով գնդին ներգծել ամենամեծ ծավալն ունեցող կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա։ Պատ. Պրիզմայի բարձրությունը հավասար է $\frac{2R}{\sqrt{3}}$։

50. Պահանջվում է R շառավղով կիսագնդի շուրջն արտագծել ամենափոքր ծավալն ունեցող կոն. կոնի հիմքի հարթությունը համընկնում է կիսագնդի հիմքի հարթության հետ։ Գտնել կոնի բարձրությունը։

Պատ. Կոնի բարձրությունը հավասար է $R\sqrt{3}$։

51. Տրված r շառավղով գլանի շուրջն արտագծել ամենափոքր ծավալն ունեցող կոն, ենթադրելով, որ գլանի և կոնի շրջանային հիմքի հարթություններն ու կենտրոնները համընկնում են։ Պատ. Կոնի հիմքի շառավիղը հավասար է $\frac{3r}{2}$։

52. R շառավղով շրջանի ձև ունեցող թերթից կտրել այնպիսի սեկտոր, որպեսզի այն ծալելով ստացվի ամենամեծ տարողություն ունեցող ձագար։

Պատ. Սեկտորի կենտրոնական անկյունը հավասար է $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$։

53. Բոլոր շրջանային գլաններից, որոնք ներգծված են a կող ունեցող տրված խորանարդին այնպես, որ նրանց առանցքները համընկնում են խորանարդի անկյունագծի հետ, գտնել այն, որն ունի ամենամեծ ծավալ։

Պատ. Գլանի բարձրությունը հավասար է $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, հիմքի շառավիղը հավասար է $\frac{a}{\sqrt{6}}$։

54. Կոորդինատների ուղղանկյուն սիստեմում տրված է (x_0, y_0) կետը տրն ընկած է առաջին քառորդում։ Այդ կետով տանել ուղիղ այնպես, որպեսզի այն կոորդինատների առանցքների դրական ուղղությունների հետ առաջացնի ամենափոքր մակերես ունեցող եռանկյուն։

Պատ. Ուղիղն առանցքներից կտրում է $2x_0$ և $2y_0$ հատվածներ, այսինքն՝ ունի $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$ հավասարումը։

55. $y^2=2px$ պարաբոլի առանցքի վրա տրված է գագաթից a հեռավորություն ունեցող կետ։ Գտնել կորի՝ նրանից ամենամոտ կետի աբսցիսը։ Պատ. $x=a-p$։

56. Ընդունելով, որ ուղղանկյուն լայնակի հատույթ ունեցող չորսուի դիմացկունությունը ուղիղ համեմատական է լայնությանը և բարձրության խորանարդին, գտնել ամենամեծ դիմացկունությամբ չորսուի լայնությունը, որը կարելի է պատրաստել 16 սմ տրամագիծ ունեցող գերանից։

Պատ. Լայնությունը հավասար է 8 սմ։

57. Ականակիրը գտնվում է ափի ամենամոտ կետից 9 կմ հեռավորության վրա գտնվող խարսխի վրա. պետք էր սուրհանդակին ականակրից ուղարկել ռազմական ճամբար, որը գտնվում է 15 կմ հեռավորության վրա հաշված ափով, ափից—ականակիր ամենամոտ կետից։ Եթե սուրհանդակը կարողանար ոտքով գնալ ժամում 5 կմ, իսկ թիավարելով՝ ժամում 4 կմ, ապա ափի ո՞ր կետում նա պետք է կանգ առնի, որպեսզի հասցնի ճամբար հասնել ամենակարճ ժամանակում։

Պատ. Ճամբարից 3 կմ հեռավորության վրա։

58. Կետը հարթության վրա տեղափոխվում է ուղիղ գծով MN գծից դուրս տեղամասում՝ v_1 արագությամբ, իսկ MN գծով՝ v_2 արագությամբ։ Որ

ճանապարհով ամենակարճ ժամանակամիջոցում այն կտեղափոխվի A կետից մինչև MN գծին պատկանող B կետը։ A կետի հեռավորությունն MN գծից հավասար է h-ի, MN գծի վրա A կետի a պրոեկցիայի հեռավորությունը B կետից հավասար է a-ի։

Պատ. Եթե ABC-ն կետի ճանապարհն է, ապա $\frac{aC}{AC}=\frac{v_1}{v_2}$, երբ $\frac{aB}{AB}>\frac{v_1}{v_2}$ և $aC=aB$, երբ $\frac{aB}{AB}<\frac{v_1}{v_2}$,

59. W բեռը բարձրացնում են լծակի միջոցով, ընդ որում F ուժը կիրառված է լծակի մի ծայրում, իսկ հենման կետը գտնվում է լծակի մյուս ծայրում։ Եթե բեռը կախված է հենման կետից a սմ հեռավորության վրա գտնվող կետում, իսկ լծակի ձողի յուրաքանչյուր սմ կշռում է v գրամ, ապա ինչպիսին պետք է լինի երկարությունը, որպեսզի բեռը բարձրացնելու համար անհրաժեշտ ուժը լինի փոքրագույնը։ Պատ. $x=\sqrt{\frac{2aw}{v}}$ սմ։

60. x անհայտ մեծության n չափումների ժամանակ ստացվել են $x_1, x_2, \ldots, x_n$ հաշվումները։ Ցույց տալ, որ $(x-x_1)^2+(x-x_1)^2+\ldots+(x-x_n)^2$ սխալների քառակուսիների գումարը կլինի ամենափոքրը, եթե որպես x ընդունենք $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ թիվը։

61. Որպեսզի հնարավորին չափ փոքրացվի հեղուկի շփումը ջրանցքի պատերին, ջրով թրջվող մակերեսը պետք է հնարավորին չափ փոքր լինի։ Ցույց տալ, որ տրված լայնակի հատույթի մակերես ունեցող բաց ուղղանկյուն ջրանցքի լավագույն ձևը այնպիսին է, որի դեպքում ջրանցքի լայնությունը երկու անգամ գերազանցում է նրա բարձրությանը։

Որոշել կորերի շրջման կետերը և ուռուցիկության ու գոգավորության միջակայքերը.

62. $y=x^5$։ Պատ. Երբ $x<0$ կորն ուռուցիկ է, երբ $x>0$ կորը գոգավոր է, շրջման կետ՝ երբ $x=0$։ **63.** $y=1-x^2$։ Պատ. Կորն անմենուրեք ուռուցիկ է։ **64.** $y=x^3-3x^2-9x+9$։ Պատ. Շրջման կետ, երբ $x=1$։ **65.** $y=(x-b)^3$։ Պատ. Շրջման կետ, երբ $x=b$։ **66.** $y=x^4$։ Պատ. Կորն ամենուրեք գոգավոր է։ **67.** $y=\frac{1}{x^2+1}$։ Պատ. Շրջման կետեր, երբ $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$։ **68.** $y=\operatorname{tg}x$։ Պատ. Շրջման կետեր, երբ $x=n\pi$։ **69.** $y=xe^{-x}$։ Պատ. Շրջման կետ, երբ $x=2$։ **70.** $y=a-\sqrt[3]{x-b}$։ Պատ. Շրջման կետ, երբ $x=b$։ **71.** $y=a-\sqrt[5]{(x-b)^2}$։ Պատ. Կորը շրջման կետեր չունի։

Գտնել հետևյալ կորերի ասիմպտոտները. **72.** $y=\frac{1}{x-1}$։ Պատ. $x=1$, $y=0$։ **73.** $y=\frac{1}{(x+2)^3}$։ Պատ. $x=-2$, $y=0$։ **74.** $y=c+\frac{a^3}{(x-b)^2}$։ Պատ. $x=b$, $y=c$։ **75.** $y=e^{\frac{1}{x}}-1$։ Պատ. $x=0$, $y=0$։ **76.** $y=\ln x$։ Պատ. $x=0$։ **77.** $y^3=6x^2+x^3$։ Պատ. $y=x+2$։ **78.** $y^3=a^3-x^3$։ Պատ. $y+x=0$։ **79.** $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$։ Պատ. $x=2a$։ **80.** $y^2(x-2a)=x^3-a^3$։ Պատ. $x=2a$ $y=\pm(x+a)$։

Հետազոտել ֆունկցիաները և կառուցել նրանց գրաֆիկները. **81.** $y=x^4-2x+10$։

82. $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$։ **83.** $y=e^{-\frac{1}{x}}$։ **84.** $y=\frac{6x}{1+x^2}$։ **85.** $y=\frac{4+x}{x^2}$։ **86.** $y=\frac{x}{x^2-1}$։ **87.** $y=\frac{x+2}{x^3}$։ **88.** $y=\frac{x^2}{1+x}$։ **89.** $y^2=x^3-x$։ **90.** $y=\frac{x^3}{3\quad x^2}$։ **91.** $y=\sqrt[3]{x^2}+2$։ **92.** $y=x-\sqrt[3]{x^3+1}$։ **93.** $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$։ **94** $y=xe^{-x}$։ **95.** $y=x^2e^{-x^2}$։ **96.** $y=x-\ln(x+1)$։ **97.** $y=\ln(x^2+1)$։ **98.** $y=\sin 3x$։ **99.** $y=x+\sin x$։ **100.** $y=x\sin x$։ **101.** $y=e^{-x}\sin x$։

102. $y=\ln\sin x$։ **103.** $y=\frac{\ln x}{x}$։ **104.** $\begin{cases}x=t^2\\ y=\frac{1}{2}t.\end{cases}$ **105** $\begin{cases}x=t^2,\\ y=t^3,\end{cases}$

106. $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ **107.** $\begin{cases}x=ae^t\cos t,\\ y=ae^t\sin t.\end{cases}$

Լրացուցիչ խնդիրներ

Գտնել գծերի ասիմպտոտները. **108.** $y=\frac{x^2+1}{1+x}$։ Պատ. $x=-1$, $y=x-1$։

109. $y=x+e^{-x}$։ Պատ. $y=x$։ **110.** $2y(x+1)^2=x^3$։ Պատ. $x=-1$, $y=\frac{1}{2}x-1$։

111. $y^3=a^3-x^2$։ Պատ. Ասիմպտոտներ չկան։ **112.** $y=e^{-2k}\sin x$։ Պատ. $y=0$։

113. $y=e^{-x}\sin 2x+x$։ Պատ. $y=x$։ **114.** $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$։ Պատ. $x=-\frac{1}{e}$, $y=x+\frac{1}{e}$։ **115.** $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$։ Պատ. $x=0$, $y=x$։ **116.** $x=\frac{2t}{1-t^2}$, $y=\frac{t^2}{1-t^2}$։ Պատ. $y=\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$։

Հետազոտել ֆունկցիաները և կառուցել նրանց գրաֆիկները. **117.** $y=|x|$։ **118.** $y=\ln|x|$։ **119.** $y^2=x^3-x$։ **120.** $y=(x+1)^2(x-2)$։ **121** $y=x+|x|$։ **122.** $y=\sqrt[3]{x^2}-x$։ **123.** $y=x^2\sqrt{x+1}$։ **124.** $y=\frac{x^2}{2}\ln x$։ **125.** $y=\frac{x^2}{2}\ln x$։ **126.** $y=\frac{1}{e^x-1}$։ **127.** $y=\frac{x}{\ln x}$։ **128.** $y=x+\frac{\ln x}{x}$։ **129.** $y=x\ln x$։

130. $y=e^{\frac{1}{x}}-x$։ **131.** $y=|\sin 3x|$։ **132.** $y=\frac{\sin x}{x}$. **133.** $y=x\operatorname{arctg}x$։ **134.** $y=x-2\operatorname{arctg}x$։ **135.** $y=e^{-2x}\sin 3x$։ **136.** $y=|\sin x|+x$։ **137.** $y=\sin(x^2)$։ **138.** $y=\cos^3x+\sin^3x$։ **139.** $y=\frac{x+|x|}{2}$։ **140.** $y=\frac{x-|x|}{2}$։ **141.** $y=\sin\left(\frac{x-|x|}{2}\right)-\frac{x-|x|}{2}$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$։ **142.** $y=\cos\left(\frac{x-|x|}{2}\right)-\frac{x+|x|}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)$։ **143.** $y=\frac{1}{2}(3x+|x|)+1$։ **144.** $y=\frac{1}{2}[3(x-1)+|x-1|]+1$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$։

ԳԼՈՒԽ VI

ԿՈՐԻ ԿՈՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 1. Աղեղի երկարությունը և նրա ածանցյալը

Դիցուք M_0M *աղեղը (նկ. 137) հանդիսանում է* (a, b) *միջակայքում որոշված* $y=f(x)$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Սահմանենք կորի աղեղի երկարությունը։* AB *կորի վրա վերցնենք*

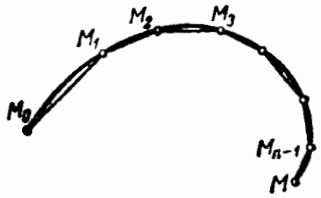
$$M_0,\ M_1,\ M_2,\dots,\ M_{i-1},\ M_i,\dots,\ M_{n-1},\ M \text{ կետերը։}$$

Միացնելով վերցրած կետերը հատվածներով, կստանանք

$$M_0M_1M_2\dots M_{i-1}M_i\dots M_{n-1}M$$

բեկյալ գիծը, որը ներգծված է M_0M *աղեղին։ Այդ բեկյալի երկարությունը նշանակենք* P_n*-ով։*

M_0M *աղեղի երկարությունը կոչվում է այն սահմանը (սա նշանակենք* s*-ով), որին ձգտում է բեկյալի երկարությունը, երբ* $M_{i-1}M_i$ *բեկյալի հատվածների երկարություններից ամենամեծը ձգտում է զրոյի, եթե այդ սահմանը գոյություն ունի և կախված չէ* $M_0M_1M_2\dots M_{i-1}M_i\dots M_{n-1}M$ *բեկյալի ընտրությունից։*



Նկ. 137

Նշենք, որ կամայական կորի աղեղի երկարության այս սահմանումը համանման է շրջանագծի երկարության սահմանմանը։

XII *գլխում կապացուցվի, որ եթե* f(x) *ֆունկցիան և նրա* f′(x) *ածանցյալը* [a, b] *հատվածում անընդհատ են, ապա* $y=f(x)$ *կորի* [a; f(a)] *և* [b; f(b)] *կետերի միջև պարփակված աղեղն ունի միանգամայն որոշակի երկարություն, ըստ որում ցույց կտրվի այդ երկարության հաշվման եղանակը։ Այստեղ էլ կհաստատվի (որպես*

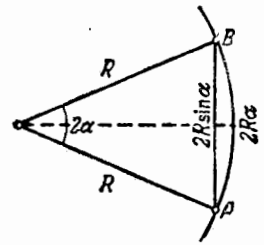
հետևանք), որ նշված պայմաններում այդ կորի ցանկացած աղեղի երկարության հարաբերությունը նրան ձգող լարի երկարությանը ձգտում է 1-ի, երբ լարի երկարությունը ձգտում է զրոյի.

$$\lim_{M_0M\to 0}\frac{\text{երկ. } \overset{\frown}{M_0M}}{\text{երկ. } \overline{M_0M}}=1։$$

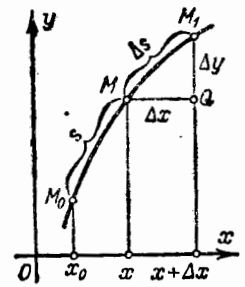
Այս թեորեմը հեշտությամբ կարելի է ապացուցել շրջանագծի համար, այնուամենայնիվ ընդհանուր դեպքում մենք այն առայժմ կընդունենք առանց ապացուցման։*

Դիտարկենք հետևյալ հարցը։ Դիցուք հարթության վրա ունենք կոր, որը տրված է $y=f(x)$ *հավասարումով։ Դիցուք* $M_0(x_0,\ y_0)$*-ն կորի որևէ ֆիքսված կետ է, իսկ* $M(x,\ y)$*-ը՝ այդ կորի փոփոխական կետն է։* s*-ով նշանակենք* M_0M *աղեղի երկարությունը (նկ. 139)։*

M *կետի* x *աբսցիսը փոփոխվելիս կիսվի աղեղի* s *երկարությունը, այսինքն՝* s*-ը հանդիսանում է* x*-ի ֆունկցիա։ Գտնենք* s*-ի ածանցյալը ըստ* x*-ի.*



Նկ. 138



Նկ. 139

x*-ին տանք* Δx *աճ։ Այդ դեպքում* s *աղեղը կստանա* $\Delta s=$ երկ. $\overset{\frown}{MM_1}$ *աճը։ Դիցուք* $\overline{MM_1}$*-ը այդ աղեղը ձգող լարն է։* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}$ *գտնելու համար վարվենք հետևյալ կերպ.* ΔMM_1Q*-ից գտնում ենք՝*

---

* *Դիտարկենք* AB *աղեղը, որի կենտրոնական անկյունը հավասար է* 2α*-ի (նկ. 138)։ Այդ աղեղի երկարությունը հավասար է* 2Rα *(*R*-ը շրջանի շառավիղն է), իսկ նրան ձգող լարի երկարությունը հավասար է* 2R sin α*։ Ուստի*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\text{երկ. } \overset{\frown}{AB}}{\text{երկ. } \overline{AB}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2R\alpha}{2R\sin\alpha}=1,$$

$\overline{MM_1}^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$։ Ձախ մասը բազմապատկենք և բաժանենք Δs^2-ու վրա։

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2\Delta s^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2;$$

Հավասարության բոլոր անդամները բաժանենք $(\Delta x)^2$-ու վրա՝

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2\cdot\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2;$$

Գտնենք ձախ և աջ մասերի սահմանը, երբ $\Delta x\to 0$։ Հաշվի առնելով, որ $\lim\limits_{MM_1\to 0}\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}=1$ և որ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$, ստանում ենք.

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \text{ կամ } \frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}; \qquad (1)$$

Աղեղի դիֆերենցիալի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը.

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (2)$$

կամ*

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}; \qquad (2')$$

Մենք աղեղի երկարության դիֆերենցիալի արտահայտությունը ստացանք այն դեպքի համար, երբ կորը տրված է $y=f(x)$ հավասարումով։ Այնուամենայնիվ (2′) բանաձևը պահպանվում է և այն դեպքում, երբ կորը տրված է պարամետրական հավասարումներով։

Եթե կորը տրված է պարամետրական տեսքով՝

$$x=\varphi(t), \qquad y=\Psi(t),$$

ապա

$$dx=\varphi'(t)dt, \qquad dy=\Psi'(t)dt,$$

և (2′) արտահայտությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\Psi'(t)]^2}\,dt;$$

---

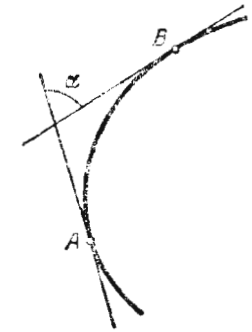
* Թիստ ասած, (2′) բանաձևն իրավացի է միայն այն դեպքի համար, երբ $dx>0$։ Իսկ եթե $dx<0$, ապա $ds=-\sqrt{dx^2+dy^2}$։ Այդ պատճառով, ավելի ճիշտ կլինի ընդհանուր դեպքում բանաձևը գրել այսպես.

$$|ds|=\sqrt{dx^2+dy^2};$$

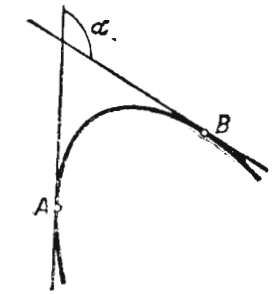
§ 2. Կորություն

Կորի ձևը բնորոշող տարրերից մեկը հանդիսանում է նրա կորացվածության, ծռվածության աստիճանը։

Դիցուք ունենք այնպիսի կոր, որը չի հատում ինքն իրեն և յուրաքանչյուր կետում ունի շոշափող։ Կորի ցանկացած A և B երկու կետերում տանենք նրա շոշափողները և α-ով նշանակենք այդ շոշա-



Նկ. 140



Նկ. 141

փողներով կազմած անկյունը, կամ, ավելի ճիշտ, A կետից B կետն անցնելիս շոշափողի պտտման անկյունը (նկ. 140)։ Այդ անկյունը կոչվում է AB աղեղի հարևանության անկյուն։ Միևնույն երկարությունն ունեցող երկու աղեղներից շատ կորացված է այն աղեղը, որի հարևանության անկյունը մեծ է (նկ. 140 և 141)։

Մյուս կողմից, դիտարկելով տարբեր երկարության աղեղներ, նրանց կորացվածության աստիճանը մենք չենք կարող գնահատել միայն համապատասխան հարևանության անկյունով։ Այստեղից հետևում է, որ կորի կորացվածության լրիվ բնութագիրը կլինի հարևանության անկյան հարաբերությունը համապատասխան աղեղի երկարությանը։

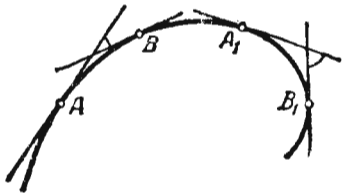
Սահմանում 1։ $\overset{\smile}{AB}$ աղեղի միջին կորություն՝ $K_{միջ.}$ կոչվում է համապատասխան α հարևանության անկյան հարաբերությունը աղեղի երկարությանը՝

$$K_{միջ.}=\frac{\alpha}{\overset{\smile}{AB}};$$

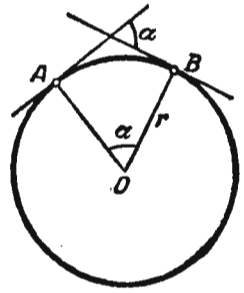
Միևնույն կորի համար նրա տարբեր մասերի (աղեղների) միջին կորությունը կարող է լինել տարբեր. այսպես, օրինակ, նկ. 142-ում ցույց տրված կորի համար AB աղեղի միջին կորությունը հավասար չէ A_1B_1 աղեղի միջին կորությանը, թեև այդ աղեղների երկա-

բությունները հավասար են։ Դեռ ավելին, տարբեր կետերի մոտակայքում կորը կորացված է տարբեր ձևով։ Տվյալ A կետի անմիջական շրջակայքում տվյալ գծի կորացվածության աստիճանը բնութագրելու համար մտցնենք տրված կետում կորի կորության հասկացողությունը։

Սահմանում 2։ Գծի տրված A կետում K_A կորություն կոչվում է $\overset{\frown}{AB}$ աղեղի միջին կորության սահմանը, երբ այդ աղեղի երկարությունը ձգտում է զրոյի, այսինքն, երբ B կետը մոտենում է* A կետին.



Նկ. 142



Նկ. 143

$$K_A = \lim_{B \to A} K_{միջ.} = \lim_{AB \to 0} \frac{\alpha}{\overset{\frown}{AB}}.$$

Օրինակ։ r շառավղով շրջանագծի համար. 1) որոշել α կենտրոնական անկյանը համապատասխանող AB աղեղի միջին կորությունը (նկ. 143), 2) որոշել կորությունն A կետում։

Լուծում։ 1) Ակնհայտ է, որ AB աղեղի հարևանության անկյունը հավասար է α-ի, համապատասխան աղեղի երկարությունը հավասար է αr-ի, հետևաբար,

$$K_{միջ.} = \frac{\alpha}{\alpha r},$$

կամ

$$K_{միջ.} = \frac{1}{r}.$$

2) կորությունն A կետում հավասար է

$$K = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}.$$

Այսպիսով, r շառավղով շրջանագծի աղեղի միջին կորությունը կախված չէ աղեղի երկարությունից և դիրքից, բոլոր աղեղների համար այն հավասար է $\frac{1}{r}$։

* Մենք ենթադրում ենք, որ սահմանի մեծությունը կախված չէ այն բանից, թե կորի վրա A կետի որ կողմում ենք վերցնում B փոփոխական կետը։

Շրջանագծի կորությունը նրա ցանկացած կետում նույնպես կախված չէ այդ կետի ընտրությունից և հավասար է $\frac{1}{r}$։

Դիտողություն. Նշենք, որ կամայական կորի կորությունը նրա տարբեր կետերում, ընդհանրապես, կլինի տարբեր։ Այդ մենք կտեսնենք ստորև։

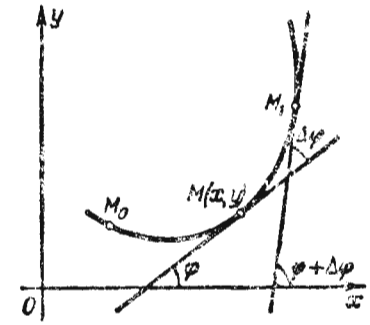
§ 3. Կորության հաշվումը

Արտածենք բանաձև՝ տրված կորի կորությունը նրա ցանկացած $M(x, y)$ կետում հաշվելու համար։ Ըստ որում մենք կենթադրենք, որ կորը կոորդինատների դեկարտյան սիստեմում տրված է

$$y = f(x) \qquad (1)$$

տեսքի հավասարումով և որ $f(x)$ ֆունկցիան ունի անընդհատ երկրորդ ածանցյալ։

Տանենք կորի շոշափողները x և $x+\Delta x$ աբսցիսներն ունեցող նրա M և M_1 կետերում և այդ շոշափողների թեքության անկյունները նշանակենք φ-ով և $\varphi+\Delta\varphi$-ով (նկ. 144)։



Նկ. 144

$\overset{\frown}{M_0M}$ աղեղի երկարությունը, որը հաշվվում է որևէ M_0 հաստատուն կետից, կնշանակենք s-ով. այդ դեպքում $\Delta s = \overset{\frown}{M_0M_1} - \overset{\frown}{M_0M}$, իսկ $|\Delta s| = \overset{\frown}{MM_1}$։

Ինչպես պարզ երևում է նկ. 144-ից, $\overset{\frown}{MM_1}$ աղեղին համապատասխանող հարևանության անկյունը հավասար է φ և $\varphi+\Delta\varphi$ անկյունների տարբերության բացարձակ մեծությունը*, այսինքն՝ հավասար է $|\Delta\varphi|$։

Կորի միջին կորության սահմանման համաձայն MM_1 տեղամասում ունենք.

$$K_{միջ.} = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Կորությունն M կետում ստանալու համար պետք է գտնել ստացված արտահայտության սահմանն այն պայմանով, որ $\overset{\frown}{MM_1}$ աղեղի երկարությունը ձգտում է զրոյի.

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

* Նկ. 144-ում պատկերված կորի համար, ակնհայտ է, որ $|\Delta\varphi| = \Delta\varphi$, քանի որ $\Delta\varphi > 0$։

Քանի որ φ և s մեծությունները երկուսն էլ կախված են x-ից (հանդիսանում են x-ի ֆունկցիաներ), ապա φ-ն կարելի է դիտել որպես s-ի ֆունկցիա։ Մենք կարող ենք ընդունել, որ այդ ֆունկցիան x պարամետրի օգնությամբ տված է պարամետրական տեսքով։ Այդ դեպքում

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

և, հետևաբար,

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|, \qquad (2)$$

$\frac{d\varphi}{ds}$-ն հաշվելու համար օգտագործենք պարամետրական տեսքով տրված ֆունկցիայի ածանցման բանաձևը.

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}},$$

Որպեսզի $\frac{d\varphi}{dx}$ ածանցյալն արտահայտենք $y=f(x)$ ֆունկցիայի միջոցով, նկատենք, որ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$ և, հետևաբար,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{dy}{dx},$$

Վերջին հավասարությունն ածանցելով ըստ x-ի, կունենանք.

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

Իսկ ինչ վերաբերում է $\frac{ds}{dx}$ ածանցյալին, ապա դեռ գլ. VI, § 1-ում մենք գտել ենք

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

Ուստի

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}},$$

կամ, քանի որ $K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$ վերջնականապես ստանում ենք,

$$K = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}, \qquad (3)$$

Հետևաբար, կորի ցանկացած կետում, որտեղ գոյություն ունի և անընդհատ է $\frac{d^2y}{dx^2}$ երկրորդ ածանցյալը, կարելի է հաշվել կորությունը։ Նրա հաշվման համար ծառայում է (3) բանաձևը։ Նկատենք, որ կորի կորությունը հաշվելիս պետք է վերցնել հայտարարում գտնվող արմատի միայն թվաբանական (այսինքն դրական) արժեքը, քանի որ ըստ սահմանման գծի կորությունը չի կարող բացասական լինել։

Օրինակ 1։ Որոշել $y^2=2px$ պարաբոլի կորությունը.

ա) նրա $M(x, y)$ կամայական կետում,

բ) $M_1(0, 0)$ կետում,

գ) $M_2\left(\frac{p}{2}, p\right)$ կետում։

Լուծում։ Գտնում ենք $y=\sqrt{2px}$ ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ ածանցյալները

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{(2px)^{3/2}},$$

Ստացած արտահայտությունները տեղադրելով (3) բանաձևի մեջ, կստանանք

ա) $$K = \frac{p^2}{(2px+p^2)^{3/2}};$$

բ) $$K_{x=0,\ y=0} = 1/p;$$

գ) $$K_{x=p/2,\ y=p} = \frac{1}{2\sqrt{2p}}.$$

Օրինակ 2։ Որոշել $y=ax+b$ ուղղի կորությունը նրա կամայական (x, y) կետում։

Լուծում։

$$y'=a, \qquad y''=0.$$

Դնելով (3) բանաձևին, ստանում ենք.

$$K=0.$$

Այսպիսով, ուղիղն իրենից ներկայացնում է զրոյական կորություն դիծ։ Այդ նույն արդյունքը հեշտությամբ կարելի է ստանալ կորության սահմանումից։

§ 4. Պարամետրական տեսքով տրված գծի կորության հաշվումը

Դիցուք կորը տրված է պարամետրական տեսքով.

$$x=\varphi(t), \qquad y=\Psi(t).$$

Այդ դեպքում (տես III գլխի § 24).

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad \frac{d^2y}{dx^3}=\frac{\Psi''\varphi'-\Psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

Ստացած արտահայտությունները տեղադրելով նախորդ պարագրաֆի (3) բանաձևի մեջ, ստանում ենք.

$$K=\frac{|\Psi''\varphi'-\Psi'\varphi''|}{[\varphi'^2+\Psi'^2]^{3/2}}. \qquad (1)$$

Օրինակ։ Որոշել

$$x=a(t-\sin t), \qquad y=a(1-\cos t)$$

ցիկլոիդի կորությունը նրա կամայական (x, y) կետում։

Լուծում։

$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t), \quad \frac{d^2x}{dt^2}=a\sin t, \quad \frac{dy}{dt}=a\sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=a\cos t.$$

Ստացած արտահայտությունները տեղադրելով (1) բանաձևի մեջ, ստանում ենք.

$$K=\frac{|a(1-\cos t)\,a\cos t-a\sin t\cdot a\sin t|}{[a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t]^{3/2}}=\frac{|\cos t-1|}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{3/2}}=$$

$$=\frac{1}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{1/2}}=\frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

§ 5. Բևեռային կոորդինատներով տրված հավասարումն ունեցող գծի կորության հաշվումը

Դիցուք կորը տրված է

$$\rho=f(\theta) \qquad (1)$$

տեսքի հավասարումով։

Գրենք բևեռային կոորդինատներից դեկարտյանին անցնելու բանաձևը.

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\theta,\\ y&=\rho\sin\theta.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Եթե այս բանաձևի մեջ ρ-ի փոխարեն տեղադրենք նրա արտահայտությունը θ-ով, այսինքն f(θ), ապա կստանանք՝

$$\left.\begin{aligned} x&=f(\theta)\cos\theta,\\ y&=f(\theta)\sin\theta.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

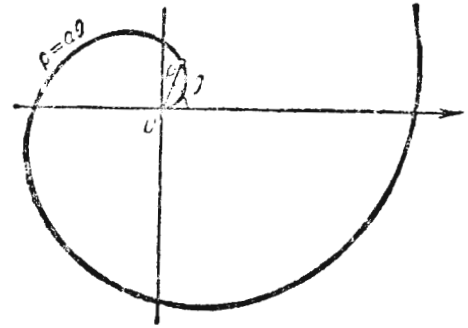
Վերջին հավասարումները կարելի է դիտարկել որպես (1) կորի պարամետրական հավասարումներ, ընդ որում պարամետր է հանդիսանում θ-ն։

Այդ դեպքում

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{d\rho}{e\theta}\sin\theta-\rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta.$$



Նկ. 145

Վերջին հավասարությունները տեղադրելով նախորդ պարագրաֆի (1) բանաձևի մեջ, ստանում ենք կորի կորությունը բևեռային կոորդինատներով հաշվելու համար բանաձև՝

$$K=\frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}. \qquad (4)$$

Օրինակ։ Որոշել ρ=aθ (a>0) Արքիմեդի սպիրալի կորությունը կամայական կետում (նկ. 145)։

Լուծում.

$$\frac{d\rho}{d\theta}=a,\quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2}=0,$$

հետևաբար,

$$K=\frac{|a^2\theta^2+2a^2|}{(a^2\theta^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{a}\,\frac{\theta^2+2}{(\theta^2+1)^{3/2}},$$

Նկատենք, որ θ-ի մեծ արժեքների դեպքում տեղի ունեն $\frac{\theta^2+2}{\theta^2}\approx 1$, $\frac{\theta^2+1}{\theta^2}\approx 1$ մոտավոր հավասարությունները, ուստի նախորդ բանաձևում (θ^2+2)-ը փոխարինելով θ^2-ով և (θ^2+1)-ը՝ θ^2-ով, ստանում ենք (θ-ի մեծ արժեքների համար) մոտավոր բանաձև.

$$K\approx\frac{1}{a}\,\frac{\theta^2}{(\theta^2)^{3/2}}=\frac{1}{a\theta},$$

Այսպիսով, θ-ի մեծ արժեքների դեպքում Արքիմեդի սպիրալն ունի մոտավորապես նույն կորությունը, ինչը և $a\theta$ շառավղով շրջանագիծը։

§ 6. Կորության շառավիղ եվ շրջան: Կորության կենտրոն: Էվոլյուտ և էվոլվենտ

Սահմանում։ R մեծությունը, որը հակադարձ է գծի տրված M կետում K կորությանը, կոչվում է այդ գծի դիտարկվող կետում կորության շառավիղ:

$$R=\frac{1}{K} \tag{1}$$

կամ

$$R=\frac{\left|1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right|^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}. \tag{2}$$

Կառուցենք M կետում կորի նորմալը (նկ. 146), որն ուղղված է կորի դոգավորության կողմը, և այդ նորմալի վրա անջատենք MC հատվածը, որը հավասար է M կետում կորի կորության R շառավղին: C կետը կոչվում է տրված կորի M կետի կորության կենտրոն, C կենտրոնն ունեցող R շառավղով շրջանը (որն անցնում է M կետով) կոչվում է M կետի տվյալ կորի կորության շրջան:

Կորության շրջանի սահմանումից հետևում է, որ տրված կետում կորի կորությունը և կորության շրջանի կորությունը միմյանց հավասար են։

Արտածենք կորության կենտրոնի կոորդինատները որոշող բանաձևեր:

Դիցուք կորը տրված է

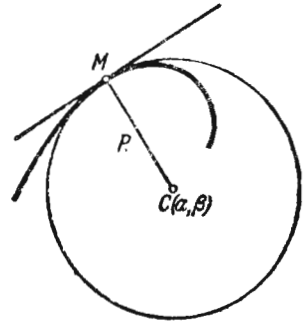
$$y=f(x) \tag{3}$$

հավասարումով:

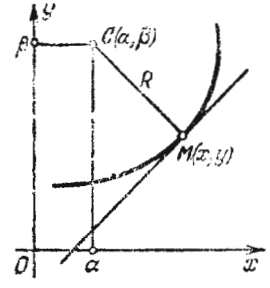
Կորի վրա ֆիքսենք M(x, y) կետը և որոշենք այդ կետին համապատասխանող կորության կենտրոնի α և β կոորդինատները (նկ. 147): Դրա համար գրենք M կետում կորի նորմալի հավասարումը.

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x); \tag{4}$$

(Այստեղ X-ը և Y-ը նորմալի կետի ընթացիկ կոորդինատներն են)։



Նկ. 146



Նկ. 147

Քանի որ $C(\alpha, \beta)$ կետն ընկած է նորմալի վրա, ապա նրա կոորդինատները պետք է բավարարեն (4) հավասարմանը.

$$\beta-y=-\frac{1}{y'}(\alpha-x); \tag{5}$$

Այնուհետև, $C(\alpha, \beta)$ կետը M(x, y) կետից գտնվում է R կորության շառավղին հավասար հեռավորության վրա.

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2=R^2; \tag{6}$$

Համատեղ լուծելով (5) և (6) հավասարումները, որոշենք α-ն և β-ն.

$$(\alpha-x)^2+\frac{1}{y'^2}(\alpha-x)^2=R^2,$$

$$(\alpha-x)^2=\frac{y'^2}{1+y'^2}R^2;$$

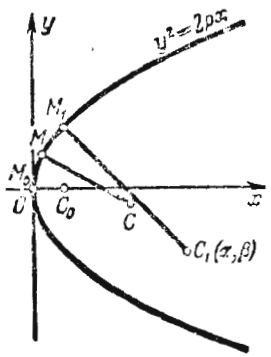
այստեղից

$$\alpha = x \pm \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} R, \quad \beta = y \pm \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} R,$$

իսկ քանի որ $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, ապա

$$\alpha = x \pm \frac{y'(1+y'^2)}{|y''|}, \quad \beta = y \pm \frac{1+y'^2}{|y''|}.$$

Որոշելու համար այն հարցը, թե վերջին բանաձևերում վերևի կամ ներքևի նշաններից որը պետք է վերցնել, պետք է դիտարկել $y''>0$ դեպքը և $y''<0$ դեպքը: Եթե $y''>0$, ապա այդ կետում կորը դոգավոր է և, հետևաբար, $\beta>y$ (նկ. 147) և դրա համար պետք է վերցնել ներքևի նշանները: Հաշվի առնելով, որ այդ դեպքում $|y''|=y''$ կորության կենտրոնի կոորդինատների բանաձևերը կլինեն.



Նկ. 148

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta &= y + \frac{1+y'^2}{y''}; \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Համանման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ (7) բանաձևերը իրավացի կլինեն և $y''<0$ դեպքում:

Եթե կորը տրված է

$$x = \varphi(t), \quad y = \Psi(t),$$

պարամետրական հավասարումներով, ապա կորության կենտրոնի կոորդինատները հեշտ է ստանալ (7) բանաձևերից, նրանցում y'-ի և y''-ի փոխարեն տեղադրելով պարամետրով արտահայտված նրանց արտահայտությունները.

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y'' = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}.$$

Այդ դեպքում

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}, \\ \beta &= y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}; \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

Օրինակ 1. Որոշել $y^2=2px$ պարաբոլի կորության կենտրոնի կոորդինատները

ա) կամայական $M(x, y)$ կետում,

բ) $M_0(0, 0)$ կետում, գ) $M_1\left(\frac{p}{2}, p\right)$ կետում:

Լուծում. Տեղադրելով $\frac{dy}{dx}$-ի և $\frac{d^2y}{dx^2}$-ու արժեքները (7) բանաձևերում, կստանանք (նկ. 148).

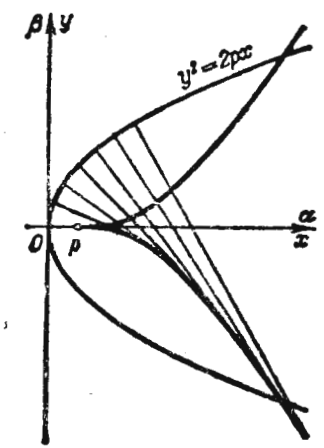
ա) $\alpha = 3x + p, \qquad \beta = -\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}},$

բ) երբ $x=0$ գտնում ենք $\alpha=p, \ \beta=0$,

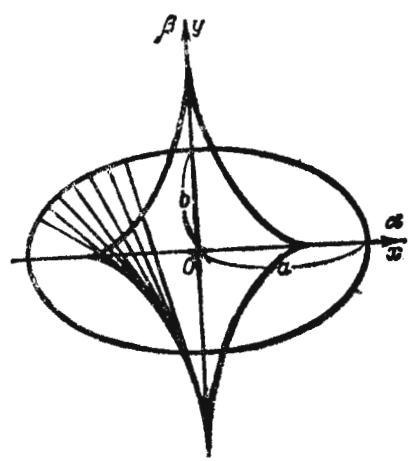
գ) երբ $x=\frac{p}{2}$ ունենք $\alpha=\frac{5p}{2}, \quad \beta=-p$:

Եթե տրված կորի $M_1(x, y)$ կետում կորությունը զրոյից տարբեր է, ապա այդ կետին համապատասխանում է որոշակի $C_1(\alpha, \beta)$ կորության կենտրոն: Տրված գծի բոլոր կորության կենտրոնների բազմությունը կազմում է մի նոր գիծ, որն առաջինի նկատմամբ կոչվում է էվոլյուտ:

Այսպիսով, տրված գծի կորության կենտրոնների երկրաչափական տեղը կոչվում է նրա էվոլյուտ: Իր էվոլյուտի նկատմամբ տրված գիծը կոչվում է էվոլվենտ կամ ինվոլյուտ (կամ փռված գիծ):



Նկ. 149



Նկ. 150

Եթե տրված կորը որոշվում է $y=f(x)$ հավասարումով, ապա (7) հավասարումները կարելի է դիտել որպես էվոլյուտի պարամետրական հավասարումներ՝ x պարամետրով: Այդ հավասարումներից արտաքսելով x պարամետրը (եթե դա հնարավոր է), կստանանք էվոլյուտի α և β ընթացիկ կոորդինատների միջև անմիջական կախումը: Իսկ եթե կորը տրված է $x=\varphi(t)$, $y=\Psi(t)$ պարամետրական հավասարում-

ներով, ապա (7) հավասարումները տալիս են էվոլյուտի պարամետրական հավասարումները (քանի որ x, y, x′, y′, x″, y″ հանդիսանում են t-ի ֆունկցիաներ)։

Օրինակ 2։ Գտնել $y^2=2px$ պարաբոլի էվոլյուտի հավասարումը։

Լուծում։ Օրինակ 1-ի հիման վրա պարաբոլի ցանկացած (x, y) կետի համար ունենք.

$$\alpha=-3x+p,$$

$$\beta=-\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}.$$

Այս հավասարումներից արտաքսելով x պարամետրը, կստանանք.

$$\beta^2=\frac{8}{27p}(\alpha-p)^3.$$

Սա կիսախորանարդ պարաբոլի հավասարում է (նկ. 149)։

Օրինակ 3։ Գտնել

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

պարամետրական հավասարումներով տրված էլիպսի էվոլյուտի հավասարումը։

Լուծում։ Հաշվում ենք x-ի և y-ի ածանցյալներն ըստ t-ի.

$$x'=-a\sin t,\qquad y'=b\cos t;$$

$$x''=-a\cos t,\qquad y''=-b\sin t.$$

Ածանցյալների արտահայտությունները տեղադրելով (7′) բանաձևերի մեջ, կստանանք.

$$\alpha=a\cos t-\frac{b\cos t(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)}{ab\sin^2 t+ab\cos^2 t}=$$

$$=a\cos t-a\cos t\sin^2 t-\frac{b^2}{a}\cos^3 t=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

Այսպիսով,

$$\alpha=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

Համանման ձևով ստանում ենք.

$$\beta=\left(b-\frac{a^2}{b}\right)\sin^3 t.$$

Արտաքսելով t պարամետրը, ստանում ենք էլիպսի էվոլյուտի հավասարումը՝

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{\beta}{a}\right)^{2/3}=\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{2/3}.$$

Այստեղ α-ն և β-ն էվոլյուտի ընթացիկ կոորդինատներն են (նկ. 150)։

Օրինակ 4։ Գտնել

$$x=a(t-\sin t),$$

$$y=a(1-\cos t)$$

ցիկլոիդի էվոլյուտի պարամետրական հավասարումները։

Լուծում։

$$x'=a(1-\cos t);\quad y'=a\sin t;$$

$$x''=a\sin t;\qquad y''=a\cos t.$$

Ստացված արտահայտությունները տեղադրելով (7′) բանաձևի մեջ, գտնում ենք.

$$\alpha=a(t+\sin t),$$

$$\beta=-a(1-\cos t).$$

Կատարենք փոփոխականների փոխարինում, ընդունելով

$$\alpha=\xi-\pi a,$$

$$\beta=\eta-2a,$$

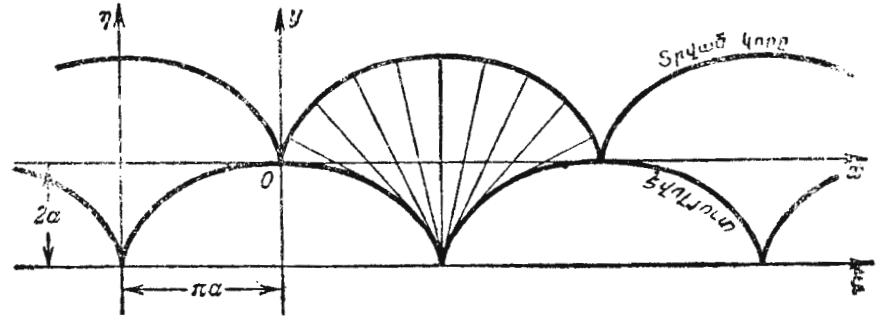
$$t=\tau-\pi;$$

այդ դեպքում էվոլյուտի հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\xi=a(\tau-\sin\tau),$$

$$\eta=a(1-\cos\tau).$$

Նրանք ξ, η կոորդինատներով որոշում են միևնույն a շառավիղն ունեցող շրջանով



Նկ. 151

առաջացած ցիկլոիդ։ Այսպիսով, ցիկլոիդի էվոլյուտը հանդիսանում է նույնպիսի ցիկլոիդ, բայց Ox առանցքով շեղված —πa մեծությամբ և Oy առանցքով՝ —2a մեծությամբ (նկ. 151)։

§ 7. Էվոլյուտի հատկությունները

Թեորեմ 1։ Տրված կորի նորմալը նրա էվոլյուտի շոշափողն է։

Ապացույց։ Նախորդ պարագրաֆի (7) պարամետրական հավասարումներով որոշվող էվոլյուտի շոշափողի անկյունային գործակիցը հավասար է.

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{\frac{d\beta}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}},$$

Նկատելով, որ (ըստ հենց նույն (7) հավասարումների)

$$\frac{d\alpha}{dx}=-\frac{3y''^2y'^2-y^{\text{I}}y'''-y'^3y'''}{y''^2}=-y'\frac{3y'y''^2-y'''-y'^2y'''}{y''^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{d\beta}{dx}=\frac{3y''^2y'-y'''-y'^2y'''}{y''^2}, \qquad (2)$$

ստանում ենք հետևյալ առնչությունը՝

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{1}{y'}.$$

Բայց y'-ը կորի համապատասխան կետում շոշափողի անկյունային գործակիցն է, ուստի ստացված առնչությունից հետևում է, որ կորի շոշափողը և նրա էվոլյուտի համապատասխան կետում շոշափողը փոխադարձաբար ուղղահայաց են, այսինքն՝ կորի նորմալը էվոլյուտի շոշափողն է:

Թեորեմ 2: Եթե կորի որևէ M_1M_2 տեղամասում կորության շառավիղը փոխվում է մոնոտոն կերպով (այսինքն՝ կամ միայն աճում է, կա՛մ միայն նվազում), ապա կորի տվյալ տեղամասում էվոլյուտի աղեղի երկարության աճը հավասար է (բացարձակ մեծությամբ) տվյալ կորի կորության շառավղի համապատասխան աճին:

Ապացույց: VI գլխի § 1-ի (2′) բանաձևի հիման վրա ունենք.

$$ds^2=d\alpha^2+d\beta^2,$$

որտեղ ds-ը էվոլյուտի աղեղի երկարությունն դիֆերենցիալն է. այստեղից

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2.$$

Այստեղ տեղադրելով (1) և (2) արտահայտությունները, կստանանք.

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=(1+y'^2)\left(\frac{3y'y''^2-y'''-y'^2y'''}{y''^2}\right)^2. \qquad (3)$$

Այնուհետև, գտնենք $\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$-ն: Քանի որ

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad \text{ապա } R^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

Այս հավասարության երկու մասերը ածանցելով ըստ x-ի, համապատասխան ձևափոխություններից հետո կստանանք.

$$2R\frac{dR}{dx}=\frac{2(1+y'^2)^2(3y'y''^2-y'''-y'^2y''')}{(y'')^3};$$

Հավասարության երկու մասերը բաժանելով $2R=\frac{2(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$-ի, վրա, կստանանք.

$$\frac{dR}{dx}=\frac{(1+y'^2)^{1/2}(3y'y''^2-y'''-y'^2y''')}{y''^2};$$

Քառակուսի բարձրացնելուց հետո կունենանք.

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2=(1+y'^2)\left(\frac{3y'y''^2-y'''-y'^2y'''}{y''^2}\right)^2; \qquad (4)$$

Համեմատելով (3) և (4) հավասարությունները, գտնում ենք.

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2=\left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

որտեղից

$$\frac{dR}{dx}=\mp\frac{ds}{dx};$$

Ըստ պայմանի $\frac{dR}{dx}$-ը չի փոխում նշանը (R-ը միայն աճում կամ միայն նվազում է), հետևաբար, նաև $\frac{ds}{dx}$-ը չի փոխում նշանը: Որոշակիության համար ընդունենք $\frac{dR}{dx}\leqslant 0$, $\frac{ds}{dx}\geqslant 0$ (որը համապատասխանում է նկ. 152-ին): Հետևաբար, $\frac{dR}{dx}=-\frac{ds}{dx}$;

Դիցուք M_1 կետն ունի x_1 աբսցիսը, իսկ M_2-ը՝ x_2 աբսցիսը: $[x_1, x_2]$ հատվածում $s(x)$ և $R(x)$ ֆունկցիաների նկատմամբ կիրառենք Կոշիի թեորեմը.

$$\frac{s(x_2)-s(x_1)}{R(x_2)-R(x_1)}=\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=\xi}}{\left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=\xi}}=-1,$$

որտեղ ξ-ն x_1-ի և x_2-ի միջև գտնվող թիվ է ($x_1<\xi<x_2$):

Դատարկենք հետևյալ նշանակումները (նկ. 152).

$$s(x_2)=s_2, \qquad s(x_1)=s_1, \qquad R(x_2)=R_2, \qquad R(x_1)=R_1.$$

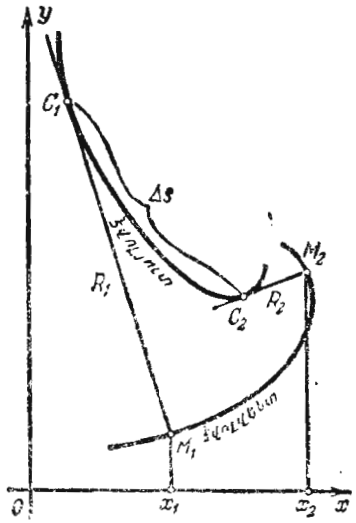
Այդ դեպքում $\frac{s_2-s_1}{R_2-R_1}=-1$ կամ $s_2-s_1=-(R_2-R_1)$: Բայց դա նշանակում է, որ

$$|s_2-s_1|=|R_2-R_1|.$$

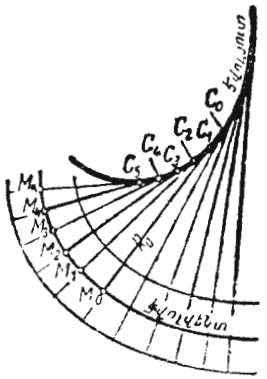
Միանգամայն նույն ձևով այդ հավասարությունն ապացուցվում է և կորության շառավղի աճման դեպքում:

Մենք 1 և 2 թեորեմները ապացուցել ենք այն դեպքի համար, երբ կորը տրված է $y=f(x)$ բացահայտ տեսքի հավասարումով:

Եթե կորը տրված է պարամետրական հավասարումներով, ապա այդ թեորեմները մնում են ուժի մեջ, ընդ որում նրանց ապացույցը կատարվում



Նկ. 152



Նկ. 153

է միանգամայն համանմանորեն:

Դիտողություն: Յույց տանք կորի (էվոլվենտի) կառուցման հետևյալ պարզ մեխանիկական եղանակը՝ նրա էվոլյուտի միջոցով:

Դիցուք ճկուն քանոնը կորացված է C_0C_5 էվոլյուտի տեսքով (նկ. 153): Ենթադրենք, որ մեկ ծայրով C_0 կետում ամրացված չձգվող թելը պարուրում է այդ քանոնը: Եթե մենք այդ թելը ետ բացենք, միշտ թողնելով ձգված, ապա թելի ծայրը կգծի M_5M_0 կորը՝ էվոլվենտը: Այստեղից էլ հենց ծագում է «էվոլվենտ»՝ փոված անվանումը: Ապացույցն այն բանի, որ ստացված կորն իրոք էվոլվենտ է, կարող է կատարվել էվոլյուտի վերը հաստատված հատկություններ օգնությամբ:

Նշենք, որ մեկ էվոլյուտին համապատասխանում է անթիվ բազմությամբ տարբեր էվոլվենտներ (նկ. 153):

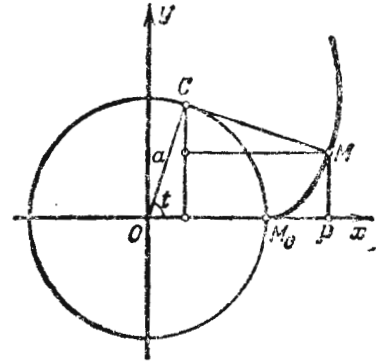
Օրինակ: Դիցուք ունենք a շառավղով շրջանագիծ (նկ. 154): Վերցնենք այդ շրջանագծի այն էվոլվենտը, որն անցնում է $M_0(a, 0)$ կետով:

Հաշվի առնելով, որ $CM=\overset{\frown}{CM_0}=at$, հեշտ է ստանալ շրջանագծի էվոլվենտի հավասարումները.

$$OP=x=a(\cos t+t\sin t),$$

$$PM=y=a(\sin t-t\cos t).$$

Նշենք, որ ատամնավոր անվի ատամի կողապատկերն (профиль) ամենից հաճախ ունի շրջանի էվոլվենտի ձև:



Նկ. 154

§ 8. Հավասարման իրական արմատների մոտավոր հաշվումը

Ֆունկցիայի վարքի հետազոտության մեթոդները հնարավորություն են տալիս գտնելու

$$f(x)=0$$

հավասարման արմատների մոտավոր արժեքները:

Այն դեպքում, երբ տրված հավասարումը առաջին, երկրորդ, երրորդ կամ չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարում է*, ապա գոյություն ունեն բանաձևեր, որոնք հնարավորություն են տալիս վերջավոր թվով գումարման, հանման, բազմապատկման, բաժանման և արմատ հանելու գործողությունների օգնությամբ հավասարման արմատներն արտահայտել նրա գործակիցների միջոցով: Չորրորդ աստիճանից բարձր հավասարումների համար այդպիսի բանաձևեր, ընդհանրապես ասած, գոյություն չունեն: Եթե ցանկացած հավասարման՝ հանրահաշվական կամ ոչ հանրահաշվական (տրանսցենդենտ) գործակիցները ոչ թե տառային այլ թվային են, ապա հավասարման արմատները կարելի է հաշվել մոտավորապես՝ ցանկացած աստիճանի ճշտությամբ: Նշենք, որ նույնիսկ այն դեպքերում, երբ հանրահաշվական հավասարման արմատները արտահայտվում են ռադիկալներով, գործնականում երբեմն հարմար է կիրառել հավասարման լուծման մոտավոր մեթոդը: Ստորև կշարադրվեն հավասարման արմատների մոտավոր հաշվման մի քանի մեթոդներ:

---

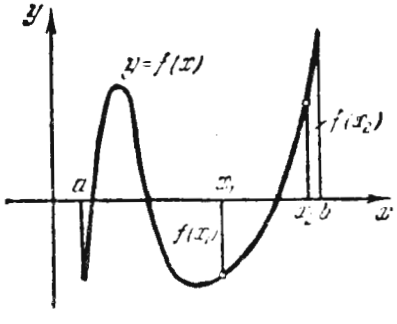
* $f(x)=0$ հավասարումը կոչվում է հանրահաշվական, եթե $f(x)$-ը հանդիսանում է բազմանդամ (տես գլուխ VII, § 6):

1. Լարերի եղանակ։ Դիցուք տրված է

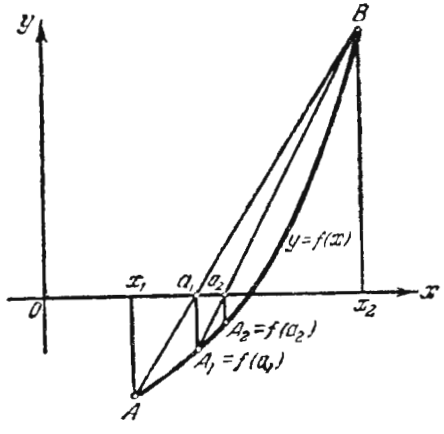
$$f(x)=0 \qquad (1)$$

հավասարումը, որտեղ $f(x)$-ը $[a, b]$ հատվածում անընդհատ երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիա է։ Ենթադրենք, որ $y=f(x)$ ֆունկցիայի ուսումնասիրության ճանապարհով $[a, b]$ հատվածում մենք անջատել ենք այնպիսի $[x_1, x_2]$ հատված, որի ներսում ֆունկցիան մոնոտոն է (կամ աճող է կամ նվազող), իսկ նրա ծայրերում ֆունկցիայի $f(x_1)$ և $f(x_2)$ արժեքներն ունեն տարբեր նշաններ։ Որոշակիության համար ընդունենք, որ $f(x_1)<0$, $f(x_2)>0$ (նկ. 155)։ Քանի որ $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[x_1, x_2]$ հատվածում, ապա նրա գրաֆիկը Ox առանցքը հատում է x_1-ի և x_2-ի միջև գտնվող որևէ կետում։

Տանենք AB լարը, որը միացնում է $y=f(x)$ կորի x_1 և x_2 աբսցիսներին համապատասխանող ծայրերը։ Լարի և Ox առանցքի հատման a_1 կետի աբսցիսն էլ հենց կլինի արմատի մոտավոր արժեքը (նկ. 156)։ Այդ մոտավոր արժեքը որոնելու համար գրենք $A(x_1, f(x_1))$ և $B(x_2, f(x_2))$ տրված երկու կետերով անցնող AB ուղղի հավասարումը՝ $\frac{y-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$։ Քանի որ $y=0$ արժեքի համար $x=a_1$, ապա $\frac{-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}=\frac{a_1-x_1}{x_2-x_1}$ որտեղից



Նկ. 155



Նկ. 156

$$a_1=x_1-\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}, \qquad (2)$$

կամ ձևափոխությունից հետո

$$a_1=\frac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}. \qquad (2')$$

Արմատի ավելի ճշգրիտ արժեքը ստանալու համար որոշում ենք $f(a_1)$-ը։ Եթե $f(a_1)<0$, ապա կրկնում ենք նույն եղանակը՝ կիրառելով (2′) բանաձևը $[a_1, x_2]$ հատվածի նկատմամբ։ Եթե $f(a_1)>0$, ապա կիրառում ենք այդ բանաձևը $[x_1, a_1]$ հատվածի նկատմամբ։ Այս եղանակը կիրառելով մի քանի անգամ, ակնհայտ է, մենք կստանանք արմատի էլ ավելի ճշգրիտ a_2, a_3 և այլն արժեքներ։

Օրինակ 1։ Գտնել

$$f(x)=x^3-6x+2=0$$

հավասարման արմատների մոտավոր արժեքները։

Լուծում։ Ամենից առաջ գտնենք $f(x)$ ֆունկցիայի մոնոտոնության տեղամասերը։ Հաշվելով $f'(x)=3x^2-6$ ածանցյալը, մենք ի հայտ ենք բերում, որ այն դրական է, երբ $x<-\sqrt{2}$, բացասական՝ երբ $-\sqrt{2}<x<+\sqrt{2}$ և նորից դրական է, երբ $x>\sqrt{2}$ (նկ. 157)։ Եվ այսպես, ֆունկցիան ունի մոնոտոնության երեք տեղամասեր, որոնցից յուրաքանչյուրում կա մեկական արմատ։

Հետագա հաշվումների հարմարության համար նեղացնենք մոնոտոնության այդ տեղամասերը (բայց այնպես, որ յուրաքանչյուր տեղամասում լինեն համապատասխան արմատը)։ Դրա համար $f(x)$-ի արտահայտության մեջ տեղադրելով x-ի այս կամ այն բախտաբեր արժեքները, մոնոտոնության յուրաքանչյուր տեղամասում անջատենք ավելի կարճ հատվածներ, որոնց ծայրերում ֆունկցիան ունի տարբեր նշաններ.

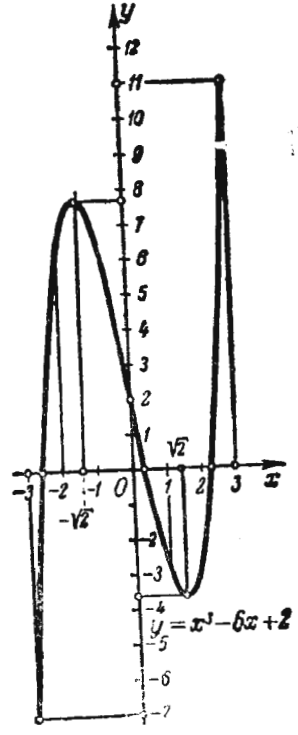
$$\left.\begin{array}{ll} x_1=0, & f(0)=2, \\ x_2=1, & f(1)=-3, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_3=-3, & f(-3)=-7, \\ x_4=-2, & f(-2)=6, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_5=2, & f(2)=-2, \\ x_6=3, & f(3)=11. \end{array}\right\}$$

Այսպիսով, արմատները գտնվում են $(-3; -2)$, $(0; 1)$, $(2; 3)$ միջակայքերում։ Գտնենք $(0; 1)$ միջակայքին պատկանող արմատի մոտավոր արժեքը. ըստ (2) բանաձևի ունենք.

$$a_1=0-\frac{(1-0)2}{-3-2}=\frac{2}{5}=0{,}4.$$



Նկ. 157

Քանի որ $f(0{,}4)=0{,}4^3-6\cdot 0{,}4+2=-0{,}336$, $f(0)=2$, ապա հետևաբար, արմատը պար-

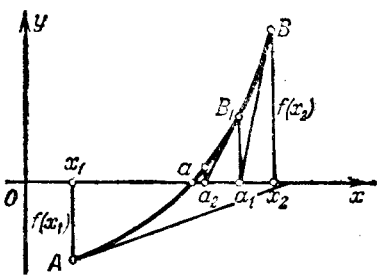
փակված է 0 և 0,4 թվերի միջև. Այս միջակայքի նկատմամբ նորից կիրառելով (2) բանաձևը, կստանանք հետևյալ մոտարկումը.

$$a_2=0-\frac{(0,4-0)\cdot 2}{-0,336-2}=\frac{0,8}{2,336}=0,342 \text{ և այլն.}$$

Համանմանորեն կգտնենք արմատների մոտավոր արժեքները մյուս միջակայքերում.

2. Շոշափողների եղանակ (Նյուտոնի եղանակ): Դիցուք նորից $f(x_1)<0$, $f(x_2)>0$, ըստ որում $[x_1, x_2]$ հատվածում առաջին ածանցյալը չի փոխում իր նշանը: Այդ դեպքում (x_1, x_2) միջակայքում կա $f(x)=0$ հավասարման մեկ արմատ: Ենթադրենք նաև, որ երկրորդ ածանցյալը ևս չի փոխում իր նշանը $[x_1, x_2]$ հատվածում. դրան կարելի է հասնել արմատն ընդգրկող միջակայքի երկարության փոքրացման ճանապարհով: $[x_1, x_2]$ հատվածում երկրորդ ածանցյալի նշանի պահպանվելը նշանակում է, որ կորը $[x_1, x_2]$ տեղամասում կամ միայն առուցիկ է, կամ միայն գոգավոր է:

Կորի B կետում տանենք շոշափող (նկ. 158): Ox առանցքի հետ շոշափողի հատման կետի a_1 աբսցիսը կլինի արմատի մոտավոր արժեքը: Այդ աբսցիսը գտնելու համար գրենք B կետում շոշափողի հավասարումը.



Նկ. 158

$$y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2);$$

Նկատելով, որ $x=a_1$, երբ $y=0$, կստանանք.

$$a_1=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}; \qquad (3)$$

Այնուհետև տանելով շոշափող $B_1(a_1; f(a_1))$ կետում, համանմանորեն գտնում ենք a_2 արմատի ավելի ճշգրիտ արժեքը: Կրկնելով այդ եղանակը մի քանի անգամ, մենք կարող ենք հաշվել արմատի մոտավոր արժեքը մեզ անհրաժեշտ ցանկացած ճշտությամբ:

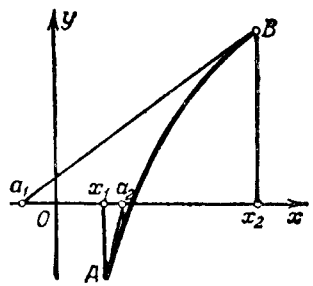
Նշենք հետևյալ հանգամանքը: Եթե մենք տանեինք շոշափող ոչ թե B կետում, այլ A կետում, ապա կարող էր պատահել, որ Ox առանցքի հետ շոշափողի հատման կետը գտնվում է (x_1, x_2) միջակայքից դուրս:

Նկարներ 158 և 159 հետևում է, որ շոշափողը կարելի է տանել աղեղի այն ծայրում, որտեղ ֆունկցիայի և նրա երկրորդ ածանցյալի նշանները համընկնում են: Քանի որ ըստ պայմանի $[x_1, x_2]$ հատվածում երկրորդ ածանցյալը պահպանում է իր նշանը. ապա ֆունկցիայի և երկրորդ ածանցյալի նշանների այդ համընկնումը ծայրերից մեկում անպայման տեղի ունի: Այս կանոնը մնում է ճշմարտացի և այն

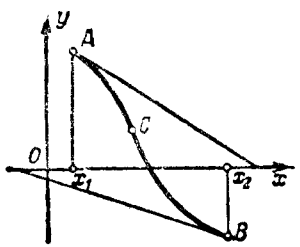
դեպքի համար, երբ $f'(x)<0$: Եթե շոշափողը տարվում է միջակայքի ձախ ծայրում, ապա (3) բանաձևի մեջ x_2-ի փոխարեն պետք է տեղադրել x_1.

$$a_1=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}; \qquad (3')$$

Այն դեպքում, երբ (x_1, x_2) միջակայքի ներսում կա C շրջման կետ, ապա շոշափողների եղանակը կարող է տալ (x_1, x_2) միջակայքից դուրս գտնվող արմատի մոտավոր արժեքը (նկ. 160):



Նկ. 159



Նկ. 160

Օրինակ 2: (3′) բանաձևը կիրառենք

$$f(x)=x^3-6x+2=0$$

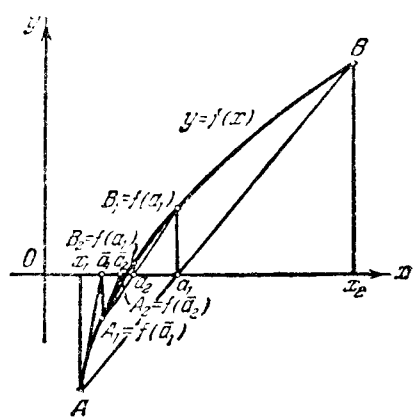
հավասարման այն արմատի հաշվման նկատմամբ, որը պարփակված է (0; 1) միջակայքում: Ունենք.

$$f(0)=2, \qquad f'(0)=(3x^2-6)|_{x=0}=-6, \qquad f''(x)=6x\geqslant 0,$$

ուստի ըստ (3′) բանաձևի ստանում ենք.

$$a_1=0-\frac{2}{-6}=\frac{1}{3}=0,333.$$

3. Կոմբինացված եղանակ (նկ. 161): $[x_1, x_2]$ հատվածում միաժամանակ կիրառելով լարերի մեթոդը և շոշափողների մեթոդը, մենք ստանում ենք a_1 և $\overline{a}_1$ երկու կետեր, որոնք ընկած են որոնելի a արմատի տարբեր կողմերում (քանի որ $f(a_1)$ և $f(\overline{a}_1)$ ունեն տարբեր նշաններ): Այնուհետև, $[a_1, \overline{a}_1]$ հատվածում նորից կիրառում ենք լարերի մեթոդը և շոշափողների մեթոդը: Արդյունքում ստանում ենք երկու թիվ՝ a_2 և $\overline{a}_2$,



Նկ. 161

որոնք ավելի մոտ են արմատի արժեքին։ Նույն ձևով շարունակում ենք այնքան ժամանակ, մինչև որ ստացված մոտավոր արժեքների տարբերությունը ճշտության պահանջվող աստիճանից չփոքրանա։ Նկատենք, որ կոմբինացված մեթոդի ժամանակ մենք որոնելի արմատին մոտենում ենք երկու կողմերից (այսինքն՝ միաժամանակ գտնում ենք ինչպես արմատի մոտավոր արժեքը ավելորդով, այնպես էլ արմատի մոտավոր արժեքը պակասորդով)։

Այսպես, մեր կողմից դիտարկված օրինակի մեջ տեղադրման ճանապարհով համոզվում ենք, որ $f(0{,}333)>0$ և $f(0{,}342)<0$, հետևաբար, արմատի արժեքը պարփակված է գտած մոտավոր արժեքների միջև՝ $0{,}333<x<0{,}342$։

Վարժություններ VI գլխի վերաբերյալ

Գտնել կորերի կորությունը նշված կետերում. **1.** $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, $(0, b)$ և $(a, 0)$ կետերում։ Պատ. $\frac{b}{a^2}$, $(0.b)$ կետում; $\frac{a}{b^2}$ $(a, 0)$, կետում։ **2.** $xy=12$, $(3, 4)$ կետում։ Պատ. $\frac{24}{125}$։ **3.** $y=x^3$, (x_1, y_1) կետում։ Պատ. $\frac{6x_1}{(1+9x_1^4)^{\frac{3}{2}}}$։

4. $16y^2=4x^4-x^6$, $(2, 0)$ կետում։ Պատ. $\frac{1}{2}$։ **5.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, կամայական կետում։ Պատ. $\frac{1}{3\sqrt[3]{|axy|}}$։

Գտնել ներքոհիշյալ կորերի կորության շառավիղները նշված կետերում, գծել յուրաքանչյուր կորը և կառուցել համապատասխան կորության շրջանը.

6. $y^2=x^3$, $(4,8)$ կետում։ Պատ. $R=80\frac{\sqrt{10}}{3}$։ **7.** $x^2=4ay$, $(0,0)$ կետում։ Պատ. $R=2a$։ **8.** $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, (x_1, y_1) կետում։ Պատ. $R=\frac{(b^4x_1+a^4y_1)^{3/2}}{a^4b^4}$։

9. $y=\ln x$, $(1,0)$ կետում։ Պատ. $R=2\sqrt{2}$։ **10.** $y=\sin x$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ կետում։ Պատ. $R=1$։ **11.** $\left.\begin{array}{l}x=a\cos^3t\\ y=a\sin^3t\end{array}\right\}$, երբ $t=t_1$։ Պատ. $R=3a\sin t_1\cos t_1$։

Գտնել կորերի կորության շառավիղները. **12.** $\left.\begin{array}{l}x=3t^2\\ y=3t-t^3\end{array}\right\}$, երբ $t=1$։ Պատ. $R=6$։ **13.** $\rho=a\sin\theta$ (շրջանագիծ)։ Պատ. $R=\frac{a}{2}$։ **14.** $\rho=a\theta$ (Արքիմեդի պիրալ)։ Պատ. $R=\frac{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2a^2}$։ **15.** $\rho=a(1-\cos\theta)$ (կարդիոիդ)։ Պատ. $R=\sqrt{2a\rho}$։ **16.** $\rho^2=a^2\cos2\theta$, (լեմնիսկատ)։ Պատ. $R=\frac{a^2}{3\rho}$։ **17.** $\rho=a\sec^2\frac{\theta}{2}$ (պարաբոլ)։ Պատ. $R=2a\sec^3\frac{\theta}{2}$։ **18.** $\rho=a\sin^3\frac{\theta}{3}$։ Պատ. $R=\frac{3}{4}a\sin^2\frac{\theta}{3}$։

Գտնել կորերի այն կետերը, որոնցում կորության շառավիղն ունի փոքրագույն արժեք. **19.** $y=\ln x$։ Պատ. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\ln2\right)$։ **20.** $y=e^x$։ Պատ. $\left(-\frac{1}{2}\ln2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$։ **21.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$։ Պատ. $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$։ **22.** $y=a\ln\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$։ Պատ. $(0, 0)$ կետում $R=\frac{a}{2}$։

Գտնել հետևյալ կորերից յուրաքանչյուրի համար (α, β) կորության կենտրոնը և էվոլյուտը։ **23.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$։ Պատ. $\alpha=\frac{(a^2+b^2)x^3}{a^4}$, $\beta=-\frac{(a^2+b^2)y^3}{b^4}$։

24. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$։ Պատ. $\alpha=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, $\beta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$։ **25.** $y^3=a^2x$։ Պատ. $\alpha=\frac{a^4+15y^4}{6a^2y}$, $\beta=\frac{a^4y-9y^5}{2a^4}$։ **26.** $\begin{cases}x=3t,\\ y=t^2-6\end{cases}$։ Պատ. $\alpha=-\frac{4}{3}t^3$; $\beta=3t^2-\frac{3}{2}$։ **27.** $\begin{cases}x=k\ln\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-k\cos t,\\ y=k\sin t;\end{cases}$ Պատ. $y=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)$ (տրակտրիսա)։ **28.** $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ Պատ. $\alpha=a\cos t$; $\beta=a\sin t$։ **29.** $\begin{cases}x=a\cos^3t,\\ y=a\sin^3t,\end{cases}$ Պատ. $\alpha=a\cos^3t+3a\cos t\sin^2t$; $\beta=a\sin^3t+3a\cos^2t\sin t$։

30. Մինչև 0,001-ի ճշտությամբ հաշվել $x^3-4x+2=0$ հավասարման արմատները։ Պատ. $x_1=1{,}675$, $x_2=0{,}539$, $x_3=-2{,}214$։

31. Որոշել $f(x)=x^5-x-0{,}2=0$ հավասարման այն արմատի մոտավոր արժեքը, որը պարփակված է $(1; 1{,}1)$ միջակայքում։ Պատ. 1,045։

32. Մինչև 0,01 ճշտությամբ հաշվել $x^4+2x^2-6x+2=0$ հավասարման արմատները։ Պատ. $0{,}38<x_1<0{,}39$; $1{,}24<x_2<1{,}25$։

33. Լուծել մոտավորապես $x^3-5=0$ հավասարումը։ Պատ. $x_1\approx1{,}71$, $x_{2,3}=1{,}71\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$։

34. Գտնել $x-\operatorname{tg}x=0$ հավասարման այն արմատի մոտավոր արժեքը, որը գտնվում է 0-ի և $\frac{3\pi}{2}$-ի միջև։ Պատ. 4,4935։

35. Մինչև 0,001-ի ճշտությամբ հաշվել $\sin x=1-x$ հավասարման արմատը։ Ցուցում։ Հավասարումը բերել $f(x)=0$ տեսքի։ Պատ. $0{,}5110<x<0{,}5111$։

Տարբեր խնդիրներ

36. Ցույց տալ, որ $\rho^2=a^2\cos2\varphi$ լեմնիսկատի յուրաքանչյուր կետում կորությունը համեմատական է այդ կետի շառավիղ վեկտորին։

37. Գտնել $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ կորի կորության շառավղի մեծագույն արժեքը։ Պատ. $R=\frac{3a}{4}$։

38. Գտնել $y=x\ln x$ կորի կորության կենտրոնի կոորդինատներն այն կետում, որտեղ $y'=0$։ Պատ. $(e^{-1}, 0)$։

39. Ապացուցել, որ Արքիմեդի սպիրալի՝ $\rho=a\varphi$ կետերի համար, երբ $\varphi\to\infty$ շառավիղ վեկտորի և կորության շառավղի տարբերության մեծությունը ձգտում է 0-ի։

40. Գտնել այն $y=ax^2+bx+c$ պարաբոլը, որը $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ կետում $y=\sin x$ սինուսոիդի հետ ունի ընդհանուր շոշափող և կորություն, կատարել գծագիր։ Պատ. $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{\pi x}{2}+1-\frac{\pi^2}{8}$։

41. $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է այսպես.

$$f(x)=x^3,\ -\infty<x\leqslant 1 \text{ միջակայքում},$$

$$f(x)=ax^2+bx+c,\ 1<x<+\infty \text{ միջակայքում}.$$

Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն a-ն, b-ն, c-ն, որպեսզի $y=f(x)$ գիծն ամենուրեք ունենա անընդհատ կորություն։ Կատարել գծագիր։ Պատ. $a=3$, $b=-3$, $c=1$։

42. Ցույց տալ, որ ցիկլոիդի կորության շառավիղը նրա ցանկացած կետում երկու անգամ մեծ է այդ կետում նորմալի երկարությունից։

43. Գրել $y=x^2$ պարաբոլի $(1, 1)$ կետում կորության շրջանագծի հավասարումը։ Պատ. $(x+4)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$։

44. Գրել $y=\operatorname{tg}x$ կորի $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$ կետում կորության շրջանագծի հավասարումը։ Պատ. $\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$։

45. Գտնել a և b կիսառանցքներն ունեցող էլիպսի ամբողջ էվոլյուտի երկարությունը։ Պատ. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$։

46. Գտնել $xe^x=2$ հավասարման արմատների մոտավոր արժեքը մինչև 0,01 ճշտությամբ։ Պատ. Հավասարումն ունի $x\approx 0{,}84$ միակ իրական արմատը։

47. Գտնել $x\ln x=0{,}8$ հավասարման արմատների մոտավոր արժեքը մինչև 0,01 ճշտությամբ։ Պատ. Հավասարումն ունի $x\approx 1{,}64$ միակ իրական արմատը։

48. Գտնել $x^2\operatorname{arctg}x=1$ հավասարման արմատների մոտավոր արժեքը մինչև 0,001 ճշտությամբ։ Պատ. Հավասարումն ունի $x\approx 1{,}096$ միակ իրական արմատը։

ԳԼՈՒԽ VII

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐ։ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

§ 1. Կոմպլեքս թվեր։ Էլակետային սահմանումներ

z կոմպլեքս թիվ կոչվում է

$$z=a+ib \tag{1}$$

արտահայտությունը, որտեղ a-ն և b-ն իրական թվեր են. i-ն՝ այսպես կոչված կեղծ միավորն է, որը որոշվում է

$$i=\sqrt{-1} \text{ կամ } i^2=-1 \tag{2}$$

հավասարությունով. a-ն կոչվում է z թվի իրական մաս, իսկ bi-ն կեղծ մաս։ Սրանց նշանակում են այսպես.

$$a=\operatorname{Re}z,\quad b=\operatorname{Im}z.$$

Եթե $a=0$, ապա $0+ib=ib$ թիվը կոչվում է զուտ կեղծ. եթե $b=0$, ապա ստացվում է իրական թիվ՝ $a+i0=a$։ $z=a+ib$ և $z=a-ib$ երկու կոմպլեքս թվերը, որոնք տարբերվում են միայն կեղծ մասի նշանով, կոչվում են համալուծ։

Ընդունվում են երկու հիմնական սահմանումներ։

1. $z_1=a_1+ib_1$ և $z_2=a_2+ib_2$ երկու կոմպլեքս թվեր համարվում են հավասար՝ $z_1=z_2$, եթե

$$a_1=a_2,\quad b_1=b_2,$$

այսինքն, եթե առանձին հավասար են նրանց իրական և կեղծ մասերը։

2. z կոմպլեքս թիվը հավասար է զրոյի՝

$$z=a+ib=0$$

այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=0$, $b=0$։

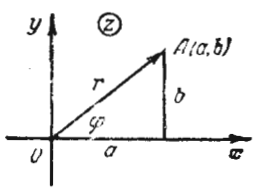
1. Կոմպլեքս թվերի երկրաչափական պատկերումը։ Ամեն մի $z=a+ib$ կոմպլեքս թիվ կարելի է Oxy հարթության վրա պատկերացնել a և b կոորդինատներն ունեցող A(a, b) կետի

տեսքով: Հակադարձը, հարթությունն ամեն մի $M(x, y)$ կետին համապատասխանում է $z=x+iy$ կոմպլեքս թիվ:

Հարթությունը, որի վրա պատկերվում են կոմպլեքս թվերը, կոչվում է z կոմպլեքս փոփոխականի հարթություն (նկ. 162) (հարթության վրա z սիմվոլը դնել շրջանի մեջ):

z կոմպլեքս փոփոխականի հարթության այն կետերին, որոնք ընկած են Ox առանցքի վրա, համապատասխանում են իրական թվերը ($b=0$): Oy առանցքի վրա ընկած կետերը պատկերում են զուտ կեղծ թվերը, քանի որ այդ դեպքում $a=0$: Այդ պատճառով z կոմպլեքս փոփոխականի հարթության վրա կոմպլեքս թվերը պատկերելիս Oy առանցքն անվանում են կեղծ թվերի առանցք կամ կեղծ առանցք, իսկ Ox առանցքը՝ իրական առանցք:

$A(a, b)$ կետը միացնելով կոորդինատների սկզբնակետի հետ, կստանանք $\overline{OA}$ վեկտորը: Մի քանի դեպքերում հարմար է $z=a+ib$ կոմպլեքս թվի երկրաչափական պատկերը համարել $\overline{OA}$ վեկտորը:



Նկ. 162

2. Կոմպլեքս թվի գրությունը եռանկյունաչափական ձևը: φ-ով և r-ով ($r \geq 0$) նշանակենք $A(a, b)$ կետի բևեռային կոորդինատները, կոորդինատների սկզբնակետը համարելով բևեռ, իսկ Ox առանցքի դրական ուղղությունը՝ բևեռային առանցք: Այդ դեպքում (նկ. 162) տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

$$a=r\cos\varphi, \quad b=r\sin\varphi,$$

և հետևաբար, z կոմպլեքս թիվը կարելի է ներկայացնել

$$a+ib=r\cos\varphi+i\,r\sin\varphi$$

կամ

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \qquad (3)$$

ձևով:

Աջ կողմում գտնվող արտահայտությունը կոչվում է $z=a+ib$ կոմպլեքս թվի գրության եռանկյունաչափական ձև. r-ը կոչվում է z կոմպլեքս թվի մոդուլ, φ-ն՝ z կոմպլեքս թվի արգումենտ. սրանք նշանակվում են այսպես.

$$r=|z|, \quad \varphi=\arg z: \qquad (4)$$

r և φ մեծությունները a-ի և b-ի միջոցով արտահայտվում են այսպես.

$$r=\sqrt{a^2+b^2}, \qquad \varphi=\operatorname{Arctg}\frac{b}{a}:$$

Եվ այսպես,

$$\left.\begin{aligned} |z|&=|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}, \\ \arg z&=\arg(a+ib)=\operatorname{Arctg}\frac{b}{a}: \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Կոմպլեքս թվի արգումենտը համարվում է դրական, եթե այն հաշվվում է Ox առանցքի դրական ուղղությունից՝ ժամացույցի սլաքի շարժմանը հակառակ և բացասական՝ հաշվանքի հակադիր ուղղության դեպքում: Ակնհայտ է, որ φ արգումենտը որոշվում է ոչ միարժեքորեն, այլ $2\pi k$ գումարելիի ճշտությամբ, որտեղ k-ն ցանկացած ամբողջ թիվ է:

Դիտողություն: $z=a+ib$ և $z=a-ib$ համալուծ կոմպլեքս թվերն ունեն հավասար մոդուլներ՝ $|z|=|\bar{z}|$, իսկ նրանց արգումենտները բացարձակ մեծությամբ հավասար են, սակայն տարբերվում են նշանով.

$$\arg z=-\arg\bar{z}:$$

Նշենք, որ A իրական թիվը նույնպես կարող է գրվել (3) ձևով, այն է՝

$$A=|A|(\cos 0+i\sin 0), \qquad \text{երբ } A>0,$$
$$A=|A|(\cos\pi+i\sin\pi), \qquad \text{երբ } A<0:$$

0 կոմպլեքս թվի մոդուլը հավասար է 0-ի՝ $|0|=0$: Իրոք զրոյի արգումենտ կարելի է ընդունել ցանկացած φ անկյուն: Իրոք, ցանկացած φ անկյան համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$0=0(\cos\varphi+i\sin\varphi):$$

§ 2. Հիմնական գործողություններ կոմպլեքս թվերի հետ

1. Կոմպլեքս թվերի գումարումը: $z_1=a_1+ib_1$ և $z_2=a_2+ib_2$ երկու կոմպլեքս թվերի գումար կոչվում է

$$z_1+z_2=(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2) \qquad (1)$$

հավասարությամբ որոշվող կոմպլեքս թիվը:

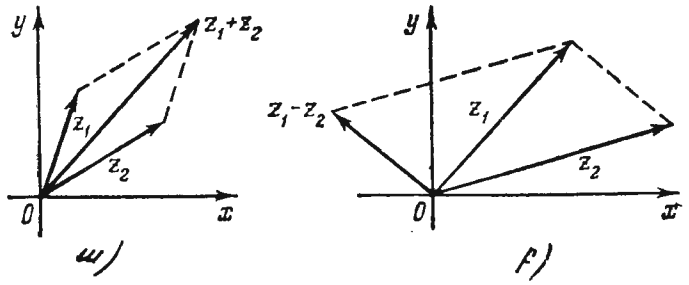
(1) բանաձևից հետևում է, որ վեկտորներով պատկերված կոմպլեքս թվերի գումարումը կատարվում է վեկտորների գումարման կանոնով (նկ. 163, ա):

2. Կոմպլեքս թվերի հանումը: $z_1=a_1+ib_1$ և $z_2=a_2+ib_2$ երկու կոմպլեքս թվերի տարբերություն կոչվում է այնպիսի

կոմպլեքս թիվ, որը, գումարելով z_2-ի հետ՝ գումարում տալիս է z_1 կոմպլեքս թիվը.

$$z_1-z_2=(a_1+ib_1)-(a_2+ib_2)=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2). \qquad (2)$$

Նշենք, որ երկու կոմպլեքս թվերի տարբերության մոդուլը հավասար



Նկ. 163

է կոմպլեքս փոփոխականի հարթության վրա այդ թվերը պատկերող կետերի միջև եղած հեռավորությանը (նկ. 163, բ).

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}.$$

3. Կոմպլեքս թվերի բազմապատկումը: $z_1=a_1+ib_1$ և $z_2=a_2+ib_2$ կոմպլեքս թվերի արտադրյալ կոչվում է այնպիսի կոմպլեքս թիվ, որը ստացվում է, եթե մենք այդ թվերը հանրահաշվի կանոններով բազմապատկում ենք որպես բազմանդամներ, հաշվի առնելով միայն, որ

$i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=(-i)(i)=-i^2=1$, $i^5=i$ և այլն, և ընդհանրապես ցանկացած k ամբողջ թվի դեպքում

$$i^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=-1,\quad i^{4k+3}=-i.$$

Այս կանոնի հիման վրա ստանում ենք.

$$z_1z_2=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=a_1a_2+ib_1a_2+ia_1b_2+i^2b_1b_2$$

կամ

$$z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(b_1a_2+a_1b_2). \qquad (3)$$

Դիցուք կոմպլեքս թվերը տրված են եռանկյունաչափական ձևով՝

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Գտնենք այդ թվերի արտադրյալը.

$$z_1z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2]=$$
$$=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]=$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Այսպիսով,

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \qquad (3')$$

այսինքն՝ երկու կոմպլեքս թվերի արտադրյալը այնպիսի կոմպլեքս թիվ է, որի մոդուլը հավասար է բազմապատկիչների մոդուլների արտադրյալին, իսկ արգումենտը հավասար է բազմապատկիչների արգումենտների գումարին:

Դիտողություն 1: $z=a+ib$ և $\bar{z}=a-ib$ համալուծ կոմպլեքս թվերի արտադրյալն ըստ (3) հավասարության արտահայտվում է այսպես.

$$z\bar{z}=a^2+b^2$$

կամ

$$z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2.$$

Համալուծ կոմպլեքս թվերի արտադրյալը հավասար է նրանցից յուրաքանչյուրի մոդուլի քառակուսուն:

4. Կոմպլեքս թվերի բաժանումը: Կոմպլեքս թվերի բաժանումը սահմանվում է որպես բազմապատկմանը հակադարձ գործողություն:

Դիցուք $z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2$, $|z_2|=\sqrt{a_2^2+b_2^2}\neq 0$. Այդ դեպքում $\frac{z_1}{z_2}=z$ այնպիսի կոմպլեքս թիվ է, որ $z_1=z_2z$. Եթե

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=x+iy,$$

ապա

$$a_1+ib_1=(a_2+ib_2)(x+iy)$$

կամ

$$a_1+ib_1=(a_2x-b_2y)+i(a_2y+b_2x);$$

x-ը և y-ը որոշվում են հետևյալ հավասարումների սիստեմից.

$$a_1=a_2x-b_2y,\qquad b_1=b_2x+a_2y.$$

Լուծելով սիստեմը, գտնում ենք.

$$x=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\qquad y=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Վերջնականապես ստանում ենք.

$$z=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i. \qquad (4)$$

Գործնականորեն կոմպլեքս թվերի բաժանումը կատարվում է

հետևյալ կերպ. որպեսզի $z_1=a_1+ib_1$ բաժանենք $z_2=a_2+ib_2$ վրա, բաժանելին և բաժանարարը բազմապատկենք հայտարարի համալուծ կոմպլեքս թվով (այսինքն՝ (a_2-ib_2)-ով)։

Այդ դեպքում բաժանարարը կլինի իրական թիվ, որի վրա բաժանելով բաժանելիի իրական և կեղծ մասերը, կստանանք քանորդը՝

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1+a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i;$$

Եթե կոմպլեքս թվերը տրված են եռանկյունաչափական ձևով՝

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

ապա

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]; \qquad (5)$$

Այս հավասարությունը ստանալու համար բավական է բաժանարարը բազմապատկել քանորդով.

$$r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]=$$

$$=r_2\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_2+\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_2+\varphi_1-\varphi_2)]=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1);$$

Այսպիսով, երկու կոմպլեքս թվերի քանորդի մոդուլը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի մոդուլների քանորդին։ Քանորդի արգումենտը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի արգումենտների տարբերությանը։

Դիտողություն 2։ Կոմպլեքս թվերի հետ գործողությունների կանոններից հետևում է, որ կոմպլեքս թվերի գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման գործողությունների արդյունքը նորից կոմպլեքս թիվ է։

Եթե կոմպլեքս թվերի հետ գործողությունների կանոնները կիրառենք իրական թվերի նկատմամբ, վերջիններս դիտելով որպես կոմպլեքս թվերի մասնավոր դեպք, ապա այդ կանոնները կհամընկնեն թվաբանությունից հայտնի գործողությունների սովորական կանոնների հետ։

Դիտողություն 3. Անդրադառնալով կոմպլեքս թվերի գումարի, տարբերության, արտադրյալի և քանորդի սահմանումներին, հեշտ է ստանալ, որ եթե այդ արտահայտությունների մեջ յուրաքանչյուր կոմպլեքս թիվ փոխարինվի համապատասխան գործողությունների արդյունքները կրկնակի համալուծ թվերով։ Այսպիսով, մասնավորապես, հետևում է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ։ Եթե իրական գործակիցներով

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A^n$$

բազմանդամի մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք $a+ib$ թիվը, իսկ նրան $a-ib$ համալուծ թիվը, ապա և այդ տեղադրությունների արդյունքները կլինեն փոխադարձ համալուծներ։

§ 3. Կոմպլեքս թիվն աստիճան բարձրացնելը և կոմպլեքս թվից արմատ հանելը

1. Աստիճան բարձրացնելը։ Նախորդ պարագրաֆի (3′) բանաձևից հետևում է, որ եթե n-ը ամբողջ դրական թիվ է, ապա

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi); \qquad (1)$$

Այս բանաձևը կոչվում է Մուավրի բանաձև։ Սա ցույց է տալիս, որ կոմպլեքս թիվն ամբողջ դրական աստիճան բարձրացնելիս մոդուլը բարձրացվում է այդ աստիճանը, իսկ արգումենտը բազմապատկվում է աստիճանի ցուցիչով։

Այժմ կիրառենք Մուավրի բանաձևի ևս մեկ կիրառություն։ Այդ բանաձևում ընդունելով $r=1$, կստանանք.

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi;$$

Ձախ մասը վերածելով ըստ Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի և հավասարեցնելով իրական և կեղծ մասերը, մենք կարող ենք $\sin n\varphi$-ն և $\cos n\varphi$-ն արտահայտել $\sin\varphi$-ի և $\cos\varphi$-ի աստիճանների միջոցով։ Այսպես, օրինակ, $n=3$ դեպքում ստանում ենք.

$$\cos^3\varphi+i3\cos^2\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi-i\sin^3\varphi=\cos3\varphi+i\sin3\varphi$$

օգտագործելով երկու կոմպլեքս թվերի հավասարության պայմանը, կստանանք.

$$\cos3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi,\quad \sin3\varphi=-\sin^3\varphi+3\cos^2\varphi\sin\varphi;$$

2. Արմատ հանելը։ n-րդ աստիճանի արմատ կոմպլեքս թվից կոչվում է այնպիսի կոմպլեքս թիվ, որի n-րդ աստիճանը հավասար է ենթարմատային թվին, այսինքն՝

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi),$$

եթե

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi);$$

Քանի որ հավասար կոմպլեքս թվերի մոդուլները պետք է լինեն հավասար, իսկ արգումենտները կարող են տարբերվել 2π-ին բազմապատիկ թվերով, ապա

$$\rho^n=r, \quad n\psi=\varphi+2k\pi.$$

Այստեղից գտնում ենք.

$$\rho=\sqrt[n]{r}, \qquad \psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n},$$

որտեղ k-ն ցանկացած ամբողջ թիվ է, $\sqrt[n]{r}$-ը՝ r դրական թվից արմատի թվաբանական (այսինքն՝ իրական դրական) արժեքն է։ Հետևաբար,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \qquad (2)$$

k-ին տալով 0, 1, 2, . . ., n−1 արժեքները, կստանանք արմատի n տարբեր արժեքներ։ k-ի մյուս արժեքների համար արգումենտները տացյալներից կտարբերվեն 2π-ին բազմապատիկ թվով, և, հետևաբար, կստացվեն արմատի այնպիսի արժեքներ, որոնք համընկնում են դիտարկվածների հետ։

Եվ այսպես, կոմպլեքս թվից n-րդ աստիճանի արմատն ունի n տարբեր արժեքներ։

Զրոյից տարբեր A իրական թվից n-րդ աստիճանի արմատը նույնպես ունի n տարբեր արժեքներ, քանի որ իրական թիվը հանդիսանում է կոմպլեքս թվի մասնավոր դեպքը և կարող է ներկայացվել եռանկյունաչափական ձևով.

եթե $A>0$, ապա $A=|A|\ (\cos 0+i\sin 0)$,

եթե $A<0$, ապա $A=|A|\ (\cos\pi+i\sin\pi)$։

Օրինակ 1։ Գտնել խորանարդ արմատ մեկի բոլոր արժեքները։

Լուծում։ Մեկը ներկայացնենք եռանկյունաչափական ձևով.

$$1=\cos 0+i\sin 0.$$

Ըստ (2) բանաձևի ստանում ենք։

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{0+2k\pi}{3}.$$

Ընդունելով k-ն հավասար 0, 1, 2, գտնում ենք արմատի երեք արժեքները.

$$x_1=\cos 0+i\sin 0=1; \quad x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}; \quad x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Հաշվի առնելով, որ

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}; \quad \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}; \quad \sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

ստանում ենք

$$x_1=1; \quad x_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

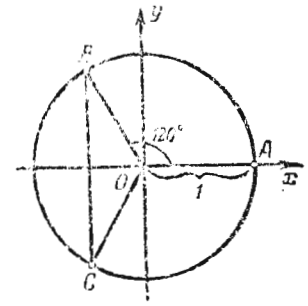
Նկ. 164-ում A, B, C կետերը հանդիսանում են ստացված արմատների երկբաչափական պատկերները։

3. Երկանդամ հավասարման լուծումը։ $x^n=A$ տեսքի հավասարումը կոչվում է երկանդամ հավասարում։ Գտնենք այդ հավասարման արմատները։ Եթե A-ն իրական դրական թիվ է, ապա

$$x=\sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Փակագծերում եղած արտահայտությունը տալիս է 1-ի n-րդ աստիճանի արմատի բոլոր արժեքները։



Նկ. 164

Եթե A-ն իրական բացասական թիվ է, ապա

$$x=\sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}\right).$$

Եթե A-ն կոմպլեքս թիվ է, ապա x-ի արժեքները որոնվում են ըստ (2) բանաձևի։

Օրինակ 2։ Լուծել հավասարումը՝

$$x^4=1.$$

Լուծում.

$$x=\sqrt[4]{\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi}=\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}.$$

Ընդունելով k-ն հավասար 0, 1, 2, 3, ստանում ենք.

$$x_1=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}=i$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4}=-1,$$

$$x_4=\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}=-i.$$

§ 4. Կոմպլեքս ցուցիչով ցուցչային ֆունկցիան և նրա հատկությունները

Դիցուք $z=x+iy$: *Եթե* x-*ը և* y-*ը իրական փոփոխականներ են, ապա* z-*ը կոչվում է կոմպլեքս փոփոխական:* z *կոմպլեքս փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքին* Oxy *հարթության վրա (կոմպլեքս փոփոխականի հարթության) համապատասխանում է որոշակի կետ (տես նկ. 162):*

Սահմանում: Եթե կոմպլեքս արժեքների որևէ տիրույթից վերցրած z *կոմպլեքս փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է մի այլ* w *կոմպլեքս մեծության որոշակի արժեք, ապա* w-*ն հանդիսանում է* z *կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիա: Կոմպլեքս արգումենտի ֆունկցիաները նշանակում են* $w=f(z)$ *կամ* $w=w(z)$:

Այստեղ մենք կդիտարկենք կոմպլեքս փոփոխականի մի ֆունկցիա՝

$$w=e^z$$

կամ

$$w=e^{x+iy}$$

ցուցչային ֆունկցիան:

w *ֆունկցիայի կոմպլեքս արժեքները որոշվում են այսպես:**

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y), \tag{1}$$

այսինքն

$$w(z)=e^z(\cos y+i\sin y). \tag{2}$$

Օրինակներ:

1. $z=1+\frac{\pi}{4}i$, $\quad e^{1+\frac{\pi}{4}i}=e\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=e\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

2. $z=0+\frac{\pi}{2}i$, $\quad e^{0+\frac{\pi}{2}i}=e^0\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i$,

3. $z=1+i$, $\quad e^{1+i}=e^1(\cos 1+i\sin 1)\approx 0{,}54+i\cdot 0{,}83$,

4. $z=x$ *(իրական թիվ),* $e^{x+0i}=e^x(\cos 0+i\sin 0)=e^x$ *(սովորական ցուցչային ֆունկցիա):*

---

* *Կոմպլեքս փոփոխականի ցուցչային ֆունկցիայի այսպիսի սահմանման նպատակահարմարությունը ցույց կտրվի ստորև, տես գլ. XIII, § 21, գլ. XVI § 18 (հ. II):*

Ցուցչային ֆունկցիայի հատկությունները

1. Եթե z_1-*ը և* z_2-*ը երկու կոմպլեքս թվեր են, ապա*

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}; \tag{3}$$

Ապացույց: Դիցուք

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2;$$

այդ դեպքում

$$e^{z_1+z_2}=e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}=e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=$$
$$=e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)]; \tag{4}$$

Մյուս կողմից, ևանկյունաչափական ձևով արված երկու կոմպլեքս թվերի արտադրյալի մասին թեորեմի հիման վրա կունենանք.

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2}=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)=$$
$$=e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)]; \tag{5}$$

(4) և (5) հավասարություններում աջ մասերը հավասար են, հետևաբար, հավասար են նաև ձախ մասերը՝ $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$:

2. Համանման ձևով ապացուցվում է հետևյալ բանաձևը՝

$$e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}; \tag{6}$$

3. Եթե m-*ը ամբողջ թիվ է, ապա*

$$(e^z)^m=e^{mz}; \tag{7}$$

Երբ $m>0$ *այս բանաձևը հեշտությամբ ստացվում է (3) բանաձևի հիման վրա. եթե* $m<0$, *ապա այն ստացվում է (3) և (6) բանաձևերի հիման վրա:*

4. Իրավացի է հետևյալ նույնությունը՝

$$e^{z+2\pi i}=e^z; \tag{8}$$

Իրոք, ըստ (3) և (1) բանաձևերի ստանում ենք.

$$e^{z+2\pi i}=e^z e^{2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z;$$

(8) նույնության հիման վրա հետևում է, որ e^z *ցուցչային ֆունկցիան* $2\pi i$ *պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է:*

5. Այնուհետև դիտարկենք

$$w=u(x)+iv(x)$$

կոմպլեքս մեծությունը, որտեղ $u(x)$-*ը և* $v(x)$-*ը* x *իրական փոփոխականի իրական ֆունկցիաներ են: Սա իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիա է:*

ա) Դիցուք գոյություն ունեն հետևյալ սահմանները՝

$$\lim_{x\to x_0} u(x)=u(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} v(x)=v(x_0).$$

Այդ դեպքում $u(x_0)+iv(x_0)$*-ն անվանում են* w *կոմպլեքս փոփոխականի սահման:*

բ) Եթե գոյություն ունեն $u'(x)$ *և* $v'(x)$ *ածանցյալները, ապա*

$$w'_x=u'(x)+iv'(x) \tag{9}$$

արտահայտությունը կանվանենք իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիայի ածանցյալ ըստ իրական արգումենտի:

Այնուհետև դիտարկենք հետևյալ ցուցչային ֆունկցիան.

$$w=e^{\alpha x+i\beta x}=e^{(\alpha+i\beta)x},$$

որտեղ α*-ն և* β*-ն հաստատուն իրական թվեր են, իսկ* x*-ը՝ իրական փոփոխական է: Դա իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիա է, որը համաձայն (1) բանաձևի կարելի է արտագրել այսպես.*

$$w=e^{\alpha x}[\cos\beta x+i\sin\beta x]$$

կամ

$$w=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Գտնենք w'_x *ածանցյալը: Ըստ (9) բանաձևի կունենանք.*

$$\begin{aligned} w'_x&=(e^{\alpha x}\cos\beta x)'+i(e^{\alpha x}\sin\beta x)'=\\ &=e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x)+ie^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x)=\\ &=\alpha[e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)]+i\beta[e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)]=\\ &=(\alpha+i\beta)[e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)]=(\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}. \end{aligned}$$

Այսպիսով, եթե $w=e^{(\alpha+i\beta)x}$*, ապա* $w'=(\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}$ *կամ*

$$[e^{(\alpha+i\beta)x}]'=(\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}. \tag{10}$$

Այսպիսով, եթե k*-ն կոմպլեքս (մասնավորապես իրական) թիվ է և* x*-ը իրական թիվ է, ապա*

$$(e^{kx})'=ke^{kx}. \tag{9'}$$

Ստացանք ցուցչային ֆունկցիայի դիֆերենցման սովորական կանոնը: Այնուհետև,

$$(e^{kx})''=[(e^{kx})']'=k(e^{kx})'=k^2e^{kx}.$$

կամայական n*-ի դեպքում*

$$(e^{kx})^{(n)}=k^ne^{kx}.$$

Այս բանաձևերը հետագայում մեզ անհրաժեշտ կլինեն:

§ 5. Էյլերի բանաձևը: Կոմպլեքս թվի ցուցչային ձևը

Եթե նախորդ պարագրաֆի (1) բանաձևում ընդունենք $x=0$*, ապա կստանանք.*

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y. \tag{1}$$

Սա Էյլերի բանաձևն է, որը կեղծ ցուցչով ցուցչային ֆունկցիան արտահայտում է եռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջոցով:

(1) բանաձևում y*-ը փոխարինելով* $(-y)$*-ով, կստանանք.*

$$e^{-iy}=\cos y-i\sin y. \tag{2}$$

(1) և (2) հավասարություններից գտնենք $\cos y$*-ը և* $\sin y$*-ը.*

$$\left.\begin{aligned} \cos y&=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\\ \sin y&=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Վերջին բանաձևերից օգտվում են, մասնավորապես, $\cos\varphi$*-ի և* $\sin\varphi$*-ի աստիճանները և նրանց արտագրյալները բազմապատիկ աղեղների սինուսով և կոսինուսով արտահայտելու համար:*

Օրինակ 1.

$$\begin{aligned} \cos^2y&=\left(\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(e^{i2y}+2+e^{-i2y})=\\ &=\frac{1}{4}[(\cos 2y+i\sin 2y)+2+(\cos 2y-i\sin 2y)]=\\ &=\frac{1}{4}(2\cos 2y+2)=\frac{1}{2}(1+\cos 2y). \end{aligned}$$

Օրինակ 2.

$$\begin{aligned} \cos^2\varphi\sin^2\varphi&=\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2=\\ &=\frac{(e^{i2\varphi}-e^{-i2\varphi})^2}{4\cdot 4i^2}=-\frac{1}{8}\cos 4\varphi+\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Կոմպլեքս թվի ցուցչային ձևը: Կոմպլեքս թիվը ներկայացնենք եռանկյունաչափական տեսքով՝

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

որտեղ r*-ը կոմպլեքս թվի մոդուլն է, իսկ* φ*-ն՝ կոմպլեքս թվի արգումենտը: Ըստ Էյլերի բանաձևի*

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}. \tag{4}$$

Հետևաբար, ամեն մի կոմպլեքս թիվ կարելի է ներկայացնել այսպես կոչված ցուցչային ձևով.

$$z=re^{i\varphi};$$

Օրինակ 3։ 1, i, −2, −i թվերը ներկայացնել ցուցչային ձևով։

Լուծում.

$$1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=e^{2k\pi i},$$

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i},$$

$$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{\pi i},$$

$$-i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

Ցուցչային ֆունկցիայի՝ § 4-ի (3), (6), (7) հատկությունների հիման վրա հեշտությամբ կատարվում են ցուցչային ձևով տրված կոմպլեքս թվերի հետ գործողությունները։

Դիցուք ունենք՝

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1},\qquad z_2=r_2e^{i\varphi_2}.$$

Այդ դեպքում

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\tag{5}$$

այս արդյունքը համընկնում է § 2-ի (3′) բանաձևի հետ։

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};\tag{6}$$

այս բանաձևը համընկնում է § 2-ի (5) բանաձևի հետ։

$$z^n=(re^{i\varphi})^n=r^ne^{in\varphi};\tag{7}$$

այս բանաձևը համընկնում է § 3-ի (1) բանաձևի հետ։

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1);\tag{8}$$

այս բանաձևը համընկնում է § 3-ի (2) բանաձևի հետ։

§ 6. Բազմանդամի վերլուծումն արտադրիչների

$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n$ ֆունկցիան, որտեղ n-ը ամբողջ դրական թիվ է, ինչպես հայտնի է, կոչվում է բազմանդամ կամ x-ի ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիա։ n թիվը կոչվում է բազմանդամի աստիճան։ Այստեղ $A_0, A_1, \cdots, A_n$ գործակիցները իրական կամ

կոմպլեքս թվեր են. x անկախ փոփոխականը նույնպես կարող է ընդունել ինչպես իրական, այնպես էլ կոմպլեքս արժեքներ։ Բազմանդամի արմատ կոչվում է x փոփոխականի այնպիսի արժեքը, որի դեպքում բազմանդամը դառնում է զրո։

Թեորեմ 1 (Բեզուի թեորեմը)։ f(x) բազմանդամը x−a տարբերության վրա բաժանելիս ստացվում է մի մնացորդ, որը հավասար է f(a)-ի։

Ապացույց։ f(x)-ը (x−a)-ի վրա բաժանելիս քանորդը կլինի $f_1(x)$ բազմանդամը, որի աստիճանը մեկով ցածր է f(x)-ի աստիճանից, մնացորդը կլինի R հաստատուն թիվը։ Այսպիսով, կարող ենք գրել.

$$f(x)=(x-a)f_1(x)+R;\tag{1}$$

Այս հավասարությունն իրավացի է x-ի բոլոր արժեքների համար, որոնք տարբեր են a-ից ((x−a)-ի վրա բաժանելը x=a դեպքում իմաստ չունի)։

Այժմ ասենք, որ x-ը ձգտի a-ի։ Այդ դեպքում (1) հավասարության ձախ մասի սահմանը հավասար է f(a)-ի, իսկ աջ մասի սահմանը հավասար է R-ի։ Քանի որ f(x) և $(x-a)f_1(x)+R$ ֆունկցիաները միմյանց հավասար են բոլոր $x\neq a$ արժեքների դեպքում, ապա հավասար են և նրանց սահմանները, երբ $x\to a$, այսինքն՝ $f(a)=R$։

Հետևանք։ Եթե a-ն բազմանդամի արմատն է, այսինքն՝ $f(a)=0$, ապա f(x)-ն առանց մնացորդի բաժանվում է (x−a)-ի, վրա և, հետևաբար, ներկայացվում է

$$f(x)=(x-a)f_1(x)$$

արտադրյալի տեսքով, որտեղ $f_1(x)$-ը բազմանդամ է.

Օրինակ 1։ $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ բազմանդամը դառնում է զրո, երբ x=1, այսինքն f(1)=0, ուստի բազմանդամն առանց մնացորդի բաժանվում է (x−1)-ի վրա.

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6).$$

Այժմ անցնենք մեկ x անհայտով հավասարման դիտարկմանը։

Ամեն մի թիվ (իրական կամ կոմպլեքս), որը հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելիս հավասարումը դառնում է նույնություն, կոչվում է հավասարման արմատ։

Օրինակ 2։ $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{5\pi}{4}$, $x_3=\frac{9\pi}{4}$, ... թվերը հանդիսանում են $\cos x=\sin x$ հավասարման արմատներ։

Եթե հավասարումն ունի P(x)=0 տեսքը, որտեղ P(x)-ը n աստիճանի բազմանդամ է, ապա այդ հավասարումը կոչվում է n աս-

տիճանի հանրահաշվական հավասարում։ Սահմանումից հետևում է, որ $P(x)=0$ հանրահաշվական հավասարման արմատները նույնն են, ինչ և $P(x)$ բազմանդամի արմատները։

Բնականորեն հարց է ծագում. արդյոք ամեն մի հավասարում ունի՞ արմատ։

Ոչհանրահաշվական հավասարման դեպքում պատասխանը բացասական է. գոյություն ունեն այնպիսի ոչհանրահաշվական հավասարումներ, որոնք ոչ մի արմատ չունեն՝ ոչ իրական, ոչ կոմպլեքս, օրինակ, $e^x=0$ հավասարումը*։

Սակայն հանրահաշվական հավասարման դեպքում դրված հարցի պատասխանը դրական է։ Այդ պատասխանը տալիս է հանրահաշվի հիմնական թեորեմը.

Թեորեմ 2 (հանրահաշվի հիմնական թեորեմը)։ Ամեն մի $f(x)$ ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիա ունի իրական կամ կոմպլեքս առնվազն մեկ արմատ։

Այս թեորեմն ապացուցվում է բարձրագույն հանրահաշվում։ Այստեղ մենք այն կընդունենք առանց ապացույցի։

Օգտվելով հանրահաշվի հիմնական թեորեմից, հեշտ է ապացուցել հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ 3։ n-րդ աստիճանի ամեն մի բազմանդամ կարելի է ներկայացնել որպես $x-a$ տեսքի n գծային արտադրիչների և x^n-ի գործակցի արտադրյալ։

Ապացույց։ Դիցուք $f(x)$-ը n աստիճանի բազմանդամ է.

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n.$$

այս բազմանդամն ըստ հիմնական թեորեմի ունի առնվազն մեկ արմատ. այն կնշանակենք a_1-ով։ Այդ դեպքում Բեզուի թեորեմի հետևանքի համաձայն կարող ենք գրել

$$f(x)=(x-a_1)f_1(x),$$

որտեղ $f_1(x)$-ը $(n-1)$-րդ աստիճանի բազմանդամ է. $f_1(x)$-ը նույնպես ունի արմատ։ Այն նշանակենք a_2-ով։ Այդ դեպքում

$$f_1(x)=(x-a_2)f_2(x),$$

---

* Իրոք, եթե $a+bi$ թիվը լիներ հավասարման արմատ, ապա տեղի կունենար $e^{a+bi}=0$ նույնությունը կամ $e^a(\cos\beta+i\sin\beta)=0$ (Էյլերի բանաձևի հիման վրա)։ Բայց e^a-ն չի կարող հավասարվել զրոյի a-ի ոչ մի իրական արժեքի դեպքում. զրոյի հավասար չէ նաև $\cos b+i\sin b$-ն (քանի որ ցանկացած b-ի դեպքում այդ թվի մոդուլը, $\sqrt{\cos^2b+\sin^2b}=1$)։ Հետևաբար, նաև $e^a(\cos b+i\sin b)\neq0$, այսինքն, $e^{a+ib}\neq0$, բայց դա նշանակում է, որ $e^x=0$ հավասարումն արմատ չունի։

որտեղ $f_2(x)$-ը $(n-2)$-րդ աստիճանի բազմանդամ է։ Համանմանորեն՝

$$f_2(x)=(x-a_3)f_3(x)։$$

Շարունակելով գծային արտադրիչների անջատման այս պրոցեսը, կհասնենք մինչև

$$f_{n-1}(x)=(x-a_n)f_n$$

արտահայտությանը, որտեղ f_n-ը զրո աստիճանի բազմանդամ է, այսինքն՝ որևէ ֆիքսված թիվ է։ Այդ թիվն, ակնհայտ է, հավասար է x^n-ի գործակցին, այսինքն $f_n=A_0$։

Ստացած հավասարությունների հիման վրա կարող ենք գրել.

$$f(x)=A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)։ \qquad (2)$$

(2) վերլուծությունից հետևում է, որ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերը $f(x)$ բազմանդամի արմատներն են, քանի որ $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_n$ տեղադրությունների դեպքում աջ մասը, և հետևաբար ձախ մասը, դառնում է զրո։

Օրինակ 3։ $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ բազմանդամը դառնում է զրո, երբ $x=1$, $x=2$, $x=3$։

Հետևաբար,

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)։$$

Ոչ մի $x=a$ արժեք, որը հավասար չէ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, չի կարող լինել $f(x)$ բազմանդամի արմատ, քանի որ $x=a$ դեպքում (2) հավասարության աջ մասի ոչ մի արտադրիչ զրո չի դառնում։ Այստեղից բխում է հետևյալ առաջադրությունը.

n-րդ աստիճանի բազմանդամը չի կարող ունենալ n-ից ավելի տարբեր արմատներ։

Բայց նման դեպքում տեղի ունի հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ 4։ Եթե n-րդ աստիճանի $\varphi_1(x)$ և $\varphi_2(x)$ երկու բազմանդամների արժեքները համընկնում են x արգումենտի $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ $(n+1)$ տարբեր արժեքների դեպքում, ապա այդ բազմանդամները նույնական են։

Ապացույց։ Բազմանդամների տարբերությունը նշանակենք $f(x)$-ով՝

$$f(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)։$$

Ըստ պայմանի $f(x)$-ը այնպիսի բազմանդամ է, որի աստիճանը n-ից բարձր չէ և որը զրո է դառնում $a_1, a_2, \ldots, a_n$ կետերում։ Հետևաբար այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$f(x)=A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)։$$

Բայց, ըստ պայմանի, $f(x)$-ը զրո է դառնում նաև a_0 կետում։

Այդ դեպքում $f(a_0)=0$ *և ըստ սրում գծային արտադրիչներից ոչ մեկը հավասար չէ զրոյի: Այդ պատճառով* $A_0=0$, *բայց այդ դեպքում (2) հավասարությունից հետևում է, որ* $f(x)$ *բազմանդամը նույնաբար հավասար է զրոյի: Հետևաբար,* $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\equiv 0$, *կամ* $\varphi_1(x)\equiv\varphi_2(x)$:

Թեորեմ 5: Եթե

$$P(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_{n-1}x+A_n$$

բազմանդամը նույնաբար հավասար է զրոյի, ապա նրա բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի:

Ապացույց: Ըստ (2) բանաձևի գրենք այդ բազմանդամների վերլուծությունն արտադրիչների.

$$P(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_{n-1}x+A_n=$$
$$=A_0(x-a_1)\ldots(x-a_n). \qquad (1')$$

Եթե այս բազմանդամը նույնաբար հավասար է զրոյի, ապա այն հավասար է զրոյի $a_1, a_2, \ldots a_n$*-ից տարբեր* x*-ի որևէ արժեքի դեպքում: Բայց այդ դեպքում* $x-a_1, \ldots, x-a_n$ *փակագծերից ոչ մեկը հավասար չէ զրոյի, և, հետևաբար,* $A_0=0$:

Համանման ձևով ապացուցվում է, որ $A_1=0$, $A_2=0$ *և այլն:*

Թեորեմ 6: Եթե երկու բազմանդամներ նույնաբար հավասար են մեկը մյուսին, ապա մի բազմանդամի գործակիցները հավասար են մյուսի համապատասխան գործակիցներին:

Դա հետևում է այն բանից, որ տրված բազմանդամների տարբերությունը մի բազմանդամ է, որը նույնաբար հավասար է զրոյի: Հետևաբար, նախորդ թեորեմի հիման վրա նրա բոլոր գործակիցները զրո են:

Օրինակ 4: Եթե ax^3+bx^2+cx+d *բազմանդամը նույնաբար հավասար է* x^2-5x *բազմանդամին, ապա* $a=0$, $b=1$, $c=-5$, $d=0$:

§ 7. Բազմանդամի բազմապատիկ արմատների մասին

Եթե n*-րդ աստիճանի բազմանդամի*

$$f(x)=A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) \qquad (1)$$

գծային արտադրիչների վերլուծության մեջ մի քանի գծային արտադրիչներ միևնույնն են, ապա նրանց կարելի է միացնել, և այդ դեպքում բազմանդամի վերլուծությունն արտադրիչների կունենա

$$f(x)=A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m} \qquad (1')$$

տեսքը: Ընդ որում

$$k_1+k_2+\cdots+k_m=n.$$

Այս դեպքում a_1 *արմատը կոչվում է* k_1*-պատիկ արմատ,* a_2*-ը՝* k_2*-պատիկ արմատ և այլն:*

Օրինակ: $f(x)=x^3-5x^2+8x-4$ *բազմանդամը վեր է ածվում հետևյալ գծային արտադրիչների.*

$$f(x)=(x-2)(x-2)(x-1).$$

Այդ վերլուծությունը կարելի է գրել այսպես.

$$f(x)=(x-2)^2(x-1).$$

$a_1=2$ *արմատը երկնապատիկ արմատ է, իսկ* $a_2=1$ *արմատը՝ պարզ արմատ:*

Եթե բազմանդամի համար a *արմատը* k*-պատիկ է, ապա մենք կարող ենք համարել, որ բազմանդամն ունի* k *հատ հավասար արմատներ: Այդ դեպքում բազմանդամը գծային արտադրիչների վերածման մասին թեորեմից ստացվում է հետևյալ թեորեմը.*

n-րդ աստիճանի ամեն մի բազմանդամ ունի ճիշտ n արմատներ (իրական կամ կոմպլեքս):

Դիտողություն: Այն ամենը, ինչ ասվել է

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n$$

բազմանդամի արմատների մասին, ակնհայտ է, կարելի է ձևակերպել

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n=0$$

հանրահաշվական հավասարման արմատների տերմիններով:

Այնուհետև, ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Եթե a_1-ը $f(x)$ բազմանդամի $k_1>1$ բազմապատիկ արմատն է, ապա $f'(x)$ ածանցյալի համար այդ թիվը հանդիսանում է k_1-1 բազմապատիկ արմատ:

Ապացույց: Եթե a_1*-ը հանդիսանում է* $k_1>1$ *բազմապատիկ արմատ, ապա (1') բանաձևից հետևում է.*

$$f(x)=(x-a_1)^{k_1}\varphi(x),$$

որտեղ $\varphi(x)=(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m}$ *զրո չի դառնում, երբ* $x=a_1$, *այսինքն՝* $\varphi(a_1)\neq 0$: *Ածանցելով, կստանանք.*

$$f'(x)=k_1(x-a_1)^{k_1-1}\varphi(x)+(x-a_1)^{k_1}\varphi'(x)=$$
$$=(x-a_1)^{k_1-1}[k_1\varphi(x)+(x-a_1)\varphi'(x)].$$

Նշանակենք

$$\psi(x)=k_1\varphi(x)+(x-a_1)\varphi'(x).$$

Այդ դեպքում

$$f'(x)=(x-a_1)^{k_1-1}\psi(x),$$

ըստ որում

$$\psi(a_1)=k_1\varphi(a_1)+(a_1-a_1)\varphi'(a_1)=k_1\varphi(a_1)\neq 0,$$

այսինքն՝ $x=a_1$ հանդիսանում է $f'(x)$ բազմանդամի (k_1-1)-պատիկ արմատ: Բերված ապացույցից հետևում է, որ եթե $k_1=1$, ապա a_1-ը չի հանդիսանում $f'(x)$ ածանցյալի արմատ:

Ապացուցած թեորեմից հետևում է, որ a_1-ը հանդիսանում է $f''(x)$ ածանցյալի համար (k_1-2)-պատիկ արմատ, (k_1-3)-պատիկ արմատ՝ $f'''(x)$ ածանցյալի համար, ..., միապատիկ (պարզ) արմատ $f^{(k_1-1)}(x)$ ածանցյալի համար, և չի հանդիսանում արմատ $f^{(k_1)}(x)$ ածանցյալի համար, այսինքն՝

$$f(a_1)=0,\quad f'(a_1)=0,\quad f''(a_1)=0,\ \ldots,\ f^{(k_1-1)}(a_1)=0$$

բայց

$$f^{(k)}(a_1)\neq 0.$$

§ 8. Բազմանդամների վերլուծումն արտադրիչների՝ կոմպլեքս արմատների դեպքում

VII գլխի § 7-ի (1) բանաձևում $a_1, a_2, \ldots, a_n$ արմատները կարող են լինել ինչպես իրական, այնպես էլ կոմպլեքս: Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Եթե իրական գործակիցներով $f(x)$ բազմանդամն ունի $a+ib$ կոմպլեքս արմատը, ապա այն ունի և $a-ib$ համալուծ արմատը:

Ապացույց: Եթե $f(x)$ բազմանդամի մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք $a+ib$ թիվը, կատարենք ասաիճան բարձրացնելու գործողությունը և հավաքենք առանձին i պարունակող և i չպարունակող անդամները, ապա կստանանք.

$$f(a+ib)=M+iN,$$

որտեղ M-ը և N-ը i չպարունակող արտահայտություններ են:

Քանի որ $(a+ib)$-ն բազմանդամի արմատն է, ապա

$$f(a+ib)=M+iN=0,$$

որտեղից

$$M=0,\qquad N=0.$$

Այժմ բազմանդամի մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք $a-ib$ արտահայտությունը: Այդ դեպքում (§ 2-ի վերջի դիտողություն 3-ի հիման վրա) արդյունքում մենք կստանանք $M+iN$ թվի համալուծ թիվը, այսինքն՝

$$f(a-ib)=M-iN.$$

Քանի որ $M=0$ և $N=0$, ապա $f(a-ib)=0$, այսինքն $(a-ib)$-ն բազմանդամի արմատն է:

Եվ այսպես,

$$f(x)=A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

վերլուծության մեջ կոմպլեքս արմատները մտնում են զույգ-զույգ համալուծներով:

Բազմապատկելով կոմպլեքս համալուծ արմատների զույգին համապատասխանող գծային արտադրիչները կստանանք իրական գործակիցներով երկրորդ աստիճանի եռանդամ.

$$[x-(a+ib)][x-(a-ib)]=[(x-a)-ib][(x-a)+ib]=$$
$$=(x-a)^2+b^2=x^2-2ax+a^2+b^2=x^2+px+q,$$

որտեղ $p=-2a$, $q=a^2+b^2$ իրական թվեր են:

Եթե $a+ib$ թիվը k բազմապատիկ արմատ է, ապա նրան համալուծ $a-ib$ թիվը պետք է հանդիսանա k բազմապատիկ արմատ, այնպես որ $x-(a+ib)$ գծային արտադրիչների հետ բազմանդամի վերլուծության մեջ մտնում են $x-(a-ib)$ տեսքի նույնքան գծային արտադրիչներ:

Այսպիսով, իրական գործակիցներով բազմանդամը վերածվում իրական գործակիցներով առաջին և երկրորդ աստիճանի համապատասխան բազմապատիկությամբ արտադրիչների, այսինքն.

$$f(x)=A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots$$
$$\ldots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

Էստ որում

$$k_1+k_2+\ldots+k_r+2l_1+\ldots+2l_s=n.$$

§ 9. Ինտերպոլացում: Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևը

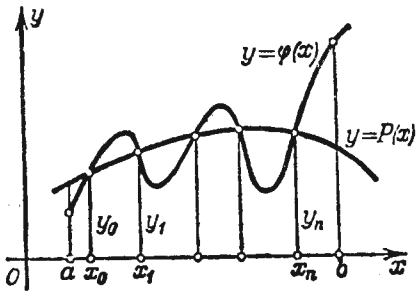
Դիցուք որևէ երևույթ ուսումնասիրելիս հաստատված է, որ y և x մեծությունների միջև գոյություն ունի արված երևույթի քանակական կողմը նկարագրող ֆունկցիոնալ կախում. ընդ որում $y=\varphi(x)$ ֆունկցիան մեզ մնում է անհայտ, սակայն էքսպերիմենտի հիման վրա հաստատված են այդ ֆունկցիայի $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ արժեքները $[a, b]$ հատվածին պատկանող արգումենտի՝ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ մի քանի արժեքների համար:

Խնդիրը կայանում է նրանում, որպեսզի գտնել հաշվողական տեսակետից հնարավորին չափ ավելի պարզ ֆունկցիա (օրինակ, բազմանդամ), որը $[a, b]$ հատվածում անհայտ $y=\varphi(x)$ ֆունկցիան ներկայացներ ճշգրիտ կամ մոտավորապես: Ավելի վերացական ձևով այս

խնդիրը կարելի է ձևակերպել այսպես. $[a, b]$ հատվածում տրված են $y=\varphi(x)$ անհայտ ֆունկցիայի արժեքները $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ տարբեր կետերում.

$$y_0=\varphi(x_0),\quad y_1=\varphi(x_1),\ \ldots,\ y_n=\varphi(x_n),$$

պահանջվում է գտնել n-ին չգերազանցող աստիճանով $P(x)$ բազմանդամ, որը մոտավորապես արտահայտի $\varphi(x)$ ֆունկցիան:



Նկ. 165

Իրոք այդպիսի բազմանդամ բնական է վերցնել այն բազմանդամը, որի արժեքները $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ կետերում համընկնում են $\varphi(x)$ ֆունկցիայի $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ համապատասխան արժեքներին (նկ. 165): Այդ դեպքում տրված խնդիրը, որը կոչվում է «ֆունկցիայի ինտերպոլացման խնդիր», ձևակերպվում է այսպես. տրված $\varphi(x)$ ֆունկցիայի համար գտնել n-ին չգերազանցող աստիճանով $P(x)$ բազմանդամ, որը տրված $x_0, x_1, \ldots, x_n$ արժեքների համար ընդունի հետևյալ արժեքները՝

$$y_0=\varphi(x_0),\qquad y_1=\varphi(x_1),\ \ldots,\ y_n=\varphi(x_n).$$

Իրոք որոնելի բազմանդամ վերցնենք

$$\begin{aligned}P(x)=&C_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)+\\&+C_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)+\\&+C_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)+\ldots\\&\ldots+C_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\end{aligned}\qquad(1)$$

տեսքի n-րդ աստիճանի բազմանդամը և $C_0, C_1, \ldots, C_n$ գործակիցները որոշենք այնպես, որ տեղի ունենան

$$P(x_0)=y_0,\quad P(x_1)=y_1,\ \ldots,\ P(x_n)=y_n\qquad(2)$$

պայմանները:

Ընդունենք (1) բանաձևում $x=x_0$. այդ դեպքում հաշվարկելով (2) հավասարությունը, կստանանք.

$$y_0=C_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n),$$

որտեղից

$$C_0=\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}.$$

Այնուհետև, ընդունելով $x=x_1$, կստանանք

$$y_1=C_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n),$$

որտեղից

$$C_1=\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)};$$

Նույն կերպ կգտնենք.

$$C_2=\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_n=\frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Գործակիցների գտնված արժեքները տեղադրելով (1) բանաձևի մեջ, կստանանք.

$$\begin{aligned}P(x)=&\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0+\\&+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1+\ldots\\&\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n.\end{aligned}\qquad(3)$$

Այս բանաձևը կոչվում է Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձև:

Առանց ապացույցի նշենք, որ եթե $\varphi(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածում ունի $(n+1)$-րդ կարգի ածանցյալ, ապա $\varphi(x)$ ֆունկցիան $P(x)$ բազմանդամով փոխարինելիս սխալը, այսինքն՝ $R(x)=\varphi(x)-P(x)$ մնացորդանը բավարարում է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|R(x)|\leqslant|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|\frac{1}{(n+1)!}\max|\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

Դիտողություն: § 6-ի թեորեմ 4-ից հետևում է, որ $P(x)$-ը ստացված պայմաններին բավարարող միակ բազմանդամն է:

Ցույց տանք, որ գոյություն ունեն և տարբեր ինտերպոլացիոն բանաձևեր: Երանցից մեկը՝ Նյուտոնի ինտերպոլացիոն բանաձևը դիտարկված է § 10-ում:

Օրինակ: Էքսպերիմենտից ստացվել են $y=\varphi(x)$ ֆունկցիայի այսպիսի արժեքներ. $y_0=3$, երբ $x_0=1$, $y_1=-5$, երբ $x_1=2$, $y_2=4$, երբ $x_2=-4$: Պահանջվում է $y=\varphi(x)$ ֆունկցիան մոտավորապես ներկայացնել 2-րդ աստիճանի բազմանդամով:

Լուծում: Ըստ (3) բանաձևի ունենք ($n=2$ դեպքում).

$$P(x)=\frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)}3+\frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)}(-5)+\frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)}4.$$

կամ

$$P(x)=-\frac{39}{30}x^2-\frac{123}{30}x-\frac{252}{30}.$$

§ 10. Նյուտոնի ինտերպոլացիոն բանաձևը

Դիցուք հայտնի են $\varphi(x)$ *ֆունկցիայի* $(n+1)$ *արժեքները, այն է՝* $y_0, y_1, \ldots, y_n$ *արգումենտի* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *արժեքների համար։ Ընդ որում արգումենտի հարևան արժեքների տարբերությունը հաստատուն է։ Այն նշանակենք* h*-ով։ Այսպիսով արգումենտի համապատասխան արժեքների համար ունենք անհայտ* $y=\varphi(x)$ *ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակը։*

x	x_0	$x_1=x_0+h$	$x_2=x_0+2h$	$\ldots$	$x_n=x_0+nh$
y	y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Կազմենք n*-ից ոչ բարձր աստիճանի բազմանդամ, որը* x*-ի համապատասխան արժեքների համար ընդունում է համապատասխան արժեքները։ Այդ բազմանդամը մոտավորապես կներկայացնի* $\varphi(x)$ *ֆունկցիան։*

Նախապես կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$\Delta y_0=y_1-y_0, \qquad \Delta y_1=y_2-y_1, \qquad \Delta y_2=y_3-y_2, \ \ldots,$$

$$\Delta^2 y_0=y_2-2y_1+y_0=\Delta y_1-\Delta y_0, \qquad \Delta^2 y_1=\Delta y_2-\Delta y_1, \ \ldots,$$

$$\Delta^3 y_0=y_3-3y_2+3y_1-y_0=\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0, \ \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^n y_0=\Delta^{n-1} y_1-\Delta^{n-1} y_0,$$

Դրանք այսպես կոչված 1-ին, 2-րդ, ..., n-րդ կարգի տարբերություններն են։ Գրենք x_0 *և* x_1 *արժեքների համար համապատասխանաբար* y_0, y_1 *արժեքներն ընդունող բազմանդամ։ Դա կլինի*

$$P_1(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}, \tag{1}$$

առաջին աստիճանի բազմանդամը։

Իրոք,

$$P_1(x)|_{x=x_0}=y_0, \quad P_1|_{x=x_1}=y_0+\Delta y_0\frac{h}{h}=y_0+(y_1-y_0)=y_1,$$

Գրենք բազմանդամը, որը x_0, x_1, x_2 *արժեքների համար համապատասխանաբար ընդունի* y_0, y_1, y_2 *արժեքները։ Դա կլինի*

$$P_2(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\,\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right) \tag{2}$$

երկրորդ աստիճանի բազմանդամը։

Իրոք,

$$P_2|_{x=x_0}=y_0, \qquad P_2|_{x=x_1}=y_1,$$

$$P_2|_{x=x_2}=y_0+\Delta y_0\cdot 2+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\,\frac{2h}{h}\left(\frac{2h}{h}-1\right)=y_2,$$

Երրորդ կարգի բազմանդամը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$P_3(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\,\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)+$$
$$+\frac{\Delta^3 y_0}{3!}\,\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right), \tag{3}$$

Վերջապես, x_0, x_1, x_2, ..., x_n *արժեքների համար համապատասխանաբար* y_0, y_1, y_2, ..., y_n *արժեքներն ընդունող* n*-րդ կարգի բազմանդամը կունենա*

$$P_n(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\,\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!}\,\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(n-1)\right] \tag{4}$$

տեսքը, որում կարելի է համոզվել անմիջական տեղադրմամբ։ Սա էլ հենց Նյուտոնի ինտերպոլացիոն բանաձևը կամ ինտերպոլացիոն բազմանդամն է։

Ըստ էության, տրված աղյուսակի արժեքների համար Լագրանժի բազմանդամը և Նյուտոնի բազմանդամը նույնական են, բայց գրված են տարբեր ձևով, քանի որ n*-ին չգերազանցող աստիճանի բազմանդամը, որը* x*-ի տրված* $n+1$ *արժեքների դեպքում ընդունում է տրված* $n+1$ *արժեքները, դառնում են միակ ձևով։*

Շատ դեպքերում Նյուտոնի ինտերպոլացիոն բազմանդամն ավելի հարմար է, քան Լագրանժի ինտերպոլացիոն բազմանդամը։ Այդ բազմանդամի առանձնահատկությունը կայանում է նրանում, որ k*-րդ աստիճանի բազմանդամից* $(k+1)$*-րդ աստիճանի բազմանդամին անցնելիս առաջին* $k+1$ *անդամները չեն փոխվում, այլ միայն ավելանում է նոր անդամ, որը արգումենտի նախորդ բոլոր արժեքների համար հավասար է զրոյի։*

Դիտողություն։ Լագրանժի (տես § 9 բանաձև (3) և Նյուտոնի (բանաձև (4)) ինտերպոլացիոն բանաձևերով որոշվում են ֆունկցիայի արժեքները $x_0<x<x_n$ *հատվածում։ Եթե այդ բանաձևերով որոշվում է ֆունկցիայի արժեքը, երբ* $x<x_0$ *(դա կարելի է անել միայն* $|x-x_0|$*-ի դեպքում), ապա ասում են, որ կատարվում է աղյուսակի ինտերպոլացիա դեպի ետ։ Եթե որոշվում է ֆունկցիայի արժեքը*

ժեքը, երբ $x > x_n$, ապա ասում են, որ կատարվում է աղյուսակի ինտերպոլացիա դեպի առաջ:

§ 11. Թվային դիֆերենցում

Դիցուք տրված է անհայտ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի արժեքներ տրված են § 10-ի սկզբում բերված աղյուսակով: Պահանջվում է մոտավորապես որոշել այդ ֆունկցիայի ածանցյալը: Այդ խնդիրը լուծվում է այսպես: Կառուցվում է Լագրանժի կամ Նյուտոնի ինտերպոլացիոն բազմանդամը և վերջինիցս էլ որոնվում է ածանցյալը:

Քանի որ հաճախ դիտարկվում են արգումենտի հարևան արժեքների միջև հավասար տարբերությունները աղյուսակներ, ապա մենք կօգտվենք Նյուտոնի ինտերպոլացիոն բանաձևից: Դիցուք տրված են ֆունկցիայի y_0, y_1, y_2, երեք արժեքները, որոնք համապատասխանում են արգումենտի x_0, x_1, x_2, արժեքներին: Այդ դեպքում գրենք § 10-ի (2) բազմանդամը և այն ածանցենք: Ստանում ենք ֆունկցիայի ածանցյալի մոտավոր արժեքը $x_0 \leq x \leq x_2$ հատվածում.

$$\varphi'(x) \approx P'_2(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\,\frac{x-x_0}{h} - 1\right); \qquad (1)$$

Երբ $x = x_0$ ստանում ենք.

$$\varphi'(x_0) \approx P'_2(x_0) = -\frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h}; \qquad (2)$$

Եթե դիտարկենք 3-րդ կարգի բազմանդամ (տես § 10-ի (3)) ապա ածանցելուց հետո նրա ածանցյալի համար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\varphi'(x) \approx P'_3(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\,\frac{x-x_0}{h} - 1\right) + \frac{\Delta^3 y_0}{2\cdot 3h}\left[3\left(\frac{x-x_0}{h}\right)^2 - 6\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + 2\right]; \qquad (3)$$

Մասնավորապես, երբ $x = x_0$ ստանում ենք.

$$\varphi'(x_0) \approx P'_3(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h}; \qquad (4)$$

Եթե օգտվենք § 10-ի (4) բանաձևից, ապա $x = x_0$ դեպքում ածանցյալի մոտավոր արտահայտությունը համար կստանանք.

$$\varphi'(x_0) \approx P'_n(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} - \frac{\Delta^4 y_0}{4h} + \ldots \qquad (5)$$

Նկատենք, որ ածանցյալների անցնող ֆունկցիայի համար Δy_0 տարբերությունը h-ի նկատմամբ առաջին կարգի անվերջ փոքր է, $\Delta^2 y_0$-ն՝ երկրորդ կարգի անվերջ փոքր, $\Delta^3 y_0$-ն՝ երրորդ կարգի անվերջ փոքր և այլն:

§ 12. Ֆունկցիաների՝ բազմանդամներով լավագույն մոտարկման մասին: Չեբիշևի տեսությունը

§§ 9 և 10-ում դիտարկված խնդրի կապակցությամբ բնական է դնել այսպիսի հարց. դիցուք $[a, b]$ հատվածում տրված է $\varphi(x)$ անընդհատ ֆունկցիան: Արդյոք կարելի է՞ նախօրոք տրված ցանկացած աստիճանի ճշտությամբ այդ ֆունկցիան մոտավորապես ներկայացնել $P(x)$ բազմանդամով: Այլ կերպ ասած, կարելի՞ է արդյոք ընտրել այնպիսի (x) բազմանդամ, որպեսզի $[a, b]$ հատվածի բոլոր կետերում $\varphi(x)$-ի և $P(x)$-ի տարբերության բացարձակ մեծությունը փոքր լինի նախօրոք տրված ցանկացած դրական թվից: Այս հարցի դրական պատասխանը* բովանդակվում է հետևյալ թեորեմում, որը մենք կբերենք առանց ապացույցի:

Վայերշտրասի թեորեմը: Եթե $\varphi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում, ապա ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $P(x)$ բազմանդամ, որ մատնանշված հատվածի բոլոր կետերում տեղի ունի

$$|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon$$

անհավասարությունը:

Սովետական ակադեմիկոս մաթեմատիկոս ակադեմիկոս Ս. Ն. Բերնշտեյնը տվել է այնպիսի բազմանդամների անմիջական կառուցման հետևյալ եղանակը, որոնք տրված հատվածում մոտավորապես հավասար են $\varphi(x)$ անընդհատ ֆունկցիային:

Դիցուք, օրինակ, $\varphi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[0, 1]$ հատվածում: Կազմենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m};$$

Այստեղ C_m^n-ը երկանդամային գործակիցներն են, $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$-ը՝ տրված

* Նկատենք, որ Լագրանժի ինտերպոլացիոն բազմանդամը (տես § 9, (3)) առաջադրված հարցին դեռևս պատասխան չի տալիս: Նրա արժեքները հավասար են ֆունկցիայի՝ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ կետերում ունեցած արժեքներին, բայց նրանք կարող են շատ հեռու լինել $[a, b]$ հատվածի ուրիշ կետերում ֆունկցիայի արժեքներից:

ֆունկցիայի արժեքները $x=\frac{m}{n}$ կետում: $B_n(x)$ արտահայտությունը n-րդ աստիճանի բազմանդամ է. այն անվանում են Բերնշտեյնի բազմանդամ:

Եթե տրված է կամայական $\varepsilon>0$ թիվ, ապա կարելի է ընտրել Բերնշտեյնի այնպիսի բազմանդամ (այսինքն՝ այնպես ընտրել նրա n աստիճանը), որպեսզի $[0, 1]$ հատվածում տեղի ունենա

$$|B_n(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

անհավասարությունը:

Նշենք, որ $[0, 1]$ հատվածի դիտարկումը (և ոչ թե կամայական հատվածի) ընդհանրությանը էական սահմանափակում չի հանդիսանում, քանի որ $x=a+t(b-a)$ փոխարինման օգնությամբ կարելի է ցանկացած $[a, b]$ հատվածը ձևափոխել $[0, 1]$ հատվածի: Այդ դեպքում n-րդ աստիճանի բազմանդամը ձևափոխվում է նույն աստիճանի բազմանդամի:

Բազմանդամների օգնությամբ ֆունկցիաների լավագույն մոտարկման տեսությունն ստեղծողը ռուս մաթեմատիկոս Պ. Լ. Չեբիշևն է (1821—1894), մաթեմատիկական մտքի մեծագույն ներկայացուցիչներից մեկը: Նրա կողմից ստացվել են այդ բնագավառի ուսումնասիրությունների արդյունքներ, որոնք հետագա մաթեմատիկոսների աշխատանքի վրա ունեցել են բացառիկ նշանակություն: Այդ տեսության ստեղծման համար երբեմն կետ է եղել մեքենաների մեջ լայնորեն օգտագործվող հոդակապավոր մեխանիզմների տեսության վերաբերյալ Պ. Լ. Չեբիշևի աշխատանքը: Ուսումնասիրելով այդպիսի մեխանիզմներ, նա եկավ մեկի հավասար ավագ անդամի գործակիցն ունեցող տվյալ աստիճանի բոլոր բազմանդամների մեջ այնպիսի բազմանդամի որոնման խնդրին, որը տրված հատվածում ամենաքիչն է տարբերվում զրոյից: Նրա կողմից այդպիսի բազմանդամներ գտնվել են և հիշատակվում գիտնականների կողմից անվանվել Չեբիշևի բազմանդամներ: Այդ բազմանդամներն օժտված են շատ հիանալի հատկություններով ու ներկայումս մաթեմատիկայի շատ հարցերում ուսումնասիրության հզոր միջոցներ են:

Վարժություններ VII գլխի վերաբերյալ

1. Գտնել $(3+5i)(4-i)$: Պատ. $17+17i$: **2.** Գտնել $(6+11i)(7+3i)$: Պատ. $9+95i$: **3.** Գտնել $\frac{3-i}{4+5i}$: Պատ. $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$: **4.** Գտնել $(4-7i)^3$: Պատ. $-524+7i$: **5.** Գտնել $\sqrt{i}$: Պատ. $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$: **6.** Գտնել $\sqrt{-5-12i}$: Պատ. $\pm(2-3i)$:

7. Հետևյալ արտահայտությունները բերել եռանկյունաչափական տեսքի. ա) $1+i$: Պատ. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$: բ) $1-i$: Պատ. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$: **8.** Գտնել $\sqrt[3]{i}$-ն: Պատ. $\frac{i+\sqrt{3}}{2}$; $-i$; $\frac{i-\sqrt{3}}{2}$: **9.** Հետևյալ արտահայտությունները ներկայացնել $\sin x$-ի և $\cos x$-ի աստիճաններով. $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 4x$, $\cos 4x$, $\sin 5x$, $\cos 5x$: **10.** Արտահայտել բազմապատիկ աղեղների սինուսով և կոսինուսով. $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^5 x$, $\cos^6 x$, $\sin^2 x$, $\sin^3 x$, $\sin^4 x$, $\sin^5 x$: **11.** $f(x)=x^3-4x^2+8x-1$ բաժանել $(x+4)$-ի վրա: Պատ. $f(x)=(x+4)(x^2-8x+40)-161$, այսինքն՝ քանորդը հավասար է $x^2-8x-40$, մնացորդը՝ $f(-4)=-161$: **12.** $f(x)=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$ բաժանել $(x+3)$-ի վրա: Պատ. $f(x)=(x+3)\cdot(x^3+9x^2+27x+27)$: **13.** $f(x)=x^7-1$ բաժանել $(x-1)$-ի: Պատ. $f(x)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$:

Հետևյալ բազմանդամները վերլուծել իրական գործակիցներով արտադրիչների. **14.** $f(x)=x^4-1$: Պատ. $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$: **15.** $f(x)=x^2-x-2$: Պատ. $f(x)=(x-2)(x+1)$: **16.** $f(x)=x^3+1$: Պատ. $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$: **17.** Էրմիտի հիման վրա ստացվել են x-ի y ֆունկցիայի արժեքները.

$$y_1=4 \text{ երբ } x_1=0,$$

$$y_2=6 \text{ երբ } x_2=1,$$

$$y_3=10 \text{ երբ } x_3=2:$$

Ֆունկցիան մոտավորապես ներկայացնել երկրորդ աստիճանի բազմանդամով: Պատ. x^2+x+4:

18. Գտնել չորրորդ աստիճանի բազմանդամ, որը $x=1, 2, 3, 4, 5$ արժեքների դեպքում ընդունում է համապատասխանաբար $2, 1, -1, 5, 0$ արժեքները: Պատ. $-\frac{7}{6}x^4+\frac{79}{6}x^3-\frac{151}{3}x^2+\frac{226}{3}x-35$:

19. Գտնել հնարավորին չափ ցածր աստիճանի բազմանդամ, որը $x=2, 4, 5, 10$ արժեքների դեպքում համապատասխանաբար ընդունում է $3, 7, 9, 19$ արժեքները: Պատ. $2x-1$:

20. Գտնել $[0, 1]$ հատվածում $y=\sin\pi x$ ֆունկցիայի համար 1-ին, 2-րդ, 3-րդ և 4-րդ աստիճանի Բերնշտեյնի բազմանդամները: Պատ. $B_1(x)=0$, $B_2(x)=2x(1-x)$;

$$B_3(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x);\ B_4(x)=2x(1-x)[(2\sqrt{2}-3)x^2-(2\sqrt{2}-3)x+\sqrt{2}]:$$

Գլուխ VIII

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 1. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի սահմանումը

Քննարկելով մեկ փոփոխականի ֆունկցիաները, մենք մատնանշել ենք, որ շատ երևույթներ ուսումնասիրելիս հարկ է լինում հանդիպել երկու և ավելի անկախ փոփոխականների ֆունկցիաների։ Բերենք մի քանի օրինակներ։

Օրինակ 1։ Այն ուղղանկյան S մակերեսը, որի կողմերի երկարությունները համապատասխան են x-ի և y-ի, արտահայտվում է

$$S = xy$$

բանաձևով։ x և y արժեքների յուրաքանչյուր զույգին համապատասխանում է S մակերեսի որոշակի արժեք. S-ը երկու փոփոխականի ֆունկցիա է։

Օրինակ 2։ Այն ուղղանկյուն զուգահեռանիստի V ծավալը, որի կողերի երկարությունները համապատասխան են x-ի, y-ի, z-ի, արտահայտվում է

$$V = xyz$$

բանաձևով։ Այսպես V-ն x, y, z երեք փոփոխականների ֆունկցիա է։

Օրինակ 3։ Արկի թռիչքի R հեռավորությունը, որն արձակված է հորիզոնի նկատմամբ φ անկյան տակ թեքված փող ունեցող հրանոթից V_0 սկզբնական արագությամբ, արտահայտվում է

$$R = \frac{V_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

բանաձևով (եթե հաշվի չառնվի օդի դիմադրությունը)։ Այսպես g-ն ծանրության ուժի արագացումն է։ v_0-ի և φ-ի արժեքների յուրաքանչյուր զույգի համար այդ բանաձևը տալիս է R-ի որոշակի արժեք, այսինքն՝ R-ը V_0 և φ երկու փոփոխականների ֆունկցիա է։

Օրինակ 4։

$$u = \frac{x^2+y^2-z^2+t^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Այսպես u-ն x, y, z, t չորս փոփոխականների ֆունկցիա է։

Սահմանում 1։ Եթե իրարից անկախ x և y երկու փոփոխականների փոփոխման սահմանից D տիրույթից վերցրած արժեքների յուրաքանչյուր (x, y) զույգին համապատասխանում է z մեծության որոշակի արժեք, ապա ասում ենք, որ z-ը հանդիսանում է x և y երկու փոփոխականների ֆունկցիա՝ որոշված D տիրույթում։ Սիմվոլիկ ձևով երկու փոփոխականների ֆունկցիան նշանակվում է այսպես.

$$z = f(x, y), \quad z = F(x, y) \text{ և այլն։}$$

Երկու փոփոխականների ֆունկցիան կարող է տրվել, օրինակ, աղյուսակի միջոցով կամ անալիտիկորեն՝ բանաձևի միջոցով, ինչպես այդ տրված է վերը դիտարկված չորս օրինակներում։ Բանաձևի հիման վրա անկախ փոփոխականների արժեքների մի քանի զույգի համար կարելի է կազմել ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակ։ Այսպես, առաջին օրինակի համար կարելի է կազմել հետևյալ աղյուսակը.

y \ x	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

Այս աղյուսակի մեջ x-ի և y-ի որոշակի արժեքներին համապատասխանող տողի և սյան հատման տեղում գրված է S ֆունկցիայի համապատասխան արժեքը։

Եթե z=f(x, y) ֆունկցիոնալ կախումը ստացվում է որևէ երևույթի փորձնական ուսումնասիրության ժամանակ z մեծության չափման հետևանքով, ապա միանգամից ստացվում է աղյուսակ, որը z-ը որոշում է որպես երկու փոփոխականների ֆունկցիա։ Այս դեպքում ֆունկցիան տրվում է միայն աղյուսակի միջոցով։

Ինչպես և մեկ անկախ փոփոխականի դեպքում, երկու փոփոխականների ֆունկցիան ընդհանրապես ասած գոյություն ունի x-ի և y-ի ոչ ցանկացած արժեքների դեպքում։

Սահմանում 2։ x-ի և y-ի արժեքների (x, y) զույգերի բազմությունը, որոնց համար որոշվում է z=f(x, y) ֆունկցիան, կոչվում է այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթ *կամ* գոյության տիրույթ։

Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը տեսանելի կերպով ցուցադրվում է երկրաչափորեն։ Եթե x-ի և y-ի արժեքների յուրաքանչյուր զույգ մենք Oxy հարթության մեջ պատկերենք M(x, y) կետով, ապա

ֆունկցիայի գոյության տիրույթը հարթության վրա պատկերվում է կետերի որևէ բազմության տեսքով։ Կետերի այդ բազմությունը նույնպես կանվանենք ֆունկցիայի որոշման տիրույթ։ Մասնավորապես, ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կարող է լինել և ամբողջ հարթությունը։ Հետագայում մենք գլխավորապես գործ ենք ունենալու այնպիսի տիրույթների հետ, որոնք իրենցից ներկայացնում են հարթության մասեր՝ սահմանափակված գծերով։ Տրված տիրույթը սահմանափակող գիծը անվանելու ենք տիրույթի եզր։ Տիրույթի այն կետերը, որոնք եզրին չեն պատկանում, անվանելու ենք տիրույթի ներքին կետեր։ Միայն ներքին կետերից կազմված տիրույթը կոչվում է բաց կամ ոչ փակ։ Եթե տիրույթին պատկանում են նաև եզրի կետերը, ապա տիրույթը կոչվում է փակ։ Տիրույթը կոչվում է սահմանափակ, եթե գոյություն ունի այնպիսի C հաստատուն, որ տիրույթի ցանկացած M կետի հեռավորությունը կոորդինատների O սկզբնակետից փոքր է C-ից, այսինքն $|OM|<C$։

Օրինակ 5։ Որոշել $s=2x-y$ ֆունկցիայի որոշման բնական տիրույթը։ $2x-y$ անալիտիկ արտահայտությունն իմաստ ունի x-ի և y-ի ցանկացած արժեքների համար։ Հետևաբար, ֆունկցիայի որոշման բնական տիրույթն է հանդիսանում ամբողջ Oxy հարթությունը։

Օրինակ 6։

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Որպեսզի z-ն ունենա իրական արժեքներ, պետք է արմատատակ թիվը լինի ոչ բացասական, այսինքն՝ x-ը և y-ը պետք է բավարարվեն $1-x^2-y^2\geq 0$ կամ $x^2+y^2\leq 1$ անհավասարությանը։

Այն բոլոր $M(x, y)$ կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են նշված անհավասարությանը, ընկած են կոորդինատների սկզբնակետում կենտրոն ունեցող և 1 շառավղով շրջանի ներսը և շրջանի եզրին։

Նկ. 166

Օրինակ 7։

$$z=\ln(x+y).$$

Քանի որ լոգարիթմները որոշված են միայն դրական թվերի համար, ապա պետք է բավարավի

$$x+y>0 \text{ կամ } y>-x$$

անհավասարությանը։ Դա նշանակում է, որ z ֆունկցիայի որոշման տիրույթը հարթության այն կետն է, որը գտնվում է $y=-x$ ուղղից ներքև, առանց այդ ուղղի (նկ. 166)։

Օրինակ 8։ Եռանկյան S մակերեսը x հիմքի և y բարձրության ֆունկցիան է.

$$S=\frac{xy}{2},$$

Այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է $x>0$, $y>0$ տիրույթը (քանի որ եռանկյան հիմքը և բարձրությունը չեն կարող լինել բացասական կամ զրո)։ Նկատենք, որ դիտարկված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը չի համընկնում այն անալիտիկ արտահայտության որոշման բնական տիրույթի հետ, որի օգնությամբ արվում է ֆունկցիան, քանի որ $\frac{xy}{2}$ արտահայտության որոշման բնական տիրույթը, ակնհայտ է, Oxy հարթությունն է ամբողջությամբ։

Երկու փոփոխականների ֆունկցիայի սահմանումը հեշտ է ընդհանրացնել երեք և ավելի փոփոխականների դեպքի համար։

Սահմանում 3։ Եթե x, y, z, . . ., u, t փոփոխականների արժեքների դիտարկվող յուրաքանչյուր բազմությանը համապատասխանում է w փոփոխականի որոշակի արժեք, ապա w-ն կանվանենք x, y, z, . . . , u, t անկախ փոփոխականների ֆունկցիա և կգրենք $w=F(x, y, z, \ldots, u, t)$ կամ $w=f(x, y, z, \ldots, u, t)$ և այլն։

Այնպես, ինչպես և երկու փոփոխականների ֆունկցիայի համար, կարելի է խոսել երեք, չորս և ավելի փոփոխականների ֆունկցիայի որոշման տիրույթի մասին։

Այսպես, օրինակ, երեք փոփոխականների ֆունկցիայի համար գոյության տիրույթ է (x, y, z) թվերի եռյակների որևէ բազմությունը։ Այստեղ էլ նկատենք, որ թվերի յուրաքանչյուր եռյակ Oxyz տարածության մեջ տալիս է որևէ $M(x, y, z)$ կետ։ Հետևաբար, երեք փոփոխականների ֆունկցիայի որոշման տիրույթը հանդիսանում է տարածության կետերի որևէ բազմություն։

Դրան համանման կարելի է խոսել չորս փոփոխականների $u=f(x, y, z, t)$ ֆունկցիայի գոյության տիրույթի որպես թվերի (x, y, z, t) քառյակների որևէ բազմության մասին։ Այնուամենայնիվ չորս կամ ավելի թվով փոփոխականների ֆունկցիայի որոշման տիրույթը արդեն չի թույլատրում պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն։

Օրինակ 2-ում բերված է երեք փոփոխականների ֆունկցիա, որը որոշված է x, y, z բոլոր արժեքների համար։

Օրինակ 4-ում բերված է չորս փոփոխականների ֆունկցիա։

Օրինակ 9։

$$w=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2-u^2}.$$

Այստեղ w-ն x, y, z, u չորս փոփոխականների ֆունկցիա է, որը որոշված է փոփոխականների այն արժեքների համար, որոնք բավարարում են հետևյալ անհավասարությանը՝

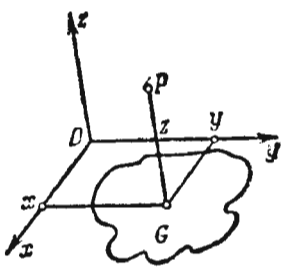
$$1-x^2=y^2-z^2-u^2\geq 0,$$

§ 2. Երկու փոփոխականների ֆունկցիայի երկրաչափական պատկերումը

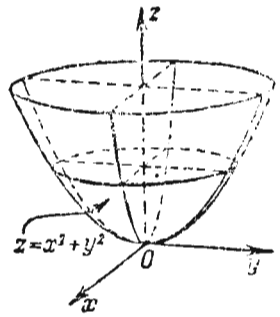
Դիտարկենք

$$z=f(x, y), \qquad (1)$$

ֆունկցիան, որը որոշված է Oxy *հարթության* G *տիրույթում (այդ տիրույթը կարող է, մասնավորապես, լինել և ամբողջ հարթությունը), և* Oxyz *ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային սիստեմը (նկ. 167): Յուրաքանչյուր* (x, y) *կետում կանգնացնենք* Oxy *հարթության ուղղահայացը և նրա վրա տեղադրենք* f(x, y)*-ին հավասար հատված:*



Նկ. 167



Նկ. 168

Այդ դեպքում մենք տարածության մեջ կստանանք

$$x, y, z=f(x, y)$$

կոորդինատներով P *կետը:*

Այն P *կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց կոորդինատները բավարարում են (1) հավասարմանը, կոչվում է երկու փոփոխականների ֆունկցիայի գրաֆիկ: Անալիտիկ երկրաչափության դասընթացից գիտենք, որ (1) հավասարումը տարածության մեջ որոշում է որևէ մակերևույթ: Այսպիսով, երկու փոփոխականների ֆունկցիայի գրաֆիկը հանդիսանում է մակերևույթ, որի պրոյեկցիան* Oxy *հարթության վրա այդ ֆունկցիայի գոյության տիրույթն է:* Oxy *հարթության յուրաքանչյուր ուղղահայաց* z=f(x, y) *մակերևույթը հատում է ոչ ավելի, քան մեկ կետում:*

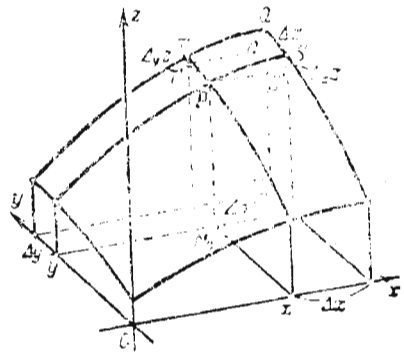
Օրինակ: $z=x^2+y^2$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը, ինչպես հայտնի է անալիտիկ երկրաչափությունից, հանդիսանում է պտտման պարաբոլոիդ (նկ. 168):*

Դիտողություն: Երեք և ավելի փոփոխականների ֆունկցիան անհնարին է տարածության մեջ պատկերել գրաֆիկի օգնությամբ:

§ 3. Ֆունկցիայի մասնակի և լրիվ աճը

Դիտարկենք z=f(x, y) *մակերևույթի և* Oxz *հարթությանը զուգահեռ* y=const *հարթության հատման* PS *գիծը (նկ. 169):*

Քանի որ այդ հարթության մեջ y*-ը պահպանում է հաստատուն արժեք, ապա* z*-ը* PS *կորի երկայնությամբ կփոխվի՝ կախված միայն* x*-ի փոփոխությունից:* x *անկախ փոփոխականին տանք* Δx *աճ, այդ դեպքում* z*-ը կստանա աճ, որն անվանում են* z*-ի մասնակի աճ ըստ* x*-ի և նշանակում են* $\Delta_x z$*-ով (գծագրում՝* SS′ *հատվածը), այնպես, որ*



Նկ. 169

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x, y). \qquad (1)$$

Համանմանորեն, եթե x*-ը պահպանում է հաստատուն արժեք, իսկ* y*-ը ստանում է* Δy *աճ, ապա* z*-ը ստանում է աճ, որը կոչվում է* z*-ի մասնակի աճ ըստ* y*-ի: Այդ աճը նշանակում են* $\Delta_y z$ *սիմվոլով (գծագրում՝* TT′ *հատվածը).*

$$\Delta_y z=f(x, y+\Delta y)-f(x, y). \qquad (2)$$

$\Delta_y z$ *աճ ֆունկցիան ստանում է* z=f(x, y) *մակերևույթի և* Oyz *հարթությանը զուգահեռ* x=const *հարթության հատման «գծի երկայնությամբ»:*

Վերջապես x *արգումենտին տալով* Δx *աճ, իսկ* y *արգումենտին՝* Δy *աճ, կստանանք* z*-ի համար նոր՝* Δz *աճ, որը կոչվում է* z *ֆունկցիայի լրիվ աճ և որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y). \qquad (3)$$

Նկ. 169-ում Δz*-ը պատկերված է* QQ′ *հատվածով:*

Պետք է նկատել, որ ընդհանրապես առած, լրիվ աճը հավասար չէ մասնակի աճերի գումարին, այսինքն՝ $\Delta z \neq \Delta_x z+\Delta_y z$:

Օրինակ: z=xy:

$$\Delta_x z=(x+\Delta x)y-xy=y\Delta x,$$

$$\Delta_y z=x(y+\Delta y)-xy=x\Delta y,$$

$$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y.$$

Երբ x=1, y=2, Δx=0,2, Δy=0,3 *ունենք* $\Delta_x z=0{,}4$; $\Delta_y z=0{,}3$; $\Delta z=0{,}76$.

Համանման ձևով սահմանվում են ցանկացած թվով փոփոխա-

կոնների ֆունկցիայի մասնակի և լրիվ աճերը: Այսպես, երեք փոփոխականների $u=f(x, y, t)$ ֆունկցիայի համար ունենք.

$$\Delta_x u=f(x+\Delta x, y, t)-f(x, y, t),$$

$$\Delta_y u=f(x, y+\Delta y, t)-f(x, y, t),$$

$$\Delta_t u=f(x, y, t+\Delta t)-f(x, y, t),$$

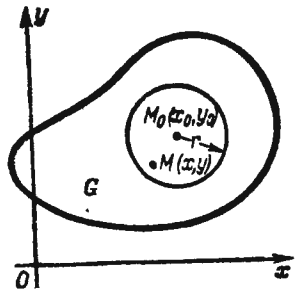
$$\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y, t+\Delta t)-f(x, y, t):$$

§ 4. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի անընդհատությունը

Մտնենք օժանդակ մի կարևոր հասկացություն՝ տրված կետի շրջակայքի հասկացությունը:

$M_0(x_0, y_0)$ կետի r շառավղով շրջակայք կոչվում է բոլոր (x, y) կետերի բազմությունը, որոնք բավարարում են $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$ անհավասարությունը, այլ խոսքով՝ $M_0(x_0, y_0)$ կենտրոնն ունեցող r շառավղով շրջանի ներսն ընկած բոլոր կետերի բազմությունը:

Եթե մենք ասում ենք, որ $f(x, y)$ ֆունկցիան օժտված է որևէ հատկությամբ «(x_0, y_0) կետի մոտակայքում» կամ «(x_0, y_0) կետի որևէ շրջակայքում», ապա դրա տակ հասկանում ենք, որ կգտնվի (x_0, y_0) կենտրոնով այնպիսի շրջան, որի բոլոր կետերում տրված ֆունկցիան օժտված է նշված հատկությամբ:



Նկ. 170

Նախքան մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի անընդհատության գաղափարի դիտարկումը, քննարկենք մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը*:

Դիցուք տրված է

$$z=f(x, y)$$

ֆունկցիան, որը որոշված է Oxy հարթության որևէ G տիրույթում: Դիտարկենք G տիրույթին կամ նրա եզրին պատկանող որոշակի $M_0(x_0, y_0)$ կետ (նկ. 170):

Սահմանում 1: A թիվը կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի սահման, երբ $M(x, y)$ կետը ձգտում է $M_0(x_0, y_0)$ կետին, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $r>0$ թիվ, որ $\overline{MM_0}<r$ անհավասարությունը բավարարող բոլոր $M(x, y)$ կետերի համար տեղի ունի

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

անհավասարությունը: Եթե A թիվը հանդիսանում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի սահմանը, երբ $M(x, y)\to M_0(x_0, y_0)$, ապա գրում են.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A:$$

Սահմանում 2: Դիցուք $M_0(x_0, y_0)$ կետը պատկանում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին: $z=f(x, y)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $M_0(x_0, y_0)$ կետում, եթե տեղի ունի

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0) \qquad (1)$$

հավասարությունը, ընդ որում $M(x,y)$ կետը ձգտում է $M_0(x_0, y_0)$ կետին կամայական ձևով, մնալով ֆունկցիայի գոյության տիրույթում:

Եթե նշանակենք $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, ապա (1) հավասարությունը կարելի է արտագրել այսպես.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0, y_0) \qquad (1')$$

կամ

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)]=0: \qquad (1'')$$

Նշանակենք $\Delta\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$: Երբ $\Delta x\to 0$ և $\Delta y\to 0$, $\Delta\rho\to 0$, և հակադարձը, եթե $\Delta\rho\to 0$, ապա $\Delta x\to 0$ և $\Delta y\to 0$:

Այնուհետև, նկատելով, որ (1) հավասարության մեջ քառակուսի փակագծերի արտահայտությունը ֆունկցիայի Δz լրիվ աճն է, (1″) հավասարությունը կարելի է արտագրել հետևյալ տեսքով՝

$$\lim_{\Delta\rho\to 0} \Delta z=0, \qquad (1''')$$

Որևէ տիրույթի յուրաքանչյուր կետում անընդհատ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ տիրույթում:

Եթե որևէ $N(x_0, y_0)$ կետում (1) պայմանը տեղի չունի, ապա $N(x_0, y_0)$ կետը կոչվում է $z=f(x, y)$ ֆունկցիայի խզման կետ: (1) պայմանը կարող է տեղի չունենալ, օրինակ, հետևյալ դեպքերում.

1) $z=f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $N(x_0, y_0)$ կետի որևէ շրջակայքում, բացի $N(x_0, y_0)$ կետից.

* Մենք հիմնականում կդիտարկենք երկու փոփոխականների ֆունկցիաներ, քանի որ երեք և ավելի փոփոխականների դիտարկումը ոչ մի սկզբունքային փոփոխություն չի մտցնում, բայց մտցնում է լրացուցիչ տեխնիկական դժվարություններ:

2) $z=f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $N(x_0, y_0)$ կետի շրջակայքի բոլոր կետերում, բայց գոյություն չունի $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ սահմանը.

3) Ֆունկցիան որոշված է $N(x_0, y_0)$ կետի շրջակայքի բոլոր կետերում և գոյություն ունի $\lim\limits_{\substack{x\to x^0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ սահմանը, բայց

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)\neq f(x_0, y_0).$$

Օրինակ 1։ $z=x^2+y^2$ ֆունկցիան անընդհատ է x-ի և y-ի ցանկացած արժեքների դեպքում, այսինքն՝ Oxy հարթության ցանկացած կետում։

Իրոք, ինչպիսին էլ լինեն x և y, Δx և Δy թվերը, ունենք

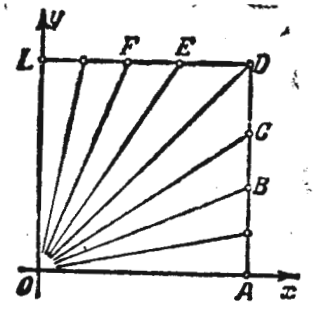
$$\Delta z=[(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2]-[x^2+y^2]=2x\Delta x+2y\Delta y+\Delta x^2+\Delta y^2,$$

հետևաբար,

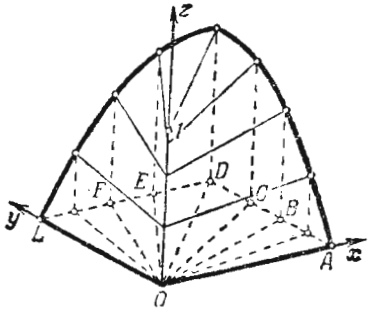
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=0,$$

Բերենք խզվող ֆունկցիայի օրինակ։

Օրինակ 2։ $z=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ ֆունկցիան որոշված է ամենուրեք, բացի $x=0$, $y=0$ կետից (նկ. 171, 172)։



Նկ. 171.



Նկ. 172

Դիտարկենք z-ի արժեքները $y=kx$ $(k=const)$ ուղղի երկայնությամբ։ Ակնհայտ է, այդ ուղղի երկայնությամբ

$$z=\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}=const,$$

այսինքն՝ z ֆունկցիան սկզբնակետով անցնող ամեն մի ուղղի երկայնությամբ պահպանում է հաստատուն արժեք, որը կախված է ուղղի k անկյունային գործակից։

Այդ պատճառով, եթե կոորդինատների սկզբնակետին մոտենանք տարբեր ճառագայթներով, կստանանք տարբեր սահմանային արժեքներ, իսկ սա նշանակում է, որ f(x, y) ֆունկցիան չունի սահման, երբ (x, y) կետը Oxy հարթության վրա ձգտում է կոորդինատների սկզբնակետին։ Հետևաբար ֆունկցիան այդ կետում խզվող է։ Այդ ֆունկցիան չի կարելի լրացուցիչ կերպով սահմանել այնպես, որ կոորդինատների սկզբնակետում այն դառնա անընդհատ։ Մյուս կողմից, հեշտ է տեսնել, որ մնացած կետերում այդ ֆունկցիան անընդհատ է։

Առանց ապացույցի նշենք փակ և սահմանափակ տիրույթում անընդհատ շատ փոփոխականների ֆունկցիայի մի քանի կարևոր հատկություններ։ Այդ հատկությունները համանման են հատկացվում անընդհատ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի հատկություններին (տես II գլխի § 10)։

Հատկություն 1։ Եթե $f(x, y, \ldots)$ *ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է D փակ և սահմանափակ տիրույթում, ապա D տիրույթում կգտնվի գոնե մեկ* $N(x_0, y_0, \ldots)$ *կետ այնպիսին, որ տիրույթի մյուս բոլոր կետերի համար տեղի կունենա*

$$f(x_0, y_0, \ldots)\geqslant f(x, y, \ldots)$$

անհավասարությունը և գոնե մեկ $\overline{N}(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \ldots)$ *կետ այնպիսին, որ տիրույթի մյուս բոլոր կետերի համար տեղի կունենա*

$$f(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \ldots)\leqslant f(x, y, \ldots)$$

անհավասարությունը։

Ֆունկցիայի $f(x_0, y_0, \ldots)=M$ *արժեքը կանվանենք* $f(x, y, \ldots)$ *ֆունկցիայի մեծագույն արժեք D տիրույթում, իսկ* $f(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \ldots)=m$ *արժեքը՝ փոքրագույն արժեք։*

Այս հատկությունը ձևակերպում են այսպես։ Անընդհատ ֆունկցիան փակ սահմանափակ տիրույթում գոնե մեկ անգամ հասնում է M մեծագույն արժեքին և m փոքրագույն արժեքին։

Հատկություն 2։ Եթե $f(x, y, \ldots)$ *ֆունկցիան անընդհատ է D փակ և սահմանափակ տիրույթում և եթե M-ը և m-ը* $f(x, y, \ldots)$ *ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներն են տիրույթում, ապա* $m<\mu<M$ *պայմանի բավարարող ցանկացած μ թվի համար տիրույթում կգտնվի այնպիսի* $N^*(x_0^*, y_0^*, \ldots)$ *կետ, որ տեղի կունենա* $f(x_0^*, y_0^*, \ldots)=\mu$ *հավասարությունը։*

Հատկություն 2-ի հետևանքը։ Եթե $f(x, y, \ldots)$ *ֆունկցիան անընդհատ է փակ սահմանափակ տիրույթում և ընդունում է ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական արժեքներ, ապա տիրույթի ներսում կգտնվեն կետեր, որոնցում* $f(x, y, \ldots)$ *ֆունկցիան դառնում է զրո։*

§ 5. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի մասնական ածանցյալները

Սահմանում։ $z=f(x, y)$ ֆունկցիայի մասնական ածանցյալ ըստ x-ի կոչվում է ըստ x-ի $\Delta_x z$ մասնական աճի և Δx-ի հարաբերության սահմանը, երբ Δx-ը ձգտում է զրոյի։

$z=f(x, y)$ ֆունկցիայի մասնական ածանցյալն ըստ x-ի նշանակվում է

$$z'_x, \qquad f'_x(x, y) \qquad \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x},$$

սիմվոլներից մեկով։

Այսպիսով, ըստ սահմանման,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x},$$

Համանման ձևով $z=f(x, y)$ ֆունկցիայի մասնական ածանցյալն ըստ y-ի սահմանվում է որպես ֆունկցիայի՝ ըստ y-ի $\Delta_y z$ մասնական աճի և Δy աճի հարաբերության սահմանը, երբ Δy-ը ձգտում է զրոյի։ Ըստ y-ի մասնական ածանցյալը նշանակվում է

$$z'_y, \qquad f'_y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

սիմվոլներից մեկով։

Այսպիսով,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y},$$

Նկատելով, որ $\Delta_x z$-ը հաշվվում է, երբ y-ը անփոփոխ է, իսկ $\Delta_y z$-ում՝ անփոփոխ է x-ը, մենք կարող ենք մասնական ածանցյալների սահմանումները ձևակերպել այսպես. $z=f(x, y)$ ֆունկցիայի մասնական ածանցյալ ըստ x-ի կոչվում է ըստ x-ի ածանցյալը, որը հաշված է, ենթադրելով, որ y-ը հաստատուն է։ $z=f(x, y)$ ֆունկցիայի մասնական ածանցյալ ըստ y-ի կոչվում է ըստ y-ի ածանցյալը, որը հաշված է, ենթադրելով, որ x-ը հաստատուն է։

Այս սահմանումից պարզ է, որ մասնական ածանցյալների հաշվման կանոնները համընկնում են մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար մատնանշված կանոնների հետ, և միայն պահանջվում է ամեն անգամ հիշել, թե ըստ որ փոփոխականի է որոնվում ածանցյալը։

Օրինակ 1։ Տրված է $z=x^2\sin y$ ֆունկցիան. պահանջվում է գտնել $\frac{\partial z}{\partial x}$ և $\frac{\partial z}{\partial y}$ մասնական ածանցյալները։

Լուծում։

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y.$$

Օրինակ 2։ $z=x^y$։

Այստեղ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x.$$

Ցանկացած թվով փոփոխականների ֆունկցիայի մասնական ածանցյալները սահմանվում են համանմանորեն։ Այսպես, եթե տանենք x, y, z, t չորս փոփոխականների u ֆունկցիան՝

$$u=f(x, y, z, t),$$

ապա

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y, z, t)-f(x, y, z, t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y, z, t)-f(x, y, z, t)}{\Delta y} \text{ և այլն։}$$

Օրինակ 3։ $u=x^3+y^2+xtz^3$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+tz^3; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y; \quad \frac{\partial y}{\partial z}=3xtz^2; \quad \frac{\partial u}{\partial t}=xz^3.$$

§ 6. Երկու փոփոխականների ֆունկցիայի մասնական ածանցյալների երկրաչափական մեկնաբանությունը

Դիցուք

$$z=f(x, y)$$

նկ. 173-ում պատկերված մակերևույթի հավասարումն է։

Տանենք $x=\text{const}$ հարթությունը։ Այդ հարթության և մակերևույթի հատույթում կստացվի PT գիծը։ Տրված x-ի դեպքում Oxy հարթության մեջ դիտարկենք որևէ M(x, y) կետ։ M կետին համապատասխանում է $z=f(x, y)$ մակերևույթին պատկանող P(x, y, z) կետը։ x-ը թողնելով անփոփոխ, y փոփոխականին տանք $\Delta y=MN=PT'$ աճ։ Այդ դեպքում z ֆունկցիան կստանա $\Delta_y z=TT'$ աճ (N(x, y+Δy) կետին համապատասխանում է T(x, y+Δy, z+$\Delta_y z$) կետը $z=f(x, y)$ մակերևույթի վրա)։

$\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ հարաբերությունը հավասար է Oy առանցքի դրական ուղ-

գծի հետ PT հատողի կազմած անկյան տանգենսին.

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \operatorname{tg} T\hat{P}T';$$

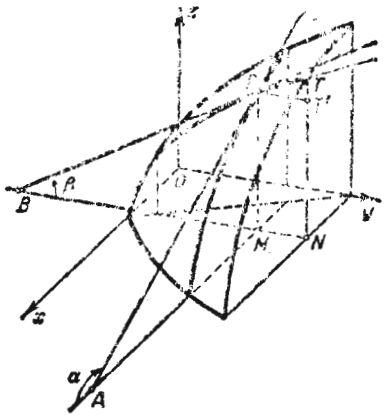
Հետևաբար,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

սահմանը հավասար է PT կորի P կետում PB շոշափողի և Oy առանցքի դրական ուղղության հետ կազմած β անկյան տանգենսին.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta;$$

Եվ այսպես, $\frac{\partial z}{\partial y}$ մասնական ածանցյալը թվապես հավասար է այն գծի շոշափողի թեքության անկյան տանգենսին, որը ստացվում է $z=f(x, y)$ մակերևույթի և $x=const$ հարթության հատույթում:



Նկ. 173

Համանման ձևով $\frac{\partial z}{\partial x}$ մասնական ածանցյալը հավասար է $z=f(x, y)$ մակերևույթի և $y=const$ հարթության հետ կազմած առաջացած կորի շոշափողի α թեքության անկյան տանգենսին:

§ 7. Լրիվ աճ և լրիվ դիֆերենցիալ

$z=f(x, y)$ ֆունկցիայի լրիվ աճի սահմանման համար ունենք (տես VIII գլխի § 3).

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y); \qquad (1)$$

Ենթադրենք, որ $f(x, y)$ ֆունկցիան դիտարկվող (x, y) կետում ունի անընդհատ ածանցյալներ:

Δz-ն արտահայտենք մասնական ածանցյալների միջոցով: Դրա համար (1) հավասարության աջ մասում ավելացնենք և հանենք $f(x, y+\Delta y)$.

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]; \qquad (2)$$

$f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ արտահայտությունը, որը գտնվում է երկրորդ քառակուսի փակագծերի մեջ, կարելի է դիտարկել y մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի երկու արժեքների տարբերություն (x-ի արժեքը մնում է հաստատուն): Այդ տարբերության նկատմամբ կիրառելով Լագրանժի թեորեմը, կստանանք.

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}, \qquad (3)$$

որտեղ $\bar{y}$-ը գտնվում է y-ի և $(y+\Delta y)$-ի միջև:

Ճիշտ նույնպես (2) հավասարության մեջ առաջին քառակուսի փակագծերում եղած արտահայտությունը կարելի է դիտարկել մեկ x փոփոխականի ֆունկցիայի երկու արժեքների տարբերություն (երկրորդ արգումենտը պահպանում է միևնույն $y+\Delta y$ արժեքը): Այդ տարբերության նկատմամբ կիրառելով Լագրանժի թեորեմը, կստանանք.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}, \qquad (4)$$

որտեղ $\bar{x}$-ը գտնվում է x-ի և $(x+\Delta x)$-ի միջև:

(3) և (4) արտահայտությունները տեղադրելով (2) հավասարության մեջ կստանանք.

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}; \qquad (5)$$

Քանի որ, ըստ ենթադրության մասնական ածանցյալներն անընդհատ են, ապա

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \\ \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

(քանի որ $\bar{x}$-ը և $\bar{y}$-ը գտնվում են, համապատասխանաբար, x-ի և $(x+\Delta x)$-ի y-ի և $(y+\Delta y)$-ի միջև, ապա երբ $\Delta x \to 0$ և $\Delta y \to 0$, $\bar{x}$-ը և $\bar{y}$-ը ձգտում են, համապատասխանաբար x-ի և y-ի): (6) հավասարությունները կարելի է արտագրել հետևյալ տեսքով՝

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \nu_1, \\ \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \nu_2, \end{aligned}\right| \qquad (6')$$

որակ ν_1 և ν_2 մեծությունները ձգտում են զրոյի, երբ Δx-ը և Δy-ը ձգտում են զրոյի (այսինքն՝ երբ $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$):

(6) հավասարությունը համաձայն (5) արտահայտությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\Delta z=\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y+\nu_1\Delta x+\nu_2\Delta y. \qquad (5')$$

Աջ մասի վերջին երկու գումարելիների գումարը $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ նկատմամբ հանդիսանում է բարձր կարգի անվերջ փոքր: Իրոք $\frac{\nu_1\Delta x}{\Delta\rho}\to 0$, երբ $\Delta\rho\to 0$, քանի որ ν_1-ը հանդիսանում է անվերջ փոքր, իսկ $\frac{\Delta x}{\Delta\rho}$-ն սահմանափակ մեծություն է $\left(\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right|\leq 1\right)$: Համանմանորեն ստացվում է, որ $\frac{\nu_2\Delta y}{\Delta\rho}\to 0$:

Առաջին երկու գումարելիների գումարը գծային է Δx-ի և Δy-ի նկատմամբ: $f'_y(x, y)\neq 0$ և $f'_y(x, y)\neq 0$ դեպքում այդ արտահայտությունն իրենից ներկայացնում է աճի գլխավոր մասը՝ Δz-ից տարբերվելով $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ նկատմամբ բարձր կարգի անվերջ փոքրով:

Սահմանում: $z=f(x, y)$ ֆունկցիան, որի Δz լրիվ աճը տրված (x, y) կետում հնարավոր է ներկայացնել երկու գումարելիների՝ Δx-ի և Δy-ի նկատմամբ գծային արտահայտության և $\Delta\rho$-ի նկատմամբ բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծության գումարի տեսքով, կոչվում է դիֆերենցելի տրված կետում, իսկ աճի գծային մասը կոչվում է լրիվ դիֆերենցիալ և նշանակվում է՝ dz կամ df:

(5′) հավասարությունից հետևում է, որ եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան տրված կետում ունի անընդհատ մասնական ածանցյալներ, ապա այն այդ կետում դիֆերենցելի է և ունի լրիվ դիֆերենցիալ՝

$$dz=f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y.$$

(5′) հավասարությունը կարելի է արտապրել

$$\Delta z=dz+\nu_1\Delta x+\nu_2\Delta y$$

տեսքով և $\Delta\rho$-ի նկատմամբ բարձր կարգի անվերջ փոքրի ճշտությամբ կարելի է գրել հետևյալ մոտավոր հավասարությունը.

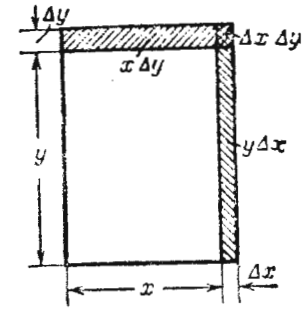
$$\Delta z\approx dz.$$

Δx և Δy անկախ փոփոխականների աճերը մենք կանվանենք x և y անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալներ և կնշանակենք հա-

մապատասխանաբար dx-ով և dy-ով: Այդ դեպքում լրիվ դիֆերենցիալի արտահայտությունը կընդունի

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

տեսքը: Այսպիսով, եթե $z=f(x, y)$ ֆունկցիան ունի անընդհատ մասնական ածանցյալներ, ապա այն դիֆերենցելի է (x, y) կետում, և նրա լրիվ դիֆերենցիալը հավասար է մասնական ածանցյալների և համապատասխան անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալների արտադրյալների գումարին:



Նկ. 174

Օրինակ 1. Գտնել $z=xy$ ֆունկցիայի լրիվ աճը և լրիվ դիֆերենցիալը (2; 3) կետում, երբ $\Delta x=0,1$; $\Delta y=0,2$:

Լուծում:

$$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y,$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=y\,dx+x\,dy=y\,\Delta x+x\,\Delta y.$$

Հետևաբար,

$$\Delta z=3\cdot 0,1+2\cdot 0,2+0,1\cdot 0,2=0,72;$$

$$dz=3\cdot 0,1+2\cdot 0,2=0,7.$$

Օրինակի լուծարանումը տրված է նկ. 174-ում:

Նախորդ դատողություններն ու սահմանումները համապատասխանորեն ընդհանրացվում են ցանկացած թվով արգումենտներ ունեցող ֆունկցիայի նկատմամբ:

Եթե ունենք

$$w=f(x, y, z, u, \ldots, t)$$

ցանկացած թվով արգումենտների ֆունկցիան, ըստ որում $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t}$ մասնական ածանցյալները անընդհատ են $(x, y, z, u, \ldots, t)$ կետում, ապա

$$dw=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\ldots+\frac{\partial f}{\partial t}dt$$

արտահայտությունը հանդիսանում է ֆունկցիայի լրիվ աճի գլխավոր մասը և կոչվում է լրիվ դիֆերենցիալ: Այն բանի ապացույցը, որ $\Delta w-dw$ տարբերությունը հանդիսանում է ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր, քան $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+\ldots+(\Delta t)^2}$-ն, կատարվում է

միանգամայն նույն ձևով, ինչ և երկու փոփոխականների ֆունկցիայի համար:

Օրինակ 2. Գտնել $u=e^{x^2+y^2}\sin^2 z$ x, y, z երեք փոփոխականների ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը:

Լուծում. Նկատելով, որ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x^2+y^2}2x\sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{x^2+y^2}2y\sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{x^2+y^2}2\sin z\cos z=e^{x^2+y^2}\sin 2z$$

մասնական ածանցյալներն անընդհատ են x, y, z բոլոր արժեքների դեպքում, գտնում ենք.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 z\,dx+2y\sin^2 z\,dy-\sin 2z dz),$$

§ 8. Լրիվ դիֆերենցիալի կիրառությունը մոտավոր հաշվումներում

Դիցուք $z=f(x, y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է (x, y) կետում: Գտնենք այդ ֆունկցիայի

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$$

լրիվ աճը, որտեղից

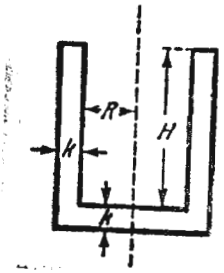
$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=f(x,\ y)+\Delta z, \qquad (1)$$

Մենք ունեինք մոտավոր բանաձև՝

$$\Delta z\approx dz, \qquad (2)$$

որտեղ

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y. \qquad (3)$$



Նկ. 175

(1) բանաձևում Δz-ի փոխարեն տեղադրելով dz-ի համար ծավալուն արտահայտությունը, կստանանք հետևյալ մոտավոր բանաձևը՝

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\approx f(x,\ y)+$$

$$+\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\Delta y, \qquad (4)$$

որը ճիշտ է Δx-ի և Δy-ի նկատմամբ բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ճշտությամբ:

Ցույց տանք, թե ինչպես են օգտագործվում (2) և (4) բանաձևերը մոտավոր հաշվումների համար:

Խնդիր. Հաշվել նյութի ծավալը, որն անհրաժեշտ է ներքոհիշյալ չափերն ունեցող գլանային բաժակի պատրաստման համար (նկ. 175).

ներքին գլանի շառավիղը՝ R,
ներքին գլանի բարձրությունը՝ H,
բաժակի պատերի և հատակի հաստությունը՝ k:

Լուծում. Ցանք այդ խնդրի երկու լուծումներ՝ ճշգրիտ և մոտավոր:

ա) Ճշգրիտ լուծում. Որոնելի v ծավալը հավասար է արտաքին գլանի և ներքին գլանի ծավալների տարբերությանը: Քանի որ արտաքին գլանի շառավիղը հավասար է R+k, իսկ բարձրությունը՝ H+k, ապա

$$v=\pi(R+k)^2(H+k)-\pi R^2H,$$

կամ

$$v=\pi(2RHk+R^2k+Hk^2+2Rk^2+k^3). \qquad (5)$$

բ) Մոտավոր լուծում. f-ով նշանակենք ներքին գլանի ծավալը, այդ դեպքում $f=\pi R^2H$: Այդ R և H երկու փոփոխականների ֆունկցիա է: Եթե R-ը և H-ը մեծացնենք k-ով, ապա f ֆունկցիան կստանա Δf աճ, բայց դա էլ կլինի որոնելի v ծավալը, այսինքն $v=\Delta f$:

(1) անհավասարության հիման վրա ունենք

$$v\approx df, \quad \text{կամ} \quad v\approx\frac{\partial f}{\partial R}\Delta R+\frac{\partial f}{\partial H}\Delta H$$

մոտավոր հավասարությունը: Բայց քանի որ

$$\frac{\partial f}{\partial R}=2\pi RH, \qquad \frac{\partial f}{\partial H}=\pi R^2, \qquad \Delta R=\Delta H=k,$$

ապա ստանում ենք

$$v=\pi(2RHk+R^2k). \qquad (6)$$

Համեմատելով (5) և (6) արդյունքները, տեսնում ենք, որ դրանք տարբերվում են $\pi(Hk^2+2Rk^2+k^3)$ մեծությամբ, որը բաղկացած է k-ի նկատմամբ երկրորդ և երրորդ կարգի փոքրությամբ անդամներից:

Այդ բանաձևը կիրառենք թվային օրինակների նկատմամբ:

Դիցուք R=4 սմ, H=20 սմ, k=0,1 սմ:

Կիրառելով (5)-ը, կստանանք ճշգրիտ՝

$$v=\pi(2\cdot 4\cdot 20\cdot 0,1+4^2\cdot 0,1+20\cdot 0,1^2+2\cdot 4\cdot 0,1^2+0,1^3)=17,881\ \pi,$$

Կիրառելով (6) բանաձևը, կստանանք մոտավորապես՝

$$v\approx\pi(2\cdot 4\cdot 20\cdot 0,1+4^2\cdot 0,1)=17,6\pi.$$

Հետևաբար, (6) մոտավոր բանաձևը պատասխանը տալիս է 0,3π-ից պակաս սխալով, որը կազմում է $100\cdot\frac{0,3\pi}{17,881\pi}\%$, այսինքն՝ չափված մեծության 2%-ից պակաս:

§ 9. Դիֆերենցիալի կիրառությունը հաշվումների ժամանակ սխալի գնահատման նպատակով

Դիցուք u *մեծությունը հանդիսանում է* x, y, z, . . . , t *մեծությունների ֆունկցիա՝*

$$u=f(x, y, z, \ldots, t),$$

ընդ որում որևէ եղանակով որոշելով x, y, z, . . . , t *մեծությունների արժեքները, մենք թույլ ենք տալիս* Δx, Δy, . . . , Δt *սխալները։ Այդ դեպքում արգումենտների ոչ ճշգրիտ արժեքների համար* u-*ի արժեքը կստացվի*

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ \ldots,\ z+\Delta z,\ t+\Delta t)-f(x, y, z, \ldots, t)$$

սխալով։ Ստորև մենք կզբաղվենք Δu *սխալի գնահատմամբ, եթե հայտնի են* Δx, Δy, . . . , Δt *սխալները։*

Δx, Δy, . . . , Δt *մեծությունների բավականաչափ փոքր բացարձակ արժեքների դեպքում կարող ենք լրիվ աճը մոտավորապես փոխարինել լրիվ դիֆերենցիալով՝*

$$\Delta u\approx\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\ldots+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t,$$

Այստեղ մասնական ածանցյալների արժեքները և արգումենտների սխալների արժեքները կարող են լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական։ Նրանք փոխարինելով բացարձակ մեծություններով, կստանանք

$$|\Delta u|\leqslant\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y|+\ldots+\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right||\Delta t, \qquad (1)$$

անհավասարությունը։ Եթե համապատասխան մեծությունների մաքսիմալ *բացարձակ սխալները (սխալների արժեքների բացարձակ մեծությունների եզրերը) նշանակենք* $|\Delta^*x|$, $|\Delta^*y|$, . . . , $|\Delta^*u|$, *ապա, ակնհայտ է, կարելի է ընդունել.*

$$|\Delta^*u|=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta^*x|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta^*y|+\ldots+\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right||\Delta^*t|, \qquad (2)$$

Օրինակներ

1. Դիցուք $u=x+y+z$, *այդ դեպքում*

$$|\Delta^*u|=|\Delta^*x|+|\Delta^*y|+|\Delta^*z|,$$

2. Դիցուք $u=x-y$, *այդ դեպքում*

$$|\Delta^*u|=|\Delta^*x|+|\Delta^*y|,$$

3. Դիցուք $u=xy$, *այդ դեպքում*

$$|\Delta^*u|=|x|\,|\Delta^*y|+|y|\,|\Delta^*x|,$$

4. Դիցուք $u=\frac{x}{y}$, *այդ դեպքում*

$$|\Delta^*u|=\left|\frac{1}{y}\right||\Delta^*x|+\left|\frac{x}{y^2}\right||\Delta^*y|=\frac{|y|\,|\Delta^*x|+|x|\,|\Delta^*y|}{y^2},$$

5. ABC *ուղղանկյուն եռանկյան* c *ներքնաձիգը և* a *էջը, որոնք որոշված են* $|\Delta^*c|=0{,}2$, $|\Delta^*a|=0{,}1$ *առավելագույն բացարձակ սխալներով, համապատասխանաբար հավասար են* c = 75, a=32։ $\sin A=\frac{a}{c}$ *բանաձևով որոշել* A *անկյունը։*

A *անկյան հաշվման ժամանակ կատարած* $|\Delta A|$ *առավելագույն բացարձակ սխալը։*

Լուծում։ $\sin A=\frac{a}{c}$, $A=\arcsin\frac{a}{c}$, *հետևաբար,*

$$\frac{\partial A}{\partial a}=\frac{1}{\sqrt{c^2-a^2}},\quad \frac{\partial A}{\partial c}=-\frac{a}{c\sqrt{c^2-a^2}},$$

Ըստ (2) բանաձևի

$$|\Delta A|=\frac{1}{\sqrt{(75)^2-(32)^2}}\cdot 0{,}1+\frac{32}{75\sqrt{(75)^2-(32)^2}}\cdot 0{,}2=0{,}00273 \text{ ռադիան}=9'24'',$$

Այսպիսով,

$$A=\arcsin\frac{32}{75}\pm 9'24''.$$

6. Դիցուք ABC *ուղղանկյուն եռանկյան մեջ էջը՝* b=121,56 *մ, անկյունը՝* A=25°21′40″, *ընդ որում* b *էջը որոշելիս կատարած առավելագույն բացարձակ սխալը՝* $|\Delta^*b|=0{,}05$ *մ,* A *անկյունը որոշելիս կատարած առավելագույն բացարձակ սխալը՝* $|\Delta^*A|=12''$։

Որոշել a *էջը* $a=b\,\mathrm{tg}A$ *բանաձևով հաշվելիս կատարած առավելագույն բացարձակ սխալը։*

Լուծում։ (2) բանաձևով գտնում ենք.

$$|\Delta^*a|=|\mathrm{tg}A|\,|\Delta^*b|+\frac{|b|}{\cos^2 A}|\Delta^*A|,$$

Տեղադրելով համապատասխան արժեքները (և հիշելով, որ $|\Delta^*A|$*-ն պետք է արտահայտել ռադիաններով), կստանանք.*

$$|\Delta^*a|=\mathrm{tg}\,25°21'40''\cdot 0{,}05+\frac{121{,}56}{\cos^2 25°21'40''}\cdot\frac{12}{206\,265}=$$
$$=0{,}0237+0{,}0087=0{,}0324 \text{ մ։}$$

Որևէ մեծության Δx *սխալի հարաբերությունը այդ մեծության* x *մոտավոր արժեքին կոչվում է մեծության* հարաբերական սխալ։ *Այն կնշանակենք* δx-*ով,*

$$\delta x=\frac{\Delta x}{x},$$

x մեծության մաքսիմալ հարաբերական սխալ կոչվում է մաքսիմալ բացարձակ սխալի հարաբերությունը x մեծության բացարձակ արժեքին և նշանակվում է $|\delta^* x|$-ով,

$$|\delta^* x| = \frac{|\Delta^* x|}{|x|}. \qquad (3)$$

1 ֆունկցիայի մաքսիմալ հարաբերական սխալի գնահատման համար (2) հավասարության բոլոր թվերը բաժանենք $|u| = |f(x, y, z, \ldots, t)|$-ի վրա.

$$\frac{|\Delta^* u|}{|u|} = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}\right| |\Delta^* y| + \ldots + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f}\right| |\Delta^* t|, \qquad (4)$$

բայց

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{\partial}{\partial x} \ln |f|; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{\partial}{\partial y} \ln |f|; \ \ldots; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f} = \frac{\partial}{\partial t} \ln |f|.$$

Ուստի (3) հավասարությունը կարելի է գրել այսպես.

$$|\delta^* u| = \left|\frac{\partial}{\partial x} \ln |f|\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\partial}{\partial x} \ln |f|\right| |\Delta^* y| + \ldots$$
$$\ldots + \left|\frac{\partial}{\partial t} \ln |f|\right| \Delta^* t| \ldots, \qquad (5)$$

կամ կարճ՝

$$|\delta^* u| = |\Delta^* \ln |f||. \qquad (6)$$

Ինչպես (3), այնպես էլ (5) բանաձևից հետևում է, որ ֆունկցիայի մաքսիմալ հարաբերական սխալը հավասար է այդ ֆունկցիայի լոգարիթմի մաքսիմալ բացարձակ սխալին:

(6) բանաձևից հետևում են մտավոր հաշվումներում կիրառվող կանոններ:

1. Դիցուք $u = xy$: Օգտվելով օրինակ 3-ի արդյունքներից, կստանանք.

$$|\delta^* u| = \frac{|y| \cdot |\Delta^* x|}{|xy|} + \frac{|x| \cdot |\Delta^* y|}{|xy|} = \frac{|\Delta^* x|}{|x|} + \frac{|\Delta^* y|}{|y|} = |\delta^* x| + |\delta^* y|,$$

այսինքն՝ արտադրյալի մաքսիմալ հարաբերական սխալը հավասար է գումարելիների մաքսիմալ հարաբերական սխալների գումարին:

2. Եթե $u = \frac{x}{y}$, ապա, օգտվելով օրինակ 4-ի արդյունքներից գտնում ենք.

$$|\delta^* u| = |\delta^* x| + |\delta^* y|.$$

Դիտողություն: Օրինակ 2-ի հիման վրա հետևում է, որ եթե $u = x - y$, ապա

$$|\delta^* u| = \frac{|\Delta^* x| + |\Delta^* y|}{|x - y|}.$$

Եթե x-ը և y-ը մոտ են, ապա կարող է պատահել, որ որոշվող $x - y$ մեծության նկատմամբ $|\delta^* u|$-ն լինի շատ մեծ: Այս հանգամանքը պետք է հաշվի առնել հաշվումներ կատարելիս:

Օրինակ 7: Ճոճանակի տատանման պարբերությունը հավասար է

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

որտեղ l-ը ճոճանակի երկարությունն է, g-ն՝ ծանրության ուժի արագացումը:

T-ն այդ բանաձևով որոշելիս ինչպիսի հարաբերական սխալ ենք թույլ տալիս, ընդունելով $\pi \approx 3,14$ (մինչև 0,005-ի ճշտությամբ), $l = 1$ (մինչև 0,01 մ ճշտությամբ), $g = 9,8 \frac{\text{մ}}{\text{վրկ}^2}$ (մինչև $0,02 \frac{\text{մ}}{\text{վրկ}^2}$ ճշտությամբ):

Լուծում: (6) բանաձևով մաքսիմալ հարաբերական սխալը հավասար է

$$|\delta^* T| = |\Delta^* \ln T|.$$

Բայց

$$\ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2} \ln l - \frac{1}{2} \ln g.$$

Հաշվենք $|\Delta^* \ln T|$-ն, հաշվի առնելով, որ $\pi \approx 3,14$, $\Delta^* \pi = 0,005$, $l = 1$ մ, $\Delta^* l = 0,01$ մ, $g = 9,8 \frac{\text{մ}}{\text{վրկ}^2}$, $\Delta^* g = 0,02 \frac{\text{մ}}{\text{վրկ}^2}$, կստանանք.

$$\Delta^* \ln T = \frac{\Delta^* \pi}{\pi} + \frac{\Delta^* l}{2l} + \frac{\Delta^* g}{2g} = \frac{0,005}{3,14} + \frac{0,01}{2} + \frac{0,02}{2 \cdot 9,8} = 0,0076.$$

Եվ այսպես, մաքսիմալ հարաբերական սխալը հավասար է

$$\delta^* T = 0,0076 = 0,76\ \%.$$

§ 10. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը: Լրիվ ածանցյալ: Բարդ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը

Ենթադրենք, թե

$$z = F(u, v) \qquad (1)$$

հավասարման մեջ u-ն և v-ն հանդիսանում են x և y անկախ փոփոխականների ֆունկցիաներ՝

$$u = \varphi(x, y); \quad v = \Psi(x, y). \qquad (2)$$

Այս դեպքում z-ը հանդիսանում է x և y արգումենտների բարդ ֆունկցիա:

Իսկապես, z-ը, կարելի է և անմիջականորեն արտահայտել x-ի և y-ի միջոցով, այն է՝

$$z=F[\varphi(x, y), \Psi(x, y)]; \qquad (3)$$

Օրինակ 1: Դիցուք

$$z=u^3v^3+u+1; \quad u=x^2+y^2, \quad v=e^{x+y}+1;$$

այդ դեպքում

$$z=(x^2+y^2)^3(e^{x+y}+1)^3+(x^2+y^2)+1.$$

Ենթադրենք, որ F(u, v), φ(x, y), Ψ(x, y) ֆունկցիաներն ըստ իրենց բոլոր արգումենտների ունեն անընդհատ մասնական ածանցյալներ և խնդիր դնենք՝ հաշվել $\frac{\partial z}{\partial x}$-ը և $\frac{\partial z}{\partial y}$-ը, եղնելով (1) և (2) հավասարումներից և չօգտվելով (3) հավասարումից:

x արգումենտին տանք Δx աճ, պահպանելով y-ի արժեքն անփոփոխ: Այդ դեպքում (2) հավասարման համաձայն, u-ն և v-ն կըստանան $\Delta_x u$ և $\Delta_y u$ աճեր:

Բայց եթե u-ն և v-ն ստանում են $\Delta_x u$ և $\Delta_y u$ աճեր, ապա և z=F(u, v) ֆունկցիան կստանա Δz աճ, որը որոշվում է գլ. VIII § 7-ի (5′) բանաձևով.

$$\Delta z=\frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u+\frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v+\nu_1\Delta_x u+\nu_2\Delta_x v.$$

Այս հավասարության բոլոր անդամները բաժանենք Δx-ի:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\nu_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\nu_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Եթե Δx→0, ապա $\Delta_x u\to 0$ և $\Delta_x v\to 0$ (u-ի և v-ի անընդհատության պատճառով): Բայց այդ դեպքում γ_1-ը և γ_2-ը նույնպես ձգտում են զրոյի: Անցնելով սահմանի, երբ Δx→0, կստանանք.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}=\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\nu_1=0; \quad \lim_{\Delta x\to 0}\nu_2=0$$

և, հետևաբար,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (4)$$

Եթե մենք y փոփոխականին տալինք Δy աճ, իսկ x-ը թողնենք անփոփոխ, ապա համանման դատողությունների օգնությամբ կգտնեինք.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (4')$$

Օրինակ 2:

$$z=\ln(u^2+v), \quad u=e^{x+y^2}, \quad v=x^2+y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{u^2+v},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=1.$$

Օգտագործելով (4) և (4′) բանաձևերը, գտնում ենք.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+v}2x=\frac{2}{u^2+v}(ue^{x+y^2}+x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+v}2ye^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+v}=\frac{1}{u^2+v}(4uye^{x+y^2}+1).$$

Վերջին արտահայտությունների մեջ անհրաժեշտ է u-ի և v-ի փոխարեն տեղադրել համապատասխանաբար e^{x+y^2} և x^2+y:

Մեծ թվով փոփոխականների դեպքի համար (4) և (4′) բանաձևերը բնականորեն ընդհանրացվում են:

Օրինակ, եթե w=F(z, u, v, s)-ը հանդիսանում է z, u, v, s չորս արգումենտների ֆունկցիա, որոնցից յուրաքանչյուրը կախված է x-ից և y-ից, ապա (4) և (4′) բանաձևերը ընդունում են հետևյալ տեսքը՝

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x},\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Եթե տրված է z=F(x, y, u, v) ֆունկցիան, որտեղ y-ը, u-ն, v-ն իրենց հերթին կախված են մեկ x արգումենտից՝

$$y=f(x), \quad u=\varphi(x), \quad v=\Psi(x),$$

ապա, ըստ էության z-ը հանդիսանում է միայն մեկ x փոփոխականի ֆունկցիա և կարելի է հարց դնել $\frac{dz}{dx}$ ածանցյալը գտնելու մասին:

Այդ ածանցյալը հաշվում են (5) բանաձևերից առաջինով.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

բայց քանի որ y-ը, u-ն, v-ն միայն մեկ x փոփոխականի ֆունկցիաներ են, ապա մասնական ածանցյալները վերածվում են սովորականի. բացի դրանից, $\frac{\partial x}{\partial x}=1$, ուստի

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

Այս բանաձևը կրում է $\frac{dz}{dx}$ լրիվ ածանցյալի (ի տարբերություն $\frac{\partial z}{\partial x}$ մասնակաև ածանցյալի) հաշվման համար բանաձև անվանումը։

Օրինակ 3.

$$z=x^2+\sqrt{y},\quad y=\sin x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}};\quad \frac{dy}{dx}=\cos x.$$

(6) բանաձևն այս դեպքում տալիս է հետևյալ արդյունքը.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=2x+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x=2x+\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x.$$

Այնուհետև դանենք (1) և (2) հավասարումներով սահմանվող բարդ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը։

(4) և (4′) հավասարումներով որոշվող $\frac{\partial z}{\partial x}$-ի և $\frac{\partial z}{\partial y}$-ի արտահայտությունները տեղադրենք լրիվ դիֆերենցիալի բանաձևի մեջ՝

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{6}$$

Ստանում ենք.

$$dz=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy.$$

Աջ մասում կատարենք հետևյալ ձևափոխությունները.

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right). \tag{7}$$

Բայց

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy&=du,\\ \frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy&=dv.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Հաշվի առնելով (8) հավասարությունը, (7) հավասարությունը կարելի է արտագրել այսպես.

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv \tag{9}$$

կամ

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial y}dv. \tag{9′}$$

Համեմատելով (6)-ը և (9′)-ը, կարող ենք ասել, որ մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալի արտահայտությունը (առաջին կարգի դիֆերենցիալի) ունի նույն տեսքը, այսինքն՝ դիֆերենցիալի ձևն ինվարիանտ է, կախված չէ նրանից, թե u-ն և v-ն անկախ փոփոխականներ են կամ անկախ փոփոխականների ֆունկցիաներ։

Օրինակ 4. Գտնել

$$z=u^2v^3,\qquad u=x^2\sin y,\qquad v=x^3e^y$$

բարդ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը։

Լուծում. (9′) բանաձևի համաձայն ունենք.

$$dz=2uv^3\,du+3u^2v^2\,dv=2uv^3(2x\sin y\,dx+x^2\cos y\,dy)+3u^2v^2(3x^2e^y\,dx+x^3e^y dy).$$

Վերջին արտահայտությունը կարելի է արտագրել և այսպես.

$$dz=(2uv^3\cdot 2x\sin y+3u^2v^2\cdot 3x^2e^y)\,dx+(2uv^3x^2\cos y+3u^2v^2x^3e^y)dy=$$
$$=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

§ 11. Անբացահայտ տեսքով տրված ֆունկցիայի ածանցյալը

Այս հարցի քննարկումը սկսենք մեկ փոփոխականի անբացահայտ ֆունկցիայից*։ Դիցուք x-ի որևէ y ֆունկցիա որոշվում է

$$F(x,\ y)=0$$

հավասարումով։ Ապացուցենք հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ։ Դիցուք x-ի y անընդհատ ֆունկցիան անբացահայտ ձևով տրվում է

$$F(x,\ y)=0 \tag{1}$$

* III գլխի § 11-ում լուծել ենք մեկ փոփոխականի անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցման խնդիրը։ Այնտեղ դիտարկել ենք առանձին օրինակներ և ընդհանուր բանաձև չենք գտել, որը տար անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցյալը, ինչպես և չենք պարզաբանել այդ ածանցյալի գոյության պայմանները։

հավասարումով, որտեղ $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ անընդհատ են որևէ D տիրույթում, որը պարունակում է (x, y) կետը, որի կոորդինատները բավարարում են (1) հավասարմանը. բացի այդ, նշված կետում $F'_y(x, y)\neq 0$: Այդ դեպքում x-ի y ֆունկցիան ունի

$$y'_x=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \qquad (2)$$

ածանցյալը.

Ապացույց: Դիցուք x-ի որևէ արժեքին համապատասխանում է ֆունկցիայի y արժեքը: Բան որում

$$F(x, y)=0:$$

x անկախ փոփոխականին տանք Δx աճ: y ֆունկցիան կստանա Δy աճ, այսինքն արգումենտի $x+\Delta x$ արժեքին համապատասխանում է ֆունկցիայի $y+\Delta y$ արժեքը: Բան $F(x, y)=0$ հավասարման կանենանք

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0:$$

հետևաբար,

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=0:$$

Վերջին հավասարության ձախ մասը, որը երկու փոփոխականի ֆունկցիայի լրիվ աճն է, § 7-ի (5′) բանաձևի համաձայն կարելի է արտապրել այսպես.

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y,$$

որտեղ γ_1-ը և γ_2-ը ձգտում են զրոյի, երբ Δx-ը և Δy-ը ձգտում են զրոյի: Քանի որ վերջին արտահայտության ձախ մասը հավասար է զրոյի, կարելի է գրել.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y=0:$$

Վերջին հավասարությունը բաժանենք Δx-ի և հաշվենք $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ը.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y}+\gamma_2}:$$

Δx-ը ձգտեցնենք զրոյի: Այդ դեպքում, հաշվի առնելով, որ γ_1-ը և

γ_2-ը նույնպես ձգտում են զրոյի և որ $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$, ստանում կստանանք.

$$y'_x=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}: \qquad (2')$$

Մենք ապացուցեցինք անբացահայտ տեսքով տրված ֆունկցիայի y'_x ածանցյալի գոյությունը, և նրա հաշվման համար գտանք բանաձև.

Օրինակ 1. $x^2+y^2-1=0$ հավասարումը y-ը որոշում է որպես x-ի անբացահայտ ֆունկցիա: Այստեղ

$$F(x, y)=x^2+y^2-1, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y:$$

Հետևաբար, ըստ (1) բանաձևի

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y},$$

Նկատենք, որ տրված հավասարումը որոշում է երկու տարբեր ֆունկցիաներ (քանի որ $(-1, 1)$ միջակայքում x-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է y-ի երկու արժեք), բայց և այնպես y'_x-ի գտած արժեքն իրավացի է ինչպես մեկ, այնպես էլ մյուս ֆունկցիայի համար:

Օրինակ 2. Տրված է x-ը և y-ը կապող

$$e^x-e^y+xy=0:$$

հավասարումը: Այստեղ

$$F(x, y)=e^y-e^x+xy,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-e^x+y; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=e^y+x:$$

Հետևաբար, ըստ (1) բանաձևի ստանում ենք.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-e^x+y}{e^y+x}=\frac{e^x-y}{e^y+x}:$$

Այժմ դիտարկենք

$$F(x, y, z)=0 \qquad (3)$$

տեսքի հավասարումը:

Եթե որևէ տիրույթից վերցրած x և y թվերի յուրաքանչյուր զույգին համապատասխանում է z-ի մեկ կամ մի քանի արժեքներ, որոնք բավարարում են (3) հավասարմանը, ապա այդ հավասարումը անբացահայտ ձևով որոշում է x-ի և y-ի մեկ կամ մի քանի z միարժեք ֆունկցիաներ:

Օրինակ, $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ հավասարումը անբացահայտ ձևով որոշում է x-ի և y-ի երկու անընդհատ ֆունկցիաներ, որոնք կարելի է արտահայտել բացահայտ ձևով, լուծելով հավասարումը z-ի նկատմամբ. այդ դեպքում մենք ստանում ենք.

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2} \text{ և } z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Գտնենք (3) հավասարումով որոշվող x-ի և y-ի z անբացահայտ ֆունկցիայի $\frac{\partial z}{\partial x}$ և $\frac{\partial z}{\partial y}$ մասնական ածանցյալները:

Երբ մենք որոնում ենք $\frac{\partial z}{\partial x}$-ը, y-ը համարում ենք հաստատուն: Այդ պատճառով այստեղ կիրառելի է (2′) բանաձևը, եթե միայն անկախ փոփոխական համարենք x-ը, իսկ ֆունկցիա՝ z-ը: Հետևաբար

$$z'_x=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};$$

նույն ճանապարհով գտնում ենք.

$$z'_y=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}};$$

ենթադրվում է, որ $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$:

Համանման ձևով սահմանվում են ցանկացած թվով փոփոխականների անբացահայտ ֆունկցիաները և գտնում են նրանց մասնական ածանցյալները:

Օրինակ 3. $x^2+y^2+z^2-R^2=0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

Ածանցելով որպես բացահայտ ֆունկցիա (հավասարումը z-ի նկատմամբ լուծելուց հետո), մենք կստանայինք նույն արդյունքը:

Օրինակ 4. $e^z+x^2y+z+5=0$:

Այստեղ

$$F(x, y, z)=e^z+x^2y+z+5,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=e^z+1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xy}{e^z+1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{e^z+1}.$$

Դիտողություն: Այս պարագրաֆի բոլոր դատողությունները կատարվեցին այն ենթադրությամբ, որ $F(x, y)=0$ հավասարումը որոշում է մեկ փոփոխականի $y=\varphi(x)$ որևէ ֆունկցիա. $F(x, y, z)=0$ հավասարումը որոշում է $z=f(x, y)$ երկու փոփոխականների որևէ ֆունկցիա: Առանց ապացույցի ցույց տանք, թե ինչպիսի պայմանի պետք է բավարարի $F(x, y)$ ֆունկցիան, որպեսզի $F(x, y)=0$ հավասարումը որոշի $y=\varphi(x)$ միարժեք ֆունկցիա:

Թեորեմ: Դիցուք $F(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է (x_0, y_0) կետի շրջակայքում և այդտեղ ունի անընդհատ մասնական ածանցյալներ, ընդ որում $F'_y(x, y)\neq 0$ և դիցուք $F(x_0, y_0)=0$: Այդ դեպքում գոյություն ունի (x_0, y_0) կետն ընդգրկող շրջակայք, որտեղ $F(x, y)=0$ հավասարումը որոշում է $y=\varphi(x)$ միարժեք ֆունկցիա:

Համանման թեորեմ տեղի ունի և $F(x, y, z)=0$ հավասարումով որոշվող անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության պայմանների համար:

Դիտողություն: Անբացահայտ ֆունկցիաների ածանցման կանոնները արտածելիս մենք օգտվեցինք այն պայմաններից, որոնք և որոշում են անբացահայտ ֆունկցիաների գոյությունը:

§ 12. Տարբեր կարգի մասնական ածանցյալներ

Դիցուք ունենք երկու փոփոխականների ֆունկցիա՝

$$z=f(x, y):$$

$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y)$ և $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y)$ մասնական ածանցյալները, ընդհանրապես ասած հանդիսանում են x և y փոփոխականների ֆունկցիաներ: Այդ պատճառով կարելի է նորից գտնել նրանց մասնական ածանցյալները: Հետևաբար, երկու փոփոխականների ֆունկցիան ունի Հոսք երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներ, քանի որ $\frac{\partial z}{\partial x}$ և $\frac{\partial z}{\partial y}$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը կարելի է ածանցել ինչպես ըստ x-ի, այնպես էլ ըստ y-ի:

Երկրորդ մասնական ածանցյալները նշանակում են այսպես.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x, y)$, այստեղ f-ը հաջորդաբար երկու անգամ ածանցվում է ըստ x-ի:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x, y)$, այստեղ f-ը նախ ածանցվում է ըստ x-ի, և ապա արդյունքն ածանցվում է ըստ y-ի:

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=f''_{yx}(x, y)$, այստեղ f-ը նախ ածանցվում է ըստ y-ի, և ապա արդյունքը ածանցվում է ըստ x-ի:

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x, y)$, այստեղ f-ը հաջորդաբար երկու անգամ ածանցվում է ըստ y-ի:

Երրորդ կարգի ածանցյալները կարելի է նորից ածանցել ինչպես ըստ x-ի, այնպես էլ ըստ y-ի: Կստանանք երրորդ կարգի մասնական ածանցյալները: Ակնհայտ է, նրանք կլինեն սրանք.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}:$$

Ընդհանրապես, n-րդ կարգի մասնական ածանցյալը հանդիսանում է (n−1)-րդ կարգի ածանցյալի առաջին ածանցյալը: Օրինակ, $\frac{\partial^n z}{\partial x^p\partial y^{n-p}}$-ն հանդիսանում է n-րդ կարգի ածանցյալ. այստեղ z-ը նախ p անգամ ածանցվել է ըստ x-ի, իսկ այնուհետև n−p անգամ՝ ըստ y-ի.

Ցանկացած թվով փոփոխականների համար բարձր կարգի մասնական ածանցյալները սահմանվում են համանման ձևով:

Օրինակ 1: Հաշվել

$$f(x, y)=x^2y+y^3$$

ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալները:

Լուծում: Հաջորդաբար գտնում ենք.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial(x^2+3y^2)}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y.$$

Օրինակ 2: Գտնել $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$-ը և $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$-ն, եթե $z=y^2e^x+x^2y^3+1$:

Լուծում: Հաջորդաբար գտնում ենք.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2e^x+2xy^3,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^x+2y^3,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=2ye^x+6y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^x+3x^2y^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2ye^x+6xy^2,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial y^2}=2ye^x+6y^2:$$

Օրինակ 3: Հաշվել $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y\,dz}$-ը, եթե $u=z^2e^{x+y^2}$:

Լուծում:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=z^2e^{x+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=z^2e^{x+y^2},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=2yz^2e^{x+y^2},\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z}=4yze^{x+y^2}.$$

Բնական է դնել այսպիսի հարց. մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի ածանցման արդյունքը կախված է արդյոք ըստ տարբեր փոփոխականների ածանցման հաջորդականությունից, այսինքն, նույնաբար հավասա՞ր կլինեն, օրինակ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\ \text{և}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

կամ

$$\frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial x\,\partial y\,\partial t}\ \text{և}\ \frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial t\,\partial x\,\partial y}\ \text{ածանցյալները և այլն:}$$

Պարզվում է, որ իրավացի է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Եթե $z=f(x, y)$ ֆունկցիան և նրա f'_x, f'_y, f''_{xy} և f''_{yx} մասնական ածանցյալները որոշված և անընդհատ են M(x, y) կետում և նրա որևէ շրջակայքում, ապա այդ կետում

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\qquad (f''_{xy}=f''_{yx}):$$

Ապացույց: Ապացուցելու համար դիտարկենք

$$A=[f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x+\Delta x,\ y)]-[f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)]$$

արտահայտությունը:

Եթե մտցնենք

$$\varphi(x)=f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$$

հավասարությամբ որոշվող $\varphi(x)$ օժանդակ ֆունկցիան, ապա A-ն կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$A=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x):$$

Քանի որ, ըստ ենթադրության f'_x-ը որոշված է (x, y) կետի շրջակայքում, ապա $\varphi(x)$-ը դիֆերենցելի է $[x,\ x+\Delta x]$ հատվածում. բայց այդ դեպքում, կիրառելով Լագրանժի թեորեմը, կստանանք.

$$A=\Delta x\varphi'(\bar{x}),$$

որտեղ $\bar{x}$-ը պարփակված է x-ի և $(x+\Delta x)$-ի միջև: Բայց

$$\varphi'(\bar{x})=f'_x(\bar{x},\ y+\Delta y)-f'_x(\bar{x},\ y):$$

Քանի որ f''_{xy}-ը որոշված է (x, y) կետի շրջակայքում, ապա f'_x-ը դիֆերենցելի է $[y,\ y+\Delta y]$ հատվածում, ուստի ստացված տարբերա-

թյան նկատմամբ նորից կիրառելով Լագրանժի թեորեմը (ըստ y փոփոխականի), կունենանք.

$$f'_x(\bar{x}, y+\Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}),$$

որտեղ $\bar{y}$-ը պարփակված է y-ի և $(y+\Delta y)$-ի միջև:

Հետևաբար, A-ի սկզբնական արտահայտությունը հավասար է

$$A = \Delta x\, \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}). \qquad (1)$$

A-ի համար արտահայտության միջին դասմարելիները տեղափոխելով, կստանանք.

$$A = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] - [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)].$$

Մտծենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$\Psi(y) = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$

այդ դեպքում

$$A = \psi(y+\Delta y) - \psi(y).$$

Նորից կիրառելով Լագրանժի թեորեմը, կստանանք.

$$A = \Delta y \psi'(\bar{\bar{y}}),$$

որտեղ $\bar{\bar{y}}$-ը պարփակված է y-ի և $(y+\Delta y)$-ի միջև: Բայց

$$\psi'(\bar{\bar{y}}) = f'_y(x+\Delta x, \bar{\bar{y}}) - f'_y(x, \bar{\bar{y}}).$$

Մեկ անգամ էլ կիրառելով Լագրանժի թեորեմը, կստանանք.

$$f'_y(x+\Delta x, \bar{\bar{y}}) - f'_y(x, \bar{\bar{y}}) = \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{\bar{y}}}),$$

որտեղ x-ը պարփակված է x-ի և $(x+\Delta x)$-ի միջև:

Այսպիսով, A-ի սկզբնական արտահայտությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$A = \Delta y\, \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{\bar{y}}}). \qquad (2)$$

(1) և (2) հավասարությունների ձախ մասերը հավասար են A-ի, հետևաբար, հավասար են և աջ մասերը, այսինքն՝

$$\Delta x\, \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \Delta y\, \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}),$$

որտեղից

$$f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx})x, \bar{\bar{y}}).$$

Այս հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $\Delta x \to 0$ և $\Delta y \to 0$, կստանանք.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}).$$

Քանի որ f''_{xy} և f''_{yx} ածանցյալները անընդհատ են (x, y) կետում, ապա

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{xy}(x, y) \text{ և } \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = f_{yx}(x, y).$$

Վերջնականապես կստանանք.

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

Ապացուցած թեորեմից որպես հետևանք ստացվում է, որ եթե $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ և $\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}$ մասնակի ածանցյալները անընդհատ են, ապա

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}.$$

Համանման թեորեմ տեղի ունի և ցանկացած թվով փոփոխականների ֆունկցիայի համար:

Օրինակ 4: Գտնել $\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$-ը և $\frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial z\, \partial x}$-ը, եթե $u = e^{xy} \sin z$:

Լուծում:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy} \sin z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = e^{xy} \sin z + xye^{xy} \sin z = e^{xy}(1+xy) \sin z,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = e^{xy}(1+xy) \cos z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} \sin z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = xe^{xy} \cos z,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial z\, \partial x} = e^{xy} \cos z + xye^{xy} \cos z = e^{xy}(1+xy) \cos z.$$

Հետևաբար,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial z\, \partial x}$$

(տես, բացի այդ, այս պարագրաֆի 1-2 օրինակները):

§ 13. Մակարդակի մակերևույթներ

Դիցուք (x, y, z) տարածության մեջ կա D տիրույթ, որում տրված է

$$u = u(x, y, z) \qquad (1)$$

ֆունկցիան: Այդ դեպքում ասում են, որ D տիրույթում տված է սկալյար դաշտ: Եթե, օրինակ, u(x, y, z)-ը ջերմաստիճանն է M(x, y, z) կետում, ապա ասում են, որ տրված է ջերմաստիճան-

ների սահմանը գոյություն. եթե D տիրույթը լցված է հեղուկով կամ գազով և u(x, y, z)-ը ճնշումն է, ապա ստացվում է ճնշումների սահմանը գոյություն:

Դիտարկենք D տիրույթի այն կետերը, որոնցում u(x, y, z) ֆունկցիան ունի c հաստատուն արժեք.

$$u(x, y, z)=c. \qquad (2)$$

Այդ կետերի բազմությունը կազմում է որևէ մակերևույթ: Եթե վերցնենք c-ի տարբեր արժեք, ապա կստանանք տարբեր մակերևույթ: Այդ մակերևույթները կոչվում են մակարդակի մակերևույթներ:

Օրինակ 1. Ենթադրենք տված է

$$u(x, y, z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}$$

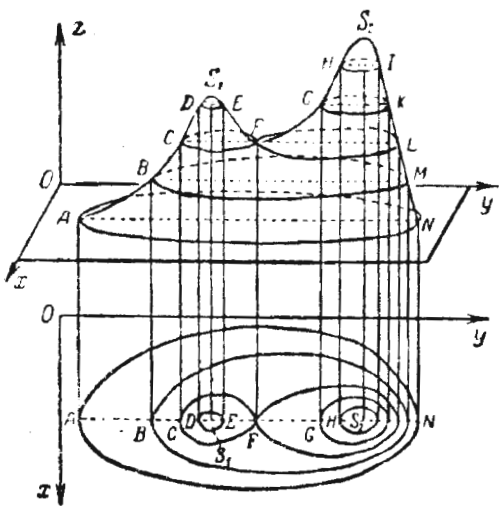
սահմանը գոյություն: Այսպես մակարդակի մակերևույթները կլինեն

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=c$$

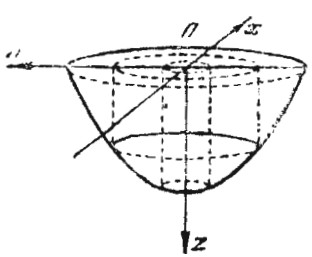
մակերևույթները, այսինքն՝ $2\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$, $4\sqrt{c}$ կիսաառանցքներով էլիպսոիդները:

Եթե u ֆունկցիան երկու փոփոխականների ֆունկցիա է՝

$$u=u(x, y)$$



Նկ. 176



Նկ. 177

ապա մակարդակի «մակերևույթները» կլինեն Oxy հարթության մեջ՝ գտնվող

$$u(x, y)=c \qquad (2')$$

գծերը, որոնք կոչվում են մակարդակի գծեր:

Եթե u-ի արժեքները վերցնենք Oz առանցքի վրա՝

$$z=u(x, y),$$

ապա Oxy հարթության մեջ մակարդակի գծերը կլինեն այն գծերի պրոյեկցիաները, որոնք ստացվում են z=u(x, y) մակերևույթի և z=c հարթությունների հատույթում (նկ. 176): Իմանալով մակարդակի գծերը, հեշտ է ուսումնասիրել z=u(x, y) մակերևույթի բնույթը:

Օրինակ 2. Որոշել z=1−x²−y² ֆունկցիայի մակարդակի գծերը: Մակարդակի գծերը կլինեն 1−x²−y²=c հավասարումներն ունեցող գծերը: Դրանք $\sqrt{1-c}$ շառավղով շրջանագծերն են (նկ. 177): Մասնավորապես, երբ c=0 ստանում ենք x²+y²=1 շրջանագիծը:

§ 14. Ածանցյալ ըստ ուղղության

D տիրույթում դիտարկենք u=u(x, y, z) ֆունկցիան և M(x, y, z) կետը: M կետից տանենք S վեկտորը, որի ուղղորդ կոսինուսներն են cos α, cos β, cos γ (նկ. 178): Դիտարկենք S վեկտորի վրա գտնվող և նրա սկզբից ΔS հեռավորությունն ունեցող $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ կետը:

Այսպիսով,

$$\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}.$$

Ենթադրենք, որ u(x, y, z) ֆունկցիան D տիրույթում անընդհատ է և ունի ըստ իր արգումենտների անընդհատ ածանցյալներ:

Այնպես, ինչպես այդ արվեց § 7-ում, ֆունկցիայի լրիվ աճը ներկայացնենք այսպես.

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z, \qquad (1)$$

որտեղ ε_1, ε_2 և ε_3 ձգտում են զրոյի, երբ $\Delta s\to 0$: (1) հավասարության բոլոր անդամները բաժանենք Δs-ի՝

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta z}+\varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s}. \qquad (2)$$

Ակնհայտ է, որ

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\cos\alpha,\quad \frac{\Delta y}{\Delta s}=\cos\beta,\quad \frac{\Delta z}{\Delta s}=\cos\gamma.$$

Հետևաբար, (2) հավասարությունը կարելի է արտապրել այսպես.

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma+\varepsilon_1\cos\alpha+\varepsilon_2\cos\beta+\varepsilon_3\cos\gamma. \qquad (3)$$

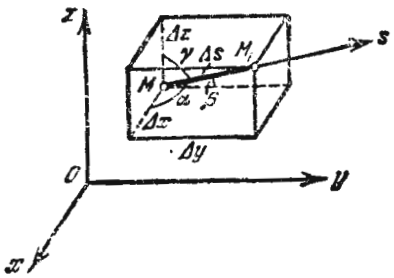
$\frac{\Delta u}{\Delta s}$ հարաբերության սահմանը, երբ $\Delta s \to 0$ կոչվում է $u=u(x, y, z)$ ֆունկցիայի ածանցյալ S վեկտորի ուղղությամբ՝ (x, y, z) կետում և նշանակվում է $\frac{\partial u}{\partial s}$ այսինքն՝

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}. \qquad (4)$$

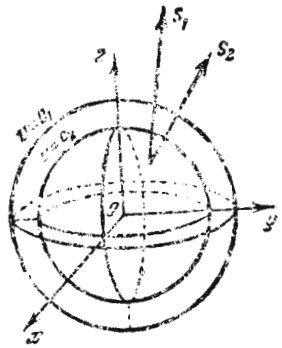
Այսպիսով, (3) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, կստանանք.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (5)$$

(5) բանաձևից հետևում է, որ իմանալով մասնական ածանցյալները, հեշտ է գտնել ածանցյալը ցանկացած S վեկտորի ուղղությամբ: Մասնական ածանցյալներն իրենք հանդիսանում են ըստ ուղղության



Նկ. 178



Նկ. 179

ածանցյալի մասնավոր դեպք: Այսպես, օրինակ, երբ $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$ ստանում ենք.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Օրինակ: Տրված է

$$u=x^2+y^2+z^2$$

ֆունկցիան: Գտնել $\frac{\partial u}{\partial s}$ ածանցյալը M(1, 1, 1) կետում ա) $S_1=2i+j+3k$ վեկտորի ուղղությամբ, բ) $S_2=i+j+k$ վեկտորի ուղղությամբ:

Լուծում: ա) Գտնենք S_1 վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները.

$$\cos\alpha = 2/\sqrt{4+1+9} = 2/\sqrt{14}, \qquad \cos\beta = 1/\sqrt{14}, \qquad \cos\gamma = 3/\sqrt{14}.$$

Հետևաբար,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{3}{\sqrt{14}},$$

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2z$ մասնական ածանցյալները M(1, 1, 1) կետում կլինեն

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 2.$$

Եվ այսպես,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}},$$

բ) Գտնենք S_2 վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Հետևաբար,

$$\frac{\partial u}{\partial s_2} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Հեռագայի համար նկատենք, որ $2\sqrt{3} > \frac{12}{\sqrt{14}}$ (նկ. 179):

§ 15. Գրադիենտ

D տիրույթի յուրաքանչյուր կետում, որտեղ տրված է $u=u(x, y, z)$ ֆունկցիան, սահմանենք մի վեկտոր, որի պրոյեկցիաները կոորդինատների առանցքների վրա հանդիսանում են այդ ֆունկցիայի $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ մասնական ածանցյալները համապատասխան կետում՝

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{ez} k. \qquad (1)$$

Այդ վեկտորը կոչվում է $u=u(x, y, z)$ ֆունկցիայի գրադիենտ: Ասում են, որ D տիրույթում որոշված է գրադիենտների վեկտորական դաշտ: Այնուհետև ապացուցենք հետևյալ թեորեմը, որը կապ է հաստատում գրադիենտի և ըստ ուղղության ածանցյալի միջև:

Թեորեմ: Դիցուք տրված է $u=u(x, y, z)$ սկալյար դաշտը և այդ սկալյար դաշտում որոշված է

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

գրադիենտների դաշտը: Որևէ S վեկտորի ուղղությամբ՝ $\frac{\partial u}{\partial s}$ ածանցյալը հավասար է S վեկտորի վրա grad u վեկտորի պրոյեկցիային:

Ապացույց: Դիտարկենք S վեկտորին համապատասխանող S^0 միավոր վեկտորը.

$$S^0 = i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma;$$

Հաշվենք grad u և S^0 վեկտորների սկալյար արտադրյալը,

$$\text{grad } u \cdot S^0 = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma; \qquad (2)$$

Այս հավասարության աջ մասում գտնվող արտահայտությունը հանդիսանում է u(x, y, z) ֆունկցիայի ածանցյալը S վեկտորի ուղղությամբ: Հետևաբար, կարող ենք գրել.

$$\text{grad } u \cdot S^0 = \frac{\partial u}{\partial s};$$

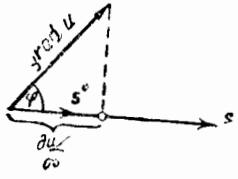
Եթե grad u և S^0 վեկտորների միջև կազմված անկյունը նշանակենք φ-ով (նկ. 180), ապա կարող ենք գրել.

$$|\text{grad } u|\cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s} \qquad (3)$$

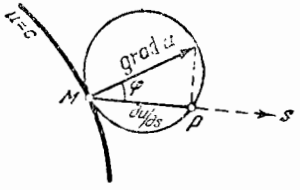
կամ

$$\text{np.}_{s_0}\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial s}; \qquad (4)$$

Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 180



Նկ. 171

Ապացուցած թեորեմի հիման վրա ակնառու կերպով կապ է հաստատվում գրադիենտի և տրված կետում ցանկացած ուղղությամբ ածանցյալի միջև: Տրված M(x, y, z) կետում կառուցենք grad u վեկտորը (նկ. 181): Կառուցենք grad u արամագծով սֆերա: M կետից տանենք S վեկտորը: S վեկտորի հատման կետը սֆերայի մակերևույթի հետ նշանակենք P-ով: Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ MP = $=|\text{grad } u|\cos\varphi$, եթե φ-ն գրադիենտի և MP հատվածի ուղղությունների կազմված անկյունն է (ըստ որում $\varphi < \frac{\pi}{2}$), այսինքն՝ MP $= \frac{\partial u}{\partial s}$: Ակնհայտ է, որ S վեկտորի ուղղությունը հակադիր ուղղությամբ փոփոխվելու դեպքում ածանցյալը փոխում է նշանը, իսկ նրա բացարձակ մեծությունը մնում է նախկինը:

Հաստատենք գրադիենտի մի քանի հատկություններ:

1) Տրված կետում S վեկտորի ուղղությամբ ածանցյալն ունի ամենամեծ արժեք, եթե S վեկտորի ուղղությունը համընկնում է գրադիենտի ուղղության հետ. ածանցյալի այդ ամենամեծ արժեքը հավասար է |grad u|:

Այս պնդման իրավացիությունը անմիջականորեն հետևում է (3) հավասարությունից. $\frac{\partial u}{\partial s}$-ի ամենամեծ արժեքը կլինի, երբ $\varphi = 0$, և այդ դեպքում՝

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u|;$$

2) grad u վեկտորին ուղղահայաց վեկտորի ուղղությամբ ածանցյալը հավասար է զրոյի:

Այս պնդումը հետևում է (3) բանաձևից: Իրոք, տվյալ դեպքում

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\varphi = 0 \quad \text{և} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u|\cos\varphi = 0;$$

Օրինակ 1: Տրված է

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

ֆունկցիան:

ա) Որոշենք գրադիենտը M(1, 1, 1) կետում: Այդ ֆունկցիայի գրադիենտի արտահայտությունը կամայական կետում կլինի

$$\text{grad } u = 2xi + 2yj + 2zk;$$

Հետևաբար,

$$(\text{grad } u)_M = 2i + 2j + 2k, \qquad |\text{grad } u|_M = 2\sqrt{3};$$

բ) M(1, 1, 1) կետում հաշվենք u ֆունկցիայի ածանցյալը գրադիենտի ուղղությամբ: Գրադիենտի ուղղորդ կոսինուսները կլինեն

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

Հետևաբար,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

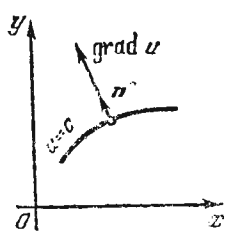
այսինքն՝

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u|.$$

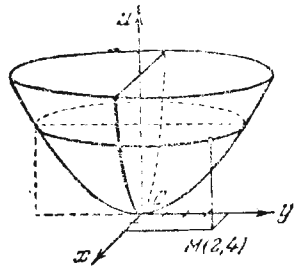
Դիտողություն։ Եթե $u=u(x, y)$ ֆունկցիան երկու փոփոխականների ֆունկցիա է, ապա

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$$

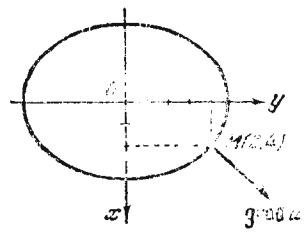
վեկտորը գտնվում է Oxy հարթության մեջ։ Ապացուցենք, որ grad u-ն ուղղահայաց է Oxy հարթության մեջ գտնվող և համապատասխան կետով անցնող $u(x, y)=c$ մակարդակի գծին։ Իրոք, $u(x, y)=c$ մակարդակի գծի շոշափողի k_1 անկյունային գործակիցը հավասար կլինի $k_1 = -\frac{u'_x}{u'_y}$։ Գրադիենտի k_2 անկյունային գործակիցը հավասար կլինի $k_2 = \frac{u'_y}{u'_x}$։ Ակնհայտ է, որ $k_1 k_2 = -1$։ Այդ էլ հենց ապացուցում է մեր պնդման իրավացիությունը (նկ. 182)։ Երեք փոփոխականների



Նկ. 182



Նկ. 183



Նկ. 184

ֆունկցիայի գրադիենտի համանման հատկությունը կհաստատվի IX գլխի § 6-ում։

Օրինակ 2։ Որոշել $u=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}$ ֆունկցիայի գրադիենտը M(2, 4) կետում (նկ. 183)։

Լուծում։ Այստեղ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x\Big|_M = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{3}y\Big|_M = \frac{8}{3}$$

Հետևաբար, $\operatorname{grad} u = 2i + \frac{8}{3}j$։

Տվյալ կետով անցնող մակարդակի գծի հավասարումը կլինի

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} = \frac{22}{3}.$$

§ 16. Թեյլորի բանաձևը երկու փոփոխականների ֆունկցիայի համար

Դիցուք երկու փոփոխականների $z=f(x, y)$ ֆունկցիան իր մինչև $(n+1)$-րդ կարգը ներառյալ մասնական ածանցյալների հետ միասին անընդհատ է $M(a, b)$ կետի որևէ շրջակայքում։ Այդ դեպքում, այնպես, ինչպես այդ արվել է մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում (տես IV գլխի § 6), երկու փոփոխականների ֆունկցիան ներկայացնենք $(x-a)$-ի ու $(y-b)$-ի աստիճաններով n-րդ կարգի բազմանդամի և որևէ մնացորդային անդամի գումարի տեսքով։ Ստորև ցույց կարվի, որ $n=2$ դեպքի համար այդ բանաձևն ունի

$$f(x, y) = A_0 + D(x-a) + E(y-b) + \frac{1}{2!}[A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2] + R_2 \qquad (1)$$

տեսքը, որտեղ A_0, D, E, A, B, C գործակիցները կախված չեն x-ից և y-ից, իսկ R_2-ը մնացորդային անդամն է, որի կառուցվածքը համանման է մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար Թեյլորի բանաձևում մասնակցող մնացորդային անդամին։

Կիրառենք Թեյլորի բանաձևը մեկ՝ y փոփոխականի $f(x, y)$ ֆունկցիայի համար, համարելով x-ը հաստատուն (սահմանափակվենք երկրորդ կարգի անդամներով)։

$$f(x, y) = f(x, b) + \frac{y-b}{1} f'_y(x, b) + \frac{(y-b)^2}{1\cdot 2} f''_{yy}(x, b) + \frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''_{yyy}(x, \eta_1), \qquad (2)$$

որտեղ $\eta_1 = b + \theta_1(y-b)$, $0<\theta_1<1$։ $f(x, b)$, $f'_y(x, b)$, $f''_{yy}(x, b)$ ֆունկցիաները վերլուծենք Թեյլորի բանաձևով ըստ $(x-a)$-ի աստիճանների, սահմանափակվելով մինչև երրորդ կարգը ներառյալ խառն ածանցյալներով.

$$f(x, b) = f(a, b) + \frac{x-a}{1} f'_x(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''_{xx}(a, b) + \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b), \qquad (3)$$

որտեղ $\xi_1 = x + \theta_2(x-a)$, $0<\theta_2<1$;

$$f'_y(x, b) = f'_y(a, b) + \frac{x-a}{1} f''_{yx}(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''''_{yxx}(\xi_2, b), \qquad (4)$$

որտեղ $\xi_2 = x + \theta_3(x-a)$, $0<\theta_3<1$;

$$f''_{yy}(x, b)=f''_{yy}(a, b)+\frac{x-a}{1}f'''_{yyx}(\xi_3, b), \qquad (5)$$

որտեղ $\xi_3=x+\theta_4(x-a)$, $0<\theta_4<1$։

(3), (4) և (5) արտահայտությունները տեղադրելով (2) բանաձևի մեջ, կստանանք.

$$f(x, y)=f(a, b)+\frac{x-a}{1}f'_x(a, b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''_{xx}(a, b)+$$

$$+\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{xx}(\xi_1, b)+$$

$$+\frac{y-b}{1}\left[f'_y(a, b)+\frac{x-a}{1}f''_{yx}(a, b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f'''_{yxx}(\xi_2, b)\right]+$$

$$+\frac{(y-b)^2}{1\cdot 2}\left[f''_{yy}(a, b)+\frac{x-a}{1}f'''_{yyx}(\xi_3, b)\right]+\frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f''''_{yyy}(x, \eta)։$$

Դասավորելով գումարելիներն այնպես, ինչպես ցույց է տրված (1) բանաձևում, կստանանք.

$$f(x, y)=f(a, b)+(x-a)f'_x(a, b)-(y-b)f'_y(a, b)+$$

$$+\frac{1}{2!}[(x-a)^2f''_{xx}(a, b)+2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a, b)+$$

$$+(y-b)^2f''_{yy}(a, b)]+\frac{1}{3!}[(x-a)^3f'''_{xxx}(\xi_1, b)+$$

$$+3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2, b)+3(x-a)(y-b)^2f'''_{xyy}(\xi_3, b)+$$

$$+(y-b)^3f'''_{yyy}(a, \eta)]։$$

Սա էլ հենց Թեյլորի բանաձևն է $n=2$ դեպքում։

$$R_2=\frac{1}{3!}[(x-a)^3f'''_{xxx}(\xi_1, b)+3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2, b)+$$

$$+3(x-a)(y-b)^2f'''_{xyy}(\xi_3, b)+(y-b)^3f''''_{yyy}(a, \eta)]$$

արտահայտությունը կոչվում է մնացորդային անդամ։ Այնուհետև, նշանակենք $x-a=\Delta x$, $y-b=\Delta y$, $\Delta\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$։ Ձևափոխենք R_2-ը.

$$R_2=\frac{1}{3!}\left[\frac{\Delta x^3}{\Delta\rho^3}f'''_{xxx}(\xi_1 b)+3\frac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta\rho^3}f'''_{xxy}(\xi_2, b)+\right.$$

$$\left.+3\frac{\Delta x\Delta y^2}{\Delta\rho^3}f'''_{xyy}(\xi_3, b)+\frac{\Delta y^3}{\Delta\rho^3}f''''_{yyy}(a, \eta)\right]\Delta\rho^3։$$

Քանի որ $|\Delta x|<\Delta\rho$, $|\Delta y|<\Delta\rho$ և ըստ պայմանի երրորդ ածանցյալները սահմանափակ են, ապա դիտարկվող տիրույթում $\Delta\rho^3$-ի գործակիցը սահմանափակ է. այն նշանակենք α_0-ով։

Այդ դեպքում կարող ենք գրել.

$$R_2=\alpha_0\Delta\rho^3։$$

Թեյլորի (6) բանաձևը $n=2$ դեպքի համար ընդունված նշանակումներով կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$f(x, y)=f(a, b)+\Delta xf'_x(a, b)+\Delta yf'_y(a, b)+$$

$$+\frac{1}{2!}[\Delta x^2f''_{xx}(a, b)+2\Delta x\Delta yf''_{xy}(a, b)+\Delta y^2f''_{yy}(a, b)]+\alpha_0\Delta\rho^3։ \qquad (6')$$

Ցանկացած n-ի դեպքում Թեյլորի բանաձևն ունի համանման տեսք։

§ 17. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի մաքսիմումը և մինիմումը

Սահմանում 1։ Մենք ասում ենք, որ $z=f(x, y)$ ֆունկցիան $M_0(x_0, y_0)$ կետում (այսինքն՝ երբ $x=x_0$ և $y=y_0$) ունի մաքսիմում, եթե

$$f(x_0, y_0)>f(x, y)$$

(x_0, y_0) կետին բավականաչափ մոտ և նրանից տարբեր բոլոր (x, y) կետերի համար։

Սահմանում 2։ Միանգամայն համանման ձևով ասում են, որ $z=f(x, y)$ ֆունկցիան $M_0(x_0, y_0)$ կետում ունի մինիմում, եթե

$$f(x_0, y_0)<f(x, y)$$

(x_0, y_0) կետին բավականաչափ մոտ և նրանից տարբեր բոլոր (x, y) կետերի համար։

Ֆունկցիայի մաքսիմումը և մինիմումը կոչվում են ֆունկցիայի էքստրեմումներ, այսինքն՝ ասում են, որ տրված կետում ֆունկցիան ունի էքստրեմում, եթե այդ ֆունկցիան տրված կետում ունի մաքսիմում կամ մինիմում։

Օրինակ 1։ $z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$ ֆունկցիան հասնում է մինիմումի $x=1$, $y=2$ դեպքում, այսինքն՝ (1, 2) կետում։ Իրոք, $f(1,2)=-1$, բայց քանի որ $(x-1)^2$ և $(y-2)^2$ միշտ դրական են, երբ $x\neq 1$, $y\neq 2$, ապա

$$(x-1)^2+(y-2)^2-1>-1,$$

այսինքն

$$f(x, y)>f(1, 2)։$$

Տրված դեպքին համապատասխանող երկրաչափական պատկերը ներկայացված է նկ. 185-ում։

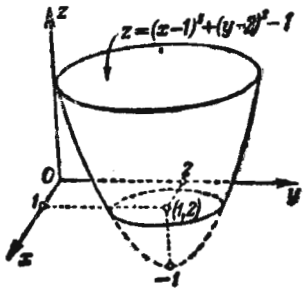
Օրինակ 2։ $z=\frac{1}{2}-\sin(x^2+y^2)$ ֆունկցիան, երբ $x=0$, $y=0$ (այսինքն՝ կոորդինատների սկզբնակետում) հասնում է մաքսիմումի (նկ. 186)։

Իրոք,

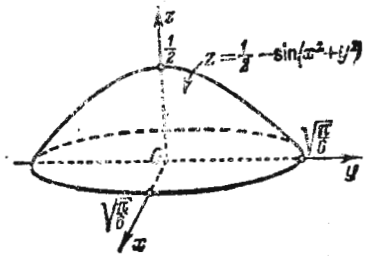
$$f=(0,\ 0)=\frac{1}{2},$$

$x^2+y^2=\frac{\pi}{6}$ շրջանագծի ներսը վերցնենք $(x,\ y)$ կետը, որը տարբեր է $(0,\ 0)$-ից.

այդ դեպքում երբ $0<x^2+y^2<\frac{\pi}{6}$ կլինի



Նկ. 185



Նկ. 186

$$\sin(x^2+y^2)>0$$

և դրա համար

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2}-\sin(x^2+y^2)<\frac{1}{2},$$

այսինքն

$$f(x,\ y)<f(0,\ 0).$$

Ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի վերը բերված սահմանումը կարելի է ձևակերպել նաև հետևյալ կերպ։

Ընդունենք $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$. այդ դեպքում

$$f(x,\ y)-f(x_0,\ y_0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)=\Delta f.$$

1) Եթե $\Delta f<0$ անկախ փոփոխականների բավականաչափ փոքր բոլոր աճերի դեպքում, ապա $f(x,\ y)$ ֆունկցիան հասնում է մաքսիմումի $M_0(x_0,\ y_0)$ կետում։

2) Եթե $\Delta f>0$ անկախ փոփոխականների բավականաչափ փոքր բոլոր աճերի համար, ապա $f(x,\ y)$ ֆունկցիան հասնում է մինիմումի $M_0(x_0,\ y_0)$ կետում։

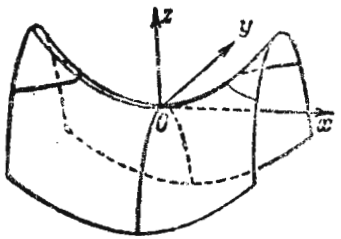
Այս ձևակերպումներն առանց փոփոխության տեղափոխվում են ցանկացած թվով փոփոխականների ֆունկցիայի համար։

Թեորեմ 1 (էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները)։ Եթե $z=f(x,\ y)$ ֆունկցիան $x=x_0$, $y=y_0$ դեպքում ճասնում է մաքսիմումի, ապա z-ի յուրաքանչյուր առաջին կարգի մասնական ածանցյալ արգումենտների այդ արժեքների համար կամ զրո է դառնում, կամ գոյություն չունի։

Իրոք, y փոփոխականին տանք որոշակի արժեք, այն է՝ $y=y_0$ Այդ դեպքում $f(x,\ y_0)$ ֆունկցիան կլինի մեկ՝ x փոփոխականի ֆունկցիա։ Քանի որ $x=x_0$ դեպքում այն ունի էքստրեմում (մաքսիմում կամ մինիմում), ապա $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ կամ հավասար է զրոյի, կամ գոյություն չունի։ Միանգամայն նման ձևով կարելի է ապացուցել, որ $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ կամ հավասար է զրոյի կամ գոյություն չունի։

Այս թեորեմը ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքների մասին հարցի ուսումնասիրության համար բավարար չէ, բայց թույլ է տալիս գտնել այդ արժեքներն այն դեպքերում, երբ մենք համոզված ենք մաքսիմումի կամ մինիմումի գոյության մեջ։ Հակառակ դեպքում պահանջվում է լրացուցիչ ուսումնասիրություն։

Այսպես, օրինակ. $z=x^2-y^2$ ֆունկցիան ունի $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$ ածանցյալները, որոնք զրո են դառնում, երբ $x=0$, $y=0$։ Բայց այդ ֆունկցիան նշված արժեքների դեպքում չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում։ Իրոք, այդ ֆունկցիան հավասար է զրոյի կոորդինատների սկզբնակետում և վերջինիս բավականաչափ մոտ կետերում ընդունում է ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական արժեքներ։ Հետևաբար զրո արժեքը ոչ մաքսիմում է, ոչ էլ մինիմում (նկ. 187)։



Նկ. 187

Այն կետերը, որոնցում $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ (կամ գոյություն չունի) և $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (կամ գոյություն չունի) կոչվում են $z=f(x,\ y)$ ֆունկցիայի կրիտիկական կետեր։ Եթե ֆունկցիան հասնում է էքստրեմումի որևէ կետում, ապա (համաձայն թեորեմ 1-ի) դա կարող է տեղի ունենալ միայն կրիտիկական կետում։

Կրիտիկական կետում ֆունկցիայի ուսումնասիրության համար հաստատենք երկու փոփոխականների ֆունկցիայի էքստրեմումի բավարար պայմանները։

Թեորեմ 2։ Դիցուք $M_0(x_0,\ y_0)$ կետը պարունակող որևէ տիրույթում $f(x,\ y)$ ֆունկցիան ունի մինչև երրորդ կարգը ներառյալ անընդհատ մասնական ածանցյալներ. դիցուք, բացի այդ $M_0(x_0,\ y_0)$ կետը հանդիսանում է $f(x,\ y)$ ֆունկցիայի կրիտիկական կետ, այսինքն՝

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}=0.$$

Այդ դեպքում, երբ $x=x_0$, $y=y_0$.

1) $f(x, y)$ ֆունկցիան ունի մաքսիմում, եթե

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2>0 \quad \text{և} \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}<0,$$

2) $f(x, y)$ ֆունկցիան ունի մինիմում, եթե

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2>0 \quad \text{և} \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}>0,$$

3) $f(x, y)$ ֆունկցիան չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում, եթե

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2<0.$$

4) եթե $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2=0$, ապա եքսաբեմում կարող է լինել և կարող է չլինել (այս դեպքում պահանջվում է հետագա ուսումնասիրություն).

Ապացույց. $f(x, y)$ ֆունկցիայի համար գրենք Թեյլորի երկրորդ կարգի բանաձևը (§ 16-ի (6) բանաձև). Ընդունելով

$$a=x_0, \quad b=y_0, \quad x=x_0+\Delta x, \quad y=y_0+\Delta y,$$

կունենանք

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+\alpha_0(\Delta\rho)^3,$$

որտեղ $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, իսկ α_0-ն ձգտում է զրոյի, երբ $\Delta\rho\to 0$.

Ըստ պայմանի

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}=0.$$

Հետևաբար,

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=$$

$$=\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+\alpha_0(\Delta\rho)^3. \qquad (1)$$

---

* $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$՝ այսպես գրածը պետք է հասկանալ $\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ և այլն.

Այժմ $M_0(x_0, y_0)$ կետում երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալների արժեքները նշանակենք A, B, C-ով.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_0}=A; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_{M_0}=B; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{M_0}=C.$$

Նշանակենք φ-ով M_0M հատվածի (որտեղ M-ը $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ կետն է) ուղղության և Ox առանցքի միջև եղած անկյունը. այդ դեպքում

$$\Delta x=\Delta\rho\cos\varphi, \qquad \Delta y=\Delta\rho\sin\varphi.$$

Այս արտահայտությունները տեղադրելով Δf-ի համար բանաձևի մեջ, գտնում ենք.

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi+2\alpha_0\Delta\rho]. \qquad (2)$$

Դիցուք $A\neq 0$.

Քառակուսի փակագծերում եղած արտահայտությունը բաժանելով A-ի վրա և բազմապատկելով A-ով, կստանանք

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{(A\cos\varphi+B\sin\varphi)^2+(AC-B^2)\sin^2\varphi}{A}+2\alpha_0\Delta\rho\right]. \qquad (3)$$

Այժմ դիտարկենք չորս հնարավոր դեպք.

1) Դիցուք $AC-B^2>0$, $A<0$. Այդ դեպքում կոտորակի համարիչը երկու ոչ բացասական մեծությունների գումար է. Դրանք միաժամանակ զրո չեն դառնում, քանի որ առաջին անդամը զրո է դառնում, երբ $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{A}{B}$, երկրորդը՝ երբ $\sin\varphi=0$.

Եթե $A<0$, ապա կոտորակը բացասական մեծություն է, զրո չի դառնում. Այն նշանակենք $(-m^2)$-ով. այդ դեպքում

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[-m^2+2\alpha_0\Delta\rho],$$

որտեղ m-ը կախված չէ Δρ-ից, $\alpha_0\Delta\rho\to 0$, երբ $\Delta\rho\to 0$. Հետևաբար, բավականաչափ փոքր Δρ-ի համար

$$\Delta f<0,$$

կամ

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)<0.$$

Բայց այդ դեպքում (x_0, y_0) կետին բավականաչափ մոտ գտնվող բոլոր $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ կետերի համար տեղի ունի

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)<f(x_0, y_0)$$

անհավասարությունը, իսկ դա նշանակում է, որ $f(x, y)$ ֆունկցիան (x_0, y_0) կետում հասնում է մաքսիմումի:

2) Դիցուք $AC-B^2>0$, $A>0$: Այդ դեպքում, դատելով նման ձևով, կստանանք.

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[m^2+2\alpha_0\Delta\rho]$$

կամ

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)>f(x_0,\ y_0),$$

այսինքն՝ $f(x, y)$ ֆունկցիան (x_0, y_0) կետում ունի մինիմում:

3′) Դիցուք $AC-B^2<0$, $A>0$: Այդ դեպքում ֆունկցիան չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում: Ֆունկցիան աճում է, երբ մենք շարժվում ենք (x_0, y_0) կետից մի ուղղությամբ, և նվազում է, երբ մենք շարժվում ենք այլ ուղղությամբ: Իրոք, $\varphi=0$ ճառագայթի երկայնությամբ տեղափոխվելիս ունենք

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[A+2\alpha_0\Delta\rho]>0,$$

այդ ճառագայթի երկայնությամբ շարժվելիս ֆունկցիան աճում է: Իսկ եթե տեղափոխվենք այնպիսի $\varphi=\varphi_0$ ճառագայթի երկայնությամբ, որ $\operatorname{tg}\varphi_0=-\frac{A}{B}$, ապա $A>0$ դեպքում

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{AC-B^2}{A}\sin^2\varphi_0+2\alpha_0\Delta\rho\right]<0,$$

այդ ճառագայթի երկայնությամբ շարժվելիս ֆունկցիան նվազում է:

3″) Դիցուք $AC-B^2<0$, $A<0$: Այս դեպքում ֆունկցիան նույնպես չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում: Ուսումնասիրությունը կատարվում է այնպես, ինչպես և 3′ դեպքում:

3‴) Դիցուք $AC-B^2<0$, $A=0$: Այս դեպքում $B\neq0$, և (2) հավասարությունը կարելի է արտագրել հետևյալ տեսքով.

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[\sin\varphi(2B\cos\varphi+C\sin\varphi)+2\alpha_0\Delta\rho]:$$

φ-ի բավականաչափ փոքր արժեքների դեպքում կլոր փակագծերում գտնվող արտահայտությունը պահպանում է նշանը, քանի որ այն մոտ է $2B$-ին, իսկ $\sin\varphi$ բազմապատկիչը փոխում է նշանը, կախված այն բանից, φ-ն մեծ կլինի զրոյից, թե փոքր ($\varphi>0$ և $\varphi<0$ ընտրությունից հետո մենք կարող ենք ρ-ն վերցնել այնքան փոքր, որ $2\alpha_0$-ն այլևս չփոխի քառակուսի փակագծի նշանը): Հետևաբար, նաև այդ դեպքում չկա ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում: Հետևապես, այս դեպքում ևս Δf-ը փոխում է նշանը, տարբեր φ-երի դեպքում, այսինքն՝ տարբեր Δx ու Δy դեպքում, հետևաբար, նաև այս դեպքում չկա ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում:

Այսպիսով, ինչպիսին էլ լինի A-ի նշանը, միշտ ունենք հետևյալ դրությունը.

Եթե (x_0, y_0) կետում $AC-B^2<0$-ից, ապա այդ կետում ֆունկցիան չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում: Այդ դեպքում ֆունկցիայի գրաֆիկ ծառայող մակերևույթը այդ կետի մոտակայքում կարող է ունենալ, օրինակ, թամբի տեսք (տես վերը՝ նկ. 187): Ասում են, որ այդ կետում ֆունկցիան ունի մինիմաքս:

4) Ենթադրենք $AC-B^2=0$: Այս դեպքում (2) և (3) բանաձևերի հիման վրա Δf-ի նշանի մասին չի կարելի եզրակացություն դալ: Այսպես, օրինակ, $A\neq0$ դեպքում կունենանք.

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{(A\cos\varphi+B\sin\varphi)^2}{A}+2\alpha_0\Delta\rho\right],$$

$\varphi=\operatorname{arctg}\left(-\frac{A}{B}\right)$ դեպքում Δf-ի նշանը որոշվում է $2\alpha_0$-ի նշանով, այստեղ պահանջվում է հատուկ հետագա ուսումնասիրություն (օրինակ, թեյլորի ավելի բարձր կարգի բանաձևի օգնությամբ կամ որևէ ուրիշ եղանակով): Այսպիսով, թեորեմ 2-ը լրիվ ապացուցված է:

Օրինակ 3. Հետազոտել ըստ մաքսիմումի և մինիմումի

$$z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$$

ֆունկցիան:

Լուծում. 1) Գտնում ենք կրիտիկական կետերը.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+3;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y-2.$$

Լուծելով

$$\left.\begin{aligned}2x-y+3&=0,\\-x+2y-2&=0,\end{aligned}\right\}$$

հավասարումների սիստեմը, ստանում ենք.

$$x=-\frac{4}{3},\quad y=\frac{1}{3}.$$

2) Գտնում ենք երկրորդ կարգի ածանցյալները $\left(-\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ կրիտիկական կետում և պարզում կրիտիկական կետի բնույթը.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\qquad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-1,\qquad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,$$

$$AC-B^2=2\cdot2-(-1)^2=3>0,$$

Հետևաբար, $\left(-\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ կետում տված ֆունկցիան ունի մինիմում, այն է՝

$$z\,\min=-\frac{4}{3},$$

Օրինակ 4։ Հետազոտել ըստ մաքսիմումի և մինիմումի

$$z=x^3+y^3-3xy$$

ֆունկցիան։

Լուծում։ 1) Գտնենք կրիտիկական կետերը, օգտվելով էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններից.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=3x^2-3y=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=3y^2-3x=0.\end{aligned}\right\}$$

Այստեղից ստանում ենք երկու կրիտիկական կետեր.

$$x_2=1,\qquad y_1=1\ \text{և}\ x_2=0,\qquad y_2=0.$$

2) Գտնենք երկրորդ կարգի ածանցյալները.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-3,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

3) Հետազոտենք առաջին կրիտիկական կետի բնույթը.

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=6,\qquad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=-3,\qquad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=6,$$

$$AC-B^2=36-9=27>0;\quad A>0.$$

Հետևաբար, (1, 1) կետում տրված ֆունկցիան ունի մինիմում, այն է.

$$z_{\min}=-1.$$

4) Ուսումնասիրենք $M_2(0,\ 0)$ կրիտիկական կետի բնույթը.

$$A=0,\qquad B=-3,\qquad C=0$$

$$AC-B^2=-9<0.$$

Հետևաբար, երկրորդ կրիտիկական կետում ֆունկցիան չունի ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում (մինիմաքս)։

Օրինակ 5։ Տրված a դրական թիվը վերածել երեք դրական գումարելիների այնպես, որ նրանց արտադրյալն ունենա ամենամեծ արժեքը։

Լուծում։ Գումարելիներից առաջինը նշանակենք x-ով, երկրորդը՝ y-ով. այդ դեպքում երրորդը կլինի $a-x-y$։ Այդ գումարելիների արտադրյալը հավասար է՝

$$u=xy(a-x-y).$$

Ըստ խնդրի պայմանի $x>0$, $y>0$, $a-x-y>0$, այսինքն՝ $x+y<a$, $u>0$։ Հետևաբար, x-ը և y-ը կարող են ընդունել $x=0$, $y=0$, $x+y=a$ ուղիղներով սահմանափակված տիրույթին պատկանող արժեքները։

Գտնենք u ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y(a-2x-y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(a-2y-x).$$

Ածանցյալները հավասարացնելով զրոյի, կստանանք

$$y(a-2x-y)=0;\quad x(a-2y-x)=0.$$

հավասարումների սիստեմը։ Լուծելով այդ սիստեմը, գտնում ենք կրիտիկական կետերը.

$$x_1=0,\qquad y_1=0,\qquad M_1(0,\ 0);$$

$$x_2=0,\qquad y_2=a,\qquad M_2(0,\ a);$$

$$x_3=0,\qquad y_3=0,\qquad M_3(a,\ 0);$$

$$x_4=\frac{a}{3},\qquad y_4=\frac{a}{3},\qquad M_4=\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right).$$

Առաջին երեք կետերն ընկած են տիրույթի եզրին, իսկ վերջինը՝ ներսում։ Տիրույթի եզրի վրա u ֆունկցիան հավասար է զրոյի, իսկ տիրույթի ներսում այն դրական է. հետևաբար, $\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$ կետում u ֆունկցիան ունի մաքսիմում (քանի որ սա եռանկյան ներսի միակ էքստրեմալ կետն է)։ Արտադրյալի մաքսիմալ արժեքն է՝

$$u_{\max}=\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\left(a-\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\right)=\frac{a^2}{27}.$$

Կատարենք կրիտիկական կետերի բնույթի ուսումնասիրություն, օգտվելով բավարար պայմաններից։ Գտնենք u ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2y;\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=a-2x-2y;\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2x.$$

$M_1(0,\ 0)$ կետում ունենք $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$; $B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=a$; $C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $AC-B^2=-a^2<0$։ Հետևաբար, M_1 կետում չկա ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում։ $M_2(0,\ a)$ կետում ունենք $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2a$; $B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-a$; $C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $AC-B^2=-a^2<0$։ Նշանակում է M_2 կետում չկա ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում։ $M_3(a,\ 0)$ կետում ունենք $A=0$, $B=-a$, $C=-2a$, $AC-B^2=-a^2<0$, M_3 կետում ևս չկա ոչ մաքսիմում, ոչ մինիմում։ $M_4\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$ կետում ունենք $A=-\frac{2a}{3}$, $B=-\frac{a}{3}$, $C=-\frac{2a}{3}$, $AC-B^2=\frac{4a^2}{9}-\frac{a^2}{9}>0$, $A<0$։ Հետևաբար, M_4 կետում ունենք մաքսիմում։

Դիտողություն։ *Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի մաքսիմումների և մինիմումների տեսությունը հիմք է հանդիսանում*

փորձնական տվյալների հիման վրա ֆունկցիոնալ կախվածությունների պատկերացման համար մի մեթոդի։ Այդ հարցը շարադրված է § 19-ում։

§ 18. Տված հավասարումներով կապված մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի մաքսիմումը և մինիմումը (Պայմանական մաքսիմումներ և մինիմումներ)

Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների որոնման վերաբերյալ շատ խնդիրներում հարցը բերվում է մի քանի այնպիսի փոփոխականների ֆունկցիայի մաքսիմումների և մինիմումների որոնմանը, որոնք անկախ չեն, այլ միմյանց հետ կապված են մի քանի լրացուցիչ պայմաններով (օրինակ, դրանք պետք է բավարարեն տրված հավասարումներին)։

Դիտարկենք, օրինակ, այսպիսի խնդիր։ 2a մակերես ունեցող թիթեղի տված կտորից պետք է պատրաստել զուգահեռանիստի ձևի փակ արկղ, որն ունենա ամենամեծ ծավալը։

Արկղի երկարությունը, լայնությունը և բարձրությունը նշանակենք x, y, z-ով։ Խնդիրը բերվում է

$$v = xyz$$

ֆունկցիայի մաքսիմումի որոնմանն, այն պայմանով, որ $2xy + 2xz + 2yz = 2a$։ Այստեղ մենք ունենք խնդիր՝ պայմանական էքստրեմումի վերաբերյալ։ x, y, z փոփոխականները կախված են $2xy + 2xz + 2yz = 2a$ պայմանով։ Սույն պարագրաֆում մենք կքննարկենք այդպիսի խնդիրների լուծման մեթոդները։

Նախ կդիտարկենք երկու փոփոխականների ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի հարցը, երբ այդ փոփոխականները կապված են մեկ պայմանով։

Դիցուք պահանջվում է գտնել

$$u = f(x, y) \tag{1}$$

ֆունկցիայի մաքսիմումները և մինիմումները, պայմանով, որ x-ը և y-ը կապված են

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{2}$$

հավասարումով։

(2) պայմանի առկայության դեպքում x և y երկու փոփոխականներից անկախը կլինի միայն մեկը, օրինակ x-ը, քանի որ y-ը (2) հավասարումից որոշում է որպես x-ի ֆունկցիա։ Եթե մենք (2) հավասարումը լուծենք y-ի նկատմամբ, ապա (1) հավասարության

մեջ y-ի փոխարեն տեղադրելով գտած արտահայտությունը, կստանանք մեկ x փոփոխականի ֆունկցիա և խնդիրը կբերվենք մեկ x փոփոխականի ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի ուսումնասիրության վերաբերյալ խնդրին։

Սակայն տրված խնդիրը կարելի է լուծել, չլուծելով (2) հավասարումը x-ի կամ y-ի նկատմամբ։ x-ի այն արժեքների համար, որոնց դեպքում u ֆունկցիան ունի մաքսիմում կամ մինիմում, u-ի ածանցյալն ըստ x-ի պետք է դառնա զրո։

(1)-ից գտնում ենք $\frac{du}{dx}$-ը, հիշելով, որ y-ը x-ի ֆունկցիան է.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Հետևաբար, էքստրեմումի կետերում

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

(2) հավասարությունից գտնում ենք.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{4}$$

Այս հավասարությունը տեղի ունի (2) հավասարմանը բավարարող բոլոր x և y համար (տես VIII գլխի § 11)։

(4) հավասարության անդամները բազմապատկելով առայժմ անորոշ λ գործակցով և դրանք գումարելով (3) հավասարության անդամներին, կստանանք.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

կամ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{5}$$

Վերջին հավասարությունը տեղի ունի էքստրեմումի բոլոր կետերում։ λ-ն ընտրենք այնպես, որպեսզի u ֆունկցիայի էքստրեմումին համապատասխանող x-ի և y-ի արժեքների համար (5) հավասարության երկրորդ փակագիծը դառնա զրո*

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

---

* Որոշակիության համար կենթադրենք, որ կրիտիկական կետերում

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0,$$

Բայց այդ դեպքում x-ի և y-ի այդ արժեքների համար (5) հավասարությունից հետևում է

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0$$

հավասարությունը: Այսպիսով, ստացվում է, որ էքստրեմումի կետերում բավարարվում են x, y, λ երեք անհայտով երեք հավասարումներ.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0,\\&\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0,\\&\varphi(x,\ y)=0:\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Այդ հավասարումներից որոշում ենք x-ը, y-ը և λ-ն. վերջինս խաղացել է միայն օժանդակ դեր և հետագայում մեզ պետք չէ:

Արտածումից հետևում է, որ (6) հավասարումները պայմանական էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններ են, այսինքն՝ էքստրեմումի կետերում բավարարվում են (6) հավասարումները: Բայց ոչ ամեն մի x-ի և y-ի (և λ-ի) համար, որոնք բավարարում են (6) հավասարումներին, առկա կլինի պայմանական էքստրեմում: Պահանջվում է կրիտիկական կետի բնույթի լրացուցիչ ուսումնասիրություն: Կոնկրետ խնդիրներ լուծելիս երբեմն հաջողվում է կրիտիկական կետի բնույթը պարզել խնդրի էության հիման վրա: Նկատենք, որ (6) հավասարումների ձախ մասերը հանդիսանում են

$$F(x,\ y,\ \lambda)=f(x,\ y,)+\lambda\varphi(x,\ y)\qquad(7)$$

ֆունկցիայի մասնական ածանցյալներն ըստ x, y, λ փոփոխականների:

Այսպիսով, (2) պայմանին բավարարող x-ի և y-ի այն արժեքները գտնելու համար, որոնց դեպքում u=f(x, y) ֆունկցիան կարող է ունենալ պայմանական մաքսիմում կամ պայմանական մինիմում, պետք է կազմել (7) օժանդակ ֆունկցիան, գրոյի հավասարացնել ըստ x-ի, y-ի և λ-ի նրա մասնական ածանցյալները և ստացված (6) երեք հավասարումներից որոշել որոնելի x-ը, y-ը (և λ օժանդակ բազմապատկիչը): Դիտարկված մեթոդը տարածվում է ցանկացած թվով փոփոխականների ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի ուսումնասիրության վրա:

Դիցուք պահանջվում է գտնել n փոփոխականների $u=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ ֆունկցիայի մաքսիմումները և մինիմումները այն պայմանով, որ $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ փոփոխականները կապված են m (m<n) հավասարումներով.

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0,\\&\varphi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\varphi_m(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0:\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ այն արժեքները գտնելու համար, որոնց դեպքում կարող են լինել պայմանական մաքսիմումներ և մինիմումներ, պետք է կազմել

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m)=f(x_1,\ \ldots,\ x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1,\ \ldots,\ x_n)+$$
$$+\lambda_2\varphi_2(x_1,\ \ldots,\ x_n)+\ldots+\lambda_m\varphi_m(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

ֆունկցիան, հավասարացնել զրոյի նրա մասնական ածանցյալներն ըստ $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$-ի.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}=0,\\&\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2}=0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}=0\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

ու (8) և (9) m+n հավասարումներից որոշել $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$-ը և $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m$ օժանդակ անհայտները: Այնպես, ինչպես երկու փոփոխականների ֆունկցիայի համար, այն հարցը, թե գտած արժեքների համար ֆունկցիան կունենա մաքսիմում կամ մինիմում, կամ չի ունենա ոչ մեկը, ոչ մյուսը. մենք ընդհանուր դեպքում թողնում ենք բաց: Այդ հարցը մենք կլուծենք օժանդակ կշռադատումների հիման վրա:

Օրինակ 1: Անդրադառնանք այս պարագրաֆի սկզբում ձևակերպված խնդրին. գտնել v=xyz ֆունկցիայի մաքսիմումն այն պայմանով, որ

$$xy+xz+yz-a=0\ (x>0,\ y>0,\ z>0),\qquad(10)$$

կազմենք

$$F(x,\ y,\ \lambda)=xyz+\lambda(xy+xz+yz-a)$$

օժանդակ ֆունկցիան: Գտնենք նրա մասնական ածանցյալները և վերջիններս հավասարեցնենք զրոյի.

$$\left.\begin{aligned}&yz+\lambda(y+z)=0,\\&xz+\lambda(x+z)=0,\\&xy+\lambda(x+y)=0:\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Խնդիրը բերվում է x, y, z և λ չորս անհայտներ պարունակող (10) և (11)

չորս հավասարումների սիստեմի լուծմանը։ Այս սիստեմը լուծելու համար (11) հավասարումներից առաջինը բազմապատկենք x-ով, երկրորդը՝ y-ով, երրորդը z-ով և դրանք դումարենք ուշադրություն դարձնելով (10) հավասարության վրա, գտնում ենք. $\lambda=-\frac{3xyz}{2a}$։ λ-ի դտած արժեքը տեղադրելով (11) հավասարումների մեջ, կստանանք.

$$yz\left[1-\frac{3x}{2a}(y+z)\right]=0,$$

$$xz\left[1-\frac{3y}{2a}(x+z)\right]=0,$$

$$xy\left[1-\frac{3z}{2a}(x+y)\right]=0.$$

Քանի որ ըստ խնդրի իմաստի x-ը, y-ը և z-ը տարբեր են զրոյից, ապա վերջին հավասարումներից ունենք.

$$\frac{3x}{2a}(y+z)=1,\ \frac{3y}{2a}(x+z)=1,\ \frac{3z}{2a}(x+y)=1.$$

Առաջին երկու հավասարումներից գտնում ենք՝ $x=y$, երկրորդ և երրորդ հավասարումներից՝ $y=z$։ Բայց այդ դեպքում (10) հավասարումներից ստանում ենք. $x=y=z=\sqrt{\frac{a}{3}}$։ Սա x, y և z-ի արժեքների միակ սիստեմն է, որի դեպքում կա ր ո զ է լինել մաքսիմում կամ մինիմում։

Կարելի է ապացուցել, որ ստացած լուծումը տալիս է մաքսիմում։ Էնդ որում սա պարզ է երկրաչափական կշռաղատումներից (խնդրի պայմաններում տուփի ծավալը չի կարող անվերջ մեծ լինել. հետևաբար, բնական է սպասել, որ կողմերի ինչ-որ որոշակի արժեքների դեպքում այդ ծավալը կլինի ամենամեծը)։

Եվ այսպես, որպեսզի տուփի ծավալը լինի ամենամեծը, այդ տուփը պետք է լինի խորանարդ, որի կողը հավասար է $\sqrt{\frac{a}{3}}$։

Օ ր ի ն ա կ 2։ Գտնել $x_1, x_2, \ldots, x_n$ թվերի արտադրյալից n-րդ աստիճանի արմատի մեծագույն արժեքն այն պայմանով, որ դրանց դումարը հավասար է տրված a թվին։ Հետևաբար, խնդիրը դրվում է այսպես. պահանջվում է գտնել $u=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ ֆունկցիայի մաքսիմումը

$$x_1+x_2+\ldots+x_n-a=0 \qquad (12)$$

$$(x_1>0, x_2>0, \ldots, x_n>0)$$

պայմանով։ Կազմենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)=\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}+\lambda(x_1+x_2+\ldots+x_n-a)։$$

Գտնենք նրա մասնական ածանցյալները.

$$F'_{x_1}=\frac{1}{n}\frac{x_2x_3\ldots x_n}{(x_1\ldots x_n)^{\frac{n-1}{n}}}+\lambda=\frac{1}{n}\frac{u}{x_1}+\lambda=0 \text{ կամ } u=-n\lambda x_1,$$

$$F'_{x_2}=\frac{1}{n}\frac{u}{x_2}+\lambda=0 \qquad \text{կամ } u=-n\lambda x_2,$$

. . . . . .

$$F'_{x_n}=\frac{1}{n}\frac{u}{x_n}+\lambda=0 \qquad \text{կամ } u=-n\lambda x_n,$$

Վերջին հավասարություններից գտնում ենք.

$$x_1=x_2=\ldots=x_n,$$

իսկ (12) հավասարումների հիման վրա ստանում ենք.

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{a}{n}։$$

Խնդրի իմաստի հիման վրա այդ արժեքները տալիս են $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$ ֆունկցիայի մաքսիմումը, որը հավասար է $\frac{a}{n}$-ի։

Այսպիսով, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ցանկացած դրական թվերի համար, որոնք կապված են $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$ առնչությամբ, տեղի ունի

$$\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\leqslant\frac{a}{n} \qquad (13)$$

անհավասարությունը (քանի որ, ըստ ապացուցածի, $\frac{a}{n}$-ը հանդիսանում է այդ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը)։ Այժմ (13) անհավասարության մեջ a-ի փոխարեն տեղադրելով իր արժեքը, որը ստացվել է (12) հավասարությունից, կգտնենք

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leqslant\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}, \qquad (14)$$

Այս անհավասարությունն իրավացի է ցանկացած $x_1, x_2, \ldots, x_n$ դրական թվերի համար։ (14) առնչության ձախ մասի արտահայտությունը կոչվում է այդ թվերի միջին երկրաչափական։ Այսպիսով, մի քանի դրական թվերի միջին երկրաչափականը մեծ չէ նրանց միջին թվաբանականից։

§ 19. Փորձնական տվյալների հիման վրա ֆունկցիայի ստացումը փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով

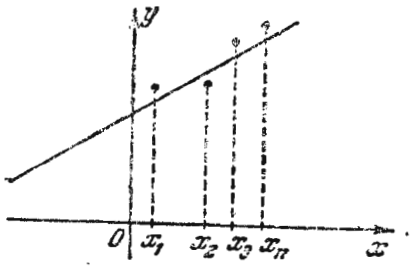
Դիցուք պահանջվում է փորձի հիման վրա հաստատել x մեծությունից y մեծության ֆունկցիոնալ առնչությունը՝

$$y=\varphi(x)։ \qquad (1)$$

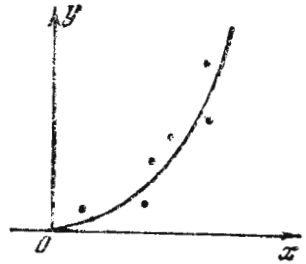
Դիցուք փորձարարության հիման վրա ստացված են y ֆունկցիայի n արժեքներ՝ արգումենտի համապատասխան արժեքների համար։ Արդյունքները գրված են աղյուսակում.

x	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_1	y_2	. . .	y_n

$y=\varphi(x)$ ֆունկցիայի տեսքը հաստատվում է կամ տեսական կշռադատումներից կամ փորձարարական արժեքներին համապատասխանող կետերի՝ կոորդինատային հարթության վրա դասավորման բնույթի հիման վրա: (Այդ կետերն անվանենք «փորձարարական կետեր»): Դիցուք, օրինակ, փորձարարական կետերը կոորդինատային հարթության վրա դասավորված են այնպես, ինչպես պատկերված է նկ. 188-ում: Հաշվի առնելով, որ փորձ կատարելիս տեղի ունեն սխալներ, բնական է ենթադրել, որ որոնելի $y=\varphi(x)$ ֆունկցիան կարելի է փնտրել $y=ax+b$ գծային ֆունկցիայի տեսքով:



Նկ. 188



Նկ. 189

Եթե փորձնական կետերը դասավորված են այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկ. 189-ում, ապա բնական է $y=\varphi(x)$ ֆունկցիան որոնել $y=ax^b$ տեսքով և այլն: $y=\varphi(x, a, b, c, \ldots)$ տեսքով ընտրված ֆունկցիայի դեպքում մնում է նրա մեջ մտնող $a, b, c, \ldots$ պարամետրերն ընտրել այնպես, որպեսզի ինչ-որ իմաստով այն լավագույն կերպով նկարագրի դիտարկվող պրոցեսը:

Տրված խնդրի լուծման տարածված մեթոդ է փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը: Այդ մեթոդը կայանում է հետևյալում: Դիտարկենք փորձի միջոցով ստացված y_i արժեքների և $\varphi(x, a, b, c, \ldots)$ ֆունկցիայի համապատասխան կետերում տարբերությունների քառակուսիների գումարը.

$$S(a, b, c, \ldots)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]^2, \qquad (2)$$

$a, b, c, \ldots$ պարամետրերն ընտրենք այնպես, որպեսզի այդ գումարն ունենա ամենափոքր արժեքը.

$$S(a, b, c, \ldots)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]^2=\min, \qquad (3)$$

Եվ այսպես, խնդիրը հանգում է $a, b, c, \ldots$ պարամետրերի այն արժեքները գտնելուն, որոնց դեպքում $S(a, b, c, \ldots)$ ֆունկցիան ունի մինիմում:

Թեորեմ 1-ի (§ 17) հիման վրա հետևում է, որ $a, b, c, \ldots$-ի այդ արժեքները բավարարում են

$$\frac{\partial S}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial b}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial c}=0, \ \ldots . \qquad (4)$$

կամ բացված տեսքով՝

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial a}=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial b}=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial c}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

հավասարումների սիստեմին: Այստեղ կան այնքան հավասարումներ, որքան և անհայտներ: Յուրաքանչյուր կոնկրետ դեպքում ուսումնասիրվում է (5) հավասարումների սիստեմի լուծման գոյության և $S(a, b, c, \ldots)$ ֆունկցիայի մինիմումի գոյության մասին հարցը:

Դիտարկենք $x=\varphi(x, a, b, c, \ldots)$ ֆունկցիայի որոշման մի քանի դեպքեր:

I. Դիցուք $y=ax+b$, $S(a, b)$ ֆունկցիան այս դեպքում ունի (տես (2) արտահայտությունը)

$$S(a, b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2 \qquad (6)$$

տեսքը: Դա a և b երկու փոփոխականների (x_i-ն և y_i-ն տես 344 էջի աղյուսակը) ֆունկցիա է: Հետևաբար,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial a}&=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]x_i=0,\\
\frac{\partial S}{\partial b}&=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]=0,
\end{aligned}\right\}$$

այսինքն՝ (5) հավասարումների սիստեմն այս դեպքում ընդունում է հետևյալ տեսքը:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,\\ &\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Ստացանք a *և* b *երկու անհայտներով երկու գծային հավասարումների սիստեմ։ Ակնհայտ է, որ սիստեմն ունի որոշակի լուծում և որ* a*-ի ու* b*-ի դուրս բերած արժեքների դեպքում* S(a, b) *ֆունկցիան ունի մինիմում*։*

II. *Դիցուք իբրև մոտարկող ֆունկցիա վերցրված է*

$$y = ax^2 + bx + c$$

երկրորդ աստիճանի եռանդամը։ Այդ դեպքում (2) արտահայտությունն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2. \qquad (8)$$

Սա a, b, c *երեք փոփոխականների ֆունկցիա է։ (5) հավասարումների սիստեմն ընդունում է*

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]x_i^2 = 0,\\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]x_i = 0,\\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0\end{aligned}\right\}$$

տեսքը, կամ բացված տեսքով՝

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0,\\ &\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c\sum_{i=1}^{n} x_i = 0\\ &\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i - cn = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

---

* *Սա հեշտությամբ հաստատվում է և բավարար պայմանների հիման վրա (տես թեորեմ 2, § 17)։ Իրոք, այստեղ*

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n,$$

հետևաբար,

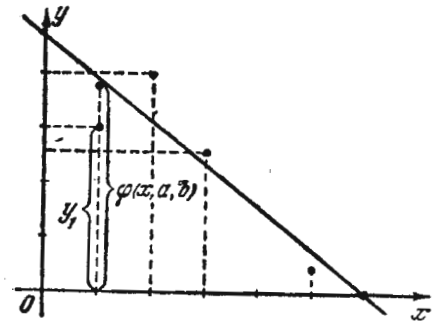
$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4\sum_{\substack{i,j\\ i<j}} (x_i - x_j)^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0.$$

a, b, c *անհայտները որոշելու համար ստանում ենք գծային հավասարումների սիստեմ։ Ինդրի բնույթից հետևում է, որ սիստեմն ունի որոշակի լուծում և որ* a, b, c*-ի ստացված արժեքների դեպքում* S(a, b, c) *ֆունկցիան ունի մինիմում։*

Օրինակ։ Դիցուք փորձի հիման վրա արգումենտի չորս արժեքների դեպքում (n=4) *ստացվել են որոնելի* y=φ(x) *ֆունկցիայի չորս արժեքներ, որոնք գրված են աղյուսակում.*

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

φ *ֆունկցիան կորոնենք* y=ax+b *գծային ֆունկցիայի տեսքով։ կազմենք* S(a, b) *արտահայտությունը.*



Նկ. 190

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{4} [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

a *և* b *գործակիցների որոշման համար (7) սիստեմը կազմելու նպատակով նախապես հաշվենք*

$$\sum_{i=1}^{4} y_i x_i = 21, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 39,$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 11, \quad \sum_{i=1}^{4} y_i = 10.$$

(2) սիստեմն ընդունում է հետևյալ տեսքը։

$$\left.\begin{aligned}&21 - 39a - 11b = 0,\\ &10 - 11a - 4b = 0.\end{aligned}\right\}$$

Լուծելով այս սիստեմը, գտնում ենք a*-ն և* b*-ն.* $a = -\frac{26}{35}$, $b = \frac{159}{35}$. *Որոնելի ուղիղն է՝*

$$y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35},$$

(նկ. 190)։

§ 20. Կորի եզակի կետերը

Մասնական ածանցյալի գաղափարը օգտագործվում է կորերն ուսումնասիրելիս։

Դիցուք կորը տրված է

$$F(x, y)=0$$

հավասարումով։

Կորի շոշափողի անկյունային գործակիցը որոշվում է

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

բանաձևով (տես գլուխ VIII, § 11)։

Եթե դիտարկվող կորի տրված $M(x, y)$ կետում $\frac{\partial F}{\partial x}$ և $\frac{\partial F}{\partial y}$ մասնական ածանցյալներից գոնե մեկը զրո չի դառնում, ապա այդ կետում լիովին որոշվում է կամ $\frac{dy}{dx}$-ը կամ $\frac{dx}{dy}$-ը։ $F(x, y)=0$ կորն այդ կետում ունի միանգամայն որոշակի շոշափող։ Այս դեպքում $M(x, y)$ կետը կոչվում է սովորական կետ։

Իսկ եթե որևէ $M_0(x_0, y_0)$ կետում ունենք.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0 \quad \text{և} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0,$$

ապա կորի անկյունային գործակիցը դառնում է անորոշ։

Սահմանում։ Եթե $F(x, y)=0$ կորի $M_0(x_0, y_0)$ կետում $\frac{\partial F}{\partial x}$ և $\frac{\partial F}{\partial y}$ երկու մասնական ածանցյալները դառնում են զրո, ապա այդպիսի կետը կոչվում է կորի եզակի կետ։ Հետևաբար, կորի եզակի կետը որոշվում է

$$F=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0$$

հավասարումների սիստեմով։

Բնական է, որ ոչ ամեն մի կոր չունի եզակի կետեր։ Այսպես, օրինակ,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

էլիպսի համար, ակնհայտ է,

$$F(x, y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},$$

$\frac{\partial F}{\partial x}$ և $\frac{\partial F}{\partial y}$ մասնական ածանցյալները զրո են դառնում միայն $x=0$,

$y=0$ դեպքում, բայց x-ի և y-ի այդ արժեքները չեն բավարարում էլիպսի հավասարմանը։ Հետևաբար, էլիպսը չունի եզակի կետերը։

Զկատարելով եզակի կետի մոտակայքում կորի վարքի մանրամասն ուսումնասիրություն, դիտարկենք եզակի կետեր ունեցող կորերի մի քանի օրինակներ։

Օրինակ 1։ Ուսումնասիրել

$$y^2-x(x-a)^2=0 \quad (a>0)$$

կորի եզակի կետերը։

Լուծում։ Տվյալ դեպքում $F(x, y)=y^2-x(x-a)^2$, ուստի

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(x-a)(a-3x); \quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y,$$

համատեղ լուծելով

$$F(x, y)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0$$

երեք հավասարումները, գտնում ենք նրանց բավարարող x և y արժեքների միակ սիստեմը.

$$x_0=a, \quad y_0=0;$$

Հետևաբար, $M_0(a, 0)$ կետը կորի եզակի կետն է։

Ուսումնասիրենք կորի վարքը եզակի կետի մոտակայքում և կառուցենք կորը։ Տրված հավասարումն արտադրենք

$$y=\pm(x-a)\sqrt{x}$$

տեսքով։ Այս բանաձևից հետևում է, որ կորը 1) որոշված է միայն $x\geqslant 0$ դեպքում, 2) սիմետրիկ է Ox առանցքի նկատմամբ, 3) Ox առանցքը հատում է $(0, 0)$ և $(a, 0)$ կետերում։ Ինչպես ցույց կտրվի, վերջին կետը եզակի կետ է։

Մենք սկզբից դիտարկենք կորի այն մասը, որը համապատասխանում է $+$ նշանին.

$$y=(x-a)\sqrt{x},$$

Գտնենք y-ի առաջին և երկրորդ ածանցյալներն ըստ x-ի.

$$y'=\frac{3x-a}{2\sqrt{x}}, \quad y''=\frac{3x+a}{4x\sqrt{x}}.$$

$x=0$ դեպքում ունենք $y'=\infty$։ Հետևաբար կորն Oy առանցքը շոշափում է կոորդինատների սկզբնակետում։ $x=\frac{a}{3}$ դեպքում ունենք $y'=0$, $y''>0$, այսինքն՝ $x=\frac{a}{3}$ դեպքում y ֆունկցիան ունի մինիմում.

$$y=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}},$$

$0<x<a$ հատվածում ունենք $y<0$, երբ $x>\frac{a}{3}$ ապա $y'>0$, երբ $x\to\infty$, ապա

$y\to\infty$։ Երբ $x=a$ ունենք $y'=\sqrt{a}$, այսինքն՝ $M(a, 0)$ եզակի կետում կորի $y=(x-a)\sqrt{x}$ ճյուղն ունի $y=\sqrt{a}(x-a)$ շոշափողը։

Քանի որ կորի $y=-(x-a)\sqrt{x}$ երկրորդ ճյուղը առաջինին սիմետրիկ է Ox առանցքի նկատմամբ, ապա եզակի կետում կորն ունի և երկրորդ՝ $y=-\sqrt{a}(x-a)$ շոշափողը (երկրորդ ճյուղին)։

Եզակի կետով կորն անցնում է երկու անգամ։ Այդպիսի կետը կոչվում է հանգուցային կետ։

Դիտարկված կորը պատկերված է նկ. 191-ում։

Օրինակ 2։ Ուսումնասիրել

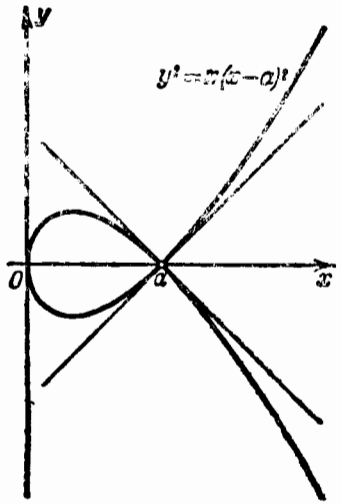
$$y^2-x^3=0$$

կորը (կիսախորանարդ պարաբոլ), նկատի ունենալով եզակի կետերը։

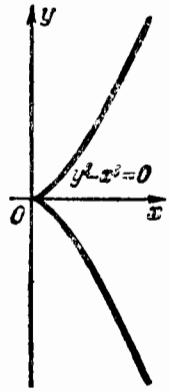
Լուծում։ Եզակի կետերի կոորդինատները որոշվում են

$$y^2-x^3=0, \qquad 3x^2=0; \qquad 2y=0$$

հավասարումների սիստեմից։ Հետևաբար, $M_0(0, 0)$ կետը եզակի է։



Նկ. 191



Նկ. 192

Տված հավասարումն արտագրենք

$$y=\pm\sqrt{x^3}$$

տեսքով։ Կորը կառուցելու համար նախ ուսումնասիրենք այն ճյուղը, որին հավասարման մեջ համապատասխանում է պլյուս նշանը. կորի այն ճյուղը, որը համապատասխանում է մինուս նշանին, սիմետրիկ է առաջինին Ox առանցքի նկատմամբ։

y ֆունկցիան որոշված է միայն $x\geq 0$ դեպքում, ոչ բացասական է և աճում է, երբ x-ը աճում է։

Գտնենք $y=\sqrt{x^3}$ ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ ածանցյալները.

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}; \qquad y''=\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Երբ $x=0$ ունենք $y=0$, $y'=0$։ Հետևաբար, կորի դիտարկվող ճյուղը կոորդինատների սկզբնակետում ունի $y=0$ շոշափողը։ Կորի երկրորդ՝ $y=-\sqrt{x^3}$ ճյուղը նույնպես անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և ունի նույն $y=0$ շոշափողը։ Այսպիսով, կորի երկու տարբեր ճյուղերը հանդիպում են կոորդինատների սկզբնակետում, ունեն միևնույն շոշափողը և դասավորված են շոշափողի տարբեր կողմերում։ Այդպիսի եզակի կետը կոչվում է առաջին սեռի դարձի կետ (նկ. 192)։

Դիտողություն։ $y^2-x^3=0$ կորը կարելի է գտնել որպես $y^2=x(x-a)^2$ կորի (որը դիտարկվել է օրինակ 1-ում) սահմանային դեպք, երբ $a\to 0$, այսինքն՝ երբ կորի հանգույցը (петля) ձգտում է կետ դառնալ։

Օրինակ 3։ Ուսումնասիրել $(y-x^2)^2-x^5=0$ կորը։

Լուծում։ Եզակի կետերի կոորդինատները որոշվում են

$$-4x(y-x^2)-5x^4=0; \quad 2(y-x^2)=0$$

հավասարումների սիստեմով, որն ունի միակ լուծում՝ $x=0$, $y=0$։ Հետևաբար, կոորդինատների սկզբնակետը եզակի կետն է։

Տրված հավասարումն արտագրենք $y=x^2\pm\sqrt{x^5}$ տեսքով։ Այդ հավասարումից հետևում է, որ x-ը կարող է ընդունել արժեքներ՝ 0-ից մինչև $+\infty$։

Որոշենք առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները.

$$y'=2x\pm\frac{5}{2}\sqrt{x^3}; \qquad y''=2\pm\frac{15}{4}\sqrt{x}.$$

Առանձին ուսումնասիրենք պլյուս և մինուս նշաններին համապատասխանող ճյուղերը։ Երկու դեպքում, երբ $x=0$, ունենք՝ $y=0$, $y'=0$, այսինքն՝ երկու ճյուղերի համար Ox առանցքը շոշափող է։ Նախ դիտարկենք

$$y=x^2+\sqrt{x^5}$$

ճյուղը։ x-ը զրոյից մինչև ∞ աճելիս y-ը աճում է 0-ից մինչև ∞։ Երկրորդ ճյուղը՝

$$y=x^2-\sqrt{x^5}$$

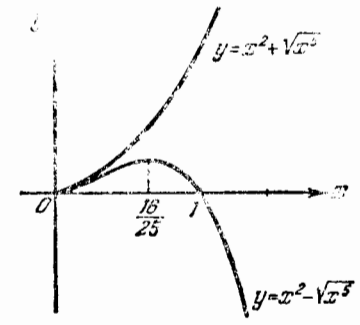
Ox առանցքը հատում է (0,0) և (1, 0) կետերում,

$x=\frac{16}{25}$ դեպքում $y=x^2-\sqrt{x^5}$ ֆունկցիան ունի մաքսիմում։ Եթե $x\to+\infty$, ապա $y\to-\infty$։

Այսպիսով, տրված դեպքում կոորդինատների սկզբնակետում հանդիպում են կորի երկու ճյուղերը. երկու ճյուղերն ունեն միևնույն շոշափողը և շոշափման կետի մոտակայքում դասավորված են շոշափողի միևնույն կողմում։ Այդպիսի եզակի կետը կոչվում է երկրորդ սեռի դարձի կետ։ Դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 193-ում։

Օրինակ 4։ Ուսումնասիրել $y^2-x^4+x^6=0$ կորը։

Լուծում։ Կոորդինատների սկզբնակետը եզակի կետ է։ Այդ կորի մոտակայքում կորն ուսումնասիրելու համար կորի հավասարումն արտագրենք



Նկ. 193

$$y=\pm x^2\sqrt{1-x^2}$$

տեսքով։

Քանի որ կորի հավասարումը պարունակում է միայն փոփոխականների զույգ աստիճանները, ապա կորը սիմետրիկ է կոորդինատների առանցքների նկատմամբ և, հետևաբար, բավական է ուսումնասիրել x-ի և y-ի դրական արժեքներին համապատասխանող կորի մասը։ Վերջին հավասարումից հետևում է, որ x-ը կարող է փոփոխվել 0-ից մինչև 1 հատվածի վրա, այսինքն՝ $0\leqslant x\leqslant 1$։

Հաշվենք առաջին ածանցյալը կորի այն ճյուղի համար, որը հանդիսանում է $y=+x^2\sqrt{1-x^2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը.

$$y'=\frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}},$$

երբ $x=0$ ունենք $y=0$, $y'=0$։ Հետևաբար, կոորդինատների սկզբնակետում կորը շոշափում է Ox առանցքը։

Երբ $x=1$ ունենք $y=0$, $y'=\infty$, հետևաբար, (1, 0) կետում շոշափողը զուգահեռ է Oy առանցքին։ Երբ $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ ֆունկցիան ունի մաքսիմում (նկ. 194)։

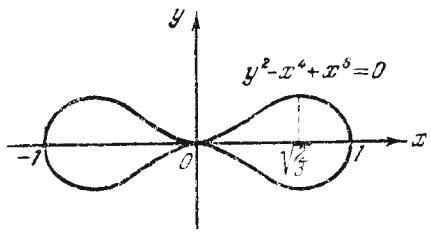
Կոորդինատների սկզբնակետում (եզակի կետում) արմատից առաջ պլյուս և մինուս նշաններին համապատասխանող կորի երկու ճյուղերը փոխադարձաբար շոշափում են միմյանց։ Այդպիսի եզակի կետը կոչվում է կպման կետ։

Օրինակ 5։ Ուսումնասիրել $y^2=x^2(x-1)$ կորը։

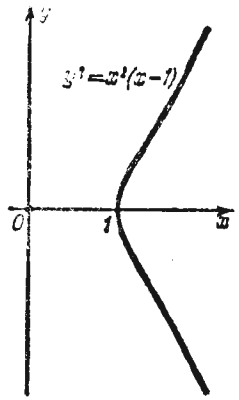
Լուծում։ Գրենք եզակի կետերը որոշող հավասարումների սիստեմը.

$$y^2-x^2(x-1)=0,\qquad -3x^2+2x=0,\qquad 2y=0.$$

Այս սիստեմն ունի $x=0$, $y=0$ լուծումը։



Նկ. 194.



Նկ. 195

Հետևաբար, (0, 0) կետը կորի եզակի կետ է։ Տրված հավասարումն արտագրենք $y=\pm x\sqrt{x-1}$ տեսքով։ Ակնհայտ է, որ x-ը կարող է փոփոխվել 1-ից մինչև $+\infty$, ինչպես նաև ընդունել 0 արժեք (վերջին դեպքում $y=0$)։

Ուսումնասիրենք կորի այն ճյուղը, որը համապատասխանում է արմատի առջևի պլյուս նշանին։ Երբ x-ը աճում է 1-ից մինչև ∞ y-ը աճում է 0-ից մինչև ∞։ Ածանցյալը՝

$$y'=\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}},$$

Երբ $x=1$ ունենք $y'=\infty$։ Հետևաբար, (1, 0) կետում շոշափողը զուգահեռ է Oy առանցքին։

Կորի երկրորդ ճյուղը, որը համապատասխանում է մինուս նշանին, սիմետրիկ է առաջինին Ox առանցքի նկատմամբ։

(0, 0) կետն ունի հավասարմանը բավարարող կոորդինատներ, և, հետևաբար, պատկանում է կորին, բայց նրա մոտակայքում կորի ուրիշ կետեր չկան (նկ. 195)։ Այդպիսի եզակի կետը կոչվում է մեկուսացված եզակի կետ։

Վարժություններ VIII գլխի վերաբերյալ

Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների մասնական ածանցյալները

1. $z=x^2\sin^2 y$։ Պատ. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin^2 y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\sin 2y$։ **2.** $z=xy^2$։ Պատ. $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2xy^{2-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^{y^2}2y\ln x$։ **3.** $u=e^{x^2+y^2+z^2}$։ Պատ. $\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2+z^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2+z^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2ze^{x^2+y^2+z^2}$։ **4.** $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$։ Պատ. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$։ **5.** $z=\operatorname{arctg}(xy)$։ Պատ. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+x^2y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{1+x^2y^2}$։ **6.** $z=\operatorname{arctg}=\frac{y}{x}$։ Պատ. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$։ **7.** $z=\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x_0}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$։ Պատ. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$։ **8.** $u=e^{x/y}+e^{z/y}$։ Պատ. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}e^{x/y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{x/y}-\frac{z}{y^2}e^{z/y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{y}e^{z/y}$։ **9.** $z=\arcsin(x+y)$։ Պատ. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}=\frac{\partial z}{\partial y}$։ **10.** $z=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$։ Պատ. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{x^4-y^4}}$,

Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների լրիվ դիֆերենցիալները.

11. $z=x^2+xy^2+\sin y$։ Պատ. $dz=(2x+y^2)dx+(2xy+\cos y)dy$։ **12.** $z=\ln(xy)$։ Պատ. $dz=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}$։ **13.** $z=e^{x^2+y^2}$։ Պատ. $dz=2e^{x^2+y^2}(xdx+ydy)$։ **14.** $u=\operatorname{tg}(3x-y)+6^{y+z}$։ Պատ. $du=\frac{3dx}{\cos^2(3x-y)}+\left(-\frac{1}{\cos^2(3x-y)}+6^{y+z}\ln 6\right)dy+6^{y+z}\ln 6\,dz$։ **15.** $w=\arcsin\frac{x}{y}$։ Պատ. $dw=\frac{y\,dx-x\,dy}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}$։

16. Հաշվել $f'_x(2, 3)$ և $f'_y(2, 3)$, եթե $f(x, y)=x^2+y^3$։ Պատ. $f'_x(2, 3)=4$, $f'_y(2, 3)=27$։

17. Հաշվել $df(x, y)$, երբ $x=1$, $y=0$, $dx=1/2$, $dy=1/4$, եթե $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$։ Պատ. $1/2$։

18. Կազմել բանաձև, որը x, y, z մեծությունների փոքր բացարձակ արժեքներ

ժեքների դեպքում $\sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}}$-ի համար տալիս է մոտավոր արտահայտություն։ Պատ. $1+\frac{1}{2}(x-y-z)$։

19. Նույնը $\sqrt{\frac{1+x}{1+y+z}}$-ի համար։ Պատ. $1+\frac{1}{2}(x-y-z)$։

20. Գտնել $\frac{\partial z}{\partial x}$-ը և $\frac{\partial z}{\partial y}$-ը, եթե $z=u+v^2$, $u=x^2+\sin y$, $v=\ln(x+y)$։ Պատ. $\frac{\partial z}{\partial x}=2+2v\frac{1}{x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\cos y+2v\frac{1}{x+y}$։

21. Գտնել $\frac{\partial z}{\partial x}$-ը, եթե $z=\sqrt{\frac{1+u}{1+v}}$, $u=-\cos x$, $v=\cos x$։ Պատ. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$։

22. Գտնել $\frac{\partial z}{\partial x}$-ը և $\frac{\partial z}{\partial y}$-ը, եթե $z=e^{u-2v}$, $u=\sin x$, $v=x^2+y^2$։ Պատ. $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{u-2v}(0-2\cdot 2y)=-4ye^{u-2v}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{u-2v}(\cos x-6x^2)$, որտեղ u-ի և v-ի փոխարեն պետք է տեղադրել $\sin x$ և x^3+y^2։

23. Գտնել տրված ֆունկցիաների լրիվ ածանցյալները $z=\arcsin(u+v)$; $u=\sin x\cos\alpha$, $v=\cos x\sin\alpha$։ Պատ. $\frac{dz}{dx}=-1$, եթե $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $\frac{dz}{dx}=-1$, եթե $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x+\alpha<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$։ **24.** $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y=a\sin x$, $z=\cos x$։ Պատ. $\frac{du}{dx}=e^{ax}\sin x$։ **25.** $z=\ln(1-x^4)$, $x=\sqrt{\sin\theta}$։ Պատ. $\frac{dz}{d\theta}=-2\operatorname{tg}\theta$։

Գտնել x-ի անբացահայտ ֆունկցիաների ածանցյալները, որոնք տրված են հետևյալ հավասարումներով.

26. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$։ Պատ. $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$, **27.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$։ Պատ. $\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$, **28.** $y^x=x^y$։ Պատ. $\frac{dy}{dx}=\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{xy^{x-1}-x^y\ln x}$, **29.** $\sin(xy)-e^{xy}-x^2y=0$։ Պատ. $\frac{dy}{dx}=\frac{y[\cos(xy)-e^{xy}-2x]}{x[x+e_x{}^y-\cos(xy)]}$, **30.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$։ Գտնել $\frac{\partial z}{\partial y}$-ը և $\frac{\partial z}{\partial x}$-ը։ Պատ. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$։ **31.** $u-v\operatorname{tg}aw=0$։ Գտնել $\frac{\partial w}{\partial u}$-ն և $\frac{\partial w}{\partial v}$-ն։ Պատ. $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\cos^3 aw}{av}$, $\frac{\partial w}{\partial v}=-\frac{\sin 2aw}{2aw}$։ **32.** $z^2+\frac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2}$։ Ցույց տալ, որ $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$։ **33.** $\frac{z}{x}=F\left(\frac{y}{z}\right)$։ Ցույց տալ, որ $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$, ինչպիսին էլ լինի F դիֆերենցելի ֆունկցիան։

Հաշվել երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները

34. $z=x^3-4x^2y+5y^2$։ Պատ. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-8y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=-8x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=10$.

35. $z=e^x\ln y+\sin y\ln x$։ Պատ. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\ln y-\frac{\sin y}{x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{e^x}{y}+\frac{\cos y}{x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{e^x}{y^2}-\sin y\ln x$։

36. Ապացուցել, որ եթե $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, ապա $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$։

37. Ապացուցել, որ եթե $z=\frac{x^2y^2}{x+y}$, ապա $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial x}$։

38. Ապացուցել, որ եթե $z=\ln(x^2+y^2)$, ապա $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$։

39. Ապացուցել, որ եթե $z=\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)$, ապա $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$ կրկնակի դիֆերենցելի ցանկացած φ-ի և Ψ-ի համար։

40. Գտնել $z=3x^4-xy+y^3$ ֆունկցիայի ածանցյալը M(1, 2) կետում այն ուղղությամբ, որն Ox առանցքի հետ կազմում է 60° անկյուն։ Պատ. $5+\frac{11\sqrt{3}}{2}$։

41. Գտնել $z=5x^2-3x-y-1$ ֆունկցիայի ածանցյալը M(2, 1) կետում այն ուղղությամբ, որն այդ կետը միացնում է N(5, 5) կետին։ Պատ. 9,4։

42. Գտնել f(x, y) ֆունկցիայի ածանցյալը՝ 1) Oxy կոորդինատային անկյան կիսորդի ուղղությամբ։ Պատ. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, 2) Ox բացասական կիսառանցքի ուղղությամբ։ Պատ. $-\frac{\partial f}{\partial x}$։

43. $f(x, y)=x^3+3x^2+4xy+y^2$։ Ցույց տալ, որ $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ կետում ածանցյալը ցանկացած ուղղությամբ հավասար է 0 (ֆունկցիան ստացիոնար է)։

44. Միևնույն 2p պարագիծ ունեցող եռանկյուններից որոշել այն եռանկյունը, որն ունի ամենամեծ մակերես։ Պատ. Հավասարակողմ եռանկյուն։

45. Գտնել ուղղանկյուն զուգահեռանիստ, որը տրված S լրիվ մակերևույթի դեպքում ունի ամենամեծ ծավալ։ Պատ. Խորանարդ, որի կողը հավասար է $\sqrt{\frac{S}{6}}$։

46. Գտնել տարածության այն ուղիղների հեռավորությունը, որոնց հավասարումներն են՝ $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$, $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$։ Պատ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$։

Ֆունկցիաներն ուսումնասիրել ըստ մաքսիմումի և մինիմումի.

47. $z=x^3y^2(a-x-y)$։ Պատ. z-ի մաքսիմումն է $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{a}{3}$ դեպքում։ **48.** $z=x^3+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$։ Պատ. z-ի մինիմումն է $x=y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ դեպքում։ **49.** $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$։ Պատ. z-ի

մաքսիմումն է $x=y=\frac{\pi}{3}$ դեպքում։ **50.** $z=\sin x \sin y \sin(x+y)$ $(0\leq x\leq\pi;\ 0\leq y\leq\pi)$։ Պատ. z-ի մաքսիմումն է $x=y=\frac{\pi}{3}$ դեպքում։

Գտնել հետևյալ կորերի եզակի կետերը, ուսումնասիրել նրանց բնույթը և կազմել այդ կետերում կորի շոշափողների հավասարումները.

51. $x^3+y^3-3axy=0$։ Պատ. $M_0(0, 0)$-ն հանգույց է. շոշափողների հավասարումներն են՝ $x=0$, $y=0$։

52. $a^4y^2=x^4(a^2-x^2)$։ Պատ. կոորդինատների սկզբնակետը հպման կետ է. կրկնակի շոշափող է՝ $y^2=0$։

53. $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$։ Պատ. $M_0(0, 0)$-ն առաջին սեռի դարձի կետ է. շոշափողի հավասարումն է՝ $y^2=0$։

54. $y^2=x^2(9-x^2)$։ Պատ։ $M_0(0, 0)$-ն հանգույց է. շոշափողների հավասարումներն են՝ $y=\pm 3x$։

55. $x^4-2ax^2y-axy^2+a^2x^2=0$։ Պատ. $M_0(0, 0)$-ն երկրորդ սեռի դարձի կետ է. $y^2=0$-ն կրկնակի շոշափող է։

56. $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$։ Պատ. $M_0(0, 0)$-ն հանգույց է։ Շոշափողների հավասարումներն են՝ $y=\pm x$։

57. $b^2x^2+a^2y^2=x^2y^2$։ Պատ. $M_0(0, 0)$-ն մեկուսացված կետ է։

58. Ցույց տալ, որ $y=x\ln x$ կորը կոորդինատների սկզբնակետում ունի դադարի կետ և շոշափող է Ox առանցքը։

59. Ցույց տալ, որ $y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ կորը կոորդինատների սկզբնակետում ունի հանգուցային կետ և այդ կետում շոշափողներն են՝ աջից $y=0$, ձախից՝ $y=x$։

ԳԼՈՒԽ IX

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՆԿԱՏՄԱՄԲ՝ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

§ 1. Կորի հավասարումները տարածության մեջ

Դիտարկենք $\overline{OA}=r$ վեկտորը, որի սկիզբը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, իսկ վերջը հանդիսանում է որևէ $A(x, y, z)$ կետը (նկ. 196)։ Այդպիսի վեկտորը կոչվում է շառավիղ-վեկտոր։

Արտահայտենք այդ վեկտորը կոորդինատների առանցքների վրա իր պրոյեկցիաների միջոցով.

$$r=xi+yj+zk; \tag{1}$$

Դիցուք r վեկտորի պրոյեկցիաները որևէ t պարամետրից կախված

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t),\\ z&=\chi(t), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

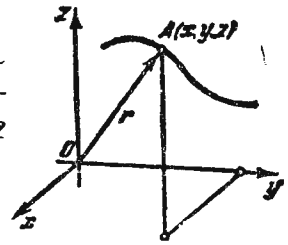
ֆունկցիաներն են։ Այդ դեպքում (1) բանաձևը կարելի է գրել այսպես.

$$r=\varphi(t)i+\psi(t)j+\chi(t)k \tag{1'}$$

կամ կրճատ՝

$$r=r(t); \tag{1''}$$

t-ն փոփոխվելիս փոփոխվում են x-ը, y-ը, z-ը, և A կետը՝ r վեկտորի վերջը տարածության մեջ կգծի որևէ գիծ, որն անվանում են $r=r(t)$ վեկտոր ֆունկցիայի հոդոգրաֆ։ (1′) կամ (1″) հավասարումն անվանում են տարածության մեջ գծի վեկտորական հավասարում։ (2) հավասարումները կոչվում են գծի պարամետրական հավասարումներ տարածության մեջ։ Այդ հավասարումների օգնությամբ t-ի յուրաքանչյուր ար-



Նկ. 196

ժեքի համար որոշվում են կորի կետին համապատասխանող x, y, z, կոորդինատները։

Դիտողություն։ Կորը տարածության մեջ կարող է որոշվել որպես երկու մակերևույթների հատման կետերի երկրաչափական տեղ. հետևաբար, այդպիսի կորը կարող է տրվել երկու մակերևույթների հավասարումներով՝

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(x, y, z)=0,\\ \Phi_2(x, y, z)=0;\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

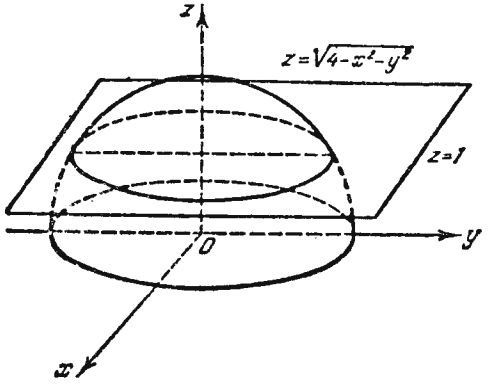
Այսպես, օրինակ,

$$x^2+y^2+z^2=4, \qquad z=1$$

հավասարումները շրջանագծի հավասարումներ են, որոնք ստացվում են գնդային մակերևույթի և հարթության հատույթում (նկ. 197)։

Եվ այսպես, կորը տարածության մեջ կարող է տրվել կամ (2) պարամետրական հավասարումներով կամ (3) երկու մակերևույթների հավասարումներով։

Եթե (2) հավասարումներից արտաքսենք t պարամետրը և ստա-



Նկ. 197

նանք x-ը, y-ը և z-ը կապող երկու հավասարումներ, դրանով իսկ կիրականացնենք գծի պարամետրական տրումից անցումը մակերևույթների միջոցով տրմանը։ Հակադարձը, եթե ընդունենք $x=\varphi(t)$ ($\varphi(t)$-ն կամայական ֆունկցիա է) և

$$\Phi_1[\varphi(t), y, z]=0, \qquad \Phi_2[\varphi(t), y, z]=0$$

հավասարումներից գտնենք y-ը և z-ը որպես t-ի ֆունկցիաներ, ապա կիրականացնենք անցումը գծի՝ մակերևույթների միջոցով տրված եղանակից պարամետրական եղանակով տրմանը։

Օրինակ 1։

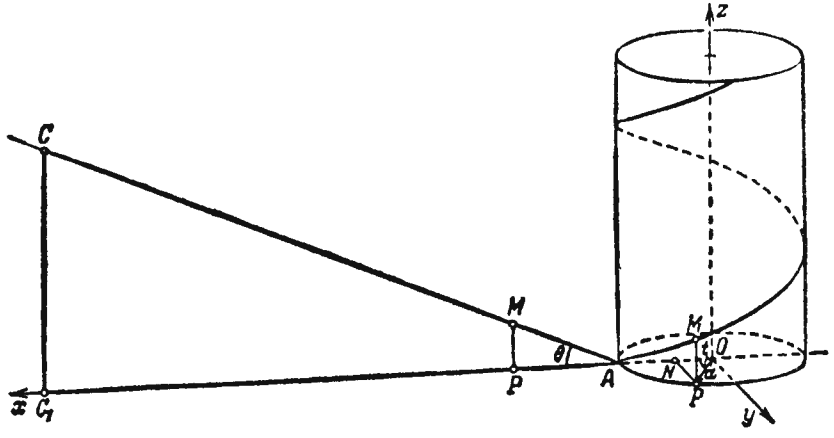
$$x=4t-1, \qquad y=3t, \qquad z=t+2$$

հավասարումները ուղղի պարամետրական հավասարումներ են։ Արտաքսելով t պարամետրը, կստանանք երկու հավասարում, որոնցից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է հարթության հավասարում։ Օրինակ, եթե առաջին հավասարումից անդամ առ անդամ հանենք երկրորդը և երրորդը, ապա կստանանք $x-y-z=-3$։ Իսկ հանելով առաջինից երրորդի քառապատիկը, կստանանք՝ $x-4z=-9$։ Այսպիսով, տրված ուղիղը $x-y-z+3=0$ և $x-4z+9=0$ հարթությունների հատման գիծն է։

Օրինակ 2։ Դիտարկենք a շառավղով ուղիղ շրջանային գլան, որի առանցքը համընկնում է Oz առանցքի հետ (նկ. 198)։ Տրված գլանի վրա փաթաթենք C_1AC ուղղանկյուն եռանկյունն այնպես, որպեսզի եռանկյան A գագաթը գտնվի գլանի ծնիչի և Ox առանցքի հատման կետում, իսկ AC_1 էջը փաթաթվի գլանի շրջանային հատույթին, որը գտնվում է Oxy հարթության մեջ։ Այդ դեպքում ներքնաձիգը գլանի վրա առաջացնում է մի գիծ, որը կոչվում է պուուտակագիծ։

Գրենք պուուտակագծի հավասարումը, նշանակելով նրա M փոփոխական կետի կոորդինատները x, y, z-ով և AOP անկյունը՝ t-ով (նկ. 198)։ Այդ դեպքում։

$$x=a\cos t, \qquad y=a\sin t, \qquad z=PM=AP\,\mathrm{tg}\,\theta,$$



Նկ. 198

որտեղ θ-ով նշանակվում է C_1AC եռանկյան սուր անկյունը։ Նկատելով, որ $\overset{\smile}{AP}=at$, քանի որ $\overset{\smile}{AP}$-ն հանդիսանում է a շառավղով շրջանի աղեղ, որը համապատասխանում է t կենտրոնական անկյանը, և նշանակելով $\mathrm{tg}\theta$-ն m-ով, ստանում ենք պուուտակագծի պարամետրական հավասարումները

$$x=a\cos t, \quad y=a\sin t, \quad s=amt,$$

տեսքով (այստեղ t-ն պարամետր է), կամ վեկտորական ձևով՝

$$r=ia\cos t+ja\sin t+kamt.$$

Պուուտակագծի պարամետրական հավասարումներից հեշտ է արտաքսել t

պարամետրը. առաջին երկու հավասարումները քառակուսի բարձրացնելով և գումարելով դրանք, կգտնենք՝ $x^2+y^2=a^2$։ Սա այն գլանի հավասարումն է, որի վրա գտնվում է պտուտակագիծը։ Այնուհետև, երկրորդ հավասարումն անդամ առ անդամ բաժանելով առաջինի վրա և ստացված հավասարման մեջ տեղադրելով երրորդ հավասարումից գտածt-ի արժեքը, գտնում ենք մյուս մակերևույթի հավասարումը, որի վրա դասավորված է պտուտակագիծը՝

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{am}.$$

Սա այսպես կոչված պտուտակային մակերևույթն է (հելոկոիդ)։ Այն կարելի է ստանալ որպես Oxy հարթությանը զուգահեռ կիսաուղղի շարժման հետք, եթե այդ կիսաուղղի ծայրը գտնվում է Oz առանցքի վրա, ըստ որում ինքը՝ կիսաուղիղը հաստատուն արագությամբ բարձրանում է վեր այնպես, որ նրա ծայրը տեղափոխվում է Oz-ի երկայնությամբ։ Պտուտակագիծը հանդիսանում է երկու մակերևույթների հատման գիծ։ Ուստի այն կարելի է տալ երկու հավասարումներով.

$$x^2+y^2=a^2, \qquad \frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{am}.$$

§ 2. Սկալյար արգումենտի վեկտոր ֆունկցիայի սահմանը եվ ածանցյալը: Կորի շոշափողի հավասարումը: Նորմալ հարթության հավասարումը

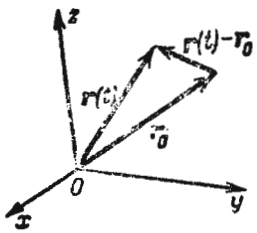
Անդրադառնանք նախորդ պարագրաֆի (1′) և (1″) բանաձևերին՝

$$r=\varphi(t)i+\psi(t)j+\chi(t)k$$

կամ

$$r=r(t);$$

t-ն փոփոխվելիս r վեկտորն ընդհանրապես փոփոխվում է ըստ մեծության և ըստ ուղղության։ Ասում են, որ r-ը հանդիսանում է t սկալյար արգումենտի վեկտորական ֆունկցիա։ Ենթադրենք



Նկ. 199

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\varphi_0,$$
$$\lim_{t\to t_0}\psi(t)=\psi_0,$$
$$\lim_{t\to t_0}\chi(t)=x_0;$$

Այդ դեպքում ասում են, որ $r_0=\varphi_0 i+\psi_0 j+\chi_0 k$ վեկտորը հանդիսանում է $r=r(t)$ վեկտորի սահմանը, և գրում են (նկ. 199).

$$\lim_{t\to t_0} r(t)=r_0.$$

Վերջին հավասարությունից հետևում են հետևյալ ակնհայտ հավասարությունները՝

$$\lim_{t\to t_0}|r(t)-r_0|=\lim_{t\to t_0}\sqrt{[\varphi(t)-\varphi_0]^2+[\psi(t)-\psi_0]^2+[\chi(t)-\chi_0]^2}=0$$

և

$$\lim_{t\to t_0}|r(t)|=|r_0|;$$

Այժմ անցնենք

$$r(t)=\varphi(t)i+\varphi(t)j+\chi(t)k \qquad (1)$$

սկալյար արգումենտի վեկտորական ֆունկցիայի ածանցյալի սահմանմանը, ենթադրելով, որ r(t) վեկտորի սկիզբը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում։ Մենք գիտենք, որ վերջին հավասարումը որևէ տարածական կորի հավասարումն է։

Վերցնենք t-ի ֆիքսած որևէ արժեք, որը համապատասխանում է կորի վրա գտնվող M որոշակի կետին, և t-ին տանք Δt աճ։ Այդ դեպքում մենք կստանանք

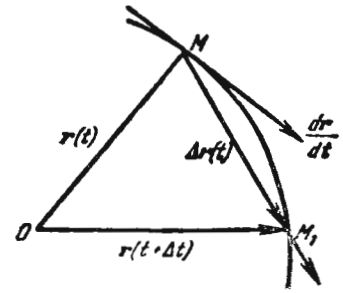
$$r(t+\Delta t)=\varphi(t+\Delta t)i+\psi(t+\Delta t)j+\chi(t+\Delta t)k$$

վեկտորը, որը կորի վրա որոշում է որևէ M_1 կետ (նկ. 200)։ Գտնենք վեկտորի աճը՝

$$\Delta r=(t+\Delta t)-r(t)=[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)]i+$$
$$+[\psi(t+\Delta t)-\psi(t)]j+[\chi(t+\Delta t)-\chi(t)]k;$$

Նկ. 200-ում, որտեղ $\overline{OM}=r(t)$, $\overline{OM_1}=r(t+\Delta t)$, այդ աճը պատկերվում է $\overline{MM_1}=\Delta r(t)$. վեկտորով։

Դիտարկենք վեկտորական ֆունկցիայի աճի և սկալյար արգումենտի աճի $\frac{\Delta r(t)}{\Delta t}$ հարաբերությունը. սա, ակնհայտ է, $\Delta r(t)$ վեկտորին կոլինեար վեկտոր է, քանի որ դրանից ստացվում է՝ այն $\frac{1}{\Delta t}$ սկալյար բազմապատկիչով բազմապատկելուց։ Մենք կարող ենք այդ վեկտորը գրել այսպես.



Նկ. 200

$$\frac{\Delta r(t)}{\Delta t}=\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}i+$$
$$+\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}j+\frac{\chi(t+\Delta t)-\chi(t)}{\Delta t}k;$$

Եթե t-ի ընտրած արժեքի դեպքում $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ ֆունկցիաները ունեն ածանցյալներ, ապա i-ի, j-ի, k-ի մոտ գտնվող բազմա-

պակիչները, երբ $\Delta t \to 0$, սահմանում դառնում են $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ ածանցյալներ։ Հետևապես, այդ դեպքում, երբ $\Delta t \to 0$ $\frac{\Delta r}{\Delta t}$-ի սահմանը գոյություն ունի և հավասար է

$$\varphi'(t)i+\psi(t)j+\chi'(t)k \text{ վեկտորին.}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}=\varphi'(t)i+\psi'(t)j+\chi'(t)k.$$

Վերջին հավասարությամբ որոշվող վեկտորը կոչվում է $r(t)$ վեկտորի ածանցյալ ըստ t սկալյար արգումենտի։ Ածանցյալը նշանակում են $\frac{dr}{dt}$ կամ r' սիմվոլով։

Այսպիսով,

$$\frac{dr}{dt}=r'=\varphi'(t)i+\psi'(t)j+\chi'(t)k \qquad (2)$$

կամ

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j+\frac{dz}{dt}k. \qquad (2')$$

Պարզենք $\frac{dr}{dt}$ վեկտորի ուղղությունը։

Քանի որ երբ $\Delta t \to 0$ M_1 կետը մոտենում է M կետին, ապա MM_1 հատողը սահմանում կունենա շոշափողի ուղղությունը։ Հետևապես $\frac{dr}{dt}$ ածանցյալի վեկտորն ուղղված է M կետում կորի շոշափողով։

$\frac{dr}{dt}$ վեկտորի երկարությունը որոշվում է

$$\left|\frac{dr}{dt}\right|=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2} \qquad (3)$$

բանաձևով*

Ստացած արդյունքների հիման վրա հեշտ է գրել

$$r=xi+yj+zk$$

կորի $M(x, y, z)$ կետում շոշափողի հավասարումը, նկատի ունենալով, որ կորի հավասարման մեջ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$։

---

* Ենթադրելու ենք, որ դիտարկվող կետերում $\left|\frac{dr}{dt}\right| \neq 0$։

$M(x, y, z)$ կետով անցնող ուղղի հավասարումն ունի

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{p}$$

տեսքը, որտեղ X-ը, Y-ը, Z-ը ուղղի փոփոխական կետի կոորդինատներն են, իսկ m-ը, n-ը, p-ն այդ ուղղի ուղղորդ կոսինուսներին (այսինքն՝ ուղղի ուղղորդ վեկտորի պրոյեկցիաներին) համեմատական մեծություններ են։

Մյուս կողմից, մենք հաստատեցինք, որ

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j+\frac{dz}{dt}k$$

վեկտորն ուղղված է շոշափողով։ Ուստի այդ վեկտորի պրոյեկցիաները հանդիսանում են շոշափողի ուղղորդ կոսինուսներին, նշանակում է և m, n, p թվերին համեմատական թվեր։ Հետևապես, շոշափողի հավասարումը կունենա

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}} \qquad (4)$$

տեսքը։

Օրինակ 1։ Գրել

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=amt$$

պտուտակագծի շոշափողի հավասարումը t-ի կամայական արժեքի համար և $t=\frac{\pi}{4}$ դեպքում։

Լուծում։

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=a\cos t,\quad \frac{dz}{dt}=am.$$

Ըստ (4) բանաձևի ունենք.

$$\frac{X-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{Y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{Z-amt}{am},$$

Մասնավորապես, երբ $t=\frac{\pi}{4}$ ստանում ենք.

$$\frac{X-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{Y-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{Z-am\frac{\pi}{4}}{am}$$

կամ

$$\frac{X-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{-1}=\frac{Y-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{Z-\frac{\pi am}{4}}{m\sqrt{2}}.$$

Այնպես, ինչպես հարթ կորի դեպքում, շոշափողին ուղղահայաց և շոշափման կետով անցնող ուղիղը կոչվում է տարածական կորի տրված կետում նորմալ: Ցվյալ տարածական կորին տրված կետում, ակնհայտ է, կարելի է տանել անթիվ բազմությամբ նորմալներ: Դրանք բոլորը կգտնվեն շոշափող ուղղին ուղղահայաց հարթության մեջ: Այդ հարթությունը կոչվում է նորմալ հարթություն:

Նորմալ հարթության և (4) շոշափողի ուղղահայացության պայմանից ստանում ենք նորմալ հարթության հավասարումը.

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0 \qquad (5)$$

Օրինակ 2. Գտնել պտուտակագծի այն կետում տրված նորմալ հարթության հավասարումը, որի համար $t=\frac{\pi}{4}$:

Լուծում: Օրինակ 1-ի և (5) բանաձևի հիման վրա ստանում ենք.

$$-\left(X-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+\left(Y-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+m\sqrt{2}\left(Z-am\frac{\pi}{4}\right)=0$$

կամ

$$-X+Y+m\sqrt{2}Z=am^2\frac{\pi}{4}\sqrt{2}.$$

Այժմ արտածենք տարածական կորի շոշափող ուղղի և նորմալ հարթության հավասարումներն այն դեպքում, երբ այդ կորը տրված է

$$\Phi_1(x,y,z)=0, \qquad \Phi_2(x,y,z)=0 \qquad (6)$$

հավասարումներով:

Այդ կորի x, y, z կոորդինատները արտահայտենք որպես որևէ t պարամետրի ֆունկցիաներ.

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t). \qquad (7)$$

Այստեղ ենթադրում ենք, որ φ(t), ψ(t), χ(t)-ն t-ի դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են: (6) հավասարման մեջ x-ի, y-ի, z-ի փոխարեն տեղադրելով կորի կետերի համար նրանց արտահայտությունները t-ի միջոցով, կստանանք t-ի նկատմամբ երկու նույնություն.

$$\Phi_1[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]=0, \qquad (8\ ա)$$

$$\Phi_2[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]=0. \qquad (8\ բ)$$

(8 ա) և (8 բ) նույնությունները դիֆերենցելով ըստ t-ի, գտնում ենք.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0,\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Այդ հավասարումներից հետևում է, որ

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dz}{dt}}=\frac{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}, \quad \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dz}{dt}}=\frac{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}; \qquad (10)$$

Այստեղ էլ ենթադրում ենք, իհարկե, որ $\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\neq 0$, թեև կարելի է ապացուցել, որ (11) և (12) վերջնական բանաձևերը (տես ստորև) իրավացի են նաև այն դեպքում, երբ այդ արտահայտությունը հավասար է զրոյի, եթե վերջնական բանաձևերում մասնակցող դետերմինանտներից միայն թեկուզ մեկը տարբեր է զրոյից:

(10) հավասարություններից ստանում ենք.

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}}=\frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}};$$

Հետևաբար, (4) բանաձևի հիման վրա շոշափող ուղղի հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{X-x}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}},$$

կամ, օգտվելով դետերմինանտներից,

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}}; \qquad (11)$$

Նորմալ հարթությունը ներկայացվում է հետևյալ հավասարումով՝

$$(X-x)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}+(Y-y)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial\Phi}{\partial x}\end{vmatrix}+(Z-z)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}=0. \qquad (12)$$

Այդ բանաձևերն իմաստ ունեն միայն այն ժամանակ, երբ նրան-

ցում մասնակցող դետերմինանտներից թեկուզ մեկը տարբեր է զրոյից։ Իսկ եթե կորի որևէ կետում

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

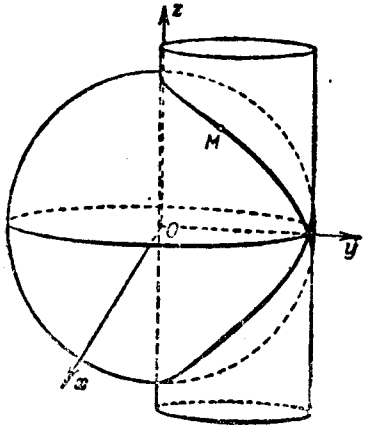
երեք դետերմինանտներն էլ դառնում են զրո, ապա այդ կետը կոչվում է տարածական կորի եզակի կետ։ Այդ կետում կորն ընդհանրապես կարող է չունենալ շոշափող, ինչպես տեղի ուներ հարթ կորերի եզակի կետերում (տես VIII գլխի, § 20)։

Օրինակ 3։ Գտնել $x^2+y^2+z^2=4r^2$ գնդային մակերևույթի և $x^2+y^2=2ry$ գլանի հատման գծի $M(r, r, r\sqrt{2})$ կետում շոշափող ուղղի և նորմալ հարթության հավասարումները (նկ. 201)։

Լուծում։

$$\Phi_1(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-4r^2,$$
$$\Phi_2(x, y, z)=x^2+y^2-2ry.$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}=2y, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}=2z,$$
$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}=2y-2r, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}=0.$$



Նկ. 201

Տրված M կետում ածանցյալների արժեքները կլինեն.

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}=2r, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}=2r, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}=2r\sqrt{2},$$
$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}=2r, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}=0.$$

Ուստի շոշափող ուղղի հավասարումն ունի

$$\frac{X-r}{0}=\frac{Y-r}{\sqrt{2}}=\frac{Z-r\sqrt{2}}{-1}$$

տեսքը։ Նորմալ հարթության հավասարումը կլինի

$$\sqrt{2}(Y-r)-(Z-r\sqrt{2})=0$$

կամ

$$\sqrt{2}Y-Z=0.$$

§ 3. Վեկտորական ֆունկցիաների դիֆերենցման կանոնները

Ինչպես տեսանք

$$r(t)=\varphi(t)i+\psi(t)j+\chi(t)k \qquad (1)$$

վեկտորի ածանցյալն, ըստ սահմանման, հավասար է

$$r'(t)=\varphi'(t)i+\psi'(t)j+\chi'(t)k. \qquad (2)$$

Այստեղից իսկույն հետևում է, որ ֆունկցիաների դիֆերենցման հիմնական կանոնները մնում են ուժի մեջ նաև վեկտորների համար։ Ստորև կալ.տածենք վեկտորական ֆունկցիաների դիֆերենցման մի քանի բանաձևեր։ Այդ բանաձևերը մեզ անհրաժեշտ կլինեն հետագայում։

1. Վեկտորների գումարի ածանցյալը հավասար է գումարելի վեկտորների ածանցյալների գումարին։

Իրոք, դիցուք, օրինակ, տրված են երկու վեկտորներ.

$$\left.\begin{aligned} r_1(t)&=\varphi_1(t)i+\psi_1(t)j+\chi_1(t)k, \\ r_2(t)&=\varphi_2(t)i+\psi_2(t)j+\chi_2(t)k; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

սրանց գումարը հավասար է

$$r_1(t)+r_2(t)=[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)]i+[\psi_1(t)+\psi_2(t)]j+[\chi_1(t)+\chi_2(t)]k.$$

Ըստ փոփոխական վեկտորի ածանցյալի սահմանման ունենք.

$$\frac{d[r_1(t)+r_2(t)]}{dt}=[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)]'i+[\psi_1(t)+\psi_2(t)]'j+[\chi_1(t)+\chi_2(t)]'k$$

կամ

$$\frac{d[r_1(t)+r_2(t)]}{dt}=[\varphi_1'(t)+\varphi_2'(t)]i+[\psi_1'(t)+\psi_2'(t)]j+[\chi_1'(t)+\chi_2'(t)]k=$$
$$=\varphi_1'(t)i+\psi_1'(t)j+\chi_1'(t)k+\varphi_2'(t)i+\psi_2'(t)j+\chi_2'(t)k=r_1'+r_2'.$$

Հետևաբար,

$$\frac{d[r_1(t)+r_2(t)]}{dt}=\frac{dr_1}{dt}+\frac{dr_2}{dt}. \qquad (I)$$

II. Վեկտորների սկալյար արտադրյալի ածանցյալն արտահայտվում է

$$\frac{d(r_1r_2)}{dt}=\frac{dr_1}{dt}r_2+r_1\frac{dr_2}{dt} \qquad (II)$$

բանաձևով։

Իրոք, եթե $r_1(t)$-ն և $r_2(t)$-ն որոշված են (3) բանաձևերով, ապա ինչպես հայտնի է, այդ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է

$$r_1(t)r_2(t)=\varphi_1\varphi_2+\psi_1\psi_2+\chi_1\chi_2.$$

Ուստի

$$\frac{d(r_1r_2)}{dt}=\varphi_1'\varphi_2+\varphi_1\varphi_2'+\psi_1'\psi_2+\psi_1\psi_2'+\chi_1'\chi_2+\chi_1\chi_2'=$$

$$=(\varphi_1'\varphi_2+\psi_1'\psi_2+\chi_1'\chi_2)+(\varphi_1\varphi_2'+\psi_1\psi_2'+\chi_2\chi_2')=$$

$$=(\varphi_1'i+\psi_1'j+\chi_1'k)(\varphi_2i+\psi_2j+\chi_2k)+(\varphi_1i+\psi_1j+\chi_1k)(\varphi_2'i+\psi_2'j+\chi_2'k)=$$

$$=\frac{dr_1}{dt}r_2+r_1\frac{dr_2}{dt}.$$

Թեորեմն ապացուցված է։

(II) *բանաձևից ստացվում է հետևյալ կարևոր հետևանքը։*

Հետևանք։ Եթե e վեկտորը միավոր է, այսինքն՝ $|e|=1$, ապա նրա ածանցյալն իրեն՝ e-ին ուղղահայաց վեկտոր է։

Ապացույց։ Եթե e-ն *միավոր վեկտոր է, ապա*

$$ee=1.$$

Վերջին հավասարության երկու մասն ածանցենք ըստ t-ի.

$$e\frac{de}{dt}+\frac{de}{dt}e=0,$$

կամ

$$2e\frac{de}{dt}=0,$$

այսինքն՝ հետևյալ սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի՝

$$e\frac{de}{dt}=0,$$

իսկ այդ նշանակում է, որ $\frac{de}{dt}$ *վեկտորն ուղղահայաց է* e *վեկտորին։*

III. Եթե f(t)-ն սկալյար ֆունկցիա է, իսկ r(t)-ն՝ վեկտորական ֆունկցիա, ապա f(t)r(t) արտադրյալի ածանցյալը արտահայտվում է

$$\frac{d(fr)}{dt}=\frac{df}{dt}r+f\frac{dr}{dt} \qquad \text{(III)}$$

բանաձևով։

Ապացույց։ Եթե r(t) *վեկտորը որոշված է (1) բանաձևով, ապա*

$$f(t)r(t)=f(t)\varphi(t)i+f(t)\psi(t)j+f(t)\chi(t)k,$$

Ըստ (2) բանաձևի ստանում ենք

$$\frac{d(f(t)r(t))}{dt}=\left(\frac{df}{dt}\varphi+f\frac{d\varphi}{dt}\right)i+\left(\frac{df}{dt}\psi+f\frac{d\psi}{dt}\right)j+\left(\frac{df}{dt}\chi+f\frac{d\chi}{dt}\right)k=$$

$$=\frac{df}{dt}(\varphi i+\psi j+\chi k)+f\left(\frac{d\varphi}{dt}i+\frac{d\psi}{dt}j+\frac{d\chi}{dt}k\right)=\frac{df}{dt}r+f\frac{dr}{dt}.$$

IV. Հաստատուն թվային արտադրիչը կարելի է դուրս բերել ածանցյալի նշանից՝

$$\frac{d(a\cdot r(t))}{dt}=a\frac{dr}{dt}=ar'(t). \qquad \text{(IV)}$$

Դա հետևում է (III)-*ից, եթե* $f(t)=a=\text{const}$. *Հետևաբար,* $\frac{\partial f}{\partial t}=0$.

V. $r_1(t)$ և $r_2(t)$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալի ածանցյալը որոշվում է

$$\frac{d(r_1\times r_2)}{dt}=\frac{dr_1}{dt}\times r_2+r_1\times\frac{dr_2}{dt} \qquad \text{(V)}$$

բանաձևով։

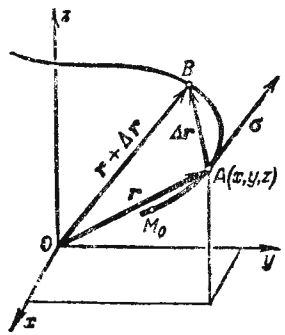
Ապացուցվում է (II) *բանաձևի համանմանությամբ։*

§ 4. Վեկտորի առաջին և երկրորդ ածանցյալներն ըստ աղեղի երկարության։ Կորի կորությունը։ Գլխավոր նորմալ։ Կետի կորագիծ շարժման արագությունը և արագացումը

Ինչպես և հարթության վրա կորերի դեպքում, սահմանվում է տարածական կորի $\overset{\frown}{M_0A}=s$ *աղեղի երկարությունը** *(նկ. 202)։*

Կորի վրայով A(x, y, z) *փոփոխական կետի շարժման ընթացքում* s *աղեղի երկարությունը փոխվում է. հակադարձը,* s-*ը փոփոխվելիս փոխվում են կորի վրա գտնվող* A *փոփոխական կետի* x, y, z *կոորդինատները։ Հետևաբար, կորի* A *փոփոխական կետի* x, y, z *կոորդինատները կարելի է դիտել որպես* s *աղեղի երկարության ֆունկցիաներ.*

$$x=\varphi(s),$$
$$y=\psi(s),$$
$$z=\chi(s).$$



Նկ. 202

Կորի այս պարամետրական հավասարումներում պարամետր է s *աղեղի երկարությունը։*

---

* *Տարածական կորի աղեղի երկարությունը սահմանվում է այնպես, ինչպես հարթ կորի աղեղի երկարությունը (տես գլ.* VI § 1 *և գլ.* XII, § 3)։

$\overline{OA}=r$ վեկտորը համապատասխանաբար արտահայտվում է

$$r=\varphi(s)i+\psi(s)j+\chi(s)k$$

կամ

$$r=r(s) \qquad (1)$$

այսինքն՝ r վեկտորը s աղեղի երկարության ֆունկցիան է։

Պարզաբանենք $\frac{dr}{ds}$ ածանցյալի երկրաչափական իմաստը։ Ինչպես երևում է նկ. 202-ից, տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

$$\overset{\frown}{M_0A}=s, \qquad \overset{\frown}{AB}=\Delta s, \qquad \overset{\frown}{M_0B}=s+\Delta s,$$

$$\overline{OA}=r(s), \qquad \overline{OB}=r(s+\Delta s),$$

$$\overline{AB}=\Delta r=r(s+\Delta s)-r(s),$$

$$\frac{\Delta r}{\Delta s}=\frac{\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}}.$$

Մենք § 2-ում արդեն տեսանք, որ $\frac{dr}{ds}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta s}$ վեկտորն ուղղված է կորի A կետում շոշափողի ուղղությամբ՝ s-ի աճման կողմը։

Մյուս կողմից տեղի ունի $\lim\left|\frac{\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}}\right|=1$ հավասարությունը (լարի երկարության և աղեղի երկարության հարաբերության սահմանը*)։

Հետևաբար, $\frac{dr}{ds}$-ը հանդիսանում է շոշափողով ուղղված միավոր վեկտոր. այն նշանակենք σ-ով.

$$\frac{dr}{ds}=\sigma. \qquad (2)$$

Եթե r վեկտորը տրված է պրոյեկցիաներով՝

$$r=xi+yj+zk,$$

ապա

$$\sigma=\frac{dx}{ds}i+\frac{dy}{ds}j+\frac{dz}{ds}k, \qquad (3)$$

* Մենք հարթ կորի համար այդ արել ենք գլ. VI, § 1-ում։ Այդ տեղի ունի նաև $r(t)=\varphi(t)i+\psi(t)j+\chi(t)k$ տարածական կորի համար, եթե $\varphi(t)$, $\psi(t)$, և $\chi(t)$ ֆունկցիաները ունեն անընդհատ ածանցյալներ, որոնք միաժամանակ զրո չեն դառնում։

ընդ որում

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}=1.$$

Այնուհետև դիտարկենք վեկտորական ֆունկցիայի $\frac{d^2r}{ds^2}$ երկրորդ ածանցյալը, այսինքն՝ $\frac{dr}{ds}$-ի ածանցյալը և պարզենք նրա երկրաչափական նշանակությունը։ (2) բանաձևից հետևում է, որ

$$\frac{d^2r}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left[\frac{dr}{ds}\right]=\frac{d\sigma}{ds},$$

Հետևաբար, պետք է գտնել $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$-ը։

Նկ. 203-ից ունենք $AB=\Delta s$, $\overline{AL}=\sigma$, $\overline{BK}=\sigma+\Delta\sigma$։ B կետից տանենք $\overline{BL_1}=\sigma$ վեկտորը։ BKL_1 եռանկյունուց գտնում ենք.

$$\overline{BK}=\overline{BL_1}+\overline{L_1K}$$

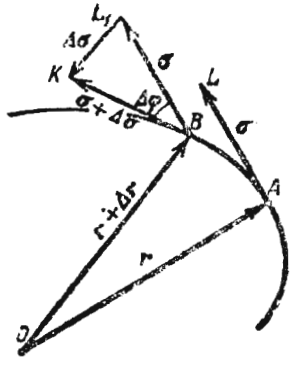
կամ

$$\sigma+\Delta\sigma=\sigma+\overline{L_1K}.$$

Հետևաբար, $L_1K=\Delta\sigma$։ Քանի որ, ըստ ապացուցածի, σ վեկտորի երկարությունը չի փոխվում, ապա $|\sigma|=|\sigma+\Delta\sigma|$. հետևաբար, BKL_1 եռանկյունը հավասարասրուն է։

Այդ եռանկյան գագաթի Δφ անկյունը կորի A կետից B կետն անցնելիս շոշափողի պտտման անկյունն է, այսինքն՝ համապատասխանում է աղեղի երկարության Δs աճին։ BKL_1 եռանկյունուց գտնում ենք.

$$L_1K=|\Delta\sigma|=2|\sigma|\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|=2\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|$$



Նկ. 203

(քանի որ $|\sigma|=1$)։

Վերջին հավասարության երկու մասերը բաժանենք Δs-ի

$$\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right|=2\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|;$$

Վերջին հավասարության երկու մասերում անցնենք սահմանի, երբ $\Delta s \to 0$: Ձախ մասում կստանանք.

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\sigma}{ds}\right|;$$

Այնուհետև,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\sin\frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}}\right| = 1,$$

քանի որ տվյալ դեպքում մենք գիտարկում ենք այնպիսի կորեր, որ գոյություն ունի $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$ սահմանը, և հետևաբար, $\Delta \varphi \to 0$, երբ $\Delta s \to 0$:

Այսպիսով, սահմանին անցնելուց հետո ստանում ենք.

$$\left|\frac{d\sigma}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta \varphi}{\Delta s}\right|; \tag{4}$$

A կետից B կետն անցնելիս շոշափողի $\Delta \varphi$ պտտման անկյան հարաբերությունը AB աղեղի Δs երկարությանը, վերցրած բացարձակ մեծությամբ կոչվում է, ինչպես և հարթ կորի համար, տվյալ գծի AB տեղամասում միջին կորություն.

$$\text{միջին կորությունը} = \left|\frac{\Delta \varphi}{\Delta s}\right|;$$

Միջին կորության սահմանը, երբ $\Delta s \to 0$, կոչվում է գծի կորություն A կետում և նշանակվում է K տառով.

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta \varphi}{\Delta s}\right|;$$

Բայց այս դեպքում (4) հավասարությունից հետևում է, որ $\left|\frac{d\sigma}{ds}\right| = K$, այսինքն շոշափողի միավոր վեկտորի* ըստ աղեղի երկարության ածանցյալի երկարությունը հավասար է գծի տվյալ կետում կորությանը: Քանի որ σ վեկտորը միավոր է, ապա նրա $\frac{d\sigma}{ds}$ ածանցյալն ուղղահայաց է իրեն (տես գլ. IX, § 3-ի հետևանքը):

Այսպիսով, $\frac{d\sigma}{ds}$ վեկտորը երկարությամբ հավասար է կորի կորությանը, իսկ ուղղությամբ ուղղահայաց է շոշափող վեկտորին:

Սահմանում: $\frac{d\sigma}{ds}$ վեկտորի ուղղությունն անցնող և կորի հարմարակցման կետով անցնող ուղիղը կոչվում է գլխավոր նորմալ կորի տրված կետում: Այդ ուղղությամբ միավոր վեկտորը նշանակենք n-ով:

Քանի որ $\frac{d\sigma}{ds}$ վեկտորի երկարությունը հավասար է K-ի՝ կորի կորությանը, ապա

$$\frac{d\sigma}{ds} = Kn.$$

Կորության հակադարձ մեծությունը կոչվում է գծի կորության շառավիղ տվյալ կետում և նշանակվում է R-ով, այսինքն՝ $\frac{1}{K} = R$:

Այդ պատճառով կարող ենք գրել.

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{n}{R}; \tag{5}$$

Այս բանաձևից հետևում է.

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2r}{ds^2}\right)^2; \tag{6}$$

Բայց

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}i + \frac{d^2y}{ds^2}j + \frac{d^2z}{ds^2}k.$$

Հետևաբար,

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}; \tag{6'}$$

Վերջին բանաձևը հնարավորություն է տալիս հաշվել գծի կորությունը ցանկացած կետում, եթե այդ գիծը տրված է պարամետրական հավասարումներով, որոնցում պարամետր է հանդիսանում s աղեղի երկարությունը (այսինքն, եթե տվյալ կորի փոփոխական կետի շառավիղ վեկտորն արտահայտված է որպես աղեղի երկարության ֆունկցիա):

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ r շառավիղ վեկտորն արտահայտված է որպես կամայական t պարամետրի ֆունկցիա՝

$$r = r(t);$$

---

* Հիշեցնենք, որ վեկտորի ածանցյալը հանդիսանում է վեկտոր, ուստի մենք կարող ենք խոսել ածանցյալի երկարության մասին:

Այս դեպքում s աղեղի երկարությունը կդիտարկենք որպես t պարամետրի ֆունկցիա։ Այստեղ կորության հաշվումը կատարվում է հետևյալ կերպ.

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}; \tag{7}$$

Քանի որ*

$$\left|\frac{dr}{ds}\right|=1,$$

ապա

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2; \tag{8}$$

Դիֆերենցելով աջ և ձախ մասերը և կրճատելով 2-ով, կստանանք

$$\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}; \tag{9}$$

Այնուհետև, (7) բանաձևից հետևում է.

$$\frac{dr}{ds}=\frac{dr}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}};$$

Վերջին հավասարության երկու մասերը դիֆերենցնենք ըստ s-ի.

$$\frac{d^2r}{ds^2}=\frac{d^2r}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}-\frac{dr}{dt}\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3};$$

$\frac{d^2r}{ds^2}$-ու համար ստացված արտահայտությունը տեղադրելով (6) բանաձևի մեջ, կունենանք.

$$\frac{1}{R^2}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}-\frac{dr}{dt}\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}\right]^2=$$

$$=\frac{\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-2\frac{d^2r}{dt^2}\frac{dr}{dt}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6};$$

* Այս հավասարությունը հետևում է նրանից, որ $\left|\frac{dr}{ds}\right|=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta r|}{|\Delta s|}$։ Բայց Δr-ը Δs երկարությամբ աղեղը ձգող լարն է։ Ուստի $\frac{|\Delta r|}{|\Delta s|}$-ը ձգտում է 1-ի, երբ $\Delta s\to 0$։

$\frac{ds}{dt}$-ն և $\frac{d^2s}{dt^2}$-ն ըստ (8) և (9) բանաձևերի արտահայտելով r(t)-ի ածանցյալների միջոցով, կստանանք*

$$\frac{1}{R^2}=\frac{\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\left(\frac{d^2r}{dt^2}\frac{dr}{dt}\right)^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3}; \tag{10}$$

(10) բանաձևը կարելի է արտագրել այսպես**

$$K^2=\frac{1}{R^2}=\frac{\left|\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right|^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3}; \tag{11}$$

Մենք ստացանք բանաձև, որը հնարավորություն է տալիս հաշվել տրված կորի կորությունը նրա ցանկացած կետում՝ այդ կորի կամայական պարամետրական տրման դեպքում։

Եթե մասնավոր դեպքում կորը հարթ է և ընկած է Oxy հարթության մեջ, ապա նրա պարամետրական հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$x=\varphi(t),$$
$$y=\psi(t),$$
$$z=0;$$

x-ի, y-ի, z-ի այս արտահայտությունները տեղադրելով (11) բանաձևի մեջ, կստանանք նախկինում արտածած (գլ. VI-ում) բանաձևը։

* Հայտարարը ձևափոխենք հետևյալ կերպ. $\left(\frac{ds}{dt}\right)^6=\left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}^3=\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3$։ Այստեղ չի կարելի գրել $\left(\frac{dr}{dt}\right)^6$։ $\left(\frac{dr}{dt}\right)^3$-ու տակ հասկացվում է $\frac{dr}{dt}$ վեկտորի սկալյար քառակուսին։ $\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3$-ի տակ հասկացվում է $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ թվի երրորդ աստիճանը։ Իսկ $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ արտահայտությունն իմաստ չունի։

** Մենք օգտագործեցինք

$$a^2b^2-(ab)^2=(a\times b)^2$$

նույնությունը, որի ճշմարտության մեջ հեշտ է համոզվել, եթե նույնությունն արտագրենք հետևյալ տեսքով.

$$a^2b^2-(ab\cos\varphi)^2=(ab\sin\varphi)^2;$$

նաձևը, որը տալիս է պարամետրական տեսքով տրված հարթ կորի կորությունը.

$$K=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)|}{\{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\}^{3/2}}.$$

Օրինակ։ Հաշվել

$$r=i\,a\cos t+j\,a\sin t+k\,amt$$

պտուտակագծի կորությունը՝ նրա ցանկացած կետում։

Լուծում։

$$\frac{dr}{dt}=-i\,a\sin t+j\,a\cos t+k\,am,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-i\,a\cos t-j\,a\sin t,$$

$$\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -a\sin t & a\cos t & am\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}=ia^2m\sin t+ja^2m\cos t+ka^2,$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2=a^4(m^2+1),$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=a^2\sin^2t+a^2\cos^2t+a^2m^2=a^2(1+m^2).$$

Հետևաբար,

$$\frac{1}{R^2}=\frac{a^4(m^2+1)}{[a^2(1+m^2)]^3}=\frac{1}{a^2(1+m^2)^2}.$$

որտեղից

$$R=a(1+m^2)=\text{const}.$$

Այսպիսով, պտուտակագիծն ունի հաստատուն կորության շառավիղ։

Դիտողություն։ Եթե կորն ընկած է հարթության մեջ, ապա, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարելի է ենթադրել, որ այն ընկած է Oxy հարթության մեջ (դրան միշտ կարելի է հասնել կոորդինատների ձևափոխությամբ)։ Իսկ եթե կորն ընկած է Oxy հարթության մեջ, ապա $z=0$, բայց այդ դեպքում նաև $\frac{d^2z}{ds^2}=0$ և, հետևաբար, n վեկտորն ընկած է Oxy հարթության մեջ։ Այստեղից ստանում ենք եզրակացություն. եթե կորն ընկած է հարթության մեջ, ապա նրա գլխավոր նորմալն ընկած է այդ նույն հարթության մեջ։

Կետի արագությունը կորագիծ շարժման ժամանակ։ Դիցուք շարժվող կետը t ժամանակի որևէ պահին գտնվում է $\overline{OM}=r(t)$ (տես նկ. 200) շառավիղ-վեկտոր ունեցող M կետում, իսկ $t+\Delta t$ պահին գտնվում է $\overline{OM_1}=r(t+\Delta t)$ շառավիղ-վեկտոր ունեցող

M_1 կետում։ Այդ դեպքում $\overline{MM_1}$ վեկտորը կոչվում է կետի տեղափոխման վեկտոր։ $\overline{MM_1}$ տեղափոխման վեկտորի հարաբերությունը համապատասխան Δt ժամանակի աճին կոչվում է ավյալ ժամանակամիջոցում կետի միջին արագություն՝

$$V_{\text{միջ.}}=\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}=\frac{\Delta r}{\Delta t}=\overline{MN}.$$

Միջին արագության վեկտորը ևս ուղղված է MM_1 լարով՝ (տես նկ. 200, էջ 361)՝ կետի շարժման կողմը (ուղղագիծ շարժման դեպքում այն ուղղված է շարժման հետագծով)։

Կետի արագությունը ավյալ պահին սահմանվում է այսպես.

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}(V_{\text{միջ.}})=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{dr}{dt},$$

այսինքն

$$V=\frac{dr}{dt}. \qquad (12)$$

Այսպիսով կարելի է ասել. կետի արագությունը ավյալ պահին հավասար է կետի շառավիղ-վեկտորի առաջին ածանցյալին՝ ըստ ժամանակի։

§ 2-ի (2′) բանաձևի հիման վրա հետևում է, որ կոորդինատային առանցքների վրա արագության պրոյեկցիաները կլինեն.

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt}.$$

Արագության մոդուլը որոշվում է § 2-ի (3) բանաձևով՝

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \qquad (13)$$

Եթե ներմուծենք s աղեղի երկարությունը, ինչպես այդ արվել է այս պարագրաֆի սկզբում, և s աղեղի երկարությունը դիտարկենք որպես ժամանակի ֆունկցիա, ապա (12) բանաձևը կարելի է գրել այսպես.

$$v=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}=\tau v, \qquad (14)$$

որտեղ $v=\frac{ds}{dt}$-ն արագության բացարձակ մեծությունն է, իսկ τ-ն՝ շոշափողով շարժման կողմն ուղղված միավոր վեկտոր է։

Կետի արագացումը կորագիծ շարժման ժամա-

նակ։ Համանմանորեն, ինչպես այդ սահմանվեց III գլխի § 25-ում, կորագիծ շարժման ժամանակ, կետի w արագացում կոչվում է արագության վեկտորի ածանցյալն ըստ ժամանակի՝

$$w=\frac{dv}{dt}, \qquad (15)$$

Բայց $v=\frac{dr}{dr}$, հետևաբար,

$$w=\frac{d^2r}{dt^2}, \qquad (16)$$

Եթե ելնենք (14) բանաձևից, ապա կստանանք

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{d(v\cdot\sigma)}{dt},$$

Վերջին ածանցյալը բացելով ըստ § 3-ի (III) բանաձևի, կստանանք.

$$w=\frac{dv}{dt}\sigma+v\frac{d\sigma}{dt}, \qquad (17)$$

Օգտվելով (7) և (5) բանաձևերից, ձևափոխենք $\frac{d\sigma}{dt}$ ածանցյալը.

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{d\sigma}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{n}{R}v.$$

Տեղադրելով (17) հավասարության մեջ, վերջնականապես ստանում ենք.

$$w=\frac{dv}{dt}\sigma+v^2\frac{n}{R}, \qquad (18)$$

Այստեղ σ-ն միավոր վեկտոր է, որն ուղղված է շոշափողով՝ դեպի շարժման կողմը, n-ը՝ միավոր վեկտոր է՝ ուղղված գլխավոր նորմալով։

(18) բանաձևը բառերով ձևակերպվում է այսպես։

Կետի արագացման պրոյեկցիան շոշափողի վրա հավասար է տրագության բացարձակ մեծության առաջին ածանցյալին, իսկ արագացման պրոյեկցիան գլխավոր նորմալի վրա հավասար է արագության քառակուսին բաժանած հետագծի տվյալ կետում կորության շառավղին։

Քանի որ σ և n վեկտորները փոխադարձահայաց են, ապա արագացման մոդուլը որոշվում է

$$w=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \qquad (19)$$

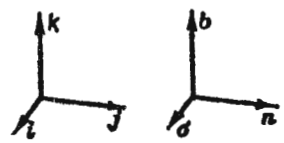
բանաձևով։

§ 5. Հպման հարթություն։ Բինորմալ։ Գլորում

Սահմանում 1։ Տրված կորի A կետում շոշափող ուղղով և գլխավոր նորմալով անցնող հարթությունը կոչվում է A կետի հպման հարթություն։

Հարթ կորի համար հպման հարթությունը համընկնում է կորի հարթության հետ։ Իսկ եթե կորը հարթ չէ, ապա նրա վրա վերցնելով P և P_1 երկու կետեր, մենք կստանանք երկու տարբեր հպման հարթություններ, որոնք միմյանց հետ կազմում են φ երկնիստ անկյունը։ Որքան մեծ է φ անկյունը, այնքան կորն իր ձևով ավելի խիստ է տարբերվում հարթ կորից։ Այդ բանը ճշգրտելու համար մտցնենք ևս մեկ սահմանում։

Սահմանում 2։ Կորի այն նորմալը, որն ուղղահայաց է հպման հարթությանը, կոչվում է բինորմալ։



Նկ. 204

Նկ. 205

Բինորմալի վրա վերցնենք b միավոր վեկտոր և այն ուղղենք այնպես, որպեսզի σ, n, b վեկտորները կազմեն նույն օրիենտացիայի եռյակ, ինչ և կոորդինատային առանցքներով ուղղված i, j, k միավոր վեկտորները (նկ. 204, 205)։

Վեկտորների վեկտորական և սկալյար արտադրյալի սահմանման համաձայն ունենք.

$$b=\sigma\times n, \quad bb=1. \qquad (1)$$

Գտնենք $\frac{db}{ds}$ ածանցյալը։ Ըստ § 3-ի (V) բանաձևի

$$\frac{db}{ds}=\frac{d(\sigma\times n)}{ds}=\frac{d\sigma}{ds}\times n+\sigma\times\frac{dn}{ds};$$

Բայց $\frac{d\sigma}{ds}=\frac{n}{R}$ (տես § 4), որի համար

$$\frac{d\sigma}{ds}\times n=\frac{1}{R}n\times n=0,$$

և (2) բանաձևն ընդունում է

$$\frac{db}{ds}=\sigma\times\frac{dn}{ds}$$

տեսքը։

Այստեղից հետևում է (վեկտորական արտադրյալի սահմանման հիման վրա), որ $\frac{db}{ds}$-ը σ շոշափող վեկտորին ուղղահայաց վեկտոր է։ Մյուս կողմից, քանի որ b-ն միավոր վեկտոր է, ապա $\frac{db}{ds}$-ը ուղղահայաց է b-ին (տես § 3, հետևանք)։

Նշանակում է, $\frac{db}{ds}$ վեկտորն ուղղահայաց է և σ-ին և b-ին, այսինքն՝ կոլինեար է n վեկտորին։

$\frac{db}{ds}$ վեկտորի երկարությունը նշանակենք $\frac{1}{|T|}$-ով, այսինքն՝ ընդունենք

$$\left|\frac{db}{ds}\right|=\frac{1}{|T|},$$

այդ դեպքում

$$\frac{db}{ds}=\frac{1}{T}n;$$

$\frac{1}{T}$ մեծությունը կոչվում է տրված կորի ոլորում։

Կորի երկու կետերին համապատասխանող հպման հարթությունների կազմած μ երկնիստ անկյունը հավասար է բինորմալների կազմած անկյանը։ Գլ. IX-ի § 4-ի բանաձևին համանման կարելի է գրել.

$$\left|\frac{db}{ds}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mu}{|\Delta s|};$$

Եվ այսպես, A կետում կորի ոլորումը բացարձակ մեծությամբ հավասար է այն սահմանին, որին ձգտում է A և B հարևան կետերում հպման հարթությունների միջև եղած μ անկյան և AB աղեղի (Δs) երկարության հարաբերությունը, երբ Δs→0։

Եթե կորը հարթ է, ապա հպման հարթությունը չի փոխում իր ուղղությունը և, հետևաբար, ոլորումը հավասար է զրոյի։

Ոլորման սահմանումից պարզ է, որ այն հանդիսանում է հարթ կորից տարածական կորի շեղման չափը։ T մեծությունը կոչվում է կորի ոլորման շառավիղ։

Գտնենք ոլորումը հաշվելու համար բանաձև։ (3) և (4) բանաձևերից հետևում է.

$$\frac{1}{T}n=\sigma\times\frac{dn}{ds};$$

Երկու մասերը սկալյարապես բազմապատկենք n-ով.

$$\frac{1}{T}nn=n\left(\sigma\times\frac{dn}{ds}\right);$$

Վերջին հավասարության աջ մասում մենք ստացանք n, σ և $\frac{dn}{ds}$ երեք վեկտորների այսպես կոչված խառը (կամ եռակի) արտադրյալը։ Այսպիսի արտադրյալի մեջ, ինչպես հայտնի է, կարելի է արտադրիչները շրջանային կարգով տեղափոխել։ Բացի այդ, հաշվի առնելով, որ nn=1, վերջին հավասարությանն արտագրենք հետևյալ տեսքով.

$$\frac{1}{T}=\sigma\left(\frac{dn}{ds}\times n\right)$$

կամ

$$\frac{1}{T}=-\sigma\left(n\times\frac{dn}{ds}\right); \qquad (5)$$

Բայց քանի որ $n=R\frac{d^2r}{ds^2}$, ապա

$$\frac{dn}{ds}=R\frac{d^3r}{ds^3}+\frac{dR}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}$$

և

$$\left(n\times\frac{dn}{ds}\right)=R\frac{d^2r}{ds^2}\times\left(R\frac{d^3r}{ds^3}+\frac{dR}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}\right)=$$
$$=R^2\left(\frac{d^2r}{ds^2}\times\frac{d^3r}{ds^3}\right)+R\frac{dR}{ds}\left(\frac{d^2r}{ds^2}\times\frac{d^2r}{ds^2}\right),$$

իսկ քանի որ վեկտորի՝ ինքն իր հետ վեկտորական արտադրյալը հավասար է զրոյի, ապա

$$\frac{d^3r}{ds^3}\times\frac{d^2r}{ds^2}=0,$$

Այսպիսով,

$$n\times\frac{dn}{ds}=R^2\left(\frac{d^2r}{ds^2}\times\frac{d^3r}{ds^3}\right),$$

Նկատելով, որ $\sigma=\frac{dr}{ds}$, և վերադառնալով (5) հավասարությանը, ստանում ենք.

$$\frac{1}{T}=-R^2\frac{dr}{ds}\left(\frac{d^2r}{ds^2}\times\frac{d^3r}{ds^3}\right). \qquad (6)$$

Եթե r վեկտորն արտահայտված է որպես t կամայական պարամետրի ֆունկցիա, ապա կարելի է ցույց տալ*, համանման նրան ինչպես այդ արվել է նախորդ պարագրաֆում, որ

$$\frac{dr}{ds}\left(\frac{d^2r}{ds^2}\times\frac{d^3r}{ds^3}\right)=\frac{\frac{dr}{dt}\left(\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right)}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3},$$

Այս արտահայտությունը տեղադրելով (6) բանաձևի մեջ և R^2-ն փոխարինելով ըստ § 4-ի (11) բանաձևի իր արտահայտությամբ, վերջնականապես ստանում ենք.

$$\frac{1}{T}=-\frac{\frac{dr}{dt}\left(\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right)}{\left(\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2}, \qquad (7)$$

Այս բանաձևը հնարավորություն է տալիս հաշվել կորի ոլորումը ցանկացած կետում, եթե կորի հավասարումը տրված է t պարամետր պարունակող պարամետրական հավասարումներով:

Այս պարագրաֆի վերջում նշենք, որ σ, b, n, վեկտորների ածանցյալներն արտահայտող բանաձևերը կոչվում են Սերե-ֆրենեյի բանաձևեր.

$$\frac{d\sigma}{ds}=\frac{n}{R},\qquad \frac{db}{ds}=\frac{n}{T},\qquad \frac{dn}{ds}=-\frac{\sigma}{R}-\frac{b}{T}.$$

Նրանցից վերջինը ստացվում է այսպես.

$$n=b\times\sigma$$

$$\frac{dn}{ds}=\frac{d(b\times\sigma)}{ds}=\frac{db}{ds}\times\sigma+b\times\frac{d\sigma}{ds}=\frac{n}{T}\times\sigma+b\times\frac{n}{R}=\frac{1}{T}n\times\sigma+$$
$$+\frac{1}{R}b\times n;$$

բայց

$$n\times\sigma=-b,\qquad b\times n=-\sigma,$$

ուստի

$$\frac{dn}{ds}=-\frac{b}{T}-\frac{\sigma}{R}.$$

Օրինակ. Հաշվել

$$r=i\,a\cos t+j\,a\sin t+k\,amt$$

պտուտակագծի ոլորումը:

---

* Իրոք,

$$\frac{dr}{ds}=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt},$$

Այս հավասարությունը դիֆերենցենք ըստ t-ի և մեկ անգամ.

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt}+\frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d^2r}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2},$$

Նորից դիֆերենցենք ըստ t-ի.

$$\frac{d^3r}{dt^3}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2r}{ds^2}\right)\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d^2r}{ds^2}2\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{dr}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}=$$
$$=\frac{d^3r}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3+3\frac{d^2r}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{dr}{ds}\frac{d^3s}{dt^3},$$

Այնուհետև, կազմենք խառն (եռակի) արտադրյալը.

$$\frac{dr}{dt}\left(\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right)=$$
$$=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}\left\{\left[\frac{d^2r}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right]\times\left[\frac{d^3r}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3+3\frac{d^2r}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{dr}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}\right]\right\},$$

Բազմանդամների բազմապատկման կանոնով բացելով այս արտադրյալը և զեն զցելով բոլոր այն անդամները, որոնք պարունակում են թեկուզ երկու միանման վեկտորական բազմապատկիչներ (քանի որ երեք արտադրիչների խառն արտադրյալը, որի մեջ թեկուզ երկու արտադրիչներ հավասար են, հավասար է զրոյի), կստանանք.

$$\frac{dr}{dt}\left(\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right)=\frac{dr}{ds}\left(\frac{d^2r}{ds^2}\times\frac{d^3r}{ds^3}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^6,$$

Վերջապես, նկատելով, որ

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \text{ կամ } \left(\frac{ds}{dt}\right)^6=\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3,$$

ստանում ենք պահանջվող հավասարությունը:

Հետևաբար,

$$\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right]=\begin{vmatrix}-a\sin t & a\cos t & am\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\\ a\sin t & -a\cos t & 0\end{vmatrix}=a^3m,$$

$$\left[\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right]^2=a^4(1+m^2)$$ (տես օրինակ § 4)։

Հետևաբար,

$$T=\frac{a^4(1+m^2)}{a^3m}=\frac{a(1+m^2)}{m}.$$

§ 6. Մակերևույթի շոշափող հարթությունը եվ նորմալ ուղիղը

Դիցուք տրված է մակերևույթ, որը տրված է

$$F(x,\ y,\ z)=0 \qquad (1)$$

տեսքի հավասարումով։

Մտցնենք հետևյալ սահմանումը։

Սահմանում 1։ Ուղիղ գիծը կոչվում է մակերևույթի շոշափող որևէ P(x, y, z) կետում, եթե այն որևէ մի կորի շոշափող է որն սմբողջապես ընկած է մակերևույթի վրա և անցնում է P կետով։

Քանի որ P կետով անցնում են անվերջ թվով կորեր, որոնք գտնվում են մակերևույթի վրա, ապա և այդ կետով անցնող մակերևույթի շոշափողները կլինեն, ընդհանրապես ասած, անթիվ բազմությամբ։

Մտցնենք F(x, y, z)=0 մակերևույթի եզակի և սովորական կետերի մասին պայմանը։

Եթե M(x, y, z) կետում $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ բոլոր երեք ածանցյալները հավասար են զրոյի կամ թեկուզ այդ ածանցյալներից գոնե մեկը գոյություն չունի, ապա M կետը կոչվում է մակերևույթի եզակի կետ։ Եթե M(x, y, z) կետում $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ բոլոր երեք ածանցյալները գոյություն ունեն և անընդհատ են, ընդ որում նրանցից թեկուզ մեկը զրոյից տարբեր է, ապա M կետը կոչվում է մակերևույթի սովորական կետ։

Այժմ կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ։ Տրված (1) մակերևույթի՝ նրա P սովորական կետում բոլոր շոշափող ուղիղները ընկած են մեկ հարթության մեջ։

Ապացույց։ Մակերևույթի վրա դիտարկենք որևէ L գիծ

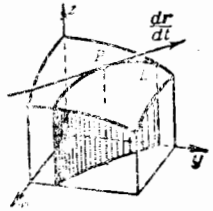
(նկ. 206), որն անցնում է մակերևույթի տրված P կետով։ Դիցուք դիտարկվող կորը տրված է

$$x=\varphi(t);\quad y=\psi(t);\quad z=\chi(t) \qquad (2)$$

պարամետրական հավասարումներով։

Նորի շոշափողը կլինի մակերևույթի շոշափող։ Այդ շոշափողի հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$



Նկ. 206

Եթե (2) արտահայտությունները տեղադրենք (1) հավասարման մեջ, ապա վերջինս կվերածվի t-ի նկատմամբ նույնության, քանի որ (2) կորն ընկած է (1) մակերևույթի վրա։ Այն դիֆերենցելով ըստ t-ի, կստանանք*

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0. \qquad (3)$$

Այնուհետև, դիտարկենք N և $\frac{dr}{dt}$ վեկտորները, որոնք անցնում են P կետով.

$$N=\frac{\partial F}{\partial x}i+\frac{\partial F}{\partial y}j+\frac{\partial F}{\partial z}k. \qquad (4)$$

Այս վեկտորի՝ $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ պրոյեկցիաները կախված են P կետի x, y, z կոորդինատներից. նկատենք, որ P-ն սովորական կետ է, ուստի այդ պրոյեկցիաները P կետում միաժամանակ զրո չեն դառնում և այդ պատճառով

$$|N|=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\neq 0.$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j+\frac{dz}{dt}k \qquad (5)$$

վեկտորը P կետով անցնող և մակերևույթի վրա գտնվող կորի շոշա-

* Այստեղ կիրառում ենք երեք փոփոխականների բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման կանոնը։ Այդ կանոնը տվյալ դեպքում կիրառելի է, քանի որ $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ բոլոր մասնական ածանցյալները, ըստ պայմանի, անընդհատ են։

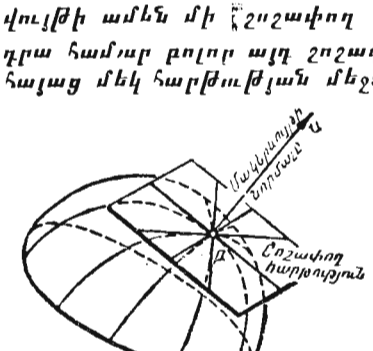
փող է։ Այդ վեկտորի պրոյեկցիաները հաշվում են (2) հավասարումների հիման վրա t պարամետրի այն արժեքի համար, որը համապատասխանում է P կետին։ Հաշվենք N և $\frac{dr}{dt}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, որը հավասար է նույնանուն պրոյեկցիաների արտադրյալների գումարին՝

$$N\frac{dr}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

(3) հավասարության հիման վրա աջ մասի արտահայտությունը հավասար է զրոյի, հետևաբար

$$N\frac{dr}{dt}=0.$$

Վերջին հավասարությունից հետևում է, որ N վեկտորը և (2) կորի P կետում՝ $\frac{dr}{dt}$ շոշափող վեկտորը ուղղահայաց են։ Արված դատողությունն իրավացի է P կետով անցնող և մակերևույթի վրա ընկած ցանկացած (2) կորի համար։ Հետևաբար, P կետում մակերևույթի ամեն մի շոշափող ուղղահայաց է միևնույն N վեկտորին և դրա համար բոլոր այդ շոշափողները ընկած են N վեկտորին ուղղահայաց մեկ հարթության մեջ։ Թեորեմն ապացուցված է։



Նկ. 207

Սահմանում 2։ Այն հարթությունը, որի վրա գտնվող և նրա տրված P կետով անցնող գծերի բոլոր շոշափող ուղիղները, կոչվում է P կետում մակերևույթի շոշափող հարթություն (նկ. 207)։

Նկատենք, որ մակերևույթի եզակի կետերում կարող է գոյության չունենալ շոշափող հարթություն։ Այդպիսի կետերում մակերևույթի շոշափող ուղիղները կարող են ընկած չլինել մեկ հարթության մեջ։ Այսպես, օրինակ, կոնական մակերևույթի գագաթը եզակի կետ է։ Այդ կետում կոնական մակերևույթի շոշափողները մեկ հարթության մեջ չեն (նրանք իրենք կազմում են կոնական մակերևույթ)։

Գրենք (1) մակերևույթի սովորական կետում շոշափող հարթության հավասարումը։ Քանի որ այդ հարթությունն ուղղահայաց է (4) վեկտորին, ապա նրա հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0. \qquad (6)$$

Եթե մակերևույթի հավասարումը տրված է

$$z=f(x, y), \text{ կամ } z-f(x, y)=0$$

ձևով, ապա

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{df}{dx},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{df}{dy},\quad \frac{\partial F}{\partial z}=1,$$

և այս դեպքում շոշափող հարթության հավասարումը կընդունի

$$Z-z=\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{df}{dy}(Y-y) \qquad (6')$$

տեսքը։

Դիտողություն։ Եթե (6′) բանաձևում ընդունենք $X-x=\Delta x$, $Y-y=\Delta y$, ապա այդ բանաձևը կընդունի

$$Z-z=\frac{df}{dx}\Delta x+\frac{df}{dy}\Delta y$$

տեսքը։ Նրա աջ մասը ներկայացնում է $z=f(x, y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը։ Հետևաբար, $Z-z=dz$։ Այսպիսով, երկու փոփոխականների ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը $M(x, y)$ կետում, որը համապատասխանում է x և y անկախ փոփոխականների Δx և Δy աճերին, հավասար է տրված ֆունկցիայի գրաֆիկ հանդիսացող մակերևույթի շոշափող հարթության ապլիկատի (z) աճին։

Սահմանում 3։ (1) մակերևույթի $P(x, y, z)$ կետի շոշափող հարթությանն ուղղահայաց տարված ուղիղը կոչվում է մակերևույթի նորմալ (նկ. 207)։

Գրենք նորմալի հավասարումները։ Քանի որ նրա ուղղությունը համընկնում է N վեկտորի ուղղության հետ, ապա նրա հավասարումները կլինեն.

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad (7)$$

Եթե մակերևույթի հավասարումը տրված է $z=f(x, y)$ կամ

$$z-f(x, y)=0$$

ձևով, ապա նորմալի հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{1}.$$

Դիտողություն։ Դիցուք $F(x, y, z)=0$ մակերևույթը հանդիսանում է որևէ $u=u(x, y, z)$ երեք փոփոխականների ֆունկցիայի համար մակարդակի մակերևույթ, այսինքն՝

$$F(x, y, z)=u(x, y, z)-C=0.$$

Ակնհայտ է, որ N վեկտորը, որը որոշվում է (4) բանաձևով և ուղղված է $F=u(x, y, z)-C=0$ մականդակի մակերևույթի նորմալով, կլինի՝

$$N=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k,$$

այսինքն՝

$$N=\operatorname{grad} u.$$

Դրանով մենք ապացուցեցինք, որ $u(x, y, z)$ ֆունկցիայի գրադիենտն ուղղված է տրված կետով անցնող մակարդակի մակերևույթի նորմալով։

Օրինակ։ Գրել $P(1, 2, 3)$ կետում $x^2+y^2+z^2=14$ գնդի մակերևույթի շոշափող հարթության հավասարումը և նորմալի հավասարումները։

Լուծում։

$$F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-14=0,\quad \frac{\partial F}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=2z,$$

$x=1,\ y=2,\ z=3$ դեպքում ունենք.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=4,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=6.$$

Հետևաբար, շոշափող հարթության հավասարումը կլինի՝

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0 \text{ կամ } x+2y+3z-14=0.$$

Նորմալի հավասարումներն են՝

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6},$$

կամ

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}.$$

Գտնել վեկտորների ածանցյալները. 1. $r=i\operatorname{ctg} t+i\operatorname{arctg} t$։ Պատ. $r'=-\frac{1}{\sin^2 t}i+\frac{1}{1+t^2}j$։ **2.** $r=ie^{-t}+j2t+k\ln t$։ Պատ. $r'=-ie^{-t}+2j+\frac{k}{t}$։

3. $r=t^2i-\frac{j}{t}+\frac{k}{t^2}$։ Պատ. $r'=2ti+\frac{j}{t^2}-\frac{2k}{t^3}$։

4. Գտնել $r=ti+t^2j+t^3k$ կորի (3, 9, 27) կետում շոշափող վեկտորը, շոշափողի հավասարումները և նորմալ հարթության հավասարումները։ Պատ. $r'=i+6j+27k$, շոշափողը՝ $\frac{x-3}{1}=\frac{y-9}{6}=\frac{z-27}{27}$; նորմալ հարթությունը՝ $x+6y+27z=786$։

5. Գտնել $r=i\cos^2\frac{t}{2}+\frac{1}{2}j\sin t+k\sin\frac{t}{2}$ կորի շոշափողի վեկտորը, շոշափողի հավասարումները և նորմալ հարթության հավասարումը։ Պատ. $r'=-\frac{1}{2}t\sin t+\frac{1}{2}j\cos t+\frac{1}{2}k\cos\frac{t}{2}$, շոշափողի հավասարումը՝ $\frac{X-\cos^2\frac{t}{2}}{-\sin t}=\frac{Y-\frac{1}{2}\sin t}{\cos t}=\frac{Z-\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}$, նորմալ հարթության հավասարումը՝ $+X\sin t-Y\cos t-Z\cos\frac{t}{2}=x\sin t-y\cos t-z\cos\frac{t}{2}$ որտեղ x-ը, y-ը, z-ը կորի այն կետի կոորդինատներն են, որով տարվում է նորմալ հարթությունը (այսինքն $x=\cos^2\frac{t}{2}$, $y=\frac{1}{2}\sin t$, $z=\sin\frac{t}{2}$)։

6. Գտնել $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\sin\frac{t}{2}$ կորի շոշափողի հավասարումը և այդ շոշափողի ու կոորդինատային առանցքների կազմած անկյունների կոսինուսները։ Պատ. $\frac{X-X_0}{\sin\frac{t_0}{2}}=\frac{Y-Y_0}{\cos\frac{t_0}{2}}=\frac{Z-Z_0}{\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}}$, $\cos\alpha=\sin^2\frac{t_0}{2}$, $\cos\beta=\frac{1}{2}\sin t_0$, $\cos\gamma=\cos\frac{t_0}{2}$։

7. Գտնել $z=x^2-y^2$, $y=x$ կորի՝ կոորդինատների սկզբնակետում նորմալ հարթության հավասարումը։ Ցուցում։ Կորի հավասարումը գրել պարամետրային տեսքով։ Պատ. $x+y=0$։

8. Գտնել $r=i(\cos t+\sin^2 t)+j\sin t(1-\cos t)-k\cos t$ կորի համար $t=\frac{\pi}{2}$ կետում σ-ն, n-ը, b-ն։ Պատ. $\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}(-i+j+k)$, $n=\frac{-5i-4j-k}{\sqrt{42}}$, $b=\frac{i-2j+3k}{\sqrt{14}}$։

9. Գտնել $x=\frac{t^4}{4}$, $y=\frac{t^3}{3}$, $z=\frac{t^2}{2}$ կորի (x_0, y_0, z_0) կետում գլխավոր նորմալի և բինորմալի հավասարումները։ Պատ. $\frac{x-x_0}{t_0^3+2t_0}=\frac{y-y_0}{t-t_0^4}=\frac{z-z_0}{-2t_0^3-t_0}$, $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{-2t_0}=\frac{z-z_0}{t_0^2}$։

10. Գտնել $y^2=x$, $x^2=z$ կորի $M(1, 1, 1)$ կետում հպման հարթության հավասարումը։ Պատ. $6x-8y-z+3=0$։

11. Գտնել $x^2+y^2+z^2-4=0$, $x+y-z=0$ հավասարումներով տրված կորի կորության շառավիղը։ Պատ. $k=2$։

12. Գտնել $r=i\cos t+j\sin t+k\,\mathrm{sh}\,t$ կորի ոլորման շառավիղը։ Պատ. $T=-\mathrm{ch}\,t$։

13. Գտնել կորության և ոլորման շառավիղը $r=t^2i+2t^3j$ կորի համար։ Պատ. $R=\frac{2}{3}t(1+9t^2)^{3/2}$, $T=\infty$։

14. Ապացուցել, որ $r=(a_1t^2+b_1t+c_1)i+(a_2t^2+b_2t+c_2)j+(a_3t^2+b_3t+c_3)k$ կորը հարթ է։ Պատ. $r'''=0$, այդ պատճառով ոլորումը հավասար է զրոյի։

15. Գտնել $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$ կորի կորությունը և ոլորումը։ Պատ. կորությունը հավասար է $\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$, ոլորումը՝ $\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$։

16. Գտնել $x=e^{-t}\sin t$, $y=e^{-t}\cos t$, $z=e^{-t}$ կորի կորությունը և ոլորումը։ Պատ. կորությունը հավասար է $\frac{\sqrt{2}}{3}e^t$, ոլորումը՝ $-\frac{1}{3}e^t$։

17. Գտնել $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ հիպերբոլոիդի (x_1, y_1, z_1) կետում շոշափող հարթության հավասարումը։ Պատ. $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}-\frac{z_1z}{c^2}=1$։

18. Գտնել $(2, 2, 3)$ կետում $x^2-4y^2+2z^2=6$ մակերևույթի նորմալի հավասարումը։ Պատ. $y+4x=10$, $3x-z=3$։

19. Գտնել $M(2, 1, 12)$ կետում $z=2x^2+4y^2$ մակերևույթի շոշափող հարթության հավասարումը։ Պատ. $8x+8y-z=12$։

20. $x^2+2y^2+z^2=1$ մակերևույթին տանել շոշափող հարթություն, որը զուգահեռ լինի $x-y+2z=0$ հարթությանը։ Պատ. $x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$։

ԳԼՈՒԽ X
ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

§ 1. Նախնական ֆունկցիա և անորոշ ինտեգրալ

III գլխում դիտարկեցինք այսպիսի խնդիր՝ տրված է $F(x)$ ֆունկցիան. գտնել նրան ածանցյալը, այսինքն՝ $f(y)=F'(x)$ ֆունկցիան։

Այս գլխում մենք դիտարկելու ենք հակադարձ խնդիրը. տրված է $f(x)$ ֆունկցիան. պահանջվում է գտնել այնպիսի $F(x)$ ֆունկցիա, որի ածանցյալը $f(x)$-ն է, այսինքն՝

$$F'(x)=f(x)։$$

Սահմանում 1։ $F(x)$ ֆունկցիան կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի նախնականը $[a, b]$ հատվածում, եթե այդ հատվածի բոլոր կետերում տեղի ունի $F'(x)=f(x)$ հավասարությունը։

Օրինակ։ Գտնել $f(x)=x^2$ ֆունկցիայի նախնականը։

Նախնականի սահմանումից հետևում է, որ $F(x)=\frac{x^3}{3}$ ֆունկցիան հանդիսանում է նախնական, քանի որ $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$։

Հեշտ է նկատել, որ եթե տվյալ $f(x)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի նախնական, ապա այդ նախնականը միակը չէ։ Այսպես, նախորդ օրինակում իբրև նախնականներ կարելի է վերցնել հետևյալ ֆունկցիաները՝ $F(x)=\frac{x^3}{3}+1$, $F(x)=\frac{x^3}{3}-7$ կամ ընդհանրապես $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ (որտեղ C-ն կամայական հաստատուն է), քանի որ

$$\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2։$$

մյուս կողմից, կարելի է ապացուցել, որ $\frac{x^3}{3}+C$ տեսքի ֆունկցիաներով սպառվում են x^2 ֆունկցիայի բոլոր նախնականները: Դա բխում է հետևյալ թեորեմից:

Թեորեմ: Եթե $F_1(x)$-ը և $F_2(x)$-ը $[a, b]$ հատվածում $f(x)$ ֆունկցիայի երկու նախնականներն են, ապա նրանց տարբերությունը հավասար է հաստատուն թվի:

Ապացույց: Նախնականի սահմանման համաձայն x-ի՝ $[a, b]$ հատվածից վերցրած ցանկացած արժեքի համար ունենք.

$$\left.\begin{aligned} F_1'(x)&=f(x),\\ F_2'(x)&=f(x):\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Նշանակենք

$$F_1(x)-F_2(x)=\varphi(x): \qquad (2)$$

Այդ դեպքում (1) հավասարությունների հիման վրա

$$F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$$

կամ

$$\varphi'(x)=[F_1(x)-F_2(x)]'=0$$

x-ի՝ $[a, b]$ հատվածից վերցրած ցանկացած արժեքի համար: Բայց $\varphi'(x)=0$ հավասարությունից հետևում է, որ $\varphi(x)$-ը հաստատուն է:

Իրոք, Լագրանժի թեորեմը (տես գլ. IV, § 2) կիրառենք $\varphi(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ, որն, ակնհայտ է, անընդհատ և դիֆերենցելի է $[a, b]$ հատվածում: Ինչպիսին էլ լինի $[a, b]$ հատվածի x կետը, մենք Լագրանժի թեորեմի համաձայն ունենք.

$$\varphi(x)-\varphi(a)=(x-a)\varphi'(\xi),$$

որտեղ $a<\xi<x$:

Քանի որ $\varphi(\xi)=0$, ապա

$$\varphi(x)-\varphi(a)=0$$

կամ

$$\varphi(x)=\varphi(a): \qquad (3)$$

Այսպիսով, $\varphi(x)$ ֆունկցիան $[a, b)$ հատվածի ցանկացած x կետում պահպանում է $\varphi(a)$ արժեքը, իսկ դա էլ նշանակում է, որ $\varphi(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածում հաստատուն է: $\varphi(a)$ հաստատունը նշանակելով C-ով, (2) և (3) հավասարություններից ստանում ենք.

$$F_1(x)-F_2(x)=C:$$

Ապացուցած թեորեմից հետևում է, որ եթե տրված $f(x)$ ֆունկցիայի համար գտնված է ինչ-որ մեկ $F(x)$ նախնական, ապա $f(x)$-ի համար ցանկացած այլ նախնականն ունի $F(x)+C$ տեսքը, որտեղ $C=\text{const}$:

Սահմանում 2: Եթե $F(x)$ ֆունկցիան նախնական է $f(x)$-ի համար, ապա $F(x)+C$ արտահայտությունը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալ և նշանակվում է $\int f(x)dx$ սիմվոլով: Այսպիսով, ըստ սահմանման

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

եթե

$$F'(x)=f(x):$$

Այս դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան անվանում են ենթաինտեգրալային ֆունկցիա, $f(x)dx$-ը ենթաինտեգրալային արտահայտություն, $\int$ նշանը՝ ինտեգրալի նշան:

Այսպիսով, անորոշ ինտեգրալն իրենից ներկայացնում է $y=F(x)+C$ ֆունկցիաների ընտանիք:

Երկրաչափական տեսակետից անորոշ ինտեգրալն իրենից ներկայացնում է կորերի բազմություն (ընտանիք), որոնցից յուրաքանչյուրը ստացվում է կորերից մեկի՝ դեպի վերև կամ դեպի ներքև, այսինքն՝ Oy առանցքի երկայնքով ինքն իրեն զուգահեռ տեղափոխման ճանապարհով:

Բնականաբար հարց է ծագում. ամեն մի $f(x)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունե՞ն նախնականներ (նշանակում է, և անորոշ ինտեգրալ): Պարզվում է, որ ոչ ամեն մեկի համար: Համենայն դեպս, առանց ապացուցման նկատենք, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում, ապա այդ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի նախնական (նշանակում է և անորոշ ինտեգրալ):

Ներկա գլուխը նվիրված է այն մեթոդների պարզաբանմանը, որոնց օգնությամբ գտնում են տարրական ֆունկցիաների մի քանի դասերի նախնականները (և անորոշ ինտեգրալները):

Տվյալ $f(x)$ ֆունկցիայի համար նախնականը գտնելը կոչվում է անորոշ ինտեգրում:

Նկատենք հետևյալը. եթե տարրական ֆունկցիայի ածանցյալը միշտ հանդիսանում է տարրական ֆունկցիա, ապա տարրական ֆունկցիայի նախնականը կարող է լինել վերջավոր թվով տարրական ֆունկցիաների օգնությամբ չներկայացվող: Այս հարցին կանդրադառնանք սույն գլխի վերջում:

Սահմանում 2-ից հետևում է.

1. Անորոշ ինտեգրալի ածանցյալը հավասար է ենթաինտեգրալային ֆունկցիային, այսինքն եթե $F'(x)=f(x)$, ապա և

$$\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+C)'=f(x): \qquad (14)$$

Վերջին հավասարությունը պետք է հասկանալ այն իմաստով, որ ցանկացած նախնականի ածանցյալը հավասար է ենթաինտեգրալային ֆունկցիային:

2. Անորոշ ինտեգրալի դիֆերենցիալը հավասար է ենթաինտեգրալային արտահայտությանը՝

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx: \qquad (15)$$

Այդ ստացվում է (4) բանաձևի հիման վրա:

3. Որևէ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի անորոշ ինտեգրալը հավասար է այդ ֆունկցիային գումարած կամայական հաստատուն՝

$$\int dt(x)=F(x)+C:$$

Վերջին հավասարության իրավացիությունը կարելի է ստուգել դիֆերենցմամբ (հավասարության երկու մասերի դիֆերենցիալները հավասար են $dF(x)$-ի):

§ 2. Ինտեգրալների աղյուսակ

Նախքան ինտեգրման մեթոդների շարադրմանն անցնելը, բերենք պարզագույն ֆունկցիաների ինտեգրալների աղյուսակը:

Ինտեգրալների աղյուսակը անմիջապես բխում է գլ. X, § 1-ի «Սահմանում 2»-ից և ածանցյալների աղյուսակից (գլ. III, § 15): (Ներքևում գրված հավասարությունների իրավացիությունը հեշտ է ստուգել դիֆերենցմամբ, այսինքն՝ ցույց տալ, որ աջ մասի ածանցյալը հավասար է ենթաինտեգրալային ֆունկցիային):

1. $\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C \quad (a\neq -1)$: *(Այստեղ և հաջորդ բանաձևերում C-ի տակ հասկացվում է կամայական հաստատուն:)*

2. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$:

3. $\int \sin x dx=-\cos x+C$:

4. $\int \cos x dx=\sin x+C$:

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$:

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$:

7. $\int \operatorname{tg} x dx=-\ln|\cos x|+C$:

8. $\int \operatorname{ctg} x dx=\ln|\sin x|+C$:

9. $\int e^x dx=e^x+C$:

10. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$:

11. $\int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C$:

11'. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$:

12. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$:

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$:

13'. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$:

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$:

Դիտողություն: Ածանցյալների աղյուսակում (գլ. III, § 15) չկան 7, 8, 11', 12, 13' և 14 բանաձևերին համապատասխանող բանաձևեր: Այնուամենայնիվ նրանց իրավացիությունը հեշտ է հաստատել դիֆերենցման օգնությամբ:

Բանաձև 7-ի դեպքում ունենք.

$$(-\ln|\cos x|)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

հետևաբար,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C:$$

Բանաձև 8-ի դեպքում

$$(\ln|\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x,$$

հետևաբար,

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C:$$

Բանաձև 12-ի դեպքում

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)' = \frac{1}{2a}[\ln|a+x| - \ln|a-x|]' =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right] = \frac{1}{a^2-x^2},$$

հետևաբար,

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C:$$

Նշենք, որ վերջին բանաձևը կհետևի նաև գլ. X, § 9-ի ընդհանուր արդյունքներից:

Բանաձև 14-ի դեպքում

$$(\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}},$$

հետևաբար,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C:$$

Այս բանաձևն էլ նույնպես կհետևի § 10-ի ընդհանուր արդյունքներից:

Համանման ձևով ստացվում են 11′ և 13′ բանաձևերը: Նկատենք, որ այս բանաձևերը հետագայում կարտածվեն 11 և 13 բանաձևերից (տես § 4, օրինակներ 3 և 4):

§ 3. Անորոշ ինտեգրալի մի քանի հատկությունները

Թեորեմ 1: Երկու կամ մի քանի ֆունկցիաների հանրահաշվական գումարի անորոշ ինտեգրալը հավասար է նրանց ինտեգրալների հանրահաշվական գումարին՝

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx: \qquad (1)$$

Ապացուցման համար գտնենք այս հավասարության աջ և ձախ մասերի ածանցյալները: Նախորդ պարագրաֆի (4) հավասարության հիման վրա գտնում ենք.

$$\left(\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx\right)' = f_1(x)+f_2(x),$$

$$\left(\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx\right)' =$$

$$= \left(\int f_1(x)\,dx\right)' + \left(\int f_2(x)\,dx\right)' = f_1(x)+f_2(x):$$

Այսպիսով (1) հավասարության ձախ և աջ մասերի ածանցյալները միմյանց հավասար են, այսինքն ձախ մասի ցանկացած նախնականի ածանցյալը հավասար է հավասարության աջ մասի ցանկացած ֆունկցիայի ածանցյալին: Հետևաբար, ըստ գլ. X § 1-ի թեորեմի (1) հավասարության ձախ մասի ցանկացած ֆունկցիա նույն հավասարության աջ մասի ցանկացած ֆունկցիայից տարբերվում է հաստատուն գումարելիով: Հենց այդ իմաստով էլ պետք է ըմբռնել (1) հավասարությունը:

Թեորեմ 2: Հաստատուն արտադրիչը կարելի է հանել ինտեգրալի նշանից, այսինքն, եթե $a=\text{const}$, ապա

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx: \qquad (2)$$

(2) հավասարությունն ապացուցելու համար գտնենք նրա ձախ և աջ մասերի ածանցյալները.

$$\left(\int af(x)dx\right)'=af(x),$$

$$\left(a\int f(x)dx\right)'=a\left(\int f(x)dx\right)'=af(x):$$

Աջ և ձախ մասերի ածանցյալները հավասար են, հետևաբար, ինչպես և (1) հավասարության մեջ, ձախ և աջ մասերի երկու կամայական ֆունկցիաների տարբերությունը հաստատուն է։ Հենց այս իմաստով էլ պետք է ըմբռնել (2) հավասարությունը։

Անորոշ ինտեգրալներ հաշվելիս օգտակար է լինում նկատի ունենալ հետևյալ կանոնները.

I. *Եթե*

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

ապա

$$\int f(ax)dx=\frac{1}{a}F(ax)+C: \qquad (3)$$

Իրոք, դիֆերենցելով (3) հավասարության ձախ և աջ մասերը, կստանանք.

$$\left(\int f(ax)dx\right)'=f(ax),$$

$$\left(\frac{1}{a}F(ax)\right)'=\frac{1}{a}(F(ax))'x=\frac{1}{a}F'(ax)a=F'(ax)=f(ax),$$

Աջ և ձախ մասերի ածանցյալները հավասար են. ինչ պ. պ.։

II. *Եթե*

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

ապա

$$\int f(x+b)dx=F(x+b)+C: \qquad (4)$$

III. *Եթե*

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

ապա

$$\int (ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C: \qquad (5)$$

(4) և (5) հավասարությունները ստացվում են հավասարությունների աջ և ձախ մասերի դիֆերենցմամբ։

Օրինակ 1։

$$\int(2x^3-3\sin x+5\sqrt{x})dx=\int 2x^3dx-\int 3\sin x dx+\int 5\sqrt{x}\,dx=$$

$$=2\int x^3dx-3\int \sin x dx+5\int x^{\frac{1}{3}}dx=$$

$$=2\frac{x^{3+1}}{3+1}-3(-\cos x)+5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{2}x^4+3\cos x+\frac{10}{3}x\sqrt{x}+C.$$

Օրինակ 2։

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\sqrt[4]{x}\right)dx=3\int x^{-\frac{1}{3}}dx+\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{5}{4}}dx=$$

$$=3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1}+C=\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}+C:$$

Օրինակ 3։

$$\int\frac{dx}{x+3}=\ln|x+3|+C:$$

Օրինակ 4։

$$\int\cos 7x dx=\frac{1}{7}\sin 7x+C:$$

Օրինակ 5։

$$\int\sin(2x-6)dx=-\frac{1}{2}\cos(2x-6)+C:$$

§ 4. Ինտեգրում փոփոխականի փոխարինման մեթոդով կամ տեղադրման եղանակով

Դիցուք պահանջվում է գտնել $\int f(x)dx$ *ինտեգրալը, ընդ որում*

$f(x)$-ի համար անմիջապես նախնական ընտրել մենք չենք կարող, բայց մեզ հայտնի է, որ այն գոյություն ունի:

Ենթաինտեգրալային արտահայտության մեջ կատարենք փոփոխականի փոխարինում, ընդունելով

$$x=\varphi(t), \qquad (1)$$

որտեղ $\varphi(t)$-ն անընդհատ ֆունկցիա է անընդհատ ածանցյալով և ունի նաև հակադարձ ֆունկցիա: Այդ դեպքում $dx=\varphi'(t)dt$. ապացուցենք, որ տվյալ դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (2)$$

Այստեղ հասկացվում է, որ ինտեգրումից հետո հավասարության աջ մասում t-ի փոխարեն պետք է տեղադրվի նրա արտահայտությունը x-ով՝ (1) հավասարության հիման վրա:

Ցույց տալու համար, որ աջ և ձախ մասերում գտնվող արտահայտությունները վերոհիշյալ իմաստով նույնն են, պետք է ապացուցել, որ նրանց ածանցյալներն ըստ x-ի միմյանց հավասար են: Գտնենք ձախ մասի ածանցյալը.

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x=f(x):$$

(2) հավասարության աջ մասը կդիֆերենցենք ըստ x-ի որպես բարդ ֆունկցիա, որտեղ t-ն միջանկյալ արգումենտ է: t-ի կախումն x-ից արտահայտվում է (1) հավասարությամբ, ըստ որում $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ և ըստ հակադարձ ֆունկցիայի դիֆերենցման կանոնի

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}:$$

Այսպիսով, ունենք.

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t\frac{dt}{dx}=$$

$$=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=f[\varphi(t)]=f(x):$$

Հետևաբար, (2) հավասարության աջ և ձախ մասերի ածանցյալներն ըստ x-ի հավասար են, ինչ պ. ապ.:

$x=\varphi(t)$ ֆունկցիան պետք է ընտրել այնպես, որ կարելի լինի հաշվել (2) հավասարության աջ մասում գտնվող ինտեգրալը:

Դիտողություն: Ինտեգրելիս երբեմն նպատակահարմար է փոփոխականի փոխարինումն ընտրել ոչ թե $x=\varphi(t)$, այլ $t=\varphi(x)$ տեսքով: Այդ ցույց տանք օրինակի վրա: Դիցուք պետք է հաշվել

$$\int\frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}$$

տեսքի ինտեգրալը: Այսպես հարմար է ընդունել

$$\psi(x)=t,$$

այդ դեպքում

$$\psi'(x)dx=dt,$$

$$\int\frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\psi(x)|+C:$$

Բերենք փոփոխականների փոխարինման օգնությամբ ինտեգրման մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 1: $\int\sqrt{\sin x}\cos x dx=?$: Կատարենք $t=\sin x$ տեղադրությունը. այդ դեպքում $dt=\cos x dx$ և, հետևաբար,

$$\int\sqrt{\sin x}\cos x dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{1/2}dt=\frac{2t^{3/2}}{3}+C=\frac{2}{3}\sin^{3/2}x+C.$$

Օրինակ 2: $\int\frac{xdx}{1+x^2}=?$ Ընդունում ենք $t=1+x^2$; այդ դեպքում $dt=2xdx$ և $\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$:

Օրինակ 3: $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+(x/a)^2}$: Ընդունում ենք $t=\frac{x}{a}$. այդ դեպքում $dx=adt$, $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{adt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$:

Օրինակ 4: $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x/a)^2}}$: Ընդունում ենք $t=\frac{x}{a}$.

այդ դեպքում $dx=adt$, $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{adt}{\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+$

$+C=\arcsin\frac{x}{a}+C$ (ենթադրվում է, որ $a>0$):

3 և 4 օրինակներում արտածված են ինտեգրալների աղյուսակում 11′ և 13′ համարների տակ բերված բանաձևերը (տես վերևում, § 2):

Օրինակ 5: $\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}=?$: *Ընդունում ենք* $t=\ln x$, *այդ դեպքում* $dt=$ $=\frac{dx}{x}$,

$$\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}(\ln x)^4+C:$$

Օրինակ 6: $\int\frac{xdx}{1+x^4}=?$: *Ընդունում ենք* $t=x^2$, *այդ դեպքում*, $dt=2xdx$,

$$\int\frac{xdx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C:$$

Փոփոխականների փոխարինման մեթոդը անորոշ ինտեգրալների հաշվման հիմնական մեթոդներից մեկն է: Նույնիսկ այն դեպքերում, երբ մենք ինտեգրում ենք որևէ ուրիշ մեթոդով, հաճախ ենք ստիպված լինում միջանկյալ հաշվումներում դիմել փոփոխականների փոխարինմանը: Ինտեգրման հաջողությունը նշանակալից աստիճանով կախված է այն բանից, կարող ենք մենք ընտրել փոփոխականների այնպիսի հաջող փոխարինում, որը կպարզեցներ տվյալ ինտեգրալը: Խոսելով ըստ էության, ինտեգրման մեթոդների ուսումնասիրությունը բերվում է այն բանի պարզաբանմանը, թե ինչպիսի փոփոխականի փոխարինում պետք է կատարել ենթաինտեգրալային արտահայտության այս կամ այն տեսքի դեպքում: Հենց դրան էլ նվիրված է ներկա գլխի մեծ մասը:

§ 5. Քառակուսի եռանդամ պարունակող մի քանի ֆունկցիաների ինտեգրալները

1. *Դիտարկենք*

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

ինտեգրալը: Նախապես ձևափոխենք հայտարարի եռանդամը, այն

ներկայացնելով քառակուսիների գումարի կամ տարբերության տեսքով

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)\pm k^2\right],$$

որտեղ նշանակված է

$$\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2,$$

Պլյուս կամ մինուս նշանը վերցվում է կախված այն բանից, ձախ մասի արտահայտությունը դրական կլինի, թե բացասական, այսինքն՝ ax^2+bx+c *եռանդամի արմատները կլինեն կոմպլեքս կամ իրական:*

Այսպիսով, I_1 *ինտեգրալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.*

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}:$$

Վերջին ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում

$$x+\frac{b}{2a}=t,\quad dx=dt:$$

Այդ դեպքում կստանանք.

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}:$$

Դրանք աղյուսակային ինտեգրալներն են (տես 11′ և 12 բանաձևերը):

Օրինակ 1: Հաշվել

$$\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}$$

ինտեգրալը:

Լուծում:

$$I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}:$$

Կատարենք փոփոխականի փոխարինում $x+2=t$, $dx=dt$: Տեղադրելով ինտեգրալի մեջ ստանում ենք ապյուսակային ինտեգրալ՝

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}+C:$$

t-ի փոխարեն տեղադրելով նրա արտահայտությունն x-ով, վերջնականապես ստանում ենք.

$$I=\frac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C:$$

II. Դիտարկենք ավելի ընդհանուր տեսքի ինտեգրալ

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx:$$

Կատարենք ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի նույնական ձևափոխություն.

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx:$$

Վերջին ինտեգրալը ներկայացնենք երկու ինտեգրալների գումարի տեսքով: Հաստատուն բազմապատկիչները դուրս բերելով ինտեգրալների նշանից, կստանանք.

$$I_1=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}:$$

Երկրորդ ինտեգրալը I_1 ինտեգրալն է, որը մենք կարող ենք հաշվել: Առաջին ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում

$$ax^2+bx+c=t,\quad (2ax+b)dx=dt:$$

Հետևաբար,

$$\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|ax^2+bx+c|+C:$$

Այսպիսով, վերջնականապես ստանում ենք.

$$I_2=\frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1:$$

Օրինակ 2: Հաշվել

$$I=\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$$

ինտեգրալը:

Կիրառենք նշված եղանակը.

$$I=\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-2)+\left(3+\frac{1}{2}2\right)}{x^2-2x-5}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-5}+2\int\frac{dx}{x^2-2x-5}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+4\int\frac{dx}{(x-1)^2-6}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+2\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right|+C:$$

III. Դիտարկենք

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

ինտեգրալը: I կետում դիտարկված ձևափոխությունների օգնությամբ, այդ ինտեգրալը, կախված a-ի նշանից, բերվում է

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}},\ \text{երբ}\ a>0\ \text{կամ}\ \int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}},\ \text{երբ}\ a<0$$

տեսքի ապյուսակային ինտեգրալների, որ մենք արդեն դիտարկել ենք ինտեգրալների ապյուսակում (տես 13′ և 14 բանաձևերը):

IV. $$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

տեսքի ինտեգրալը հաշվվում է հետևյալ ձևափոխությունների օգնությամբ, որոնք համանման են II կետում դիտարկվածներին.

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}:$$

Ստացված ինտեգրալներից առաջինի նկատմամբ կիրառելով

$$ax^2+bx+c=t, \quad (2ax+b)dx=dt,$$

տեղադրությունը, կստանանք.

$$\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{ax^2+bx+c}+C:$$

Երկրորդ ինտեգրալն էլ մենք դիտարկել ենք սույն պարագրաֆի III կետում:

Օրինակ 3.

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x-10}}dx=\int\frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx-7\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}|+C=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln x+2+\sqrt{x^2+4x+10}|+C.$$

§ 6. Մասերով ինտեգրում

Դիցուք u-ն և v-ն x-ի երկու դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են: Այդ դեպքում հայտնի է, որ uv արտադրյալի դիֆերենցիալը հաշվվում է

$$d(uv)=udv+vdu$$

բանաձևով: Այստեղից, ինտեգրելով, ստանում ենք

$$uv=\int udv+\int vdu$$

կամ

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (1)$$

Վերջին բանաձևը կոչվում է մասերով ինտեգրման բանաձև: Այդ բանաձևը կիրառվում է ամենից հաճախ այնպիսի արտահայտությունների ինտեգրման նկատմամբ, որոնց կարելի է ներկայացնել

u և dv երկու բազմապատկիչների արտադրյալի տեսքով, որպեսզի v ֆունկցիայի որոնումն ըստ նրա dv դիֆերենցիալի և $\int vdu$ ինտեգրալի հաշվումը խնդրի համախմբության մեջ լինեն ավելի պարզ, քան $\int udv$ ինտեգրալի անմիջական ինտեգրումը: Տվյալ ենթաինտեգրալային արտահայտությունը խելացիորեն u և dv բազմապատկիչների արտնման կարողությունը մշակվում է խնդիրների լուծման պրոցեսում, և մենք մի շարք օրինակների վրա ցույց կտանք, ինչպես է դա կատարվում.

Օրինակ 1: $\int x\sin x dx=?$: Ընդունենք

$$u=x, \quad dv=\sin x dx,$$

այդ դեպքում

$$du=dx, \qquad v=-\cos x:$$

Հետևաբար,

$$\int x\sin x dx=-x\cos x+\int\cos x dx=-x\cos x+\sin x+C:$$

Դիտողություն: Ըստ dv դիֆերենցիալի v ֆունկցիան որոշելիս մենք կարող ենք վերցնել ցանկացած կամայական հաստատուն, քանի որ վերջնական արդյունքի մեջ այն չի մտնում (որը հեշտ է ստուգել (1) արտահայտության մեջ v-ի փոխարեն տեղադրելով v+c արտահայտությունը): Դրա համար հարմար է այդ հաստատունը համարել զրոյի հավասար):

Մասերով ինտեգրման կանոնը կիրառվում է շատ դեպքերում Այսպես, օրինակ,

$$\int x^k\sin ax dx, \quad \int x^k\cos ax dx,$$

$$\int x^k e^{ax}dx, \quad \int x^k\ln x dx.$$

տեսքի ինտեգրալները, հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ պարունակող մի քանի ինտեգրալներ հաշվում են մասերով ինտեգրման օգնությամբ:

Օրինակ 2: Պահանջվում է հաշվել $\int \operatorname{arctg} x dx$: Ընդունենք $u=\operatorname{arctg} x$, $dv=dx$. այդ դեպքում $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $v=x$: Հետևաբար,

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C:$$

Օրինակ 3: Պահանջվում է հաշվել $\int x^2 e^x dx$: Ընդունենք $u=x^2$, $dv=e^x dx$. այդ դեպքում $du=2x\,dx$, $v=e^x$,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx,$$

Վերջին ինտեգրալը նորից ինտեգրենք մասերով, ընդունելով

$$u_1 = x, \qquad du_1 = dx,$$
$$dv_1 = e^x dx, \qquad v_1 = e^x:$$

Այդ դեպքում

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C:$$

Վերջնականապես կունենանք.

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) - C = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C:$$

Օրինակ 4: Պահանջվում է հաշվել $\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx$: Ընդունենք

$$u = x^2+7x-5, \quad dv = \cos 2x\,dx. \quad \text{այդ դեպքում}$$

$$du = (2x+7)\,dx, \quad v = \frac{\sin 2x}{2},$$

$$\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx = (x^2+7x-5)\frac{\sin 2x}{2} - \int (2x+7)\frac{\sin 2x}{2}dx:$$

Վերջին ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք մասերով ինտեգրումը, ընդունելով

$$u_1 = \frac{2x+7}{2}, \quad dv_1 = \sin 2x\,dx. \text{ այդ դեպքում } du_1 = dx, \quad v_1 = -\frac{\cos 2x}{2};$$

$$\int \frac{2x+7}{2}\sin 2x\,dx = \frac{2x+7}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx =$$

$$= -\frac{(2x+7)\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Ուստի վերջնականապես

$$\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx = (x^2+7x-5)\frac{\sin 2x}{2} - (2x+7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + C =$$

$$= \left(2x^2+14x-11\right)\frac{\sin x}{4} - (2x+7)\frac{\cos 2x}{4} + C:$$

Օրինակ 5: $I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = ?$

Կատարենք նույնական ձևափոխություններ: Ենթաինտեգրալային ֆունկցիան բազմապատկենք և բաժանենք $\sqrt{a^2-x^2}$-ով.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \int x\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}:$$

Վերջին ինտեգրալը ինտեգրենք մասերով, ընդունելով

$$u = x, \qquad du = dx,$$

$$dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \qquad v = -\sqrt{a^2-x^2};$$

այդ դեպքում

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int x\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx:$$

Վերջին արդյունքը տեղադրելով տվյալ ինտեգրալի վերջնական ստացած արտահայտության մեջ, կունենանք.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx:$$

Տեղափոխելով ինտեգրալը աջ կողմից ձախ և կատարելով տարրական ձևափոխություններ, վերջնականապես կստանանք.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C:$$

Օրինակ 6: Հաշվել

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx \quad \text{և} \quad I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

ինտեգրալները: Կիրառելով մասերով ինտեգրման մեթոդը առաջին ինտեգրալի նկատմամբ, կստանանք.

$$u = e^{ax}, \qquad du = ae^{ax}\,dx,$$

$$dv = \cos bx\,dx, \quad v = \frac{1}{b}\sin bx,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx:$$

Վերջին ինտեգրալի նկատմամբ նորից կիրառենք մասերով ինտեգրման մեթոդը.

$$u = e^{ax}, \qquad du = ae^{ax}\,dx,$$

$$dv=\sin bx\,dx,\quad v=-\frac{1}{b}\cos bx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx:$$

Ստացված արտահայտությունը տեղադրելով նախորդ հավասարության մեջ, կստանանք.

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx:$$

Վերջին հավասարությունից գտնենք I_1-ը՝

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx=e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx+\frac{a}{b^2}\cos bx\right)+C\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right):$$

որտեղից

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C:$$

համանման ձևով գտնում ենք.

$$I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C:$$

§ 7. Ռացիոնալ կոտորակներ: Պարզագույն ռացիոնալ կոտորակները եվ նրանց ինտեգրումը

Ինչպես ստորև կտեսնենք, ամենևին էլ ոչ ամեն մի տարրական ֆունկցիա ունի տարրական ֆունկցիաներով արտահայտվող ինտեգրալ: Դրա համար էլ շատ կարևոր է առանձնացնել ֆունկցիաների այնպիսի դասեր, որոնց ինտեգրալները արտահայտվում են տարրական ֆունկցիաներով: Այդ դասերից պարզագույնը ռացիոնալ ֆունկցիաների դասն է:

Ամեն մի ռացիոնալ ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել ռացիոնալ կոտորակի տեսքով, այսինքն՝ երկու բազմանդամների հարաբերության տեսքով.

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n}:$$

Հանձնաձևակերպով դատողությունների ընդհանրությունը, ենթադրելու ենք, որ այդ բազմանդամները ընդհանուր արմատներ չունեն:

Եթե համարիչի աստիճանը ցածր է հայտարարի աստիճանից, ապա կոտորակը կոչվում է կանոնավոր, հակառակ դեպքում կոտորակը կոչվում է անկանոն:

Եթե կոտորակն անկանոն է, ապա համարիչը բաժանելով հայտարարի վրա (բազմանդամների բաժանման կանոնով), կարելի է տրված կոտորակը ներկայացնել բազմանդամի և որևէ կանոնավոր կոտորակի գումարի տեսքով.

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{f(x)},$$

այստեղ $M(x)$-ը բազմանդամ է, իսկ $\frac{F(x)}{f(x)}$-ը՝ կանոնավոր կոտորակ:

Օրինակ 1: Դիցուք տրված է

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}$$

անկանոն ռացիոնալ կոտորակը:

Բաժանելով համարիչը հայտարարի վրա (բազմանդամների բաժանման կանոնով), կստանանք

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x-6}{x^2+2x+1}:$$

Քանի որ բազմանդամների ինտեգրումը դժվարություններ չի ներկայացնում, ապա ռացիոնալ կոտորակները ինտեգրելիս հիմնական դժվարությունը կայանում է կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրման մեջ:

Սահմանում: I, II, III և IV տիպի պարզագույն կոտորակներ են կոչվում հետևյալ տեսքի ռացիոնալ կոտորակները.

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k-ն ամբողջ դրական թիվ է, որը $\geqslant 2$),

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (հայտարարի արմատները կոմպլեքս են, այսինքն՝ $\frac{p^2}{4}-q<0$),

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k-ն ամբողջ դրական թիվ է, որը ≥ 2. հայտարարի արմատները կոմպլեքս են):

Հետագայում կապացուցվի (տես § 8), որ ամեն մի ռացիոնալ կոտորակ կարելի է ներկայացնել պարզագույն կոտորակների գումարի տեսքով: Այդ պատճառով մենք սկզբից կիտարկենք պարզագույն կոտորակների ինտեգրալները:

I, II և III տիպի պարզագույն կոտորակների ինտեգրումը մեծ դժվարություններ չի ներկայացնում, այդ պատճառով մենք նրանց ինտեգրումը կկատարենք առանց որևէ լրացուցիչ պարզաբանումների.

I. $$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C:$$

II. $$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=$$

$$=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C:$$

III. $$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+$$

$$+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$ (տես § 5):

Ավելի բարդ հաշվումներ է պահանջում IV տիպի պարզագույն կոտորակների ինտեգրումը: Դիցուք մեզ տրված է այդ տիպի ինտեգրալ.

$$\text{IV.}\quad \int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx:$$

Կատարենք ձևափոխություններ.

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q)^k}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}:$$

Առաջին ինտեգրալը վերցվում է $x^2+px+q=t$, $(2x+p)dx=dt$ տեղադրմամբ:

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{dt}{t^k}=\int t^{-k}dt=\frac{t^{-k+1}}{1-k}+C=$$

$$=\frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C:$$

Երկրորդ ինտեգրալը նշանակենք I_k-ով և գրենք հետևյալ տեսքով.

$$I_k=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

ընդունելով

$$x+\frac{p}{2}=t,\quad dx=dt,\quad q-\frac{p^2}{4}=m^2$$

(ըստ ենթադրության հայտարարի արմատները կոմպլեքս են, և հետևաբար, $q-\frac{p^2}{4}>0$): Այնուհետև վարվում ենք հետևյալ կերպ.

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt=$$

$$=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}dt: \qquad (1)$$

Ձևափոխենք վերջին ինտեգրալը.

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k}=\int\frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{2}\int t\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k}=$$

$$=-\frac{1}{2(k-1)}\int td\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right):$$

Մասերով ինտեգրելով, կունենանք.

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}\left[t\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right]:$$

Այս արտահայտությունը տեղադրելով (1) հավասարության մեջ, կստանանք.

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=$$

$$=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{1}{m^2}\,\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right]=$$

$$=\frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}:$$

Աջ մասում պարունակվում է նույն տիպի ինտեգրալ, ինչ I_k-ն է բայց ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի հայտարարի աստիճանացույցը մեկ միավորով ցածր է (k—1)-ից. այսպիսով մենք I_k-ն արտահայտեցինք I_{k-1}-ով:

Շարունակելով գնալ նույն ճանապարհով, կհասնենք հետևյալ հայտնի ինտեգրալին.

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C:$$

t-ի և m-ի փոխարեն ամենուրեք տեղադրելով նրանց արժեքները, կստանանք IV ինտեգրալի արտահայտությունը x-ի միջոցով և A, B, p, q տրված թվերը:

Օրինակ 2:

$$\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{(x^2+2x+3)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+2x+3)}-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}:$$

Վերջին ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք x+1=t տեղադրությունը.

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}=\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{(t^2+2)^2}dt=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}:$$

Դիտարկենք վերջին ինտեգրալը.

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{tdt(t^2+2)'}{(t^2+2)^2}=-\frac{1}{2}\int td\left(\frac{1}{t^2+2}\right)=-\frac{1}{2}\,\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}=$$

$$=-\frac{t}{2(t^2+2)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}$$

(կամայական հաստատունն առայժմ չենք գրում. այն հաշվի կառնենք միայն վերջնական արդյունքում):

Հետևաբար,

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]:$$

Վերջնականապես կունենանք.

$$\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx=-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C:$$

§ 8. Ռացիոնալ կոտորակի վերածումը պարզագույնների

Ցույց տանք, այնուհետև, որ ամեն մի կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ կարելի է վերածել պարզագույն կոտորակների գումարի:

Դիցուք մեզ տրված է

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակը:

Ենթադրենք, որ նրա մեջ եղած բազմանդամների գործակիցները իրական թվեր են և որ տրված կոտորակն անկրճատելի է (վերջինս նշանակում է, որ համարիչը և հայտարարը չունեն ընդհանուր արմատներ):

Թեորեմ 1: Դիցուք x=a թիվը հանդիսանում է հայտարարի արմատ՝ k բազմապատիկությամբ, այսինքն $f(x)=(x-a)^k f_1(x)$, որտեղ $f_1(a)\neq 0$ (տես § 6, գլ. VII). այդ դեպքում տրված $\frac{F(x)}{f(x)}$ կանոնավոր կոտորակը կարելի է ներկայացնել երկու ուրիշ կանոնավոր կոտորակների գումարի տեսքով հետևյալ կերպ.

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)}, \qquad (1)$$

որտեղ A-ն զրոյից տարբեր հաստատուն է, իսկ $F_1(x)$-ը՝ բազմանդամ է, որի աստիճանը ցածր է $(x-a)^{k-1}f_1(x)$ հայտարարի աստիճանից:

Ապացույց: Գրենք

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{F(x)-Af_1(x)}{(x-a)^kf_1(x)} \qquad (2)$$

նույնությունը (որն իրավացի է ցանկացած A-ի դեպքում) և A հաստատունը որոշենք այնպես, որպեսզի $F(x)-Af_1(x)$ բազմանդամը բաժանվի $(x-a)$-ի վրա: Դրա համար ըստ Բեզուի թեորեմի անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի տեղի ունենա

$$F(a)-Af_1(a)=0$$

հավասարությունը: Քանի որ $f_1(a)\neq 0$, $F(a)\neq 0$, ապա A-ն միարժեքորեն որոշվում է

$$A=\frac{F(a)}{f_1(a)}$$

հավասարությամբ: Այդպիսի A-ի դեպքում կունենանք.

$$F(x)-Af_1(x)=(x-a)F_1(x),$$

որտեղ $F_1(x)$-ը բազմանդամ է, որի աստիճանը ցածր է $(x-a)^{k-1}f_1(x)$ բազմանդամի աստիճանից: (2) բանաձևի կոտորակը կրճատելով $(x-a)$-ով, ստանում ենք (1) հավասարությունը:

Հետևանք: (1) հավասարության մեջ մասնակցող

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)}$$

կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակի նկատմամբ կարելի է կիրառել հետևանման դատողություններ: Այսպիսով, եթե հայտարարն ունի k բազմապատիկությամբ $x=a$ արմատ, ապա կարելի է գրել.

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+\dots+\frac{A_{k-1}}{x-a}+\frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

որտեղ $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$-ը կանոնավոր անկրճատելի կոտորակ է: Նրա նկատմամբ նույնպես կարելի է կիրառել հենց նոր ապացուցած թեորեմը, եթե $f_1(x)$-ը ունի ուրիշ իրական արմատներ:

Այնուհետև դիտարկենք հայտարարի կոմպլեքս արմատների դեպքը: Հիշեցնենք, որ իրական գործակիցներով բազմանդամի կոմպլեքս արմատները միշտ զույգ առ զույգ համալուծ են (տես գլուխ VII, § 8):

Բազմանդամի՝ իրական արտադրիչների վերլուծության մեջ բազմանդամի կոմպլեքս արմատների յուրաքանչյուր զույգին համապատասխանում է x^2+px+q տեսքի արտահայտությունը: Իսկ եթե կոմպլեքս արմատներն ունեն բազմապատիկություն, ապա նրանց համապատասխանում է $(x^2+px+q)^\mu$ արտահայտությունը:

Թեորեմ 2: Եթե $f(x)=(x^2+px+q)^\mu\varphi_1(x)$, որտեղ $\varphi(x)$ բազմանդամը չի բաժանվում (x^2+px+q)-ի վրա, ապա $\frac{F(x)}{f(x)}$ կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակը կարելի է ներկայացնել ուրիշ երկու կանոնավոր կոտորակների գումարի տեսքով հետևյալ կերպ.

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu}+\frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)}, \qquad (3)$$

որտեղ $\Phi_1(x)$-ը բազմանդամ է, որի աստիճանը ցածր է $(x^2+px+q)^{\mu-1}\Phi_1(x)$ բազմանդամի աստիճանից:

Ապացույց: Գրենք

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(x)}{(x^2+px+q)^\mu\varphi_1(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu}+$$

$$+\frac{F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^\mu\varphi_1(x)} \qquad (4)$$

նույնությունը, որն իրավացի է ցանկացած M-ի և N-ի դեպքում, և որոշենք M-ը և N-ը այնպես, որպեսզի $F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)$ բազմանդամը բաժանվի (x^2+px+q)-ի վրա: Դրա համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի

$$F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)=0$$

հավասարումն ունենա նույն $\alpha\pm i\beta$ արմատները ինչը որ x^2+px+q բազմանդամը: Հետևաբար

$$F(\alpha+i\beta)-[M(\alpha+i\beta)+N]\varphi_1(\alpha+i\beta)=0$$

կամ

$$M(\alpha+i\beta)+N=\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}:$$

Բայց $\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}$ հանդիսանում է որոշակի կոմպլեքս թիվ, որը կարելի է գրել $K+iL$ տեսքով, որտեղ K-ն և L-ը իրական թվեր են։ Այսպիսով,

$$M(\alpha+i\beta)+N=K+iL,$$

որտեղից

$$M\alpha+N=K, \qquad M\beta=L$$

կամ

$$M=\frac{L}{\beta}, \qquad N=\frac{K\beta-L\alpha}{\beta}:$$

M և N գործակիցների այդ արժեքների դեպքում $F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)$ բազմանդամի համար $\alpha+i\beta$ թիվն արմատ է, հետևաբար, արմատ է նաև նրան համալուծ $\alpha-i\beta$ թիվը։ Բայց այդ դեպքում բազմանդամն առանց մնացորդի բաժանվում է $x-(\alpha+i\beta)$ և $x-(\alpha-i\beta)$ տարբերությունների վրա, և հետևաբար նրանց արտադրյալի, այսինքն՝ (x^2+px+q)-ի վրա։ Այդ բաժանման քանորդը նշանակելով $\Phi_1(x)$-ով, կստանանք.

$$F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)=(x^2+px+q)\Phi_1(x):$$

(4) հավասարության վերջին կոտորակը կրճատելով (x^2+px+q)-ով, կստանանք (3) հավասարությունը. ընդ որում պարզ է, որ $\Phi_1(x)$-ի աստիճանը փոքր է հայտարարի աստիճանից, ինչ որ պահանջվում էր ապացուցել։

Այժմ $\frac{F(x)}{f(x)}$ կանոնավոր կոտորակի նկատմամբ կիրառելով թեորեմ 1-ի և թեորեմ 2-ի արդյունքները, մենք կարող ենք հաջորդաբար անջատել բոլոր այն պարզագույն կոտորակները, որոնք համապատասխանում են $f(x)$ հայտարարի բոլոր արմատներին։ Այսպիսով, նախորդից բխում է հետևյալ արդյունքը.

Եթե

$$f(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x^2+px+q)^\mu\ldots(x^2+lx+s)^\nu,$$

ապա $\frac{F(x)}{f(x)}$ կոտորակը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\left.\begin{aligned}
\frac{F(x)}{f(x)}=&\frac{A}{(x-a)}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\\
&+\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+\ldots+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q}+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^\nu}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}}+\ldots+\frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}:
\end{aligned}\right\}$$

$A, A_1,\ldots, B, B_1,\ldots$ գործակիցները կարելի է որոշել հետևյալ հշտապատությունների։ Գրված հավասարությունը նույնություն է, այդ պատճառով, կոտորակները ընդհանուր հայտարարի բերելով աջ և ձախ կողմերի համարիչներում կստանանք նույնական բազմանդամներ։ Հավասարեցնելով x-ի միևնույն աստիճանների գործակիցները, $A, A_1,\ldots, B, B_1,\ldots$ անհայտ գործակիցների որոշման համար կստանանք հավասարումների սիստեմ։ Գործակիցների որոնման այս մեթոդը կոչվում է անորոշ գործակիցների մեթոդ։

Դրա հետ մեկտեղ գործակիցների որոշման համար կարելի է օգտվել հետևյալ դիտողությունից. քանի որ հավասարության աջ և ձախ մասերում առացված բազմանդամները ընդհանուր հայտարարի բերելուց հետո պետք է նույնաբար հավասար լինեն, ապա նրանց արժեքները հավասար են x-ի ցանկացած մասնավոր արժեքների դեպքում։ x-ին տալով մասնավոր արժեքներ, կստանանք գործակիցների որոշման համար հավասարումներ։

Այսպիսով, մենք տեսնում ենք, որ ամեն մի կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ ներկայացվում է պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների գումարի տեսքով։

Օրինակ։ Պիտք պահանջվում է $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ կոտորակը վերածել պարզագույնների։ (5) բանաձևի հիման վրա ունենք.

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B}{x-2},$$

Ընդհանուր հայտարարի բերելով և համարիչները հավասարացնելով, կստանանք.

$$x^2+2=A(x-2)+A_1(x+1)(x-2)+A_2(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3, \qquad (6)$$

կամ

$$x^2+2=(A_2+B)x^3+(A_1+3B)x^2+$$
$$+(A-A_1-3A_2+3B)x+(-2A-2A_1-2A_2+B):$$

Հավասարեցնելով x^3, x^2, x^1, x^0-ի (ազատ անդամ) գործակիցները, գործակիցների որոշման համար կստանանք հետևյալ հավասարումների սիստեմը.

$$0=A_2+B,$$
$$1=A_1+3B,$$
$$0=A-A_1-3A_2+3B,$$
$$2=-2A-2A_1-2A_2+B:$$

Լուծելով այս սիստեմը, գտնում ենք

$$A=-1, \quad A_1=1/3, \quad A_2=-2/9, \quad B=2/9:$$

Կարելի էր մի քանի գործակիցներ հաշվել այն հավասարումներից, որոնք ստացվում են x-ի նկատմամբ նույնություն հանդիսացող (6) հավասարությունից՝ x-ի մի քանի մասնավոր արժեքների դեպքում:

Այսպես, ընդունելով $x=-1$, կստանանք $3=-3A$ կամ

$$A=-1;\ \text{ընդունելով } x=2,\ \text{կստանանք } 6=27B;\ B=\frac{2}{9}:$$

Եթե այս երկու հավասարումներին միացնենք ևս երկու հավասարումներ, որոնք ստացվում են x-ի միևնույն աստիճանների գործակիցների հավասարեցումից, ապա կստանանք չորս հավասարումներ՝ չորս անհայտ գործակիցների որոշման համար: Արդյունքում կստանանք հետևյալ վերլուծությունը.

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}:$$

§ 9. Ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրումը

Դիցուք պահանջվում է հաշվել $\frac{Q(x)}{f(x)}$ կոտորակի ինտեգրալը, այսինքն՝

$$\int\frac{Q(x)}{f(x)}dx$$

ինտեգրալը: Եթե տվյալ կոտորակն անկանոն է, ապա մենք այն ներկայացնում ենք $M(x)$ բազմանդամի և $\frac{F(x)}{f(x)}$ կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակի գումարի տեսքով (տես § 7): Վերջինս էլ ըստ § 8-ի (5) բանաձևի ներկայացնենք պարզագույն կոտորակների գումարի տեսքով:

§ 8-ի արդյունքներից հետևում է, որ պարզագույն կոտորակների տեսքը որոշվում է $f(x)$ հայտարարի արմատներով: Այսուհանդերձ հնարավոր են հետևյալ դեպքերը:

I դեպք: Հայտարարի արմատները իրական են և տարբեր, այսինքն՝

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-d):$$

Այս դեպքում $\frac{F(x)}{f(x)}$ կոտորակը վերածվում է I տիպի պարզագույն կոտորակների.

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{D}{x-d},$$

$$\int\frac{F(x)}{f(x)}dx=\int\frac{A}{x-a}dx+\int\frac{B}{x-b}dx+\ldots+\int\frac{D}{x-d}dx=$$
$$=A\ln|x-a|+B\ln|x-b|+\ldots+D\ln|x-d|+C:$$

II դեպք: Հայտարարի արմատները իրական են, ընդ որում նրանցից մի քանիսը բազմապատիկ են.

$$f(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\delta}:$$

Այս դեպքում $\frac{F(x)}{f(x)}$ կոտորակը վերածվում է I և II տիպի պարզագույն կոտորակների:

Օրինակ 1: (Օրինակը տես X գլխի § 8-ում):

$$\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx=-\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+1}+$$
$$+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|+C:$$
$$=-\frac{2x-1}{6(x+1)^2}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C:$$

III դեպք։ Հայտարարի արմատների մեջ կան կոմպլեքս չկրկնվողներ (այսինքն՝ տարբեր).

$$f(x)=(x^2+px+q)\dots(x^2+lx+s)(x-a)^{\alpha}\dots(x-d)^{\delta}:$$

Այս դեպքում $\frac{F(x)}{f(x)}$ *կոտորակը վերածվում է* I, II *և* III *տիպի պարզագույն կոտորակների։*

Օրինակ 2։ *Պահանջվում է հաշվել*

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Ինտեգրալը։ Ենթաինտեգրալային կոտորակը վերածենք պարզագույնների (տես գլ. X, § 8 (5))

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}:$$

Հետևաբար,

$$x=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1):$$

Ընդունելով $x=1$, *կստանանք՝* $1=2C$; $C=\frac{1}{2}$:

Ընդունելով $x=0$, *կստանանք՝* $0=-B+C$, $B=\frac{1}{2}$:

Հավասարեցնելով x^2-*ու գործակիցները, կստանանք* $0=A+C$, *որտեղից* $A=-\frac{1}{2}$։ *Այսպիսով,*

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}=-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

IV *դեպք։* Հայտարարի արմատների մեջ կան կոմպլեքս բազմապատիկներ.

$$f(x)=(x^2+px+q)^{\mu}\dots(x^2+lx+s)^{\nu}(x-a)^{\alpha}\dots(x-d)^{\delta}:$$

Այս դեպքում $\frac{F(x)}{f(x)}$ *կոտորակի վերլուծությունը պարունակում է* III *և* IV *տիպի պարզագույն կոտորակներ։*

Օրինակ 3։ *Պահանջվում է հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝*

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx.$$

Լուծում։ Կոտորակը վերածենք պարզագույնների

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)}+\frac{E}{x+1},$$

որտեղից

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=$$
$$=(Ax+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1)+E(x^2+2x+3)^2.$$

Կոմբինացնելով գործակիցների որոշման վերոհիշյալ մեթոդները, գտնում ենք.

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=0,\quad D=0,\quad E=1:$$

Այսպիսով, ստանում ենք.

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx=\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx+\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\ln|x+1|+C:$$

Այլ կողմի առաջին ինտեգրալը դիտարկվել է X *գլխի* § 7-*ի օրինակ* 2-*ում։ Երկրորդ ինտեգրալը վերցվում է անմիջապես։*

Ամբողջ շարադրվածից հետևում է, որ ցանկացած ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալը կարող է արտահայտվել տարրական ֆունկցիաների միջոցով վերջավոր տեսքով, այն է.

1) Լոգարիթմների միջոցով՝ I *տիպի պարզագույն կոտորակների դեպքում,*

2) Ռացիոնալ ֆունկցիաների միջոցով՝ II *տիպի պարզագույն կոտորակների դեպքում,*

3) Լոգարիթմների և արկտանգենսների միջոցով՝ III *տիպի պարզագույն կոտորակների դեպքում,*

4) Ռացիոնալ ֆունկցիաների և արկտանգենսների միջոցով՝ IV *տիպի պարզագույն կոտորակների դեպքում։*

§ 10. Ինտեգրալներ իռացիոնալ ֆունկցիաներից

Ոչ ամեն մի իռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալ է, որ արտահայտվում է տարրական ֆունկցիաների միջոցով։ Այս և հաջորդ պա-

բագրաֆներում դիտարկելու ենք այն իռացիոնալ ֆունկցիաները որոնց ինտեգրալները տեղադրությունների օգնությամբ բերվում են ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրալների և, հետևաբար, մինչև վերջ ինտեգրվում են:

I. Դիտարկենք $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})\,dx$ ինտեգրալը, որտեղ R-ը իր արգումենտների ռացիոնալ ֆունկցիա է*:

Դիցուք k-ն $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ կոտորակների ընդհանուր հայտարարն է: Կատարենք

$$x=t^k, \qquad dx=kt^{k-1}dt$$

տեղադրությունը:

Այս դեպքում x-ի յուրաքանչյուր կոտորակային աստիճան արտահայտվում է t-ի ամբողջ աստիճանով և, հետևաբար, ենթաինտեգրալային ֆունկցիան ձևափոխվում է t-ի ռացիոնալ ֆունկցիայի:

Օրինակ 1: Պահանջվում է հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}.$$

Լուծում: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ կոտորակների ընդհանուր հայտարարը 4-ն է, ուստի կատարենք $x=t^4$, $dx=4t^3dt$ տեղադրությունը: Այդ դեպքում

$$\int \frac{x^{1/2}dx}{x^{3/4}+1}=4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,t^3dt=4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt=4\int\left(t^2-\frac{t^2}{t^3+1}\right)dt=$$

$$=4\int t^2dt-4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt=4\,\frac{t^3}{3}-\frac{4}{3}\ln|\quad|+C=$$

$$=\frac{4}{3}\left[x^{3/4}-\ln\left|x^{3/4}+1\right|\right]+C:$$

---

* $R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)$ գրանցումը ցույց է տալիս, որ $x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}$ մեծությունների նկատմամբ կատարվում են միայն ռացիոնալ գործողություններ:

Ճիշտ նույն կերպ պետք է հետագայում հասկանալ $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots\right)$,

$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, $R(\sin x, \cos x)$ և այլ տեսքի գրանցումները: Այսպես, օրինակ, $R(\sin x, \cos x)$ գրանցումը ցույց է տալիս, որ sinx-ի և cosx-ի նկատմամբ կատարվում են միայն ռացիոնալ գործողություններ:

II. Այժմ դիտարկենք

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx$$

տեսքի ինտեգրալը:

Այս ինտեգրալը

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$$

տեղադրման միջոցով, որտեղ k-ն $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ կոտորակների ընդհանուր հայտարարն է, բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայից ինտեգրալի:

Օրինակ 2: Պահանջվում է հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx:$$

Լուծում: Եթե կատարենք $x+4=t^2$, $x=t^2-4$, $dx=2t\,dt$; տեղադրությունը, այս դեպքում

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx=2\int \frac{t^2}{t^2-4}dt=2\int\left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt=2\int dt+8\int \frac{dt}{t^2-4}=$$

$$=2t+2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C:$$

§ 11. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ տեսքի ինտեգրալներ

Դիտարկենք

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \qquad a\neq 0 \qquad (1)$$

ինտեգրալը:

Այսպիսի ինտեգրալը բերվում է նոր փոփոխականի ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալի՝ հետևյալ էյլերի տեղադրությունների օգնությամբ:

1. Էյլերի առաջին տեղադրությունը: Եթե $a>0$, ապա ընդունում ենք.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+t$$

Որոշակիության համար $\sqrt{a}$ արմատից առաջ վերցնում ենք պլյուս նշանը։ Այդ դեպքում

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}\,xt+t^2,$$

որտեղից x-ը որոշվում է որպես t-ի ռացիոնալ ֆունկցիա՝

$$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}$$

(նշանակում է, որ dx-ը նույնպես ռացիոնալորեն կարտահայտվի t-ի միջոցով), հետևաբար,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+t=\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}+t,$$

այսինքն՝ դուրս է գալիս, որ $\sqrt{ax^2+bx+c}$-ն t-ի ռացիոնալ ֆունկցիա է։

Քանի որ $\sqrt{ax^2+bx+c}$-ն, x-ը և dx-ը ռացիոնալորեն արտահայտվում են t-ի միջոցով, հետևաբար, տվյալ (1) ինտեգրալը ձևափոխվում է t-ի ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալի։

Օրինակ 1։ Պահանջվում է հաշվել

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+C}}$$

ինտեգրալը։

Լուծում։ Քանի որ այստեղ $a=1>0$, ապա ընդունում ենք $\sqrt{x^2+C}=-x+t$, այդ դեպքում

$$x^2+C=x^2-2xt+t^2,$$

որտեղից

$$x=\frac{t^2-C}{2t};$$

հետևաբար,

$$dx=\frac{t^2+C}{2t^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2+C}=-x+t=-\frac{t^2-C}{2t}+t=\frac{t^2+C}{2t};$$

վերադառնալով նախնական ինտեգրալին, ստանում ենք.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+C}}=\int\frac{\frac{t^2+C}{2t^2}dt}{\frac{t^2+C}{2t}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C_1=\ln|x+\sqrt{x^2+C}|+C_1$$

(տես ինտեգրալների աղյուսակի 14 բանաձևը)։

2. Էյլերի երկրորդ տեղադրությունը։ Եթե $c>0$, ապա ընդունում ենք՝

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c};$$

այդ դեպքում ($\sqrt{c}$-ից առաջ որոշակիության համար վերցնում ենք պլյուս նշանը)

$$ax^2+bx+c=x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c.$$

Այստեղից x-ը որոշվում է որպես t-ի ռացիոնալ ֆունկցիա՝

$$x=\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}.$$

Քանի որ dx-ը և $\sqrt{ax^2+bx+c}$-ն ևս ռացիոնալորեն արտահայտվում են t-ի միջոցով, ապա տեղադրելով x-ի, $\sqrt{ax^2+bx+c}$-ի և dx-ի արժեքները $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ ինտեգրալի մեջ, մենք այն կբերենք t-ի ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալի։

Օրինակ 2։ Պահանջվում է հաշվել

$$\int\frac{(1+\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx$$

ինտեգրալը։

Լուծում։ Ընդունենք $\sqrt{1+x+x^2}=xt+1$; այդ դեպքում

$$1+x+x^2=x^2t^2+2xt+1;\quad x=\frac{2t-1}{1-t^2},\quad dx=\frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2}=xt+1=\frac{t^2-t+1}{1-t^2};$$

$$1+\sqrt{1+x+x^2}=\frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$

Ստացված արտահայտությունները տեղադրելով նախնական ինտեգրալի մեջ, գտնում ենք.

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx=\int\frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}dt=$$

$$=2\int\frac{t^2}{1-t^2}dt=-2t+\ln\left|\frac{1+}{1-t}\right|+C=$$

$$=-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right|+C=$$

$$=-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+\ln|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1|+C:$$

3. Էյլերի երրորդ տեղադրությունը: *Դիցուք* α-ն և β-ն ax^2+bx+c *եռանդամի իրական արմատներն են: Ընդունենք*

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t:$$

Քանի որ $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$, *ապա*

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t,$$
$$a(x-\alpha)(x-b)=(x-\alpha)^2t^2,$$
$$a(x-\beta)=(x-\alpha)t^2:$$

Այստեղից գտնում ենք x-*ը որպես* t-*ի ռացիոնալ ֆունկցիա*

$$x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}:$$

Քանի որ dx-*ը և* $\sqrt{ax^2+bx+c}$-*ն նույնպես ռացիոնալորեն են կախված* t-*ից, ապա տվյալ ինտեգրալը ձևափոխվում է* t-*ի ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալի:*

Դիտողություն 1: Էյլերի երրորդ տեղադրությունը կիրառելի է ոչ միայն $a<0$ *դեպքում, այլև երբ* $a>0$, *միայն թե* ax^2+bx+c *բազմանդամն ունենա երկու իրական արմատներ:*

Օրինակ 3. Պահանջվում է հաշվել

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$$

ինտեգրալը:

Լուծում: Քանի որ $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$, *ապա ընդունում ենք*

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=(x+4)t;$$

այդ դեպքում

$$(x+4)(x-1)=(x+4)^2t^2,\quad x-1=(x+4)t^2,$$

$$x=\frac{1+4t^2}{1-t^2},\qquad dx=\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt,$$

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=\left[\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right]t=\frac{5t}{1-t^2}:$$

Վերագրանալով նախնական ինտեգրալին, ստանում ենք.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^25t}dt=\int\frac{2}{1-t^2}dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+C:$$

Դիտողություն 2: Նկատենք, որ (1) ինտեգրալը ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալի բերելու համար բավական են Էյլերի առաջին և երրորդ տեղադրությունները: Դիտարկենք ax^2+bx+c *եռանդամը: Եթե* $b^2-4ac>0$, *ապա եռանդամի արմատները դրական են և, հետևաբար, կիրառելի է Էյլերի երրորդ տեղադրությունը: Եթե* $b^2-4ac<0$, *ապա այս դեպքում*

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)]$$

և, հետևաբար, եռանդամն ունի a-*ի նշանը: Որպեսզի* $\sqrt{ax^2+bx+c}$-*ն լինի իրական, պետք է, որ եռանդամը լինի դրական, և հետևաբար, պետք է* $a>0$: *Այս դեպքում կիրառելի է առաջին տեղադրությունը:*

§ 12. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների մի քանի դասերի ինտեգրումը

Մինչև այժմ մենք սիստեմատիկորեն ուսումնասիրել ենք միայն հանրահաշվական ֆունկցիաների (ռացիոնալ և իռացիոնալ) ինտեգրալները: Ներկա պարագրաֆում մենք կդիտարկենք ոչ հանրահաշվական որոշ դասերի, առաջին հերթին եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ինտեգրալները: Դիտարկենք

$$\int R(\sin x,\cos x)dx \qquad (1)$$

տեսքի ինտեգրալը:

Ցույց տանք, որ այդ ինտեգրալը

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \qquad (2)$$

տեղադրության օգնությամբ միշտ բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալի։ Արտահայտանք $\sin x$-ը և $\cos x$-ը $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-ի միջոցով, և հետևաբար, t-ի միջոցով.

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}:$$

Այնուհետև

$$x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}:$$

Այսպիսով, $\sin x$-ը, $\cos x$-ը և dx-ը ռացիոնալորեն արտահայտվեցին t-ի միջոցով։ Քանի որ ռացիոնալ ֆունկցիայի ռացիոնալ ֆունկցիան ռացիոնալ ֆունկցիա է, ապա, ստացված արտահայտությունները տեղադրելով (1) ինտեգրալի մեջ, կստանանք ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալ

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}:$$

Օրինակ 1։ Դիտարկենք

$$\int\frac{dx}{\sin x}$$

ինտեգրալը։ Վերը գրված բանաձևերի հիման վրա ունենք.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$$

Դիտարկված տեղադրությունը հնարավորություն է տալիս ինտեգրել $R(\sin x,\cos x)$ տեսքի ամեն մի ֆունկցիա։ Դրա համար այն հաճախ անվանում են «ունիվերսալ եռանկյունաչափական տեղադրություն»։ Սակայն գործնականում այն հաճախ բերում է չափազանց բարդ ռացիոնալ ֆունկցիաների։ Ուստի «ունիվերսալ տեղադրման» հետ օգտակար է լինում իմանալ նաև այնպես սրիշ տեղադրություններ, որոնք որոշ դեպքերում ավելի արագ են բերում նպատակին։

1) Եթե ինտեգրալն ունի $\int R(\sin x)\cos x dx$ տեսքը, ապա $\sin x=t$, $\cos x dx=dt$ տեղադրությունն այդ ինտեգրալը բերում է $\int R(t)dt$ տեսքի։

2) Եթե ինտեգրալն ունի $\int R(\cos x)\sin x dx$ տեսքը, ապա այն $\cos x=t$, $\sin x dx=-dt$ փոխարինման օգնությամբ բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալի։

3) Եթե ենթաինտեգրալային ֆունկցիան կախված է միայն $\operatorname{tg}x$-ից, ապա $\operatorname{tg}x=t$, $x=\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ փոխարինումը այդ ինտեգրալը բերում է ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալի.

$$\int R(\operatorname{tg}x)dx=\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}:$$

4) Եթե ենթաինտեգրալային ֆունկցիան ունի $R(\sin x,\cos x$ տեսքը, բայց $\sin x$-ը և $\cos x$-ը մտնում են միայն զույգ աստիճանով, ապա կիրառվում է նույն տեղադրությունը՝

$$\operatorname{tg}x=t, \qquad (2')$$

քանի որ $\sin^2 x$-ը և $\cos^2 x$-ը $\operatorname{tg}x$-ի միջոցով արտահայտվում են ռացիոնալորեն.

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx=\frac{dt}{1+t^2}:$$

Տեղադրությունից հետո մենք կստանանք ինտեգրալ՝ ռացիոնալ ֆունկցիայից։

Օրինակ 2։ Հաշվել $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$ ինտեգրալը։

Լուծում։ Այս ինտեգրալը հեշտ է բերել $\int R(\cos x)\sin x dx$ տեսքի։ Իրոք,

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{2+\cos x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\sin x dx:$$

Կատարենք $\cos x = z$ տեղադրությունը։ Այդ դեպքում $\sin x dx = -dz$։

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \int \frac{1-z^2}{2+z}(-dz) = \int \frac{z^2-1}{z+2}dz = \int\left(z-2+\frac{3}{z+2}\right)dz =$$

$$= \frac{z^2}{2} - 2z + 3\ln(z+2) + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C:$$

Օրինակ 3։ Հաշվել $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$ ինտեգրալը։ Կատարենք $\operatorname{tg} x = t$ տեղադրությունը.

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C:$$

5) Այժմ դիտարկենք $\int R(\sin x, \cos x)dx$ տեսքի ևս մեկ ինտեգրալ, այն է՝ ինտեգրալ, որի նշանի տակ գտնվում է $\sin^m x \cos^n x dx$ արտադրյալը (որտեղ m-ը և n-ը ամբողջ թվերն են)։

ա) $\int \sin^m x \cos^n x dx$, որտեղ m-ը և n-ը այնպիսիք են, որ ծայրահեղ դեպքում նրանցից մեկը կենտ թիվ է։ Որոշակիության համար ենթադրենք, որ n-ը կենտ է։ Ունենանք $n = 2p+1$ և ձևափոխենք ինտեգրալը.

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p \cos x\, dx:$$

Կատարենք փոփոխականի փոխարինում.

$$\sin x = t,\ \cos x dx = dt:$$

Նոր փոփոխականը տեղադրելով ավելի ինտեգրալի մեջ, կստանանք.

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x dx = \int t^m (1-t^2)^p dt,$$

իսկ սա t-ից ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալ է։

Օրինակ 4։

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x dx}{\sin^4 x}:$$

Նշանակելով $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$, կստանանք.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C =$$

$$= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C:$$

բ) $\int \sin^m x \cos^n x dx$, որտեղ m-ը և n-ը ոչ բացասական և զույգ թվեր են։ Ենթադրենք $m = 2p$, $n = 2q$։ Գրենք հանրահաշվի բանաձևերից հայտնի

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,\quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \qquad (3)$$

բանաձևերը։ Տեղադրելով ինտեգրալի մեջ, կստանանք.

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx:$$

Աստիճան բարձրացնելով և բացելով փակագծերը, կստանանք $\cos 2x$-ի կենտ և զույգ աստիճաններ պարունակող անդամներ։ Կենտ աստիճաններով անդամները ինտեգրվում են ինչպես ցույց է տրվել ա) դեպքում։ Աստիճանների զույգ ցուցիչները նորից իջեցնում ենք (3) բանաձևերի օգնությամբ։ Այսպես շարունակելով, կհասնենք մինչև $\int \cos^k x dx$ տեսքի անդամներին, որոնք հեշտ ինտեգրվում են։

Օրինակ 5։

$$\int \sin^4 x\,dx=\frac{1}{2^2}\int(1-\cos 2x)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left[x-\sin 2x+\frac{1}{2}\int(1+\cos 4x)dx\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right]+C:$$

գ) Եթե երկու ցուցիչներն էլ զույգ են, ընդ որում նրանցից մեկը բացասական է, ապա նախորդ եղանակը նպատակին չի հասցնում։ Այստեղ պետք է կատարել $\operatorname{tg}x=t$ *(կամ* $\operatorname{ctg}x=t$*) տեղադրությունը)։*

Օրինակ 6։

$$\int\frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^6 x}=\int\frac{\sin^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\cos^6 x}dx=\int \operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)^2dx.$$

Ընդունենք $\operatorname{tg}x=t$, *այդ դեպքում* $x=\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$, *և մենք ստանում ենք.*

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int t^2(1+t^2)^2\frac{dt}{1+t^2}=\int t^2(1+t^2)dt=$$

$$\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C:$$

6) Վերջում դիտարկենք

$$\int\cos mx\cos nx\,dx,\ \int\sin mx\cos nx\,dx,\ \int\sin mx\sin nx\,dx$$

տեսքի ինտեգրալները։ Նրանք վերցվում են հետևյալ բանաձևերի օգնությամբ* $(m\neq n)$.

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x],$$

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x],$$

* *Այս բանաձևերը հեշտ է արտածել հետևյալ կերպ.*

$$\cos(m+n)x=\cos mx\cos nx-\sin mx\sin nx,$$

$$\cos(m-n)x=\cos mx\cos nx+\sin mx\sin nx:$$

Անդամ առ անդամ գումարելով այս հավասարությունները և բաժանելով երկուսի, կստանանք բերված երեք բանաձևերից առաջինը։ Անդամ առ անդամ հանելով և բաժանելով երկուսի, կստանանք երրորդ բանաձևը։ Երկրորդ բանաձևը դուրս է բերվում համանման ձևով, եթե համանման բանաձևերում դնենք $\sin(m+n)x$-*ի և* $\sin(m-n)x$-*ի տեղը։ Այնուհետև նրանք անդամ առ անդամ գումարենք։*

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]:$$

Տեղադրելով և ինտեգրելով, կստանանք.

$$\int\cos mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx=$$

$$=\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C:$$

Համանման ձևով հաշվվում են նաև մյուս երկու ինտեգրալները։

Օրինակ 7։

$$\int\sin 5x\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}\int[-\cos 8x+\cos 2x]dx=-\frac{\sin 8x}{16}+\frac{\sin 2x}{4}+C:$$

§ 13. Մի քանի իռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրումը եռանկյունաչափական տեղադրությունների օգնությամբ

Վերադառնանք դիտել X-ի § 11-ում դիտարկված

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \qquad (1)$$

ինտեգրալին, որտեղ $a\neq 0$ *և* $c-\frac{b^2}{4a}\neq 0$ *(*$a=0$ *դեպքում ինտեգրալն ունի § 10-ի II տեսքը,* $c-\frac{b^2}{4a}=0$ *դեպքում* $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$*, և մենք դուրս կանենք ռացիոնալ ֆունկցիայի հետ, եթե* $a>0$*, իսկ* $a<0$ *դեպքում* $\sqrt{ax^2+bx+c}$ *ֆունկցիան որոշված չէ x-ի ոչ մի արժեքի համար)։ Այնպես ցույց տանք այդ ինտեգրալը վերջին պարագրաֆում դիտարկված՝*

$$\int\bar{R}(\sin z,\cos z)dz \qquad (2)$$

տեսքի ինտեգրալի ձևափոխման մեթոդը

Ձևափոխենք արմատատակ եռանդամը.

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right):$$

Կատարենք փոփոխականի փոխարինում, ընդունելով $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx=dt$: Այս դեպքում

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}:$$

Դիտարկենք հնարավոր բոլոր դեպքերը:

1. Դիցուք $a>0$, $c-\frac{b^2}{4a}>0$: Մտցնենք $a=m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=n^2$ նշանակումները: Այս դեպքում կունենանք.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2}:$$

2. Դիցուք $a>0$, $c-\frac{b^2}{4a}<0$: Այդ դեպքում $a=m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=-n^2$: Հետևաբար,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}:$$

3. Դիցուք $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}>0$: Այս դեպքում $a=-m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=n^2$. հետևաբար,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}:$$

4. Դիցուք $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}<0$: Այս դեպքում x-ի յանկացած արժեքի համար $\sqrt{ax^2+bx+c}$-ն կոմպլեքս թիվ է:

Այսպիսով, (1) ինտեգրալը ձևափոխվում է հետևյալ տիպի ինտեգրալներից մեկին.

I. $$\int R(t,\ \sqrt{m^2t^2+n^2})\,dt, \qquad (3.1)$$

II. $$\int R(t,\ \sqrt{m^2t^2-n^2})\,dt: \qquad (3.2)$$

III. $$\int R(t,\ \sqrt{n^2-m^2t^2})\,dt: \qquad (3.3)$$

Ակնհայտ է, որ (3.1) ինտեգրալը $t=\frac{n}{m}\operatorname{tg}z$ տեղադրման օգնությամբ բերվում է (2) տեսքի ինտեգրալի: (3.2) ինտեգրալը (2) տեսքի ինտեգրալի է բերվում $t=\frac{n}{m}\sec z$ տեղադրման օգնությամբ: (3.3) ինտեգրալը բերվում է (2) տեսքի ինտեգրալի՝ $t=\frac{n}{m}\sin z$ տեղադրման օգնությամբ:

Օրինակ. Հաշվել $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$ ինտեգրալը:

Լուծում. Սա երբորդ տիպի ինտեգրալ է: Կատարենք $x=a\sin z$ փոխարինումը. այդ դեպքում

$$dx=a\cos z\,dz,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\int\frac{a\cos z\,dz}{\sqrt{(a^2-a^2\sin^2 z)^3}}=\int\frac{a\cos z\,dz}{a^3\cos^3 z}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{\cos^2 z}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}z+C=\frac{1}{a^2}\frac{\sin z}{\cos z}+C=\frac{1}{a^2}\frac{\sin z}{\sqrt{1-\sin^2 z}}+C=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C:$$

§ 14. Այն ֆունկցիաների մասին, որոնց ինտեգրալները չեն արտահայտվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով

X գլխի § 1-ում մենք արդեն նշել ենք (առանց ապացույցի), որ (a, b) միջակայքում անընդհատ ամեն մի $f(x)$ ֆունկցիա այդ միջակայքում ունի նախնական, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $F(x)$ ֆունկցիա, որ $F'(x)=f(x)$: Բայց և այնպես ոչ ամեն մի նախնական, նույնիսկ այն դեպքում, երբ այն գոյություն ունի, վերջավոր տեսքով է արտահայտվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով:

Այդպիսիք են $\int e^{-x^2}dx$, $\int\frac{\sin x}{x}dx$, $\int\frac{\cos x}{x}dx$, $\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$, $\int\frac{dx}{\ln x}$ և շատ ուրիշ ինտեգրալներով արտահայտվող նախնականները:

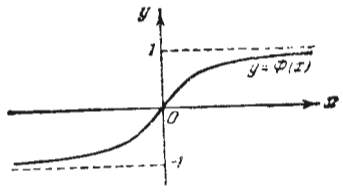
Նման բոլոր դեպքերում, ակնհայտ է, նախնականն իրենից ներկայացնում է որևէ նոր ֆունկցիա, որը չի բերվում վերջավոր թվով տարրական ֆունկցիաների համակցության (комбинация)։

Այսպես օրինակ, $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}dx+C$ նախնականներից այն, որը $x=0$ դեպքում դառնում է զրո, կոչվում է Լապլասի ֆունկցիա և նշանակվում է $\Phi(x)$-ով։

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}dx+C_1, \text{ երբ } \Phi(0)=0:$$

Այս ֆունկցիան լավ ուսումնասիրված է։ Կազմված են նրա արժեքների մանրամասն աղյուսակներ՝ x-ի տարբեր արժեքների դեպքում։ Ինչպես և այդ արվում՝ մենք կանենք XVI գլխի § 21-ում II հատոր)։

Նկ. 208



Նկ. 209

208 և 209 նկարներում պատկերված են $y=e^{-x^2}$ ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի գրաֆիկը և $y=\Phi(x)$ Լապլասի ֆունկցիայի գրաֆիկը։

$$\int\sqrt{1-k^2\sin^2x}\,dx+C, \quad (k<1)$$

նախնականներից այն, որը զրո է դառնում $x=0$ դեպքում, կոչվում է էլիպտիկ ինտեգրալ և նշանակվում է $E(x)$-ով,

$$E(x)=\int\sqrt{1-k^2\sin^2x}\,dx+C_2, \quad \text{եթե } E(0)=0:$$

Այդ ֆունկցիայի համար նույնպես կազմված են արժեքների աղյուսակներ x-ի տարբեր արժեքների համար։

---

* $\sqrt{1-\sin^2z}=|\cos z|$, որոշակիության համար կանգ կառնենք միայն մի՝ $|\cos z|=\cos z$ դեպքի վրա։

1. Հաշվել ինտեգրալները. 1. $\int x^5dx$։ Պատ. $\frac{x^6}{6}+C$։ 2. $\int(x+\sqrt{x})dx$։ Պատ. $\frac{x^2}{2}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$։ 3. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$։ Պատ. $6\sqrt{x}-\frac{1}{10}x^2\sqrt{x}+C$։ 4. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x}}dx$։ Պատ. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$։ 5. $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right)dx$։ Պատ. $-\frac{1}{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}+2x+C$։ 6. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$։ Պատ. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$։ 7. $\int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx$։ Պատ. $\frac{x^5}{5}+\frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+C$։

Ինտեգրում տեղադրման մեթոդով. 8. $\int e^{5x}dx$։ Պատ. $\frac{1}{5}e^{5x}+C$։ 9. $\int\cos5xdx$։ Պատ. $\frac{\sin5x}{5}+C$։ 10. $\int\sin axdx$։ Պատ. $-\frac{\cos ax}{a}+C$։ 11. $\int\frac{\ln x}{x}dx$։ Պատ. $\frac{1}{2}\ln^2x+C$։ 12. $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$։ Պատ. $-\frac{\operatorname{ctg}3x}{3}+C$։ 13. $\int\frac{dx}{\cos^2 7x}$։ Պատ. $\frac{\operatorname{tg}7x}{7}+C$։ 14. $\int\frac{dx}{3x-7}$։ Պատ. $\frac{1}{3}\ln|3x-7|+C$։ 15. $\int\frac{dx}{1-x}$։ Պատ. $-\ln|1-x|+C$։ 16. $\int\frac{dx}{5-2x}$։ Պատ. $-\frac{1}{2}\ln|5-2x|+C$։ 17. $\int\operatorname{tg}2xdx$։ Պատ. $-\frac{1}{2}\ln|\cos2x|+C$։ 18. $\int\operatorname{ctg}(5x-7)dx$։ Պատ. $\frac{1}{5}\ln|\sin(5x-7)|+C$։ 19. $\int\frac{dy}{\operatorname{ctg}3y}$։ Պատ. $-\frac{1}{3}\ln|\cos3y|+C$։ 20. $\int\operatorname{ctg}\frac{x}{3}dx$։ Պատ. $3\ln\left|\sin\frac{x}{3}\right|+C$։ 21. $\int\operatorname{tg}\varphi\cdot\sec^2\varphi d\varphi$։ Պատ. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi+C$։ 22. $\int(\operatorname{ctg}e^x)e^xdx$։ Պատ. $\ln|\sin e^x|+C$։ 23. $\int\left(\operatorname{tg}4S-\operatorname{ctg}\frac{S}{4}\right)dS$։ Պատ. $-\frac{1}{4}\ln|\cos4S|-4\ln\left|\sin\frac{S}{4}\right|+C$։ 24. $\int\sin^2x\cos xdx$։ Պատ. $\frac{\sin^3x}{3}+C$։ 25. $\int\cos^3x\sin xdx$։ Պատ. $-\frac{\cos^4x}{4}+C$։ 26. $\int\sqrt{x^2+1}xdx$։ Պատ. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$։ 27. $\int\frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}$։ Պատ. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$։ 28. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$։ Պատ. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$։ 29. $\int\frac{\cos xdx}{\sin^2x}$։ Պատ. $-\frac{1}{\sin x}+C$։ 30. $\int\frac{\sin xdx}{\cos^3x}$։ Պատ. $\frac{1}{2\cos^2x}+C$։ 31. $\int\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2x}dx$։ Պատ. $\frac{\operatorname{tg}^2x}{2}+C$։ 32. $\int\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin^2x}dx$։ Պատ. $-\frac{\operatorname{ctg}^2x}{2}+C$։ 33. $\int\frac{dx}{\cos^2x\sqrt{\operatorname{tg}x-1}}$։ Պատ. $2\sqrt{\operatorname{tg}x-1}+C$։

34. $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$: Ответ. $\frac{\ln^2(x+1)}{2}+C$: 35. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$: Ответ. $\sqrt{2\sin x+1}+C$: 36. $\int \frac{\sin 2x dx}{(1+\cos 2x)^2}$: Ответ. $\frac{1}{2(1+\cos 2x)}+C$:

37. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$: Ответ. $2\sqrt{1+\sin^2 x}+C$: 38. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}x-1}}{\cos^2 x}dx$: Ответ. $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{tg}x+1)^3}+C$: 39. $\int \frac{\cos 2x dx}{(2+3\sin 2x)^3}$: Ответ. $-\frac{1}{12}\frac{1}{(2+3\sin 2x)^2}+C$:

40. $\int \frac{\sin 3x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$: Ответ. $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}}+C$: 41. $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$: Ответ. $\frac{\ln^3 x}{3}+C$:

. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$: Ответ. $\frac{\arcsin^2 x}{2}+C$: 43. $\int \frac{\operatorname{arctg}x dx}{1+x^2}$: Ответ. $\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+C$:

44. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$: Ответ. $-\frac{\arccos^3 x}{3}+C$: 45. $\int \frac{\operatorname{arcctg}x}{1-x^2}dx$: Ответ. $-\frac{\operatorname{arcctg}^2 x}{2}+C$: 46. $\int \frac{x dx}{x^2+1}$: Ответ. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$: 47. $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx$:

Ответ. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C$: 48. $\int \frac{\cos x dx}{2\sin x+3}$: Ответ. $\frac{1}{2}\ln(2\sin x+3)+C$:

49. $\int \frac{dx}{x\ln x}$: Ответ. $\ln|\ln x|+C$: 50. $\int 2x(x^2+1)^4 dx$: Ответ. $\frac{(x^2+1)^5}{5}+C$:

51. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$: Ответ. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg}x+x+C$: 52. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}$: Ответ. $\ln|\operatorname{arctg}x|+C$:

53. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg}x+1)}$: Ответ. $\frac{1}{3}\ln|3\operatorname{tg}x+1|+C$: 54. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}dx$: Ответ. $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$: 55. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$: Ответ. $\ln|\arcsin x|+C$: 56. $\int \frac{\cos 2x}{2+3\sin 2x}dx$.

Ответ. $\frac{1}{6}\ln|2+3\sin 2x|+C$: 57. $\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x}$. Ответ. $\sin(\ln x)+C$.

58. $\int \cos(a+bx)dx$: Ответ. $\frac{1}{b}\sin(a+bx)+C$. 59. $e^{2x}dx$. Ответ. $\frac{1}{2}e^{2x}+C$:

60. $\int e^{x/3}dx$: Ответ. $3e^{x/3}+C$: 61. $\int e^{\sin x}\cos x dx$: Ответ. $e^{\sin x}+C$:

62. $\int a^{x^2}x dx$. Ответ. $\frac{a^{x^2}}{2\ln a}+C$: 63. $\int e^{x/2}dx$: Ответ. $ae^{x/2}+C$: 64. $\int (e^{2x})^2 dx$:

Ответ. $\frac{1}{4}e^{4x}+C$: 65. $\int 3^x e^x dx$: Ответ. $\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C$: 66. $\int e^{-3x}dx$. Ответ.

$-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$: 67. $\int (e^{5x}+a^{5x})dx$: Ответ. $\frac{1}{5}\left(e^{5x}+\frac{a^{5x}}{\ln a}+C\right)$:

68. $\int e^{x^2+4x+3}(x+2)dx$: Ответ. $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+3}+C$: 69. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}dx$:

Ответ. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln a-\ln b}-2x+C$: 70. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$: Ответ. $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x)+C$:

71. $\int \frac{e^{2x}dx}{2+e^{2x}}$: Ответ. $\frac{1}{2}\ln(2+e^{2x})+C$: 72. $\int \frac{dx}{1+2x^2}$ Ответ. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)+C$:

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$: Ответ. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}x)+C$: 74. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$: Ответ.

$\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+C$: 75. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$: Ответ. $\arcsin\frac{x}{3}+C$: 76. $\int \frac{dx}{4+x^2}$: Ответ.

$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$: 77. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$: Ответ. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$: 78. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$:

Ответ. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+C$: 79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$: Ответ. $\ln|x+\sqrt{x^2+9}|+C$:

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$: Ответ. $\frac{1}{b}\ln|bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}|+C$: 81. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}$:

Ответ. $\frac{1}{a}\ln|ax+\sqrt{b^2+a^2x^2}|+C$: 82. $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$: Ответ. $\frac{1}{2ac}\ln\left|\frac{ax-c}{ax+c}\right|+C$:

83. $\int \frac{x^2dx}{5-x^6}$. Ответ. $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right|+C$: 84. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$: Ответ.

$\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$: 85. $\int \frac{xdx}{x^4+a^4}$: Ответ. $\frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}+C$: 86. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$:

Ответ. $\arcsin e^x+C$: 87. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$: Ответ. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\sqrt{\frac{5}{3}}x+C$:

88. $\int \frac{\cos x dx}{a^2+\sin^2 x}$: Ответ. $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{a}\right)+C$: 89. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$: Ответ.

$\arcsin(\ln x)+C$: 90. $\int \frac{\arccos x-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Ответ. $-\frac{1}{2}(\arccos x)^2+\sqrt{1-x^2}+C$:

91. $\int \frac{x-\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$: Ответ. $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C$: 92. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

Ответ. $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$: 93. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$: Ответ. $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+C$:

94. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$: Ответ. $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$: 95. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ Ответ. $\operatorname{arctg}e^x+C$.

96. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$. Ответ. $3\sqrt[3]{\sin x}+C$: 97. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2x dx$: Ответ.

$-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}+C$: 98. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$: Ответ. $-2\sqrt{1+\cos^2 x}+C$:

99. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$: Ответ. $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$: 100. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x}$: Ответ. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x}+C$:

101. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$: Պատ. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{tg}x\right)+C$:

$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ տեսքի ինտեգրալներ. 102. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$: Պատ. $\frac{1}{2}\times$

$\times \operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$: 103. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$: Պատ. $\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{11}}+C$:

104. $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$: Պատ. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+C$: 105. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$:

Պատ. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C$: 106. $\int \frac{dz}{2z^2-2z+1}$: Պատ. $\operatorname{arctg}(2z-1)+C$:

107. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$: Պատ. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{5}}+C$: 108. $\int \frac{(6x-7)dx}{3x^2-7x+11}$: Պատ.

$\ln|3x^2-7x+11|+C$: 109. $\int \frac{(3x-2)dx}{5x^2-3x-2}$: Պատ. $\frac{3}{10}\ln(5x^2-3x+2)-\frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}$

$\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$: 110. $\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$: Պատ. $\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$:

111. $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}dx$: Պատ. $\frac{2}{3}\ln(3x-1)+\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C$: 112. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$:

Պատ. $\frac{1}{5}\ln(5x^2-x+2)-\frac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C$: 113. $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}dx$:

Պատ. $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\ln|2x^2-x+1|+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}}+C$:

114. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x}$: Պատ. $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{7}}+C$:

$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+C}}dx$ տեսքի ինտեգրալներ: 115. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$. Պատ.

$\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$: 11 . $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$: Պատ. $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$:

117. $\int \frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}$: Պատ. $\ln|S+a+\sqrt{2aS+S^2}|+C$: 118. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$:

Պատ. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+C$: 119. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$: Պատ. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|6x+5+$

$+\sqrt{12x(3x+5)}|+C$: 120. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$: Պատ. $\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{17}}+C$:

121. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$: Պատ. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln|10x-1+\sqrt{20(5x^2-x-1)}|+C$:

122. $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$: Պատ. $2\sqrt{ax^2+bx+c}+C$: 123. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$:

Պատ. $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}-\frac{5}{4}\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}|+C$: 124. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$:

Պատ. $-\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+C$: 125. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$: Պատ. $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+$

$+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$: 126. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}dx$: Պատ. $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x}+\frac{23}{4\sqrt{2}}$

$\ln(4x-1+\sqrt{8(2x^2-x)})+C$:

II. 127. *Մասերով ինտեգրում.* 127. $\int xe^x dx$: Պատ. $e^x(x-1)+C$:

128. $\int x\ln x dx$: Պատ. $\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$: 129. $\int x\sin x dx$: Պատ. $\sin x-$

$-x\cos x+C$: 130. $\int \ln x dx$: Պատ. $x(\ln x-1)+C$: 131. $\int \arcsin x dx$: Պատ.

$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$: 132. $\int \ln(1-x)dx$: Պատ. $-x-(1-x)\ln(1-x)+C$:

133. $\int x^n\ln x dx$: Պատ. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$: 134. $\int x\operatorname{arctg}x dx$: Պատ.

$\frac{1}{2}[(x^2+1)\operatorname{arctg}x-x]+C$: 135. $\int x\arcsin x dx$: Պատ. $\frac{1}{4}[(2x^2-1)\arcsin x+$

$+x\sqrt{1-x^2}]+C$: 136. $\int \ln(x^2+1)dx$: Պատ. $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$:

137. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$: Պատ. $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$: 138. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$:

Պատ. $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$: 139. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$:

Պատ. $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$: 140. $\int x\cos^2 x dx$ Պատ. $\frac{x^2}{4}+$

$+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$. 141. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$: Պատ. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$:

142. $\int \frac{x\operatorname{arctg}x}{(x^2+1)^2}dx$: Պատ. $\frac{x}{4(1+x^2)}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}+C$:

143. $\int x\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}dx$: Պատ. $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$:

144. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$: Պատ. $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{x}\arcsin x+C$:

145. $\int \ln(x+\sqrt{1-x^2})dx$: Պատ. $x\ln|x+\sqrt{1-x^2}|-\sqrt{1-x^2}+C$:

146. $\int \arcsin x\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$: Պատ. $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$:

Հետևյալ օրինակներում կիրառել եռանկյունաչափական տեղադրություններ.

147. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$: Պատ. $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$: 148. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$:

Պատ. $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2}+C$: 149. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$:

Պատ. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$: 150. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$: Պատ. $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$:

151. $\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$: Պատ. $\frac{x}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$:

Իռացիոնալ կոտորակների ինտեգրումը. 152. $\int\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$.

Պատ. $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C$: 153. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$: Պատ.

$\frac{1}{8}\ln\frac{(x+3)^6}{|x+5|^5|x+1|}+C$: 154. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$: Պատ. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^5}\right|+$

$+C$: 155. $\int\frac{x^4dx}{(x^2-1)(x+2)}$: Պատ. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|^3}+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C$:

156. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x+2)}$: Պատ. $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$: 157. $\int\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$:

Պատ. $\frac{3}{x-2}+\ln\frac{(x-2)^2}{x^2}+C$: 158. $\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$: Պատ. $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+$

$+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+C$: 159. $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$: Պատ. $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+$

$+\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C$: 160. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$. Պատ. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$:

161. $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$: Պատ. $\ln\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{|x-1|}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$:

162. $\int\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$: Պատ. $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+$

$+C$: 163. $\int\frac{dx}{x^3+1}$: Պատ. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$:

164. $\int\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}$: Պատ. $\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$: 165. $\int\frac{4dx}{x^4+1}$:

Պատ. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$: 166. $\int\frac{x^5}{x^3-1}dx$:

Պատ. $\frac{1}{3}[x^3+\ln(x^3-1)]+C$: 167. $\int\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$: Պատ. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+$

$+\ln(x^2+2)^{1/2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$: 168. $\int\frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$:

Պատ. $\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+C$: 169. $\int\frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$:

Պատ. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}+C$:

Իռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրումը. 170. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$:

Պատ. $\frac{4}{3}[\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)]+C$: 171. $\int\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$: Պատ. $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-$

$-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$: 172. $\int\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx$: Պատ. $-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+2\ln x-$

$-24\ln(\sqrt[12]{x}+1)+C$: 173. $\int\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}dx$:

Պատ. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-9\ln(\sqrt[6]{x}+1)+$

$+\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x}+1)+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$: 174. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}$,

Պատ. $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$: 175. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$:

Պատ. $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+C$: 176. $\int\frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^3}+\sqrt[14]{x^{15}}}dx$:

Պատ. $14\left[\sqrt[14]{x}-\frac{1}{2}\sqrt[7]{x}+\frac{1}{3}\sqrt[14]{x^3}-\frac{1}{4}\sqrt[7]{x^2}+\frac{1}{5}\sqrt[14]{x^5}\right]+C$:

177. $\int\sqrt{\frac{2+3x}{x+3}}dx$. Պատ. $\sqrt{3x^2-7x-6}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left(x-\frac{7}{6}+\right.$

$\left.+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right)+C$:

$\int R(x,\sqrt{x^2+bx+c})dx$ *տեսքի ինտեգրալներ.*

178. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$: Պատ. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C$:

179. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$: Պատ. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C$:

180. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+4}}$, Պատ. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x+2}{x\sqrt{2}}+C$: 181. $\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx$.

Պատ. $\sqrt{x^2+2x}+\ln|x+1-\sqrt{x^2+2x}|+C$: 182. $\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$: Պատ. $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+$

$+C$: 183. $\int\sqrt{2x-x^2}dx$: Պատ. $\frac{1}{2}[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)]+C$:

184. $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$: Պատ. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$:

185. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$: Պատ. $\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right|+C$:

186. $\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}dx$. Պատ. $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}+C$: 187. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

Պատ. $\ln\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right|+C$: 188. $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}dx$.

Պատ. $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}}+\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x}|+C$:

Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ինտեգրումը. 189. $\int \sin^3 x dx$.

Պատ. $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$: 190. $\int \sin^5 x dx$: Պատ. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+C$: 191. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$: Պատ. $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C$:

192. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$: Պատ. $\operatorname{cosec} x-\frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x+C$: 193. $\int \cos^2 x dx$.

Պատ. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$: 194. $\int \sin^4 x dx$: Պատ. $\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$:

195. $\int \cos^6 x dx$: Պատ. $\frac{1}{16}\left(5x+4\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}+\frac{3}{4}\sin 4x\right)+C$:

196. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$: Պատ. $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C$: 197. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$:

Պատ. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$: 198. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$: Պատ. $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln|\sin x|+C$: 199. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$: Պատ. $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|+C$:

200. $\int \sec^8 x dx$: Պատ. $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+\frac{3\operatorname{tg}^5 x}{5}+\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x+C$: 201. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x dx$:

Պատ. $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$: 202. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$: Պատ. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$:

203. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$: Պատ. $C-\operatorname{cosec} x$: 204. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$:

Պատ. $\frac{3}{5}(\cos^{5/3} x)+3(\cos^{-1/3} x)+C$: 205. $\int \sin x \sin 3x dx$: Պատ. $-\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+C$: 206. $\int \cos 4x \cos 7x dx$: Պատ. $\frac{\sin 11x}{22}+\frac{\sin 3x}{6}+C$:

207. $\int \cos 2x \sin 4x dx$: Պատ. $-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\cos 2x}{4}+C$: 208. $\int \sin\frac{1}{4}x \cos\frac{3}{4}x dx$:

Պատ. $-\frac{\cos x}{2}+\cos\frac{1}{2}x+C$: 209. $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$:

Պատ. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C$: 210. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$: Պատ. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$:

211. $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$: Պատ. $\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+x+C$: 212. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$: Պատ. $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$: 213. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}$: Պատ. $\operatorname{arctg}(2\sin^2 x-1)+C$:

214. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$: Պատ. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+C$: 215. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$:

Պատ. $-\frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$: 216. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$: Պատ. $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)-x+C$:

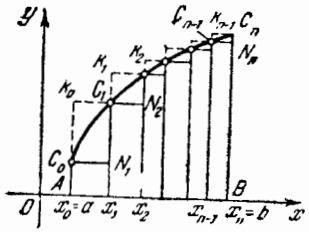
ԳԼՈՒԽ XI

ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

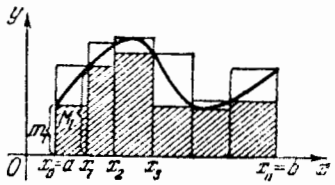
§ 1. Խնդրի դրվածքը: Ստորին եվ վերին ինտեգրալային գումարներ

Մաթեմատիկայում, ֆիզիկայում, մեխանիկայում և պրակտիկան տարբեր ճյուղերում ստանդարտության հզոր միջոց է հանդիսանում մաթեմատիկական անալիզի հիմնական հասկացությունների մեկը՝ որոշյալ ինտեգրալը: Կարելով սահմանափակված մակերեսների, ազդեցների երկարությունների, ծավալների, աշխատանքի, արագության, ճանապարհի, իներցիայի մոմենտների և այլ մեծությունների հաշվումը բերվում է որոշյալ ինտեգրալի հաշվմանը:

Դիցուք $[a, b]$ *հատվածում տրված է* $y=f(x)$ *անընդհատ ֆունկցիան (նկ. 210 և 211): Նշանակենք* m*-ով և* M*-ով* $[a, b]$ *հատվածում այդ ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները:*



Նկ. 210



Նկ. 211

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2, \cdots, x_{n-1},\ x_n=b,$$

քաղ արում

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n,$$

բաժանման կետերով $[a, b]$ *հատվածը տրոհենք* n *մասերի և ընդունենք*

$$x_1-x_0=\Delta x_1;\ x_2-x_1=\Delta x_2,\ \cdots,\ x_n-x_{n-1}=\Delta x_n;$$

Այնուհետև, նշանակենք $f(x)$ *ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները*

$[x_0, x_1]$ *հատվածի վրա* m_1*-ով և* M_1*-ով,*

$[x_1, x_2]$ *հատվածի վրա* m_2*-ով և* M_2*-ով,*

. . . . . .

$[x_{n-1}\ x_n]$ *հատվածի վրա* m_n*-ով և* M_n*-ով:*

Կազմենք հետևյալ գումարները.

$$\underline{s_n}=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\cdots+m_n\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i, \qquad (1)$$

$$\overline{s_n}=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\cdots+M_n\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i; \qquad (2)$$

$\underline{s_n}$ *գումարն անվանում են* ստորին ինտեգրալային գումար, *իսկ* $\overline{s_n}$*-ը՝* վերին ինտեգրալային գումար:

Եթե $f(x)\geqslant 0$, *ապա ստորին ինտեգրալային գումարը թվապես հավասարվում է* $AC_0N_1C_1N_2\cdots C_{n-1}N_nBA$ *«ներգծված» բեկյալով սահմանափակված «ներգծված աստիճանաձև պատկերի» մակերեսին, վերին ինտեգրալային գումարը թվապես հավասարվում է «արտագծված» բեկյալով սահմանափակված* $AK_0C_1K_1\cdots C_{n-1}K_n{}^{-}{}_1C_nBA$ *«արտագծված» աստիճանաձև պատկերի մակերեսին:*

Նշենք վերին և ստորին ինտեգրալային գումարների մի քանի հատկությունները:

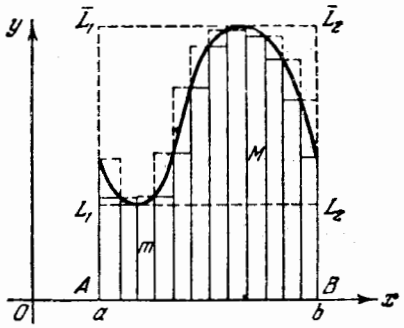
ա) Քանի որ ցանկացած i*-ի համար* $(i=1, 2, \cdots, n)$ $m_i\leqslant M_i$, *ապա (1) և (2) բանաձևերի հիման վրա ունենք*

$$\underline{s_n}\leqslant\overline{s_n}; \qquad (3)$$

(Հավասարության նշանը կլինի միայն այն դեպքում, երբ $f(x)=$ $=\text{const}$*):*

բ) Քանի որ

$m_1\geqslant m,\ m_2\geqslant m,\ \cdots,\ m_n\geqslant m,$



Նկ. 212

որտեղ m-ը f(x)-ի փոքրագույն արժեքն է [a, b] հատվածում, ապա

$$\underline{s}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n \geq m\Delta x_1 + m\Delta x_2 + \cdots + m\Delta x_n =$$
$$= m(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = m(b-a),$$

Այսպիսով,

$$\underline{s}_n \geq m(b-a), \qquad (4)$$

գ) Քանի որ

$$M_1 \leq M,\ M_2 \leq M,\ \cdots,\ M_n \leq M,$$

որտեղ M-ը f(x)-ի մեծագույն արժեքն է [a, b]-ում, ապա

$$\overline{s}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n \leq M\Delta x_1 + M\Delta x_2 + \cdots + M\Delta x_n =$$
$$= M(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = M(b-a).$$

Այսպիսով,

$$\overline{s}_n \leq M(b-a), \qquad (5)$$

Միացնելով ստացված անհավասարությունները, կունենանք

$$m(b-a) \leq \underline{s}_n \leq \overline{s}_n \leq M)b-a), \qquad (6)$$

Եթե $f(x) \geq 0$, ապա վերջին անհավասարությունն ունի պարզ երկրաչափական իմաստ (նկ. 212), քանի որ $m(b-a)$ և $M(b-a)$ արտադրյալները համապատասխանաբար թվապես հավասար են AL_1L_2B «ներգծյալ» ուղղանկյան և $A\overline{L}_1\overline{L}_2B$ «արտագծյալ» ուղղանկյան մակերեսներին:

§ 2. Որոշյալ ինտեգրալ: Թեորեմ որոշյալ ինտեգրալի գոյության մասին

Շարունակենք նախորդ պարագրաֆի հարցի քննարկումը: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$ հատվածներից յուրաքանչյուրում վերցնենք մեկական կետ, որոնք նշանակենք $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ (նկ. 213),

$$x_0 < \xi_1 < x_1,\ x_1 < \xi_2 < x_2,\ \cdots,\ x_{n-1} < \xi_n < x_n,$$

վերցրած յուրաքանչյուր կետում հաշվենք ֆունկցիայի $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, $\cdots$, $f(\xi_n)$ արժեքը: Կազմենք հետևյալ գումարը՝

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (1)$$

Այս գումարը կոչվում է [a, b] հատվածում f(x) ֆունկցիայի համար ինտեգրալային գումար: Քանի որ $[x_{i-1}, x_i]$ հատվածին պատկանող կամայական ξ_i-ի դեպքում $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ և բոլոր $\Delta x_i > 0$, ապա

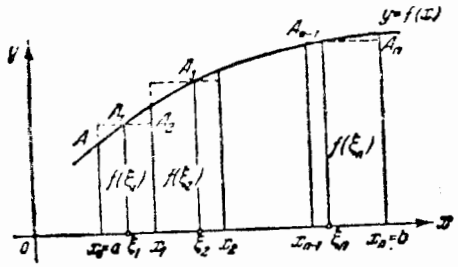
$$m_i\Delta x_i \leq f(\xi_i)\Delta x_i \leq M_i\Delta x_i,$$

հետևաբար

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,$$

կամ

$$\underline{s}_n \leq s_n \leq \overline{s}_n, \qquad (2)$$



Նկ. 213

Վերջին հավասարության երկրաչափական իմաստը $f(x) \geq 0$ դեպքում կայանում է նրանում, որ այն պատկերը, որի մակերեսը հավասար է s_n-ի, սահմանափակված է մի բեկյալով, որը պատկերված է «ներգծված» բեկյալի և «արտագծված» բեկյալի միջև:

s_n գումարը կախված է [a, b] հատվածի՝ $[x_{i-1}, x_i]$ հատվածների բաժանման եղանակից և ստացված հատվածներում ξ_i կետերի ընտրությունից:

Այժմ նշանակենք $\max[x_{i-1}, x_i]$-ով $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$ հատվածների երկարություններից ամենամեծը: Դիտարկենք [a, b] հատվածի՝ $[x_{i-1}, x_i]$ հատվածների այնպիսի տարբեր տրոհումներ, որ $\max[x_{i-1}, x_i] \to 0$: Ակնհայտ է, որ այդ դեպքում հատվածների n թիվը տրոհման ժամանակ ձգտում է անվերջության: Յուրաքանչյուր տրոհման համար, ընտրելով համապատասխան ξ_i արժեքներ, կարելի է կազմել

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (3)$$

ինտեգրալային գումարը:

Դիտարկենք տրոհումների որևէ հաջորդականություն, որի դեպքում $\max\Delta x_i \to 0$, ըստ որում $n \to \infty$: Յուրաքանչյուր տրոհման ժամանակ ընտրում ենք ξ_i արժեքները: Ենթադրենք, որ այդ s_n^* ինտեգրալային գումարների* հաջորդականությունը ձգտում է որևէ սահմանի՝

* Տվյալ դեպքում գումարը կարգավորված փոփոխական մեծություն է:

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0} s_n^* = \lim_{\max\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = s. \qquad (4)$$

Այժմ մենք կարող ենք ձևակերպել հետևյալը։

Սահմանում 1։ Եթե $[a, b]$ *հատվածի ցանկացած այնպիսի տրոհումների դեպքում, երբ* $\max\Delta x_i\to 0$ *և* $[x_{i-1}, x_i]$ *հատվածներում* ξ_i *կետերի ցանկացած ընտրության դեպքում*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (5)$$

ինտեգրալային գումարը ձգտում է միևնույն s *սահմանին, ապա այդ սահմանն անվանում են* $[a, b]$ *հատվածում* $f(x)$ *ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ և նշանակում են*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Այսպիսով, ըստ սահմանման

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \qquad (6)$$

a *թիվն անվանում են ինտեգրալի ստորին սահման, b-ն՝ ինտեգրալի վերին սահման։* $[a, b]$ *հատվածը կոչվում է ինտեգրման հատված* x*-ը՝ ինտեգրման փոփոխական։*

Սահմանում 2։ Եթե $f(x)$ *ֆունկցիայի համար (6) սահմանը գոյություն ունի, ապա ֆունկցիան անվանում են* $[a, b]$ *հատվածում ինտեգրելի։*

Նկատենք, որ $\underline{s_n}$ *ստորին ինտեգրալային գումարը և* $\overline{s_n}$ *վերին ինտեգրալային գումարը (5) ինտեգրալային գումարի մասնավոր դեպքերն են, ուստի եթե* $f(x)$*-ը՝ ինտեգրելի է, ապա ստորին և վերին ինտեգրալային գումարները ձգտում են միևնույն* s *սահմանին, և դրա համար (6) հավասարության հիման վրա կարող ենք գրել.*

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \qquad (7)$$

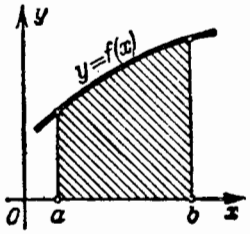
$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \qquad (7')$$

Եթե կառուցենք $y=f(x)$ *ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի գրաֆիկը, ապա* $f(x)\geqslant 0$ *դեպքում ինտեգրալը թվապես հավասար է նշված կորով,* $x=a$, $x=b$ *ուղիղներով և* Ox *առանցքով (նկ. 214) սահմանափակված այսպես կոչված կորագիծ սեղանի մակերեսին։*

Ուստի, եթե պահանջվում է հաշվել $y=f(x)$ *կորով,* $x=a$, $x=b$ *ուղիղներով և* Ox *առանցքով սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսը, ապա այդ* Q *մակերեսը հաշվվում է*

$$Q = \int_a^b f(x)dx \qquad (8)$$

ինտեգրալի օգնությամբ։



Նկ. 214

Ապացուցենք հետևյալ կարևոր թեորեմը։

Թեորեմ 1։ Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում, ապա այն տվյալ հատվածում ինտեգրելի է։

Ապացույց։ Նրանից $[a, b]$ $(a<b)$ *հատվածը տրոհենք* $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_{i-1}, x_i]$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$ *հատվածների։ Կազմենք ստորին և վերին ինտեգրալային գումարները՝*

$$\underline{s_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i, \qquad (9)$$

$$\overline{s_n} = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i, \qquad (10)$$

Հեշտության համար բերենք վերին և ստորին ինտեգրալային գումարների մի քանի հատկություններ։

Հատկություն 1։ Բաժանման նոր կետեր ավելացնելու ճանապարհով այն հատվածների թիվն ավելացնելիս, որոնց բաժանում ենք $[a, b]$ հատվածը, ստորին ինտեգրալային գումարը կարող է միայն աճել, իսկ վերին ինտեգրալային գումարը՝ միայն նվազել։

Ապացույց։ Դիցուք $[a, b]$ *հատվածը նոր կետեր ավելացնելու ճանապարհով բաժանված է* n' $(n'>n)$ *հատվածների։ Եթե ինչ-որ* $[x_{k-1}, x_k]$ *հատված բաժանվել է մի քանի, ասենք* p_k *հատվածների, ապա նոր* $\underline{s_{n'}}$ *ստորին ինտեգրալային գումարի մեջ* $[x_{k-1}, x_k]$ *հատվածին կհամապատասխանեն* p_k *գումարելիներ, որոնք մենք կնշանակենք* $\underline{s^*_{p_k}}$*-ով։* $\underline{s_n}$ *գումարի մեջ այդ հատվածին համապատասխանում է մեկ գումարելի՝* $m_k(x_k-x_{k-1})$*։ Բայց* $s^*_{p_k}$ *գումարի և* $m_k(x_k-$

$-x_{k-1})$ մեծության համար իրավացի է § 1-ի (4) անհավասարությունը համանման անհավասարությունը: Մենք կարող ենք գրել.

$$\underline{s}^*_{p_k} \geqslant m_k(x_k - x_{k-1}),$$

Յուրաքանչյուր հատվածի համար գրելով համապատասխան անհավասարություններ ու գումարելով աջ և ձախ մասերը, կստանանք.

$$\underline{s}_{n'} \geqslant \underline{s}_n \qquad (n' > n). \tag{11}$$

Հատկությունը 1-ն ապացուցված է:

Հատկություն 2: Բաժանման նոր կետեր ավելացնելու ճանապարհով հատվածների թիվն անսահմանափակորեն ավելացնելիս (9) ստորին ինտեգրալային գումարը և (10) վերին ինտեգրալային գումարը ձգտում են $\underline{s}$ և $\overline{s}$ սահմանների:

Ապացույց: § 1-ի (6) անհավասարության հիման վրա կարող ենք գրել.

$$\underline{s}_n \leqslant M(b-a),$$

այսինքն՝ բոլոր n-երի դեպքում $\underline{s}_n$-ը սահմանափակ է: Հատկությունը 1-ի հիման վրա n-ի աճման դեպքում $\underline{s}_n$-ը մոնոտոն աճում է: Հետևաբար, սահմանների մասին թեորեմ 7-ի (տես § 5, գլ. II) հիման վրա այդ փոփոխական մեծությունն ունի սահման. այն նշանակենք $\underline{s}$-ով.

$$\lim_{n\to\infty} \underline{s}_n = \underline{s}. \tag{12}$$

Համանման ձևով ցույց է տրվում, որ $\overline{s}_n$-ը սահմանափակ է ներքևից և մոնոտոն նվազում է: Հետևապես, $\overline{s}_n$-ը ունի սահման, որը մենք կնշանակենք $\overline{s}$-ով.

$$\lim_{n\to\infty} \overline{s}_n = \overline{s}.$$

Հատկություն 3: Եթե f(x) ֆունկցիան անընդհատ է [a, b] փակ հատվածում, ապա $\underline{s}$ և $\overline{s}$ սահմանները, որոնք սահմանված են հատկություն 2-ի մեջ, $\max\Delta x_i \to 0$ պայմանի դեպքում հավասար են:

Այս ընդհանուր սահմանը նշանակենք s-ով.

$$\underline{s} = \overline{s} = s. \tag{13}$$

Ապացույց: Դիտարկենք վերին և ստորին ինտեգրալային գումարների տարբերությունը.

$$\overline{s}_n - \underline{s}_n = (M_1 - m_1)\Delta x_1 + (M_2 - m_2)\Delta x_2 + \cdots + (M_i - m_i)\Delta x_i + \cdots$$

$$\cdots + (M_n - m_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i. \tag{14}$$

Տվյալ տրոհման դեպքում $(M_i - m_i)$ տարբերություններից մեծագույնը նշանակենք ε_n-ով.

$$\varepsilon_n = \max(M_i - m_i).$$

Կարելի է ապացուցել (որի վրա մենք կանգ չենք առնի), որ եթե f(x) ֆունկցիան անընդհատ է փակ հատվածում, ապա [a, b] հատվածի տրոհման ցանկացած եղանակի դեպքում $\varepsilon_n \to 0$, եթե միայն $\max\Delta x_i \to 0$:

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \varepsilon_n = 0. \tag{15}$$

Փակ հատվածում անընդհատ ֆունկցիայի (15) հավասարումով արտահայտված հատկությունը կոչվում է ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատության:

Այսպիսով, մենք կօգտվենք այսպիսի թեորեմից. փակ հատվածում անընդհատ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է այդ հատվածում:

Վերադառնանք (14) հավասարությանը: $M_i - m_i$ յուրաքանչյուր տարբերությունը փոխարինենք իրենից ոչ փոքր ε_n մեծությամբ: ստանում ենք հետևյալ անհավասարությունը.

$$\overline{s}_n - \underline{s}_n \leqslant \varepsilon_n \Delta x_1 + \varepsilon_n \Delta x_2 + \cdots + \varepsilon_n \Delta x_n =$$

$$= \varepsilon_n(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = \varepsilon_n(b-a).$$

Անցնելով սահմանի, երբ $\max\Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$, ստանում ենք.

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} (\overline{s}_n - \underline{s}_n) \leqslant \lim_{\max_i \Delta x \to 0} \varepsilon_n(b-a) = (b-a) \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \varepsilon_n = 0, \tag{16}$$

այսինքն՝

$$\lim \overline{s}_n = \lim \underline{s}_n = s \tag{17}$$

կամ $\underline{s} = \overline{s} = s$, ինչը պահանջվում է ապացուցել:

Հատկություն 4: Դիցուք $\underline{s}_{n_1}$-ը և $\overline{s}_{n_2}$-ը [a, b] հատվածը n_1 և համապատասխանաբար n_2 հատվածների տրոհումներին համապատասխանող ստորին և վերին ինտեգրալային գումարներն են: Այս դեպքում ցանկացած n_1-ի և n_2-ի համար տեղի ունի

$$\underline{s}_{n_1} \leqslant \overline{s}_{n_2} \tag{18}$$

անհավասարությունը։

Ապացույց։ Դիտարկենք $[a, b]$ հատվածի տրոհումը $n_3 = n_1 + n_2$ հատվածների, որտեղ բաժանման կետեր կլինեն առաջին և երկրորդ տրոհումների բաժանման կետերը։

§ 1-ի (3) անհավասարության հիման վրա ունենք.

$$\underline{s}_{n_3} \leqslant \overline{s}_{n_3}; \tag{19}$$

Հատկության 1-ի հիման վրա ունենք.

$$\underline{s}_{n_1} \leqslant \underline{s}_{n_3}, \tag{20}$$

$$\overline{s}_{n_3} \leqslant \overline{s}_{n_2}; \tag{21}$$

Օգտվելով (20) և (21) առնչություններից, կարելի է ընդլայնել (19) անհավասարությունը

$$\underline{s}_{n_1} \leqslant s_{n_3} \leqslant \overline{s}_{n_3} < \overline{s}_{n_2}$$

կամ

$$\underline{s}_{n_1} \leqslant \overline{s}_{n_2},$$

ինչ պահանջվում էր ապացուցել։

Հատկություն 5։ Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում, ապա $[a, b]$ հատվածի $[x_{i-1}, x_i]$ հատվածների տրոհումների ցանկացած հաջորդականության դեպքում, ոչ անպայման նոր բաժանման կետեր ավելացնելու ճանապարհով, եթե միայն $\max \Delta x_i \to 0$, $\underline{s}^*_m$ ստորին ինտեգրալային գումարը և $\overline{s}^*_m$ վերին ինտեգրալային գումարը ձգտում են հատկություն 3-ի մեջ սահմանված s սահմանին։

Ապացույց։ Դիտարկենք հատկություն 2-ում սահմանված $\overline{s}_n$ վերին ինտեգրալային գումարների հաջորդականության տրոհումների հաջորդականությունը։ m-ի և n-ի ցանկացած արժեքների դեպքում ((18) անհավասարության հիման վրա) կարող ենք գրել.

$$\underline{s}^*_m \leqslant \overline{s}_n;$$

Անցնելով սահմանի, երբ $n \to \infty$, (15)-ի հիման վրա կարող ենք գրել.

$$\underline{s}^*_m \leqslant s;$$

Համանման եղանակով ցույց կտանք, որ $s \leqslant \overline{s}^*_m$։

Այսպիսով,

$$\underline{s}^*_m \leqslant s \leqslant \overline{s}^*_m$$

կամ

$$s - \underline{s}^*_m \geqslant 0, \qquad \overline{s}_m - s \geqslant 0; \tag{22}$$

Դիտարկենք

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} (\overline{s}^*_m - \underline{s}^*_m)$$

տարբերության սահմանը։ Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ փակ հատվածում անընդհատ է, ապա (ինչպես և հատկության 3-ն ապացուցելիս) ցույց տանք (տես (16) հավասարությունը), որ

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} (\overline{s}^*_m - \underline{s}^*_m) = 0;$$

Վերջին առնչությունն արտագրենք այսպես.

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} [(\overline{s}^*_m - s) + (s - \underline{s}^*_m)] = 0;$$

(22) առնչության հիման վրա քառակուսի փակագծերի մեջ գտնվող յուրաքանչյուր տարբերությունն ոչ բացասական է։ Հետևաբար,

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} (\overline{s}^*_m - s) = 0, \qquad \lim_{\max \Delta x_i \to 0} (s - \underline{s}^*_m) = 0;$$

Եվ վերջնականապես ստանում ենք.

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \underline{s}^*_m = s, \qquad \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \overline{s}^*_m = s, \tag{23}$$

ինչ պահանջվում էր ապացուցել։

Այժմ կարելի է ապացուցել վերը ձևակերպած թեորեմը։ Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում։ Դիտարկենք

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

ինտեգրալային գումարների կամայական հաջորդականությունը, այնպիսին, որ $\max \Delta x_i \to 0$, ξ_i-ն՝ $[x_{i-1}, x_i]$ հատվածի կամայական կետ է։

Տրոհումների տրված հաջորդականության համար դիտարկենք $\underline{s}_n$ և $\overline{s}_n$ վերին և ստորին ինտեգրալային գումարների համապատասխան հաջորդականությունները։ Ամեն մի տրոհման համար իրավացի են (2) առնչությունները

$$\underline{s}_n < s_n < \overline{s}_n.$$

Անցնելով սահմանի, երբ $\max\Delta x_i \to 0$, և օգտվելով (23) հավասարությունների և գլ. II § 5-ի թեորեմ 4-ից, ստանում ենք.

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} s_n = s,$$

որտեղ s-ը հատկությունն 3-ում սահմանված սահմանն է:

Այդ սահմանը, ինչպես արդեն ասվել է վերևում, կոչվում է $\int_a^b f(x)dx$ որոշյալ ինտեգրալ. Եվ այսպես, եթե f(x) ֆունկցիան անընդհատ է [a, b] հատվածում, ապա

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \qquad (24)$$

Նկատենք, որ իրական ֆունկցիաների մեջ կան ինչպես ինտեգրելի, այնպես էլ ոչ ինտեգրելի ֆունկցիաներ:

Դիտողություն 1: Նկատենք, որ որոշյալ ինտեգրալը կախված է միայն f(x) ֆունկցիայի տեսքից և ինտեգրման սահմաններից, բայց ոչ ինտեգրման փոփոխականից, որը կարելի է նշանակել ցանկացած տառով: Ուստի, չփոփոխելով որոշյալ ինտեգրալի մեծությունը, կարելի է x տառը փոխարինել ցանկացած այլ տառով.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \cdots = \int_a^b f(z)dz.$$

Դիտողություն 2: $\int_a^b f(x)dx$ որոշյալ ինտեգրալի գաղափարը մացնելիս մենք ենթադրել ենք, որ $a<b$: $b<a$ դեպքում ըստ սահմանման ընդունենք

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (25)$$

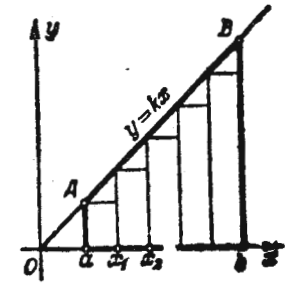
Այսպես, օրինակ,

$$\int_5^0 x^2dx = -\int_0^5 x^2dx.$$

Դիտողություն 3: $a=b$ դեպքում ըստ սահմանման ընդունենք, որ ցանկացած f(x) ֆունկցիայի համար

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \qquad (26)$$

Դա բնական է նաև երկրաչափական տեսակետից: Իրոք, կորագիծ սեղանի հիմքի երկարությունը զրո է, հետևաբար, նաև կորագիծ սեղանի մակերեսն է հավասար զրոյի:



Նկ. 215

Օրինակ 1. Հաշվենք $\int_a^b kxdx$ $(b>a)$ ինտեգրալը:

Լուծում. Երկրաչափորեն խնդիրը հանգում է $y=kx$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ գծերով սահմանված սեղանի Q մակերեսի հաշվմանը (գծ. 215):

Ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող $y=kx$ ֆունկցիան անընդհատ է, հետևաբար, որոշյալ ինտեգրալի հաշվման համար մենք, ինչպես նկատել ենք վերևում, կարող ենք [a, b] հատվածի տրոհումը կատարել կամայական եղանակով և կամովի էլ ընտրել ξ_k միջանկյալ կետերը: Որոշյալ ինտեգրալի հաշվման արդյունքը կախված չէ ինտեգրալային գումարի կառուցման եղանակից, միայն թե, տրոհման քայլը ձգտի զրոյի:

[a, b] հատվածը բաժանենք n հավասար հատվածների:

Յուրաքանչյուր մասնակի հատվածի Δx երկարությունը հավասար է $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. այս թիվն էլ հենց կլինի տրոհման քայլը: Բաժանման կետերն ունեն հետևյալ կոորդինատները.

$$x_0=a,\ x_1=a+\Delta x,\ x_2=a+2x,\ \ldots,\ x_n=a+nx.$$

Իբրև ξ_k կետեր վերցնենք յուրաքանչյուր հատվածի ձախ ծայրակետը

$$\xi_1=a,\ \xi_2=a+\Delta x,\ \xi_3=a+2\Delta x,\ \ldots,\ \xi_n=a+(n-1)\Delta x.$$

Կազմենք (1) ինտեգրալային գումարը: Քանի որ $f(\xi_i)=k\xi_i$, ապա

$$\begin{aligned} s_n &= k\xi_1\Delta x + k\xi_2\Delta x + \ldots + k\xi_n\Delta x = \\ &= ka\Delta x + [k(a+\Delta x)]\Delta x + \ldots + \{k[a+(n-1)\Delta x]\}\Delta x = \\ &= k\{a+(a+\Delta x)+(a+2\Delta x)+\ldots+[a+(n-1)\Delta x]\}\Delta x = \\ &= k\{na+[\Delta x+\Delta x+\ldots+(n-1)\Delta x]\}\Delta x = \\ &= k\{na+[1+2+\ldots+(n-1)]\Delta x\}\Delta x, \end{aligned}$$

որտեղ $\Delta x = \frac{b-a}{n}$: Հաշվի առնելով, որ

$$1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

(որպես թվաբանական պրոգրեսիայի գումար), կստանանք.

$$s_n = k\left[na + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{b-a}{n}\right]\frac{b-a}{n} = k\left[a + \frac{n-1}{n}\,\frac{b-a}{2}\right](b-a).$$

Քանի որ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$, ապա $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = Q = k\left[a + \frac{b-a}{2}\right](b-a) = k\frac{b^2-a^2}{2}$.

Նկ. 216

Այսպիսով,

$$\int_a^b kx\,dx = k\frac{b^2-a^2}{2}.$$

ABba մակերեսը (նկ. 215) հեշտ է հաշվել տարրական երկրաչափության մեթոդներով։

Կոտորակի նույն արդյունքը։

Օրինակ 2։ Հաշվել $\int_0^b x^2dx$։

Լուծում։ Տրված ինտեգրալը հավասար է $y=x^3$ պարաբոլով, $x=b$ օրդինատով և $y=0$ ուղիղով սահմանափակված կորագիծ սեղանի Q մակերեսին (նկ. 216)։

$x_0=0$, $x_1=\Delta x$, $x_2=2\Delta x$, ..., $x_n=b=n\Delta x$, $\Delta x=\frac{b}{n}$ կետերով [a, b] հատվածը բաժանենք n հավասար մասերի։ Իբրև ξ_i կետեր վերցնենք յուրաքանչյուր հատվածի աջ ծայրակետը։ Կազմենք հետևյալ ինտեգրալային գումարը.

$$s_n = x_1^2\Delta x + x_2^2\Delta x + \ldots + x_n^2\Delta x = [(\Delta x)^2\Delta x + (2\Delta x)^2\Delta x + \ldots + (n\Delta x)^2\Delta x] =$$

$$= (\Delta x)^3[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2].$$

Ինչպես հայտնի է,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ուստի

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}\,\frac{n(n-1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = \int_0^b x^2dx = \frac{b^3}{3}.$$

Օրինակ 3։ Հաշվել $\int_a^b m\,dx$ $(m=\text{const})$։

Լուծում։

$$\int_a^b m\,dx = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i = \lim_{\max\Delta x_i\to 0} m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i =$$

$$= m\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = m(b-a).$$

Այստեղ $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$-ն այն հատվածների գումարն է, որոնց բաժանված է [a,b] հատվածը։ Տրոհման ցանկացած եղանակի դեպքում այդ գումարը հավասար է հատվածի b—a երկարությանը։

Օրինակ 4։ Հաշվել $\int_a^b e^x dx$։

Լուծում։ Նորից [a, b] հատվածը բաժանենք n հավասար մասերի.

$$x_0 = a,\quad x_1 = a + \Delta x,\ \ldots,\ x_n = a + n\Delta x;\quad \Delta x = \frac{b-a}{n},$$

Իբրև ξ_i կետեր վերցնենք ձախ ծայրակետերը։ Կազմենք

$$s_n = e^a\Delta x + e^{a+\Delta x}\Delta x + \ldots + e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x =$$

$$= e^a(1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \ldots + e^{(n-1)\Delta x})\Delta x,$$

ինտեգրալային գումարը։ Փակագծերի ներսի արտահայտությունը երկրաչափական պրոգրեսիա է, որի հայտարարն է $e^{\Delta x}$, իսկ առաջին անդամը՝ 1, ուստի

$$s_n = e^a\frac{e^{n\Delta x}-1}{e^{\Delta x}-1}\Delta x = e^a(e^{n\Delta x}-1)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1},$$

Այնուհետև, ունենք.

$$n\Delta x = b-a,\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1} = 1,$$

$\left(\text{Քանի հայտնի կանոնի } \lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{e^z} = 1\right)$։ Այսպիսով,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = e^a(e^{b-a}-1)\cdot 1 = e^b - e^a,$$

այսինքն՝

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

Դիտողություն 4։ Հենց նոր դիտարկված օրինակները ցույց են տալիս, որ որոշյալ ինտեգրալների՝ որպես ինտեգրալային գումարների սահմանների անմիջական հաշվումը կապված է մեծ դժվարությունների հետ։ Նույնիսկ այն դեպքերում, երբ ենթաինտեգրա-

լային ֆունկցիաները շատ պարզ են (kx, x^2, e^x), այդ եղանակը պահանջում է հսկայական հաշվումներ։ Ավելի բարդ ֆունկցիաների որոշյալ ինտեգրալը գտնելը հանգեցնում է ավելի մեծ դժվարությունների։ Ուստի բնականաբար խնդիր է ծագում. գտնել որոշյալ ինտեգրալների հաշվման գործնականորեն հարմար մեթոդ։ Նյուտոնի և Լայբնիցի հայտնագործած այդ մեթոդը օգտագործում է ինտեգրման և դիֆերենցման միջև գոյություն ունեցող խոր կապը։ Այդ մեթոդի շարադրմանն ու հիմնավորմանն են նվիրված այս գլխի հաջորդ պարագրաֆները։

§ 3. Որոշյալ ինտեգրալի հիմնական հատկությունները

Հատկություն 1։ Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել որոշյալ ինտեգրալի նշանից. եթե $A=\text{const}$, ապա

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx, \qquad (1)$$

Ապացույց։

$$\int_a^b Af(x)dx = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n Af(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= A\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)dx.$$

Հատկություն 2։ Մի քանի ֆունկցիաների հանրահաշվական գումարի որոշյալ ինտեգրալը հավասար է գումարելիների որոշյալ ինտեգրալների հանրահաշվական գումարին։ *Այսպես, երկու գումարելիների դեպքում*

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx, \qquad (2)$$

Ապացույց։

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]dx = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n [f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\left[\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i\right] =$$

$$= \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Ցանկացած թվով գումարելիների համար ապացույցը կատարվում է համանման ձևով։

Հատկություն 1-ը և 2-ը թեկուզ և ապացուցված են միայն $a<b$ *դեպքի համար, մնում են ուժի մեջ և* $a\geqslant b$ *դեպքում։*

Սակայն հետևյալ հատկությունն իրավացի է միայն $a<b$ *դեպքում։*

Հատկություն 3։ Եթե $[a, b]$ հատվածում, որտեղ $a<b$, $f(x)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաները բավարարում են $f(x)\leqslant\varphi(x)$ պայմանին, ապա

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (3)$$

Ապացույց։ Դիտարկենք հետևյալ տարբերությունը.

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [\varphi(x)-f(x)]dx =$$

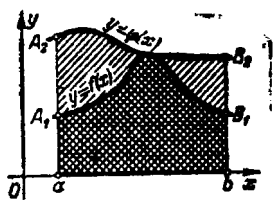
$$= \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n [\varphi(\xi_i)-f(\xi_i)]\Delta x_i.$$

Այստեղ յուրաքանչյուր տարբերություն $\varphi(\xi_i)-f(\xi_i)\geqslant 0$, $\Delta x_i\geqslant 0$։ *Հետևաբար, գումարի յուրաքանչյուր գումարելի ոչ բացասական է, ոչ բացասական է ամբողջ գումարը և ոչ բացասական է վերջինիս սահմանը, այսինքն՝*

$$\int_a^b [\varphi(x)-f(x)]dx \geqslant 0$$

կամ

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geqslant 0,$$



Նկ. 217

որտեղից հետևում է (3) անհավասարությունը։

Եթե $f(x)>0$ *և* $\varphi(x)>0$, *ապա մատնանշված հատկությունը ակնառու կերպով մեկնաբանվում է երկրաչափորեն (նկ. 217)։ Քանի որ* $\varphi(x)\geqslant f(x)$, *ապա* aA_1B_1b *կորագիծ սեղանի մակերեսը մեծ չէ* aA_2B_2b *կորագիծ սեղանի մակերեսից։*

Հատկություն 4: Եթե m-ը և M-ը f(x) ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքներն են [a, b] հատվածում և $a \leqslant b$, ապա

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a). \qquad (4)$$

Ապացույց: Ըստ պայմանի

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

(3) հատկության հիման վրա ունենք.

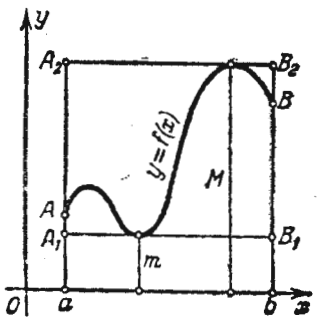
$$\int_a^b m dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b M dx. \qquad (4')$$

Բայց

$$\int_a^b m dx = m(b-a), \quad \int_a^b M dx = M(b-a)$$

(տես գլ. XI, § 2-ի, օրինակ 3): Տեղադրելով այս արտահայտությունները (4′) անհավասարության մեջ, կստանանք (4) անհավասարությունը:

Եթե $f(x) \geqslant 0$, *ապա այս հատկությունը հեշտ է մեկնաբանել երկրաչափորեն (նկ. 218).* aABb *կորագիծ սեղանի մակերեսը պարփակված է* aA_1B_1b *և* aA_2B_2b *ուղղանկյունների մակերեսների միջև:*



Նկ. 218

Հատկություն 5. (թեորեմ միջին մասին): Եթե f(x) ֆունկցիան անընդհատ է [a, b] հատվածում, ապա այդ հատվածում կգտնվի այնպիսի ξ կետ, որ իրավացի է հետևյալ հավասարությունը.

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi). \qquad (5)$$

Ապացույց: Դիցուք որոշակիության համար $a<b$: *Եթե* m-ը *և* M-ը f(x) *ֆունկցիայի, համապատասխանաբար. փոքրագույն և մեծագույն արժեքներ են* [a, b] *հատվածում, ապա ըստ (4) բանաձևի*

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M.$$

Այստեղից

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu, \quad \text{որտեղ } m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Քանի որ f(x) ֆունկցիան անընդհատ է [a, b] հատվածում ապա այն ընդունում է m-ի և M-ի միջև պարփակված բոլոր միջանկյալ արժեքները: Հետևաբար, որևէ $\xi (a \leqslant \xi \leqslant b)$ *արժեքի դեպքում կլինի* $\mu = f(\xi)$, *այսինքն՝*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Հատկություն 6: a, b, c *ցանկացած երեք թվերի համար իրավացի է.*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (6)$$

հավասարությունը, եթե միայն այդ երեք ինտեգրալները գոյություն ունեն:

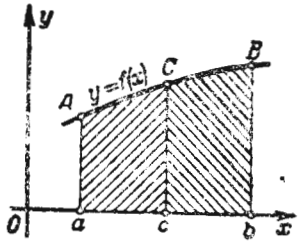
Ապացույց: Նախ ենթադրենք, որ $a<c<b$, *և* [a, b] *հատվածում* f(x) *ֆունկցիայի համար կազմենք ինտեգրալային գումար:*

Քանի որ ինտեգրալային գումարի սահմանը կախված չէ [a, b] *հատվածը մասերի տրոհման եղանակից, ապա մենք* [a, b]-*ն փոքր հատվածների կբաժանենք այնպես, որ* c *կետը լինի բաժանման կետ: Այնուհետև* [a, b] *հատվածին համապատասխանող* $\sum_a^b$ *ինտեգրալային գումարը տրոհենք երկու գումարների՝* $\sum_a^c$ *գումարի, որը համապատասխանում է* [a, c] *հատվածին և* $\sum_c^b$ *գումարի, որը համապատասխանում է* [c, b] *հատվածին:*

Այդ դեպքում

$$\sum_a^b f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Վերջին հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $\max \Delta x_i \to 0$, *կստանանք (6) առնչությունը:*



Նկ. 219

Եթե $a<b<c$, ապա ապացուցածի հիման վրա կարող ենք գրել.

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

կամ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx,$$

բայց § 2-ի (4) բանաձևի հիման վրա անենք.

$$\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx,$$

ուստի

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Համանման ձևով այս հատկությունն ապացուցվում է a, b և c կետերի ցանկացած տրիշ դասավորության դեպքում:

Նկ. 219-ում տրված է հատկության 6-ի երկրաչափական մեկնաբանությունն այն դեպքի համար, երբ $f(x)>0$ և $a<c<b$. aABb սեղանի մակերեսը հավասար է aACc և cCBb սեղանների մակերեսների գումարին:

§ 4. Որոշյալ ինտեգրալի հաշվումը: Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը

Դիցուք $\int_a^b f(x)dx$ որոշյալ ինտեգրալում a ստորին սահմանը ամրացված է, իսկ b վերին սահմանը փոփոխվում է: Այս դեպքում կփոփոխվի նաև ինտեգրալի արժեքը, այսինքն՝ ինտեգրալը կդառնա վերին սահմանի ֆունկցիա:

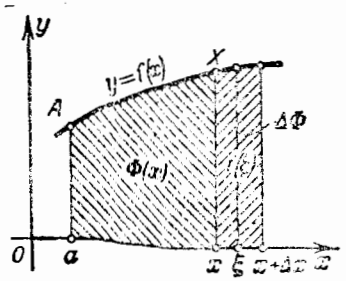
Հանրահայտ դարձած նշանակումներ ունենալու համար, վերին սահմանը նշանակենք x-ով, իսկ որպեսզի այն չշփոթվի ինտեգրման փոփոխականի հետ, վերջինս նշանակենք t-ով: (Ինտեգրալի արժեքը կախված չէ ինտեգրման փոփոխականի նշանակումից): Կստանանք $\int_a^x f(t)dt$ ինտեգրալը: Հաստատուն a-ի դեպքում այս

ինտեգրալն իրենից կներկայացնի x վերին սահմանի ֆունկցիա: Այդ ֆունկցիան նշանակենք $\Phi(x)$-ով.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (1)$$

Եթե f(t)-ն ոչ բացասական ֆունկցիա է, ապա $\Phi(x)$ մեծությունը թվապես հավասար է aAXx կորագիծ սեղանի մակերեսին (նկ. 220): Ակնհայտ է, որ այդ մակերեսը փոփոխվում է՝ կախված x-ի փոփոխությունից:

Գտնենք $\Phi(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ x-ի, այսինքն՝ գտնենք (1) որոշյալ ինտեգրալի ածանցյալն ըստ վերին սահմանի:



Նկ. 220

Թեորեմ 1: Եթե f(x)-ն անընդհատ ֆունկցիա է և $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, ապա տեղի ունի

$$\Phi'(x) = f(x)$$

հավասարությունը:

Ուրիշ խոսքերով, որոշյալ ինտեգրալի ածանցյալն ըստ վերին սահմանի հավասար է ենթաինտեգրալային ֆունկցիային, որի մեջ ինտեգրման փոփոխականի փոխարեն տեղադրված է վերին սահմանի արժեքը (այն պայմանով, որ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան անընդհատ է):

Ապացույց: x արգումենտին տանք դրական կամ բացասական Δx աճ. այդ դեպքում (հաշվի առնելով որոշյալ ինտեգրալի հատկություն 6-ը) կստանանք.

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

$\Phi(x)$ ֆունկցիայի աճը հավասար է.

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt,$$

այսինքն

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

Վերջին ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք միջին արժեքի մասին թեորեմը (որոշյալ ինտեգրալի հատկություն 5).

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x,$$

որտեղ ξ-ն գտնվում է x-ի և $x+\Delta x$-ի միջև:

Գտնենք ֆունկցիայի աճի հարաբերությունը արգումենտի աճին.

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Հետևաբար,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi).$$

Բայց քանի որ $\xi \to x$, երբ $\Delta x \to 0$, ապա

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = \lim_{\xi\to 0} f(\xi),$$

իսկ $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության հետևանքով

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x).$$

Այսպիսով, $\Phi'(x) = f(x)$: Թեորեմն ապացուցված է:

Այս թեորեմը պարզ մեկնաբանվում է երկրաչափորեն (նկ. 220): $\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x$ աճը հավասարվում է Δx հիմքն ունեցող կորագիծ սեղանի մակերեսին, իսկ $\Phi'(x) = f(x)$ ածանցյալը հավասար է xX հատվածի երկարությանը:

Դիտողություն: Ապացուցված թեորեմից, մասնավորապես, հետևում է, որ ամեն մի անընդհատ ֆունկցիա ունի նախնական: Իրոք, եթե $f(t)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, x]$ հատվածում, ապա, ինչպես ցույց է տրվել պր. XI-ի § 2-ում, այդ դեպքում $\int_a^x f(t)dt$ որոշյալ ինտեգրալը գոյություն ունի, այսինքն՝ գոյություն ունի

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ֆունկցիան: Բայց ըստ վերն ապացուցածի, այն հանդիսանում է $f(x)$ ֆունկցիայի նախնականը:

Թեորեմ 2: Եթե $F(x)$-ը հանդիսանում է $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի ինչ որ նախնական, ապա իրավացի է

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

բանաձևը:

Այս բանաձևը կոչվում է Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձև*:

Ապացույց: Դիցուք $F(x)$-ը հանդիսանում է $f(x)$ ֆունկցիայի որևէ նախնականը: Ըստ թեորեմ 1-ի $\int_0^x f(t)dt$ ֆունկցիան նույնպես հանդիսանում է $f(x)$-ի նախնական: Բայց տրված ֆունկցիայի երկու ցանկացած նախնականները տարբերվում են C^* հաստատուն գումարելիով: Հետևաբար, կարելի է գրել.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C^*. \qquad (3)$$

C^*-ի համապատասխան ընտրության դեպքում այս հավասարությունն իրավացի է x-ի բոլոր արժեքների դեպքում, այսինքն՝ հանդիսանում է նույնություն: C^* հաստատունը որոշելու համար այդ նույնության մեջ ընդունենք $x = a$. այդ դեպքում

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C^*,$$

կամ

$$0 = F(a) + C^*,$$

որտեղից

$$C^* = -F(a).$$

Հետևաբար,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Ընդունելով $x = b$, կստանանք Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը.

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

կամ, ինտեգրման փոփոխականի նշանակումը փոխարինելով x-ով՝

* Անհրաժեշտ է նշել, որ (2) բանաձևի այդպիսի անվանումը պայմանական է, ո՛չ Նյուտոնի մոտ, ո՛չ Լայբնիցի մոտ չի եղել այդպիսի բանաձև այս բառի ճշգրիտ իմաստով: Բայց կարևոր է այն, որ հենց Լայբնիցն ու Նյուտոնը առաջին անգամ հաստատեցին ինտեգրման և դիֆերենցման միջև եղած կապը, որը թույլ է տալիս ստեղծել կանոն որոշյալ ինտեգրալների հաշվման համար:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Նշենք, որ $F(b) - F(a)$ *տարբերությունը կախված չէ* F *նախնականի ընտրությունից, քանի որ բոլոր նախնականները տարբերվում են հաստատուն մեծությամբ, որը, միևնույնն է, հանման ժամանակ ոչնչացվում է։*

Եթե մտցնենք

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

նշանակումը, ապա (2) բանաձևը կարելի է արտագրել այսպես.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը տալիս է որոշյալ ինտեգրալների հաշվման գործնական հարմար մեթոդ։ Այն դեպքում, երբ հայտնի է ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի նախնականը։ Միայն այդ բանաձևի հայտնագործումից հետո որոշյալ ինտեգրալը կարող էր մաթեմատիկայում ստանալ այն նշանակությունը, որն այն ունի ներկայումս։ Չնայած որոշյալ ինտեգրալը որպես ինտեգրալային գումարի սահման հաշվելու համանման պրոցեսի հետ ծանոթ էին դեռևս հնում (Արքիմեդ), այնուամենայնիվ այդ մեթոդի կիրառությունները սահմանափակվում էին այն պարզ դեպքերով, երբ ինտեգրալային գումարի սահմանը կարող էր հաշվվել անմիջականորեն։ Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը նշանակալիորեն ընդլայնեց որոշյալ ինտեգրալի կիրառությունների ոլորտը, քանի որ մաթեմատիկան մասնավոր տեսքի տարբեր խնդիրների լուծման համար ստացավ ընդհանուր մեթոդ և դրա համար կարողացավ նշանակալիորեն ընդլայնել որոշյալ ինտեգրալի կիրառությունները տեխնիկայում, մեխանիկայում, աստղագիտության մեջ և այլն։

Օրինակ 1։

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

---

* $\Big|_a^b$ *արտահայտությունը կոչվում է կրկնակի տեղադրման նշան։ Գրականության մեջ հանդիպում են գրության երկու ձևեր՝*

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

կամ

$$F(b) - F(a) = F(x)]\Big|_a^b.$$

Հետագայում կօգտագործենք գրության և այս, և մյուս եղանակները։

Օրինակ 2։

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3},$$

Օրինակ 3։

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1),$$

Օրինակ 4։

$$\int_a^b e^x dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a,$$

Օրինակ 5։

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

Օրինակ 6։

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

§ 5. Փոփոխականի փոխարինումը որոշյալ ինտեգրալում

Թեորեմ։ Դիցուք տրված է

$$\int_a^b f(x)dx$$

ինտեգրալը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում։ $x = \varphi(t)$ բանաձևով մտցնենք t նոր փոփոխական։

Եթե

1) $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b,$
2) $\varphi(t)$-ն և $\varphi'(t)$-ն անընդհատ են $[\alpha, \beta]$ հատվածում,
3) $f[\varphi(t)]$-ն որոշված և անընդհատ է $[\alpha, \beta]$ հատվածում, ապա

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Ա ս պ ա ց ո ւ յ ց։ Եթե $F(x)$*-ը* $f(x)$ *ֆունկցիայի համար նախնական է, ապա կարող ենք գրել հետևյալ հավասարությունները.*

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \qquad (2)$$

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(t)]+C. \qquad (3)$$

Վերջին հավասարության իրավացիությունը ստուգվում է նրա երկու մասերն ըստ t-ի դիֆերենցնելով։ (Այն հետևում է նաև գլ. X § 4-ի (2) բանաձևից։ (2) հավասարությունից ստանում ենք.

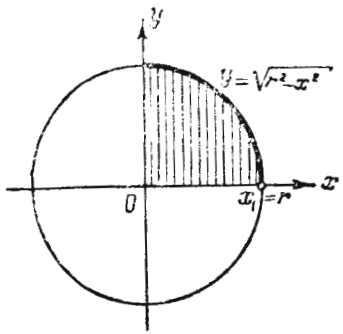
$$\int_a^b f(x)dx=\ (x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

(3) հավասարությունից ստանում ենք.

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta=\ [\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)=F(b)-F(a).$$

Վերջին արտահայտությունների աջ մասերը հավասար են, հետևաբար, հավասար են նաև ձախ մասերը։

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն։ Նշենք, որ (1) բանաձևով որոշյալ ինտեգրալը հաշվելիս մենք չենք վերադառնում հին փոփոխականին։ Եթե հաշվենք (1) հավասարության երկրորդ որոշյալ ինտեգրալը, ապա կստանանք որևէ թիվ. այդ նույն թվին էլ հավասար է առաջին ինտեգրալը։



Նկ. 221

Օ ր ի ն ա կ։ Հաշվել $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$ *ինտեգրալը։*

Լ ո ւ ծ ո ւ մ։ Կատարենք փոփոխականի փոխարինում.

$$x=r\sin t, \quad dx=r\cos t\,dt.$$

Որոշենք նոր սահմանները.

$$x=0 \text{ երբ } t=0, \qquad x=r \text{ երբ } t=\frac{\pi}{2}.$$

Հետևաբար,

$$\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\,r\cos t\,dt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=$$

$$=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi r^2}{4},$$

Հաշված ինտեգրալը երկրաչափական տեսակետից ներկայացնում է $x^2+y^2=r^2$ *(նկ. 221) շրջանագծով սահմանափակված* $\frac{1}{4}$ *շրջանի մակերեսը։*

§ 6. Մասերով ինտեգրում

Դիցուք u-ն և v-ն x-ի դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են։ Այդ դեպքում

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Նույնության երկու մասերն ինտեգրելով a-ից մինչև b սահմանները, կստանանք.

$$\int_a^b (uv)'\,dx=\int_a^b u'v\,dx+\int_a^b uv'\,dx. \qquad (1)$$

Քանի որ $\int (uv)'dx=uv+C$, *ապա* $\int_a^b (uv)'dx=uv\Big|_a^b$. *ուստի (1) հավասարությունը կարող է գրվել հետևյալ տեսքով*

$$uv\Big|_a^b=\int_a^b v\,du+\int_a^b u\,dv,$$

կամ վերջնականապես՝

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du.$$

Օ ր ի ն ա կ։ Հաշվել $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ *ինտեգրալը։*

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sin^{n-1}x}_{u}\,\underbrace{d\cos x}_{dv}=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos x\cos x\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n}x\,dx,$$

Ընտրած նշանակումներով վերջին հավասարությունը կարելի է գրել այսպես.

$$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

որտեղից գտնում ենք.

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}, \tag{2}$$

Նույն եղանակով կգտնենք.

$$I_{n-2}=\frac{n-3}{n-2}I_{n-4},$$

ուստի

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-3}I_{n-4},$$

Այնուհետև, շարունակելով նույն կերպ, մենք կհասնենք կամ մինչև I_0 կամ մինչև I_1, կախված նրանից n-ը զույգ է, թե կենտ։

Դիտարկենք երկու դեպք.

1) n-ը զույգ թիվ է, $n=2m$

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdot\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0,$$

2) n-ը կենտ թիվ է, $n=2m+1$.

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdot\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1,$$

բայց քանի որ

$$I_0=\int_0^{\pi/2}\sin^0 x\,dx=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2},$$

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=1,$$

ապա

$$I_{2m}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2m}x\,dx=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdot\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2m+1}x\,dx=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdot\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3},$$

Այս բանաձևերից հետևում է Վալլիսի բանաձևը, որը $\frac{\pi}{2}$ թիվն արտահայտում է անվերջ արտադրյալի տեսքով։

Իրոք, վերջին երկու հավասարություններից անդամ առ անդամ բաժանման ճանապարհով գտնում ենք.

$$\frac{\pi}{2}=\left(\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2m}{3\cdot5\ldots(2m-1)}\right)^2\frac{1}{2m+1}\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}, \tag{3}$$

Այժմ կապացուցենք, որ

$$\lim_{m\to\infty}\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}=1,$$

$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքի բոլոր x-երի համար իրավացի են

$$\sin^{2m-1}x>\sin^{2m}x>\sin^{2m+1}x,$$

անհավասարությունները։ Ինտեգրելով 0-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$ սահմաններում, կստանանք.

$$I_{2m-1}\geqslant I_{2m}\geqslant I_{2m+1},$$

որտեղից

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}\geqslant\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}>1, \tag{4}$$

(2) հավասարությունից հետևում է.

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}=\frac{2m+1}{2m},$$

Հետևաբար,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{2m+1}{2m}=1,$$

(4) անհավասարությունից ստանում ենք.

$$\lim\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}=1,$$

(3) բանաձևում անցնելով սահմանի, ստանում ենք Վալլիսի բանաձևը.

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\left[\left(\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2m}{3.5\ldots(2m-1)}\right)^2\frac{1}{2m+1}\right],$$

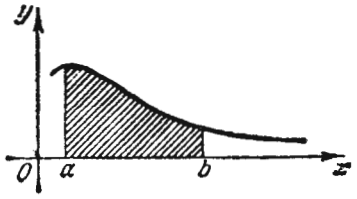
Այս բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}\right),$$

§ 7. Անիսկական ինտեգրալներ

1. Անվերջ սահմաններով ինտեգրալներ։ Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է x-ի այն բոլոր արժեքների համար, որ $a \leq x < +\infty$։ Դիտարկենք

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Նկ. 222

ինտեգրալը։ Վերջինս իմաստ ունի ցանկացած $b > a$ դեպքում։ b-ն փոփոխվելիս ինտեգրալը փոխվում է. այն հանդիսանում է b-ի անընդհատ ֆունկցիա (տես § 4)։ Դիտարկենք այդ ինտեգրալի վարքի հարցը, երբ $b \to +\infty$ (նկ. 222)։

Սահմանում։ Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

վերջավոր սահմանը, ապա վերջինս անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ $[a, +\infty)$ միջակայքում և նշանակում են այսպես.

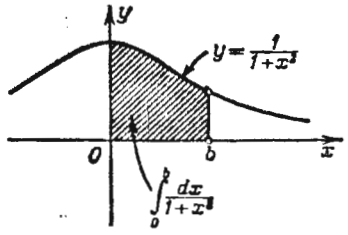
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Հետևաբար, ըստ սահմանման ունենք.

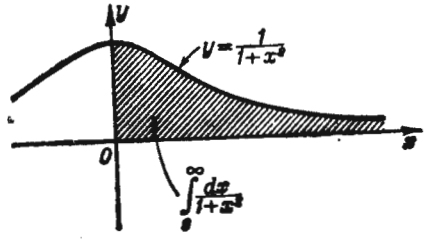
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ասում են, որ այս դեպքում $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ անիսկական ինտեգրալը գոյություն ունի կամ զուգամիտում է։ Եթե $\int_a^b f(x)\,dx$ ինտեգրալը $b \to +\infty$ դեպքում չունի վերջավոր սահման, ապա ասում են, որ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$-ը գոյություն չունի կամ տարամիտում է։

Հեշտ է պարզել անիսկական ինտեգրալի երկրաչափական իմաստն այն դեպքում, երբ $f(x) \geq 0$. եթե $\int_a^b f(x)\,dx$-ը արտահայտում է $y = f(x)$ կորով, Ox առանցքով և $x = a$, $x = b$ օրդինատներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը, ապա բնական կլինի ընդունել, որ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ անիսկական ինտեգրալն արտահայտում է $y = f(x)$, $x = a$ գծերի և աբսցիսների առանցքի միջև գտնվող անսահմանափակ (անվերջ) տիրույթի մակերեսը։



Նկ. 223



Նկ. 224

Համանման ձևով սահմանվում են անիսկական ինտեգրալները և մյուս անվերջ միջակայքերի համար.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

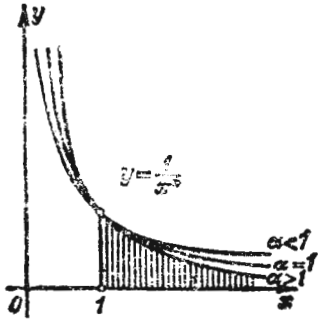
Վերջին հավասարությունը պետք է հասկանալ այսպես. եթե աջ կողմում գտնվող յուրաքանչյուր անիսկական ինտեգրալ գոյություն ունի, ապա ըստ սահմանման գոյություն ունի (զուգամիտում է) և ձախակողմյան ինտեգրալը։

Օրինակ 1։ Հաշվել $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ինտեգրալը (նկ. 223 և 224)։

Լուծում։ Ըստ անիսկական ինտեգրալի սահմանման գտնում ենք

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=\lim_{a\to+\infty}\operatorname{arctg}b=\frac{\pi}{2},$$

Դիտարկած ինտեգրալն արտահայտում է նկ. 224 -ում շրջիթված անվերջ կորագիծ սեղանի մակերեսը։



Նկ. 225

Օրինակ 2։ Պարզել, թե α-ի ինչպիսի արժեքների դեպքում է (նկ. 225) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ ինտեգրալը զուգամիտում և ինչպիսի արժեքների դեպքում՝ տարամիտում,

Լուծում։ Քանի որ (երբ $\alpha\neq1$)

$$\int_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1),$$

ապա

$$\int_1^{+\infty}\frac{bx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1):$$

Հետևաբար, դիտարկվող ինտեգրալի նկատմամբ կարելի է կատարել հետևյալ եզրակացությունները.

եթե $\alpha>1$, ապա $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$, այսինքն ինտեգրալը զուգամիտում է.

եթե $\alpha<1$ ապա $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\infty$, այսինքն ինտեգրալը տարամիտում է.

երբ $\alpha=1$ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^{+\infty}=\infty$ ինտեգրալը տարամիտում է։

Օրինակ 3։ Հաշվել $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$,

Լուծում։

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2},$$

երկրորդ ինտեգրալը հավասար է $\frac{\pi}{2}$ (տես օրինակ 1)։ Հաշվենք առաջին ինտեգրալը

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^0\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\alpha\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_\alpha^0=\lim_{\alpha\to-\infty}(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}\alpha)=\frac{\pi}{2},$$

Հետևաբար,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi,$$

Շատ դեպքերում բավական է լինում հաստատել, զուգամիտում է տվյալ ինտեգրալը կամ տարամիտում է այն, և գնահատել նրա արժեքը։ Դրա համար կարող են օգտակար լինել հետևյալ թեորեմները, որոնք մենք կարող ենք բերել առանց ապացույցների, իսկ նրանց կիրառումը՝ յուրաքանչյուր օրինակների վրա։

Թեորեմ 1։ Եթե բոլոր x-երի ($x\geqslant a$) համար տեղի ունի

$$0\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x)$$

անհավասարությունը և եթե $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$-ը զուգամիտում է, ապա $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$-ը նույնպես զուգամիտում է, բացի որում

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx\leqslant\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx:$$

Օրինակ 4։ Ուսումնասիրել, զուգամիտում է արդյոք

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

ինտեգրալը։

Լուծում։ Նկատենք, որ $1\leqslant x$ դեպքում

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)}<\frac{1}{x^2},$$

Այնուհետև,

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}=1,$$

Հետևաբար,

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

զուգամիտում է և նրա արժեքը փոքր է 1-ից։

Թեորեմ 2։ Եթե բոլոր x-երի համար տեղի ունի $0\leqslant\varphi(x)\leqslant$

$\leq f(x)$ անհավասարությունը, ըստ որում $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$-ը տարամիտում է, ապա տարամիտում է և $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$-ը:

Օրինակ 5։ Ուսումնասիրել, զուգամիտում է արդյոք

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}$$

ինտեգրալը։

Նկատում ենք, որ

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Բայց

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = +\infty.$$

Հետևաբար, տարամիտում է և տրված ինտեգրալը։

Վերջին երկու թեորեմներում դիտարկվեցին անիսկական ինտեգրալներ՝ ոչ բացասական ֆունկցիաներից։ Անվերջ միջակայքում նշանը փոխող f(x) *ֆունկցիայի դեպքի համար տեղի ունի հետևյալ թեորեմը։*

Թեորեմ 3։ **Եթե** $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ ինտեգրալը զուգամիտում է, ապա զուգամիտում է և $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ինտեգրալը:

Այս դեպքում վերջին ինտեգրալը կոչվում է բացարձակ զուգամիտող:

Օրինակ 6։ Ուսումնասիրել

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$$

ինտեգրալի զուգամիտությունը։

Լուծում։ Այստեղ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան նշանափոխ է։ Նկատում ենք, որ

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right|. \quad \text{Բայց} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2},$$

Հետևաբար, $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$ *ինտեգրալը զուգամիտում է։ Այստեղից հետևում է, որ զուգամիտում է և տրված ինտեգրալը։*

2. Խզվող ֆունկցիայի ինտեգրալը։ Դիցուք f(x) *ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է* $a \leq x < c$ *դեպքում, իսկ երբ* $x = c$ *ֆունկցիան կամ որոշված չէ, կամ խզվում է։ Այս դեպքում չի կարելի խոսել* $\int_a^c f(x)\,dx$ *ինտեգրալի մասին՝ որպես ինտեգրալային գումարների սահմանի, քանի որ* f(x)*-ը* [a, c] *հատվածում անընդհատ չէ, ուստի այդ սահմանը կարող է և գոյություն չունենալ։*

c *կետում խզվող* f(x) *ֆունկցիայի* $\int_a^c f(x)\,dx$ *ինտեգրալը սահմանվում է հետևյալ կերպ.*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b\to c-0} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Եթե աջ մասի սահմանը գոյություն ունի, ապա ինտեգրալն անվանում են անիսկական զուգամիտող ինտեգրալ. հակառակ դեպքում ինտեգրալն անվանում են տարամիտող։

Եթե f(x) *ֆունկցիան ունի խզում* [a, c] *հատվածի ձախ ծայրում (այսինքն՝* $x = a$ *դեպքում), ապա ըստ սահմանման*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b\to a+0} \int_b^c f(x)\,dx.$$

Եթե f(x) *ֆունկցիան ունի խզում* [a, c] *հատվածի ներսի որևէ* $x = x_0$ *կետում, ապա ընդունում են*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^c f(x)\,dx,$$

եթե հավասարության աջ մասի երկու անիսկական ինտեգրալները գոյություն ունեն։

Օրինակ 7։ Հաշվել $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$։

Լուծում։

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1-0}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{b\to 1-0} 2\sqrt{1-x}\Big|_0^b =$$

$$= -\lim_{b\to 1-0} 2(\sqrt{1-b}-1) = 2.$$

Օրինակ 8։ Հաշվել $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ ինտեգրալը։

Լուծում։ Քանի որ ինտեգրման հատվածի ներսը գոյություն ունի $x=0$ կետը, որտեղ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան խզվող է, ապա ինտեգրալը պետք է ներկայացնել որպես երկու զուգամետների գումար.

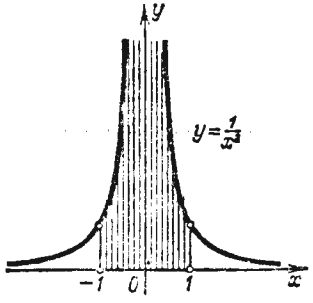
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1\to -0}\int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2\to +0}\int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2},$$

Յուրաքանչյուր առանձին հաշվենք առանձին.

$$\lim_{\varepsilon_1\to -0}\int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1\to -0}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon_1} = -\lim_{\varepsilon_1\to -0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{-1}\right) = \infty,$$

հետևաբար, $[-1, 0]$ հատվածում ինտեգրալը տարամիտում է.

$$\lim_{\varepsilon_1\to +0}\int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1\to +0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \infty.$$



Նկ. 226

Նշանակում է $[0, 1]$ հատվածում ինտեգրալը նույնպես տարամիտում է։

Այսպիսով տրված ինտեգրալը տարամիտում է ամբողջ $[-1, 1]$ հատվածի վրա։

Նշենք, որ եթե մենք սկսենք հաշվել տրված ինտեգրալը, ուշադրություն չդարձնելով $x=0$ կետում ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի խզման վրա, ապա կստանայինք ոչ ճիշտ արդյունք։ Իրոք,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{-1}\right) = -2,$$

որն անհնարին է (նկ. 226)։

Դիտողություն։ Եթե $[a, b]$ հատվածում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ հատվածի ներսն ունի $a_1, a_2, \ldots, a_n$ վերջավոր թվով խզման կետեր, ապա $[a, b]$ հատվածում $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \ldots + \int_{a_n}^b f(x)dx,$$

Եթե հավասարության աջ մասի յուրաքանչյուր անիսկական ինտեգրալ զուգամիտում է։ Իսկ եթե թեկուզև այդ ինտեգրալներից մեկը տարամիտում է, ապա և $\int_a^b f(x)dx$-ը կոչվում է տարամիտող։

Խզվող ֆունկցիաների անիսկական ինտեգրալների զուգամիտության որոշման և նրանց արժեքների գնահատման համար հաճախ կարող են կիրառվել անվերջ սահմաններով ինտեգրալների գնահատման թեորեմներին համանման թեորեմներ։

Թեորեմ I՝։ Եթե $[a, c]$ հատվածում $f(x)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաները c կետում խզվող են, ըստ որում այդ հատվածի բոլոր կետերում տեղի ունեն

$$\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$$

անհավասարությունները և $\int_a^c \varphi(x)dx$ զուգամիտում է, ապա $\int_a^c f(x)\,dx$ նույնպես զուգամիտում է։

Թեորեմ II՝։ Եթե $[a, c]$ հատվածում $f(x)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաները խզվող են c կետում, ըստ որում այդ հատվածի բոլոր կետերում տեղի ունեն

$$f(x) \geqslant \varphi(x) \geqslant 0,$$

անհավասարությունները և $\int_a^c \varphi(x)dx$ տարամիտում է, ապա $\int_a^c f(x)\,dx$ նույնպես տարամիտում է։

Թեորեմ III՝։ Եթե $f(x)$-ը $[a, c]$ հատվածում նշանափոխ ֆունկցիա է, խզվող է միայն c կետում և այդ ֆունկցիայի բացարձակ մեծության անիսկական ինտեգրալը՝ $\int_a^c |f(x)|dx$-ը զուգամիտում է, ապա զուգամիտում է նաև $\int_a^c f(x)dx$ ինտեգրալը։

Իրոք այնպիսի ֆունկցիաներ, որոնց հետ հարմար է համեմա-

տել անիսկական ինտեգրալի նշանի տակ եկած ֆունկցիաները, հաճախ վերցնում են $\frac{1}{(c-x)^{\alpha}}$-ն: Հեշտ է ստուգել, որ $\int_a^c \frac{1}{(c-x)^{\alpha}}dx$-ը զուգամիտում է, երբ $\alpha<1$, տարամիտում է, երբ $\alpha\geq 1$:

Դա վերաբերում է նաև $\int_a^c \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}dx$ ինտեգրալներին:

Օրինակ 9. Զուգամիտում է արդյոք $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx$ ինտեգրալը:

Լուծում. Ենթաինտեգրալային ֆունկցիան խզվող է $[0, 1]$ հատվածի ձախ ծայրում: Այն համեմատելով $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ֆունկցիայի հետ, կունենանք

$$\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}<\frac{1}{\sqrt{x}},$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ անիսկական ինտեգրալը գոյություն ունի, հետևաբար, ավելի փոքր ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալը, այսինքն՝ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx$ նույնպես գոյություն ունի:

§ 8. Որոշյալ ինտեգրալների մոտավոր հաշվումը

Գլուխ X-ի վերջում նշվել է, որ ոչ ամեն մի անընդհատ ֆունկցիայի համար նրա նախնականն արտահայտվում է տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Այդպիսի դեպքերում Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևով որոշյալ ինտեգրալների հաշվումը դժվար է, և կիրառվում են որոշյալ ինտեգրալների հաշվման տարբեր մոտավոր մեթոդներ: Ելնելով որոշյալ ինտեգրալի՝ որպես գումարի սահմանի գաղափարից, այժմ մենք շարադրենք ինտեգրման մի քանի մոտավոր եղանակներ:

I. *Ուղղանկյունների բանաձևը:* Դիցուք $[a, b]$ հատվածում տրված է $y=f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան: Պահանջվում է հաշվել

$$\int_a^b f(x)dx$$

որոշյալ ինտեգրալը: $a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n=b$ կետերով $[a, b]$ հատվածը բաժանենք Δx երկարությամբ n հավասար մասերի.

$$\Delta x=\frac{b-a}{n};$$

Այնուհետև $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$-ով նշանակենք $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքները $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ կետերում, այսինքն՝

$$y_0=f(x_0),\quad y_1=f(x_1),\ \ldots,\quad y_n=f(x_n),$$

կազմենք

$$y_0\Delta x+y_1\Delta x+\ldots+y_{n-1}\Delta x,$$
$$y_1\Delta x+y_2\Delta x+\ldots+y_n\Delta x$$

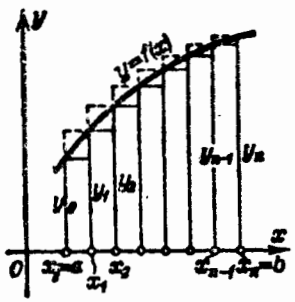
գումարները:

Այդ գումարներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է $f(x)$ ֆունկցիայի համար $[a, b]$ հատվածում ինտեգրալային գումար և ստի մոտավորապես արտահայտում է

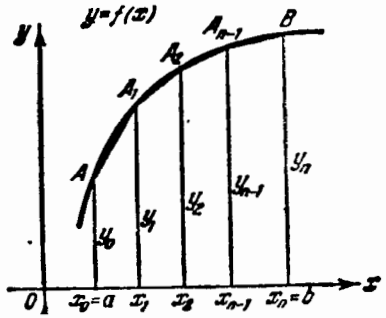
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}), \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n) \qquad (1')$$

ինտեգրալը: Դրանք էլ հանդիսանում են ուղղանկյունների բանաձևեր: Նկ. 227-ից պարզ է, որ եթե $f(x)$-ը դրական և աճող ֆունկցիա է, ապա (1) բանաձևն արտահայտում է «ներս մտած» ուղղանկյուններից կազմված աստիճանաձև պատկերի մակերեսը, իսկ (1′)



Նկ. 227



Նկ. 228

բանաձևը՝ «դուրս եկած» ուղղանկյուններից կազմված աստիճանաձև պատկերի մակերեսը:

Ուղղանկյունների բանաձևով ինտեգրալը հաշվելիս կատարած սխալը կլինի այնքան փոքր, որքան մեծ է n-ը (այսինքն որքան փոքր է $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ բաժանման քայլը):

II. *Սեղանների բանաձևը։* Բնական է ապասել, որ որոշյալ ինտեգրալի ավելի ճշգրիտ արժեքը մենք կստանանք, եթե տրված $y=f(x)$ կորը փոխարինենք ոչ թե աստիճանաձև գծով, ինչպես այդ տրվեց ուղղանկյունների բանաձևում, այլ ներգծված բեկյալով (նկ. 228)։ Այս դեպքում aABb կորագիծ սեղանի մակերեսը կփոխարինվի այնպիսի ուղղագիծ սեղանների մակերևույթների գումարով, որոնք վերևից սահմանափակված են AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}B$ լարերով։ Քանի որ այդ սեղաններից առաջինի մակերեսը հավասար է $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$, երկրորդի մակերեսը հավասար է $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$ և այլն, ապա

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x+\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\right),$$

կամ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right). \qquad (2)$$

Սա էլ հենց հանդիսանում է սեղանների բանաձևը։ Նշենք, որ (2) բանաձևի աջ մասում գտնվող թիվը հանդիսանում է (1) և (1′) բանաձևերի աջ մասում գտնվող թվերի միջին թվաբանականը։

n թիվն ընտրվում է կամայար։ Որքան մեծ լինի այդ թիվը, և հետևաբար, որքան փոքր լինի $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ քայլը, այնքան մեծ ճշտությամբ (2) մոտավոր հավասարությունն աջ մասում գրված գումարը կստա ինտեգրալի արժեքը։

III. *Պարաբոլների բանաձևը (Սիմպսոնի բանաձևը)։* $[a, b]$ հատվածը բաժանենք $n=2m$ զույգ թվով հավասար մասերի։ $[x_0, x_1]$ և $[x_1, x_2]$ առաջին երկու հատվածներին համապատասխանող և $y=f(x)$ կորով սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսը փոխարինենք այնպիսի կորագիծ սեղանի մակերեսով, որը սահմանափակված է $M(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ երեք կետերով անցնող և Oy առանցքին զուգահեռ առանցք ունեցող երկրորդ աստիճանի պարաբոլով (նկ. 229)։ Այսպիսի կորագիծ սեղանն անվանենք պարաբոլական սեղան։

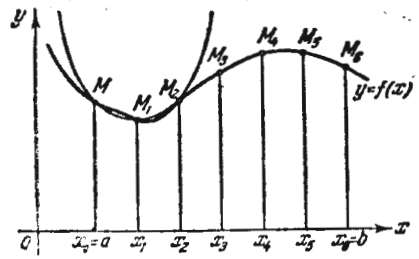
Oy առանցքին զուգահեռ առանցք ունեցող պարաբոլի հավասարումն ունի

$$y=Ax^2+Bx+C$$

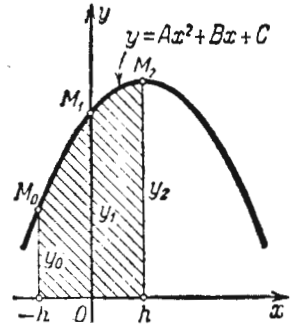
տեսքը։

A, B և C գործակիցները միարժեքորեն որոշվում են այն պայմանից, որ պարաբոլն անցնում է տրված երեք կետերով։ Համանման պարաբոլներ կառուցում ենք և հաջորդների միջև զույգերի համար։ Պարաբոլական սեղանների մակերեսների գումարն էլ հենց կստա ինտեգրալի մոտավոր արժեքը։

Նախ հաշվենք մեկ պարաբոլական սեղանի մակերեսը։



Նկ. 229



Նկ. 230

Լեմմա։ Եթե կորագիծ սեղանը սահմանափակված է

$$y=Ax^2+Bx+C$$

պարաբոլով, Ox առանցքով և երկու օրդինատներով, որոնց հեռավորությունը հավասար է 2h-ի, ապա նրա մակերեսը հավասար է

$$S=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2), \qquad (3)$$

որտեղ y_0-ն և y_2-ը եզրային օրդինատներն են, իսկ y_1-ը՝ հատվածի միջնակետում կորի օրդինատն է։

Ապացույց։ Կոորդինատների օժանդակ սիստեմը դասավորենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկ. 230-ում։

$y=Ax^2+Bx+C$ պարաբոլի հավասարման գործակիցները որոշվում են հետևյալ հավասարումներից.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{եթե } x_0=-h, & \text{ապա} & y_0=Ah^2-Bh+C, \\ \text{եթե } x_1=0, & \text{ապա} & y_1=\qquad\qquad C, \\ \text{եթե } x_2=h, & \text{ապա} & y_2=Ah^2+Bh+C. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

A, B, C գործակիցները համարելով հայտնի, որոշյալ ինտեգրալի օգնությամբ որոշենք պարաբոլական սեղանի մակերեսը.

$$S=\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+C)dx=\left[\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\right]_{-h}^{h}=\frac{h}{3}(2Ah^2+6C).$$

Բայց (4) հավասարությունից հետևում է, որ

$$y_0+4y_1+y_2=2Ah^2+6C.$$

Հետևաբար,

$$S=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2),$$

ինչ պահանջվում էր ապացուցել:

Նորից անդրադառնանք մեր հիմնական խնդրին (տես նկ. 229): Օգտվելով (3) բանաձևից, կարող ենք գրել հետևյալ մոտավոր հավասարությունները ($h=\Delta x$):

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_2+4y_3+y_4),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}=b} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m}).$$

Գումարելով աջ և ձախ մասերը, ձախից կստանանք որոնելի ինտեգրալը, աջից՝ նրա մոտավոր արժեքը.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots$$

$$\cdots+2y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m}), \qquad (5)$$

կամ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}[y_0+y_{2m}+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2m-2})+$$

$$+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2m-1})].$$

Սա էլ հենց Սիմպսոնի բանաձևն է: Այստեղ բաժանման կետերի 2m թիվը կամայական է, բայց որքան մեծ է այդ թիվը, այնքան (5) հավասարությունն աջ մասի գումարը ճշգրտորեն է տալիս ինտեգրալի արժեքը*:

* Իմանալու համար, թե բաժանման քանի կետ պետք է վերցնել՝ ինտեգրալը տրված աստիճանի ճշտությամբ հաշվելու համար, կարելի է օգտվել ինտեգրալի մոտավոր հաշվման ժամանակ ստացվող սխալների գնահատման բանաձևից: Այստեղ մենք չենք բերում այդ գնահատականները: Ընթերցողը կարող է գտնել անալիզի ավելի մանրամասն դասընթացներում. տես, օրինակ, Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1962, т. II, гл. IX, § 5.

Լուծում: Հաշվել մոտավորապես

$$\ln 2 \int_1^2 \frac{dx}{x},$$

Լուծում: [1, 2] հատվածը բաժանենք 10 հավասար մասերի (նկ. 131): Ընդունելով

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1,$$

կազմենք ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակը.

x	$y=1/x$	x	$y=1/x$
$x_0=1,0$	$y_0=1,00000$	$x_6=1,6$	$y_6=0,62500$
$x_1=1,1$	$y_1=0,90909$	$x_7=1,7$	$y_7=0,58824$
$x_2=1,2$	$y_2=0,83333$	$x_8=1,8$	$y_8=0,55556$
$x_3=1,3$	$y_3=0,76923$	$x_9=1,9$	$y_9=0,52632$
$x_4=1,4$	$y_4=0,71429$	$x_{10}=2,0$	$y_{10}=0,50000$
$x_5=1,5$	$y_5=0,66667$		

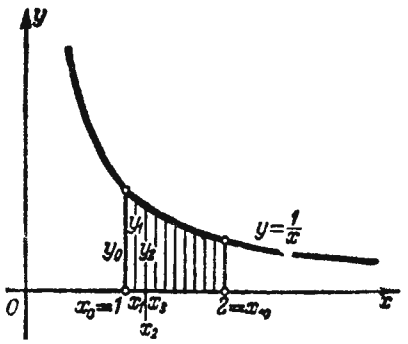
I. (1) ուղղանկյունների առաջին բանաձևից կստանանք.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1(y_0+y_1+\cdots+y_9)=0,1\cdot 7,18773=0,71877,$$

Ըստ (1′) ուղղանկյունների երկրորդ բանաձևի կստանանք.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1(y_1+y_2+\cdots+y_{10})=0,1\cdot 6,68773=0,66877,$$

Նկ. 231-ից անմիջականորեն հետևում է, որ տվյալ դեպքում առաջին բանաձևը ինտեգրալի արժեքը տալիս է հավելորդով, երկրորդը՝ պակասորդով:



Նկ. 231

II. Ըստ (2) սեղանների բանաձևի ստանում ենք.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\left(\frac{1+0,5}{2}+6,18773\right)=0,69377.$$

III. Ըստ (5) Սիմպսոնի բանաձևի ունենք.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0,1}{3}[y_0+y_{10}+2(y_2+y_4+y_6+y_8)+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)]=$$

$$=\frac{0,1}{3}(1+0,5+2\cdot 2,72818+4\cdot 3,45955)=0,69315.$$

Իրականում $\ln 2=\int_1^2 \frac{dx}{x}=0,6931472$ (մինչև յոթերորդ նշանի ճշտությամբ)։

Այսպիսով, [0,1] հատվածը 10 մասերի տրոհելիս ըստ Սիմպսոնի բանաձևի մենք ստացանք հինգ ճշգրիտ նշաններ, սեղանների բանաձևով՝ միայն երկու ճշգրիտ նշան, ուղղանկյունների բանաձևով մենք կարող ենք հաշիվներել միայն առաջին նշանի համար։

§ 9. Չեբիշևի բանաձևը

Տեխնիկական հաշվումներում հաճախ է օգտագործվում Չեբիշևի մոտավոր ինտեգրման բանաձևը։

Դիցուք նորից պահանջվում է հաշվել $\int_a^b f(x)dx$-ը։

Ենթադրենք ինտեգրալային ֆունկցիան փոխարինենք Լագրանժի $P(x)$ ինտերպոլացիոն բազմանդամով (§ 9, գլ. VII) $[a, b]$ հատվածում վերցնելով ֆունկցիայի որևէ n արժեքներ՝ $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, որտեղ x_1, x_2, ..., x_n-ը $[a, b]$ հատվածի կամայական կետերն են.

$$P(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}f(x_1)+$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}f(x_2)+$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}f(x_n). \qquad (1)$$

Կստանանք հետևյալ ինտեգրման մոտավոր բանաձևը.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)dx, \qquad (2)$$

մի քանի հաշվումներից հետո այն կընդունի

$$\int_a^b f(x)dx \approx C_1f(x_1)+C_2f(x_2)+\dots+C_nf(x_n) \qquad (3)$$

տեսքը, որտեղ C_i գործակիցները հաշվում են

$$C_i=\int_a^b \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}dx \qquad (4)$$

բանաձևով։

(3) բանաձևը մեծածավալ է և հաշվումների համար անհարմար, քանի որ C_i գործակիցներն արտահայտվում են բարդ կոտորակներով։

Չեբիշևը դրել է հակադարձ խնդիրը՝ տալ ոչ թե x_1, x_2, ..., x_n աբսցիսները, այլ C_1, C_2,..., C_n գործակիցները և որոշել x_1, x_2, ..., x_n աբսցիսները։

C_i գործակիցները տրվում են այնպես, որ (3) բանաձևը հաշվումների համար լինի հնարավորին չափով պարզ։ Ակնհայտ է, որ դա կլինի այն դեպքում, երբ բոլոր C_i գործակիցները միմյանց հավասար լինեն.

$$C_1=C_2=\dots=C_n.$$

Եթե C_1, C_2,..., C_n գործակիցների ընդհանուր արժեքը նշանակենք C_n-ով, ապա (3) բանաձևը կընդունի

$$\int_a^b f(x)dx \approx C_n[f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)] \qquad (5)$$

տեսքը։ (5) բանաձևը ընդհանրապես մոտավոր հավասարություն է, բայց եթե $f(x)$-ը հանդիսանում է $(n-1)$-ից ոչ բարձր աստիճանի բազմանդամ, ապա հավասարությունը կլինի ճշգրիտ։ Այս հանգամանքն էլ թույլ է տալիս որոշել C_n, x_1, x_2,..., x_n մեծությունները։

Ինտեգրման ցանկացած միջակայքի համար հարմար բանաձև ստանալու համար ինտեգրման $[a, b]$ հատվածը ձևափոխենք $[-1, 1]$ հատվածի։ Դրա համար կընդունենք

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t,$$

այս դեպքում, երբ $t=-1$, $x=a$, երբ $t=1$-ի, $x=b$։

Հետևաբար,

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt,$$

որտեղ $\varphi(t)$-ով նշանակված է ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող t-ից կախված ֆունկցիան: Այսպիսով, $[a, b]$ հատվածում տրված $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրման խնդիրը միշտ կարող է բերվել $[-1, 1]$ հատվածում սրանից տրիշ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրման:

Եվ այսպես, խնդիրը հանգեց նրան, որ

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=C_n[f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)] \tag{6}$$

բանաձևում C_n, x_1, x_2,..., x_n թվերն ընտրվեն այնպես, որ այդ բանաձևը ճշգրիտ լինի

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1} \tag{7}$$

տեսքն ունեցող ամեն մի $f(x)$ ֆունկցիայի համար: Նկատանք, որ

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1})dx=$$

$$=\begin{cases} 2\left(a_0+\frac{a_2}{3}+\frac{a_4}{5}+\frac{a_6}{7}+\dots+\frac{a_{n-1}}{n}\right), & \text{եթե } n\text{-ը կենտ թիվ է} \\ 2\left(a_0+\frac{a_2}{3}+\dots+\frac{a_{n-2}}{n-1}\right), & \text{եթե } n\text{-ը զույգ թիվ է:} \end{cases} \tag{8}$$

Մյուս կողմից, (6) հավասարության աջ մասում գտնվող գումարը (7)-ի հիման վրա հավասար կլինի

$$C_n[na_0+a_1(x_1+x_2+\dots+x_n)+a_2(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)+\dots$$
$$\dots+a_{n-1}(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\dots+x_n^{n-1})]: \tag{9}$$

Հավասարեցնելով (8) և (9) արտահայտությունները, կստանանք մի հավասարություն, որը պետք է ճշմարտացի լինի ցանկացած a_0, a_1, ..., a_{n-1}-ի դեպքում.

$$2\left(a_0+\frac{a_2}{3}+\frac{a_4}{5}+\frac{a_6}{7}+\dots\right)=C_n[na_0+a_1(x_1+x_2+\dots+x_n)+$$
$$+a_2(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)+\dots+a_{n-1}(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\dots+x_n^{n-1})]:$$

Հավասարեցնում ենք a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}-ի՝ հավասարության ձախ և աջ մասերում եկած գործակիցները.

$$\left.\begin{aligned} &2=C_n n \text{ կամ } C_n=\frac{2}{n}, \\ &x_1+x_2+\dots+x_n=0, \\ &x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=\frac{2}{3C_n}=\frac{n}{3}, \\ &x_1^3+x_2^3+\dots+x_n^3=0, \\ &x_1^4+x_2^4+\dots+x_n^4=\frac{2}{5C_n}=\frac{n}{5}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Վերջին $n-1$ հավասարումներից գտնենք x_1, x_2, ..., x_n աբսցիսները: n-ի տարբեր արժեքների համար այդ լուծումները գտնված են Չեբիշևի կողմից: Ստորև բերվում են նրա կողմից գտնված լուծումներն այն դեպքերում, երբ միջանկյալ կետերի թիվը՝ n-ը հավասար է 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9:

Օրդինատների թիվը՝ n	C_n գործակիցը	x_1, x_2, ..., x_n աբսցիսների արժեքները
3	$\frac{2}{3}$	$x_1=-x_3=0,707107$ $x_2=0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1=-x_4=0,794654$ $x_2=-x_3=0,187592$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1=-x_5=0,839498$ $x_2=-x_4=0,374541$ $x_3=0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1=-x_6=0,866247$ $x_2=-x_5=0,422519$ $x_3=-x_4=0,266635$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1=-x_7=0,883862$ $x_2=-x_6=0,529657$ $x_3=-x_5=0,323912$ $x_4=0$
9	$\frac{2}{9}$	$x_1=-x_9=0,911589$ $x_2=-x_8=0,601019$ $x_3=-x_7=0,528762$ $x_4=-x_6=0,167906$ $x_5=0$

Այսպիսով $[-1,1]$ հատվածում ինտեգրալի մոտավոր հաշվումը կատարվում է Չեբիշևի հետևյալ բանաձևով.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{2}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)],$$

որտեղ n-ը 3, 4, 5, 6, 7 կամ 9 թվերից որևէ մեկն է, իսկ x_1, x_2, ..., x_n-ը աղյուսակում բերված թվերն են: Իբրև n չի կարելի վերցնել 8 թիվը կամ 9-ից գերազանցող թիվ. այս դեպքում (10) հավասարումների սիստեմը տալիս է կեղծ արմատներ: Երբ տրված ինտեգրալն ունի a և b ինտեգրման սահմաններ, ապա Չեբիշևի բանաձևն ընդունում է

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\frac{b-a}{n}[f(X_1)+f(X_2)+\ldots+f(X_n)]$$

տեսքը, որտեղ $X_i=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}x_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, իսկ x_i-երն ունեն աղյուսակում ցույց տրված արժեքները:

Օրինակ. Հաշվել $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x}(=\ln 2)$:

Լուծում. Ամենից առաջ փոփոխականի փոխարինման միջոցով այս ինտեգրալը ձևափոխենք նոր ինտեգրալի, որի ինտեգրման սահմանները կլինեն -1 և 1.

$$x=\frac{1+2}{2}+\frac{2-1}{2}t=\frac{3}{2}+\frac{t}{2}=\frac{3+t}{2}, \quad dx=\frac{dt}{2},$$

Այդ դեպքում

$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{x}=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{3+t},$$

Ընդունելով n=3, Չեբիշևի բանաձևով հաշվենք վերջին ինտեգրալը.

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=\frac{2}{3}[f(0,707107)+f(0)+f(-0,707107)],$$

Քանի որ $f(0,707107)=\frac{1}{3+0,707107}=\frac{1}{3,707107}=0,269752$, $f(0)=\frac{1}{3+0}=0,333333$, $f(-0,707107)=\frac{1}{3-0,707107}=\frac{1}{2,292893}=0,436130$,

ապա

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{3+t}=\frac{2}{3}(0,269752+0,333333+0,436130)=\frac{2}{3}\cdot 1,039215=0,692810\approx 0,693.$$

Այս արդյունքը համեմատելով ըստ ուղղանկյունների բանաձևի, ըստ սեղանների բանաձևի և ըստ Սիմպսոնի բանաձևի հաշվումների արդյունքների հետ (տես նախորդ պարագրաֆի օրինակը), մենք նկատում ենք, որ ըստ Չեբիշևի բանաձևի ստացված արդյունքը (երեք միջանկյալ կետերով), ավելի լավ է համաձայնվում ինտեգրալի ճշգրիտ արժեքի հետ, քան այն արդյունքը, որը ստացվել է ըստ սեղանների բանաձևի (ինը միջանկյալ կետերով):

Նշենք, որ ինտեգրալների մոտավոր հաշվման տեսությունը հետագա զարգացում է ստացել ակադեմիկոս Ա. Ն. Կռիլովի (1863—1945) աշխատանքներում:

§ 16. Պարամետրից կախված ինտեգրալներ: Գամմա ֆունկցիա

Պարամետրից կախված ինտեգրալների դիֆերենցումը: Դիցուք տրված է

$$I(\alpha)=\int_{a}^{b} f(x, \alpha)dx \qquad (1)$$

ինտեգրալը, որի մեջ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան կախված է որևէ α պարամետրից: Եթե α պարամետրը փոփոխվի, ապա կփոխվի նաև որոշյալ ինտեգրալի արժեքը: Այսպիսով, որոշյալ ինտեգրալը α-ի ֆունկցիա է, ուստի մենք այն կարող ենք նշանակել $I(\alpha)$-ով:

1. Ենթադրենք, որ $f(x, \alpha)$-ն և $f'_\alpha(x, \alpha)$-ն հանդիսանում են անընդհատ ֆունկցիաներ, երբ

$$c\leqslant\alpha\leqslant d \text{ և } a\leqslant x\leqslant b. \qquad (2)$$

Գտնենք ինտեգրալի ածանցյալն ըստ α պարամետրի.

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha):$$

Այս ածանցյալը գտնելու համար նկատենք, որ

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\frac{1}{\Delta\alpha}\left[\int_{a}^{b} f(x, \alpha+\Delta\alpha)dx-\int_{a}^{b} f(x, \alpha)dx\right]=$$

$$=\int_{a}^{b}\frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha)-f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}dx.$$

Ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառելով Լագրանժի թեորեմը, կունենանք.

$$\frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha)-f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}=f'_\alpha(x, \alpha+\theta\Delta\alpha), \text{ որտեղ } 0<\theta<1. \text{ Քանի}$$

որ $f'_\alpha(x, \alpha)$-ն անընդհատ է (2) փակ տիրույթում, ապա $f'_\alpha(x, \alpha+\theta\Delta\alpha)=$ $=f'_\alpha(x, \alpha)+\varepsilon$, որտեղ x-ից, α-ից, Δα-ից կախված ε մեծությունը ձգտում է զրոյի, երբ $\Delta\alpha\to 0$:

Այսպիսով,

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b[f'_\alpha(x, \alpha)+\varepsilon]dx=\int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)dx+\int_a^b \varepsilon\, dx:$$

Անցնելով սահմանի, երբ $\Delta\alpha\to 0$, ստանում ենք*.

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)dx$$

կամ

$$\left[\int_a^b f(x, \alpha)\, dx\right]'_\alpha=\int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)dx:$$

Վերջին բանաձևը կոչվում է Լայբնիցի բանաձև:

2. Այժմ ենթադրենք, որ (1) ինտեգրալում ինտեգրման a և b սահմանները հանդիսանում են α-ի ֆունկցիաներ.

$$I(\alpha)=\Phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)]=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)dx: \qquad (1')$$

$\Phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)]$-ն α-ի բարդ ֆունկցիա է, ըստ որում a-ն և b-ն հանդիսանում են միջանկյալ արգումենտներ: I(α)-ի ածանցյալը գտնելու համար կիրառենք մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի դիֆերենցման կանոնը (տես գլ. VIII, § 10)

$$I'(\alpha)=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\frac{da}{d\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial\alpha}: \qquad (3)$$

Որոշյալ ինտեգրալի՝ ըստ փոփոխականի վերին սահմանի դիֆերենցման մասին թեորեմի հիման վրա (տես § 4) ստանում ենք.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x, \alpha)dx=f([b(\alpha), \alpha],$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x, \alpha)dx=-\frac{\partial}{\partial a}\int_b^a f(x, \alpha)dx=-f[a(\alpha), \alpha]:$$

* $I=\int_a^b \varepsilon dx$ ինտեգրալում ենթաինտեգրալային ֆունկցիան ձգտում է զրոյի, երբ $\Delta\alpha\to 0$: Այն բանից, որ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան յուրաքանչյուր կետում ձգտում է զրոյի, ոչ միշտ է հետևում, որ ինտեգրալն էլ ձգտի զրոյի: Այնուամենայնիվ տվյալ դեպքում I ձգտում է զրոյի, երբ $\Delta\alpha\to 0$: Այս փաստն ընդունում ենք առանց ապացույցի:

Վերջապես, $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$-ն հաշվելու համար կիրառենք Լայբնիցի բանաձևը.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)dx:$$

(3) բանաձևի մեջ տեղադրելով ածանցյալների արտահայտությունները, կունենանք.

$$I'_\alpha(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx+f[b(\alpha), \alpha]\frac{db}{d\alpha}-f[a(\alpha), \alpha]\frac{da}{d\alpha}: \qquad (4)$$

Լայբնիցի բանաձևի օգնությամբ կարելի է հաշվել մի քանի որոշյալ ինտեգրալներ:

Օրինակ 1. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը $I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$:

Լուծում. Ամենից առաջ նկատենք, որ այդ ինտեգրալն անմիջականորեն հաշվել չենք կարող, քանի որ $e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}$ ֆունկցիայի նախնականը չի արտահայտվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Տրված ինտեգրալը հաշվելու համար այն կդիտարկենք որպես α պարամետրի ֆունկցիա: Այդ դեպքում նրա ածանցյալն ըստ α-ի կգտնվի վերևում ստացված Լայբնիցի բանաձևով*.

$$I'(\alpha)=\int_0^\infty\left[e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}\right]'_\alpha dx=\int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\, dx:$$

Բայց վերջին ինտեգրալը հեշտությամբ հաշվվում է տարրական ֆունկցիաների օգնությամբ, այն հավասար է $\frac{1}{1+\alpha^2}$: Ուստի $I'(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha^2}$: Ինտեգրելով ստացված նույնությունը, գտնենք I(α)-ն.

$$I(\alpha)=\operatorname{arctg}\alpha+C: \qquad (5)$$

Մնում է որոշել C-ն: Դրա համար նկատում ենք, որ

$$I(0)=\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin 0.x}{x}dx=\int_0^\infty 0\, dx=0:$$

Բացի դրանից, $\operatorname{arctg} 0=0$: (5) հավասարության մեջ տեղադրելով $\alpha=0$, գտնում

* Լայբնիցի բանաձևը զուրս է բերված այն ենթադրությամբ, որ a և b ինտեգրման սահմանները վերջավոր են: Սակայն տվյալ դեպքում Լայբնիցի բանաձևը նույնպես իրավացի է, թեկուզ և նրա ինտեգրման սահմաններից մեկն անվերջ է: Այն պայմանների մասին, որոնց դեպքում թույլատրելի է անիսկական ինտեգրալների դիֆերենցումն ըստ պարամետրի, տես, օրինակ, Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, физматгиз, 1962, т. II, гл. IX, § 3.

ենք $I(0) = \operatorname{arctg} 0 + C$, որտեղից $C = 0$: Հետևաբար, α-ի ցանկացած արժեքի համար տեղի ունի $I(\alpha) = \operatorname{arctg}\alpha$ հավասարությունը, այսինքն՝

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\alpha.$$

Օրինակ 2։ Գամմա-ֆունկցիա։

Դիտարկենք α պարամետրից կախված հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \tag{6}$$

Ցույց տանք, որ այդ անիսկական ինտեգրալը գոյություն ունի (զուգամիտում է) $\alpha > 0$ դեպքում։ Այն ներկայացնենք գումարի տեսքով՝

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Աջ մասի առաջին ինտեգրալը զուգամիտում է, քանի որ

$$0 < \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx < \int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Երկրորդ ինտեգրալը նույնպես զուգամիտում է։ Իրոք, դիցուք n-ը այնպիսի ամբողջ թիվ է, որ $n > \alpha - 1$։ Այդ դեպքում, ակնհայտ է, որ

$$0 < \int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx < \int_1^\infty x^n e^{-x}dx < \infty.$$

Վերջին ինտեգրալը հաշվենք մասերով, հաշվի առնելով, որ ցանկացած ամբողջ k-ի դեպքում

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x} = 0. \tag{7}$$

Եվ այսպես, (6) ինտեգրալը որոշում է α-ի որևէ ֆունկցիա։ Այն նշանակում են $\Gamma(\alpha)$-ով և անվանում են գամմա-ֆունկցիա.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \tag{8}$$

Այս ֆունկցիան հաճախ է օգտագործվում մաթեմատիկայի կիրառություններում։ Գտնենք $\Gamma(\alpha)$-ի արժեքները ամբողջ α-ների համար։ $\alpha = 1$ համար ունենք.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1. \tag{9}$$

Դիցուք α ամբողջ թիվը մեծ է 1-ից։ Ինտեգրենք մասերով.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = -x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_0^\infty + (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-x}\,dx$$

կամ, հաշվի առնելով (7)-ը,

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1). \tag{10}$$

(10)-ի և (9)-ի հիման վրա $\alpha = n$ դեպքում գտնում ենք.

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{11}$$

§ 11. Իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիայի ինտեգրումը

Գլ. VII-ի § 4-ում սահմանվել է x իրական փոփոխականի $\tilde{f}(x) = u(x) + iv(x)$ կոմպլեքս ֆունկցիան և նրա $\tilde{f}(x) = u'(x) + iv'(x)$ ածանցյալը։

Սահմանում։ $\tilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ ֆունկցիան կոչվում է $\tilde{f}(x)$ իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիայի նախնական, եթե

$$\tilde{F}'(x) = \tilde{f}(x), \tag{1}$$

այսինքն՝ եթե

$$U'(x) + iV'(x) = u(x) + iv(x). \tag{2}$$

(2) հավասարությունից հետևում է, որ $U'(x) = u(x)$, $V'(x) = v(x)$, այսինքն՝ $U(x)$-ը հանդիսանում է նախնական $u(x)$-ի համար և $V(x)$-ը հանդիսանում է նախնական $v(x)$-ի համար։

Սահմանումից և այս դիտողությունից հետևում է, որ եթե $F(x) = U(x) + iV(x)$-ը հանդիսանում է նախնական $\tilde{f}(x)$ ֆունկցիայի համար, ապա $\tilde{f}(x)$-ի համար ցանկացած նախնականն ունի $\tilde{F}(x) + C$ տեսքը, որտեղ C-ն կոմպլեքս կամայական հաստատուն է։ $\tilde{F}(x) + C$ արտահայտությունը կանվանենք իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալ և կգրենք

$$\int \tilde{f}(x)ex = \int u(x)dx + i\int v(x)dx = \tilde{F}(x) + C. \tag{3}$$

$f(x) = u(x) + iv(x)$ իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը սահմանում ենք այսպես.

$$\int_a^b \tilde{f}(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx. \tag{4}$$

Այս սահմանումը չի հակասում, այլ լիովին համաձայնվում է որոշյալ ինտեգրալի՝ որպես գումարի սահմանի սահմանմանը։

Վարժություններ XI գլխի վերաբերյալ

1. *կազմելով* S_n *ինտեգրալային գումարը և անցնելով սահմանի, հաշվել* $\int_a^b x^2dx$ *որոշյալ ինտեգրալը։ Ցուցում։* $x_i = aq^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ *կետերով, որտեղ* $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $[a, b]$ *հատվածը բաժանել* n *մասերի։ Պատ.* $\frac{b^3 - a^3}{3}$։

2. $\int_a^b \frac{dx}{x}$, *որտեղ* $0 < a < b$։ *Պատ.* $\ln\frac{b}{a}$։ *Ցուցում։* $[a, b]$ *հատվածի բաժանումը կատարել այնպես, ինչպես և նախորդ օրինակում։*

3. $\int_a^b \sqrt{x}\,dx$։ *Պատ.* $\frac{2}{3}\left(b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)$։ *Ցուցում։ Տես նախորդ օրինակը։*

4. $\int_a^b \sin x\,dx$։ *Պատ.* $\cos a - \cos b$։ *Ցուցում։ Նախապես ցույց տալ* $\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin[a+(n-1)h] = \dfrac{\cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + nh - \frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}$

հավասարությունը, դրա համար պետք է ձախ մասի բոլոր անդամները բազմապատկել և բաժանել $\sin h$*-ի վրա ու սինուսների տարբերությունը փոխարինել կոսինուսների տարբերությամբ։*

5. $\int_a^b \cos x\,dx$։ *Պատ.* $\sin b - \sin a$։

Օգտվելով Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևից, հաշվել հետևյալ որոշյալ ինտեգրալները.

6. $\int_0^1 x^4dx$։ *Պատ.* $\frac{1}{5}$։ **7.** $\int_0^1 e^xdx$։ *Պատ.* $e - 1$։ **8.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin dx$։ *Պատ.* 1։

9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$։ *Պատ.* $\frac{\pi}{4}$։ **10.** $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$։ *Պատ.* $\frac{\pi}{4}$։ **11.** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx$։ *Պատ.* $\ln 2$։

12. $\int_1^e \frac{dx}{x}$։ *Պատ.* 1։ **13.** $\int_1^x \frac{dx}{x}$։ *Պատ.* $\ln|x|$։ **14.** $\int_0^x \sin x\,dx$։ *Պատ.* $2\sin^2\frac{x}{2}$։ **15.** $\int_{\sqrt[3]{a}}^x x^2dx$։ *Պատ.* $\frac{x^3 - a}{3}$։ **16.** $\int_1^z \frac{dx}{2x-1}$։ *Պատ.* $\ln(2z-1)$։ **17.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2x\,dx$։ *Պատ.* $\frac{\pi}{4}$։ **18.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2x\,dx$։ *Պատ.* $\frac{\pi}{4}$։

Կիրառելով նշված տեղադրությունները հաշվել հետևյալ ինտեգրալների արժեքները։ **19.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\,dx$, $\cos x = t$։ *Պատ.* $\frac{1}{3}$։ **20.** $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$։ *Պատ.* $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$։ **21.** $\int_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$, $2 + 4x = t^2$։ *Պատ.* $\frac{3\sqrt{2}}{2}$։

22. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, $x = \operatorname{tg} t$։ *Պատ.* $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ **23.** $\int_2^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$, $x - 1 = t^2$։ *Պատ.* $2(2 - \operatorname{arctg} 2)$։ **24.** $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}$, $z = \frac{1}{x}$։ *Պատ.* $\ln\frac{3}{2}$։ **25.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{6 - 5\sin\varphi + \sin^2\varphi}$, $\sin\varphi = t$։ *Պատ.* $\ln\frac{4}{3}$։

Ապացուցել, որ **26.** $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$ $(m>0,\ n>0)$։

27. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$։ **28.** $\int_0^a f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^a f(x^2)dx$։

Հաշվել հետևյալ անիսկական ինտեգրալները։ **29.** $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$։ *Պատ.* 1։

30. $\int_0^\infty e^{-x}dx$։ *Պատ.* 1։ **31.** $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}$։ *Պատ.* $\frac{\pi}{2a}$ $(a>0)$։ **32.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$։ *Պատ.* $\frac{\pi}{2}$։ **33.** $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5}$։ *Պատ.* $\frac{1}{4}$։ **34.** $\int_0^1 \ln x\,dx$։ *Պատ.* -1։ **35.** $\int_0^\infty x\sin x\,dx$։ *Ինտեգրալը տարամիտում է։* **36.** $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$։ *Պատ.* *Ինտեգրալը տարամիտում է։*

37. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$։ *Պատ.* π։ **38.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$։ *Պատ.* $\frac{3}{2}$։ **39.** $\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$։ *Պատ.* *Ինտեգրալը տարամիտում է։* **40.** $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$։ *Պատ.* $\frac{\pi}{2}$։ **41.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$։

Պատ. Ինտեգրալը տարամիտում է։ **42.** $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$ $(a>0)$։ Պատ. $\frac{b}{a^2+b^2}$։

43. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$ $(a>0)$։ Պատ. $\frac{a}{a^2+b^2}$։

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալների մոտավոր արժեքները. **44.** $\ln 5=\int_1^5\frac{dx}{x}$ սեղանների բանաձևով և Սիմպսոնի բանաձևով $(n=12)$։ Պատ. 1,6182 (սեղանների բանաձևով), 1,6098 (Սիմպսոնի բանաձևով)։ **45.** $\int_1^{11}x^3dx$ սեղանների բանաձևով և Սիմպսոնի բանաձևով $(n=10)$։ Պատ. 3690, 3660։ **46.** $\int_0^1\sqrt{1-x^3}\,dx$ սեղանների բանաձևով $(n=6)$։ Պատ. 0,8109։ **47.** $\int_1^3\frac{dx}{2x+1}$ Սիմպսոնի բանաձևով $(n=4)$։ Պատ. 0,8111։ **48.** $\int_4^{10}\lg x\,dx$ սեղանների բանաձևով և Սիմպսոնի բանաձևով $(n=10)$։ Պատ. 6,0656, 6,0896։ **49.** $\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ առնչությունից հաշվել π-ի արժեքը, կիրառելով Սիմպսոնի բանաձևը $(n=10)$։ Պատ. 3, 14159։ **50.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$ Սիմպսոնի բանաձևով $(n=10)$։ Պատ. 1, 371։ **51.** Ելնելով $\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}$ հավասարությունից, որտեղ $\alpha>0$, ամբողջ $n>0$ դեպքում գտնել $\int_0^\infty e^{-x}x^n dx$ ինտեգրալի մեծությունը։ Պատ. $n!$։ **52.** Ելնելով $\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ հավասարությունից, գտնել $\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$ ինտեգրալի մեծությունը։ Պատ. $\frac{\pi}{2}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n n!}$։

53. Հաշվել. $\int_0^\infty\frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}dx$։ Պատ. $\ln(1+\alpha)$, $(\alpha>-1)$։ **54.** Օգտվելով $\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n}$ հավասարությունից, հաշվել $\int_0^1 x^{n-1}(\ln x)^k dx$։ Պատ. $(-1)^k\frac{k!}{n^{k+1}}$։

ԳԼՈՒԽ XII

ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԵՎ ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

§ 1. Մակերեսի հաշվումը ուղղանկյուն կոորդինատներով

Եթե $[a, b]$ հատվածում $f(x)\geqslant0$, ապա ինչպես հայտնի է (§ 2, գլ. XI) $y=f(x)$ կորով, Ox առանցքով, $x=a$ և $x=b$ ուղիղներով սահմանափակված (նկ. 214) կորագիծ սեղանի մակերեսը հավասար է

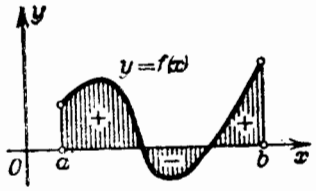
$$Q=\int_a^b f(x)dx։ \qquad (1)$$

Եթե $f(x)\leqslant0$ $[a, b]$ հատվածում, ապա $\int_a^b f(x)dx$ որոշյալ ինտեգրալը նույնպես $\leqslant0$։ Բացարձակ մեծությամբ այն հավասար է համապատասխան կորագիծ սեղանի Q մակերեսին՝

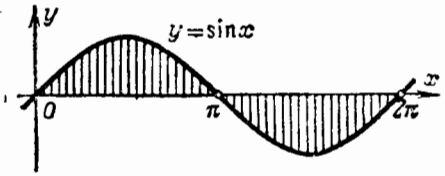
$$-Q=\int_a^b f(x)dx։$$

Եթե $f(x)$-ը $[a, b]$ հատվածում վերջավոր թվով անգամ փոխում է նշանը, ապա ըստ ամբողջ $[a, b]$ հատվածի ինտեգրալը բաժանում ենք՝ մասնակի հատվածների ինտեգրալների գումարի։ Ինտեգրալը դրական կլինի այն հատվածների համար, որտեղ $f(x)\geqslant0$, և բացասական այնտեղ, որտեղ $f(x)\leqslant0$։ Ինտեգրալն ըստ ամբողջ հատվածի կամ Ox առանցքից վերև և ներքև գտնվող մակերեսների տարբերությունը (նկ. 232)։ Սովորաբար իմաստով մակերեսների գումարը հաշվելու համար պետք է գտնել վերը նշված հատվածներին համապատասխանող ինտեգրալների բացարձակ մեծությունների գումարը կամ հաշվել

$$Q=\int_a^b|f(x)|dx$$



Նկ. 232



Նկ. 233

ինտեգրալը։

Օրինակ 1։ Հաշվել $y=\sin x$ սինուսոիդով և Ox առանցքով սահմանափակված Q մակերեսը $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ դեպքում (նկ. 233)։

Լուծում։ Քանի որ $\sin x\geqslant 0$, երբ $0\leqslant x\leqslant\pi$ և $\sin x\leqslant 0$, երբ $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$, ապա

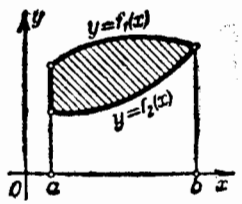
$$Q=\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx\right|=\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx,$$

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=2,$$

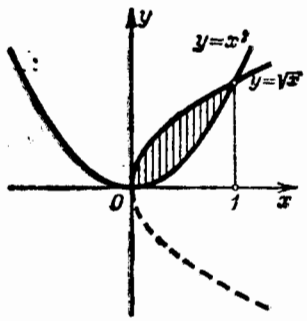
$$\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=-(\cos 2\pi-\cos\pi)=-2,$$

հետևաբար,

$$Q=2+|-2|=4.$$



Նկ. 234



Նկ. 235

Եթե պետք է հաշվել $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ **կորերով և** $x=a$ **ու** $x=b$ **օրդինատներով սահմանափակված մակերեսը, ապա երբ** $f_1(x)\geqslant f_2(x)$ **կունենանք (նկ. 234)**

$$Q=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)\,dx=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]\,dx. \qquad (2)$$

Օրինակ 2։ Հաշվել $y=\sqrt{x}$ և $y=x^2$ կորերով սահմանափակված մակերեսը (նկ. 235)

Լուծում։ Գտնենք կորերի հատման կետերը. $\sqrt{x}=x^2$; $x=x^4$, որտեղից

$$x_1=0,\quad x_2=1,$$

հետևաբար,

$$Q=\int_0^1\sqrt{x}\,dx-\int_0^1 x^2\,dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Այժմ հաշվենք

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t), \qquad (3)$$

որտեղ

$$\alpha\leqslant t\leqslant\beta \text{ և } \varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b$$

պարամետրական հավասարումներն անցյալ կորով (նկ. 236) սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսը։ Իսկապես (3) հավասարումները $[a, b]$ հատվածում որոշում են որևէ $y=f(x)$ ֆունկցիա և, հետևաբար, կորագիծ սեղանի մակերեսը կարող է հաշվվել

$$Q=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b y\,dx$$

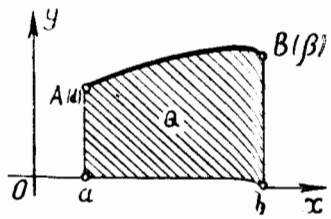
բանաձևով։

Այդ ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$։ (3) հավասարումների հիման վրա կստանանք. $y=f(x)=f[\varphi(t)]=\psi(t)$։

Հետևաբար,

$$Q=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (4)$$

Սա էլ հանդիսանում է պարամետրական տեսքով տրված կորով սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսի հաշվման համար բանաձևը։



Նկ. 236

Օրինակ 3։ Հաշվել

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

էլիպսով սահմանափակված տիրույթի մակերեսը։

Լուծում։ Հաշվենք էլիպսի վերին կեսի մակերեսը և այն կրկնապատկենք։ Այստեղ x-ը փոփոխվում է $-a$-ից մինչև $+a$, հետևաբար, t-ն փոփոխվում է π-ից մինչև 0.

$$Q=2\int_{\pi}^{0}(b\sin t)(-a\sin t\,dt)=-2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt=2ab\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=$$

$$=2ab\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=2ab\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi}=\pi ab.$$

Օրինակ 4։ Հաշվել Ox առանցքով և $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ցիկլոիդի մեկ կամարով սահմանափակված մակերեսը։

Լուծում։ t-ի 0-ից մինչև 2π փոփոխությանը համապատասխանում է x-ի 0-ից մինչև $2\pi a$ փոփոխությունը։

Ըստ (4) բանաձևի ունենք.

$$Q = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\, a(1 - \cos t)\,dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt =$$

$$a^2 \left[\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t\,dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt \right],$$

$$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos t\,dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \pi,$$

վերջնականապես ստանում ենք. $Q = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2$։

§ 2. Կորագիծ սեկտորի մակերեսը բևեռային կոորդինատներով

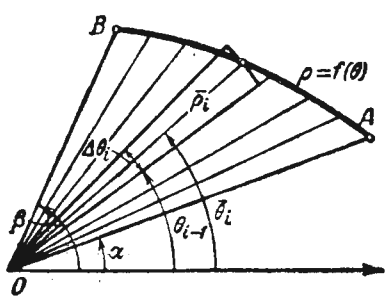
Դիցուք կոորդինատների բևեռային սիստեմում տված է կոր, որը տրված է

$$\rho = f(\theta)$$

հավասարումով, որտեղ $f(\theta)$-ն անընդհատ ֆունկցիա է, երբ $\alpha \leq \theta \leq \beta$։

Որոշենք $\rho = f(\theta)$ կորով և $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ շառավիղ-վեկտորներով սահմանափակված OAB սեկտորի մակերեսը։

Տրված մակերեսը $\alpha = \theta_0, \theta = \theta_1, \ldots, \theta_n = \beta$ շառավիղ-վեկտորներով բաժանենք n մասերի։ $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n$-ով նշանակենք տրված շառավիղ-վեկտորների միջև եղած անկյունները (նկ. 237)։



Նկ. 237

$\bar{\rho}_i$-ով նշանակենք θ_{i-1}-ի և θ_i-ի միջև պարփակված որևէ $\bar{\theta}_i$ անկյանը համապատասխանող շառավիղ վեկտորի երկարությունը։

Դիտարկենք $\bar{\rho}_i$ շառավիղ և $\Delta\theta_i$ կենտրոնական անկյուն ունեցող շրջանային սեկտոր։ Նրա մակերեսը հավասար կլինի

$$\Delta Q_i = \frac{1}{2}\bar{\rho}_i^2 \Delta\theta_i,$$

$$Q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\bar{\theta}_i)]^2 \Delta\theta_i$$

գումարը կոչվում «ստուգանման» սեկտորի մակերես։

Քանի որ այդ գումարը հանդիսանում է ինտեգրալային գումար $\rho^2 = [f(\theta)]^2$ ֆունկցիայի համար՝ $\alpha \leq \theta \leq \beta$ հատվածում, ապա նրա սահմանը, երբ $\max \Delta\theta_i \to 0$, հանդիսանում է

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,d\theta$$

*որոշյալ ինտեգրալը։ Այն կախված չէ նրանից, թե $\Delta\theta_i$ անկյան ներսը որ $\bar{\theta}_i$ շառավիղ վեկտորն ենք վերցնում։ Բնական կլինի այդ սահմանը համարել պատակի սրանելի մակերեսը**։

Այսպիսով, OAB սեկտորի մակերեսը հավասար է

$$Q = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,d\theta \tag{1}$$

կամ

$$Q = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\,d\theta. \tag{1'}$$

Օրինակ։ Հաշվել

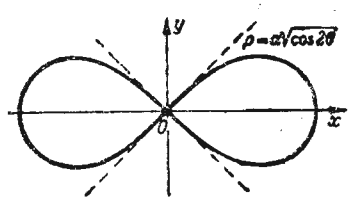
$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$$

լեմնիսկատով (նկ. 238) սահմանափակված մակերեսը։

Լուծում։ Եթե θ-ն փոփոխվում է 0-ից մինչև $\frac{\pi}{4}$, շառավիղ վեկտորը գծում է սրանելի մակերեսի քառորդը.

$$\frac{1}{4}Q = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \rho^2\,d\theta = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/4} \cos 2\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{2}\,\frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}.$$



Նկ. 238

Այսպիսով, լեմնիսկատով սահմանափակված մակերեսը հավասար կլինի $Q = a^2$։

---

* *Կարելի էր ցույց տալ, որ մակերեսի այս սահմանումը չի հակասում նախկին սահմանմանը, այլ կերպ ասած, եթե կորագիծ սեկտորի մակերեսը հաշվենք կորագիծ սեղանների օգնությամբ, ապա կստանանք նույն արդյունքը։*

§ 3 Կորի աղեղի երկարությունը

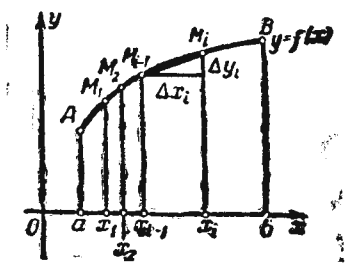
1. Կորի աղեղի երկարությունը ուղղանկյուն կոորդինատներով։ Դիցուք հարթության վրա աղղանկյուն կոորդինատներով տրված է $y=f(x)$ հավասարումն ունեցող կորը։

Գտնենք այդ կորի այն AB աղեղի երկարությունը, որը պարփակված է $x=a$ և $x=b$ երկու ուղղաձիգ ուղիղների միջև (նկ. 239)

VI գլխում (§ 1) տրվել է աղեղի երկարության սահմանումը։ Հիշեցնենք այդ սահմանումը։ AB աղեղի վրա վերցնենք՝ A, M_1, M_2, ..., M_i, ..., B կետերը, որոնց աբսցիսներն են՝ $a=x_0$, x_1, x_2, ..., x_i, ..., $x_n=b$ և տանենք AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$ լարերը, որոնց երկարությունները նշանակենք համապատասխանաբար Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n։ Այդ դեպքում կստանանք $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ բեկյալը, որը ներգծված է $\overset{\frown}{AB}$ աղեղին։ Բեկյալի երկարությունը հավասար է

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i;$$

AB աղեղի s երկարությունը կոչվում է այն սահմանը, որին ձգտում է ներգծյալ բեկյալի երկարությունը, երբ նրա ամենամեծ կողմի երկարությունը ձգտում է զրոյի.



Նկ. 239

$$s=\lim_{\max\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i; \qquad (1)$$

Այժմ ապացուցենք, որ եթե $[a, b]$ հատվածում $f(x)$ ֆունկցիան և նրա $f'(x)$ ածանցյալն անընդհատ են, ապա այդ սահմանը գոյություն ունի։ Դրա հետևանքով կարելի նաև աղեղի երկարության հաշվման եղանակը։

Մացնենք $\Delta y_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$ *նշանակումը։ Այդ դեպքում*

$$\Delta s_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i;$$

Ըստ Լագրանժի թեորեմի ունենք.

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i),$$

որտեղ $x_{i-1}<\xi_i<x_i$։ *Հետևաբար,* $\Delta s_i=\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i$։

Այսպիսով, ներգծյալ բեկյալի երկարությունը հավասար է

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i;$$

Պայմանի համաձայն, $f'(x)$*-ն անընդհատ է, հետևաբար,* $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ *ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է։ Ուստի գոյություն ունի գրված ինտեգրալային գումարի սահմանը, որը հավասար է*

$$s=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

որոշյալ ինտեգրալին։ Եվ այսպես, աղեղի երկարությունը հաշվելու համար ստացանք

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (2)$$

բանաձևը։

Դիտողություն 1։ Ելնելով վերջին բանաձևից, կարելի է ստանալ աղեղի երկարության ածանցյալն ըստ աբսցիսի։ Եթե ինտեգրման վերին սահմանն ընդունենք փոփոխական և նշանակենք x-ով (ինտեգրման փոփոխականը չենք փոխելու), ապա S աղեղի երկարությունը կլինի x-ի ֆունկցիա.

$$s(x)=\int_a^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx;$$

Դիֆերենցելով այս ինտեգրալն ըստ վերին սահմանի, կստանանք

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}; \qquad (3)$$

Այլ ենթադրությունների դեպքում այս բանաձևը ստացվել է VI գլխի § 1-ում։

Օրինակ 1։ Որոշել $x^2+y^2=r^2$ *շրջանագծի երկարությունը։*

Լուծում։ Նախ հաշվենք շրջանագծի քառորդ մասի երկարությունը, որն ընկած է առաջին քառորդում։ Այդ դեպքում AB աղեղի հավասարումը կլինի

$y=\sqrt{r^2-x^2}$, *որտեղից*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

Հետևաբար,

$$\frac{1}{4}s=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=r\frac{\pi}{2},$$

Ամբողջ շրջանագծի երկարությունը՝ $S=2\pi r$:

Այժմ դանենք կորի երկարությունն այն դեպքում, երբ նրա հավասարումը տրված է

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\tag{4}$$

պարամետրական տեսքով, որտեղ $\varphi(t)$-ն և $\psi(t)$-ն անընդհատ ֆունկցիաներ են՝ անընդհատ ածանցյալներով, ըստ որում $\varphi'(t)$-ն տրված միջակայքում զրո չի դառնում: Այս դեպքում (4) հավասարումները որոշում են որևէ $y=f(x)$ ֆունկցիա, որն անընդհատ է և ունի $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ անընդհատ ածանցյալ:

Դիցուք $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$: Այդ դեպքում (2) ինտեգրալում կատարելով $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$ տեղադրությունը, կստանանք

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left|\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|^2}\varphi'(t)dt,\ \text{կամ}\ s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.\tag{5}$$

Դիտողություն 2: Կարելի է ապացուցել, որ (5) բանաձևն ուժի մեջ մնում է նաև այնպիսի կորերի համար, որոնք ստացվում ուղիղներով հատվում են մեկից ավելի կետերում (մասնավորապես փակ կորի համար), միայն թե կորի բոլոր կետերում $\varphi'(t)$ և $\psi'(t)$ ածանցյալները լինեն անընդհատ:

Օրինակ 2: Հաշվել $x=a\cos^3t$, $y=a\sin^3t$ աստրոիդի երկարությունը:

Լուծում: Քանի որ կորը սիմետրիկ է կոորդինատային երկու առանցքների նկատմամբ, ապա նախ հաշվենք առաջին կոորդինատային քառորդում գտնվող նրա քառորդ մասի երկարությունը: Գտնում ենք. $\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2t\sin t$; $\frac{dy}{dt}=3a\sin^2t\cos t$: t պարամետրը կփոփոխվի 0-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$:

Հետևաբար,

$$\frac{1}{4}s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4t\sin^2t+9a^2\sin^4t\cos^2t}\,dt=3a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2t\sin^2t}\,dt=$$

$$=3a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,dt=3a\frac{\sin^2t}{2}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3a}{2};\quad s=6a.$$

Դիտողություն 3: Եթե տրված է

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t),\tag{6}$$

որտեղ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, պարամետրական հավասարումներով տրված տարածական կոր (տես IX գլխի § 1), ապա նրա երկարությունը սահմանվում է (ինչպես և հարթ ուղղի համար) որպես սահման, որին ձգտում է ներգծյալ բեկյալի երկարությունը, երբ նրա ամենամեծ կողմի երկարությունը ձգտում է զրոյի: Եթե $\varphi(t)$, $\psi(t)$ և $\chi(t)$ ֆունկցիաները $[\alpha,\beta]$ հատվածում անընդհատ են և ունեն անընդհատ ածանցյալներ, ապա կորն ունի որոշակի երկարություն (այսինքն՝ նրա համար գոյություն ունի վերոհիշյալ սահմանը), որը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt.\tag{7}$$

Վերջին արդյունքը մենք ընդունում ենք առանց ապացույցի:

Օրինակ 3. Հաշվել $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=amt$ պտուտակաձև ուղղի երկարությունը, երբ t-ն փոփոխվում է զրոյից մինչև 2π: Տրված հավասարումներից գտնում ենք. $dx=-a\sin t\,dt$, $dy=a\cos t\,dt$, $dz=am\,dt$: Տեղադրելով (7) բանաձևի մեջ, կստանանք.

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t+a^2m^2}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+m^2}\,dt=2\pi a\sqrt{1+m^2}.$$

2. Կորի ուղղի երկարությունը բևեռային կոորդինատներով: Դիցուք բևեռային կոորդինատներով տրված է կորի

$$\rho=f(\theta)\tag{8}$$

հավասարումը, որտեղ ρ-ն բևեռային շառավիղն է, θ-ն՝ բևեռային անկյունը:

Գրենք բևեռային կոորդինատներից դեկարտյանին անցնելու բանաձևերը՝ $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$: Եթե այստեղ ρ-ի փոխարեն տեղադրենք նրա (8) արտահայտությունը θ-ով, ապա կստանանք $x=f(\theta)\cos\theta$, $y=f(\theta)\sin\theta$ հավասարումները: Այս հավասարումները կարելի է դիտել որպես կորի պարամետրական հավասարումներ և ուղղի երկարության հաշվման համար կիրառել (5) բանաձևը: Դրա համար գտնենք x-ի և y-ի ածանցյալներն ըստ θ պարամետրի.

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta;\quad \frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta.$$

Այդ դեպքում

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=[f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2=\rho'^2+\rho^2.$$

Հետևաբար,

$$s=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta.$$

Օրինակ 4. Գտնել $\rho=a(1+\cos\theta)$ կարդիոիդի երկարությունը (նկ. 240, էջ 513).

Ինքնաստվերային անկյունը փոփոխելով 0-ից մինչև π, կստանանք որոնելի երկարության կեսը. Այստեղ $\rho'=-a\sin\theta$. Հետևաբար,

$$s=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta=$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

Օրինակ 5. Հաշվել

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos t,\\ y&=b\sin t,\end{aligned}\right\}\quad 0\le t\le 2\pi$$

էլիպսի երկարությունը, ենթադրելով, որ $a>b$.

Լուծում. Հաշվելու համար օգտվում ենք (3) բանաձևից. Նախ հաշվենք ազեկի $\frac{1}{4}$ երկարությունը, որը համապատասխանում է պարամետրի t 0 մինչև t $\frac{\pi}{2}$ փոփոխությանը.

$$\frac{s}{4}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

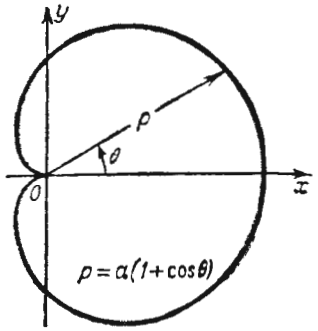
$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)+b^2\cos^2 t}\,dt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,dt=$$

$$=a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt=a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\,dt,$$

որտեղ $k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$. Հետևաբար

$$s=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\,dt.$$

Մնում է միայն հաշվել վերջին ինտեգրալը. Բայց այն, ինչպես հայտնի է, չի արտահայտվում տարրական ֆունկցիաներով (տես գլ. X, § 14). Այդ ինտեգրալը կարելի է հաշվել միայն մոտավոր մեթոդներով (օրինակ, Սիմպսոնի բանաձևով).



Նկ. 240

Մասնավորապես, եթե էլիպսի մեծ կիսառանցքը հավասար է 5-ի, իսկ փոքրը հավասար է 4-ի, ապա $k=\frac{3}{5}$, և էլիպսի երկարությունը հավասար է

$$s=4\cdot 5\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\cos^2 t}\,dt.$$

Վերջին ինտեգրալը հաշվելով Սիմպսոնի բանաձևով ($\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ հատվածը բաժանելով չորս մասի), կստանանք ինտեգրալի մոտավոր արժեքը.

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{3}{5}\cos^2 t}\,dt\approx 1{,}298,$$

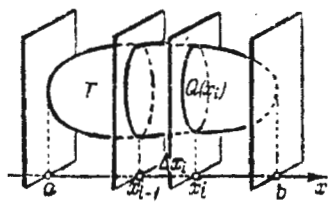
և, հետևաբար, ամբողջ էլիպսի ազեկի երկարությունը մոտավորապես հավասար է $S\approx 25{,}96$ երկարության միավորի.

§ 4. Մարմնի ծավալի հաշվումը կուգահեռ հատույթների մակերեսների միջոցով

Դիցուք ունենք որևէ T մարմին. Ենթադրենք, որ հայտնի է Ox առանցքին ուղղահայաց հարթությամբ այդ մարմնի ցանկացած հատույթի մակերեսը (նկ. 241). Այդ մակերեսը կախված կլինի հատող հարթության դիրքից, այսինքն՝ կլինի x-ի ֆունկցիա.

$$Q=Q(x).$$

Ենթադրենք, որ Q(x)-ը հանդիսանում է x-ի անընդհատ ֆունկցիա, և որոշենք տրված մարմնի ծավալը. Տանենք $x=x_0=a$, $x=x_1$, $x=x_2$, …, $x=x_n=b$ հարթությունները. Այդ հարթությունները մարմինը կբաժանեն շերտերի. Յուրաքանչյուր $x_{i-1}\le x\le x_i$ մասնակի միջակայքում ընտրենք կամայական ξ_i կետ և $i=1, 2, \ldots, n$ յուրաքանչյուր արժեքի համար կառուցենք գլանային մարմին, որի ծնիչը զուգահեռ է Ox առանցքին, իսկ ուղղորդը իրենից ներկայացնում է $x=\xi_i$ հարթությամբ T մարմնի հատույթի եզրագիծը. $Q(\xi_i)$ $(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$ հիմքի մակերես և Δx_i բարձրություն ունեցող այդպիսի տարրական գլանի ծավալը հավասար է $Q(\xi_i)\Delta x_i$. Բոլոր գլանների ծավալը կլինի



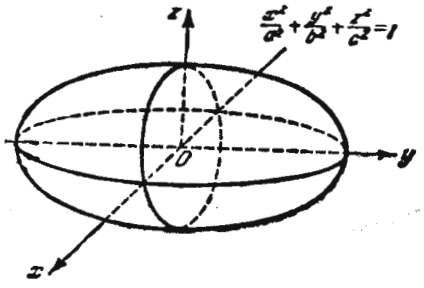
Նկ. 241

$$v_n=\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i,$$

Այս գումարի սահմանը, երբ $\max\Delta x_i\to 0$ *(եթե այն գոյություն ունի), կոչվում է տրված մարմնի ծավալ.*

$$v=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ակնհայտ է, քանի որ v_n*-ն իրենից ներկայացնում է* $a\leqslant x\leqslant b$ *հատվածում* $Q(x)$ *ֆունկցիայի համար ինտեգրալային գումար, ապա նշված սահմանը գոյություն ունի և արտահայտվում է հետևյալ որոշյալ ինտեգրալով՝*



Նկ. 242

$$v=\int_a^b Q(x)\,dx. \qquad (1)$$

Օրինակ. Հաշվել

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

եռառանցք էլիպսոիդի ծավալը.

Լուծում. Oyz *հարթությանը զուգահեռ և նրանից* x *հեռավորության վրա գտնվող հարթությամբ էլիպսոիդի հատույթում կստացվի*

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}, \text{ կամ}$$

$$\frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}=1,$$

էլիպսը, որի կիսառանցքներն են

$$b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}};\quad c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Բայց այդպիսի էլիպսի մակերեսը հավասար է πb_1c_1 *(տես, օրինակ 3, § 1). Ուստի*

$$Q(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

էլիպսոիդի ծավալը հավասար կլինի

$$v=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^2}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Մասնավորապես, եթե $a=b=c$ *էլիպսոիդը վերածվում է գնդի, և այդ դեպքում ստանում ենք.*

$$v=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

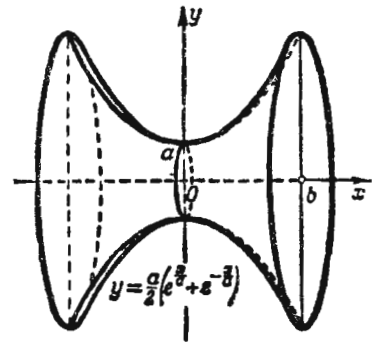
§ 5. Պտտման մարմնի ծավալը

Դիտարկենք $y=f(x)$ *կորով,* Ox *առանցքով և* $x=a$ *ու* $x=b$ *ուղիղներով սահմանափակված* aABb *կորագիծ սեղանի՝* Ox *առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմինը.*

Այս դեպքում աբսցիսների առանցքին ուղղահայաց հարթությամբ մարմնի հատույթը հանդիսանում է շրջան, որի մակերեսը՝

$$Q=\pi y^2=\pi[f(x)]^2.$$

Կիրառելով ծավալը հաշվելու համար ընդհանուր բանաձևը (1) § 4), կստանանք պտտման մարմնի ծավալը հաշվելու համար



Նկ. 243

$$v=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx$$

բանաձևը.

Օրինակ. Գտնել *այն մարմնի ծավալը, որը ստացվում է*

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

շրջայգիծը $x=0$ *մինչև* $x=b$ *սեղմասում* Ox *առանցքի շուրջը պտտումից (նկ. 243).*

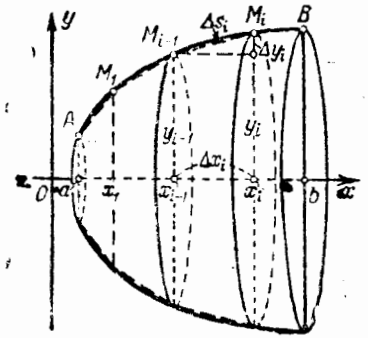
Լուծում.

$$v=\pi\frac{a^2}{4}\int_a^b\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx=\frac{\pi a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}\left|\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right|_0^b=\frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}}-e^{-\frac{2b}{a}}\right)+\frac{\pi a^2b}{2}.$$

§ 6. Պտտման մարմնի մակերևույթը

Դիցուք մեկ աված է մի մակերևույթ, որն առաջացել է Ox առանցքի շուրջը $y=f(x)$ կորի պտտումից: Որոշենք այդ մակերևույթի մակերեսը $a\leq x\leq b$ սեղմատում: Ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածի բոլոր կետերում անընդհատ է և ունի անընդհատ ածանցյալ:



Նկ. 244

Ինչպես § 3-ում, առանձնանք AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$ լարերը, որոնց երկարությունները նշանակենք ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n-ով (նկ. 244): ΔS_i ($i=1, 2, ..., n$) երկարությամբ յուրաքանչյուր լար պտտվելիս կգծի հատած կոն, որի ΔP_i մակերևույթը հավասար է

$$\Delta P_i=2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta s_i.$$

Բայց

$$\Delta s_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

Կիրառելով Լագրանժի թեորեմը, կստանանք.

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i),\ \text{որտեղ}\ x_{i-1}<\xi_i<x_i.$$

Հետևաբար,

$$\Delta s_i=\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,$$

$$\Delta P_i=2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i.$$

Բեկյալի գծած մակերևույթը հավասար կլինի

$$P_n=2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i\ \text{կամ}$$

$$P_n=\pi\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i \qquad (1)$$

գումարին՝ տարածված բեկյալի բոլոր օղակների վրա: Այս գումարի սահմանը, երբ ΔS_i բեկյալի ամենամեծ կողմի երկարությունը ձգտում է զրոյի, կոչվում է դիտարկվող պտտման մակերևույթի մակերես: (1) գումարը

$$2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+f'(\xi_i)^2} \qquad (2)$$

ֆունկցիայի համար ինտեգրալային գումար չի հանդիսանում, քանի որ $[x_{i-1}, x_i]$ հատվածին համապատասխանող գումարելիի մեջ մտնում են այդ հատվածի մի քանի x_{i-1}, x_i, ξ_i կետեր: Բայց կարելի է ցույց տալ, որ (1) գումարի սահմանը հավասար է (2) ֆունկցիայի համար ինտեգրալային գումարի սահմանին, այսինքն՝

$$P=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i=$$

$$=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}2f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$

կամ

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx. \qquad (3)$$

Օրինակ: Որոշել Ox առանցքի շուրջը $y^2=2px$ պարաբոլի՝ x-ի՝ $x=0$-ից մինչև $x=a$ փոփոխությանը համապատասխանող ապեղի պտտումից առաջացած պարաբոլոիդի մակերևույթը:

Լուծում:

$$y=\sqrt{2px},\quad y'=\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}},\quad \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{2p}{4x}}=\sqrt{\frac{2x+p}{2x}},$$

Ըստ (3) բանաձևի կստանանք

$$P=2\pi\int_0^a\sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}dx=2\pi\sqrt{p}\int_0^a\sqrt{2x+p}dx=$$

$$=2\pi\sqrt{p}\frac{2}{3}(2x+p)^{3/2}\frac{1}{2}\Big|_0^a=\frac{\pi\sqrt{p}}{3}[(2a+p)^{3/2}-p^{3/2}].$$

§ 7. Աշխատանքի հաշվումը որոշյալ ինտեգրալի օգնությամբ

Դիցուք որևէ F ուժի ազդեցությամբ M նյութական կետը շարժվում է Os ուղղով, ընդ որում ուժի ուղղությունը համընկնում է շարժման ուղղությանը: Պահանջվում է գտնել M կետը $s=a$ դիրքից $s=b$ դիրքը տեղափոխելիս F ուժի կատարած աշխատանքը:

1) Եթե F ուժը հաստատուն է, ապա A աշխատանքն արտահայտվում է F ուժի երկարության և ճանապարհի երկարության արտադրյալով, այսինքն՝

$$A=F(b-a).$$

2) Ենթադրենք, որ F ուժի F երկարությունը կախված նյութական կետի դիրքից անընդհատ փոխվում է, այսինքն՝ իրենից ներկայացնում է $a \leq s \leq b$ հատվածում անընդհատ $F(s)$ ֆունկցիա։

$[a, b]$ հատվածը բաժանենք n կամայական մասերի, որոնց երկարություններն են

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n,$$

որից հետո $[s_{i-1}, s_i]$ յուրաքանչյուր մասնակի հատվածում ընտրենք կամայական ξ_i կետ և Δs_i $(i=1, 2, \ldots n)$ ճանապարհի վրա $F(s)$ ուժի աշխատանքը փոխարինենք

$$F(\xi_i)\Delta s_i$$

արտադրյալով։ Դա նշանակում է, որ յուրաքանչյուր մասնակի հատվածի սահմաններում մենք F ուժը ընտրում ենք հաստատուն, այն է՝ վերցնում ենք՝ $F=F(\xi_i)$։ Նման դեպքում $F(\xi_i)\Delta s_i$ արտահայտությունը բավականաչափ փոքր Δs_i-ի համար մեզ տալիս է Δs_i ճանապարհի վրա F ուժի աշխատանքը, իսկ

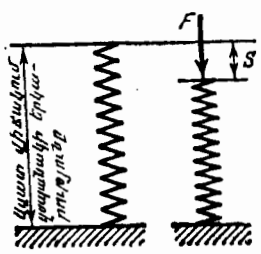
$$A_n=\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\Delta s_i$$

գումարը կլինի ամբողջ $[a, b]$ հատվածի վրա F ուժի աշխատանքի մոտավոր արտահայտությունը։

Ակնհայտ է, A_n-ը իրենց ներկայացնում է $[a, b]$ հատվածում $F=F(s)$ ֆունկցիայի համար կազմված ինտեգրալային գումարը։ Այդ գումարի սահմանը, երբ $\max(\Delta s_i)\to 0$, գոյություն ունի և արտահայտում է $F(s)$ ուժի աշխատանքը $s=a$ կետից մինչև $s=b$ կետը ճանապարհի վրա.

$$A=\int_a^b F(s)\,ds. \qquad (1)$$

Օրինակ 1։ Պատուհակային զսպանակի S սեղմումը համեմատական է F կիրառված ուժին։ Հաշվել զսպանակը 5 սմ-ով սեղմելիս F ուժի կատարած աշխատանքը, եթե այն 1 սմ սեղմելու համար պետք է 1 կգ ուժ (նկ. 245)։



Նկ. 245

Լուծում։ Ըստ պայմանի F ուժը և S տեղափոխությունը կապված են $F=kS$ առնչությամբ, որտեղ k-ն հաստատուն է։

S-ը կարտահայտենք մետրով, F-ը՝ կիլոգրամներով։ $S=0,01$ դեպքում $F=1$, այսինքն՝ $1=k\cdot 0,01$, որտեղից $K=100$, $F=100S$։ (1) բանաձևի հիման վրա ունենք.

$$A=\int_0^{0,05} 100S\,dS=100\frac{S^2}{2}\Bigg|_0^{0,05}=0,125 \text{ կգմ}.$$

Օրինակ 2։ F ուժը, որով e_1 էլեկտրական լիցքը հրում է e_2 լիցքին (նույն նշանն ունեցող), գտնվելով նրանից r_2 հեռավորության վրա, արտահայտում ենք

$$F=k\frac{e_1e_2}{r^2}$$

բանաձևով, որտեղ k-ն հաստատուն է։

Որոշել F ուժի աշխատանքը, e_2 լիցքը e_1-ից r_1 հեռավորության վրա A_1 կետից e_1-ից r_2 հեռավորության վրա գտնվող A_2 կետը տեղափոխելիս, եթե e_1 լիցքը տեղավորված է իբրև հաշվանքի սկիզբ ընդունված A_0 կետում։

Լուծում։ Ըստ (1) բանաձևի ունենք.

$$A=\int_{r_1}^{r_2} k\frac{e_1e_2}{r^2}\,dr=-ke_1e_2\frac{1}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2}=ke_1e_2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

$r_2=\infty$ դեպքում կստանանք.

$$A=\int_{r_1}^{\infty}\frac{ke_1e_2}{r^2}\,dr=\frac{ke_1e_2}{r_1},$$

երբ $e_2=1$, $A=k\frac{e_1}{r}$, վերջին մեծությունը կոչվում է e_1 լիցքի առաջացրած դաշտի պոտենցիալ։

§ 8. Ծանրության կենտրոնի կոորդինատները

Դիցուք Oxy հարթության վրա տրված է $m_1, m^2, \ldots, m_n$ զանգվածներն ունեցող

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ P_n(x_n, y_n)$$

նյութական կետերի համակարգը։

$x_i m_i$ և $y_i m_i$ արտադրյալները կոչվում են m_i զանգվածի ստատիկ մոմենտներ Oy և Ox առանցքների նկատմամբ։

x_c-ով և y_c-ով նշանակենք տրված համակարգի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները։ Այդ դեպքում, ինչպես հայտնի է մեխանիկայի դասընթացից, նկարագրված նյութական համակարգի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները որոշվում են

$$x_c=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\dots+x_nm_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}, \qquad (1)$$

$$y_c=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\dots+y_nm_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i} \qquad (2)$$

բանաձևերով: Այս բանաձևերը մենք օգտագործում ենք տարբեր պատկերների և մարմինների ծանրության կենտրոնները որոշելիս:

1. Հարթ գծի ծանրության կենտրոնը: Դիցուք տրված է AB կորը՝ $y=f(x)$ հավասարումով $a\leq x\leq b$, և դիցուք այդ կորն իրենից ներկայացնում է նյութական գիծ:

Ենթադրենք, որ այդպիսի նյութական կորի գծային խտությունը հավասար է γ-ի: Գիծը տրոհենք $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ երկարություններն ունեցող n մասերի: Այդ մասերի զանգվածները հավասար կլինեն նրանց երկարությունների և (հաստատուն) խտությունների արտադրյալին՝ $\Delta m_i=\gamma\Delta s_i$: Աղեղի յուրաքանչյուր Δs_i մասում վերցնենք ξ_i աբսցիսն ունեցող կամայական կետ: Այժմ աղեղի յուրաքանչյուր Δs մաս պատկերացնելով իբրև $\gamma\Delta s_i$ զանգված ունեցող $P_i[\xi_i, f(\xi_i)]$ նյութական կետ և (1) և (2) բանաձևերի մեջ տեղադրելով x_i-ի փոխարեն ξ_i արժեքը, y_i-ի փոխարեն՝ $f(\xi_i)$ արժեքը, իսկ m_i-ի փոխարեն $\gamma\Delta s_i$ արժեքը (Δs_i կորերի զանգվածները), կստանանք մոտավոր բանաձևեր աղեղի ծանրության կենտրոնը որոշելու համար.*

$$x_c\approx\frac{\sum\xi_i\gamma\Delta s_i}{\sum\gamma\Delta s_i}, \qquad y_c=\frac{\sum f(\xi_i)\gamma\Delta s_i}{\sum\gamma\Delta s_i}.$$

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է և ունի անընդհատ ածանցյալ, ապա յուրաքանչյուր կոտորակի համարիչում և հայտարարում գտնվող գումարները, երբ $\max\Delta s_i\to 0$, ունեն սահմաններ, որոնք հավասար են համապատասխան ինտեգրալային գումարների սահմաններին: Այսպիսով, աղեղի ծանրության կենտրոնի կոորդինատներն արտահայտվում են որոշյալ ինտեգրալներով

$$x_c=\frac{\int_a^b x\,ds}{\int_a^b ds}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx} \qquad (1')$$

$$y_c=\frac{\int_a^b f(x)\,ds}{\int_a^b ds}=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx} \qquad (2')$$

Օրինակ 1: Գտնել Ox առանցքից ներքև ընկած $x^2+y^2=a^2$ կիսաշրջանագծի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:

Լուծում: Որոշենք ծանրության կենտրոնի օրդինատը.

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx,\quad ds=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,$$

$$y_c=\frac{\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}{\pi a}=\frac{a\int_{-a}^{a}dx}{\pi a}=\frac{2a^2}{\pi a}=\frac{2a}{\pi},$$

$x_c=0$ (քանի որ կիսաշրջանագիծը սիմետրիկ է Oy առանցքի նկատմամբ):

2. Հարթ պատկերի ծանրության կենտրոնը: Դիցուք $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a$, $x=b$ գծերով սահմանափակված տրված պատկերն իրենից ներկայացնում է նյութական հարթ պատկեր: Մակերևութային խտությունը, այսինքն՝ մակերևույթի միավոր մակերեսի զանգվածը պատկերի բոլոր մասերի համար համարելու ենք հաստատուն և հավասար δ-ի: $x=a$, $x=x_1$, …, $x=x_n=b$ ուղիղներով տրոհված պատկերը բաժանենք $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ լայնությամբ շերտերի: Յուրաքանչյուր շերտի զանգվածը հավասար կլինի նրա մակերեսի և δ խտության արտադրյալին: Եթե յուրաքանչյուր շերտ փոխարինվի Δx_i հիմքով և $f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)$ $\left(\text{որտեղ}\quad \xi_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$ բարձրության ուղղանկյունով (նկ. 246), ապա շերտի զանգվածը մոտավորապես հավասար կլինի

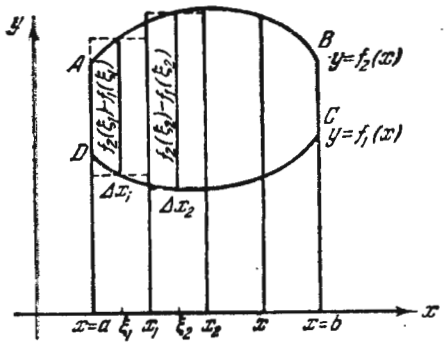
$$\Delta m_i=\delta[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i \quad (i=1, 2, \dots, n):$$

Այդ շերտի ծանրության կենտրոնը մոտավորապես կգտնվի համապատասխան ուղղանկյան կենտրոնում.

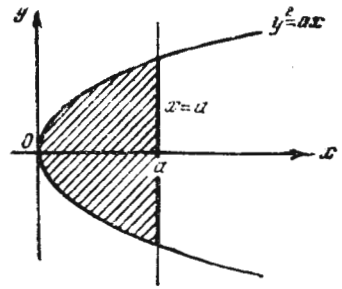
* *Գծային խտություն կոչվում է տրված գծի երկարության միավորի զանգվածը: Ենթադրում ենք, որ գծի բոլոր տեղամասերում գծային խտությունը միևնույնն է:*

$$(x_i)_c=\xi_i, \qquad (y_i)_c=\frac{f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)}{2},$$

Այժմ յուրաքանչյուր շերտ փոխարինելով այնպիսի նյութական կետով, որի զանգվածը հավասար է համապատասխան շերտի զանգվածին և կենտրոնացված է այդ շերտի ծանրության կենտրոնում, դանենք ((1) և (2) բանաձևերով) ամբողջ պատկերի ծանրության կենտրոնի կոորդինատների մոտավոր արժեքը.



Նկ. 246



Նկ. 247

$$x_c\approx\frac{\sum\xi_i\delta[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum\delta[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i},$$

$$y_c\approx\frac{\frac{1}{2}\sum[f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)]\delta[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum\delta[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i},$$

Անցնելով սահմանին, երբ $\Delta x_i\to 0$, կստանանք

$$x_c=\frac{\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]dx}{\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx}, \qquad y_c=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b[f_2(x)+f_1(x)][f_2(x)-f_1(x)]dx}{\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx}.$$

Այս բանաձևերն իրավացի են ցանկացած համասեռ (այսինքն՝ բոլոր կետերում հաստատուն խտություն ունեցող) հարթ պատկերի համար: Ինչպես տեսնում ենք, ծանրության կենտրոնի կոորդինատները կախված չեն պատկերի δ խտությունից (հաշվումների ընթացքում δ-ն կրճատվեց):

Օրինակ 2. Որոշել $y^2=ax$ պարաբոլի այն սեգմենտի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, որը պարաբոլից հատում է $x=a$ ուղիղը (նկ. 247):

Լուծում. Տվյալ դեպքում $f_2(x)=\sqrt{ax}$, $f_1(x)=-\sqrt{ax}$, ուստի

$$x_c=\frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}\,dx}{2\int_0^a\sqrt{ax}\,dx}=\frac{2\sqrt{a}\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a}=\frac{\frac{4}{5}a^3}{\frac{4}{3}a^2}=\frac{3}{5}a,$$

$y_c=0$ *(քանի որ սեգմենտը սիմետրիկ է Ox առանցքի նկատմամբ):*

§ 9. Գծի, շրջանի և գլանի իներցիայի մոմենտի հաշվումը որոշյալ ինտեգրալի օգնությամբ

Դիցուք xOy հարթության վրա տրված է $m_1, m_2, \ldots, m_n$ զանգվածներն ունեցող $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$ նյութական կետերի համակարգը: Մեխանիկայից հայտնի է, որ այդ դեպքում նյութական կետերի համակարգի իներցիայի մոմենտը O կետի նկատմամբ սահմանվում է այսպես.

$$I_0=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)m_i \quad \text{կամ} \quad I_0=\sum_{i=1}^{n}r_i^2m_i, \tag{1}$$

որտեղ

$$r_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2}.$$

Ինչպես և § 8-ում, դիցուք AB կորը տրված է $y=f(x)$ հավասարումով $a\leq x\leq b$, որտեղ $f(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է: Դիցուք այդ կորն իրենից ներկայացնում է նյութական գիծ: Դիցուք գծի գծային խտությունը հավասար է γ-ի: Գիծը տրոհենք $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ երկարություններ ունեցող մասերի, որտեղ $\Delta s_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}$, իսկ այդ մասերի զանգվածներն են $\Delta m_1=\gamma\Delta s_1$, $\Delta m_2=\gamma\Delta s_2\ldots$, $\Delta m_n=\gamma\Delta s_n$: Աղեղի յուրաքանչյուր մասում վերցնենք ξ_i աբսցիսան ունեցող կամայական կետ: Այդ կետի օրդինատը կլինի՝ $\eta_i=f(\xi_i)$: O կետի նկատմամբ աղեղի իներցիայի մոմենտը (1) բանաձևի համաձայն մոտավորապես կլինի

$$I_0\approx\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^2+\eta_i^2)\gamma\Delta s_i. \tag{2}$$

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան և նրա $f'(x)$ածանցյալն անընդհատ են, ապա երբ $\Delta s_i\to 0$, (2) գումարն ունի սահման: Այդ սահմանն էլ, որն

արտահայտվում է սրշյալ ինտեգրալով, որոշում է նյութական գծի իներցիայի մոմենտը.

$$I_0=\gamma\int_a^b[x^2+f^2(x)]\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx; \qquad (3)$$

1. Լերկարությամբ բարակ համասեռ ձողի իներցիայի մոմենտը նրա ծայրակետի նկատմամբ: Ձողը համատեղենք Ox առանցքի $0\leq x\leq l$ հատվածի հետ (նկ. 248): Այս դեպքում $\Delta s_i=\Delta x_i$, $\Delta m_i=\gamma\Delta x_i$, $r^2=x_i^2$ և (3) բանաձևն ընդունում է

$$I_{0c}=\gamma\int_0^l x^2dx=\gamma\frac{l^3}{3} \qquad (4)$$

տեսքը:

Եթե տրված է ձողի M զանգվածը, ապա $\gamma=\frac{M}{l}$ և (4) բանաձևն ընդունում է

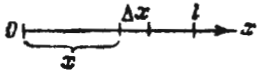
$$I_{0c}=\frac{1}{3}Ml^2 \qquad (5)$$

տեսքը:

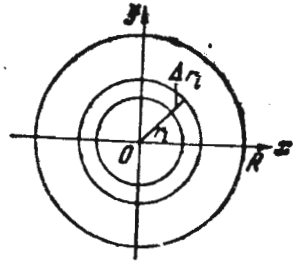
2. r շառավղով շրջանագծի իներցիայի մոմենտը կենտրոնի նկատմամբ: Քանի որ շրջանագծի բոլոր կետերը գտնվում են կենտրոնից r հեռավորության վրա, իսկ նրա զանգվածը՝ $m=2\pi r\gamma$, ապա շրջանագծի իներցիայի մոմենտը կլինի

$$I_0=mr^2=\gamma 2\pi r\cdot r^2=\gamma 2\pi r^3 \qquad (6)$$

3. R շառավղով համասեռ շրջանի իներցիայի մոմենտը կենտրոնի նկատմամբ:



Նկ. 248



Նկ. 249

Դիցուք δ-ն շրջանի միավոր մակերեսի զանգվածն է: Շրջանը բաժանենք n օղակների:

Դիտարկենք մեկ օղակ (նկ. 249): Դիցուք նրա ներքին շառավիղը r_i է, իսկ արտաքինը՝ $r_i+\Delta r_i$: Այդ օղակի Δm_i զանգվածը Δr_i-ի նկատմամբ բարձր կարգի անվերջ փոքրի ճշտությամբ կլինի $\Delta m_i=\delta\cdot 2\pi r_i\Delta r_i$: (6) բանաձևի համաձայն այդ զանգվածի իներցիայի մոմենտը կենտրոնի նկատմամբ մոտավորապես կլինի.

$$(\Delta I_0)_i\approx\delta 2\pi r_i\Delta r_i\cdot r_i^2=\delta\, 2\pi r_i^3\cdot\Delta r_i;$$

Ամբողջ շրջանի օղակների համակարգի իներցիայի մոմենտը կարտահայտվի

$$I_0\approx\sum_{i=1}^{n}\delta\, 2\pi r_i^3\Delta r_i \qquad (7)$$

մոտավոր բանաձևով:

Անցնելով սահմանի, երբ $\max\Delta x_i\to 0$, կստանանք շրջանի մակերևույթի իներցիայի մոմենտը կենտրոնի նկատմամբ.

$$I_0=\delta\, 2\pi\int_0^R r^3\,dr=\pi\delta\frac{R^4}{2}; \qquad (8)$$

Եթե տրված է շրջանի M զանգվածը, ապա δ մակերևութային խտությունը որոշվում է այսպես.

$$\delta=\frac{M}{\pi R^2};$$

Տեղադրելով այս արժեքը, վերջնականապես առանում ենք.

$$I_0=\frac{MR^2}{2}; \qquad (9)$$

4. Ակնհայտ է, որ եթե առնենք շրջանային գլան, որի հիմքի շառավիղն է R և զանգվածը՝ M, ապա նրա իներցիայի մոմենտը առանցքի նկատմամբ արտահայտվում է (9) բանաձևով:

Վարժություններ XII գլխի վերաբերյալ

Մակերեսների հաշվումը

1. Գտնել $y^2=9x$, $y=3x$ գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը: Պատ. $\frac{1}{2}$;

2. Գտնել $xy=a^2$ հիպերբոլով, Ox առանցքով և $x=a$, $x=2a$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը: Պատ. $a^2\ln 2$;

3. Գտնել այն պատկերի մակերեսը, որը պարփակված է $y=4-x^2$ կորի և Ox առանցքի միջև: Պատ. $\frac{32}{3}$;

4. Գտնել $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ աստրոիդով սահմանափակված պատկերի մակերեսը։ Պատ. $\frac{3}{8}\pi a^2$։

5. Գտնել $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ շղթայագծով, Ox առանցքով, Oy առանցքով, և x=a ուղղով սահմանափակված պատկերի մակերեսը։ Պատ. $a^2\,\mathrm{sh}\,e$։

6. Գտնել $y=x^3$ կորով, y=8 ուղղով և Oy առանցքով սահմանափակված պատկերի մակերեսը։ Պատ. 12։

7. Գտնել սինուսոիդի մեկ կիսաալիքով և աբսցիսների առանցքով սահմանափակված պատկերի մակերեսը։ Պատ. 2։

8. Գտնել $y^2=2px$, $x^2=2py$ պարաբոլներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը։ Պատ. $\frac{4}{3}p^2$։

9. Գտնել $y=x^3$, $y=2x$, $y=x$ գծերով սահմանափակված պատկերի ամբողջ մակերեսը։ Պատ. $\frac{3}{2}$։

10. Գտնել $x=a(t-\sin t)$, $x=a(1-\cos t)$ ցիկլոիդի մեկ կամարով և աբսցիսների առանցքով սահմանափակված պատկերի մակերեսը։ Պատ. $3\pi a^2$։

11. Գտնել $x=a\cos^3 t$, $x=a\sin^3 t$ աստրոիդով սահմանափակված պատկերի մակերեսը։ Պատ. $\frac{3\pi a^2}{8}$։

12. Գտնել $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ լեմնիսկատով սահմանափակված պատկերի ամբողջ տիրույթի մակերեսը։ Պատ. a^2։

13. Հաշվել $\rho=a\sin 2\varphi$ կորի մեկ հանգույցով (петля) սահմանափակված տիրույթի մակերեսը։ Պատ. $\frac{\pi a^2}{8}$։

14. Հաշվել $\rho=a(1-\cos\varphi)$ կարդիոիդով սահմանափակված տիրույթի լրիվ մակերեսը։ Պատ. $\frac{3\pi a^2}{2}$։

15. Գտնել $\rho=a\cos\varphi$ կորով սահմանափակված տիրույթի մակերեսը։ Պատ. $\frac{\pi a^2}{4}$։

16. Գտնել $\rho=a\cos 2\varphi$ կորով սահմանափակված տիրույթի մակերեսը։ Պատ. $\frac{\pi a^2}{4}$։

17. Գտնել $\rho=\cos 3\varphi$ կորով սահմանափակված տիրույթի մակերեսը։ Պատ. $\frac{\pi}{4}$։

18. Գտնել $\rho=a\cos 4\varphi$ կորով սահմանափակված տիրույթի մակերեսը։ Պատ. $\frac{a^2}{4}$։

19. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսը պտտվում է Ox առանցքի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի ծավալը։ Պատ. $\frac{4}{3}\pi ab^2$։

20. Կոորդինատների սկզբնակետը (a, b) կետի հետ միացնող ուղղի հատվածը պտտվում է Oy առանցքի շուրջը։ Գտնել ստացված կոնի ծավալը։ Պատ. $\frac{1}{3}\pi a^2 b$։

21. Գտնել $x^2+(y-b)^2=a^2$ շրջանը Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած տորի ծավալը (ենթադրվում է, որ $b>a$)։ Պատ. $2\pi^2 a^2 b$։

22. $y^2=2px$ և $x=a$ գծերով սահմանափակված մակերեսը պտտվում է Ox առանցքի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի ծավալը։ Պատ. πpa^2։

23. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ աստրոիդով սահմանափակված պատկերը պտտվում է Ox առանցքի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի ծավալը։ Պատ. $\frac{32\pi a^3}{105}$։

24. $y=\sin x$ սինուսոիդի մեկ ալեիով և Ox առանցքով սահմանափակված պատկերը պտտվում է Ox առանցքի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի ծավալը։ Պատ. $\frac{\pi^2}{2}$։

25. $y^2=4x$ պարաբոլով և $x=4$ ուղղով սահմանափակված պատկերը պտտվում է Ox առանցքի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի ծավալը։ Պատ. 32π։

26. $y=xe^x$ կորով և $y=0$, $x=1$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերը պտտվում է Ox առանցքի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի ծավալը։ Պատ. $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$։

27. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ցիկլոիդի մեկ կամարով և Ox առանցքով սահմանափակված պատկերը պտտվում է Ox առանցքի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի ծավալը։ Պատ. $5\pi^2 a^3$։

28. 27-րդ խնդրի նույն պատկերը պտտվում է Oy առանցքի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի ծավալը։ Պատ. $6\pi^2 a^3$։

29. 27-րդ խնդրի նույն պատկերը պտտվում է ցիկլոիդի գագաթով անցնող և Oy առանցքին զուգահեռ ուղղի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի ծավալը։ Պատ. $\frac{\pi a^3(9\pi^2-16)}{6}$։

30. 27-րդ խնդրի նույն պատկերը պտտվում է ցիկլոիդի գագաթով անցնող և Ox առանցքին զուգահեռ ուղղի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի ծավալը։ Պատ. $7\pi^2 a^3$։

31. R շառավղով գլանը հատված է հիմքի տրամագծով անցնող և հիմքի հարթության նկատմամբ α անկյան տակ թեքված հարթությամբ։ Գտնել հատված մասի ծավալը։ Պատ. $\frac{2}{3}R^3\mathrm{tg}\,\alpha$։

32. Գտնել այն ծավալը, որն ընդհանուր է $x^2+y^2=R^2$, $y^2+z^2=R^2$ գլանների համար։ Պատ. $\frac{16R^3}{3}$։

33. Քառակուսու անկյունագծերի հատման կետը տեղափոխվում է a շառավղով շրջանի արտադրի երկայնքով, ըստ որում այն հարթությունը, որում ընկած է քառակուսին, միշտ ուղղահայաց է մնում շրջանի հարթությանը, իսկ քառակուսու երկու հակադիր գագաթները տեղափոխվում են շրջանագծով (ակնհայտ է, որ շարժման ընթացքում քառակուսու մեծությունը փոխվում է)։ Գտնել այն արտի ծավալը, որն առաջացնում է այդ շարժվող քառակուսին։ Պատ. $\frac{8a^3}{3}$։

34. Հաշվել այն սեգմենտի ծավալը, որը $x=a$ հարթությունը կտրում է $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x$ էլիպսական պարաբոլոիդից։ Պատ. $\pi a^2\sqrt{pq}$։

35. Հաշվել $z=0$, $y=0$ հարթություններով, $x^2=2py$, $z^2=2px$ գլանային մակերևույթներով և $x=a$ հարթությամբ սահմանափակված մարմնի ծավալը։ Պատ. $\frac{a^3\sqrt{2a}}{7\sqrt{p}}$ (առաջին օկտանտում)։

36. Ուղիղը շարժվում է Oyz հարթությանը զուգահեռ, հատելով Oxy և Oxz հարթությունների վրա գտնվող $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ երկու էլիպսները։ Հաշվել ստացված մարմնի ծավալը։ Պատ. $\frac{8abc}{3}$։

Աղեղների երկարությունների հաշվումը։

37. Գտնել $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ աստղոիդի ամբողջ երկարությունը։ Պատ. 6a։

38. Հաշվել $ay^2=x^3$ կիսախորանարդ պարաբոլի աղեղի երկարությունը՝ կոորդինատների սկզբնակետից մինչև $x=5a$ աբսցիսն ունեցող կետը։ Պատ. $\frac{335a}{27}$։

39. Գտնել $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ շղթայագծի երկարությունը կոորդինատների սկզբնակետից մինչև (x, y) կետը։ Պատ. $a\operatorname{sh}\frac{x}{a}=\sqrt{y^2-a^2}$։

40. Գտնել $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ցիկլոիդի մեկ կամարի երկարությունը։ Պատ. 8a։

41. Գտնել $y=\ln x$ կորի աղեղի երկարությունը $x=\sqrt{3}$ մինչև $x=\sqrt{8}$ սահմաններում։ Պատ. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$։

42. Գտնել $y=1-\ln\cos x$ կորի աղեղի երկարությունը $x=0$ մինչև $x=\frac{\pi}{4}$ սահմաններում։ Պատ. $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$։

43. Գտնել $\rho=a\varphi$ Արքիմեդի գալարագծի երկարությունը բևեռից մինչև առաջին փաթույթի վերջը։ Պատ. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$։

44. Գտնել $\rho=e^{a\varphi}$ գալարագծի երկարությունը բևեռից մինչև (ρ, φ) [illegible]

Պատ. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\varphi}-\frac{\rho}{a}\sqrt{1+a^2}$։

45. Գտնել $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ կորի ամբողջ երկարությունը։ Պատ. $\frac{3\pi a}{2}$։

46. Գտնել $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$ էլիպսի էվոլյուտի երկարությունը։

Պատ. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$։

47. Գտնել $\rho=a(1+\cos\varphi)$ կարդիոիդի երկարությունը։ Պատ. 8a։

48. Գտնել $x=a(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)$, $y=a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)$ շրջանի էվոլվենտի աղեղի երկարությունը $\varphi=0$ մինչև $\varphi=\varphi_1$։ Պատ. $\frac{a\varphi_1^2}{2}$։

Պտտման մարմինների մակերևույթների մակերեսների հաշվումը

49. Գտնել այն մակերևույթի մակերեսը, որը ստացվում է $y^2=4ax$ պարաբոլի O սկզբնակետից մինչև $x=3a$ աբսցիսն ունեցող կետը՝ Ox առանցքի շուրջը պտտումից։ Պատ. $\frac{56\pi a^2}{3}$։

50. Գտնել այն կոնի մակերևույթի մակերեսը, որն առաջանում է $y=2x$ ուղղի $x=0$ կետից մինչև $x=2$ կետն ընկած հատվածի պտտումից ա) Ox առանցքի շուրջը։ Պատ. $8\pi\sqrt{5}$։ բ) Oy առանցքի շուրջը։ Պատ. $4\pi\sqrt{5}$։

51. Հաշվել այն տորի մակերևույթի մակերեսը, որն առաջանում է $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b>a)$ շրջանի՝ Ox առանցքի շուրջը պտտումից։ Պատ. $4\pi^2ab$։

52. Գտնել այն մարմնի մակերևույթի մակերեսը, որն առաջանում է Ox առանցքի շուրջը կարդիոիդի պտտումից։ Կարդիոիդը տված է $x=a(2\cos\varphi-\cos 2\varphi)$, $y=a(2\sin\varphi-\sin 2\varphi)$ պարամետրական հավասարումներով։ Պատ. $\frac{128\pi a^2}{5}$։

53. Գտնել այն մարմնի մակերևույթի մակերեսը, որն առաջանում է $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ցիկլոիդի մեկ կամարը Ox առանցքի շուրջը պտտելիս։

Պատ. $\frac{64\pi a^2}{3}$։

54. Ցիկլոիդի կամարը (տես խնդիր 53) պտտվում է Oy առանցքի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի մակերևույթը։ Պատ. $16\pi^2a^2-\frac{64}{3}\pi a^2$։

55. Ցիկլոիդի կամարը (տես խնդիր 53) պտտվում է նրա գագաթով անցնող և Ox առանցքին զուգահեռ շոշափողի շուրջը։ Գտնել պտտման մակերևույթի մակերեսը։ Պատ. $\frac{32\pi a^2}{3}$։

56. $x=a\sin^3 t$, $x=a\cos^3 t$ աստղոիդը պտտվում է Ox առանցքի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի մակերևույթը։ Պատ. $\frac{12\pi a^2}{5}$։

57. $y=\sin x$ սինուսոիդի $x=0$ կետից մինչև $x=2\pi$ կետը եղած աղեղը պտտվում է Ox առանցքի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի մակերևույթը։ Պատ. $4\pi[\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)]$։

58. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ էլիպսը պտտվում է Ox առանցքի շուրջը։ Գտնել պտտման մարմնի մակերևույթը։ Պատ. $2\pi b^2+2\pi ab\frac{\arcsin e}{e}$, որտեղ $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$։

Որոշյալ ինտեգրալի տարբեր կիրառություններ

59. Գտնել $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ քառորդ մասի ծանրության կենտրոնը։ Պատ. $\frac{4a}{3\pi}$; $\frac{4b}{3\pi}$։

60. Գտնել $x^2+4y-16=0$ պարաբոլով և Ox առանցքով սահմանափակված պատկերի մակերեսի ծանրության կենտրոնը։ Պատ. $\left(0;\ \frac{8}{5}\right)$։

61. Գտնել կիսագնդի ծավալի ծանրության կենտրոնը։ Պատ. Սիմետրիայի առանցքի վրա. հիմքից ունի $\frac{3R}{8}$ հեռավորություն։

62. Գտնել կիսագնդի մակերևույթի ծանրության կենտրոնը։ Պատ. Սիմետրիայի առանցքի վրա. հիմքից ունի $\frac{R}{2}$ հեռավորություն։

63. Գտնել R շառավիղ և h բարձրություն ունեցող ուղիղ շրջանային կոնի մակերևույթի ծանրության կենտրոնը։ Պատ. Սիմետրիայի առանցքի վրա. հիմքից ունի $\frac{h}{3}$ հեռավորություն։

64. Պատկերը սահմանափակված է $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$, $x=0$ գծերով։ Գտնել այդ պատկերի մակերեսի ծանրության կենտրոնը։ Պատ. $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{8}\right)$։

65. Գտնել $y^2=20x$, $x^2=20y$ պարաբոլներով սահմանափակված պատկերի մակերեսի ծանրության կենտրոնը։ Պատ. (9; 9)։

66. Գտնել 2α կենտրոնական անկյուն և R շառավիղ ունեցող շրջանային սեկտորի մակերեսի ծանրության կենտրոնը։ Պատ. Սիմետրիայի առանցքի վրա. սեկտորի գագաթից ունի $\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ հեռավորություն։

67. Գտնել ջրի մեջ ուղղաձիգ ընկղմած ուղղանկյան վրա ջրի ճնշման մեծությունը, եթե հայտնի է, որ նրա հիմքը հավասար է 8 մ, բարձրությունը՝ 12 մ, վերին հիմքը գուգահեռ է ջրի ազատ մակերևույթին և գտնվում է 5 մ խորության վրա։ Պատ. 1056 տ։

68. Ջրարդելակի վերին եզրը, որն ունի 8 մ կողմ ունեցող քառակուսու ձև, ընկած է ջրի մակերևույթի վրա։ Գտնել ջրարդելակի յուրաքանչյուր մասի վրա ճնշման մեծությունը, որը կազմում է քառակուսին իր մի անկյունագծով բաժանելիս։ Պատ. 85333,33 կգ, 170666,67 կգ։

69. Հաշվել այն աշխատանքը, որն անհրաժեշտ է 20 մ արամագիծ ունեցող կիսագնդային անոթից ջուրն արտամղելու համար։ Պատ. $2,5\cdot 10^6$ կգմ։

70. Մարմինը $x=ct^3$ օրենքով շարժվում է ուղղագիծ, որտեղ x-ը t ժամանակում անցած ճանապարհն է, $c=\text{const}$։ Միջավայրի դիմադրությունը համեմատական է արագության քառակուսուն, ընդ որում համեմատականության գործակիցը հավասար է k-ի։ Գտնել դիմադրության կատարած աշխատանքը՝ մարմինը $x=0$ կետից մինչև $x=a$ կետը տեղափոխելիս։ Պատ. $\frac{27}{7}k\sqrt[3]{c^2a^7}$։

71. Հաշվել այն աշխատանքը, որն անհրաժեշտ է ծախսել հիմքի R շառավիղ և H բարձրություն ունեցող գագաթով ներքև ուղղված կոնաձև ռեզերվուարից γ խտությամբ հեղուկն արտամղելու համար։ Պատ. $\frac{\pi\gamma R^2H^2}{12}$։

72. Գլանաձև փայտյա լողափուքսը (поплавок), որի հիմքի մակերեսն է $s=4000$ սմ², իսկ բարձրությունը՝ $H=50$ սմ, լողում է ջրի մակերևույթի վրա։ Ինչպիսի աշխատանք է ծախսել լողափուքսը մակերևույթ դուրս հանելու համար։ (Փայտի տեսակարար կշիռն է 0,8)։ Պատ. $\frac{\gamma^2H^2S}{2}=32$ կգմ։

73. Հաշվել այն ուժը, որով ջուրը ճնշում է հավասարակող սեղանի ձև ունեցող ամբարտակի վրա, որի վերին հիմքը՝ $a=6,4$ մ, ստորինը՝ $b=4,2$ մ, իսկ բարձրությունը՝ $H=3$ մ։ Պատ. 22,2 տ։

74. Գտնել կաթսայի գնդաձև հատակի վրա շղթու P կգ լրիվ ճնշման առանցքային բաղադրիչը։ Կաթսայի գլանային մասի տրամագիծը D մմ է, կաթսայում շղթու ճնշումը՝ $p=\frac{kg}{\text{սմ}^2}$։ Պատ. $P=\frac{\pi pD^2}{400}$։

75. r շառավիղ ունեցող ուղղաձիգ լիսեռը պահվում է հարթ կրնկակալով։ Լիսեռի P կշիռը հենարանի ամբողջ մակերևույթի վրա բաշխվում է հավասարաչափ։ Հաշվել լիսեռի մեկ պտույտի ժամանակ շփման ուժերի լրիվ աշխատանքը։ Շփման գործակիցն է μ։ Պատ. $\frac{4\pi\mu Pr}{3}$։

76. Ուղղաձիգ լիսեռը վերջանում է հատած կոնի ձև ունեցող կրնկատեղով։ Կրնկատեղի տեսակարար ճնշումը կրնկակալի վրա հաստատուն է և հավասար է P-ի։ Կրնկատեղի վերին տրամագիծը D է, ստորինը՝ d, կոնի գագաթի անկյունը՝ 2α։ Շփման գործակիցն է μ։ Գտնել շփման ուժերի աշխատանքը լիսեռի մեկ պտույտի ընթացքում։ Պատ. $\frac{\pi^2P\mu}{6\sin\alpha}(D^3-d^3)$։

77. I երկարությամբ պրիզմայաձև ձողը 0-ից մինչև P գանգուզ աճող ուժի կողմից ձգվում է այնպես, որ յուրաքանչյուր պահին ձգող ուժը հավասարակշռվում է ձողի առաձգականության ուժերով։ Որոշել ձգման վրա ծախսված ուժերի աշխատանքը, ենթադրելով, որ ձգումը կատարվել է առաձգականության սահմաններում։ Ձողի լայնական հատույթի մակերեսը հավասար է F-ի, նյութի առաձգականության մոդուլը՝ E-ի։

Ցուցում։ Եթե x-ը ձողի երկարացումն է, իսկ l-ը՝ համապատասխան

ուժը, ապա $f=\frac{FE}{l}x$, P ուժի ազդեցության տակ երկարացում, $\Delta l=\frac{Pl}{EF}$, Պատ. $A=\frac{P\Delta l}{2}=\frac{P^2l}{2EF}$,

78. Պրիզմայաձև չորսուն կախված է ուղղաձիգ, և նրա ստորին ծայրին կիրառված է P ձգող ուժը։ Հաշվել չորսուի երկարացումը իր կշռի և P ուժի ազդեցության տակ, եթե տրված է, որ չորսուի երկարությունը չձգված վիճակում հավասար է l-ի, լայնակի հատույթի մակերեսը՝ F-ի, չորսուի կշիռը՝ Q-ի և նյութի առաձգականության մոդուլը՝ E-ի։ Պատ. $\Delta l=\frac{(Q+2P)l}{2EF}$,

79. Հաշվել այն ժամանակը, որի ընթացքում հեղուկը կլցափվի մինչև H բարձրություն լցված պրիզմայաձև անոթից։ Անոթի ընդլայնական հատույթի մակերեսն է F, անցքի մակերեսը՝ f, հոսելու արագությունը որոշվում է $v=\mu\sqrt{2gh}$ բանաձևով, որտեղ μ-ն մածուցիկության գործակիցն է, g-ն՝ ծանրության ուժի արագացումը, h-ը՝ անցքից մինչև հեղուկի մակարդակը եղած հեռավորությունը։ Պատ. $T=\frac{2FH}{\mu f\sqrt{2gH}}=\frac{F}{\mu f}\sqrt{\frac{2H}{g}}$,

80. Որոշել ջրի Q ծախսումը (միավոր ժամանակամիջոցում հոսող ջրի քանակությունը) ուղղանկյուն հատույթ ունեցող ջրաթափով։ Ջրաթափի բարձրությունն է՝ h, լայնությունը՝ b։ Պատ. $Q=\frac{2}{3}\mu bh\sqrt{2gh}$,

81. Որոշել ջրի Q ծախսումը, որը հոսում է a բարձրություն և b լայնություն ունեցող կողմնային ուղղանկյուն անցքից, եթե անցքի ստորին կողմի վերևի ջրի ազատ մակերևույթի բարձրությունը հավասար է H-ի։ Պատ. $Q=\frac{2b\mu\sqrt{2q}}{3}\left[H^{\frac{3}{2}}-(H-a)^{\frac{3}{2}}\right]$,

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ինն երորդ հրատարակության առաջաբանը 3
Հինգերորդ հրատարակության առաջաբանը 6

ԳԼՈՒԽ I

Թիվ: Փոփոխական ֆունկցիա

§ 1. Իրական թվեր։ Իրական թվերի պատկերումը թվային առանցքի կետերով . 9
§ 2. Իրական թվի բացարձակ մեծությունը 11
§ 3. Փոփոխական և հաստատուն մեծություններ 13
§ 4. Փոփոխական մեծության փոփոխման տիրույթը 14
§ 5. Կարգավորված փոփոխական մեծություն։ Աճող և նվազող փոփոխական մեծություններ։ Սահմանափակ փոփոխական մեծություն 15
§ 6. Ֆունկցիա 17
§ 7. Ֆունկցիայի տրման եղանակները 18
§ 8. Հիմնական տարրական ֆունկցիաներ։ Տարրական ֆունկցիաներ . . . 21
§ 9. Հանրահաշվական ֆունկցիաներ 26
§ 10. Կոորդինատների բևեռային սիստեմ 27
Վարժություններ I գլխի վերաբերյալ 29

ԳԼՈՒԽ II

Սահման: Ֆունկցիաների անընդհատությունը

§ 1. Փոփոխական մեծության սահմանը։ Անվերջ մեծ փոփոխական մեծություն 31
§ 2. Ֆունկցիայի սահմանը 34
§ 3. Անվերջության ձգտող ֆունկցիա։ Սահմանափակ ֆունկցիաներ . . . 38
§ 4. Անվերջ փոքրերը և նրանց հիմնական հատկությունները 42
§ 5. Հիմնական թեորեմներ սահմանների վերաբերյալ 46
§ 6. $\frac{\sin x}{x}$ ֆունկցիայի սահմանը, երբ $x\to 0$ 51
§ 7. e թիվը 53
§ 8. Բնական լոգարիթմներ 58
§ 9. Ֆունկցիաների անընդհատությունը 60
§ 10. Անընդհատ ֆունկցիաների մի քանի հատկությունները 65
§ 11. Անվերջ փոքրերի բաղդատումը 67
Վարժություններ II գլխի վերաբերյալ 70

ԳԼՈՒԽ III

Ածանցյալ և դիֆերենցիալ

§ 1. Շարժման արագություն . . . 74
§ 2. Ածանցյալի սահմանումը . . . 76
§ 3. Ածանցյալի երկրաչափական նշանակությունը . . . 78
§ 4. Ֆունկցիաների դիֆերենցելիությունը . . . 80
§ 5. $y=x^n$ ֆունկցիայի ածանցյալը ամբողջ և դրական n-ի դեպքում . . . 82
§ 6. $y=\sin x$, $y=\cos x$ ֆունկցիաների ածանցյալները . . . 84
§ 7. Հաստատունի, հաստատունի և ֆունկցիայի արտադրյալի, գումարի, արտադրյալի, բանորդի ածանցյալները . . . 88
§ 8. Լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցյալը . . . 91
§ 9. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը . . . 93
§ 10. $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$, $y=\ln|x|$ ֆունկցիաների ածանցյալները . . . 96
§ 11. Անբացահայտ ֆունկցիա և նրա դիֆերենցումը . . . 98
§ 12. Ցանկացած իրական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի, ցուցչային ֆունկցիայի, բարդ ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալները . . . 100
§ 13. Հակադարձ ֆունկցիա և նրա դիֆերենցումը . . . 103
§ 14. Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ և նրանց ածանցումը . . . 107
§ 15. Ածանցման հիմնական բանաձևերի աղյուսակ . . . 112
§ 16. Ֆունկցիայի պարամետրական տրումը . . . 113
§ 17. Մի քանի կորերի հավասարումները պարամետրական ձևով . . . 115
§ 18. Պարամետրական տեսքով տված ֆունկցիայի ածանցյալը . . . 118
§ 19. Հիպերբոլական ֆունկցիաներ . . . 120
§ 20. Դիֆերենցիալ . . . 124
§ 21. Դիֆերենցիալի երկրաչափական նշանակությունը . . . 129
§ 22. Տարբեր կարգի ածանցյալներ . . . 130
§ 23. Տարբեր կարգի դիֆերենցիալներ . . . 132
§ 24. Անբացահայտ ֆունկցիաների և պարամետրական տեսքով տրված ֆունկցիաների տարբեր կարգի ածանցյալները . . . 134
§ 25. Երկրորդ ածանցյալի մեխանիկական նշանակությունը . . . 137
§ 26. Շոշափողի և նորմալի հավասարումները։ Ենթաշոշափողի և ենթանորմալի երկարությունները . . . 134
§ 27. Շառավիղ վեկտորի՝ ըստ բևեռային անկյան ածանցյալի երկրաչափական նշանակությունը . . . 142
Վարժություններ III գլխի վերաբերյալ . . . 134

ԳԼՈՒԽ IV

Մի քանի թեորեմներ դիֆերենցելի ֆունկցիաների մասին

§ 1. Թեորեմ ածանցյալի արմատների մասին (Ռոլլի թեորեմը) . . . 153
§ 2. Թեորեմ վերջավոր աճերի մասին (Լագրանժի թեորեմը) . . . 155
§ 3. Թեորեմ երկու ֆունկցիաների աճերի հարաբերության մասին (Կոշիի թեորեմը) 175
§ 4. Երկու անվերջ փոքր մեծությունների հարաբերության սահմանը («$\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշությունների բացումը») . . . 159
§ 5. Երկու անվերջ մեծ մեծությունների հարաբերության սահմանը («$\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշությունների բացումը») . . . 163
§ 6. Թեյլորի բանաձևը . . . 168
§ 7. e^x, $\sin x$, $\cos x$ ֆունկցիաների վերլուծությունը ըստ Թեյլորի բանաձևի 172
Վարժություններ IV գլխի վերաբերյալ . . . 176

ԳԼՈՒԽ V

Ֆունկցիաների վարքի ուսումնասիրությունը

§ 1. Խնդրի դրվածքը . . . 179
§ 2. Ֆունկցիայի աճումը և նվազումը . . . 180
§ 3. Ֆունկցիաների մաքսիմումը և մինիմումը . . . 182
§ 4. Առաջին ածանցյալի օգնությամբ դիֆերենցելի ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի ուսումնասիրության սխեման . . . 189
§ 5. Ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի հետազոտումը երկրորդ ածանցյալի օգնությամբ . . . 192
§ 6. Ֆունկցիայի ամենամեծ և ամենափոքր արժեքները հատվածում . . . 196
§ 7. Ֆունկցիաների մաքսիմումի և մինիմումի տեսության կիրառումը խնդիրներ լուծելու նպատակով . . . 198
§ 8. Ֆունկցիայի հետազոտությունը Թեյլորի բանաձևի օգնությամբ՝ նպատակ ունենալով մաքսիմումը և մինիմումը . . . 200
§ 9. Կորի ուռուցիկությունը և գոգավորությունը։ Շրջման կետեր . . . 202
§ 10. Ասիմպտոտներ . . . 210
§ 11. Ֆունկցիաների հետազոտության և գրաֆիկների կառուցման ընդհանուր պլանը 214
§ 12. Պարամետրական տեսքով տված կորերի հետազոտությունը . . . 219
Վարժություններ V գլխի վերաբերյալ . . . 224

ԳԼՈՒԽ VI

Կորի կորությունը

§ 1. Աղեղի երկարությունը և նրա ածանցյալը . . . 230
§ 2. Կորություն . . . 233
§ 3. Կորության հաշվումը . . . 235
§ 4. Պարամետրական տեսքով տրված գծի կորության հաշվումը . . . 238
§ 5. Բևեռային կոորդինատներով տրված հավասարումն ունեցող գծի կորության հաշվումը . . . 238
§ 6. Կորության շառավիղ և շրջան։ Կորության կենտրոն։ Էվոլյուտ և էվոլվենտ 240
§ 7. Էվոլյուտի հատկությունները . . . 245
§ 8. Հավասարման իրական արմատների մոտավոր հաշվումը . . . 249
Վարժություններ VI գլխի վերաբերյալ . . . 254

ԳԼՈՒԽ VII

Կոմպլեքս թվեր: Բազմանդամներ

§ 1. Կոմպլեքս թվեր: Երակեսային սահմաններ 255
§ 2. Հիմնական գործողություններ կոմպլեքս թվերի հետ 259
§ 3. Կոմպլեքս թիվն աստիճան բարձրացնելը և կոմպլեքս թվից արմատ հանելը 253
§ 4. Կոմպլեքս ցուցիչով ցուցչային ֆունկցիան և նրա հատկությունները . . 266
§ 5. Էյլերի բանաձևը: Կոմպլեքս թվի ցուցչային ձևը 269
§ 6. Բազմանդամի վերլուծումն արտադրիչների 270
§ 7. Բազմանդամի բազմապատիկ արմատների մասին 274
§ 8. Բազմանդամների վերլուծումն արտադրիչների՝ կոմպլեքս արմատների դեպքում 276
§ 9. Ինտերպոլացում: Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևը 277
§ 10. Նյուտոնի ինտերպոլացիոն բանաձևը 280
§ 11. Թվային դիֆերենցում 282
§ 12. Ֆունկցիաների՝ բազմանդամներով լավագույն մոտարակման մասին: Չեբիշևի տեսությունը 283
Վարժություններ VII գլխի վերաբերյալ 284

ԳԼՈՒԽ VIII

Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաներ

§ 1. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի սահմանումը 286
§ 2. Երկու փոփոխականների ֆունկցիայի երկրաչափական պատկերումը . . 290
§ 3. Ֆունկցիայի մասնակի և լրիվ աճը 291
§ 4. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի անընդհատությունը 292
§ 5. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի մասնական ածանցյալները . . 296
§ 6. Երկու փոփոխականների ֆունկցիայի մասնական ածանցյալների երկրաչափական մեկնաբանությունը 297
§ 7. Լրիվ աճ և լրիվ դիֆերենցիալ 298
§ 8. Լրիվ դիֆերենցիալի կիրառությունը մոտավոր հաշվումներում . . . 302
§ 9. Դիֆերենցիալի կիրառությունը հաշվումների ժամանակ սխալի գնահատման նկատմամբ 304
§ 10. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը: Լրիվ ածանցյալ: Բարդ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը 307
§ 11. Անբացահայտ տեսքով տրված ֆունկցիայի ածանցյալը 311
§ 12. Տարբեր կարգի մասնակսն ածանցյալներ 315
§ 13. Մակարդակի մակերևույթներ 319
§ 14. Ածանցյալ ըստ ուղղության 321
§ 15. Գրադիենտ 323
§ 16. Թեյլորի բանաձևը երկու փոփոխականների ֆունկցիայի համար . . . 327
§ 17. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի մաքսիմումը և մինիմումը . . 329
§ 18. Տված հավասարումներով կապված մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի մաքսիմումը և մինիմումը (պայմանական մաքսիմումներ և մինիմումներ) 338
§ 19. Փորձնական տվյալների հիման վրա ֆունկցիայի ստացումը փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով 343
§ 20. Կորի եզակի կետերը 347
Վարժություններ VIII գլխի վերաբերյալ 353

ԳԼՈՒԽ IX

Դիֆերենցիալ հաշվի կիրառությունները երկրաչափության նկատմամբ՝ տարածության մեջ

§ 1. Կորի հավասարումները տարածության մեջ 357
§ 2. Սկալյար արգումենտի վեկտոր ֆունկցիայի սահմանը և ածանցյալը: Կորի շոշափողի հավասարումը: Նորմալ հարթության հավասարումը . . . 360
§ 3. Վեկտորական ֆունկցիաների դիֆերենցման կանոնները 366
§ 4. Վեկտորի առաջին և երկրորդ ածանցյալներն ըստ աղեղի երկարության: Կորի կորությունը: Գլխավոր նորմալ: Կետի կորագիծ շարժման արագությունը և արագացումը 369
§ 5. Հպման հարթություն: Բինորմալ: Ոլորում 379
§ 6. Մակերևույթի շոշափող հարթությունը և նորմալ ուղիղը 384
Վարժություններ IX գլխի վերաբերյալ 389

ԳԼՈՒԽ X

Անորոշ ինտեգրալ

§ 1. Նախնական ֆունկցիա և անորոշ ինտեգրալ 391
§ 2. Ինտեգրալների աղյուսակ 394
§ 3. Անորոշ ինտեգրալի մի քանի հատկությունները 397
§ 4. Ինտեգրում փոփոխականի փոխարինման մեթոդով կամ տեղադրման եղանակով 399
§ 5. Քառակուսի եռանդամ պարունակող մի քանի ֆունկցիաների ինտեգրալները 402
§ 6. Մասերով ինտեգրում 406
§ 7. Ռացիոնալ կոտորակներ: Պարզագույն ռացիոնալ կոտորակներ և նրանց ինտեգրումը 410
§ 8. Ռացիոնալ կոտորակի վերածումը պարզագույնների 415
§ 9. Ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրումը 420
§ 10. Ինտեգրալները իռացիոնալ ֆունկցիաներից 423
§ 11. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ տեսքի ինտեգրալները 425
§ 12. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների մի քանի դասերի ինտեգրումը . 429
§ 13. Մի քանի իռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրումը եռանկյունաչափական տեղադրությունների օգնությամբ 435
Վարժություններ X գլխի վերաբերյալ 439

ԳԼՈՒԽ XI

Որոշյալ ինտեգրալ

§ 1. Խնդրի դրվածքը: Ստորին և վերին ինտեգրալների գումարներ . . . 448
§ 2. Որոշյալ ինտեգրալ: Թեորեմ որոշյալ ինտեգրալի գոյության մասին . 450
§ 3. Որոշյալ ինտեգրալի հիմնական հատկությունները 462
§ 4. Որոշյալ ինտեգրալի հաշվումը: Նյուտոն—Լայբնիցի բանաձևը . . . 466
§ 5. Փոփոխականի փոխարինումը որոշյալ ինտեգրալում 471
§ 6. Մասերով ինտեգրում 473

§ 7. Անիսկական ինտեգրալներ 476
§ 8. Որոշյալ ինտեգրալների մոտավոր հաշվումը 484
§ 9. Չեբիշևի բանաձևը 490
§ 10. Պարամետրից կախված ինտեգրալներ։ Գամմա ֆունկցիա 495
§ 11. Իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիայի ինտեգրումը 499
Վարժություններ XI գլխի վերաբերյալ 500

ԳԼՈՒԽ XII

Որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական եվ մեխանիկական կիրառություններ

§ 1. Մակերեսի հաշվումը ուղղանկյուն կոորդինատներով 503
§ 2. Կորագիծ սեկտորի մակերեսը բևեռային կոորդինատներով 506
§ 3. Կորի աղեղի երկարությունը 508
§ 4. Մարմնի ծավալի հաշվումը զուգահեռ հատույթների մակերեսների միջոցով 513
§ 5. Պտտման մարմնի ծավալը 515
§ 6. Պտտման մարմնի մակերևույթը 516
§ 7. Աշխատանքի հաշվումը որոշյալ ինտեգրալի օգնությամբ 517
§ 8. Ծանրության կենտրոնի կոորդինատները 519
§ 9. Գծի շրջանի և գլանի իներցիայի մոմենտի հաշվումը որոշյալ ինտեգրալի օգնությամբ 523
Վարժություններ XII գլխի վերաբերյալ 525

Նիկոլայ Սեմյոնովիչ Պիսկունով

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇԻՎՆԵՐ

(ԲՏՈՒՀ-ների ուսանողների համար)

Խմբագիր՝ Ի. Հ. Պողոսյան
Գեղ. խմբագիր՝ Հ. Խ. Գյուլամիրյան
Տեխ. խմբագիր՝ Ռ. Ն. Ախիրյան
Վերոտուգող սրբագրիչ՝ Գ. Ն. Եղեկյան