

517.2

Պ-64

Ն. Կ. ՊԻՍԿՈՒՆՈՎ

**ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ
ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ
ՀԱՇԻՎՆԵՐ**

ԲՏՈՒՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

2

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇԻՎՆԵՐ

Գ ՀՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ե ՈՐԴ ՀԱՏՈՐ

ատրված է ՍՍՀՄ բարձրագույն և միջնակարգ
լազիտական կրթության մինիստրության կողմից
ես դասագիրք բարձրագույն տեխնիկական ուսում-
յան հաստատությունների ուսանողների համար

Սույն դասագրքի իններորդ հրատարակությունը տարբերվում է նախորդ՝ 8-րդ հրատարակությունից: Այս հրատարակությունը լիովին համապատասխանում է բուռններում մաթեմատիկայի համար նախատեսված 400—450 ժամվա ծրագրին:

Դասագրքում մտցված է երկու նոր գլուխ (XX և XXI):

XX գլուխը («Հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության տարրերը») բովանդակում է ՍՍՀՄ ԲՄՄԿՄ մաթեմատիկայի պարտադիր ծրագրի համապատասխան բաժնով նախատեսված նյութը:

XXI գլուխը («Մատրիցաներ», «Գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի և համակարգերի լուծումների մատրիցային գրառումը») նույնպես բովանդակում է պարտադիր ծրագրով նախատեսված նյութը: Բայց, զրանից բացի, այս գլխում մեծ ուշադրություն է դարձված դծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի և գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծումների մատրիցային գրառմանը: Օգտադործված է փոփոխական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի հաջորդական մոտավոր լուծումների մատրիցային գրառումը: Այս նյութն անհրաժեշտ է զետեղել բուռնների համար դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվների դասընթացում այն բանի համար, որ ներկայումս էլեկտրատեխնիկայի, ավտոմատիկայի, ռադիոտեխնիկայի վերաբերյալ շատ գրքերում դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծումների ուսումնասիրությունը կատարվում է մատրիցաների տեսության ապարատի օգնությամբ:

Նոր են գրված XVI գլխի 26, 27, 28 պարագրաֆները: Այստեղ քննարկված է դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման հաջորդական մոտեցումների մեթոդը, ապացուցվում են դիֆերենցիալ հավասարման լուծման գոյության մասին թեորեմը և միակության մասին թեորեմը: Ուշադրություն է դարձված դիֆերենցիալ հավասարումների մասին ամբողջ գլխի խստապահանջ շարադրմանը:

Նշանակալիորեն ընդլայնված է XIII գլխի («Գաղափար կյապունովի կայունության տեսության մասին») 31-րդ պարագրաֆը: Տվյալ հրատարակության մեջ այն կոչվում է այսպես. «Գաղափար կյապունովի կայունության տեսության մասին: Դիֆերենցիալ հավասարման հետագծերի վարքը եզակի կետի շրջակայքում»: Այստեղ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծումների կայունության դիտարկմանը զուգահեռ քննարկված է ֆազային հարթության վրա եզակի կետի շրջակայքում հետագծի վարքը: Դա անհրաժեշտ էր անել այն բանի համար, որ էլեկտրատեխնիկայի, ռադիոտեխնիկայի, ավտոմատիկայի

Պիակունով Ն. Ս.

Պ 644 Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվներ: Ուս. ձեռնարկ բուռնների համար: Հ. Ձ.— Եր.: Լույս», 1979: 656 էջ, նկ., աղյուսակ:

Ուսումնական ձեռնարկի երկրորդ հատորը թարգմանված է ուսերեն տասնմեկերորդ հրատարակությունից, որը համապատասխանում է բուռնների համար մաթեմատիկայի ուսումնական ծրագրին:

Գրքում շարադրված են դիֆերենցիալ հավասարումներ, բազմապատիկ, կորագծի և մակերևութային ինտեգրալներ, շարքեր, մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ, օպերացիոն հաշիվ, հավանականությունների տեսություն և մաթեմատիկական վիճակագրություն, մատրիցաներ բաժինները:

517. 2

ԳՄԴ 22. 161. 1

604—150
702 (01)—79

Н. С. Пискунов
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЯ

Для втузов, том второй
(на армянском языке)
Издательство «Լույս»
Ереван, 1979

դասընթացներում համապատասխան հարցերն ուսումնասիրելիս անհրաժեշտ է ազատորեն օգտվել այդ գաղափարներից: Կոմպլեքս թվերի շարադրմամբ նորից գրված են մի քանի պարագրաֆներ: Զգալի շափով ընդլայնված է XI գլխի § 2-ը, որտեղ տրված է անընդհատ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալի գոյությունն ապացուցելը: Լրացուցիչ գրված է գլխի («Իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիայի ինտեգրումը») § 11-ը: Գրված են XVI գլխի նոր §24 և §25-ը, որոնք նվիրված են կոմպլեքս անդամներով շարքերին և կոմպլեքս փոփոխականի աստիճանային շարքերին: XVII գլխի նոր գրված § 12-ը նվիրված է կոմպլեքս տեսքով Ֆուրյեի շարքերին: Ընդլայնված է Ֆուրյեի ինտեգրալի մասին հարցի շարադրումը: Լուսաբանված են հատուկ կիրառական գրականության մեջ օգտագործվող հասկացությունները (սպեկտր, սպեկտրալ ֆունկցիա):

Նոր են գրված XVII գլխի § 15-ը՝ «Ֆուրյեի շարքն ըստ ֆունկցիաների օրթոգոնալ համակարգի» և XVII գլխի § 16-ը՝ «Գաղափար զրծային ֆունկցիոնալ տարածության մասին: Անալոգիա ֆունկցիայի՝ Ֆուրյեի շարքի վերլուծության և վեկտորների վերլուծության միջև»: Այս նյութը շարադրված է այնպես, որպեսզի ուսանողներն ու ինժեներները կարողանան հասկանալ այս մաթեմատիկական ապարատի վրա հենվող գիտության ուրիշ ճյուղերի նյութը: XIX գլխում գրված է նոր § 20-ը՝ «Դեկոտա ֆունկցիան և նրա պատկերը»:

VIII գլխում զետեղված է § 19-ը՝ «Ֆունկցիայի ստացումը փորձնական տվյալների հիման վրա՝ ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի»: Այս պարագրաֆի բովանդակությունը կազմում է հավելված 1-ը, որը նախկինում զետեղված էր այս գասագրքի առաջին հատորի վերջին մասում:

VII գլխում տրված են § 10-ը՝ «Նյուտոնի ինտերպոլյացիոն բանաձևը» և § 11-ը՝ «Թվային դիֆերենցում»: Այս պարագրաֆների բովանդակությունը նախկինում զետեղված էր հավելված II-ում:

Մի քանի լրացումներ են կատարված V, VII, IX, XII, XIII գլուխներում:

XIII գլուխը («Դիֆերենցիալ հավասարումներ») ամբողջապես տեղափոխված է Երկրորդ հատոր:

Հեղինակ

Հինգերորդ հրատարակության մեջ լրիվ, անփոփոխ պահպանված է շորրորդ հրատարակության ամբողջ տեքստը, բայց այդ նյութը բաժանված է երկու հատորի (դասագրքի այս և նախորդ հրատարակությունների օգտագործման հարմարության համար գլուխների համարակալումը նույնպես թողնված է անփոփոխ):

Ամբողջ դասագրքի բովանդակությունը որոշվում է բառահանգրիպ համար մաթեմատիկայի դասընթացի՝ 300-450 ժամվա համար նախատեսված ծրագրով: Դասագիրքը նախատեսվում է ինչպես ստացիոնար, այնպես էլ հեռակա բառահանգրիպ մաթեմատիկայի դասընթացի ուսումնասիրման համար: Դա հաշվի է առնվել նյութի շարադրման ժամանակ, մասնավորապես, այդ նպատակով դասագրքում քննարկված են շատ օրինակներ, որոնք լուսաբանում են շարադրված տեսական նյութը և տալիս են խնդիրների լուծման նմուշները:

Առաջին հատորը ընդգրկում է բառահանգրիպ առաջին կուրսի ծրագրերին համապատասխանող նյութը, բացառությամբ XIII գլխի («Դիֆերենցիալ հավասարումներ»), որը, որպես կանոն, անցնում են երկրորդ կուրսում: Բայց քանի որ մի քանի բառահանգրիպ հաջորդ դիսցիպլինների համար անհրաժեշտ դիֆերենցիալ հավասարումների մասին նախնական տեղեկություններ տրվում են առաջին կուրսում, ապա այդ գլխի նյութի մի մասը (§ § 1—28) ևս տեղափոխված է առաջին հատորում:

Նշենք, որ թվով 300 ժամվա համար նախատեսված բառահանգրիպ ծրագրում պարունակվող նյութը համարյա լրիվ կա առաջին հատորում (բայց այն բովանդակում է նաև այդ ծրագրի շրջանակի մեջ չմտնող նյութ):

Երկրորդ հատորը (XIII գլխի վերջը՝ § § 29—34, XIV—XIX գլուխները) պարունակում է բառահանգրիպ երկրորդ կուրսի ծրագրին համապատասխանող նյութը:

Առաջին հատորի առաջին երկու գլուխները («Թիվ: Փոփոխական: Ֆունկցիա» և «Սահման: Ֆունկցիայի անընդհատությունը») գրված են հնարավորին շափ համառոտ: Սովորաբար այդ գլուխներում շարադրվող մի քանի հարցեր, առանց գործին վնասելու, տեղափոխված են երկրորդ և հաջորդ գլուխներ: Դա հնարավորություն է տվել ավելի վաղ անցնել դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական գաղափարին՝ ածանցյալին, որ պահանջում են բուհական դասընթացի ուրիշ դիսցիպլիններ (նյութի նման դասավորության նույնատեղահարմարությունը հաստատվում է աշխատանքի փորձով):

Բառահանգրիպ բարձրագույն մաթեմատիկայի ծրագրում այնպիսի հարցեր մտցնելու կապակցությամբ, որոնք անհրաժեշտ են ավտոմատիկայի և հաշվողական տեխնիկայի հետ կապված բառահանգրիպ դիս-

ցիպլիններին մաթեմատիկայի դասընթացով ապահովելու համար, դասագրքում մանրամասն շարադրված են համապատասխան բաժինները. «Դիֆերենցիալ հավասարումների և դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի թվային ինտեգրումը»*, «Գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի ինտեգրումը», «Գաղափար կյապունովի կայունության տեսության մասին», «Համիլտոնի օպերատորը», «Ֆուրյեի ինտեգրալը» և այլն:

XVIII դիտում քննարկվում են մաթեմատիկական ֆիզիկայի հիմնական հավասարումները: Մեծ ուշադրություն է դարձված այն ֆիզիկական երևույթների բնույթի պարզաբանմանը, որոնք բերվում են տարբեր տիպի հավասարումների և համապատասխան եզրային խնդիրների: Մեծ ուշադրություն է դարձված մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման թվային մեթոդներին:

XIX դիտում շարադրված են օպերացիոն հաշվի հիմնական գաղափարներն ու դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման օպերացիոն մեթոդը: Դա պահանջվում է հաջորդող շատ դիսցիպլինների և մասնավորապես էլեկտրատեխնիկականների համար:

Վարժությունների համար դասագրքի մեջ մտցված են մեծ թվով խնդիրներ և օրինակներ, որոնցից շատերը լուսաբանում են մաթեմատիկայի կապը գիտության ուրիշ ճյուղերի հետ: Խնդիրները և օրինակները հատուկ ընտրված են ըստ դասընթացի յուրաքանչյուր բաժնի, որը նպաստում է շարադրվող նյութի յուրացմանը: Այս հանգամանքը նույնպես գիրքը հարմար է դարձնում մաթեմատիկայի դասընթացի ինքնուրույն ուսումնասիրության համար, մասնավորապես հեռակայող ուսանողների համար:

Հեղինակ

Վեցերորդ հրատարակությունը հինգերորդից տարբերվում է միայն նրանով, որ առաջին հատորի վերջում տրված է հավելված, որտեղ շարադրված է ինժեներների համար կարևոր՝ «Ֆունկցիայի ստացումը փորձնական տվյալների հիման վրա՝ ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի» հարցը:

Յոթերորդ հրատարակությունը վեցերորդից տարբերվում է միայն նրանով, որ առաջին հատորի վերջում տրված է հավելված «Նյութառնի ինտերպոլյացիոն բանաձևը: Թվային դիֆերենցում»:

* Ավտոբաբար շարադրվող անալիզի թվային մեթոդները նույնպես շարադրված են այս դասագրքում:

XIII Գ Լ ՈՒ Խ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§ 1. Խնդրի դրվածքը: Մարմնի շարժման հավասարումը, երբ միջավայրի դիմադրությունը համեմատական է արագությանը: Հղթայագծի հավասարումը

Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան արտացոլում է որևէ երևույթի քանակական կողմը: Հաճախ դիտարկելով այդ երևույթը, մենք չենք կարողանում անմիջապես հաստատել x -ից y -ի կախման բնույթը, բայց կարողանում ենք հաստատել x և y մեծությունների և ըստ x -ի y' , y'' , ..., $y^{(n)}$ ածանցյալների միջև եղած կախումը, այսինքն՝ դրել դիֆերենցիալ հավասարում:

Պահանջվում է x -ի, y -ի և y -ի ածանցյալների միջև ստացված կախվածությունից հաստատել y -ի անմիջական կախումը x -ից, այսինքն՝ գտնել $Y = f(x)$ ֆունկցիան կամ, ինչպես ասում են, ինտեգրել դիֆերենցիալ հավասարումը:

Դիտարկենք երկու օրինակ:

Օրինակ 1: Որևէ բարձրությունից նետված է m զանգվածն ունեցող մարմինը: Պահանջվում է հաստատել, թե ինչ օրենքով կփոխվի այդ մարմնի անկման v արագությունը, եթե նրա վրա, բացի ծանրության ուժից, ազդում է օդի դիմադրության արգելակող ուժը, որը համեմատական է արագությանը (k համեմատականության գործակցով), այսինքն՝ պահանջվում է գտնել $v = f(t)$ ֆունկցիան:

Լուծում: Ըստ Նյուտոնի երկրորդ օրենքի

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

որտեղ $\frac{dv}{dt}$ -ն շարժվող մարմնի արագացումն է (արագության ածանցյալն ըստ ժամանակի), իսկ F -ը այն ուժն է, որը շարժման ուղղությամբ ազդում է մարմնի վրա: Այդ ուժն առաջանում է mg ծանրության ուժի և $-kv$ օդի դիմադրության ուժի գումարից (երկրորդ ուժը վերցրվում է մինուս նշանով, քանի որ այն ուղղված է արագության ուղղությանը հակադիր): Այսպիսով,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad (1)$$

Ստացանք v անհայտ ֆունկցիան և նրա $\frac{dv}{dt}$ ածանցյալը կապող առնչությունը, այսինքն՝ v անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ դիֆերենցիալ հավասարում: (Իսկ մի քանի տիպի պարաբոլների շարժման հավասարումն է): Լուծել դիֆերենցիալ հավասարումը նշանակում է գտնել այնպիսի $v = \tilde{f}(t)$ ֆունկցիա, որը նույնաբար բավարարում է տրված դիֆերենցիալ հավասարմանը: Այդպիսի ֆունկցիաներն անթիվ բազմությունում են: Ընթերցողը հեշտությամբ կստուգի, որ

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad (2)$$

տեսքի ամեն մի ֆունկցիա բավարարում է (1) հավասարմանը, ինչպիսին էլ լինի C հաստատուն թիվը: Իսկ այդ ֆունկցիաներից որն է տալիս v -ի որոնելի կախումը t -ից: Իսկ գտնելու համար օգտագործենք այն լրացուցիչ սլայմանը, որ մարմինը նետելիս նրան տրվել է v_0 սկզբնական արագություն (որը, մասնավորապես կարող է հավասար լինել զրոյի): Ենթադրում ենք, որ այդ սկզբնական արագությունը հայտնի է: Բայց այդ դեպքում $v = \tilde{f}(t)$ որոնելի ֆունկցիան պետք է լինի այնպիսին, որ $t=0$ դեպքում (շարժման սկզբին) տեղի ունենա $v = v_0$ պայմանը: (2) բանաձևում տեղա-

դրելով $t=0$, $v = v_0$, կգտնենք. $v_0 = C + \frac{mg}{k}$, որտեղից $C = v_0 - \frac{mg}{k}$:

Այսպիսով, C հաստատունը գտնված է: Հետևաբար, v -ի որոնելի կախումը t -ից այսպիսինն է.

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k} \quad (2')$$

Այս բանաձևից հետևում է, որ բավականաչափ մեծ t -երի համար v արագությունը համարյա կախված չի լինի v_0 -ից:

Նկատենք, որ եթե $k=0$ (այսինքն՝ օդի դիմադրությունը բացակայում է կամ դա այնքան փոքր է, որ մենք կարող ենք անտեսել), ապա մենք ստանում ենք ֆիզիկայից հայտնի

$$v = v_0 + gt \quad (2)$$

արդյունքը*: Այդ ֆունկցիան բավարարում է (1) դիֆերենցիալ հավասարմանը և $v = v_0$, երբ $t=0$ սկզբնական պայմանին:

Օրինակ 2: Ծկուն համասեռ թելը կախված է երկու ծայրերից:

Գտնել այն կորի հավասարումը, ըստ որի դասավորվում է թելն իր սեփական կշռի ազդեցությամբ (ինչպես կդասավորվեն կախված ճոպանները, լարերը, շղթաները):

Լուծում: Դիցուք, $M_0(O, b)$ -ն թելի ամենացածր կետն է, իսկ M -ը՝ նրա կամայական կետը (նկ. 250): Դիտարկենք թելի M_0M մասը: Այդ մասը գտնվում է հավասարակշռության մեջ հետևյալ երեք ուժերի ազդեցության տակ.

* (2') բանաձևը կարելի է ստանալ (2')-ից սուսմանային անցման օգնությամբ՝

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k} \right] = v_0 + gt:$$

1) T ձգումը, որն ազդում է M կետում շոշափողի ուղղությամբ և Ox առանցքի հետ կազմում է φ անկյուն,

2) H ձգումը M_0 կետում, որն ազդում է հորիզոնական,

3) թելի γS կշիռը, որն ուղղված է ուղղաձիգ դեպի ներքև, որտեղ S -ը M_0M աղեղի երկարությունն է, γ -ն՝ թելի զծային տեսակարար կշիռը:

T ձգումը վերածելով հորիզոնական և ուղղաձիգ բաղադրիչների, կստանանք հավասարակշռության հավասարումները՝

$$T \cos \varphi = H, \quad T \sin \varphi = \gamma S:$$

Երկրորդ հավասարության անդամները բաժանելով առաջինի համապատասխան անդամների վրա, կստանանք.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma}{H} S \quad (3)$$

Այժմ ընդունենք, որ որոնելի կորի հավասարումը կարելի է գրել $y = \tilde{f}(x)$ տեսքով: Այստեղ $\tilde{f}(x)$ -ն անհայտ ֆունկցիա է, որը պետք է գտնել: Նկատենք, որ

$$\operatorname{tg} \varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx}:$$

Հետևաբար,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} S, \quad (4)$$

որտեղ a -ով նշանակված է $\frac{H}{\gamma}$ հարաբերությունը:

(4) հավասարության երկու մասը դիֆերենցենք ըստ x -ի.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx} \quad (5)$$

Բայց, ինչպես հայտնի է (տես § 1 զԼ. VI),

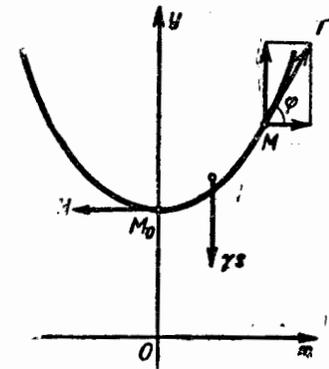
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}:$$

$\frac{ds}{dx}$ -ի արժեքը տեղադրելով (5) հավասարության մեջ, կստանանք որոնելի կորի դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (6)$$

Այն արտահայտում է որոնելի y ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ ածանցյալների կապը:

Կանգ շառնելով հավասարումների լուծման մեթոդների վրա, նշենք, որ



Նկ. 250

$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2 \quad (7)$$

տեսքի ամեն մի ֆունկցիա C_1 և C_2 հաստատունների ցանկացած արժեքների դեպքում բավարարում է (6) հավասարմանը, որում կարելի է հեշտությամբ համոզվել այդ ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ ածանցյալները (6) հավասարման մեջ տեղադրելով: Այնուհետև, առանց ապացուցման նշենք, որ այդ ֆունկցիաներով (տարբեր C_1 -ի և C_2 -ի դեպքում) սպառվում են (6) հավասարման բոլոր հնարավոր լուծումները: Դա ցույց կտրվի § 18-ում:

Այդպիսով ստացված բոլոր ֆունկցիաների զրաֆիկները կոչվում են շղթայագծեր: Այժմ պարզաբանենք, թե ինչպես կարելի է ընտրել C_1 և C_2 հաստատունները՝ այն շղթայագիծը ստանալու համար, որի ամենացածր M կետն ունի (0, b) կոորդինատները: Քանի որ $x=0$ դեպքում շղթայագծի կետը զրավում է ամենացածր դիրքը,

$$\text{այսինքն } \frac{dy}{dx} = 0:$$

Բացի այդ, ըստ պայմանի, (7) հավասարումից գտնում ենք.

$$y' = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{a} + C_1\right):$$

Այստեղ տեղադրելով $x=0$, կստանանք $0 = \operatorname{sh}C_1$: Հետևաբար, $C_1 = 0$:

Եթե M_0 կետի օրդինատը b -ն է, ապա $y=b$, երբ $x=0$:

Ընդունելով $x=0$ և $C_1=0$ (7) հավասարումից ստանում ենք $b = \frac{a}{2}(1+1) + C_2$,

որտեղից $C_2 = b - a$: Վերջնականապես գտնում ենք.

$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right) + b - a:$$

(7) հավասարումն առանձնապես պարզ տեսք է ընդունում, եթե M_0 կետի օրդինատը վերջնենք հավասար a թվին: Այդ դեպքում շղթայագծի հավասարումը կլինի

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}:$$

§ 2. Սահմանումներ

Սահմանում 1: Դիֆերենցիալ հավասարում կոչվում է այն հավասարումը, որը կապում է x անկախ փոփոխականը, $y = f(x)$ որոնելի ֆունկցիան և նրա y' , y'' , ..., $y^{(n)}$ ածանցյալները:

Դիֆերենցիալ հավասարումը սիմվոլիկ ձևով կարելի է գրել այսպես.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

կամ

$$\ddot{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0:$$

Եթե $y = f(x)$ որոնելի ֆունկցիան մեկ անկախ փոփոխականի ֆունկցիա է, ապա դիֆերենցիալ հավասարումը կոչվում է սովորական: Տվյալ գլխում զբաղվելու ենք միայն սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներով*:

Սահմանում 2: Դիֆերենցիալ հավասարման կարգ կոչվում է հավասարման մեջ մտնող ածանցյալի ամենաբարձր կարգը:

Այսպես, օրինակ,

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0$$

հավասարումն առաջին կարգի է:

$$y'' + ky' - by - \sin x = 0$$

հավասարումը երկրորդ կարգի է և այլն:

Նախորդ պարագրաֆի 1-ին օրինակում դիտարկված հավասարումն առաջին կարգի է, իսկ երկրորդ օրինակի հավասարումը՝ երկրորդ կարգի:

Սահմանում 3: Դիֆերենցիալ հավասարման լուծում կամ ինտեգրալ կոչվում է ամեն մի $y = f(x)$ ֆունկցիա, որը տեղադրելով հավասարման մեջ նրան նույնիսկ չունի է դարձնում:

Օրինակ 1: Դիցուք ունենք հետևյալ հավասարումը՝

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0:$$

$y = \sin x$, $y = 2\cos x$, $y = 3\sin x - \cos x$ ֆունկցիաները և ընդհանրապես $y = C_1 \sin x$, $y = C_2 \cos x$ կամ

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

տեսքի ֆունկցիաները տված հավասարման լուծումներն են C_1 և C_2 հաստատունների ցանկացած ընտրության դեպքում. դրանում հեշտ է համոզվել, եթե նշված ֆունկցիաները տեղադրենք հավասարման մեջ:

* Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների հետ մաթեմատիկական անալիզում ուսումնասիրվում են նաև մասնակի ածանցյալներով հավասարումներ: Մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարում կոչվում է երկու կամ մի քանի x, y, \dots , փոփոխականներից կախված z անհայտ ֆունկցիայի, այդ փոփոխականների և z -ի՝ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ և այլն մասնակի ածանցյալների միջև եղած առնչությունը:

$z(x, y)$ անհայտ ֆունկցիայով մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարում է, օրինակ, $x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y}$ հավասարումը:

Հեշտ է ստուգել, որ այդ հավասարմանը բավարարում է $z = x^2 y^2$ ֆունկցիան (նաև ուրիշ ֆունկցիաների բազմությունը):

Սույն դասընթացում մասնակի ածանցյալներով հավասարումներին նվիրված է XVIII դրուբը:

0 ր ի ն ա կ 2: Դիտարկենք հետևյալ հավասարումը.

$$y'x - x^2 - y = 0:$$

Նրա լուծումները կլինեն

$$y = x^2 + Cx$$

տեսքի բոլոր ֆունկցիաները, որտեղ C-ն կամայական հաստատուն է: Իրոք, դիֆերենցելով $y = x^2 + Cx$ ֆունկցիան, գտնում ենք.

$$y' = 2x + C:$$

y-ի և y'-ի արտահայտությունները տեղադրելով տրված դիֆերենցիալ հավասարման մեջ, ստանում ենք նույնություն՝ $(2x + C)x - x^2 - x^2 - Cx = 0$:

1-ին և 2-րդ օրինակներում դիտարկված յուրաքանչյուր հավասարում ունի անֆիվ բաղմուռությամբ լուծումներ:

§ 3. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ (ընդհանուր հասկացություններ)

1. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումն ունի

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

տեսքը:

Եթե այդ հավասարումը հնարավոր է լուծել y'-ի նկատմամբ, ապա այն կարելի է գրել

$$y' = f(x, y) \quad (1')$$

տեսքով:

Այս դեպքում ասում ենք, որ դիֆերենցիալ հավասարումը լուծված է ածանցյալի նկատմամբ: Այդպիսի հավասարման համար իրավացի է հետևյալ թեորեմը, որը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման լուծման գոյություն և միակություն թեորեմ:

Թ ե ո Ր ե մ: Եթե

$$y' = f(x, y)$$

հավասարման մեջ $f(x, y)$ ֆունկցիան և նրա՝ ըստ y-ի $\frac{\partial f}{\partial y}$ մասնակի

ածանցյալն անընդհատ են Oxy հարթության որևէ D տիրույթում, որն ընդգրկում է (x_0, y_0) կետը, ապա գոյություն ունի այդ հավասարման

$$y = \varphi(x)$$

միակ լուծումը, որը բավարարում է $y = y_0$, երբ $x = x_0$ պայմանին:

Այս թեորեմը կապացուցվի XVI գլխի § 27-ում:

Թեորեմի երկրաչափական իմաստն այն է, որ գոյություն ունի և այն էլ միակ $y = \varphi(x)$ ֆունկցիան, որի գրաֆիկն անցնում է (x_0, y_0) կետով:

Հենց նոր ասված թեորեմից հետևում է, որ (1') հավասարումն ունի անվերջ թվով տարբեր լուծումներ (օրինակ, լուծում, որի գրաֆիկն անցնում է (x_0, y_0) կետով, ուրիշ լուծում, որի գրաֆիկն անցնում է (x_0, y_1) կետով և այլն, եթե միայն այդ կետերն ընկած են D տիրույթում):

Այն պայմանը, որ $x = x_0$ արժեքի դեպքում y ֆունկցիան պետք է հավասարվի տրված y_0 թվին, կոչվում է սկզբնական պայման: Այն հաճախ գրվում է հետևյալ տեսքով.

$$y|_{x=x_0} = y_0:$$

Սա հ մ ա ն ու մ 1: Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծում կոչվում է

$$y = \varphi(x, C) \quad (2)$$

ֆունկցիան, որը կախված է մեկ C կամայական հաստատունից և բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

ա) այն բավարարում է դիֆերենցիալ հավասարմանը՝ C հաստատունի ցանկացած կոնկրետ արժեքի դեպքում,

բ) ինչպիսին էլ լինի $y = y_0$, երբ $x = x_0$, այսինքն՝ $(y)_{x=x_0} = y_0$ սկզբնական պայմանը, կարելի է գտնել այնպիսի $C = C_0$ արժեք, որ $y = \varphi(x, C_0)$ ֆունկցիան բավարարի տրված սկզբնական պայմանին: Հստ որում ենթադրվում է, որ x_0 և y_0 արժեքները պատկանում են x և y փոփոխականների փոփոխման այն տիրույթին, որում տեղի ունեն լուծման գոյություն և միակության թեորեմի պայմանները:

2. Դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծման որոնման ընթացքում հաճախ ենք հանդուստի y-ի նկատմամբ չլուծված

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (2')$$

տեսքի առնչության: Կուծելով այս առնչությունն y-ի նկատմամբ, ստանում ենք ընդհանուր լուծումը: Այնուամենայնիվ ոչ միշտ է հնարավոր (2') առնչությունից y-ն արտահայտել տարրական ֆունկցիաներով. նման դեպքերում ընդհանուր լուծումը թողնվում է անբացահայտ տեսքով: $\Phi(x, y, C) = 0$ տեսքի հավասարությունը, որն անբացահայտ ձևով տալիս է ընդհանուր լուծումը, կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալ:

Սա հ մ ա ն ու մ 2: Մասնավոր լուծում կոչվում է ցանկացած $y = \varphi(x, C_0)$ ֆունկցիան, որը ստացվում է $y = \varphi(x, C)$ ընդհանուր լուծումից, եթե վերջինիս մեջ C կամայական հաստատունին տրվի $C = C_0$ որոշակի արժեք: Այս դեպքում $\Phi(x, y, C_0) = 0$ առնչությունը կոչվում է հավասարման մասնավոր ինտեգրալ:

0 բի ն ա կ 1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ առաջին կարգի հավասարման համար ընդհանուր լուծում

կլինի $y = \frac{C}{x}$ ֆունկցիաների ընտանիքը. դա կտրելի է ստուգել հավասարման մեջ հասարակ տեղադրմամբ:

Գտնենք այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է $y_0=1$, երբ $x_0=2$ սկզբնական պայմանին: Տեղադրելով այդ x_0, y_0 արժեքները $y = \frac{C}{x}$ բանաձևի մեջ, կստանանք $1 = \frac{C}{2}$ կամ $C=2$: Հետևաբար, որոնվող մասնավոր լուծումը կլինի $y = \frac{2}{x}$ ֆունկցիան:

Երկրաչափական տեսակետից ընդհանուր լուծումը ինտեգրալը կորորդինատային հարթության վրա կորերի ընտանիք է, որը կախված է մեկ C կամայական հաստատունից (կամ, ինչպես ասում են, մեկ C պարամետրից): Այդ կորերը կոչվում են տրված դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորեր: Մասնավոր ինտեգրալին համապատասխանում է այդ ընտանիքի մեկ կոր, որն անցնում է հարթության որևէ տրված կետով:

Այսպես, վերջին օրինակում ընդհանուր ինտեգրալը երկրաչափորեն պատկերվում է $y = \frac{C}{x}$ հիպերբոլների ընտանիքով, իսկ մասնակի ինտեգրալը, որը որոշվում է նշված սկզբնական պայմաններով, պատկերվում է այդ հիպերբոլներից մեկով, որն անցնում է $M_0(2, 1)$ կետով: Նկ. 251-ում պատկերված են ընտանիքի մի քանի կորերը, որոնք համապատասխանում են պարամետրի $C = \frac{1}{2}, C=1, C=2, C=-1$ և այլ արժեքներին:

Դատողություններն ավելի ակնառու դարձնելու համար հետագայում հավասարման լուծումը կանվանենք ոչ միայն հավասարմանը բավարարող $y = \varphi(x, C_0)$ ֆունկցիան, այլև համապատասխան ինտեգրալային կորը: Այդ կապակցությամբ մենք կխոսենք, օրինակ, (x_0, y_0) կետով անցնող լուծման մասին:

Դիտողություն և: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ հավասարումը Oy առանցքին պատկանող կետով անցնող լուծումներ չունի (տես նկ. 251), քանի որ երբ $x=0$ հավասարման աջ մասը որոշված չէ և, հետևաբար, անընդհատ չէ: Լուծել կամ, ինչպես հաճախ են ասում, ինտեգրել դիֆերենցիալ հավասարումը, նշանակում է.

ա) գտնել նրա ընդհանուր լուծումը կամ ընդհանուր ինտեգրալը (եթե սկզբնական պայմանները տրված չեն) կամ

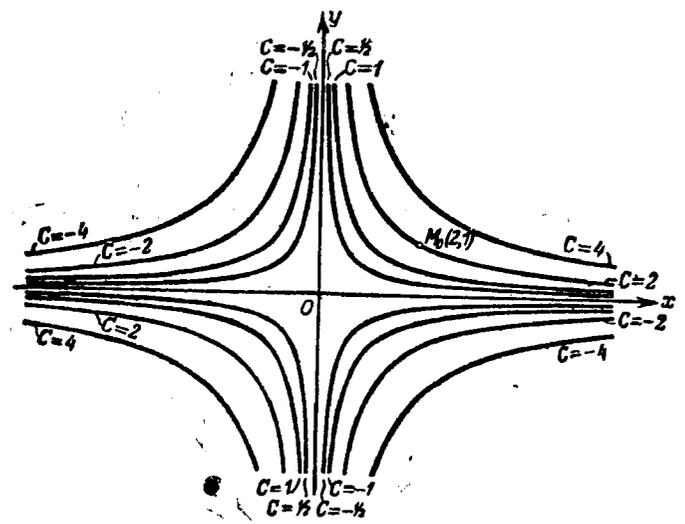
բ) գտնել հավասարման այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է տրված սկզբնական պայմաններին (եթե այդպիսիք կան):

3. Տանք առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման երկրաչափական մեկնաբանությունը:

Դիցուք տրված է ածանցյալի նկատմամբ լուծված

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1')$$

դիֆերենցիալ հավասարումը և $y = \varphi(x, C)$ -ն այդ հավասարման ընդհանուր լուծումն է: Այդ ընդհանուր լուծումը Oxy հարթության վրա որոշում է ինտեգրալային կորերի ընտանիք:



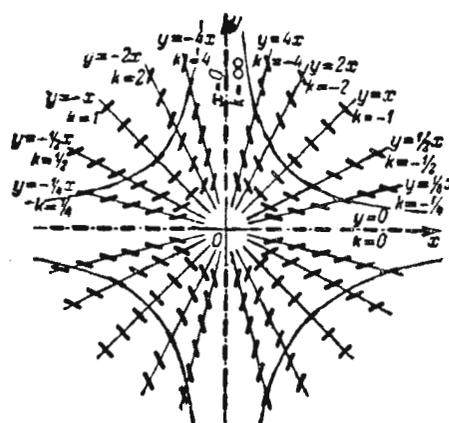
Նկ. 251

(1') հավասարումը x, y կորորդինատներով յուրաքանչյուր M կետի համար որոշում է $\frac{dy}{dx}$ ածանցյալի արժեքը, այսինքն՝ այդ կետով անցնող ինտեգրալային կորի շոշափողի անկյունային գործակիցը: Այդպիսով, (1') դիֆերենցիալ հավասարումը տալիս է ուղղությունների բազմություն կամ, ինչպես ասում են, Oxy հարթության վրա որոշվում է ուղղությունների դաշտ:

Հետևաբար, երկրաչափական տեսակետից դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրման խնդիրը կայանում է այն կորերի որոնման մեջ, որոնց շոշափողների ուղղությունը համընկնում է համապատասխան կետերում դաշտի ուղղության հետ:

(1) դիֆերենցիալ հավասարման համար այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցում տեղի ունի $\frac{dy}{dx} = C = \text{const}$ առնչությունը, կոչվում է տվյալ դիֆերենցիալ հավասարման իզոկլին:

C-ի տարբեր արժեքների դեպքում ստանում ենք տարբեր իզոկլիններ: C արժեքին համասպասարկվող իզոկլինի հավասարումը ակնհայտորեն կլինի $f(x, y) = C$: Կառուցելով իզոկլինների ընտանիքը, կարելի է մոտավորությամբ կառուցել ինտեգրալային կորերի ընտանիքը: Ասում են, որ իմանալով իզոկլինները, կարելի է որակապես որոշել հարթության վրա ինտեգրալային կորերի բաշխումը:



Նկ. 252

Նկ. 252-ում պատկերված է

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

դիֆերենցիալ հավասարումով որոշվող ուղղությունների դաշտը: Տվյալ դիֆերենցիալ հավասարման իզոկլիններ են

$$-\frac{y}{x} = C \quad \text{կամ} \quad y = -Cx$$

գերը: Այդ ուղղիղների ընտանիք է: Դրանք կառուցված են նկ. 252-ում: 4. Դիտարկենք այսպիսի խնդիր.

Դիցուք տրված է մեկ C պարամետրից կախված ֆունկցիաների ընտանիք՝

$$y = \varphi(x, C), \quad (2)$$

ըստ որում հարթության կամ հարթության որևէ տիրույթի յուրաքանչյուր կետով անցնում է այդ ընտանիքի միայն մեկ կոր:

Ո՞ր դիֆերենցիալ հավասարման համար է այդ ֆունկցիաների ընտանիքը համարվում ընդհանուր ինտեգրալ:

(2) առնչության երկու կողմերը դիֆերենցելով ըստ x-ի, կգտնենք.

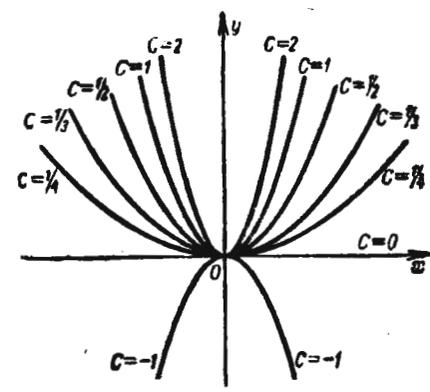
$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, C): \quad (3)$$

Քանի որ հարթության յուրաքանչյուր կետով անցնում է ընտանիքի միայն մեկ կոր, ապա x և y թվերի յուրաքանչյուր զույգի համար (2)

հավասարումից որոշվում է C-ի միակ արժեքը: C-ի այդ արժեքը տեղադրելով (3) առնչության մեջ, կգտնենք $\frac{dy}{dx}$ -ը որպես x-ի և y-ի ֆունկցիա: Դա էլ հենց կլինի այն դիֆերենցիալ հավասարումը, որին բավարարում է (2) ընտանիքի ամեն մի ֆունկցիա:

Հետևաբար, x-ի, y-ի և $\frac{dy}{dx}$ -ի միջև կապ հաստատելու, այսինքն՝ այն դիֆերենցիալ հավասարումը գրելու համար, որի ընդհանուր ինտեգրալը որոշվում է (2) բանաձևով, պետք է (2) և (3) առնչություններից արտաքսել C-ն:

0 րի նա կ 2: Գտնել $y = Cx^2$ պարաբոլների ընտանիքի (նկ. 253) դիֆերենցիալ հավասարումը:



Նկ. 253

Ընտանիքի հավասարումը դիֆերենցելով ըստ x-ի, կգտնենք

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx:$$

Ընտանիքի հավասարումից $C = \frac{y}{x^2}$ արժեքը տեղադրելով այստեղ, ստանում ենք տրված ընտանիքի դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}:$$

Այս դիֆերենցիալ հավասարումն իմաստ ունի, երբ $x \neq 0$, այսինքն՝ Oy առանցքից կետ չկարունակող ցանկացած տիրույթում:

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ

Գրքերի և պարբերականների կառավարում

Գրքերի և պարբերականների կառավարում

17

§ 4. Անջատված և անջատվող փոփոխականներով հավասարումներ: Խնդիր ռադիումի քայքայման մասին

Դիտարկենք

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \quad (1)$$

տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ աջ մասը միայն x -ի ֆունկցիայի և միայն y -ի ֆունկցիայի արտադրյալ է: Այն ձևափոխենք հետևյալ կերպ (ենթադրելով, որ $f_2(y) \neq 0$).

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x) dx, \quad (1')$$

Համարելով y -ը x -ի հայտնի ֆունկցիա, (1') հավասարությունը կարելի է դիտել որպես երկու դիֆերենցիալների հավասարություն, իսկ նրանց անորոշ ինտեգրալները կտարբերվեն հաստատուն գումարելիով: Ձախ մասն ինտեգրելով ըստ y -ի, իսկ աջ մասը՝ ըստ x -ի, կստանանք.

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx + C, \quad (1'')$$

Մենք ստացանք y լուծումը, x անկախ փոփոխականը, և C կամայական հաստատունը կապող առնչություն, այսինքն՝ ստացանք (1) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը:

1. (1') տիպի

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (2)$$

դիֆերենցիալ հավասարումն անվանում են անջատված փոփոխականներով հավասարում: Ըստ ապացուցածի նրա ընդհանուր ինտեգրալն է.

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C:$$

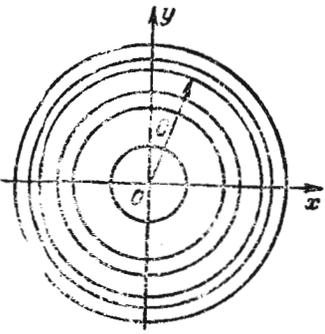
Օրինակ 1: Տրված է անջատվող փոփոխականներով հավասարում.

$$x dx + y dy = 0:$$

Ինտեգրելով, կստանանք ընդհանուր ինտեգրալը՝

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1:$$

Քանի որ վերջին հավասարության ձախ մասը ոչբացասական է, ապա ոչբացասական է նաև աջ մասը: $2C_1$ -ը նշանակելով C^2 -ով:



Նկ. 254

կունենանք.

$$x^2 + y^2 = C^2:$$

Դա այն համակենտրոն շրջանագծերի ընտանիքի (նկ. 254) հավասարումն է, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ շառավիղը հավասար է C -ի:

$$2. M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (3)$$

տեսքի հավասարումը կոչվում է անջատվող փոփոխականներով: Այն կարող է բերվել* անջատված փոփոխականներով հավասարման՝ նրա երկու մասերը $N_1(y)M_2(x)$ արտահայտության վրա բաժանելով.

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)} dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)} dy = 0$$

կամ

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0,$$

այսինքն՝ (2) տեսքի հավասարման:

Օրինակ 2: Տրված է հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}:$$

Անջատում ենք փոփոխականները.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}:$$

Ինտեգրելով, գտնում ենք.

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C,$$

այսինքն

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|^{**} \text{ կամ } \ln|y| = \ln|C/x|:$$

Այստեղից ստանում ենք ընդհանուր լուծումը՝ $y = \frac{C}{x}$:

Օրինակ 3: Տրված է հետևյալ հավասարումը.

$$(1+x)y dx + (1-y)x dy = 0:$$

Անջատելով փոփոխականները, գտնում ենք.

$$\frac{1+x}{x} dx + \frac{1-y}{y} dy = 0, \quad \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = 0:$$

* Այդ ձևափոխություններն օրինական է կատարել միայն այն տիրույթում, որտեղ ոչ $N_1(y)$ -ը, ոչ $M_2(x)$ -ը զրո չեն դառնում:

** Նկատի ունենալով հետագա ձևափոխությունները, կամայական հաստատունը նշանակեցինք $\ln|C|$ -ով, քանի որ $\ln|C|$ -ն (երբ $C \neq 0$) կարող է ընդունել $-\infty$ -ից մինչև $+\infty$ ցանկացած արժեքը:

$$\ln|x|+x+\ln|y|-y=C \text{ կամ } \ln|xy|+x-y=C:$$

Վերջին անշտաբյունը տրված դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալն է: Օրինակ 4: Հաստատված է, որ ռադիոմի քայքայման արագությունը ուղիղ համեմատական է յուրաքանչյուր պահին նրա քանակությանը: Որոշել ռադիոմի զանգվածի փոփոխման օրենքը՝ կախված ժամանակից, եթե $t=0$ պահին ռադիոմի զանգվածը m_0 էր:

Քայքայման արագությունը որոշվում է հետևյալ կերպ: Դիցուք t պահին կար m զանգված, $t+\Delta t$ պահին՝ $m+\Delta m$ զանգված: Δt ժամանակում քայքայվել է Δm զանգ-

ված: $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ հարաբերությունը կլինի քայքայման միջին արագությունը: Այդ հարաբերության սահմանը, երբ $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

ռադիոմի քայքայման արագությունն է t պահին:

Ըստ խնդրի պայմանի

$$\frac{dm}{dt} = -km, \quad (4)$$

որտեղ k -ն համեմատականության գործակիցն է ($k > 0$): Մինչև նշանը դնում ենք նրա համար, որ ժամանակի ընթացքում ռադիոմի զանգվածը նվազում է և, հետևաբար,

$$\frac{dm}{dt} < 0:$$

(4) հավասարումը անջատվող փոփոխականներով հավասարում է: Անջատենք փոփոխականները.

$$\frac{dm}{m} = -k dt:$$

Լուծելով հավասարումը, կստանանք

$$\ln m = -kt + \ln C,$$

որտեղից

$$\ln \frac{m}{C} = -kt,$$

$$m = Ce^{-kt} \quad (5)$$

Քանի որ $t=0$ դեպքում ռադիոմի զանգվածը m_0 էր, ապա C -ն պետք է բավարարի

$$m_0 = Ce^{-k \cdot 0} = C$$

առնչությունը: C -ի արժեքը տեղադրելով (5) հավասարման մեջ, կստանանք ռադիոմի զանգվածի կախումը՝ որպես ժամանակի ֆունկցիա (նկ. 255).

$$m = m_0 e^{-kt} \quad (6)$$

k գործակիցը որոշվում է դիտումներից հետևյալ կերպ: Դիցուք t_0 ժամանակամիջոցում քայքայվում է ռադիոմի սկզբնական զանգվածի α %-ը:

Հետևաբար, տեղի ունի

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) m_0 = m_0 e^{-kt_0}$$

առնչությունը, որտեղից

$$-kt_0 = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)$$

կամ

$$k = -\frac{1}{t_0} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right):$$

Այս ձևով որոշվել է, որ ռադիոմի համար $k = 0,000436$ (ժամանակի չափման միավորը հարին է): k -ի այս արժեքը տեղադրելով (6) բանաձևի մեջ, կստանանք $m = m_0 e^{-0,000436t}$,

Գտնենք այն ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում քայքայվում է ռադիոմի սկզբնա-

կան զանգվածի կեսը: Վերջին բանաձևում m -ի փոխարեն տեղադրելով $\frac{m_0}{2}$ արժեքը, կստանանք T կիսաքայքայման պարբերության որոշման համար հետևյալ բանաձևը՝

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0,000436T}$$

որտեղից $-0,000436T = -\ln 2$ կամ

$$T = \frac{\ln 2}{0,000436} \text{ տարի:}$$

Նկատենք, որ (4) տեսքի հավասարման են բերվում ֆիզիկայի ու քիմիայի նաև այլ խնդիրներ:

Դիտողություն 1. Դիցուք (1) հավասարման մեջ մտնող $f_2(y)$ ֆունկցիան ունի $y=b$ արմատ, այսինքն՝ $f_2(b)=0$: Այս դեպքում, ակնհայտ է, $y=b$ ֆունկցիան (1) հավասարման լուծումն է, որում հեշտությամբ կարելի է համոզվել անմիջական տեղադրումով: $y=b$ լուծումը (1'') բանաձևից կարող է և շատացվել: Այդ դեպքի վերլուծությունը մենք շենք կատարի, բայց կնշենք, որ $y=0$ ուղղի վրա կարող է խախտվել միակության պայմանը:

Բերենք օրինակ: $y' = 2\sqrt{y}$ հավասարումն ունի $y=(x+c)^2$ ընդհանուր լուծումը և $y=0$ լուծումը, որն ընդհանուր լուծումից չի ստացվում: $y=0$ ուղղի վրա խախտվում է միակության պայմանը:

Դիտողություն 2: Պարզագույն անջատված փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում է

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ կամ } dy = f(x) dx$$

տեսքի հավասարումը: Նրա ընդհանուր ինտեգրալն ունի հետևյալ տեսքը.

$$y = \int f(x) dx + C:$$

Այդ տեսքի հավասարման լուծմամբ մենք զբաղվել ենք X դիսում:



Նկ. 255

§ 5. Առաջին կարգի համասեռ հավասարումներ

Ս ա հ մ ա ն ու մ 1: $f(x, y)$ ֆունկցիան կոչվում է x և y փոփոխականների նկատմամբ n -րդ շափման ֆունկցիա, եթե ցանկացած λ -ի դեպքում իրավացի է

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

նույնությունը:

Օրինակ 1: $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ ֆունկցիան առաջին շափման համասեռ ֆունկցիա է, քանի որ

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \sqrt{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y):$$

Օրինակ 2: $f(x, y) = xy - y^2$ երկրորդ շափման համասեռ ֆունկցիա է, քանի որ

$$(\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2(xy - y^2):$$

Օրինակ 3: $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ զրո շափման համասեռ ֆունկցիա է, քանի որ

$$\frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy}, \text{ այսինքն՝ } f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \text{ կամ } f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y):$$

Ս ա հ մ ա ն ու մ 2: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (1)

առաջին կարգի հավասարումը կոչվում է x -ի և y -ի նկատմամբ համասեռ, եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան x -ի և y -ի նկատմամբ զրո շափման համասեռ ֆունկցիա է:

Համասեռ հավասարման լուծումը: Ըստ պայմանի $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$: Այս նույնության մեջ տեղադրելով $\lambda = \frac{1}{x}$, կստանանք

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

այսինքն՝ զրո շափման համասեռ ֆունկցիան կախված է միայն արգումենտների հարաբերությունից:

(1) հավասարումն այս դեպքում կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{dv}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right): \quad (1')$$

կատարենք

$$u = \frac{y}{x}, \text{ այսինքն՝ } y = ux \text{ տեղադրությունը:}$$

Այդ դեպքում կունենանք.

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x:$$

Ածանցյալի այս արժեքը տեղադրելով (1') հավասարման մեջ, կստանանք.

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u):$$

Սա անջատվող փոփոխականներով հավասարում է.

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u \text{ կամ } \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}:$$

Ինտեգրելով, կգտնենք.

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C:$$

Ինտեգրելուց հետո u -ի փոխարեն տեղադրելով $\frac{y}{x}$, կստանանք

(1') հավասարման ինտեգրալը:

Օրինակ 4: Տրված է հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}:$$

Այդ մասում զրո շափման համասեռ ֆունկցիա է, հետևաբար, ունենք համասեռ հավասարում: Կատարենք $\frac{y}{x} = u$ փոխարինումը. այդ դեպքում

$$y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$$

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2}, \quad x \frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1 - u^2}:$$

Փոփոխականներն անջատելով, կունենանք.

$$\frac{(1 - u^2)du}{u^3} = \frac{dx}{x}, \quad \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}:$$

այստեղից, ինտեգրելով գտնում ենք.

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln|C| \text{ կամ } -\frac{1}{2u^2} = \ln|uxC|:$$

Տեղադրելով $u = \frac{y}{x}$, կստանանք տրված հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը.

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|Cy|:$$

y-ը որպես x-ի տարրական ֆունկցիաների օգնությամբ գրված ֆունկցիա ստանալը տվյալ դեպքում անհնարին է: Սակայն, այստեղ դժվար չէ x-ն արտահայտել y-ի միջոցով:

$$x=y\sqrt{-2\ln|Cy|}$$

Դիտողություն: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

տեսքի հավասարումը կլինի համասեռ այն և միայն այն դեպքում, երբ $M(x, y)$ -ը և $N(x, y)$ -ը միևնույն չափման համասեռ ֆունկցիաներ են: Այդ բխում է նրանից, որ երկու միևնույն չափման համասեռ ֆունկցիաների հարաբերությունը զրո չափման համասեռ ֆունկցիա է:

Օրինակ 5:

$$(2x+3y)dx + (x-2y)dy = 0,$$

$$(x^2+y^2)dx - 2xy dy = 0$$

հավասարումները համասեռ են:

§ 6. Համասեռի բերվող հավասարումներ

Համասեռ հավասարումների են բերվում

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \quad (1)$$

տեսքի հավասարումները: Եթե $c_1 = c = 0$, ապա, ակնհայտ է, որ (1) հավասարումը համասեռ է: Դիցուք այժմ c_1 և c_2 (կամ նրանցից մեկը) զրոյից տարբեր է: Կատարենք փոփոխականի փոխարինում:

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k:$$

Այդ դեպքում

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} \quad (2)$$

x-ի, y-ի և $\frac{dy}{dx}$ -ի արտահայտությունները տեղադրելով (2) հավասարման մեջ, կունենանք

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1} \quad (3)$$

h-ը և k-ն ընտրենք այնպես, որ տեղի ունենան

$$\left. \begin{aligned} ah+bk+c &= 0, \\ a_1h+b_1k+c_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

հավասարությունները, այսինքն՝ h-ը և k-ն որոշենք որպես (4) հավասարումների համակարգի լուծում: Այս պայմանի դեպքում (3) հավասարումը դառնում է համասեռ:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}$$

Լուծելով այս հավասարումը և (2) քանաձևերով նորից անցնելով x-ին և y-ին, կստանանք (1) հավասարման լուծումը:

(4) համակարգը շունի լուծում, եթե

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

այսինքն՝ $ab_1 = a_1b$: Բայց այս դեպքում $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, այսինքն՝ $a_1 = \lambda a$,

$b_1 = \lambda b$ և, հետևաբար, (1) հավասարումը կարելի է ձևափոխել

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1} \quad (5)$$

տեսքի: Այդ դեպքում

$$z = ax + by \quad (6)$$

տեղադրման օգնությամբ հավասարումը բերվում է անջատվող փոփոխականներով հավասարման:

Իրոք,

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$$

որտեղից

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} \quad (7)$$

(6) և (7) արտահայտությունները տեղադրելով (5) հավասարման մեջ, կստանանք

$$\frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z+c}{\lambda z+c_1}$$

իսկ սա անջատվող փոփոխականներով հավասարում է:

(1) հավասարման ինտեգրման նկատմամբ կիրառված Լղանակը օգտագործվում է նաև

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$$

հավասարման ինտեգրման նկատմամբ (i-ը որևէ անընդհատ ֆունկցիա է):

Օրինակ 1: Տրված է

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$$

Հավասարումը: Այն համասեռ հավասարման ձևափոխելու համար կատարենք $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$ փոխարինումը: Այս դեպքում

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}$$

լուծելով

$$h + k - 3 = 0, \quad h - k - 1 = 0$$

երկու հավասարումների համակարգը, գտնում ենք.

$$h = 2, \quad k = 1:$$

Արդյունքում ստանում ենք

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 - y_1}{x_1 - y_1}$$

համասեռ հավասարում, որը լուծում ենք

$$\frac{y_1}{x_1} = u$$

տեղադրմամբ. այդ դեպքում

$$y_1 = ux_1, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1}$$

$$u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1-u}{1-u}$$

և ստանում ենք անջատվող փոփոխականներով

$$x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}$$

հավասարումը: Անջատում ենք փոփոխականները.

$$\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}$$

Ինտեգրելով, գտնում ենք.

$$\arctg u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln|x_1| + \ln|C|,$$

$$\arctg u = \ln|Cx_1 \sqrt{1+u^2}|$$

կամ

$$Cx_1 \sqrt{1+u^2} = e^{\arctg u}.$$

Այստեղ $\frac{y_1}{x_1}$ -ի փոխարեն տեղադրելով u , կստանանք.

$$C \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} = e^{\arctg \frac{y_1}{x_1}}:$$

վերջապես, անցնելով x և y փոփոխականներին, վերջնականապես ստանում ենք.

$$C \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\arctg \frac{y-1}{x-2}}:$$

Օրինակ 2: Հետևյալ հավասարումը՝

$$y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

արդեն հնարավոր է լուծել $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$ տեղադրմամբ, քանի որ այս դեպքում h -ի և k -ի որոշման համար ծառայող հավասարումների սիստեմն անլուծելի է (այստեղ փոփոխականների գործակիցներից

կազմված $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ դետերմինանտը հավասար է զրոյի):

Այդ հավասարումը կարելի է

$$2x + y = z$$

տեղադրմամբ բերել անջատվող փոփոխականներով հավասարման: Այդ դեպքում $y' = z' - 2$ և հավասարումը բերվում է

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5} \quad \text{կամ} \quad z' = \frac{5z+9}{2z+5}$$

տեսքի: Լուծելով այն, կգտնենք.

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25} \ln|5z+9| = x + C:$$

Քանի որ $z = 2x + y$, ապա կստանանք տրված հավասարման վերջնական լուծումը

$$\frac{2}{5}(2x + y) + \frac{7}{25} \ln|10x + 5y + 9| = x + C$$

կամ

$$10y - 5x + 7 \ln|10x + 5y + 9| = C_1$$

տեսքով, այսինքն՝ y -ը՝ x -ի անբացահայտ ֆունկցիայի տեսքով:

§ 7. Առաջին կարգի գծային հավասարումներ

Ս ա հ մ ա ն ու մ: Առաջին կարգի գծային հավասարում կոչվում է այն հավասարումը, որը գծային է անհայտ ֆունկցիայի և նրա ածանցյալի նկատմամբ: Այն ունի

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$

տեսքը, որտեղ $P(x)$ -ը և $Q(x)$ -ը x -ի տրված անընդհատ ֆունկցիաներ (համ հաստատուններ) են:

(1) գծային հավասարման լուծումը: (1) հավասարման լուծումը որոնենք x -ի երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով՝

$$y = u(x)v(x): \quad (2)$$

Այդ ֆունկցիաներից մեկը կարելի է վերցնել կամայական, իսկ մյուսը կորոշվի (1) հավասարման հիման վրա:

(2) հավասարության երկու մասերը դիֆերենցելով, գտնում ենք.

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ -ի ստացած արտահայտությունը տեղադրելով (1) հավասարման մեջ, կունենանք.

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v + Puv = Q$$

կամ

$$u \left(\frac{dv}{dx} + Pv \right) + v \frac{du}{dx} = Q: \quad (3)$$

v ֆունկցիան ընտրենք այնպիսին, որ

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0: \quad (4)$$

v -ի նկատմամբ այս դիֆերենցիալ հավասարման մեջ անջատելով փոփոխականները, գտնում ենք

$$\frac{dv}{v} = -Pdx:$$

Ինտեգրելով, ստանում ենք.

$$-\ln|C_1| + \ln|v| = -\int Pdx$$

կամ

$$v = C_1 e^{-\int Pdx},$$

Քանի որ մեզ բավական է ունենալ (4) հավասարման զրոյից տարբեր որևէ լուծում, ապա որպես $v(x)$ ֆունկցիա վերցնենք

$$v(x) = e^{-\int Pdx}, \quad (5)$$

որտեղ $\int Pdx$ -ը որևէ նախնական է: Ակնհայտ է, որ $v(x) \neq 0$:

$v(x)$ -ի գտած արժեքը տեղադրելով (3) հավասարման մեջ, կստա-

նանք (հաշվի առնելով, որ $\frac{dv}{dx} + Pv = 0$).

$$v(x) \frac{du}{dx} = Q(x)$$

կամ

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

որտեղից

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C:$$

u -ն և v -ն տեղադրելով (2) բանաձևի մեջ, վերջնականապես ստանում ենք.

$$y = v(x) \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right]:$$

կամ

$$y = v(x) \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + Cv(x): \quad (6)$$

Դիտողություն: Ակնհայտ է, որ (6) արտահայտությունը չի փոխվի, եթե (5) հավասարումը որոշվող $v(x)$ ֆունկցիայի փոխարեն վերցնենք որևէ $v_1(x) = Cv(x)$ ֆունկցիա: Իրոք, (6)-ի մեջ $v(x)$ -ի փոխարեն տեղադրելով $v_1(x)$, կստանանք.

$$y = \bar{C}v(x) \int \frac{Q(x)}{\bar{C}v(x)} dx + C\bar{C}v(x):$$

Առաջին գումարելիի մեջ \bar{C} -երը կրճատվում են, երկրորդ գումարելիի մեջ $C\bar{C}$ -ն կամայական հաստատուն է, որը կնշանակենք մեկ C տառով, և նորից գալիս ենք (6) արտահայտությանը: Եթե նշանակենք

$\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx = z(x)$, ապա (6) արտահայտությունը կընդունի

$$y = v(x)\varphi(x) + Cv(x) \quad (6')$$

տեսքը: Ակնհայտ է, որ դա ընդհանուր ինտեգրալ է, քանի որ C-ն կարելի է ընտրել այնպես, որ տեղի ունենա $x = x_0$, $y = y_0$ սկզբնական պայմանը C-ի արժեքը որոշվում է

$$y_0 = v(x_0)\varphi(x_0) + Cv(x_0)$$

հավասարումից:

Օրինակ: Լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3:$$

Լուծում: Ընդունենք

$$y = uv.$$

այդ դեպքում

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v:$$

$\frac{dy}{dx}$ -ի արտահայտությունը տեղադրելով նախնական հավասարման մեջ, կունենանք.

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3,$$

$$u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v \right) + v \frac{du}{dx} = (x+1)^3: \quad (7)$$

v-ն որոշելու համար կստանանք հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0,$$

այսինքն՝

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1},$$

որտեղից

$$\ln|v| = 2\ln|x+1|,$$

կամ

$$v = (x+1)^2.$$

v ֆունկցիայի արտահայտությունը տեղադրելով (7) հավասարման մեջ, u-ն որոշելու համար ստանում ենք

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

կամ

$$\frac{du}{dx} = (x+1)$$

հավասարումը, որտեղից

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C:$$

Հետևաբար, տրված հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2:$$

Ստացված ընտանիքը ընդհանուր լուծումն է: Ինչպիսին էլ լինի (x_0, y_0) սկզբնական պայմանը, որտեղ $x_0 \neq -1$, միշտ կարելի է C-ն ընտրել այնպես, որ համապատասխան մասնավոր լուծումը բավարարի տրված սկզբնական պայմանին: Օրինակ, $y_0 = 3$, երբ $x_0 = 0$ պայմանին բավարարող մասնավոր լուծումը կգտնվի հետևյալ կերպ.

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + C(0+1)^2, \quad C = 5/2:$$

Հետևաբար, որոնվող մասնավոր լուծումը կլինի.

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2}(x+1)^2:$$

Սակայն, եթե սկզբնական պայմանն ընտրվի այնպես, որ $x_0 = -1$, ապա մենք չենք գտնի այդ պայմանին բավարարող մասնավոր լուծումը: Դա բացատրվում է նրանով, որ երբ $x_0 = -1$ $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ ֆունկցիան խզվող է և, հետևաբար, լուծման գոյության թեորեմի պայմանները պահպանված չեն:

Դիտողություն: Կիրառություններում հաճախ են պատահում հաստատուն գործակիցներով գծային հավասարումներ.

$$\frac{dy}{dx} + ay = b, \quad (8)$$

որտեղ a-ն և b-ն հաստատուններ են:

Այն կարելի է լուծել (2) տեղադրման օգնությամբ կամ փոփոխականների անջատման ճանապարհով.

$$dy = (-ay + b)dx, \quad \frac{dy}{-ay + b} = dx, \quad -\frac{1}{a} \ln|-ay + b| = x + C_1,$$

$$\ln|-ay + b| = -(ax + C^*), \quad \text{որտեղ } C^* = aC_1,$$

$$-ay + b = e^{-(ax + C^*)}, \quad y = -\frac{1}{a}e^{-(ax + C^*)} + \frac{b}{a},$$

կամ վերջնականապես

$$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$$

(որտեղ նշանակված է $-\frac{1}{a}e^{-C^*} = C$): Սա էլ հենց (8) հավասարման ընդհանուր լուծումն է:

§ 8. Բեռնուլիի հավասարումը

Գիտարկենք

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)x^n \quad (1)$$

տեսքի հավասարումը*, որտեղ $P(x)$ -ը և $Q(x)$ -ը x -ի անընդհատ ֆունկցիաներ են (կամ հաստատուններ), իսկ $n \neq 0$ և $n \neq 1$ (հակառակ դեպքում կստացվեն զծային հավասարում): Այս հավասարումը, որը կոչվում է Բեռնուլիի հավասարում, բերվում է զծային հետևյալ ձևափոխությունների միջոցով:

Հավասարման բոլոր անդամները բաժանելով y^{-n} -ի վրա, կստանանք.

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P y^{-n+1} = Q: \quad (2)$$

Այնուհետև կատարենք

$$z = y^{-n+1}$$

փոխարինումը: Այդ դեպքում

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n} \frac{dy}{dx}:$$

Այս արժեքները տեղադրելով (2) հավասարման մեջ, կունենանք

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)Pz = (-n+1)Q$$

զծային հավասարումը:

Գտնելով նրա ընդհանուր ինտեգրալը և z -ի փոխարեն տեղադրելով y^{-n+1} , կստանանք Բեռնուլիի հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը:

Օրինակ: Լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3: \quad (3)$$

* Այս հավասարմանն է բերում մարմնի շարժման մասին ինդիրը, եթե միջավայրի F դիմադրությունը արագությունից կախված է այսպես. $F = \lambda_1 v + \lambda_2 v^n$: Այդ դեպքում շարժման հավասարումը կլինի $m \frac{dv}{dt} = -\lambda_1 v - \lambda_2 v^n$ կամ $\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda_1}{m} v = -\frac{\lambda_2}{m} v^n$:

Լուծում: Բոլոր անդամները բաժանելով y^3 -ի վրա, կստանանք.

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3: \quad (4)$$

Սուծենք $z = y^2$ նոր ֆունկցիան, այդ դեպքում

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}:$$

Այս արժեքները տեղադրելով (4) հավասարման մեջ, կստանանք

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3 \quad (5)$$

զծային հավասարումը: Գտնենք նրա ընդհանուր ինտեգրալը.

$$z = uv, \quad \frac{dz}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v:$$

z -ի և $\frac{dz}{dx}$ -ի արտահայտությունները տեղադրենք (5) հավասարման մեջ.

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - 2xuv = -2x^3$$

կամ

$$u \left(\frac{dv}{dx} - 2xv \right) + v \frac{du}{dx} = -2x^3:$$

Փակագծերում հղած արտահայտությունը հավասարեցնենք զրոյի.

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0, \quad \frac{dv}{v} = 2x dx,$$

$$\ln|v| = x^2, \quad v = e^{x^2}:$$

u -ի որոշման համար ստանում ենք հետևյալ հավասարումը.

$$e^{x^2} \frac{du}{dx} = -2x^3:$$

Անջատենք փոփոխականները.

$$du = -2e^{-x^2} x^3 dx, \quad u = -2 \int e^{-x^2} x^3 dx + C:$$

Ինտեգրելով մասերով, կգտնենք.

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C, \quad z = uv = x^2 + 1 + C e^{x^2}:$$

Հետևաբար, տվյալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալն է՝

$$y^{-2} = x^2 + 1 + C e^{x^2}, \quad \text{կամ} \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + C e^{x^2}}}$$

Գիտողություն: Համանման նրան, ինչպես այդ արվել է դժային հավասարումների համար, կարելի է ցույց տալ, որ Բեռնուլիի հավասարման լուծումը կարելի է որոնել երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով՝

$$y = u(x)v(x),$$

որտեղ $v(x)$ -ը որևէ ֆունկցիա է, որը հավասար չէ զրոյի և բավարարում է $v' + Pv = 0$ հավասարմանը:

§ 9. Լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարում

Սահմանում: Հետևյալ հավասարումը՝

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

կոչվում է լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարում, եթե $M(x, y)$ -ը և $N(x, y)$ -ը անընդհատ, դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են, որոնց համար տեղի ունի

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

անընդհատ, ըստ որում $\frac{\partial M}{\partial y}$ -ը և $\frac{\partial N}{\partial x}$ -ը անընդհատ են մի որոշ տիրույթում:

Քում:

Լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարումների նտեգրումը: Ապացուցենք, որ եթե (1) հավասարման ձախ մասը լրիվ դիֆերենցիալ է, ապա տեղի ունի (2) պայմանը, և հակառակը՝ (2) պայմանին բավարարման դեպքում (1) հավասարման ձախ մասը որևէ $u(x, y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ է, այսինքն՝ (1) հավասարումն ունի

$$du(x, y) = 0 \quad (3)$$

տեսքը և, հետևաբար, նրա ընդհանուր ինտեգրալը կլինի $u(x, y) = C$:

Նախ ենթադրենք, որ (1) հավասարման ձախ մասը որևէ $u(x, y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալն է, այսինքն՝

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy;$$

այդ դեպքում

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (4)$$

Առաջին անընդհատ դիֆերենցելով ըստ y -ի, իսկ երկրորդը՝ ըստ x -ի, կստանանք.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x};$$

ենթադրելով երկրորդ ածանցյալների անընդհատությունը, կունենանք.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

այսինքն՝ (2) հավասարությունն անհրաժեշտ պայման է այն բանի համար, որ (1) հավասարման ձախ մասը լրիվ որևէ $u(x, y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ: Յույց տանք, որ այդ պայմանը և բավարար է, այսինքն, որ (2) պայմանը տեղի ունենալու դեպքում (1) հավասարման ձախ մասը որևէ $u(x, y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալն է:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \text{ արտահայտությունից գտնում ենք.}$$

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y),$$

որտեղ x_0 -ն լուծման էությունից տիրույթի ցանկացած կետի աբսցիսն է:

Ըստ x -ի ինտեգրելիս y -ը համարում ենք հաստատուն, ուստի ինտեգրման կամայական հաստատունը կարող է կախված լինել y -ից: $\varphi(y)$ ֆունկցիան ընտրենք այնպես, որ (4) անընդհատություններից երկրորդը տեղի ունենա: Գրա համար վերջին հավասարության երկու մասը դիֆերենցենք* ըստ y -ի և հավասարեցնենք $N(x, y)$ -ի.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y);$$

բայց բանի որ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, ապա կարող ենք գրել.

* $\int_{x_0}^x M(x, y) dx$ ինտեգրալը կախված է y -ից: Այս ինտեգրալի ածանցյալն ըստ y -ի գտնելու համար պետք է ենթաինտեգրալային ֆունկցիան դիֆերենցել ըստ y -ի.

$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y) dx = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx$: Դա բխում է որոշյալ ինտեգրալի՝ ըստ պարամետրի դիֆերենցման մասին կայունիցի թեորեմից (տես XI գլխի § 10):

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N, \quad N(x, y)|_{x_0}^x + \varphi'(y) = N(x, y),$$

կամ

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y):$$

Հետևաբար

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

կամ

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1:$$

Այսպիսով, $u(x, y)$ ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը.

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1:$$

Այստեղ $P(x_0, y_0)$ -ն կետ է, որի շրջակայքում գոյություն ունի (1) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը:

Այդ արտահայտությունը հավասարեցնելով C կամայական հաստատունին, կստանանք (1) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը.

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C: \quad (5)$$

Օրինակ: Տրված է հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0:$$

Ստուգենք, արդյոք այն լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարում է: Նշանակենք

$$M = \frac{2x}{y^3}, \quad N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4};$$

այդ դեպքում

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}:$$

$y \neq 0$ դեպքում (2) պայմանը տեղի ունի: Ուրեմն, տվյալ հավասարման ձախ մասը որեէ $u(x, y)$ անհայտ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալն է: Գտնենք այդ ֆունկցիան:

$$\text{Քանի որ } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}, \text{ ապա}$$

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y),$$

որտեղ $\varphi(y)$ -ը y -ի առայժմ անորոշ ֆունկցիա է:

Այս առնչությունը դիֆերենցիալ ըստ y -ի և հաշվի առնելով, որ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4},$$

գտնում ենք.

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4},$$

Հետևաբար,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{y} + C_2,$$

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_2:$$

Այսպիսով, տրված հավասարման ընդհանուր ինտեգրալն է՝

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C:$$

§ 10. Ինտեգրող բազմապատկիչ

Դիցուք

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

հավասարման ձախ մասը լրիվ դիֆերենցիալ է: Երբեմն հաջողվում է ընտրել այնպիսի $\mu(x, y)$ ֆունկցիա, որով հավասարման բոլոր անդամները բազմապատկելուց հետո հավասարման ձախ մասը դառնում է լրիվ դիֆերենցիալ: Այդպիսով ստացված հավասարման ընդհանուր լուծումը համընկնում է սկզբնական հավասարման ընդհանուր լուծման հետ. $\mu(x, y)$ ֆունկցիան կոչվում է (1) հավասարման ինտեգրող բազմապատկիչ:

μ ինտեգրող բազմապատկիչը գտնելու համար վարվում ենք հետևյալ կերպ. տրված հավասարման երկու մասը բազմապատկենք առայժմ անհայտ μ ինտեգրող բազմապատկիչով.

$$\mu M dx + \mu N dy = 0:$$

Որպեսզի վերջին հավասարումը լինի լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա հետևյալ առնչությունը.

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

այսինքն՝

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

կամ

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right);$$

Վերջին հավասարման երկու մասերը μ -ի վրա բաժանելուց հետո կստանանք.

$$M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}; \quad (2)$$

Ահնհայտ է, որ ամեն մի $\mu(x, y)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է վերջին հավասարմանը, հանդիսանում է (1) հավասարման ինտեգրող բազմապատկիչ: (2) հավասարումը x և y երկու փոփոխականների μ անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ մասնական ածանցյալներով հավասարում է: Կարելի է ապացուցել, որ որոշակի պայմաններում այն ունի անթիվ բազմություններ լուծումներ և, հետևաբար, (1) հավասարումն ունի ինտեգրող բազմապատկիչ: Բայց ընդհանուր դեպքում (2) հավասարումից $\mu(x, y)$ -ի գտնելն ավելի դժվար է, քան (1) հավասարման ինտեգրման սկզբնական խնդիրը: Միայն մի քանի մասնավոր դեպքերում է հաջողվում գտնել $\mu(x, y)$ ֆունկցիան:

Դիցուք, օրինակ, (1) հավասարումը թույլ է տալիս միայն y -ից կախված ինտեգրող բազմապատկիչ: Այդ դեպքում

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0,$$

և μ -ի որոնման համար ստանում ենք հետևյալ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M},$$

որից որոշվում է (մեկ կվադրատուրայով) $\ln \mu$ -ն և, հետևաբար, նաև μ -ն: Պարզ է, որ այդպես կարելի է վարվել միայն այն դեպքում, երբ

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \text{ արտահայտությունը կախված չէ } x\text{-ից:}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

Նման ձևով, երբ $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ -ը կախված չէ y -ից, այլ կախված է միայն x -ից, ապա հեշտ է գտնել միայն x -ից կախված ինտեգրող բազմապատկիչը:

Յրինակի լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$(y+xy^2)dx - xdy = 0:$$

Լուծում: Այստեղ $M=y+xy^2$, $N=-x$,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1+2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}:$$

Հետևաբար, հավասարման ձախ մասը լրիվ դիֆերենցիալ չէ: Տեսնենք, արդյոք չի ստացվում այդ հավասարումից միայն y -ից կախված ինտեգրող բազմապատկիչ: Նկատելով, որ

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-1 - (1+2xy)}{y+xy^2} = -\frac{2}{y},$$

եզրակացնում ենք, որ հավասարումից ստացվում է միայն y -ից կախված ինտեգրող բազմապատկիչ: Գտնում ենք այն.

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = -\frac{2}{y};$$

այստեղից

$$\ln \mu = -2 \ln y, \quad \text{այսինքն՝ } \mu = 1/y^2:$$

Տրված հավասարման բոլոր անդամները գտած μ ինտեգրող բազմապատկիչով բազմապատկելուց հետո ստանում ենք $\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$ լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարումը $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}\right)$: Լուծելով այս հավասարումը կգտնենք նրա ընդհանուր ինտեգրալը:

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0$$

կամ

$$y = -\frac{2x}{x^2 + 2C}:$$

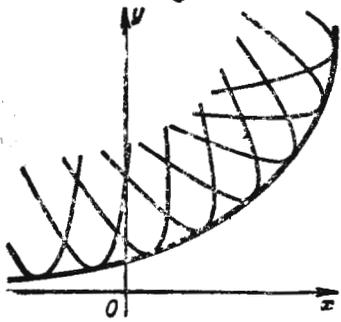
§ 11. Կորեթի ընտանիքի պարուրիչը

Դիցուք տրված է հետևյալ տեսքի հավասարումը՝

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (1)$$

որտեղ x -ը և y -ը փոփոխական դեկարտյան կոորդինատներն են, իսկ C -ն պարամետր է, որը կարող է ընդունել տարբեր ֆիքսած արժեքներ: C պարամետրի յուրաքանչյուր տրված արժեքի դեպքում (1) հավասարումը Oxy հարթության վրա որոշում է մի որոշ կոր: C -ին տա-

լով բոլոր հնարավոր արժեքները, ստանում ենք մեկ պարամետրից կախված կորերի ընտանիք կամ, ինչպես հաճախ են ասում, կորերի միապարամետր ընտանիք: Այսպիսով, (1) հավասարումը կորերի միապարամետր ընտանիքի հավասարում է (քանի որ այն պարունակում է միայն մեկ կամայական հաստատուն):



Նկ. 256

Սա համանուն է: L գիծը կոչվում է գծերի միապարամետր ընտանիքի պարուրիչ, եթե այն իր յուրաքանչյուր կետում շոշափում է ընտանիքի այս կամ այն գծին, ըստ որում L գծի տարբեր կետերում նրան շոշափում են տվյալ ընտանիքի տարբեր կորեր (Նկ. 256):

Օրինակ 1: Դիտարկենք հետևյալ գծերի ընտանիքը.

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2,$$

որտեղ R -ը հաստատուն է, C -ն՝ պարամետր:

Դա R շառավիղ և Ox առանցքի վրա կենտրոն ունեցող շրջանագծերի ընտանիք է: Ակնհայտ է, որ այդ ընտանիքի պարուրիչները կլինեն $y = R$, $y = -R$ ուղիղները (Նկ. 257):

Տրված ընտանիքի պարուրիչներին հավասարման գտնելը: Դիցուք տրված է C պարամետրից կախված կորերի

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (1)$$

ընտանիքը:

Ենթադրենք, որ այդ ընտանիքն ունի պարուրիչ, որի հավասարումը կարելի է գրել $y = \varphi(x)$ տեսքով, որտեղ $\varphi(x)$ -ը x -ի անընդհատ և դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Դիտարկենք պարուրիչին պատկանող որևէ $M(x, y)$ կետ: Այդ կետն ընկած է նաև (1) ընտանիքի որևէ կորի վրա: Այդ կորին համապատասխանում է C պարամետրի որոշակի արժեքը, որը տրված (x, y) դեպքում որոշվում է (1) հավասարումից՝ $C = C(x, y)$: Հետևաբար, պարուրիչի բոլոր կետերի համար բավարարվում է

$$\Phi(x, y, C(x, y)) = 0 \quad (2)$$

հավասարությունը: Ենթադրենք, որ $C(x, y)$ -ը դիֆերենցելի ֆունկցիա է, որը հաստատուն չէ x, y դիտարկվող արժեքների ոչ մի միջակայքում: Պարուրիչի (2) հավասարումներից կգտնենք պարուրիչի $M(x, y)$ կետում շոշափողի անկյունային գործակիցը: (2) հավասարությունը դիֆերենցենք ըստ x -ի, համարելով, որ y -ը x -ի ֆունկցիա է.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial y} \right) y' = 0$$

կամ

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_c \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right) = 0: \quad (3)$$

Այնուհետև, $M(x, y)$ կետում (1) ընտանիքի կորի շոշափողի անկյունային գործակիցը գտնում ենք

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0 \quad (4)$$

հավասարությունից (C -ն տրված կորի վրա հաստատուն է):

Ենթադրում ենք, որ $\Phi'_y \neq 0$, հակառակ դեպքում կընդունեինք x -ը որպես ֆունկցիա, իսկ y -ը արգումենտ: Քանի որ պարուրիչի K անկյունային գործակիցը հավասար է ընտանիքի կորի k անկյունային գործակցին, ապա (3)-ից և (4)-ից ստանում ենք.

$$\Phi'_c \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right) = 0:$$

Բայց քանի որ պարուրիչի վրա $C(x, y) \neq \text{const}$, ապա

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \neq 0,$$

և նրա կետերի համար իրավացի է

$$\Phi'_c(x, y, C) = 0 \quad (5)$$

հավասարությունը: Այսպիսով, պարուրիչների որոշման համար ծառայում են հետևյալ երկու հավասարումները.

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= 0, \\ \Phi'_c(x, y, C) &= 0: \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Հակառակը, եթե այդ հավասարումներից C -ն արտաբերվում ստանում ենք $y = \varphi(x)$ հավասարումը, որտեղ $\varphi(x)$ -ը դիֆերենցելի ֆունկցիա է, ըստ որում այդ կորի վրա $C \neq \text{const}$, ապա $y = \varphi(x)$ -ը պարուրիչի հավասարումն է:

Գիտողություն 1. Եթե (1) ընտանիքի համար որևէ $y = \varphi(x)$ ֆունկցիան եզակի կետերի երկրաչափական տեղի հավասարում է, այսինքն՝ այն կետերի, որտեղ $\Phi'_x = 0$, $\Phi'_y = 0$, ապա այդ կետերի կոորդինատները նույնպես բավարարում են (6) հավասարմանը:

Իրոք, եզակի կետերի կոորդինատները կարելի է արտահայտել (1) հավասարման մեջ մտնող C պարամետրի միջոցով՝

$$x = \lambda(C), \quad y = \mu(C): \quad (7)$$

Եթե այդ արտահայտությունները տեղադրենք (1) հավասարման մեջ, ապա կստանանք C -ի նկատմամբ նույնություն.

$$\Phi(\lambda(C), \mu(C), C) = 0:$$

Այս նույնությունը դիֆերենցելով ըստ C -ի, կստանանք:

$$\Phi'_x \frac{d\lambda}{dC} + \Phi'_y \frac{d\mu}{dC} + \Phi'_c = 0,$$

քանի որ ցանկացած կետերի համար տեղի ունի $\Phi'_x = 0$, $\Phi'_y = 0$ հավասարությունները, հետևաբար, նրանց համար տեղի ունի նաև $\Phi'_c = 0$ հավասարությունը:

Սրանով մենք ապացուցեցինք, որ եզակի կետերի կոորդինատները բավարարում են (6) հավասարումներին:

Եվ այսպես, (6) հավասարումները որոշում են կամ պարուրիչ, կամ (1) կորերի ընտանիքի եզակի կետերի երկրաչափական տեղ, կամ մեկի և մյուսի զուգորդությունը: Այսպիսով, ստանալով (6) հավասարումներին բավարարող կորը, անհրաժեշտ է լրացուցիչ ուսումնասիրել, հանդիսանում է այն պարուրիչ կամ եզակի կետերի երկրաչափական տեղ:

Օրինակ 2: Գտնել մեկ C պարամետրից կախված

$$(x-C)^2 + y^2 - R^2 = 0$$

շրջանագծերի ընտանիքի պարուրիչը:

Լուծում: Ընտանիքի հավասարումը դիֆերենցելով ըստ C -ի, ստանում ենք.

$$2(x-C) = 0:$$

Այս երկու հավասարումներից արտաքսելով C -ն, կստանանք

$$y^2 - R^2 = 0 \quad \text{կամ} \quad y = \pm R$$

հավասարումը:

Երկրաչափական կոնստրուկցիաներից պարզ է, որ կորերի ստացած զուգը պարուրիչ է (և ոչ թե եզակի կետերի երկրաչափական տեղ, քանի որ ընտանիքի մեջ մտնող շրջանագծերը եզակի կետեր չունեն):

Նր.

$$1\alpha - p = 0 \quad (a)$$

ուղիղների ընտանիքի պ.

չ α -ն պարամետրն է:

Լուծում: Ընտանիքի տրված հավասարումը դիֆերենցելով ըստ α -ի, կունենանք.

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0: \quad (b)$$

(a) և (b) հավասարումներից α պարամետրն արտաքսելու համար առաջինի անդամները բազմապատկենք $\cos \alpha$ -ով, երկրորդինը՝ $\sin \alpha$ -ով և առաջինից հանենք երկրորդը. այդ դեպքում կունենանք.

$$x = p \cos \alpha:$$

Այս արտահայտությունը տեղադրելով (b) հավասարության մեջ, կստանանք.

$$y = p \sin \alpha:$$

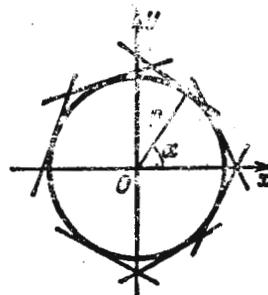
Վերջին երկու հավասարումների անդամները բարձրացնելով քառակուսի և անդամ առ անդամ զումարելով, կստանանք.

$$x^2 + y^2 = p^2:$$

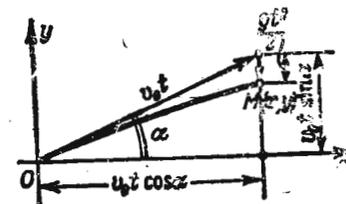
Սա շրջանագիծ է: Այն ընտանիքի պարուրիչն է (այլ ոչ թե եզակի կետերի երկրաչափական տեղ, քանի որ ուղիղ գծերը եզակի կետեր չունեն) (նկ. 258):

Օրինակ 4: Գտնել այն արկերի հետագծերի պարուրիչը, որոնք արձակված են թևղանթից v_0 արագությամբ՝ հորիզոնի նկատմամբ հրանոթի փողի տարբեր թեքության անկյունների տակ: Ըստ որում կընդունենք, որ հրանոթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ արկի հետագծերը գտնվում են Oxy հարթության վրա (օդի դիմադրությունը հաշվի չենք առնում):

Լուծում: Նախ գտնենք արկի հետագծի հավասարումն այն դեպքում, երբ հրանոթի փողը Ox առանցքի դրական ուղղության հետ կազմում է α անկյուն: Թռիչքի ժամանակ արկը միաժամանակ մասնակցում է երկու շարժումների՝ հրանոթի փողի ուղղությամբ v_0 արագությամբ հավասարաչափ շարժում և ծանրության ուժի ազդեցությամբ անկում դեպի ներքև:



Նկ. 258



Նկ. 259

Ուստի ժամանակի յուրաքանչյուր t պահին արկի M դիրքը կորոշվի

$$x = v_0 t \cos \alpha,$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

հավասարումներով: Սա հետագծի պարամետրական հավասարումն է (պարամետրն է է ժամանակը): Արտաքսելով t -ն, հետագծի հավասարումը կստանանք.

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

տեսքով. վերջապես, կատարելով $\operatorname{tg} \alpha = k$, $\frac{g}{2v_0^2} = a$ նշանակումները, կստանանք.

$$y = kx - ax^2(1+k^2); \quad (8)$$

Այս հավասարումը որոշում է ուղղագիծ առանցքով և կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ճյուղերով ներքև ուղղված պարաբոլ: k -ի տարբեր արժեքների համար կստանանք տարբեր հետագծեր: Հետևաբար, (8) հավասարումները այնպիսի պարաբոլների միապարամետրական ընտանիքի հավասարումներ են, որոնք տարբեր α անկյունների տակ և տրված v_0 սկզբնական արագության արձակված արկերի հետագծեր են (նկ. 260):

Գտնենք պարաբոլների այդ ընտանիքի պարուրիչի հավասարումը:

(8) հավասարման երկու մասերը դիֆերենցելով ըստ k -ի, կստանանք.

$$x - 2akx^2 = 0; \quad (9)$$

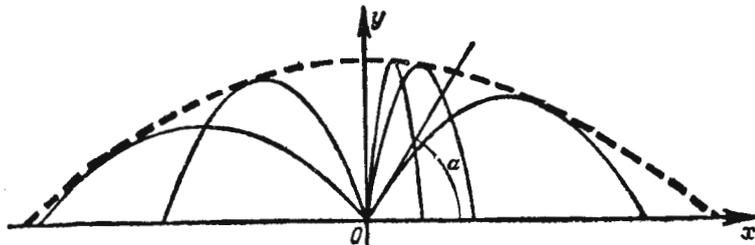
(8) և (9) հավասարումներից արտաքսելով k -ն, կստանանք.

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2;$$

Սա $(0, \frac{1}{4a})$ կետում գագաթ ունեցող այնպիսի պարաբոլի հավասարում է, որի առանցքը համընկնում է Oy առանցքի հետ: Այն եզակի կետերի երկրաչափական տեղ չէ (քանի որ (8) պարաբոլը եզակի կետեր չունի): Եվ այսպես,

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2$$

պարաբոլը հետագծերի ընտանիքի պարուրիչն է: Այն կոչվում է ա ն վ տ ա ն գ ո թ լ ա ն պ ա ր ա բ ո լ, քանի որ նրա սահմաններից դուրս գտնվող ոչ մի կետ հասանելի չէ տվյալ հրանոթից տրված v_0 սկզբնական արագության արձակված արկի համար:



նկ. 260

Օրինակ 5: Գտնել $y^2 - (x-c)^2 = 0$ կիսախորանարդ պարաբոլների ընտանիքի պարուրիչը:

Լ ու ժ ու մ: Տրված ընտանիքի հավասարումը դիֆերենցենք ըստ C պարամետրի.

$$2(x-C)=0:$$

Երկու հավասարումներից արտաքսելով C -ն, կստանանք.

$$y=0:$$

Օx առանցքը առաջին սեռի դարձի կետեր հանդիսացող եզակի կետերի երկրաչափական տեղ է (նկ. 261): Իրոք, գտնենք $y^2 - (x-C)^2 = 0$ կորի եզակի կետերը՝ C -ի ֆիքսած արժեքի դեպքում: Դիֆերենցելով ըստ x -ի և ըստ y -ի, գտնում ենք.

$$F'_x = -2(x-C) = 0;$$

$$F'_y = 3y^2 = 0;$$

Համատեղ լուծելով նախորդ երեք հավասարումները, կգտնենք եզակի կետի կոորդինատները՝ $x=C$, $y=0$. այսպիսով, տվյալ ընտանիքի յուրաքանչյուր կորը Օx առանցքի վրա ունի եզակի կետ:

C պարամետրն անընդհատ փոփոխվելիս եզակի կետերը լցնում են ամբողջ Օx առանցքը:

Օրինակ 6: Գտնել

$$(y-C)^2 - \frac{2}{3}(x-C)^3 = 0 \quad (10)$$

ընտանիքի պարուրիչը և եզակի կետերի երկրաչափական տեղը:

Լ ու ժ ու մ: (10) հավասարության երկու մասերը դիֆերենցելով ըստ C -ի, կգրտենք.

$$-2(y-C) + \frac{2}{3}3(x-C)^2 = 0$$

կամ

$$y-C - (x-C)^2 = 0; \quad (11)$$

Այժմ ստացված (11) հավասարությանից և (10) ընտանիքի հավասարումից արտաքսենք C պարամետրը: $y-C = (x-C)^2$, արտահայտությունը տեղադրելով ընտանիքի հավասարման մեջ, կստանանք.

$$(x-C)^4 - \frac{2}{3}(x-C)^3 = 0$$

կամ

$$(x-C)^3 \left[(x-C) - \frac{2}{3} \right] = 0,$$

այստեղից ստանում ենք C -ի երկու հնարավոր արժեքները և խնդրի՝ նրանց համապատասխանող երկու լուծումները:

Առաջին լուծում.

$$C=x$$

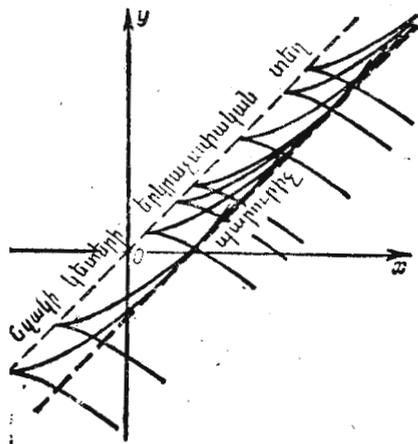
ուստի (11) հավասարումից գտնում ենք.

$$y-x-(x-x)^2=0$$

կամ

$$y=x:$$

Ստացանք երկու ուղիղ՝ $y=x$ և $y=x-\frac{2}{9}$: Սրանցից առաջինը եզակի կետերի՝ երկրաչափական տեղ է, իսկ երկրորդը՝ պարուրիչը (նկ. 262):



Նկ. 262

Երկրորդ լուծում.

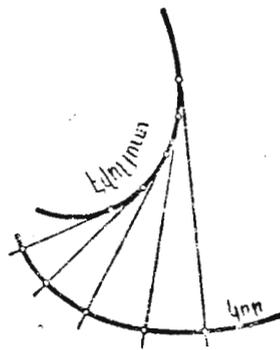
$$C=x-\frac{2}{3}$$

ուստի (11) հավասարումից գտնում ենք.

$$y-x+\frac{2}{3}-\left[x-x+\frac{2}{3}\right]^2=0$$

կամ

$$y=x-\frac{2}{9}:$$



Նկ. 263

Դիտողություն 2: VI գլխի § 7-ում ապացուցվել էր, որ կորի նորմալն այդ կորի էվոլյուտի շոշափողն է: Հետևաբար, տվյալ կորի նորմալների ընտանիքը միաժամանակ այդ կորի էվոլյուտի շոշափողների ընտանիքն է: Այսպիսով, կորի էվոլյուտը այդ կորի նորմալների ընտանիքի պարուրիչն է (նկ. 263):

Այս դիտողությունը թույլ է տալիս էվոլյուտը գտնելու ևս մեկ մեթոդ. էվոլյուտի հավասարումը ստանալու համար պետք է նախ գտնել այդ կորի բոլոր նորմալների ընտանիքը, և այնուհետև գտնել այդ ընտանիքի պարուրիչը:

§ 12. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման եզակի լուծումները

Դիցուք

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \quad (1)$$

դիֆերենցիալ հավասարման ունի

$$\Phi(x, y, C)=0 \quad (2)$$

ընդհանուր ինտեգրալը:

Ենթադրենք, որ (2) հավասարմանը համապատասխանող ինտեգրալային կորերի ընտանիքն ունի պարուրիչ: Ապացուցենք, որ այդ պարուրիչն էլ (1) դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորն է:

Իրոք, իր յուրաքանչյուր կետում պարուրիչը շոշափում է ընտանիքի որևէ կորին, այսինքն՝ նրա հետ ունի ընդհանուր շոշափող: Հետևաբար, յուրաքանչյուր ընդհանուր կետում պարուրիչը և ընտանիքի կորն ունեն x, y, y' մեծությունների միևնույն արժեքները: Բայց ընտանիքին պատկանող կորի համար x, y, y' թվերը բավարարում են (1) հավասարմանը: Հետևաբար, այդ նույն հավասարմանը բավարարում են պարուրիչի յուրաքանչյուր կետի աբսցիսը, օրդինատը և անկյունային գործակիցը: Բայց սա էլ նշանակում է, որ պարուրիչը ինտեգրալային կոր է, իսկ նրա հավասարումը տվյալ դիֆերենցիալ հավասարման լուծում է:

Քանի որ, ընդհանրապես ասած, պարուրիչը ինտեգրալային կոր չէ, ապա նրա հավասարումը չի կարող ստացվել (2) ընդհանուր ինտեգրալից՝ C -ի ոչ մի մասնավոր արժեքի դեպքում: Դիֆերենցիալ հավասարման այն լուծումը, որը C -ի ոչ մի արժեքի դեպքում հնարավոր չէ ստանալ ընդհանուր ինտեգրալից և որի գրաֆիկը ընդհանուր լուծման մեջ մտնող ինտեգրալային կորերի ընտանիքի պարուրիչն է, կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման եզակի լուծում:

Դիցուք հայտնի է

$$\Phi(x, y, C)=0$$

ընդհանուր ինտեգրալը. այս հավասարումից և $\Phi'_c(x, y, C)=0$ հավասարումից արտաքսելով C -ն, կստանանք $\psi(x, y)=0$ հավասարումը: Սթե այս ֆունկցիան բավարարում է դիֆերենցիալ հավասարմանը (և չի պատկանում (2) ընտանիքին), ապա այս էլ հենց եզակի ինտեգրալն է:

Նշենք, որ եզակի լուծում պատկերող կորի յուրաքանչյուր կետում անցնում են առնվազն երկու ինտեգրալային կորեր, այսինքն՝ եզակի լուծման յուրաքանչյուր կետում լուծման միակույթությունը խախտվում է:

Նկատենք, որ այն կետը, որտեղ խախտվում է դիֆերենցիալ հավասարման լուծման միակությունը, այսինքն՝ այն կետը, որով անցնում են առնվազն երկու ինտեգրալային կորեր, կոչվում է եզակի կետ*։ Այսպիսով, եզակի լուծումը բաղկացած է եզակի կետերից։

Օրինակ։ Գտնել

$$y^2(1+y'^2)=R^2$$

հավասարման եզակի լուծումը։

Լուծում։ Գտնենք հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը։ Լուծենք հավասարումը y' -ի նկատմամբ։

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y} :$$

Անջատելով փոփոխականները, կստանանք.

$$\frac{y dy}{\pm \sqrt{R^2 - y^2}} = dx :$$

Այստեղից, ինտեգրելով, գտնում ենք ընդհանուր ինտեգրալը.

$$(x-C)^2 + y^2 = R^2 :$$

Հեշտ է տեսնել, որ ինտեգրալային գծերի ընտանիքը արսցիսների առանցքի վրա ընկած կենտրոններով շրջանագծերի ընտանիք է։ Կորերի ընտանիքի պարուրիչ կլինի $y = \pm R$ ուղիղների զույգը։ $y = \pm R$ ֆունկցիաները բավարարում են (*) դիֆերենցիալ հավասարմանը։ Հետևաբար դա եզակի ինտեգրալ է։

§ 13. Կլերոյի հավասարումը

Դիտարկենք այսպես կոչված Կլերոյի հավասարումը.

$$y = x \frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) : \quad (1)$$

Այն ինտեգրվում է օժանդակ պարամետր մուծելու օգնությամբ։ Այն է,

ընդունենք $\frac{dy}{dx} = p$. այդ դեպքում (1) հավասարումը կընդունի

$$y = xp + \psi(p) \quad (1')$$

տեսքը։

* Լուծման գոյության տիրույթի եզրային կետերը նույնպես անվանում են եզակի։ Տիրույթի այնպիսի ներքին կետը, որով անցնում է դիֆերենցիալ հավասարման միակ ինտեգրալային կորը, կոչվում է սովորական կետ։

Վերջին հավասարման բոլոր անդամները դիֆերենցիալ ըստ x -ի, նկատի ունենալով, որ $P = \frac{dy}{dx}$ x -ի ֆունկցիա է.

$$p = x \frac{dp}{dx} + p + \psi'(p) \frac{dp}{dx}$$

կամ

$$[x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0 :$$

Յուրաքանչյուր բազմապատկիչ հավասարեցնելով զրոյի, կստանանք.

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad (2)$$

$$x + \psi'(p) = 0 : \quad (3)$$

1) Ինտեգրելով (2) հավասարությունը, ստանում ենք $p = C$ ($C = \text{const}$)։ p -ի այս արժեքը տեղադրելով (1') հավասարման մեջ, կգտնենք նրա ընդհանուր ինտեգրալը՝

$$y = xC + \psi(C), \quad (4)$$

որը երկրաչափական տեսակետից ներկայացնում է ուղիղ գծերի ընտանիք։

2) Եթե (3) հավասարումից գտնենք p -ն որպես x -ի ֆունկցիա և այն տեղադրենք (1') հավասարման մեջ, ապա կստանանք

$$y = xp(x) + \psi[p(x)] \quad (1'')$$

ֆունկցիան, որը, ինչպես հեշտ է ցույց տալ, (1) հավասարման լուծումն է։

Իրոք, ըստ (3) հավասարության գտնում ենք.

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}, \text{ այսինքն՝ } \frac{dy}{dx} = p :$$

Ուստի, (1'') ֆունկցիան տեղադրելով (1) հավասարման մեջ, ստանում ենք

$$xp + \psi(p) = xp + \psi(p)$$

նույնությունը։

(1'') լուծումը չի ստացվում (4) ընդհանուր ինտեգրալից C -ի և ոչ մի արժեքի դեպքում։ Այս եզակի լուծում է. ստացվում է

$$\left. \begin{aligned} y &= xp + \psi(p), \\ x + \psi'(p) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Հավասարումներից p -ն արտաքսելով, կամ որ միևնույնն է,

$$y = xC + \psi(C),$$

$$x + \psi'_c(C) = 0$$

Հավասարումներից C -ն արտաքսելով: Հետևաբար, y կերպի հավասարման եզակի լուծումը որոշում է (4) ընդհանուր ինտեգրալով տրված սեղիդնեբրի ընտանիքի պարբերիչը:

Օրինակ: Գտնել

$$y = x \frac{dy}{dx} + \frac{a \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

Հավասարման ընդհանուր և եզակի ինտեգրալները:

Լուծում: Ընդհանուր ինտեգրալը կստանանք, եթե $\frac{dy}{dx} = p$ -ը փոխարինենք C -ով.

$$y = xC + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}:$$

Եզակի լուծումը ստանալու համար վերջին հավասարումը դիֆերենցենք ըստ C -ի,

$$x + \frac{a}{(1+C^2)^{3/2}} = 0:$$

Եզակի լուծումը (պարուրիչի հավասարում) ստացվում է պարամետրական տեսքով (որտեղ պարամետր է C -ն).

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{(1+C^2)^{3/2}}, \\ y = \frac{aC^3}{(1+C^2)^{3/2}}: \end{cases}$$

Արտաքսելով C պարամետրը, կարող ենք ստանալ x -ի և y -ի անմիջական կախումը: Յուրաքանչյուր հավասարման երկու

մասը բարձրացնելով $\frac{2}{3}$ աստիճան և անդամ

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

առ անդամ գումարելով ստացված հավասարումները, կգտնենք եզակի լուծումը հետևյալ տեսքով.

Սա աստիճիդ է: Բայց ընտանիքի պարուրիչն (հետևաբար, նաև եզակի լուծում) է ոչ թե ամբողջ աստիճիդը, այլ միայն նրա ձախ կեսը (քանի որ պարուրիչի պարամետրական հավասարումներից երևում է, որ $x \leq 0$) (նկ. 264):

§ 14. Լագրանժի հավասարումը

Լագրանժի հավասարում կոչվում է

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \quad (1)$$

տեսքի հավասարումը, որտեղ φ -ն և ψ -ն $\frac{dy}{dx}$ -ի հայտնի ֆունկցիաներ են:

Այս հավասարումը y -ի և x -ի նկատմամբ գծային է: Նախորդ պարագրաֆում քննարկված y կերպի հավասարումը Լագրանժի հավասարման մասնավոր դեպքն է, երբ $\varphi(y') \equiv y'$: Լագրանժի հավասարման ինտեգրումը կատարվում է p օժանդակ պարամետր մտցնելու օգնությամբ: Ընդունենք $y' = p$. այս դեպքում սկզբնական հավասարումը կգրվի հետևյալ տեսքով.

$$y = x\varphi(p) + \psi(p): \quad (1')$$

Դիֆերենցելով ըստ x -ի, կստանանք.

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}$$

կամ

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}, \quad (1'')$$

Այս հավասարումից կարելի է միանգամից գտնել մի քանի լուծումներ. այն դառնում է նույնություն $p_0 - \varphi(p_0) = 0$ պայմանին բավարարող ցանկացած $p = p_0$ հաստատուն արժեքի դեպքում: Իրոք, p -ի հաստատուն արժեքի համար $\frac{dp}{dx} \equiv 0$, և (1'') հավասարման երկու մասերը դառնում են զրո:

Յուրաքանչյուր $p = p_0$, այսինքն՝ $\frac{dy}{dx} = p_0$ արժեքին համապատաս-

խանող լուծումը x -ի գծային ֆունկցիա է (քանի որ $\frac{dy}{dx}$ ածանցյալը հաստատուն է միայն գծային ֆունկցիաների համար): Այս ֆունկցիան գտնելու համար բավական է (1') հավասարման մեջ տեղադրել $p = p_0$ արժեքը.

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0):$$

Եթե պարզվում է, որ կամայական հաստատունի ոչ մի արժեքի դեպքում այդ լուծումը չի ստացվում ընդհանուրից, ապա այն կլինի եզակի լուծում:

Այժմ գտնենք ընդհանուր լուծումը: Դրա համար (1'')

§ 15. Օրթոգոնալ և իզոգոնալ հետագծեր

$$\frac{dx}{dp} - x \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

տեսքով և x -ը դիտարկենք որպես p -ի ֆունկցիա: Այս դեպքում ստացված հավասարումը կլինի p -ի x ֆունկցիայի նկատմամբ գծային դիֆերենցիալ հավասարում:

Լուծելով այն, կգտնենք.

$$x = \omega(p, C): \quad (2)$$

(1') և (2) հավասարումներից արտաքսելով p պարամետրը, կստանանք (1) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը հետևյալ տեսքով

$$\Phi(x, y, C) = 0:$$

Օրինակ: Տրված է հետևյալ հավասարումը.

$$y = xy'^2 + y'^2: \quad (1)$$

Ընդունելով $y' = p$, կունենանք

$$y = xp^2 + p^2: \quad (1')$$

Դիֆերենցելով ըստ x -ի, կստանանք

$$p = p^2 + [2xp + 2p] \frac{dp}{dx}: \quad (1'')$$

Գտնենք եզակի լուծումները: Քանի որ $p = p^2$, երբ $p_0 = 0$ և $p_1 = 1$, ապա լուծումները կլինեն [տես (1')]

$$y = x \cdot 0^2 + 0^2, \quad \text{այսինքն՝} \quad y = 0$$

$$\text{և} \quad y = x + 1$$

գծային ֆունկցիաները:

Այդ ֆունկցիաները կլինեն՝ արդյոք մասնավոր կամ եզակի լուծումներ, մենք կտեսնենք ընդհանուր ինտեգրալը գտնելուց հետո: Այն որոշելու համար (1'') հավասարումը գրենք

$$\frac{dx}{dp} - x \frac{2}{1-p} = \frac{2}{1-p}$$

տեսքով և x -ը դիտարկենք որպես p անկախ փոփոխականի ֆունկցիա: Ինտեգրելով ստացված գծային (x -ի նկատմամբ) հավասարումը, գտնում ենք.

$$x = -1 + \frac{C^2}{(p-1)^2}: \quad (II)$$

p -ն արտաքսելով (I) և (II) հավասարումներից, կստանանք ընդհանուր ինտեգրալը.

$$y = (C + \sqrt{x+1})^2:$$

Տրված հավասարման եզակի ինտեգրալը կլինի

$$y = 0,$$

քանի որ այս լուծումը չի ստացվում ընդհանուրից՝ C -ի ոչ մի արժեքի դեպքում:

$y = x + 1$ ֆունկցիան էլ ոչ թե եզակի, այլ մասնավոր լուծում է. այն ստացվում է ընդհանուր լուծումից, երբ $C = 0$:

Դիցուք ունենք միապարամետր կորերի

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (1)$$

ընտանիք:

Այն գծերը, որոնք տրված (1) ընտանիքի բոլոր կորերը հատում են հաստատուն անկյան տակ, կոչվում են իզոգոնալ հետագծեր: Եթե այդ անկյունն ուղիղ է, ապա հետագծերը կոչվում են օրթոգոնալ հետագծեր:

Օրթոգոնալ հետագծեր: Գտնենք օրթոգոնալ հետագծերի հավասարումը: Արտաքսելով C պարամետրը

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

և

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

հավասարումներից, գտնենք տվյալ կորերի ընտանիքի դիֆերենցիալ հավասարումը:

Դիցուք այդ դիֆերենցիալ հավասարումն է

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0: \quad (1')$$

Այստեղ $\frac{dy}{dx}$ -ը $M(x, y)$ կետում ընտանիքի կորի շոշափողի անկյունային փորձակիցն է: Քանի որ $M(x, y)$ կետով անցնող օրթոգոնալ հետագիծը ուղղահայաց է ընտանիքի կորին, ապա նրա շոշափողի $\frac{dy_T}{dx}$ ան-

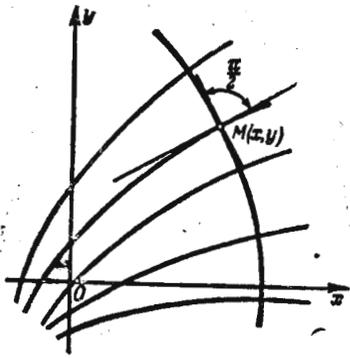
կյունային գործակիցը $\frac{dy}{dx}$ -ի հետ կապված է

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\frac{dy_T}{dx}} \quad (2)$$

առնչությունը (նկ. 265):

Այս արտահայտությունը տեղադրելով (1') հավասարման մեջ և բաց թողնելով T ինդեքսը, կստանանք կամայական (x, y) կետի կոորդինատների և այդ կետում օրթոգոնալ հետագծի անկյունային գործակիցի միջև եղած առնչությունը, այսինքն՝ օրթոգոնալ հետագծերի դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0: \quad (3)$$



Նկ. 265

Այս հավասարման

$$\Phi_1(x, y, C) = 0$$

ընդհանուր ինտեգրալը տալիս է օրթոգոնալ հետագծերի ընտանիքը:

Օրթոգոնալ հետագծերի հետ հարկ է լինում գործ ունենալ, օրինակ, հեղուկի հարթ հոսքը քննարկելիս:

Ընդունենք, որ հարթության վրա հեղուկի հոսքը կատարվում է այնպես, որ Oxy հարթության յուրաքանչյուր կետում որոշված է շարժման արագության

$v(x, y)$ վեկտորը: Եթե այս վեկտորը կախված է միայն հարթության վրա կետի դիրքից, բայց կախված չէ ժամանակից, ապա շարժումը կոչվում է ստացիոնար կամ կայունացված: Մենք կքննարկենք հենց այսպիսի շարժումը: Բացի այդ, կընդունենք, որ գոյություն ունի արագությունների պոտենցիալ, այսինքն՝ այնպիսի $u(x, y)$ ֆունկցիա, որի՝ ըստ x-ի և ըստ y-ի մասնակի ածանցյալները հավասար են կոորդինատային առանցքների վրա $v(x, y)$ և վեկտորի $v_x(x, y)$ և $v_y(x, y)$ պրոյեկցիաներին.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v_y \quad (4)$$

$$u(x, y) = C \quad (5)$$

ընտանիքի գծերը կոչվում են էկվիպոտենցիալ գծեր (այսինքն՝ հավասար պոտենցիալի գծեր):

Այն գծերը, որոնց բոլոր կետերում շոշափողները համընկնում են $v(x, y)$ վեկտորի ուղղության հետ, կոչվում են հոսքի գծեր և տալիս են շարժվող կետերի հետագծերը: Յուրաքանչյուր, որ հոսքի գծերը հենց էկվիպոտենցիալ գծերի ընտանիքի օրթոգոնալ հետագծերն են (նկ. 266):

Դիցուք φ -ն v արագության վեկտորի կազմած անկյունն է Ox առանցքի հետ: Այս դեպքում (4) առնչության հիման վրա

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = |v| \cos \varphi, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = |v| \sin \varphi,$$

այստեղից գտնում ենք հոսքի գծի անկյունային գործակիցը.



Նկ. 266

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}}: \quad (6)$$

էկվիպոտենցիալ գծի շոշափողի անկյունային գործակիցը կստանանք (5) առնչությունն ըստ x-ի դիֆերենցելով.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

որտեղից

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}: \quad (7)$$

Այսպիսով, էկվիպոտենցիալ գծի շոշափողի անկյունային գործակիցը հոսքի գծի շոշափողի անկյունային գործակիցին հակադարձ է ըստ մեծության և հակադիր է ըստ նշանի: Այստեղից էլ հետևում է, որ էկվիպոտենցիալ գծերը և հոսքի գծերը փոխադարձ օրթոգոնալ են:

Էլեկտրական կամ մագնիսական դաշտի դեպքում էկվիպոտենցիալ գծերի ընտանիքի օրթոգոնալ հետագծեր են ծառայում այդ դաշտի ուժագծերը:

Օրինակ 1: Գտնել

$$y = Cx^2$$

պարաբոլների ընտանիքի օրթոգոնալ հետագծերը:

Լուծում: Գրենք ընտանիքի դիֆերենցիալ հավասարումը

$$y' = 2Cx:$$

Արտաքսելով C-ն, կստանանք.

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}:$$

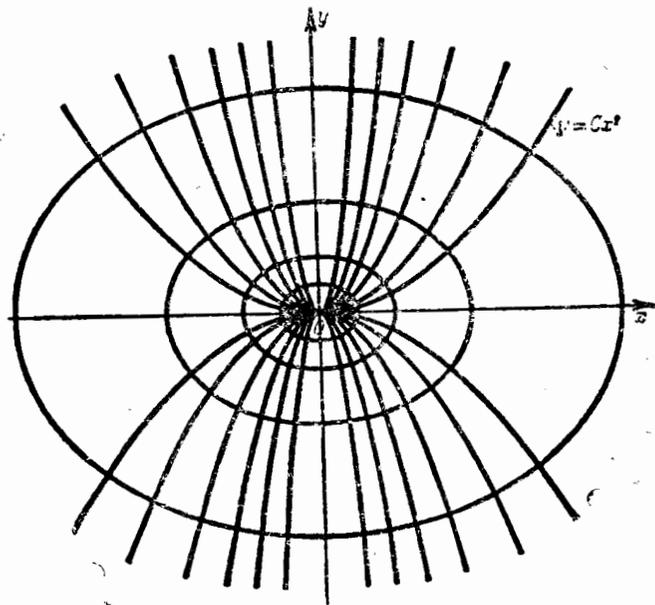
Այստեղ y' -ը փոխարինելով $-\frac{1}{y}$ -ով, կստանանք օրթոգոնալ հետագծերի ընտանիքի դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$-\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x} \quad \text{կամ} \quad ydy = -\frac{xdx}{2}:$$

Նրա ընդհանուր ինտեգրալն է.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C^2:$$

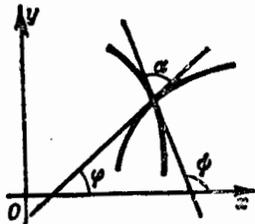
Հետևաբար, տրված պարաբոլների ընտանիքի օրթոգոնալ հետագծեր կլինեն $a = 2C$, $b = C\sqrt{2}$ կիսաառանցքներով մի որոշ էլիպսների ընտանիքը (նկ. 267):



Նկ. 267

Ի զ ո գ ո ն ա լ հ ե տ ա գ ծ ե ր: Դիցուք հետագծերը տվյալ ընտանիքի կորերը հատում են α անկյան տակ, ընդ որում $\operatorname{tg} \alpha = k$:

Ընտանիքի կորերի (Նկ. 268) շոշափողի $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$ անկյունային գործակիցը և իզոգոնալ հետագծի $\frac{dy_T}{dx} = \operatorname{tg} \psi$ անկյունային գործակիցը կապված են



Նկ. 268

առնչությամբ:

Այս արտահայտությունը տեղադրելով (1') հավասարման մեջ և բաց թողնելով T ինդեքսը, կստանանք իզոգոնալ հետագծերի դիֆերենցիալ հավասարումը:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \psi}$$

այսինքն՝

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k \frac{dy_T}{dx} + 1} \quad (2')$$

Օրինակ 2: Գտնել

$$y = Cx$$

ուղիղների ընտանիքի իզոգոնալ այն հետագծերը, որոնք տրված ընտանիքի հետագծերը հատում են այնպիսի α անկյան տակ, որի տանգենսը՝ $\operatorname{tg} \alpha = k$:

Լ ու ծ ու մ: Գրենք տրված ընտանիքի դիֆերենցիալ հավասարումը: (8) հավասարումը դիֆերենցելով ըստ x-ի, գտնում ենք

$$\frac{dy}{dx} = C:$$

Մյուս կողմից, նույն հավասարումից

$$C = \frac{y}{x}:$$

Հետևաբար, տվյալ ընտանիքի դիֆերենցիալ հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

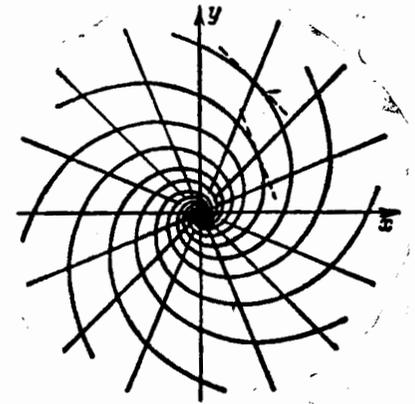
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}:$$

Օգտվելով (2') առնչությունից, կստանանք իզոգոնալ հետագծերի դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$\frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k \frac{dy_T}{dx} + 1} = \frac{y}{x}:$$

Այստեղից, բաց թողնելով T ինդեքսը, գտնում ենք.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k + \frac{y}{x}}{1 - k \frac{y}{x}}:$$



Նկ. 269

Թնտեղրելով այս համասեռ հավասարումը, ստանում ենք.

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln C \quad (9)$$

ընդհանուր ինտեգրալը, որը և որոշում է իզոգոնալ հետագծերի ընտանիք: Պարզելու համար, թե որ կորերն են մտնում այդ ընտանիքի մեջ, անցնենք բևեռային կոորդինատներին.

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho:$$

Այս արտահայտությունը տեղադրելով (9) հավասարության մեջ, կստանանք.

$$\ln \rho = \frac{1}{k} \varphi + \ln C$$

կամ

$$\rho = Ce^{\frac{\varphi}{k}}$$

Հետևաբար, իզոգոնալ հետագծերի ընտանիքը լոգարիթմական սպիրալների ընտանիք է (նկ. 269)։

§ 16. Բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ (ընդհանուր հասկացություններ)

Ինչպես արդեն նշվեց վերևում (տես § 2), n-րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը սիմվոլիկորեն կարելի է գրել

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

կամ, եթե այն կարելի է լուծել n-րդ կարգի ածանցյալի նկատմամբ՝

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1')$$

տեսքով։

Այս դիֆերենցիալ հավասարումները ենթարկվում ենք միայն բարձր կարգի այնպիսի հավասարումներ, որոնց կարելի է լուծել բարձր կարգի ածանցյալի նկատմամբ։ Այդպիսի հավասարումների համար տեղի ունի լուծման գոյության և միակության թեորեմը, որը նման է առաջին կարգի հավասարման լուծման մասին համապատասխան թեորեմին։

Թեորեմ 16. Եթե

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

հավասարման մեջ $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ֆունկցիան և նրա մասնակի ածանցյալներն ըստ $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ արգումենտների անընդհատ են

$$x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

արժեքները պարունակող որևէ տիրույթում, ապա գոյություն ունի տրված հավասարման միակ $y = y(x)$ լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

$$\left. \begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \\ &\dots \\ y^{(n-1)}_{x=x_0} &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Այս պայմանները կոչվում են սկզբնական պայմաններ։ Այս թեորեմի ապացուցումը դուրս է գալիս սույն գրքի շրջանակներից։ Եթե դիտարկենք

$$y'' = f(x, y, y'),$$

երկրորդ կարգի հավասարումը, ապա երբ $x = x_0$ լուծման համար սկզբնական պայմաններ կլինեն.

$$y = y_0, y' = y'_0,$$

որտեղ x_0 -ն, y_0 -ն, y'_0 -ը տրված թվեր են։ Այդ պայմանների երկրաչափական իմաստը հետևյալն է. հարթության (x_0, y_0) կետով անցնում է շոշափողի տրված y'_0 թեքության անկյան տանգենտն ունեցող միակ կորը։ Այնուհետև, սրանից հետևում է, որ եթե հաստատուն x_0 և y_0 դեպքում տանք y'_0 տարբեր արժեքներ, ապա կստանանք տրված կետով անցնող տարբեր թեքության անկյուններով անթիվ բազմությամբ ինտեգրալային կորեր։

Այժմ մուծենք n-րդ կարգի հավասարման ընդհանուր լուծման գաղափարը։

Սահմանում։ n-րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծում կոչվում է n հատ C_1, C_2, \dots, C_n կամայական հաստատուններից կախված այնպիսի

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

ֆունկցիան, որ

ա) այն բավարարում է հավասարմանը՝ C_1, C_2, \dots, C_n հաստատունների ցանկացած արժեքների դեպքում.

բ)

$$\begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \\ &\dots \\ y^{(n-1)}_{x=x_0} &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

տրված սկզբնական արժեքների դեպքում C_1, C_2, \dots, C_n հաստատունները կարելի է ընտրել այնպես, որ $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ ֆունկցիան բավարարի այդ պայմաններին (ենթադրելով, որ $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ սկզբնական արժեքները պատկանում են այն տիրույթին, որում տեղի ունեն լուծման գոյության պայմանները)։

Ընդհանուր լուծումը անբացահայտ որոշող $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ տեսքի առնչությունը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալ։

Ամեն մի ֆունկցիա, որը ստացվում է ընդհանուր լուծումից՝ C_1, C_2, \dots, C_n հաստատունների կոնկրետ արժեքների դեպքում, կոչվում է

մասնավոր լուծում: Մասնավոր լուծման գրաֆիկ կոչվում է տվյալ դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորը:

Լուծել (ինտեգրել) n -րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը, նշանակում է.

1) գտնել նրա ընդհանուր լուծումը (եթե սկզբնական պայմաններ տրված չեն) կամ

2) գտնել հավասարման այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է տրված սկզբնական պայմաններին (եթե այդպիսիք կան):

Հաջորդ պարագրաֆներում կշարադրվեն n -րդ կարգի տարբեր հավասարումների լուծման մեթոդները:

§ 17. $y^{(n)}=f(x)$ տեսքի հավասարում

n -րդ կարգի պարզագույն հավասարում է

$$y^{(n)}=f(x) \tag{1}$$

տեսքի հավասարումը:

Գտնենք այդ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Այդ և ձախ մասերն ինտեգրելով ըստ x -ի և ուշադրություն դարձնելով, որ $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$, կստանանք.

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x) dx + C_1,$$

որտեղ x_0 -ն x -ի ցանկացած ֆիքսած արժեքն է, իսկ C_1 -ը՝ ինտեգրման հաստատունը:

Ինտեգրելով մեկ անգամ ևս, կստանանք.

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^x f(x) dx \right) dx + C_1(x-x_0) + C_2:$$

Շարունակելով, վերջապես կստանանք (n ինտեգրումից հետո) ընդհանուր ինտեգրալի արտահայտությունը.

$$y = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx \dots dx + \frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n:$$

Որպեսզի ստանանք

$$y_{x=x_0} = y_0, \quad y'_{x=x_0} = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնավոր լուծումը, բավական է ընդունել

$$C_n = y_0, \quad C_{n-1} = y'_0, \quad \dots, \quad C_1 = y_0^{(n-1)}:$$

Օրինակ 1: Գտնել $y'' = \sin(kx)$ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 1$$

սկզբնական պայմաններին:

Լուծում:

$$y' = \int_0^x \sin kx dx + C_1 = -\frac{\cos kx - 1}{k} + C_1,$$

$$y = -\int_0^x \left(\frac{\cos kx - 1}{k} \right) dx + \int_0^x C_1 dx + C_2$$

կամ

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + \frac{x}{k} + C_1 x + C_2:$$

Սա ընդհանուր ինտեգրալն է: Տրված սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնավոր լուծումը ստանալու համար բավական է որոշել C_1 և C_2 համապատասխան արժեքները:

$$y_{x=0} = 0 \text{ պայմանից գտնում ենք } C_2 = 0:$$

$$y'_{x=0} = 1 \text{ պայմանից գտնում ենք } C_1 = 1:$$

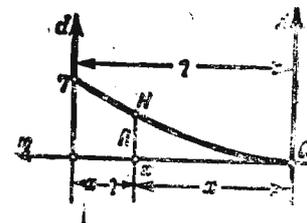
Այսպիսով, որոնելի մասնավոր լուծումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + x \left(\frac{1}{k} + 1 \right):$$

Քննարկված տիպի դիֆերենցիալ հավասարումները հանդիպում են հեծանի ծովան տեսության մեջ:

Օրինակ 2: Գիտարկենք առանցքային պրիզմայաձև հեծանը, որը ծովում է ինչպես անընդհատ բաշխված (կշիռ, բեռնվածություն), այնպես էլ համակենտրոնացված արտաքին ուժերի ազդեցության տակ: ՕՃ առանցքն ուղղենք հորիզոնական, հեծանի առանցքով՝ նրա շրջաֆորմացված վիճակում, ՕԳ առանցքը՝ ուղղաձիգ դեպի ներքև (նկ. 270):

Հեծանի վրա ազդող յուրաքանչյուր ուժ (օրինակ, հեծանի բեռնվածությունը, հենարանների հակազդումը) հեծանի լայնակի որևէ հատույթի նկատմամբ ունի մոմենտ, որը հավասար է ուժի և տվյալ հատույթից ուժի կիրառման կետի ունեցած հեռավորության արտադրյալին: Հեծանի այն մասի վրա կիրառված բոլոր ուժերի մոմենտների $M(x)$ գումարը, որն ունի x բացիսը և դասավորված է տվյալ հատույթի մի կողմում, կոչվում է հեծանի ծոռը մոմենտ տվյալ հատույթի նկատմամբ: Նյութերի դիմադրության դաս-



Նկ. 270

ընթացում ապացուցվում է, որ հեծանի ծոռը մոմենտը հավասար է $\frac{EJ}{R}$, որտեղ E -ն այսպես կոչված առանցքային մոդուլն է, որը կախված է հեծանի նյութից, J -ն հեծանի լայնակի հատույթի մակերեսի իներցիայի մոմենտն է լայնակի հատույթի մակերեսի ծանրության կենտրոնով անցնող հորիզոնական գծի նկատմամբ, R -ը ծոված հեծանի առանցքի կորույթի շառավիղն է, որն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով (գլ. VI, § 6).

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

Այսպիսով, հեծանի ծոված առանցքի դիֆերենցիալ հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ} \quad (2)$$

Եթե համարենք, որ դեֆորմացիաները փոքր են և որ ծոված ժամանակ հեծանի առանցքի շոշափողները Ox առանցքի հետ կազմում են փոքր անկյուն, ապա y'^2 փոքր մեծությունը կարող ենք արհամարհել և ընդունել

$$R = 1 \cdot y''$$

Այս դեպքում ծոված հեծանի դիֆերենցիալ հավասարումը կընդունի

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ} \quad (2')$$

տեսքը, որը (1) տեսքի հավասարում է:

Օրինակ 3: Հեծանն անշարժ ամրացված է O ծայրում և ենթարկվում է ամրացման տեղից l հեռավորության վրա գտնվող հեծանի L ծայրին կիրառված P կենտրոնացված ուղղաձիգ ուժի ազդեցությանը (նկ. 270): Հեծանի կշիռն արհամարհում ենք:

Գիտարկենք $N(x)$ կետում հատույթը: Տվյալ դեպքում N հատույթի նկատմամբ ծող մոմենտը հավասար կլինի

$$M(x) = (l-x)P:$$

(2') դիֆերենցիալ հավասարումը կընդունի

$$y'' = \frac{P}{EJ}(l-x)$$

տեսք:

Սկզբնական պայմաններն են. երբ $x=0$ y ճկվածքը հավասար է զրոյի և հեծանի ծրուված առանցքի շոշափողը համընկնում է Ox առանցքին, այսինքն՝ $y_{x=0}=0$, $y'_{x=0}=0$: Ինտեգրելով հավասարումը, կգտնենք.

$$y' = \frac{P}{EJ} \int_0^x (l-x) dx = \frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$y = \frac{P}{2EJ} \left(lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (3)$$

Մասնավորապես, (3) բանաձևից որոշվում է հեծանի L ծայրում եղած h ճկվածքը.

$$h = y_{x=L} = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

§ 18. Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների մի քանի տիպեր, որոնք բերվում են առաջին կարգի հավասարումների:

Խնդիր երկրորդ տիպերական արագության վերաբերյալ

1. Հետևյալ տեսքի հավասարումը՝

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad (1)$$

բացահայտ կերպով չի պարունակում որոնվող y ֆունկցիան:

Լուծում: $\frac{dy}{dx}$ անջատելով նշանակենք p -ով, այսինքն՝ ընդունենք

$$\frac{dy}{dx} = p: \text{ Այդ դեպքում } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}:$$

Անջատելով (1) հավասարման մեջ, կստանանք x -ի p անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ առաջին կարգի

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

հավասարում: Ինտեգրելով այն, գտնում ենք նրա ընդհանուր լուծումը.

$$p = p(x, C_1)$$

այնուհետև $\frac{dy}{dx} = p$ անջատելով ստանում ենք (1) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը.

$$y = \int p(x, C_1) dx + C_2:$$

Օրինակ 1: Քննարկենք շղթայագծի

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը (տես § 1): Ընդունենք

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

այս դեպքում

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

և մենք ստանում ենք x -ի p ժամանակ ֆունկցիայի նկատմամբ առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարում.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1+p^2}$$

Անջատելով փոփոխականները, կունենանք.

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a}, \quad \text{որտեղից}$$

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{x}{a} + C_1,$$

$$p = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{a} + C_1\right):$$

Բայց քանի որ $p = \frac{dy}{dx}$, ապա վերջին առնչությունն իրենից ներկայացնում է y որոնվող ֆունկցիայի նկատմամբ դիֆերենցիալ հավասարում: Ինտեգրելով այն, կստանանք շղթայագծի հավասարումը (տես § 1).

$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2:$$

Գտնենք այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է

$$y_{x=0} = a, \quad y'_{x=0} = 0$$

սկզբնական պայմաններին:

Երկրորդ պայմանից ստանում ենք $C_1 = 0$, առաջինից՝ $C_2 = 0$:

Վերջնականապես ստանում ենք.

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}:$$

Դիտողություն: Նման ձևով կարելի է ինտեգրել

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$$

տեսքի հավասարումը:

Ընդունելով $y^{(n-1)} = p$, կստանանք p -ի որոշման համար առաջին կարգի հավասարում.

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p):$$

Այստեղից իմանալով p -ն որպես x -ի ֆունկցիա, $y^{(n-1)} = p$ առնչությունից կգտնենք y -ը (տես § 17).

$$II. \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (2)$$

տեսքի հավասարումը բացահայտ կերպով չի պարունակում x անկախ փոփոխականը:

Այն լուծելու համար նորից ընդունենք

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad (3)$$

բայց այժմ p -ն կհամարենք y -ի ֆունկցիա (և ոչ թե x -ի, ինչպես առաջ): Այդ դեպքում

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p:$$

(2) հավասարման մեջ տեղադրելով $\frac{dy}{dx}$ -ի և $\frac{d^2y}{dx^2}$ -ու արտահայտությունները, կստանանք p օժանդակ ֆունկցիայի նկատմամբ առաջին կարգի հավասարում.

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p): \quad (4)$$

Այն ինտեգրելով կգտնենք p -ն որպես y -ի և կամայական C_1 հաստատունի ֆունկցիա.

$$p = p(y, C_1):$$

Այս արժեքը տեղադրելով (3) առնչության մեջ x -ի y ֆունկցիայի համար կստանանք առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարում.

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1):$$

Անջատելով փոփոխականները, գտնում ենք.

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx:$$

Ինտեգրելով այս հավասարումը, կստանանք տրված հավասարման

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

ընդհանուր ինտեգրալը:

Օրինակ 2: Գտնել $3y'' = y^{-5/3}$ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը:

Լուծում: Ընդունենք $\frac{dy}{dx} = p$, դիտելով p -ն որպես y -ի ֆունկցիա: Այդ դեպքում

$y'' = p \frac{dp}{dy}$ և ստանում ենք p օժանդակ ֆունկցիայի համար առաջին կարգի հավասարում.

$$3p \frac{dp}{dy} = y^{-5/3}:$$

Ինտեգրելով այս հավասարումը, գտնում ենք.

$$p^2 = C_1 - y^{-2/3} \quad \text{կամ} \quad p = \pm \sqrt{C_1 - y^{-2/3}}:$$

Բայց $p = \frac{dy}{dx}$, հետևաբար, y -ը որոշելու համար ստանում ենք.

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^{-2/3}}} = dx \quad \text{կամ} \quad \frac{y^{1/3} dy}{\pm \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}} = dx$$

հավասարումը, որտեղից

$$x + C_2 = \pm \int \frac{y^{1/3} dy}{\sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}}:$$

Վերջին ինտեգրալը հաշվելու համար կատարենք հետևյալ տեղադրությունը

$$C_1 y^{2/3} - 1 = t^2:$$

Այս դեպքում

5- Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվներ

$$y^{1/3} = (t^2 + 1)^{1/2} \frac{1}{C_1^{1/2}},$$

$$dy = 3t(t^2 + 1)^{1/2} \frac{1}{C_1^{3/2}} dt;$$

Հետևաբար,

$$\int \frac{y^{1/3} dy}{\sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}} = \frac{1}{C_1^2} \int \frac{3t(t^2 + 1)}{t} dt = \frac{3}{C_1^2} \left(\frac{t^3}{3} + t \right) = \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1} (C_1 y^{2/3} + 2);$$

Վերջնականապես ստանում ենք.

$$x + C_2 = \pm \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1} (C_1 y^{2/3} + 2);$$

Օրինակ 3: Դիցուք կետը շարժվում է Օx առանցքով՝ միայն կետի դիրքից կախված ուժի ազդեցությամբ: Շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x);$$

$$\text{Դիցուք } t=0 \text{ դեպքում } x=x_0, \frac{dx}{dt} = v_0;$$

Հավասարման երկու մասը բազմապատկելով $\frac{dx}{dt} dt$ -ով և ինտեգրելով 0-ից մինչև t սահմաններում, կստանանք.

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

կամ

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left[- \int_{x_0}^x F(x) dx \right] = \frac{1}{2} m v_0^2 = \text{const};$$

Վերջին հավասարության առաջին գումարելին ներկայացնում է շարժվող կետի կինետիկ էներգիան, երկրորդը՝ պոտենցիալ էներգիան: Ստացված հավասարությունից հետևում է, որ շարժման ամբողջ ընթացքում կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաների գումարը մնում է հաստատուն:

Ենդիք մասի մասնակցության ճոճանակի վերաբերյալ: Դիցուք m զանգվածն ունեցող նյութական կետը ծանրության ուժի ազդեցության տակ գտնվում է ուղղահայաց հարթության մեջ և շարժվում է L շրջանագծով: Հաշվի շառնելով դիմադրության ուժերը (այսինքն՝ շփման ուժը, օդի դիմադրության ուժը և այլն), կգտնենք կետի շարժման հավասարումը:

Կոորդինատների սկզբնականորեն տեղավորենք շրջանագծի ամենացածր կետում, Օx առանցքն ուղղենք շրջանագծի շոտափողով (նկ. 271):

Նշանակենք l -ով շրջանագծի շառավիղը, s -ով՝ Օ սկզբից մինչև M փոփոխական կետը ընկած աղեղի երկարությունը (M կետում տեղավորված է m զանգվածը), ընդ որում այս երկարությունը վերցնում ենք համապատասխան նշանով ($s > 0$, եթե M -ը Օ-ից աջ է. $s < 0$, եթե M -ը Օ-ից ձախ է):

Մեր խնդիրն է՝ պարզել՝ s -ի կախումը t ժամանակից:

mg ծանրության ուժը վերածենք տանգենցիալ և նորմալ բաղադրիչների: Առաջինը, որը հավասար է $-mg \sin \varphi$ -ի, առաջացնում է շարժում, երկրորդը ոչնչացվում է այն կորի հակազդմամբ, որով շարժվում է m զանգվածը:

Այսպիսով, շարժման հավասարումն ունի

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

տեսքը: Քանի որ շրջանագծի համար $\varphi = \frac{s}{l}$,

ապա ստանում ենք

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \frac{s}{l}$$

հավասարումը:

Սա II տիպի դիֆերենցիալ հավասարում է (քանի որ այն բացահայտ կերպով չի պարունակում t անկախ փոփոխականը):

Ինտեգրենք այն համապատասխան ձևով.

$$\frac{ds}{dt} = p, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dp}{ds} p;$$

Հետևաբար,

$$p \frac{dp}{ds} = -g \sin \frac{s}{l}$$

կամ

$$p dp = -g \sin \frac{s}{l} ds,$$

որտեղից

$$p^2 = 2gl \cos \frac{s}{l} + C_1;$$

Նշանակենք s_0 -ով այն աղեղի ամենամեծ երկարությունը, որով շեղվում է M կետը: Երբ $s = s_0$, կետի արագությունը հավասար է զրոյի.

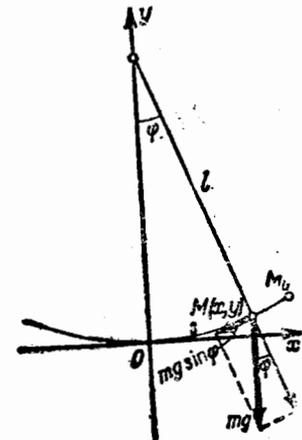
$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{s=s_0} = p \Big|_{s=s_0} = 0:$$

Դա հնարավորություն է տալիս որոշելու C_1 -ը.

$$0 = 2gl \cos \frac{s_0}{l} + C_1,$$

որտեղից

$$C_1 = -2gl \cos \frac{s_0}{l}:$$



Նկ. 271

$$p^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gl \left(\cos \frac{s}{l} - \cos \frac{s_0}{l}\right),$$

կամ, վերջին արտահայտության նկատմամբ կիրառելով կոսինուսների տարրերության բանաձևը.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4gl \sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}, \quad (5)$$

կամ*

$$\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gl} \sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}, \quad (6)$$

Այս անջատվող փոփոխականներով հավասարում է: Անջատելով փոփոխականները, կստանանք.

$$\frac{ds}{\sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}} = 2\sqrt{gl} dt \quad (7)$$

Առաջիկա ենթադրելու ենք, որ $s \neq s_0$. այս դեպքում կոտորակի հայտարարը տարբեր է զրոյից: Եթե ընդունենք, որ $s=0$, երբ $t=0$, ապա (7) հավասարությունից ստանում ենք.

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}} = 2\sqrt{gl} t, \quad (8)$$

Այս հավասարությունն էլ հենց տալիս է s -ի կախումը t -ից: Զախակողմյան ինտեգրալը չի արտահայտվում տարրական ֆունկցիաներով: Տարրական ֆունկցիաներով չի արտահայտվում նաև t -ի s ֆունկցիան: Գրված խնդիրը քննարկենք մոտավորությամբ:

Ենթադրելու ենք, որ $\frac{s_0}{l}$ և $\frac{s}{l}$ անկյունները փոքր են: $\frac{s+s_0}{2l}$ և $\frac{s_0-s}{2l}$ անկյունները չեն գերազանցի $\frac{s_0}{l}$ -ին: (6) հավասարման մեջ անկյունների սինուսները մոտավորությամբ փոխարինենք անկյուններով:

$$\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gl} \sqrt{\frac{s+s_0}{2l} \frac{s_0-s}{2l}}$$

կամ

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{s_0^2 - s^2}, \quad (5')$$

Անջատելով փոփոխականները, կստանանք (առաջիկա ենթադրում ենք, որ $s \neq s_0$).

* Արմատից առաջ վերցնում ենք պլյուս նշանը: Խնդրի վերջում արած դիտողությունից հետևում է, որ անհրաժեշտություն չկա այն դեպքի քննարկման համար, երբ վերցվում է մինուս նշանը:

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt, \quad (7')$$

Նորից ընդունելու ենք, որ $s=0$, երբ $t=0$: Ինտեգրելով վերջին հավասարումը, կըստանանք.

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (8')$$

կամ

$$\arcsin \frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} t,$$

որտեղից

$$s = s_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t, \quad (9)$$

Դիտողություն: Լուծման ընթացքում ենթադրեցինք, որ $s \neq s_0$: Բայց անմիջական տեղադրմամբ համոզվում ենք, որ (9) ֆունկցիան t -ի ցանկացած արժեքի դեպքում (6') հավասարման լուծումն է:

Հիշեցնենք, որ (9) լուծումը (5) հավասարման մոտավոր լուծումն է, քանի որ (6) հավասարումը փոխարինել ենք (6') մոտավոր հավասարումով:

(9) հավասարությունը ցույց է տալիս, որ M կետը (որը կարելի է դիտարկել որպես ճոճանակի ծայր) կատարում է $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ պարբերությամբ ներդաշնակ տատանումներ: Այդ պարբերությունը կախված չէ տատանման ամպլիտուդից:

Օրինակ 4: Խնդիր երկրորդ տիեզերական արագության վերաբերյալ: Որոշել այն ամենափոքր արագությունը, որով պետք է նետել մարմինը ուղղաձիգ դեպի վեր, որպեսզի այն Նրկիր չվերադառնա: Անտեսել օդի դիմադրությունը: Լուծում: Նրկիր զանգվածը և նետված մարմնի զանգվածը նշանակենք համապատասխանաբար M -ով և m -ով: Նյութոսի ձգողականության օրենքի համաձայն ձգողության ուժը, որն ազդում է m մարմնի վրա, կլինի.

$$f = k \frac{M \cdot m}{r^2},$$

որտեղ r -ը Նրկրի կենտրոնի և նետված մարմնի ծանրության կենտրոնի միջև եղած հեռավորությունն է, k -ն՝ գրավիտացիոն հաստատունը:

Նշված m զանգվածն ունեցող մարմնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M \cdot m}{r^2}$$

կամ

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M}{r^2}, \quad (10)$$

Մինուս նշանը վերցրեցինք այն բանի համար, որ խնդրում արագացումը բացասական է: (10) դիֆերենցիալ հավասարումը (2) տեսքի հավասարում է: Այն կլուծենք հետևյալ սկզբնական պայմանների դեպքում.

$$r=R, \quad \frac{dr}{dt}=v_0, \quad \text{երբ } t=0:$$

Այստեղ R -ը Ծրկրի շառավիղն է, v_0 -ն նետման արագությունը: Նշանակենք

$$\frac{dr}{dt}=v, \quad \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt}=v \frac{dv}{dr},$$

որտեղ v -ն շարժման արագությունն է: Տեղադրելով (10) հավասարման մեջ, կստանանք.

$$v \frac{dv}{dr} = -k \frac{M}{r^2}:$$

Անջատելով փոփոխականները, ստանում ենք.

$$v dv = -kM \frac{dr}{r^2}:$$

Ինտեգրելով այս հավասարումը, գտնում ենք.

$$\frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} + C_1: \quad (11)$$

Այն պայմանից, որ Ծրկրի մակերևույթի վրա (երբ $r=R$) $v=v_0$, որոշենք C_1 -ը.

$$\frac{v_0^2}{2} = kM \frac{1}{R} + C_1$$

կամ

$$C_1 = -\frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}:$$

C_1 -ի արժեքը տեղադրենք (11) հավասարման մեջ.

$$\frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} - \frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}$$

կամ

$$\frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \right): \quad (12)$$

Ըստ պայմանի մարմինը պետք է շարժվի այնպես, որ արագությունը միշտ լինի դրական, հետևաբար, $\frac{v^2}{2} > 0$: Քանի որ $\frac{kM}{R}$ մեծությունը r -ը անսահմանափակ մեծանալու

դեպքում դառնում է ցանկացած շահիով փոքր, ապա $\frac{v_0^2}{2} > 0$ պայմանը կիրականացվի ցանկացած r -ի համար միայն

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geq 0 \quad (13)$$

կամ

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}$$

դեպքում:

Հետևաբար, ամենափոքր արագությունը կորոշվի

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}} \quad (14)$$

հավասարությանը, որտեղ

$$K=6,66 \cdot 10^{-8} \frac{\text{սմ}^3}{\text{գ} \cdot \text{վրկ}^2}, \quad R=63 \cdot 10^7 \text{ սմ}:$$

Ծրկրի մակերևույթի վրա, երբ $r=R$ ծանրության ուժի արագացումը հավասար է

g ($g=981 \frac{\text{սմ}}{\text{վրկ}^2}$): Դրա հիման վրա (10) հավասարությունից ստանում ենք.

$$g = k \frac{M}{R^2} \quad \text{կամ} \quad M = \frac{gR^2}{k}:$$

M -ի այս արժեքը տեղադրելով (14) բանաձևի մեջ, ստանում ենք.

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} \approx 11,2 \cdot 10^5 \frac{\text{սմ}}{\text{վրկ}} = 11,2 \frac{\text{կմ}}{\text{վրկ}}:$$

§ 19. Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրման գրաֆիկական մեթոդը

Պարզաբանենք երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման երկրաչափական իմաստը: Դիցուք ունենք հետևյալ հավասարումը.

$$y'' = f(x, y, y'): \quad (1)$$

Նշանակենք φ -ով այն անկյունը, որը կորի շոշափողը կազմում է Ox առանցքի դրական ուղղության հետ. այդ դեպքում

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi: \quad (2)$$

Երկրորդ ածանցյալի երկրաչափական իմաստը պարզելու համար հիշենք տրված կետում կորի կորության շառավիղը որոշող

$$R = \frac{(1+y''^2)^{3/2}}{y''}$$

բանաձևը*: Այստեղից

* Մինչև այժմ կորության շառավիղը համարել ենք դրական թիվ, այնուամենայնիվ այս պարագրաֆում կորության շառավիղն ընդունելու ենք այնպիսի թիվ, որը կարող է ընդունել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական արժեքներ. եթե կորն ուռուցիկ է ($y'' < 0$), մենք կորության շառավիղը համարում ենք բացասական ($R < 0$), եթե կորը գոգավոր է ($y'' > 0$)՝ դրական ($R > 0$):

$$y'' = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{R}$$

Բայց

$$y' = \operatorname{tg} \varphi, \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \sec^2 \varphi, \quad (1 + y'^2)^{3/2} = |\sec^3 \varphi| = \frac{1}{|\cos^3 \varphi|},$$

ուստի

$$y'' = \frac{1}{R|\cos^3 \varphi|}, \quad (3)$$

Այժմ (1) հավասարման մեջ տեղադրելով y -ի և y'' -ի համար ստացած արտահայտությունները, կունենանք.

$$\frac{1}{R|\cos^3 \varphi|} = f(x, y, \operatorname{tg} \varphi)$$

կամ

$$R = \frac{1}{|\cos^3 \varphi| \cdot f(x, y, \operatorname{tg} \varphi)}; \quad (4)$$

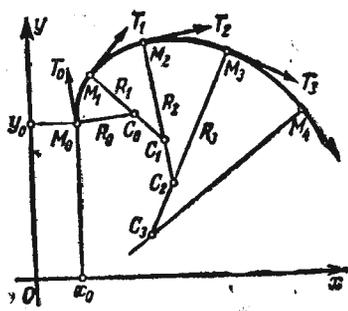
Այստեղից երևում է, որ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը որոշում է ինտեգրալային գծի կորություն շառավղի մեծությունը, եթե տրված են կետի կոորդինատները և այդ կետում շոշափողի ուղղությունը:

Նախորդից հետևում է շրջանագծի աղեղներից կազմված ողորկ* կորի օգնությամբ ինտեգրալային կորի մոտավոր կառուցման եղանակը:

Դիցուք, օրինակ, պահանջվում է գտնել (1) հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$y_{x=x_0} = y_0, \quad y'_{x=x_0} = y'_0$$

սկզբնական պայմաններին:



Նկ. 272

$M_0(x_0, y_0)$ կետով տանենք $y' = \operatorname{tg} \varphi_0 = y'_0$ անկյունային գործակից ունեցող M_0T_0 ճառագայթը (Նկ. 272): (4) հավասարումից կգտնենք $R = R_0$ մեծությունը: M_0T_0 ուղղությանն ուղղահայացի վրա անջատենք R_0 -ին հավասար M_0C_0 հատվածը և C_0 կետից,

իբրև կենտրոնի, գծենք ոչ մեծ M_0M_1 աղեղը: Ընդ որում նկատենք, որ, եթե $R_0 < 0$, ապա M^0C_0 հատվածը պետք

է ուղղել այն կողմը, որ շրջանագծի աղեղը ուղղված լինի ուռուցիկությամբ վերև, իսկ $R_0 > 0$ դեպքում՝ ուռուցիկությամբ ներքև (տես 71-րդ էջի տողատակը):

Դիցուք, այնուհետև, x_1 -ը և y_1 -ը կառուցած աղեղի վրա գտնվող և M_0 կետին բավականաչափ մոտ գտնվող M_1 կետի կոորդինատներն են, իսկ $\operatorname{tg} \varphi_1$ -ը՝ տարված շրջանագծի M_1 կետում M_1T_1 շոշափողի անկյունային գործակիցն է: (4) հավասարումից կգտնենք M_1 կետին համապատասխանող $R = R_1$ արժեքը: Տանենք R_1 -ին հավասար և M_1T_2 -ին ուղղահայաց M_1C_1 հատվածը և C_1 կետից, որպես կենտրոնի, գծենք

R_1 շառավղով M_1M_2 աղեղը: Այնուհետև այդ աղեղի վրա վերցնենք M_1 կետին մոտ գտնվող $M_2(x_2, y_2)$ կետը և նույն ձևով շարունակենք կառուցումը, մինչև շրջանագծերի աղեղներից կազմված կորի բավականաչափ մեծ կտորի ստացումը: Նախորդից պարզ է, որ այդ կորը մոտավորապես M_0 կետով անցնող ինտեգրալային գիծն է: Ակնհայտ է, որ կառուցված գիծը այնքան մոտ կլինի ինտեգրալային կորին, որքան փոքր լինեն M_0M_1, M_1M_2, \dots աղեղները:

§ 20. Գծային համասեռ հավասարումներ:

Սահմանումներ և ընդհանուր հատկություններ

Սահմանում 1: n -րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը կոչվում է գծային, եթե այն առաջին աստիճանի է y որոնվող ֆունկցիայի և նրա $y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ ածանցյալների նկատմամբ, այսինքն՝ ունի

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (1)$$

տեսքը, որտեղ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ և $f(x)$ -ը x -ի տրված ֆունկցիաներ կամ հաստատուններ են, ընդ որում $a_0 \neq 0$ -ի այն տիրույթին պատկանող բոլոր արժեքների համար, որտեղ դիտարկում ենք (1) հավասարումը: Հետագայում ենթադրելու ենք, որ a_0, a_1, \dots, a_n և $f(x)$ ֆունկցիաները x -ի բոլոր արժեքների դեպքում անընդհատ են, ընդ որում $a_0 = 1$ (եթե այն հավասար չէ 1-ի, կարող ենք հավասարման բոլոր անդամները բաժանել նրա վրա): Հավասարման աջ մասի $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է հավասարման աջ մաս:

Եթե $f(x) \equiv 0$, ապա հավասարումը կոչվում է գծային անհամասեռ կամ աջ մասով հավասարում: Իսկ եթե $f(x) \equiv 0$, ապա հավասարումն ունի

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (2)$$

տեսքը և կոչվում է գծային համասեռ կամ առանց աջ մասի հա-

* Կորը կոչվում է ողորկ, եթե այն բոլոր կետերում ունի շոշափող, ընդ որում այդ շոշափողի թեթևության անկյունը s աղեղի երկարության անընդհատ ֆունկցիա է:

վասարում (այս հավասարման ձախ մասը $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ -ի նկատմամբ առաջին աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է):

Հաստատենք գծային համասեռ հավասարումների մի քանի հիմնական հատկությունները, սահմանափակվելով երկրորդ կարգի հավասարումների համար ապացուցումներով:

Թ հ որ հ մ 1: Եթե y_1 -ը և y_2 -ը

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (3)$$

երկրորդ կարգի գծային համասեռ հավասարման երկու մասնավոր լուծումներն են, ապա $y_1 + y_2$ նույնպես այդ հավասարման լուծում է:

Ապացուցում: Քանի որ y_1 -ը և y_2 -ը հավասարման լուծումներն են, ապա

$$\left. \begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 &= 0 \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$y_1 + y_2$ գումարը տեղադրելով (3) հավասարման մեջ և ուշադրություն դարձնելով (4) նույնության վրա, կունենանք.

$$(y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) = 0 + 0 = 0, \\ = (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0 + 0 = 0,$$

այսինքն՝ $y_1 + y_2$ հավասարման լուծում է:

Թ հ որ հ մ 2: Եթե y_1 -ը (3) հավասարման լուծում է և C -ն հաստատուն է, ապա Cy_1 -ը նույնպես (3) հավասարման լուծում է:

Ապացուցում: Cy_1 արտահայտությունը տեղադրելով (3) հավասարման մեջ, կստանանք.

$$(Cy_1)'' + a_1 (Cy_1)' + a_2 (Cy_1) = C(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = C \cdot 0 = 0;$$

սրանով իսկ թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 2: (3) հավասարման y_1 և y_2 երկու լուծումները կոչվում են գծորեն անկախ $[a, b]$ հատվածում, եթե այդ հատվածում նրանց հարաբերությունը հաստատուն չէ, այսինքն, եթե

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const:}$$

Հակառակ դեպքում լուծումները կոչվում են գծորեն կախված: Ուրիշ խոսքերով, y_1 և y_2 երկու լուծումները կոչվում են գծորեն կախված $[a, b]$ հատվածում, եթե գոյություն ունի այնպիսի λ հաստատուն թիվ, որ

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda, \text{ երբ } a \leq x \leq b: \text{ Այս դեպքում } y_1 = \lambda y_2:$$

Օրինակ 1: Դիցուք ունենք $y'' - y = 0$ հավասարումը: Հեշտ է ստուգել, որ $e^x, e^{-x}, 3e^x, 5e^{-x}$ ֆունկցիաները այդ հավասարման լուծումներն են: Ընդ որում e^x և e^{-x} ֆունկցիաները գծորեն անկախ են ցանկացած հատվածում, քանի որ $\frac{e^x}{e^{-x}}$ հարաբերությունը x -ի փոփոխման դեպքում հաստատուն չի մնում: Իսկ e^x և $3e^x$ ֆունկցիաները գծորեն կախված են, քանի որ $\frac{3e^x}{e^x} = 3 = \text{const:}$

Սահմանում 3: Եթե y_1 -ը և y_2 -ը x -ի ֆունկցիաներ են, ապա

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

դետերմինանտը կոչվում է այդ ֆունկցիաների վրոնսկու դետերմինանտ կամ վրոնսկիան:

Թ հ որ հ մ 3: Եթե y_1 և y_2 ֆունկցիաները գծորեն կախված են $[a, b]$ հատվածում, ապա այդ հատվածում վրոնսկու դետերմինանտը նույնաբար հավասար է զրոյի:

Իրոք, եթե $y_2 = \lambda y_1$, որտեղ $\lambda = \text{const}$, ապա $y_2' = \lambda y_1'$ և

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0:$$

Թ հ որ հ մ 4: Եթե (3) գծային համասեռ հավասարման y_1 և y_2 լուծումների համար կազմված $W(y_1, y_2)$ վրոնսկու դետերմինանտը $[a, b]$ հատվածի որևէ $x = x_0$ արժեքի համար հավասար չէ զրոյի, ընդ որում $[a, b]$ -ում հավասարման գործակիցներն անընդհատ են, ապա այն $[a, b]$ հատվածի ոչ մի x արժեքի համար զրոյի չի հավասարվում:

Ապացուցում: Քանի որ y_1 -ը և y_2 -ը (3) հավասարման երկու լուծումներն են, ապա

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0, \quad y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0:$$

Բազմապատկելով առաջին հավասարության անդամները y_1 -ով, երկրորդ հավասարության անդամները՝ y_2 -ով և առաջիններից հանելով երկրորդները, կստանանք.

$$(y_1 y_2'' - y_1' y_2') + a_1 (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0: \quad (5)$$

Երկրորդ փակագծերում գտնվող տարբերությունը $W(y_1, y_2)$ վրոնսկու դետերմինանտն է, այն է՝ $W(y_1, y_2) = y_1 y_2'' - y_1' y_2'$: Առաջին փակագծերի ներսի տարբերությունն էլ վրոնսկու դետերմինանտի ածանցյալն է.

$$W_x'(y_1, y_2) = (y_1 y_2'' - y_1' y_2')' = y_1 y_2''' - y_1'' y_2':$$

Հետևաբար, (5) հավասարությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$W' + a_1 W = 0: \quad (6)$$

Գտնենք վերջին հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $W|_{x=x_0} = W_0$ հավասարման սկզբնական պայմանին: Նախ գտնենք (6) ընդհանուր լուծումն այն ենթադրությամբ, որ $W \neq 0$: (6) հավասարման մեջ անջատելով փոփոխականները, ստանում ենք $\frac{dw}{w} = -a_1 dx$:

Ինտեգրելով, գտնում ենք.

$$\ln W = -\int_{x_0}^x a_1 dx + \ln C$$

կամ

$$\ln \frac{W}{C} = -\int_{x_0}^x a_1 dx,$$

որտեղից

$$W = C e^{-\int_{x_0}^x a_1 dx} \quad (7)$$

Նկատենք, որ կարելի էր գրել (7) ֆունկցիան և ասել, որ այդ ֆունկցիան բավարարում է (6) հավասարմանը, որում հեշտ է համոզվել (6) հավասարման մեջ այդ ֆունկցիայի անմիջական տեղադրմամբ: $W \neq 0$ ենթադրությունը չի պահանջվում:

(7) բանաձևը կոչվում է Լիովիլի բանաձև:

C-ն որոշենք այնպես, որ բավարարվի սկզբնական պայմանը: (7) հավասարության ձախ և աջ մասերում տեղադրելով $x = x_0$, ստանում ենք

$$W_0 = C:$$

Հետևաբար, սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծումն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^x a_1 dx} \quad (7')$$

Ըստ պայմանի $W_0 \neq 0$: Բայց այս դեպքում (7') հավասարությունից հետևում է, որ $W \neq 0$ x-ի ոչ մի արժեքի դեպքում, քանի որ ցուցչային ֆունկցիան արգումենտի ոչ մի արժեքի դեպքում զրո չի դառնում: Թեորեմն ապացուցված է:

Գիտողություն 1: Եթե որևէ $x = x_0$ արժեքի դեպքում վրոնսկու դետերմինանտը հավասար է զրոյի, ապա այն հավասար է զրոյի նաև դիտարկվող հատվածից վերցրած x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում: Դա անմիջապես հետևում է (7) բանաձևից. եթե $W = 0$, երբ $x = x_0$, ապա

$$(W)_{x=x_0} = C = 0;$$

հետևաբար, $W \equiv 0$, ինչպիսին էլ լինի (7) բանաձևում x վերին սահմանի արժեքը:

Թեորեմ 5: Եթե (3) հավասարման y_1 և y_2 լուծումները գծորեն անկախ են $[a, b]$ հատվածում, ապա այդ լուծումների համար կազմված վրոնսկու դետերմինանտը նշված հատվածի և ոչ մի կետում զրո չի դառնում:

Ապացուցում: Նախօրոք նշենք հետևյալը: $y \equiv 0$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածում (3) հավասարման լուծումն է, որը բավարարում է

$$y_{x=x_0} = 0, \quad y'_{x=x_0} = 0$$

սկզբնական պայմաններին, որտեղ x_0 -ն $[a, b]$ հատվածի ցանկացած կետն է: Գոյություն և միակություն թեորեմից (տես § 16), որը կիրառելի է (3) հավասարման նկատմամբ, հետևում է, որ գոյություն չունի (3) հավասարման այլ լուծում, որը բավարարի

$$y_{x=x_0} = 0, \quad y'_{x=x_0} = 0$$

սկզբնական պայմաններին:

Այդ թեորեմից հետևում է նաև, որ եթե (3) հավասարման լուծումը որևէ $[a, b]$ հատվածում կամ դրան պատկանող որևէ (α, β) միջակայքում նույնաբար հավասար է զրոյի, ապա այդ լուծումը նույնաբար հավասար է զրոյի ամբողջ $[a, b]$ հատվածում: Իրոք, $x = \beta$ կետում (և $x = \alpha$ կետում) լուծումը բավարարում է

$$y_{x=\beta} = 0, \quad y'_{x=\beta} = 0$$

սկզբնական պայմաններին: Հետևաբար, ըստ միակության թեորեմի նյն հավասար է զրոյի որևէ $\beta - d < x < \beta + d$ միջակայքում, որտեղ d-ն որոշվում է (3) հավասարման գործակիցների մեծությամբ: Այսպիսով, ամեն անգամ միջակայքն ընդլայնելով d մեծությամբ, որտեղ $y \equiv 0$, մենք կապացուցենք, որ $y \equiv 0$ ամբողջ $[a, b]$ հատվածում:

Այժմ անցնենք (5) թեորեմի ապացուցմանը: Ենթադրենք $[a, b]$ հատվածի որևէ կետում $W(y_1, y_2) = 0$: Այդ դեպքում ըստ 3-րդ թեորեմի $W(y_1, y_2)$ վրոնսկու դետերմինանտը հավասար կլինի զրոյի $[a, b]$ հատվածի բոլոր կետերում.

$$W = 0 \quad \text{կամ} \quad y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0:$$

Ընդունենք, որ $y_1 \neq 0$ $[a, b]$ հատվածում: Այս դեպքում վերջին հավասարության հիման վրա կարելի է գրել.

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0 \quad \text{կամ} \quad \left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = 0:$$

Որտեղից հետևում է

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const},$$

այսինքն՝ y_1 և y_2 լուծումները գծորեն կախված են, որը հակասում է նրանց գծորեն անկախ լինելու ենթադրությանը:

Այնուհետև ընդունենք, որ $y_1=0$ $[a, b]$ հատվածին պատկանող x_1, x_2, \dots, x_k կետերում: Դիտարկենք (a, x_1) միջակայքը: Այս միջակայքում $y \neq 0$: Հետևաբար, ըստ հենց նոր ապացուցածի հետևում է, որ (a, x_1) միջակայքում

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const} \quad \text{կամ} \quad y_2 = \lambda y_1:$$

Դիտարկենք $y = y_2 - \lambda y_1$ ֆունկցիան: Քանի որ y_2 և y_1 (3) հավասարման լուծումներն են, ապա $y = y_2 - \lambda y_1$ նույնպես այդ հավասարման լուծումն է և $y \equiv 0$ (a, x_1) միջակայքում: Հետևաբար, ապացուցման սկզբում կատարված դիտողության հիման վրա հետևում է, որ $y = y_2 - \lambda y_1 \equiv 0$ $[a, b]$ հատվածում կամ

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda$$

$[a, b]$ հատվածում, այսինքն՝ y_2 -ը և y_1 -ը գծորեն կախման մեջ են: Բայց սա հակասում է y_2 և y_1 լուծումների գծորեն անկախության մասին ենթադրությանը: Այսպիսով, մենք ապացուցեցինք, որ $[a, b]$ հատվածի և ոչ մի կետում վրոնսկու դետերմինանտը զրո չի դառնում:

Ք ե ո թ ե մ 6: Եթե y_1 -ը և y_2 -ը (3) հավասարման երկու գծորեն անկախ լուծումներն են, ապա

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (8)$$

որտեղ C_1 -ը և C_2 -ը կամայական հաստատուններ են, այդ հավասարման ընդհանուր լուծումն է:

Ապացուցում: 1-ին և 2-րդ թեորեմներից հետևում է, որ

$$C_1 y_1 + C_2 y_2$$

ֆունկցիան C_1 -ի և C_2 -ի կամայական արժեքների դեպքում (3) հավասարման լուծումն է:

Այժմ ապացուցենք, որ ինչպիսին էլ լինեն $y_{x=x_0} = y_0$, $y'_{x=x_0} = y'_0$ սկզբնական պայմանները, կարելի է C_1 և C_2 կամայական հաստատունների արժեքներն ընտրել այնպես, որ համապատասխան $C_1 y_1 + C_2 y_2$ մասնավոր լուծումը բավարարի տրված սկզբնական պայմաններին:

Տեղադրելով սկզբնական պայմանները (8) հավասարման մեջ, կունենանք.

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= C_1 y_{10} + C_2 y_{20}, \\ y'_0 &= C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

որտեղ նշանակված է

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}, \quad (y_2)_{x=x_0} = y_{20}, \quad (y_1)'_{x=x_0} = y'_{10}, \quad (y_2)'_{x=x_0} = y'_{20}:$$

(9) համակարգից կարելի է որոշել C_1 -ը և C_2 -ը, քանի որ այդ համակարգի դետերմինանտը

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = y_{10} y'_{20} - y'_{10} y_{20}$$

վրոնսկու դետերմինանտ է, երբ $x = x_0$ և, հետևաբար, հավասար չէ զրոյի (y_1 և y_2 լուծումների դժային անկախության շնորհիվ): C_1 -ի և C_2 -ի գտած արժեքների դեպքում (8) ընտանիքից որոշվող մասնավոր լուծումը բավարարում է տրված սկզբնական պայմաններին: Այսպիսով, թեորեմն ապացուցված է:

Օրինակ 2. $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$ հավասարումը, որի $a_1 = \frac{1}{x}$ և $a_2 = -\frac{1}{x^2}$ գործակիցներն անընդհատ են $x=0$ կետը շարունակող ցանկացած հատվածում, թույլ է տալիս

$$y_1 = x, \quad y_2 = 1/x$$

մասնավոր լուծումները, (որ հեշտ է ստուգել հավասարման մեջ տեղադրման միջոցով): Հետևաբար, նրա ընդհանուր լուծումն ունի

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$$

տեսքը:

Դիտողություն 2: Փոփոխական գործակիցներով գծային հավասարումների ընդհանուր լուծումը վերջնական տեսքով գտնելու համար ընդհանուր մեթոդներ գոյություն չունեն: Այնուամենայնիվ հաստատուն գործակիցներով հավասարումների համար այդպիսի մեթոդ գոյություն ունի: Այն կշարադրվի հաջորդ պարագրաֆում: Իսկ փոփոխական գործակիցներով հավասարումների դեպքի համար XVI գլխում՝ «Շարքեր» կնշվեն մի քանի եղանակներ, որոնք հնարավորություն են տալիս գտնել որոշակի սկզբնական պայմաններին բավարարող մոտավոր լուծումներ:

Այստեղ կապացուցենք մի թեորեմ, որը թույլ է տալիս գտնել փոփոխական գործակիցներով երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը, եթե հայտնի է նրա մեկ մասնավոր լուծումը: Քանի որ երբեմն հնարավոր է լինում անմիջապես գտնել կամ կոտահել մեկ մասնավոր լուծումը, ապա այդ թեորեմը շատ դեպքերում կարող է օգտակար լինել:

Ք ե ո թ ե մ 7: Եթե հայտնի է երկրորդ կարգի գծային համասեռ հավասարման մեկ մասնավոր լուծումը, ապա հավասարման ընդհանուր լուծման որոնումը բերվում է ֆունկցիաների ինտեգրման:

Ապացուցում: Դիցուք y_1 -ը $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ հավասարման հայտնի մասնավոր լուծումն է: Գտնենք տրված հավասարման մի այլ այնպիսի մասնավոր լուծում, որ y_1 -ը և y_2 -ը լինեն գծորեն անկախ:

Այդ դեպքում ընդհանուր լուծումը կարտահայտվի $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ բանաձևով, որտեղ C_1 -ը և C_2 -ը կամայական հաստատուններ են: (7) բանաձևի հիման վրա (տես թեորեմ 4-ի ապացուցումը) կարելի է գրել $y_2 y_1 - y_2 y_1' = C e^{-\int a_1 dx}$: Այսպիսով, y_2 -ը որոշելու համար ստանում ենք առաջին կարգի գծային հավասարում: Այն ինտեգրենք հետևյալ կերպ: Բոլոր անդամները բաժանենք y_1^2 -ու վրա.

$$\frac{y_2 y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} C e^{-\int a_1 dx} \quad \text{կամ} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{1}{y_1} C e^{-\int a_1 dx},$$

որտեղից

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{C e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx + C':$$

Քանի որ որոնում ենք մասնավոր լուծում, ապա, ընդունելով $C' = 0$, $C = 1$, ստանում ենք

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx: \quad (10)$$

Ակնհայտ է, որ y_1 -ը և y_2 -ը գծորեն անկախ լուծումներ են, քանի որ

$$\frac{y_2}{y_1} \neq \text{const}:$$

Այսպիսով, տրված հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx: \quad (11)$$

Օրինակ 3: Գտնել $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Լուծում: Անմիջական ստուգմամբ համոզվում ենք, որ այս հավասարումն ունի $y_1 = x$ մասնավոր լուծում: Գտնենք y_2 երկրորդ մասնավոր լուծումն այնպես, որ y_1 -ը և y_2 -ը լինեն գծորեն անկախ:

Նկատելով, որ մեր դեպքում $a_1 = \frac{-2x}{1-x^2}$, (10) բանաձևի հիման վրա ստանում ենք.

$$y = x \int \frac{e^{\int \frac{2x dx}{1-x^2}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{-\ln|1-x^2|}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2|1-x^2|} = x \int \left(\pm \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx = x \left[\mp \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]:$$

Հետևաբար, ընդհանուր լուծումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$y = C_1 x + C_2 \left(\frac{1}{2} x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \pm 1 \right);$$

§ 21. Հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի համասեռ հավասարումներ

Ունենք երկրորդ կարգի գծային համասեռ

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

հավասարումը, որտեղ p -ն և q -ն հաստատուն իրական թվեր են: Այս հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը գտնելու համար բավական է, ինչպես այդ ապացուցվեց վերը, գտնել երկու գծորեն անկախ մասնավոր լուծումներ:

Մասնավոր լուծումները կորոնենք

$$y = e^{kx} \quad \text{տեսքով, որտեղ} \quad k = \text{const}, \quad (2)$$

այս դեպքում

$$y' = k e^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}:$$

Ածանցյալների ստացված արտահայտությունները տեղադրելով (1) հավասարման մեջ, գտնում ենք.

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0:$$

Քանի որ $e^{kx} \neq 0$, ապա, նշանակում է,

$$k^2 + pk + q = 0: \quad (3)$$

Հետևաբար, եթե k -ն բավարարի (3) հավասարմանը, ապա e^{kx} -ը կլինի (1) հավասարման լուծում: (3) հավասարումը կոչվում է (1) հավասարման նկատմամբ բնութագրիչ հավասարում:

Բնութագրիչ հավասարումը քառակուսի հավասարում է, որն ունի երկու արմատ: Դրանք կնշանակենք k_1 -ով և k_2 -ով: Ընդ որում

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}:$$

Հնարավոր են հետևյալ դեպքերը.

I. k_1 -ը և k_2 -ը իրական և իրարից տարբեր թվեր են ($k_1 \neq k_2$),

II. k_1 -ը և k_2 -ը կոմպլեքս թվեր են,

III. k_1 -ը և k_2 -ը իրական հավասար թվեր են ($k_1 = k_2$);

Քննարկենք յուրաքանչյուր դեպքն առանձին:

I. Բնութագրիչ հավասարման արմատները իրական են և տարբեր՝ $k_1 \neq k_2$ ։ Այս դեպքում մասնավոր լուծումներ կլինեն

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$$

Ֆունկցիաները։ Այս ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, քանի որ

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const}:$$

Հետևաբար, ընդհանուր ինտեգրալն ունի հետևյալ տեսքը.

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}:$$

Օրինակ 1: Տրված է

$$y'' + y' - 2y = 0$$

հավասարումը։ Բնութագրիչ հավասարումը կլինի

$$k^2 + k - 2 = 0:$$

Գտնենք բնութագրիչ հավասարման արմատները.

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -2:$$

Ընդհանուր ինտեգրալը կլինի

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}:$$

II. Բնութագրիչ հավասարման արմատները կոմպլեքս են։ Քանի որ կոմպլեքս արմատները զույգ առ զույգ համալուծ են, ապա նշանակենք

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

որտեղ

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}:$$

Մասնավոր լուծումները կարելի է գրել այսպես.

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}: \quad (4)$$

Սրանք իրական արգումենտի կոմպլեքս ֆունկցիաներ են, որոնք բավարարում են (1) հավասարմանը (տես VII գլխի § 4-ը)։

Ակնհայտ է, որ եթե իրական արգումենտի ինչ-որ

$$y = u(x) + iv(x) \quad (5)$$

ֆունկցիա բավարարում է (1) հավասարմանը, ապա այդ հավասարմանը բավարարում են $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները։

Իրոք, (5) արտահայտությունը տեղադրելով (1) հավասարման մեջ, կունենանք.

$$[u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] = 0$$

կամ

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0:$$

Բայց կոմպլեքս ֆունկցիան զրոյի հավասարում է այն և միայն այն դեպքում, երբ իրական մասը և կեղծ մասը հավասար են զրոյի, այսինքն՝

$$\begin{aligned} u'' + pu' + qu &= 0, \\ v'' + pv' + qv &= 0: \end{aligned}$$

Ապացուցեցինք, որ $u(x)$ -ը և $v(x)$ -ը հավասարման լուծումներ են։

(4) կոմպլեքս լուծումները գրենք իրական և կեղծ մասերի գումարի տեսքով.

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}(\cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x), \\ y_2 &= e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x: \end{aligned}$$

Ըստ ապացուցածի (1) հավասարման մասնավոր լուծումներ կլինեն

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad (6')$$

$$\tilde{y}_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (6'')$$

Ֆունկցիաները։ \tilde{y}_1 և \tilde{y}_2 ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, քանի որ

$$\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \text{ctg } \beta x \neq \text{const}:$$

Հետևաբար, (1) հավասարման ընդհանուր լուծումը բնութագրիչ հավասարման կոմպլեքս արմատների դեպքում ունի

$$y = C_1 \tilde{y}_1 + C_2 \tilde{y}_2 = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

կամ

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (7)$$

տեսքը, որտեղ C_1 -ը և C_2 -ը կամայական հաստատուններ են։

(7) լուծման կարևոր մասնավոր դեպք է այն, երբ բնութագրիչ հավասարման արմատները զուտ կեղծ են։

Դա տեղի ունի այն դեպքում, երբ (1) հավասարման մեջ $p = 0$, և այն ունի

$$y'' + qy = 0$$

տեսքը։

(3) բնութագրիչ հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$k^2 + q = 0, \quad q > 0:$$

Բնութագրիչ հավասարման արմատները կլինեն

$$k_{1,2} = \pm i \sqrt{q} = \pm i\beta, \quad \alpha = 0:$$

(7) լուծումն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x:$$

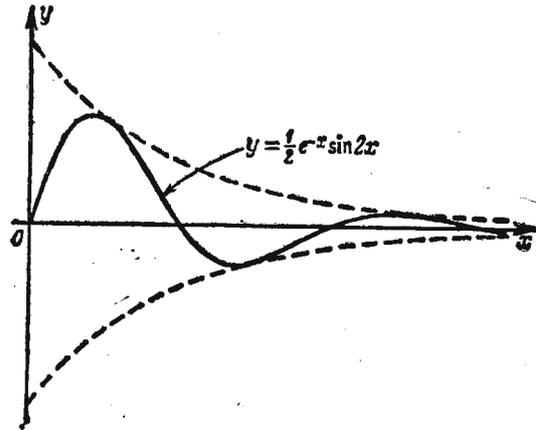
Օրինակ 2: Տրված է

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

հավասարումը: Գտնել ընդհանուր ինտեգրալը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է

$$y_{x=0} = 0, y'_{x=0} = 1$$

սկզբնական պայմաններին: Կառուցել գրաֆիկը:



Նկ. 273

Նկատելով, որ $y' = -x2C_2 \cos 2x - e^{-x} C_2 \sin 2x$, երկրորդ պայմանից ստանում ենք

$$1 = 2C_2, \text{ այսինքն } C_2 = \frac{1}{2}:$$

Այսպիսով, որոնվող մասնավոր լուծումը կլինի

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x:$$

Նրա գրաֆիկը պատկերված է նկ. 273-ում:

Օրինակ 3: Տրված է

$$y'' + 9y = 0$$

հավասարումը: Գտնել ընդհանուր ինտեգրալը և այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է

$$y_{x=0} = 0, y'_{x=0} = 3$$

սկզբնական պայմաններին:

Լուծում: Գրենք բնութագրիչ հավասարումը.

$$k^2 + 9 = 0:$$

Գտնում ենք նրա արմատները

$$k_1 = 3i, k_2 = -3i:$$

Ընդհանուր ինտեգրալը կլինի

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x:$$

Գտնենք մասնավոր լուծումը, նախապես կգտնենք

$$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x:$$

C_1 և C_2 հաստատունները որոշվում են սկզբնական պայմաններից.

$$0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0,$$

$$3 = -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0:$$

Սրանք հավասար են՝

$$C_1 = 0, C_2 = 1$$

Մասնավոր լուծումը կլինի

$$y = \sin 3x:$$

III. Բնութագրիչ հավասարման արմատներն իրական են և հավասար:

Այս դեպքում $k_1 = k_2$:

$y_1 = e^{k_1 x}$ մեկ մասնավոր լուծումն ստացվում է նախորդ դատողությունների հիման վրա: Պետք է գտնել առաջինի հետ գծորեն անկախ երկրորդ մասնավոր լուծումը ($e^{k_1 x}$ ֆունկցիան նույնաբար հավասար է $e^{k_1 x}$ -ի, ուստի այն չի կարող հանդես գալ որպես երկրորդ մասնավոր լուծում):

Երկրորդ մասնավոր լուծումը կորոնենք

$$y_2 = u(x)e^{k_1 x}$$

տեսքով, որտեղ $u(x)$ -ը անհայտ ֆունկցիա է, որը ենթակա է որոշման: Դիֆերենցելով գտնում ենք

$$y_2' = u' e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u' + k_1 u),$$

$$y_2'' = u'' e^{k_1 x} + 2k_1 u' e^{k_1 x} + k_1^2 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u):$$

Տեղադրելով ածանցյալների արժեքները (1) հավասարման մեջ, ստանում ենք.

$$e^{k_1 x} [u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0:$$

Քանի որ k_1 -ը բնութագրիչ հավասարման բազմապատիկ արմատ է, ապա

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0:$$

Բացի այդ, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ կամ $2k_1 = -p, 2k_1 + p = 0:$

Հետևաբար, $u(x)$ -ը գտնելու համար պետք է լուծել $e^{k_1 x} u'' = 0$ կամ $u'' = 0$ հավասարումը: Ինտեգրելով, ստանում ենք $u = Ax + B$: Մասնավորաբար կարելի է ընդունել $A = 1, B = 0$. այդ դեպքում $u = x$: Այսպիսով, որպես երկրորդ մասնավոր լուծում կարելի է վերցնել

$$y_2 = x e^{k_1 x}:$$

Այս լուծումն առաջինի հետ գծորեն անկախ է, քանի որ

$$\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const:}$$

Ուստի ընդհանուր ինտեգրալը կլինի

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$$

Ֆունկցիան:

Օրինակ 4: Տրված է

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

հավասարումը: Գրենք $k^2 - 4k + 4 = 0$ բնութագրիչ հավասարումը: Գտնում ենք նրա արմատները՝ $k_1 = k_2 = 2$: Ընդհանուր ինտեգրալը կլինի

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

§ 22. n-րդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ հավասարումներ

Գիտարկենք n-րդ կարգի գծային համասեռ հավասարումը՝

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0: \quad (1)$$

Ենթադրելու ենք, որ a_1, a_2, \dots, a_n հաստատուններ են: Նախքան (1) հավասարման լուծման մեթոդի նշելը, տանք հետազայի համար անհրաժեշտ մի սահմանում:

Սահմանում 1: Եթե $[a, b]$ հատվածի բոլոր x-երի համար տեղի ունի

$$\varphi_n(x) = A_1 \varphi_1(x) + A_2 \varphi_2(x) + \dots + A_{n-1} \varphi_{n-1}(x)$$

հավասարությունը, որտեղ A_1, A_2, \dots, A_n հաստատուն թվեր են և ոչ բոլորն են հավասար զրոյի, ապա ասում են, որ $\varphi_n(x)$ -ը գծորեն արտահայտվում է $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ ֆունկցիաների միջոցով:

Սահմանում 2: $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)$ n հատ ֆունկցիաները կոչվում են գծորեն անկախ, եթե այդ ֆունկցիաներից և ոչ մեկը գծորեն չի արտահայտվում մյուսների միջոցով:

Գիտողություն 1: Սահմանումներից հետևում է, որ եթե $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ ֆունկցիաները գծորեն կախված են, ապա կգտնվեն ոչ բոլորը զրոյի հավասար C_1, C_2, \dots, C_n հաստատունները, այնպիսիք, որ $[a, b]$ հատվածի բոլոր x-երի համար տեղի կունենա

$$C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \dots + C_n \varphi_n(x) \equiv 0$$

նույնությունը:

Օրինակ 1: $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = 3e^x$ ֆունկցիաները գծորեն կախված են,

քանի որ $C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = -\frac{1}{3}$ արժեքների դեպքում տեղի ունի $C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3C_3 e^x \equiv 0$

Ֆունկցիաները:

Օրինակ 2: $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, քանի որ C_1, C_2, C_3 ոչ մի արժեքների դեպքում, որոնք միաժամանակ զրո չեն, $C_1 \cdot 1 + C_2 x + C_3 x^2$

արտահայտությունը նույնաբար զրո չի լինի:

Օրինակ 3: $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}$ ֆունկցիաները, որտեղ $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ տարբեր թվեր են, գծորեն անկախ են: (Այս պնդումը բերում ենք առանց ապացուցման):

Այժմ անցնենք (1) հավասարման լուծմանը: Այդ հավասարման համար իրավացի է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1: Եթե y_1, y_2, \dots, y_n ֆունկցիաները (1) հավասարման գծորեն անկախ լուծումներն են, ապա այդ հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (2)$$

որտեղ C_1, \dots, C_n կամայական հաստատուններ են:

Եթե (1) հավասարման գործակիցները հաստատուն են, ապա ընդհանուր լուծումը գտնում են այնպես, ինչպես երկրորդ կարգի հավասարման դեպքում:

1) Կազմում ենք բնութագրիչ հավասարումը՝

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0:$$

2) Գտնում ենք բնութագրիչ հավասարման արմատները.

$$k_1, k_2, \dots, k_n:$$

3) Ըստ արմատների բնույթի գրում ենք գծորեն անկախ մասնավոր լուծումները, դեկլարվելով այն բանով, որ.

ա) յուրաքանչյուր k իրական միապատիկ արմատին համապատասխանում է e^{kx} մասնավոր լուծում,

բ) $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ և $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ կոմպլեքս համալուծ միապատիկ արմատների յուրաքանչյուր զույգին համապատասխանում են $e^{\alpha x} \cos \beta x$ և $e^{\alpha x} \sin \beta x$ երկու մասնավոր լուծումներ,

գ) յուրաքանչյուր r բազմապատիկությունում k իրական արմատին համապատասխանում են r գծորեն անկախ մասնավոր լուծումներ՝ $e^{kx}, x e^{kx}, \dots, x^{r-1} e^{kx}$,

դ) $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ և $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ բազմապատիկությունում կոմպլեքս համալուծ արմատների յուրաքանչյուր զույգին համապատասխանում են 2μ մասնավոր լուծումներ

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin \beta x:$$

Այդպիսի մասնավոր լուծումները կլինեն ճիշտ այնքան, ինչպիսին բնութագրիչ հավասարման աստիճանն է (այսինքն այնքան, ինչպիսին տվյալ գծային դիֆերենցիալ հավասարման կարգն է): Կարելի է ապացուցել, որ այդ լուծումները գծորեն անկախ են:

4) Գտնելով y_1, y_2, \dots, y_n n հատ գծորեն անկախ լուծումները, կառուցում ենք տվյալ գծային դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

որտեղ C_1, C_2, \dots, C_n կամայական հաստատուններ են:

Օրինակ 4: Գտնել

$$y^{IV} - y = 0$$

հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Լուծում: Կազմենք բնութագրիչ հավասարումը

$$k^4 - 1 = 0:$$

Գտնում ենք բնութագրիչ հավասարման արմատները.

$$k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = i, k_4 = -i:$$

Գրում ենք ընդհանուր ինտեգրալը.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

որտեղ C_1, C_2, C_3, C_4 կամայական հաստատուններ են:

Դիտողություն: Շարադրվածից հետևում է, որ հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման ամբողջ գծվարությունը բնութագրիչ հավասարման լուծման մեջ է:

§ 23. Երկրորդ կարգի անհամասեռ գծային հավասարումներ

Դիցուք ունենք

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (1)$$

երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ հավասարումը:

Այդպիսի (1) հավասարման ընդհանուր լուծման կառուցվածքը որոշվում է հետևյալ թեորեմով.

Թեորեմ 1: (1) անհամասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը ներկայացվում է որպես այդ հավասարման որևէ y^* մասնավոր լուծման և

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (2)$$

համապատասխան համասեռ հավասարման \bar{y} ընդհանուր լուծման գումար:

Ապացուցում: Պետք է ապացուցել, որ

$$y = \bar{y} + y^*$$

գումարը (1) հավասարման ընդհանուր լուծումն է:

(1) հավասարման մեջ y -ի փոխարեն տեղադրելով $\bar{y} + y^*$ գումարը, կունենանք.

$$(\bar{y} + y^*)'' + a_1 (\bar{y} + y^*)' + a_2 (\bar{y} + y^*) = f(x)$$

կամ

$$(\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y}) + (y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^*) = f(x): \quad (4)$$

Քանի որ y -ը (2) հավասարման լուծումն է, ապա առաջին փակագծերում գտնվող արտահայտությունը նույնաբար հավասար է զրոյի: Քանի որ y^* -ը (1) հավասարման լուծումն է, ապա երկրորդ փակագծերում գտնվող արտահայտությունը հավասար է $f(x)$ -ի: Հետևաբար, (4) հավասարությունը նույնություն է: Այսպիսով, թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է:

Այժմ ապացուցենք, որ (3) արտահայտությունը (1) հավասարման ընդհանուր լուծումն է, այսինքն՝ ցույց տանք, որ նրա մեջ մտնող կամայական հաստատունները կարելի է ընտրել այնպես, որ ինչպիսին էլ լինեն x_0, y_0 և y'_0 թվերը (այնքան որ x_0 -ն վերցված լինի այն տիրույթից, որտեղ a_1, a_2 և $f(x)$ -ը անընդհատ են) բավարարվեն

$$y = x_0 = y_0, y'_{x=x_0} = y'_0 \quad (5)$$

սկզբնական պայմանները:

Նկատելով, որ \bar{y} -ը կարելի է ներկայացնել

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

տեսքով, որտեղ y_1 -ը և y_2 -ը (2) հավասարման գծորեն անկախ լուծումներն են, իսկ C_1 -ը և C_2 -ը կամայական հաստատուններ են, կարող ենք (3) հավասարությունը գրել

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^* \quad (3')$$

տեսքով: Այդ դեպքում (5) պայմանների հիման վրա կունենանք*

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + y_0^* = y_0,$$

$$C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + y_0^{*'} = y'_0:$$

Այս հավասարումների համակարգից պետք է որոշել C_1 -ը և C_2 -ը: Համակարգը գրելով

$$\left. \begin{aligned} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} &= y_0 - y_0^*, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} &= y'_0 - y_0^{*'} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

տեսքով, նկատում ենք, որ այս համակարգի դետերմինանտը $x = x_0$ կետում y_1 և y_2 ֆունկցիաների համար վրոնսկու դետերմինանտն է: Քանի որ ըստ պայմանի այս ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, ապա վրոնս-

* Այստեղ $y_{10}, y_{20}, y_0^*, y'_{10}, y'_{20}, y_0^{*'}$ նշանակում են $y_1, y_2, y^*, y'_1, y'_2, y'^*$ ֆունկցիաների արժեքները $x = x_0$ կետում:

կու դետերմինանտը հավասար չէ զրոյի, հետևաբար, (6) համակարգն ունի որոշակի C_1 և C_2 լուծում, այսինքն՝ գոյություն ունեն C_1 և C_2 այնպիսի արժեքներ, որոնց համար (3) բանաձևը որոշում է տրված սկզբնական պայմաններին բավարարող (1) հավասարման լուծումը: Թեորեմը լրիվ ապացուցված է:

Այսպիսով, եթե հայտնի է (2) համասեռ հավասարման \bar{y} ընդհանուր լուծումը, ապա (1) անհամասեռ հավասարման ինտեգրման հիմնական խնդիրը կայանում է նրա որևէ y^* մասնավոր լուծումը գտնելու մեջ:

Ցույց տանք անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծումների որոնման ընդհանուր մեթոդը:

Կամայական հաստատունների վարիացիայի մեթոդը: Գրենք (2) համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2: \quad (7)$$

(1) անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը որոնենք (7) տեսքով, C_1 -ը և C_2 -ը ընդունելով որպես x -ի առաջմ անհայտ ֆունկցիաներ:

Գիֆերենցենք (7) հավասարությունը.

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2:$$

Որոնվող C_1 և C_2 ֆունկցիաներն ընտրենք այնպես, որ տեղի ունենա

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \quad (8)$$

հավասարությունը: Եթե հաշվի առնենք այս լրացուցիչ պայմանը, ապա y' առաջին անդամները կընդունի

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

տեսքը: Այժմ դիֆերենցելով վերջին արտահայտությունը, կգտնենք y'' -ը

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2':$$

y -ը, y' -ը և y'' -ը տեղադրելով (1) հավասարման մեջ, կստանանք

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + a_1(C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$$

կամ

$$C_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x):$$

Առաջին երկու փակագծերում եղած արտահայտությունները դառնում են զրո, քանի որ y_1 -ը և y_2 -ը համասեռ հավասարման լուծումներն են: Հետևաբար, վերջին հավասարությունն ընդունում է

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \quad (9)$$

տեսքը:

Այսպիսով, (7) ֆունկցիան (1) անհամասեռ հավասարման լուծում կլինի այն դեպքում, եթե C_1 և C_2 ֆունկցիաները բավարարում են (8) և (9) հավասարումների համակարգերին, այսինքն, եթե

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \quad C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x):$$

Քանի որ այս համակարգի դետերմինանտը (2) հավասարման y_1 և y_2 գծորեն անկախ լուծումների համար վրոնսկու դետերմինանտն է, ապա այն հավասար չէ զրոյի. հետևաբար, լուծելով համակարգը, կգտնենք C_1' -ը և C_2' -ը որպես x -ի որոշակի ֆունկցիաներ.

$$C_1' = \varphi_1(x), \quad C_2' = \varphi_2(x):$$

Ինտեգրելով, կստանանք

$$C_1 = \int \varphi_1(x) dx + \bar{C}_1, \quad C_2 = \int \varphi_2(x) dx + \bar{C}_2,$$

որտեղ \bar{C}_1 -ը և \bar{C}_2 -ը ինտեգրման հաստատուններ են:

Տեղադրելով C_1 -ի և C_2 -ի ստացված արտահայտությունները (7) հավասարության մեջ, կգտնենք \bar{C}_1 և \bar{C}_2 կամայական հաստատուններից կախված ինտեգրալը, այսինքն՝ անհամասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը*:

Օրինակ: Գտնել $y'' - \frac{y'}{x} = x$ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Լուծում: Գտնենք $y'' - \frac{y'}{x} = 0$ համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը: Քանի որ

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}, \quad \text{ապա} \quad \ln y' = \ln x + \ln c; \quad y' = cx;$$

և այսպես,

$$y = C_1 x^2 + C_2:$$

Որպեսզի վերջին արտահայտությունը լինի տրված հավասարման լուծում, պետք է

$$C_1' x^2 + C_2' \cdot 1 = 0, \quad 2C_1' x + C_2' \cdot 0 = x$$

համակարգից C_1 -ը և C_2 -ը որոշենք որպես x -ի ֆունկցիաներ:

Լուծելով այս համակարգը, կգտնենք.

$$C_1' = 1/2, \quad C_2' = 1/3 x^2,$$

որտեղից, ինտեգրելով ստանում ենք

$$C_1 = \frac{x}{2} + \bar{C}_1, \quad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2:$$

Գտած ֆունկցիաները տեղադրելով $y = C_1 x^2 + C_2$ բանաձևի մեջ, ստանում ենք անհամասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

* Եթե ընդունենք $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$, ապա կստանանք (1) հավասարման մասնավոր լուծումը:

$$y = \overline{C}_1 x^2 + \overline{C}_2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}$$

կամ $y = \overline{C}_1 x^2 + \overline{C}_2 + \frac{x^3}{3}$, որտեղ \overline{C}_1 -ը և \overline{C}_2 -ը կամայական հաստատուններ են:

Մասնավոր լուծումները որոնելիս օգտակար է օգտվել հետևյալ թեորեմի արդյունքներից:

$$\text{Թեորեմ 2: } y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x) \quad (10)$$

հավասարման y^* լուծումը, որտեղ աջ մասը $f_1(x)$ և $f_2(x)$ երկու ֆունկցիաների գումար է, կարելի է ներկայացնել $y^* = y^*_1 + y^*_2$ գումարի տեսքով, որտեղ y^*_1 -ը և y^*_2 -ը համապատասխանաբար,

$$y^*_1'' + a_1 y^*_1' + a_2 y^*_1 = f_1(x), \quad (11)$$

$$y^*_2'' + a_1 y^*_2' + a_2 y^*_2 = f_2(x) \quad (12)$$

հավասարումների լուծումներն են:

Ապացուցում: Գումարելով (11) և (12) հավասարումների աջ և ձախ մասերը, կստանանք.

$$(y^*_1 + y^*_2)'' + a_1 (y^*_1 + y^*_2)' + a_2 (y^*_1 + y^*_2) = f_1(x) + f_2(x): \quad (13)$$

Վերջին հավասարությունից հետևում է, որ

$$y^*_1 + y^*_2 = y^*$$

գումարը (10) հավասարման լուծումն է:

Օրինակ: Գտնել

$$y'' - 4y = x + 3e^x$$

հավասարման y^* մասնավոր լուծումը:

Լուծում: $y^*_1'' + 4y^*_1 = x$ հավասարման մասնավոր լուծումը կլինի

$$y^*_1 = \frac{1}{4}x:$$

$y^*_2'' + 4y^*_2 = 3e^x$ հավասարման մասնավոր լուծումը կլինի

$$y^*_2 = \frac{3}{5}e^x:$$

Տրված հավասարման y^* մասնավոր լուծումը կլինի

$$y^* = \frac{1}{4}x + \frac{3}{5}e^x:$$

§ 24. Երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով անհամասեռ գծային հավասարումներ

Դիցուք ունենք

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

* Ակնհայտ է, որ համապատասխան թեորեմը մնում է իրավացի աջ մասի ցանկացած թվով գումարելիների դեպքում:

հավասարումը, որտեղ p -ն և q -ն իրական թվեր են:

Նախորդ պարագրաֆում ցույց տրվեց անհամասեռ հավասարման լուծման որոնման ընդհանուր մեթոդը: Հաստատուն գործակիցներով հավասարման դեպքում հաճախ հնարավոր է լինում մասնավոր լուծումը գտնել ավելի հեշտ, շղիմեղով ինտեգրման: Դիտարկենք (1) հավասարման համար մի քանի այդպիսի հնարավորություններ:

1. Ենթադրենք (1) հավասարման աջ մասը բազմանդամի և ցուցչային ֆունկցիայի արտադրյալն է, այսինքն՝ ունի

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \quad (2)$$

տեսքը, որտեղ $P_n(x)$ -ը n -րդ աստիճանի բազմանդամ է: Այս դեպքում հնարավոր են հետևյալ մասնավոր դեպքերը.

ա) α թիվը

$$k^2 + pk + q = 0$$

բնութագրիչ հավասարման արմատը չէ:

Այս դեպքում մասնավոր լուծումը պետք է որոնել հետևյալ տեսքով

$$y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x} = Q_n(x) e^{\alpha x}: \quad (3)$$

Իրոք, y^* -ը տեղադրելով (1) հավասարման մեջ և բոլոր անդամները բաժանելով $e^{\alpha x}$ բազմապատկիչի վրա, կունենանք

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p) Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) Q_n(x) = P_n(x): \quad (4)$$

$Q_n(x)$ -ը n աստիճանի բազմանդամ է, $Q_n'(x)$ -ը $(n-1)$ աստիճանի, $Q_n''(x)$ -ը՝ $n-2$ աստիճանի: Այսպիսով, հավասարության աջ և ձախ կողմերում ունենք n աստիճանի բազմանդամներ: Հավասարեցնելով x -ի միևնույն աստիճանի գործակիցները (անհայտ գործակիցները $n+1$ հատ են), կստանանք $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ անհայտ գործակիցները որոշելու համար $n+1$ հատ հավասարումների համակարգ:

բ) α թիվը բնութագրիչ հավասարման պարզ (մի ապատիկ) արմատն է:

Եթե այս դեպքում մենք սկսեինք մասնավոր լուծումը որոնել (3) տեսքով, ապա (4) հավասարության մեջ ձախ կողմում կստացվեր $n-1$ աստիճանի բազմանդամ, քանի որ $Q_n(x)$ -ի գործակիցը, այսինքն՝ $\alpha^2 + p\alpha + q$ -ն հավասար է զրոյի, իսկ $Q_n'(x)$ և $Q_n''(x)$ բազմանդամները n -ից ցածր աստիճանի են: Հետևաբար, ոչ մի A_0, A_1, \dots, A_n դեպքում (4) հավասարությունը նույնություն չի լինի: Ուստի դիտարկվող դեպքում մասնավոր լուծումը պետք է վերցնել $n+1$ աստիճանի բազ-

մանդամի տեսքով, բայց առանց ազատ անդամի (քանի որ դիֆերենցիալիս այդ բազմանդամի ազատ անդամը վերանում է)¹.

$$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}$$

դ) α թիվը բնութագրիչ հավասարման կրկնապատիկ արմատն է: Այս դեպքում $Q_n(x)e^{\alpha x}$ ֆունկցիան դիֆերենցիալ հավասարման մեջ տեղադրելիս բազմանդամի աստիճանն իջնում է երկու միավորով: Իրոք, եթե α -ն բնութագրիչ հավասարման արմատն է, ապա $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$. բացի այդ, քանի որ α -ն կրկնապատիկ արմատ է, ապա $2\alpha = -p$ (քանի որ ըստ տարրական հանրահաշվի հայտնի թեորեմի՝ բերված տեսքի քառակուսի հավասարման արմատների գումարը հավասար է անհայտի առաջին աստիճանի գործակիցին՝ վերցրած հակադիր նշանով): Եվ այսպես, $2\alpha + p = 0$:

Հետևաբար, (4) հավասարման ձախ մասում մնում է $Q''_n(x)$, այսինքն՝ $n-2$ աստիճանի բազմանդամ: Որպեսզի տեղադրումից հետո ստացվի n աստիճանի բազմանդամ, պետք է մասնավոր լուծումը որոնել $e^{\alpha x}$ -ի և $n+2$ աստիճանի բազմանդամի արտադրյալի տեսքով: Ընդ որում այդ բազմանդամի ազատ անդամը և առաջին աստիճան պարունակող անդամը դիֆերենցման ժամանակ անհետանում են. ուստի նրանց կարելի է մասնավոր լուծման մեջ չմտցնել:

Այսպիսով, երբ α -ն հանդիսանում է բնութագրիչ հավասարման կրկնապատիկ արմատը, մասնավոր լուծումը կարելի է վերցնել

$$y^* = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}$$

տեսքով:

Օրինակ 1: Գտնել $y'' + 4y' + 2y = x$ հավասարման ընդհանուր լուծումը:
Լուծում: Համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է.

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

Քանի որ տրված անհամասեռ հավասարման աջ մասն ունի $x e^{\alpha x}$ տեսքը (այսինքն՝ $P_1(x)e^{0x}$ տեսքը), ըստ որում 0 -ն $k^2 + 4k + 3 = 0$ բնութագրիչ հավասարման արմատը չէ, ապա մասնակի լուծումը կորոնենք $y^* = Q_1(x)e^{0x}$ տեսքով, այսինքն՝ կընդունենք

$$y^* = A_0 x + A_1$$

Այս արտահայտությունը տեղադրելով տրված հավասարման մեջ, կունենանք.

$$4A_0 + 3(A_0 x + A_1) = x$$

Հավասարեցնելով x -ի միևնույն աստիճանների գործակիցները, կստանանք.

$$3A_0 = 1, \quad 4A_0 + 3A_1 = 0,$$

¹ Նկատենք, որ վերևում բերված բոլոր արդյունքները մնում են ուժի մեջ և այն դեպքում, երբ α -ն կոմպլեքս թիվ է (դա հեղևում է $e^{m\alpha}$ ֆունկցիայի (m -ը ցանկացած կոմպլեքս թիվ է) դիֆերենցման կանոններից. տես VII գլխի, § 4):

որտեղից

$$A_0 = 1/3, \quad A_1 = -4/9:$$

Հետևաբար,

$$y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$$

$y = \bar{y} + y^*$ ընդհանուր լուծումը կլինի

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$$

Օրինակ 2: Գտնել $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$ հավասարման ընդհանուր լուծումը:
Լուծում: Համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը կգրենք հետ

$$\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x:$$

Տրված հավասարման $(x^2 + 1)e^{3x}$ աջ մասն ունի $P_2(x)e^{3x}$ տեսքը: Քանի որ աստիճանի ցուցիչում եղած 3 գործակիցը բնութագրիչ հավասարման արմատը չէ, ապա մասնավոր լուծումը կորոնենք

$$y^* = Q_2(x)e^{3x} \quad \text{կամ} \quad y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$$

տեսքով: Այս արտահայտությունը տեղադրելով դիֆերենցիալ հավասարման մեջ, կունենանք

$$[9(Ax^2 + Bx + C) + 6(2Ax + B) + 2A + 9(Ax^2 + Bx + C)]e^{3x} = (x^2 + 1)e^{3x}$$

Կրճատելով e^{3x} -ով և հավասարեցնելով x -ի միևնույն աստիճանների գործակիցները, կստանանք

$$18A = 1, \quad 12A + 18B = 0, \quad 2A + 6B + 18C = 1,$$

որտեղից $A = 1/18$, $B = -1/27$, $C = 5/81$: Հետևաբար, մասնավոր լուծումն է

$$y^* = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x},$$

իսկ ընդհանուր լուծումը՝

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x}$$

Օրինակ 3: Լուծել $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$ հավասարումը:

Լուծում: Այստեղ աջ մասն ունի $P_1(x)e^{1 \cdot x}$ տեսքը, ընդ որում աստիճանի ցուցիչի 1 գործակիցը բնութագրիչ բազմանդամի արմատն է: Հետևաբար, մասնավոր լուծումը որոնում ենք $y^* = xQ_1(x)e^x$ կամ

$$y^* = x(Ax + B)e^x$$

տեսքով. տեղադրելով այս արտահայտությունը հավասարման մեջ, կունենանք

$$[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx)]e^x = (x-2)e^x$$

կամ

$$(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x-2)e^x:$$

Հավասարեցնելով x -ի միևնույն աստիճանների գործակիցները, կստանանք.

$$-10A = 1, \quad -5B + 2A = -2,$$

որտեղից $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{9}{25}$; Հետևաբար, մասնավոր լուծումը կլինի

$$y^* = x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^{3x};$$

Ընդհանուր լուծումը կլինի

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{3x} + x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^{3x};$$

II. Դիցուք աջ մասն ունի

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (5)$$

տեսքը, որտեղ $P(x)$ -ը և $Q(x)$ -ը բազմանդամներ են:

Այս դեպքը կարող է քննարկվել նախորդ դեպքում կիրառված եղանակով, եթե եռանկյունաչափական ֆունկցիաներից անցնենք ցուցչայիններին: Ըստ էյլերի բանաձևերի $\cos \beta x$ -ը և $\sin \beta x$ -ը փոխարինելով ցուցչային ֆունկցիաներով (տես VII գլխի, § 5), կստանանք.

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q(x)e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

կամ

$$f(x) = \left[\frac{1}{2} P(x) + \frac{1}{2i} Q(x) \right] e^{(\alpha+i\beta)x} + \left[\frac{1}{2} P(x) - \frac{1}{2i} Q(x) \right] e^{(\alpha-i\beta)x}; \quad (6)$$

Այստեղ քառակուսի փակագծերում բազմանդամներ են, որոնց աստիճանները հավասար են $P(x)$ և $Q(x)$ բազմանդամների աստիճաններից ամենաբարձրին: Այսպիսով, ստացանք I դեպքում քննարկված տեսքի աջ մաս:

Ապացուցվում է (ապացուցումը մենք չենք բերի), որ կարելի է գտնել կոմպլեքս թվեր չպարունակող մասնավոր լուծումներ:

Եվ այսպես, եթե (1) հավասարման աջ մասն ունի

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (7)$$

տեսքը, որտեղ $P(x)$ -ը և $Q(x)$ -ը x -ի բազմանդամներ են, ապա մասնավոր լուծման տեսքը որոշվում է այսպես.

ա) եթե $\alpha + i\beta$ բնութագրիչ հավասարման արմատը չէ, ապա (1) հավասարման մասնավոր լուծումը պետք է որոնել

$$y^* = U(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (8)$$

տեսքով, որտեղ $U(x)$ -ը և $V(x)$ -ը բազմանդամներ են, որոնց աստիճանը հավասար է $P(x)$ և $Q(x)$ բազմանդամների աստիճաններից ամենաբարձրին,

բ) եթե $\alpha + i\beta$ -ն բնութագրիչ հավասարման արմատն է, ապա մասնավոր լուծումը որոնում ենք հետևյալ տեսքով.

$$y^* = x[U(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)e^{\alpha x} \sin \beta x]; \quad (9)$$

Ընդ որում հնարավոր սխալներից խուսափելու համար պետք է նշել, որ մասնավոր լուծումների նշված (8) և (9) տեսքերը, ակնհայտ է, պահպանվում են և այն դեպքում, երբ (1) հավասարման աջ մասում $P(x)$ և $Q(x)$ բազմանդամներից մեկը նույնաբար հավասար է զրոյի, այսինքն՝ երբ աջ մասն ունի

$$P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{կամ} \quad Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$$

տեսքը:

Այնուհետև, քննարկենք կարևոր մասնավոր դեպք: Ենթադրենք երկրորդ կարգի գծային հավասարման աջ մասն ունի

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x \quad (7')$$

տեսքը, որտեղ M -ը և N -ը հաստատուն թվեր են:

ա) եթե βi -ն բնութագրիչ հավասարման արմատը չէ, ապա մասնավոր լուծումը պետք է որոնել

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x \quad (8')$$

տեսքով:

բ) եթե βi -ն բնութագրիչ հավասարման արմատն է, ապա մասնավոր լուծումը պետք է որոնել հետևյալ տեսքով

$$y^* = x(A \cos \beta x + B \sin \beta x); \quad (9')$$

Նշենք, որ (7') ֆունկցիան (7) ֆունկցիայի մասնավոր դեպքն է $P(x) = M$, $Q(x) = N$, $\alpha = 0$. (8') և (9') ֆունկցիաները (8) և (9) ֆունկցիաների մասնավոր դեպքերն են:

Օրինակ 4: Գտնել $y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x$ գծային անհամասեռ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը:

Լուծում: $k^2 + 2k + 5 = 0$ բնութագրիչ հավասարումն ունի $k_1 = -1 + 2i$; $k_2 = -1 - 2i$ արմատները: Ուստի համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը կլինի

$$\bar{y} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x):$$

Անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը կորոնենք

$$y^* = A \cos x + B \sin x$$

տեսքով, որտեղ A -ն և B -ն հաստատուն գործակիցներ են, որոնք ենթակա են որոշման y^* -ը տեղադրելով տրված հավասարման մեջ, կունենանք

$$-A \cos x - B \sin x + 2(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 2 \cos x:$$

Հավասարեցնելով $\cos x$ -ի և $\sin x$ -ի գործակիցները, կստանանք A -ն և B -ն գտնելու համար

$$-A + 2B + 5A = 2, \quad -B - 2A + 5B = 0$$

երկու հավասարումները, որտեղից $A = \frac{2}{5}$, $B = \frac{1}{5}$, Տրված հավասարման ընդհանուր

լուծումը՝ $y = \bar{y} + y^*$, այսինքն՝

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x:$$

2—Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվներ

Օրինակ 5: Լուծել $y''+4y=\cos 2x$ հավասարումը:

Լուծում: Բնութագրիչ հավասարումն ունի $k_1=2i$, $k_2=-2i$ արմատները. ուստի համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$\bar{y}=C_1 \cos 2x+C_2 \sin 2x$$

սեպրել: Անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը որոնենք

$$y^*=x(A \cos 2x+B \sin 2x)$$

սեպրել: Այդ դեպքում

$$y^*=2x(-A \sin 2x+B \cos 2x)+(A \cos 2x+B \sin 2x),$$

$$y^{*''}=-4x(-A \cos 2x-B \sin 2x)+4(-A \sin 2x+B \cos 2x),$$

Ածանցյալների այս արտահայտությունները տեղադրելով սրված հավասարման մեջ և հավասարեցնելով $\cos 2x$ -ի և $\sin 2x$ -ի գործակիցները, ստանում ենք հավասարումների համակարգ՝ A -ն և B -ն որոշելու համար. $4B=1$, $-4A=0$, որտեղից $A=0$,

$B=\frac{1}{4}$: Այսպիսով, սրված հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը կլինի

$$y=C \cos 2x+C_2 \sin 2x+\frac{1}{4}x \sin 2x:$$

Օրինակ 6: Լուծել $y''-y=3e^{2x} \cos x$ հավասարումը:

Լուծում: Հավասարման աջ մասն ունի

$$f(x)=e^{2x}(M \cos x+N \sin x)$$

սեպրել, ընդ որում $M=3$, $N=0$: $k^2-1=0$ բնութագրիչ հավասարումն ունի $k_1=1$, $k_2=-1$ արմատները: Համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$\bar{y}=C_1 e^x+C_2 e^{-x}:$$

Քանի որ $\alpha+i\beta=2+i$ բնութագրիչ հավասարման արմատը չէ, ապա մասնավոր լուծումը որոնում ենք

$$y^*=e^{2x}(A \cos x+B \sin x)$$

սեպրել: Տեղադրելով այս արտահայտությունը հավասարման մեջ և միացնելով նման անդամները, կստանանք.

$$(2A+4B)e^{2x} \cos x+(-4A+2B)e^{2x} \sin x=3e^{2x} \cos x:$$

Հավասարեցնելով $\cos x$ -ի և $\sin x$ -ի գործակիցները, կստանանք.

$$2A+4B=3, \quad -4A+2B=0:$$

Այստեղից $A=\frac{3}{10}$, $B=\frac{3}{5}$: Հետևաբար, մասնավոր լուծումն է

$$y^*=e^{2x}\left(\frac{3}{10} \cos x+\frac{3}{5} \sin x\right),$$

իսկ ընդհանուր լուծումը՝

$$y=C_1 e^x+C_2 e^{-x}+e^{2x}\left(\frac{3}{10} \cos x+\frac{3}{5} \sin x\right):$$

Դիտողություն: Նշենք, որ այս պարագրաֆի բոլոր դատողություններն իրավացի են նաև առաջին կարգի գծային հավասարման համար: Քննարկենք, օրինակ,

$$\frac{dy}{dx}+ay=b \quad (10)$$

հաստատուն գործակիցներով առաջին կարգի հավասարումը, որտեղ a -ն և b -ն հաստատուններ են (այս հավասարումը հաճախ է հանդիպում տեխնիկական կիրառություններում): Գտնենք

$$\frac{dy}{dx}+ay=0$$

համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Կազմում ենք բնութագրիչ հավասարումը.

$$k+a=0, \quad k=-a:$$

Համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$\bar{y}=Ce^{-ax}:$$

Անհամասեռ հավասարման y^* մասնավոր լուծումը որոնենք $y^*=B$ սեպրել: Տեղադրելով (10) հավասարման մեջ, ստանում ենք

$$aB=b, \quad B=\frac{b}{a}:$$

Այսպիսով,

$$y^*=\frac{b}{a}:$$

(10) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի.

$$y=\bar{y}+y^* \quad \text{կամ} \quad y=Ce^{-ax}+b/a: \quad (11)$$

§ 25. Բարձր կարգի գծային անհամասեռ հավասարումներ

Դիտարկենք

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\dots+a_n y=f(x) \quad (1)$$

հավասարումը, որտեղ $a_1, a_2, \dots, a_n, f(x)$ -ը x -ի անընդհատ ֆունկցիաներ են (կամ հաստատուն թվեր): Դիցուք մեզ հայտնի է

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\dots+a_n y=0 \quad (2)$$

համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը՝

$$\bar{y}=C_1 y_1+C_2 y_2+\dots+C_n y_n \quad (3)$$

ինչպես և երկրորդ կարգի հավասարման դեպքում, (1) հավասարման համար իրավացի է հետևյալ պնդումը:

Թե որ եմ: Եթե \bar{y} -ը (2) համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ y^* -ը (1) անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծումն է, ապա

$$Y=\bar{y}+y^*$$

անհամասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է:

բ) եթե βi թիվը բնութագրիչ հավասարման μ բազմապատիկությամբ արմատն է, ապա

$$y^* = x^p (A \cos \beta x + B \sin \beta x):$$

III. Դիցուք

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

որտեղ $P(x)$ -ը և $Q(x)$ -ը x -ի բազմանդամներ են: Այս դեպքում

ա) եթե $\alpha + \beta i$ թիվը բնութագրիչ բազմանդամի արմատը չէ, ապա մասնավոր լուծումը որոնում ենք

$$y^* = U(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$$

տեսքով, որտեղ $U(x)$ -ը և $V(x)$ -ը բազմանդամներ են, որոնց աստիճանը հավասար է $P(x)$ և $Q(x)$ բազմանդամների աստիճաններից ամենաբարձրին,

բ) եթե $\alpha + \beta i$ թիվը բնութագրիչ բազմանդամի μ բազմապատիկությամբ արմատն է, ապա մասնավոր լուծումը որոնում ենք

$$y^* = x^p [U(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)e^{\alpha x} \sin \beta x]$$

տեսքով, որտեղ $U(x)$ -ը և $V(x)$ -ը ունեն նույն իմաստը, ինչ որ ա) դեպքում:

Ը ն դ հ ա ն ու ը ղ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն I և II դ ե պ ք ե ռ ի վ ե ռ ա - բ ե ռ յ ա լ: Նույնիսկ այն դեպքում, երբ հավասարման աջ մասում գտնվում է միայն $\cos \beta x$ կամ միայն $\sin \beta x$ պարունակող արտահայտություն, մենք պետք է լուծումը որոնենք այն տեսքով, ինչպես ցույց տրվեց, այսինքն՝ սինուսներով և կոսինուսներով: Այլ խոսքերով, այն բանից, որ աջ մասը չի պարունակում $\cos \beta x$ կամ $\sin \beta x$, դեռևս չի հետևում, որ հավասարման մասնավոր լուծումն այդ ֆունկցիաները չի պարունակում: Դրանում մենք պարզ էինք համոզվել, քննարկելով նախորդ պարագրաֆի 4, 5, 6 օրինակները, ինչպես նաև օրինակ 2-ը, որը բերված է այս պարագրաֆում:

Օրինակ 1: Գտնել

$$y^{iv} - y = x^3 + 1$$

հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Լուծում: $k^4 - 1 = 0$ բնութագրիչ հավասարումն ունի $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = i, k_4 = -i$

արմատները: Գտնում ենք համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը (տես օրինակ 4, § 22):

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x:$$

Անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը որոնում ենք

$$y^* = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3$$

տեսքով:

y^* -ը չորս անգամ դիֆերենցելով և ստացված արտահայտությունները տեղադրելով տրված հավասարման մեջ, կստանանք.

$$-A_0 x^3 - A_1 x^2 - A_2 x - A_3 = x^3 + 1,$$

Հավասարեցնելով x -ի միևնույն աստիճանների գործակիցները, կունենանք

$$-A_0 = 1, \quad -A_1 = 0, \quad -A_2 = 0, \quad -A_3 = 1:$$

Հետևաբար,

$$y^* = -x^3 - 1:$$

Անհամասեռ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը գտնում ենք ըստ $y = \bar{y} + y^*$ բանաձևի, այսինքն՝

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - 1:$$

Օրինակ 2: Լուծել $y^{iv} - y = 5 \cos x$ հավասարումը:

Լուծում: $k^4 - 1 = 0$ բնութագրիչ հավասարումն ունի $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = i, k_4 = -i$ արմատները: Հետևաբար, համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x:$$

Այնուհետև, տրված անհամասեռ հավասարման աջ մասն ունի

$$f(x) = M \cos x + N \sin x$$

տեսքը, որտեղ $M = 5, N = 0$:

Փահի որ i -ն բնութագրիչ հավասարման պարզ արմատն է, ապա մասնավոր լուծումը որոնում ենք

$$y^* = x (A \cos x + B \sin x)$$

տեսքով: Այս արտահայտությունը տեղադրելով հավասարման մեջ, կգտնենք

$$4A \sin x - 4B \cos x = 5 \cos x,$$

որտեղից

$$4A = 0, \quad -4B = 5,$$

կամ $A = 0, B = -\frac{5}{4}$: Հետևաբար, դիֆերենցիալ հավասարման մասնավոր լուծումն է

$$y^* = -\frac{5}{4} x \sin x,$$

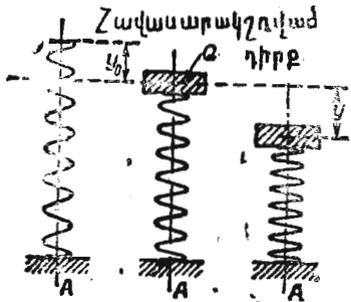
իսկ ընդհանուր լուծումը՝

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{5}{4} x \sin x:$$

§ 26. Մեխանիկական տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումը

Այս և հաջորդ պարագրաֆներում կդիտարկենք կիրառական մեխանիկայի մի խնդիր՝ այն հետազոտելով և լուծելով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների օգնությամբ:

Դիցուք Q զանգվածն ունեցող բեռը գտնվում է առաձգական զսպակի վրա (նկ. 274): Բեռի շեղումը հավասարակաշռության դիրքից նշանակենք y -ով: Շեղումը դեպի ներքև կհամարենք դրական, դեպի վերև՝ բացասական: Հավասարակշռության դիրքում կշռի ուժը հավասարա-



Նկ. 274

կոշտություն է զսպակի առաձգականության մեջ: Ենթադրենք, որ այն ուժը, որը ձգտում է բեռը վերադարձնել հավասարակշռության դիրքին (այսպես կոչված վերականգնող ուժ) համեմատական է շեղմանը, այսինքն՝ հավասար է $-ky$, որտեղ k -ն տվյալ զսպակի համար որևէ հաստատուն մեծություն է (այսպես կոչված «զսպակի կոշտությունը»)*:

Ենթադրենք, որ Q բեռի շարժմանը խոչընդոտում է դիմադրության ուժը, որն ուղղված է շարժման ուղղությանը հակադիր, և համեմատական է զսպակի ստորին կետի նկատմամբ բեռի շարժման արագությանը, այսինքն՝ $-\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt}$, որտեղ $\lambda = \text{const} > 0$ (մեղմիչ): Գրենք զսպակի վրա բեռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը: Ըստ Նյուտոնի երկրորդ օրենքի

$$Q \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

(այստեղ k -ն և λ -ն դրական թվեր են): Մենք ստացանք հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային համասեռ հավասարում:

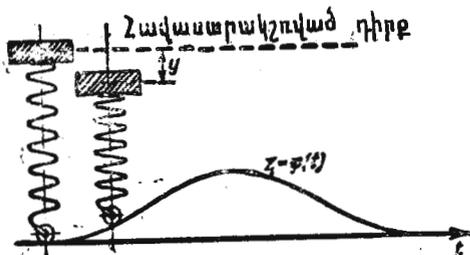
Այդ հավասարումը կարելի է գրել այսպես.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0, \quad (1')$$

որտեղ նշանակված է

$$p = \lambda/Q, \quad q = k/Q:$$

Այնուհետև, ենթադրենք զսպակի ստորին կետը $z = \varphi(t)$ օրենքով կատարում է ուղղաձիգ շարժումներ: Դա, օրինակ, տեղի կունենա, եթե զսպակի ստորին ծայրն ամրացված է թավալուկին, որը զսպակի և բեռի հետ շարժվում է անհարթ թևի վրա (Նկ. 275):



Նկ. 275

Այդ դեպքում վերականգնող ուժը հավասար կլինի ոչ թե $-ky$, այլ $-k[y + \varphi(t)]$, դիմադրության ուժը կլինի $-\lambda[y' + \varphi'(t)]$ և (1) հավասարման փոխարեն կստանանք.

$$Q \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = -k\varphi(t) - \lambda\varphi'(t) \quad (2)$$

կամ

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(t), \quad (2')$$

որտեղ նշանակված է.

$$f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{Q}:$$

Մենք ստացանք երկրորդ կարգի անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում:

(1') հավասարումն անվանում են ազատ տատանումների հավասարում, իսկ (2') հավասարումը՝ հարկադրական տատանումների հավասարում:

§ 27. Ազատ տատանումներ: Հարմոնիկ տատանումների վեկտորական և կոմպլեքս պատկերումը

Նախ քննարկենք ազատ տատանումների

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (p > 0, q > 0, \text{ տես } § 26) \quad (1)$$

հավասարումը: Գրենք համապատասխան բնութագրիչ հավասարումը՝

$$k^2 + pk + q = 0$$

և գտնենք նրա արմատները.

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}:$$

1) Դիցուք $\frac{p^2}{4} > q$: Այս դեպքում k_1 և k_2 արմատները իրական բացասական թվեր են: Ընդհանուր լուծումն արտահայտվում է ցուցային ֆունկցիաների միջոցով.

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \quad (k_1 < 0, k_2 < 0): \quad (2)$$

Այս բանաձևից հետևում է, որ ցանկացած սկզբնական պայմանների դեպքում y շեղումն ասիմպտոտորեն ձգտում է զրոյի, եթե $t \rightarrow \infty$: Տվյալ դեպքում տատանումներ չեն լինի, քանի որ զսպակի k կոշտության գործակիցի համեմատությամբ դիմադրության ուժերը մեծ են:

* Այն զսպակները, որոնց վերականգնող ուժը համեմատական է շեղմանը, կոչվում են «գծային բնութագրիչով» զսպակներ:

2) Դիցուք $\frac{p^2}{4} = q$. Այս դեպքում k_1 և k_2 արմատները հավասար են (և հավասար են $-\frac{p}{2}$ բացասական թվին): Ուստի ընդհանուր լուծումը կլինի

$$y = C_1 e^{-\frac{p}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{p}{2}t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{p}{2}t} \quad (3)$$

Այստեղ նույնպես շեղումը ձգտում է զրոյի, երբ $t \rightarrow \infty$, բայց ոչ այնպես արագ, ինչպես նախորդ դեպքում (շնորհիվ $C_1 + C_2 t$ արտադրիչի առկայության):

3) Դիցուք $p=0$, այսինքն՝ բացակայում է դիմադրության ուժը: (1) հավասարումը կընդունի

$$y'' + qy = 0 \quad (4)$$

տեսքը: Բնութագրիչ հավասարումն ունի $k^2 + q = 0$ տեսքը, իսկ նրա արմատներն են $k_1 = \beta i$, $k_2 = -\beta i$, որտեղ $\beta = \sqrt{q}$: Ընդհանուր լուծումն է

$$y = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \quad (5)$$

Վերջին բանաձևում C_1 և C_2 կամայական հաստատունները փոխարինենք ուրիշներով: Այն է՝ մուծենք A և φ_0 հաստատունները, որոնք C_1 և C_2 հաստատունների հետ կապված են

$$C_1 = A \sin \varphi_0, \quad C_2 = A \cos \varphi_0$$

առնչություններով: A -ն և φ_0 -ն C_1 -ի և C_2 -ի միջոցով որոշվում են այսպես.

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{C_1}{C_2}$$

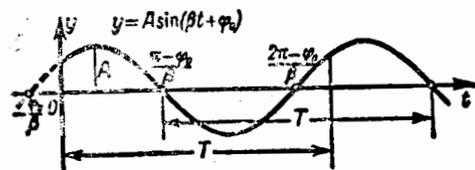
C_1 -ի և C_2 -ի արժեքները տեղադրելով (5) բանաձևի մեջ, կունենանք

$$y = A \sin \varphi_0 \cos \beta t + A \cos \varphi_0 \sin \beta t$$

կամ

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0) \quad (6)$$

Այս դեպքում տատնումները կոչվում են հարմոնիկ: Ինտեգրալ կորեր են սինուսոիդները: Այն T ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում սինուսի արգումենտը փոխվում է 2π -ով, կոչվում է տատանման պարբերություն. տվյալ դեպքում

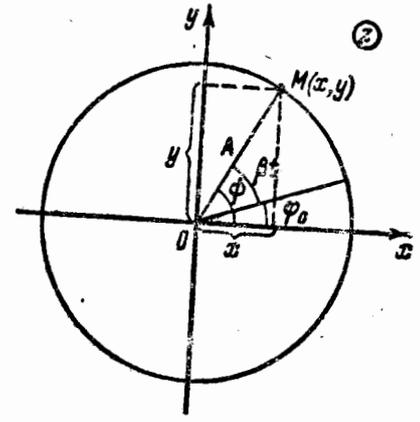


Նկ. 276

$$T = \frac{2\pi}{\beta}$$

Տատանման հաճախություն է կոչվում 2π ժամանակում կատարվող տատանումների թիվը.

տվյալ դեպքում հաճախությունը հավասար է β , A -ն՝ հավասարակշռության դիրքից ամենամեծ շեղման մեծությունը կոչվում է տատանման ամպլիտուդ. φ_0 -ն կոչվում է սկզբնական փուլ: (6) ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 276-ում:



Նկ. 277

էլեկտրատեխնիկայում և ուրիշ դիսցիպլիններում լայնորեն օգտագործվում են հարմոնիկ տատանումների կոմպլեքս և վեկտորական պատկերումները:

xOy կոմպլեքս հարթության մեջ դիտարկենք, $A = A(t)$ շառավիղ-վեկտորը, որն ունի $|A| = A = \text{const}$, հաստատուն երկարություն:

t պարամետրը փոփոխվելիս (տվյալ դեպքում t -ն ժամանակն է) A վեկտորի ծայրը գծում է կոորդինատների սկզբնակետում կենտրոն ունեցող A շառավիղով շրջանագիծ (նկ. 277): Դիցուք A վեկտորով և Ox առանցքով կազմված ψ անկյունն արտահայտվում է այսպես. $\psi = \beta t + \varphi_0$: β մեծությունը կոչվում է A վեկտորի պտտման անկյունային արագություն: Oy և Ox առանցքների վրա A վեկտորի պրոյեկցիաները կլինեն

$$\begin{cases} y = A \sin(\beta t + \varphi_0), \\ x = A \cos(\beta t + \varphi_0): \end{cases} \quad (7)$$

(7) արտահայտությունները (4) հավասարման լուծումներն են: Դիտարկենք

$$z = x + iy = A \cos(\beta t + \varphi_0) + i A \sin(\beta t + \varphi_0)$$

կամ

$$z = A [\cos(\beta t + \varphi_0) + i \sin(\beta t + \varphi_0)] \quad (8)$$

կոմպլեքս մեծությունը:

Ինչպես նշվեց VII գլխի § 1-ում, (8) կոմպլեքս մեծությունը պատկերվում է A վեկտորով:

Այսպիսով, (4) հարմոնիկ տատանումների հավասարման լուծումները կարելի է դիտել որպես φ_0 սկզբնական փուլի դեպքում β անկյունային արագությամբ պտտվող A վեկտորի պրոյեկցիաներ Oy և Ox առանցքների վրա:

Օգտվելով էյլերի բանաձևից (տես VII գլխի § 5 (4)-ը) (8) արտահայտությունը կարելի է գրել այսպես.

$$z = Ae^{i(\beta t + \varphi_0)} \quad (9)$$

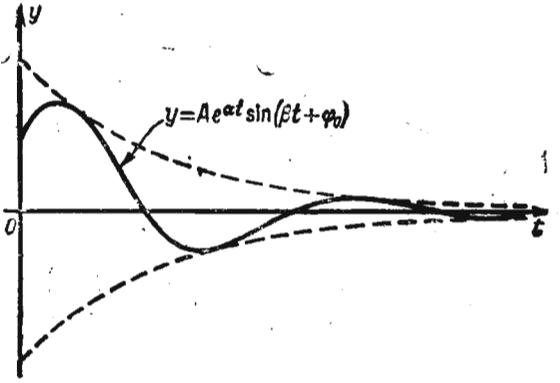
(9) արտահայտության իրական և կեղծ մասերը (4) հավասարման լուծումներն են: (9) արտահայտությունը կոչվում է (4) հավասարման կոմպլեքս լուծում: Այդ արտահայտությունը գրենք այսպես

$$z = Ae^{i\varphi_0} e^{i\beta t} \quad (10)$$

$Ae^{i\varphi_0}$ արտահայտությունը կոչվում է կոմպլեքս ամպլիտուդ: Այն նշանակենք A^* -ով: Այդ դեպքում (10) կոմպլեքս լուծումը կգրվի այսպես.

$$z = A^* e^{i\beta t} \quad (11)$$

4) Դիցուք $p \neq 0$ և $\frac{p^2}{4} < q$:



Նկ. 278

Այս դեպքում բնութագրիչ հավասարման արմատները կոմպլեքս թվեր են

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

որտեղ

$$\alpha = -\frac{p}{2} < 0, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}:$$

Ընդհանուր ինտեգրալն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \quad (12)$$

կամ

$$y = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0): \quad (13)$$

Այստեղ որպես ամպլիտուդ պետք է դիտարկենք ժամանակից կախված $Ae^{\alpha t}$ մեծությունը: Քանի որ $\alpha < 0$, ապա այն ձգտում է զրոյի, երբ $t \rightarrow \infty$, այսինքն՝ այստեղ գործ ունենք մաքուր տատանումների հետ: Մարող տատանումների գրաֆիկը պատկերված է նկ. 278-ում:

§ 28. Հարկադրական տատանումներ

Հարկադրական տատանումների հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$y'' + py' + qy = f(t) \quad (p > 0, q > 0, \text{ տես } § 26): \quad (1)$$

Դիտարկենք գործնականում կարևոր այն դեպքը, երբ գրգռող արտաքին ուժը պարբերական է և փոփոխվում է

$$f(t) = a \sin \omega t$$

օրենքով: Այդ դեպքում (1) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը

$$y'' + py' + qy = a \sin \omega t: \quad (1')$$

1) Նախ ենթադրենք, որ $p \neq 0$ և $\frac{p^2}{4} < q$, այսինքն բնութագրիչ

հավասարումն ունի $\alpha \pm i\beta$ կոմպլեքս արմատները: Այդ դեպքում (տես § 27-ի (12) և (13) բանաձևերը) համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$\bar{y} = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \quad (2)$$

տեսքը: Անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը որոնում ենք

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t \quad (3)$$

տեսքով:

y^* -ի այս արտահայտությունը տեղադրելով տրված դիֆերենցիալ հավասարման մեջ, գտնում ենք M -ի և N -ի արժեքները

$$M = \frac{-p\omega\alpha}{(q - \omega^2)^2 - p^2\omega^2}, \quad N = \frac{(q - \omega^2)\alpha}{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}:$$

Նախքան M -ի և N -ի գտած արժեքները (3) հավասարության մեջ տեղադրելը, մոժենք A^* և φ^* նոր հաստատունները, ընդունելով

$$M = A^* \sin \varphi^*, \quad N = A^* \cos \varphi^*,$$

այսինքն՝

$$A^* = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi^* = \frac{M}{N}:$$

Այդ դեպքում անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը կարելի է գրել

$$y^* = A^* \sin \varphi^* \cos \omega t + A^* \cos \varphi^* \sin \omega t = A^* \sin(\omega t + \varphi^*);$$

տեսքով կամ, վերջնականապես,

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi^*);$$

(1) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը հավասար է $y = \bar{y} + y^*$, այսինքն՝

$$y = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi^*);$$

Այս մասի գումարի առաջին անդամը (համասեռ հավասարման լուծումը) ներկայացնում է մարող տատանումներ. t -ն մեծանալիս այն նվազում է, և հետևաբար, որոշ ժամանակամիջոցից հետո հիմնական նշանակություն կունենա հարկադրական տատանումներ որոշող երկրորդ անդամը: Այդ տատանումների ω հաճախությունը հավասար է $f(t)$ արտաքին ուժի հաճախությանը. հարկադրական տատանումների ամպլիտուդը մեծ է այնքան, որքան փոքր է p -ն և որքան ω -ն մոտ է q -ին:

Ավելի մանրամասն ուսումնասիրենք p -ի տարբեր արժեքների դեպքում հարկադրական տատանումների ամպլիտուդի կախումը ω հաճախությունից: Դրա համար նշանակենք $D(\omega)$ -ով հարկադրական տատանումների ամպլիտուդը.

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}};$$

Հնդունենք $q = \beta_1^2$ (երբ $p = 0$ β_1 -ը կհավասարվեր սեփական տատանումների հաճախությանը): Այդ դեպքում

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{\beta_1^2 - \omega^2}} = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta_1^2}\right)^2 + \frac{p^2}{\beta_1^2} \frac{\omega^2}{\beta_1^2}}};$$

նշանակենք

$$\omega/\beta_1 = \lambda, \quad p/\beta_1 = \gamma,$$

որտեղ λ -ն գրգռող ուժի հաճախության հարաբերությունն է համակարգի ազատ տատանումների հաճախությանը, իսկ γ հաստատունը կախված չէ գրգռող ուժից: Այս դեպքում ամպլիտուդի մեծությունը կարտահայտվի

$$\bar{D}(\lambda) = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \gamma^2 \lambda^2}} \quad (4)$$

բանաձևով: Գտնենք այդ ֆունկցիայի մաքսիմումը: Ակնհայտ է, այն

կլինի λ -ի այնպիսի արժեքի դեպքում, որի համար հայտարարի քանակուհին ունի մինիմում: Բայց

հասնում է մինիմումի, երբ

$$\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \gamma^2 \lambda^2} \quad (5)$$

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

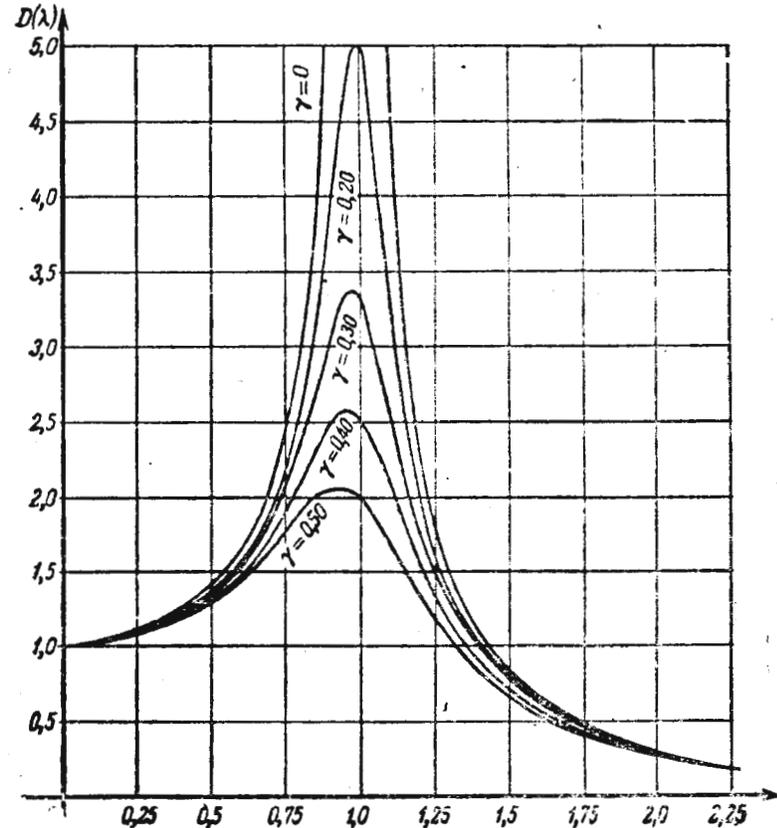
և հավասար է

$$\gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}};$$

Հետևաբար, ամպլիտուդի մաքսիմալ արժեքը հավասար է

$$\bar{D}_{\max} = \frac{a}{\beta_1^2 \gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}};$$

γ -ի տարբեր արժեքների դեպքում $\bar{D}(\lambda)$ ունկցիաների գրաֆիկները ցույց են տրված նկ. 279-ում (գրաֆիկները կառուցելիս որոշակիության



Նկ. 279

համար ընդունված է $a=1, \beta_1=1$): Այդ կորերը կոչվում են ռեզոնանսի կորեր:

(5) բանաձևից հետևում է, որ փոքր γ -ների դեպքում ամպլիտուդի մաքսիմալ արժեքը հասնում է λ -ի այն արժեքների համար, որոնք մոտ են մեկին, այսինքն՝ երբ արտաքին ուժի հաճախությունը մոտ է ազատ տատանումների հաճախությանը: Եթե $\gamma=0$ (հետևաբար, $p=0$), այսինքն՝ երբ շարժման նկատմամբ դիմադրությունը բացակայում է, հարկադրական տատանումների ամպլիտուդը անսահմանափակորեն աճում է, երբ $\lambda \rightarrow 1$, այսինքն՝ երբ $\omega \rightarrow \beta = \sqrt{q}$:

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ (\gamma=0)}} \bar{D}(\lambda) = \infty;$$

$\omega^2 = q$ դեպքում տեղի ունի ռեզոնանսի երևույթ:

2) Այժմ ենթադրենք, որ $p=0$, այսինքն՝ քննարկենք առանց դիմադրության առաձգական տատանումների հավասարումն արտաքին պարբերական ուժի առկայության դեպքում.

$$y'' + qy = a \sin \omega t. \quad (6)$$

Համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է.

$$\bar{y} = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \quad (\beta^2 = q):$$

Եթե $\beta \neq \omega$, այսինքն՝ երբ արտաքին ուժի հաճախությունը հավասար չէ սեփական տատանումների հաճախությանը, ապա անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծումն ունի

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t$$

տեսքը: Այս արտահայտությունը տեղադրելով տրված հավասարման մեջ, կգտնենք

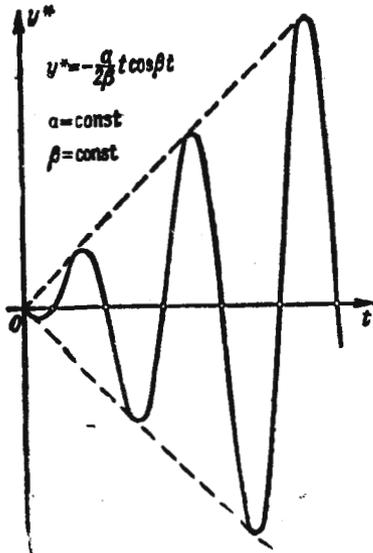
$$M = 0, N = \frac{a}{q - \omega^2};$$

Ընդհանուր լուծումն է

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega^2} \sin \omega t:$$

Այսպիսով, շարժումը ստացվում է β հաճախությամբ սեփական տատանման և ω հաճախությամբ հարկադրական տատանման վերադրման արդյունքում:

Եթե $\omega = \beta$, այսինքն՝ սեփական տատանումների հաճախությունը



Նկ. 280

համընկնում է արտաքին ուժի հաճախությանը, ապա (3) ֆունկցիան (6) հավասարման լուծումը չէ: Այդ դեպքում, համաձայն § 24-ի արդյունքների, մասնավոր լուծումը պետք է որոնել

$$y^* = t (M \cos \beta t + N \sin \beta t) \quad (7)$$

տեսքով: Տեղադրելով այս արտահայտությունը հավասարման մեջ, կգտնենք M -ը և N -ը.

$$M = -\frac{a}{2\beta}, N = 0;$$

Հետևաբար,

$$y^* = -\frac{a}{2\beta} t \cos \beta t;$$

Ընդհանուր լուծումը կունենա հետևյալ տեսքը

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\beta} t \cos \beta t:$$

Այս մասի երկրորդ անդամը ցույց է տալիս, որ այդ դեպքում տատանման ամպլիտուդը անսահմանափակորեն աճում է՝ t ժամանակի անսահմանափակորեն աճման դեպքում: Այս երևույթը, որը տեղի է ունենում, երբ համակարգի սեփական տատանումների հաճախությունը համընկնում է արտաքին ուժի հաճախությանը, կոչվում է ռեզոնանս:

y^* ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 280-ում:

§ 29. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգեր

Շատ խնդիրներ լուծելիս պահանջվում է գտնել $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են x արգումենտը, որովհետև y_1, y_2, \dots, y_n ֆունկցիաները և սրանց ածանցյալները պարունակող դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգին:

Դիտարկենք առաջին կարգի հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

որտեղ y_1, y_2, \dots, y_n որոնվող ֆունկցիաներն են, x -ը՝ արգումենտը:

Այսպիսի համակարգը, երբ հավասարումների ձախ մասում միայն առաջին կարգի ածանցյալներ են, իսկ աջ մասերն ածանցյալներ չեն պարունակում, կոչվում է **նորմալ**:

Ինտեգրել համակարգը՝ նշանակում է որոշել y_1, y_2, \dots, y_n ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են (1) հավասարումների համակարգին և տրված

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}, (y_2)_{x=x_0} = y_{20}, \dots, (y_n)_{x=x_0} = y_{n0} \quad (2)$$

սկզբնական պայմաններին:

(1) տեսքի հավասարումների համակարգի ինտեգրումը կատարվում է հետևյալ կերպ:

(1) հավասարումներից առաջինը դիֆերենցիալ ըստ x -ի.

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx},$$

$\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ ածանցյալները փոխարինելով (1) հավասարումներից նրանց f_1, f_2, \dots, f_n արտահայտություններով, կունենանք

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \dots, y_n)$$

հավասարումը:

Դիֆերենցիալ ստացված հավասարումը և վարվելով նախորդին նման ձևով, կգտնենք

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n):$$

Այնուհետև շարունակելով ճիշտ նույն ձևով, վերջապես, կստանանք

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \dots, y_n)$$

հավասարումը:

Այսպես, ուրեմն, ստանում ենք հետևյալ համակարգը.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= F_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\dots \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} &= F_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Առաջին $n-1$ հատ հավասարումներից որոշում ենք y_2, y_3, \dots, y_{n-1} դրանք արտահայտելով x -ի, y_1 -ի և $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$ ածանցյալների միջոցով.

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 &= \varphi_3(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ &\dots \\ y_n &= \varphi_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Այս արտահայտությունները տեղադրելով (3) հավասարումներից վերջինի մեջ, y_1 -ի որոշման համար կստանանք n -րդ կարգի հավասարում՝

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}): \quad (5)$$

Լուծելով այս հավասարումը, կորոշենք y_1 -ը.

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n): \quad (6)$$

Վերջին արտահայտությունը դիֆերենցիալ $n-1$ անգամ, կգտնենք $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$ ածանցյալները որպես x -ի, C_1 -ի, C_2 -ի, \dots, C_n -ի ֆունկցիաներ:

Այս ֆունկցիաները տեղադրելով (4) հավասարման մեջ, որոշում ենք y_2, y_3, \dots, y_n ֆունկցիաները.

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \psi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &\dots \\ y_n &= \psi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Որպեսզի ստացված լուծումը բավարարի տրված (2) սկզբնական պայմաններին, մնում է (6) և (7) հավասարումներից գտնել C_1, C_2, \dots, C_n հաստատունների համապատասխան արժեքները (նման նրան, ինչպես այդ արեցինք մեկ դիֆերենցիալ հավասարման դեպքում):

Դիտողություն 1: Եթե (1) համակարգը որոնվող ֆունկցիաների նկատմամբ զծային է, ապա և (5) հավասարումը կլինի զծային:

Օրինակ 1: Ինտեգրել

$$\frac{dy}{dx} = y + z + x, \quad \frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \quad (a)$$

համակարգը

$$(y)_{x=0} = 1, \quad (z)_{x=0} = 0 \quad (b)$$

սկզբնական պայմանների դեպքում:

1 ու ծ ու մ: Առաջին հավասարումը դիֆերենցիով ըստ x -ի, կունենանք

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1:$$

(ա) հավասարումներից այստեղ տեղադրելով $\frac{dy}{dx}$ -ի և $\frac{dz}{dx}$ -ի արժեքները,

կստանանք

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y+z+x) + (-4y-3z+2x) + 1$$

կամ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1: \quad (7)$$

2) (ա) համակարգի առաջին հավասարումից գտնում ենք

$$z = \frac{dy}{dx} - y - x \quad (7)$$

և տեղադրում հենց նոր ստացած հավասարման մեջ, ստանում ենք

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2\left(\frac{dy}{dx} - y - x\right) + 3x + 1$$

կամ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1: \quad (8)$$

Վերջին հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + 5x - 9 \quad (9)$$

և (7)-ի հիման վրա

$$z = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)e^{-x} - 6x + 14: \quad (10)$$

C_1 և C_2 հաստատուններն ընտրենք այնպես, որ բավարարվի (բ) սկզբնական պայմանները. $(y)_{x=0} = 1, (z)_{x=0} = 0$: Այդ դեպքում (9) և (10) հավասարություններից ստանում ենք

$$1 = C_1 - 9, \quad 0 = C_2 - 2C_1 + 14,$$

որտեղից $C_1 = 10, C_2 = 6$: Այսպիսով, տրված (բ) սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծումն ունի հետևյալ տեսքը

$$y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9, \quad z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14:$$

Դիտարկենք 2: Բերված դատողություններում մենք ենթադրեցինք, որ (3) համակարգի առաջին $n-1$ հատ հավասարումներից կարելի է որոշել y_2, y_3, \dots, y_n ֆունկցիաները: Կարող է պատահել, որ y_2, \dots, y_n փոփոխականներն արտաքսվում են ոչ թե n , այլ ավելի քիչ թվով հավասարումներից: Այդ դեպքում y -ի որոշման համար կստանանք n -ից ցածր կարգի հավասարում:

Օրինակ 2: Ինտեգրել հետևյալ համակարգը.

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = x + z, \quad \frac{dz}{dt} = x + y:$$

1 ու ծ ու մ: Առաջին հավասարումը դիֆերենցիով ըստ t -ի, գտնում ենք

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = (x+z) + (x+y),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z:$$

Արտաքսելով y և z փոփոխականները

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z$$

հավասարումներից, կունենանք x -ի նկատմամբ երկրորդ կարգի

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0$$

հավասարումը: Ինտեգրելով այս հավասարումը, կստանանք նրա ընդհանուր լուծումը

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}: \quad (11)$$

Այստեղից գտնում ենք

$$\frac{dx}{dt} = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} \quad \text{և} \quad y = \frac{dx}{dt} - z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - z: \quad (12)$$

x -ի և y -ի համար գտած արժեքները տեղադրելով տրված հավասարումներից երրորդի մեջ, z -ը որոշելու համար կստանանք

$$\frac{dz}{dt} + z = 3C_2 e^{2t}$$

հավասարումը: Ինտեգրելով այս հավասարումը, կգտնենք

$$z = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}: \quad (13)$$

Բայց այդ դեպքում (12) հավասարումների հիման վրա ստանում ենք

$$y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t}: \quad (14)$$

(11), (12), (13) հավասարումները տալիս են տրված համակարգի ընդհանուր լուծումը:

Դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ կարող են մտնել բարձր կարգի ածանցյալներ: Այդ դեպքում ստացվում է բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ:

Այսպես, օրինակ, F ուժի ազդեցության տակ նյութական կետի շարժման մասին խնդիրը բերվում է երկրորդ կարգի երեք դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի: Դիցուք F_x -ը, F_y -ը, F_z -ը F ուժի պրոյեկցիաներն են կոորդինատային առանցքների վրա: Ժամանակի ցանկացած t պահին կետի դիրքը որոշվում է նրա x, y, z կոորդինատներով: Հետևաբար, x -ը, y -ը, z -ը t -ի ֆունկցիաներ են: Կետի արագության վեկտորի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա կլինեն

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}:$$

ենթադրենք, որ F ուժը և, հետևաբար, նրա F_x, F_y, F_z պրոյեկցիաները կախված են t ժամանակից, x, y, z կետի դիրքից և կետի շարժման արագությունից, այսինքն՝

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} \text{-ից:}$$

խորդ պարագրաֆի 1-ին դիտողությունում): Բայց կարելի է (1) համակարգը լուծել նաև այլ մեթոդով, առանց Ո-րդ կարգի հավասարման բերելու: Այս մեթոդը հնարավորություն է տալիս լուծման բնույթն ավելի ակնառու վերլուծելու:

Համակարգի մասնավոր լուծումը կորոնենք հետևյալ տեսքով.

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \quad \dots, \quad x_n = \alpha_n e^{kt} \quad (2)$$

Պահանջվում է $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ և k հաստատունները որոշել այնպես, որ $\alpha_1 e^{kt}, \alpha_2 e^{kt}, \dots, \alpha_n e^{kt}$ ֆունկցիաները բավարարեն (1) հավասարումների համակարգին: Դրանք տեղադրելով (1) համակարգի մեջ, կստանանք.

$$\left. \begin{aligned} k\alpha_1 e^{kt} &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n) e^{kt}, \\ k\alpha_2 e^{kt} &= (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n) e^{kt}, \\ &\dots \\ k\alpha_n e^{kt} &= (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n) e^{kt}, \end{aligned} \right\}$$

Կրճատենք e^{kt} -ով: Բոլոր անդամները տեղափոխելով մի կողմ և հավաքելով α_1 -ի, α_2 -ի, \dots, α_n -ի գործակիցները, կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\left. \begin{aligned} (a_{11}-k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-k)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ \dots &\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn}-k)\alpha_n &= 0: \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

α_1 -ը, α_2 -ը \dots, α_n -ը և k -ն ընտրում ենք այնպես, որ (3) համակարգը բավարարվի: Այդ համակարգը α_1 -ի, α_2 -ի, \dots, α_n -ի նկատմամբ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ է: Կազմենք (3) համակարգի դետերմինանտը.

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-k) \end{vmatrix} \quad (4)$$

Եթե k -ն այնպիսին է, որ Δ դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, ապա (3) համակարգն ունի միայն $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ զրոյական լուծումները և, հետևաբար, (2) բանաձևերը տալիս են միայն տրիվիալ լուծումներ:

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = 0:$$

Այսպիսով, (2) ոչ տրիվիալ լուծումները կստանանք միայն այնպիսի k -երի դեպքում, որոնց համար (4) դետերմինանտը դառնում է զրո: k -ի որոշման համար հանգում ենք

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Ո-րդ աստիճանի հավասարման: Այս հավասարումը կոչվում է (1) համակարգի բնութագրիչ հավասարում. սրա արմատները կոչվում են բնութագրիչ հավասարման արմատներ:

Քննարկենք մի քանի դեպքեր:

1. Բնութագրիչ հավասարման արմատները k_1, k_2, \dots, k_n -ով նշանակենք բնութագրիչ հավասարման արմատները: Յուրաքանչյուր k_i արմատի համար գրենք (3) համակարգը և որոշենք

$$\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}$$

գործակիցները: Կարելի է ցույց տալ, որ դրանցից մեկը կամայական է. այն կարելի է ընդունել հավասար մեկի: Այսպիսով, ստանում ենք. k_i արմատի համար (1) համակարգի լուծումը.

$$x_1^{(i)} = \alpha_1^{(i)} e^{k_i t}, \quad x_2^{(i)} = \alpha_2^{(i)} e^{k_i t}, \quad \dots, \quad x_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} e^{k_i t};$$

k_2 արմատի համար (1) համակարգի լուծումը

$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, \quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t}, \quad \dots, \quad x_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t};$$

k_n արմատի համար (1) համակարգի լուծումը

$$x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \quad x_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \quad \dots, \quad x_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t};$$

Հավասարման մեջ անմիջական տեղադրմամբ կարելի է համոզվել, որ

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C_1 \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \\ x_2 &= C_1 \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \\ &\dots \\ x_n &= C_1 \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n \alpha_n^{(n)} e^{k_n t} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ֆունկցիաների համակարգը, որտեղ C_1, C_2, \dots, C_n կամայական հաստատուններ են, նույնպես (1) դիֆերենցիալ հավասարումների համա-

կարգի լուծում է: Այդ (1) համակարգի ընդհանուր լուծումն է: Հեշտ է ցույց տալ, որ կարելի է գտնել հաստատունների այնպիսի արժեքներ, որոնց դեպքում լուծումը կբավարարի տրված սկզբնական պայմաններին:

0 բ ի ն ա կ 1: Գտնել

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2$$

Հավասարումների համակարգի ընդհանուր լուծումը:

Լ ու ծ ու մ: Կազմում ենք բնութագրիչ հավասարումը՝

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

Կամ $k^2 - 5k + 4 = 0$: Գտնում ենք նրա արմատները

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 4:$$

Համակարգի լուծումը որոնում ենք

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{t}, \quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{t}$$

և

$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{4t}, \quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{4t}$$

տեսքով: Կազմում ենք (3) համակարգը $k_1 = 1$ արմատի համար և որոշում ենք

$\alpha_1^{(1)}$ -ը և $\alpha_2^{(1)}$ -ը,

$$\left. \begin{aligned} (2-1)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} &= 0, \\ 1\alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Կամ

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} &= 0, \\ \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

որտեղից $\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$: Ընդունելով $\alpha_1^{(1)} = 1$, կստանանք $\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2}$: Այսպիսով,

ստացանք համակարգի լուծումը.

$$x_1^{(1)} = e^t, \quad x_2^{(1)} = -e^t/2:$$

Այլուհետև կազմում ենք (3) համակարգը, $k_2 = 4$ արմատի համար և որոշում

$\alpha_1^{(2)}$ -ը և $\alpha_2^{(2)}$ -ը.

$$-2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0,$$

$$\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0,$$

որտեղից $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$ և $\alpha_1^{(2)} = 1$, $\alpha_2^{(2)} = 1$. Ստանում ենք համակարգի երկրորդ լուծումը

$$x_1^{(2)} = e^{4t}, \quad x_2^{(2)} = e^{4t};$$

Համակարգի ընդհանուր լուծումը կլինի (տես (6))

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{4t},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} C_1 e^t + C_2 e^{4t}:$$

II. Բ ն ու թ ա գ ռ ի չ հ ա վ ա ս ա ռ մ ա ն ա ռ մ ա տ ն ե ռ ը տ ա ռ բ ե ռ ե ն, բ ա յ ց ն ռ ա ն ց մ ե ջ կ ա ն կ ո մ ա լ ե ք ս ն ե ռ: Գ ի ց ու ք բ ն ու թ ա գ ռ ի չ հ ա վ ա ս ա ռ մ ա ն արմատներից երկուսը կոմպլեքս համալուծ են

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta:$$

Այս արմատներին կհամապատասխանեն

$$x_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(\alpha+i\beta)t} \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

$$x_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{(\alpha-i\beta)t} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

լուծումները: $\alpha_j^{(1)}$ և $\alpha_j^{(2)}$ գործակիցները որոշվում են (3) հավասարումների համակարգից:

Այնպես, ինչպես և § 21-ում, կարելի է ցույց տալ, որ կոմպլեքս լուծման իրական ու կեղծ մասերը նույնպես լուծումներ են: Այսպիսով, ստանում ենք երկու մասնավոր լուծում.

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_j^{(1)} &= e^{\alpha t} (\lambda_j^{(1)} \cos \beta x + \lambda_j^{(2)} \sin \beta x), \\ \bar{x}_j^{(2)} &= e^{\alpha t} (\bar{\lambda}_j^{(1)} \sin \beta x + \bar{\lambda}_j^{(2)} \cos \beta x), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

որտեղ $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\bar{\lambda}_j^{(1)}$, $\bar{\lambda}_j^{(2)}$ -ը $\alpha_j^{(1)}$ -ի և $\alpha_j^{(2)}$ -ի միջոցով որոշվող իրական թվեր են:

(9) ֆունկցիաների համապատասխան կոմբինացիաները կմտնեն համակարգի ընդհանուր լուծման մեջ:

0 բ ի ն ա կ 2: Գտնել

$$\frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2$$

Համակարգի ընդհանուր լուծումը,

Լ ու ծ ու մ: Կազմում ենք բնութագրիչ հավասարումը

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0$$

Կամ $k^2 + 12k + 37 = 0$ և գտնում ենք նրա արմատները.

$$k_1 = -6 + i, \quad k_2 = -6 - i:$$

(3) համակարգի մեջ տեղադրելով $k_1 = -6 + i$, գտնում ենք

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \quad \alpha_2^{(1)} = 1 + i:$$

Գրում ենք (7) լուծումը

$$x_1^{(1)} = 1e^{(-6+i)t}, \quad x_2^{(1)} = (1+i)e^{(-6+i)t}; \quad (7')$$

(3) համակարգում տեղադրելով $k_2 = -6 - i$, գտնում ենք

$$\alpha_1^{(2)} = 1, \quad \alpha_2^{(2)} = 1 - i:$$

Ստանում ենք (8) լուծումների երկրորդ համակարգը

$$x_1^{(2)} = e^{(-6-i)t}, \quad x_2^{(2)} = (1-i)e^{(-6-i)t};$$

Գրենք (7') լուծումը.

$$x_1^{(1)} = e^{-6t}(\cos t + i \sin t), \quad x_2^{(1)} = (1+i)e^{-6t}(\cos t + i \sin t)$$

կամ

$$x_1^{(1)} = e^{-6t} \cos t + i e^{-6t} \sin t,$$

$$x_2^{(1)} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) + i e^{-6t}(\cos t + \sin t):$$

Գրենք (8') լուծումը.

$$x_1^{(2)} = e^{-6t} \cos t - i e^{-6t} \sin t,$$

$$x_2^{(2)} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) - i e^{-6t}(\cos t + \sin t):$$

Իբրև մասնավոր լուծումների համակարգ կարելի է վերցնել առանձին իրական մասերը և առանձին կեղծ մասերը.

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1^{(1)} &= e^{-6t} \cos t, & \bar{x}_2^{(1)} &= e^{-6t}(\cos t - \sin t), \\ \bar{x}_1^{(2)} &= e^{-6t} \sin t, & \bar{x}_2^{(2)} &= e^{-6t}(\cos t + \sin t): \end{aligned} \right\}$$

Համակարգի ընդհանուր լուծումը կլինի

$$x_1 = C_1 e^{-6t} \cos t + C_2 e^{-6t} \sin t,$$

$$x_2 = C_1 e^{-6t}(\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \sin t);$$

Նման մեթոդով կարելի է գտնել բարձր կարգի հաստատուն գործա-
կերցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծումը:

Մեխանիկայում և էլեկտրական շղթաների տեսությունում, օրինակ,
ուսումնասիրվում է

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծումը:
Նորից լուծումը որոնում ենք

$$x = \alpha e^{kt}, \quad y = \beta e^{kt}$$

տեսքով: Այս արտահայտությունները տեղադրելով (10) համակարգում
և կրճատելով e^{kt} -ով, ստանում ենք α -ն, β -ն և k -ն որոշելու համար
հետևյալ հավասարումների համակարգը

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - k^2)\alpha + a_{12}\beta &= 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k^2)\beta &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Զրոյից տարբեր α -ն և β -ն որոշվում են միայն այն դեպքում, երբ
համակարգի դետերմինանտը հավասար լինի զրոյի՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k^2 \end{vmatrix} = 0: \quad (12)$$

Սա (1) համակարգի համար բնութագրիչ հավասարում է. այն k -ի նկատ-
մամբ 4-րդ աստիճանի հավասարում է: Դիցուք k_1 -ը, k_2 -ը, k_3 -ը,
 k_4 -ը նրա արմատներն են (ենթադրում ենք, որ արմատները տարբեր են):
Յուրաքանչյուր k_i արմատի համար (11) համակարգից գտնում ենք α -ի
և β -ի արժեքները: (6)-ին համանման, ընդհանուր լուծումը կունենա հե-
տևյալ տեսքը.

$$x = C_1 \alpha^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha^{(2)} e^{k_2 t} + C_3 \alpha^{(3)} e^{k_3 t} + C_4 \alpha^{(4)} e^{k_4 t},$$

$$y = C_1 \beta^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \beta^{(2)} e^{k_2 t} + C_3 \beta^{(3)} e^{k_3 t} + C_4 \beta^{(4)} e^{k_4 t};$$

Եթե որոշ արմատներ կոմպլեքս են, ապա կոմպլեքս արմատների
յուրաքանչյուր զույգին ընդհանուր լուծման մեջ կհամապատասխանեն
(9) տեսքի արտահայտություններ:

Օրինակ 3: Գտնել

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x - 4y,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -x + y$$

դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ընդհանուր լուծումը:

Լուծում: Գրում ենք (12) բնութագրիչ հավասարումը և գտնում նրա արմատները.

$$\begin{vmatrix} 1 - k^2 & -4 \\ -1 & 1 - k^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$k_1 = i, \quad k_2 = -i, \quad k_3 = \sqrt{3}, \quad k_4 = -\sqrt{3}:$$

Լուծումը կորոնենք հետևյալ տեսքով.

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \alpha^{(1)} e^{it}, & y^{(1)} &= \beta^{(1)} e^{it}, \\ x^{(2)} &= \alpha^{(2)} e^{-it}, & y^{(2)} &= \beta^{(2)} e^{-it}, \\ x^{(3)} &= \alpha^{(3)} e^{\sqrt{3}t}, & y^{(3)} &= \beta^{(3)} e^{\sqrt{3}t}, \\ x^{(4)} &= \alpha^{(4)} e^{-\sqrt{3}t}, & y^{(4)} &= \beta^{(4)} e^{-\sqrt{3}t}: \end{aligned}$$

(11) համակարգից գտնում ենք $\alpha^{(j)}$ և $\beta^{(j)}$ -ն.

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} &= 1, & \beta^{(1)} &= 1/2, \\ \alpha^{(2)} &= 1, & \beta^{(2)} &= 1/2, \\ \alpha^{(3)} &= 1, & \beta^{(3)} &= -1/2, \\ \alpha^{(4)} &= 1, & \beta^{(4)} &= -1/2: \end{aligned}$$

Ֆրենք կոմպլեքս լուծումները.

$$x^{(1)} = e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad y^{(1)} = 0,5(\cos t + i \sin t),$$

$$x^{(2)} = e^{-it} = \cos t - i \sin t, \quad y^{(2)} = 0,5(\cos t - i \sin t):$$

Լուծում կլինեն առանձին իրական և կեղծ մասերը.

$$\bar{x}^{(1)} = \cos t, \quad \bar{y}^{(1)} = 0,5 \cos t,$$

$$\bar{x}^{(2)} = \sin t, \quad \bar{y}^{(2)} = 0,5 \sin t:$$

Այժմ կարող ենք գրել ընդհանուր լուծումը.

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^{\sqrt{3}t} + C_4 e^{-\sqrt{3}t},$$

$$y = \frac{1}{2} C_1 \cos t + \frac{1}{2} C_2 \sin t - \frac{1}{2} C_3 e^{\sqrt{3}t} - \frac{1}{2} C_4 e^{-\sqrt{3}t}:$$

Գ ի ա ո ղ ու թ յ ու ն: Այս պարագրաֆում չքննարկեցինք բնութագրիչ հավասարման բազմապատիկ պրմատների դեպքը: Այս հարցը մանրամասն շարադրված է, օրինակ, Ի. Գ. Պետրովսկու «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений» գրքում:

§ 31. Գաղափար Լյապունովի կայունության մասին:

Դիֆերենցիալ հավասարման հետագծի վարքը եզակի կետի շրջակայքում

Քանի որ դիֆերենցիալ հավասարումների և հավասարումների համակարգերի մեծամասնության լուծումները չեն արտահայտվում տարրական ֆունկցիաներով կամ կվադրատուրայով, ապա այդ դեպքերում կոնկրետ դիֆերենցիալ հավասարումներ լուծելիս կիրառվում են ինտեգրման մոտավոր մեթոդներ: Այդ մեթոդների մասին գաղափարը տրվել է § 3-ում. բացի այդ, նման մեթոդներից մի քանիսը կքննարկվեն § § 32-34-ում, ինչպես նաև XVI գլխում:

Այդ մեթոդների թերությունը կայանում է նրանում, որ նրանք տալիս են միայն մեկ մասնավոր լուծում. ուրիշ մասնավոր լուծումներ ստանալու համար պետք է բոլոր հաշվումները կատարել նորից: Իմանալով մեկ մասնավոր լուծումը, չի կարելի եզրակացություն անել այլ լուծումների բնույթի մասին:

Մեխանիկայի և տեխնիկայի շատ խնդիրներում կարևոր է լինում իմանալ ոչ թե լուծման կոնկրետ արժեքները արգումենտի տրված կոնկրետ արժեքի դեպքում, այլ լուծման վարքի բնույթը արգումենտի փոփոխման ժամանակ և, մասնավորապես, արգումենտի անսահմանափակ աճման դեպքում: Օրինակ, կարևոր է լինում իմանալ այդ լուծումներն արդյոք բավարարում են տրված սկզբնական պայմաններին, պարբերական են, ասիմպտոտորեն մոտենում են որևէ հայտնի ֆունկ-

ցիայի և այլն: Այս հարցերով զբաղվում է դիֆերենցիալ հավասարումների որակական տեսությունը:

Որակական տեսության հիմնական հարցերից մեկը լուծման կայունության կամ շարժման կայունության մասին հարցն է. այս հարցը մանրամասն ուսումնասիրվել է նշանավոր ռուս մաթեմատիկոս Ա. Մ. Լյապունովի (1858—1918) կողմից:

Դիցուք տրված է

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը: Ենթադրենք $x = x(t)$ և $y = y(t)$ այդ համակարգի այն լուծումներն են, որոնք բավարարում են

$$\left. \begin{aligned} x_{t=0} &= x_0, \\ y_{t=0} &= y_0 \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

սկզբնական պայմաններին: Դիցուք, այնուհետև $\bar{x} = \bar{x}(t)$ և $\bar{y} = \bar{y}(t)$ (1) հավասարումների այն լուծումներն են, որոնք բավարարում են

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{t=0} &= \bar{x}_0, \\ \bar{y}_{t=0} &= \bar{y}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1'')$$

սկզբնական պայմաններին:

Ս ա հ մ ա ն ու մ: (1) հավասարմանը և (1') սկզբնական պայմաններին բավարարող $x = x(t)$ և $y = y(t)$ լուծումները կոչվում են կայուն ըստ Լյապունովի, երբ $t \rightarrow \infty$, եթե յուրաքանչյուր ցանկացած փոքր $\epsilon > 0$ համար կարելի է ցույց տալ այնպիսի $\sigma > 0$, որ $t > 0$ բոլոր արժեքների համար կբավարարվեն

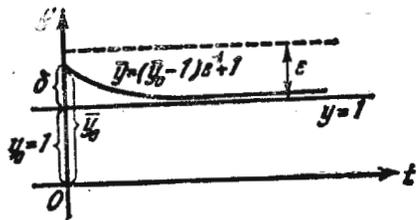
$$\left. \begin{aligned} |\bar{x}(t) - x(t)| &< \epsilon, \\ |\bar{y}(t) - y(t)| &< \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

անհավասարությունները, եթե սկզբնական պայմանները բավարարում են

$$\left. \begin{aligned} |\bar{x}_0 - x_0| &< \delta, \\ |\bar{y}_0 - y_0| &< \delta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

անհավասարություններին:

Պարզաբանենք այս սահմանման իմաստը: (2) և (3) անհավասարություններից հետևում է, որ t -ի բոլոր դրական արժեքների դեպքում



Նկ 281

սկզբնական պայմանները փոքր փոփոխություններ կրելիս համապատասխան լուծումներն էլ միմյանցից քիչ են տարբերվում: Եթե դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը նկարագրում է որևէ շարժում, ապա լուծման կայունության դեպքում շարժումների բնույթը քիչ է փոխվում, եթե սկզբնական տվյալները քիչ են փոխվում:

Դա պարզաբանենք առաջին կարգի մի հավասարման օրինակի վրա: Դիցուք տրված է

$$\frac{dy}{dt} = -y + 1 \quad (ա)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը: Նրա ընդհանուր լուծումն է

$$y = Ce^{-t} + 1 \quad (բ)$$

Ֆունկցիան: Գտնենք այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է

$$y|_{t=0} = 1 \quad (գ)$$

սկզբնական պայմանին: Ակնհայտ է, $y=1$ լուծումը կստացվի, երբ $C=0$ (Նկ. 281): Այնուհետև կգտնենք այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է

$$\bar{y}|_{t=0} = y_0$$

սկզբնական պայմանին:

(բ) հավասարումից կգտնենք C-ի արժեքը.

$$\bar{y}_0 = C + 1,$$

որտեղից

$$C = \bar{y}_0 - 1:$$

Տեղադրելով C-ի այս արժեքը (բ) հավասարության մեջ, ստանում ենք.

$$\bar{y} = (\bar{y}_0 - 1)e^{-t} + 1:$$

Ակնհայտ է, $y=1$ լուծումը կայուն է: Իրոք,

$$\bar{y} - y = [(\bar{y}_0 - 1)e^{-t} + 1] - 1 = (\bar{y}_0 - 1)e^{-t} < 0$$

, երբ $t \rightarrow \infty$:

Հետևաբար, կամայական ε -ի դեպքում կբավարարվի (3) անհավասարությունը, եթե բավարարվի

$$(y_0 - 1) = \delta < \varepsilon$$

անհավասարությունը:

Եթե (1) հավասարումները նկարագրում են շարժումը, որտեղ t արգումենտը ժամանակն է, և ըստ որում հավասարումները բացահայտորեն t չեն պարունակում, այսինքն՝ ունեն

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y)$$

տեսք, ապա այդ համակարգը կոչվում է ավտոնոմ:

Այնուհետև դիտարկենք գծային դիֆերենցիալ հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by: \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ենթադրելու ենք, որ a, b, c, g գործակիցները հաստատուններ են, ընդ որում ակնհայտ է, որ $x=0, y=0$ (4) համակարգի լուծումն է, որում համոզվում ենք անմիջական տեղադրմամբ: Ուսումնասիրենք այն հարցը, թե ինչ պայմանների պետք է բավարարեն համակարգի գործակիցները, որպեսզի $x=0, y=0$ լուծումը լինի կայուն: Այդ ուսումնասիրությունը կատարվում է այսպես:

Դիֆերենցիալ առաջին հավասարումը և համակարգի հավասարումների հիման վրա արտաքսենք y -ը և $\frac{dy}{dt}$ -ն.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c \frac{dx}{dt} + g \frac{dy}{dt} = c \frac{dx}{dt} + g(ax + by) = c \frac{dx}{dt} + gax + b \left(\frac{dx}{dt} - cx \right)$$

կամ

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (b+c) \frac{dx}{dt} - (ag-bc)x = 0: \quad (5)$$

Դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարումն ունի

$$\lambda^2 - (b+c)\lambda - (ag-bc) = 0 \quad (6)$$

տեսքը: Այս հավասարումը ընդունված է գրել դետերմինանտի տեսքով,

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & g \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

(տես § 30, հավասարում (4)):

(7) Բնութագրիչ հավասարման արմատները նշանակենք λ_1 -ով և λ_2 -ով: Ինչպես կտեսնենք ստորև, (4) համակարգի լուծումների կայունությունը կամ ոչ կայունությունը որոշվում է λ_1 և λ_2 արմատների բնույթով:

Քննարկենք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

I. Բնութագրիչ հավասարման արժատներն իրական են, բացասական և տարբեր՝ $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$: (5) հավասարումից գտնում ենք.

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Իմանալով x -ը, (4)-ի առաջին հավասարումից գտնում ենք y -ը: Այսպիսով, (4) համակարգի լուծումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= [C_1(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}] \frac{1}{g} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Դիտարկենք: եթե $g=0$ և $a \neq 0$, ապա (5) հավասարումը կազմում ենք y ֆունկցիայի համար: Գտնելով y -ը, (4) համակարգի երկրորդ հավասարումից գտնում ենք x -ը: (8) լուծումների կառուցվածքը պահպանվում է: Իսկ եթե $g=0, a=0$, ապա հավասարումների համակարգի լուծումն ընդունում է

$$x = C_1 e^{at}, \quad y = C_2 e^{bt} \quad (8')$$

տեսքը: Այս դեպքում լուծումների բնույթի վերլուծությունը կատարվում է ալիբի հեշտ: C_1 -ը C_2 -ը ընտրենք այնպես, որ (8) լուծումները բավարարեն

$$x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = y_0$$

սկզբնական պայմաններին: Սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծումը կլինի.

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{cx_0 + gy_0 - x_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0 \lambda_1 - cx_0 - gy_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \frac{1}{g} \left[\frac{cx_0 + gy_0 - x_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 - c) e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0 \lambda_1 - cx_0 - gy_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 - c) e^{\lambda_2 t} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Վերջին հավասարություններից հետևում է, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ համար $|x_0|$ -ն և $|y_0|$ -ն կարելի է ընտրել այնքան փոքր, որ բոլոր $t > 0$ համար լինի $|x(t)| < \varepsilon, |y(t)| < \varepsilon$, քանի որ $e^{\lambda_1 t} < 1, e^{\lambda_2 t} < 1$:

Նշենք, որ տվյալ դեպքում

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) &= 0: \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Դիտարկենք xOy հարթությունը: (4) դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի և (5) դիֆերենցիալ հավասարման համար այդ հարթություն-

նը կոչվում է ֆազային հարթություն: (4) համակարգի (8) և (9) լուծումները կդիտենք որպես xOy ֆազային հարթության վրա որևէ կորի պարամետրական հավասարումներ.

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{\varphi}(t, C_1, C_2), \\ y &= \bar{\psi}(t, C_1, C_2), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t, x_0, y_0), \\ y &= \psi(t, x_0, y_0): \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Այս կորերը

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + gy} \quad (13)$$

դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալային կորեր կամ հետագծեր են. տվյալ դիֆերենցիալ հավասարումը ստացվում է (4) համակարգից՝ աջ և ձախ մասերը միմյանց վրա բաժանելու ճանապարհով:

$O(0, 0)$ կորդինատների սկզբնակետը (13) դիֆերենցիալ հավասարման համար եզակի կետ է, քանի որ այդ կետը լուծման գոյություն և միակության տիրույթին չի պատկանում:

(9) լուծումների և ընդհանրապես (4) համակարգի լուծումների բնույթը ակնառու կերպով լուսաբանվում է

$$\bar{F}(x, y, C) = 0$$

ինտեգրալ կորերի դասավորությամբ, որոնք կազմում են (13) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը: C հաստատունը որոշվում է $yx = x_0 = y_0$ սկզբնական պայմանից: C հաստատունի արժեքը տեղադրելուց հետո ստանում ենք ընտանիքի հավասարումը՝

$$F(x, y, x_0, y_0) \quad (14)$$

տեսքով: (9) լուծումների դեպքում եզակի կետը կոչվում է կայուն հանգույց: Ասում են, որ կետը, շարժվելով հետագծով, անսահմանափակորեն մոտենում է եզակի կետին, երբ $t \rightarrow \infty$:

Ակնհայտ է, որ (14) առնչությունը կարող է ստացվել (12) համակարգից t պարամետրի արտաքսման ճանապարհով: Հետագայում չկատարելով բնութագրիչ հավասարման արժատների բոլոր դեպքերի համար ֆազային հարթության վրա եզակի կետի շրջակայքում ինտեգրալ կորերի դասավորության բնույթի լրիվ վերլուծությունը, տահմանափակվենք մեծածավալ հաշվումներ չպահանջող պարզագույն օրինակներ վրա դրա լուսաբանմամբ: Նկատենք, որ (13) հավասարման հետագծերի վարքի բնույթը կորդինատների սկզբնակետի մոտակայքում կամայական հաստատունների դեպքում որակապես նույնն է, ինչպիսին կքննարկվի օրինակներում:

Օրինակ 1: Ուսումնասիրել

$$\frac{dx}{dt} = -x,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

Հավասարումների համակարգի $x=0, y=0$ լուծման կայունությունը:

Լուծում: Բնութագրիչ հավասարումը կլինի

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0:$$

Բնութագրիչ հավասարման արմատներն են

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2:$$

(8^o) լուծումները սովյալ դեպքում կլինեն

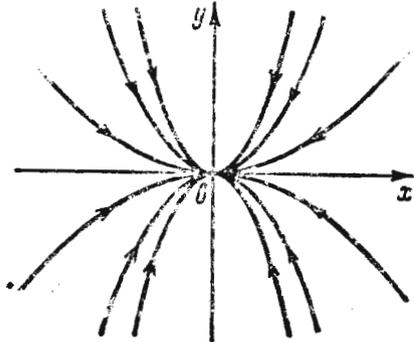
$$x = C_1 e^{-t}, \quad y = C_2 e^{-2t}:$$

(9) լուծումները կլինեն

$$x = x_0 e^{-t}, \quad y = y_0 e^{-2t}: \quad (\omega)$$

Ակնհայտ է, որ $x(t) \rightarrow 0$ և $y(t) \rightarrow 0$, երբ $t \rightarrow +\infty$: $x=0, y=0$ լուծումը կայուն է:

Այժմ անդրադառնանք ֆազային հարթությանը: (ա) հավասարումներից արտաքսելով t պարամետրը, ստանում ենք (14) տեսքի



Նկ. 282

C-ն որոշենք $y_{x=x_0} = y_0$, պայմանից. $C = \frac{y_0}{x_0^2}$,

C-ի դոսած արժեքը տեղադրելով (դ)-ի մեջ, ստանում ենք (բ) լուծումը: $O(0, 0)$ եզակի կետը կայուն հանգույց է:

II. Բ ն ու թ ա գ ռ ի չ հ ա վ ա ս ա ր մ ա ն արմատները իրական են, դրական են, տարբեր են. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$: Այս դեպքում լուծումներն արտահայտվում են նաև (8) և, համապատասխանաբար, (9) բանաձևերով: Բայց սովյալ դեպքում բավականաչափ փոքր $|x_0|$ և $|y_0|$ համար $|x(t)| \rightarrow \infty, |y(t)| \rightarrow \infty$, երբ $t \rightarrow +\infty$, քանի որ $e^{\lambda_1 t} \rightarrow \infty$ և $e^{\lambda_2 t} \rightarrow \infty$, երբ $t \rightarrow +\infty$: Ցաղային հարթության վրա եզակի կետը անկայուն հանգույց է. երբ $t \rightarrow +\infty$ հետագծի վրա կետը $x=0, y=0$ դադարի կետից հեռանում է:

Օրինակ 2: Հետազոտել

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = 2y$$

համակարգի կայունությունը:

Լուծում: Բնութագրիչ հավասարումը կլինի

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0:$$

Սրա լուծումներն են

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2:$$

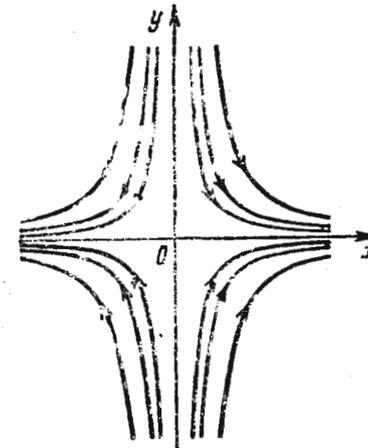
Լուծումը կլինի.

$$x = x_0 e^t, \quad y = y_0 e^{2t}:$$

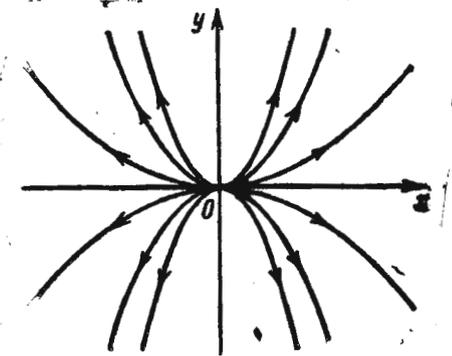
Լուծումն անկայուն է, քանի որ $|x(t)| \rightarrow \infty, |y(t)| \rightarrow \infty$, երբ $t \rightarrow +\infty$: Արտաքսելով t , ստանում ենք.

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}$$

(նկ. 283): $O(0, 0)$ եզակի կետը անկայուն հանգույց է:



Նկ. 283



Նկ. 284

III. Բ ն ու թ ա գ ռ ի չ հ ա վ ա ս ա ր մ ա ն արմատները իրական են և ունեն տարբեր նշաններ, օրինակ, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$: (9) բանաձևերից հետևում է, որ բավականաչափ փոքր $|x_0|$ -ի և $|y_0|$ -ի համար, եթե $Cx_0 + Gy_0 - \frac{1}{2}x_0^2 \neq 0$, ապա $|x(t)| \rightarrow \infty, |y(t)| \rightarrow \infty$, երբ $t \rightarrow +\infty$: Լուծումն անկայուն է: Ցաղային հարթության վրա եզակի կետը կոչվում է բամբ:

Օրինակ 3: Հետազոտել

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = -2y$$

համակարգի կայունությունը:

լուծում: Բնութագրիչ հավասարումը կլինի.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

հետևաբար, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$: Լուծումը կլինի.

$$x=x_0 e^{t}, \quad y=y_0 e^{-2t}.$$

Լուծումն անկախուն է: Արտաքերտով t պարամետրը, ստանում ենք ֆազային հարթության վրա

$$yx^2=y_0 x_0^2$$

կորերի ընտանիքը: $O(0, 0)$ եզակի կետը թամբ է (նկ. 284):

IV. Բնութագրիչ հավասարումն արմատները կոմպլեքս են, որոնք ունեն բացասական իրական մաս. $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$ ($\alpha < 0$): (4) համակարգի լուծումը կլինի.

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{\alpha t} [C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t], \\ y &= \frac{1}{g} e^{\alpha t} [(\alpha C_1 + \beta C_2 - c C_1) \cos \beta t + (\alpha C_2 - \beta C_1 - c C_2) \sin \beta t] \end{aligned} \right\} (15)$$

Եթե կատարենք

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin \delta = \frac{C_2}{C}, \quad \cos \delta = \frac{C_1}{C} \text{ նշանակումք,}$$

ապա (15) հավասարումները կարելի է գրել.

$$\left. \begin{aligned} x &= C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta), \\ y &= \frac{C e^{\alpha t}}{g} [(\alpha - c) \sin(\beta t + \delta) + \beta \cos(\beta t + \delta)] \end{aligned} \right\} (16)$$

տեսքով, որտեղ C_1 -ը և C_2 -ը կամայական հաստատուններ են, որոնք որոշվում են $x=x_0$, $y=y_0$, էրբ $t=0$ սկզբնական պայմաններից, ընդ որում

$$x_0 = C \sin \delta, \quad y_0 = \frac{C}{g} [(\alpha - c) \sin \delta + \beta \cos \delta],$$

որտեղից գտնում ենք

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{g y_0 - x_0(\alpha - c)}{\beta} \quad (17)$$

Նորից նկատենք, որ եթե $g=0$, ապա լուծման տեսքը կլինի փոքր ինչ այլ, բայց վերլուծության բնութից չի փոխվի:

Ակնհայտ է, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ համար բավականաչափ փոքր $|x_0|$ -ի և $|y_0|$ -ի դեպքում տեղի կունենան

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon$$

առնչությունները: Լուծումը կայուն է: Տվյալ դեպքում, էրբ $t \rightarrow +\infty$

$$x(t) \rightarrow 0 \quad \text{և} \quad y(t) \rightarrow 0$$

անսահմանափակ թվով անգամ փոխելով նշանները: Ֆազային հարթության վրա եզակի կետը կոշվում է կայուն ֆոկուս:

0 բինակ 4: Հետազոտել

$$\frac{dx}{dt} = -x + y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - y$$

համակարգի լուծման կայունությունը:

Լուծում: Կազմում ենք բնութագրիչ հավասարումը և գտնում նրա արմատները

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0, \\ \lambda_{1,2} = -1 \pm i, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 1:$$

(17) բանաձևերով գտնում ենք C_1 -ը և C_2 -ը: $C_1 = x_0$, $C_2 = y_0$: Տեղադրելով (15)-ի մեջ, ստանում ենք.

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{-t}(x_0 \cos t + y_0 \sin t), \\ y &= e^{-t}(y_0 \cos t - x_0 \sin t): \end{aligned} \right\} (A)$$

Ակնհայտ է, որ t -ի ցանկացած արժեքների համար

$$|x| \leq |x_0| + |y_0|, \quad |y| \leq |x_0| + |y_0|:$$

$x(t) \rightarrow 0$, $y(t) \rightarrow 0$, էրբ $t \rightarrow +\infty$: Լուծումը կայուն է:

Պարզենք այս դեպքում ֆազային հարթության վրա կորերի դասավորության բնութից Զևափոխենք (A) արտահայտությունները: Դիցուք

$$x_0 = M \cos \delta, \quad y_0 = M \sin \delta,$$

$$M = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{y_0}{x_0}:$$

Այդ դեպքում (A) հավասարությունները կընդունեն հետևյալ տեսքը.

$$\left. \begin{aligned} x &= M e^{-t} \cos(t - \delta), \\ y &= M e^{-t} \sin(\beta t - \delta): \end{aligned} \right\} (B)$$

Ֆազային հարթության վրա անցնենք ρ և θ բևեռային կոորդինատներին և հաստատենք $\rho = f(\theta)$ կախումը: (B) հավասարումները կընդունեն

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \theta &= M e^{-t} \cos(\beta t - \delta), \\ \rho \sin \theta &= M e^{-t} \sin(\beta t - \delta) \end{aligned} \right\} (C)$$

տեսք: Այլ և ձախ մասերը բարձրացնելով բառակուսի և գումարելով, կստանանք

$$\rho^2 = M^2 e^{-2t}$$

կամ

$$\rho = M e^{-t} \quad (D)$$

Հաստատենք t -ի կախումը θ -ից: (C) հավասարություններից երկրորդի անդամները բաժանելով առաջին համապատասխան անդամների վրա, կստանանք.

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\beta t - \delta),$$

որտեղից

$$t = \frac{\theta + \delta}{\beta};$$

Տեղադրելով (D)-ի մեջ, ստանում ենք

$$\rho = M e^{-\frac{\theta + \delta}{\beta}}$$

կամ

$$\rho = M e^{-\frac{\delta}{\beta} - \frac{\theta}{\beta}};$$

Նշանակելով $M e^{-\frac{\delta}{\beta}} = M_1$, վերջնականապես ստանում ենք

$$\rho = M_1 e^{-\frac{\theta}{\beta}}, \quad (E)$$

Սա չորսրիթմական սպիրալների ընտանիք է: Այս դեպքում, երբ $t \rightarrow \infty$, կետր հետագծի վրայով մտնելով է կորդինատների սկզբնակետին: $O(0, 0)$ եզակի կետը հանդիսանում է կայուն ֆոկուս:

V. Բ ն ու թ ա գ ռ ի շ հ ա վ ա ս ա ր մ ա ն ա ր մ ա տ ն ե ր ը կ ո մ պ լ ե թ ա ե ն, որոնց փրակա ն մ ա ս ը դ ր ա կ ա ն է. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha > 0$): Այս դեպքում էլ լուծումն արտահայտվում է (15) բանաձևերով, որտեղ $\alpha > 0$: Ցանկացած x_0 և y_0 ($\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \neq 0$) սկզբնական պայմանների դեպքում և երբ $t \rightarrow \infty$ $|x(t)|$ -ն և $|y(t)|$ -ն կարող են ընդունել ցանկացած շարժում մեծ արժեքներ: Լուծումն անկայուն է: Ցաղալին հարթության վրա եզակի կետը կոչվում է անկայուն ֆոկուս: Կետը հետագծի վրայով անսահմանափակորեն հեռանում է կորդինատների սկզբնակետից:

Օ Ր Ի Ն Ա Կ 5: Հետադրուել

$$\frac{dx}{dt} = x + y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y$$

հավասարումների համակարգի լուծման կայունությունը:

Լ ո ծ ու մ: Կազմենք բնութագրիչ հավասարումը

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i:$$

Հաշվի առնելով (17)-ը, սվյալ դեպքում (15) լուծումը կլինի

$$\begin{aligned} x &= e^t(x_0 \cos t + y_0 \sin t), \\ y &= e^t(y_0 \cos t - x_0 \sin t), \end{aligned}$$

Ցաղալին հարթության վրա կստանանք կորը՝ բևեռային կորդինատներով.

$$\rho = M_1 e^{\theta/\beta};$$

Եզակի կետը անկայուն ֆոկուս է (նկ. 285):

VI. Բ ն ու թ ա գ ռ ի շ հ ա վ ա ս ա ր մ ա ն ա ր մ ա տ ն ե ր ը զ ու տ վ ե ղ ծ ե ն. $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$: (15) լուծումներն այս դեպքում կընդունեն

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t, \\ y &= \frac{1}{g} [(\beta C_2 - c C_1) \cos \beta t + (-\beta C_1 - c C_2) \sin \beta t] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

տեսքը: C_1 և C_2 հաստատունները որոշվում են (17) բանաձևերով.

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{g y_0 + c x_0}{g}. \quad (19)$$

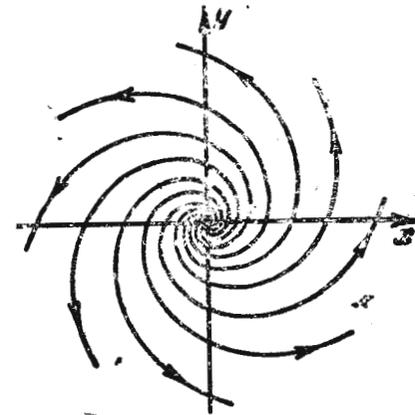
Ակնհայտ է, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ համար և բոլոր բավականաչափ փոքր $|x_0|$ -ի և $|y_0|$ -ի համար $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$ ցանկացած t -ի դեպքում: Լուծումը կայուն է: Այստեղ x -ը և y -ը t -ի պարբերական ֆունկցիաներ են:

Ցաղալին հարթության վրա ինտեգրալ կորերի վերլուծությունը կատարելու համար նպատակահարմար է (18) հավասարումներից առաջինը գրել հետևյալ տեսքով (տես (16)).

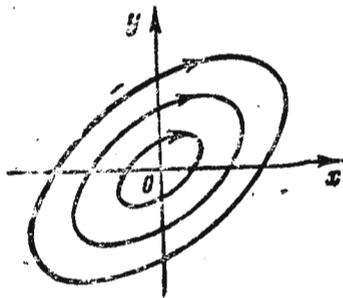
$$\left. \begin{aligned} x &= C \sin(\beta t + \delta), \\ y &= \frac{C\beta}{g} \cos(\beta t + \delta) - \frac{C c}{g} \sin(\beta t + \delta), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

որտեղ C -ն, δ -ն կամայական հաստատուններ են: (20) արտահայտություններից հետևում է, որ x -ը և y -ը t -ի պարբերական ֆունկցիաներ են: (20) հավասարումներից արտաքսենք t պարամետրը

$$y = \frac{C\beta}{g} \sqrt{1 - \frac{x^2}{C^2}} - \frac{c}{g} x:$$



Նկ. 285



Նկ. 286

Ազատվելով արմատից, կստանանք

$$\left(y - \frac{c}{g}x\right)^2 = \left(\frac{C\beta}{g}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{C^2}\right): \quad (21)$$

Սա մեկ C կամայական հաստատունից կխված երկրորդ կարգի կորերի ընտանիք է (կորերն իրական են): Դրանցից յուրաքանչյուրը անսահմանափակ հեռու կետեր չունի: Հետևաբար, դա կորորդինատների սկզբնական շրջապատող էլիպսների ընտանիք է (եբբ $c=0$ էլիպսի առանցքները զուգահեռ են կորորդինատների առանցքներին): Եզակի կետը կոչվում է կենտրոն (Նկ. 286):

Օրինակ 6: Հետազոտել

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -4x$$

հավասարումների համակարգի լուծման կայունությունը:

Լուծում: Կազմում ենք բնութագրիչ հավասարումը և գտնում ենք նրա արմատները

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 4 = 0, \quad \lambda = \pm 2i:$$

(20) լուծումները կլինեն

$$\begin{aligned} x &= C \sin(2t + \delta), \\ y &= 2C \cos(2t + \delta): \end{aligned}$$

(21) հավասարումները կունենան հետևյալ տեսքը

$$y^2 = 4C^2 \left(1 - \frac{x^2}{C^2}\right), \quad \frac{y^2}{4C^2} + \frac{x^2}{C^2} = 1:$$

Ֆազային հարթության վրա ունենք էլիպսների համակարգ: Եզակի կետը կենտրոն է:

VII. Դիցուք $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$: (8) լուծումն այս դեպքում ընդունում է

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \frac{1}{g} [-C_1 c + C_2 (\lambda_2 - c) e^{\lambda_2 t}] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

տեսքը: Ակնհայտ է, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ համար և բավականաչափ փոքր $|x_0|$ -ի և $|y_0|$ -ի համար $|x(t)| < \varepsilon, |y(t)| < \varepsilon$, եբբ $t > 0$: Հետևաբար, լուծումը կայուն է:

Օրինակ 7: Հետազոտել

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = -y \quad (\alpha)$$

համակարգի լուծման կայունությունը:

Լուծում: Գտնում ենք բնութագրիչ հավասարման արմատները

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + \lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1:$$

Այստեղ $g=0$: Լուծումները գտնում ենք անմիջապես, լուծելով համակարգը, շօղովելով (22) բանաձևերից

$$x = C_1, \quad y = C_2 e^{-t}: \quad (\beta)$$

$x = x_0, y = y_0$, եբբ $t=0$ սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծումը կլինի

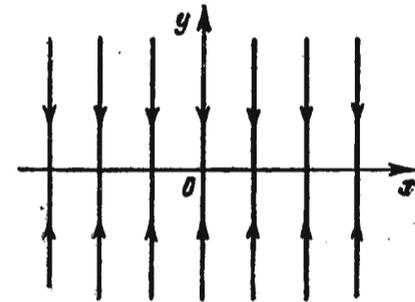
$$x = x_0, \quad y = y_0 e^{-t}: \quad (\gamma)$$

Ակնհայտ է, որ լուծումը կայուն է: Ֆազային հարթության վրա դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$\frac{dx}{dy} = 0, \quad \text{ընդհանուր}$$

ինտեգրալն է՝ $x = C$: Հետագծերը Oy առանցքի զուգահեռ ուղղիներ են:

(γ) հավասարումներից հետևում է, որ կետերը հետագծի վրայով մոտենում են $y=0$ ուղղին (Նկ. 287):



Նկ. 287

VIII. Դիցուք $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$: (22) կամ (8') բանաձևերից հետևում է, որ լուծումն անկայուն է, քանի որ $|x(t)| + |y(t)| \rightarrow \infty$, եբբ $t \rightarrow +\infty$:

IX. Դիցուք $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$: Լուծումը կլինի

$$\left. \begin{aligned} x &= (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t}, \\ y &= \frac{1}{g} e^{\lambda_1 t} [C_1 (\lambda_1 - c) + C_2 (1 + \lambda_1 t - ct)]: \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Քանի որ $e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ և $t e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$, եբբ $t \rightarrow +\infty$, ապա ցանկացած $\varepsilon > 0$ համար կարելի է ընտրել այնպիսի C_1 և C_2 (x_0 -ի և y_0 -ի ընտրության ճանապարհով), որ $|x(t)| < \varepsilon, |y(t)| < \varepsilon$ անհավասարությունները տեղի ունենան ցանկացած $t > 0$ դեպքում: Հետևաբար, լուծումը կայուն է: Ընդ որում $x(t) \rightarrow 0$ և $y(t) \rightarrow 0$, եբբ $t \rightarrow +\infty$:

Օրինակ 8: Հետազոտել

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = -y$$

համակարգի լուծման կայունությունը:

Լուծում: Գտնում ենք բնութագրիչ հավասարման արմատները

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda+1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1:$$

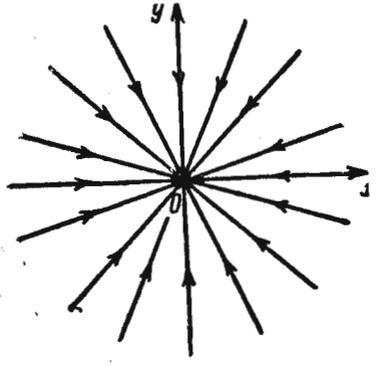
Այստեղ $g=0$: Համակարգի լուծումը կունենա հետևյալ (8') ձևը

$$x = C_1 e^{-t}, \quad y = C_2 e^{-t},$$

ընդ որում $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$, երբ $t \rightarrow +\infty$: լուծումը կայուն է: Ֆազային հարթության վրա կորերի ընտանիքը կլինի

$$\frac{y}{x} = \frac{C_2}{C_1} = k, \quad \text{այսինքն՝ } y = kx:$$

Սա կոորդինատների սկզբնականով անցնող ուղիղների ընտանիք է: Հետագծերի վրայով կետերը մոտենում են կոորդինատների սկզբնակետին: $O(0, 0)$ եզակի կետը հանգույց է (նկ. 288):



Նկ. 288

Այստեղից երևում է, որ $x \rightarrow \infty$ և $y \rightarrow \infty$, երբ $t \rightarrow +\infty$, լուծումն անկայուն է:

Օրինակ 9: Հետագոտել

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

հավասարումների համակարգի լուծման կայունությունը:

Լուծում: Գտնում ենք բնութագրիչ հավասարման արմատները

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1^2 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_1 = 0:$$

Գտնում ենք

$$y = C_2, \quad x = C_1 t + C_1$$

լուծումները: Ակնհայտ է, որ $x \rightarrow \infty$, երբ $t \rightarrow +\infty$: լուծումն անկայուն է: Ֆազային հարթության վրա հավասարումը կլինի $\frac{dy}{dx} = 0, y = C$ հետագծերը Ox առանցքին զուգահեռ ուղիղներն են (նկ. 289): Եզակի կետը կոչվում է էպիտրոպա՝ քանի որ

(4) համակարգի լուծման կայունությունը ընդհանուր կրիտերիա տալու համար վարվենք հետևյալ կերպ:

Բնութագրիչ հավասարման արմատները գրենք կոմպլեքս թվերի տեսքով.

$$\lambda_1 = \lambda_1^* + i\lambda_1^{**}, \quad \lambda_2 = \lambda_2^* + i\lambda_2^{**}$$

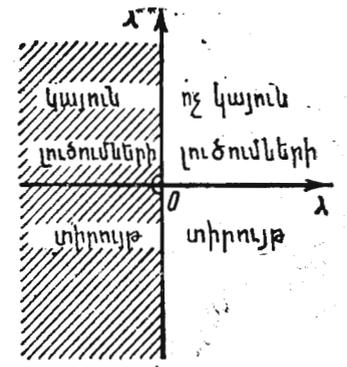
(իրական արմատների դեպքում $\lambda_1^{**} = 0, \lambda_2^{**} = 0$),

վերցնենք $\lambda^* \lambda^{**}$ կոմպլեքս փոփոխականի հարթությունը և բնութագրիչ հավասարման արմատները պատկերենք այդ հարթության կետերով: Այդ դեպքում բնանրկված դեպքերի հիման վրա (4) համակարգի լուծումների կայունության պայմանը կարելի է ձևակերպել այսպես:

Եթե (6) բնութագրիչ հավասարման λ_1, λ_2 արմատներից ոչ մեկը ընկած չէ կեղծ առանցքից աջ, ընդ որում արմատներից գոնե մեկը առաջ է գրոյից, ապա լուծումը կայուն է, իսկ եթե արմատներից գոնե մեկը ընկած է կեղծ առանցքից աջ, կամ երկու արմատներն էլ հավասար են գրոյի, ապա լուծումն անկայուն է (նկ. 290):

Այժմ դիտարկենք ավելի ընդհանուր հավասարումների համակարգ.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy + P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + Q(x, y): \end{aligned} \right\} (25)$$



Նկ. 290

Բացառիկ դեպքերից բացի, այսպիսի համակարգի լուծումը տարրական

ֆունկցիաներով և կվադրատուրայով չի արտահայտվում:

Այս համակարգի լուծման կայունությունը կամ անկայունությունը պարզելու համար սա համեմատում ենք գծային համակարգի լուծման հետ: Ենթադրենք, որ երբ $x \rightarrow 0$ և $y \rightarrow 0$ $P(x, y)$ և $Q(x, y)$ ֆունկցիաները նույնպես ձգտում են զրոյի, ընդ որում ավելի արագ, քան ρ -ն, որտեղ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, այլ կերպ ասած՝

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{P(x, y)}{\rho} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{Q(x, y)}{\rho} = 0:$$

Այս դեպքում կարելի է ապացուցել, որ, բացի բացառիկ դեպքերից, (25) համակարգի լուծումը կլինի կայուն այն դեպքում, երբ կայուն է

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by \end{aligned} \right\} (4)$$

համակարգի լուծումը, և անկայուն է, եթե (4) համակարգի լուծումն անկայուն է: Բացառություն է կազմում այն դեպքը, երբ բնութագրիչ հավասարումը

սարման երկու արմատներն ընկած են կեղծ առանցքի վրա. այս դեպքում (25) համակարգի կայունության կամ անկայունության մասին հարցը լուծվում է նշանակալիորեն ավելի բարդությամբ:

Ա. Մ. Լյապունովը* ուսումնասիրել է հավասարումների համակարգերի լուծումների կայունության մասին հարցը՝ այդ հավասարումների տեսքի նկատմամբ բավականին ընդհանուր ենթադրությունների դեպքում: Տատանումների տեսության մեջ հաճախ քննարկում են

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (26)$$

հավասարումը: Նշանակենք

$$\frac{dx}{dt} = v: \quad (27)$$

Այդ դեպքում ստանում ենք հետևյալ հավասարումների համակարգը

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= f(x, v). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Այս համակարգի համար ֆազային հարթություն կլինի (x, v) հարթությունը: Ֆազային հարթության վրա հետագծերը ստալիս են x կոորդինատից ունեցած v արագության կախման երկրաչափական պատկերացումը և ակնառու կերպով բնութագրում են x -ի և v -ի փոփոխությունը: Եթե $x=0, v=0$ կետը եզակի կետ է, ապա այն որոշում է հավասարակշռության դիրքը:

Այսպես, օրինակ, եթե հավասարումների համակարգի եզակի կետը կենտրոն է, այսինքն՝ ֆազային հարթության վրա հետագծերը փակ գծեր են, որոնք շրջապատում են կոորդինատների սկզբնակետը, ապա (26) հավասարումներով նկարագրվող շարժումները շմարող տատանողական շարժումներ են: Եթե ֆազային հարթության վրա եզակի կետը ֆոկոս է (ընդ որում $|x| \rightarrow 0, |v| \rightarrow 0$), ապա (26) հավասարումներով նկարագրվող շարժումները մարող տատանումներ են: Եթե եզակի կետը հանգույց կամ թամբ է (և դա միակ եզակի կետն է), ապա $x \rightarrow \pm \infty$ երբ $t \rightarrow \infty$: Այս դեպքում շարժվող նյութական կետը հեռանում է անսահմանություն:

* А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., ОНТИ, 1935.

Եթե (26) հավասարումը $\frac{d^2x}{dt^2} = ax + b \frac{dx}{dt}$ տեսքի գծային հավասարում է, ապա (28) համակարգն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = ax + bv:$$

Այս համակարգը (4) տեսքի է: $x=0, v=0$ կետը եզակի կետ է, որը որոշում է հավասարակշռության դիրքը: Նշենք, որ x փոփոխականն անպայման կետի մեխանիկական տեղափոխությունը չէ: Այն կարող է ունենալ տարբեր ֆիզիկական իմաստ, օրինակ, լինել էլեկտրական տատանումներ բնութագրող մեծություն:

§ 32. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր լուծումը Էյլերի մեթոդով

Քննարկելու ենք առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման թվային լուծման երկու մեթոդ: Այս պարագրաֆում կքննարկենք էյլերի մեթոդը: Գտնենք

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

հավասարման մոտավոր լուծումը $[x_0, b]$ հատվածում, որը բավարարում է $x=x_0, y=y_0$ սկզբնական պայմանին: $[x_0, b]$ հատվածը $x_0, x_1, \dots, x_n = b$ կետերով տրոհենք n հավասար մասերի (այստեղ $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$): Նշանակենք $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$, հետևաբար,

$$h = \frac{b - x_0}{n}$$

Դիցուք $y = \varphi(x)$ ֆունկցիան (1) հավասարման որևէ մոտավոր լուծումն է և

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), \dots, y_n = \varphi(x_n):$$

Նշանակենք

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}:$$

(1) հավասարման մեջ x_0, x_1, \dots, x_n կետերից յուրաքանչյուրում ածանցյալը փոխարինենք վերջավոր աճերի հարաբերություններով.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \quad (2)$$

$$\Delta y = f(x, y) \Delta x: \quad (2')$$

Սրբ $x = x_0$ կոնկրետն

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0), \Delta y_0 = f(x_0, y_0) \Delta x$$

կամ

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h:$$

Այս հավասարության մեջ x_0 -ն, y_0 -ն, h -ը հայտնի են, հետևաբար, գրտնում ենք.

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h:$$

Սրբ $x = x_1$ (2') հավասարումն ընդունում է

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1)h$$

կամ

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)h, \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$$

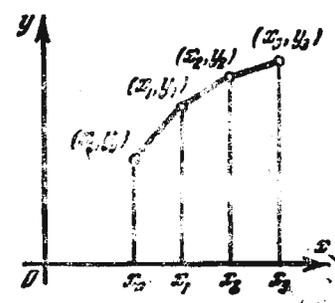
տեսք: Այստեղ x_1 -ը, y_1 -ը, h -ը հայտնի են, իսկ y_2 -ը որոշվում է նման ձևով գտնում ենք

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h,$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h,$$

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h:$$

Այսպիսով, լուծման մոտավոր արժեքները x_0, x_1, \dots, x_n կետերում գրտնեղված են: Կոորդինատային հարթության վրա $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ կետերը միացնելով ուղղի հատվածներով, կտանանք բնական L , որը ինտեգրալ կորի մոտավոր պատկերն է (նկ. 291): Այդ բեկյալը կոչվում է էյլերի բեկյալ:



Նկ. 291

Դիտարկենք նշանակենք $y = \varphi_n(x)$ -ով (1) հավասարման այն մոտավոր լուծումը, որը համապատասխանում է էյլերի բեկյալին, երբ $\Delta x = h$: Կարելի է ապացուցել*, որ եթե գոյություն ունի (1) հավասարման միակ $y = \varphi^*(x)$ լուծումը, որը բավարարում է սկզբնական պայմաններին ու որոշված է $[x_0, b]$ հատվածում, ապա $\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi_n(x) - \varphi^*(x)| = 0$ հատվածի ցանկացած x կետում:

* Ապացուցումը տես, օրինակ, И. Г. Петровский, «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений» գրքում:

Օրինակ: Գտնել $y' = y + x$ հավասարման այն մոտավոր լուծումը, որը բավարարում է: $y_0 = 1$, երբ $x_0 = 0$ սկզբնական պայմանին:

Լուծում: $x_0 = 0; 0,1; 0,2; \dots; 1,0$ կետերով $[0, 1]$ հատվածը տրոհենք 10 մասի: Հետևաբար, $h = 0,1$: y_1, y_2, \dots, y_n արժեքները կորոնենք (2') բանաձևերով

$$\Delta y_k = (y_k + x_k)h$$

կամ

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)h:$$

Այսպիսով, ստանում ենք

$$y_1 = 1 + (1 + 0) \cdot 0,1 = 1 + 0,1 = 1,1,$$

$$y_2 = 1,1 + (1,1 + 0,1) \cdot 0,1 = 1,22,$$

.....

Լուծման ընթացքում կազմում ենք հետևյալ աղյուսակը.

x_k	y_k	$y_k + x_k$	$\Delta y_k = (y_k + x_k)h$
$x_0 = 0$	1,000	1,000	0,100
$x_1 = 0,1$	1,100	1,200	0,120
$x_2 = 0,2$	1,220	1,420	0,142
$x_3 = 0,3$	1,362	1,620	0,162
$x_4 = 0,4$	1,524	1,924	0,1924
$x_5 = 0,5$	1,7164	2,2164	0,2216
$x_6 = 0,6$	1,9380	2,5380	0,2538
$x_7 = 0,7$	2,1918	2,8918	0,2892
$x_8 = 0,8$	2,4810	3,2810	0,3281
$x_9 = 0,9$	2,8091	3,7091	0,3709
$x_{10} = 1,0$	3,1800		

Մենք գտանք $y|_{x=1} = 3,1800$ մոտավոր արժեքը: Տրված հավասարման այն ճշգրիտ լուծումը, որը բավարարում է նշված սկզբնական պայմաններին, կլինի

$$y = 2e^x - x - 1,$$

Հետևաբար,

$$y|_{x=1} = 2(e - 1) = 3,4366.$$

Բացարձակ սխալն է՝ $0,2566$, հարաբերական սխալը՝ $\frac{0,2566}{3,4366} = 0,075 \approx 8\%$.

§ 33. Դիֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր լուծման տարբերական մեթոդը, որը հիմնված է Թեյլորի բանաձևի վրա: Աղամսի մեթոդը

Նորից որոնելու ենք

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

հավասարման լուծումը $[x_0, b]$ հատվածում, որը բավարարում է $y = y_0$, երբ $x = x_0$ սկզբնական պայմանին: Մուծենք հետագայի համար անհրաժեշտ նշանակումներ: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ կետերում լուծման մոտավոր արժեքները կլինեն $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$:

Առաջին տարբերությունները կամ առաջին կարգի տարբերությունները.

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

Երկրորդ տարբերությունները կամ երկրորդ կարգի տարբերությունները.

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1,$$

.....

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$$

Երկրորդ տարբերությունների տարբերությունները կոչվում են երրորդ կարգի տարբերություններ և այլն: Նշանակենք y'_0, y'_1, \dots, y'_n -ով ածանցյալների մոտավոր արժեքները, $y''_0, y''_1, \dots, y''_n$ -ով՝ երկրորդ ածանցյալների մոտավոր արժեքները և այլն: Նման ձևով սահմանվում են ածանցյալների առաջին տարբերությունները.

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0, \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1, \dots, \Delta y'_{n-1} = y'_n - y'_{n-1},$$

ածանցյալների երկրորդ տարբերությունները

$$\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0, \Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1, \dots, \Delta^2 y'_{n-2} = \Delta y'_{n-1} - \Delta y'_{n-2}$$

և այլն:

Այնուհետև, հավասարումը $x = x_0$ կետի շրջակայքում լուծելու համար գրենք Թեյլորի բանաձևը (I հատ., IV գլ., § 6, բանաձև (6)).

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1} y'_0 + \frac{(x-x_0)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \dots + \frac{(x-x_0)^m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} y_0^{(m)} + R_m \quad (2)$$

Այս բանաձևում y_0 -ն հայտնի է, իսկ y'_0, y''_0, \dots ածանցյալների արժեքները գտնում են (1) հավասարումից հետևյալ կերպ. տեղադրելով (1) հավասարման աջ մասում x_0 և y_0 սկզբնական արժեքները, կգտնենք y'_0 -ը

$$y'_0 = f(x_0, y_0)$$

(1) հավասարման անդամները դիֆերենցելով ըստ x -ի, կստանանք

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y', \quad (3)$$

Այս մասում տեղադրելով x_0 -ի, y_0 -ի և y'_0 -ի արժեքները, կգտնենք

$$y''_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_{x=x_0, y=y_0, y'=y'_0}$$

(3) հավասարությունը մեկ անգամ էլ դիֆերենցելով ըստ x -ի և տեղադրելով x_0 -ի, y_0 -ի, y'_0 -ի, y''_0 -ի արժեքները, կգտնենք y'''_0 -ը: Շարունակելով* այսպես, կարող ենք գտնել ցանկացած կարգի ածանցյալների արժեքները $x = x_0$ կետում: (2) հավասարության աջ մասի բոլոր անդամները, բացի R_m մնացորդային անդամից, հայտնի են: Այսպիսով, հաշվի շահելով մնացորդային անդամը, x -ի ցանկացած արժեքի դեպքում մենք կարող ենք ստանալ լուծման մոտավոր արժեքները. դրանց ճշգրտությունը կախված կլինի $|x-x_0|$ -ի մեծությունից և վերլուծության անդամների թվից:

Ստորև դիտարկված մեթոդում (2) բանաձևով որոշվում են միայն y -ի մի քանի առաջին արժեքները, երբ $|x-x_0|$ -ն փոքր է: y_1 և y_2 արժեքները կորոշենք, երբ $x_1 = x_0 + h$ և երբ $x_2 = x_0 + 2h$, վերցնելով վերլուծության շրջանում (y_0 -ն հայտնի է սկզբնական պայմանների հիման վրա).

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0, \quad (4)$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0, \quad (4')$$

Այսպիսով, կհամարենք, որ հայտնի են ֆունկցիայի y_0, y_1, y_2 երեք արժեքները**: Այս արժեքների հիման վրա, օգտվելով (1) հավասարումից, որոշում ենք

$$y_0 = f(x_0, y_0), y_1 = f(x_1, y_1), y_2 = f(x_2, y_2)$$

* Հետագայում ենթադրելու ենք, որ $f(x, y)$ ֆունկցիան այնքան անգամ դիֆերենցելի է ըստ x -ի և ըստ y -ի, որքան պահանջվում է դատողությունների ընթացքում:

** Եթե սկսենք լուծումը գտնել մեծ ճշտությամբ, ապա կպահանջվեր հաշվել y -ի երեք արժեքներից ավելի: Այս մասին մանրամասն տես, օրինակ, Я. С. Безикович, Приближенные вычисления, Гостехиздат, 1949:

Եվ այսպես, y_k'' -ը և y_k''' -ը գտնված են: Տեղադրելով (10) և (11) արտահայտությունները (5) վերլուծության մեջ, կստանանք

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h}{2} \Delta y_{k-1}' + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{k-2}' \quad (12)$$

Սա էլ հենց, այսպես կոչված, Արամսի բանաձևն է՝ շորս անդամներով: (12) բանաձևը հնարավորություն է տալիս, իմանալով y_k -ն, y_{k-1} -ը, y_{k-2} -ը, որոշել y_{k+1} -ը: Այսպիսով, իմանալով y_0 -ն, y_1 -ը և y_2 -ը, կարող ենք գտնել y_3 -ը և այնուհետև y_4 -ը, y_5 , ...:

Դիտարկենք թիվ 1: Առանց ապացուցման նշենք, որ եթե $[x_0, b]$ հատվածում գոյություն ունի (1) հավասարման միակ լուծումը, որը բավարարում է սկզբնական պայմաններին, ապա (12) բանաձևերով որոշվող մոտավոր արժեքների օրինակ բացարձակ մեծությունները չի գերազանցում Mh^3 -ին, որտեղ M -ը հաստատուն է, որը կախված է միջակայքի երկարությունից և $f(x, y)$ ֆունկցիայի տեսքից և կախված չէ h -ի մեծությունից:

Դիտարկենք թիվ 2: Եթե ցանկանում ենք ստանալ հաշվման մեծ ճշտություն, ապա պետք է վերցնենք ավելի շատ անդամներ, քան վերցրել ենք (5) վերլուծության մեջ, և (12) բանաձևը համապատասխանորեն կփոխվի: Այսպես, եթե (5) բանաձևի փոխարեն վերցնենք աչից 5 անդամ պարունակող բանաձև, այսինքն՝ լրացնենք h^4 -ի կարգի անդամով, ապա (12) բանաձևի փոխարեն համանման ճանապարհով կստանանք

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h}{2} \Delta y_{k-1}' + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{k-2}' + \frac{3h}{8} \Delta^3 y_{k-3}'$$

բանաձևը: Այստեղ y_{k+1} -ը որոշվում է y_k , y_{k-1} , y_{k-2} և y_{k-3} արժեքների միջոցով: Այսպիսով, այս բանաձևով հաշվումները սկսելու համար պետք է իմանալ լուծման առաջին շորս արժեքները՝ y_0 , y_1 , y_2 , y_3 : Այս արժեքները (4) տիպի բանաձևերով հաշվելիս պետք է վերցնել վերլուծության հինգ անդամ:

Օրինակ 1: Գտնել $y' = y + x$ հավասարման այն լուծման մոտավոր արժեքները, որը բավարարում է $y_0 = 1$, երբ $x_0 = 0$ սկզբնական պայմանին: Որոշել՝ լուծման արժեքները, երբ $x = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$:

Լուծում: Նախ (4) և (4') բանաձևերով գտնենք y_1 -ը և y_2 -ը: Հավասարումից և սկզբնական պայմաններից ստանում ենք

$$y_0' = (y+x)_{x=0} = y_0 + x_0 = 1 + 0 = 1,$$

Դիֆերենցիով տրված հավասարումը, կստանանք.

$$y'' = y' + 1,$$

Հետևաբար,

$$y_0'' = (y' + 1)_{x=0} = 1 + 1 = 2,$$

Դիֆերենցիով ևս մեկ անգամ՝

$$y''' = y'',$$

Հետևաբար,

$$y_0''' = y_0'' = 2$$

(4) հավասարման մեջ տեղադրելով y_0 , y_0' , y_0'' արժեքները և $h = 0,1$, կստանանք.

$$y_1 = 1 + \frac{0,1}{1} \cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(0,1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1,1103,$$

Նման ձևով, երբ $h = 0,2$, կստանանք.

$$y_2 = 1 + \frac{0,2}{1} \cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(0,2)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1,2427,$$

Իմանալով y_0 -ն, y_1 -ը, y_2 -ը, հավասարման հիման վրա գտնում ենք.

$$y_1' = y_0 + x_0 = 1,$$

$$y_1' = y_1 + x_1 = 1,1103 + 0,1 = 1,2103,$$

$$y_2' = y_2 + x_2 = 1,2427 + 0,2 = 1,4427,$$

$$\Delta y_0' = 0,2103,$$

$$\Delta y_1' = 0,2324,$$

$$\Delta^2 y_0' = 0,0221.$$

Ստացված արդյունքները գրենք հետևյալ աղյուսակում.

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1,0000$	$y_0' = 1$		
			$\Delta y_0' = 0,2103$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 1,1103$	$y_1' = 1,2103$		$\Delta^2 y_0' = 0,0221$
			$\Delta y_1' = 0,2324$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 1,2427$	$y_2' = 1,4427$		$\Delta^2 y_1' = 0,0244$
			$\Delta y_2' = 0,2568$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 1,3995$	$y_3' = 1,6995$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 1,5333$			

(12) բանաձևով գտնում ենք y_3 -ը.

$$y_3 = 1,2427 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,4427 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,2324 + \frac{5 \cdot (0,1)}{12} \cdot 0,0221 = 1,3995.$$

Եվ այսպես, y_k'' -ը և y_k''' -ը գտնված են: Տեղադրելով (10) և (11) արտահայտությունները (5)՝ վերլուծության մեջ, փոտանանք

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h}{2} \Delta y_{k-1}' + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{k-2}' \quad (12)$$

Սա էլ հենց, այսպես կոչված, Ադամսի բանաձևն է՝ շոքս անդամներով: (12) բանաձևը հնարավորություն է տալիս, իմանալով y_k -ն, y_{k-1} -ը, y_{k-2} -ը, որոշելի y_{k+1} -ը: Այսպիսով, իմանալով y_0 -ն, y_1 -ը և y_2 -ը, կարող ենք գտնել y_3 -ը և այնուհետև y_4 -ը, y_5 , ...:

Դիտարկենք 1: Առանց ապացուցման նշենք, որ եթե $[x_0, b]$ հատվածում գոյություն ունի (1) հավասարման միակ լուծումը, որը բավարարում է սկզբնական պայմաններին, ապա (12) բանաձևերով որոշվող մոտավոր արժեքների ախալը բացարձակ մեծությամբ չի գերազանցում Mh^4 -ին, որտեղ M -ը հաստատուն է, որը կախված է միջակայքի երկարությունից և $f(x, y)$ ֆունկցիայի տեսքից և կախված չէ h -ի մեծությունից:

Դիտարկենք 2: Եթե ցանկանում ենք ստանալ հաշվման մեծ ճշտություն, ապա պետք է վերցնենք ավելի շատ անդամներ, քան վերցրել ենք (5) վերլուծության մեջ, և (12) բանաձևը համապատասխանորեն կփոխվի: Այսպես, եթե (5) բանաձևի փոխարեն վերցնենք աջից 5 անդամ պարունակող բանաձև, այսինքն՝ լրացնենք h^4 -ի կարգի անդամով, ապա (12) բանաձևի փոխարեն համանման ճանապարհով կստանանք

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h}{2} \Delta y_{k-1}' + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{k-2}' + \frac{3h}{8} \Delta^3 y_{k-3}'$$

բանաձևը: Այստեղ y_{k+1} -ը որոշվում է y_k , y_{k-1} , y_{k-2} և y_{k-3} արժեքների միջոցով: Այսպիսով, այս բանաձևով հաշվումները սկսելու համար պետք է իմանալ լուծման առաջին շոքս արժեքները՝ y_0 , y_1 , y_2 , y_3 : Այս արժեքները (4) տիպի բանաձևերով հաշվելիս պետք է վերցնել վերլուծության հինգ անդամ:

Օրինակ 1: Գտնել $y' = y + x$ հավասարման այն լուծման մոտավոր արժեքները, որը բավարարում է $y_0 = 1$, երբ $x_0 = 0$ սկզբնական պայմանին: Որոշել լուծման արժեքները, երբ $x = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$:

Լուծում: Նախ (4) և (4') բանաձևերով գտնենք y_1 -ը և y_2 -ը: Հավասարումից և սկզբնական պայմաններից ստանում ենք

$$y_0' = (y+x)_{x=0} = y_0 + x_0 = 1 + 0 = 1.$$

Դիֆերենցիով տրված հավասարումը, կստանանք.

$$y'' = y' + 1.$$

Հետևաբար,

$$y_0'' = (y' + 1)_{x=0} = 1 + 1 = 2.$$

Դիֆերենցիով ևս մեկ անգամ՝

$$y''' = y''.$$

Հետևաբար,

$$y_0''' = y_0'' = 2$$

(4) հավասարման մեջ տեղադրելով y_0 , y_0' , y_0'' արժեքները և $h = 0,1$, կստանանք.

$$y_1 = 1 + \frac{0,1}{1} \cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(0,1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1,1103.$$

Նման ձևով, երբ $h = 0,2$, կստանանք.

$$y_2 = 1 + \frac{0,2}{1} \cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(0,2)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1,2427.$$

Իմանալով y_0 -ն, y_1 -ը, y_2 -ը, հավասարման հիման վրա գտնում ենք.

$$y_0' = y_0 + x_0 = 1,$$

$$y_1' = y_1 + x_1 = 1,1103 + 0,1 = 1,2103,$$

$$y_2' = y_2 + x_2 = 1,2427 + 0,2 = 1,4427,$$

$$\Delta y_0' = 0,2103,$$

$$\Delta y_1' = 0,2324,$$

$$\Delta^2 y_0' = 0,0221.$$

Ստացված արդյունքները գրենք հետևյալ աղյուսակում.

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1,0000$	$y_0' = 1$		
			$\Delta y_0' = 0,2103$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 1,1103$	$y_1' = 1,2103$		$\Delta^2 y_0' = 0,0221$
			$\Delta y_1' = 0,2324$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 1,2427$	$y_2' = 1,4427$		$\Delta^2 y_1' = 0,0244$
			$\Delta y_2' = 0,2568$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 1,3995$	$y_3' = 1,6995$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 1,5333$			

(12) բանաձևով գտնում ենք y_3 -ը.

$$y_3 = 1,2427 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,4427 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,2324 + \frac{5 \cdot (0,1)}{12} \cdot 0,0221 = 1,3995.$$

Այնուհետև գտնում ենք y''_3 , $\Delta y'_2$, $\Delta^2 y'_1$ արժեքները: Նորից (12) բանաձևով գտնում ենք y_4 -ը:

$$y_4 = 1,3995 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,6995 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,2568 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0244 = 1,5833;$$

Տվյալ հավասարման լուծման ճշգրիտ արտահայտությունն է $y = 2e^x - x - 1$:

Հետևաբար, $y_{x=0,4} = 2e^{0,4} - 0,4 - 1 = 1,58364$, բացարձակ սխալն է 0,0003, հարաբերակցական սխալը՝ $\frac{0,0003}{1,5836} \approx 0,0002 = 0,02\%$: (էջերի մեթոդով հաշված y_4 -ի արժեքի բացարձակ սխալն է 0,06, հարաբերական սխալը՝ 0,038 = 3,8%):

Սրի նաև z : Գտնել $y'' = y^2 + x^2$ հավասարման այն լուծման մոտավոր արժեքները, որը բավարարում է $y_0 = 0$, երբ $x_0 = 0$ սկզբնական պայմանին: Որոշել լուծման արժեքները, երբ $x = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$:

Լուծում: Գտնում ենք.

$$\begin{aligned} y'_0 &= 0^2 + 0^2 = 0, \\ y''_{x=0} &= (2yy' + 2x)_{x=0} = 0, \\ y'''_{x=0} &= (2y'^2 + 2yy'' + 2)_{x=0} = 2, \end{aligned}$$

(4) և (4') բանաձևերով ստանում ենք.

$$y_1 = \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 2 = 0,0003, \quad y_2 = \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 2 = 0,0027,$$

Հավասարումից գտնում ենք.

$$y'_0 = 0, \quad y'_1 = 0,0100, \quad y'_2 = 0,0400.$$

Այս տվյալների հիման վրա կազմում ենք աղյուսակի առաջին տողերը, իսկ այնուհետև y_3 -ը և y_4 -ը որոշում ենք (12) բանաձևերով.

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y'_0 = 0$		
			$\Delta y'_0 = 0,0100$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,0003$	$y'_1 = 0,0100$		$\Delta^2 y'_0 = 0,0200$
			$\Delta y'_1 = 0,0300$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,0027$	$y'_2 = 0,0400$		$\Delta^2 y'_1 = 0,0201$
			$\Delta y'_2 = 0,0501$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,0090$	$y'_3 = 0,0901$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,0204$			

Այսպես, ուրեմն

$$y_3 = 0,0027 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,0400 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0300 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0200 = 0,0090,$$

$$y_4 = 0,0090 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,0901 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0501 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0201 = 0,0214.$$

Նշենք, որ y_4 -ի մեջ առաջին շրջա ստույգ նիշերը այսպիսիք են՝ $y_4 = 0,0213$: (Դա կարելի է ստանալ ուրիշ, ավելի ճշգրիտ մեթոդներով, սխալի գնահատումով):

§ 34. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ինտեգրման մոտավոր մեթոդ

§ § 32 և 33-ում քննարկված դիֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր ինտեգրման մեթոդները կիրառելի են նաև առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծման համար: Այստեղ քրոնիարկենք հավասարումների համակարգի լուծման տարբերակային մեթոդը: Կշռադատությունները կատարելու ենք երկու հավասարումների համակարգի համար, որոնք լուծվում են երկու ֆունկցիաներ:

Պահանջվում է գտնել

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \tag{1}$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \tag{2}$$

հավասարումների համակարգի այն լուծումը, որը բավարարում է $y = y_0$, $z = z_0$, երբ $x = x_0$ սկզբնական պայմաններին:

y և z ֆունկցիաների արժեքները կորոշենք արգումենտի $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ արժեքների դեպքում: Դիցուք նորից

$$x_{k+1} - x_k = \Delta x = h \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1): \tag{3}$$

Ֆունկցիաների մոտավոր արժեքները նշանակենք

$$y_0, y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n$$

և, համապատասխանաբար,

$$z_0, z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n$$

Գրենք § 33-ի (12) տիպի հետևյալ սեկուրենտ բանաձևերը.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_k + \frac{5}{12} h \Delta^2 y'_k, \tag{4}$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{h}{1} z'_k + \frac{h}{2} \Delta z'_{k-1} + \frac{5}{12} h \Delta^2 z'_{k-2} \quad (5)$$

Հաշվումներն այս բանաձևերով սկսելու համար պետք է տրված y_0 և z_0 արժեքներից բացի իմանալ նաև $y_1, y_2; z_1, z_2$ արժեքները, որոնք գտնում ենք § 32-ի (4) և (4') տիպի բանաձևերով.

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0,$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{1} z'_0 + \frac{h^2}{2} z''_0 + \frac{h^3}{3!} z'''_0,$$

$$z_2 = z_0 + \frac{2h}{1} z'_0 + \frac{(2h)^2}{2} z''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} z'''_0,$$

Այս բանաձևերն օգտագործելու համար պետք է իմանալ $y'_0, y''_0, y'''_0, z'_0, z''_0, z'''_0$, որոնց որոշմանը կանցնենք այժմ: (1) և (2) հավասարումներից գտնում ենք.

$$y'_0 = f_1(x_0, y_0, z_0),$$

$$z'_0 = f_2(x_0, y_0, z_0);$$

Դիֆերենցիերով (1) և (2) հավասարումները և տեղադրելով x_0, y_0, z_0, y'_0 և z'_0 արժեքները, կգտնենք.

$$y''_0 = (y'')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z' \right)_{x=x_0},$$

$$z''_0 = (z'')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} y' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z' \right)_{x=x_0}.$$

Դիֆերենցիերով մեկ անգամ ևս, կգտնենք y'''_0 -ը և z'''_0 -ը: Իմանալով y_1 -ը, y_2 -ը, z_1 -ը, z_2 -ը, տրված (1) և (2) հավասարումներից գտնում ենք

$$y_1, y_2, z_1, z_2, \Delta y_0, \Delta y_1, \Delta^2 y_0, \Delta z_1, \Delta^2 z_0,$$

որից հետո կարող ենք լրացնել հետևյալ աղյուսակի առաջին հինգ տողերը.

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	z	z'	$\Delta z'$	$\Delta^2 z'$
x_0	y_0	y'_0			z_0	z'_0		
			$\Delta y'_0$				$\Delta z'_0$	
x_1	y_1	y'_1		$\Delta^2 y'_0$	z_1	z'_1		$\Delta^2 z'_0$
			$\Delta y'_1$				$\Delta z'_1$	
x_2	y_2	y'_2		$\Delta^2 y'_1$	z_2	z'_2		$\Delta^2 z'_1$
			$\Delta y'_2$				$\Delta z'_2$	
x_3	y_3	y'_3			z_3	z'_3		

(4) և (5) բանաձևերով կգտնենք y_3 -ը և z_3 -ը, իսկ (1) և (2) հավասարումներից կգտնենք y'_3 -ը և z'_3 -ը: Հաշվելով $\Delta y'_2$ -ը, $\Delta^2 y'_1$ -ը, $\Delta z'_2$, $\Delta^2 z'_1$ -ը, նորից (4) և (5) բանաձևերով կգտնենք y_4 -ը և z_4 -ը և այլն:

Օրինակ 1: Գտնել $y' = z$, $z' = y$ համակարգի այն լուծումների մոտավոր արժեքները, որոնք բավարարում են $y_0 = 0$, $z_0 = 1$, երբ $x = 0$ սկզբնական պայմաններին: Լուծումների արժեքները հաշվել, երբ $x = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$:

Լուծում: Տրված հավասարումներից գտնում ենք.

$$y'_0 = z_{x=0} = 0,$$

$$z'_0 = y_{x=0} = 0.$$

Դիֆերենցիերով տրված հավասարումները, գտնում ենք.

$$y''_0 = (y'')_{x=0} = (z')_{x=0} = 0,$$

$$z''_0 = (z'')_{x=0} = (y')_{x=0} = 1,$$

$$y'''_0 = (y''')_{x=0} = (z'')_{x=0} = 1,$$

$$z'''_0 = (z''')_{x=0} = (y'')_{x=0} = 0.$$

(4) և (5) տիպի բանաձևերով գտնում ենք.

$$y_1 = 0 + \frac{0,1}{1} \cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 0 + \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 1 = 0,1002,$$

$$y_2 = 0 + \frac{0,2}{1} \cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 0 + \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 1 = 0,2013,$$

$$z_1 = 1 + \frac{0,1}{1} \cdot 0 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 0 = 1,0050,$$

$$z_2 = 1 + \frac{0,2}{1} \cdot 0 + \frac{(0,2)^2}{2!} \cdot 1 + \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 0 = 1,0200.$$

Տրված հավասարումների հիման վրա գտնում ենք.

$$y'_1 = 1,0050, \quad z'_1 = 0,1002,$$

$$y'_2 = 1,0200, \quad z'_2 = 0,2013,$$

$$\Delta y'_0 = 0,0050, \quad \Delta z'_0 = 0,1002,$$

$$\Delta y'_1 = 0,0150, \quad \Delta z'_1 = 0,1011,$$

$$\Delta^2 y'_0 = 0,0100, \quad \Delta^2 z'_0 = 0,0009$$

և լրացնում ենք աղյուսակի առաջին հինգ ստորերը (տես էջ 157):

Այնուհետև, (4) և (5) բանաձևերով գտնում ենք.

$$y_3 = 0,2013 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,0200 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0150 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0100 = 0,3045,$$

$$z_3 = 1,0200 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,2013 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,1011 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0009 = 1,0452$$

և նման ձևով

$$y_4 = 0,3045 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,0452 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0252 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0102 = 0,4107,$$

$$z_4 = 1,0452 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,3045 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,1032 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0021 = 1,0809.$$

Այնհայտ է, որ տրված հավասարումների համակարգի այն լուծումները, որոնք բավարարում են տրված սկզբնական պայմաններին, կլինեն

$$y = \operatorname{sh} x, \quad z = \operatorname{ch} x.$$

Ուստի, ստորակետից հետո հինգ ճշգրիտ նիշերով լուծումները կլինեն

$$y_4 = \operatorname{sh} 0,4 = 0,41075, \quad z_4 = \operatorname{ch} 0,4 = 1,08107.$$

x	y	y'	Δy'	Δ²y'	z	z'	Δz'	Δ²z'
x ₀ =0	y ₀ =0	y' ₀ =1			z ₀ =1	z' ₀ =0		
			Δy' ₀ =0,0050				Δz' ₀ =0,1002	
x ₁ =0,1	y ₁ =0,1002	y' ₁ =1,0050		Δ²y' ₀ =0,0100	z ₁ =1,0050	z' ₁ =0,1002		Δ²z' ₀ =0,0009
			Δy' ₁ =0,0150				Δz' ₁ =0,1014	
x ₂ =0,2	y ₂ =0,2013	y' ₂ =1,0200		Δ²y' ₁ =0,0102	z ₂ =1,0200	z' ₂ =0,2013		Δ²z' ₁ =0,0021
			Δy' ₂ =0,0252				Δz' ₂ =0,1032	
x ₃ =0,3	y ₃ =0,3045	y' ₃ =1,0452			z ₃ =1,0452	z' ₃ =0,3045		
x ₄ =0,4	y ₄ =0,4107				z ₄ =1,0809			

Գ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն : Քանի որ բարձր կարգի հավասարումները և բարձր կարգի հավասարումների համակարգերը շատ դեպքերում բերվում են առաջին կարգի հավասարումների համակարգի, ապա շարադրված մեթոդները կիրառելի են այդ խնդիրների լուծման նկատմամբ:

Վարժություններ XIII գլխի վերաբերյալ

Ցույց տալ, որ կամայական հաստատուններից կախված, սվորև բերված ֆունկցիաները բավարարում են համապատասխան դիֆերենցիալ հավասարումներին:

Ցունկցիաներ

Գիֆերենցիալ հավասարումներ

1. $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$,

$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$,

2. $y = C_1 x + C_2 - C_2^2$,

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$,

3. $y^2 = 2C_1 x + C_2$,

$y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0$,

4. $y^2 = C_1 x^2 - \frac{a^2 C_2}{1 + C_2}$,

$xy \left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] = (x^2 - y^2 - a^2) \frac{dy}{dx}$,

5. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3$,

$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{3}{x} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$,

6. $y = (C_1 + C_2 x) e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$,

$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2k \frac{dy}{dx} + k^2 y = e^x$,

7. $y = C_1 e^{a \arcsin x} + C_2 e^{-a \arcsin x}$,

$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$,

8. $y = \frac{C_1}{x} + C_2$,

$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} = 0$,

Ինտեգրել անշատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումները:

9. $y dx - x dy = 0$, Պատ. $y = Cx$, 10. $(1+u)v du + (1-v)u dv = 0$, Պատ. $\ln uv + u - v = C$, 11. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$, Պատ. $(1+y)(1-x) = C$, 12. $(t^2 -$

$-xt^2) \frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$, Պատ. $\frac{t+x}{tx} + \ln \frac{x}{t} = C$, 13. $(y-a)dx + x^2 dy = 0$, Պատ. $(y-$

$-a) = Ce^{\frac{1}{x}}$, 14. $z dt - (t^2 - a^2) dz = 0$, Պատ. $z^{2a} = C \frac{t-a}{t+a}$, 15. $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$,

Պատ. $x = \frac{y+C}{1-Cy}$, 16. $(1+s^2)dt - \sqrt{t} ds = 0$, Պատ. $2\sqrt{t} - \arctg s = C$, 17. $d\rho +$

$\rho \operatorname{tg} \theta d\theta = 0$, Պատ. $\rho = C \cos \theta$, 18. $\sin \theta \cos \varphi d\theta - \cos \theta \sin \varphi d\varphi = 0$, Պատ. $\cos \varphi =$

$= C \cos \theta$, 19. $\sec^2 \theta \operatorname{tg} \varphi d\theta + \sec^2 \varphi \operatorname{tg} \theta d\varphi = 0$, Պատ. $\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \varphi = C$, 20. $\sec^2 \theta \operatorname{tg} \varphi d\theta +$

$\sec^2 \varphi \operatorname{tg} \theta d\theta = 0$, Պատ. $\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi = C$, 21. $(1+x^2)dy - \sqrt{1-y^2} dx = 0$

Պատ. $\arcsin y - \arctg x = C$, 22. $\sqrt{1-x^2} dy - \sqrt{1-y^2} dx = 0$, Պատ. $y\sqrt{1-x^2} -$
 $-x\sqrt{1-y^2} = C$, 23. $3e^{xt} \operatorname{tg} y dx + (1-e^x) \sec^2 y dy = 0$, Պատ. $\operatorname{tg} y = C(1-e^x)^3$,
 24. $(x-y^2 x) dx + (y-x^2 y) dy = 0$, Պատ. $x^2 + y^2 = x^2 y^2 + C$.

Խնդիրներ դիֆերենցիալ հավասարումների կաղմելու վերաբերյալ

25. Ապացուցել, որ այն կորը, որի ցանկացած կետում շոշափողի անկյունային գործակիցը համեմատական է շոշափման կետի արագության, պարարու է: Պատ. $y = ax^2 + C$,

26. Գտնել այն կորը, որն անցնում է (0, -2) կետով և որի ցանկացած կետում շոշափողի անկյունային գործակիցը հավասար է այդ կետի օրդինատին՝ ավելացրած 3 միավորով: Պատ. $y = e^x - 3$,

27. Գտնել այն կորը, որն անցնում է (1, 1) կետով և որի ցանկացած կետում շոշափողի անկյունային գործակիցը համեմատական է այդ կետի օրդինատի քառակուսուն: Պատ. $k(x-1)y - y + 1 = 0$,

28. Գտնել այն կորը, որի համար ցանկացած կետում շոշափողի անկյունային գործակիցը n անգամ մեծ է այն ուղիղի անկյունային գործակիցից, որն այդ կետը միացնում է կորդինատների սկզբնակետին: Պատ. $y = Cx^n$,

29. (2, 1) կետով տանել այնպիսի կոր, որի ցանկացած կետում շոշափողը համընկնում է կորդինատների սկզբնակետն այդ կետի հետ միացնող շոշափելի վեկտորի ուղղությամբ: Պատ. $y = \frac{1}{2}x$,

30. Բևեռային կորդինատներով գրել այն կորի հավասարումը, որի յուրաքանչյուր կետում շոշափելի-վեկտորի և շոշափողի կազմած անկյան տանգենսը հավասար է շոշափելի-վեկտորի հակադարձ մեծությանը՝ վերցրած հակառակ նշանով: Պատ. $r(\theta + C) = 1$

31. Բևեռային կորդինատներով գրել այն կորի հավասարումը, որի յուրաքանչյուր կետում շոշափելի-վեկտորի և շոշափողի կազմած անկյան տանգենսը հավասար է շոշափելի-վեկտորի քառակուսուն: Պատ. $r^2 = (\theta + C)^2$,

32. Ապացուցել, որ այն կորը, որի բոլոր նորմալներն անցնում են հաստատուն կետով, շրջանագիծ է:

33. Գտնել այն կորը, որի յուրաքանչյուր կետում ենթաշոշափողի երկարությունը հավասար է այդ կետի արագության կրկնապատիկին: Պատ. $y = C\sqrt{x}$,

34. Գտնել այն կորը, որի շոշափելի-վեկտորը հավասար է շոշափողի այն հատվածի երկարությանը, որն ընկած է x առանցքի և շոշափման կետի միջև:

Լուծում: Ըստ խնդրի պայմանների $\left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{x^2+y^2}$, որտեղից $\frac{dy}{y} = \pm$

$\pm \frac{dx}{x}$, Ինտեգրելով, ստանում ենք երկու կորերի ընտանիք՝ $y = Cx$ և $y = \frac{C}{x}$,

35. Ըստ Նյուտոնի օրենքի օդում որևէ մարմնի սառեցման արագությունը համեմատական է այդ մարմնի և օդի ջերմաստիճանների տարբերությանը: Եթե օդի ջերմաստիճանը հավասար է 20°C և մարմինը 20 րոպեում սառում է 100°-ից մինչև 60°C, ապա որքան ժամանակից հետո նրա ջերմաստիճանը կհչնի մինչև 30°C:

Լուծում: Խնդրի դիֆերենցիալ հավասարումն է՝ $\frac{dT}{dt} = k(T-20)$, Ինտեգրելով, գտնում ենք $T-20 = Ce^{kt}$; $T=100$, երբ $t=0$, $T=60$, երբ $t=20$, ուստի

$C=80, 4\Omega=Ce^{20t}, e^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}},$ հետևաբար, $T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$ Ընդունելով

$T=30,$ կգտնենք $t=60$ րոպե:

36. Ինչքան T ժամանակամիջոցում ջուրը կթափվի 10 սմ բարձրություն և գագաթի $d=60^\circ$ անկյուն ունեցող կոնական ձազարի հատակի 0,5 սմ² շափսի անցքից:

Լուծում: t և $t+\Delta t$ պահերի միջև ընկած ժամանակամիջոցում թափվող ջրի ծավալը հաշվենք երկու եղանակով: V հաստատուն արագության դեպքում 1 վրկ-ում անցրով թափվում է ջուրը (զևանի ձև ընդունած) $0,5$ սմ² հիմքով և v բարձրությամբ, իսկ Δt ժամանակամիջոցում թափվում է dV ծավալով ջուր, որը $-dV=-0,5vdt=-0,3\sqrt{2gh}dt^*$:

V լուս կողմից, շերտի վրի հոսքի ջրի բարձրությունը ստանում է dh բացասական «ձձ», և թափված ջրի ծավալի դիֆերենցիալը հավասար է

$$-dV=\pi r^2 dh = \frac{\pi}{3}(h+0,7)^2 dh,$$

Այսպիսով,

$$\frac{\pi}{3}(h+0,7)^2 dh = -0,3\sqrt{2gh} dt,$$

այստեղից

$$t=0,0315(10^{\sqrt{2}}-h^{\sqrt{2}})+0,0732(10^{3/2}-h^{3/2})+0,078(\sqrt{10}-\sqrt{h}),$$

Ընդունելով $h=0$, ստանում ենք պահանջվող ժամանակամիջոցը՝ $T=12,5$ վրկ:

37. Հեղուկի մեջ պտտվող սկավառակի վրա շփումը դանդաղեցնող գործողությունը համեմատական է ω պտտման անկյունային արագությանը: Գտնել այդ անկյունային

արագության կախումը ժամանակից, եթե հայտնի է, որ սկսելով պտտվել $100 \frac{պտ.}{րոպ}$

արագությամբ, սկավառակը 1 րոպե հետո պտտվում է $60 \frac{պտ.}{րոպ}$ արագությամբ: Պատ.

$$\omega=100\left(\frac{3}{5}\right)^t \frac{պտ.}{րոպ},$$

38. Ընդունենք, որ ուղղաձիգ օդային սյան մեջ ճնշումը յուրաքանչյուր մակարդակի վրա պայմանավորված է ավելի վերև ընկած շերտերի ճնշմամբ: Գտնել ճնշման կախումը բարձրությունից, եթե հայտնի է, որ ծովի մակարդակին այդ ճնշումը 1 սմ² վրա 1 կգ է, իսկ 500 մ բարձրության 1 սմ² վրա՝ 0,92 կգ:

Ցուցում: Օդովել թռչի-Մարիոտի օրենքից, ըստ որի գազի խտությունը համեմատական է ճնշմանը: Ենդրի դիֆերենցիալ հավասարումն է՝ $dp=-\rho p dh$, որտեղից $p=e^{-0,00017h}$: Պատ. $p=e^{-0,00017h}$:

Ինտեգրել հետևյալ համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումները.

39. $(y-x) dx + (y+x) dy=0$: Պատ. $y^2+2xy-x^2=C$: 40. $(x+y) dx + x dy=0$:
 Պատ. $x^2+2xy=C$: 41. $(x+y) dx + (y-x) dy=0$: Պատ. $\ln(x^2+y^2)^{1/2}-$

$-\arctg \frac{y}{x}=C$: 42. $x dy - y dx = \sqrt{x^2+y^2} dx$: Պատ. $1+2Cy-C^2x^2=0$,

43. $(8y+10x) dx + (5y+7x) dy=0$: Պատ. $(x+y)^2(2x+y)^3=C$:

* Ազատ մակերևութից h հեռավորության վրա գտնվող անցքից ջրի հոսքի v արագությունը արվում է $v=0,6\sqrt{2gh}$ բանաձևով, որտեղ g -ն ծանրության ուժի արագացումն է:

44. $(2\sqrt{st}-s)dt + t ds=0$: Պատ. $te^{\sqrt{s/t}}=C$ կամ $s=te^{\ln^2 \frac{C}{t}}$, 45. $(t-s) dt +$

$+t ds=0$: Պատ. $tes/t=C$ կամ $s=te^{\ln \frac{C}{t}}$, 46. $xy^2 dy=(x^3+y^3) dx$,

Պատ. $y=x^{\sqrt[3]{3} \ln Cx}$: 47. $x \cos \frac{y}{x} (y dx + x dy) = y \sin \frac{y}{x} (x dy - y dx)$,

Պատ. $xy \cos \frac{y}{x} = C$,

Ինտեգրել հետևյալ համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումները.

48. $(3y-7x+7) dx - (3x-7y-3) dy=0$: Պատ. $(x+y-1)^5(x-y-1)^2=C$,

49. $(x+2y+1) dx - (2x+4y+3) dy=0$: Պատ. $\ln(4x+8y+5)+8y-4x=C$,

50. $(x+2y+1) dx - (2x-3) dy=0$: Պատ. $\ln(2x-3)-\frac{4y+5}{2x-3}=C$,

51. Որոշել այն կորը, որի ենթանորմալը արագիսի և օրդինատի միջին թվաբանականն է: Պատ. $(x-y)^2(x+2y)=C$:

52. Գտնել այն կորը, որի շոշափողի՝ Oy առանցքից կտրած հատվածի հարաբերությունը շառավիղ վեկտորին հաստատուն մեծությունն է:

Լուծում: Ըստ խնդրի պայմանի $\frac{y-x \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m$, որտեղից $\left(\frac{x}{C}\right)^m - \left(\frac{C}{x}\right) = \frac{2y}{x}$,

53. Որոշել այն կորը, որի նորմալի՝ Ox առանցքից կտրած հատվածի հարաբերությունը շառավիղ-վեկտորին հավասար է հաստատուն մեծության:

Լուծում: Ըստ խնդրի պայմանի $\frac{x+y \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m$, որտեղից $x^2+y^2=m^2(x-C)^2$,

54. Որոշել այն կորը, որի շոշափողի կտրած հատվածը Oy առանցքից հավասար է $\text{asec} \theta$, որտեղ θ -ն շառավիղ վեկտորի և x առանցքի կազմած անկյունն է:

Լուծում: Քանի որ $\text{tg} \theta = \frac{y}{x}$ և ըստ խնդրի պայմանի $y-x \frac{dy}{dx} = a \sec \theta$, ապա տանում ենք.

$$y-x \frac{dy}{dx} = a \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}, \text{ որտեղից } y = \frac{x}{2} \left[e^{\frac{a}{x}+b} - e^{-\left(\frac{a}{x}+b\right)} \right],$$

55. Որոշել այն կորը, որի ցանկացած կետում տարած նորմալի կտրած հատվածը օրդինատների առանցքից հավասար է այդ կետի և կորդինատների սկզբնակետի հեռավորությանը:

Լուծում: Oy առանցքից նորմալի կտրած հատվածը հավասար է $y + \frac{x}{y}$, ուստի, խնդրի պայմանի համաձայն, ունենք

$$y + \frac{x}{y} = \sqrt{x^2+y^2}, \text{ որտեղից } x^2=C(2y+C),$$

56. Գտնել այն հայելու ձևը, որը միևնույն O կետից դուրս եկող բոլոր ճառագայթները կանդրադարձնեն սվլյալ ուղղությունը զուգահեռ:

լուծում: Որպես x առանցք ընդունենք տվյալ ուղղությունը, O -ն ընդունենք կորորդինատների սկզբնակետ: Գիցուք OM -ը ընկնող ճառագայթն է, MP -ն՝ անդրադարձվածը, MQ -ն՝ որոնելի կորի նորմալը:

$$\alpha = \beta, \quad OM = OQ, \quad NM = y,$$

$$NQ = NO + OQ = -x + \sqrt{x^2 + y^2} = y \operatorname{ctg} \beta = y \frac{dy}{dx},$$

որտեղից $y dy = (-x + \sqrt{x^2 + y^2}) dx$, Ինտեգրելով, կունենանք $y^2 = C^2 + 2Cx$:

Ինտեգրել հետևյալ զծային դիֆերենցիալ հավասարումները:

$$57. \quad y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad \text{Պատ.} \quad 2y = (x+1)^4 + C(x+1)^2; \quad 58. \quad y' - \alpha \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x},$$

$$\text{Պատ.} \quad y = Cx^\alpha + \frac{x}{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha}, \quad 59. \quad (x-x^3)y' + (2x^2-1)y - ax^3 = 0.$$

$$\text{Պատ.} \quad y = ax + Cx\sqrt{1-x^2}, \quad 60. \quad \frac{ds}{dt} \cos t + s \sin t = 1, \quad \text{Պատ.} \quad s = \sin t + C \cos t;$$

$$61. \quad \frac{ds}{dt} + s \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t, \quad \text{Պատ.} \quad s = \sin t - 1 + C e^{-\sin t}, \quad 62. \quad y' - \frac{n}{x} y = e^x x^n,$$

$$\text{Պատ.} \quad y = x^n (e^x + C), \quad 63. \quad y' + \frac{n}{x} y - \frac{a}{x^n} = 0, \quad \text{Պատ.} \quad x^n y = ax + C; \quad 64. \quad y' + y = e^{-x}.$$

$$\text{Պատ.} \quad e^x y = x + C; \quad 65. \quad y' + \frac{1-2x}{x^2} y - 1 = 0, \quad \text{Պատ.} \quad y = x^2(1 + C e^{1/x});$$

Ինտեգրել Բեռնուլիի հավասարումները:

$$66. \quad y' + xy = x^3 y^3, \quad \text{Պատ.} \quad y^2(x^2 + 1 + C e^{x^2}) = 1; \quad 67. \quad (1-x^2)y' - xy - axy^2 = 0,$$

$$\text{Պատ.} \quad (C\sqrt{1-x^2} - a)y = 1; \quad 68. \quad 3y^2 y' - ay^3 - x - 1 = 0, \quad \text{Պատ.} \quad a^2 y^3 = C e^{ax} - a(x+1) - 1;$$

$$69. \quad y'(x^2 y^3 + xy) = 1, \quad \text{Պատ.} \quad x[(2-y^2)e^{y^2/2} + C] = e^{y^2/2};$$

$$70. \quad (y \ln x - 2)y dx = x dy, \quad \text{Պատ.} \quad y(Cx^2 + \ln x^2 + 1) = 4; \quad 71. \quad y - y' \cos x = y^2 \cos x(1 - \sin x),$$

$$\text{Պատ.} \quad y = \frac{\operatorname{tg} x + \sec x}{\sin x + C}.$$

Ինտեգրել հետևյալ լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարումները:

$$72. \quad (x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0, \quad \text{Պատ.} \quad \frac{x^3}{3} + yx - y^2 = C; \quad 73. \quad (y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0,$$

$$\text{Պատ.} \quad 2y^2 - xy + x^3 = C; \quad 74. \quad (y^3 - x)y' = y, \quad \text{Պատ.} \quad y^4 = 4xy + C;$$

$$75. \quad \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \right] dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \right] dy = 0, \quad \text{Պատ.} \quad \ln \frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y} = C;$$

$$76. \quad 2(3xy^2 + 2x^3) dx + 3(2x^2 y + y^2) dy = 0, \quad \text{Պատ.} \quad x^4 + 3x^2 y^2 + y^3 = C;$$

$$77. \quad \frac{xdx + (2x+y)dy}{(x+y)^2} = 0, \quad \text{Պատ.} \quad \ln(x+y) - \frac{x}{x+y} = C; \quad 78. \quad \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx =$$

$$-\frac{2y dy}{x^3}, \quad \text{Պատ.} \quad x^2 + y^2 = Cx^3; \quad 79. \quad \frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x-y)^2} = 0, \quad \text{Պատ.} \quad \frac{xy}{x-y} = C;$$

$$80. \quad x dx + y dy = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}, \quad \text{Պատ.} \quad x^2 + y^2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = C;$$

81. Որոշել կորը, որն օժտված է այն հատկությամբ, որ նրա ցանկացած կետի և կորորդինատների սկզբնակետի հեռավորության քառակուսու և այդ կետում տարած նոր-

մալի՝ x առանցքից կտրած հատվածի արտադրյալը հավասար է այդ կետի արագի խորանարդին: Պատ. $y^2(2x^2 + y^2) = C$:

$$82. \quad \text{Գտնել հետևյալ կորերի ընտանիքների պարուրիչը՝ a) } y = Cx + C^2, \quad \text{Պատ. } x^2 + 4y = 0;$$

$$\text{b) } y = \frac{x}{C} + C^2, \quad \text{Պատ. } 27x^2 = 4y^3; \quad \text{c) } \frac{x}{C} - \frac{y}{C^3} = 2, \quad \text{Պատ. } 27y = x^3;$$

$$\text{d) } C^2 x + Cy - 1 = 0, \quad \text{Պատ. } y^2 + 4x = 0; \quad \text{e) } (x-C)^3 + (y-C)^2 = C^2, \quad \text{Պատ. } x=0; y=0;$$

$$\text{i) } (x-C)^2 + y^2 = 4C, \quad \text{Պատ. } y^2 = 4x + 4; \quad \text{g) } x-C)^2 + (y-C)^2 = 4, \quad \text{Պատ. } (x-y)^2 = 8;$$

$$\text{h) } Cx^2 + C^2 y = 1, \quad \text{Պատ. } x^4 + 4y = 0;$$

83. Ուղիղը տեղաշարժվում է այնպես, որ կորորդինատային առանցքներից նրա կտրած հատվածների զումարը պահպանում է a հաստատուն մեծությունը: Գտնել ուղիղի բոլոր դիրքերի պարուրիչների հավասարումը: Պատ. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ (պարաբոլ):

84. Գտնել այն ուղիղների ընտանիքի պարուրիչը, որոնցից կորորդինատային առանցքները կտրում են a հաստատուն երկարությամբ հատված: Պատ. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$:

85. Գտնել այն շրջանագծերի ընտանիքի պարուրիչը, որոնց տրամագծերը $y^2 = 2px$ պարաբոլի օրդինատների կրկնապատիկներն են: Պատ. $y^2 = 2p \left(x + \frac{p}{2} \right)$:

86. Գտնել այն շրջանագծերի ընտանիքի պարուրիչը, որոնց կենտրոններն ընկած են $y^2 = 2px$ պարաբոլի վրա, ընդ որում ընտանիքի բոլոր շրջանագծերն անցնում են այդ պարաբոլի զագաթով: Պատ. $x^3 + y^2(x+p) = 0$ (ցիսոիդ):

87. Գտնել այն շրջանագծերի ընտանիքի պարուրիչը, որոնց տրամագծերը $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ էլիպսի այն լարերն են, որոնք ուղղահայաց են x առանցքին:

$$\text{Պատ.} \quad \frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

88. Գտնել $x^2 b^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ էլիպսի էվոլյուտը, որպես նրա նորմալների պարուրիչ: Պատ. $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$:

Ինտեգրել հետևյալ հավասարումները (Լազրանժի հավասարումները):

$$89. \quad y = 2xy' + y'^2, \quad \text{Պատ.} \quad x = \frac{C}{3p^2} - \frac{2}{3}p, \quad y = \frac{2C-p^3}{3p}; \quad 90. \quad y = xy'^2 + y'^2,$$

$$\text{Պատ.} \quad y = (\sqrt{x+1} + C)^2, \quad \text{Եզակի լուծում է՝ } y=0; \quad 91. \quad y = x(1+y') + (y')^2,$$

$$\text{Պատ.} \quad x = C e^{-p-2p+2}, \quad y = C(p+1)e^{-p-p^2+2}; \quad 92. \quad y = yy'^2 + 2xy';$$

$$\text{Պատ.} \quad 4Cx = 4C^2 - y^2; \quad 93. \quad \text{Գտնել այն կորը, որն ունի հաստատուն նորմալ:}$$

$$\text{Պատ.} \quad (x-C)^2 + y^2 = a^2, \quad \text{Եզակի լուծում է՝ } y = \pm a;$$

Ինտեգրել տրված էլիպսի հավասարումները: 94. $y = xy' + y' - y'^2$:

$$\text{Պատ.} \quad y = Cx + C - C^2, \quad \text{Եզակի լուծում է՝ } 4y = (x+1)^2; \quad 95. \quad y = xy' + \sqrt{1-y'^2},$$

$$\text{Պատ.} \quad y = Cx + \sqrt{1-C^2}, \quad \text{Եզակի լուծում է՝ } y^2 - x^2 = 1; \quad 96. \quad y = xy' + y';$$

$$\text{Պատ.} \quad y = Cx + C; \quad 97. \quad y = xy' + \frac{1}{y'}, \quad \text{Պատ.} \quad y = Cx + \frac{1}{C}; \quad \text{Եզակի լուծում է՝ } y^2 = 4x;$$

$$98. \quad y = xy' - \frac{1}{y'^2}, \quad \text{Պատ.} \quad y = Cx - \frac{1}{C^2}, \quad \text{Եզակի լուծում է՝ } y^3 = -\frac{27}{4}x^2;$$

99. Որոնելի կորի շոշափողով և կորորդինատային առանցքներով սահմանափակված հաստատուն մեծություն է: Գտնել կորը: Պատ. $4xy = \pm a^2$ հավասարակող հիպերբոլը: Բացի այդ, $y = Cx \pm a\sqrt{C}$ ընտանիքի ցանկացած կոր:

100. Գտնել այնպիսի կոր, որի շոշափողի այն հատվածը, որն ընկած է կոորդինատների առանցքների միջև, ունի a հաստատուն երկարություն: Պատ. $y=Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$;

Եզակի լուծում է՝ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

101. Գտնել այնպիսի կոր, որի շոշափողները առանցքների վրա առաջացնում են այնպիսի հատվածներ, որոնց գումարը հավասար է $2a$ -ի: Պատ. $y=Cx - \frac{2aC}{1-C}$;

Եզակի լուծում է՝ $(y-x-2a)^2 = 8ax$;

102. Գտնել այն կորերը, որոնց համար ցանկացած շոշափողի հեռավորությունը տրված երկու կետերից հաստատուն է: Պատ. էլիպսներ և հիպերբոլներ (օրթոգոնալ և իզոգոնալ հետագծեր):

103. Գտնել $y = ax^n$ կորերի ընտանիքի օրթոգոնալ հետագծերը: Պատ. $x^2 + ny^2 = C$;

104. Գտնել $y^2 = 2p(x - \alpha)$ պարաբոլների ընտանիքի օրթոգոնալ հետագծերը (α -ն ընտանիքի պարամետրն է): Պատ. $y = Ce^{-x/p}$;

105. Գտնել $x^2 - y^2 = a$ (α -ն պարամետր է) կորերի ընտանիքի օրթոգոնալ հետագծերը: Պատ. $y = C/x$;

106. Գտնել $x^2 + y^2 = 2ax$ շրջանագծերի ընտանիքի օրթոգոնալ հետագծերը: Պատ. Երջանագծեր՝ $y = C(x^2 + y^2)$;

107. Գտնել այն հավասար պարաբոլների օրթոգոնալ հետագծերը, որոնք գազաթում շոշափում են տրված ուղիղը: Պատ. Եթե $2p$ -ն պարաբոլների պարամետրն է և տրված ուղիղն ընդունված է որպես Oy առանցք, ապա հետագծերի հավասարումը կլինի

$$y + C = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{p} x^3}$$

108. Գտնել $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ ցիսոիդների օրթոգոնալ հետագծերը: Պատ. $(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$;

109. Գտնել $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)a^2$ լեմնիսկատների օրթոգոնալ հետագծերը: Պատ. $(x^2 + y^2)^2 = Cxy$;

110. Գտնել $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$ կորերի ընտանիքի իզոգոնալ հետագծերը (α -ն փոփոխական պարամետր է), եթե հետագծերը ընտանիքի գծերի հետ կազմում են $\omega = 60^\circ$ հաստատուն անկյուն: Լուծում: Գտնում ենք ընտանիքի դիֆերենցիալ հավասարումը՝ $y' = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$

և y' -ը փոխարինում ենք $q = \frac{y' - \operatorname{tg} \omega}{1 + y' \operatorname{tg} \omega}$ արտահայտությամբ: Եթե $\omega = 60^\circ$, ապա $q = \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y' \sqrt{3}}$, և ստանում ենք $\frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y' \sqrt{3}} = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$ դիֆերենցիալ հավասարումը, $y^2 = C(x - y\sqrt{3})$ ընդհանուր ինտեգրալը կտա որոնվող հետագծերի ընտանիքը:

111. Գտնել $y^2 = 4Cx$ պարաբոլների ընտանիքի իզոգոնալ հետագծերը, երբ $\omega = 45^\circ$: Պատ. $y^2 - xy + 2x^2 = Ce^{\frac{6}{7} \operatorname{arctg} \frac{2y-x}{x\sqrt{7}}}$;

112. Գտնել $y = Cx$ ուղիղների ընտանիքի իզոգոնալ հետագծերն այն դեպքի համար, երբ $\omega = 30^\circ, 45^\circ$: Պատ. Լոգարիթմական սպիրալներ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = e^{2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}; \\ x^2 + y^2 = e^{2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \end{cases}$$

113. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$; Արտաքսել $C_1 - p$ և $C_2 - p$: Պատ. $y'' - y = 0$;

114. Գտնել այն բոլոր շրջանագծերի դիֆերենցիալ հավասարումը, որոնք ընկած են միևնույն հարթության մեջ: Պատ. $(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0$;

115. Գրել երկրորդ կարգի այն բոլոր կենտրոնական կորերի դիֆերենցիալ հավասարումը, որոնց զլխավոր առանցքները համընկնում են Ox, Oy առանցքների հետ: Պատ. $x(yy'' + y'^2) - y'y''' = 0$;

116. Տրված են $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ դիֆերենցիալ հավասարումը և նրա $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$ ընդհանուր լուծումը:

Պահանջվում է՝ 1) ստուգել, որ կորերի տվյալ ընտանիքն իրոք հանդիսանում է ընդհանուր լուծում: 2) գտնել մասնավոր լուծումը, երբ $x=0$, ունենք $y=1$,

$$y' = 0, y'' = -1: \text{ Պատ. } y = \frac{1}{6}(9e^x + e^{-x} - 4e^{2x});$$

117. Տրված են $y'' = \frac{1}{2y}$, դիֆերենցիալ հավասարումը և նրա $y = \pm \frac{2}{3}(x + C_1)^{3/2} + C_2$

ընդհանուր լուծումը: Պահանջվում է՝ 1) ստուգել, որ կորերի տվյալ ընտանիքն իրոք հանդիսանում է ընդհանուր լուծում: 2) գտնել այն ինտեգրալ կորը, որն անցնում է (1, 2) կետով, եթե այդ կետում շոշափողը Ox առանցքի հետ կազմում է 54° անկյուն: Պատ. $y = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + \frac{4}{3}}$;

Ինտեգրել երկրորդ կարգի մի քանի պարզագույն տիպի դիֆերենցիալ հավասարումներ, որոնք բերվում են առաջին կարգի հավասարման:

118. $xy''' = 3$: Պատ. $y = x^2 \ln x - C_1 x^2 + C_2 x + C_3$. առանձնացնել $x=1, y=1, y'=1, y''=3$ սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնավոր լուծումը:

Պատ. $y = x^2 \ln x + 1$: 119. $y^{(n)} = x^m$ Պատ. $y = \frac{m! x^{m+n}}{(m+n)!} + C_1 x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n$;

120. $y'' = a^2 y$: Պատ. $ax = \ln (ay + \sqrt{a^2 y^2 + C_1}) + C_2$ կ. մ $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$;

121. $y'' = \frac{a}{y^3}$: Պատ. $(C_1 x + C_2)^2 = C_3 y^2 - a$;

122-125 օրինակներում առանձնացնել $x=0, y=-1, y'=0$ սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնավոր լուծումը: 122. $xy'' - y' = x^2 e^x$ Պատ. $y = e^x(x-1) + C_1 x^2 + C_2$; Մասնավոր լուծումն է $y = e^x(x-1)$;

123. $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$: Պատ. $y + C_1 \ln y = x + C_2$; Մասնավոր լուծումն է $y = -1$;

124. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$: Պատ. $y = C_2 + C_1 \sin x - x - \frac{1}{2} \sin 2x$; Մասնավոր լուծումն է $y = 2 \sin x - \sin x \cos x - x - 1$;

125. $(y'')^2 + (y')^2 = a^2$: Պատ. $y = C_2 - a \cos(x + C_1)$; Մասնավոր լուծումն է $y = a - 1 - a \cos x, y = a \cos x - (a+1)$: (Յ ու ռ ը լ ը մ, Պարամետ-

բախան տեսքն է $y'' = a \cos t$, $y' = a \sin t$, 126. $y'' = \frac{1}{2y}$, Պատ. $y = \pm \frac{2}{3} (x + C_1)^{3/2} + C_2$, 127. $y''' = y''^2$, Պատ. $y = (C_1 - x)(\ln(C_1 - x) - 1) + C_2 x + C_3$, 128. $y'y''' - 3y''^2 = 0$, Պատ. $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$:

Ինտեգրել հետևյալ հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումները. 129. $y'' = 9y$, Պատ. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$, 130. $y'' + y = 0$, Պատ. $y = A \cos x + B \sin x$, 131. $y'' - y' = 0$, Պատ. $y = C_1 + C_2 e^x$, 132. $y'' + 12y = 7y'$, Պատ. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$, 133. $y'' - 4y' + 4y = 0$, Պատ. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$, 134. $y'' + 2y' + 10y = 0$, Պատ. $y = e^{-x}(A \cos 3x + B \sin 3x)$, 135. $y'' + 3y' - 2y = 0$,

Պատ. $y = C_1 e^{\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}x}$, 136. $4y'' - 12y' + 9y = 0$ Պատ. $y =$

$= (C_1 + C_2 x)e^{3/2x}$, 137. $y'' + y' + y = 0$, Պատ. $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right]$,

138. Երկու միաստակ բեռ կախված են զսպանակի ծայրից: Գտնել այն շարժումը, որը կկատարի բեռները մեկը, եթե մյուսը պոկվի: Պատ. $x = a \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t\right)$, որտեղ a -ն հավասարակշռության դիրքում մեկ ուժի ազդեցության տակ զսպանակի երկարացման շահն է:

139. m զանգված ունեցող նյութական կետը երկու կենտրոններից յուրաքանչյուրի կողմից ձգվում է այնպիսի ուժով, որը համեմատական է հեռավորությանը: Համեմատականության բազմապատկիչը հավասար է k -ի: Կենտրոնների հեռավորությունը հավասար է $2c$ -ի: Սկզբնական պահին կետը գտնվում էր կենտրոնները միացնող գծի վրա՝ նրա միջնակետից ունենալով a հեռավորությունը: Սկզբնական արագությունը հավասար

է զրոյի: Գտնել կետի շարժման օրենքը: Պատ. $x = a \cos\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}t\right)$,

140. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$, Պատ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$, 141. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$, Պատ. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$, 142. $y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = 0$, Պատ. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{ax}$, 143. $y^V - 4y'' = 0$, Պատ. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{2x} + C_5 e^{-2x}$, 144. $y^{IV} + 2y'' + 9y = 0$, Պատ. $y = (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)e^{-x} + (C_3 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sin \sqrt{2}x)e^x$,

145. $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$, Պատ. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{2x} + C_4 x e^{-2x}$, 146. $y^{IV} + y = 0$,

Պատ. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$,

147. $y^{IV} - a^4 y = 0$. Գտնել ընդհանուր լուծումը և առանձնացնել այն մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = -a^2$, $y''' = 0$, երբ $x_0 = 0$ սկզբնական պայմաններին: Պատ. Ընդհանուր լուծումն է՝ $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$. Մասնավոր լուծումն է՝ $y_0 = \cos ax$.

Ինտեգրել հետևյալ անհամասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարումները (գտնել ընդհանուր լուծումը). 148. $y'' - 7y' + 12y = x$, Պատ. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{12x+7}{144}$

149. $s'' - a^2 s = t + 1$, Պատ. $s = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at} - \frac{t+1}{a^2}$, 150. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$,

Պատ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{5}(6 \sin 2x + 2 \cos 3x)$, 151. $y'' - y = 5x + 2$, Պատ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 5x - 2$, 152. $s'' - 2as' + a^2 s = e^t (a \neq 1)$, Պատ. $s = C_1 e^{at} + C_2 t e^{at} + \frac{e^t}{(a-1)^2}$, 153. $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$, Պատ. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x} + \frac{1}{21} e^{2x}$,

154. $y'' + 9y = 6e^{3x}$, Պատ. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{3} e^{3x}$, 155. $y'' - 3y' = 2 - 6x$,

Պատ. $y = C_1 + C_2 e^{3x} + x^2$, 156. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x$, Պատ. $y = e^x (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x) + \frac{e^{-x}}{41} (5 \cos x - 4 \sin x)$, 157. $y'' + 4y = 2 \sin 2x$,

Պատ. $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{x}{2} \cos 2x$, 158. $y'' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$,

Պատ. $y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{2x} - x - 4$, 159. $y^{IV} - a^4 y = 5a^4 e^{ax} \sin ax$,

Պատ. $y = (C_1 - \sin ax)e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$, 160. $y^{IV} + 2a^2 y'' + a^4 y = 8 \cos ax$, Պատ. $y = (C_1 + C_2 x) \cos ax + (C_3 + C_4 x) \sin ax - \frac{x^2}{a^2} \cos ax$,

161. Գտնել $y'' + k^2 y = 0$ հավասարման այն ինտեգրալ կորը, որն անցնում է $M(x_0, y_0)$ կետով և այս կետում շոշափում է $y = ax$ ուղիղը: Պատ. $y = y_0 \cos k(x - x_0) + \frac{a}{k} \sin k(x - x_0)$,

162. Գտնել $y'' + 2hy' + n^2 y = 0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $y = a$, $y' = C$, երբ $x = 0$ սկզբնական պայմաններին: Պատ. երբ $h < n$

$y = e^{-hx} \left(a \cos \sqrt{n^2 - h^2}x + \frac{C + ah}{\sqrt{n^2 - h^2}} \sin \sqrt{n^2 - h^2}x \right)$, երբ $h = n$
 $y = e^{-hx} [(C + ah)x + a]$, երբ $h > n = \frac{C + a(h + \sqrt{h^2 - n^2})}{2\sqrt{h^2 - n^2}} e^{-(h - \sqrt{h^2 - n^2})x} - \frac{C + a(h - \sqrt{h^2 - n^2})}{2\sqrt{h^2 - n^2}} e^{-(h + \sqrt{h^2 - n^2})x}$,

163. Գտնել $y'' + n^2 y = h \sin px$ ($p \neq n$) հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $y = a$, $y' = C$, երբ $x = 0$ սկզբնական պայմաններին: Պատ. $y = \cos nx + \frac{C(n^2 - p^2) - hp}{n(n^2 - p^2)} \sin nx + \frac{h}{n^2 - p^2} \sin px$,

164. 4 կգ կշռող բեռը կախված է զսպանակից և նրա երկարությունն ավելացնում է 1 սմ-ով: Գտնել այդ բեռի շարժման օրենքը, ենթադրելով, որ զսպանակի վերին ծայրը $y = \sin \sqrt{100}gt$ օրենքով կատարում է հարմոնիկ տատանում, որտեղ y -ը շահվում է ըստ ուղղաձիգի:

Լուծում: x -ով նշանակենք բեռի ուղղաձիգ կորագրի արագացումը՝ հաշված դադարի վիճակից, կունենանք

$$\frac{4}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - y - l),$$

որտեղ l -ը ազատ վիճակում զսպանակի երկարությունն է և $k=400$, ինչպես հեշտ է տեսնել սկզբնական պայմաններից: Այստեղից $\frac{d^2x}{dt^2} + 100gx = 100g \sin \sqrt{100gt + 100} \lg'$

Այս հավասարման մասնավոր ինտեգրալը պետք է որոնենք

$$t(C_1 \cos \sqrt{100gt} + C_2 \sin \sqrt{100gt}) + 1,$$

տեսքով, քանի որ հավասարման աջ մասի առաջին անդամը մտնում է համասեռ հավասարման լուծման մեջ:

165. Խնդիր 139-ի պայմաններում սկզբնական արագությունը հավասար է v_0 -ի և ուղղահայաց է կենտրոնները միացնող ուղիղին: Գտնել հետագծերը:

Լ ու ծ ու մ: Եթե կոորդինատների սկզբնակետը վերցնենք կենտրոնների միջև եղած հեռավորության միջնակետում, ապա շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կունենան

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k(C-x) - k(C+x) = -2kx, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2ky. \quad \text{Սկզբնական}$$

պայմանները, երբ $t=0$

$$x=a, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad y=0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0,$$

Ինտեգրելով, գտնում ենք.

$$x = a \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right), \quad y = v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right),$$

$$\text{Այստեղից } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 2k}{m v_0^2} = 1 \quad (\text{էլիպս}):$$

166. շորիզոնական խողովակը ω հաստատուն անկյունային արագությամբ պտտվում է ուղղահայաց առանցքի շուրջը: Խողովակի ներսում տեղավորված գունդը առանց շփման սողում է խողովակով: Գտնել գնդի շարժման օրենքը, եթե սկզբնապահին այն գտնվում էր պտտման առանցքի վրա և ուներ v_0 արագություն (խողովակի երկայնքով):

Ց ու ը ու մ: Շարժման դիֆերենցիալ հավասարումն է՝ $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$. Սկզբնական

պայմաններն են՝ $r=0$, $\frac{dr}{dt} = v_0$, երբ $t=0$: Ինտեգրելով, գտնում ենք $r =$

$$= \frac{v_0}{2\omega} [e^{\omega t} - e^{-\omega t}],$$

Կիրառելով կամայական հաստատունների վարիացիայի մեթոդը, ինտեգրել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

$$167. y'' - 7y' + 6y = \sin x, \quad \text{Պատ. } y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{5 \sin x + 7 \cos x}{74},$$

$$168. y'' + y = \sec x, \quad \text{Պատ. } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln \cos x,$$

$$169. y'' + y = \frac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}, \quad \text{Պատ. } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sqrt{\cos 2x},$$

Ինտեգրել հետևյալ տարբեր տիպի հավասարումները.

$$170. yy'' = y'^2 + 1, \quad \text{Պատ. } y = \frac{1}{2C_1} [e^{C_1(x-C_2)} + e^{-C_1(x-C_2)}], \quad 171. \frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x-y)^2} = 0,$$

$$\text{Պատ. } \frac{xy}{x-y} = C, \quad 172. y = xy'^2 + y'^2, \quad \text{Պատ. } y = (\sqrt{x+1} + C)^2, \quad \text{Եղակի լուծումներ.}$$

$$y=0, \quad x+1=0, \quad 173. y'' + y = \sec^2 x, \quad \text{Պատ. } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x +$$

$$+ \cos x \ln \cos x, \quad 174. (1+x^2)y' - xy - a = 0, \quad \text{Պատ. } y = ax + C\sqrt{1+x^2},$$

$$175. x \cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \cos \frac{y}{x} - x, \quad \text{Պատ. } x e^{\sin \frac{y}{x}} = C, \quad 176. y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x,$$

$$\text{Պատ. } y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20} (\sin 2x + 2 \cos 2x), \quad 177. xy' + y - y^2 \ln x = 0,$$

$$\text{Պատ. } (\ln x + 1 + Cx)y = 1, \quad 178. (2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0,$$

$$\text{Պատ. } 2x + y - 3 \ln(x + y + 1) = C, \quad 179. 3e^x \lg y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0,$$

$$\text{Պատ. } \lg y = C(1 - e^x)^3,$$

Ինտեգրել հետևյալ հավասարումների համակարգերը.

$$180. \frac{dx}{dt} = y + 1, \quad \frac{dy}{dt} = x + 1, \quad \text{Առանձնացնել } x = -2, y = 0, \text{ երբ } t = 0 \text{ սկզբնական}$$

$$\text{պայմաններին բավարարող մասնավոր լուծումները: Պատ. } y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1, x =$$

$$= C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1, \quad \text{Մասնավոր լուծումն է՝ } x^* = -e^{-t} - 1, y^* = e^{-t} - 1,$$

$$181. \frac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y, \quad \text{Առանձնացնել } x = 1, y = 1, \text{ երբ } t = 0 \text{ սկզբնական}$$

$$\text{պայմաններին բավարարող մասնավոր լուծումները: Պատ. } y = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

$$x = (C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t, \quad \text{Մասնավոր լուծումն է՝ } x^* = \cos t - \sin t,$$

$$y^* = \cos t,$$

$$182. \begin{cases} 4 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t, \end{cases} \quad \text{Պատ. } x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t},$$

$$y = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t,$$

$$183. \begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = x, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = y, \end{cases} \quad \text{Պատ. } x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t,$$

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t,$$

$$184. \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + x = e^t, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} = 1, \end{cases} \quad \text{Պատ. } x = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 - \frac{1}{6} t^3 + e^t,$$

$$y = C_4 - (C_1 + 2C_3)t - \frac{1}{2}(C_2 - 1)t^2 - \frac{1}{3}C_3 t^3 + \frac{1}{24}t^4 - e^t,$$

$$185. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z - y, \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z, \end{cases} \quad \text{Պատ. } y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x},$$

$$z = (C_2 - C_1 - C_2 x)e^{-2x},$$

$$186. \begin{cases} \frac{dy}{dx} + z = 0, \\ \frac{dz}{dx} + 4y = 0, \end{cases} \quad \text{Պատ. } y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x},$$

$$z = -2(C_1 e^{2x} - C_2 e^{-2x}),$$

$$187. \begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x, \\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x. \end{cases}$$

Պատ. $y = C_1 + C_2 x + 2 \sin x$
 $z = -2 C_1 - C_2 (2x + 1) - 3 \sin x - 2 \cos x$

$$188. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Պատ. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$,
 $y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}$,
 $z = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}$.

$$189. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y - x}. \end{cases}$$

Պատ. $z = C_2 e^{C_1 x}$,
 $y = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}$.

$$190. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{yz}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{x}{y^2}. \end{cases}$$

Պատ. $\frac{z}{y} = C_1$,
 $zy^2 - \frac{3}{2} x^2 = C_2$.

Ուսումնասիրել, արդյոք կալույն է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի համար $x=0$, $y=0$ լուծումը:

$$191. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 6y. \end{cases}$$

Պատ. Անկալույն է:

$$192. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 10y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$$

Պատ. Կալույն է:

$$193. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 12x + 18y, \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 12y. \end{cases}$$

Պատ. Անկալույն է:

194. Գտնել $y' = y^2 + x$ հավասարման այն լուծման մոտավոր արժեքները, որը բավարարում է $y=1$, երբ $x=0$ սկզբնական պայմանին: Գտնել լուծման արժեքը $x=0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$ արժեքների դեպքում: Պատ. $y(0,5) = 2,235$.

195. Գտնել $y' + \frac{1}{x} y = e^x$ հավասարման $y_x=1,4$ այն լուծման մոտավոր արժեքը, որը բավարարում է $y=1$, երբ $x=1$ սկզբնական պայմանին: Ստացված արդյունքը համեմատել ճշգրիտ լուծման հետ:

196. Գտնել

$$\frac{dx}{dt} = y - x,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - 3y$$

հավասարումների համակարգի այն լուծումների $x_{t=1,4}$ և $y_{t=1,4}$ մոտավոր արժեքները, որոնք բավարարում են $x=0$, $y=1$, երբ $t=1$ սկզբնական պայմաններին: Ստացված արդյունքները համեմատել ճշգրիտ արդյունքների հետ:

§ 1. Կրկնակի ինտեգրալ

Oxy հարթության մեջ դիտարկենք L գծով սահմանափակված D փակ* տիրույթը:

Դիցուք D տիրույթում տրված է

$$z=f(x,y)$$

անընդհատ ֆունկցիան:

D տիրույթը որևէ գծերով տրոհենք n մասերի՝

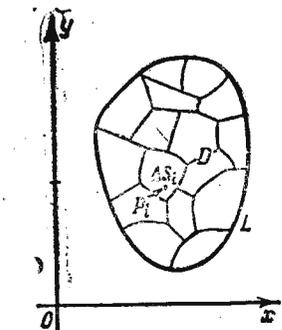
$$\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots, \Delta S_n$$

(նկ. 292), որոնց անվանելու ենք հարթակներ: Նոր սիմվոլներ չմուծելու համար $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ -ով կնշանակենք ոչ միայն համապատասխան հարթակների անվանումները, այլև նրանց մակերեսները: Յուրաքանչյուր ΔS_i հարթակում (միևնույնն է՝ ներսում կամ եզրի վրա) վերցնենք P_1 կետը, այդ դեպքում կունենանք n կետեր՝ P_1, P_2, \dots, P_n : $f(P_1), f(P_2), f(P_n)$ -ով նշանակենք ֆունկցիայի արժեքները ընտրած կետերում և կազմենք $f(P_1)\Delta S_1$ տեսքի արտադրյալների գումարը:

$$V_n = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \dots$$

$$\dots + f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i \quad (1)$$

Այս գումարը կոչվում է D տիրույթում $f(x, y)$ ֆունկցիայի համար ինտեգրալին գումար:



նկ. 292

* D տիրույթը կոչվում է փակ, եթե այն սահմանափակված է փակ գծով, և եզրագծի կետերը պատկանում են D տիրույթին:

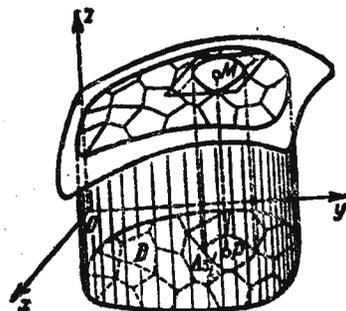
եթե D տիրույթում $f \geq 0$, ապա յուրաքանչյուր $f(P_i)\Delta S_i$ գումարելի կարելի է երկրաչափորեն ներկայացնել որպես ΔS_i հիմք և $f(P_i)$ բարձրություն ունեցող փոքր զլանի ծավալ:

V_n -ը հանդիսանում է նշված տարրական զլանների ծավալների գումարը, այսինքն՝ մի որոշ «աստիճանաձև» մարմնի ծավալը (նկ. 293):

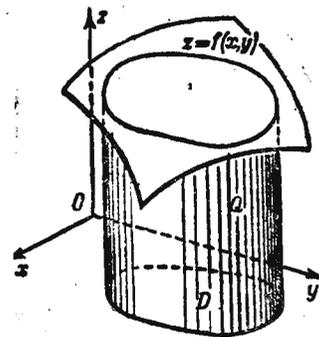
Դիտարկենք տվյալ D տիրույթի համար $f(x, y)$ ֆունկցիայի միջոցով կազմված

$$V_{n_1}, V_{n_2}, \dots, V_{n_k}, \dots \quad (2)$$

ինտեգրալային գումարների կամայական հաջորդականությունը՝ D տիրույթը n մասերի տրոհման տարբեր եղանակների դեպքում նեթադրելու ենք, որ ΔS_i հարթակների տրամագծերից առավելագույնը ձգտում է զրոյի, երբ $n_k \rightarrow \infty$: Այդ դեպքում իրավացի է լինում հետևյալ պնդումը, որը բերում ենք առանց ապացույցի:



նկ. 293



նկ. 294

Թե որևէ 1: Եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է D փակ տիրույթում, և եթե ΔS_i հարթակների տրամագծերից առավելագույնը ձգտում է զրոյի, իսկ $n \rightarrow \infty$, ապա գոյություն ունի (1) ինտեգրալային գումարների (2) հաջորդականության սահմանը: Այդ սահմանը միևնույնն է (2) տեսի ցանկացած հաջորդականության համար, այսինքն՝ այն կախված չէ ոչ D տիրույթը ΔS_i հարթակների տրոհման եղանակից, ոչ էլ ΔS_i հարթակի ներսում P_i կետի ընտրությունից:

Այդ սահմանը կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալը ստ D տիրույթի և նշանակվում է այսպես.

$$\iint_D f(P) ds \quad \text{կամ} \quad \iint_D f(x, y) dx dy,$$

այսինքն՝

$$\lim_{\text{diam} \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

Այստեղ D տիրույթը կոչվում է ինտեգրման տիրույթ:

Եթե $f(x, y) \geq 0$, ապա $f(x, y)$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալն ըստ D տիրույթի հավասար է այն Q մարմնի ծավալին, որը սահմանափակված է $z=f(x, y)$ մակերևույթով, $z=0$ հարթությամբ և մի գլանաչի՛ն մակերևույթով, որի ծնիչները զուգահեռ են Oz առանցքին, իսկ ուղղորդը D տիրույթի եզրագիծն է (նկ. 294):

Այնուհետև, քննարկենք կրկնակի ինտեգրալի մասին հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 2: Եթե $\varphi(x, y) + \psi(x, y)$ գումարի կրկնակի ինտեգրալն ըստ D տիրույթի հավասար է ըստ D տիրույթի առանձին-առանձին այդ ֆունկցիաների կրկնակի ինտեգրալների գումարին.

$$\iint_D [\varphi(x, y) + \psi(x, y)] ds = \iint_D \varphi(x, y) ds + \iint_D \psi(x, y) ds:$$

Թեորեմ 3: Հաստատուն բազմապատկիչը կարելի է դուրս բերել կրկնակի ինտեգրալի նշանից. եթե $a = \text{const}$, ապա

$$\iint_D a\varphi(x, y) ds = a \iint_D \varphi(x, y) ds:$$

Այս երկու թեորեմների ապացույցները կատարվում են ճիշտ այնպես, ինչպես որոշյալ ինտեգրալի համար համապատասխան թեորեմների ապացույցները (տես I հատ. XI գլ. § 3):

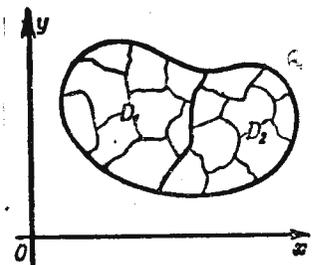
Թեորեմ 4: Եթե D տիրույթը բաժանված է ընդհանուր նեբխին կետեր չունեցող D_1 և D_2 երկու տիրույթների և $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է D տիրույթի բոլոր կետերում, ապա

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy: \quad (3)$$

Ապացուցում: Ըստ D տիրույթի ինտեգրալային գումարը կարելի է ներկայացնել

$$\sum_D i(P_i) \Delta s_i = \sum_{D_1} i(P_i) \Delta s_i + \sum_{D_2} i(P_i) \Delta s_i \quad (4)$$

տեսքով (նկ. 295), որտեղ առաջին գումարը պարունակում է D_1 տիրույթի հարթակներին համապատասխանող գումարելիները, իսկ երկրորդը՝ D_2 տիրույթի հարթակներին համապատասխանող գումարելիները: Իրոք, քանի որ կրկնակի ինտեգրալը կախված չէ տրոհման կառուցումից, ապա D տիրույթի տրոհումը կատարենք այնպես, որ D_1 և D_2 տիրույթների ընդհանուր եզրագիծը



նկ. 295

գրալը կախված չէ տրոհման կառուցումից, ապա D տիրույթի տրոհումը կատարենք այնպես, որ D_1 և D_2 տիրույթների ընդհանուր եզրագիծը

հանդիսանա $\Delta s_i \rightarrow 0$ հարթակների եզրագիծ: (4) հավասարության մեջ անցնելով սահմանին, երբ $\Delta s_i \rightarrow 0$, կստանանք (3) հավասարությունը: Ակրնհայտ է, որ այս թեորեմն իրավացի է ցանկացած թվով զումարելիների համար:

§ 2. Կրկնակի ինտեգրալի հաշվումը

Դիցուք Oxy հարթության մեջ գտնվող D տիրույթն այնպիսին է, որ կոորդինատային առանցքներից որևէ մեկին, օրինակ, Oy առանցքին, զուգահեռ և տիրույթի ներքին* կետով անցնող ամեն մի ուղիղ տիրույթի եզրը հատում է N_1 և N_2 երկու կետերում (նկ. 296):

Ենթադրում ենք, որ դիտարկվող դեպքում D տիրույթը սահմանափակված է $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ գծերով, ընդ որում

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \quad a < b,$$

իսկ $\varphi_1(x)$ և $\varphi_2(x)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են $[a, b]$ հատվածում: Այսպիսի տիրույթը կանոնաչափ կանոնավոր՝ Oy առանցքի ուղղությամբ: Համանման սահմանվում է Ox առանցքի ուղղությամբ կանոնավոր տիրույթը:

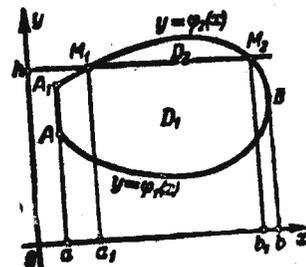
Ինչպես Ox առանցքի ուղղությամբ, այնպես էլ Oy առանցքի ուղղությամբ կանոնավոր տիրույթները ուղղակի կանվանենք կանոնավոր տիրույթ: 296-րդ գծագրում ցույց է տրված հենց D կանոնավոր տիրույթը:

Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է D տիրույթում:

Դիտարկենք

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

արտահայտությունը, որն անվանելու ենք $f(x, y)$ ֆունկցիայի կրկնապատիկ ինտեգրալ ըստ D տիրույթի: Այդ արտահայտության մեջ նախ հաշվում են փակագծերի ներքին ինտեգրալը, ընդ որում ինտեգրումը կատարվում է ըստ y -ի, իսկ x -ը համարվում է հաստատուն: Ինտեգրման արդյունքը լինում է x -ի անընդհատ** ֆունկցիա.



նկ. 296

* Տիրույթի նեբխին կետ ստելով հասկանում ենք այն կետը, որը չի պատկանում տիրույթի եզրագծին:

** $\Phi(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունն այստեղ չենք ապացուցում:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

Այս ֆունկցիան ինտեգրում ենք a -ից մինչև b սահմաններում

$$I_D = \int_a^b \Phi(x) dx,$$

Արդյունքում ստացվում է հաստատուն թիվ:

Օրինակ: Պահանջվում է հաշվել հետևյալ կրկնապատիկ ինտեգրալը

$$I_D = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right) dx,$$

Լուծում: Նախ հաշվում ենք ներքին (փակագծերում գտնվող) ինտեգրալը

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)_0^{x^2} = x^2 x^2 = \frac{(x^2)^3}{3} = x^4 + \frac{x^6}{3},$$

Ստացված ֆունկցիան ինտեգրելով 0 -ից մինչև 1 սահմաններում, գտնում ենք

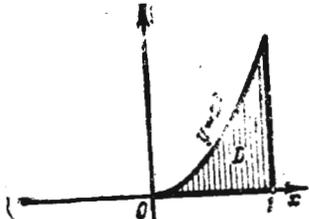
$$\int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{3 \cdot 7} \right)_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105},$$

Որոշենք D տիրույթը: Տվյալ դեպքում որպես D դիտվում է

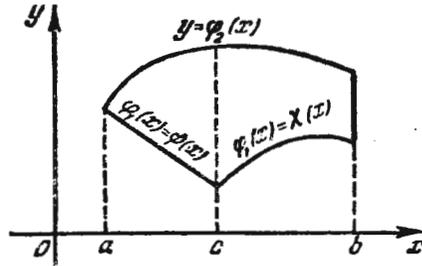
$$y=0, \quad y=x^2, \quad x=0, \quad x=1$$

զոնը սահմանափակված տիրույթը (նկ. 297):

Կարող է պատահել, որ D տիրույթը լինի այնպիսին, որ $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ ֆունկցիաներից մեկը չի կարող x -ի փոփոխության ամբողջ



Նկ. 297



Նկ. 298

միջակայքում ($x=a$ մինչև $x=b$) տրվել մեկ անալիտիկ արտահայտություն: Դիցուք, օրինակ, $a < c < b$, ընդ որում

$$\varphi_1(x) = \psi(x) \quad [a, c] \quad \text{հատվածում,}$$

$$\varphi_1(x) = \chi(x) \quad [c, b] \quad \text{հատվածում,}$$

որտեղ $\psi(x)$ -ը և $\chi(x)$ -ը անալիտիկորեն տրված ֆունկցիաներ են (նկ. 298): Այդ դեպքում կրկնապատիկ ինտեգրալը գրվում է այսպես.

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx &= \\ &= \int_a^c \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^c \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Այս հավասարություններից առաջինը գրված է որոշյալ ինտեգրալի հայտնի հատկության հիման վրա, իսկ երկրորդը՝ շնորհիվ այն բանի, որ $[a, c]$ հատվածում $\varphi_1(x) \equiv \psi(x)$, իսկ $[c, b]$ հատվածում՝ $\varphi_1(x) \equiv \chi(x)$:

Կրկնապատիկ ինտեգրալի համար համանման զրառումը տեղի կունենար և այն դեպքում, եթե $\varphi_2(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածի տարբեր տեղամասերում տրվեր տարբեր անալիտիկ արտահայտություններով:

Հաստատենք կրկնապատիկ ինտեգրալի մի քանի հատկությունները:

Հատկություն 1: Եթե Oy առանցքի ուղղությամբ կանոնավոր D տիրույթը Oy կամ Ox առանցքին զուգահեռ ուղիղով բաժանենք D_1 և D_2 երկու տիրույթների, ապա ըստ D տիրույթի I_D կրկնապատիկ ինտեգրալը հավասար կլինի ըստ D_1 և D_2 տիրույթների նույնպիսի ինտեգրալների գումարին, այսինքն՝

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} \quad (1)$$

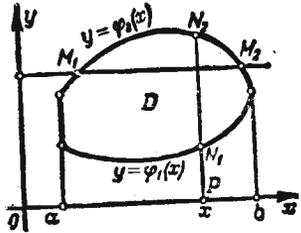
Ապացուցում: ա) Դիցուք $x=c$ ($a < c < b$) ուղիղը D տիրույթը արտահան է Oy առանցքի ուղղությամբ կանոնավոր* երկու D_1 և D_2 տիրույթների: Այդ դեպքում

* Այն փաստը, որ D_1 տիրույթի (և D_2 տիրույթի) եզրագծի մի մասը հանդիսանում է ուղղանկյուն ուղիղ կտոր, չի խանգարում, որ այդ տիրույթը լինի Oy առանցքի ուղղությամբ կանոնավոր. չէ որ կանոնավոր լինելու համար միայն անհրաժեշտ է, որ տիրույթի ներքին կետով անցնող ամեն մի ուղղանկյուն ուղիղ եզրագծի հետ ունենա կրկուսից ոչ ավելի ընդհանուր կետեր:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \Phi(x) dx = \int_a^c \Phi(x) dx + \int_c^b \Phi(x) dx =$$

$$= \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = I_{D_1} + I_{D_2}$$

բ) Դիցուք $y=h$ ուղիղը D տիրույթը տրոհում է Oy առանցքի ուղղությամբ վանոնավոր երկու D_1 և D_2 տիրույթների անկյան, փնչպես պատկերված է նկ. 299-ում: Նշանակենք M_1 -ով և M_2 -ով $y=h$ ուղիղի հատման կետերը D տիրույթի L եզրագծի հետ: Այդ կետերի արացիսները նշանակենք a_1 -ով և b_1 -ով: D_1 տիրույթը սահմանափակված է հետևյալ անընդհատ գծերով.



Նկ. 299

- 1) $y = \varphi_1(x)$,
- 2) $A_1M_1M_2B$ կորով, որի հավասարումը պայմանականորեն գրենք

$$y = \varphi_1^*(x)$$

տեսքով, ընդ որում նկատի ունենալով, որ $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$, երբ $a \leq x \leq a_1$ և երբ $b_1 \leq x \leq b$ և որ

$$\varphi_1^*(x) = h, \text{ երբ } a_1 \leq x \leq b_1$$

Յ) $x=a$, $x=b$ ուղիղներով:

D_2 տիրույթը սահմանափակված է հետևյալ գծերով

$$y = \varphi_1^*(x), y = \varphi_2(x), \text{ որտեղ } a_1 \leq x \leq b_1$$

Ներքին ինտեգրալի նկատմամբ կիրառելով ինտեգրման միջակայքի տրոհման վերաբերյալ թեորեմը, գրենք հետևյալ նույնություներ.

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y) dy + \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

Արտաքին ինտեգրալի նկատմամբ կիրառելով ինտեգրման միջակայքի տրոհման վերաբերյալ թեորեմը, վերջին ինտեգրալը տրոհենք երեք ինտեգրալների.

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^{a_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx +$$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_{b_1}^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

քանի որ $[a, a_1]$ և $[b_1, b]$ հատվածներում $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$, ասլա առաջին և երրորդ ինտեգրալները նույնաբար հավասար են զրոյի: Ուստի

$$I_D = \int_a^{a_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

Այստեղ առաջին ինտեգրալը կրկնապատիկ ինտեգրալ է ըստ D_1 տիրույթի, իսկ երկրորդը՝ ըստ D_2 տիրույթի: Հետևաբար,

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}$$

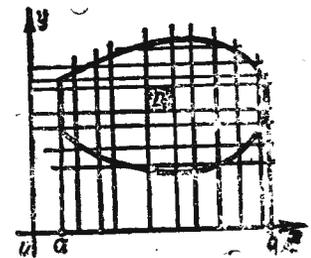
M_1M_2 հատող ուղիղի ցանկացած դիրքի դեպքում ապացուցումը կկատարվի համանմանորեն: Եթե M_1M_2 ուղիղը D տիրույթը բաժանի երեք և ավելի թվով տիրույթների, ապա կստանանք (1) առնչությանը նման առնչություն, որի աջ մասում կլինեն համապատասխան թվով գումարելիներ:

Հե տևանք: Ստացված տիրույթներից յուրաքանչյուրը կարող ենք Oy առանցքին կամ Ox առանցքին զուգահեռ ուղիղով նորից տրոհել Oy առանցքի ուղղությամբ վանոնավոր տիրույթների և նրանց նկատմամբ կիրառել (1) հավասարությունը: Այսպիսով, կարելի է D տիրույթը կորդինատային առանցքներին զուգահեռ ուղիղներով տրոհել ցանկացած թվով

$$D_1, D_2, D_3, \dots, D_i$$

տիրույթների և ընդ որում իրավացի կլինի այն պնդումը, որ ըստ D տիրույթի կրկնապատիկ ինտեգրալը հավասար է ըստ մասնակի տիրույթների կրկնապատիկ ինտեգրալների գումարին, այսինքն՝ (նկ. 300).

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + I_{D_3} + \dots + I_{D_i} \quad (1)$$



Նկ. 300

Հատկություն 2. (Կրկնապատիկ ինտեգրալի գնահատումը): Դիցուք m -ը և M -ը $f(x, y)$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքագույն արժեքներն են D տիրույթում: D տիրույթի մակերեսը նշանակենք S -ով: Այս դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհշտությունը.

$$mS \leq \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq MS \quad (3)$$

Ապացուցում: Ներքին ինտեգրալը նշանակենք $\Phi(x)$ -ով և կատարենք նրա գնահատումը.

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \leq \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} M dy = M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)];$$

Այդ դեպքում

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq \int_a^b M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx = MS,$$

այսինքն՝

$$I_D \leq MS \quad (3')$$

Նման ձևով

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \geq \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} m dy = m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)],$$

$$I_D = \int_a^b \Phi(x) dx \geq \int_a^b m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx = mS,$$

այսինքն՝

$$I_D \geq mS \quad (3'')$$

(3') և (3'') անհավասարություններից էլ հետևում է (3) անհշտությանը.

$$mS \leq I_D \leq MS:$$

Հաջորդ պարագրաֆում կպարզաբանենք այս թեորեմի երկրաչափական իմաստը:

Հատկություն 3 (Թեորեմ միջինի մասին): $f(x, y)$ անընդհատ ֆունկցիայի՝ ըստ S մակերես ունեցող D տիրույթի I_D կրկնա-

պատիկ ինտեգրալը հավասար է S մակերեսի և D տիրույթի մի որոշ P կետում $f(x, y)$ ֆունկցիայի արժեքի արտադրյալին, այսինքն՝

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = f(P)S \quad (4)$$

Ապացուցում: (3) անհշտության ստանում ենք.

$$m \leq \frac{1}{S} I_D \leq M:$$

$\frac{1}{S} I_D$ թիվը պարփակված է D տիրույթում $f(x, y)$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքագույն արժեքների միջև: Անընդհատության շնորհիվ $f(x, y)$ ֆունկցիան D տիրույթի մի որոշ P կետում ընդունում է $\frac{1}{S} I_D$ թվին հավասար արժեքը, այսինքն՝

$$\frac{1}{S} I_D = f(P),$$

որտեղից

$$I_D = f(P)S \quad (5)$$

§ 3. Կրկնակի ինտեգրալի հաշվումը (շարունակություն)

Թեորեմ: $f(x, y)$ անընդհատ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալն ըստ D կանոնավոր տիրույթի հավասար է այդ ֆունկցիայի կրկնապատիկ ինտեգրալին ըստ D տիրույթի, այսինքն՝

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx:$$

Ապացուցում: D տիրույթը կորդինատային առանցքների զուգահեռ ուղիղներով տրոհենք n կանոնավոր (ուղղանկյուն) տիրույթների՝

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n:$$

* Հստ որում նորից ենթադրում ենք, որ D տիրույթը կանոնավոր է Oy առանցքի ուղղությամբ և սահմանափակված է $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ գծերով:

նախորդ պարագրաֆի 1-ին հատկության հիման վրա (բանաձև (2)) ունենք.

$$I_D = I_{\Delta S_1} + I_{\Delta S_2} + \dots + I_{\Delta S_n} = \sum_{i=1}^n I_{\Delta S_i} \quad (1)$$

Այժմ մասի յուրաքանչյուր դոմարեղի ձևափոխենք ըստ կրկնապատիկ ինտեգրալի միջին արժեքի թեորեմի

$$I_{\Delta S_i} = f(P_i) \Delta S_i$$

Այս դեպքում (1) հավասարությունը կընդունի

$$I_D = f(P_1) \Delta S_1 + f(P_2) \Delta S_2 + \dots + f(P_n) \Delta S_n = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i \quad (2)$$

տեսքը, որտեղ P_i -ն ΔS_i տիրույթի մի որոշ կետն է: Այժմ կողմում ունենք ըստ D տիրույթի $f(x, y)$ ֆունկցիայի համար ինտեգրալային գումար: Կրկնակի ինտեգրալի գոյություն մասին թեորեմից հետևում է, որ այդ գումարի սահմանը, երբ $n \rightarrow \infty$ և հարթակների տրամագծերից ամենամեծը ձգտում է զրոյի, գոյություն ունի և հավասար է ըստ D տիրույթի $f(x, y)$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալին: (2) հավասարության ձախ մասում գտնվող I_D կրկնապատիկ ինտեգրալի մեծությունը կախված չէ n -ից: Այսպիսով, (2) հավասարության մեջ անցնելով սահմանին, կուտանանք.

$$I_D = \lim_{\text{diam} \Delta S_i \rightarrow 0} \sum f(P_i) \Delta S_i = \int_D f(x, y) dx dy$$

կամ

$$\iint_D f(x, y) dx dy = I_D \quad (3)$$

I_D կրկնապատիկ ինտեգրալի արտահայտությունը գրելով մանրամասն, վերջնականապես կստանանք

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (4)$$

Դիտողություն 1: Այն դեպքի համար, երբ $f(x, y) \geq 0$, (4) բանաձևն ունի ակնառու երկրաչափական բացատրություն: Դիտարկենք այն մարմինը, որը սահմանափակված է $z = f(x, y)$ մակերևույթով, $z = 0$ հարթությամբ և զլանային մակերևույթով, որի ծնիշները զուգահեռ են Oz առանցքին, իսկ ուղղորդը D տիրույթի եզրագիծն է (նկ. 301): Հաշվենք այդ մարմնի ծավալը: Վերը ցույց տրվեց, որ այդ մարմնի ծա-

վալը հավասար է $f(x, y)$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալին ըստ D տիրույթի՝

$$V = \int_D f(x, y) dx dy \quad (5)$$

Այժմ հաշվենք այդ մարմնի ծավալը, օգտվելով I հատ. XII գլխի § 4-ի՝ մարմնի ծավալը հատույթների մակերեսների միջոցով հաշվման արդյունքներից: Տանենք $x = \text{const}$ ($a < x < b$) հարթությունը, որը հատում է դիտարկվող մարմինը: Հաշվենք այն պատկերի $S(x)$ մակերեսը, որը ստացվում է $x = \text{const}$ հատույթում: Այդ պատկերը $z = f(x, y)$, $x = \text{const}$, $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ գծերով սահմանափակված կորագիծ սեղանն է: Հետևաբար, այդ մակերեսն արտահայտվում է հետևյալ ինտեգրալով.

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (6)$$

Իմանալով զուգահեռ հատույթների մակերեսները, հեշտ է գտնել մարմնի ծավալը.

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

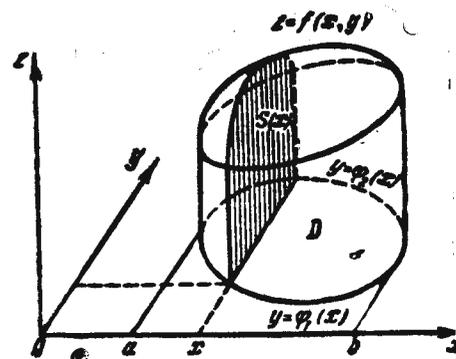
կամ, տեղադրելով (6) արտահայտությունը, ստանում ենք

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (7)$$

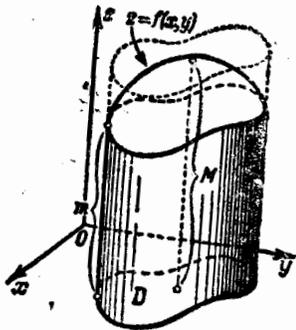
(5) և (7) բանաձևերի ձախ մասերը հավասար են, հետևաբար, հավասար են և աջ մասերը.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

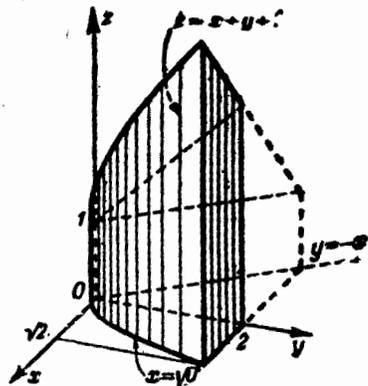
Այժմ դժվար չէ բացահայտել և կրկնապատիկ ինտեգրալի գնահատման մասին թեորեմի երկրաչափական իմաստը (նախորդ պարագրաֆի 2-րդ հատկությունը).



նկ. 301



Նկ. 302



Նկ. 303

$z=f(x, y)$ մակերևույթով, $z=0$ հարթությամբ և D տիրույթի եզրագիծն իբրև ուղղորդ ունեցող գլանային մակերևույթով սահմանափակված V մարմնի ծավալը գերազանցում է S հիմք և m բարձրություն ունեցող գլանի ծավալին, բայց փոքր է S հիմք և M բարձրություն ունեցող ծավալից (որտեղ m -ը և M -ը D տիրույթում $z=f(x, y)$ ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքներն են (Նկ. 302)): Դա հետևում է նրանից, որ \bar{z} կրկնապատիկ ինտեգրալը հավասար է այդ V մարմնի ծավալին:

Օրինակ 1: Հաշվել $\iint_D (4-x^2-y^2) dx dy$ կրկնակի ինտեգրալը, եթե D տիրույթը սահմանափակված է $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=\frac{3}{2}$ գծերով:

Լուծում: Բանաձևի հիման վրա

$$V = \int_0^{3/2} \int_0^1 (4-x^2-y^2) dx dy = \int_0^{3/2} \left[4x - \frac{x^3}{3} - y^2x \right]_0^1 dy = \int_0^{3/2} \left(4 - \frac{1}{3} - y^2 \right) dy = \left(4y - \frac{1}{3}y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{3/2} = \frac{35}{8}$$

Օրինակ 2: Հաշվել $\iint_D f(x, y) = 1+x+y$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալն ըստ այն տիրույթի, որը սահմանափակված է $y=-x$, $x=\sqrt{y}$, $y=2$, $z=0$ գծերով (Նկ. 303):

Լուծում:

$$V = \int_0^2 \int_{-y}^{\sqrt{y}} (1+x+y) dx dy = \int_0^2 \left[x + \frac{x^2}{2} + xy \right]_{-y}^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^2 \left[\left(\sqrt{y} + \frac{y}{2} + y\sqrt{y} \right) - \left(-y + \frac{y^2}{2} - y^2 \right) \right] dy =$$

$$= \int_0^2 \left[\sqrt{y} + \frac{3y}{2} + y\sqrt{y} + \frac{y^2}{2} \right] dy = \left[\frac{2y^{3/2}}{3} + \frac{3y^2}{4} + \frac{2y^{5/2}}{5} + \frac{y^3}{6} \right]_0^2 = \frac{44}{15} \sqrt{2} + \frac{4}{3}$$

Դիտողություն 2: Դիցուք Ox առանցքի ուղղությամբ կանոնավոր D տիրույթը սահմանափակված է հետևյալ գծերով՝

$$x=\psi_1(y), \quad x=\psi_2(y), \quad y=c, \quad y=d,$$

ընդ որում $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ (Նկ. 304):

Ակնհայտ է, որ այդ դեպքում

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy, \quad (8)$$

Կրկնակի ինտեգրալը հաշվելու համար այն պետք է ներկայացնել կրկնապատիկի տեսքով: Ինչպես տեսանք վերը, դա կարելի է անել երկու տարբեր եղանակով. կամ ըստ (4) բանաձևի, կամ էլ ըստ (8) բանաձևի: Յուրաքանչյուր կոնկրետ դեպքում, կախված D տիրույթի կամ ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի տեսքից, կրկնակի ինտեգրալը հաշվելու համար ընտրում ենք մեկ կամ մյուս բանաձևը:

Օրինակ 3: Հետևյալ ինտեգրալում փոխել ինտեգրման կարգը

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx,$$

Լուծում: Ինտեգրման տիրույթը սահմանափակված է $y=x$ ուղիղով և $y=\sqrt{x}$ կարաբոլով (Նկ. 305):

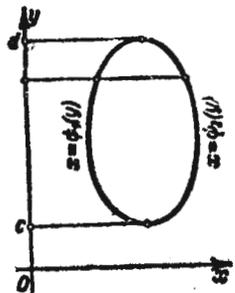
Օք առանցքին զուգահեռ ամեն մի ուղիղ տիրույթի եզրագիծը հատում է ոչ ավելի քան երկու կետով. հետևաբար, կարելի է ինտեգրալը հաշվել ըստ (8) բանաձևի, ընդ որում երկու կետով:

այդ դեպքում

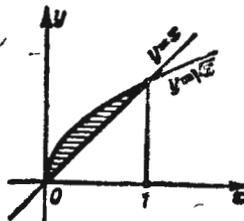
$$\psi_1(y)=y^2, \quad \psi_2(y)=y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^y f(x, y) dx \right) dy,$$

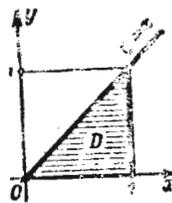
Օրինակ 4: Հաշվել $\iint_D e^{y/x} ds$, եթե D տիրույթը $y=x$, $y=0$, $x=1$ ուղիղներով սահմանափակված եռանկյունն է (նկ. 306):



նկ. 304



նկ. 305



նկ. 306

Լուծում: Տրված կրկնակի ինտեգրալը փոխարինենք կրկնապատիկով: Ընդ որում կօտարվենք (4) բանաձևից: (Եթե կիրառենք (8) բանաձևը, ապա ստիպված կլինենք ըստ

x -ի ինտեգրել ֆունկցիան. բայց այդ ինտեգրալը տարրական ֆունկցիաներով չի արտահայտվում).

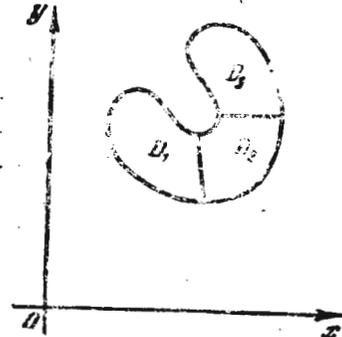
$$\begin{aligned} \iint_D e^{y/x} ds &= \int_0^1 \left(\int_0^x e^{y/x} dy \right) dx = \int_0^1 (x e^{y/x}) \Big|_0^x dx = \\ &= \int_0^1 x(e-1) dx = (e-1) \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2} = 0,859... \end{aligned}$$

Դիտողություն 3: Եթե D տիրույթը կանոնավոր չէ ոչ Ox առանցքի ուղղությամբ և ոչ էլ Oy առանցքի ուղղությամբ (այսինքն՝ գոյություն ունեն ուղղաձիգ և հորիզոնական ուղիղներ, որոնք, անցնելով տիրույթի ներքին կետերով, տիրույթի եզրագիծը հատում են երկուսից ավելի կետերում), ապա ըստ այդ տիրույթի կրկնակի ինտեգրալը չենք վարող ներկայացնել կրկնապատիկի տեսքով: Եթե հաջողվի D ոչ կանոնավոր տիրույթը բաժանել Ox առանցքի կամ Oy առանցքի ուղղությամբ կանոնավոր D_1, D_2, \dots, D_n վերջավոր թվով տիրույթների, ապա, հաշվելով կրկնակի ինտեգրալը ըստ յուրաքանչյուր այդ տիրույթների՝ կրկնապատիկի միջոցով և գումարելով ստացված արդյունքները, կստանանք ըստ D տիրույթի որոնելի ինտեգրալը:

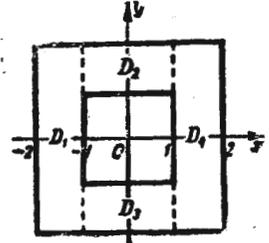
Նկ. 307-ի վրա ցույց է տրված այն բանի օրինակը, թե ինչպես կարելի է D անկանոն տիրույթը բաժանել D_1, D_2 և D_3 երեք կանոնավոր տիրույթների:

Օրինակ 5: Հաշվել $\iint_D e^{x+y} ds$ կրկնակի ինտեգրալը ըստ այն D տիրույթի,

որը պարփակված է երկու բառակուսիներով, որոնց կենտրոնը գտնվում է կորդինատների սկզբնակետում, իսկ կողմերը զուգահեռ են կորդինատային առանցքներին, եթե ներքին բառակուսու կողմը հավասար է 2-ի, իսկ արտաքինինը՝ 4-ի (նկ. 308):



նկ. 307



նկ. 308

Լուծում: D տիրույթը կանոնավոր չէ: Սակայն $x=-1$ և $x=1$ ուղիղները այն բաժանում են D_1, D_2, D_3, D_4 չորս կանոնավոր տիրույթների: Ուստի

$$\iint_D e^{x+y} ds = \iint_{D_1} e^{x+y} ds + \iint_{D_2} e^{x+y} ds + \iint_{D_3} e^{x+y} ds + \iint_{D_4} e^{x+y} ds,$$

Այս ինտեգրալներից յուրաքանչյուրը ներկայացնելով կրկնապատիկի տեսքով, կգտնենք.

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x+y} ds &= \int_{-2}^{-1} \left(\int_{-2}^2 e^{x+y} dy \right) dx + \int_{-1}^1 \left(\int_{-2}^2 e^{x+y} dy \right) dx + \\ &+ \int_{-1}^1 \left(\int_{-2}^{-1} e^{x+y} dy \right) dx + \int_{1}^2 \left(\int_{-2}^{-1} e^{x+y} dy \right) dx = \\ &= (e^2 - e^{-2})(e^{-1} - e^{-2}) + (e^2 - e)(e - e^{-1}) + (e^{-1} - e^{-2})(e - e^{-1}) + \\ &+ (e^2 - e^{-2})(e^2 - e) = (e^3 - e^{-3})(e - e^{-1}) = 4 \operatorname{sh} 3 \operatorname{sh} 1. \end{aligned}$$

Դիտողություն 4: Հետագայում գրելով

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

կրկնապատիկ ինտեգրալը, փակագծերը (որոնց մեջ առնված է ներքին ինտեգրալը) բաց կթողնենք, այսինքն՝ կգրենք

$$I_D = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

Ընդ որում, ինչպես և փակագծերի առկայության դեպքում, կհամարենք, որ առաջին ինտեգրումը կատարվում է ըստ այն փոփոխականի, որի դիֆերենցիալը գրված է սկզբում, և ապա ըստ այն փոփոխականի, որի դիֆերենցիալը գրված է երկրորդ տեղում: (Այնուամենայնիվ նկատենք, որ դա չունի համընդհանուր ճանաչում. մի քանի գրքերում ընդունված է հակադիր պայմանը. սկզբից ինտեգրել ըստ այն փոփոխականի, որի դիֆերենցիալը գրվում է վերջին տեղը*):

§ 4 Մակերեսների և ծավալների հաշվումը կրկնակի ինտեգրալների միջոցով

1. Մ ա վ ա լ: Ինչպես տեսանք § 1-ում, այնպիսի մարմնի V ծավալը, որը սահմանափակված է $z = f(x, y)$ մակերևույթով (որտեղ $f(x, y)$ -ը ոչբացասական ֆունկցիա է), $z = 0$ հարթությամբ և այնպիսի գլանային մակերևույթով, որի ուղղորդը D տիրույթի եզրագիծն է, իսկ ծնիշները զուգահեռ են Oz առանցքին, հավասար է $f(x, y)$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալին ըստ D տիրույթի.

$$V = \iint_D f(x, y) ds.$$

Օրինակ 1. Հաշվել $x=0, y=0, x+y+z=1, z=0$ մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (նկ. 309):

Լ ու ծ ու մ:

$$V = \iint_D (1-x-y) dy dx,$$

որտեղ D -ն նկ. 309-ի վրա Oxy հարթության գծիկներով եռանկյունն է, որը սահմանափակված է $x=0, y=0, x+y=1$ ուղիղներով: Դնելով կրկնակի ինտեգրալի սահմանները, հաշվենք ծավալը.

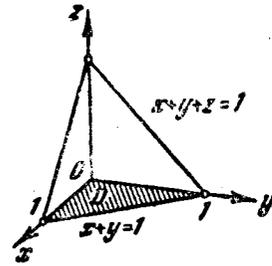
* Երբեմն օգտագործվում է նաև գրության հետևյալ ձևը.

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y) dy.$$

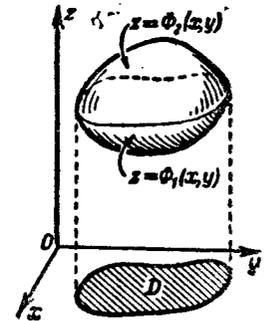
$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx = \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}.$$

Այսպես, ուրեմն $V = \frac{1}{6}$ խոր. միավոր:

Դիտողություն 1: Եթե այն մարմինը, որի ծավալը որոնվում է, վերևից սահմանափակված է $z = \Phi_2(x, y) \geq 0$ մակերևույթով, իսկ ներքևից՝ $z = \Phi_1(x, y) \geq 0$ մակերևույթով, ընդ որում Oxy հարթության վրա երկու մակերևույթների պրոյեկցիաներն էլ D տիրույթն է, ապա այդ մարմնի V ծավալը հավասար է երկու «գլանային» մարմինների ծավալների տարբերությանը. նրանցից առաջինի ստորին հիմքը D տիրույթն է, իսկ վերին հիմքը՝ $z = \Phi_2(x, y)$ մակերևույթը, իսկ երկրորդի ստորին հիմքը նույն D -ն է, իսկ վերին հիմքը՝ $z = \Phi_1(x, y)$ մակերևույթը (նկ. 310):



Նկ. 309



Նկ. 310

Ուստի V ծավալը հավասար է երկու կրկնակի ինտեգրալների տարբերությանը.

$$V = \iint_D \Phi_2(x, y) ds - \iint_D \Phi_1(x, y) ds$$

կամ

$$V = \iint_D [\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)] ds. \quad (1)$$

Այնուհետև, հեշտ է ապացուցել, որ (1) բանաձևը ճշմարիտ է ոչ միայն այն դեպքում, երբ $\Phi_1(x, y)$ և $\Phi_2(x, y)$ ֆունկցիաները ոչբացասական են, այլև այն դեպքում, երբ $\Phi_1(x, y)$ -ը և $\Phi_2(x, y)$ -ը

$$\Phi_2(x, y) \geq \Phi_1(x, y)$$

առնչությանը բավարարող ցանկացած անընդհատ ֆունկցիաներ են:

Դիտողություն 2: Եթե D տիրույթում $f(x, y)$ ֆունկցիան փոփոխում է նշանը, ապա տիրույթը տրոհում ենք երկու մասի. 1) D_1 տիրույթը, որտեղ $f(x, y) \geq 0$, 2) D_2 տիրույթը, որտեղ $f(x, y) \leq 0$: Ենթադրենք, որ D_1 և D_2 տիրույթներն այնպիսին են, որ ըստ այդ տիրույթների կրկնակի ինտեգրալները գոյություն ունեն: Այդ դեպքում ըստ D_1 տիրույթի ինտեգրալը կրկնի դրական և հավասար Oxy հարթությունից վերև ընկած մարմնի ծավալին: Ըստ D_2 -ի ինտեգրալը կրկնի բացասական և բացարձակ մեծությամբ հավասար Oxy հարթությունից ներքև ընկած մարմնի ծավալին: Հետևաբար, ըստ D -ի ինտեգրալը կարտահայտի համապատասխան ծավալների տարբերությունը:

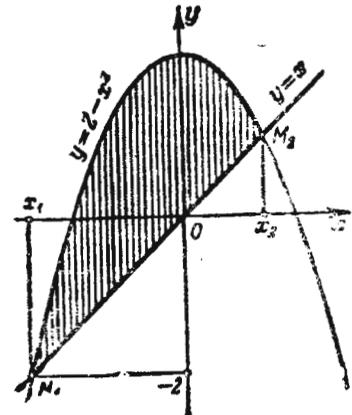
2. Հարթ տիրույթի մակերեսի հաշվումը: Եթե կազմենք $f(x, y) \equiv 1$ ֆունկցիայի համար ըստ D տիրույթի ինտեգրալային գումար, ապա վերջինս, տրոհման ցանկացած եղանակի դեպքում, հավասար կլինի S մակերեսին,

$$S = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta S_i$$

Հավասարության աջ մասում անցնելով սահմանի, կստանանք

$$S = \iint_D dx dy$$

Եթե D տիրույթը կանոնավոր է (տես, օրինակ, նկ. 296), ապա մակերեսը կարտահայտվի կրկնապատկի ինտեգրալով՝



նկ. 311

$$S = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx$$

Փակագծերում կատարելով ինտեգրումը, կունենանք

$$S = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx$$

(I հատ. XII գլխի § 1):

Օրինակ 2. Հաշվել $y = 2 - x^2$, $y = x$ կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը: Լուծում: Որոշենք տրված կորերի հատման կետերը (նկ. 311): Հատման կետերի օրդինատները հավասար են, այսինքն՝ $x = 2 - x^2$, որտեղից $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$: Ստացանք հատման երկու կետեր՝ $M_1(-2, -2)$, $M_2(1, 1)$:

$$S = \int_{-2}^1 \left(\int_x^{2-x^2} dy \right) dx = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}$$

§ 5. Կրկնակի ինտեգրալը բևեռային կոորդինատներով

Դիցուք θ , ρ կոորդինատների բևեռային համակարգում տրված է այնպիսի D տիրույթ, որի ներքին կետով անցնող յուրաքանչյուր ճառագայթ* D տիրույթի եզրագիծը հատում է ոչ ավելի, քան երկու կետում: Ենթադրենք D տիրույթը սահմանափակված է $\rho = \Phi_1(\theta)$, $\rho = \Phi_2(\theta)$ կորերով և $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ճառագայթներով, ըստ որում $\Phi_1(\theta) \leq \Phi_2(\theta)$ և $\alpha < \beta$ (նկ. 312): Այդպիսի տիրույթը նորից կանվանենք կանոնավոր:

Դիցուք D տիրույթում տրված է θ և ρ կոորդինատների

$$z = F(\theta, \rho)$$

անընդհատ ֆունկցիան:

Որևէ եղանակով D տիրույթը տրոհենք

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$$

հարթակների: Կազմենք

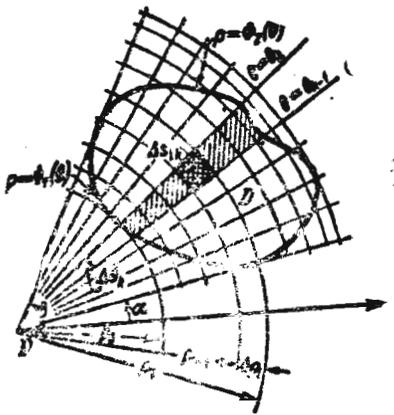
$$V_n = \sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta S_k \tag{1}$$

ինտեգրալային գումարը, որտեղ P_k -ն հարթակի մի որոշ կետն է:

Կրկնակի ինտեգրալի գոյության թեորեմից հետևում է, որ ΔS_k հարթակի ամենամեծ տրամագիծը զրոյի ձգտելիս գոյություն ունի (1) ինտեգրալային գումարի սահմանը: Այդ V սահմանը, ըստ սահմանման, հանդիսանում է $F(\theta, \rho)$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալն ըստ D տիրույթի

$$V = \iint_D F(\theta, \rho) ds \tag{2}$$

Զբաղվենք այս դեպքում կրկնակի ինտեգրալի հաշվմամբ:



նկ. 312

* Ճառագայթ կանվանենք կոորդինատների սկզբակետից, այսինքն P բևեռից ելնող յուրաքանչյուր կիսաուղիղ:

Քանի որ ինտեգրալային գումարի սահմանը կախված չէ D տիրույթը ΔS_k հարթակների տրոհելու եղանակից, ապա տիրույթը կարող ենք տրոհել ամենահարմար եղանակով: Հաշվելու համար այդպիսի եղանակ կլինի տիրույթի տրոհումը $\theta = \theta_0, \theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \dots, \theta = \theta_n$ (որտեղ $\theta_0 = \alpha, \theta_n = \beta, \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$) ճառագայթների միջոցով և $\rho = \rho_0, \rho = \rho_1, \dots, \rho = \rho_m$ համակենտրոն շրջանագծերով (որտեղ ρ_0 -ն հավասար է $\alpha \leq \theta \leq \beta$ միջակայքում $\Phi_1(\theta)$ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքին, իսկ ρ_m -ը՝ $\Phi_2(\theta)$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքին, $\rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_m$):

ΔS_{ik} -ով նշանակենք այն հարթակը, որը սահմանափակված է գծերով:

$$\rho = \rho_{i-1}, \rho = \rho_i, \theta = \theta_{k-1}, \theta = \theta_k \text{ գծերով:}$$

ΔS_{ik} հարթակները կլինեն երեք տեսքի. 1) D տիրույթում գտնվող և եզրագիծը չհատողներ, 2) D տիրույթից դուրս գտնվող և եզրագիծը չհատողներ, 3) D տիրույթի եզրագիծը հատողներ:

Այն գումարելիների գումարը, որոնք համապատասխանում են եզրագիծը հատող հարթակներին, կունենան զրո սահմանը, երբ $\Delta \theta_k \rightarrow 0$ և $\Delta \rho_i \rightarrow 0$, ուստի այդ գումարելիները հաշվի չենք առնի: D տիրույթից դուրս գտնվող ΔS_{ik} հարթակները ընդհանրապես չեն մտնում ինտեգրալային գումարի մեջ, ուստի և մեզ չեն հետաքրքրում: Հետևաբար, ինտեգրալային գումարը կարելի է գրել այսպես

$$V_n = \sum_{k=1}^n \left[\sum_i F(P_{ik}) \Delta S_{ik} \right],$$

որտեղ P_{ik} -ն և ΔS_{ik} հարթակի կամայական կետն է:

Գումարման կրկնակի նշանն այստեղ պետք է հասկանալ այն իմաստով, որ գումարումը նախ կատարում ենք ըստ i (ինդեքսի, k -ն համարելով հաստատուն (այսինքն՝ ընտրում ենք երկու հարևան ճառագայթների միջև պարփակված հարթակներին համապատասխանող բոլոր գումարելիները*): Գումարման արտաքին նշանը նշանակում է, որ ի մի ենք հավաքում այն բոլոր գումարելիները, որոնք ստացվում են առաջին գումարման ժամանակ (այսինքն՝ գումարում ենք ըստ k ինդեքսի):

Գտնենք տիրույթի եզրագիծով չհատվող ΔS_{ik} հարթակի մակերեսի արտահայտությունը: Այն հավասար կլինի երկու սեկտորների մակերեսների տարբերությանը.

$$\Delta S_{ik} = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta \rho_i)^2 \Delta \theta_k - \frac{1}{2} \rho_i^2 \Delta \theta_k = \left(\rho_i + \frac{\Delta \rho_i}{2} \right) \Delta \rho_i \Delta \theta_k$$

* Նկատենք, որ ըստ i ինդեքսի գումարելիս այդ ինդեքսը 1-ից մինչև m բոլոր արժեքները չի ընդունում, քանի որ $\theta = \theta_k$ և $\theta = \theta_{k+1}$ ճառագայթների միջև պարփակված ոչ բոլոր հարթակներն են պատկանում D տիրույթին:

կամ

$$\Delta S_{ik} = \rho_i^* \Delta \rho_i \Delta \theta_k, \text{ որտեղ } \rho_i < \rho_i^* < \rho_i + \Delta \rho_i:$$

Այսպիսով, ինտեգրալային գումարը կունենա

$$V_n = \sum_{k=1}^n \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*) \rho_i^* \Delta \rho_i \Delta \theta_k \right]$$

տեսքը*, որտեղ $P(\theta_k^*, \rho_i^*)$ -ն հարթակի կետն է: Այժմ $\Delta \theta_k$ արտադրիչը դուրս բերենք ներքին գումարի սահմանից (դա կարելի է անել, քանի որ այն հանդիսանում է այդ գումարի բոլոր գումարելիների ընդհանուր բազմապատկիչը).

$$V_n = \sum_{k=1}^n \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*) \rho_i^* \Delta \rho_i \right] \Delta \theta_k,$$

ենթադրենք, որ $\Delta \rho_i \rightarrow 0$, իսկ $\Delta \theta_k$ -ն մնում է հաստատուն: Այդ դեպքում փակագծերի ներսի արտահայտությունը կձգտի

$$\begin{aligned} & \Phi_2(\theta_k^*) \\ & \int \rho F(\theta_k^*, \rho) d\rho \\ & \Phi_1(\theta_k^*) \end{aligned}$$

ինտեգրալին: Այժմ, ընդունելով, որ $\Delta \theta_k \rightarrow 0$, վերջնականապես կտանանանք**.

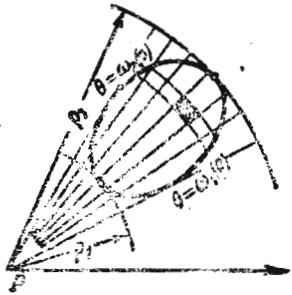
$$V = \int_a^{\beta} \left(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho) \rho d\rho \right) d\theta: \quad (3)$$

(3) բանաձևով հաշվում են կրկնակի ինտեգրալը՝ բևեռային կոորդինատներով:

* Ինտեգրալային գումարն այս տեսքով կարող ենք դիտարկել շնորհիվ այն բանի, որ գումարի սահմանը կախված չէ հարթակի ներսում կետի դիրքից:

** (3) բանաձևի մեր արտածումը խիստ չէ. այդ բանաձևն արտածելիս նախ զրոյի ձգտեցրինք $\Delta \rho_i$ -ն, թողնելով $\Delta \theta_k$ -ն անփոփոխ, և միայն հետո $\Delta \theta_k$ -ն ձգտեցրինք զրոյի: Դա ոչ լիովին է համապատասխանում կրկնակի ինտեգրալի սահմանմանը, որը մենք դիտում ենք որպես ինտեգրալային գումարի սահման, երբ հարթակների տրամագծերը ձգտում են զրոյի (այսինքն՝ երբ $\Delta \theta_k$ -ն և $\Delta \rho_i$ -ն միաժամանակ ձգտում են զրոյի): Այնուամենայնիվ, շնայած ապացուցման թույլ տրված ոչ խստությանը, արդյունքը ճշմարիտ է (այսինքն՝ (3) բանաձևն իրավացի է): Այս բանաձևի խիստ արտածումը կարելի է ստանալ այն նույն մեթոդով, որը կիրառվել էր ուղղանկյուն կոորդինատներով կրկնակի ինտեգրալը քննարկելիս: Նշենք նաև, որ այդ բանաձևը մեկ անգամ էլ է արտածվելու § 6-ում՝ այլ կշռագատություններից (որպես կրկնակի ինտեգրալում կոորդինատների ձևափոխության առավել ընդհանուր բանաձևի մասնավոր դեպք):

Եթե առաջին ինտեգրումը կատարվի ըստ θ -ի, իսկ երկրորդը՝ ըստ ρ -ի, ապա կստանանք հետևյալ բանաձևը (նկ. 313).



նկ. 313

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} F(\theta, \rho) d\theta \right) \rho d\rho \quad (3')$$

Պիցուք պահանջվում է հաշվել $f(x, y)$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալն ըստ D տիրույթի՝ տրված ուղղանկյուն կոորդինատներով.

$$\iint_D f(x, y) dx dy:$$

Եթե θ, ρ բևեռային կոորդինատներով D տիրույթը վանոնավոր է, ապա տրված ինտեգրալի հաշվումը կարելի է բերել բևեռային կոորդինատներով կրկնապատիկ ինտեգրալի հաշվմանը:

Իրոք, քանի որ

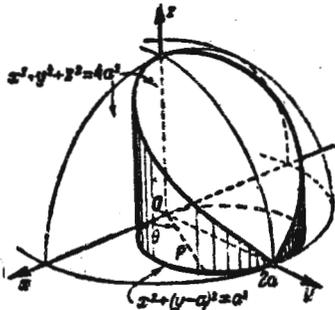
$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, & y &= \rho \sin \theta, \\ f(x, y) &= f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = F(\theta, \rho), \end{aligned}$$

ապա, հետևաբար,

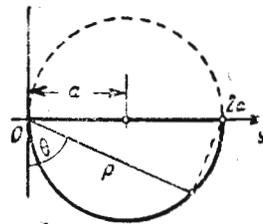
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right) d\theta \quad (4)$$

Օրինակ 1: Հաշվել $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ գնդային մակերևույթով և $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ գլանով սահմանափակված մարմնի V ծավալը:

Լուծում: Որպես ինտեգրման տիրույթ այստեղ կարելի է վերցնել $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ գլանի հիմքը, այսինքն՝ (O, a) կենտրոն և a շառավիղ ունեցող շրջանը:



նկ. 314



նկ. 315

Այդ շրջանի եզրագծի հավասարումը կարելի է գրել $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ տեսքով (նկ. 314): Հաշվենք որոնվող V ծավալի $\frac{1}{4}$ -ը, այն է՝ նրա այն մասը, որը գտնվում է առաջին օգտանոտմ: Այդ դեպքում իբրև ինտեգրման տիրույթ պետք է վերցնել այն կիսաշրջանը, որի սահմանները որոշվում են հետևյալ հավասարումներով.

$$x = \varphi_1(y) = 0, \quad x = \varphi_2(y) = \sqrt{2ay - y^2}, \quad y = 0, \quad y = 2a:$$

Ենթաինտեգրալային ֆունկցիան է

$$z = f(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}:$$

Հետևաբար,

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{2a} \left(\int_0^{\sqrt{2ay - y^2}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx \right) dy:$$

Ստացված ինտեգրալը ձևափոխենք θ, ρ բևեռային կոորդինատներով.

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta:$$

Որոշենք ինտեգրման սահմանները: Դրա համար տրված շրջանագծի հավասարումը գրենք բևեռային կոորդինատներով. քանի որ

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2, \\ y &= \rho \sin \theta, \end{aligned}$$

ապա

$$\rho^2 - 2a\rho \sin \theta = 0$$

կամ

$$\rho = 2a \sin \theta:$$

Հետևաբար, բևեռային կոորդինատներով (նկ. 315) տիրույթի սահմանները որոշվում են

$$\rho = \Phi_1(\theta) = 0, \quad \rho = \Phi_2(\theta) = 2a \sin \theta, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \pi/2$$

հավասարումներով. իսկ ինտեգրալային ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

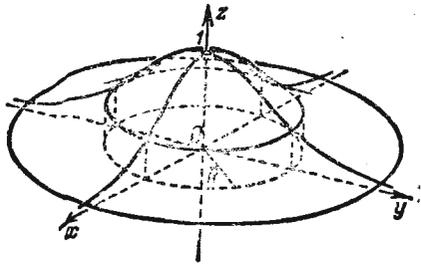
$$F(\theta, \rho) = \sqrt{4a^2 - \rho^2}:$$

Այսպիսով, ստանում ենք.

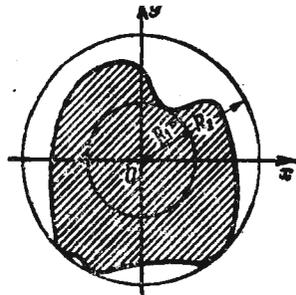
$$\begin{aligned} \frac{V}{4} &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2a \sin \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{(4a^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{2a \sin \theta} d\theta = \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} [(4a^2 - 4a^2 \sin^2 \theta)^{3/2} - (4a^2)^{3/2}] d\theta = \frac{8a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \frac{4}{9} a^3 (3\pi - 4): \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx:$$

Լուծում: Նախ հաշվենք $I_R = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ ինտեգրալը, որտեղ ինտեգրման D տիրույթը $x^2+y^2=R^2$ շրջանն է (նկ. 316):



նկ. 316



նկ. 317

Անցնելով բևեռային կոորդինատներին, ստանում ենք.

$$I_R = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \Big|_0^R d\theta = \pi(1 - e^{-R^2}):$$

Եթե այժմ R շառավիղը անսահմանափակորեն մեծացնենք, այսինքն՝ ինտեգրման տիրույթն անսահմանափակորեն ընդարձակենք, ապա կստանանք այնպես կոչված անխակական բազմապատիկ ինտեգրալ.

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-R^2}) = \pi:$$

Ցույց տանք, որ $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ ինտեգրալը ձգտում է π սահմանին, եթե կա-

մայական ձևի D' տիրույթը ընդարձակվում է այնպես, որ ի վերջո հարթության ցանկացած կետը ընկնում է D' տիրույթի ներսը և մնում է նրանում (D' տիրույթի այսպիսի ընդարձակումը պայմանականորեն կղրենք՝ $D' \rightarrow \infty$):

Դիցուք R_1 -ը և R_2 -ը D' տիրույթի եզրագծի ամենափոքր և ամենամեծ հեռավորությունն են կոորդինատների սկզբնակետից (նկ. 317):

Քանի որ $e^{-x^2-y^2} > 0$ ամենուրեք, ապա իրավացի են հետևյալ անհավասարությունները.

$$I_{R_1} \leq \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq I_{R_2}$$

կամ

$$\pi \left(\frac{1 - e^{-R_1^2}}{1 - e^{-R_2^2}} \right) \leq \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \pi \left(\frac{1 - e^{-R_2^2}}{1 - e^{-R_1^2}} \right),$$

Քանի որ $D' \rightarrow \infty$ ղեկարում, ակնհայտ է, $R_1 \rightarrow \infty$ և $R_2 \rightarrow \infty$, ապա անհավասարության ծայրերի մասերը ձգտում են միևնույն π սահմանին: Հետևաբար, այդ սահմանին է ձգտում նաև միջին անդամը, այսինքն՝

$$\lim_{D' \rightarrow \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi: \quad (5)$$

Դիցուք, մասնավորապես, D' տիրույթը շա կողմ ունեցող քառակուսին է, որի կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետին. այդ ղեկարում

$$\begin{aligned} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} dx dy = \\ &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy: \end{aligned}$$

Այժմ ներքին ինտեգրալի նշանից դուրս բերենք e^{-y^2} արտադրիչը (զա կարելի է անել, քանի որ e^{-y^2} -ն կախված չէ x ինտեգրման փոփոխականից): Այդ ղեկարում

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-a}^a e^{-y^2} \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right) dy:$$

Շնորհանք $\int_{-a}^a e^{-x^2} dx = B_a$, Սա հաստատուն թիվ է (որը կախված է միայն a -ից),

ուստի

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-a}^a e^{-y^2} B_a dy = B_a \int_{-a}^a e^{-y^2} dy:$$

Քայց վերջին ինտեգրալը նույնպես հավասար է B_a -ի (որովհետև $\int_{-a}^a e^{-x^2} dx = \int_{-a}^a e^{-y^2} dy$).

Հետևաբար,

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = B_a B_a = B_a^2:$$

Այս հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, ստիպելով, որ a -ն ձգտի անվերջության (ընդ որում D' -ն անսահմանափակորեն ընդարձակվում է)։

$$\lim_{D' \rightarrow \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{a \rightarrow \infty} B_a^2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 :$$

Բայց, ինչպես ապացուցվել է (տես (5)),

$$\lim_{D' \rightarrow \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$$

Հետևաբար,

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = \pi$$

կամ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} :$$

Այս ինտեգրալը հաճախ է պատահում հավանականությունների տեսության մեջ և վիճակագրության մեջ։ Նկատենք, որ անմիջականորեն հաշվել այս ինտեգրալը (անորոշ ինտեգրալի միջոցով) չէինք կարող, բանի որ e^{-x^2} ֆունկցիայի նախնականը տարրական ֆունկցիաներով չի արտահայտվում։

§ 6. Փոփոխականների փոխարինումը կրկնակի ինտեգրալում (ընդհանուր դեպք)

Դիցուք Oxy հարթության մեջ տրված է L գծով սահմանափակված D տիրույթը։ Ենթադրենք, որ x և y կոորդինատները u և v նոր փոփոխականների ֆունկցիաներն են։

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (1)$$

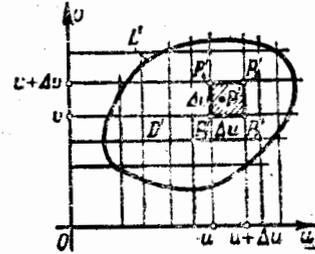
ընդ որում $\varphi(u, v)$ -ն և $\psi(u, v)$ -ն միարժեք են, անընդհատ են և ունեն անընդհատ մասնական ածանցյալներ որևէ D' տիրույթում, որը կսահմանվի ստորև։ Այդ դեպքում (1) բանաձևերի հիման վրա x և y արժեքների յուրաքանչյուր զույգին համապատասխանում է u և v արժեքների միակ զույգը։ Այնուհետև ենթադրենք, որ φ և ψ ֆունկցիաներն այնպիսին են, որ եթե D տիրույթից վերցնենք x և y որոշակի արժեքներ, ապա (1) բանաձևերով կգտնենք u և v որոշակի արժեքները։

Դիտարկենք Ouv կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգը (նկ. 318)։ Ասածից հետևում է, որ Oxy հարթության ամեն մի $P(x, y)$ կետին (նկ. 319) միարժեք համապատասխանում է Ouv հարթության $P'(u, v)$ կետը, որի u և v կոորդինատները որոշվում են (1) բանաձևերով։ u և v թվերը կոշվում են P կետի կոտագիծ կոորդինատները։

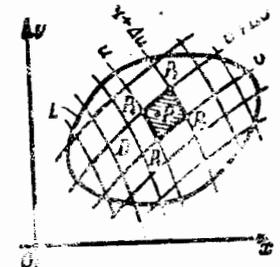
Եթե Oxy հարթության մեջ կետը գծում է D տիրույթը սահմանափակող L փակ գիծը, ապա Ouv հարթության համապատասխան կետը կգծի որևէ D' տիրույթը սահմանափակող L' փակ գիծը, այդ դեպքում D' տիրույթի յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է D տիրույթի կետ։

Այսպիսով, (1) բանաձևերը D և D' տիրույթների կետերի միջև հաստատում են փոխադարձ միարժեք համապատասխանություն կամ, ինչպես ասում են, D տիրույթը փոխադարձ միարժեք արտապատկերում են D' տիրույթի վրա։

D' տիրույթում դիտարկենք $u = \text{const}$ գիծը։ (1) բանաձևերով կգրտնենք, որ Oxy հարթության մեջ, ընդհանրապես, նրան կհամապատասխանի մի որոշ կոր։ Ճիշտ այդպես էլ Ouv հարթության յուրաքանչյուր $v = \text{const}$ ուղիղին կհամապատասխանի Oxy հարթության մի որոշ գիծ։



նկ. 318



նկ. 319

$u = \text{const}$ և $v = \text{const}$ ուղիղներով D' տիրույթը տրոհենք ուղղանկյուն հարթակների (ընդ որում D' տիրույթի եզրին կաշող հարթակները հաշվի չենք առնի)։ D տիրույթը համապատասխան գծերով կտրոհվի մի քանի կորագիծ քառանկյունների (նկ. 319)։

Ouv հարթության մեջ դիտարկենք $u = \text{const}$, $u + \Delta u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $v + \Delta v = \text{const}$ ուղիղներով սահմանափակված $\Delta S'$ ուղղանկյուն հարթակը, և Oxy հարթության մեջ նրան համապատասխանող ΔS կորագիծ հարթակը։ Այդ հարթակների մակերեսները նույնպես նշանակենք համապատասխանաբար $\Delta S'$ -ով և ΔS -ով։ Այդ դեպքում, ափսոսաբար է,

$$\Delta S' = \Delta u \Delta v :$$

Ընդհանրապես, ΔS և $\Delta S'$ մակերեսները տարբեր են։

Դիցուք D տիրույթում տրված է $z=f(x, y)$ անընդհատ ֆունկցիան:
 D տիրույթում ֆունկցիայի յուրաքանչյուր $z=f(x, y)$ արժեքին համապատասխանում է D' տիրույթում ֆունկցիայի $z=F(u, v)$ նույն արժեքը, որտեղ

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]:$$

Դիտարկենք ըստ D տիրույթի z ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարները: Ակնհայտ է, որ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$\sum f(x, y) \Delta s = \sum F(u, v) \Delta s: \quad (2)$$

Հաշվենք Δs -ը, այսինքն՝ Oxy հարթության $P_1P_2P_3P_4$ կորագիծ քառանկյան մակերեսը (տես նկ. 319):

Որոշենք նրա գագաթների կոորդինատները.

$$\left. \begin{aligned} P_1(x_1, y_1), x_1 &= \varphi(u, v), & y_1 &= \psi(u, v), \\ P_2(x_2, y_2), x_2 &= \varphi(u + \Delta u, v), & y_2 &= \psi(u + \Delta u, v), \\ P_3(x_3, y_3), x_3 &= \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), & y_3 &= \psi(u + \Delta u, v + \Delta v), \\ P_4(x_4, y_4), x_4 &= \varphi(u, v + \Delta v), & y_4 &= \psi(u, v + \Delta v). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$P_1P_2P_3P_4$ կորագիծ քառանկյան մակերեսը հաշվելիս P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_4 , P_4P_1 գծերը կհամարենք զույգ առ զույգ զուգահեռ ուղիղներ, բացի այդ, ֆունկցիայի աճերը փոխարինելու ենք համապատասխան դիֆերենցիալներով: Այսպիսով, հաշվի չենք առնելու Δu և Δv անվերջ փոքրների նկատմամբ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքրերը: Այդ դեպքում (3) բանաձևերը կունենան հետևյալ տեսքը.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \varphi(u, v), & y_1 &= \psi(u, v), \\ x_2 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u, & y_2 &= \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u, \\ x_3 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, & y_3 &= \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v, \\ x_4 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, & y_4 &= \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v: \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

Արված են թաղանթյունների դեպքում $P_1P_2P_3P_4$ կորագիծ քառանկյունը կարելի է դիտարկել որպես զուգահեռագիծ: Նրա Δs մակերեսը մոտավորապես հավասար է $P_1P_2P_3$ եռանկյան մակերեսի կրկնապատիկին և հաշվվում է անալիտիկ երկրաչափական բանաձևով.

$$\begin{aligned} \Delta s &\approx |(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)| = \\ &= \left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v \right) \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \right) \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta u \Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u \Delta v \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| \Delta u \Delta v = \\ &= \left\| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \right\| \Delta u \Delta v; \end{aligned}$$

այստեղ դետերմինանտի երկրորդ (արտաքին) ուղիղ փակագծերը նշանակում են, որ դետերմինանտը վերցվում է բացարձակ մեծությամբ: Մուծենք հետևյալ նշանակումը.

$$\left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \right| = 1:$$

Այսպիսով,

$$\Delta s \approx |\Delta s'| \quad (4)$$

Ի դետերմինանտն անվանում ենք $\varphi(u, v)$ և $\psi(u, v)$ ֆունկցիաների ֆունկցիոնալ դետերմինանտ: Գերմանացի մաթեմատիկոս Յակոբիի անունով այն անվանում են նաև յակոբիան:

(4) հավասարությունը մոտավոր է, քանի որ Δs մակերեսը հաշվելիս բարձր կարգի անվերջ փոքրերն անտեսել ենք: Բայց որքան փոքր լինեն Δs և $\Delta s'$ հարթակների շափսերը, այնքան այդ հավասարությունը կլինի ճշգրիտ: Այն լիովին ճշգրիտ կդառնա սահմանում, երբ Δs և $\Delta s'$ հարթակների տրամագծերը ձգտում են զրոյի.

$$|\Delta s| = \lim_{\text{diam } \Delta s' \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'}:$$

Այժմ ստացված հավասարությունը կիրառենք կրկնակի ինտեգրալի հաշվման նկատմամբ: (2) հավասարության հիման վրա կարող ենք գրել.

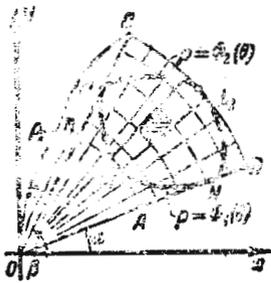
$$\sum f(x, y) \Delta s \approx \sum F(u, v) |\Delta s'|$$

(աջ կողմի ինտեգրալային գումարը տարածված է D' տիրույթով): Անցնելով սահմանի, երբ $\text{diam } \Delta s' \rightarrow 0$, կստանանք ճշգրիտ հավասարություն.

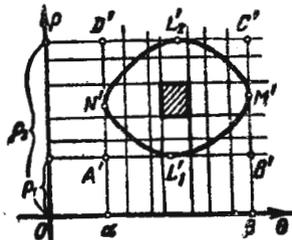
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} F(u, v) |\Delta s'| du dv: \quad (5)$$

Սա էլ հենց կրկնակի ինտեգրալում կոորդինատները փոխարինելու և նախորդող ինտեգրալի և նախորդող ինտեգրալի միջև կապը:

D տիրույթի կրկնակի ինտեգրալի հաշվումը բերել այդ ինտեգրալի հաշվմանը՝ ըստ D տիրույթի, որը կարող է հեշտացնել խնդիրը: Առա-



Նկ. 320



Նկ. 321

ջին անգամ այս բանաձևի խստագույն ապացուցումը տվել է ականա-վոր ռուս մաթեմատիկոս Մ. Վ. Օստրոգորադսկին:

Դիտողություն: Անցումն ուղղանկյուն կոորդինատներից բե-վեռայինի, որը քննարկվեց նախորդ պարագրաֆում, կրկնակի ինտեգրա-լում փոփոխականների փոխարինման մասնավոր դեպքն է: Այս դեպքում $u = \theta$, $v = \rho$

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta:$$

Oxy հարթության AB ($\rho = \rho_1$) կորը (Նկ. 320) ձևափոխվում է Otheta rho հարթության մեջ A'B' ուղիղի (Նկ. 321): Oxy հարթության DC ($\rho = \rho_2$) կորը ձևափոխվում է Otheta rho հարթության մեջ D'C' ուղիղի:

Oxy հարթության AD և BC ուղիղները ձևափոխվում են Otheta rho հար-թության մեջ A'D' և B'C' ուղիղների: L1 և L2 կորերը ձևափոխվում են L'1 և L'2 կորերի:

Հաշվենք x, y դեկարտյան կոորդինատները theta և rho բևեռային կոորդի-նատների ձևափոխության յակոբիանը:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho \sin^2 \theta - \rho \cos^2 \theta = -\rho:$$

Հետևաբար, $|I| = \rho$, և ուստի

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho) \rho d\rho \right) d\theta:$$

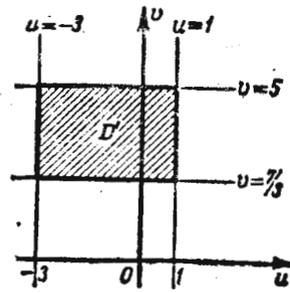
Հենց այս բանաձևն էլ ստացվել էր նախորդ պարագրաֆում: Թրինակ: Դիցուք պահանջվում է հաշվել

$$\iint_D (y-x) dx dy$$

կրկնակի ինտեգրալն ըստ Oxy հարթության մեջ գտնվող այն D տիրույթի, որը սահմա-նափակված է հետևյալ ուղիղներով.

$$y = x + 1, \quad y = x - 3, \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}x + 5:$$

Այս կրկնակի ինտեգրալի անմիջական հաշվումը կլինի դժվար. սակայն փոփոխա-կանների պարզ փոխարինումը թույլ է տալիս ինտեգրալի հաշվումը բերել մի այլ ին-տեգրալի՝ ըստ այնպիսի ուղղանկյան, որի կողմերը զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին:



Նկ. 322

Ընդունենք

$$u = y - x, \quad v = y + \frac{1}{3}x: \quad (6)$$

Այդ դեպքում $y = x + 1$, $y = x - 3$ ուղիղներն Oxy հարթության $u = 1$, $u = -3$ ուղիղներին են անցնում,

իսկ $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + 5$ ուղիղներն էլ,

ձևափոխվում են $v = \frac{7}{3}$, $v = 5$ ուղիղների:

Հետևաբար, տրված D տիրույթը ձևափոխվում է D' ուղղանկյուն տիրույթի, որը պատ-կերված է Նկ. 322-ի վրա: Մնում է հաշվել ձևափոխության յակոբիանը: Դրա համար x-ը և y-ը արտահայտենք u-ով և v-ով: Լուծելով (6) հավասարումների համակարգը, կստա-նանք.

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v, \quad y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v:$$

Հետևաբար,

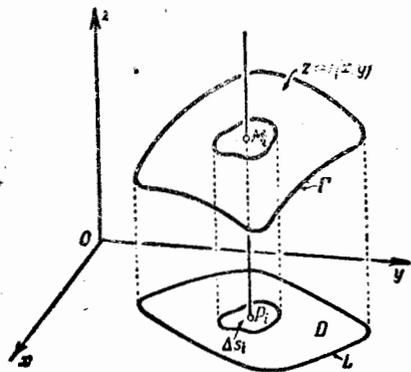
$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4},$$

և յակոբիանի բացարձակ մեծությունը հավասար է $|I| = \frac{3}{4}$: Ուստի

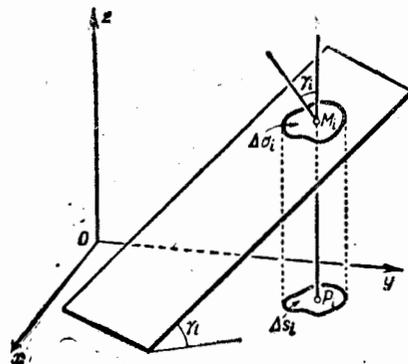
$$\begin{aligned} \iint_D (y-x) dx dy &= \iint_{D'} \left[\left(+\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v \right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v \right) \right] \frac{3}{4} du dv = \\ &= \iint_{D'} \frac{3}{4} u du dv = \int_{\frac{7}{3}}^5 \int_{-3}^1 \frac{3}{4} u du dv = -8: \end{aligned}$$

§ 7. Մակերևույթի մակերեսի հաշվումը

Դիցուք պահանջվում է հաշվել Γ գծով սահմանափակված մակերե-
վույթի (նկ. 323) մակերեսը. մակերևույթը տրված է $z=f(x, y)$ հավա-
սարումով, որտեղ $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է և ունի անընդհատ
մասնական ածանցյալներ: Γ գծի պրոյեկցիան Oxy հարթության մեջ
նշանակենք L -ով:



Նկ. 323



Նկ. 324

$$\sigma = \lim_{\text{diam } \Delta \sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i \quad (2)$$

Այժմ զբաղվենք մակերևույթի մակերեսի հաշվումով: γ_i -ով նշանա-
կենք շոշափող հարթության և Oxy հարթության միջև եղած անկյունը:
Անալիտիկ երկրաչափության հայտնի բանաձևի հիման վրա կարելի է
գրել (նկ. 324).

$$\Delta S_i = \Delta \sigma_i \cos \gamma_i$$

կամ

$$\Delta \sigma_i = \frac{\Delta S_i}{\cos \gamma_i} \quad (3)$$

γ_i անկյունը միաժամանակ Oz առանցքի և (1) հարթության ուղղա-
հայացի միջև եղած անկյունն է: Ուստի (1) հավասարման և անալիտիկ
երկրաչափության բանաձևի հիման վրա ունենք.

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f'_x{}^2(\xi_i, \eta_i) + f'_y{}^2(\xi_i, \eta_i)}}$$

Հետևաբար,

$$\Delta \sigma_i = \sqrt{1 + f'_x{}^2(\xi_i, \eta_i) + f'_y{}^2(\xi_i, \eta_i)} \Delta S_i$$

Այս արտահայտությունը տեղադրելով (2) բանաձևի մեջ, կստանանք.

$$\sigma = \lim_{\text{diam } \Delta \sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'_x{}^2(\xi_i, \eta_i) + f'_y{}^2(\xi_i, \eta_i)} \Delta S_i$$

Քանի որ, ըստ սահմանման, հավասարության աջ մասի ինտեգրալին
գումարի սահմանը $\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$ կրկնակի ինտեգրալն
է, ապա վերջնականապես ստանում ենք.

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (4)$$

Սա էլ հենց այն բանաձևն է, որով հաշվվում է $z=f(x, y)$ մակերևույթի
մակերեսը:

Եթե մակերևույթի հավասարումը տրված է

$$x = \mu(y, z) \quad \text{կամ} \quad y = \chi(x, z) \quad \text{տեսքով,}$$

ապա մակերևույթի մակերեսի հաշվման համար բանաձևերն ունեն

Oxy հարթության մեջ L գծով սահմանափակված տիրույթը նշանա-
կենք D -ով: D տիրույթը կամայական ձևով տրոհենք n հատ
 $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ տարրական հարթակների: Յուրաքանչյուր ΔS_i հար-
թակում վերցնենք $P_i(\xi_i, \eta_i)$ կետ: P_i կետին մակերևույթի վրա կհա-
մապատասխանի

$$M_i[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)] \quad \text{կետը:}$$

M_i կետով տանենք մակերևույթի շոշափող հարթությունը: Նրա հավա-
սարումն ունի

$$z - z_i = f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) \quad (1)$$

տեսքը (տես I հատ., IX գլխի, § 6): Այդ հարթության վրա առանձնաց-
նենք այնպիսի $\Delta \sigma_i$ հարթակ, որը Oxy հարթության մեջ պրոյեկտվում է
 ΔS_i հարթակի տեսքով: Դիտարկենք բոլոր $\Delta \sigma_i$ հարթակների գումարը.

$$\sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i:$$

Այս գումարի σ սահմանը, երբ $\Delta \sigma_i$ հարթակների տրամագծերից
ամենամեծը ձգտում է զրոյի, կանվանենք մակերևույթի մակերես, այսին-
քըն՝ ըստ սահմանման կրնդունենք.

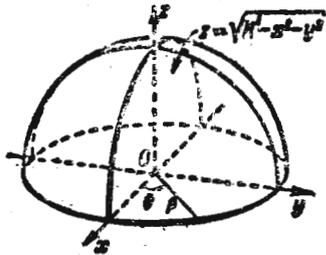
$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz, \quad (3')$$

$$\sigma = \iint_{D'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz \quad (3'')$$

տեսքը, որտեղ D' -ը, D'' -ը Oyz և Oxz հարթությունների մեջ այն տիրույթներն են, որոնցում պրոյեկտում է տվյալ մակերևույթը:

Օրինակ 1. Հաշվել $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ գնդի σ մակերևույթը:

Լուծում. Հաշվենք գնդի $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ վերին կեսի մակերևույթը (Նկ. 325): Այդ դեպքում:



Նկ. 325

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

Հետևաբար,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

Ինտեգրման տիրույթը որոշվում է

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

պայմանով: Այսպիսով, (4) բանաձևի հիման վրա կունենանք.

$$\frac{1}{2} \sigma = \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dy \right) dx:$$

Ստացված կրկնակի ինտեգրալը հաշվելու համար անցենք բևեռային կոորդինատներին: Բևեռային կոորդինատներով ինտեգրման տիրույթի եզրագիծը որոշվում է

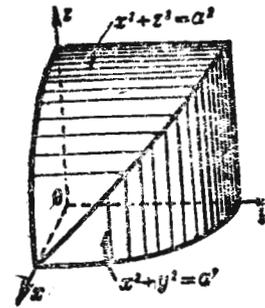
$$\rho = R$$

հավասարումով: Հետևաբար,

$$\sigma = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho \right) d\theta = 2R \int_0^{2\pi} [-\sqrt{R^2 - \rho^2}]_0^R d\theta = 2R \int_0^{2\pi} R d\theta = 4\pi R^2:$$

Օրինակ 2: Գտնել $x^2 + y^2 = a^2$ գլանի մակերևույթի այն մասի մակերեսը, որը նրանից կտրում է $x^2 + z^2 = a^2$ գլանը:

Լուծում. Նկ 326-ում պատկերված է որոնելի մակերևույթի $\frac{1}{8}$ մասը: Մակերևույթի հավասարումն ունի $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ տեսքը, ուստի



Նկ. 326

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0;$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

Ինտեգրման տիրույթը շրջանի մեկ քառորդն է, այսինքն՝ որոշվում է հետևյալ պայմաններով.

$$x^2 + z^2 \leq a^2, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0:$$

Հետևաբար,

$$\frac{1}{8} \sigma = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dz \right) dx = a \int_0^a \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \int_0^a dx = a^2, \quad \sigma = 8a^2:$$

§ 8. Նյութի բաշխման խտությունը և կրկնակի ինտեգրալը

Դիցուք որևէ նյութ D տիրույթում բաշխված է այնպես, որ տիրույթի մակերեսի յուրաքանչյուր միավորին ընկնում է այդ նյութի որոշակի քանակություն: Հետագայում խտակուր ենք զանգվածի բաշխման մասին, շնայած մեր դատողությունները պահպանվում են նաև այն դեպքում, երբ խտուք գնում է էլեկտրական լիցքի, ջերմության քանակի և այլնի բաշխման մասին:

Դիտարկենք D տիրույթի կամայական ΔS հարթակը: Դիցուք տվյալ հարթակին ընկնող նյութի զանգվածը Δm է: Այս դեպքում $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ հարա-

բերությունը կոչվում է ΔS տիրույթում նյութի միջին մակերևույթային խտություն:

Դիցուք այժմ ΔS հարթակը փոքրանում է, կծկվելով $P(x, y)$ կետի:

Դիտարկենք $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}$ սահմանը: Եթե այս սահմանը գոյություն ունի, ապա, ընդհանրապես, այն կախված կլինի P կետի դիրքից, այսինքն՝ նրա x, y կոորդինատներից, և իրենից կհերկայացնի P կետի $f(P)$ ֆունկցիա: Այդ սահմանը կանվանենք նյութի մակերևույթային խտություն P կետում.

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = f(P) = f(x, y), \quad (1)$$

Այսպիսով, մակերևութային խտությունը տիրույթի կետի կոորդինատներին $f(x, y)$ ֆունկցիա է:

Դիցուք այժմ, ընդհանրապես, D տիրույթում տրված է մի ինչ-որ նյութի մակերևութային խտությունը որպես մի որոշ $f(P) = f(x, y)$ անընդհատ ֆունկցիա և պահանջվում է հաշվել D տիրույթում պարունակվող նյութի M ընդհանուր քանակը: D տիրույթը տրոհենք ΔS_i ($i=1, 2, \dots, n$) հարթակների և յուրաքանչյուր հարթակում վերցնենք P_i կետ. այդ դեպքում $f(P_i)$ -ն կլինի P_i կետում մակերևութային խտությունը: $f(P_i)\Delta S_i$ -ն բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ճշտությամբ մեզ տալիս է ΔS_i հարթակում պարունակվող նյութի քանակը, իսկ

$$\sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i$$

գումարը մոտավորապես արտահայտում է D տիրույթում բաշխված նյութի ընդհանուր քանակությունը: Բայց դա D տիրույթում $f(P)$ ֆունկցիայի համար ինտեգրալային գումար է: Ճշգրիտ արժեքը կստանանք այն սահմանում, երբ $\Delta S_i \rightarrow 0$:

Այսպիսով*,

$$M = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i = \iint_D f(P) ds = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (2)$$

այսինքն՝ D տիրույթում նյութի ընդհանուր քանակը հավասար է ըստ D տիրույթի այդ նյութի $f(P) = f(x, y)$ խտության կրկնակի ինտեգրալին:

Օրինակ: Գտնել R շառավղով կլոր թիթեղի զանգվածը, եթե թիթեղի նյութի $f(x, y)$ մակերևութային խտությունը յուրաքանչյուր $P(x, y)$ կետում համեմատական է (x, y) կետի հեռավորությանը շրջանի կենտրոնից, այսինքն՝ եթե $f(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$:
 Լուծում: Ըստ (2) բանաձևի ունենք

$$M = \iint_D k\sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

որտեղ D ինտեգրման տիրույթը $x^2 + y^2 \leq R^2$ շրջանն է: Անցնելով բևեռային կոորդինատների, ստանում ենք

$$M = k \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho d\rho \right) d\theta = k 2\pi \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R = \frac{2}{3} k \pi R^3.$$

* $\Delta S_i \rightarrow 0$ առնչությունը հասկանում ենք այն իմաստով, որ ΔS_i տիրույթի տրամագիծը ձգտում է զրոյի:

§ 9. Հարթ պատկերի մակերեսի իներցիայի մոմենտը

Մ զանգվածն ունեցող M նյութական կետի I իներցիայի մոմենտ O կետի նկատմամբ կոչվում է m զանգվածի և O կետից M կետի ունեցած r հեռավորության քառակուսու արտադրյալը.

$$I = mr^2.$$

m_1, m_2, \dots, m_n նյութական կետերի ճամակարգի իներցիայի մոմենտը O կետի նկատմամբ համակարգի առանձին կետերի իներցիայի մոմենտների գումարն է.*

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Այժմ սահմանենք D նյութական հարթ պատկերի իներցիայի մոմենտը:

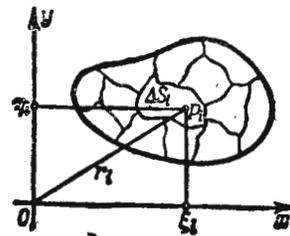
Դիցուք D պատկերը տեղավորված է Oxy հարթության վրա: Սահմանենք այդ պատկերի իներցիայի մոմենտը կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, ենթադրելով, որ մակերևութային խտությունը ամենուրեք հավասար է մեկի:

D տիրույթը տրոհենք ΔS_i ($i=1, 2, \dots, n$) տարրական հարթակների (եկ. 327): Յուրաքանչյուր հարթակում վերցնենք ξ_i, η_i կոորդինատներ ունեցող P_i կետը: ΔS_i հարթակի ΔI իներցիայի տարրական մոմենտ անվանենք ΔS_i հարթակի զանգվածի և $r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2$ հեռավորության քառակուսու արտադրյալը՝

$$\Delta I_i = (\xi_i^2 + \eta_i^2) \Delta S_i$$

և կազմենք այդպիսի մոմենտների գումարը՝

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) \Delta S_i.$$



Եկ. 327

Սա իրենից ներկայացնում է ըստ D տիրույթի $f(x, y) = x^2 + y^2$ ֆունկցիայի համար ինտեգրալային գումար:

D պատկերի իներցիայի մոմենտը սահմանենք որպես այդ ինտեգրալային գումարի սահման, երբ յուրաքանչյուր ΔS_i տարրական հարթակի տրամագիծը ձգտում է զրոյի.

$$I_0 = \lim_{\text{diam } \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) \Delta S_i.$$

Բայց այդ գումարի սահմանը $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ կրկնակի ինտեգրալն է:

Հետևաբար, D պատկերի ինտեգրացի մոմենտը կորոդինատների սկզբնակետի նկատմամբ հավասար է

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad (1)$$

որտեղ D -ն տվյալ հարթ պատկերի հետ համընկնող տիրույթն է:

$$I_{xx} = \iint_D y^2 dx dy, \quad (2)$$

$$I_{yy} = \iint_D x^2 dx dy \quad (3)$$

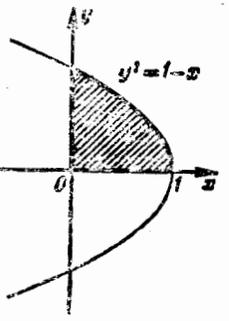
ինտեգրալները կռվում են, համապատասխանաբար, D պատկերի ինտեգրացի մոմենտներ Ox և Oy առանցքների նկատմամբ:

Օրինակ 1: Հաշվել R շառավղով D շրջանի ինտեգրացի մոմենտը O կենտրոնի նկատմամբ:

Լ ո թ ո մ: Ըստ (1) բանաձևի ունենք.

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy:$$

Այս ինտեգրալը հաշվելու համար անցնենք θ, ρ բևեռային կորդինատներին: Բևեռային կորդինատներով շրջանագծի հավասարումն է՝ $\rho = R$:



Ն կ. 328

Ուստի

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho^2 \rho d\rho \right) d\theta = \frac{\pi R^4}{2},$$

Դիտողություն: Եթե γ մակերևութային խտությունը հավասար չէ մեկի, այլ հանդիսանում է x -ի և y -ի մի որոշ ֆունկցիա, այսինքն՝ $\gamma = \gamma(x, y)$, ապա ΔS_1 հարթակի զանգվածը բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ճշտությամբ հավասար է $\gamma(\xi_1, \eta_1) \Delta S_1$, և ուստի հարթ պատկերի ինտեգրացի մոմենտը կորոդինատների սկզբնակետի նկատմամբ կլինի

$$I_0 = \iint_D \gamma(x, y) (x^2 + y^2) dx dy: \quad (1')$$

Օրինակ 2: Հաշվել $y^2 = 1 - x, x = 0, y = 0$ գծերով սահմանափակված D հարթ նյութական պատկերի ինտեգրացի մոմենտը Oy առանցքի նկատմամբ, եթե յուրաքանչյուր կետում մակերևութային խտությունը հավասար է y -ի (Նկ. 328):

Լ ո թ ո մ:

$$I_{yy} = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} y x^2 dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x) dx = \frac{1}{24}.$$

Ինտեգրացի էլիպսը: Սահմանենք D հարթ պատկերի մակերեսի ինտեգրացի մոմենտը որևէ OL առանցքի նկատմամբ, որն անցնում է O կետով (O -ն ընդունում ենք որպես կորդինատների սկզբնակետ): OL ուղիղով և Ox առանցքի դրական ուղղությամբ կազմված անկյունը նշանակենք φ -ով (Նկ. 329):

OL ուղիղի նորմալ հավասարումն է

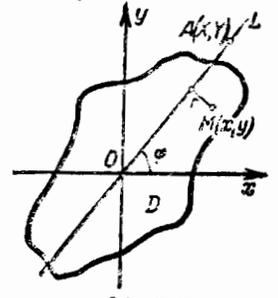
$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0:$$

Որևէ $M(x, y)$ կետի r հեռավորությունն այդ ուղիղից հավասար է

$$r = |x \sin \varphi - y \cos \varphi|:$$

D տիրույթի մակերեսի I ինտեգրացի մոմենտն OL ուղիղի նկատմամբ, ըստ սահմանման, արտահայտվում է այսպես.

$$\begin{aligned} I &= \iint_D r^2 dx dy = \\ &= \iint_D (x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2 dx dy = \\ &= \sin^2 \varphi \iint_D x^2 dx dy - \\ &- 2 \sin \varphi \cos \varphi \iint_D xy dx dy + \\ &+ \cos^2 \varphi \iint_D y^2 dx dy: \end{aligned}$$



Ն կ. 329

Հետևաբար,

$$I = I_{yy} \sin^2 \varphi - 2I_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + I_{xx} \cos^2 \varphi, \quad (4)$$

այստեղ $I_{yy} = \iint_D y^2 dx dy$ պատկերի ինտեգրացի մոմենտն է y

առանցքի նկատմամբ, $I_{xx} = \iint_D x^2 dx dy$ ինտեգրացի մոմենտն է x

առանցքի նկատմամբ, իսկ $I_{xy} = \iint_D xy dx dy$: Վերջին հավասարությունը բոլոր անդամները բաժանելով I -ի վրա, կստանանք

$$I = I_{xx} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{I}} \right)^2 - 2 I_{xy} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{I}} \right) \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{I}} \right) + I_{yy} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{I}} \right)^2, \quad (5)$$

OL ուղիղի վրա վերցնենք $A(X, Y)$ կետն այնպես, որ $OA = \frac{1}{\sqrt{I}}$

OL առանցքի տարբեր ուղղություններին, այսինքն՝ φ անկյան տարբեր արժեքներին համապատասխանում են I -ի տարբեր արժեքներ և տարբեր A կետեր: Գտնենք A կետերի երկրաչափական տեղը: Ակնհայտ է, որ

$$X = \frac{1}{\sqrt{I}} \cos \varphi, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{I}} \sin \varphi:$$

(5) հավասարության հիման վրա X և Y մեծությունները միմյանց հետ կապված են

$$I = I_{xx} X^2 - 2 I_{xy} XY + I_{yy} Y^2 \quad (6)$$

անընդմեջ: Այսպիսով, $A(X, Y)$ կետերի երկրաչափական տեղը (6) երկրորդ կարգի կորն է: Ապացուցենք, որ այդ կորը էլիպս է:

Իրավացի է հետևյալ անհավասարությունը, որն ապացուցել է ռուս մաթեմատիկոս Վ. Յա. Բունյակովսկին*.

* Բունյակովսկու անհավասարությունն ապացուցելու համար դիտարկենք հետևյալ ակնհայտ անհավասարությունը.

$$\iint_D [f(x, y) - \lambda \varphi(x, y)]^2 dx dy \geq 0,$$

որտեղ λ -ն հաստատուն է: Հավասարության նշանը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $f(x, y) - \lambda \varphi(x, y) \equiv 0$, այսինքն՝ եթե $f(x, y) = \lambda \varphi(x, y)$: Եթե ենթադրենք, որ $f(x, y) \varphi(x, y) \neq \text{const} = \lambda$, ապա միշտ տեղի կունենա անհավասարության նշանը: Այսպիսով, բացելով ինտեգրալի նշանի տակ եղած փակագծերը, կստանանք

$$\iint_D f^2(x, y) dx dy - 2\lambda \iint_D f(x, y) \varphi(x, y) dx dy + \lambda^2 \iint_D \varphi^2(x, y) dx dy > 0:$$

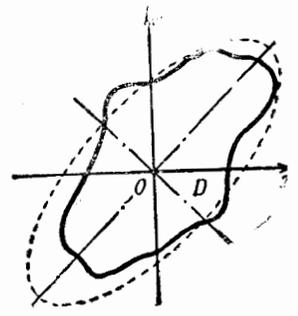
Ձախակողմյան արտահայտությունը դիտարկենք որպես λ -ի ֆունկցիա: Դա երկրորդ աստիճանի բազմանդամ է, որը ոչ մի դեպքում զրո չի դառնում. հետևաբար, նրա արմատ-

$$\left(\iint_D xy dx dy \right)^2 <$$

$$< \left(\iint_D x^2 dx dy \right) \left(\iint_D y^2 dx dy \right) \text{ կամ}$$

$$I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2 > 0:$$

Այսպիսով, (6) կորի դիսկրիմինանտը դրական է և, հետևաբար, այդ կորն էլիպս է (նկ. 330): Այդ էլիպսը կոչվում է ի ն ե ր ց ի ա յ ի է լ ի պ ս: Ի ն ե ր ց ի ա յ ի է լ ի պ սի գաղափարը էական նշանակություն ունի մեխանիկայում:



նկ. 330

Նկատենք, որ իներցիայի էլիպսի առանցքների երկարությունները և հարթության վրա նրա դիրքը կախված են տվյալ հարթ պատկերի ձևից: Քանի որ կոորդինատների սկզբնականից մինչև էլիպսի որևէ A կետի հեռավորությունը հավասար է $1/\sqrt{I}$, որտեղ I -ն պատկերի իներցիայի մոմենտն է OA առանցքի նկատմամբ, ապա, կառուցելով էլիպսը, կարելի է հեշտությամբ հաշվել D պատկերի իներցիայի մոմենտը կոորդինատների սկզբնակետով անցնող որևէ ուղիղի նկատմամբ: Մասնավորապես, հեշտ է նկատել, որ պատկերի իներցիայի մոմենտը կլիֆ-նի ամենափոքրը՝ իներցիայի էլիպսի մեծ առանցքի նկատմամբ և ամենամեծը՝ այդ էլիպսի փոքր առանցքի նկատմամբ:

Ներքև կոմպլեքս են, իսկ դա կլինի այն դեպքում, երբ քառակուսին բազմանդամի գործակիցներից կազմված դիսկրիմինանտը բացասական է, այսինքն՝

$$\left(\iint_D f \varphi dx dy \right)^2 - \iint_D f^2 dx dy \iint_D \varphi^2 dx dy < 0$$

կամ

$$\left(\iint_D f \varphi dx dy \right)^2 < \iint_D f^2 dx dy \iint_D \varphi^2 dx dy:$$

Սա էլ հենց Բունյակովսկու անհավասարությունն է:

Մեր դեպքում

$$f(x, y) = x, \quad \varphi(x, y) = y, \quad x/y \neq \text{const}:$$

Բունյակովսկու ուշադրով անհավասարությունը մշտապես կիրառվում է մաթեմատիկայի տարբեր բնագավառներում: Այդ անհավասարությունը շատ դասազրբերում ոչ ճիշտ անվանում են Շվարցի անհավասարություն: Բունյակովսկին այն (ուրիշ կարևոր անհավասարությունների հետ) հրատարակել է 1859 թ., իսկ Շվարցը՝ միայն 1875 թ., այսինքն 16 տարի ուշ:

§ 10. Հարթ պատկերի մակերեսի ծանրության կենտրոնի կորոզիվածները

XII գլխի § 8-ում (I հատ.) նշվեց, որ m_1, m_2, \dots, m_n զանգվածներ ունեցող P_1, P_2, \dots, P_n նյութական կետերի համակարգի ծանրության կենտրոնի կորոզիվածները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}, \quad y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}, \quad (1)$$

Այժմ որոշենք D հարթ պատկերի ծանրության կենտրոնի կորոզիվածները: Այդ պատկերը տրոհենք շատ մանր ΔS_1 տարրական հարթակների: Եթե ընդունենք, որ մակերևութային խտությունը հավասար է մեկի, ապա հարթակի զանգվածը հավասար կլինի նրա մակերեսին, եթե մոտավորապես ընդունենք, որ ΔS_1 տարրական հարթակի զանգվածը կենտրոնացված է նրա $P_i(\xi_i, \eta_i)$ կետում, ապա D պատկերը կարելի է դիտել որպես n յուրեքական կետերի համակարգ: Այդ դեպքում ըստ (1) բանաձևերի այդ պատկերի ծանրության կենտրոնի կորոզիվածները մոտավորապես որոշվում են հետևյալ հավասարություններով.

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \Delta S_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \Delta S_i}$$

Այն սահմանում, երբ $\Delta S_i \rightarrow 0$ կոտորակների համարիչներում և հայտարարներում եղած ինտեգրալային գումարները դառնում են կրկնակի ինտեգրալներ և հարթ պատկերի ծանրության կենտրոնի կորոզիվածները հաշվելու համար ատանում ենք հետևյալ ճշգրիտ բանաձևերը.

$$x_c = \frac{\iint_D x \, dx \, dy}{\iint_D dx \, dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \, dx \, dy}{\iint_D dx \, dy}, \quad (2)$$

Այս բանաձևերը, որոնք արտածվեցին այն հարթ պատկերի համար, որի մակերևութային խտությունը հավասար է 1-ի, ակնհայտ է, մնում են ուժի մեջ նաև ցանկացած, բոլոր կետերում γ հաստատուն խտություն ունեցող այլ պատկերի համար:

Իսկ եթե մակերևութային խտությունը փոփոխական է

$$\gamma = \gamma(x, y).$$

ապա համապատասխան բանաձևերը կունենան հետևյալ տեսքը.

$$x_c = \frac{\iint_D \gamma(x, y) x \, dx \, dy}{\iint_D \gamma(x, y) \, dx \, dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D \gamma(x, y) y \, dx \, dy}{\iint_D \gamma(x, y) \, dx \, dy}$$

$$M_y = \iint_D \gamma(x, y) x \, dx \, dy$$

$$M_x = \iint_D \gamma(x, y) y \, dx \, dy$$

արտահայտությունները կոչվում են D հարթ պատկերի սատիկ մոմենտներ Oy և Ox առանցքների նկատմամբ:

$\iint_D \gamma(x, y) \, dx \, dy$ ինտեգրալն արտահայտում է դիտարկվող պատկերի զանգվածը:

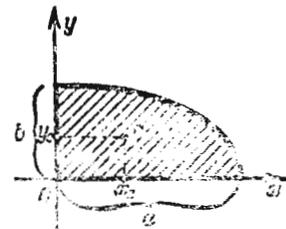
Օրինակ, որոշել $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ էլիպսի բառող մասի ծանրության կենտրոնի կորոզիվածները, եթադրելով, որ բոլոր կետերում մակերևութային խտությունը հավասար է 1-ի:

Լուծում: Ըստ (2) բանաձևերի ստանում ենք.

$$x_c = \frac{\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}} x \, dy \right) dx}{\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}} dy \right) dx} = \frac{\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} x \, dx}{\frac{1}{4} \pi a b}$$

$$= \frac{-\frac{b}{a} \frac{1}{3} (a^2-x^2)^{3/2} \Big|_0^a}{\frac{1}{4} \pi a b} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$y_c = \frac{\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}} y \, dy \right) dx}{\frac{1}{4} \pi a b} = \frac{4b}{3\pi}$$



Նկ. 331

§ 11. Եռակի ինտեգրալ

Դիցուք տարածություն մեջ տրված է որևէ V տիրույթ, որը սահմանափակված է S փակ մակերևույթով, Դիցուք V տիրույթում և նրա եզրագծի վրա որոշված է որևէ $f(x, y, z)$ անընդհատ ֆունկցիա, որտեղ x -ը, y -ը, z -ը տիրույթի կետի ուղղանկյուն կոորդինատներն են: Պարզության համար այն դեպքում, եթե $f(x, y, z) \geq 0$ այդ ֆունկցիան կարող ենք համարել V տիրույթում մի որոշ նյութի բաշխման խտություն:

V տիրույթը կամայական արոհենք ΔV_1 տիրույթների, ΔV_1 սիմվոլով նշանակելով ոչ միայն այդ տիրույթը, այլև նրա ծավալը: Յուրաքանչյուր ΔV_1 տիրույթում ընտրենք կամայական P_1 կետ և $f(P_1)$ -ով նշանակենք f ֆունկցիայի արժեքն այդ կետում: Կազմենք

$$\sum f(P_1)\Delta V_1 \quad (1)$$

տեսքի ինտեգրալային գումարը և ΔV_1 մանր տիրույթների թիվն անսահմանափակորեն ավելացնենք այնպես, որ ΔV_1 -ի ամենամեծ տրամագիծը ձգտի զրոյի*: Եթե $f(x, y, z)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա այդ դեպքում գոյություն կունենա (1) տեսքի ինտեգրալային գումարի սահմանը, որտեղ ինտեգրալային գումարների սահմանը հասկացվում է նույն իմաստով, ինչպես այդ նշվել է վրկնատի ինտեգրալը սահմանելիս**: Այդ սահմանը, որը կախված չէ ոչ V տիրույթը արոհելու եղանակից, ոչ էլ

P_1 կետերի ընտրությունից, նշանակվում է $\iiint_V f(P)dv$ սիմվոլով և կոչվում է եռակի ինտեգրալ: Այսպիսով, ըստ սահմանման,

$$\lim_{\text{diam } \Delta V_i \rightarrow 0} \sum f(P_i)\Delta V_i = \iiint_V f(P)dv$$

կամ

$$\iiint_V f(P)dv = \int_V \int \int f(x, y, z)dx dy dz \quad (2)$$

Եթե $f(x, y, z)$ -ը համարենք V տիրույթում նյութի բաշխման ծավալային խտություն, ապա (2) ինտեգրալը կտա V ծավալում պարփակված ամբողջ նյութի զանգվածը:

* ΔV_1 տիրույթի տրամագիծ կոչվում է այդ տիրույթի եզրագծի կետերի առավելագույն հեռավորությունը:

** V փակ (ներառյալ սահմանը) տիրույթում անընդհատ ցանկացած ֆունկցիայի համար ինտեգրալային գումարների սահմանի գոյության մասին (այսինքն՝ եռակի ինտեգրալի գոյության մասին) այս թեորեմը ընդունում ենք ապացուցման:

§ 12. Եռակի ինտեգրալի հաշվումը

Ենթադրենք, որ V տարածական (եռաչափ) տիրույթը, որը սահմանափակված է S փակ մակերևույթով, օժտված է հետևյալ հատկություններով.

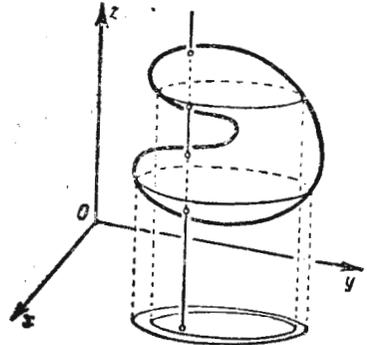
1) V տիրույթի ցանկացած ներքին (այսինքն S եզրին չպատկանող) կետով Oz առանցքին զուգահեռ ամեն մի ուղիղ S մակերևույթը հատում է երկու կետում,

2) ամբողջ V տիրույթը Oxy հարթության մեջ պրոյեկտվում է D կանոնավոր (երկչափ) տիրույթի,

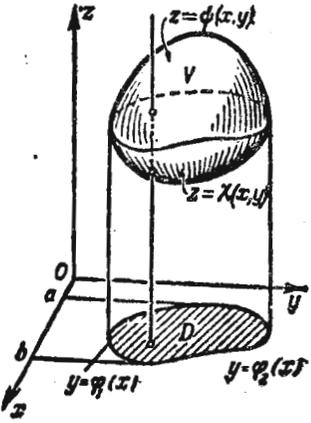
3) V տիրույթի յուրաքանչյուր մասը, որը նրանից անջատվում է կոորդինատային հարթություններից (Oxy, Oxz, Oyz) որևէ մեկին զուգահեռ հարթությամբ, նույնպես օժտված է 1) և 2) հատկություններով:

Նշված հատկություններով օժտված V տիրույթը կանվանենք կանոնավոր եռաչափ տիրույթ:

Կանոնավոր եռաչափ տիրույթներ են, օրինակ, էլիպսոիդը, ուղղանկյուն զուգահեռանիստը, տետրաէդրը և այլն: Անկանոն եռաչափ տիրույթի օրինակ է տրված նկ. 332-ում: Ներկա պարագրաֆում դիտարկելու ենք միայն կանոնավոր տիրույթներ:



Նկ. 332



Նկ. 333

Դիցուք V տիրույթը ներքևից սահմանափակող մակերևույթի հավասարումն է՝ $z = \chi(x, y)$, իսկ տիրույթը վերևից սահմանափակողինը՝ $z = \varphi(x, y)$ (նկ. 333):

Մուծենք V տիրույթում որոշված և անընդհատ $f(x, y, z)$ երեք փոփոխականների ֆունկցիայի՝ ըստ V տիրույթի Γ_V եռաչափ ին-

տեղրալի հասկացությունը: Ենթադրենք, որ Oxy հարթության մեջ V տիրույթի պրոյեկցիան՝ D տիրույթը սահմանափակված է

$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x), \quad x = a, \quad x = b$$

գծերով: Այս դեպքում $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի եռապատիկ ինտեգրալն ըստ D տիրույթի սահմանվում է այսպես.

$$I_V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{x(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx. \quad (1)$$

Նկատենք, որ ըստ z -ի ինտեգրման և ձևավոր փակագծերում սահմանների տեղադրման արդյունքում ստացվում է x -ի և y -ի ֆունկցիա: Այնուհետև, հաշվվում է այդ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալն ըստ D տիրույթի, ինչպես այդ դիտարկվել է վերը:

Բերենք ինտեգրալի հաշվման օրինակ:

Օրինակ 1: Հաշվել $f(x, y, z) = xyz$ ֆունկցիայի եռապատիկ ինտեգրալն ըստ այն V տիրույթի, որը սահմանափակված է հետևյալ հարթություններով.

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y+z=1:$$

Լուծում: Այդ տիրույթը կանոնավոր է. այն վերևից և ներքևից սահմանափակված է $z=0$ ու $z=1-x-y$ հարթություններով և Oxy հարթության մեջ պրոյեկտվում է D կանոնավոր հարթ տիրույթի, որը $x=0$, $y=0$, $y=1-x$ ուղիղներով սահմանափակված եռանկյունի է (նկ. 334): Ուստի I_V եռապատիկ ինտեգրալը հաշվվում է հետևյալ կերպ.

$$I_V = \int_D \int_0^{1-x-y} xyz dz \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} d\sigma.$$

Ըստ D տիրույթի կրկնապատիկ ինտեգրալում տեղափոխելով սահմանները, կստանանք.

$$\begin{aligned} I_V &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} xyz dz \right] dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \frac{xyz^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right\} dx = \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \frac{1}{2} xy(1-x-y)^2 dy \right\} dx = \int_0^1 \frac{x}{24} (1-x)^3 dx = \frac{1}{720}. \end{aligned}$$

Այժմ քննարկենք եռապատիկ ինտեգրալի մի քանի հատկությունները:

Հատկություն 1: Եթե կոորդինատային հարթություններից որևէ մեկին զուգահեռ հարթությամբ V տիրույթը բաժանենք երկու V_1 և V_2 տիրույթի, ապա ըստ V տիրույթի եռապատիկ ինտեգրալը հավասար է ըստ V_1 և V_2 տիրույթների եռապատիկ ինտեգրալների գումարին:

Այս հատկության ապացուցումը կատարվում է միանգամայն այնպես, ինչպես և կրկնապատիկ ինտեգրալի համապատասխան հատկության ապացուցումը: Ուստի անհրաժեշտություն չկա այն նորից կրկնելու:

Հեռու հարթ: Կոորդինատային հարթություններից զուգահեռ հարթություններով V տիրույթը ցանկացած վերջավոր բովով V_1, \dots, V_n տիրույթների տրոհման դեպքում տեղի ունի

$$I_V = I_{V_1} + I_{V_2} + \dots + I_{V_n}$$

հավասարությունը:

Հատկություն 2 (եռապատիկ ինտեգրալի գնահատման մասին թեորեմ): Եթե m -ը և M -ը V տիրույթում $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի, համապատասխանաբար, ամենամեծ և ամենափոքր արժեքներն են, ապա տեղի ունեն

$$mV \leq I_V \leq MV$$

անհավասարությունները, որտեղ V -ն տվյալ տիրույթի ծավալն է, իսկ I_V -ն՝ $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի եռակի ինտեգրալը ըստ V տիրույթի:

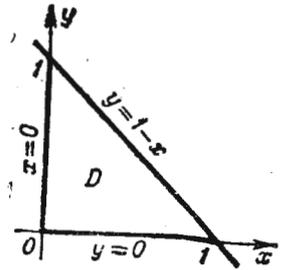
Ապացուցում: Նախ գնահատենք $I_V = \int_D \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma$

եռապատիկ ինտեգրալի ներքին ինտեգրալը.

$$\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \leq \int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} M dz = M \int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz = Mz \Big|_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} = M[\psi(x,y) - \chi(x,y)]:$$

Եվ այսպես, ներքին ինտեգրալը չի գերազանցում $M[\psi(x,y) - \chi(x,y)]$ արտահայտությանը: Ուստի, կրկնակի ինտեգրալների մասին § 1-ի թեորեմի համաձայն կստանանք (D -ով նշանակված է V տիրույթի պրոյեկցիան Oxy հարթության վրա):

$$\begin{aligned} I_V &= \int_D \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma \leq \int_D M[\psi(x,y) - \chi(x,y)] d\sigma = \\ &= M \int_D [\psi(x,y) - \chi(x,y)] d\sigma. \end{aligned}$$



Նկ. 334

Բայց վերջին կրկնապատիկ ինտեգրալը հավասար է $\psi(x, y) - \chi(x, y)$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալին և, հետևաբար, հավասար է այն տիրույթի ծավալին, որը պարփակված է $z = \chi(x, y)$ և $z = \psi(x, y)$ մակերևույթների միջև, այսինքն՝ V տիրույթի ծավալին: Ուստի

$$I_V \leq MV,$$

նման ձևով ապացուցվում է, որ $I_V \geq mV$: Այսպիսով, 2-րդ հատկությունն ապացուցված է:

Հատկություն 3 (թեորեմ միջինի մասին): $f(x, y, z)$ անընդհատ ֆունկցիայի եռապատիկ ինտեգրալն ըստ V տիրույթի հավասար է այդ տիրույթի V ծավալի և V տիրույթի մի որոշ P կետում ֆունկցիայի արժեքի արտադրյալին, այսինքն

$$I_V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx = f(P)V: \quad (2)$$

Այս հատկության ապացուցումը կատարվում է այնպես, ինչպես և կրկնապատիկ ինտեգրալի համար համանման հատկությանը, (տես § 2, հատկություն 3, բանաձև (4)): Այժմ կարող ենք ապացուցել եռակի ինտեգրալի հաշվման մասին թեորեմը:

Թեորեմ: $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի եռակի ինտեգրալն ըստ V կանոնավոր տիրույթի հավասար է ըստ նույն տիրույթի եռապատիկ ինտեգրալին, այսինքն՝

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx:$$

Ապացուցում: Կոորդինատային հարթություններին զուգահեռ հարթություններով V տիրույթը արոհենք n հատ կանոնավոր տիրույթների:

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n:$$

Ինչպես վերևում, I_V -ով նշանակենք նաև $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի եռապատիկ ինտեգրալն ըստ V տիրույթի, իսկ $I_{\Delta V_i}$ -ով՝ այդ ֆունկցիայի եռապատիկ ինտեգրալն ըստ ΔV_i տիրույթի: Այդ դեպքում հատկություն 1-ի հետևանքի հիման վրա կարող ենք գրել

$$I_V = I_{\Delta V_1} + I_{\Delta V_2} + \dots + I_{\Delta V_n} \quad (3)$$

հավասարությունը: Այս հավասարության աջ մասի յուրաքանչյուր գումարելին ձևափոխենք ըստ (2) բանաձևի.

$$I_V = f(P_1)\Delta V_1 + f(P_2)\Delta V_2 + \dots + f(P_n)\Delta V_n, \quad (4)$$

որտեղ P_i -ն և ΔV_i տիրույթի մի որոշ կետն է:

Այս հավասարության աջ մասն ինտեգրալային գումար է: Ըստ են-

թադրության $f(x, y, z)$ ֆունկցիան անընդհատ է V տիրույթում, այդ պատճառով էլ ΔV_i -ի ամենամեծ տրամագիծը զրոյի ձգտելիս այդ գումարի սահմանը գոյություն ունի և հավասար է $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի եռակի ինտեգրալին ըստ V տիրույթի: Այսպիսով, (4) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $\text{diam} \Delta V_i \rightarrow 0$, կստանանք.

$$I_V = \iiint_V f(x, y, z) dv$$

կամ վերջնականապես փոխելով աջ և ձախ մասերի արտահայտությունների տեղերը՝

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Այստեղ $z = \chi(x, y)$ և $z = \psi(x, y)$ V կանոնավոր տիրույթը ներքևից և վերևից սահմանափակող մակերևույթների հավասարումներն են: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ գծերը սահմանափակում են Oxy հարթության վրա V տիրույթի պրոյեկցիա հանդիսացող D տիրույթը:

Դիտողություն: Նման ձևով, ինչպես արվեց կրկնապատիկ ինտեգրալի դեպքում, կարելի է կազմել եռապատիկ ինտեգրալ ըստ փոփոխականների ինտեգրման այլ կարգով և ուրիշ սահմաններով, եթե, իհարկե, այդ թույլ է տալիս V տիրույթի ձևը:

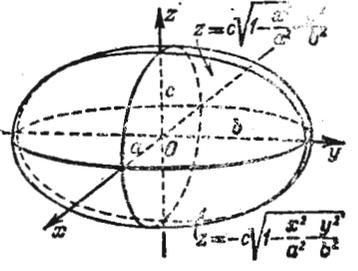
Մարմնի ծավալի հաշվումը եռապատիկ ինտեգրալի միջոցով: Եթե ենթաինտեգրալային ֆունկցիան՝ $f(x, y, z) = 1$, ապա ըստ V տիրույթի եռակի ինտեգրալն արտահայտում է V տիրույթի ծավալը.

$$V = \iiint_V dx dy dz, \quad (5)$$

Օրինակ 2: Հաշվել

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Էլիպսոիդի ծավալը:
 Լուծում: Էլիպսոիդը (նկ. 335) ներքևից սահմանափակված է $z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ մակերևույթով, իսկ վերևից՝ $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ մակերևույթով: Այս էլիպսոիդի պրոյեկցիան Oxy հարթության մեջ (D տիրույթ) հանդիսանում է



Նկ. 335

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ էլիպսը: Հետևաբար, ծավալի հաշվումը հանգեցնելով եռապատիկ ինտեգրալի հաշվմանը, կատանանք.

$$V = \int_{-a}^a \left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz \right) dy \right] dx =$$

$$= 2c \int_{-a}^a \left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dy \right] dx.$$

Ներքին ինտեգրալը հաշվելիս x -ը համարվում է հաստատուն, կատարենք հետևյալ տեղադրությունը.

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \sin t, \quad dy = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \cos t dt:$$

y փոփոխականը փոխվում է $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ -ուց մինչև $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, ուստի t -ն փոփոխվում է $-\frac{\pi}{2}$ -ից մինչև $\frac{\pi}{2}$: Ինտեգրալի մեջ տեղադրելով նոր սահմանները կատանանք.

$$V = 2c \int_{-a}^a \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) - \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \sin^2 t} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \cos t dt \right] dx =$$

$$= 2cb \int_{-a}^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt dx = \frac{cb\pi}{a^2} \int_{-a}^a (a^2-x^2) dx = \frac{4\pi abc}{3},$$

եվ այսպես,

$$V = 4\pi abc/3:$$

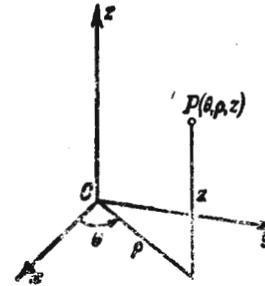
Եթե $a=b=c$, ապա կատանանք գնդի ծավալը՝

$$V = 4\pi a^3/3.$$

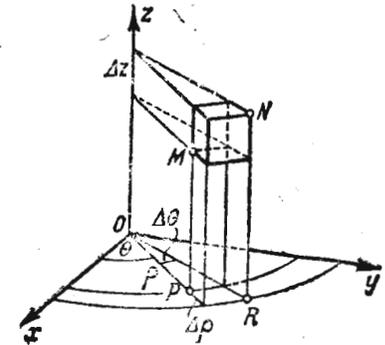
§ 13. Փոփոխականների փոխարինումը եռակի ինտեգրալում

1. Եռակի ինտեգրալը գլանային կոորդինատներում: Այսպես կոչված գլանային կոորդինատների դեպքում տարածու-

թյան մեջ P կետի դիրքը որոշվում է θ , ρ , z երեք թվով, որտեղ θ -ն և ρ -ն Oxy հարթության մեջ P կետի պրոյեկցիայի բևեռային կոորդինատներն են և z -ը P կետի ապլիկատն է, այսինքն՝ կետի հեռավորությունն է Oxy հարթությունից՝ վերցրած պլյուս նշանով, եթե կետն ընկած է Oxy հարթությունից վերև, և մինուս նշանով, եթե ընկած է ներքև (նկ. 336):



Նկ. 336



Նկ. 337

Այս դեպքում տվյալ V տարածական տիրույթը տարրական ծավալների ենթ տրոհում $\theta = \theta_i$, $\rho = \rho_i$, $z = z_k$ կոորդինատային մակերևույթներով (Oz -ով անցնող կիսահարթություններ, շրջանային գլաններ, որոնց առանցքը համընկնում է Oz -ի հետ, Oz առանցքին ուղղահայաց հարթություններ): Տարրական ծավալ կլինի կորագիծ «պրիզման», (տրք պատկերված է նկ. 337-ում): Բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ճշտությամբ այդ պրիզմայի հիմքի մակերեսը հավասար է $\rho\Delta\theta\Delta\rho$, բարձրությունը հավասար է Δz -ի (զրույթյան պարզության համար i, j, k փնդեքաները բաց ենք թողնում): Հետևաբար, $\Delta V = \rho\Delta\theta\Delta\rho\Delta z$: Ուստի $F(\theta, \rho, z)$ ֆունկցիայի եռակի ինտեգրալն ըստ V տիրույթի ունի հետևյալ տեսքը.

$$I = \iiint_V F(\theta, \rho, z) \rho d\theta d\rho dz. \quad (1)$$

Ինտեգրման սահմանները որոշվում են V տիրույթի ձևով:

Եթե տրված է $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի եռակի ինտեգրալը ուղղանկյուն կոորդինատներով, ապա այն հեշտ է ձևափոխել գլանային կոորդինատներով եռակի ինտեգրալի: Իրոք, նկատելով, որ

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z.$$

կատանանք,

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_V F(\theta, \rho, z) \rho d\theta d\rho dz,$$

որտեղ

$$i(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) = F(\theta, \rho, z):$$

Օրինակ: Որոշել կոորդինատների սկզբնակետում կենտրոն ունեցող R շառավիղով կիսագնդի M զանգվածը, եթե նրա նյութի F խտությունը յուրաքանչյուր (x, y, z) կետում համեմատական է այդ կետի՝ հիմքից ունեցած հեռավորությանը, այսինքն՝ $F = kz$:

Լուծում: Կիսագնդի վերին մասի

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

հավասարումը դիանային կոորդինատներով ունի $z = \sqrt{R^2 - \rho^2}$ տեսքը:

Հետևաբար,

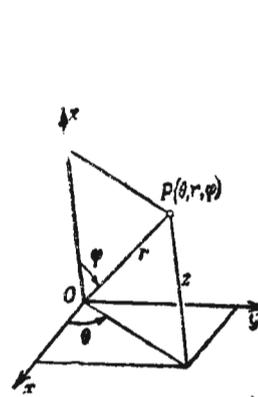
$$\begin{aligned} M &= \iiint_V kz \rho d\theta d\rho dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} kz dz \right) \rho d\rho \right] d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \frac{kz^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \frac{k}{2} (R^2 - \rho^2) \rho d\rho \right] d\theta = \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right] d\theta = \frac{k}{2} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{k\pi R^4}{4}. \end{aligned}$$

2. Եռակի ինտեգրալը սֆերիկ կոորդինատներով: Բ կետի դիրքը տարածության մեջ սֆերիկ կոորդինատներով որոշվում է θ, r, φ անկյուններով, որտեղ r -ը կետի հեռավորությունն է կոորդինատների սկզբնակետից, այսպես կոչված կետի շառավիղ-վեկտորը, φ -ն շառավիղ վեկտորի և OZ առանցքի միջև եղած անկյունն է, θ -ն Oxy հարթության վրա շառավիղ-վեկտորի պրոյեկցիայի և OX կազմած անկյունն է, հաշված այդ առանցքից՝ դրական ուղղությամբ (այսինքն ժամացույցի սլաքի շարժմանը հակառակ) (նկ. 338):

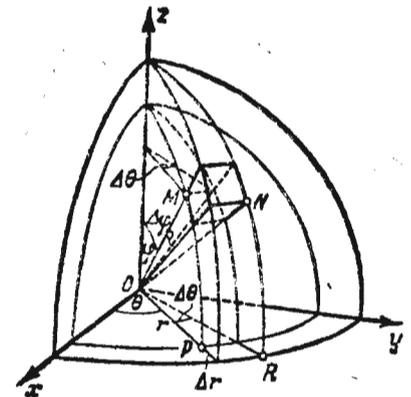
Տարածության ցանկացած կետի համար ունենք

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Տրված V տիրույթը $r = \text{const}$ (դնդային մակերևույթներ), $\varphi = \text{const}$ (կոորդինատների սկզբնակետում գազաթ ունեցող կոնական մակերևույթներ), $\theta = \text{const}$ (Oz առանցքով անցնող կիսահարթություն-



Նկ. 338



Նկ. 339

ներ) կոորդինատային մակերևույթներով տրոհենք ΔV տարրական մասերի: Բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ճշտությամբ ΔV տարրական ծավալը կարելի է համարել $\Delta r, r\Delta\varphi, r\sin\varphi\Delta\theta$ երկարություն ունեցող կողերով զուգահեռանիստ, Այս դեպքում տարրական ծավալը հավասար է (նկ. 339)

$$\Delta V = r^2 \sin \varphi \Delta r \Delta \theta \Delta \varphi:$$

$F(\theta, r, \varphi)$ ֆունկցիայի եռակի ինտեգրալն ըստ V տիրույթի ունի հետևյալ տեսքը.

$$I = \int \int \int_V F(\theta, r, \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi: \quad (1')$$

Ինտեգրման սահմանները որոշվում են V տիրույթի ձևով: Նկ. 338-ից հեշտ է հաստատել դեկարտյան կոորդինատների արտահայտությունները սֆերիկի միջոցով.

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \theta, \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta, \\ r &= r \cos \varphi: \end{aligned}$$

Ուստի եռակի ինտեգրալը դեկարտյան կոորդինատներից սֆերիկի ձև-վափոխելու բանաձևն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \int \int \int_V f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

3. Փոփոխականների ընդհանուր փոխարինումը եռակի ինտեգրում: Եռակի ինտեգրում անցումը դեկարտյան կոորդինատներից գլանայինների և սֆերիկների՝ տարածության մեջ կոորդինատների ընդհանուր ձևափոխության մասնավոր դեպքերն են: Դիցուք

$$\begin{aligned}x &= \varphi(u, t, w), \\y &= \psi(u, t, w), \\z &= \chi(u, t, w)\end{aligned}$$

Ֆունկցիաները փոխադարձ միարժեքորեն արտապատկերում են x, y, z դեկարտյան կոորդինատներով V տիրույթը u, t, w կորագիծ կոորդինատներով V' տիրույթի: Դիցուք V տիրույթի ΔV ծավալի տարրը $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ փոխվում է V' տիրույթի $\Delta V'$ տարրի և դիցուք

$$\lim_{\Delta V' \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta V'} = |||:$$

Այդ դեպքում

$$\begin{aligned}\iint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\= \iint_{V'} f[\varphi(u, t, w), \psi(u, t, w), \chi(u, t, w)] ||| du dt dw\end{aligned}$$

Կրկնակի ինտեգրում կատարվածի նման, I -ն կոչվում է յակոբիան. ճիշտ այնպես, ինչպես կրկնակի ինտեգրալների համար, կարելի է ապացուցել, որ յակոբիանը թվային հավասար է

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Երբորդ կարգի դետերմինանտին: Այսպես, գլանային կոորդինատների դեպքում

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z \quad (\rho = u, \theta = t, z = w);$$

$$I = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

Սֆերիկ կոորդինատների դեպքում

$$\begin{aligned}x &= r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi \quad (r = u, \varphi = t, \theta = w); \\ I &= \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & \theta \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi\end{aligned}$$

§ 14. Մարմնի իներցիայի մոմենտը և ծանրության կենտրոնի կոորդինատները

1. Մարմնի իներցիայի մոմենտը: m զանգված ունեցող $M(x, y, z)$ կետի իներցիայի մոմենտները Ox, Oy, Oz կոորդինատային առանցքերի նկատմամբ արտահայտվում են, համապատասխանաբար, հետևյալ բանաձևերով.

$$\begin{aligned}I_{xx} &= (y^2 + z^2)m, \\ I_{yy} &= (x^2 + z^2)m, \quad I_{zz} = (x^2 + y^2)m\end{aligned}$$

Մարմնի իներցիայի մոմենտները արտահայտվում են համապատասխան ինտեգրալներով: Այսպես, օրինակ, մարմնի իներցիայի մոմենտն

Oz առանցքի նկատմամբ արտահայտվում է $I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) \cdot$

$\cdot dx dy dz$ ինտեգրալով, որտեղ $\gamma(x, y, z)$ -ը նյութի խտությունն է:

Օրինակ 1: Հաշվել $2h$ բարձրություն և R շառավիղ ունեցող ուղիղ շրջանային գլանի իներցիայի մոմենտը նրա միջին հատույթի տրամագծի նկատմամբ, խտությունը համարելով հաստատուն և հավասար γ_0 -ի:

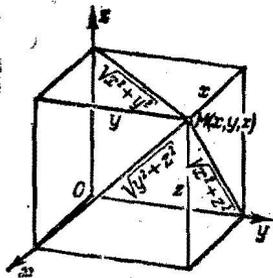
Լուծում: Կոորդինատային համակարգն ընտրենք հետևյալ կերպ. Oz առանցքն ուղղենք գլանի առանցքով, իսկ կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք նրա սիմետրիայի կենտրոնում (նկ. 341):

Այդ դեպքում խնդիրը հանգում է Ox առանցքի նկատմամբ գլանի իներցիայի մո-

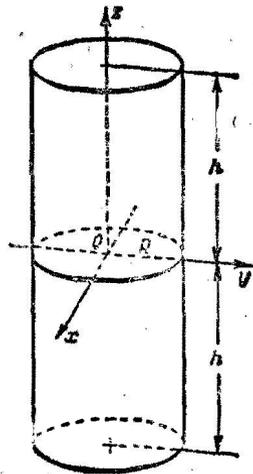
մենտի հաշվելուն. $I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma_0 dx dy dz$:

Քննելով գլանային կոորդինատների, կտանանք.

$$\begin{aligned}I_{xx} &= \gamma_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R \left[\int_{-h}^h (z^2 + \rho^2 \sin^2 \theta) dz \right] \rho d\rho \right\} d\theta = \\ &= \gamma_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R \left[\frac{2h^3}{3} + 2h\rho^2 \sin^2 \theta \right] \rho d\rho \right\} d\theta = \gamma_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{2h^3}{3} \frac{R^2}{2} + \frac{2hR^4}{4} \sin^2 \theta \right\} d\theta = \\ &= \gamma_0 \left[\frac{2h^3 R^2}{6} 2\pi + \frac{2hR^4}{4} \pi \right] = \gamma_0 \pi h R^2 \left[\frac{2}{3} h^2 + \frac{R^2}{2} \right],\end{aligned}$$



Նկ. 340



Նկ. 341

2. Մ ա թ մ ն ի ծ ա ն ր ու թ յ ա ն կ ե ն ա տ ր ո ն ի կ ո ո ղ ի ն ա տ ն ե թ ը: Ճ ի շ տ ա յ ն պ ե ս, ի ն շ պ ի ս ի ն կ ա թ XII գ լ խ ի § 8-ում (I հատ.) հարթ պատկերի համար, մարմնի ծանրության կենտրոնի կոորդինատներն արտահայտվում են

$$x_c = \frac{\iiint_V x \gamma(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz}, \quad y_c = \frac{\iiint_V y \gamma(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz}$$

$$z_c = \frac{\iiint_V z \gamma(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz}$$

բանաձևերով, որտեղ $\gamma(x, y, z)$ -ը խտությունն է:

Օրինակ 2: Որոշել R շառավղով և կոորդինատների սկզբնակետում կենտրոն ունեցող գնդի վերին կեսի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, γ_0 խտությունը համարելով հաստատուն:

Լ ո ծ ու մ: Կիսագունը սահմանափակված է

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad z = 0$$

մակերևույթներով: Նրա ծանրության կենտրոնի ապլիկատը որոշվում է

$$z_c = \frac{\iiint_V z \gamma_0 dx dy dz}{\iiint_V \gamma_0 dx dy dz}$$

բանաձևով: Անցնելով սֆերիկ կոորդինատների, ստանում ենք

$$z_c = \frac{\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \left[\int_0^R r \cos \varphi r^2 \sin \varphi dr \right] d\varphi \right] d\theta}{\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \left[\int_0^R r^2 \sin \varphi dr \right] d\varphi \right] d\theta} = \frac{2\pi \frac{R^4}{4} \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{3}{8} R:$$

Ակնհայտ է, որ կիսագնդի սիմետրիկության շնորհիվ

$$x_c = y_c = 0:$$

§ 15. Պարամետրից կախված ինտեգրալների հաշվումը

Գիտարկենք α պարամետրից կախված հետևյալ ինտեգրալը՝

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx:$$

(Նման ինտեգրալներ քննարկել ենք I հատորի, XI գլխի § 10-ում): Առանց ապացուցելու ցույց տանք, որ եթե $f(x, \alpha)$ -ն $[a, b]$ հատվածում ըստ x -ի անընդհատ է և $[\alpha_1, \alpha_2]$ հատվածում էլ անընդհատ է ըստ α -ի, ապա

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$$

Ֆունկցիան անընդհատ է $[\alpha_1, \alpha_2]$ հատվածում: Հետևաբար, $I(\alpha)$ ֆունկցիան կարելի է ինտեգրել $[\alpha_1, \alpha_2]$ հատվածում ըստ α -ի

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I(\alpha) d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_a^b f(x, \alpha) dx \right) d\alpha:$$

Աշակրդյան արտահայտությունը $I(x, \alpha)$ ֆունկցիայի կրկնապատիկ ինտեգրալն է ըստ $Ox\alpha$ հարթության մեջ դասավորված ուղղանկյան: Այդ ինտեգրալում կարելի է փոխել ինտեգրման կարգը.

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_a^b f(x, \alpha) dx \right) d\alpha = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha \right) dx:$$

Այս բանաձևը ցույց է տալիս, որ α պարամետրից կախված ինտեգրալն ինտեգրելու համար բավական է ըստ a պարամետրի ինտեգրել են-

Թանխտեգրալային արտահայտությունը: Այս բանաձևը նույնպես օգտակար է լինում որոշյալ ինտեգրալների հաշվելիս:

Օրինակ: Հաշվել $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ ($a > 0, b > 0$) ինտեգրալը:

Ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալը տարրական ֆունկցիաներով չի արտահայտվում, Այն հաշվելու համար դիտարկենք ուրիշ ինտեգրալ, որը կարելի է հեշտ հաշվել:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} ds = \frac{1}{a} \quad (a > 0),$$

Այս հավասարությունը ինտեգրելով $\alpha = a$ -ից մինչև $\alpha = b$ սահմաններում, կստանանք.

$$\int_a^b \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \right) d\alpha = \int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha} = \ln \frac{b}{a},$$

Առաջին ինտեգրալում փոխելով ինտեգրման կարգը, այս հավասարությունը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$\int_0^{\infty} \left[\int_a^b e^{-\alpha x} d\alpha \right] dx = \ln \frac{b}{a},$$

որտեղից, հաշվելով ներքին ինտեգրալը, ստանում ենք

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a},$$

Վարժություններ XIV գլխի վերաբերյալ

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները* $\int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^2) dx dy$, Պատմ. $\frac{8}{3}$; $2 \cdot \int_3^4 \int_1^2 \frac{dy dx}{(x+y)^2}$,

* Եթե ինտեգրալը գրված է այսպես, $\int_{MK}^{NL} f(x, y) dx dy$, ապա, ինչպես ցույց է տրվել վերևում, մենք կհամարենք, որ առաջին ինտեգրումը կատարվում է ըստ այն փոփոխականի, որի դիֆերենցիալը գրավում է առաջին տեղը, այսինքն՝

$$\int_{MK}^{NL} \int f(x, y) dx dy = \int_M^N \left(\int_K^L f(x, y) dx \right) dy:$$

Պատմ. $\ln \frac{25}{24}$; 3. $\int_1^2 \int_x^{x\sqrt{3}} xy dx dy$, Պատմ. $\frac{15}{4}$; 4. $\int_0^{2\pi} \int_{\sin \theta}^2 r dr d\theta$, Պատմ. $\frac{1}{2} \pi a^2$,

5. $\int_0^a \int_{x/a}^x \frac{xdydx}{x^2 + y^2}$, Պատմ. $\frac{\pi a}{4} - \arctg \frac{1}{a}$; 6. $\int_0^a \int_{y-a}^{2y} xy dx dy$, Պատմ. $\frac{11a^4}{24}$,

7. $\int_{b/2}^b \int_1^{\pi/2} \rho d\theta d\rho$, Պատմ. $\frac{3}{16} \pi b^2$,

$\iint_D f(x, y) dx dy$ ինտեգրալի համար որոշել ինտեգրման սահմանները, որտեղ $ին-$

տեգրման տիրույթը սահմանափակված է հետևյալ գծերով՝ 8. $x=2, x=3,$

$y=-1, y=5$, Պատմ. $\int_{-1}^5 \int_{-1}^3 f(x, y) dy dx$; 9. $y=0, y=1-x^2$, Պատմ. $\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} f(x, y) dy dx$,

10. $x^2 + y^2 = a^2$; Պատմ. $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy dx$; 11. $y = \frac{2}{1+x^2}, y = x^2$,

Պատմ. $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{1+x^2} f(x, y) dy dx$; 12. $y=0, y=a, y=x, y=x-2a$,

Պատմ. $\int_0^a \int_y^{y+2a} f(x, y) dx dy$,

Հետևյալ ինտեգրալում փոխել ինտեգրման կարգը.

13. $\int_1^3 \int_1^2 f(x, y) dy dx$,

Պատմ. $\int_3^4 \int_1^2 f(x, y) dx dy$,

14. $\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$; Պատմ. $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx dy$:

15. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{2ay-\zeta^2}} f(x, y) dx dy$; Պատմ. $\int_0^a \int_{-a\sqrt{a^2-x^2}}^0 f(x, y) dy dx$:

16. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$, Պատ. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dx dy$.

17. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx dy$, Պատ. $\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx$:

Հետևյալ ինտեգրալները հաշվել բևեռային կոորդինատներին անցնելու ճանապարհով.

18. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx$: Պատ. $\int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{6} a^3$,

19. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx dy$, Պատ. $\int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho^3 d\rho d\theta = \frac{\pi a^4}{8}$,

20. $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy dx$, Պատ. $\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}$, 21. $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy dx$,

Պատ. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2a \cos \theta} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi a^2}{2}$,

Ձևափոխել կրկնակի ինտեգրալները, մուծելով u և v նոր փոփոխականներ, որոնք x-ի և y-ի հետ կապված են $x=u-uv$, $y=uv$ բանաձևերով:

22. $\int_0^{\beta x} \int_0^x f(x, y) dy dx$:

Պատ. $\int_{\frac{\beta}{1+\beta}}^{\frac{\beta}{1+\alpha}} \int_0^{\frac{1-v}{1+\alpha}} f(u-uv, uv) u du dv$: 23. $\int_0^c \int_0^b f(x, y) dy dx$:

Պատ. $\int_0^{\frac{b}{b+c}} \int_0^{\frac{c}{b+c} \frac{1-v}{1-\frac{b}{b+c}v}} f(u-uv, uv) u du dv + \int_{\frac{b}{b+c}}^{\frac{b}{b+c}} \int_0^{\frac{b}{b+c} \frac{1-v}{1-\frac{b}{b+c}v}} f(u-uv, uv) u du dv$.

Մակերեսների հաշվումը կրկնակի ինտեգրալների միջոցով

24. Հաշվել $y^2=2x$ պարաբոլով և $y=x$ ուղիղով սահմանափակված պատկերի մակերեսը: Պատ. $\frac{2}{3}$,

25. Հաշվել $y^2=4ax$, $x+y=3a$, $y=0$ գծերով սահմանափակված պատկերի

մակերեսը: Պատ. $\frac{10a^2}{3}$,

26. Հաշվել $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, $x+y=a$ գծերով սահմանափակված պատկերի մա-

կերեսը: Պատ. $\frac{a^2}{3}$,

27. Հաշվել $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$ գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Պատ. $\sqrt{2}-1$,

28. Հաշվել $\rho = a \sin 2\theta$ կորի հանգույցի (петля) մակերեսը: Պատ. $\frac{\pi a^2}{8}$,

29. Հաշվել $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ լեմնիկատով սահմանափակված ամբողջ մակերեսը:

Պատ. a^2 ,

30. Հաշվել $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2}$ կորի հանգույցի մակերեսը:

Ցուցում: Անցնել $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ նոր փոփոխականներին:

Պատ. $\frac{a^2 b^2}{c^2}$,

Մակերեսների հաշվումը

Հաշվել հետևյալ մակերեսներով սահմանափակված մարմինների ծավալները.

31. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, Պատ. $\frac{abc}{6}$, 32. $z=0$, $x^2+y^2=1$, $x+y+$

$+z=3$, Պատ. 3π , 33. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $xy=z$, $z=0$, Պատ. π , 34. x^2+y^2-

$-2ax=0$, $z=0$, $x^2+y^2=z^2$, Պատ. $\frac{32}{9} a^3$, 35. $y=x^2$, $x=y^2$, $z=0$, $z=12+y-x^2$,

Պատ. $\frac{549}{144}$, 36. կոորդինատային հարթություններով, $2x+3y-12=0$ հարթությամբ և $z=$

$=\frac{y^2}{2}$ գլանով: Պատ. 16: 37. a շառավղով շրջանային գլանով, որի առանցքը համընկնում է OZ առանցքի հետ, կոորդինատային հարթություններով և $\frac{x}{a} + \frac{z}{a} = 1$ հարթությամբ: Պատ.

$a^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)$,

38. $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$ գլաններով: Պատ. $\frac{16}{3} a^3$, 39. $y^2+z^2=x$, $x=y$, $z=0$,

Պատ. $\frac{\pi}{64}$, 40. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=R^2$, $a>R$: Պատ. $\frac{4}{3} \pi [a^3 - (\sqrt{a^2-R^2})^3]$,

41. $az=x^2+y^2$, $z=0$, $x^2+y^2=2ax$, Պատ. $\frac{3}{2} \pi a^3$, 42. $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$, $x^2+y^2+z^2=a^2$,

$z=0$, Հաշվել այն ծավալը, որը ներքին է գլանի նկատմամբ: Պատ. $\frac{1}{9}a^3(3\pi+20-$
 $-16\sqrt{2})$,

Մ ա կ եր ե ու յ թ ի մ ա կ եր ե ս ի հ ա շ վ ու մ ք

43. Հաշվել $x^2+y^2=z^2$ կոնի այն մասի մակերևութի մակերեսը, որն նրանից հաստում է $x^2+y^2=2ax$ գլանը: Պատ. $2\pi a^2\sqrt{2}$,

44. Հաշվել $x+y+z=2a$ հարթության այն մասի մակերեսը, որն ընկած է առաջին կոորդինատային օքտանտում և սահմանափակված է $x^2+y^2=a^2$ գլանով: Պատ. $\frac{\pi a^2}{4}\sqrt{3}$,

45. Հաշվել զնդային սեղանների (փոքր) մակերևութի մակերեսը, եթե զնդի շառավիղը a է, իսկ սեղանների հիմքի շառավիղը՝ b : Պատ. $2\pi(a^2-av\sqrt{a^2-b^2})$,

46. Գտնել $x^2+y^2+z^2=3a^2$ զնդային մակերևութի այն մասի մակերեսը, որը հատված է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b$) գլանի մակերևութով: Պատ. $4\pi a^2-8a^2 \arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$,

47. Գտնել $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ երկու գլանների ընդհանուր մաս հանդիսացող մարմնի մակերևութի մակերեսը: Պատ. $16a^2$,

48. Հաշվել $x^2+y^2=2ax$ գլանի մակերևութի այն մասի մակերեսը, որը գտնվում է $z=0$ հարթության և $x^2+y^2=z^2$ կոնի մեջ: Պատ. $8a^2$,

49. Հաշվել $x^2+y^2=a^2$ գլանի մակերևութի այն մասի մակերեսը, որը գտնվում է $z=\max$ և $z=0$ հարթությունների միջև: Պատ. $2\pi a^2$,

50. Հաշվել $y^2+z^2=2ax$ պարաբոլոիդի մակերևութի այն մասի մակերեսը, որը գտնվում է $y^2=ax$ պարաբոլական գլանի և $x=a$ հարթության միջև: Պատ. $\frac{1}{3}\pi a^2$

$(3\sqrt{3}-1)$,
 Հ ա ռ թ ա լ ա թ կ եր ն եր ի ղ ա ն գ վ ա ծ ի, ծ ա ն ու թ յ ա ն կ ե ն տ-
 ր ո ն ի կ ո ռ դ ի ն ա տ ն եր ի, ի ն եր ց ի ա յ ի մ ո մ ե ն տ ի հ ա շ
 վ ու մ ք

(51-62 և 64 խնդիրներում ամենուրեք մակերևութային խտությունը ընդունվում է հաստատուն և հավասար մեկի):

51. Որոշել a շառավղով շրջանի ձև ունեցող թիթեղի զանգվածը, եթե խտությունը ցանկացած P կետում հակադարձ համեմատական է գլանի առանցքից P կետի հեռավորությանը (համեմատականության բազմապատկիչը հավասար է K -ի): Պատ. $2\pi aK$,

52. Հաշվել հավասարակողմ եռանկյան ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, նրա բարձրությունն ընդունելով իբրև Ox առանցք, իսկ զազաթից իբրև կոորդինատների սկզբնակետ: Պատ. $x=\frac{av\sqrt{3}}{3}$, $y=0$,

53. Հաշվել a շառավղով շրջանային սեկտորի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, նրա անկյան կիսորդն ընդունելով իբրև Ox առանցք: Սեկտորի բացվածքի անկյունը հավասար է 2α : Պատ. $x_c=\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$, $y_c=0$,

54. Գտնել $x^2+y^2=a^2$ շրջանի վերին կեսի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները: Պատ. $x_c=0$, $y_c=\frac{4a}{3\pi}$,

55. Գտնել $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ցիկլոիդի մեկ կամարի մակերեսի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները: Պատ. $x_c=a\pi$, $y_c=\frac{5a}{6}$,

56. Գտնել $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ կորի հանգույցով սահմանափակված պատկերի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները: Պատ. $x_c=\frac{\pi a\sqrt{2}}{8}$, $y_c=0$,

57. Գտնել $\rho=a(1+\cos \theta)$ կարդիոիդի մակերեսի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները: Պատ. $x_c=\frac{5a}{6}$, $y_c=0$,

58. Հաշվել $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ ուղիղներով սահմանափակված ուղղանկյան մակերեսի իներցիայի մոմենտը կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ: Պատ. $\frac{ab(a^2+b^2)}{3}$,

59. Հաշվել $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսի իներցիայի մոմենտը՝ ա) Oy առանցքի նկատմամբ, բ) կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ: Պատ. ա) $\frac{\pi a^3b}{4}$; բ) $\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}$,

60. Հաշվել $\rho=2a\cos \theta$ շրջանի մակերեսի իներցիայի մոմենտը բևեռի նկատմամբ: Պատ. $\frac{3\pi a^4}{2}$,

61. Հաշվել $\rho=a(1-\cos \theta)$ կարդիոիդի մակերեսի իներցիայի մոմենտը բևեռի նկատմամբ: Պատ. $\frac{35\pi a^4}{16}$,

62. Հաշվել $(x-a)^2+(y-b)^2=2a^2$ շրջանի մակերեսի իներցիայի մոմենտը Oy առանցքի նկատմամբ: Պատ. $3\pi a^4$,

63. a կողմ ունեցող քառակուսի թիթեղի յուրաքանչյուր կետում խտությունը համեմատական է քառակուսու որևէ զազաթից այդ կետի հեռավորությանը: Հաշվել թիթեղի իներցիայի մոմենտը այդ զազաթով անցնող կողմի նկատմամբ: Պատ. $\frac{1}{40}ka^5[7\sqrt{2}+3\ln(\sqrt{2}+1)]$, որտեղ k -ն համեմատականության բազմապատկիչն է:

64. Հաշվել $y^2=ax$ պարաբոլով և $x=a$ ուղիղով սահմանափակված պատկերի մակերեսի իներցիայի մոմենտը $y=-a$ ուղիղի նկատմամբ: Պատ. $\frac{8a^4}{5}$,

Ե ո ա կ ի ի ն տ ե գ Ր ա լ ն ե Ր

65. Հաշվել $\iiint \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$, եթե ինտեգրման տիրույթը սահմանափակված է կոորդինատային հարթություններով և $x+y+z=1$ հարթությամբ: Պատ. $\frac{n^2}{2} \frac{5}{16}$,

66. Հաշվել $\int_0^a \left\{ \int_0^x \left[\int_0^y xyz \, dz \right] dy \right\} dx$, Պատ. $\frac{a^6}{48}$.

67. Հաշվել $x^2+y^2+z^2=4$ գնդային մակերևութով և $x^2+y^2=3z$ պարաբոլիդի մակերևութով սահմանափակված մարմնի ծավալը: Պատ. $\frac{19}{6}\pi$.

68*. Հաշվել $x=0, y=0, z=0, \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ հարթություններով սահմանափակված բուրգի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները և իներցիայի մոմենտները: Պատ. $x_c=a/4, y_c=b/4, z_c=c/4; I_x=a^3bc/60, I_y=b^3ac/60, I_z=c^3ab/60$,

$I_0=\frac{abc}{60}(a^2+b^2+c^2)$,

69. Հաշվել ուղիղ շրջանային կոնի իներցիայի մոմենտը նրա առանցքի նկատմամբ: Պատ. $\frac{1}{10}\pi hr^4$, որտեղ h -ը կոնի բարձրությունն է, իսկ r -ը՝ հիմքի շառավիղը:

70. Հաշվել $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$ հավասարումն ունեցող մակերևութով սահմանափակված մարմնի ծավալը: Պատ. $\frac{\pi a^3}{3}$,

71. Հաշվել շրջանային կոնի իներցիայի մոմենտը հիմքի տրամագծի նկատմամբ: Պատ. $\frac{\pi hr^2}{60}(2h^2+3r^2)$,

72. Հաշվել a շառավիղով գնդային մակերևութի և $2a$ զազաթի անկյուն ունեցող կոնական մակերևութի միջև գտնվող մարմնի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, եթե կոնի գազաթը համընկնում է սֆերայի կենտրոնի հետ: Պատ. $x_c=0, y_c=0, z_c=\frac{3}{8}a(1+\cos\alpha)$ (կոնի առանցքն ընդունված է իբրև Oz առանցք, գազաթը տեղավորված է կոորդինատների սկզբնակետում):

73. Հաշվել a շառավիղով գնդային մակերևութով և գնդի կենտրոնով անցնող ու 60° անկյուն կազմող երկու հարթություններով սահմանափակված մարմնի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները: Պատ. $\rho=\frac{9}{16}a, \theta=0, \varphi=\frac{\pi}{2}$ (հարթությունների հատման գիծն ընդունված է իբրև Oz առանցք, գնդի կենտրոնը՝ որպես կոորդինատների սկզբնակետ, ρ, θ, φ սֆերիկ կոորդինատներն են):

74. Օգտվելով $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}da(a>0)$ հավասարությունից,

հաշվել $\int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{x}}$ և $\int_0^\infty \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{x}}$ ինտեգրալները: Պատ. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

* 68—69, 71—73 խնդիրներում ընդունում ենք, որ կետերը հաստատուն է և հավասար է մեկի:

XV Գ Լ Ո Ւ Խ

ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ ԸՍՏ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ

§ 1. Կորագիծ ինտեգրալ

Դիցուք $P(x, y)$ կետը շարժվում է որոշ L հարթ գծի երկայնքով՝ M կետից դեպի N կետը: P կետում կիրառված է F ուժը, որը փոխվում է իր մեծությամբ և ուղղությամբ, երբ P կետը տեղափոխվում է, այսինքն՝ իրենից ներկայացնում է P կետի կոորդինատների մի որոշ ֆունկցիա՝

$F=F(P)$:

Հաշվենք F ուժի A աշխատանքը, երբ P կետը M դիրքից տեղափոխվում է N դիրքը (նկ. 342): Դրա համար MN կորը $M=M_0, M_1, M_2, \dots, M_n=N$ կետերով M -ից N ուղղությամբ տրոհենք կամայական n մասերի և ΔS_i -ով նշանակենք M_iM_{i+1} վեկտորը: F ուժի մեծությունն M_i կետում նշանակենք F_i -ով: Այդ դեպքում $F_i\Delta S_i$ սկալյար արտադրյալը կարելի է դիտել որպես M_iM_{i+1} աղիղի երկայնքությամբ F ուժի կատարած աշխատանքի մոտավոր արտահայտությունը

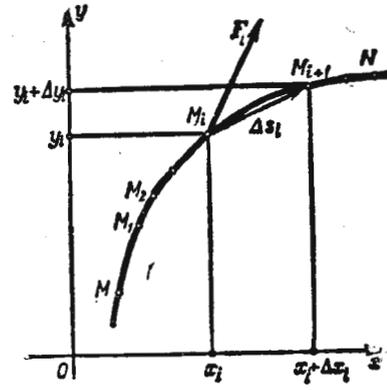
$A_i \approx F_i\Delta S_i$:

Դիցուք

$F=X(x, y)i+Y(x, y)j$,

որտեղ $X(x, y)$ -ը և $Y(x, y)$ -ը F ուժի պրոյեկցիաներն են Ox և Oy առանցքների վրա: M_i կետից M_{i+1} կետին անցնելիս x_i և y_i կոորդինատների աճերը նշանակելով Δx_i -ով և Δy_i -ով, ստանում ենք.

$\Delta S_i = \Delta x_i i + \Delta y_i j$:



Նկ. 342

Հետևաբար,

$$F_i \Delta s_i = X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i$$

Ամբողջ MN կորի վրա F ուժի A աշխատանքի մոտավոր արժեքը կլինի

$$A \approx \sum_{i=1}^n F_i \Delta s_i = \sum_{i=1}^n [X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i] \quad (1)$$

Չկատարելով ճշգրիտ ձևակերպումներ, առայժմ ցույց տանք, որ եթե գոյություն ունի հավասարության աջ մասի արտահայտության սահմանը, հրք $\Delta s_i \rightarrow 0$ (այս դեպքում, ակնհայտ է, $\Delta x_i \rightarrow 0$ և $\Delta y_i \rightarrow 0$), ապա այդ սահմանն արտահայտում է L կորով M կետից մինչև N կետը F ուժի աշխատանքը.

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n [X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i] \quad (2)$$

Այդ կողմում գտնվող սահմանն* անվանում են $X(x, y)$ և $Y(x, y)$ ֆունկցիաների կորագիծ ինտեգրալ ըստ L կորի և նշանակում են այսպես

$$A = \int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy \quad (3)$$

կամ

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy \quad (3')$$

(2) տեսքի գումարների սահմանները հաճախ են հանդիպում մասթեմատիկայում և մեխանիկայում, ըստ որում $X(x, y)$ -ը և $Y(x, y)$ -ը դիտվում են որպես մի սրոշ D տիրույթում երկու փոփոխականների ֆունկցիաներ:

Ինտեգրման սահմանների փոխարեն գրված M և N տառերը փակագծերի մեջ են առնված ի նշան այն բանի, որ դրանք թվեր չեն, այլ նշանակում են այն կորի ծայրակետերը, ըստ որի վերցվում է կորագիծ ինտեգրալը: L կորով՝ M կետից դեպի N կետ ուղղությունը կոչվում է ինտեգրման ուղղություն:

Եթե L կորը տարածական է, ապա $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$,

* Այստեղ ինտեգրալային գումարի սահմանը ըմբռնվում է նույն իմաստով, ինչպես որոշյալ ինտեգրալների դեպքում, տես I հատորի XI գլխի § 2-ը:

$Z(x, y, z)$ երեք ֆունկցիաների կորագիծ ինտեգրալը սահմանվում է նման ձևով.

$$\int_L X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz = \\ = \lim_{\substack{\Delta x_k \rightarrow 0 \\ \Delta y_k \rightarrow 0 \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n X(x_k, y_k, z_k) \Delta x_k + Y(x_k, y_k, z_k) \Delta y_k + Z(x_k, y_k, z_k) \Delta z_k$$

Ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող L տառը ցույց է տալիս, որ ինտեգրումը կատարվում է L գծի երկայնքով:

Նշենք կորագիծ ինտեգրալի երկու հատկություններ:

Հատկություն 1: Կորագիծ ինտեգրալը որոշվում է ենթա-ինտեգրալային արտահայտությամբ, ինտեգրման կորի ձևով և ինտեգրման ուղղությամբ նշումով:

Ինտեգրման ուղղությունը փոխելիս կորագիծ ինտեգրալը փոխում է նշանը, քանի որ այդ դեպքում Δs վեկտորը, և, հետևաբար, նաև նրա Δx և Δy պրոյեկցիաները փոխում են իրենց նշանը:

Հատկություն 2: L կորը K կետով բաժանենք L_1 և L_2

մասերի այնպես, որ $\overline{MN} = \overline{MK} + \overline{KN}$ (նկ. 343): Այդ դեպքում (1) բանաձևից ամիջապես հետևում է

$$\int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy = \int_{(M)}^{(K)} X dx + Y dy + \int_{(K)}^{(N)} X dx + Y dy$$

Այս առնչությունը ճշմարիտ է ցանկացած թվով գումարելիների համար:

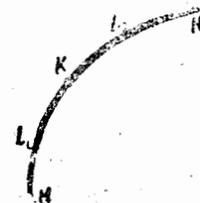
Նշենք նաև, որ կորագիծ ինտեգրալի սահմանումը մնում է ուժի մեջ նաև այն դեպքում, հրք L կորը փակ է:

Այս դեպքում կորի սկզբնական և վերջնական կետերը համընկնում են: Ուստի փակ կորի դեպքում չենք կարող գրել $\int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy$,

այլ միայն՝ $\int_L X dx + Y dy$, ընդ որում անպայման նշելով L կորի

շրջանցման ուղղությունը: Ըստ L փակ կոնտուրի կորագիծ ինտեգրալը նշանակելու համար հաճախ օգտագործվում է նաև $\int X dx + Y dy$

սիմվոլը: Դիտողություն: Մենք կորագիծ ինտեգրալի հասկացությունը եկանք՝ դիտարկելով L կորագիծ ճանապարհով F ուժի կատարած աշխատանքի վերաբերյալ խնդիրը:



Նկ. 343

Այս դեպքում L կորի բոլոր կետերում տրված էր F ուժը՝ որպես կիրառման կետի (x, y) կոորդինատների F վեկտորական ֆունկցիա. F փոփոխական վեկտորի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա հավասար են $X(x, y)$ և $Y(x, y)$ սկալյար (այսինքն՝ թվային) ֆունկցիաներին: Ուստի $\int_L Xdx + Ydy$ տեսքի կորագիծ ինտեգրալը կարելի է դիտել որպես X և Y պրոյեկցիաներով տրված F վեկտորական ֆունկցիայի կորագիծ ինտեգրալ:

Ըստ L կորի F վեկտորական ֆունկցիայի ինտեգրալը նշանակվում է

$$\int_L F ds$$

սիմվոլով: Եթե F վեկտորը որոշվում է իր X, Y, Z պրոյեկցիաներով, ապա այս ինտեգրալը հավասար է

$$\int_L Xdx + Ydy + Zdz$$

կորագիծ ինտեգրալին: Մասնավորապես, եթե F վեկտորը գտնվում է Oxy հարթության վրա, ապա այդ վեկտորի ինտեգրալը հավասար է

$$\int_L Xdx + Ydy:$$

Այն դեպքերում, երբ F վեկտորական ֆունկցիայի կորագիծ ինտեգրալը վերցվում է ըստ L փակ կորի, այդ կորագիծ ինտեգրալն անվանում են նաև F վեկտորի ցիքկոնյույացիա (շրջապտույտ) ըստ L փակ կոնտուրի:

§ 2. Կորագիծ ինտեգրալի հաշվումը

Այս պարագրաֆում կճշգրտենք § 1-ի (1) գումարի սահմանի գաղափարը և այդ կապակցությամբ կճշգրտենք նաև կորագիծ ինտեգրալի գաղափարն ու ցույց կտանք այն հաշվելու եղանակը:

Դիցուք L կորը տրված է

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

պարամետրիկական հավասարումներով:

Դիտարկենք այդ կորի MN աղեղը (նկ. 344): Դիցուք M և N կետերին համապատասխանում են պարամետրի α և β արժեքները: MN աղեղը $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ կետերով տրոհենք ΔS_i մասերի, ընդ որում ընդունենք $x_i = \varphi(t_i), y_i = \psi(t_i)$:

Դիտարկենք

$$\int_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy \quad (1)$$

կորագիծ ինտեգրալը, որը սահմանվել է նախորդ պարագրաֆում: Առանց ապացուցման բերենք կորագիծ ինտեգրալի գոյություն թեորեմը: Եթե $\varphi(t)$ և $\psi(t)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են և ունեն $\varphi'(t)$ և $\psi'(t)$ անընդհատ ածանցյալներ, $X[\varphi(t), \psi(t)]$ և $Y[\varphi(t), \psi(t)]$ ֆունկցիաները որպես t -ի ֆունկցիաներ նույնպես անընդհատ են $[\alpha, \beta]$ հատվածում, ապա գոյություն ունեն

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta x_i = A, \quad \lim_{\Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta y_i = B \quad (2)$$

աանմանները, որտեղ \bar{x}_i -ն և \bar{y}_i -ն ΔS_i աղեղին պատկանող մի որոշ կետի կոորդինատներն են: Այդ սահմանները կախված չեն L աղեղը ΔS_i մասնակի աղեղների տրոհման եղանակից՝ պայմանով, որ $\Delta S_i \rightarrow 0$, կախված չեն ΔS_i աղեղի վրա $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ կետի ընտրությունից. նրանք կոչվում են կորագիծ ինտեգրալներ և նշանակվում են այսպես.

$$A = \int_L X(x, y)dx, \quad B = \int_L Y(x, y)dy \quad (2')$$

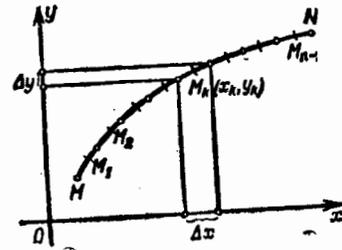
Դիտողություն: Թեորեմից հետևում է, որ այդ նույն սահմանին, այսինքն՝ կորագիծ ինտեգրալին են ձգտում նախորդ պարագրաֆում սահմանված գումարները, որտեղ $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ կետերը ΔS_i աղեղի ծայրակետերն են, իսկ L աղեղը մասերի տրոհելու համակարգը ցանկացած է:

Բանաձևված թեորեմը հնարավորություն է տալիս ստանալ կորագիծ ինտեգրալը հաշվելու համար եղանակ: Եվ այսպես, ըստ սահմանման ունենք

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta x_i \quad (3)$$

որտեղ

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$$



Նկ. 344

Վերջին տարրերում թվունը ձևափոխենք ըստ Լադրանժի բանաձևի.

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i,$$

որտեղ τ_i -ն t -ի մի որոշ արժեքն է, որը պարավակված է t_{i-1} -ի և t_i -ի միջև: Քանի որ \bar{x}_i , \bar{y}_i կեսը ΔS_i աղեղի վրա կարելի է վերցնել կամայական, ապա այն ընտրենք այնպես, որպեսզի նրա կոորդինատները համապատասխանեն պարամետրի τ_i արժեքին:

$$\bar{x}_i = \varphi(\tau_i), \quad \bar{y}_i = \psi(\tau_i);$$

\bar{x}_i -ի, \bar{y}_i -ի և Δx_i -ի դասձևերը տեղադրելով (3) բանաձևի մեջ, կստանանք.

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y) dx = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)] \varphi'(\tau_i) \Delta t_i,$$

Այս կողմի արտահայտությունը $X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)$ մեկ փոփոխականի անընդհատ ֆունկցիայի համար $[\alpha, \beta]$ հատվածում ինտեգրալին գումարի սահմանն է:

Հետևաբար, այդ սահմանը հավասար է նշված ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալին.

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Նման ձևով ստացվում է հետևյալ բանաձևը.

$$\int_{(M)}^{(N)} Y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Y[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) dt.$$

Անդամ առ անդամ գումարելով այս հավասարությունները, կստանանք

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Y[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt. \quad (4)$$

Սա էլ հենց կորագիծ ինտեգրալը հաշվելու համար որոնվող բանաձևն է:

Նման ձևով հաշվվում է

$$\int X dx + Y dy + Z dz$$

կորագիծ ինտեգրալն ըստ տարածական կորի, որը տրված է $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ հավասարումներով:

Օրինակ 1. Հաշվել $x^3, 3zy^2, -x^2y$ երեք ֆունկցիաների (կամ, որ միևնույն է՝ $x^3 + 3zy^2 - x^2y$ վեկտորական ֆունկցիայի) կորագիծ ինտեգրալը $M(3, 2, 1)$ կետից մինչև $N(0, 0, 0)$ կետը գնացող ուղղի հատվածի երկայնքով (նկ. 345).

Լուծում. Այն MN գծի պարամետրական հավասարումները գտնելու համար, որի երկայնքով պետք է կատարվի ինտեգրումը, գրենք տրված երկու կետերով անցնող ուղղի հավասարումը.

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

այս բոլոր հարաբերությունները նշանակելով t տառով, կստանանք ուղղի հավասարումները պարամետրական տեսքով.

$$x = 3t, \quad y = 2t, \quad z = t,$$

Ընդ որում MN հատվածի սկզբնակետին, ակնհայտ է, համապատասխանում է պարամետրի $t = 1$ արժեքը, իսկ հատվածի վերջնակետին՝ $t = 0$ արժեքը, իսկ հատվածի վերջնակետին՝ $t = 0$ արժեքը, x -ի, y -ի, z -ի ածանցյալներն ըստ t պարամետրի (որոնք պետք են կորագիծ ինտեգրալը հաշվելիս) գտնում են հեշտաթյամբ.

$$x'_t = 3, \quad y'_t = 2, \quad z'_t = 1.$$

Այժմ որոնվող կորագիծ ինտեգրալը կարելի է հաշվել (4) բանաձևով.

$$\int_{(M)}^{(N)} x^3 dx + 3zy^2 dy - x^2 y dz = \int_1^0 [(3t)^3 \cdot 3 + 3t(2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2 \cdot 2t \cdot 1] dt = \int_1^0 87t^3 dt = -\frac{87}{4}.$$

Օրինակ 2. Հաշվել $6x^2y, 10xy^2$ ֆունկցիաների գույգի կորագիծ ինտեգրալը $y = x^3$ հարթ կորի երկայնքով՝ նրա $M(1, 1)$ կետից մինչև $N(2, 8)$ կետը (նկ. 346).

Լուծում. Որոնվող

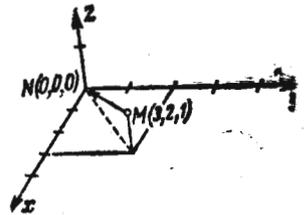
$$\int_{(M)}^{(N)} 6x^2 y dx + 10x y^2 dy$$

ինտեգրալը հաշվելու համար պետք է ունենալ տվյալ կորի պարամետրական հավասարումները, Բայց կորի տրված բացահայտ $y = x^3$ հավասարումը պարամետրականի մասնավոր դեպքն է, այստեղ որպես պարամետր ծառայում է կորի կետի x արժեքը, և կորի պարամետրական հավասարումները այսպիսին են.

$$x = x, \quad y = x^3.$$

x պարամետրը փոփոխվում է $x_1 = 1$ -ից մինչև $x_2 = 2$, հետևաբար հաշվել ածանցյալներն ըստ պարամետրի.

$$x'_x = 1, \quad y'_x = 3x^2.$$



Նկ. 345

Հետևաբար,

$$\int_1^2 6x^2 y dx + 10xy^2 dy = \int_1^2 (6x^2 x^3 \cdot 1 + 10x x^6 \cdot 3x^2) dx =$$

$$= \int_1^2 (6x^5 + 30x^9) dx = [x^6 + 3x^{10}]_1^2 = 3132.$$

Այժմ նշենք կորագիծ ինտեգրալի մի քանի կիրառություններ:

1. Կորով սահմանափակված մակերեսի արտահայտությունը կորագիծ ինտեգրալով: Դիցուք Oxy հարթության վրա տրված է L կոնտուրով սահմանափակված այնպիսի D տիրույթ, որ կորը ինտեգրալի արևմտյան առանցքներից որևէ մեկին զուգահեռ և տիրույթի ներքին կետով անցնող ամեն մի ուղիղ տիրույթի L հզրագիծը հատում է ոչ ավելի, քան երկու կետում (այսինքն՝ D տիրույթը կանոնավոր է) (նկ. 347):

Ենթադրենք, որ Ox առանցքի վրա D տիրույթի պրոյեկցիան $[a, b]$ հատվածն է, ընդ որում այն ներքևից սահմանափակված է (l_1) կորով՝

$$y = y_1(x)$$

իսկ վերևից՝ (l_2) կորով՝

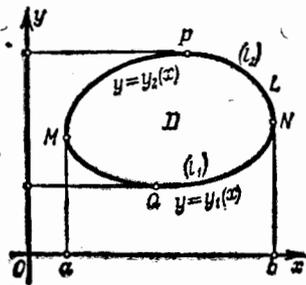
$$y = y_2(x),$$

$$[y_1(x) \leq y_2(x)]:$$

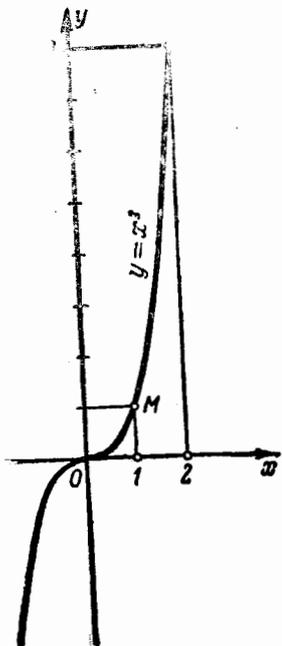
Այդ դեպքում D տիրույթի մակերեսը հավասար է

$$S = \int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx:$$

Սակայն առաջին ինտեգրալն ըստ $l_2(MPN)$ կորի՝ կորագիծ ինտեգրալն է,



Նկ. 347



Նկ. 346

քանի որ $y = y_2(x)$ այդ կորի հավասարումն է. հետևաբար,

$$\int_a^b y_2(x) dx = \int_{MPN} y dx:$$

Երկրորդ ինտեգրալը ըստ $l_1(MQN)$ կորի կորագիծ ինտեգրալն է, այսինքն՝

$$\int_a^b y_1(x) dx = \int_{MQN} y dx:$$

Կորագիծ ինտեգրալի 1-ին հատկության հիման վրա ունենք

$$\int_{MPN} y dx = - \int_{NPM} y dx:$$

Հետևաբար,

$$S = - \int_{NPM} y dx - \int_{MQN} y dx = - \int_L y dx: \quad (5)$$

Ընդ որում L կորը շրջանցվում է ժամացույցի սլաքի շարժմանը հակառակ ուղղությամբ:

Եթե L հզրագիծի մի մասը կազմում է Oy առանցքին զուգահեռ M_1M հատվածը, ապա $\int_{(M_1)} y dx = 0$ և (5) հավասարությունը մնում է իրավացի և այս դեպքում (նկ. 348):

Նման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ

$$S = \int_L x dy: \quad (6)$$

Անդամ առ անդամ գումարելով (5) և (6) հավասարությունները և բաժանելով 2-ի, S մակերեսը հաշվելու համար կստանանք մեկ բանաձև և՛

$$S = \frac{1}{2} \int_L x dy - y dx: \quad (7)$$

Օրինակ 3: Հաշվել

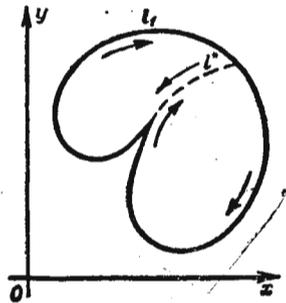
$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

էլիպսի մակերեսը:

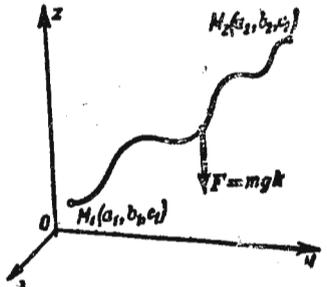
Լուծում: Ըստ (7) բանաձևի գտնում ենք.

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t (-a \sin t)] dt = \pi ab:$$

Նշենք, որ (7) բանաձևը, ինչպես և (5) և (6) բանաձևերը ճիշտ են նաև այն մակերևանների համար, որոնց եզրագծերը կոորդինատային առանցքներին զուգահեռ ուղղիչների հետ համովում են երկուսից ազնի կետերում (նկ. 349):



Նկ. 349



Նկ. 350

Այդ ապացուցելու համար տվյալ տիրույթը (նկ. 349) l^* գծի միջոցով տրոհենք երկու կանոնավոր տիրույթի: Դրանցից յուրաքանչյուրի համար (7) բանաձևն իրավացի է: Դումարելով աջ և ձախ մասերը, կստանանք աջից՝ տվյալ տիրույթի մակերեսը, ձախից՝ կորագիծ ինտեգրալ $\left(\frac{1}{2}\right)$ գործակիցով, վերցրած ամբողջ եզրագծով, քանի որ կորագիծ ինտեգրալը l^* գծով վերցվում է երկու անգամ՝ ուղիղ և հակառակ ուղղություններով և: հետևաբար, հավասար է զրոյի:

2. Խնդիր մի որոշ L կորագիծ ճանապարհով F փոփոխական ուժի աշխատանքը հաշվելու վերաբերյալ: Ինչպես ցույց է տրվել § 1-ի սկզբում, $L=MN$ գծի երկայնքով $F=X(x, y, z)i+Y(x, y, z)j+Z(x, y, z)k$ ուժի կատարած աշխատանքը հավասար է հետևյալ կորագիծ ինտեգրալին.

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz:$$

Դիտարկենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս, թե կոնկրետ դեպքերում ինչպես է կատարվում ուժի աշխատանքի հաշվումը:

Օրինակ 1: Որոշել F ծանրության ուժի կատարած աշխատանքը m զանգվածը $M_1(a_1, b_1, c_1)$ կետից L կամայական ճանապարհով $M_2(a_2, b_2, c_2)$ կետը տեղափոխելիս (նկ. 350):

Նշենք, որ F ծանրության ուժի պրոյեկցիաները հավասար են

$$X=0, Y=0, Z=-mg:$$

Հետևաբար, որոնվող աշխատանքը կլինի

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X dx + Y dy + Z dz = \int_{c_1}^{c_2} (-mg) dz = mg(c_1 - c_2):$$

Հետևաբար, այս դեպքում կորագիծ ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից, այլ կախված է միայն սկզբնական և վերջնական կետերից: Ազնի ճիշտ, ծանրության ուժի աշխատանքը կախված է միայն ճանապարհի սկզբնական և վերջնական կետերի բարձրությունների տարբերությունից:

§ 3. Գրինի բանաձևը

Կապ հաստատենք ըստ մի որոշ D տիրույթի կրկնակի ինտեգրալի և այդ տիրույթի L եզրագծով կորագիծ ինտեգրալի միջև:

Դիցուք Oxy հարթության վրա տրված է L փակ կոնտուրով սահմանափակված D տիրույթը, որը կանոնավոր է ինչպես Ox առանցքի ուղղությամբ, այնպես էլ Oy առանցքի ուղղությամբ: Ենթադրենք այդ տիրույթը ներքևից սահմանափակված է $y=y_1(x)$ կորով, իսկ վերևից՝ $y=y_2(x)$ կորով, $y_1(x) \leq y_2(x)$ ($a \leq x \leq b$) (նկ. 347):

Միասին վերցրած այդ երկու կորերը կազմում են L փակ կոնտուրը: Դիցուք D տիրույթում տրված են $X(x, y)$ և $Y(x, y)$ անընդհատ ֆունկցիաները, որոնք ունեն անընդհատ մասնական ածանցյալներ: Դիտարկենք

$$\iint_D \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} dx dy$$

ինտեգրալը: Այն ներկայացնելով կրկնապատիկ տեսքով, կստանանք.

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b X(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b [X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x))] dx: \end{aligned} \quad (1)$$

Նկատենք, որ

$$\int_a^b X(x, y_2(x)) dx$$

ինտեգրալը թվապես հավասար է

$$\int_{(MPN)} X(x, y) dx$$

կորագիծ ինտեգրալին՝ վերցրած ըստ MPN կորի, որի պարամետրական հավասարումներն են

$$x=x, y=y_2(x),$$

որտեղ x -ը պարամետրն է:
Այսպիսով,

$$\int_a^b X(x, y_2(x))dx = \int_{MPN} X(x, y)dx \quad (2)$$

Նման ձևով

$$\int_a^b X(x, y_1(x))dx$$

ինտեգրալը թվապես հավասար է ըստ MQN աղեղի կորագիծ ինտեգրալին.

$$\int_a^b X(x, y_1(x))dx = \int_{(MQN)} X(x, y)dx \quad (3)$$

(2) և (3) արտահայտությունները տեղադրելով (1) բանաձևի մեջ, կստանանք.

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = \int_{MPN} X(x, y)dx - \int_{MQN} X(x, y)dx \quad (4)$$

Բայց

$$\int_{MQN} X(x, y)dx = - \int_{NQM} X(x, y)dx$$

(տես § 1, 1-ին հատկություն): Հետևաբար, (4) բանաձևը կարելի է գրել այսպես.

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = \int_{MPN} X(x, y)dx + \int_{NQM} X(x, y)dx$$

Բայց աջ մասի կորագիծ ինտեգրալների գումարը հավասար է ամբողջ L փակ գծով ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ վերգրած կորագիծ ինտեգրալին: Հետևաբար, վերջին հավասարությունը կարելի է բերել այսպիսի տեսքի.

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = \int_L X(x, y)dx \quad (5)$$

(ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ)

Եթե եզրագծի մի մասն է կազմում Oy առանցքին զուգահեռ l_3

հատվածը, ապա $\int_{l_3} X(x, y)dx = 0$, և (5) հավասարությունը մնում է

ճիշտ նաև այս դեպքում:
Նման ձևով կգտնենք.

$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x} dx dy = - \int_L Y(x, y)dy$$

(ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ)

Հանելով (5)-ից (6)-ը, կստանանք.

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dx dy = \int_L X dx + Y dy$$

(ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ)

Եթե L կոնտուրի շրջանցումը կատարվում է ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ հակառակ, ապա*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_L X dx + Y dy$$

Սա էլ հենց այսպես կոչվող Գրինի բանաձևն է, որն այդպես է անվանված անգլիացի ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս Գ. Գրինի (1793—1841) անունով**:

Մենք ենթադրել ենք, որ D տիրույթը կանոնավոր է: Բայց, ինչպես և մակերեսի մասին խնդրում (տես § 2), կարելի է ցույց տալ, որ այս բանաձևը ճիշտ է ցանկացած տիրույթի համար, որը կարելի է տրոհել կանոնավոր տիրույթների:

§ 4. Ինտեգրման ճանապարհից կորագիծ ինտեգրալի անկախության պայմանները

Գիտարկենք

$$\int_{(M)}^{(N)} Xdx + Ydy$$

կորագիծ ինտեգրալը, որը վերցված է ըստ M և N կետերը միացնող

* Եթե ըստ վաղ կոնտուրի կորագիծ ինտեգրալում կոնտուրի շրջանցման ուղղությունը չի նշված, ապա ենթադրվում է, որ այդ շրջանցումը կատարվում է ժամացույցի սլաքի շարժմանը հակառակ: Իսկ եթե շրջանցումը կատարվում է ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ, ապա դա պետք է հատուկ կերպով նշվի:

** Այս բանաձևը ուսու մաթեմատիկոս Մ. Վ. Օստրոգորսկու հայտնագործած ափելի ընդհանուր բանաձևի մասնավոր դեպքն է:

որոշ L հարթ կորի: Ենթադրելու ենք, որ զիտարկվող D տիրույթում $X(x, y)$ և $Y(x, y)$ ֆունկցիաներն ունեն անընդհատ մասնական ածանցյալներ: Պարզենք, թե ինչ պայմանների դեպքում պրված կորագիծ ինտեգրալը կախված չէ L կորի ձևից, այլ կախված է միայն M և N սկզբնական ու վերջնական կետերի դիրքից:

Քննարկենք զիտարկվող D տիրույթում գտնվող և M ու N կետերը միացնող MPN և MQN երկու կամայական կորեր (նկ. 351):

$$\int_{MPN} Xdx + Ydy = \int_{MQN} Xdx + Ydy, \quad (1)$$

այսինքն՝

$$\int_{MPN} Xdx + Ydy - \int_{MQN} Xdx + Ydy = 0,$$

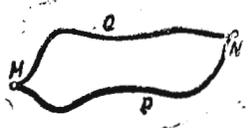
Այս դեպքում կորագիծ ինտեգրալների 1-ին և 2-րդ հատկությունների (§ 1) հիման վրա ունենք

$$\int_{MPN} X dx + Y dy + \int_{NQM} X dx + Y dy = 0.$$

այսինքն՝ ըստ L փակ կոնտուրի կորագիծ ինտեգրալը՝

$$\int_L X dx + Y dy = 0. \quad (2)$$

Վերջին բանաձևում կորագիծ ինտեգրալը վերցված է MPN և NQM կորերից կազմված L փակ կոնտուրով: Ակնհայտ է՝ այդ կոնտուրը կարելի է համարել կամայական:



նկ. 351

Այսպիսով, այն պայմանից, որ M և N ցանկացած երկու կետերի համար կորագիծ ինտեգրալը կախված չէ այդ կետերը միացնող կորի ձևից, այլ կախված է միայն այդ կետերի դիրքից, հետևում է, որ կորագիծ ինտեգրալն ըստ ցանկացած փակ կոնտուրի հավասար է զրոյի:

Արդարև է նաև հակադարձ եզրակացությունը. եթե կորագիծ ինտեգրալն ըստ ցանկացած փակ կոնտուրի հավասար է զրոյի, ապա այդ կորագիծ ինտեգրալը կախված չէ ցանկացած երկու կետերը միացնող կորի ձևից, այլ կախված է միայն այդ կետերի դիրքից: Իրոք, (2) հավասարությունից հետևում է (1) հավասարությունը:

§ 2-ի 4-րդ օրինակում կորագիծ ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից. 3-րդ օրինակում կորագիծ ինտեգրալը կախված

է ինտեգրման ճանապարհից, քանի որ այս օրինակում ինտեգրալն ըստ փակ կոնտուրի հավասար չէ զրոյի, այլ հավասար է զիտարկվող կոնտուրով սահմանափակված մակերեսին: 1-ին և 2-րդ օրինակներում կորագիծ ինտեգրալները նույնպես կախված են ինտեգրման ճանապարհից:

Բնականաբար հարց է ծագում. ինչպիսի պայմանների պետք է բուլարարեն $X(x, y)$ և $Y(x, y)$ ֆունկցիաներն այն բանի համար, որպեսզի $\int X dx + Y dy$ կորագիծ ինտեգրալն ըստ ցանկացած փակ կոնտուրի հավասար լինի զրոյի: Այս հարցի պատասխանը տալիս է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ: Դիցուք մի որոշ D տիրույթի բոլոր կետերում $X(x, y)$, $Y(x, y)$ ֆունկցիաներն իրենց $\frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$ և $\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x}$ մաս-

նակալն ածանցյալների հետ անընդհատ են: Այդ դեպքում, այն բանի համար, որպեսզի կորագիծ ինտեգրալն ըստ այդ տիրույթում ընկած ցանկացած L փակ կոնտուրի հավասար լինի զրոյի, այսինքն՝ որպեսզի

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0, \quad (2')$$

անհրաժեշտ է և բավարար

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (3)$$

պայմանի տեղի ունենալը D տիրույթի բոլոր կետերում: Ապացուցում: Դիտարկենք D տիրույթում ընկած կամայական L փակ կոնտուրը և նրա համար գրենք Գրինի բանաձևը.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_L X dx + Y dy:$$

Եթե (3) պայմանը տեղի ունի, ապա ձախ մասի կրկնակի ինտեգրալը նույնպես հավասար է զրոյի և, հետևաբար,

$$\int_L X dx + Y dy = 0.$$

Այսպիսով, (3) պայմանի բավարարումը L ունը ապացուցված է: Այժմ ապացուցենք այդ պայմանի անհրաժեշտությունը, այսինքն՝ ցույց տանք, որ եթե (2) պայմանը տեղի ունի D տիրույթի ցանկացած L փակ կորի համար, ապա այդ տիրույթի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունի և (3) պայմանը:

Ենթադրենք ընդհակառակը, որ (2) հավասարությունը տեղի ունի, այսինքն՝

$$\int_L X dx + Y dy = 0,$$

իսկ (3) պայմանը տեղի չունի, այսինքն՝

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$$

Թեկուզ մեկ կետում: Գիցուք, օրինակ, որևէ $P(x_0, y_0)$ կետում առնենք

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0$$

անհավասարությունը:

Քանի որ անհավասարության ձախ մասի ֆունկցիան անընդատ է, ապա այն կլինի զրական և մեծ որևէ $\delta > 0$ թվից $P(x_0, y_0)$ կետի ընդգրկող որևէ D' բավականին փոքր տիրույթի բոլոր կետերում: Վերջինս $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ տարբերության կրկնակի ինտեգրալն ըստ այդ տիրույթի: Այն կունենա դրական արժեք: Իրաք

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy > \iint_{D'} \delta dx dy = \delta \iint_{D'} dx dy = \delta D' > 0,$$

Բայց ըստ Գրինի բանաձևի վերջին անհավասարության ձախ մասը հավասար է ըստ D' տիրույթի L' եզրագծի կորագիծ ինտեգրալին, որն, ըստ ենթադրության, հավասար է զրոյի: Հետևաբար, վերջին անհավասարությունը հակասում է (2) պայմանին, և նշանակում է,

այն ենթադրությունը, որ $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ թեկուզ մեկ կետում տարբեր է զրոյից, ճիշտ չէ: Այստեղից հետևում է, որ

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

ովիշալ D տիրույթի բոլոր կետերում:

Այսպիսով, թեորեմը լրիվ ապացուցված է:

VIII գլխի § 9-ում ապացուցվել էր, որ

$$\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$$

պայմանի բավարարվելը համարժեք է նրան, որ $Xdx + Ydy$ արտա-

հայտությունը որոշ $u(x, y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալն է, այսինքն՝

$$Xdx + Ydy = du(x, y),$$

ընդ որում

$$X(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y},$$

Բայց այս դեպքում

$$F = Xi + Yj = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$$

վեկտորը $u(x, y)$ ֆունկցիայի գրադիենտն է. $u(x, y)$ ֆունկցիան, որի գրադիենտը հավասար է $Xi + Yj$ վեկտորին, կոչվում է այդ վեկտորի պոտենցիալ:

Ապացուցենք, որ այս դեպքում $\int_{(M)}^{(N)} Xdx + Ydy$ կորագիծ ինտե-

գրալն ըստ M և N կետերը միացնող ցանկացած L կորի հավասար է u ֆունկցիայի՝ այդ կետերում ունեցած արժեքների տարբերությանը.

$$\int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy = \int_{(M)}^{(N)} du(x, y) = u(N) - u(M),$$

Ապացուցում: Եթե $Xdx + Ydy$ արտահայտությունը $u(x, y)$

ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալն է, ապա $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$ և կորագիծ ինտեգրալն ընդունում է

$$I = \int_{(M)}^{(N)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

տեսքը: Այս ինտեգրալը հաշվելու համար գրենք M և N կետերը միացնող L կորի պարամետրական հավասարումները,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t);$$

Կընդունենք, որ պարամետրի $t = t_0$ արժեքին համապատասխանում է M կետը, իսկ $t = T$ արժեքին՝ N կետը: Այս դեպքում կորագիծ ինտեգրալը վերածվում է հետևյալ որոշյալ ինտեգրալին.

$$I = \int_{t_0}^T \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right] dt,$$

Փակագծերի ներսի արտահայտությունը t -ի ֆունկցիա է, որը $u[\varphi(t), \psi(t)]$ ֆունկցիայի ըրիվ ածանցյալն է ըստ t -ի: Ուստի

$$I = \int_{t_0}^T \frac{du}{dt} dt = u[\varphi(t), \psi(t)] \Big|_{t_0}^T = u[\varphi(t), \psi(t)] - u[\varphi(t_0), \psi(t_0)] = \\ = u(N) - u(M),$$

ինչպես տեսնում ենք, ըրիվ դիֆերենցիալի կորագիծ ինտեգրալը կախված չէ այն կորի ձևից, ըստ որի կատարվում է ինտեգրումը:

Նման պնդում տեղի ունի և ըստ տարածական կորի կորագիծ ինտեգրալի համար (տես ստորև, § 7):

Դիտողություն: Երբեմն հարկ է լինում գիտարկել որոշ $X(x, y)$ ֆունկցիայի կորագիծ ինտեգրալներն ըստ L աղեղի երկարությունից:

$$\int_L X(x, y) ds = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(x_i, y_i) \Delta s_i, \quad (4)$$

որտեղ ds -ը աղեղի դիֆերենցիալն է: Այսպիսի ինտեգրալները հաշվում են վերևում շիտարկված ինտեգրալները հաշվելու նման: Դիցուք L կորը տրված է

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

պարամետրական հավասարումներով, որտեղ $\varphi(t)$ -ն, $\psi(t)$ -ն, $\varphi'(t)$ -ն, $\psi'(t)$ -ն t -ի անընդհատ ֆունկցիաներ են:

Դիցուք α -ն և β -ն պարամետրի այն արժեքներն են, որոնք համապատասխանում են L աղեղի սկզբին և վերջին:

Քանի որ

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt,$$

ապա ստանում ենք (4) ինտեգրալը հաշվելու համար հետևյալ բանաձևը:

$$\int_L X(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt,$$

Կարելի է գիտարկել կորագիծ ինտեգրալն ըստ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ տարածական կորի աղեղի:

$$\int_L X(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt,$$

Ըստ աղեղի կորագիծ ինտեգրալների օգնությամբ որոշվում են, օրինակ, գծերի ծանրություն կենտրոնների կոորդինատները:

Դասելով այնպես, ինչպես XII դրիի § 8-ում (I հատ.), կտանանք տարածական կորի ծանրություն կենտրոնի կոորդինատները հաշվելու համար բանաձև՝

$$x_c = \frac{\int_L x ds}{\int_L ds}, \quad y_c = \frac{\int_L y ds}{\int_L ds}, \quad z_c = \frac{\int_L z ds}{\int_L ds}, \quad (5)$$

Օրինակ, Գտնել

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

պտուտակազդի մեկ փաթի (ВЫТОК) ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, եթե նրա գծային խտությունը հաստատուն է:

Լուծում: Կիրառելով (5) բանաձևը, կգտնենք.

$$x_c = \frac{\int_0^{2\pi} a \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt} = \frac{\int_0^{2\pi} a \cos t \sqrt{a^2 + b^2} dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt} = \frac{a \cdot 0}{2\pi} = 0,$$

Նման ձևով, $y_c = 0$,

$$z_c = \frac{\int_0^{2\pi} bt \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt}{2\pi \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b \cdot 4\pi^2}{2\pi \cdot 2} = \pi b,$$

Այսպես, ուրեմն պտուտակազդի մեկ փաթի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները հավասար են

$$x_c = 0, y_c = 0, z_c = \pi b.$$

§ 5. ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

Դիցուք $Oxyz$ կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում տրված է որոշ V տիրույթ: Դիցուք V տիրույթում տրված է մի որոշ λ տարածական կորով սահմանափակված σ մակերևույթ:

σ մակերևույթի նկատմամբ ենթադրելու ենք, որ նրա շրջափանցյալ P կետում նորմալի դրական ուղղությունը որոշվում է $n(P)$ միավոր վեկտորի միջոցով, որի ուղղությամբ կոորդինատները մակերևույթի կետերի անընդհատ ֆունկցիաներ են:

Դիցուք մակերևույթի շրջափանցյալ կետում որոշված է

$$F = X(x, y, z)i + Y(x, y, z)j + Z(x, y, z)k$$

վեկտորը, որտեղ X -ը, Y -ը, Z -ը կոորդինատների անընդհատ ֆունկցիաներ են:

Մակերևույթը որևէ հղանակով տրոհենք $\Delta \sigma_i$ տարրական հար-

թակնների: Յուրաքանչյուր հարթակում վերցնենք կամայական P_i կետ և դիտարկենք

$$\sum_1 (F(P_i)n(P_i))\Delta\sigma_i \quad (1)$$

գումարը, որտեղ $F(P_i)$ -ն F վեկտորի արժեքն է $\Delta\sigma_i$ հարթակի P_i կետում, $n(P_i)$ -ն՝ այդ կետում նորմալի միավոր վեկտորը, Fn -ը՝ այդ վեկտորների սկալյար արտադրյալը:

(1) գումարի սահմանը՝ տարածված $\Delta\sigma_i$ բոլոր հարթակների վրա, երբ այդպիսի բոլոր հարթակների տրամագծերը ձգտում են զրոյի, կոչվում է մակերևութային ինտեգրալ և նշանակվում է

$$\iint_{\sigma} Fnd\sigma$$

սիմվոլով: Այսպիսով, ըստ սահմանման*,

$$\lim_{\text{diam}\Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum F_i n_i \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} F n d\sigma, \quad (2)$$

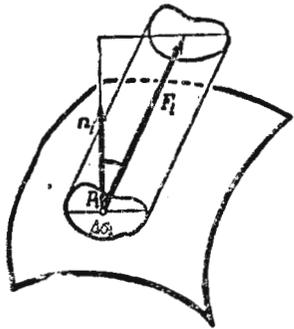
(1) գումարի չափաքանչյուր

$$F_i n_i \Delta\sigma_i = F_i \Delta\sigma_i \cos(n_i, F_i) \quad (3)$$

գումարելի կարող է մեխանիկորեն մեկնաբանվել հետևյալ կերպ. այդ արտադրյալը հավասար է $\Delta\sigma_i$ հիմք և $F_i \cos(n_i, F_i)$ բարձրություն ունեցող պլանի ծավալին: Եթե F վեկտորը σ մակերևութի միջով հոսող հեղուկի արագությունն է, ապա (3) արտադրյալը հավասար է հեղուկի այն քանակությունը, որը n_i վեկտորի ուղղությամբ ժամանակի միավորի ընթացքում հոսում է $\Delta\sigma_i$ մակերևութի միջով (նկ. 352):

$\iint_{\sigma} F n d\sigma$ արտահայտությունը տա-

լիս է միավոր ժամանակում դրական ուղղությամբ σ մակերևութի միջով հոսող հեղուկի ընդհանուր քանակությունը, եթե F վեկտորի տակ հասկացվի տվյալ կետում հեղուկի հոսքի արագության վեկտորը: Ուստի (2) մակերևութային ինտեգրալը կոչվում է F վեկտորական դաշտի հոսք σ մակերևութի միջոցով: Մակերևութային ինտեգրալի սահ-



Նկ. 352

* Եթե σ մակերևութին այնպիսին է, որի յուրաքանչյուր կետում գոյություն ունի շոշափող հարթություն, որը մակերևութի վրա P կետի տեղաշարժման հետ միասին անընդհատ փոշոխվում է, և եթե F վեկտորական ֆունկցիան այդ մակերևութի վրա անընդհատ է, ապա այդ սահմանը գոյություն ունի (ըստ մակերևութի ինտեգրալի գոյության մասին այս թեորեմն ընդունում ենք առանց ապացույցման):

մանումից հետևում է, որ եթե մակերևութը տրոհվի $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ մասերի, ապա

$$\iint_{\sigma} F n d\sigma = \iint_{\sigma_1} F n d\sigma + \iint_{\sigma_2} F n d\sigma + \dots + \iint_{\sigma_k} F n d\sigma:$$

n միավոր վեկտոր կոորդինատային առանցքների վրա արտահայտանք նրա պրոյեկցիաներով.

$$n = \cos(n, x)i + \cos(n, y)j + \cos(n, z)k:$$

Տեղադրելով (2) ինտեգրալում F և n վեկտորների արտահայտություններն իրենց պրոյեկցիաներով, կստանանք.

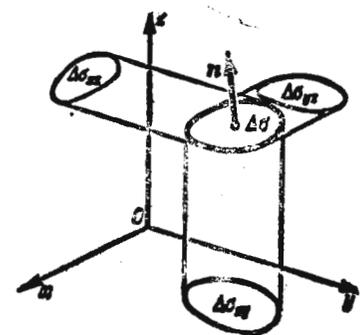
$$\iint_{\sigma} F n d\sigma = \iint_{\sigma} [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)] d\sigma: \quad (2')$$

$\Delta\sigma \cos(n, z)$ արտադրյալը $\Delta\sigma$ հարթակի պրոյեկցիան է Oxy հարթության վրա (նկ. 353). Նման պնդումը ճիշտ է նաև հետևյալ արտադրյալների համար.

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma \cos(n, x) &= \Delta\sigma_{yz}, \\ \Delta\sigma \cos(n, y) &= \Delta\sigma_{xz}, \\ \Delta\sigma \cos(n, z) &= \Delta\sigma_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

որտեղ $\Delta\sigma_{yz}, \Delta\sigma_{xz}, \Delta\sigma_{xy}, \Delta\sigma$ հարթակի պրոյեկցիաներն են համապատասխան կոորդինատային հարթությունների վրա: Իրա հիման վրա (2') ինտեգրալը գրում են նաև այլ ձևով.

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} F n d\sigma &= \iint_{\sigma} [X \cos(n, x) + \\ &+ Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)] d\sigma = \\ &= \iint_{\sigma} X dy dz + Y dz dx + Z dx dy, \quad (2'') \end{aligned}$$



Նկ. 353

§ 6. Մակերևութային ինտեգրալի հաշվումը

Կոր մակերևութային ինտեգրալի հաշվումը բերվում է ըստ հարթ տիրույթի կրկնակի ինտեգրալի հաշվելուն:

Յուրջ տակ.ք, օրինակ,

$$\iint_{\sigma} Z \cos(n, z) d\sigma$$

ինտեգրալի հաշվելու եղանակը:

Դիցուք σ մակերևութն այնպիսին է, որ Oz առանցքին զուգահեռ ամեն մի ուղիղ նրան հատում է մեկ կետում: Այդ դեպքում մակերևութի հավասարումը կարելի է գրել

$$z=f(x, y)$$

տեսքով: D -ով նշանակելով σ մակերևութի պրոյեկցիան Oxy հարթության վրա, կստանանք (մակերևութային ինտեգրալի սահմանման հիման վրա).

$$\iint_{\sigma} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma = \lim_{\text{diam} \Delta \sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, z_i) \cos(n_i, z) \Delta \sigma_i$$

Այնուհետև, հաշվի առնելով § 5-ի (4) բանաձևերից վերջինը, կստանանք.

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} Z \cos(n, z) d\sigma &= \lim_{\text{diam} \Delta \sigma_{xy} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) (\Delta \sigma_{xy})_i = \\ &= \pm \lim_{\text{diam} \Delta \sigma \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) |\Delta \sigma_{xy}|_i \end{aligned}$$

Իսկ վերջին արտահայտությունը $Z(x, y, f(x, y))$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալի համար ըստ D տիրույթի ինտեգրալային գումար է: Ուստի

$$\iint_{\sigma} Z \cos(n, z) d\sigma = \pm \iint_D Z(x, y, f(x, y)) dx dy$$

Ընդ որում կրկնակի ինտեգրալից առաջ վերցվում է պլլուս նշանը, եթե $\cos(n, z) \geq 0$, և մինուս նշանը, եթե $\cos(n, z) \leq 0$:

Եթե σ մակերևութը չի բավարարում այս պարագրաֆի սկզբում նշված պայմանին, ապա այն տրոհում են այդ պայմանին բավարարող մասերի և ինտեգրալը հաշվում են առանձին-առանձին՝ ըստ չորս քանչյուր մասի:

Նման ձևով հաշվում են հետևյալ ինտեգրալները.

$$\iint_{\sigma} X \cos(n, x) d\sigma, \quad \iint_{\sigma} Y \cos(n, y) d\sigma$$

Ապացուցածն արդարացնում է կրկնակի ինտեգրալը § 5-ում նշված (2'') տեսքով գրելը:

Այս դեպքում (2'') հավասարության աջ մասը կարելի է դիտարկել որպես ըստ σ տիրույթի համապատասխան պրոյեկցիաների կրկնակի ինտեգրալների գումար, ընդ որում այդ կրկնակի ինտեգրալների նշանները (կամ, ինչպես այլ կերպ են ասում, $dy dz$, $dx dz$, $dx dy$ արտադրյալների նշանները) վերցվում են վերը նշված կանոնների համաձայն:

Օրինակ 1. Դիցուք σ փակ մակերևութն այնպիսին է, որ Oz առանցքին զուգահեռ յուրաքանչյուր ուղիղ նրան հատում է ոչ ավելի, քան երկու կետում: Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը.

$$\iint_{\sigma} z \cos(n, z) d\sigma$$

Նորմալի զրական ուղղութունն կհամարենք արտաքին նորմալը: Տվյալ դեպքում կարելի է մակերևութը տրոհել երկու մասի՝ ստորին և վերին, սրանց հավասարումները, համապատասխանաբար, կլինեն.

$$z=f_1(x, y) \quad \text{և} \quad z=f_2(x, y):$$

D -ով նշանակենք σ -ի պրոյեկցիան Oxy հարթության վրա (նկ. 354). այդ դեպքում.

$$\iint_{\sigma} z \cos(n, z) d\sigma = \iint_D f_2(x, y) dx dy - \iint_D f_1(x, y) dx dy:$$

Երկրորդ ինտեգրալի մինուս նշանը վերցված է այն բանի համար, որ մակերևութային ինտեգրալում $dx dy$ -ի նշանը $z=f_1(x, y)$ մակերևութի վրա պետք է վերջնել բացասական, քանի որ նրա համար $\cos(n, z)$ -ը բացասական է:

Բայց վերջին բանաձևի աջ մասի ինտեգրալների տարբերությունը տալիս է σ մակերևութով սահմանափակված ծավալը: Նշանակում է, σ փակ մակերևութով սահմանափակված մարմնի ծավալը հավասար է հետևյալ մակերևութային ինտեգրալին.

$$V = \iint_{\sigma} z \cos(n, z) d\sigma$$

Օրինակ 2. e զրական էլեկտրական լիցքը, որը տեղավորված է կոորդինատների սկզբնակետում, ստեղծում է վեկտորական զաշտ այնպես, որ տարածության յուրաքանչյուր կետում ըստ կուլոնի օրենքի որոշվում է F վեկտորը,

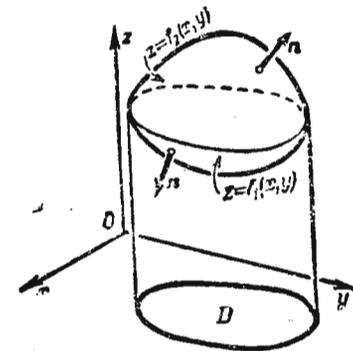
$$F = k \frac{e}{r^2} r$$

որտեղ r -ը դիտարկվող կետի հեռավորությունն է կոորդինատների սկզբնակետից, r -ը՝ տվյալ կետի շառավիղ վեկտորով ուղղված միավոր վեկտորը (նկ. 355), k -ն՝ հաստատուն գործակիցը: Որոշել վեկտորական զաշտի հոսքը կոորդինատների սկզբնակետում կենտրոն ունեցող R շառավիղով գնդային մակերևութի միջով:

Լուծում: Ուշադրություն դարձնելով, որ $r=R=\text{const}$, կունենանք.

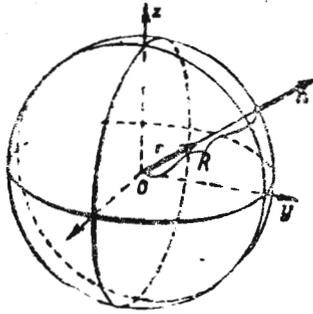
$$\iint_{\sigma} k \frac{e}{r^2} r n d\sigma = \frac{ke}{R^2} \iint_{\sigma} r n d\sigma$$

Բայց վերջին ինտեգրալը հավասար է σ մակերևութի մակերեսին, իբրք, ըստ ինտեգրալի սահմանման (հաշվի առնելով, որ $r n=1$) կստանանք.

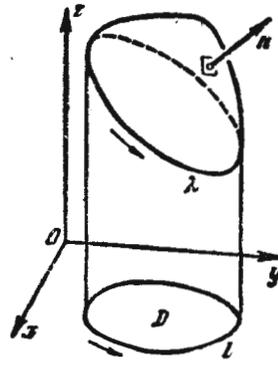


Նկ. 353

$$\iint_{\sigma} r n d\sigma = \lim_{\Delta\sigma_k \rightarrow 0} \sum r_k n_k \Delta\sigma_k = \lim_{\Delta\sigma_k \rightarrow 0} \sum \Delta\sigma_k = \sigma.$$



Նկ. 355



Նկ. 356

Հետևաբար, հոսքը հավասար է

$$\frac{ke}{R^2} \sigma = \frac{ke}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi ke.$$

§ 7. Ստորսի բանաձևը

Դիցուք ունենք այնպիսի σ մակերևույթ, որի հետ Oz առանցքին զուգահեռ ամեն մի ուղիղ հատվում է մեկ կետում: σ մակերևույթի եզրագիծը նշանակենք λ -ով: Π նորմալի զրական ուղղությունը վերջնենք այնպես, որպեսզի այն Oz առանցքի զրական ուղղության հետ կազմի սուր անկյուն (Նկ. 356):

Դիցուք մակերևույթի հավասարումն է $z=f(x, y)$: Նորմալի ուղղորդ կոսինուսներն արտահայտվում են հետևյալ բանաձևերով (տես I հատ. IX գլխի § 6).

$$\left. \begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \\ \cos(n, y) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \\ \cos(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \end{aligned} \right\} (1)$$

Ենթադրելու ենք, որ σ մակերևույթն էր բոլոր կետերով ընկած է որոշ V տիրույթում: Դիցուք V տիրույթում արված է $X(x, y, z)$ ֆունկցիան, որն իր առաջին կարգի մասնական ածանցյալների հետ անընդհատ է: Դիտարկենք

$$\int_{\lambda} X(x, y, z) dx$$

ըստ λ կորի կորագիծ ինտեգրալը: λ գծի վրա ունենք $z=f(x, y)$, որտեղ x -ը և y -ը Oxy հարթություն վրա λ գծի պրոյեկցիա հանդիսացող L գծի կետերի կոորդինատներն են (Նկ. 356): Հետևաբար, կարող ենք գրել հետևյալ հավասարությունը.

$$\int_{\lambda} X(x, y, z) dx = \int_L X(x, y, f(x, y)) dx; \quad (2)$$

Վերջին ինտեգրալն ըստ L գծի կորագիծ ինտեգրալ է: Այն ձևափոխենք ըստ Գրինի բանաձևի, ընդունելով

$$X(x, y, f(x, y)) = \bar{X}(x, y), \quad 0 = \bar{Y}(x, y);$$

Գրինի բանաձևում \bar{X} -ի և \bar{Y} -ի փոխարեն տեղադրելով նրանց արտահայտությունները, կստանանք.

$$- \iint_D \frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} dx dy = \int_L X(x, y, f(x, y)) dx, \quad (3)$$

որտեղ D տիրույթը սահմանափակված է L գծով: $X(x, y, f(x, y))$ բարդ ֆունկցիալի ածանցյալի հիման վրա, որտեղ y -ը մտնում է և անմիջապես, և $z=f(x, y)$ ֆունկցիալի միջոցով, կգտնենք.

$$\frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad (4)$$

(4) հավասարությունը տեղադրելով (3) հավասարության ձախ մասում, կստանանք.

$$- \iint_D \left[\frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right] dx dy = \int_L X(x, y, f(x, y)) dx;$$

Հաշվի առնելով (2) հավասարությունը, վերջին հավասարությունը կարելի է գրել այնպես.

$$\int_{\lambda} X(x, y, z) dx = - \iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy - \iint_D \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy; \quad (5)$$

Վերջին երկու ինտեգրալները ձևափոխվում են մակերևույթային ին-

տեղադրանքի: Իրոք, § 5-ի (2'') բանաձևից հետևում է, որ եթե ունենք որևէ $A(x, y, z)$ ֆունկցիա, ապա ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.

$$\int\int_{\sigma} A(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma = \int\int_D A dx dy,$$

Այս հավասարության հիման վրա (5) հավասարության աջ մասի ինտեգրալները ձևափոխվում են հետևյալ կերպ.

$$\left. \begin{aligned} \int\int_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy &= \int\int_{\sigma} \frac{\partial X}{\partial y} \cos(n, z) d\sigma, \\ \int\int_D \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \int\int_{\sigma} \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \cos(n, z) d\sigma, \end{aligned} \right\} (6)$$

Վերջին ինտեգրալը ձևափոխենք այս պարագրաֆի (1) բանաձևերի օգնությամբ. այդ հավասարություններից երկրորդը անդամ առ անդամ բաժանելով երրորդի վրա, գտնում ենք.

$$\frac{\cos(n, y)}{\cos(n, z)} = -\frac{\partial f}{\partial y},$$

կամ

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cos(n, z) = -\cos(n, y);$$

Հետևաբար,

$$\int\int_D \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int\int_{\sigma} \frac{\partial X}{\partial z} \cos(n, y) d\sigma, \quad (7)$$

(6) և (7) արտահայտությունները տեղադրելով (5) հավասարության մեջ, ստանում ենք.

$$\int_{\lambda} X(x, y, z) dx = - \int\int_{\sigma} \frac{\partial X}{\partial y} \cos(n, z) d\sigma + \int\int_{\sigma} \frac{\partial X}{\partial z} \cos(n, y) d\sigma, \quad (8)$$

և կոնտուրի շրջանցման ուղղությունը պետք է համաձայնեցված լինի n նորմալի ընտրված դրական ուղղության հետ: Այն է՝ եթե դիտողը նայում է նորմալի ծայրից, ապա λ կորի երկայնքով շրջանցումը նա տեսնում է ժամացույցի սլաքի շարժմանը հակառակ ուղղությամբ:

(8) բանաձևը ճիշտ է այն բոլոր մակերևութային համար, որոնց կարելի է բաժանել $z=i(x, y)$ տեսքի հավասարում ունեցող մասերի: Նման ձևով կարելի է գրել հետևյալ բանաձևերը.

$$\int_{\lambda} Y(x, y, z) dy = \int\int_{\sigma} \left[-\frac{\partial Y}{\partial z} \cos(n, x) + \frac{\partial Y}{\partial x} \cos(n, z) \right] d\sigma, \quad (8')$$

$$\int_{\lambda} Z(x, y, z) dz = \int\int_{\sigma} \left[-\frac{\partial Z}{\partial x} \cos(n, y) + \frac{\partial Z}{\partial y} \cos(n, x) \right] d\sigma, \quad (8'')$$

Գումարելով (8), (8') և (8'') հավասարությունների ձախ և աջ մասերը, կստանանք.

$$\int_{\lambda} X dx + Y dy + Z dz = \int\int_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] d\sigma \quad (9)$$

բանաձևը: Այս բանաձևը անգլիացի ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս Դ. Ստոքսի (1819—1903) անունով կոչվում է Ստոքսի բանաձև: Այն կապ է հաստատում ըստ σ -ի մակերևութային ինտեգրալի և ըստ այդ մակերևութի λ եզրագծի կորագիծ ինտեգրալի միջև, ընդ որում λ կորով շրջանցումը կատարվում է ըստ վերևում ցույց տրված կանոնի.

$$B_x = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

պրոյեկցիաներով որոշվող B վեկտորը կոչվում է $F = Xi + Yj + Zk$ վեկտորական ֆունկցիայի մրրիկ կամ ռոտոր և նշանակվում է* $\text{rot } F$ սիմվոլով:

Հետևաբար, (9) բանաձևը վեկտորական տեսքով կունենա

$$\int_{\lambda} F ds = \int\int_{\sigma} \text{rot } F d\sigma \quad (9')$$

տեսքը և Ստոքսի թեորեմը կձևակերպվի այսպես.

Վեկտորի ցիրկուլացիան (շրջահոսք) մի որոշ մակերևույթի կոնտուրի երկայնքով հավասար է այդ մակերևույթի միջով ռոտորի հոսքին:

Դիտող ություն: Եթե σ մակերևութի Օxy հարթությանը զուգահեռ հարթության կտոր է, ապա $\Delta z = 0$, և ստանում ենք Գրինի բանաձևը՝ որպես Ստոքսի բանաձևի մասնավոր դեպք:

(9) բանաձևից հետևում է, որ եթե

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

* rot - ֆրանսերեն rotation բառի երեք տառերը, որը նշանակում է պըտում:

ապա կորագիծ ինտեգրալն ըստ ցանկացած λ փակ տարածական կորի հավասար է զրոյի

$$\int_{\lambda} X dx + Y dy + Z dz = 0, \quad (11)$$

Այստեղից հետևում է, որ այս դեպքում ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման կորի ձևից:

Ինչպես և հարթ կորի դեպքում, կարելի է ցույց տալ, որ (11) հավասարությունը տեղի ունենալու համար (10) պայմանները ոչ միայն բավարար են, այլև՝ անհրաժեշտ:

Այդ պայմանները տեղի ունենալիս ենթաինտեգրալային արտահայտությունը մի որոշ $u(x, y, z)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալն է՝

$$X dx + Y dy + Z dz = du(x, y, z)$$

և, հետևաբար,

$$\int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy + Z dz = \int_{(M)}^{(N)} du = u(N) - u(M):$$

Սա ապացուցվում է այնպես, ինչպես երկու փոփոխականների ֆունկցիայի համար համապատասխան բանաձևը (տես § 4):

Օրինակ 1. Գրենք նյութական կետի զինամիկայի հիմնական հավասարումները.

$$m \frac{dv_x}{dt} = X, \quad m \frac{dv_y}{dt} = Y, \quad m \frac{dv_z}{dt} = Z,$$

Այստեղ m -ը կետի զանգվածն է, X -ը, Y -ը, Z -ը՝ կետի վրա ազդող ուժի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա, $v_x = \frac{dx}{dt}$ -ն, $v_y = \frac{dy}{dt}$ -ն, $v_z =$

$\frac{dz}{dt}$ -ն՝ v արագության պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա:

Գրված հավասարությունների ձևի և աջ մասերը բազմապատկենք

$$v_x dt = dx, \quad v_y dt = dy, \quad v_z dt = dz$$

արտահայտություններով: Անդամ առ անդամ զուգարկելով տրված հավասարությունները, կստանանք.

$$m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = X dx + Y dy + Z dz,$$

$$m \frac{1}{2} d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = X dx + Y dy + Z dz,$$

Քանի որ $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$, ապա կարող ենք գրել

$$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = X dx + Y dy + Z dz,$$

Վերցնենք M_1 և M_2 կետերը միացող զծի երկայնքով ինտեգրալը.

$$\int_{(M_1)}^{(M_2)} X dx + Y dy + Z dz = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2,$$

որտեղ v_1 -ը և v_2 -ը արագություններն են M_1 և M_2 կետերում:

Վերջին հավասարությունն արտահայտում է կենդանի ուժերի թեորեմը. մի կետից մի այլ կետի անցնելիս կինետիկ էներգիայի աճը հավասար է m զանգվածի վրա ազդող ուժի աշխատանքին:

Օրինակ 2. Որոշել m զանգվածի ունեցող տնչարժ կետի նկատմամբ նյութական ձգողականության ուժի աշխատանքը՝ միավոր զանգվածը $M_1(a_1, b_1, c_1)$ դիրքից $M_2(a_2, b_2, c_2)$ դիրքը տեղափոխելիս:

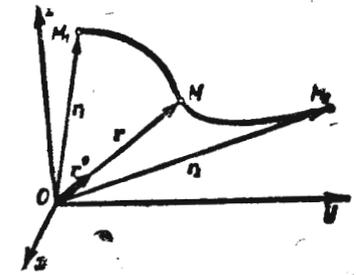
Լուծում. Դիցուք կոորդինատները սկզբնականում տեղավորված է ձգողականության անշարժ կենտրոնում. Նշանակենք r -ով միավոր զանգվածի կամայական դիրքին համապատասխանող M կետի շառավիղի վեկտորը, իսկ r^0 -ով՝ r -ով

ազդված միավոր վեկտորը: Այս դեպքում $F = -\frac{km}{r^2} r^0$, որտեղ k -ն ձգողականության հաստատունն է, F ուժի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա կլինեն

$$X = -km \frac{1}{r^2} \frac{x}{r},$$

$$Y = -km \frac{1}{r^2} \frac{y}{r},$$

$$Z = -km \frac{1}{r^2} \frac{z}{r}.$$



Այդ գեոգրում F ուժի աշխատանքը նշանակարժի վրա հավասար է

$$A = -km \int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{r^3} = -km \int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{r dr}{r^3} = km \int_{(M_1)}^{(M_2)} d\left(\frac{1}{r}\right)$$

(քանի որ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r dr = x dx + y dy + z dz$); իսկ r_1 -ով և r_2 -ով նշանակենք M_1 և M_2 կետերի շառավիղի վեկտորները նյութականության կետերը, ապա

$$A = km \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

Այսպիսով, այստեղ կորագիծ ինտեգրալը նույնպես կախված չէ ինտեգրման

կորի ձևից, այլ կախված է սկզբնական և վերջնական կետերի դիրքից: $u = \frac{km}{r}$

ֆունկցիան կոչվում է m զանգվածի առաջացրած ձգողականության դաշտի պոտենցիալ: Տվյալ դեպքում

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad A = u(M_2) - u(M_1),$$

ախինքն՝ միավոր զանգվածը տեղափոխելիս կատարած աշխատանքը հավասար է վերջնական և սկզբնական կետերում պոտենցիալի արժեքների տարբերությանը:

§ 8. Օստրոգրադսկու բանաձևը

Դիցուք տարածություն մեջ տրված է V կանոնավոր եռաչափ տիրույթ, որը սահմանափակված է z փակ մակերևույթով և որի պրոյեկցիան Oxy հարթության վրա D կանոնավոր երկչափ տիրույթն է: Ենթադրում ենք, որ σ մակերևույթը կարելի է բաժանել σ_1 , σ_2 և σ_3 երեք մասի այնպես, որ առաջին երկուսի հավասարումներն ունենան $\bar{z} = f_1(x, y)$ և $z = f_2(x, y)$ տեսքը, որտեղ $f_1(x, y)$ -ը և $f_2(x, y)$ -ը D տիրույթում անընդհատ ֆունկցիաներ են, իսկ σ_3 երրորդ մասը Oz առանցքին զուգահեռ ծնիչներով գլանային մակերևույթ է:

Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը.

$$I = \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz,$$

նախ կատարենք ինտեգրումն ըստ z -ի

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial Z}{\partial z} dz \right) dx dy = \\ &= \iint_D Z(x, y, f_2(x, y)) dx dy - \iint_D Z(x, y, f_1(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (1)$$

Մակերևույթի նորմալի վրա ընտրենք այն ուղղությունը, որը համընկնում է σ մակերևույթի արտաքին նորմալի ուղղությանը: Այդ դեպքում $\cos(n, z)$ -ը σ_2 մակերևույթի վրա կլինի դրական, իսկ σ_1 մակերևույթի վրա՝ բացասական. σ_3 մակերևույթի վրա այն հավասար է զրոյի:

(1) հավասարության աջ մասի կրկնակի ինտեգրալները հավասար են համապատասխան մակերևույթային ինտեգրալներին.

$$\iint_D Z(x, y, f_2(x, y)) dx dy = \iint_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma, \quad (2')$$

$$\iint_D Z(x, y, f_1(x, y)) dx dy = \iint_{\sigma_1} Z(x, y, z) (-\cos(n, z)) d\sigma:$$

Վերջին ինտեգրալում գրեցինք $(-\cos(n, z))$, որովհետև σ_1 մակերևույթի տարրը և D տիրույթի Δs մակերեսի տարրը կապված են $\Delta s = \Delta s [-\cos(n, z)]$ առնչությամբ, քանի որ (n, z) անկյունը բույթ է:

Այսպես, որեմն

$$\iint_D Z(x, y, f_1(x, y)) dx dy = - \iint_{\sigma_1} Z(x, y, \psi_1(x, y)) \cos(n, z) d\sigma. \quad (2'')$$

(2')-ը և (2'')-ը տեղադրելով (1) հավասարության մեջ, կստանանք.

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \\ &= \iint_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma + \iint_{\sigma_1} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma. \end{aligned}$$

Հետագա բանաձևերի հարմարության համար վերջին հավասարությունը գրենք այսպես (ավելացնելով $\iint_{\sigma_3} Z(x, y, z) \cos n z d\sigma = 0$, քանի որ σ_3 մակերևույթի վրա տեղի ունի $\cos(n, z) = 0$ հավասարությունը).

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \\ &= \iint_{\sigma_2} Z \cos(n, z) d\sigma + \iint_{\sigma_1} Z \cos(n, z) d\sigma + \iint_{\sigma_3} Z \cos(n, z) d\sigma. \end{aligned}$$

Սակայն վերջին հավասարության աջ մասի ինտեգրալների գումարը ըստ ամբողջ σ -ի մակերևույթային ինտեգրալն է, ուստի

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\sigma} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma:$$

Նման ձևով կարելի է ստանալ հետևյալ առնչությունները,

$$\iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\sigma} Y(x, y, z) \cos(n, y) d\sigma,$$

$$\iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\sigma} X(x, y, z) \cos(n, x) d\sigma:$$

Անգամ առ անգամ գումարելով վերջին երեք հավասարությունները, կստանանք Օստրոգրադսկու բանաձևը*.

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz &= \\ &= \iint_{\sigma} (X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)) d\sigma. \end{aligned} \quad (2)$$

* Այս բանաձևը (որը հաճախ կոչվում է Օստրոգրադսկու-Պատուի բանաձև) հայտնագործվել է ռուս նշանավոր մաթեմատիկոս Մ. Վ. Օստրոգրադսկու (1801—1861) կողմից, որը նա հրատարակել է 1828 թ. Եփեսոսի շեքսպիան տեսության վերաբերյալ հոդվածում:

$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ արտահայտությունը կոչվում է $F = Xi + Yj + Zk$ վեկտորի դիվերգենցիա (կամ վեկտորական ֆունկցիայի դիվերգենցիա) և նշանակվում է* $\operatorname{div} F$ սիմվոլով:

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Նշենք, որ այս բանաձևը ճիշտ է ցանկացած տիրույթի համար, որը կարելի է բաժանել այս պարագրաֆի սկզբում նշած պայմաններին բավարարող տիրույթների:

Տանք ստացած բանաձևի հիդրոմեխանիկական մեկնաբանությունը:

Դիցուք $F = Xi + Yj + Zk$ վեկտորը V տիրույթի միջով հոսող հեղուկի արագության վեկտորն է: Այդ դեպքում (2) արտահայտության մեջ մասնակցող մակերևութային ինտեգրալը Π արտաքին նորմալի վրա F վեկտորի պրոյեկցիայի ինտեգրալն է. այն տալիս է միավոր ժամանակամիջոցում V տիրույթից σ մակերևութի միջով արտահոսող հեղուկի քանակությունը (կամ էլ V տիրույթ ներհոսող հեղուկի քանակությունը, եթե այդ ինտեգրալը բացասական է): Այդ քանակությունն արտահայտվում է $\operatorname{div} F$ -ի եռակի ինտեգրալի միջոցով:

Եթե $\operatorname{div} F \equiv 0$, ապա կրկնակի ինտեգրալն ըստ ցանկացած փակ մակերևութի հավասար է զրոյի, այսինքն՝ ցանկացած փակ մակերևութի միջով արտահոսող (կամ ներհոսող) հեղուկի քանակությունը հավասար կլինի զրոյի (աղբյուրները բացակայում են): Ավելի ճիշտ, տիրույթի մեջ ներհոսող հեղուկի քանակությունը հավասար է այդ տիրույթից արտահոսող հեղուկի քանակությանը:

Վեկտորական ձևով Օստրոգրադսկու բանաձևն ունի

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dv = \iint_{\sigma} F n \, ds \quad (1')$$

տեսքը և կարգացվում է այսպես. F վեկտորական դաշտի դիֆերենցիալի ինտեգրալը՝ տարածված մի որոշ տարածական տիրույթով, հավասար է այդ տիրույթը սահմանափակող մակերևույթի միջով F վեկտորի հոսքին:

§ 9. Համիլտոնի օպերատորը: Նրա մի քանի կիրառությունները

Դիցուք ունենք $u = u(x, y, z)$ ֆունկցիան: Տիրույթի յուրաքանչ-

* div — ֆրանսերեն divergence բառի երեք տառերն են, որը նշանակում է «տարամիտության չափ»:

յուր կետում, որտեղ $u(x, y, z)$ ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է, որոշվում է գրադիենտը.

$$\operatorname{grad} u = i \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (1)$$

(x, y, z) ֆունկցիայի գրադիենտը երբեմն նշանակում են այսպես.

$$\nabla u = i \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial u}{\partial z}; \quad (2)$$

∇ նշանը կարգացվում է «նաբլա»:

1) (2) հավասարությունը հարմար է սիմվոլիկ ձևով գրել այսպես.

$$\nabla u = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) u \quad (2')$$

և

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (3)$$

սիմվոլը դիտել որպես «սիմվոլիկ վեկտոր»: Այս սիմվոլիկ վեկտորը կոչվում է Համիլտոնի օպերատոր կամ նաբլա-օպերատոր (∇ -օպերատոր): (2) և (2') բանաձևերից հետևում է, որ ∇ սիմվոլիկ օպերատորը սկալյար ֆունկցիայով բազմապատկելիս ստացվում է այդ ֆունկցիայի գրադիենտը

$$\nabla u = \operatorname{grad} u, \quad (4)$$

2) Կարելի է կազմել ∇ սիմվոլիկ վեկտորի և $F = iX + jY + kZ$ վեկտորի սկալյար արտադրալը

$$\begin{aligned} \nabla F &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) (iX + jY + kZ) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} X + \frac{\partial}{\partial y} Y + \frac{\partial}{\partial z} Z = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div} F \end{aligned}$$

(տես § 8): Այսպիսով,

$$\nabla F = \operatorname{div} F, \quad (5)$$

3) Կազմենք ∇ սիմվոլիկ վեկտորի և $F = iX + jY + kZ$ վեկտորի վեկտորական արտադրալը.

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (iX + jY + kZ) = \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} = \\ &= i \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) - j \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + k \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = \\ &= i \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = \text{rot } F \end{aligned}$$

(տես § 7): Այսպիսով,

$$\nabla \times F = \text{rot } F, \quad (6)$$

Ասվածից հետևում է, որ ∇ սիմվոլիկ վեկտորի օգտագործումը թույլ է տալիս շատ համառոտ արտահայտել վեկտորական գործողությունները: Դիտարկենք մի քանի բանաձևեր:

4) $F(x, y, z) = iX + jY + kZ$ վեկտորական դաշտը կոչվում է պոտենցիալային վեկտորական դաշտ, եթե F վեկտորը հանդիսանում է մի որոշ $u(x, y, z)$ սկալյար ֆունկցիայի գրադիենտ՝ $F = \text{gradu}$ կամ

$$F = i \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial u}{\partial z},$$

Այս դեպքում F վեկտորի պրոյեկցիաները կլինեն

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

Այս հավասարություններից հետևում է (տես I հատ., VIII գլխի § 12)

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

կամ

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0,$$

Հետևաբար, դիտարկվող F վեկտորի համար

$$\text{rot } F = 0,$$

Այսպիսով, ստանում ենք

$$\text{rot}(\text{gradu}) = 0. \quad (7)$$

Օգտագործելով ∇ օպերատորը (4) և (6) բանաձևերի հիման վրա (7) հավասարությունը կարելի է գրել այսպես.

$$(\nabla \times \nabla u) = 0, \quad (7')$$

Օգտվելով այն հատկությունից, որ վեկտորական արտադրյալը սկալյարով բազմապատկելու համար բավական է այդ սկալյարով բազմապատկել բազմապատկիչներից մեկը, գրենք

$$(\nabla \times \nabla)u = 0,$$

Այստեղ ∇ օպերատորը նորից օժտված է սովորական վեկտորի հատկություններով. վեկտորի՝ իր հետ վեկտորական արտադրյալը հավասար է զրոյի:

Այն $F(x, y, z)$ վեկտորական դաշտը, որի համար $\text{rot } F = 0$, կոչվում է անմրրիկային: (7) հավասարությունից հետևում է, որ յուրաքանչյուր պոտենցիալային դաշտ անմրրիկային է:

Ճիշտ է և հակադարձ եզրակացությունը, այսինքն, եթե որոշ F վեկտորական դաշտ անմրրիկային է, ապա այն պոտենցիալային է: Այս պնդման ճշտությունը հետևում է § 7-ի վերջում բերված դատողություններից:

5) Այն $F(x, y, z)$ վեկտորական դաշտը, որի համար $\text{div } F = 0$, այսինքն՝ այն վեկտորական դաշտը, որում աղբյուրները բացակայում են (տես § 8), կոչվում է սոլոնոիդային կամ խողովակային: Ապացուցենք, որ

$$\text{div}(\text{rot } F) = 0, \quad (8)$$

այսինքն՝ մրրիկների դաշտը ազատ է աղբյուրներից:

Իրոք, եթե $F = iX + jY + kZ$, ապա

$$\text{rot } F = i \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right),$$

ուստի

$$\text{div}(\text{rot } F) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = 0,$$

∇ օպերատորի միջոցով (8) հավասարությունը գրվում է այսպես.

$$\nabla(\nabla \times F) = 0, \quad (8')$$

Այս հավասարության ձախ մասը կարելի է դիտել որպես $\nabla(\nabla \times F)$ երեք վեկտորների (որոնցից երկուսը միևնույնն են) վեկտորասկալյար (խառն) արտադրյալ: Այնհայտ է, որ այդ արտադրյալը հավասար է զրոյի:

6) Դիցուք ունենք $u=u(x, y, z)$ սկալյար դաշտը՝ Որոշենք բրադիենտների դաշտը.

$$\text{grad } u = i \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial u}{\partial z}$$

Այնուհետև գտնենք

$$\text{div}(\text{grad } u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \text{ կամ}$$

$$\text{div}(\text{grad } u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (9)$$

Այս հավասարության աջ մասը նշանակվում է

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (10)$$

կամ սիմվոլիկ ձևով՝

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ սիմվոլը կոչվում է Լապլասի}$$

օպերատոր:

Հետևաբար, (9) հավասարությունը կարելի է գրել այսպես.

$$\text{div}(\text{grad } u) = \Delta u \quad (11)$$

∇ օպերատորի օգնությամբ (11) հավասարությունը գրում ենք հետևյալ տեսքով.

$$(\nabla \nabla u) = \Delta u, \text{ այսինքն՝ } \Delta = \nabla^2 \quad (11')$$

Նկատենք, որ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

կամ

$$\Delta u = 0 \quad (12')$$

հավասարումը կոչվում է Լապլասի հավասարում: Այն ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են Լապլասի հավասարմանը, կոչվում են հարմոնիկ ֆունկցիաներ:

Հաշվել հետևյալ կորագիծ ինտեգրալները.

1. $\int y^2 dx + 2xy dy$ ըստ $x = a \cos t, y = a \sin t$ շրջանագծի, Պատ. 0.

2. $\int y dx - x dy$ ըստ $x = a \cos t, y = b \sin t$ էլիպսի աղեղի, Պատ. $-2\pi ab$.

3. $\int \frac{x}{x^2+y^2} dx - \frac{y}{x^2+y^2} dy$ ըստ կորագինտաների սկզբնականում կենտրոն ունեցող շրջանագծի, Պատ. 0.

4. $\int \frac{y dx + x dy}{x^2+y^2}$ ըստ $y=x$ ուղիղի $x=1$ կետից մինչև $x=2$ կետը եղած հասվածի, Պատ. $\ln 2$.

5. $\int yz dx + xz dy + xy dz$ ըստ $x = a \cos t, y = a \sin t, z = kt$ պտուտակագծի աղեղի ($t=0$ մինչև $t=2\pi$), Պատ. 0.

6. $\int x dy - y dx$ ըստ $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ աստրոիդի աղեղի, Պատ. $\frac{3}{4} \pi a^2$ (աստրոիդի մակերեսի կրկնապատիկը).

7. $\int x dy - y dx$ ըստ $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ դեկարտի տերևի հանգույցի, Պատ. $3a^2$ (նշված հանգույցով սահմանափակված մակերեսի կրկնապատիկը).

8. $\int x dy - y dx$ ըստ $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ կորի ($0 \leq t \leq 2\pi$), Պատ. $-6\pi a^2$ (ցիկլոիդի մեկ կամարով և Ox առանցքով սահմանափակված տիրույթի մակերեսի կրկնապատիկը).

Ապացուցել, որ

9. $\text{grad}(c\varphi) = c \text{grad} \varphi$, որտեղ c -ն հաստատուն է.

10. $\text{grad}(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1 \text{grad} \varphi + c_2 \text{grad} \psi$, որտեղ c_1 -ը և c_2 -ը հաստատուններ են.

11. $\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \varphi$.

12. Գտնել $\text{grad} r, \text{grad} r^2, \text{grad} \frac{1}{r}, \text{grad} f(r)$, որտեղ $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Պատ. $r/r; 2r; -r/r^3; f'(r) r/r$.

13. Ապացուցել, որ $\text{div}(A+B) = \text{div} A + \text{div} B$.

14. Հաշվել $\text{div} r$ -ը, եթե $r = xi + yj + zk$, Պատ. 3.

15. Հաշվել $\text{div}(A\varphi)$ -ը, որտեղ A -ն վեկտորական ֆունկցիա է, իսկ φ -ն՝ սկալյար ֆունկցիա, Պատ. $\varphi \text{div} A + (\text{grad} \varphi) \cdot A$.

16. Հաշվել $\text{div}(rc)$ -ն, որտեղ c -ն հաստատուն վեկտոր է, Պատ. $(c \cdot r)/r$.

17. Հաշվել $\text{div} B(rA)$ -ն, Պատ. AB .

Ապացուցել, որ

18. $\text{rot}(c_1 A_1 + c_2 A_2) = c_1 \text{rot} A_1 + c_2 \text{rot} A_2$, որտեղ c_1 -ը և c_2 -ը հաստատուններ են.

19. $\text{rot}(Ac) = \text{grad} A \times c$, որտեղ c -ն հաստատուն վեկտոր է.

20. $\text{rot} \text{rot} A = \text{grad} \text{div} A - \Delta A$.

21. $A \times \text{grad} \varphi = \text{rot}(\varphi A)$.

18 - Դիֆե, ենցլալ և ինտեգրալ հաշիվներ

22. Ապացուցե՛լ, որ $\int \int \cos(nz) dz = 0$, եթե σ -ն փակ մակերևույթ է, իսկ

n -ը՝ նրա նորմալը:

23. Գտնե՛լ $x^2+y^2+z^2=R^2$ հավասարումն ունեցող սֆերայից $z=H$ հարթուքյան կտրած սեղմենտի մակերևույթի ինտեգրալի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ: Պատ. $\frac{2\pi R}{3}(2R^3-3R^2H+H^3)$:

24. Գտնե՛լ $x^2+y^2=2cz$ պտտման պարաբոլիդից $z=c$ հարթուքյան կտրած մակերևույթի ինտեգրալի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ: Պատ. $4\pi c^4 \frac{6\sqrt{3}+1}{15}$:

25. Հաշվե՛լ $x^2+y^2=\frac{R^2z^2}{H^2}$ կոնի մակերևույթի այն մասի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, որը նրանից կտրվում է $z=H$ հարթուքյամբ: Պատ. $0; 0; \frac{2H}{3}$:

26. Հաշվե՛լ $x^2+y^2+z^2=R^2$ գնդային մակերևույթից $z=H$ հարթուքյամբ կտրած սեղմենտի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները: Պատ. $(0, 0, \frac{R+H}{2})$:

27. Գտնե՛լ $\int \int [x \cos(\pi x) + y \cos(\pi y) + z \cos(\pi z)] ds$, որտեղ σ -ն փակ մակերևույթ է: Պատ. $3V$, որտեղ V -ն σ մակերևույթով սահմանափակված մարմնի ծավալն է:

28. Գտնե՛լ $\int \int \int z dx dy$ ինտեգրալը, որտեղ S -ը $x^2+y^2+z^2=R^2$ գնդային մակերևույթի արտաքին կողմն է: Պատ. $\frac{4}{3}\pi R^3$:

29. Գտնե՛լ $\int \int x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, որտեղ S -ը $x^2+y^2+z^2=R^2$ գնդային մակերևույթի արտաքին կողմն է: Պատ. $2\pi R^4$:

30. Գտնե՛լ $\int \int \sqrt{x^2+y^2} ds$ ինտեգրալը, որտեղ S -ը $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, 0 \leq z \leq b$ կոնի կողմնային մակերևույթն է: Պատ. $\frac{2\pi a^2 \sqrt{a^2+b^2}}{3}$:

31. $\int \int y dx + z dy + x dz$ ինտեգրալը ձևափոխել ըստ Ստոքսի բանաձևի: Պատ. $-\int \int (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) ds$:

Գտնե՛լ հետևյալ կորագիծ ինտեգրալները՝ օգտագործելով Ստոքսի բանաձևը և անմիջահանորեն. 32. $\int (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$, որտեղ L -ը $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$ շրջանագիծն է: Պատ. 0 :

33. $\int_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$, որտեղ L -ը $x^2+y^2=R^2, z=0$ շրջանագիծն է: Պատ. $-\frac{\pi R^6}{8}$:

Կիրառելով Օստրոգրադսկու բանաձևը, հետևյալ մակերևույթային ինտեգրալները ձևափոխել ըստ ծավալի ինտեգրալների. 34. $\int \int (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds$. Պատ. $\int \int \int 3 dx dy dz = 3V$:

35. $\int \int (x^2 + y^2 + z^2)(dy dz + dx dz + dx dy)$: Պատ. $2 \int \int \int (x+y+z) dx dy dz$:

36. $\int \int \int xy dx dy + yz dy dz + zx dz dx$: Պատ. 0 :

37. $\int \int \frac{\partial u}{\partial x} dy dz + \frac{\partial u}{\partial y} dx dz + \frac{\partial u}{\partial z} dx dy$: Պատ. $\int \int \int (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) dx dy dz$:

Օստրոգրադսկու բանաձևի միջոցով հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

38. $\int \int (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds$, որտեղ S -ը $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ էլիպսոիդի մակերևույթն է: Պատ. $4\pi abc$:

39. $\int \int (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) ds$, որտեղ S -ը $x^2+y^2+z^2=R^2$ սֆերայի մակերևույթն է: Պատ. $\frac{12\pi R^5}{5}$:

40. $\int \int x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, որտեղ S -ը $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 (0 \leq z \leq b)$ կոնի մակերևույթն է: Պատ. $\frac{\pi a^2 b^2}{2}$:

41. $\int \int x dy dz + y dx dz + z dx dy$, որտեղ S -ը $x^2+y^2=a^2, -H \leq z \leq H$ գլանի մակերևույթն է: Պատ. $3\pi a^2 H$:

42. Ապացուցե՛լ $\int \int_D (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) dx dy = \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds$ նույնությամբ, որտեղ C -ն D տիրույթի եզրագիծն է, իսկ $\frac{\partial u}{\partial n}$ -ը արտաքին նորմալի ուղղությամբ ածանցյալն է:
Լուծում:

$$\int \int_D (\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}) dx dy = \int_C -Y dx + X dy = \int_C [-Y \cos(s, x) + X \sin(s, x)] ds,$$

որտեղ (s, x) -ը C կոնտուրի շոշափողի և Ox առանցքի միջև եղած անկյունն է, ψ թե (n, x) -ով նշանակենք նորմալի և Ox առանցքի միջև եղած անկյունը, ապա $\sin(s, x) = \cos(n, x)$, $\cos(s, x) = -\sin(n, x)$: Հետևաբար,

$$\int_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \int_C [X \cos(n, x) + Y \sin(n, x)] ds,$$

լնդունելով $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$ - կստանանք.

$$\int_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(n, x) \right) ds$$

կամ

$$\int_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

43. Ապացուցել հետևյալ նույնությունը (այսպես կոչված Գրինի բանաձևը).

$$\int_V (v \Delta u - u \Delta v) dx dy dz = \int_\sigma \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma,$$

որտեղ u -ն և v -ն իրենց միմյանց հերկորդ կարգի ածանցյալների հետ D տիրույթում անընդհատ ֆունկցիաներ են,

Δu և Δv սիմվոլները նշանակում են

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

և ուժ ուժ, հետևյալ բանաձևում՝

$$\int_V \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_\sigma [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)] d\sigma$$

լնդունենք

$$X = v u'_x - u v'_x,$$

$$Y = v u'_y - u v'_y,$$

$$Z = v u'_z - u v'_z,$$

Այս դեպքում

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = v(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) - u(v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}) = v \Delta u - u \Delta v,$$

$$X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z) =$$

$$= v(u'_x \cos(n, x) + u'_y \cos(n, y) + u'_z \cos(n, z)) -$$

$$- u(v'_x \cos(n, x) + v'_y \cos(n, y) + v'_z \cos(n, z)) = v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n},$$

Հետևաբար,

$$\int_V \int \int (v \Delta u - u \Delta v) dx dy dz = \int_\sigma \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma,$$

44. Ապացուցել

$$\int_V \int \int \Delta u dx dy dz = \int_\sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

նույնությունը, որտեղ $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,

և ուժ ուժ, նախորդ օրինակում ապացուցված Գրինի բանաձևում ընդունենք $v=1$, Այս դեպքում $\Delta v=0$, և կստանանք վերոհիշյալ նույնությունը.

45. Եթե $u(x, y, z)$ -ը մի որոշ տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիա է, այսպիսին՝ այդ տիրույթի ցանկացած կետում բավարարում է

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

և ապա ստի հավասարմանը, ապա

$$\int_\sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,$$

որտեղ σ -ն փակ մակերևույթ է.

և ուժ ուժ. Դա անմիջապես հետևում է 44-րդ խնդրի բանաձևից.

46. Դիցուք $u(x, y, z)$ -ը որեէ v տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիա է և $M(x_1, y_1, z_1)$ կետում կենտրոն ունեցող R շառավղով σ սֆերան գտնվում է այդ տիրույթի ներսում. Ապացուցել, որ

$$u(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_\sigma u d\sigma,$$

և ուժ ուժ. Դիտարկենք այն Ω տիրույթը, որը սահմանափակված է $M(x_1, y_1, z_1)$ կետում կենտրոններ ունեցող և R ու ρ ($\rho < R$) շառավղիներով σ , $\bar{\sigma}$ երկու սֆերաներով. Այդ տիրույթի նկատմամբ 43-րդ խնդրում ապացուցված Գրինի բանաձևը կիրառելով, իրրեւ ընդունելով վերոհիշյալ ֆունկցիան, իսկ իրրեւ v

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}},$$

Անմիջական դիֆերենցյալներ և տեղադրմամբ համոզվում ենք, որ $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} +$

$$+ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0:$$
 Հետևաբար,

$$\int_\sigma \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\sigma = 0$$

կամ

$$\int_\sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\sigma - \int_\sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\sigma = 0,$$

$\bar{\sigma}$ և σ մակերևույթների վրա $\frac{1}{r}$ մեծությունը հաստատուն է $\left(\frac{1}{R} \right.$ և $\left. \frac{1}{\rho} \right)$.

ուստի այն կարող է դուրս բերվել ինտեգրալի նշանից, 45-րդ խնդրում ստացած արդյունքի համաձայն, ունենք

$$\frac{1}{R} \int_{\sigma} \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0, \quad \frac{1}{\rho} \int_{\sigma} \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,$$

Հետևաբար,

$$-\int_{\sigma} \int_{\sigma} u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma + \int_{\sigma} \int_{\sigma} u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma = 0,$$

բայց

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{d \left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = -\frac{1}{r^2},$$

Ուստի

$$+ \int_{\sigma} \int_{\sigma} u \frac{1}{r^2} d\sigma - \int_{\sigma} \int_{\sigma} u \frac{1}{r^2} d\sigma = 0$$

կամ

$$\frac{1}{\rho^2} \int_{\sigma} \int_{\sigma} u d\sigma = \frac{1}{R^2} \int_{\sigma} \int_{\sigma} u d\sigma, \quad (1)$$

Ձախակողմյան ինտեգրալի նկատմամբ կիրառելով միջինի մասին թեորեմը, կստանանք.

$$\frac{1}{\rho^2} \int_{\sigma} \int_{\sigma} u d\sigma = \frac{u(\xi, \eta, \zeta)}{\rho^2} \int_{\sigma} \int_{\sigma} d\sigma, \quad (2)$$

որտեղ $u(\xi, \eta, \zeta)$ -ն $M(x_1, y_1, z_1)$ կետում կենտրոն ունեցող ρ շառավղով սֆերայի մակերևույթի վրա գտնվող կետ է:

Ստիպենք, որ $\rho \rightarrow 0$ ձգտի դրոյի. այս դեպքում $u(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow u(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{1}{\rho^2} \int_{\sigma} \int_{\sigma} d\sigma = \frac{4\pi\rho^2}{\rho^2} = 4\pi.$$

Հետևաբար, երբ $\rho \rightarrow 0$ ստանում ենք.

$$\frac{1}{\rho^2} \int_{\sigma} \int_{\sigma} u d\sigma \rightarrow u(x_1, y_1, z_1) 4\pi.$$

Այնուհետև, քանի որ (1) հավասարության աջ մասը կախված չէ ρ -ից, ապա երբ $\rho \rightarrow 0$ վերջնականապես կստանանք.

$$\frac{1}{R^2} \int_{\sigma} \int_{\sigma} u d\sigma = 4\pi u(x_1, y_1, z_1)$$

կամ

$$u(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\sigma} \int_{\sigma} u d\sigma$$

XVI ԳԼՈՒԽ ՇԱՐՔԵՐ

§ 1. Շարք: Շարքի գումարը

Սահմանում 1: Դիցուք տրված է

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

թվերի անվերջ հաջորդականությունը*:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

արտահայտությունը կոչվում է թվային շարք: Անդ որում $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ թվերը կոչվում են շարքի անդամներ:

Սահմանում 2: Շարքի առաջին n հատ վերջավոր թվով անդամների գումարը կոչվում է շարքի n -րդ մասնակի գումար.

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Գննության առնենք հետևյալ մասնակի գումարները.

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

$$\dots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

Եթե գոյություն ունի

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

վերջավոր սահմանը, ապա այն անվանում են (1) շարքի գումար և ասում են, որ շարքը զուգամիտում է, իսկ շարքն անվանում են զուգամեւ շարք:

Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ գոյություն չունի (օրինակ, $S_n \rightarrow \infty$, երբ $n \rightarrow \infty$), ապա ասում են, որ (1) շարքը տարամիտում է և գումար չունի:

* Հաջորդականությունը համարվում է տրված, եթե հայտնի է այն օրենքը, ըստ որի կարելի է հաշվել նրա ցանկացած u_n անդամը՝ տրված n -ի դեպքում:

Օրինակ. Դիտարկենք հետևյալ շարքը.

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (2)$$

Սա երկրաչափական պրոգրեսիա է, որի առաջին անդամը a -ն է, իսկ հայտարարը՝ q ($a \neq 0$):

Երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամները գումարը (երբ $q \neq 1$) հավասար է

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

կամ

$$S_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$$

1) Եթե $|q| < 1$, ապա $q^n \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$ է, հետևաբար,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q} \right) = \frac{a}{1 - q}$$

Նշանակում է, $|q| < 1$ դեպքում (2) շարքը զուգամիտում է և նրա գումարը՝

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

2) Եթե $|q| > 1$, ապա $|q|^n \rightarrow \infty$, երբ $n \rightarrow \infty$ է և այս դեպքում $\frac{a - aq^n}{1 - q} \rightarrow \pm \infty$, երբ

$n \rightarrow \infty$, այսինքն՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ չոչուլթյուն չունի. Այսպիսով, եթե $|q| > 1$ (2) շարքը տարամիտում է:

3) Եթե $q = 1$, ապա (2) շարքն ունի

$$a + a + a + \dots$$

տեսքը: Այս դեպքում

$$S_n = na, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

այսինքն՝ շարքը տարամիտում է:

4) Եթե $q = -1$, ապա (2) շարքն ունի

$$a - a + a - a + \dots$$

տեսքը: Այս դեպքում

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{երբ } n\text{-ը զույգ է,} \\ a, & \text{երբ } n\text{-ը կենտ է,} \end{cases}$$

Հետևաբար, S_n -ը սահման չունի. շարքը տարամիտում է:

Այսպիսով, երկրաչափական պրոգրեսիան (որի առաջին անդամը զրոյից տարբեր է) զուգամիտում է միայն այն դեպքում, երբ պրոգրեսիայի հայտարարը բացարձակ մեծություն մեկից փոքր է:

Թեորեմ 1: Եթե տրված (1) շարքի մի քանի անդամներ դեռ ենտելուց հետո ստացված շարքը զուգամիտում է, ապա զուգամիտում է նաև ինքը՝ տրված շարքը: Հակադարձը, եթե տրված շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև այդ շարքի մի քանի անդամները դեռ ենտելուց հետո ստացված շարքը:

Ուրիշ խոսքով, շարքի վերջավոր թվով անդամների դեռ ենտելը այդ շարքի զուգամիտության վրա չի ազդում:

Ապացուցում: Դիցուք S_n -ը (1) շարքի առաջին n անդամների գումարն է, C_k -ն՝ k հատ դեռ նետած անդամների գումարը (նկատենք, որ բավականաչափ մեծ n -ի դեպքում բոլոր դեռ նետած անդամները կպարունակվեն S_n գումարի մեջ), σ_{n-k} -ն շարքի այն անդամների գումարն է, որոնք մտնում են S_n գումարի մեջ, բայց չեն մտնում C_k -ի մեջ: Այս դեպքում ունենք

$$S_n = C_k + \sigma_{n-k}$$

որտեղ C_k -ն հաստատուն թիվ է, որը կախված չէ n -ից:

Վերջին արտահայտությունից հետևում է, որ եթե գոյություն ունի $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k}$ սահմանը, ապա գոյություն ունի նաև $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ -ը. եթե գոյություն ունի $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ -ը, ապա գոյություն ունի նաև $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k}$ -ն, իսկ

սա էլ ապացուցում է թեորեմի ճիշտ լինելը:

Պարապրաֆի վերջում ցույց տանք շարքերի երկու պարզագույն հատկությունները:

Թեորեմ 2: Եթե

$$a_1 + a_2 + \dots \quad (3)$$

շարքը զուգամիտում է և նրա գումարը հավասար է S -ի, ապա

$$ca_1 + ca_2 + \dots \quad (4)$$

շարքը, որտեղ c -ն ֆիքսած թիվ է, նույնպես զուգամիտում է և նրա գումարը հավասար է cS -ի:

Ապացուցում: (3) շարքի n -րդ մասնակի գումարը նշանակենք S_n -ով, իսկ (4) շարքինը՝ σ_n -ով: Այդ դեպքում

$$\sigma_n = ca_1 + \dots + ca_n = c(a_1 + \dots + a_n) = cS_n$$

Այստեղից պարզ է, որ (4) շարքի n -րդ մասնակի գումարի սահմանը գոյություն ունի, քանի որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (cS_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = cS$$

Եվ այսպես, (4) շարքը զուգամիտում է և նրա գումարը հավասար է cS -ի:

Թեորեմ 3: Եթե

$$a_1 + a_2 + \dots \quad (5)$$

և

$$b_1 + b_2 + \dots \quad (6)$$

շարքերը զուգամիտում են և նրանց գումարները, համապատասխանաբար հավասար են \bar{S} -ի և \bar{S}' -ի, ապա

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots \quad (7)$$

և

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots \quad (8)$$

շարքերը նույնպես զուգամիտում են և նրանց գումարները, համապատասխանաբար, հավասար են $\bar{s} + \bar{s}$ և $\bar{s} - \bar{s}$:

Ապացուցում: Ապացուցենք (7) շարքի զուգամիտությունը: Նշանակելով նրա n -րդ մասնակի գումարը σ_n -ով, իսկ (5) և (6) շարքերի n -րդ մասնակի գումարները, համապատասխանաբար, \bar{s}_n -ով և \bar{s}_n -ով, կստանանք.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) = \\ &= (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) = \bar{s}_n + \bar{s}_n; \end{aligned}$$

Այս հավասարության մեջ անցնելով սահմանին, երբ $n \rightarrow \infty$ կըստանանք.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{s}_n + \bar{s}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n = \bar{s} + \bar{s}:$$

Այսպիսով, (7) շարքը զուգամիտում է և նրա գումարը հավասար է $\bar{s} + \bar{s}$:

Նման ձևով ապացուցվում է, որ (8) շարքը նույնպես զուգամիտում է և նրա գումարը հավասար է $\bar{s} - \bar{s}$:

(7) և (8) շարքերի մասին ասում են, որ նրանք ստացել են (5) և (6) շարքերի անդամ առ անդամ գումարման կամ, համապատասխանաբար, անդամ առ անդամ հանման արդյունքում:

§ 2. Շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ հայտանիշը

Շարքերն ուսումնասիրելիս հիմնական հարցերից մեկն էլ այդ շարքի զուգամիտության կամ տարամիտության վերաբերյալ հարցն է: Ստորև կբերվեն բավարար պայմաններ, որոնց հիման վրա կարելի է լուծել այդ հարցը: Այստեղ էլ կքննարկենք շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ հայտանիշը. այսինքն՝ կհաստատենք այն պայմանը, որը տեղի չունենալու դեպքում շարքը տարամիտում է:

Թեորեմ: Եթե շարքը զուգամիտում է, ապա նրա n -րդ անդամը ձգտում է զրոյի ուր անսահմանափակորեն աճելու դեպքում:

Ապացուցում: Դիցուք

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

շարքը զուգամիտում է, այսինքն՝ տեղի ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

հավասարությունը, որտեղ S -ը շարքի գումարն է (այսինքն՝ վերջավոր ֆիքսած թիվ է). բայց այս դեպքում տեղի ունի նաև

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s$$

հավասարությունը, քանի որ, երբ $n \rightarrow \infty$, ապա նաև $(n-1) \rightarrow \infty$: Առաջին հավասարությունից անդամ առ անդամ հանելով երկրորդը, ստանում ենք

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0$$

կամ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0:$$

Բայց

$$s_n - s_{n-1} = u_n;$$

Հետևաբար,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

ինչ որ պահանջվում էր ապացուցել:

Հետևանք: Եթե շարքի n -րդ անդամը զրոյի չի ձգտում, երբ $n \rightarrow \infty$, ապա շարքը տարամիտում է:

Օրինակ:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{n}{2n+1} + \dots$$

շարքը տարամիտում է, քանի որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

Ընդգծենք, որ ղիտարկված հայտանիշը միայն անհրաժեշտ է, բայց բավարար չէ. այսինքն՝ այն բանից, որ n -րդ անդամը ձգտում է զրոյի, դեռևս չի հետևում, որ շարքը զուգամիտում է, այն կարող է տարամիտել:

Օրինակ: այսպես կոչված հարմոնիկ շարքը՝

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

տարամիտում է, թեև

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0:$$

Դա ապացուցելու համար հարմոնիկ շարքը գրենք մանրամասն.

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \\ &+ \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Այնուհետև գրենք հետևյալ օժանդակ շարքը

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{2 \text{ գումարելիներ}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{4 \text{ գումարելիներ}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{8 \text{ գումարելիներ}} + \underbrace{\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}}_{16 \text{ գումարելիներ}} + \dots \quad (2)$$

(2) շարքը կազմվում է հետևյալ կերպ. նրա առաջին անդամը հավասար է 1-ի, երկրորդը՝ $\frac{1}{2}$, երրորդ և չորրորդ անդամները հավասար են $\frac{1}{4}$ -ի, հինգերորդից մինչև ութերորդ անդամները հավասար են $\frac{1}{8}$ -ի, իններորդից մինչև տասնվեցերորդ անդամները հավասար են $\frac{1}{16}$ -ի, 17-րդից մինչև 32-րդ անդամները հավասար են $\frac{1}{32}$ -ի և այլն:

Նշանակենք $S_n^{(1)}$ -ով (1) հարմոնիկ շարքի առաջին n անդամների գումարը և $S_n^{(2)}$ -ով՝ (2) շարքի առաջին n անդամների գումարը:

Քանի որ (1) շարքի լուրջաբանչյուր անդամ մեծ է (2) շարքի լուրջաբանչյուր անդամից կամ հավասար է նրան, ապա $n > 2$ դեպքում

$$S_n^{(1)} > S_n^{(2)}; \quad (3)$$

Հաշվենք (2) շարքի մասնակի գումարները n -ի $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ արժեքների համար.

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ գումարելիներ}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ գումարելիներ}} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{32} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ գումարելիներ}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ գումարելիներ}} + \underbrace{\left(\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}\right)}_{16 \text{ գումարելիներ}} = 1 + 5 \cdot \frac{1}{2};$$

ճիշտ նույն ձևով հաշվում ենք, որ $s_2^6 = 1 + 6 \cdot \frac{1}{2}$, $s_2^7 = 1 + 7 \cdot \frac{1}{2}$ և, ընդհանրապես $s_2^k = 1 + k \cdot \frac{1}{2}$,

Այսպիսով, (2) շարքի մասնակի գումարները k -ի բավականաչափ մեծ արժեքի դեպքում կարելի է դարձնել ցանկացած դրական թվից մեծ, այսինքն՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} = \infty,$$

բայց այս դեպքում (3) առնչությունից հետևում է, որ և

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} = \infty,$$

այսինքն՝ (1) հարմոնիկ շարքը տարամիտում է:

§ 3. Դրական անդամներով շարքերի բաղդատումը

Դիցուք ունենք դրական անդամներով երկու շարք.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (2)$$

Նրանց համար արդարև են հետևյալ պնդումները.

Թեև որևէ 1, եթե (1) շարքի անդամները մեծ չեն (2) շարքի համապատասխան անդամներից, այսինքն՝

$$u_n \leq v_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad (3)$$

և (2) շարքը զուգամիտում է, ապա զուգամիտում է և (1) շարքը:

Ապացուցում. Նշանակենք S_n -ով և σ_n -ով, համապատասխանաբար, առաջին և երկրորդ շարքի մասնակի գումարները.

$$S_n = \sum_{i=1}^n u_i, \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^n v_i;$$

(3) պայմանից հետևում է, որ

$$S_n \leq \sigma_n, \quad (4)$$

Քանի որ (2) շարքը զուգամիտում է, ապա գոյություն ունի նրա մասնակի գումարի σ սահմանը.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma;$$

Այն բանից, որ (1) և (2) շարքերի անդամները դրական են, հետևում է, որ $\sigma_n < \sigma$, և այս դեպքում (4) անհավասարության հիման վրա

$$S_n < \sigma;$$

Եվ այսպես, ապացուցեցինք, որ S_n մասնակի գումարները սահմանափակ են: Իհարկո՞ւնք, որ Π -ը մեծացնելիս S_n մասնակի գումարն աճում է, իսկ այն բանից, որ մասնակի գումարների հաջորդականությունը աճող և սահմանափակ է, հետևում է, որ այն ունի սահման*.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

ընդ որում ակնհայտ է, որ

Թեորեմ 1-ի հիման վրա կարելի է դատել մի քանի շարքերի զուգամիտության մասին:

Օրինակ 1. Հետևյալ շարքը՝

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots$$

զուգամիտում է, քանի որ նրա անդամները փոքր են

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

շարքի համապատասխան անդամներից: Բայց վերջին շարքը զուգամիտում է, քանի որ նրա անդամները, սկսած երկրորդից, կազմում են $\frac{1}{2}$ հայտարարով երկրաչափական սլոնդրեսիա:

Այս շարքի գումարը հավասար է $\frac{3}{2}$ -ի: Հետևաբար, 1-ին թեորեմի համաձայն, տրված շարքը նույնպես զուգամիտում է, ընդ որում նրա գումարը $\frac{3}{2}$ -ից ավելի չէ:

Թեորեմ 2: Եթե (1) շարքի անդամները փոքր չեն (2) շարքի համապատասխան անդամներից, այսինքն՝

$$u_n \geq v_n, \quad (5)$$

և (2) շարքը տարամիտում է, ապա տարամիտում է նաև (1) շարքը:

* Համոզվելու համար, որ S_n փոփոխականն ունի սահման, հիշենք հաջորդականությունից սահմանի գոյությունի մի հայտանիշ (տես I հատ. II գլ., § 5-ի 7-րդ թեորեմը). եթե փոփոխականը աճում է և սահմանափակ է, ապա այն ունի սահման. Տվյալ դեպքում S_n գումարների հաջորդականությունը աճում է և սահմանափակ է, հետևաբար, ունի սահման, այսինքն՝ շարքը զուգամիտում է:

Ապացուցում: (5) պայմանից հետևում է, որ

$$S_n \geq \sigma_n, \quad (6)$$

Քանի որ (2) շարքի անդամները դրական են, ապա Π -ը աճելիս նրա σ_n մասնակի գումարն աճում է, իսկ քանի որ այն տարամիտում է, ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty;$$

Բայց այս դեպքում (6) հավասարության հիման վրա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty,$$

այսինքն՝ (1) շարքը տարամիտում է:

Օրինակ 2. Հետևյալ շարքը՝

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

տարամիտում է, քանի որ նրա անդամները (երկրորդից սկսած) մեծ են

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

հարմոնիկ շարքի համապատասխան անդամներից, որը, ինչպես հայտնի է, տարամիտում է:

Դիտողություն 1: Ապացուցած երկու հայտանիշները (1-ին և 2-րդ թեորեմներ) ճիշտ են միայն դրական անդամներով շարքերի համար: Նրանք ուժի մեջ են մնում նաև այն դեպքի համար, երբ առաջին կամ երկրորդ շարքի մի քանի անդամներ գրունել են: Բայց այս հայտանիշները դադարում են ճիշտ լինելուց, եթե շարքի անդամների մեջ կան բացասական թվեր:

Դիտողություն 2: 1-ին և 2-րդ թեորեմները ճիշտ են և այն դեպքում, երբ (3) կամ (6) անհավասարությունները սկսում են տեղի ունենալ միայն $n \geq N$ համար, և ոչ թե բոլոր $n=1, 2, 3, \dots$ արժեքների համար:

§ 4. Դալամբերի հայտանիշը

Թեորեմ (Դալամբերի հայտանիշը): Եթե

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

գրական անգամներով շարքի $(n+1)$ -րդ անդամի հարաբերությունը n -րդ անդամին, երբ $n \rightarrow \infty$, ունի (վերջավոր) l սահմանը, այսինքն,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \quad (2)$$

ապա

1) շարքը զուգամիտում է $l < 1$ դեպքում,

2) շարքը տարամիտում է $l > 1$ դեպքում:

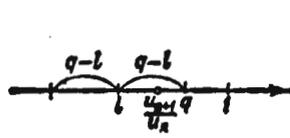
($l=1$ դեպքում շարքի զուգամիտության կամ տարամիտության հարցին թեորեմը պատասխան չի տալիս):

Ապացուցում: Դիցուք $l < 1$: Դիտարկենք $l < q < 1$ առնչությունը բավարարող q թիվը (նկ. 358):

Սահմանի սահմանումից և (2) առնչությունից հետևում է, որ սկսած մի որոշ N համարից n -ի բոլոր արժեքների համար տեղի կունենա հետևյալ անհավասարությունը.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q: \quad (2')$$

Իրոք, քանի որ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ մեծությունը ձգտում է l սահմանին, ապա



նկ. 358

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ մեծության և l թվի տարբերությունը (մի որոշ N համարից սկսած) կարելի է բացարձակ արժեքով դարձնել ցանկացած դրական թվից փոքր, մասնավորապես, փոքր, քան $q-l$ -ը, այսինքն՝

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < q - l:$$

Վերջին անհավասարությունից էլ հետևում է (2') անհավասարությունը: (2') անհավասարությունը գրելով n -ի տարբեր արժեքների համար, սկսած N համարից, կստանանք.

$$\left. \begin{aligned} u_{N+1} &< qu_N, \\ u_{N+2} &< qu_{N+1} < q^2 u_N, \\ u_{N+3} &< qu_{N+2} < q^3 u_N, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Այժմ դիտարկենք հետևյալ երկու շարքերը.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots, \quad (1)$$

$$u_N + qu_N + q^2 u_N + \dots \quad (1')$$

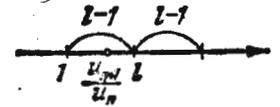
(1') շարքը $q < 1$ դրական հալտարար ունեցող երկրաչափական պրոգրեսիա է: Հետևաբար, այդ շարքը զուգամիտում է: (1) շարքի անդամները, սկսած u_{N+1} -ից, փոքր են (1') շարքի անդամներից: § 3-ի 1-ին և § 1-ի 1-ին թեորեմների հիման վրա (1) շարքը զուգամիտում է:

2) Դիցուք $l > 1$: Այս դեպքում $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ (որտեղ $l > 1$) հավասարությունից հետևում է, որ սկսած մի որոշ N համարից, այսինքն՝

$n \geq N$ համար տեղի կունենա

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

անհավասարությունը (նկ. 359), կամ $u_{n+1} > u_n$ բոլոր $n \geq N$ համար: Բայց սա նշանակում է, որ շարքի անդամներն աճում են՝ սկսած $N+1$ համարից, ուստի շարքի ընդհանուր անդամը գրոյլի չի ձգտում: Հետևաբար, շարքը տարամիտում է:



նկ. 359

Դիտողություն 1: Շարքը տարամիտ կլինի նաև այն դեպքում, երբ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$: Դա հետևում է նրանից,

որ եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, ապա, սկսած որոշ $n = N$ համարից, տեղի կունենա $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ կամ $u_{n+1} > u_n$ անհավասարությունը:

Օրինակ 1: Հետադրոսի

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} + \dots$$

շարքի զուգամիտությունը:
Լուծում: Այստեղ

$$u_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

Հետևաբար,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Շարքը զուգամիտում է:

Օրինակ 2: Հետադրոսի

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n} + \dots$$

շարքի զուգամիտությունը:
Լուծում: Այստեղ

$$u_n = \frac{2^n}{n}, \quad u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 \frac{n}{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{n}{n+1} = 2 > 1.$$

Շարքը տարամիտում է, ընդ որում նրա u_n ընդհանուր անդամը ձգտում է անվերջություն:

Դիտողություն 2: Դալամբերի հայտանիշը տվյալ դրական անդամներով շարքի զուգամիտություն հարցին պատասխանում է միայն այն դեպքում, երբ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ -ից:

Իսկ եթե այդ սահմանը գոյություն չունի կամ էլ գոյություն ունի, բայց $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, ապա Դալամբերի հայտանիշը հնարավորություն չի տալիս հաստատելու տվյալ շարքի զուգամետ կամ տարամետ լինելը, քանի որ այս դեպքում շարքը կարող է լինել ինչպես զուգամիտող, այնպես էլ տարամիտող: Նման շարքերի զուգամիտություն մասին հարցը լուծելու համար պետք է կիրառել ուրիշ հայտանիշ:

Դիտողություն 3: Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, բայց $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ հարաբերությունը, սկսած որոշ համարից, բոլոր n համարների համար մեծ է մեկից, ապա շարքը տարամիտում է: Դա հետևում է այն բանից, որ եթե $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, ապա $u_{n+1} > u_n$ և երբ $n \rightarrow \infty$, շարքի ընդհանուր անդամը չի ձգտում գրոլի:

Քննարկենք ստվածը լուսարանող օրինակներ:

Օրինակ 3. Ուսումնասիրել

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

շարքի զուգամիտությունը:

Լուծում: Այստեղ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1,$$

Տվյալ դեպքում շարքը տարամիտում է, քանի որ $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ բոլոր n -երի համար:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1,$$

Օրինակ 4: Դալամբերի հայտանիշը կիրառելով

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

հարմանիկ շարքի նկատմամբ, նկատում ենք, որ $u_n = \frac{1}{n}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, և, հետևաբար,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

նշանակում է, Դալամբերի հայտանիշի հիման վրա չի կարելի հաստատել տվյալ շարքի զուգամիտությունը կամ տարամիտությունը, Բայց նախկինում ուրիշ ճանապարհով ապացուցել ենք, որ հարմանիկ շարքը տարամիտում է:

Օրինակ 5. Ուսումնասիրել

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

շարքի զուգամիտությունը:

Լուծում: Այստեղ

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1,$$

Դալամբերի հայտանիշի հիման վրա չի կարելի եզրակացնել շարքի զուգամիտության մասին, սակայն, ելնելով ուրիշ կշռադատումներից, կարելի է հաստատել, որ սրված շարքը զուգամիտում է: Նկատելով, որ

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

կարող ենք տվյալ շարքը գրել հետևյալ տեսքով.

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots$$

Առաջին n անդամների մասնակի գումարը փակադեբը բացելուց և կրճատելուց հետո հավասար կլինի

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

Հետևաբար,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

այսինքն՝ շարքը զուգամիտում է և նրա գումարը հավասար է 1-ի:

§ 5. Կոշիի հայտանիշը

Թեոթեմ (Կոշիի հայտանիշը): Եթե

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

(1)

291

գրական անդամներով շարքի համար $\sqrt[n]{u_n}$ մեծությունն ունի 1 վերջավոր մասնանը, երբ $n \rightarrow \infty$, այսինքն՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

այսպիսով

- 1) $l < 1$ դեպքում շարքը զուգամիտում է,
- 2) $l > 1$ դեպքում շարքը տարամիտում է:

Ապացուցում: 1) Դիցուք $l < 1$: Դիտարկենք $l < q < 1$ անընչաթիվանը բավարարող q թիվը:

Որոշ $n = N$ համարից սկսած տեղի կունենա հետևյալ անընչաթիվանը.

$$|\sqrt[n]{u_n} - l| < q - l,$$

այստեղից հետևում է, որ

$$\sqrt[n]{u_n} < q$$

կամ

$$u_n < q^n \text{ բոլոր } n \geq N \text{ համար:}$$

Այժմ դիտարկենք հետևյալ երկու շարքերը.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots, \quad (1)$$

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \dots \quad (1')$$

(1') շարքը զուգամիտում է, քանի որ նրա անդամները կազմում են նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա: (1) շարքի անդամները, սկսած u_N -ից, փոքր են (1') շարքի անդամներից: Հետևաբար, (1) շարքը զուգամիտում է:

2) Դիցուք $l > 1$: Այս դեպքում, սկսած որոշ $n = N$ համարից, կունենանք.

$$\sqrt[n]{u_n} > 1$$

կամ

$$u_n > 1:$$

Բայց եթե դիտարկվող շարքի բոլոր անդամները, սկսած u_N -ից, մեծ են 1-ից, ապա շարքը տարամիտում է, քանի որ նրա ընդհանուր անդամը չի ձգտում զրոյի:

Օրինակ, Ռսուլմասիբել

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$$

շարքի զուգամիտությունը:

Լուծում: Կիրառենք Կոշիի հայտանիշը,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

Շարքը զուգամիտում է:

Դիտողություն: Ինչպես և Դալամբերի հայտանիշի դեպքում

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l = 1$$

դեպքը պահանջում է լրացուցիչ ուսումնասիրություն: Այս պայմանին բավարարող շարքերի մեջ կարող են հանդիպել ինչպես զուգամիտող, այնպես էլ տարամիտող շարքեր: Այսպես, հարմանիկ շարքի համար (որն, ինչպես հայտնի է, տարամիտում է)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n} = 1,$$

Դրանում համոզվելու համար ապացուցենք, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{1/n} = 0$,

Իրոք.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln n}{n},$$

Այստեղ կոտորակի համարիչը և հայտարարը ձգտում են անվերջություն: Կիրառելով Լոպիտալի կանոնը, գտնում ենք.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n}}{1} = 0,$$

Այսպիսով, $\ln \sqrt[n]{1/n} \rightarrow 0$, բայց այս դեպքում $\sqrt[n]{1/n} \rightarrow 1$, այսինքն՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n} = 1,$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

շարքի համար նույնպես տեղի ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n} \sqrt[n]{1/n} = 1$$

հավասարությունը, բայց այս շարքը զուգամիտում է, քանի որ եթե դեն նետենք առաջին անդամը, ապա շարքի մնացած անդամները փոքր կլինեն

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

զուգամիտող շարքի համապատասխան անդամներից (տես § 4, օրինակ 5),

§ 6. Չուզամիտության ինտեգրալային հայտանիշը

Թեորեմ: Դիցուք

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

շարքի անզամենբը զրական են և չեն՝ աճում, այսինքն՝

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots, \quad (1')$$

և դիցուք $f(x)$ -ն այնպիսի անընդհատ անդ Φ ունկցիա է, որ

$$f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n, \quad (2)$$

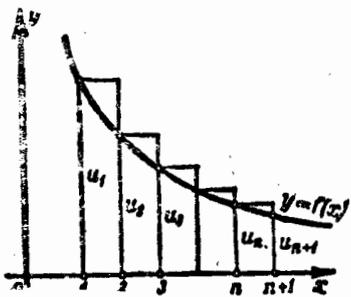
Այս դեպքում նշմարիտ են հետևյալ պնդումները.

1) եթե $\int_1^{n+1} f(x) dx$ անհսկական ինտեգրալը գուզամիտում է

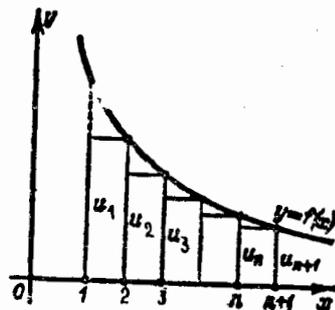
(տես I հատ. XI գլխի § 7), ապա գուզամիտում է և (1) շարքը:

2) եթե նշված ինտեգրալը տարամիտում է, ապա տարամիտում է նաև (1) շարքը:

Ապացուցում: Շարքի անդամները պատկերացնենք երկրաչափորեն, արսցիսների առանցքի վրա անշատելով շարքի անդամների 1, 2, 3, ..., n, n+1, ... համարները, իսկ օրդինատների առանցքի վրա՝ շարքի $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ անդամների համապատասխան արժեքները (նկ. 360):



Նկ. 360



Նկ. 361

Նույն գծագրի վրա կառուցենք (2) պայմանին բավարարող $y=f(x)$

անընդհատ անդ Φ ունկցիալի գրաֆիկը:

Նկ. 360-ից նկատում ենք, որ կառուցած ուղղանկյուններից առաջինի հիմքը հավասար է 1-ի, իսկ բարձրությունը՝ $f(1) = u_1$: Հետևաբար, այդ ուղղանկյան մակերեսն է u_1 : Երկրորդ ուղղանկյան

մակերեսը u_2 է և այլն, վերջապես, կառուցած ուղղանկյուններից վերջինի (n-րդի) մակերեսը u_n է: Կառուցած ուղղանկյունների մակերեսների գումարը հավասար է շարքի առաջին n անդամների S_n գումարին: Մյուս կողմից, այդ ուղղանկյուններից կազմված անդրաձև պատկերը ընդգրկում է $y=f(x)$ կորով և $x=1, x=n+1, y=0$ ուղիղներով սահմանափակված տիրույթը. այս տիրույթի մակերեսը հավասար է

$$\int_1^{n+1} f(x) dx,$$

Հետևաբար,

$$S_n > \int_1^{n+1} f(x) dx, \quad (3)$$

Այժմ դիտարկենք նկ. 361-ը: Այստեղ կառուցած ուղղանկյուններից առաջինը (ձախից) ունի u_2 բարձրություն. հետևաբար, նրա մակերեսը նույնպես հավասար է u_2 -ի: Երկրորդ ուղղանկյան մակերեսը u_3 է և այլն: Կառուցած ուղղանկյուններից վերջինի մակերեսը u_{n+1} է: Հետևաբար, կառուցած բոլոր ուղղանկյունների մակերեսների գումարը հավասար է այդ շարքի բոլոր անդամների գումարին՝ սկսած երկրորդից մինչև (n+1)-րդը, այսինքն՝ հավասար է $S_{n+1} - u_1$: Մյուս կողմից, ինչպես հեշտ է նկատել, ուղղանկյուններից կազմված անդրաձև պատկերը պարփակված է $y=f(x)$ կորով և $x=1, x=n+1, y=0$ ուղիղներով սահմանափակված կորագիծ ստեղծի ներսում: Այս

կորագիծ պատկերի մակերեսը հավասար է $\int_1^{n+1} f(x) dx$: Հետևաբար,

$$S_{n+1} - u_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx,$$

որտեղից

$$S_{n+1} < \int_1^{n+1} f(x) dx + u_1, \quad (4)$$

Այժմ քննարկենք հիշյալ երկու դեպքը:

1. Ենթադրենք, որ $\int_1^{\infty} f(x) dx$ ինտեգրալը գուզամիտում է, այսինքն՝ ունի վերջավոր արժեք:

Քանի որ

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < \int_1^{\infty} f(x) dx,$$

ապա (4) անհավասարության հիման վրա

$$S_n < S_{n+1} < \int_1^{\infty} f(x) dx + u_1,$$

այսինքն՝ S_n գումարը n -ի բոլոր արժեքների դեպքում մնում է սահմանափակ: Բայց n -ը մեծանալիս այն աճում է, քանի որ բոլոր անդամները դրական են: Հետևաբար, երբ $n \rightarrow \infty$, S_n -ը ունի վերջավոր սահման՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

այսինքն՝ շարքը զուգամիտում է:

2. Այնուհետև ենթադրենք, որ $\int_1^{\infty} f(x) dx = \infty$: Սա նշանակում է,

որ n -ը աճելիս $\int_1^{n+1} f(x) dx$ -ը անսահմանափակորեն աճում է: Բայց

այս դեպքում (3) անհավասարության համաձայն n -ը աճելիս S_n -ը նույնպես անսահմանափակորեն աճում է, այսինքն՝ շարքը տարամիտում է:

Այսպիսով, թեորեմը լրիվ ապացուցված է:

Դիտողություն: Ապացուցած թեորեմը մնում է ճիշտ, եթե (1') անհավասարությունները տեղի են ունենում միայն սկսած որոշ N համարից:

Օրինակ: Ուսումնասիրել

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

շարքի զուգամիտությունը:

Լուծում: Կիրառենք ինտեգրալային հայտանիշը, ընդունելով $f(x) = \frac{1}{x^p}$,

Այս ֆունկցիան բավարարում է թեորեմի բոլոր պայմաններին, Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^N = \frac{1}{1-p} (N^{1-p} - 1), & \text{երբ } p \neq 1, \\ \ln x \Big|_1^N = \ln N, & \text{երբ } p = 1, \end{cases}$$

N -ը ձգտեցնելով անվերջության, պարզենք զուգամիտում է արդյոք ինտեգրալը տարբեր դեպքերում:

Դրա հիման վրա կարելի կլինի դատել p -ի տարբեր արժեքների դեպքում շարքի զուգամիտության կամ տարամիտության մասին:

$p > 1$ դեպքում $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$, այսինքն՝ ինտեգրալը վերջավոր է, հետևաբար, շարքը զուգամիտում է:

$p < 1$ դեպքում $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty$, այսինքն՝ ինտեգրալն անվերջ է. շարքը տարամիտում է:

$p = 1$ դեպքում $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$, այսինքն՝ ինտեգրալն անվերջ է. շարքը տարամիտում է:

Նկատենք, որ նախկինում քննարկված ոչ Դալամբերի հայտանիշը, ոչ Կոշիի հայտանիշը այս շարքի զուգամիտության մասին հարցը չեն լուծում, քանի որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right)^p = 1^p = 1.$$

§ 7. <Երթագայող նշաններով շարքեր: Լայբնիցի թեորեմը

7-23

Մինչև այժմ քննության ենք առել դրական անդամներ ունեցող շարքեր: Այս պարագրաֆում կքննարկենք այնպիսի շարքեր, որոնց անդամներն ունեն հեթազալ ոչ նշաններ, այսինքն՝

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots,$$

տեսքի շարքեր, որտեղ $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ դրական են:

Լայբնիցի թեորեմը: Եթե

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \quad (u_n > 0) \tag{1}$$

հերթագայող նշաններով շարքի անգամներն այնպիսին են, որ

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots \tag{2}$$

և

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \tag{3}$$

ապա (1) շարքը զուգամիտում է, երա գումարը դրական է և չի գերազանցում առաջին անդամին:

Ապացուցում: Դիտարկենք (1) շարքի առաջին $n=2m$ անդամների գումարը.

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m});$$

(2) պայմանից հետևում է, որ շարքանջուր փակագծի ներսի արտահայտությունը գրական է: Հետևաբար, S_{2m} գումարը գրական է՝

$$S_{2m} > 0$$

և աճում է m -ի աճման հետ: Այդ նույն գումարն այժմ գրենք այսպես.

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m};$$

(2) պայմանի համաձայն փակագծերից շարքանջուրը գրական է: Ուստի u_1 -ից այդ փակագծերը հանելուց հետո կստանանք u_1 -ից փոքր թիվ, այսինքն՝

$$S_{2m} < u_1;$$

Այսպիսով, հաստատեցինք, որ m -ը աճելիս S_{2m} -ը աճում է և սահմանափակ է վերելից: Այստեղից հետևում է, որ S_{2m} -ն ունի S սահմանը՝

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S,$$

ընդ որում

$$0 < S < u_1;$$

Բայց շարքի զուգամիտությունը դեռ ապացուցված չէ. մենք միայն ապացուցեցինք, որ «զույգ» մասնակի գումարների հաջորդականությունն ունի S սահմանը: Այժմ ապացուցենք, որ «կենտ» մասնակի գումարները նույնպես ձգտում են S սահմանին:

Դրա համար քննարկենք (1) շարքի առաջին $n=2m+1$ անդամների գումարը

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1};$$

Քանի որ ըստ (3) պայմանի, $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$, ապա

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S;$$

Սրանով իսկ ապացուցեցինք, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ինչպես զույգ n -ի, այնպես էլ կենտ n -ի դեպքում: Հետևաբար, (1) շարքը զուգամիտում է:

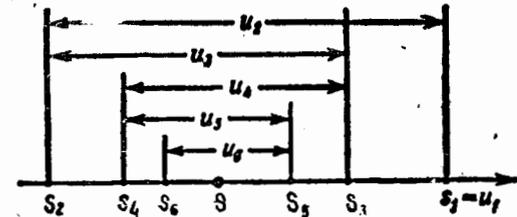
Դիտողություն 1: Լայրնիցի թեորեմը ճիշտ է, եթե (2) անհավասարությունները տեղի են ունենում՝ սկսած մի որոշ N -ից:

Դիտողություն 2: Լայրնիցի թեորեմը երկրաչափորեն լուսարանվում է հետևյալ կերպ: Թվային ուղիղի վրա անջատենք

$S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 - u_2 = S_1 - u_2$, $S_3 = S_2 + u_3$, $S_4 = S_3 - u_4$, $S_5 = S_4 + u_5$ և այլն մասնակի գումարները (նկ. 362):

Մասնակի գումարներին համապատասխանող կետերը կմոտենան մի որոշ S կետին, որը պատկերում է շարքի գումարը: Ընդ որում զույգ մասնակի գումարներին համապատասխանող կետերը դասավորվում են S -ից ձախ, իսկ կենտ գումարներին համապատասխանող կետերը՝ S -ից աջ:

Դիտողություն 3: Եթե հերթագայող նշաններով շարքը բավարարում է Լայրնիցի թեորեմի պայմանին, ապա դժվար չէ գնահատել



Նկ. 362

այն սխալը, որը կստացվի, եթե շարքի S գումարը փոխարինվի S_n մասնակի գումարով: Նման փոխարինման ժամանակ դեն ենք նետում շարքի բոլոր անդամները՝ սկսած u_{n+1} -ից: Բայց այս թվերը իրենք են կազմում հերթագայող նշաններով շարք, որի գումարը բացարձակ մեծություն փոքր է այդ շարքի առաջին անդամից (այսինքն՝ փոքր է u_{n+1} -ից): Նշանակում է, S -ը S_n -ով փոխարինելիս թույլ տրված սխալը բացարձակ մեծություն փոքր է չի վերազանցում դեն նետված առաջին անդամին:

Օրինակ 1.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

շարքը զուգամիտում է, քանի որ

$$1) 1 > 1/2 > 1/3 > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0;$$

Այս շարքի առաջին n անդամների գումարը՝

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Տ գումարից տարբերվում է մի մեծություն, որը փոքր է, քան $\frac{1}{n+1}$ -ը:

Օրինակ 2:

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$$

շարքը զուգամիտում է, համաձայն Լայբնիցի թեորեմի:

λ-22 1/2

§ 8. Նշանափոխ շարքեր:

Բացարձակ և պայմանական զուգամիտություն

λ-24, 25

Շարքը կոչվում է նշանափոխ, եթե նրա անդամների մեջ կան ինչպես դրականներ, այնպես էլ բացասականներ:

Նախորդ պարագրաֆում քննարկված հերթագայող նշաններով շարքերը հանդիսանում են նշանափոխ շարքերի մասնավոր դեպքեր:

Այստեղ կքննարկենք նշանափոխ շարքերի մի քանի հատկությունները:

Ընդ որում, ի տարբերություն նախորդ պարագրաֆում ընդունած պայմանավորվածությունների, այժմ քննարկելու ենք, որ $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ թվերը կարող են լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական:

Ամենից առաջ տանք նշանափոխ շարքի զուգամիտության մի կարևոր բավարար հայտանիշ:

Թեորեմ 1: Եթե

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

նշանափոխ շարքն այնպիսին է, որ նրա անդամների բացարձակ արժեքներից կազմված

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (2)$$

շարքը զուգամիտում է, ապա տվյալ նշանափոխ շարքը նույնպես զուգամիտում է:

Ապացուցում: Դիցուք S_n -ը և σ_n -ը (1) և (2) շարքերի առաջին n անդամների գումարներն են:

Դիցուք, այնուհետև, տվյալ շարքի առաջին n անդամների մեջ եղած դրական անդամների գումարը S'_n -ն է, իսկ նշված անդամների մեջ եղած բոլոր բացասական անդամների բացարձակ մեծությունների գումարը՝ S''_n -ը, այդ դեպքում

$$S_n = S'_n - S''_n, \quad \sigma_n = S'_n + S''_n:$$

Ըստ պայմանի, σ_n -ը ունի ε սահմանը, S'_n -ը և S''_n -ը σ_n -ից փոքր դրական աճող մեծություններ են: Հետևաբար, դրանք ունեն ε' և ε''

սահմանները: $S_n = S'_n - S''_n$ առնչությունից հետևում է, որ նաև S_n -ը ունի սահման և որ այդ սահմանը հավասար է $S' - S''$, այսինքն՝ (1) նշանափոխ շարքը զուգամիտում է:

Ապացուցած թեորեմը հնարավորություն է տալիս դատելու մի քանի նշանափոխ շարքերի զուգամիտության մասին: Նշանափոխ շարքի զուգամիտության մասին հարցի ուսումնասիրությունն այս դեպքում հանդում է դրական անդամներով շարքի ուսումնասիրությունը:

Դիտարկենք երկու օրինակ:

Օրինակ 1. Ուսումնասիրել

$$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots \quad (3)$$

շարքի զուգամիտությունը, որտեղ α -ն ցանկացած թիվ է:

Լուծում: Տրված շարքի հետ քննարկենք հետևյալ շարքերը.

$$\left| \frac{\sin \alpha}{1^2} \right| + \left| \frac{\sin 2\alpha}{2^2} \right| + \left| \frac{\sin 3\alpha}{3^2} \right| + \dots + \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| + \dots \quad (4)$$

և

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (5)$$

(5) շարքը զուգամիտում է (տես § 6): (4) շարքի անդամները մեծ չեն (5) շարքի համապատասխան անդամներից, հետևաբար, (4) շարքը նույնպես զուգամիտում է: Բայց այս դեպքում, ըստ ապացուցած թեորեմի, տրված (3) նշանափոխ շարքն էլ է զուգամիտում:

Օրինակ 2: Ուսումնասիրել

$$\frac{\cos(\pi/4)}{3} + \frac{\cos(3\pi/4)}{3^2} + \frac{\cos(5\pi/4)}{3^3} + \dots + \frac{\cos((2n-1)\pi/4)}{3^n} + \dots \quad (6)$$

շարքի զուգամիտությունը:

Լուծում: Տրված շարքի հետ քննարկենք հետևյալ շարքը

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots \quad (7)$$

Այս շարքը զուգամիտում է, քանի որ սա $\frac{1}{3}$ հայտարար ունեցող նվազող

երկրաչափական պրոդրեսիա է, Բայց այս դեպքում զուգամիտում է և տրված (6) շարքը, քանի որ նրա անդամների բացարձակ մեծությունները փոքր են (7) շարքի համապատասխան անդամներից:

Նկատենք, որ վերը ապացուցած զուգամիտության հայտանիշը նշանափոխ շարքի զուգամիտության միայն բավարար, բայց ոչ անհրաժեշտ հայտանիշ է. գոյություն ունեն այնպիսի նշանափոխ շարքեր, որոնք իրենք զուգամիտում են, բայց իրենց անդամների բացարձակ մեծություններից կազմված շարքերը տարամիտում են:

Այս կապակցությունները օգտակար է մտածել նշանափոխ շարքի բացարձակ և պայմանական զուգամիտություն մասին գաղափարները և զըրանց հիման վրա դասակարգել նշանափոխ շարքերը:

Սահմանում: $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ (1)

նշանափոխ շարքը կոչվում է բացարձակ զուգամիտող, եթե նրա անդամների բացարձակ մեծությունների շարքը՝

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$$
 (2)

զուգամիտում է:

Իսկ եթե (1) նշանափոխ շարքը զուգամիտում է, իսկ նրա անդամների բացարձակ մեծություններից կազմված շարքը տարամիտում է, ապա տրված (1) նշանափոխ շարքը կոչվում է պայմանական կամ ոչ բացարձակ զուգամիտող շարք:

Օրինակ 3: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ նշանափոխ շարքը պայմանական զուգամիտող է, քանի որ նրա անդամների բացարձակ մեծություններից կազմված շարքը՝ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ տարամիտում է, իսկ ինքը՝ սովորական զուգամիտում է, որը կարելի է հեշտությամբ ստուգել Լայբնիցի հայտանքի օգնությամբ:

Օրինակ 4: $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$ նշանափոխ շարքը բացարձակ զուգամիտող է, քանի որ նրա անդամների բացարձակ մեծություններից կազմված շարքը՝ $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$ զուգամիտում է, ինչպես դա հաստատվել է § 4-ում:

Բացարձակ զուգամիտության հասկացության օգնությամբ թեորեմ 1-ը հաճախ բանաձևում են այսպես. ամեն մի բացարձակ զուգամիտող շարք զուգամիտող շարք է:

Վերջում նշենք (առանց ապացուցելու) բացարձակ զուգամիտող և պայմանական զուգամիտող շարքերի հետևյալ հատկությունները:

Թեորեմ 2: Եթե շարքը զուգամիտում է բացարձակ, ապա նրա անդամների ցանկացած տեղափոխման դեպքում այն մնում է բացարձակ զուգամիտող: Անդ որում շարքի գումարը կախված չէ նրա անդամների կարգից:

Այս հատկությունը պայմանական զուգամիտող շարքերի համար չի պահպանվում:

Թեորեմ 3: Եթե շարքը պայմանական զուգամիտող է, ապա ինչպիսի A թիվ էլ վերցնենք, կարելի է այդ շարքի անդամներն այնպես տեղափոխել, որ նրա գումարը միշտ հավասար լինի A

թվին: Բացի դրանից, պայմանական զուգամիտող շարքի անդամները կարելի է այնպես տեղափոխել, որ տեղափոխություններից հետո ստացված շարքը լինի տարամիտող:

Այս թեորեմների ապացուցումը դուրս է գալիս սովորական դասընթացի շրջանակներից: Այն կարելի է գտնել ավելի մանրամասն շարադրանք ունեցող գրասագրքերում (տես, օրինակ, Фихтенгольц «Курс дифференциального и интегрального исчисления» 1966, т. II, стр. 319—320):

Այն բանի լուսաբանման համար, որ պայմանական զուգամիտող շարքի գումարը նրա անդամների տեղափոխություններից կարող է փոխվել, դիտարկենք հետևյալ օրինակը:

Օրինակ 5: Հետևյալ նշանափոխ շարքը՝

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$
 (8)

զուգամիտում է ոչ բացարձակ: Նրա գումարը նշանակենք s-ով: Ակնհայտ է, որ $s > 0$: (8) շարքի անդամները տեղափոխենք այնպես, որ մեկ զրական անդամին հետեն երկու բացասական անդամներ.

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \dots$$
 (9)

Ապացուցենք, որ ստացված շարքը զուգամիտում է, բայց նրա s' գումարը երկու անգամ փոքր է (8) շարքի գումարից, այսինքն՝ հավասար է $\frac{1}{2} s$ -ի: s_n -ով s' -ով նշանակենք (8) և (9) շարքերի մասնակի գումարները: Դիտարկենք (9) շարքի $3k$ անդամների գումարը

$$\begin{aligned} s_{3k} &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} s_{2k} \end{aligned}$$

Հետևաբար,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{3k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} s_{2k} = \frac{1}{2} s,$$

Այնուհետև

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} s_{3k+1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(s_{3k} + \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} s, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} s_{3k+2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(s_{3k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} \right) = \frac{1}{2} s, \end{aligned}$$

Այսպիսով, ստանում ենք

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s' = \frac{1}{2} s,$$

հ-24, 28

Եվ այսպես, տվյալ դեպքում անդամների տեղափոխությունից հետո շարքի գումարը փոխվեց (երկու անգամ փոքրացավ):

§ 9. Ֆունկցիոնալ շարքեր

հ-26

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

շարքը կոչվում է ֆունկցիոնալ, եթե նրա անդամները x -ի ֆունկցիաներ են:

Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիոնալ շարքը

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

x -ին տալով որոշակի թվային արժեքներ, ստանում ենք տարբեր թվային շարքեր, որոնք կարող են լինել զուգամիտող կամ տարամիտող:

x -ի այն արժեքների բազմությունը, որոնց համար ֆունկցիոնալ շարքը զուգամիտում է, անվանում են այդ շարքի զուգամիտության տիրույթ:

Այնհայտ է, որ շարքի զուգամիտության տիրույթում նրա գումարը x -ի մի որոշ ֆունկցիա է: Ուստի ֆունկցիոնալ շարքի գումարը նշանակում են $s(x)$ -ով:

Օրինակ, Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիոնալ շարքը

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Այս շարքը զուգամիտում է $(-1, 1)$ միջակայքից վերջրած x -ի բոլոր արժեքների դեպքում, այսինքն՝ $|x| < 1$ պայմանին բավարարող բոլոր x -երի համար, $(-1, 1)$ միջակայքից x -ի յուրաքանչյուր արժեքի համար շարքի գումարը հավասար է $\frac{1}{1-x}$ (x հայտարարն ունեցող նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը): Այսպիսով, $(-1, 1)$ միջակայքում տվյալ շարքը որոշում է

$$s(x) = \frac{1}{1-x}$$

ֆունկցիան, որը շարքի գումարն է, այսինքն՝

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Նշանակենք $s_n(x)$ -ով (1) շարքի առաջին n անդամների գումար

ը: Եթե այդ շարքը զուգամիտում է x նրա գումարը հավասար է $s(x)$ -ի, ապա

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

որտեղ $r_n(x)$ -ը $u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$ շարքի գումարն է, այսինքն՝

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

Այս դեպքում $r_n(x)$ մեծությունը կոչվում է (1) շարքի մնացորդ: Շարքի զուգամիտության տիրույթում x -ի բոլոր արժեքների համար տեղի ունի $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$ առնչությունը, ուստի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [s(x) - s_n(x)] = 0,$$

այսինքն՝ զուգամիտող շարքի $r_n(x)$ մնացորդը ձգտում է զրոյի, երբ $n \rightarrow \infty$:

հ-26 մեջ

§ 10. Մաժորացվող շարքեր

հ-33

Սահմանում:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

ֆունկցիոնալ շարքը կոչվում է մաժորացվող x -ի փոփոխման մի որոշ տիրույթում, եթե գոյություն ունի այնպիսի

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + \dots \quad (2)$$

դրական անդամներով զուգամիտվող թվային շարք, որ տվյալ տիրույթից վերջրած x -ի բոլոր արժեքների համար տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները

$$|u_1(x)| \leq \alpha_1, |u_2(x)| \leq \alpha_2, \dots, |u_n(x)| \leq \alpha_n, \dots \quad (3)$$

Այլ կերպ ասած, շարքը կոչվում է մաժորացվող, եթե նրա յուրաքանչյուր անդամ բացարձակ մեծությամբ մեծ չէ որևէ դրական անդամներով զուգամիտվող թվային շարքի համապատասխան անդամից:

Օրինակ,

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos nx}{n^2} + \dots +$$

շարքը ամբողջ $0 < x < \pi$ առանցքի վրա մաժորացվող շարք է: Իրոք, x -ի բոլոր արժեքների համար տեղի ունի

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

առնչութիւնը, իսկ

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{3^2} + \dots$$

շարքը, ինչպէս հայտնի է, զուգամիտում է:

Սահմանումից անմիջապէս հետևում է, որ որևէ տիրույթում մատուցվող շարքը այդ տիրույթի բոլոր կետերում բացարձակ զուգամիտում է (տես § 8): Բացի դրանից, մատուցվող շարքն օժտված է նաև հետևյալ կարևոր հատկութիւնով:

Թեոթեմ: Դիցուք

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Ֆունկցիոնալ շարքը $[a, b]$ հատվածում սժոդրացվող է Դիցուք $s(x)$ -ը այդ շարքի գումարն է, իսկ $s_n(x)$ -ը՝ նրա առաջին n անդամների գումարը: Այս դեպքում յուրաքանչյուր, որքան կամենանք փոքր $\epsilon > 0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի N դրական թիվ, որ բոլոր $n \geq N$ համար տեղի կունենա

$$|s(x) - s_n(x)| < \epsilon$$

անհավասարությունը, ինչպիսին էլ լինի $[a, b]$ -ից վերցրած x -ը Ապացուցում: Նշանակենք օ-ով (2) շարքի գումարը

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1} + \dots,$$

այս դեպքում

$$\sigma = s_n + \epsilon_n,$$

որտեղ σ_n -ը (2) շարքի առաջին n անդամների գումարն է, իսկ ϵ_n -ը՝ այդ շարքի մնացած բոլոր անդամների գումարը, այսինքն՝

$$\epsilon_n = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots$$

Դանի որ այդ շարքը զուգամիտում է, այսպէս

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$$

և, հետևաբար,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0,$$

Այժմ (1) ֆունկցիոնալ շարքի գումարը ներկայացնենք

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

տեսքով, որտեղ

$$s_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x),$$

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \dots$$

(3) սլայմանից հետևում է, որ

$$|u_{n+1}(x)| \leq \alpha_{n+1}, \quad |u_{n+2}(x)| \leq \alpha_{n+2}, \dots,$$

և ուստի

$$|r_n(x)| \leq \epsilon_n$$

դիտարկվող տիրույթի բոլոր x -երի համար: Այսպիսով,

$$|s(x) - s_n(x)| < \epsilon_n$$

$[a, b]$ հատվածի բոլոր x -երի համար, ընդ որում $\epsilon_n \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$: Դիտողութիւն 1: Ստացված արդյունքը կարելի է կրկրափոխել լուսարանել հետևյալ կերպ:

Դիտարկենք $y = s(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Այս կորի շուրջը կառուցենք $2\epsilon_n$ լայնութիւնով շերտ, այսինքն՝ կառուցենք $y = s(x) + \epsilon_n$ և $y = s(x) - \epsilon_n$ կորերը (նկ. 363): Այդ դեպքում ցանկացած ϵ_n -ի համար $s_n(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ամբողջությամբ ընկած կլինի դիտարկվող շերտում: Այս շերտում էլ ընկած կլինեն բոլոր հաջորդ մասնակի գումարների գրաֆիկները:

Դիտողութիւն 1: $[a, b]$ հատվածում զուգամիտվող ոչ ամեն մի ֆունկցիոնալ շարք է օժտված ապացուցած թեորեմում նշված հատկութիւնով: Բայց գոյութիւն ունեն նաև ոչ մատուցվող շարքեր, որոնք օժտված են նշված հատկութիւնով: Նշված հատկութիւնով օժտված ամեն մի շարք կոչվում է $[a, b]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամիտվող:

Եվ այսպէս,

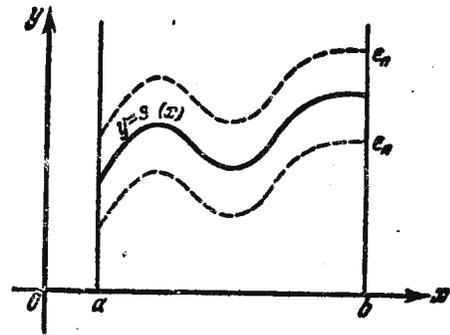
$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

ֆունկցիոնալ շարքը կոչվում է $[a, b]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամիտվող, եթե ցանկացած որքան կամենանք փոքր $\epsilon > 0$ համար կգտնվի այնպիսի N համար, որ բոլոր $n \geq N$ համար տեղի կունենա

$$|s(x) - s_n(x)| < \epsilon$$

անհավասարությունը $[a, b]$ հատվածից վերցրած ցանկացած x -ի համար:

Ապացուցած թեորեմից հետևում է, որ մատուցվող շարքը հավասարաչափ զուգամիտվող շարք է:



նկ. 363

§ 11. Շարքի գումարի անընդհատությունը

h-27

Դիցուք ունենք անընդհատ ֆունկցիաներից կազմված

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

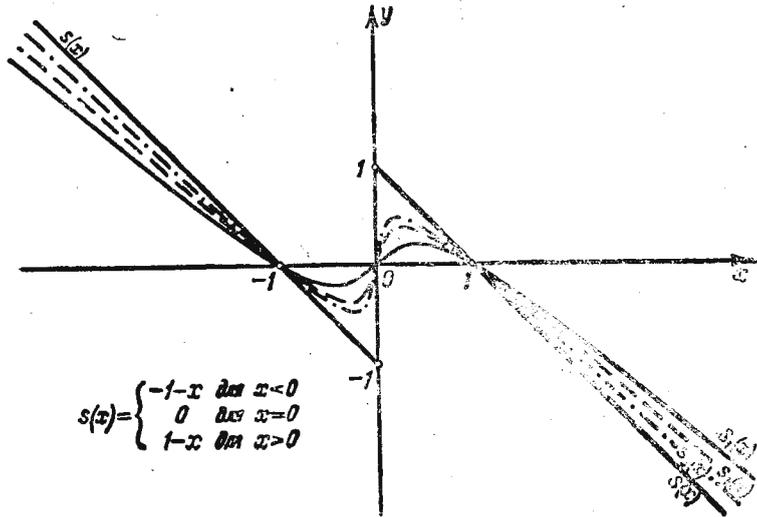
շարքը, որը զուգամիտում է $[a, b]$ հատվածում:

II գլխում (I հատ.) ապացուցել ենք թեորեմ այն մասին, որ վերջավոր թվով անընդհատ ֆունկցիաների գումարը անընդհատ ֆունկցիա է: Շարքի գումարի (որը բաղկացած է անվերջ թվով գումարելիներից) համար այս հատկությունը չի պահպանվում: Անընդհատ անդամներով որոշ ֆունկցիոնալ շարքերի գումարն անընդհատ ֆունկցիա է, սակայն կան անընդհատ անդամներով ֆունկցիոնալ շարքեր, որոնց գումարը խզվող ֆունկցիա է:

Օրինակ. Դիտարկենք հետևյալ շարքը

$$(x^{1/3} - x) + (x^{1/5} - x^{1/3}) + (x^{1/7} - x^{1/5}) + \dots + (x^{1/(2n+1)} - x^{1/(2n-1)}) + \dots$$

Այս շարքի անդամները (որոնցից յուրաքանչյուրն առնված է փակագծերի մեջ) x -ի բոլոր արժեքների համար անընդհատ ֆունկցիաներ են: Ապացուցենք, որ այս շարքը զուգամիտում է և նրա գումարը խզվող ֆունկցիա է:



$$s(x) = \begin{cases} -1-x & \text{մտ } x < 0 \\ 0 & \text{մտ } x = 0 \\ 1-x & \text{մտ } x > 0 \end{cases}$$

Նկ. 364

Գտնենք սվյալ շարքի առաջին n անդամների գումարը. $s_n = x^{2n+1} - x$,

Գտնենք շարքի գումարը.

եթե $x > 0$, ապա

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x^{2n+1} - x \right) = 1 - x,$$

եթե $x < 0$, ապա

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-|x|^{2n+1} - x) = -1 - x,$$

եթե $x = 0$, ապա $s_n = 0$, և ուստի $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$:

Այսպիսով, ունենք

$$s(x) = -1 - x \quad \text{եթե } x < 0,$$

$$s(x) = 0 \quad \text{եթե } x = 0,$$

$$s(x) = 1 - x \quad \text{եթե } x > 0:$$

Այսպես, ուրեմն, բերված շարքի գումարը խզվող ֆունկցիա է: Նրա գրաֆիկը պատկերված է նկ. 364-ում, որտեղ ցույց են արված նաև $s_1(x)$, $s_2(x)$ և $s_3(x)$ մասնակի գումարների գրաֆիկները:

Մաթորացվող շարքերի համար ճիշտ է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Որևե $[a, b]$ հատվածում մաթորացվող անընդհատ ֆունկցիաների շարքի գումարը այդ հատվածում անընդհատ ֆունկցիա է:

Ապացուցում: Դիցուք ունենք $[a, b]$ հատվածում մաթորացվող անընդհատ ֆունկցիաների

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \quad (1)$$

շարքը: Նրա գումարը ներկայացնենք

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

տեսքով, որտեղ

$$s_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x),$$

իսկ

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

$[a, b]$ հատվածում վերցնենք x արգումենտի կամայական արժեքը և նրան տանք այնպիսի Δx աճ, որպեսզի $x + \Delta x$ կետը նորից ընկած լինի $[a, b]$ հատվածում:

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x), \quad \Delta s_n = s_n(x + \Delta x) - s_n(x),$$

այս դեպքում

$$\Delta s = \Delta s_n + r_n(x + \Delta x) - r_n(x),$$

որտեղից

$$|\Delta s| \leq |\Delta s_n| + |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)| \quad (2)$$

Այս անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած n համարի դեպքում:

$s(x)$ -ի անընդհատությունը ապացուցելու համար պետք է ցույց

տալ, որ ցանկացած նախապես տրված սրբան կամենանք փոքր $\epsilon > 0$ համար կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ բոլոր $| \Delta x | < \delta$ դեպքում կլինի $| \Delta s | < \epsilon$,

Քանի որ տրված (1) շարքը մաթորացվող է, ապա ցանկացած տրված $\epsilon > 0$ համար կգտնվի այնպիսի N համար, որ բոլոր $n \geq N$ համար, և մասնավորապես, երբ $n = N$, տեղի կունենա

$$| r_N(x) | < \epsilon/3 \tag{3}$$

անհավասարությունը $[a, b]$ հատվածից վերցրած ցանկացած x -ի համար $x + \Delta x$ արժեքն ընկած է $[a, b]$ հատվածում և ուստի տեղի ունի

$$| r_N(x + \Delta x) | < \epsilon/3 \tag{3'}$$

անհավասարությունը:

Այնուհետև, ընտրած N -ի դեպքում $s_N(x)$ մասնակի գումարը անընդհատ ֆունկցիա է (սրպես վերջավոր թվով անընդհատ ֆունկցիաների գումար) և, հետևաբար, կարելի է ընտրել այնպիսի δ զրական թիվ, որ $| \Delta x | < \delta$ պայմանին բավարարող ամեն մի Δx -ի համար տեղի ունենա

$$| \Delta s_N | < \epsilon/3 \tag{4}$$

անհավասարությունը:

(2), (3), (3') և (4) անհավասարությունների հիման վրա ստանում ենք

$$| \Delta s | < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

այսինքն՝

$$| \Delta s | < \epsilon, \text{ երբ } | \Delta x | < \delta,$$

իսկ սա էլ նշանակում է, որ x կետում (և, հետևաբար, $[a, b]$ հատվածի ցանկացած կետում) $s(x)$ -ն անընդհատ ֆունկցիա է:

Դիտողություն: Ապացուցած թեորեմից հետևում է, որ եթե շարքի գումարը որևէ $[a, b]$ հատվածում խզվող է, ապա շարքն այդ հատվածում մաթորացվող չէ: Մասնավորապես մաթորացվող չէ ($x=0$ կետն, այսինքն՝ շարքի գումարի խզման կետը պարունակող ցանկացած հատվածում) օրինակում բերված շարքը:

Վերջապես, նշենք, որ հակադարձ ենթադրությունը ճիշտ չէ. գոյություն ունեն այնպիսի շարքեր, որոնք հատվածում մաթորացվող չեն և, այնուամենայնիվ, այդ հատվածում զուգամիտում են անընդհատ ֆունկցիայի: Մասնավորապես, $[a, b]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամիտվող ամեն մի շարք (եթե այն նույնիսկ մաթորացվող չէ) ունի անընդհատ ֆունկցիա հանդիսացող գումարը (իհարկե, եթե շարքի բոլոր անդամներն անընդհատ են):

Թևորեմ: Դիցուք ունենք անընդհատ ֆունկցիաների

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \tag{1}$$

շարքը, որը $[a, b]$ հատվածում մաթորացվող է, և դիցուք $s(x)$ -ն այդ շարքի գումարն է: Այս դեպքում $s(x)$ -ի ինտեգրալը $[a, b]$ հատվածին պատկանող x -ից մինչև β սահմաններում հավասար է տվյալ շարքի անդամների նման ինտեգրալների գումարին, այսինքն՝

$$\int_a^x s(t) dt = \int_a^x u_1(t) dt + \int_a^x u_2(t) dt + \dots + \int_a^x u_n(t) dt + \dots$$

Ապացուցում: $s(x)$ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

տեսքով կամ

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + r_n(x),$$

Այդ դեպքում

$$\int_a^x s(t) dt = \int_a^x u_1(t) dt + \int_a^x u_2(t) dt + \dots + \int_a^x u_n(t) dt + \int_a^x r_n(t) dt \tag{2}$$

(վերջավոր թվով գումարելիների գումարի ինտեգրալը հավասար է այդ գումարելիների ինտեգրալների գումարին):

Քանի որ (1) տրված շարքը մաթորացվող է, ապա ցանկացած x -ի դեպքում ունենք $| r_n(x) | < \epsilon_n$, որտեղ $\epsilon_n \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$: Ուստի*

$$\left| \int_a^x r_n(t) dt \right| \leq \int_a^x | r_n(t) | dt < \int_a^x \epsilon_n dt = \epsilon_n(x - a) \leq \epsilon_n(b - a),$$

Քանի որ $\epsilon_n \rightarrow 0$, ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x r_n(t) dt = 0:$$

Բայց (2) հավասարությունից ստանում ենք

$$\int_a^x r_n(t) dt = \int_a^x s(t) dt - \left[\int_a^x u_1(t) dt + \dots + \int_a^x u_n(t) dt \right],$$

* Ստորև բերվող դեհանտականների մեջ $a < x$ դեպքում վերցնում են \pm նշանը, իսկ $x < a$ դեպքում — նշանը:

հայտնի

Հետևաբար,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^x s(t) dt - \left[\int_a^x u_1(t) dt + \dots + \int_a^x u_n(t) dt \right] \right\} = 0,$$

կամ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^x u_1(t) dt + \dots + \int_a^x u_n(t) dt \right] = \int_a^x s(t) dt, \quad (3)$$

Քառակուսի փակագծերում դտնվող գումարը

$$\int_a^x u_1(t) dt + \dots + \int_a^x u_n(t) dt + \dots \quad (4)$$

շարքի մասնակի գումարն է: Քանի որ այդ շարքի մասնակի գումարները ունեն սահման, ապա այն զուգամիտում է և (3) հավասարումը

թյան հիման վրա նրա գումարը հավասար է $\int_a^x s(t) dt$, այսինքն՝

$$\int_a^x s(t) dt = \int_a^x u_1(t) dt + \int_a^x u_2(t) dt + \dots + \int_a^x u_n(t) dt + \dots,$$

իսկ սա էլ հենց այն հավասարությունն է, որը պահանջվում էր ապացուցել:

Դիտողություն 1: Եթե շարքը մատրոսցվող է, ապա միշտ է, որ անդամ առ անդամ ինտեգրումը հնարավոր է: Սա պետք է հասկանալ այն իմաստով, որ (1) շարքի գումարի ինտեգրալը՝ $\int_a^x s(t) dt$ միշտ է, որ հավասար է նրա անդամների ինտեգրալների

(այսինքն՝ (4) շարքի) գումարին:

Թեորեմ 2: Եթե $[a, b]$ հատվածում անընդհատ ածանցյալներ ունեցող ֆունկցիաներից կազմված

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (5)$$

շարքն այդ հատվածում զուգամիտում է $s(x)$ ցումարին և նրա անդամների ածանցյալներից կազմված

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots \quad (6)$$

շարքը նույն հատվածում մատրոսցվող է, ապա ածանցյալների շար-

քի գումարը հավասար է արված շարքի ցումարի ածանցյալին, այսինքն՝

$$s'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots$$

Ապացուցում: $F(x)$ -ով նշանակենք (6) շարքի գումարը

$$F(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots,$$

և ապացուցենք, որ

$$F(x) = s'(x),$$

Քանի որ (6) շարքը մատրոսցվող է, ապա նախորդ թեորեմի հիման վրա

$$\int_a^x F(t) dt = \int_a^x u_1'(t) dt + \int_a^x u_2'(t) dt + \dots + \int_a^x u_n'(t) dt + \dots$$

կատարելով ինտեգրումը, կունենանք.

$$\begin{aligned} \int_a^x F(t) dt &= \\ &= [u_1(x) - u_1(a)] + [u_2(x) - u_2(a)] + \dots + [u_n(x) - u_n(a)] + \dots \end{aligned}$$

Բայց, ըստ պայմանի

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

$$s(a) = u_1(a) + u_2(a) + \dots + u_n(a) + \dots,$$

ինչպիսին էլ լինեն $[a, b]$ հատվածի x և a թվերը: Ուստի

$$\int_a^x F(t) dt = s(x) - s(a),$$

վերջին հավասարությունն երկու մասերը ածանցելով ըստ X -ի, կստանանք.

$$F(x) = s'(x):$$

Այսպիսով, ապացուցեցինք, որ թեորեմի պայմանները տեղի ունենալու դեպքում շարքի ցումարի ածանցյալը հավասար է շարքի անդամների ածանցյալների գումարին:

Դիտողություն 2: Շարքի մատրոսցվող լինելու պահանջը խիստ էական է, և նրա չբավարարվելը կարող է բերել շարքի անդամ առ անդամ դիֆերենցիալի թյան անհնարինությունը: Դա հաստատելու համար բերենք մատրոսցվող շարքի մի օրինակ, որը թույլ չի տալիս անդամ առ անդամ դիֆերենցում:

Գիտարկենք հետևյալ շարքը

$$\frac{\sin 1^4x}{1^2} + \frac{\sin 2^4x}{2^2} + \frac{\sin 3^4x}{3^2} + \dots + \frac{\sin n^4x}{n^2} + \dots$$

Այս շարքը զուգամիտում է անընդհատ ֆունկցիայի, քանի որ սա մաթորացվող է: Իրոք, ցանկացած x -ի դեպքում նրա անդամները բացարձակ մեծությունք փոքր են

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

դրական անդամներով թվային զուգամիտվող շարքի անդամներից: Գրենք տրված շարքի անդամների ածանցյալներից կազմված շարքը.

$$\cos x + 2^2 \cos 2^4x + \dots + n^2 \cos n^4x + \dots$$

Այս շարքը տարամիտում է: Այսպես, ծրինակ, երբ $x=0$ այն դասում է այսպիսի շարք.

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \dots$$

(Կարելի է ցույց առալ, որ այն տարամիտում է ոչ միայն $x=0$ դեպքում):

հ 284 ՎԻՎԷ

§ 13. Աստիճանային շարքեր: Չուզամիտության միջակայք

հ-29

Սահմանում 1: Աստիճանային շարք կոչվում է

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

տեսքի ֆունկցիոնալ շարքը, որտեղ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ հաստատուն թվեր են, որոնք կոչվում են շարքի գործակիցներ:

Աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը միշտ որևէ միջակայք է, որը մասնավորապես, կարող է էպիտոմիկ կետի: Գրանում համոզվելու համար նախ ապացուցենք աստիճանային շարքերի ամբողջ տեսության համար շատ կարևոր հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1 (Աբելի թեորեմը): 1) Եթե աստիճանային շարքը զուգամիտում է որևէ x_0 արժեքի դեպքում, որը հավասար չէ գրոյի, ապա այն բացարձակ զուգամիտում է x -ի ցանկացած արժեքի դեպքում, որի համար $|x| < |x_0|$,

2) եթե շարքը տարամիտում է որևէ x_0 արժեքի դեպքում, ապա այն տարամիտում է ցանկացած x -ի դեպքում, որի համար $|x| > |x_0|$:

Ապացուցում: 1) Քանի որ, ըստ ենթադրության,

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n + \dots \quad (2)$$

թվային շարքը զուգամիտում է, ապա նրա ընդհանուր անդամը՝ $a_n x_0^n \rightarrow 0$ երբ $n \rightarrow \infty$, իսկ սա նշանակում է, որ գոյություն ունի այնպիսի M դրական թիվ, որ շարքի բոլոր անդամները բացարձակ մեծությամբ փոքր են M -ից:

(1) շարքը գրենք

$$a_0 + a_1x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots + a_nx_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \dots \quad (3)$$

տեսքով և դիտարկենք նրա անդամների բացարձակ մեծությունների շարքը՝

$$|a_0| + |a_1x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2x_0^2| \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots + |a_nx_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots \quad (4)$$

Այս շարքի անդամները փոքր են

$$M + M \left|\frac{x}{x_0}\right| + M \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots + M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots \quad (5)$$

շարքի համապատասխան անդամներից: $|x| < |x_0|$ դեպքում վերջին շարքն իրենից ներկայացնում է $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ հայտարար ունեցող երկ-

րաչափական պրոգրեսիա և, հետևաբար, զուգամիտում է: Քանի որ (4) շարքի անդամները փոքր են (5) շարքի համապատասխան անդամներից, ապա (4) շարքը նույնպես զուգամիտում է, իսկ սա էլ նշանակում է, որ (3) կամ (1) շարքը բացարձակ զուգամիտում է:

2) Այժմ դժվար չէ ապացուցել թեորեմի երկրորդ մասը. դիցուք որևէ x_0 կետում (1) շարքը տարամիտում է: Այդ դեպքում այն կտարամիտի նաև $|x| > |x_0|$ պայմանին բավարարող ցանկացած x կետում: Իրոք, եթե այս պայմանին բավարարող ինչ-որ x կետում շարքը լինի զուգամետ, ապա, հենց նոր ապացուցած թեորեմի առաջին մասի համաձայն, այն պետք է զուգամետ լինի նաև x_0 կետում, քանի որ $|x_0| < |x|$: Բայց սա հակասում է այն պայմանին, որ x_0 կետում շարքը տարամիտվող է: Հետևաբար, x կետում շարքը տարամիտում է: Այսպիսով, թեորեմը լրիվ ապացուցված է:

Աբելի թեորեմը թույլ է տալիս դատելու աստիճանային շարքի զուգամիտության և տարամիտության կետերի դասավորության մասին: Իրոք, եթե x_0 -ն զուգամիտության կետ է, ապա ամբողջ $(-|x_0|, |x_0|)$ միջակայքը լցված է բացարձակ զուգամիտության կետերով: Եթե x_0 -ը տարամիտության կետ է, ապա $|x_0|$ կետից աջ գտնվող ամբողջ անվերջ կիսաուղիղը և $-|x_0|$ -ից ձախ գտնվող ամբողջ կիսաուղիղը բաղկացած են տարամիտության կետերից:

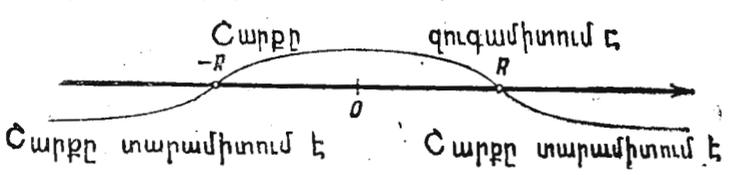
Մրանից կարելի է եզրակացնել, որ գոյություն ունի այնպիսի R թիվ, որ $|x| < R$ դեպքում ունենք բացարձակ զուգամիտություն կետեր և $|x| > R$ դեպքում՝ տարամիտության կետեր: Այսպիսով, աստիճանաչին շարքի զուգամիտության միջակայքի կառուցվածքի մասին կհետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2: Աստիճանային շարքի զուգամիտության միջակայքը կոորդինատների սկզբնակետում կենտրոն ունեցող միջակայք է:

Սահմանում 2: Աստիճանային շարքի զուգամիտության միջակայք է կոչվում $-R$ -ից մինչև $+R$ այնպիսի միջակայքը, որի ներսի ցանկացած x կետում շարքը զուգամիտում է և այն էլ բացարձակ, իսկ նրանից դուրս գտնվող x կետերում շարքը տարամիտում է (նկ. 365):

R թիվը կոչվում է աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղ:

Միջակայքի ծայրերում (այսինքն՝ երբ $x=R$ և երբ $x=-R$) սովորաբար շարքի զուգամիտության կամ տարամիտության մասին հարցը լուծվում է լուրջաբանչուր կոնկրետ շարքի համար առանձին:



Նկ. 365

Նշենք, որ որոշ շարքերի զուգամիտության միջակայքը էպիսոլովում է կետի ($R=0$), այլ շարքերի համար էլ այն ընդգրկում է ամբողջ Ox առանցքը ($R=\infty$):

Ցույց տանք աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը որոշելու եղանակը:

Դիցուք ունենք հետևյալ շարքը.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

Դիտարկենք նրա անդամների ընդհանուր n -րդ աստիճանի կազմված շարքը.

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + |a_3||x|^3 + \dots + |a_n||x|^n + \dots \quad (6)$$

Վերջին (զրահան անդամներով) շարքի զուգամիտության միջակայքը որոշելու համար կիրառենք Դալամբերի հայտանիշը:

Ենթադրենք գոյություն ունի հետևյալ սահմանը.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|,$$

Այս դեպքում ըստ Դալամբերի հայտանիշի (6) շարքը զուգամիտում է, եթե $L|x| < 1$, այսինքն՝ եթե $|x| < \frac{1}{L}$, և տարամիտում է, եթե

$$L|x| > 1, \text{ այսինքն՝ եթե } |x| > \frac{1}{L}.$$

Հետևաբար, (1) շարքը բացարձակ զուգամիտում է $|x| < \frac{1}{L}$

դեպքում: Իսկ եթե $|x| > \frac{1}{L}$, սպա $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x|L > 1$ և (6) շարքը տարամիտում է, ընդ որում նրա ընդհանուր անդամը չի ձգտում զրոյի*: Բայց այս և սովորաբար (1) աստիճանային շարքի ընդհանուր անդամը չի ձգտում զրոյի, իսկ սա զուգամիտության անհրաժեշտ հայտանիշի հիման վրա նշանակում է, որ այդ աստիճանային շարքը տարամիտում է (երբ $|x| > \frac{1}{L}$):

Նախորդից հետևում է, որ $\left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$ միջակայքը (1) աստիճանային զուգամիտության միջակայքն է, այսինքն՝

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Զուգամիտության միջակայքը որոշելու համար նման ձևով կարելի է օգտվել Կոշիի հայտանիշից, և այդ դեպքում

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Օրինակ 1: Որոշելու $1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots$ շարքի զուգամիտության միջակայքը:

Լուծում: Անմիջապես կիրառելով Դալամբերի հայտանիշը, ստանում ենք

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x|.$$

* Հիշեցնենք, որ Դալամբերի հայտանիշն սուպրակոնվերգենտ (տես § 4) տեսանք, որ եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, սպա շարքի ընդհանուր անդամն աճում է և, հետևաբար, չի ձգտում զրոյի:

Հետևաբար, շարքը զուգամիտում է, երբ $|x| < 1$ և տարամիտում է, երբ $|x| > 1$: Իսկ $(-1, 1)$ միջակայքի ծայրերում Դալամբերի հայտանիշի օգնությամբ ուսումնասիրությունն անհնարին է: Սակայն անմիջապես երևում է, որ երբ $x = -1$ և երբ $x = 1$ շարքը տարամիտում է:

Օրինակ 2. Որոշել

$$\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} \dots$$

շարքի զուգամիտության միջակայքը:

Լուծում. Կիրառենք Դալամբերի հայտանիշը.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2x)^{n+1}}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| |2x| = |2x|$$

Շարքը զուգամիտում է, եթե $|2x| < 1$, այսինքն՝ եթե $|x| < \frac{1}{2}$, երբ $x = \frac{1}{2}$ շարքը

զուգամիտում է, երբ $x = -\frac{1}{2}$ շարքը տարամիտում է:

Օրինակ 3. Որոշել

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

շարքի զուգամիտության միջակայքը:

Լուծում. Կիրառելով Դալամբերի հայտանիշը, կստանանք.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1.$$

Քանի որ սահմանը կախված չէ x -ից և փոքր է մեկից, ապա, նշանակում է շարքը զուգամիտում է x -ի բոլոր արժեքների համար:

Օրինակ 4.

$$1 + x + (2x)^2 + (3x^3) + \dots + (nx)^n + \dots$$

շարքը զուգամիտում է x -ի բոլոր արժեքների համար, բացի $x=0$ արժեքից, քանի որ $(nx)^n \rightarrow \infty$, երբ $n \rightarrow \infty$, ինչպեսին էլ լինի զրոյից սարբեր x -ը:

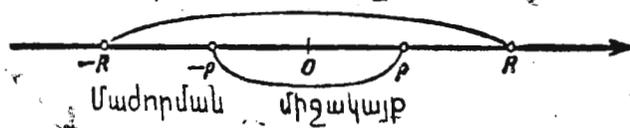
Թեորեմ 3:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

աստիճանային շարքը մաժորացվող է ցանկացած $[-\rho, \rho]$ միջակայքում, որն ամբողջապես ընկած է զուգամիտության միջակայքում:

Ապացուցում. Ըստ պայմանի $\rho < R$ (նկ. 366), առաջ և (դրական անդամներով) $|a_0| + |a_1 \rho| + |a_2 \rho^2| + \dots + |a_n \rho^n| + \dots \quad (7)$

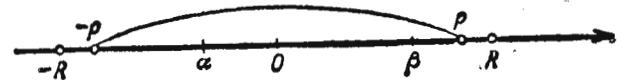
Զուգամիտության միջակայք



նկ. 366

աստիճանային շարքը զուգամիտում է: Բայց $|x| < \rho$ զեպքում (1) շարքի անդամները բացարձակ մեծություններ մեծ չեն (7) շարքի համապատասխան անդամներից: Հետևաբար, (1) շարքը մաժորացվող է $[-\rho, \rho]$ հատվածում:

Հետևանք 1: Յուրաքանչյուր հատվածում, որն ամբողջապես ընկած է զուգամիտության միջակայքի ներքո, աստիճանային շարքի զուգամիտումն անընդհատ ֆունկցիա է:



նկ. 367

Իրոք, այդ հատվածում շարքը մաժորացվող է, իսկ նրա անդամները x -ի անընդհատ ֆունկցիաներ են: Հետևաբար, § 11-ի 1-ին թեորեմի հիման վրա այդ շարքի գումարն անընդհատ ֆունկցիա է:

Հետևանք 2: Եթե α, β ինտեգրման սահմաններն ընկած են աստիճանային շարքի զուգամիտության միջակայքի ներքո, ապա շարքի գումարի ինտեգրալը հավասար է շարքի անդամների ինտեգրալների գումարին, քանի որ ինտեգրման տիրույթը կարելի է պարփակել $[-\rho, \rho]$ հատվածի ներքո, որտեղ շարքը մաժորացվող է (նկ. 367) (տես § 12-ի 1-ին թեորեմը՝ մաժորացվող շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրելու հնարավորություն մասին):

Ն. Մ. Մ. Մ. Մ.

§ 14. Աստիճանային շարքերի դիֆերենցումը

Թեորեմ 1. Եթե

$$s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

աստիճանային շարքն ունի $(-R, R)$ զուգամիտության միջակայքը, ապա (1) շարքի անդամ առ անդամ դիֆերենցումից ստացված

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots \quad (2)$$

շարքն ունի նույն $(-R, R)$ զուգամիտության միջակայքը, ընդ որում

$$\varphi(x) = s'(x), \text{ եթե } |x| < R,$$

այսինքն՝ զուգամիտության միջակայքի ներքում (1) աստիճանային շարքի գումարի ածանցյալը հավասար է (1) շարքը անդամ առ անդամ դիֆերենցումից ստացված շարքի գումարին:

Ապացուցում: Ապացուցենք, որ (2) շարքը մատրացվող է ամբողջությամբ զուգամիտություն միջակայքի ներսն ընկած ցանկացած $[-\rho, \rho]$ հատվածում:

Վերջենք այնպիսի ξ կետ, որ $\rho < \xi < R$ (նկ. 368): Այդ կետում (1) շարքը զուգամիտում է, հետևաբար, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \xi^n = 0$, ուստի կարելի է նշել այնպիսի M հաստատուն թիվ, որ

$$|a_n \xi^n| < M \quad (n=1, 2, \dots)$$

Եթե $|x| \leq \rho$, ապա

$$|na_n x^{n-1}| \leq |na_n \rho^{n-1}| = n |a_n \xi^{n-1}| \left| \frac{\rho}{\xi} \right|^{n-1} < n \frac{M}{\xi} \rho^{n-1},$$

որակ

$$q = \frac{\rho}{\xi} < 1,$$

Այսպիսով, (2) շարքի անդամները $|x| \leq \rho$ դեպքում բացարձակ մեծությունք փոքր են

$$\frac{M}{\xi} (1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots)$$

դրական անդամներով թվային շարքի անդամներից:



նկ. 368

Բայց վերջին շարքը զուգամիտում է, որում կարելի է համոզվել, կիրառելով Դալամբերի հայտանիշը:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nq^{n-1}}{(n-1)q^{n-2}} = q < 1,$$

Հետևաբար, (2) շարքը մատրացվող է $[-\rho, \rho]$ հատվածում, և § 12-ի 2-րդ թեորեմի հիման վրա նրա գումարը $[-\rho, \rho]$ հատվածում տվյալ շարքի գումարի ածանցյալն է, այսինքն՝

$$\varphi(x) = s'(x):$$

Քանի որ $(-R, R)$ միջակայքի յուրաքանչյուր ներքին կետ կարելի է մտցնել որևէ $[-\rho, \rho]$ հատվածի ներսը, ապա այստեղից հետևում է, որ (2) շարքը զուգամիտում է $(-R, R)$ միջակայքի ցանկացած ներքին կետում:

Ապացուցենք, որ $(-R, R)$ միջակայքից դուրս (2) շարքը տա-

րամիտում է: Ենթադրենք, որ (2) շարքը զուգամիտում է, երբ $x_1 > R$: Այն անդամ առ անդամ ինտեգրելով $(0, x_2)$ միջակայքում, որտեղ $R < x_2 < x_1$, մենք կստանալինք, որ (1) շարքը զուգամիտում է x_2 կետում, իսկ սա հակասում է թեորեմի պայմաններին: Այսպիսով, $(-R, R)$ միջակայքը (2) շարքի զուգամիտության միջակայքն է: Թեորեմը լրիվ ապացուցված է:

(2) շարքը կարելի է նորից անդամ առ անդամ դիֆերենցել և այսպես շարունակ ցանկացած անգամ: Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ եզրակացությունը:

Թեորեմ 2. Եթե աստիճանային շարքը զուգամիտում է $(-R, R)$ միջակայքում, ապա նրա գումարը մի ֆունկցիա է, որը զուգամիտության միջակայքի ներսն ունի ցանկացած կարգի ածանցյալներ, որոնցից յուրաքանչյուրն այն շարքի գումարն է, որը ստացվում է տվյալ շարքը համապատասխան անգամ անդամ առ անգամ դիֆերենցելու արդյունքում. ընդ որում դիֆերենցման հետևանքով ստացված յուրաքանչյուր շարքի զուգամիտության միջակայքը նույն $(-R, R)$ միջակայքն է:

§ 15. Շարքեր ըստ $(x-a)$ -ի աստիճանների

Աստիճանային շարք է կոչվում նաև

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (1)$$

տեսքի ֆունկցիոնալ շարքը, որտեղ a_0, a_1, \dots, a_n -ը նույնպես կոչվում են շարքի գործակիցներ:

Սա ըստ $x-a$ երկանդամի աստիճանների դասավորված աստիճանային շարքն է:

$a=0$ դեպքում ստանում ենք ըստ x -ի աստիճանների դասավորված աստիճանային շարքը, որը, հետևաբար, (1) շարքի մասնավոր դեպքն է:

(1) շարքի զուգամիտության միջակայքը որոշելու համար նրանում կատարենք

$$x-a=X$$

փոփոխականի փոփոխում: Այս փոփոխումից հետո (1) շարքը կընդունի

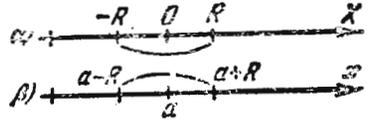
$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n + \dots \quad (2)$$

տեսքը, այսինքն՝ ստացանք ըստ X -ի աստիճանների դասավորված աստիճանային շարք:

Իհրաք $-R < X < R$ միջակայքը (2) շարքի զուգամիտության

միջակայքն է (նկ. 369, ա): Այստեղից հետևում է, որ (1) շարքը կգուզամիտոի x -ի այն արժեքների դեպքում, որոնք բավարարում են $-R < x - a < R$ կամ $a - R < x < a + R$ անհավասարություններին: Քանի որ (2) շարքը տարամիտում է $|X| > R$ դեպքում, ապա (1) շարքը տարամետ կլինի, երբ $|x - a| > R$, այսինքն՝ տարամետ կլինի $a - R < x < a + R$ միջակայքից դուրս (նկ. 369, բ):

Հետևաբար, (1) շարքի գուզամիտություն միջակայքը կլինի a կետում կենտրոն ունեցող $(a - R, a + R)$ միջակայքը: Ըստ x -ի աստիճանների դասավորված շարքի բոլոր հատկությունները $(-R, R)$ գուզամիտության միջակայքում լրիվ պահպանվում են ըստ



նկ. 369



նկ. 370

$(x - a)$ -ի աստիճանների դասավորված աստիճանային շարքի համար՝ $(a - R, a + R)$ գուզամիտության միջակայքում: Այսպես, օրինակ, (1) շարքը անդամ առ անդամ ինտեգրելուց հետո, եթե ինտեգրման սահմաններն ընկած են $(a - R, a + R)$ գուզամիտության միջակայքի ներսը, ստացվում է այնպիսի շարք, որի գումարը հավասար է տվյալ (1) շարքի գումարի համապատասխան ինտեգրալին: (1) շարքն անդամ առ անդամ ինտեգրելիս $(a - R, a + R)$ գուզամիտության միջակայքի բոլոր x -երի համար ստացվում է այնպիսի շարք, որի գումարը հավասար է տրված (1) շարքի գումարի ածանցյալին:

Օրինակ. Գտնել

$$(x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \dots + (x-2)^n + \dots$$

շարքի գուզամիտության տիրույթը:

Լուծում: Ընդունելով $x - 2 = X$, կստանանք

$$X + X^2 + X^3 + \dots + X^n + \dots$$

շարքը, որը գուզամիտում է $-1 < X < +1$ դեպքում: Հետևաբար, տվյալ շարքը գուզամիտում է բոլոր այն x -երի դեպքում, որոնց համար $-1 < x - 2 < 1$, այսինքն՝ $1 < x < 3$ դեպքում (նկ. 370):

§ 16. Թեյլորի և Մակլորենի շարքերը

IV գլխի § 6-ում (I հատ.) ցույց տրվեց, որ $x = a$ կետի շրջակայքում (այսինքն՝ $x = a$ կետը պարունակող մի որոշ միջակայքում)

մինչև $(n+1)$ -երորդը ներառյալ բոլոր կարգի ածանցյալներ ունեցող $f(x)$ ֆունկցիայի համար ճիշտ է Թեյլորի բանաձևը.

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x), \quad (1)$$

որտեղ այսպես կոչվող $R_n(x)$ մնացորդային անդամը հաշվվում է ըստ

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \quad 0 < \theta < 1$$

բանաձևի:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $x = a$ կետի շրջակայքում ունի բոլոր կարգի ածանցյալներ, ապա Թեյլորի բանաձևում n թիվը կարելի է վերցնել որքան կամենանք մեծ: Ընդունենք, որ քննարկվող շրջակայքում R_n մնացորդային անդամը ձգտում է զրոյի $n \rightarrow \infty$ դեպքում.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

Այս դեպքում, (1) բանաձևում անցնելով սահմանին $n \rightarrow \infty$ դեպքում, աշ կողմում կստանանք

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots \quad (2)$$

անվերջ շարքը, որը կոչվում է Թեյլորի շարք: Վերջին հավասարությունը ճիշտ է միայն այն դեպքում, երբ $R_n(x) \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$: Այս դեպքում աշ կողմում գրված շարքը գուզամիտում է և նրա գումարը հավասար է տրված $f(x)$ ֆունկցիային: Ապացուցենք, որ դա իրոք այդպես է.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

որտեղ

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

Քանի որ, ըստ պայմանի, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, ապա

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x),$$

Բայց $P_n(x)$ -ը (2) շարքի n -րդ մասնակի գումարն է. նրա սահմանը հավասար է (2) հավասարության աջ մասում գտնվող շարքի գումարին: Հետևաբար, (2) հավասարությունը ճիշտ է

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

Նախորդից հետևում է, որ θ ելլորի շարքը տվյալ $f(x)$ ֆունկցիան ներկայացնում է միայն այն դեպքում, երբ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$: Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$, շարքը չի ներկայացնում տվյալ ֆունկցիան, թերևս կարող է գոյամիտի ուրիշ ֆունկցիալի:

Եթե θ ելլորի շարքում ընդունենք $a=0$, ապա կստանանք θ ելլորի շարքի մասնավոր դեպքը, որը կոչվում է Մակլորենի շարք:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots \quad (3)$$

Եթե որևէ ֆունկցիալի համար ձևականորեն գրված է θ ելլորի շարքը, ապա ցույց տալու համար, որ գրված շարքը ներկայացնում է տվյալ ֆունկցիան, պետք է կա՛մ ապացուցել, որ մնացորդային անդամը ձգտում է զրոյի, կա՛մ էլ որևէ այլ եղանակով համոզվել, որ գրված շարքը գոյամիտում է տվյալ ֆունկցիալին:

Նշենք, որ I գլխի § 8-ում (I հատ.) սահմանված յուրաքանչյուր տարրական ֆունկցիալի համար գոյություն ունի այնպիսի a և այնպիսի R , որ $(a-R, a+R)$ միջակայքում այն վերածվում է θ ելլորի շարքի կամ (եթե $a=0$) Մակլորենի շարքի:

h-30

§ 17. Ֆունկցիաները շարքերի վերածելու օրինակներ

1. $f(x) = \sin x$ ֆունկցիալի վերածումը Մակլորենի շարքի:

IV գլխի (I հատ.) § 7-ում ստացել ենք

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

բանաձևը: Քանի որ ցույց է տրվել, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n}(x) = 0$, ապա նախորդ պարագրաֆում ասվածի հիման վրա ստանում ենք $\sin x$ ֆունկցիալի վերածումը Մակլորենի շարքի

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (1)$$

Քանի որ ցանկացած x -ի դեպքում մնացորդային անդամը ձգտում է զրոյի, ապա տրված շարքը գոյամիտում է և ցանկացած x -ի դեպքում իբրև գումար ունի $\sin x$ ֆունկցիան:

Նկ. 371-ում ցույց են տրված $\sin x$ ֆունկցիալի և (1) շարքի առաջին երեք մասնակի գումարների գրաֆիկները:

Այս շարքից օգտվում են x -ի տարբեր արժեքների դեպքում $\sin x$ -ի արժեքները հաշվելու համար:

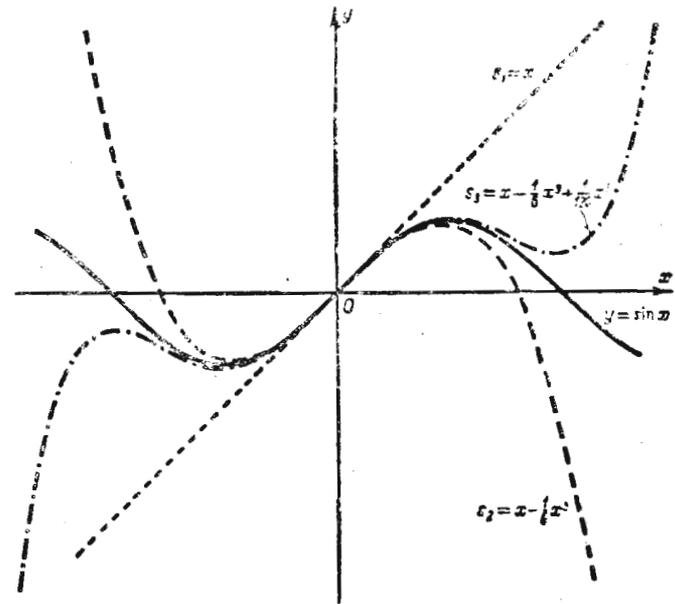
Հաշվենք, օրինակ, $\sin 10^\circ$ -ը մինչև 10^{-5} ճշտությամբ: Քանի որ 10° -ը կամ առդիաններով՝ $\frac{\pi}{18} \approx 0,174533$, ապա

$$\sin 10^\circ = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{18}\right)^7 + \dots$$

Սահմանափակվելով սուսջին երկու անդամներով, կստանանք հետևյալ մոտավոր հավասարությունը:

$$\sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{18}\right)^3,$$

ընդ որում կատարում ենք δ սխալը, որը բացարձակ մեծությամբ փոքր է դեռ նեղված սուսջին անդամից, այսինքն՝



Նկ. 371

$$\delta < \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{120} (0,2)^5 < 4 \cdot 10^{-6}$$

Եթե $\sin \frac{\pi}{18}$ -ի համար արտահայտության մեջ յուրաքանչյուր գումարելի հաշվենք մեկ նշաններով, ապա կստանանք.

$$\sin(\pi/18) = 0,173647:$$

Առաջին շորս նշանի համար կարելի է երաշխավորել:

2. $f(x) = e^x$ ֆունկցիայի վերածուժը Մակլորենի շարքի:

IV գլխի (I հատ.) § 7-ի հիման վրա ունենք

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (2)$$

քանի որ ապացուցվել է, որ ցանկացած x -ի համար $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, Հետևաբար, x -ի բոլոր արժեքների համար շարքը զուգամիտում է և ներկայացնում է e^x ֆունկցիան:

Եթե (2) վերլուծության մեջ x -ը փոխարինվի $(-x)$ -ով, ապա կստանանք

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (3)$$

3. $f(x) = \cos x$ ֆունկցիայի վերածուժը Մակլորենի շարքի:

IV գլխի (I հատ.) § 7-ի հիման վրա ունենք

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (4)$$

x -ի բոլոր արժեքների դեպքում շարքը զուգամիտում է և ներկայացնում է $\cos x$ ֆունկցիան:

4.

$$f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ֆունկցիաների վերածուժը Մակլորենի շարքի:

Այս ֆունկցիաների վերլուծությունը հեշտ ստացվում է (2) և (3) շարքերը հանելու և գումարելու ու երկուսի վրա բաժանելու ճանապարհով: Այսպես,

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (5)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (6)$$

հ-30-ի մեջ:

§ 18. Էյլերի բանաձևը

հ-37.

Մինչև այժմ քննարկել ենք միայն իրական անդամներով շարքեր, գործ չունենալով կոմպլեքս անդամներով շարքերի հետ: Չբերելով կոմպլեքս անդամներով շարքերի լրիվ տեսությունը, որը դուրս է գալիս սույն դասագրքի շրջանակներից, քննարկենք այդ բնագավառից միայն մի կարևոր օրինակ:

VII գլխում (I հատ.)

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

հավասարությունը սահմանվել էր e^{x+iy} ֆունկցիան: Երբ $x=0$ ստանում ենք Էյլերի բանաձևը.

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

Եթե կեղծ ցուցիչով e^{iy} ցուցչալին ֆունկցիան սահմանենք § 17-ի (2) բանաձևի օգնությամբ, որը տալիս է e^x ֆունկցիայի ներկայացումը աստիճանային շարքի տեսքով, ապա կստանանք նույն էլլերի հավասարությունը: Իրոք, որոշենք e^{iy} -ը, § 17-ի (2) բանաձևում x -ի փոխարեն վերցնելով iy արտահայտությունը.

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots + \frac{(iy)^n}{n!} + \dots \quad (1)$$

Ուշադրություն դարձնելով, որ $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$ և այլն, (1) բանաձևը ձևափոխենք

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \dots$$

տեսքի: Առանձնացնելով այս շարքի իրական և կեղծ մասերը, կզետենք.

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots \right),$$

Փակագծերում աստիճանային շարքեր են, որոնց գումարները հավասար են, համապատասխանաբար, $\cos y$ և $\sin y$ (տես նախորդ պարագրաֆի (3) և (1) բանաձևերը): Հետևաբար,

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad (2)$$

Այսպիսով, նորից եկանք Էյլերի բանաձևին:

§ 19. Երկանդամային շարք

1. Վերածննդ Մակլորենի շարքի

$$f(x) = (1+x)^m$$

Ֆունկցիան, որտեղ m -ը կամայական հաստատուն թիվ է:

Այստեղ մնացորդային անդամի գնահատումը կախված է որոշ դժվարությունների հետ, ուստի տվյալ ֆունկցիայի վերլուծությունը կմտենանք մի քիչ այլ կերպ:

Նկատելով, որ $f(x) = (1+x)^m$ ֆունկցիան բավարարում է

$$(1+x)f'(x) = mf(x) \quad (1)$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը և $f(0) = 1$ պայմանին, կգտնենք

$$s(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2)$$

աստիճանային շարքը, որի $s(x)$ գումարը բավարարում է (1) հավասարմանը և $s(0) = 1$ պայմանին:

Այն տեղադրելով (1) հավասարման մեջ, կստանանք.

$$(1+x)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots) = m(1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots):$$

Հավասարեցնելով հավասարության տարբեր մասերում գտնվող x -ի միևնույն աստիճանների գործակիցները, գանում ենք.

$$a_1 = m, \quad a_1 + 2a_2 = ma_1, \quad \dots, \quad na_n + (n+1)a_{n+1} = ma_n, \quad \dots$$

Այստեղից շարքի գործակիցների համար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունները.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = m, \quad a_2 = \frac{a_1(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2},$$

$$a_3 = \frac{a_2(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3},$$

$$\dots$$

$$a_n = \frac{m(m-1)\dots[m-n+1]}{1 \cdot 2 \dots n},$$

Մրանք երկանդամային գործակիցներն են:

Այս գործակիցները տեղադրելով (2) բանաձևի մեջ, կստանանք.

$$s(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \dots n} x^n + \dots \quad (3)$$

* Ազատ անգամը ընդունեցինք հավասար մեկի՝ համաձայն $s(0) = 1$ սկզբնական պայմանի.

Եթե m -ը ամբողջ դրական թիվ է, ապա սկսած x^{m+1} պարունակող անդամից, բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի, և շարքը վերածվում է բազմանդամի: Կոտորակային m -ի դեպքում կամ ամբողջ բացասական m -ի դեպքում ունենք անվերջ շարք: Որոշենք (3) շարքի գուգամիտությունը.

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad u_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(n-1)!}{m(m-1)\dots(m-n+2)n!} x \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m-n+1}{n} \right| |x| = |x|:$$

Այսպիսով, (3) շարքը գուգամիտում է $|x| < 1$ դեպքում:

$(-1, 1)$ միջակայքում (3) շարքը ներկայացնում է $s(x)$ ֆունկցիան, որը բավարարում է (1) դիֆերենցիալ հավասարմանը և $s(0) = 1$ պայմանին:

Քանի որ (1) դիֆերենցիալ հավասարմանը և $s(0) = 1$ պայմանին բավարարում է միակ ֆունկցիան, ապա (3) շարքի գումարը նույնաբար հավասար է $(1+x)^m$ ֆունկցիային, և ստանում ենք հետևյալ վերլուծությունը.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \quad (3')$$

Մասնավորապես, $m = -1$ դեպքում ստանում ենք.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (4)$$

$m = \frac{1}{2}$ դեպքում կլինի.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots \quad (5)$$

$m = -\frac{1}{2}$ դեպքում կլինի.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots \quad (6)$$

2. Երկանդամի վերլուծությունը կիրառենք ուրիշ ֆունկցիաների վերլուծության նկատմամբ: Վերլուծենք Մակլորենի շարքի

$$f(x) = \arcsin x$$

Ֆունկցիան: (6) հավասարության մեջ x -ի փոխարեն տեղադրելով $-x^2$ արտահայտությունը, կստանանք.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$$

$$\dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}x^{2n} + \dots$$

Աստիճանային շարքերի ինտեգրման մասին թեորեմի հիման վրա $|x| < 1$ դեպքում ստանում ենք.

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Այս շարքը զուգամիտում է $(-1, 1)$ միջակայքում: Կարելի էր ապացուցել, որ շարքը զուգամիտում է և $x = \pm 1$ արժեքների համար և որ այս արժեքների համար էլ շարքի զումարը նույնպես հավասար է $\arcsin x$:

Այդ դեպքում, ընդունելով $x=1$, կստանանք π -ի հաշվման համար հետևյալ բանաձևը.

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots$$

§ 20. $\ln(1+x)$ ֆունկցիայի վերլուծությունը աստիճանային շարքի: Լոգարիթմների հաշվումը

Ինտեգրելով § 19-ի (4) հավասարությունը 0-ից մինչև x (երբ $|x| < 1$) սահմաններում, կստանանք.

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1-t+t^2-t^3+\dots)dt$$

կամ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (1)$$

Այս հավասարությունը ճիշտ է $(-1, 1)$ միջակայքում:

Վերջին բանաձևում x -ը $-x$ -ով փոխարինելիս ստացվում է

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad (2)$$

շարքը, որը զուգամիտում է $(-1, 1)$ միջակայքում:

(1) և (2) շարքերի օգնությամբ կարելի է հաշվել զրոյի և երկուսի միջև պարփակված թվերի լոգարիթմները: Առանց ապացուցելու նշենք, որ $x=1$ դեպքում (1) վերլուծությունը նույնպես ճիշտ է:

Քանի որ երկու զուգամետ շարքեր անդամ առ անդամ հանելիս ստացվում է զուգամիտվող շարք (տես § 1, թեորեմ 3), ապա (1) հավասարությունից անդամ առ անդամ հանելով (2) հավասարությունը, գտնում ենք.

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right]:$$

Այնուհետև, ընդունենք $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$. այս դեպքում $x = \frac{1}{2n+1}$:

Ցանկացած $n > 0$ դեպքում ունենք $0 < x < 1$, ուստի

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \frac{n+1}{n} = 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right],$$

որտեղից

$$\ln(n+1) - \ln n = 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right], \quad (3)$$

$n=1$ դեպքում այստեղից ստանում ենք.

$$\ln 2 = 2 \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right],$$

$\ln 2$ -ը արված δ ճշտությամբ հաշվելու համար պետք է հաշվել S_p մասնակի գումարը, ընտրելով նրա անդամների p թիվն այնպես, որ դեն նետված անդամների գումարը (այսինքն՝ S -ը S_p -ով փոխարինելիս թույլ արված R_p սխալը) փոքր լինի թույլատրվող δ սխալներից: Նրա համար զնահատենք R_p սխալը

$$R_p = 2 \left[\frac{1}{(2p+1)3^{2p+1}} + \frac{1}{(2p+3)3^{2p+3}} + \frac{1}{(2p+5)3^{2p+5}} + \dots \right],$$

Քանի որ $2p+3, 2p+5, \dots$ թվերը մեծ են $2p+1$ -ից, ապա, դրանք փոխարինելով $2p+1$ -ով, կմեծացնենք լուրացանչուր կոտորակ: Ուստի

$$R_p < 2 \left[\frac{1}{(2p+1)3^{2p+1}} + \frac{1}{(2p+1)3^{2p+3}} + \frac{1}{(2p+1)3^{2p+5}} + \dots \right]$$

կամ

$$R_p < \frac{2}{2p+1} \left[\frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{3^{2p+3}} + \frac{1}{3^{2p+5}} + \dots \right],$$

Քառակուսի փակագծերում գտնվող շարքը $\frac{1}{9}$ հայտարարն ունեցող երկրաչափական պրոգրեսիա է: Հաշվելով այս պրոգրեսիայի գումարը, կգտնենք.

$$R_p < \frac{2}{2p+1} \frac{\frac{1}{3^{2p+1}}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{(2p+1)3^{2p-14}} \quad (4)$$

Այժմ եթե ուզում ենք հաշվել $\ln 2$ -ը, օրինակ, մինչև 0,000000001 ճշտությամբ, ապա պետք է p -ն ընտրել այնպես, որպեսզի $R_p < 0,000000001$: Դրան կարելի է հասնել, եթե p -ն ընտրվի այնպես, որ անհավասարության աջ մասը փոքր լինի, քան 0,000000001-ը: Անմիջական ընտրություն գտնում ենք, որ բավական է վերցնել $p=8$: Այսպես, որեմն, մինչև 0,000000001 ճշտությամբ ունենք.

$$\ln 2 \approx s_8 = 2 \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \frac{1}{13 \cdot 3^{13}} + \frac{1}{15 \cdot 3^{15}} \right] = 0,693147180,$$

Այսպիսով, $\ln 2 = 0,693147180$: Հնդ որում այս ինը նշանները ճշգրիտ են:

(3) բանաձևում ընդունելով $n=2$, ստանում ենք.

$$\ln 3 = \ln 2 + 2 \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \dots \right] = 1,098612288 \text{ և այլն:}$$

Այսպիսով, կարող ենք ստանալ ցանկացած ամբողջ թվերի բնական լոգարիթմները:

Թվերի տասնորդական լոգարիթմները ստանալու համար պետք է օգտվել (տես I հատ. II գլխի § 8)

$$\lg N = M \ln N$$

անշուրջությանից, որտեղ $M=0,434294$: Այս դեպքում, օրինակ, կտանանք

$$\lg 2 = 0,434294 \cdot 0,693147 = 0,30103,$$

§ 21. Որոշյալ ինտեգրալների հաշվումը շարքերի օգնությամբ

X և XI գլխերում (I հատ.) ցույց է տրվել, որ գոյաթյուն ունեն որոշյալ ինտեգրալներ, որոնք, որպես վերին սահմանի ֆունկցիաներ, վերջավոր տեսքով չեն արտահայտվում տարրական ֆունկցիաներով: Նման ինտեգրալները երբեմն հարմար է լինում հաշվել շարքերի օգնությամբ:

Այստեղ քննարկենք մի քանի օրինակներ:

1. Ինտեգր պահանջվում է հաշվել

$$\int_0^a e^{-x^2} dx$$

ինտեգրալը: Այստեղ e^{-x^2} -ու նախնականը տարրական ֆունկցիա չէ: Այս ինտեգրալը հաշվելու համար նվթաինտեգրալային ֆունկցիան վերլուծենք շարքի՝ e^x -ի վերլուծություն մեջ (տես § 17-ի (2) բանաձևը) x -ը փոխարինելով $-x^2$ -ով.

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

Այս հավասարության երկու մասերն ինտեգրելով 0-ից մինչև a սահմաններում, կստանանք.

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots \right) \Big|_0^a = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1! \cdot 3} + \frac{a^5}{2! \cdot 5} - \frac{a^7}{3! \cdot 7} + \dots$$

Այս հավասարության միջոցով ցանկացած a -ի դեպքում կարող ենք ճշտության ցանկացած աստիճանով հաշվել տվյալ ինտեգրալը:

2. Պահանջվում է հաշվել հետևյալ ինտեգրալը.

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx,$$

Նվթաինտեգրալային ֆունկցիան վերածենք շարքի.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

հավասարությունից կստանանք.

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

ընդ որում վերջին ինտեգրալը զուգամիտվում է X-ի բոլոր արժեքների դեպքում: Ինտեգրելով անդամ առ անդամ, կստանանք.

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \frac{a^3}{3! \cdot 3} + \frac{a^5}{5! \cdot 5} - \frac{a^7}{7! \cdot 7} + \dots$$

Շարքի գումարը ցանկացած a-ի դեպքում հեշտ հաշվվում է ցանկացած աստիճանի ճշտությամբ:

3. Հաշվել հետևյալ էլիպտիկ ինտեգրալը.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (k < 1):$$

Ենթաինտեգրալային ֆունկցիան վերածենք երկանդամալին շարքի, ընդունելով $m = \frac{1}{2}$, $x = -k^2 \sin^2 \varphi$ (տես § 19-ի (5) բանաձևը).

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \frac{1}{4} k^4 \sin^4 \varphi - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{6} k^6 \sin^6 \varphi - \dots$$

Այս շարքը զուգամիտում է φ -ի բոլոր արժեքների դեպքում և թույլ է տալիս անդամ առ անդամ ինտեգրում, քանի որ այն մաթորացվող է ցանկացած միջակալքում: Ուստի

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt &= \varphi - \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt - \\ &- \frac{1}{2} \frac{1}{4} k^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{6} k^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt - \dots \end{aligned}$$

Այս մասի ինտեգրալները հաշվվում են տարրական ձևով: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ արժեքի դեպքում ունենք.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{\pi}{2}$$

(տես I հատ. XI գլխի § 6) և, հետևաբար,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right],$$

22. Դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրումը շարքերի միջոցով

Եթե դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրումը չի հանդիսանում կլավադրատուրայի, ապա դիմում են հավասարման ինտեգրման մոտավոր մեթոդներին: Նման մեթոդներից մեկը հավասարման լուծումը թելուրի շարքի տեսքով ներկայացնելն է. այդ շարքի վերջավոր թվով անդամների գումարը մոտավորապես հավասար կլինի որոնվող մասավոր լուծմանը:

Դիցուք, օրինակ, պահանջվում է գտնել

$$y'' = F(x, y, y') \quad (1)$$

երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$(y)_{x=x_0} = y_0, (y')_{x=x_0} = y'_0 \quad (2)$$

սկզբնական պայմաններին:

Ընդունենք, որ $y = f(x)$ լուծումը գոյություն ունի և այն հնարավոր է ներկայացնել թելուրի շարքի տեսքով (մենք կանգ չենք առնի այն հարցի վրա, թե ինչ պայմանների դեպքում դա տեղի ունի).

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \dots \quad (3)$$

Մեզ պետք է գտնել $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., այսինքն՝ մասնավոր լուծման ածանցյալների արժեքները $x = x_0$ արժեքի դեպքում: Բայց դա կարելի է կատարել (1) հավասարման և (2) պայմանների միջոցով:

Իրոք, (2) պայմաններից հետևում է

$$f(x_0) = y_0, f'(x_0) = y'_0.$$

(1) հավասարումից ստանում ենք.

$$f''(x_0) = (y'')_{x=x_0} = F(x_0, y_0, y'_0):$$

(1) հավասարման երկու մասերն ածանցելով ըստ x-ի

$$y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')y' + F'_{y'}(x, y, y')y'' \quad (4)$$

և աջ մասում տեղադրելով $x = x_0$, կգտնենք

$$f'''(x_0) = (y''')_{x=x_0}:$$

(4) հավասարությունը ածանցելով մեկ անգամ ևս, կգտնենք

$$f^{IV}(x_0) = (y^{IV})_{x=x_0}$$

և այլն:

Ածանցյալների դտած արժեքները տեղադրենք (3) հավասարում թվան մեջ: X-ի արժեքների համար, որոնց դեպքում շարքը զուգամիտում է, արժեքները այնպես է հավասարման լուծումը:

Օրինակ 1. Գտնել

$$y'' = -yx^2$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$(y)_{x=0} = 1, (y')_{x=0} = 0$$

սկզբնական պայմաններին:

Լուծում. Ուենք

$$f(0) = y_0 = 1, f'(0) = y'_0 = 0.$$

Տրված հավասարումից գտնում ենք $(y'')_{x=0} = f''(0) = 0$. այնուհետև,

$$y''' = -y'x^2 - 2xy, \quad (y''')_{x=0} = f'''(0) = 0,$$

$$y^{IV} = -y''x^2 - 4xy' - 2y, \quad (y^{IV})_{x=0} = -2.$$

և, ընդհանրապես, հավասարման երկու մասերը ածանցելով k անգամ ըստ Լայբ-նիցի բանաձևի, գտնում ենք (1 հատ. III գլխի §22).

$$y^{(k+2)} = -y^{(k)}x^2 - 2kxy^{(k-1)} - k(k-1)y^{(k-2)},$$

Ընդունելով $x=0$, կունենանք.

$$y_0^{(k+2)} = -k(k-1)y_0^{(k-2)}$$

կամ ընդունելով $k+2=n$,

$$y_0^{(n)} = -(n-3)(n-2)y_0^{(n-4)},$$

Այստեղից

$$y_0^{IV} = -1 \cdot 2 \quad y_0^{(8)} = -5 \cdot 6 y_0^{IV} = (-1)^2 (1 \cdot 2) (5 \cdot 6),$$

$$y_0^{(12)} = -9 \cdot 10 y_0^{(8)} = (-1)^3 (1 \cdot 2) (5 \cdot 6) (9 \cdot 10),$$

.....

$$y_0^{4k} = (-1)^k (1 \cdot 2) (5 \cdot 6) (9 \cdot 10) \dots [(4k-3)(4k-2)],$$

.....

Բացի դրանից,

$$y_0^{(5)} = 0, \quad y_0^{(9)} = 0, \quad \dots, \quad y_0^{(4k+1)} = 0, \quad \dots,$$

$$y_0^{(6)} = 0, \quad y_0^{(10)} = 0, \quad \dots, \quad y_0^{(4k+2)} = 0, \quad \dots,$$

$$y_0^{(7)} = 0, \quad y_0^{(11)} = 0, \quad \dots, \quad y_0^{(4k+3)} = 0, \quad \dots$$

Այսպիսով, գրոյի չեն հավասարում միայն այն ածանցյալները, որոնց կարգը չորսի բազմապատիկն է:

Ածանցյալի դտած արժեքները տեղադրելով Մակլորենի շարքի մեջ, ստանում ենք հավասարման լուծումը.

$$y = 1 - \frac{x^4}{4!} 1 \cdot 2 + \frac{x^8}{8!} (1 \cdot 2) (5 \cdot 6) - \frac{x^{12}}{12!} (1 \cdot 2) (5 \cdot 6) (9 \cdot 10) + \dots$$

$$\dots + (-1)^k \frac{x^{4k}}{(4k)!} (1 \cdot 2) (5 \cdot 6) \dots [(4k-3)(4k-2)] + \dots$$

Դալամբերի հայտանիշի միջոցով կարելի է ստուգել, որ այս շարքը զուգամիտում է X-ի բոլոր արժեքների դեպքում. հետևաբար, դա հավասարման լուծումն է:

Եթե հավասարումը պատկերվում է, ապա մասնավոր լուծման վերլուծություն թվան գործակիցները ավելի հարմար է որոնել անորոշ գործակիցների մեթոդով: Դրա համար

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

շարքն անմիջապես «տեղադրում ենք» դիֆերենցիալ հավասարման մեջ և հավասարեցնում ենք հավասարման տարբեր մասերում եղած X-ի միևնույն աստիճանների գործակիցները:

Օրինակ 2. Գտնել

$$y'' = 2xy' + 4y$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$(y)_{x=0} = 0, \quad (y')_{x=0} = 1$$

սկզբնական պայմաններին:

Լուծում. Ընդունենք

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Սկզբնական պայմանների հիման վրա գտնում ենք

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Հետևաբար,

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

$$y' = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots,$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots$$

Գրած արտահայտությունները տեղադրելով տրված հավասարման մեջ և հավասարեցնելով x-ի միևնույն աստիճանների գործակիցները, ստանում ենք.

$$2a_2 = 0, \quad \text{որտեղից } a_2 = 0,$$

$$3 \cdot 2a_3 = 2 + 4, \quad \text{որտեղից } a_3 = 1,$$

$$4 \cdot 3a_4 = 4a_2 + 4a_3, \quad \text{որտեղից } a_4 = 0,$$

.....

$$n(n-1)a_n = (n-2)2a_{n-2} + 4a_{n-2}, \quad \text{որտեղից } a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1}$$

.....

Հետևաբար,

$$a_5 = \frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{2!}, \quad a_7 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{3!}, \quad a_9 = \frac{1}{4!}, \dots, \quad a_{2k+1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!}, \dots$$

$$a_4 = 0, \quad a_6 = 0, \dots, \quad a_{2k} = 0 \dots$$

Տեղադրելով գտած գործակիցները, ստանում ենք որոնվող լուծումը՝

$$y = x + \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \dots$$

Ստացած շարքը զուգամիտում է x-ի բոլոր արժեքների դեպքում:

Նկատենք, որ գտած մասնավոր լուծումը կարելի է արտահայտել տարրական ֆունկցիաների միջոցով. x-ը զուգաբերելով փակագծից, փակագծերի ներքում կստանանք e^{x^2} ֆունկցիայի վերլուծությունը: Հետևաբար,

$$y = xe^{x^2},$$

§ 23. Բեսելի հավասարումը

Բեսելի հավասարում է կոչվում

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (p = \text{const}) \quad (1)$$

տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումը:

Այս հավասարման, ինչպես և փոփոխական գործակիցներով մի քանի ուրիշ հավասարումների լուծումը պետք է որոնել ոչ թե աստիճանային շարքի տեսքով, այլ x-ի որևէ աստիճանի և աստիճանային շարքի արտադրյալի տեսքով՝

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (2)$$

ի ցուցիչի անորոշության պատճառով կարող ենք ընդունել, որ a_0 գործակիցը գրո չէ:

(2) արտահայտությունը գրենք

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}$$

տեսքով և գտնենք նրա ածանցյալները.

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1}, \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2},$$

Այս արտահայտությունները տեղադրենք (1) հավասարման մեջ

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2} +$$

$$+ x \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1} + (x^2 - p^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} = 0;$$

x-ի r, r+1, r+2, ... r+k աստիճանների գործակիցները հավասարեցնելով զրոյի, ստանում ենք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\left. \begin{aligned} [r(r-1) + r - p^2] a_0 = 0 \text{ կամ } (r^2 - p^2) a_0 = 0, \\ [(r+1)r + (r+1) - p^2] a_1 = 0 \text{ կամ } [(r+1)^2 - p^2] a_1 = 0, \\ [(r+2)(r+1) + (r+2) - p^2] a_2 + a_0 = 0 \text{ կամ } [(r+2)^2 - p^2] a_2 + a_0 = 0, \\ \dots \\ [(r+k)(r+k-1) + (r+k) - p^2] a_k + a_{k-2} = 0 \text{ կամ } [(r+k)^2 - p^2] a_k + a_{k-2} = 0, \\ \dots \end{aligned} \right\} (3)$$

Դիտարկենք

$$[(r+k)^2 - p^2] a_k + a_{k-2} = 0 \quad (3')$$

հավասարությունը: Այն կարելի է գրել այսպես.

$$[(r+k-p)(r+k+p)] a_k + a_{k-2} = 0;$$

Ըստ պայմանի $a_0 \neq 0$. հետևաբար,

$$r^2 - p^2 = 0,$$

ուստի $r_1 = p$ կամ $r_2 = -p$:

Նախ լուծումը քննարկենք $r_1 = p > 0$ դեպքում:

(3) հավասարումների համակարգից հաջորդաբար որոշվում են բոլոր a_1, a_2, \dots գործակիցները. a_0 -ն մնում է կամայական: Օրինակ, ընդունենք $a_0 = 1$: Այս դեպքում

$$a_k = \dots = \frac{a_{k-2}}{k(2p+k)},$$

k-ին տալով տարբեր արժեքներ, կգտնենք.

$$\left. \begin{aligned} a_1 = 0, \quad a_3 = 0 \text{ և, ընդհանրապես, } a_{2m+1} = 0, \\ a_2 = -\frac{1}{2(2p+2)}, \quad a_4 = \frac{1}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)}, \dots, \\ a_{2\nu} = (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2\nu(2p+2)(2p+4) \dots (2p+2\nu)}, \dots \end{aligned} \right\} (4)$$

Գտած գործակիցները տեղադրելով (2) բանաձևի մեջ, կստանանք.

$$y_1 = x^p \left[1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \dots \right]. \quad (5)$$

Բոլոր a_2 , գործակիցները որոշվում են, քանի որ ցանկացած k -ի դեպքում (3) հավասարման մեջ a_k -ի գործակիցը՝

$$(r_1 + k)^2 - p^2$$

զրոյից տարբեր կլինի:

Այսպիսով, y_1 -ը (1) հավասարման մասնավոր լուծումն է:

Այնուհետև հաստատենք այն պայմանները, որոնց դեպքում $և$ $r_2 = -p$ երկրորդ արմատի համար էլ որոշվում են բոլոր a_k գործակիցները: Դա կլինի, եթե ցանկացած ամբողջ զույգ k -ի դեպքում տեղի ունեն

$$(r_2 + k)^2 - p^2 \neq 0 \quad (6)$$

կամ

$$r_2 + k \neq p$$

անհավասարությունները: Բայց $p = r_1$, հետևաբար,

$$r_2 + k \neq r_1$$

Այսպիսով, (6) պայմանն այս դեպքում համարժեք է հետևյալին.

$$r_1 - r_2 \neq k,$$

որտեղ k -ն ամբողջ զույգ դրական թիվ է: Բայց

$$r_1 = p, \quad r_2 = -p,$$

հետևաբար,

$$r_1 - r_2 = 2p:$$

Այսպիսով, եթե p -ն հավասար չէ ամբողջ թվի, ապա կարելի է գրել երկրորդ մասնավոր լուծումը, որը ստացվում է (5) արտահայտության մեջ p -ն $-p$ -ով փոխարինելիս.

$$y_2 = x^{-p} \left[1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)} + \dots \right], \quad (5')$$

(5) և (5') աստիճանային շարքերը զուգամիտում են x -ի բոլոր

արժեքների դեպքում, որը հեշտ է ցույց տալ Դալամբերի հայտանիշի հիման վրա: Նաև ակնհայտ է, որ y_1 -ը և y_2 -ը զծորեն անկախ են*:

y_1 -ը լուծումը՝ բազմապատկած մի որոշ հաստատունով, կոչվում է առաջին սեռի p -րդ կարգի Բեսելի ֆունկցիա և նշանակվում է J_p սիմվոլով: y_2 լուծումը նշանակում են J_{-p} սիմվոլով:

Այսպիսով, երբ p -ն հավասար չէ ամբողջ թվի, (1) հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y = C_1 J_p + C_2 J_{-p}$$

տեսքը: Այսպես, օրինակ, երբ $p = \frac{1}{2}$ (5) շարքը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$x^{1/2} \left[1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right] = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right],$$

Այս լուծումը՝ բազմապատկած $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ հաստատուն թվով, կոչվում է $J_{1/2}$ Բեսելյան ֆունկցիա. նկատենք, որ փակագծերում ունենք մի շարք, որի գումարը հավասար է $\sin x$: Հետևաբար

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x:$$

Ճիշտ նույն ձևով, օգտվելով (5') բանաձևից, կստանանք.

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x:$$

* Ֆունկցիաների զծային անկախությունը ստուգվում է այսպես. դիտարկենք հետևյալ հարաբերությունը.

$$\frac{y_2 = x^{-2p}}{y_1} = \frac{1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \dots}$$

Այս հարաբերությունը հաստատուն չէ, քանի որ երբ $x \rightarrow 0$ այն ձգտում է անվերջություն: Հետևաբար, y_1 և y_2 ֆունկցիաները զծորեն անկախ են:

(1) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը $p = \frac{1}{2}$ դեպքում կլինի

$$y = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x),$$

Այնուհետև, դիցուք p -ն ամբողջ թիվ է, որը նշանակենք n -ով ($n \geq 0$): (5) լուծումն այս դեպքում իմաստ ունի և (1) հավասարման առաջին մասնավոր լուծումն է:

Բայց (5') լուծումն իմաստ չի ունենա, քանի որ հայտարարի բազմապատկիչներից մեկը վերլուծություն մեջ կդառնա զրո:

Դրական $p = n$ դեպքում Բեսելի J_n ֆունկցիան որոշվում է (5) շարքի և $\frac{1}{2^n n!}$ հաստատուն բազմապատկիչի արտադրյալով (երբ $n = 0$ բազմապատկիչում է 1-ով):

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \dots \right]$$

կամ

$$J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(n+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}, \quad (7)$$

Կարելի է ցույց տալ, որ այս դեպքում երկրորդ մասնավոր լուծումը պետք է որոնել

$$K_n(x) = J_n(x) \ln x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

տեսքով:

Այս արտահայտությունը տեղադրելով (1) հավասարման մեջ, որոշում ենք b_k գործակիցները:

Այս ձևով որոշված գործակիցներով $K_n(x)$ ֆունկցիան՝ բազմապատկած մի որոշ հաստատունով, կոչվում է երկրորդ սեռի n -րդ կարգի Բեսելի ֆունկցիա:

Սա (1) հավասարման երկրորդ լուծումն է, որն առաջինի հետ կազմում է գծորեն անկախ սխտեմ:

Ընդհանուր ինտեգրալը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 K_n(x), \quad (8)$$

Նշենք, որ

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_n(x) = \infty$$

Հետևաբար, եթե $x=0$ դեպքում ուզում ենք դիտարկել վերջավոր լուծումներ, ապա (8) մանածևում պետք է վերցնենք $C_2=0$:

Օրինակ: Գտնել $p=0$ դեպքում

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

Բեսելի հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է, երբ $x=0$

$$y=2, \quad y'=0$$

սկզբնական պայմաններին:

Լուծում: (7) բանաձևի հիման վրա գտնում ենք մեկ մասնավոր լուծումը՝

$$J_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

Օգտվելով այս լուծումից, կարելի է գրել սրված սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծումը, այն է.

$$y = 2J_0(x),$$

Դիտարկենք $J_0(x)$ և $J_1(x)$ և $J_0(x)$ մեկ անհրաժեշտ լինելը գտնելով այս հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը, ապա երկրորդ մասնավոր լուծումը կորոնենք հետևյալ տեսքով.

$$K_0(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

Չկատարելով բոլոր հաշվումները, ցույց տանք, որ երկրորդ մասնավոր լուծումը, որը կնշանակենք $K_0(x)$ -ով, ունի

$$K_0(x) = J_0(x) \ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots$$

տեսքը: Այս ֆունկցիան՝ բազմապատկած մի որոշ բազմապատկիչով, կոչվում է երկրորդ սեռի գրոյական կարգի Բեսելի ֆունկցիա:

§ 23. Կոմպլեքս անդամներով շարքեր

Դիտարկենք

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը, որտեղ

$$z_n = a_n + ib_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

Սա համաձայնում է $z_0 = a + ib$ կոմպլեքս թիվը կոչվում է $z_n = a_n + ib_n$ կոմպլեքս թվերի հաջորդականության սահման, եթե

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_0| = 0, \quad (1)$$

(1) պայմանը գրենք ընդլայնված տեսքով.

$$z_n - z_0 = (a_n + ib_n) - (a + ib) = (a_n - a) + i(b_n - b),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_0| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = 0, \quad (2)$$

(2) հավասարության հիման վրա հետևում է, որ (1) պայմանը տեղի կունենա միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \quad (3)$$

Կազմենք կոմպլեքս թվերի

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots, \quad (4)$$

շարքը, որտեղ

$$w_n = u_n + iv_n \quad (n=1, 2, \dots);$$

Դիտարկենք (4) շարքի n անդամների գումարը, որը կնշանակենք S_n -ով.

$$s_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n, \quad (5)$$

S_n -ը կոմպլեքս թիվ է.

$$s_n = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) + i \left(\sum_{k=1}^n v_k \right), \quad (6)$$

Սահմանում 2: Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s = A + iB$$

տե՛մանը, ապա (4) շարքը կոչվում է զուգամիտող շարք և s -ը կոչվում է նրա գումարը.

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} w_k = A + iB, \quad (7)$$

(3) հավասարությունների հիման վրա (6) պայմանից հետևում են

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k, \quad B = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_k \quad (8)$$

հավասարությունները: Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ -ը գոյություն չունի, ապա (4) շարքը կոչվում է տարամիտող:

(4) շարքի զուգամիտության ուսումնասիրության համար արդյունավետ է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1: Եթե (4) շարքի անգամների մոգուլներից կազմված շարքը՝

$$|w_1| + |w_2| + \dots + |w_n| + \dots, \quad \text{որտեղ } |w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}, \quad (9)$$

զուգամիտում է, ապա զուգամիտում է նաև (4) շարքը:

Ապացուցում: (9) շարքի զուգամիտությունից և

$$|u_n| \leq \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = |w_n|, \quad |v_n| \leq \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = |w_n|$$

պայմաններից հետևում են (8) հավասարությունները (իրական անդամներով շարքերի բացարձակ զուգամիտության մասին համապատասխան թեորեմի հիման վրա) և, հետևաբար, (7) հավասարությունը:

Ապացուցած թեորեմը թույլ է տալիս կոմպլեքս անդամներով շարքերի զուգամիտության ուսումնասիրության համար կիրառել դրական անդամներով շարքերի զուգամիտության բոլոր բավարար հատանիշները:

§ 25. Կոմպլեքս փոփոխականով աստիճանային շարքեր

Այժմ անցնենք կոմպլեքս անդամներով աստիճանային շարքերի քննարկմանը:

Սահմանում 1:

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (1)$$

շարքը, որտեղ $z = x + iy$ կոմպլեքս փոփոխական է, x -ը և y -ը իրական թվեր են, c_n -ը հաստատուն կոմպլեքս կամ իրական թվեր են, կոչվում է կոմպլեքս փոփոխականով աստիճանային շարք:

Այսպիսի շարքերի համար գոյություն ունի տեսություն, որը նման է իրական անդամներով աստիճանային շարքերի տեսությանը:

Սահմանում 2: Կոմպլեքս փոփոխականի հարթության այն Z արժեքների բազմությունը, որոնց դեպքում (1) շարքը զուգամիտում է, կոչվում է (1) աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթ (Z-ի յուրաքանչյուր կոնկրետ արժեքի դեպքում (1) շարքը վերածվում է § 24-ի (4) տիպի կոմպլեքս անդամներով թվային շարքի):

Սահմանում 3: (1) շարքը կոչվում է բացարձակ զուգամիտվող, եթե նրա անդամների մոգուլներից կազմված

$$|c_0| + |c_1 z| + |c_2 z^2| + \dots + |c_n z^n| + \dots \quad (2)$$

շարքը զուգամիտում է:

Առանց ապացուցման բերենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1: (1) կոմպլեքս անդամներով աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը Z կոմպլեքս փոփոխականի հարթության վրա մի շրջան է, որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում: Այն կոչվում է զուգամիտության շրջան: Զուգամի-

տության շրջանի ներսի կետերում (1) շարքը բացարձակ զուգամիտում է:

Զուգամիտության շրջանի R շառավիղը կոչվում է աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղ: Եթե R -ը (1) աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղն է, ապա գրում են, որ շարքը զուգամիտում է $|z| < R$ տիրույթում:

(Միջակայքի ծայրերում իրական փոփոխականներով աստիճանային շարքերի զուգամիտության հարցի նման եզրագծի $|z|=R$ կետերում շարքի զուգամիտության հարցը լուծվում է լրացուցիչ ուսումնասիրությամբ): Նկատենք, որ c_n գործակիցների բնույթից կախված զուգամիտության R շառավիղը կարող է ունենալ $R=0$ -ից մինչև $R=\infty$ ցանկացած արժեք: Առաջին դեպքում շարքը զուգամիտում է միայն $z=0$ կետում, վերջին դեպքում՝ z -ի ցանկացած արժեքի համար:

Գրենք հետևյալ հավասարությունը.

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (3)$$

Եթե z -ը զուգամիտության տիրույթի ներսն ընդունի տարբեր արժեքներ, ապա $f(z)$ ֆունկցիան կընդունի տարբեր արժեքներ: Այսպիսով, յուրաքանչյուր կոմպլեքս փոփոխականի աստիճանային շարք զուգամիտության շրջանի ներսում որոշում է համապատասխան կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիա: Դա կոմպլեքս փոփոխականի անալիտիկ ֆունկցիա է: Բերենք կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների օրինակներ, որոնք որոշված են կոմպլեքս փոփոխականի աստիճանային շարքերով:

$$1) \quad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (4)$$

Սա կոմպլեքս փոփոխականի ցուցչային ֆունկցիա է: Եթե $y=0$, ապա (4) բանաձևը վերածվում է § 17-ի (2) բանաձևի: Եթե $x=0$, ապա ստանում ենք § 18-ի (1) հավասարությունը:

$$2) \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad (5)$$

Սա կոմպլեքս փոփոխականի սինուսն է: $y=0$ դեպքում (5) բանաձևը վերածվում է § 17-ի (1) բանաձևի:

$$3) \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad (6)$$

Սա կոմպլեքս փոփոխականի կոսինուսն է: Եթե (4) բանաձևի աջ և

ձախ մասերում z -ի փոխարեն սեղագրենք iz , ապա նման նրան, ինչպես արվել է § 18-ում, կստանանք

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (7)$$

Սա էյլերի բանաձևն է՝ կոմպլեքս փոփոխականի համար: Եթե z -ը իրական թիվ է, ապա այս բանաձևը համընկնում է § 18-ի (2) բանաձևի հետ:

$$4) \quad \operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad (8)$$

$$5) \quad \operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \quad (9)$$

Վերջին երկու բանաձևերը նման են § 17-ի (5) և (6) բանաձևերին և համընկնում են նրանց հետ, եթե $z=x$ -ը իրական թիվ է:

(4), (5), (6), (8) և (9)-ի հիման վրա շարքերի գումարման, հանման, z -ը iz -ով փոխարինելու ճանապարհով ստացվում են հետևյալ հավասարությունները.

$$e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z, \quad (10)$$

$$e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z, \quad (11)$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (12)$$

$$\cos iz = \frac{e^{-z} + e^z}{2}, \quad \sin iz = \frac{e^{-z} - e^z}{2i}, \quad (13)$$

Նկատենք, որ (4), (5), (6), (8), (9) շարքերը զուգամիտում են z -ի բոլոր արժեքների դեպքում, որում հեշտ է համոզվել § 24-ի 1-ին թեորեմի հիման վրա: Նման նրան, ինչպես այլ արվել է իրական փոփոխականի աստիճանային շարքերի համար, դիտարկվում են ըստ $z-z_0$ -ի աստիճանների կոմպլեքս փոփոխականի շարքեր, որտեղ z_0 -ն մի որոշ կոմպլեքս թիվ է.

$$c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots, \quad (14)$$

c_n -կոմպլեքս կամ իրական հաստատուններ են: (14) շարքը (1) տեսքի է բերվում $z-z_0=z^*$ տեղադրմամբ: (1) տեսքի շարքի համար իրավացի բոլոր հատկություններն ու թեորեմները տարածվում են նաև (14) տեսքի շարքի վրա, միայն (14) շարքի զուգամիտության շրջանի կենտրոնը գտնվում է ոչ թե կոորդինատների սկզբնակետում, այլ z_0 կետում:

Եթե R -ը (14) շարքի զուգամիտության շառավիղն է, ապա բերում են. շարքը զուգամիտում է $|z-z_0| < R$ տիրույթում:

սկզբնական պայմանները: Դիցուք $f(x, y)$ և $f'_y(x, y)$ անընդհատ են D փակ տիրույթում

$$D\{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\} \quad (\text{Նկ. } 372), \quad (3)$$

Այս դեպքում մի որոշ

$$x_0 - l < x < x_0 + l \quad (4)$$

միջակայքում գոյություն ունի (1) հավասարման միակ լուծումը, որը բավարարում է (2) սկզբնական պայմաններին: l թիվը կորոշվի ստորև:

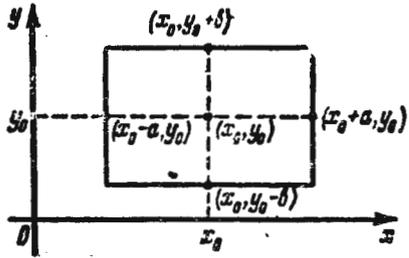
Ապացուցում: Նկատենք, որ այն բանից, որ $f(x, y)$ և $f'_y(x, y)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են D փակ տիրույթում, հետևում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի $M > 0$ և $N > 0$ հաստատուններ, որ տիրույթի բոլոր կետերի համար տեղի են ունենում

$$|f(x, y)| \leq M. \quad (5)$$

$$|f'_y(x, y)| \leq N \quad (6)$$

առնչությունները: (Այս հատկությունը նման է II գլխի § 10-ում ցույց տրված հատկությանը): (4) հավասարության մեջ l թիվը a և $\frac{b}{M}$ թվերից ամենամեծն է, այսինքն՝

$$l = \min(a, \frac{b}{M}), \quad (7)$$



Նկ. 372

Լազրանժի թեորեմը կիրառենք $f(x, y)$ ֆունկցիայի նկատմամբ՝ D տիրույթին պատկանող երկու ցանկացած $A_1(x, y_1)$ և $A_2(x, y_2)$ կետերի համար.

$f(x, y_2) - f(x, y_1) = f'_y(x, \eta)(y_2 - y_1)$, որտեղ $y_1 < \eta < y_2$ հետևաբար, $|f'_y(x, \eta)| \leq N$: Ուստի ցանկացած երկու կետերի համար ճիշտ է

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N|y_2 - y_1| \quad (8)$$

* Նկատենք, որ եթե մի որոշ $F(y)$ ֆունկցիայի համար բավարարվում է $|F(y_2) - F(y_1)| \leq K|y_2 - y_1|$

պայմանը, որտեղ y_2 -ը և y_1 -ը որոշ տիրույթի ցանկացած կետերն են, K -ն հաստատուն թիվ է, ապա այդ պայմանը կոչվում է Լիպշիցի պայման: Այսպիսով, հաստատելով (8) առնչությունը, ցույց տվեցինք, որ եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան ունի

$\frac{\partial f}{\partial y}$ ածանցյալը, որը սահմանափակ է որոշ տիրույթում, ապա այն այդ տիրույթում բավարարում է Լիպշիցի պայմանին: Հակադարձ պնդումը կարող է ճիշտ չլինել:

անհավասարությունը: Վերադառնանք § 26-ի (4) հավասարությանը: Հաշվի առնելով (5), (4), (7) անհավասարությունները այնտեղից ստանում ենք

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq \int_{x_0}^x M dx = M|x - x_0| \leq Ml \leq b, \quad (9)$$

Այսպիսով, § 26-ի (4) հավասարությանը (4) հատվածում որոշված $y = y_1(x)$ ֆունկցիան դուրս չի գալիս D տիրույթից:

Այժմ անցնենք § 26-ի (5) հավասարությանը: $f[x, y_1(x)]$ ֆունկցիայի արդումներները դուրս չեն գալիս D տիրույթից: Հետևաբար, կարող ենք գրել

$$|y_2 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f[x, y_1(x)] dx \right| \leq M|x - x_0| \leq Ml \leq b, \quad (10)$$

Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով կարելի է ապացուցել, որ ցանկացած n -ի համար

$$|y_n - y_0| \leq b, \quad (11)$$

եթե x -ը պատկանում է (4) միջակայքին:

Այժմ ապացուցենք, որ գոյություն ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x) \quad (12)$$

սահմանը և $y(x)$ ֆունկցիան բավարարում է (1) դիֆերենցիալ հավասարմանն ու (2) սկզբնական պայմաններին: Ապացուցման համար դիտարկենք

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (y_n - y_{n-1}) + \dots \quad (13)$$

շարքը, որի ընդհանուր անդամն է $u_n = y_n - y_{n-1}$, ընդ որում $u_0 = y_0$: Ակնհայտ է, որ այս շարքի $n+1$ անդամների գումարը հավասար է

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^n u_i = y_n, \quad (14)$$

Գնահատենք (13) շարքի անդամների բացարձակ մեծությունները.

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq M|x - x_0|, \quad (15)$$

§ 26-ի (4), (5) և (6)-ի հիման վրա գտնում ենք

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{x_0}^x [f(x, y_1) - f(x, y_0)] dx \right| = \left| \int_{x_0}^x f'_y(x, \eta_1)(y_2 - y_1) dx \right| \leq \leq \pm N \int_{x_0}^x M |x - x_0| dx = N \frac{M}{2} |x - x_0|^2$$

(+ նշանը վերցվում է, եթե $x_0 < x$, իսկ - նշանը՝ եթե $x_0 > x$), եվ այսպես,

$$|y_2 - y_1| \leq M \frac{N}{1 \cdot 2} |x - x_0|^2 \quad (16)$$

Նման ձևով հաշվի առնելով (16)-ը՝

$$|y_3 - y_2| = \left| \int_{x_0}^x [f(x, y_2) - f(x, y_1)] dx \right| = \left| \int_{x_0}^x f'_y(x, \eta_2)(y_2 - y_1) dx \right| \leq \leq \pm N \int_{x_0}^x \frac{NM}{2} |x - x_0|^2 dx = M \frac{N^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} |x - x_0|^3 \quad (17)$$

Շարունակելով այսպես, կգտնենք

$$|y_n - y_{n-1}| \leq M \frac{N^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n \quad (18)$$

Այսպիսով, $|x - x_0| < l$ միջակայքի համար (13) ֆունկցիոնալ շարքը մատուցում է: Դրական անդամներով համապատասխան թվային շարքը, որի անդամները մեծ են (13) շարքի համապատասխան անդամների բացարձակ մեծություններից, կլինի

$$y_0 + Ml + M \frac{Nl^2}{2!} + M \frac{N^2 l^3}{3!} + \dots + M \frac{N^{n-1} l^n}{n!} + \dots \quad (19)$$

որի ընդհանուր անդամն է $v_n = M \frac{N^{n-1} l^n}{n!}$, Այս շարքը զուգամիտում է, որը հեշտ է հաստատել Դալամբերի հայտանիշով.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M \frac{N^{n-1} l^n}{n!}}{M \frac{N^{n-2} l^{n-1}}{(n-1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Nl}{n} = 0 < 1,$$

եվ այսպես, (13) շարքը մատուցում է, հետևաբար, այն զուգամի-

տում է: Քանի որ նրա անդամներն անընդհատ ֆունկցիաներ են, ապա այն զուգամիտում է $y(x)$ անընդհատ ֆունկցիային: Եվ այսպես,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y(x), \quad (20)$$

որտեղ $y(x)$ -ն անընդհատ ֆունկցիա է: Այս ֆունկցիան բավարարում է նկարահան պայմանին, քանի որ բոլոր n -երի համար

$$y_n(x_0) = y_0,$$

Ապացուցենք, որ ստացած $y(x)$ ֆունկցիան բավարարում է (1) հավասարմանը: Նորից գրենք § 26-ի (6) հավասարություններից վերջինը.

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx, \quad (21)$$

Ապացուցենք, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x [f(x, y_{n-1}) - f(x, y)] dx = \int_{x_0}^x [f(x, y) - f(x, y)] dx, \quad (22)$$

որտեղ $y(x)$ -ը որոշված է (20) հավասարությամբ:

Նախապես նկատենք հետևյալը: Քանի որ (13) շարքը մատուցում է, ապա (20)-ից հետևում է, որ ամեն մի $\varepsilon > 0$ համար կգտնվի այնպիսի n , որ

$$|y - y_n| < \varepsilon, \quad (23)$$

Հաշվի առնելով (23)-ը ամբողջ (4) միջակայքի համար կարող ենք գրել

$$\left| \int_{x_0}^x f(x, y) dx - \int_{x_0}^x f(x, y_n) dx \right| \leq \pm \int_{x_0}^x |f(x, y) - f(x, y_n)| dx \leq \leq \pm \int_{x_0}^x N |y - y_n| dx \leq N \varepsilon |x - x_0|$$

Բայց $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon = 0$, Հետևաբար,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{x_0}^x f(x, y) dx - \int_{x_0}^x f(x, y_n) dx \right| = 0,$$

Վերջին հավասարությունից հետևում է (22) հավասարությունը:

Այժմ, (2) հավասարության երկու մասերում անցնելով սահման-

նին, երբ $n \rightarrow \infty$, կատանանք, որ $y(x)$ -ը, որը որոշվում է (20) հավասարությամբ, բավարարում է հետևյալ հավասարմանը.

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \quad (24)$$

Ինչպես նշվել է վերևում, այստեղից հետևում է, որ գտած $y(x)$ ֆունկցիան բավարարում է (1) դիֆերենցիալ հավասարմանը և (2) սկզբնական պայմաններին:

Դիտողություն 1: Օգտվելով ապացուցման այլ մեթոդներից, կարելի է հաստատել, որ գոյություն ունի (1) հավասարման մասնավոր լուծումը, որը բավարարում է (2) սկզբնական պայմաններին, եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է D տիրույթում (Պեանոյի թեորեմը):*

Դիտողություն 2: Նման եղանակով, որով ստացվել է (18) առնչությունը, կարելի է ցույց տալ, որ $y(x)$ -ը իր y_n n -րդ մոտավորությամբ փոխարինելիս կատարած սխալանքը տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$|y - y_n| \leq \frac{N^n M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{MN^{n+1}}{(n+1)!} \quad (25)$$

Օրինակ. Այս գնահատականը կիրառենք

$$y' = x + y^2$$

հավասարման՝ $y_0 = 1$, երբ $x = 0$ սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծման y_3 հինգերորդ մոտարկման համար:

Դիցուք D տիրույթն այսպիսին է՝

$$D\{-1/2 \leq x \leq 1/2, -1 \leq y \leq 1\},$$

այսինքն՝ $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$: Այս դեպքում $M = \frac{3}{2}$, $N = 2$: Այնուհետև որոշում ենք.

$$l = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

Ըստ (25) բանաձևի ստանում ենք.

$$|y - y_3| \leq \frac{2^5 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6}{6!} = \frac{1}{960}.$$

Նկատենք, որ (25) գնահատականը բավականին կոպիտ է. Քննարկված օրինակում այլ մեթոդներով կարելի է ցույց տալ, որ սխալանքը տասնյակ անգամ փոքր է:

§ 28. Դիֆերենցիալ հավասարման լուծման միակության թեորեմը

Այնուհետև ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Եթե § 27-ում սահմանած D տիրույթում $f(x, y)$

ֆունկցիան անընդհատ է և ունի $\frac{\partial f}{\partial y}$ անընդհատ մասնական ածանցյալը, ապա

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը

$$y = y_0, \text{ երբ } x = x_0 \quad (2)$$

սկզբնական պայմանների դեպքում միակն է, այսինքն՝ (x_0, y_0) կետով անցնում է (1) հավասարման ինտեգրալային կորերից միայն մեկը:

Ապացուցում: Ենթադրենք, որ գոյություն ունի (1) հավասարման երկու լուծում, որոնք բավարարում են (2) պայմաններին, այսինքն՝ $A(x_0, y_0)$ կետից դուրս եկող $y(x)$ և $z(x)$ երկու կոր: Հետևաբար, այդ երկու ֆունկցիաները բավարարում են § 27-ի (24) հավասարմանը.

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx, \quad z = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, z) dx:$$

Դիտարկենք հետևյալ տարբերությունը.

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^x [f(x, y) - f(x, z)] dx \quad (3)$$

Հաշվի առնելով § 27-ի (6)-ը, ենթաինտեգրալային տարբերությունը ձևափոխենք ըստ Լագրանժի բանաձևի.

$$f(x, y) - f(x, z) = \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial y} (y - z), \quad (4)$$

Այս հավասարությունից ստանում ենք

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq N|y - z| \quad (5)$$

* Տես, օրինակ, И. Г. Петровский, «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений», изд-во «Наука» գիրքը:

Հաշվի առնելով (5)-ը, (3)-ի հիման վրա կարող ենք գրել հետևյալ անհավասարությունը.

$$|y-z| = \left| \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y-z) dx \right| \leq \pm \int_{x_0}^x N|y-z| dx, \quad (6)$$

Դիտարկենք x -ի այնպիսի արժեքը, որպեսզի $|x-x_0| < \frac{1}{N}$, Որոշակիության համար կհամարենք, որ $x_0 < x$, $x < x_0$ դեպքի համար ապացուցումը կատարվում է նման ձևով:

Դիցուք $|y-z|$ միջակայքում $x-x_0 < \frac{1}{N}$ -ն իր մեծագույն արժեքն ընդունում է $x=x^*$ դեպքում և հավասար է λ -ի: Այդ դեպքում (6) անհավասարությունը x^* կետի համար ընդունում է

$$\lambda \leq N \int_{x_0}^{x^*} \lambda dx = N\lambda(x^*-x_0) < N\lambda \frac{1}{N} < \lambda$$

կամ

$$\lambda < \lambda$$

աեսքը: Երկու տարբեր լուծումների գոյությունը ենթադրելու դեպքում եկանք հակասություն: Հետևաբար, լուծումը միակն է:

Դիտողություն 1: Կարելի է ցույց տալ, որ լուծումը միակը կլինի $f(x, y)$ ֆունկցիայի վրա ավելի քիչ պահանջների դեպքում: Տես, օրինակ, И. Г. Петровский. «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений» գիրքը:

Դիտողություն 2: Եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան տիրույթում ունի $\frac{\partial f}{\partial y}$ անսահմանափակ մասնական ածանցյալ, ապա կարող են գոյություն ունենալ (1) հավասարմանը և (2) սկզբնական պայմաններին բավարարող մի քանի լուծումներ:

Իրոք, դիտարկենք

$$y' = 3x\sqrt[3]{y} \quad (7)$$

հավասարումը՝

$$y=0, \text{ երբ } x=0 \quad (8)$$

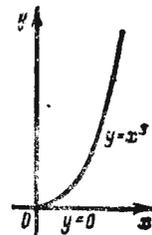
սկզբնական պայմաններով:

$$\text{Այստեղ } \frac{\partial f}{\partial y} = xy^{-2/3} \rightarrow \infty, \text{ երբ } y \rightarrow 0:$$

Այս դեպքում գոյություն ունեն (7) հավասարման երկու լուծումներ, որոնք բավարարում են (8) սկզբնական պայմաններին՝

$$y=0, y=x^3:$$

Որ իրոք այս ֆունկցիաները (7) հավասարման լուծումներն են, համոզվում ենք դրանք հավասարման մեջ տեղադրելով: Կոորդինատների սկզբնակետով անցնում են երկու ինտեգրալային կորեր (նկ. 373):



Վարժություններ XVI գլխի վերաբերյալ

Ըստ տրված ընդհանուր անդամի գրել շարքի մի քանի առաջին անդամները.

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, 2. $u_n = \frac{n^3}{n+1}$,

3. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, 4. $u_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^k}$, 5. $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$,

նկ. 373

Ուսումնասիրել հետևյալ շարքերի զուգամիտությունը. 6. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} +$

$+\frac{3}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$ Պատ. Զուգամիտում է: 7. $\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{1}{30} + \dots +$

$+\frac{1}{\sqrt{10n}} + \dots$ Պատ. Տարամիտում է: 8. $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n} + \dots$ Պատ.

Տարամիտում է:

9. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n+6}} + \dots$ Պատ. Տարամիտում է:

10. $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \dots$ Պատ. Զուգամիտում է:

11. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \dots + \frac{n}{n^2+1} + \dots$ Պատ. Տարամիտում է:

12. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{1+n^2} + \dots$ Պատ. Զուգամիտում է:

Ուսումնասիրել տրված ընդհանուր անդամներով շարքերի զուգամիտությունը: 13. $u_n = \frac{1}{n^3}$; Պատ. Զուգամիտում է: 14. $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$; Պատ. Տարամիտում է:

15. $u_n = \frac{2}{5n+1}$; Պատ. Տարամիտում է: 16. $u_n = \frac{1+n}{3+n^2}$; Պատ.

Տարամիտում է: 17. $u_n = \frac{1}{n^2+2n+3}$; Պատ. Զուգամիտում է: 18. $u_{n-1} = \frac{1}{n!n}$;

Պատ. Տարամիտում է: 19. Ապացուցել հետևյալ անհավասարությունը.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 1n(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}$$

20. Կիրառելի է արդյոք Լայբնիցի թեորեմը հետևյալ շարքի նկատմամբ.

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$$

Պատ. Կիրառելի չէ, քանի որ շարքի անդամները բացարձակ մեծությունները նվազում են ոչ մոնոտոն: Շարքը տարամիտում է:

Քանի առաջին անդամներ պետք է վերցնել, որպեսզի նրանց գումարը համապատասխան շարքի գումարից չտարբերվի ավելի, քան $\frac{1}{10^6}$ -ը:

21. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} + \dots$ Պատ. $n=20$:

22. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$ Պատ. $n=10^6$:

23. $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n^2} + \dots$ Պատ. $n=10^3$:

24. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \dots$ Պատ. $n=10$:

Պարզել, թե ներքոհիշյալ շարքերից որոնք են բացարձակ զուգամիտում.

25. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$ Պատ. Չուզամիտում է

բացարձակ: 26. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} + \dots$ Պատ.

Չուզամիտում է բացարձակ: 27. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\ln n} + \dots$

Պատ. Չուզամիտում է պայմանական: 28. $-1 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}} - \frac{1}{\sqrt[5]{3}} + \frac{1}{\sqrt[5]{4}} + \dots + \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}} + \dots$ Պատ. Չուզամիտում է պայմանական:

Ֆանելի շարքի գումարը. 29. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$

Պատ. $\frac{1}{4}$:

x -ի ինչպիսիս արժեքների դեպքում են զուգամիտում հետևյալ շարքերը.

30. $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots$ Պատ. $-2 < x < 2$: 31. $x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots$

$+ \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2} + \dots$ Պատ. $-1 \leq x \leq 1$: 32. $3x + 3^4x^4 + 3^9x^9 + \dots + 3^{n^2}x^{n^2} + \dots$

Պատ. $|x| < 1/3$:

33. $1 + \frac{100x}{1 \cdot 3} + \frac{10000x^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1000000x^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$ Պատ. $-\infty < x < \infty$:

34. $\sin x + 2 \sin \frac{x}{3} + 4 \sin \frac{x}{9} + \dots + 2^n \sin \frac{x}{3^n} + \dots$ Պատ. $-\infty < x < \infty$:

35. $\frac{x}{1+\sqrt{1}} + \frac{x^2}{2+\sqrt{2}} + \dots + \frac{x^n}{n+\sqrt{n}} + \dots$ Պատ. $-1 \leq x < 1$:

36. $x + \frac{2^k}{2!}x^2 + \frac{3^k}{3!}x^3 + \dots + \frac{n^k}{n!}x^n + \dots$ Պատ. $-\infty < x < \infty$:

37. $x + \frac{2!}{2^2}x^2 + \frac{3!}{3^3}x^3 + \dots + \frac{n!}{n^n}x^n + \dots$ Պատ. $-e < x < e$:

38. $x + \frac{2^2}{4!}x^2 + \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2}{6!}x^3 + \dots + \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n + \dots$ Պատ. $-4 < x < 4$:

39. Ֆանելի $x + 2x^2 + \dots + nx^n + \dots$ ($|x| < 1$) շարքի գումարը: Պատ. $\frac{x}{(1-x)^2}$:

Որոշել, թե ներքոհիշյալ շարքերից որոնք են նշված հատվածներում մատուցող: 40. $1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$ ($0 \leq x \leq 1$): Պատ. Մատուցող է:

41. $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ ($0 \leq x \leq 1$): Պատ. Մատուցող չէ:

42. $\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots$ $[0, 2\pi]$: Պատ. Մատուցող է:

Ցուցնել ցիաների վերլուծությունը շարքերի

43. $\frac{1}{10+x}$ -ը վերլուծել ըստ x -ի աստիճանների և որոշել զուգամիտության միջակայքը: Պատ. Չուզամիտում է $-10 < x < 10$ դեպքում:

44. $\cos x$ -ը վերլուծել ըստ $(x - \frac{\pi}{4})$ -ի աստիճանների: Պատ. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \dots$

45. e^{-x} -ը վերլուծել ըստ x -ի աստիճանների: Պատ. $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$

46. e^x -ը վերլուծել ըստ $(x-2)$ -ի աստիճանների: Պատ. $e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \dots$

47. $x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ վերլուծել ըստ $(x-1)$ -ի աստիճանների: Պատ. $-3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3$:

48. $x^{10} + 2x^9 - 3x^7 - 6x^6 + 3x^4 + 6x^3 - x - 2$ բազմանդամը վերլուծել թեյլորի շարքի ըստ $(x-1)$ -ի աստիճանների. համոզվել, որ 1 թիվն այդ բազմանդամի եռակի արմատն է: Պատ. $f(x) = 81(x-1)^3 + 270(x-1)^4 + 405(x-1)^5 + 351(x-1)^6 + 189(x-1)^7 + 63(x-1)^8 + 12(x-1)^9 + (x-1)^{10}$:

49. $\cos(x+a)$ -ն վերլուծել ըստ x -ի աստիճանների: Պատ. $\cos a - x \sin a - \frac{x^2}{2!} \cos a + \frac{x^3}{3!} \sin a + \frac{x^4}{4!} \cos a - \dots$

50. $\ln x - x$ վերլուծել ըստ $(x-1)$ -ի աստիճանների, Պատ. $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots$

51. $e^x - x$ վերլուծել ըստ $(x+2)$ -ի աստիճանների շարքի: Պատ. $e^{-2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} \right]$

52. $\cos^2 x - x$ վերլուծել ըստ $(x - \frac{\pi}{4})$ -ի աստիճանների շարքի: Պատ. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n-1} (x - \frac{\pi}{4})^{2n-1}}{(2n-1)!} (|x| < \infty)$

53. $\frac{1}{x^2}$ -ն վերլուծել ըստ $(x+1)$ -ի աստիճանների շարքի: Պատ. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n, (-2 < x < 0)$

54. $\operatorname{tg} x - x$ վերլուծել ըստ $(x - \frac{\pi}{4})$ -ի աստիճանների շարքի: Պատ. $1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \dots$

Գրել հետևյալ ֆունկցիաների ըստ x -ի աստիճանների շարքի վերլուծությունների առաջին չորս անդամները:

55. $\operatorname{tg} x$. Պատ. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$ **56.** $e^{\cos x}$. Պատ. $e \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{720} - \dots \right)$ **57.** $e^{\operatorname{arctg} x}$. Պատ. $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24} + \dots$

58. $\ln(1+e^x)$. Պատ. $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \dots$ **59.** $e^{\sin x}$. Պատ. $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots$ **60.** $(1+x)^x$. Պատ. $1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 - \dots$ **61.** $\sec x$. Պատ. $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \dots$ **62.** $\ln \cos x$. Պատ. $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \dots$

63. $\sin kx - x$ վերլուծել ըստ x -ի աստիճանների: Պատ. $kx - \frac{(kx)^3}{3!} + \frac{(kx)^5}{5!} - \frac{(kx)^7}{7!} + \dots$

64. $\sin^2 x - x$ վերլուծել ըստ x -ի աստիճանների և որոշել զուգամիտություն միջակայքը: Պատ. $\frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ Շարքը զուգամիտում է x -ի բոլոր արժեքների դեպքում:

65. $\frac{1}{1+x^2}$ ֆունկցիան վերլուծել ըստ x -ի աստիճանների շարքի: Պատ. $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$

66. $\operatorname{arctg} x$ ֆունկցիան վերլուծել ըստ x -ի աստիճանների շարքի: Ցուցում: Օգտվել $\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$ բանաձևից: Պատ. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ ($-1 \leq x \leq 1$).

67. $\frac{1}{(1+x)^2}$ ֆունկցիան վերլուծել ըստ x -ի աստիճանների շարքի: Պատ. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$ ($-1 < x < 1$).

Օգտվելով $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^m$ ֆունկցիաների աստիճանային շարքի վերլուծության բանաձևերից և կիրառելով տարբեր եղանակներ, ֆունկցիաները վերլուծել աստիճանային շարքերի և որոշել զուգամիտություն շառավիղները:

68. $\operatorname{sh} x$: Պատ. $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ ($-\infty < x < \infty$): **69.** $\operatorname{ch} x$: Պատ. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ ($-\infty < x < \infty$): **70.** $\cos^2 x$. Պատ. $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$ ($-\infty < x < \infty$).

71. $(1+x) \ln(1+x)$: Պատ. $x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)n}$ ($|x| \leq 1$), **72.** $(1+x)e^{-x}$, Պատ. $1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n!} x^n$ ($-\infty < x < \infty$).

73. $\frac{1}{4-x^4}$, Պատ. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4^{n+1}}$ ($|x| < \sqrt[4]{2}$).

74. $\frac{e^x - 1}{x}$, Պատ. $1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots$ ($-\infty < x < \infty$).

75. $\frac{1}{(1-x)^2}$, Պատ. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ ($|x| < 1$), **76.** $e^{\sin x}$, Պատ. $x + x^2 + \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} + \dots + \sqrt{2}^n \sin \frac{n\pi}{4} \frac{x^n}{n!} + \dots$ ($-\infty < x < \infty$).

77. $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$, Պատ. $x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$ ($-1 \leq x \leq 1$).

78. $\int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x} dx$, Պատ. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}$ ($|x| \leq 1$), **79.** $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$, Պատ. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$).

80. $\int \frac{\cos x}{x} dx$. Պատ. $C + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)(2n)!}$ ($-\infty < x < 0$ և $0 < x < \infty$).

81. $\int_0^x \frac{dx}{1-x^9}$, Պատ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{9n-8}}{9n-8}$.

82. Ապացուցել $\sin(a+x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x$, $\cos(a+x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x$

հավասարությունները, նրանց ձևի մասերը վերլուծելով ըստ x -ի աստիճանների:

Օգտվելով համապատասխան շարքերից, հաշվել. **83.** $\cos 10^\circ$ -ը մինչև 0,0001 ճշտությամբ: Պատ. 0,9848; **84.** $\sin 1^\circ$ -ը մինչև 0,0001 ճշտությամբ: Պատ. 0,0175; **85.** $\sin 18^\circ$ -ը մինչև 0,001 ճշտությամբ: Պատ. 0,3090

86. $\sin \frac{\pi}{4}$ -ը մինչև 0,0001 ճշտությամբ: Պատ. 0,7071; **87.** $\arctg \frac{1}{5}$ -ը մինչև 0,0001 ճշտությամբ: Պատ. 0,1973; **88.** $\ln 5$ -ը մինչև 0,001 ճշտությամբ: Պատ. 1,609; **89.** $\lg_{10} 5$ -ը մինչև 0,001 ճշտությամբ: Պատ. 0,699; **90.** $\arcsin 1$ -ը մինչև 0,0001 ճշտությամբ: Պատ. 1,5708; **91.** \sqrt{e} մինչև 0,0001 ճշտությամբ: Պատ. 1,6487; **92.** $\lg e$ -ն մինչև 0,00001 ճշտությամբ: Պատ. 0,43429; **93.** $\cos 1$ -ը մինչև 0,00001 ճշտությամբ: Պատ. 0,5403;

Օգտվելով $f(x) = \sqrt[n]{a^n+x}$ ֆունկցիայի՝ Մակլորենի շարքի վերլուծությունից մինչև 0,001 ճշտությամբ հաշվել. **94.** $\sqrt[3]{30}$ Պատ. 3,107; **95.** $\sqrt{70}$: Պատ. 8,367; **96.** $\sqrt[3]{500}$, Պատ. 7,937; **97.** $\sqrt[3]{250}$, Պատ. 6,309; **98.** $\sqrt{84}$: Պատ. 9,165; **99.** $\sqrt[3]{2}$, Պատ. 1,2598;

Ենթադրելով $f(x) = \sqrt[n]{a^n+x}$ ֆունկցիան վերլուծելով շարքի, հաշվել հետևյալ ինտեգրալները.

100. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ մինչև 10^{-5} ճշտությամբ: Պատ. 0,94608; **101.** $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ մինչև

0,0001 ճշտությամբ: Պատ. 0,7468; **102.** $\int_0^{\pi/4} \sin(x^2) dx$ մինչև 0,0001 ճշտու-

թյամբ: Պատ. 0,1571; **103.** $\int_0^{0.5} e^{\sqrt{x}} dx$ մինչև 0,01 ճշտությամբ: Պատ. 0,81;

104. $\int_0^{0.5} \frac{\arctg x}{x} dx$ մինչև 0,001 ճշտությամբ: Պատ. 0,487; **105.** $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$

մինչև 0,001 ճշտությամբ: Պատ. 0,764; **106.** $\int_0^{0.25} \ln(1+\sqrt{x}) dx$ մինչև 0,001

ճշտությամբ: Պատ. 0,071; **107.** $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}} dx$ մինչև 0,0001 ճշտությամբ:

Պատ. 0,9226; **108.** $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} dx$ մինչև 0,0001 ճշտությամբ: Պատ. 0,0214;

109. $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}$ մինչև 0,001 ճշտությամբ: Պատ. 0,494; **110.** $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$:

Պատ. $\frac{\pi^2}{12}$,

Ցուցում. Այս և հաջորդ երկու օրինակները լուծելիս օգտակար է հաշվի առնել հետևյալ հավասարությունները, որոնք կհաստատվեն XVII գլխի § 2-ում

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

111. $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$, Պատ. $-\frac{\pi^2}{6}$; **112.** $\int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} dx$: Պատ. $\frac{\pi^2}{4}$,

Դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրումը շարքերի բիջոնով

113. Գտնել $y' = xy$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $y=1$, $y'=0$, երբ $x=0$ սկզբնական պայմաններին:

Ցուցում. Լուծումը որոնել շարքի տեսքով: Պատ. $1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-1)3k} + \dots$

114. Գտնել $x'' + xy' + y = 0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $y=0$, $y'=1$, երբ $x=0$ սկզբնական պայմաններին: Պատ. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$

115. Գտնել

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Ցուցում. Լուծումը որոնել $y = x^r(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots)$ տեսքով:

Պատ. $C_1 x^{1/2} \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right] + C_2 x^{-1/2} \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right] =$
 $= C_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

116. Գտնել $xy'' + y' + xy = 0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $y=1$, $y'=0$, երբ $x=0$ սկզբնական պայմաններին: Պատ. $1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(1 \cdot 2)^2 2^4} -$

$$- \frac{x^6}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2 2^6} + \dots (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} + \dots$$

Դիտողություն. Վերջին երկու դիֆերենցիալ հավասարումները

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Բեսելի հավասարման մասնավոր դեպքերն են, երբ $n = \frac{1}{2}$ և $n=0$:

117. Գտնել $4xy'' + 2y' + y = 0$ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Յոսոցում: $z = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ տեսքով: Պատ. $C_1 \cos \sqrt{x} + C_2 \sin \sqrt{x}$:

118. Գտնել $(1-x^2)y'' - xy' = 0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $y=0$, $y'=1$, երբ $x=0$ սկզբնական պայմաններին: Պատ. $x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{x^7}{7} + \dots$

119. Գտնել $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $y=0$, $y'=1$, երբ $x=0$ սկզբնական պայմաններին: Պատ. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

120. Գտնել $y'' = xy y'$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $y=1$, $y'=1$, երբ $x=0$ սկզբնական պայմաններին: Պատ. $1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \dots$

121. Գտնել $(1-x)y' = 1+x-y$ հավասարման լուծումը, որը բավարարում է $y=0$, երբ $x=0$ սկզբնական պայմաններին և ցույց տալ ստացված շարքի զուգամիտության միջակայքը: Պատ. $x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \dots (-1 \leq x \leq 1)$:

122. Գտնել $xy'' + y = 0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $y=0$, $y'=1$, երբ $x=0$ սկզբնական պայմաններին և ցույց տալ զուգամիտության միջակայքը: Պատ. $x - \frac{x^2}{(1!)^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{(2!)^2 \cdot 3} - \frac{x^4}{(3!)^2 \cdot 4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{[(n-1)!]^2 n} + \dots$
 $\dots (-\infty < x < \infty)$:

123. Գտնել $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $y=1$, $y'=0$, երբ $x=0$ սկզբնական պայմաններին: Պատ. $\frac{\sin x}{x}$:

124. Գտնել $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $y=1$, $y'=0$, երբ $x=0$ սկզբնական պայմաններին և ցույց տալ ստացված շարքի զուգամիտության միջակայքը: Պատ. $1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + \dots (|x| < \infty)$:

Գտնել նշված սկզբնական պայմանների դեպքում ներքոհիշյալ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների աստիճանային շարքի վերլուծության առաջին երեք անդամները: **125.** $y' = x^2 + y^2$, $y=1$, երբ $x=0$: Պատ. $1 + x + x^2 + \frac{4x^3}{3} + \dots$

126. $y'' = e^y + x$, $y=1$, $y'=0$, երբ $x=0$: Պատ. $1 + \frac{e^x}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

127. $y' = \sin y - \sin x$, $y=0$, երբ $x=0$: Պատ. $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \dots$

Գտնել նշված սկզբնական պայմանների դեպքում դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների աստիճանային շարքի վերլուծության մի քանի անդամները: **128.** $y'' = yy' - x^2$, $y=1$, $y'=1$: երբ $x=0$: Պատ. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \frac{14x^5}{5!} + \dots$

129. $y' = y^2 + x^3$, $y = \frac{1}{2}$, երբ $x=0$: Պատ. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \dots$

130. $y' = x^2 - y^2$, $y=0$, երբ $x=0$: Պատ. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7 \cdot 9}x^7 + \frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 27}x^{11} - \dots$

131. $y' = x^2 y^2 - 1$, $y=1$, երբ $x=0$: Պատ. $1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} - \dots$

132. $y' = e^y + xy$, $y=0$, երբ $x=0$: Պատ. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$

տվյալ ֆունկցիային զուգամիտող եռանկյունաչափական շարքով, այսինքն՝ հանդիսանում է այդ շարքի գումարը.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2)$$

Ենթադրենք, որ այս հավասարության ձախ մասի ֆունկցիային տեղադրվող հավասար է (2) շարքի անդամների ինտեգրալների գումարին: Դա, օրինակ, տեղի կունենա, եթե ենթադրվի, որ տվյալ եռանկյունաչափական շարքի գործակիցներից կազմված թվային շարքը բացարձակ զուգամիտում է, այսինքն՝ զուգամիտում է

$$\left| \frac{a_0}{2} \right| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \dots + |a_n| + |b_n| + \dots \quad (3)$$

զրական թվային շարքը:

Այդ դեպքում (1) շարքը մաթորացվող է և, հետևաբար, այն կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել $-\pi$ -ից մինչև π միջակայքում: Դա օգտագործենք a_0 գործակիցը հաշվելու համար:

(2) հավասարության երկու մասերն ինտեգրենք $-\pi$ -ից մինչև $+\pi$ սահմաններում.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx \right),$$

Առանձին հաշվենք աջ մասում հանդիպող յուրաքանչյուր ինտեգրալը.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{a_n \sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -b_n \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

Հետևաբար,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0,$$

XVII Գ Լ Ո Խ Խ

ՖՈՒՐՅԵԻ ՇԱՐՔԵՐ

§ 1. Սահմանում: Խնդրի դրվածքը

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots,$$

կամ, ավելի սեղմ՝

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

տեսքի ֆունկցիոնալ շարքը կոչվում է եռանկյունաչափական շարք: a_0 , a_n և b_n ($n=1, 2, \dots$) հաստատուն թվերը կոչվում են եռանկյունաչափական շարքի գործակիցներ:

Եթե (1) շարքը զուգամիտում է, ապա նրա գումարը 2π պարբերությամբ $f(x)$ պարբերական ֆունկցիա է, քանի որ $\sin nx$ -ը և $\cos nx$ -ը 2π պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիաներ են:

Այսպիսով,

$$f(x) = f(x + 2\pi),$$

Դնենք հետևյալ խնդիրը:

Տրված է 2π պարբերությունն ունեցող $f(x)$ պարբերական ֆունկցիան: Ինչպիսի՞ պայմանների դեպքում $f(x)$ -ի համար կարելի է գտնել տվյալ ֆունկցիային զուգամիտող եռանկյունաչափական շարք:

Այս խնդիրն էլ կլուծվի սույն գլխում:

Շարքի գործակիցների որոշումը Ֆուրյեի բանաձևերով: Դիցուք 2π պարբերությամբ $f(x)$ պարբերական ֆունկցիան այնպիսին է, որ այն ներկայացվում է $(-\pi, \pi)$ միջակայքում

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (4)$$

Մյուս գործակիցները հաշվելու համար մեզ պետք կզան մի քանի որոշյալ ինտեգրալներ, որոնք կդիտարկենք նախորոք:

Եթե n -ը և k -ն ամբողջ թվեր են, ապա տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները. եթե $n \neq k$, ապա

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx \, dx &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

իսկ եթե $n = k$, ապա

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx &= \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx \, dx &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx &= \pi. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Հաշվենք, օրինակ, (I) խմբի առաջին ինտեգրալը: Քանի որ

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2} [\cos(n+k)x + \cos(n-k)x], \quad \text{ապա}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x \, dx = 0:$$

Նման ձևով կարելի է ստանալ և (I)-ի մնացած բանաձևերը*: (II) խմբի ինտեգրալները հաշվվում են անմիջականորեն (տես I հատ. X գլխում):

Այժմ կարող ենք հաշվել (2) շարքի a_k և b_k գործակիցները:

$k \neq 0$ որևէ որոշակի արժեքի դեպքում a_k գործակիցը որոշելու համար (2) հավասարության երկու մասերը բազմապատկենք $\cos kx$ -ով.

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx): \quad (2')$$

Հավասարության աջ մասում ստացված շարքը մատրոսցիոզ է, քանի որ նրա անդամները բացարձակ մեծություններ են գերազանցում (3) գուգամիտող դրական շարքի անդամներին: Ուստի այն կարելի է ցանկացած հատվածում անդամ առ անդամ ինտեգրել:

(2') հավասարությունն ինտեգրենք $-\pi$ -ից մինչև π սահմաններում.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx \right), \end{aligned}$$

Ուշադրություն դարձնելով (II) և (I) բանաձևերին, տեսնում ենք, որ a_k գործակից ունեցող ինտեգրալից բացի, աջ մասի բոլոր ինտեգրալները հավասար են զրոյի:

Հետևաբար,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = a_k \pi,$$

որտեղից

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx: \quad (5)$$

*

$$\begin{aligned} \cos nx \sin kx &= \frac{1}{2} [\sin(n+k)x - \sin(n-k)x], \\ \sin nx \sin kx &= \frac{1}{2} [-\cos(n+k)x + \cos(n-k)x], \end{aligned}$$

բանաձևերի օգնությամբ:

(2) հավասարության երկու մասերը բազմապատկելով $\sin kx$ -ով և նորից ինտեգրելով $-\pi$ -ից մինչև π , կգտնենք.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = b_k \pi,$$

որտեղից

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (6)$$

(4), (5) և (6) բանաձևերով որոշվող գործակիցները կոչվում են $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի գործակիցներ, իսկ այդպիսի գործակիցներով (1) եռանկյունաձևական շարքը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարք:

Այժմ վերադառնանք մեր կողմից այս պարագրաֆի սկզբում դրված հարցին. ինչպիսի՞ հատկություններով պետք է օժտված լինի ֆունկցիան, որպեսզի նրա համար կառուցված Ֆուրյեի շարքը լինի զուգամետ և որպեսզի այդ շարքի գումարը հավասար լինի համապատասխան կետերում տվյալ ֆունկցիայի արժեքներին:

Այստեղ կձևակերպենք մի թեորեմ, որը կտա $f(x)$ ֆունկցիան Ֆուրյեի շարքի ներկայացնելիության բավարար պայմանները:

Սահմանում: $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է $[a, b]$ հատվածում կտոր առ կտոր մոնոտոն և եթե հատվածը x_1, x_2, \dots, x_{n-1} վերջավոր թվով կետերով կարելի է տրոհել $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, b)$ միջակայքերի այնպես, որ այս միջակայքերից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան մոնոտոն է, այսինքն՝ կա՛մ ոչ աճող է, կա՛մ ոչ նվազող:

Սահմանումից հետևում է, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածում կտոր առ կտոր մոնոտոն է և սահմանափակ է, ապա այն կարող է ունենալ միայն առաջին սեռի իրավմաներ: Իրոք, եթե $x=c$ -ն

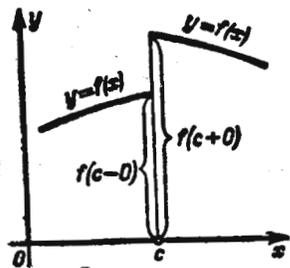
$f(x)$ ֆունկցիայի խզման կետ է, ապա մոնոտոնության շնորհիվ գոյություն ունեն

$$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c-0),$$

$$\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c+0)$$

սահմանները, այսինքն՝ c կետը առաջին սեռի խզման կետ է (նկ. 374):

Այժմ բանաձևենք հետևյալ թեորեմը: Թեորեմ: Եթե 2π պարբերությամբ $f(x)$ պարբերական ֆունկցիան $[-\pi, \pi]$



նկ. 374

հատվածում կտոր առ կտոր մոնոտոն է և սահմանափակ, ապա այդ ֆունկցիայի համար կառուցված Ֆուրյեի շարքը զուգամետում է բոլոր կետերում: Ստացված շարքի $s(x)$ գումարը անընդհատության կետերում հավասար է $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքին: $f(x)$ ֆունկցիայի խզման կետերում շարքի գումարը հավասար է $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանների միջին քվարանականին, այսինքն՝ եթե $x=c$ -ն $f(x)$ ֆունկցիայի խզման կետ է, ապա

$$s(x)_{x=c} = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2},$$

Այս թեորեմից հետևում է, որ այն ֆունկցիաների դասը, որոնք ներկայացվում են Ֆուրյեի շարքերով, բավականին լայն է: Այդ պատճառով Ֆուրյեի շարքերը մեծ կիրառություն են գտել մաթեմատիկայի տարբեր բաժիններում: Ֆուրյեի շարքերը հատկապես հաջողությամբ են կիրառվում մաթեմատիկական ֆիզիկայում և նրա կիրառություններում մեխանիկայի ու ֆիզիկայի կոնկրետ խնդիրների նկատմամբ (տես XVIII գլխում):

Տվյալ թեորեմը բերում ենք առանց ապացուցման: § 8-10-ում տրվելու է ֆունկցիայի՝ Ֆուրյեի շարքերի վերլուծության մի այլ բավարար պայմանի ապացուցումը, որը վերաբերում է որոշ իմաստով ազնի նեղ ֆունկցիաների դասին:

§ 2. Ֆունկցիաների՝ Ֆուրյեի շարքերի վերլուծության օրինակներ

Բերենք ֆունկցիաների՝ Ֆուրյեի շարքերի վերլուծության օրինակներ:

Օրինակ 1: 2π պարբերությամբ $f(x)$ պարբերական ֆունկցիան որոշված հետևյալ կերպ.

$$f(x) = x, \quad -\pi < x \leq \pi,$$

Այս ֆունկցիան կտոր առ կտոր մոնոտոն և սահմանափակ է (նկ. 375): Հետևաբար, այն թույլ է տալիս վերլուծություն Ֆուրյեի շարքերի:

Ըստ § 1-ի (4) բանաձևի գտնում ենք.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

Կիրառելով § 1-ի (5) բանաձևը և ինտեգրելով մասերով, գտնում ենք.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[x \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right] = 0,$$

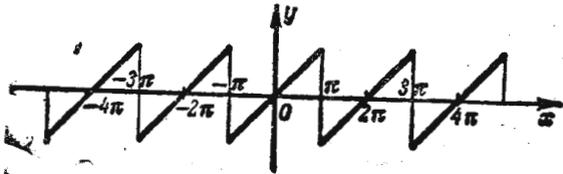
Հստ §1-ի (6) բանաձևի դոնում ենք.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx \right] = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}$$

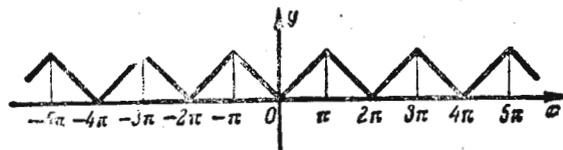
Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ շարքը.

$$f(x) = 2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k} + \dots \right]$$

Այս հավասարումը տեղի ունի բոլոր կետերում, բացի խզման կետերից: Յուրաքանչյուր խզման կետում շարքի գումարը հավասար է նրա աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանների միջին թվաբանականին, այսինքն՝ գրոյլ:



Նկ. 375



Նկ. 376

Օրինակ 2: 2π պարբերությամբ $f(x)$ պարբերական ֆունկցիան որոշված է այսպես.

$$f(x) = -x, \quad \text{երբ } -\pi \leq x \leq 0,$$

$$f(x) = x, \quad \text{երբ } 0 < x \leq \pi$$

այսինքն՝ $f(x) = |x|$ (Նկ. 376): Այս ֆունկցիան կտոր առ կտոր մոնոտոն և սահմանափակ է $-\pi \leq x \leq \pi$ հատվածում:

Որոշենք նրա Ֆուրյեի զործակիցները.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-x) \, dx + \int_0^{\pi} x \, dx \right] = \pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-x) \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^0 \sin kx \, dx + \frac{x \sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi k} \left[-\frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } k\text{-ն զույգ է,} \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & \text{երբ } k\text{-ն կենտ է,} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-x) \sin kx \, dx + \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx \right] = 0,$$

Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ շարքը.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \dots \right],$$

Այս շարքը զուգամիտում է բոլոր կետերում, և նրա գումարը հավասար է տվյալ ֆունկցիային.



Նկ. 377

Օրինակ 3: 2π պարբերությամբ $f(x)$ պարբերական ֆունկցիան որոշված է հետևյալ կերպ.

$$f(x) = -1, \quad \text{երբ } -\pi < x < 0,$$

$$f(x) = 1, \quad \text{երբ } 0 \leq x \leq \pi$$

Այս ֆունկցիան (Նկ. 377) կտոր առ կտոր մոնոտոն և սահմանափակ է $-\pi \leq x \leq \pi$ հատվածում:

Հաշվենք նրա Ֆուրյեի զործակիցները.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \, dx + \int_0^{\pi} 1 \, dx \right] = 0,$$

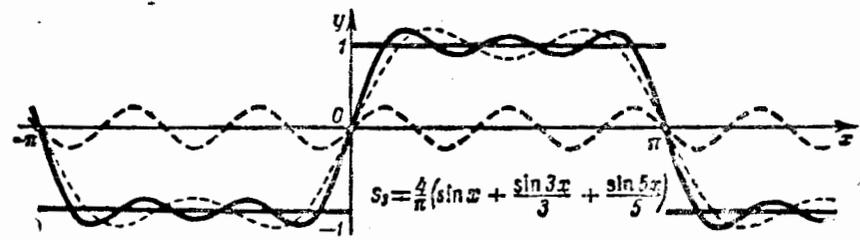
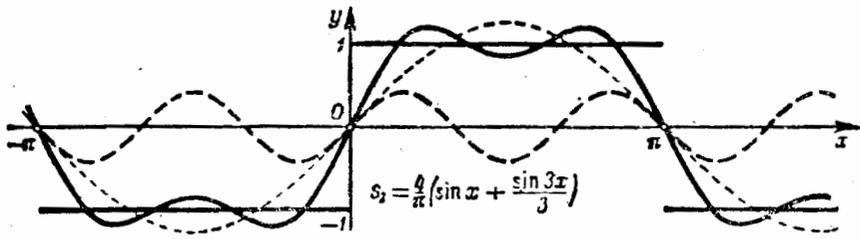
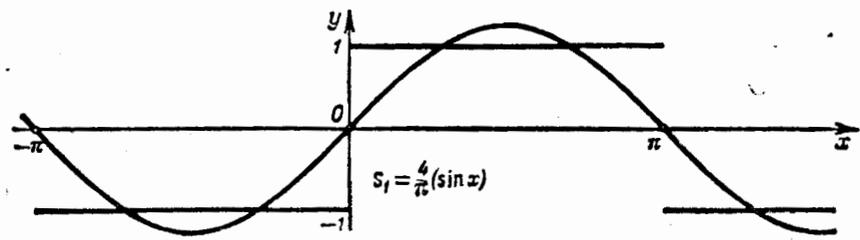
$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} \cos kx \, dx \right] = -1 \cdot \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \sin kx \, dx + \int_0^{\pi} \sin kx \, dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k} (1 - \cos \pi k) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } k\text{-ն զույգ է,} \\ \frac{4}{\pi k}, & \text{երբ } k\text{-ն կենտ է:} \end{cases}$$

Հետևաբար, զիտարկվող ֆունկցիայի համար Ֆուրյեի շարքն ունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \dots \right],$$



Նկ. 378

Այս հավասարությունը ճիշտ է բոլոր կետերում, բացի խզման կետերից:

Նկ. 378-ում ակնառու ցույց է տրված, թե n -ի մեծացման դեպքում ինչպես են շարքի S_n մասնակի գումարները ավելի ու ավելի ճշգրտորեն ներկայացնում $f(x)$ ֆունկցիան:

Օրինակ 4: 2π պարբերությամբ $f(x)$ պարբերական ֆունկցիան որոշված է հետևյալ կերպ.

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad (\text{նկ. 379}).$$

Որոշենք նրա Ֆուրյեի զործակիցները.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx \right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi k} \left[-\frac{x \cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx \right] = \frac{4}{\pi k^2} [\pi \cos k\pi] =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{k^2}, & \text{երբ } k\text{-ն զույգ է,} \\ -\frac{4}{k^2}, & \text{երբ } k\text{-ն կենտ է,} \end{cases}$$

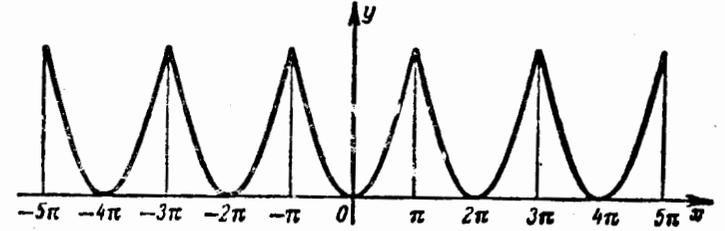
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x^2 \cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{k} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k} \left[\frac{x \sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right] = 0.$$

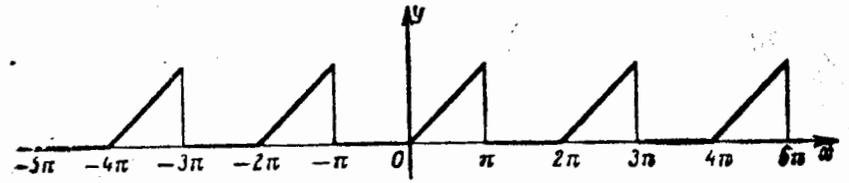
Նշանակում է սվյալ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքն ունի հետևյալ տեսքը.

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right),$$

Քանի որ ֆունկցիան կտոր առ կտոր մոնոտոն, սահմանափակ և անընդհատ է, ապա վերջին հավասարությունը սեղի ունի բոլոր կետերում:



Նկ. 379



Նկ. 380

Ստացված հավասարության մեջ ընդունելով $x = \pi$, կստանանք.

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

Օրինակ 5: 2π պարբերությամբ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է հետևյալ կերպ.

$$f(x)=0, \text{ երբ } -\pi < x \leq 0,$$

$$f(x)=x, \text{ երբ } 0 < x \leq \pi \text{ (նկ. 380).}$$

Որոշենք Ֆուրյեի գործակիցները

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 \cdot dx + \int_0^{\pi} x dx \right] = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi k} \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} -\frac{2}{\pi k^2}, & \text{երբ } k\text{-ն կենտ է,} \\ 0, & \text{երբ } k\text{-ն զույգ է.} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kx dx \right] =$$

$$= -\frac{\pi}{\pi k} \cos k\pi = \begin{cases} 1/k, & \text{երբ } k\text{-ն կենտ է,} \\ -1/k, & \text{երբ } k\text{-ն զույգ է.} \end{cases}$$

Այսպիսով, Ֆուրյեի շարքը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right),$$

$f(x)$ ֆունկցիայի իրական կետերում շարքի գումարը հավասար է նրա անսկզբման և ձախակողմյան սահմանների միջին թվաբանականին (այսինքն՝ սովյալ դեպքում $\frac{\pi}{2}$ թվին):

Ստացված հավասարության մեջ ընդունելով $x=0$, ստանում ենք

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

§ 3. Մի դիտողություն պարբերական ֆունկցիան Ֆուրյեի շարքի վերլուծելու վերաբերյալ

Նշենք 2π պարբերությունն անցող $\psi(x)$ պարբերական ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունը.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x) dx,$$

ինչպիսին էլ լինի λ թիվը:

Իրոք, քանի որ

$$\psi(\xi - 2\pi) = \psi(\xi),$$

ապա, ընդունելով $x = \xi - 2\pi$, ցանկացած c -ի և d -ի դեպքում կարող ենք գրել.

$$\int_c^d \psi(x) dx = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi - 2\pi) d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi) d\xi = \int_c^d \psi(x) dx:$$

Մասնավորաբար, ընդունելով $c = -\pi$, $d = \lambda$, կստանանք

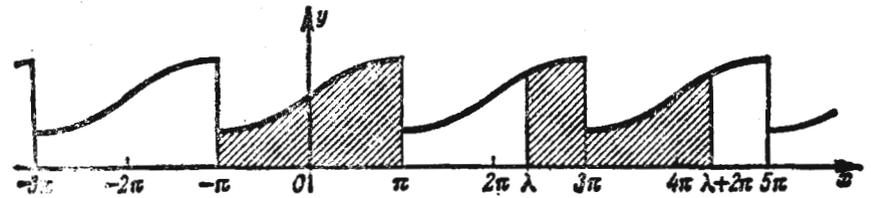
$$\int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x) dx = \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x) dx,$$

ուստի

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x) dx = \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx + \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x) dx =$$

$$= \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx + \int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x) dx = \int_{\lambda}^{\pi} \psi(x) dx:$$

Նշված հատկությունը նշանակում է, որ $\psi(x)$ պարբերական ֆունկցիայի ինտեգրալն ըստ ցանկացած հատվածի, որի երկարությունը հավասար է պարբերությանը, միշտ ունի միևնույն արժեքը: Այս փաստը հեշտ լուստարանվում է և երկրաչափորեն. նկ. 381-ում ներառված մտկերենները միմյանց հավասար են:



Նկ. 381

Ապացուցած հատկությունից բխում է, որ Ֆուրյեի գործակիցները հաշվելիս կարող ենք $(-\pi, \pi)$ ինտեգրման միջակայքը փոխարինել $(\lambda, \lambda+2\pi)$ ինտեգրման միջակայքով, այսինքն՝ կարող ենք ընդունել.

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) dx, & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) \sin nx dx, \end{aligned} \right\} (1)$$

որտեղ λ -ն ցանկացած թիվ է:

Դա հետևում է նրանից, որ ըստ պայմանի $f(x)$ ֆունկցիան 2π պարբերությունն ունեցող պարբերական ֆունկցիա է. հետևաբար, և $f(x)\cos nx$ ու $f(x)\sin nx$ ֆունկցիաներն են 2π պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիաներ: Օրինակի վրա ցույց տանք, թե ինչպես է որոշ դեպքերում ապացուցած հատկությունը պարզեցնում գործակիցները որոնելու ընթացքը:

Օրինակ: Դիցուք պահանջվում է 2π պարբերությունն ունեցող $f(x)$ ֆունկցիան, որը $0 < x < 2\pi$ հատվածում տրված է

$$f(x) = x$$

հավասարությանը, վերլուծել Ֆուրյեի շարքի:

Ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 382-ում: Այդ ֆունկցիան $[-\pi, \pi]$ հատվածում տրվում է երկու բանաձևով. $f(x) = x + 2\pi$, $[-\pi, 0]$ հատվածում և $f(x) = x$, $[0, \pi]$ հատվածում: Միևնույն ժամանակ այն $[0, 2\pi]$ հատվածում տրվում է անհամեմատ պարզ $f(x) = x$ մեկ բանաձևով: Ուստի այդ ֆունկցիան Ֆուրյեի շարքի վերածելու համար օգտակար է օգտվել (1) բանաձևերից, ընդունելով $\lambda = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}.$$

Հետևաբար,

$$f(x) = \pi - 2 \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x - \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{2}{4} \sin 4x - \frac{2}{5} \sin 5x - \dots$$

Այս շարքը տրված ֆունկցիան ներկայացնում է բոլոր կետերում, բացի խզվան կետերից (այսինքն՝ բացի $x=0, 2\pi, 4\pi, \dots$ կետերից): Այս կետերում շարքի գումարը հավասար է $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանային արժեքների միջին թվաբանականին (այսինքն՝ տվյալ դեպքում π թվին):

§ 4. Ֆուրյեի շարքերը զույգ և կենտ ֆունկցիաների համար
 Զույգ և կենտ ֆունկցիաների սահմանումից հետևում է, որ եթե $\psi(x)$ -ը զույգ ֆունկցիա է, ապա

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \psi(x) dx.$$

Իրոք,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx &= \int_{-\pi}^0 \psi(x) dx + \int_0^{\pi} \psi(x) dx = \int_0^{\pi} \psi(-x) dx + \int_0^{\pi} \psi(x) dx = \\ &= \int_0^{\pi} \psi(x) dx + \int_0^{\pi} \psi(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \psi(x) dx, \end{aligned}$$

քանի որ ըստ զույգ ֆունկցիայի սահմանման $\psi(-x) = \psi(x)$:

Նման ձևով կարելի է ապացուցել, որ եթե $\varphi(x)$ -ը կենտ ֆունկցիա է, ապա

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \int_0^{\pi} \varphi(-x) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) dx = -\int_0^{\pi} \varphi(x) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) dx = 0.$$

Եթե Ֆուրյեի շարքի է վերլուծվում $f(x)$ կենտ ֆունկցիան, ապա $f(x)\cos kx$ արտադրյալը նույնպես կենտ ֆունկցիա է, իսկ $f(x)\sin kx$ -ը, զույգ, հետևաբար,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

(1)

այսինքն՝ կենտ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը պարունակում է «միայն սինուսներ» (տես § 2-ի օրինակ 1-ը):

Եթե Ֆուրյեի շարքի է վերլուծվում զույգ ֆունկցիան, ապա $f(x)\sin kx$ արտադրյալը կենտ ֆունկցիա է, իսկ $f(x)\cos kx$ -ը՝ զույգ և, հետևաբար,

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0, \end{aligned} \right\} (2)$$

այսինքն՝ զույգ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը պարունակում է « միայն կոսինուսներ » (տես § 2-ի օրինակ 2-ը):

Ստացած բանաձևերը թույլ են տալիս Ֆուրյեի գործակիցները որոնելիս պարզեցնել հաշվումներն այն դեպքերում, երբ տրված ֆունկցիան զույգ է կամ կենտ: Ակնհայտ է, որ ոչ ամեն մի պարբերական ֆունկցիա է զույգ կամ կենտ (տես § 2-ի օրինակ 5-ը):

Օրինակ: Դիցուք պահանջվում է Ֆուրյեի շարքի վերլուծել $f(x)$ զույգ ֆունկցիան, որն ունի 2π պարբերություն և $[0, \pi]$ նատվածում տրված է

$$y=x$$

հավասարությամբ:

Այս ֆունկցիան Ֆուրյեի շարքի ենթ վերլուծել § 2-ի օրինակ 2-ում (տես նկ. 370): Նորից հաշվենք այս ֆունկցիայի Ֆուրյեի գործակիցները, օգտագործելով այն փաստը, որ տրված ֆունկցիան զույգ է:

(2) բանաձևերի համաձայն ցանկացած k -ի դեպքում $b_k=0$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} [(-1)^k - 0] = \begin{cases} 0, & \text{երբ } k\text{-ն զույգ է,} \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & \text{երբ } k\text{-ն կենտ է,} \end{cases}$$

Ստացանք նույն գործակիցները, ինչ որ § 2-ի օրինակ 2-ում, բայց աղելի կարճ ճանապարհով:

§ 5. Ֆուրյեի շարքը 21 պարբերությամբ ֆունկցիայի համար

Դիցուք $f(x)$ -ը պարբերական ֆունկցիա է, որի պարբերությունը 21 է (որը, ընդհանրապես ստացած, տարբեր է 2π -ից): Այն վերլուծենք Ֆուրյեի շարքի:

$x = \frac{lt}{\pi}$ բանաձևով կատարենք փոփոխականի փոխարինում: Այդ

դեպքում $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ ֆունկցիան կլինի t -ի պարբերական ֆունկցիա՝ 2π պարբերությամբ: Այն կարելի է $-\pi \leq x \leq \pi$ նատվածում վերլուծել Ֆուրյեի շարքի:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (1)$$

որտեղ

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos kt dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sin kt dt:$$

Այժմ վերադառնանք x հին փոփոխականին.

$$x = \frac{l}{\pi}t, \quad t = x \frac{\pi}{l}, \quad dt = \frac{\pi}{l} dx:$$

Այդ դեպքում կունենանք.

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-1}^1 f(x) dx, & a_k &= \frac{1}{l} \int_{-1}^1 f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx, \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-1}^1 f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx, \end{aligned} \right\} (2)$$

(1) բանաձևը կստանա հետևյալ տեսքը.

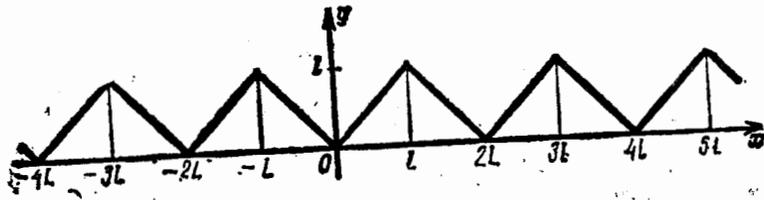
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right), \quad (3)$$

որտեղ a_0 , a_k , b_k գործակիցները հաշվվում են (2) բանաձևերով: Սա էլ հենց 21 պարբերությունն ունեցող պարբերական ֆունկցիայի համար Ֆուրյեի շարքն է:

Նկատենք, որ այն բոլոր թեորեմները, որոնք տեղի ունեն 2π պարբերությամբ ֆունկցիաների Ֆուրյեի շարքերի համար, պահպան-

վում են նաև ցանկացած որևէ ուրիշ $2l$ պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիաների Ֆուրյեի շարքերի համար: Մասնավորապես, իր ուժը պահպանում է ֆունկցիայի՝ Ֆուրյեի շարքի վերլուծության բավարար պայմանը (տես § 3), ինչպես նաև ֆունկցիան զույգ կամ կենտ լինելու դեպքում շարքի գործակիցների հաշվումը պարզեցնելու հնարավորության մասին դիտողությունը:

Օրինակ, վերլուծել Ֆուրյեի շարքի $2l$ պարբերությամբ $f(x)$ պարբերական ֆունկցիան, որը $[-1, 1]$ հատվածում տրվում է $f(x) = |x|$ հավասարությամբ (նկ. 383):



Նկ. 383

Հստակ է, թանի որ դիտարկվող ֆունկցիան զույգ է, ապա

$$b_k = 0, \quad a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x dx = 1,$$

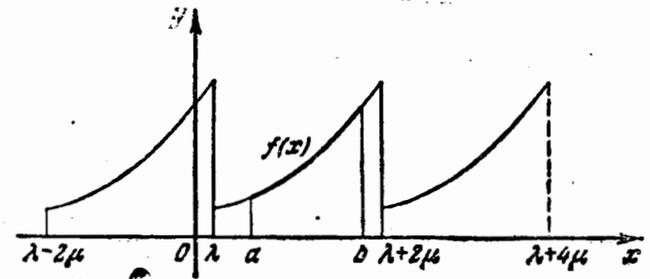
$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2l}{\pi^2} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \begin{cases} 0, & \text{երբ } k\text{-ն զույգ է} \\ -\frac{4l}{\pi^2 k^2}, & \text{երբ } k\text{-ն կենտ է:} \end{cases}$$

Հետևաբար, վերլուծությունն ունի հետևյալ տեսքը:

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left[\frac{\cos \frac{\pi}{l} x \cos \frac{3\pi}{l} x}{1^2} + \frac{\cos \frac{5\pi}{l} x \cos \frac{7\pi}{l} x}{3^2} + \dots + \frac{\cos \frac{(2p+1)\pi}{l} x \cos \frac{(2p+3)\pi}{l} x}{(2p+1)^2} + \dots \right]$$

§ 6. Ոչ պարբերական ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքի վերլուծության մասին

Դիցուք որևէ $[a, b]$ հատվածում տրված է $f(x)$ կտոր առ կտոր մոնոտոն ֆունկցիա (նկ. 384): Ցույց տանք, որ տրված $f(x)$ ֆունկցիան իր անընդհատության կետերում կարելի է ներկայացնել Ֆուրյեի շարքի տեսքով:



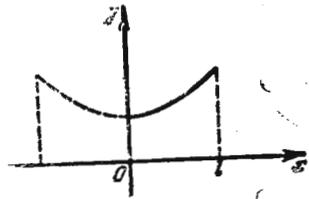
Նկ. 384

Դրա համար դիտարկենք կամայական $2l$ պարբերություն ունեցող կտոր առ կտոր մոնոտոն պարբերական $f_1(x)$ ֆունկցիան, որը $[a, b]$ հատվածում համընկնում է $f(x)$ ֆունկցիայի հետ:

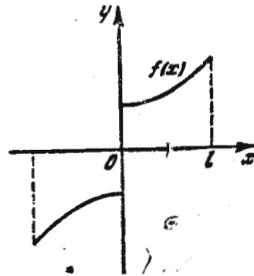
$f_1(x)$ ֆունկցիան վերլուծենք Ֆուրյեի շարքի: Այս շարքի գումարը $[a, b]$ հատվածի բոլոր կետերում (բացի խզման կետերից) համընկնում է տրված $f(x)$ ֆունկցիայի հետ, այսինքն՝ մենք $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածում վերլուծեցինք Ֆուրյեի շարքի:

Այնուհետև, դիտարկենք հետևյալ կարևոր դեպքը: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան տրված է $[0, l]$ հատվածում: Այդ ֆունկցիայի սահմանումը կամայական ձևով լրացնելով $[-l, 0]$ հատվածում (պահպանելով կտոր առ կտոր մոնոտոնությունը), կարող ենք այդ ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրյեի շարքի: Մասնավորապես, եթե տրված ֆունկցիայի սահմանումը լրացնենք այնպես, որ $-l \leq x < 0$ դեպքում լինի $f(x) = -f(-x)$, արդյունքում ստացվում է զույգ ֆունկցիա (նկ. 385): (Այս դեպքում ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան շարունակված է զույգ կերպով): Այդ ֆունկցիան վերլուծում են Ֆուրյեի շարքի, որը պարունակում է միայն կոսինուսների: Այսպիսով, $[0, l]$ հատվածում տրված $f(x)$ ֆունկցիան վերլուծեցինք ըստ կոսինուսների:

Իսկ եթե $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանումը $l \leq x < 0$ դեպքում շարունակենք այնպես՝ $f(x) = -f(-x)$, ապա կստանանք կենտ ֆունկցիա, որը վերլուծվում է ըստ սինուսների (նկ. 386): ($f(x)$ ֆունկցիան շարունակված է կենտ կերպով): Այսպիսով, եթե $[0, l]$ հատվածում տրված է որոշ $f(x)$ կտոր առ կտոր մոնոտոն ֆունկցիա, ապա այն կարելի է վերլուծել Ֆուրյեի շարքի ինչպես ըստ կոսինուսների, այնպես էլ ըստ սինուսների:



Նկ. 385



Նկ. 386

Օրինակ 1. Դիցուք պահանջվում է $f(x) = x$ ֆունկցիան $[0, \pi]$ հատվածում վերլուծել ըստ սինուսների շարքի:

Լուծում: Այս ֆունկցիան շարունակելով կենս կերպով (Նկ. 375), կըստանանք հետևյալ շարքը.

$$x = 2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right]$$

(տես § 2, օրինակ 1):

Օրինակ 2. $f(x) = x$ ֆունկցիան $[0, \pi]$ հատվածում վերլուծել ըստ կոսինուսների շարքի:

Լուծում: Այս ֆունկցիան շարունակելով զույգ կերպով, կստանանք.

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x \leq \pi$$

(Նկ. 376): Այն վերլուծելով շարքի, կդանենք.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$$

(տես § 2, օրինակ 2): եվ այսպես, $[0, \pi]$ հատվածում տեղի ունի

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$$

հավասարությունը:

§ 7. Տրված ֆունկցիային միջին իմաստով մոտարկումը եռանկյունա- չափական բազմանդամի միջոցով

Ֆունկցիան անվերջ շարքով (Ֆուրյեի, Թեյլորի և այլն) ներկայացնելը գործնականում ունի այն իմաստը, որ շարքը n -րդ անդամում ընդհատելիս ստացված վերջավոր գումարը լինում է վերլուծվող ֆունկցիայի մոտավոր արտահայտությունը. այս մոտավոր արտահայտությունը n -ի բավականաչափ մեծ արժեքի ընտրություն ճանապարհով կարելի է հասցնել ճշտություն ցանկացած աստիճանի: Սակայն մոտավոր ներկայացման բնույթը կարող է լինել տարբեր:

Այսպես, օրինակ, Թեյլորի շարքի առաջին n անդամների S_n գումարը դիտարկվող ֆունկցիայի հետ համընկնում է մեկ կետում և այդ կետում ունի մինչև n -րդ կարգի ածանցյալներ, որոնք համընկնում են դիտարկվող ֆունկցիայի ածանցյալների հետ: Լագրանժի n -րդ աստիճանի բազմանդամը (տես I հատորի VIII գլխի, § 9) դիտարկվող ֆունկցիայի հետ համընկնում է $n+1$ կետերում:

Տեսնենք, թե ինչ բնույթ ունի $i(x)$ պարբերական ֆունկցիայի մոտավոր ներկայացումը

$$S_n(x) = \frac{a_n}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

տեսքի եռանկյունաչափական բազմանդամներով, որտեղ $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ Ֆուրյեի գործակիցներն են, այսինքն՝ Ֆուրյեի շարքի առաջին n անդամների գումարով Նախ կատարենք մի քանի դիտողություններ:

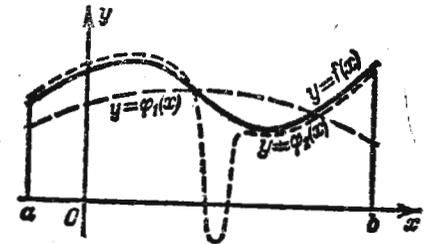
Ենթադրենք, որ $[a, b]$ հատվածում դիտարկում ենք որոշ $y = f(x)$ ֆունկցիա և ցանկանում ենք գնահատել այդ ֆունկցիան մի այլ $\varphi(x)$ ֆունկցիայով փոխարինելիս թույլ տրված սխալանքը: Որպես սխալանքի չափ կարելի է վերցնել, օրինակ, $[a, b]$ հատվածում $\max |f(x) - \varphi(x)|$ -ը, այսինքն՝ $f(x)$ ֆունկցիայից $\varphi(x)$ -ի, այսպես կոչված, ամենամեծ շեղումը: Բայց երբեմն սովորի բնական է որպես սխալանքի չափ վերցնել, այսպես կոչված, ծ միջին քառակուսային շեղումը, որը որոշվում է

$$\delta^2 = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$$

հավասարությամբ:

Նկ. 387-ի վրա պարզաբանենք միջին քառակուսային շեղման և ամենամեծ շեղման դանազանությունը:

Դիցուք հոծ գիծը պատկերում է $y = f(x)$ ֆունկցիան, իսկ կետագծերը պատկերում են $\varphi_1(x)$ և $\varphi_2(x)$ մոտավորությունները: $y = \varphi_1(x)$ կորի ամենամեծ շեղումը փոքր է, քան $y = \varphi_2(x)$ կորինը, բայց առաջին կորի միջին քառակուսային շեղումը մեծ է, քան երկրորդինը, քանի որ $y = \varphi_2(x)$ կորը նկատելիորեն տարբերվում է $y = f(x)$ կորից



Նկ. 387

միայն նեղ տեղամասում և ուստի ավելի լավ է բնութագրում $y = f(x)$ կորին, քան առաջինը:

Այժմ վերադառնանք մեր խնդրին:

Դիցուք արված է 2π պարբերությունն ունեցող $f(x)$ պարբերական ֆունկցիան: Բոլոր

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

ո-րդ կարգի եռանկյունաչափական բազմանդամների մեջ պահանջվում է α_k և β_k գործակիցների ընտրության համապարհով գտնել այն բազմանդամը, որի համար

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right]^2 dx$$

հավասարությամբ որոշվող միջին քառակուսային շեղումն ունի ամենափոքր արժեքը:

Խնդիրը բերվում է $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ $2n+1$ փոփոխականների ֆունկցիայի մինիմումի որոնմանը:

Բացելով ինտեգրալի նշանի տակ եղած քառակուսին, և ինտեգրելով անդամ առ անդամ, կստանանք.

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f^2(x) - 2f(x) \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right] + \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right]^2 \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{\alpha_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx + \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha_0^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \beta_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx + \frac{1}{2\pi} \alpha_0 \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \alpha_0 \sum_{k=1}^n \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ k \neq j}}^n \alpha_k \alpha_j \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ k \neq j}}^n \alpha_k \beta_j \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin jx dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ k \neq j}}^n \beta_k \beta_j \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin jx dx,$$

Նկատենք, որ

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_k,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = b_k$$

$f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն են:

Այնուհետև, § 1-ի (I) և (II) բանաձևերի հիման վրա ունենք. $k=1$ դեպքում՝

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi,$$

ցանկացած k -ի և j -ի դեպքում՝

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos jx dx = 0$$

և $k \neq j$ դեպքում

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin jx dx = 0,$$

Այսպիսով, ստանում ենք.

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{\alpha_0^2}{2} - \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2),$$

Ավելացնելով և հանելով

$$\frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$$

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{4} (\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2], \quad (1)$$

Այս գումարի առաջին երեք գումարելիները կախված չեն $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ գործակիցների ընտրությունից: Մնացած

$$\frac{1}{4} (\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]$$

գումարելիները ոչ բացասական են: Դրանց գումարը ամենափոքր արժեքին (որը հավասար է գրոյի) կհասնի, եթե ընդունենք $\alpha_0 = a_0, \alpha_1 = a_1, \dots, \alpha_n = a_n, \beta_1 = b_1, \dots, \beta_n = b_n, \sigma_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ գործակիցների այսպիսի ընտրություն ղեկավարում:

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

Եռանկյունաչափական բազմանդամը բոլորից քիչ կտարբերվի $f(x)$ ֆունկցիայից այն իմաստով, որ δ_n^2 քառակուսային շեղումը կլինի ամենափոքրը:

Այսպիսով, ապացուցեցինք հետևյալ թեորեմը.

Բոլոր n -րդ կարգի եռանկյունաչափական բազմանդամների մեջ $f(x)$ ֆունկցիայից ամենափոքր միջին քառակուսային շեղումն ունի այն բազմանդամը, որի գործակիցները $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի գործակիցներն են:

Ամենափոքր քառակուսային շեղման մեծությունը հավասար է

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2), \quad (2)$$

Իսկ որ $\delta_n^2 \geq 0$, ապա ցանկացած n -ի դեպքում անենք.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2),$$

Հետևաբար, աջ մասում գտնվող շարքը զուգամ իտում է, երբ $n \rightarrow \infty$, և կարող ենք գրել.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2), \quad (3)$$

Այս անհշտությունը կոչվում է Բեսելի անհավասարություն:

Առանց ապացուցման նշենք, որ ամեն մի սահմանափակ և կտոր առ կտոր մոնոտոն ֆունկցիայի համար տվյալ ֆունկցիան Ֆուրյեի շարքի n -րդ մասնակի գումարով փոխարինելիս ստացված միջին քառակուսային շեղումը ձգտում է գրոյի, երբ $n \rightarrow \infty$, այսինքն՝ $\delta_n^2 \rightarrow 0$, երբ $n \rightarrow \infty$: Բայց այդ դեպքում (2) բանաձևից հետևում է

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (3')$$

հավասարությունը, որը կոչվում է Լյապունով-Պարսելալի հավասարություն: Նկատենք, որ Լյապունով-Պարսելալի հավասարությունը ապացուցված է ավելի լայն դասի ֆունկցիաների համար, քան այն, որը մենք այստեղ քննարկում ենք:

Ապացուցածից հետևում է, որ Լյապունովի հավասարությանը բավարարող ֆունկցիայի (մասնավորապես, ամեն մի սահմանափակ կտոր առ կտոր մոնոտոն ֆունկցիայի) համար Ֆուրյեի համապատասխան շարքը տալիս է միջին քառակուսային շեղում, որը հավասար է գրոյի:

Դիտարկենք նաև: Հստատունք Ֆուրյեի գործակիցների մի հատկություն, որն անհրաժեշտ է հետազոտում: Նախ տանք սահմանումը:

$f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է կտոր առ կտոր անընդհատ $[a, b]$ հատվածում, եթե այդ հատվածում այն ունի վերջավոր թվով առաջին սեռի խզման կետեր (կամ ամենուրեք անընդհատ է):

Ապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան կտոր առ կտոր անընդհատ է $[-\pi, \pi]$ հատվածում, ապա նրա Ֆուրյեի գործակիցները ձգտում են գրոյի, երբ $n \rightarrow \infty$, այսինքն՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \quad (4)$$

Ապացուցում: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան կտոր առ կտոր անընդհատ է $[-\pi, \pi]$ հատվածում, ապա $f^2(x)$ ֆունկցիան նույնպես կտոր

առ կտոր անընդհատ է այդ հատվածում: Այդ դեպքում $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$ -ը գոյություն ունի և վերջավոր թիվ է*: Այս դեպքում (3) բեռնի անհավասարությունից հետևում է, որ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ շարքը զուգամիտում է: Բայց եթե շարքը դուգամիտում է, ապա նրա ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի, այսինքն՝ սվլալ դեպքում $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$: Այստեղից անմիջապես ստացվում են (4) հավասարությունները: Այսպիսով, կտոր առ կտոր անընդհատ և սահմանափակ ֆունկցիայի համար ճիշտ են

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0$$

հավասարությունները:

Եթե $f(x)$ -ը 2π պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է ապա վերջին հավասարությունը կարելի է գրել այսպես (ցանկացած a -ի համար).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0:$$

Նկատենք, որ այս հավասարությունները մնում են ուժի մեջ, եթե ինտեգրալներում վերցնենք ցանկացած $[a, b]$ ինտեգրման միջակայք, այսինքն՝

$$\int_a^b f(x) \cos nx \, dx \quad \text{և} \quad \int_a^b f(x) \sin nx \, dx$$

ինտեգրալները ձգտում են զրոյի n -ը անսահմանափակորեն աճելու դեպքում, եթե $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ և կտոր առ կտոր անընդհատ է:

Իրոք, որոշակիության համար ընդունելով $b - a < 2\pi$, դիտարկենք 2π պարբերություն ունեցող $\varphi(x)$ օժանյակ ֆունկցիան, որը որոշված է հետևյալ կերպ.

* Այս ինտեգրալը կարելի է ներկայացնել որպես անընդհատ ֆունկցիաների որոշյալ ինտեգրալների գումար ըստ այն հատվածների, որոնց տրոհվում է $[-\pi, \pi]$ հատվածը:

$$\varphi(x) = f(x), \quad \text{երբ } a \leq x \leq b,$$

$$\varphi(x) = 0, \quad \text{երբ } b < x \leq a + 2\pi:$$

Այդ դեպքում

$$\int_a^b f(x) \cos nx \, dx = \int_a^{a+2\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx,$$

$$\int_a^b f(x) \sin nx \, dx = \int_a^{a+2\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx:$$

Քանի որ $\varphi(x)$ -ը սահմանափակ և կտոր առ կտոր անընդհատ ֆունկցիա է, ապա աջակողմյան ինտեգրալները ձգտում են զրոյի, երբ $n \rightarrow \infty$: Հետևաբար, զրոյի են ձգտում նաև ձախակողմյան ինտեգրալները: Այսպիսով, պնդումն ապացուցված է, այսինքն՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0 \quad (5)$$

ցանկացած a և b թվերի և $[a, b]$ հատվածում կտոր առ կտոր անընդհատ և սահմանափակ ցանկացած $f(x)$ ֆունկցիայի համար:

§ 8. Դիրիխլեի ինտեգրալը

Այս պարագրաֆում կարտածենք մի բանաձև, որը Ֆուրյեի շարքի n -րդ մասնակի գումարն արտահայտում է մի որոշ ինտեգրալի միջոցով: Այդ բանաձևը մեզ պետք կգա հաջորդ պարագրաֆներում:

Դիտարկենք 2π պարբերությամբ $f(x)$ պարբերական ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքի n -րդ մասնակի գումարը.

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

որտեղ

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt:$$

Այս արտահայտությունները տեղադրելով $s_n(x)$ -ի համար բանաձևի մեջ, կստանանք.

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\cos kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt + \frac{\sin kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \right]$$

կամ, $\cos kx$ -ը և $\sin kx$ -ը տանելով ինտեգրալի նշանի տակ (որը հնարավոր է, քանի որ $\cos kx$ -ը և $\sin kx$ -ը կախված չեն ինտեգրման փոփոխականից, և, հետևաբար, կարող են գիտվել որպես հաստատուններ), կստանանք.

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kx \cos kt dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kx \sin kt dt \right],$$

Այժմ $1/\pi$ -ն դուրս բերելով փակագծից և ինտեգրալների գումարը փոխարինելով գումարի ինտեգրալով, կստանանք.

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{f(t)}{2} + \sum_{k=1}^n [f(t) \cos kx \cos kt + f(t) \sin kx \sin kt] \right\} dt$$

կամ

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt, \quad (1)$$

Ձևափոխելով քառակուսի փակագծերում գտնվող արտահայտությունը:

$$\text{Դիցուք} \quad \sigma_n(z) = \frac{1}{2} + \cos z + \cos 2z + \dots + \cos nz,$$

այս դեպքում

$$\begin{aligned} 2\sigma_n(z) \cos z &= \cos z + 2 \cos z \cos z + 2 \cos^2 z \cos 2z + \dots + 2 \cos z \cos nz = \\ &= \cos z + (1 + \cos 2z) + (\cos z + \cos 3z) + (\cos 2z + \cos 4z) + \dots \\ &\dots + [\cos(n-1)z + \cos(n+1)z] = 1 + 2 \cos z + 2 \cos 2z + \dots \\ &\dots + 2 \cos(n-1)z + \cos nz + \cos(n+1)z \end{aligned}$$

կամ

$$2\sigma_n(z) \cos z = 2\sigma_n(z) - \cos nz + \cos(n+1)z,$$

$$\sigma_n(z) = \frac{\cos nz - \cos(n+1)z}{2(1 - \cos z)}$$

Բայց

$$\cos nz - \cos(n+1)z = 2 \sin(2n+1) \frac{z}{2} \sin \frac{z}{2},$$

$$1 - \cos z = 2 \sin^2 \frac{z}{2},$$

Հետևաբար,

$$\sigma_n(z) = \frac{\sin(2n+1) \frac{z}{2}}{2 \sin \frac{z}{2}},$$

Այսպիսով, (1) հավասարությունը կարելի է գրել այսպես.

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt,$$

Քանի որ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան պարբերական է (2π պարբերությամբ), ապա ինտեգրալը պահպանում է իր արժեքը 2π երկարություն ունեցող ցանկացած ինտեգրման հատվածի վրա: Ուշտի կարող ենք գրել.

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt,$$

Մտնենք α նոր փոփոխականը, ընդունելով $t-x=\alpha$, $t=x+\alpha$: Այս դեպքում կստանանք հետևյալ բանաձևը.

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha) \frac{\sin(2n+1) \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha, \quad (2)$$

Բանաձևի աջ մասի ինտեգրալը կոչվում է Գիլբիխի ինտեգրալ:

Այդ բանաձևում ընդունենք $f(x) \equiv 1$, այդ դեպքում $a_0=2$, $b_k=0$, $a_k=0$, երբ $k>0$. հետևաբար, $s_n(x) \equiv 1$ ցանկացած n -ի համար, և ստանում ենք.

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2n+1) \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha \quad (3)$$

Նույնությունը, որը մեզ պետք կգա հետագայում:

§ 9. Ֆուրյեի շարքի գուգամիտությունը տրված կետում

Ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[-\pi, \pi]$ հատվածում կտոր առ կտոր անընդհատ է:

Նախորդ § 8-ի (3) նույնությունն երկու մասերը բազմապատկելով $f(x)$ -ով և $f(x)$ -ը տանելով ինտեգրալի նշանի տակ, կստանանք հետևյալ հավասարությունը.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha.$$

Վերջին հավասարության անդամները հանենք § 8-ի (2) հավասարության համապատասխան անդամներից. կստանանք.

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha.$$

Այսպիսով, Ֆուրյեի շարքի գուգամիտումը տվյալ կետում $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքին կախված է նրանից, թե աչ մասի ինտեգրալը կձգդատի արդյոք զրոյի, երբ $n \rightarrow \infty$:

Վերջին ինտեգրալը տրոհենք երկու ինտեգրալների

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha d\alpha + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \cos n\alpha d\alpha,$$

օգտվելով նրանից, որ $\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2} = \sin n\alpha \cos \frac{\alpha}{2} + \cos n\alpha \sin \frac{\alpha}{2}$,

Վերջին հավասարության աչ մասի առաջին ինտեգրալը տրոհենք երեք ինտեգրալների.

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{1}{2} \cos n\alpha d\alpha,$$

Ընդունենք $\Phi_1(\alpha) = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{2}$, Քանի որ $f(x)$ -ը սահմանափակ կը-

տոր առ կտոր անընդհատ ֆունկցիա է, ապա $\Phi_1(\alpha)$ -ն նույնպես սահմանափակ կտոր առ կտոր անընդհատ, α -ի պարբերական ֆունկցիա է: Հետևաբար, վերջին ինտեգրալը ձգտում է զրոյի, երբ $n \rightarrow \infty$, քանի որ այն տվյալ ֆունկցիայի Ֆուրյեի գործակիցն է: Հետևյալ ֆունկցիան՝

$$\Phi_2(\alpha) = [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

սահմանափակ է, երբ $-\pi \leq \alpha < -\delta$ և երբ $\delta \leq \alpha \leq \pi$ և

$$|\Phi_2(\alpha)| \leq [M+M] \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}}$$

որտեղ M -ը $|f(x)|$ մեծությունն զերին եզրն է: Բացի այդ, $\Phi_2(\alpha)$ ֆունկցիան նաև կտոր առ կտոր անընդհատ է: Հետևաբար, § 7-ի (5) բանաձևերի հիման վրա երկրորդ ինտեգրալները ձգտում են զրոյի, երբ $n \rightarrow \infty$:

Այսպիսով, կարելի է գրել.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s_n(x) - f(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha d\alpha. \quad (1)$$

Աջակողմյան արտահայտության մեջ ինտեգրումը կատարվում է ըստ $-\delta \leq \alpha \leq \delta$ միջակայքի. հետևաբար, ինտեգրալը $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքներից կախված է միայն $x - \delta$ -ից մինչև $x + \delta$ միջակայքում: Այսպիսով, վերջին հավասարությունից հետևում է կարևոր առաջադրություն. Ֆուրյեի շարքերի գուգամիտությունը ավյալ x կետում կախված է միայն այդ կետի որքան կամենանք փոքր շրջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի վարքից:

Սրանում է կախում Ֆուրյեի շարքերի ուսումնասիրության ժամանակ, այսպես կոչված, տեղայնացման (լոկալիզացիա) սկզբունքը: Եթե $f_1(x)$ և $f_2(x)$ երկու ֆունկցիաները համընկնում են որոշ x կետի շրջակայքում, ապա նրանց Ֆուրյեի շարքերը ավյալ կետում միաժամանակ կա՛մ գուգամիտում են, կա՛մ տարամիտում:

§ 10. Ֆուրյեի շարքի գուգամիտության մի քանի բավարար պայմաններ

Նախորդ պարագրաֆում ցույց տրվեց, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[-\pi, \pi]$ հատվածում կտոր առ կտոր անընդհատ է, ապա տրված x_0 կետում շարքի գուգամիտությունը $f(x_0)$ արժեքին կախված է x_0 կետում կենտրոն ունեցող որևէ կամայական փոքր $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ շրջակայքում ֆունկցիայի վարքից:

Այնուհետև ապացուցենք, որ եթե x_0 -ի շրջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ գոյություն ունեն

$$\lim_{\alpha \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha} = k_1, \quad (1)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha} = k_2 \quad (2)$$

վերջավոր սահմանները, իսկ x_0 կետում ֆունկցիան անընդհատ է (նկ. 388), ապա* այդ կետում Ֆուրյեի շարքը գուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիայի համապատասխան արժեքին:

* Եթե տեղի ունեն (1) և (2) պայմանները, ապա առում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան x կետում ունի ածանցյալ աջից և ածանցյալ ձախից: Նկ. 388-ում պատկերված է ֆունկցիա, որտեղ $k_1 = \text{tg} \varphi_1$, $k_2 = \text{tg} \varphi_2$, $k_1 \neq k_2$: Եթե $k_1 = k_2$, այսինքն՝ եթե ածանցյալներն աջից և ձախից հավասար են, ապա տրված կետում ֆունկցիան կլինի դիֆերենցելի:

Ապացուցում: Դիտարկենք նախորդ պարագրաֆում սահմանած $\Phi_2(\alpha)$ ֆունկցիան.

$$\Phi_2(\alpha) = [f(x_0 + \alpha) - f(x_0)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան կտոր առ կտոր անընդհատ է $[-\pi, \pi]$ հատվածում և անընդհատ է x_0 կետում, ապա այն անընդհատ է x_0 կետի որոշ $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ շրջակայքում: Ուստի $\Phi_2(\alpha)$ ֆունկցիան անընդհատ է այն բոլոր կետերում, որտեղ $\alpha \neq 0$ և $|\alpha| \leq \delta$: $\alpha = 0$ դեպքում $\Phi_2(\alpha)$ ֆունկցիան որոշված չէ:

Գտնենք $\lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \Phi_2(\alpha)$ և $\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \Phi_2(\alpha)$ սահմանները, օգտագործելով (1) և (2) պայմանները.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \Phi_2(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} [f(x_0 + \alpha) - f(x_0)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} =$$

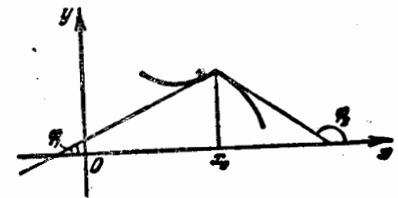
$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha} \frac{\frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha} \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \cos \frac{\alpha}{2} = k_1 \cdot 1 \cdot 1 = k_1$$

Այսպիսով, եթե նախորոշենք $\Phi_2(\alpha)$ ֆունկցիան, ընդունելով $\Phi_2(0) = k_1$, ապա այն անընդհատ կլինի $[-\delta, 0]$ հատվածում, հետևաբար, նաև սահմանափակ: Նման ձևով ցույց կտանք, որ

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \Phi_2(\alpha) = k_2$$

Հետևաբար, $\Phi_2(\alpha)$ ֆունկցիան սահմանափակ և անընդհատ է $[0, \delta]$ միջակայքում: Այսպիսով, $[-\delta, \delta]$ հատվածում $\Phi_2(\alpha)$ ֆունկցիան սահմանափակ և կտոր առ կտոր անընդհատ է: Այժմ վերադառնանք § 9-ի (1) հավասարությանը (նշանակելով $x - \epsilon$ x_0 -ով).



նկ. 388

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(x_0) - f(x_0)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x_0 + \alpha) - f(x_0)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha$$

կամ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(x_0) - f(x_0)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_2(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha.$$

§ 7-ի (5) բանաձևերի հիման վրա եզրակացնում ենք, որ աջ կողմում գտնվող սահմանը հավասար է զրոյի, աստի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(x_0) - f(x_0)] = 0$$

կամ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = f(x_0).$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Ապացուցած թեորեմը § 1-ում ձևակերպած թեորեմից տարբերվում է նրանով, որ եթե այնտեղ x_0 կետում Ֆուրյեի շարքի՝ $f(x_0)$ արժեքին զուգամիտելու համար պահանջվում էր, որպեսզի $[-\pi, \pi]$ հատվածում x_0 կետը անընդհատությամբ կետ լիներ, իսկ ֆունկցիան լիներ կտոր առ կտոր մոնոտոն, ապա այստեղ պահանջվում է, որ x_0 կետում ֆունկցիան լինի անընդհատությամբ կետ և որ տեղի ունենան (1) և (2) պայմանները, իսկ ամբողջ $[-\pi, \pi]$ միջակայքում ֆունկցիան լինի կտոր առ կտոր անընդհատ և սահմանափակ: Ակնհայտ է, որ այս պայմանները տարբեր են:

Դիտողություն 1: Եթե կտոր առ կտոր անընդհատ ֆունկցիան զիֆերենցելի է x_0 կետում, ապա ակնհայտ է, որ (1) և (2) պայմանները տեղի ունեն: Այդ դեպքում $k_1 = k_2$: Հետևաբար, այն կետերում, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան զիֆերենցելի է, Ֆուրյեի շարքը զուգամիտում է համապատասխան կետում ֆունկցիայի արժեքին:

Դիտողություն 2: 1°. § 2-ի օրինակ 2-ում քննարկված ֆունկցիան (նկ. 376) 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, ... կետերում բավարարում է (1) և (2) պայմաններին: Մյուս բոլոր կետերում այն զիֆերենցելի է: Հետևաբար, նրա համար կառուցած Ֆուրյեի շարքն անընդհատ կետում զուգամիտում է համապատասխան կետում ֆունկցիայի արժեքին:

2°. § 2-ի օրինակ 4-ում (նկ. 379) քննարկված ֆունկցիան $\pm \pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$ կետերում բավարարում է (1) և (2) պայմաններին: Մնացած բոլոր կետերում այն զիֆերենցելի է: Այդ ֆունկցիան Ֆուրյեի շարքով ներկայացվում է յուրաքանչյուր կետում:

3°. § 2-ի օրինակ 1-ում քննարկված ֆունկցիան (նկ. 375) $\pm \pi$,

$\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$ կետերում խզվող է: Մյուս բոլոր կետերում այն զիֆերենցելի է: Հետևաբար, խզման կետերից բացի, մյուս բոլոր կետերում նրան համապատասխանող Ֆուրյեի շարքը զուգամիտում է համապատասխան կետերում ֆունկցիայի արժեքներին: Խզման կետերում Ֆուրյեի շարքի գումարը հավասար է ֆունկցիայի աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանների միջին թվաբանականին, որը սովորաբար դեպքում հավասար է զրոյի:

§ 11. Գործնական հարմոնիկ անալիզ

Ֆունկցիաների՝ Ֆուրյեի շարքերի վերլուծելու տեսությունը կոչվում է ճարմոնիկ անալիզ: Այժմ Ֆուրյեի շարքի գործակիցների մոտավոր հաշվման վերաբերյալ, այսինքն՝ գործնական հարմոնիկ անալիզի վերաբերյալ կատարենք մի քանի դիտողություններ:

Ինչպես հայտնի է, 2π պարբերությունն ունեցող $f(x)$ ֆունկցիայի համար Ֆուրյեի գործակիցները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Գործնականում հանդիպող շատ դեպքերում $f(x)$ ֆունկցիան տրվում է կա՛մ աղյուսակի տեսքով (երբ ֆունկցիոնալ կախումը ստացվում է էքսպերիմենտի տվյալներից), կա՛մ կորի տեսքով, որը գծվում է ինչ-որ գործիքով: Այս դեպքերում Ֆուրյեի գործակիցները հաշվվում են ինտեգրման մոտավոր մեթոդներով (տես I հատ. XI գլխի § 8):

Դիտարկելու ենք 2π երկարությամբ $-\pi \leq x \leq \pi$ միջակայքը: Դրան միշտ կարելի է հասնել ըստ Ox առանցքի համապատասխան մասշտաբի ընտրությամբ:

$$[-\pi, \pi] \text{ միջակայքը} \\ -\pi = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = \pi$$

կետերով բաժանենք Π հավասար մասերի: Այդ դեպքում բաժանման քալը՝

$$\Delta x = \frac{2\pi}{n},$$

$f(x)$ ֆունկցիայի արժեքները $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ կետերում նշանակենք, համապատասխանաբար,

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$$

Այս արժեքները որոշում ենք կա՛մ ըստ աղյուսակի, կա՛մ էլ ըստ

տվյալ ֆունկցիայի գրաֆիկի՝ համապատասխան օրգինատների չափումով:

Այդ դեպքում, օգտվելով, օրինակ, տղղանկյունների բանաձևից (տես I հատ. XI գլխի § 8-ի (1^o) բանաձևը) որոշում ենք Ֆուրյեի գործակիցները.

$$a_0 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cos kx_i, \quad b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sin kx_i;$$

Մշակված են սխեմաներ, որոնք պարզեցնում են Ֆուրյեի գործակիցների հաշվումը (տես, օրինակ, В. И. Смирнов „Курс высшей математики, Т. II; А. М. Лопшиц „Шаблоны для гармонического анализа“): Այստեղ չենք կարող կանգ առնել մանրամասնությունների վրա, բայց նշենք, որ կան գործիքներ (այսպես կոչվող հարմոնիկ անալիզատորներ), որոնք թույլ են տալիս ըստ տվյալ ֆունկցիայի գրաֆիկի հաշվել Ֆուրյեի գործակիցների մոտավոր արժեքները:

§ 12. Ֆուրյեի շարքը կոմպլեքս տեսքով

Դիցուք ունենք 2π պարբերություն ունեցող $f(x)$ պարբերական ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը՝

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx; \quad (1)$$

$\cos nx$ -ը և $\sin nx$ -ը արտահայտենք ցուցչային ֆունկցիաների միջոցով: Դրա համար օգտվենք հայտնի բանաձևերից (տես I հատ. VIII գլխի § 5-ի (3) բանաձևերը).

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i};$$

Այսպես, ուրեմն

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = -i \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2};$$

$\cos nx$ -ի և $\sin nx$ -ի այս արժեքները տեղադրում ենք (1) բանաձևի մեջ և կատարում համապատասխան ձևափոխություններ.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

Մտցնենք հետևյալ նշանակումները.

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n, \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}; \quad (3)$$

Այս նշանակումների դեպքում (2) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx});$$

Վերջին հավասարությունը գրում են ավելի կոմպակտ՝

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}; \quad (4)$$

Սա էլ հենց Ֆուրյեի շարքի կոմպլեքս տեսքն է:

c_n և c_{-n} գործակիցներն արտահայտենք ինտեգրալների միջոցով: Օգտվելով § 1-ի (4), (5) և (6) բանաձևերից, (3) բանաձևերը կարող ենք գրել այսպես.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx - i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx, \end{aligned}$$

Եվ այսպես,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx; \quad (5')$$

Նման ձևով

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \, dx; \quad (5'')$$

(5') և (5'') բանաձևերը և c_0 -ի արտահայտությունը կարելի է միացնել

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \, dx \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (6)$$

մեկ բանաձևի մեջ: c_n և c_{-n} կոչվում են $f(x)$ ֆունկցիայի ճամար Ֆուրյեի կոմպլեքս գործակիցներ:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $2l$ պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է, ապա $f(x)$ -ի համար Ֆուրյեի շարքը կլինի.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (7)$$

(տես § 5-ի (3) բանաձևը):

Ակնհայտ է, որ այս դեպքում կոմպլեքս տեսքով Ֆուրյեի շարքը (4) բանաձևի փոխարեն կարտահայտվի

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{l} x} \quad (8)$$

բանաձևով: Շարքի c_n գործակիցները կարտահայտվեն հետևյալ բանաձևերով.

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (9)$$

Ընդունված է (հատկապես էլեկտրատեխնիկայում և ռադիոտեխնիկայում) հետևյալ տերմինոլոգիան: $e^{i \frac{n\pi}{l} x}$ արտահայտությունները կոչվում են հարմոնիկներ, $a_n = \frac{n\pi}{l}$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) թվերը կոչվում են

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \alpha_n x} \quad (10)$$

Ֆունկցիայի ալիքային թվեր:

Ալիքային թվերի բազմությունը կոչվում է սպեկտր: Եթե այդ թվերը տեղադրենք թվային առանցքի վրա, ապա կստանանք առանձին կետերի բազմություն: Այդպիսի կետերի բազմությունը անվանում են դիսկրետ, իսկ համապատասխան սպեկտրը՝ դիսկրետ սպեկտր: (9) բանաձևերով որոշվող c_n գործակիցներն անվանում են կոմպլեքս ամպլիտուդ: Նշենք, որ էլեկտրատեխնիկայի և ռադիոտեխնիկայի մի շարք աշխատություններում $|c_n|$ ամպլիտուդների մոդուլների բազմությունը նույնպես անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի սպեկտր:

§ 13. Ֆուրյեի ինտեգրալը

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(-\infty, \infty)$ անվերջ միջակայքում, որտեղ նաև բացարձակ ինտեգրելի է, այսինքն՝ դոյուլյուն ունի

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) |dx| = Q \quad (1)$$

Ինտեգրալը:

Այնուհետև, դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ այն ցանկացած $(-l, +l)$ միջակայքում վերլուծվում է Ֆուրյեի շարքի.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (2)$$

որտեղ

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt, \quad (3)$$

a_k և b_k գործակիցների արժեքները (3) բանաձևերից տեղադրելով (2) շարքի մեջ, կարելի է գրել.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi}{l} t dt \right) \cos \frac{k\pi}{l} x + \\ &+ \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi}{l} t dt \right) \sin \frac{k\pi}{l} x = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \left[\cos \frac{k\pi}{l} t \cos \frac{k\pi}{l} x + \sin \frac{k\pi}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x \right] dt \end{aligned}$$

կամ

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi(t-x)}{l} dt, \quad (4)$$

Ուսումնասիրենք այն հարցը, թե ինչպիսի տեսք կընդունի (4) վերլուծությունը սահմանին անցնելիս, երբ $l \rightarrow \infty$:

Մտցնենք հետևյալ նշանակումները.

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \dots \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \dots \quad \Delta \alpha_k = \frac{\pi}{l}, \quad (5)$$

Տեղադրելով (4)-ի մեջ, ստանում ենք.

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_k(t-x) dt \right) \Delta \alpha_k, \quad (6)$$

$l \rightarrow \infty$ դեպքում աջ մասի առաջին անդամը ձգտում է զրոյի: Իրոք,

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt < \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{2l} Q \rightarrow 0,$$

Յանկացած ֆիքսած l -ի դեպքում փակագծերի ներսի արտահայտությունը αx -ի ֆունկցիա է (տես (5) բանաձևը), որն արժեքներ է ընդունում $\frac{\pi}{l}$ -ից մինչև ∞ Առանց ապացուցման նշենք, որ եթե

$f(x)$ ֆունկցիան կոոր առ կոոր մոնոտոն է յուրաքանչյուր վերջավոր, միջակալքում, սահմանափակ է անվերջ միջակալքում և բավարարում է (1) պայմանին, ապա $l \rightarrow +\infty$ դեպքում (6) բանաձևն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha, \quad (7)$$

Այս կողմում գտնվող արտահայտությունը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի ինտեգրալ (7) հավասարությունը տեղի ունի բոլոր այդ կետերում, որտեղ ֆունկցիան անընդհատ է: Խզման կետերում տեղի ունի

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (7')$$

հավասարությունը:

Ձևափոխենք (7) հավասարության աջ մասի ինտեգրալը, բացելով $\cos \alpha(t-x)$ -ը.

$$\cos \alpha(t-x) = \cos \alpha t \cos \alpha x + \sin \alpha t \sin \alpha x$$

Այս արտահայտությունը տեղադրելով (7) բանաձևի մեջ և $\cos \alpha x$ -ն ու $\sin \alpha x$ -ը դուրս բերելով այն ինտեգրալների նշաններից, որտեղ ինտեգրումը կատարվում է ըստ t փոփոխականի, կստանանք.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right) \sin \alpha x d\alpha, \quad (8)$$

Փակագծերում գտնվող ըստ t -ի ինտեգրալներից յուրաքանչյուրը գոյություն ունի, քանի որ $f(t)$ ֆունկցիան $(-\infty, \infty)$ միջակալքում բացարձակ ինտեգրելի է և, հետևարար, բացարձակ ինտեգրելի են նաև $f(t) \cos \alpha t$ ու $f(t) \sin \alpha t$ ֆունկցիաները:

Քննարկենք (8) բանաձևի մասնավոր դեպքերը:

1. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան զույգ է: Այս դեպքում $f(t) \cos \alpha t$ ֆունկցիան զույգ է, իսկ $f(t) \sin \alpha t$ -ն՝ կենտ և ստանում ենք.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt = 0,$$

Այս դեպքում (8) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x d\alpha, \quad (9)$$

2. Դիցուք $f(x)$ -ը կենտ է: Քննարկելով (8) բանաձևի ինտեգրալների բնույթը այս դեպքում, կստանանք.

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right) \sin \alpha x d\alpha, \quad (10)$$

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է միայն $(0, \infty)$ միջակալքում, ապա $x > 0$ դեպքում այն կարելի է ներկայացնել ինչպես (9) բանաձևով, այնպես էլ (10) բանաձևով: Առաջին դեպքում մենք այն լրացնում ենք՝ շարունակելով զույգ կերպով, իսկ երկրորդում՝ կենտ կերպով:

Մի անգամ էլ նշենք, որ խզման կետերում (9) և (10) հավասարությունների ձախ մասերում $f(x)$ -ի արտահայտության փոխարեն պետք է գրել

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

արտահայտությունը:

Վերադառնանք (8) բանաձևին: Փակագծերում գտնվող ինտեգրալները α -ի ֆունկցիաներ են: Մտցնենք հետևյալ նշանակումները.

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt, \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt,$$

Այդ դեպքում (8) բանաձևը կարելի է գրել այսպես.

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha, \quad (11)$$

Ասում են, որ (11) բանաձևը տալիս է $f(x)$ ֆունկցիայի վերլուծությունը 0 -ից մինչև անընդհատորեն փոփոխվող α հաճախությամբ հարմարիկների: Ամպլիտուդների և սկզբնական փուլերի բաշխման

օրինքը՝ կախված α հաճախությունից արտահայտվում է $A(\alpha)$ և $E(\alpha)$ ֆունկցիաների միջոցով:

Վերադառնանք (9) բանաձևին: Ընդունենք

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt, \quad (12)$$

այս դեպքում (9) բանաձևն ընդունում է

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x d\alpha \quad (13)$$

տեսքը: $F(\alpha)$ ֆունկցիան կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի համար Ֆուրյեի կոսինուս-ձևափոխություն:

Եթե (12) հավասարության մեջ $F(\alpha)$ -ն համարենք տրված, իսկ $f(t)$ -ն՝ որոնելի ֆունկցիա, ապա այն հանդիսանում է $f(t)$ ֆունկցիայի համար ինտեգրալային հավասարում: (13) բանաձևը տալիս է այդ հավասարման լուծումը:

(10) բանաձևի հիման վրա կարող ենք գրել հետևյալ հավասարությունները.

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt, \quad (14)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) \sin \alpha x d\alpha, \quad (15)$$

$\Phi(\alpha)$ ֆունկցիան կոչվում է Ֆուրյեի սինուս-ձևափոխություն:

Օրինակ: Դիցուք

$$f(x) = e^{-\beta x} \quad (\beta > 0, x \geq 0),$$

Ըստ (12) բանաձևի որոշում ենք Ֆուրյեի կոսինուս-ձևափոխությունը.

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos \alpha t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2},$$

Ըստ (14) բանաձևի որոշում ենք Ֆուրյեի սինուս-ձևափոխությունը.

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \sin \alpha t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\beta^2 + \alpha^2},$$

Ըստ (13) և (15) բանաձևերի գտնու ենք հետևյալ փոխադարձ առնչությունները.

$$\frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha = e^{-\beta x} \quad (x \geq 0),$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha = e^{-\beta x} \quad (x > 0),$$

§ 14. Ֆուրյեի ինտեգրալը կոմպլեքս տեսքով

Ֆուրյեի ինտեգրալում (§ 12-ի (?) բանաձև) փակագծերում գրտնըվում է α -ի գույգ ֆունկցիա, հետևաբար, այն որոշված է և α -ի բացասական արժեքների համար: Ասվածի հիման վրա (?) բանաձևը կարելի է գրել այսպես.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha, \quad (1)$$

Այնուհետև դիտարկենք նույնաբար գրույի հավասար հետևյալ արտահայտությունը.

$$\int_{-M}^M \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha(t-x) dt \right) d\alpha = 0,$$

Չախ կողմում գտնվող արտահայտությունը նույնաբար հավասար է զրոյի այն բանի համար, որ փակագծերում գտնվող α -ի ֆունկցիան կենտ ֆունկցիա է, իսկ կենտ ֆունկցիայի ինտեգրալը $-M$ -ից մինչև $+M$ սահմաններում հավասար է զրոյի: Ակնհայտ է, որ

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha(t-x) dt \right) d\alpha = 0$$

կամ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha(t-x) dt \right) d\alpha = 0, \quad (2)$$

Դիտողություն: Այստեղ անհրաժեշտ է նշել հետևյալ հան-

զամանքը: Անվերջ սահմաններով գումարած ինտեգրալը սահմանվում է այսպես.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^c \varphi(x) dx + \int_c^{\infty} \varphi(x) dx = \\ = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^c \varphi(x) dx + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_c^M \varphi(x) dx \quad (*)$$

պայմանով, որ աջ մասի յուրաքանչյուր սահմանը գոյություն ունի (տես I հատ. XI գլխի § 7): Իսկ մենք (2) հավասարությունում գրել ենք այսպես.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \varphi(x) dx \quad (**)$$

Ակնհայտ է, որ կարող է պատահել, որ (***) սահմանը գոյություն ունի իսկ (*) հավասարության աջ մասում գտնվող սահմանները գոյություն չունեն: (***) հավասարության աջ մասի արտահայտությունը կոչվում է ինտեգրալի գլխավոր արժեք: Եվ այսպես, (1) հավասարությունում դիտարկվում է անիսկական (ներքին) ինտեգրալի գլխավոր արժեքը: Այս իմաստով էլ գրվելու են սույն պարագրաֆի հաջորդ ինտեգրալները:

(2) հավասարությունն անդամները բաղմապատկենք $-\frac{i}{2\pi}$ -ով

և գումարենք (1) հավասարության համապատասխան մասերի հետ այդ դեպքում կստանանք.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \alpha(t-x) - i \sin \alpha(t-x)) dt \right] d\alpha$$

կամ

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt \right] d\alpha \quad (3)$$

(3) բանաձևի աջ մասը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի համար կոմպլեքս տեսքով Ֆուրյեի ինտեգրալ:

(3) բանաձևը գրենք այսպես.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \right] e^{i\alpha x} d\alpha \quad (4)$$

կամ համառոտ՝

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (5)$$

որտեղ

$$C(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \quad (6)$$

(5) բանաձևը նման է § 12-ի (10) բանաձևին. այստեղ էլ x -ն կոչվում է ալիքային թիվ, բայց այստեղ այն ընդունում է $-\infty$ -ից մինչև $+\infty$ քունք արժեքները, և ալիքային թվերի սպեկտրը կոչվում է անընդհատ սպեկտր: (5) բանաձևի և § 12-ի (10) բանաձևի անալոգիան կարելի է շարունակել: Եթե § 12-ի (10) բանաձևում α_n ալիքային թվին համապատասխանում է C_n կոմպլեքս ամպլիտուդը, ապա ստում են, որ (5) բանաձևում $(\alpha_1, \alpha_1 + \Delta\alpha)$ միջակայքում պարբերական ալիքային թվին համապատասխանում է $C(\alpha_1)$ կոմպլեքս ամպլիտուդը:

$C(\alpha)$ ֆունկցիան անվանում են սպեկտրալ խտություն կամ սպեկտրալ ֆունկցիա: (Այստեղ խտություն տերմինն օգտագործվում է նույն իմաստով, ինչպես XIV գլխի § 8-ում, որտեղ խոսվում էր երկչափանի տիրույթում խտության բաշխման մասին):

(4) հավասարությունն արտադրում են հետևյալ երկու հավասարությունների սեքսքով.

$$F^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (8)$$

(7) բանաձևով որոշվող $F^*(\alpha)$ ֆունկցիան կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի համար Ֆուրյեի ձևափոխություն: (8) բանաձևով որոշվող $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է $F^*(\alpha)$ ֆունկցիայի համար Ֆուրյեի հակադարձ ձևափոխություն (ձևափոխությունները տարբերվում են i -ի առաջ զրկող նշանով): $F^*(\alpha)$ ֆունկցիան $C(\alpha)$ ֆունկցիայից տարբերվում է $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ հաստատուն բաղմապատկիչով:

(7) և (8) ձևափոխություններից հետևում են § 13-ի (12), (14),

(13) և (15) ձևափոխությունները $\left(\frac{1}{2}\right)$ հաստատուն բաղադրատարրերի $\left(\frac{1}{2}\right)$ ճշտությունները): (12) և (14) ձևափոխությունները կատարվեն, եթե (7)-ի մեջ տեղադրենք

$$e^{-iat} = \cos at - i \sin at, \quad F^*(\alpha) = F(\alpha) - i\Phi(\alpha)$$

և հավասարեցվեն իրական և կեղծ մասերը: Նման ձևով (8) ձևափոխություններից ստացվում են (13) և (15) ձևափոխությունները:

Նշենք, որ Ֆուրյեի ձևափոխություններին համանման ձևափոխություններից օգտվելու ենք IX գլխում՝ «Օպերացիոն հաշիվը և նյա մի քանի կիրառությունները»:

15. Ֆուրյեի շարքն ըստ ֆունկցիաների օրթոգոնալ համակարգի

Սահմանում 1:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (1)$$

ֆունկցիաների անվերջ համակարգը կոչվում է օրթոգոնալ $[a, b]$ հատվածում, եթե ցանկացած $n \neq k$ դեպքում տեղի ունի

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad (2)$$

հավասարությունը:

Ընդ որում ենթադրվում է, որ

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx \neq 0:$$

Օրինակ 1:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (3)$$

ֆունկցիաների համակարգը օրթոգոնալ է $[-\pi, \pi]$ հատվածում: Պահանջներ են $\S 1$ -ի (I) և (II) հավասարություններից:

Օրինակ 2:

$$1, \cos \frac{\pi}{l} x, \sin \frac{\pi}{l} x, \cos 2 \frac{\pi}{l} x, \sin 2 \frac{\pi}{l} x, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots \quad (3')$$

ֆունկցիաների համակարգը օրթոգոնալ է $[-l, l]$ հատվածում, զրանում հեշտ է համոզվել անմիջական ստուգումով:

Օրինակ 3:

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \cos nx, \dots \quad (4)$$

ֆունկցիաների համակարգը օրթոգոնալ է $[0, \pi]$ հատվածում:

Օրինակ 4:

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \quad (5)$$

ֆունկցիաների համակարգը օրթոգոնալ է $[0, \pi]$ հատվածում:

Ստորև ցույց են տրվելու ֆունկցիաների ուրիշ օրթոգոնալ համակարգեր:

Դիցուք $[a, b]$ հատվածում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ այն ըստ (1) օրթոգոնալ համակարգի ֆունկցիաների ներկայացվում է շարքով, որը $[a, b]$ -ում զուգամիտում է տվյալ ֆունկցիային.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x), \quad (6)$$

Որոշենք C_n գործակիցները: Ենթադրենք, որ (6) շարքը ցանկացած $\varphi_k(x)$ ֆունկցիայով բազմապատկելուց հետո ստացված շարքը թույլ է տալիս անդամ առ անդամ ինտեգրում:

(6) հավասարության երկու մասերը բազմապատկենք $\varphi_k(x)$ -ով և ինտեգրենք a -ից մինչև b սահմաններում: Հաշվի առնելով (2) հավասարությունը, կստանանք.

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = C_k \int_a^b \varphi_k^2(x) dx,$$

որտեղից

$$C_k = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x) dx} \quad (7)$$

(7) բանաձևերով հաշվվող C_k գործակիցները կոչվում են $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի գործակիցներ ըստ (1) ֆունկցիաների օրթոգոնալ համակարգի: (6) շարքը կոչվում է Ֆուրյեի շարք ըստ (1) ֆունկցիաների համակարգի:

Սահմանում 2:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

ֆունկցիաների օրթոգոնալ համակարգի կոչվում է լրիվ, եթե ցանկացած քառալուսով ինտեգրելի $f(x)$ ֆունկցիայի համար, այսինքն՝ այնպիսին, որ

$$\int_a^b f^2(x) dx < \infty,$$

տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x) \right]^2 dx = 0, \quad (8)$$

§ 7-ի սահմանումների համաձայն (8) հավասարությունը կարելի է մեկնաբանել նաև այսպես: $\sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x)$ գումարի՝ $f(x)$ ֆունկցիայից անհրաժեշտ միջին քառակուսային շեղումը ձգտում է զրոյի, երբ $n \rightarrow \infty$:

Եթե տեղի ունի (8) հավասարությունը, ապա ասում են, որ (8) Ֆուրյեի շարքը միջին իմաստով զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային: Ակնհայտ է, որ միջին իմաստով զուգամիտությունից չի հետևում [a, b] հատվածի յուրաքանչյուր կետում զուգամիտությունը:

Առանց ապացուցման նշենք, որ 1-4 օրինակներում նշված հոանկյունաչափական համակարգերը լրիվ են համապատասխան հատվածներում:

Կիրառություններում լայնորեն օգտագործվում է Բեսելի ֆունկցիաների համակարգը,

$$J_n(\lambda_1 x), J_n(\lambda_2 x), \dots, J_n(\lambda_j x), \dots, \quad (9)$$

որոնք քննարկվել են XVI գլխի § 23-ում: Այստեղ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots$ Բեսելի ֆունկցիայի արմատներն են, այսինքն՝

$$J_n(\lambda_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots).$$

առնչությունը բավարարող թվերն են:

Առանց ապացուցման նշենք, որ

$$\sqrt{x} J_n(\lambda_1 x), \sqrt{x} J_n(\lambda_2 x), \dots, \sqrt{x} J_n(\lambda_j x), \dots \quad (10)$$

ֆունկցիաների համակարգն օրթոգոնալ է [0, 1] հատվածում.

$$\int_0^1 x J_n(\lambda_k x) J_n(\lambda_j x) dx = 0^* \quad (k \neq j), \quad (11)$$

Կիրառություններում օգտագործվում են նաև Լեժանդրի օրթո-

* Եթե $\varphi_k(x), \varphi_j(x)$ ֆունկցիաների համար տեղի ունի

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = 0 \quad (j \neq k)$$

առնչությունը, ապա ասում են, որ $\varphi_i(x)$ ֆունկցիաները օրթոգոնալ են $f(x)$ կշռով: Հետևաբար, $J_n(\lambda_i x)$ ֆունկցիաները (երբ $k \neq j$) օրթոգոնալ են x կշռով:

գոնալ բազմանդամների համակարգերը, որոնք սահմանվում են այսպես.

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^n} \quad (n=1, 2, \dots);$$

Նրանք բավարարում են

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$$

հավասարումներին:

Օգտագործվում են նաև այլ բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգեր:

§ 16. Գաղափար գծային ֆունկցիոնալ տարածության մասին: Համանմանություն ֆունկցիաների Ֆուրյեի շարքի վերլուծության և վեկտորների վերլուծության միջև

Անալիտիկ երկրաչափությունում սահմանվել է բնաչափ տարածություն

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

վեկտորը, որտեղ i, j, k -ն միավոր, փոխուղղահայաց վեկտորներ են, որոնք ուղղված են կոորդինատային առանցքներով: Հետագայում i, j, k վեկտորները նշանակելու ենք e_1, e_2, e_3 -ով:

Համանման ձևով կարելի է սահմանել n -չափանի տարածության

$$A = \sum_{i=1}^n A_i e_i$$

վեկտորը:

A տեսքի վեկտորների բաղմունքները կանվանենք n -չափանի եվկլիդյան տարածություն և կնշանակենք E_n -ով: A վեկտորներն անվանելու ենք n -չափանի էվկլիդյան տարածության տարրեր՝ կամ կետեր*: Նշենք E_n տարածության հատկությունները:

Դիցուք տրված են E_n տարածության երկու վեկտորներ՝

$$A = \sum_{i=1}^n A_i e_i \quad \text{և} \quad B = \sum_{i=1}^n B_i e_i:$$

Եթե C_1 -ը և C_2 -ը իրական թվեր են, ապա $C_1 A + C_2 B$ տարածության համանմանությունը

$$C_1 A + C_2 B \quad (1)$$

վեկտորը E_n տարածության վեկտոր է:

* Դիտարկում են նաև վեկտորներ՝ անվերջ չափանի տարածությունում:

A և B վեկտորների սկալյար արտադրյալ կոչվում է

$$(AB) = \sum_{i=1}^n A_i B_i \quad (2)$$

արտահայտությունը:

e_1, e_2, \dots, e_n վեկտորները պատկանում են E_n տարածությունը, նրանց նկատմամբ նույնպես կիրառելի է (2) բանաձևը:

Հետևաբար, $i \neq j$ դեպքում ստանում ենք.

$$(e_i e_j) = 0, \quad (2')$$

$i = j$ դեպքում՝

$$(e_i e_i) = 1,$$

Այն վեկտորները, որոնց սկալյար արտադրյալը հախտաբար է զրոյի, կոչվում են օրթոգոնալ: Հետևաբար, e_1, e_2, \dots, e_n վեկտորներն օրթոգոնալ են:

Ինչպես և եռաչափ տարածությունում, հեշտությունը հաստատվում են սկալյար արտադրյալի հետևյալ հատկությունները.

$$\left. \begin{aligned} (AB) &= (BA), \\ (A+B, C) &= (AC) + (BC), \\ (\lambda A, B) &= \lambda(AB): \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

A վեկտորի երկարությունը կամ մոդուլը սահմանվում է, ինչպես և եռաչափ տարածությունում, այսպես.

$$|A| = \sqrt{(AA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2}, \quad (4)$$

Երկու վեկտորների տարբերության երկարությունը, բնականաբար, սահմանվում է այսպես.

$$|A-B| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (A_i - B_i)^2}, \quad (5)$$

Մասնավորապես,

$$|A-A| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (A_i - A_i)^2} = 0,$$

Երկու վեկտորների կազմած φ անկյունը սահմանվում է այսպես.

$$\cos \varphi = \frac{(AB)}{|A| \cdot |B|}, \quad (6)$$

Դիտարկենք $[a, b]$ հատվածում բոլոր կտոր առ կտոր մոնոտոն

սահմանափակ ֆունկցիաների բազմությունը*: Այս բազմությունը նշանակենք Φ -ով և անվանենք Φ ֆունկցիաների տարածություն: Այդ տարածությանը պատկանող ֆունկցիաները կանվանենք Φ տարածության տարրեր կամ կեանք: Կարելի է հաստատել Φ տարածության ֆունկցիաների նկատմամբ գործողություններ, որոնք նման են E_n տարածության նկատմամբ մեզ հայտնի գործողություններին:

Եթե C_1 -ը և C_2 -ը ցանկացած իրական թվեր են և $f_1(x)$ -ը, $f_2(x)$ -ը Φ տարածության տարրերն են, ապա

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \quad (7)$$

Φ տարածության տարր է:

Եթե $f(x)$ -ը և $\varphi(x)$ -ը Φ տարածության երկու ֆունկցիաներն են, ապա $f(x)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաների սկալյար արտադրյալ է կոչվում

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx \quad (8)$$

արտահայտությունը:

Այս արտահայտությունը համանման է (2) արտահայտությանը: Հեշտ է ստուգել, որ (8) սկալյար արտադրյալն օժտված է վեկտորների համար (3) հատկություններին համանման հատկություններով.

$$\left. \begin{aligned} (i, \varphi) &= (\varphi, i), \\ (f_1 + f_2, \varphi) &= (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi), \\ (\lambda f, \varphi) &= \lambda(f, \varphi): \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Հստ (4) բանաձևի վեկտորի մոդուլի սահմանմանը համանման սահմանվում է այսպես կոչվող Φ տարածության $f(x)$ տարրի նորման.

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}, \quad (10)$$

Φ տարածության $f(x)$ և $\varphi(x)$ տարրերի հեռավորություն (5) բանաձևի համանմանությամբ անվանելու ենք

$$\|f - \varphi\| = \sqrt{\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx} \quad (11)$$

արտահայտությունը:

* Ֆունկցիաների այսպիսի դասը քննարկվել է § 1-ի թեորեմում: Կարելի է քննարկել ֆունկցիաների ավելի լայն դաս, որի համար § 1-ի բոլոր պնդումները պահպանվում են:

Տարածություն տարրերի հեռավորության (11) արտահայտությունը կոչվում է տարածության մետրիկա: Այն $\sqrt{b-a}$ բազմապատկիչի ճշտությամբ համընկնում է § 7-ում սահմանած σ միջին քառակուսային շեղման հետ:

Այնհայտ է, որ եթե $f(x) \equiv \varphi(x)$, այսինքն՝ $f(x)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաները համընկնում են $[a, b]$ հատվածի բոլոր կետերում, ապա $\|f - \varphi\| = 0$: Բայց եթե $\|f - \varphi\| = 0$, ապա $f(x) \equiv \varphi(x)$ $[a, b]$ հատվածի բոլոր կետերում, բացի վերջավոր թվով կետերից*: Բայց այս դեպքում ասում են նաև, որ Φ տարածություն տարրերը նույնական են:

Այն կտոր առ կտոր մոնոտոն սահմանափակ ֆունկցիաների տարածությունը, որում սահմանված են (7), (8) գործողությունները և մետրիկան սահմանվում է (11) հավասարությամբ, կոչվում է քառակուսային մետրիկայով գծային ֆունկցիոնալ տարածություն: Φ տարածության տարրերը կոչվում են տարածության կետեր կամ վեկտորներ:

Այնուհետև դիտարկենք Φ տարածությունը պատկանող

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x), \dots \quad (12)$$

ֆունկցիաների հաջորդականությունը:

(12) ֆունկցիաների հաջորդականությունը կոչվում է օրթոգոնալ $[a, b]$ հատվածում, եթե ցանկացած i -ի, j -ի ($i \neq j$) դեպքում տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0: \quad (13)$$

§ 1-ի (I) հավասարությունների հիման վրա հետևում է, որ, օրինակ,

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots$$

ֆունկցիաների համակարգը օրթոգոնալ է $[-\pi, \pi]$ հատվածում:

Այնուհետև ցույց տանք, որ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքի վերլուծությունը ըստ օրթոգոնալ ֆունկցիաների համանման է վեկտորի վերլուծության ըստ օրթոգոնալ վեկտորների: Դիցաք արված է

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + \dots + A_k e_k + \dots + A_n e_n \quad (14)$$

վեկտորը: Ենթադրում ենք, որ e_1, e_2, \dots, e_n վեկտորներն օրթոգոնալ են, այսինքն՝ եթե $i \neq j$, ապա

$$(e_i, e_j) = 0: \quad (15)$$

A_k պրոյեկցիան որոշելու համար (14) հավասարության աջ և ձախ մասերը սկալյարապես բազմապատկում ենք e_k վեկտորով: (2) և (3) հատկությունների հիման վրա ստանում ենք

$$(A e_k) = A_1 (e_1 e_k) + A_2 (e_2 e_k) + \dots + A_k (e_k e_k) + \dots + A_n (e_n e_k):$$

Հաշվի առնելով (15)-ը, ստանում ենք.

$$(A e_k) = A_k (e_k e_k),$$

որտեղից

$$A_k = \frac{(A e_k)}{(e_k e_k)} \quad (k=1, 2, \dots, n): \quad (16)$$

Այնուհետև ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան վերլուծված է ըստ օրթոգոնալ ֆունկցիաների համակարգի.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x): \quad (17)$$

(17) հավասարության երկու մասերը սկալյարապես բազմապատկելով $\varphi_k(x)$ -ով և հաշվի առնելով (9) և (13) հավասարությունները, կստանանք*.

$$(f, \varphi_k) = a_k (\varphi_k, \varphi_k),$$

որտեղից

$$a_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx}{\int_a^b [\varphi_k(x)]^2 dx}, \quad (18)$$

(18) բանաձևը համանման է (16) բանաձևին:

Այնուհետև, նշանակենք

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x), \quad (19)$$

$$\delta_n = \|f - S_n\| \quad (n=1, 2, \dots): \quad (20)$$

եթե

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0,$$

* Ենթադրվում է, որ քննարկման ընթացքում ստացված շարքերը զուգամիտում են և անդամ առ անդամ ինտեգրումն օրինական է:

ապա (12) օրթոգոնալ ֆունկցիաների համակարգը լրիվ է $[a, b]$ հատվածում:

(17) Ֆուրյեի շարքը $f(x)$ ֆունկցիային զուգամիտում է միջին իմաստով:

Վարժություններ VIII գլխի վերաբերյալ

1. $(-\pi, \pi)$ միջակայքում Ֆուրյեի շարքի վերլուծել

$$f(x)=x, \text{ երբ } -\pi < x \leq 0,$$

$$f(x)=2x, \text{ երբ } 0 \leq x \leq \pi$$

ֆունկցիան:

$$\text{Պատ. } \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + 3 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$$

2. Օգտվելով $(0, \pi)$ միջակայքում $f(x)=1$ ֆունկցիայի՝ ըստ բազմապատիկ ադեգների սինուսի վերլուծութունից, հաշվել $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ շարքի գումարը: Պատ. $\frac{\pi}{4}$:

3. Օգտվելով $f(x)=x^2$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքի վերլուծութունից, հաշվել $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ շարքի գումարը: Պատ. $\frac{\pi^2}{12}$:

4. $(-\pi, \pi)$ միջակայքում Ֆուրյեի շարքի վերլուծել $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$

$$\text{ֆունկցիան: Պատ. } \cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots$$

5. $(-\pi, \pi)$ միջակայքում Ֆուրյեի շարքի վերլուծել

$$f(x) = -\frac{\pi+x}{2}, \text{ երբ } -\pi \leq x < 0,$$

$$f(x) = \frac{\pi-x}{2}, \text{ երբ } 0 \leq x < \pi$$

$$\text{ֆունկցիան: Պատ. } \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \dots$$

6. $(-\pi, \pi)$ միջակայքում Ֆուրյեի շարքի վերլուծել

$$f(x) = -x, \text{ երբ } -\pi < x \leq 0,$$

$$f(x) = 0, \text{ երբ } 0 < x \leq \pi$$

$$\text{ֆունկցիան: Պատ. } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$$

7. $(-\pi, \pi)$ միջակայքում Ֆուրյեի շարքի վերլուծել

$$f(x)=1, \text{ երբ } -\pi < x \leq 0,$$

$$f(x)=-2, \text{ երբ } 0 < x \leq \pi$$

$$\text{ֆունկցիան: Պատ. } -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

8. $f(x)=x^2$ ֆունկցիան $(0, \pi)$ միջակայքում վերլուծել սինուսների շարքի:

$$\text{Պատ. } \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} [(-1)^n - 1] \right\} \sin nx.$$

9. $y=\cos 2x$ ֆունկցիան $(0, \pi)$ միջակայքում վերլուծել սինուսների շարքի:

$$\text{Պատ. } -\frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{2^2-1} + \frac{3\sin 3x}{2^2-3^2} + \frac{5\sin 5x}{2^2-5^2} + \dots \right],$$

10. $y=\sin x$ ֆունկցիան $(0, \pi)$ միջակայքում վերլուծել ըստ կոսինուսների շարքի:

$$\text{Պատ. } \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{1-2^2} + \frac{\cos 4x}{1-4^2} + \dots \right],$$

11. $y=e^x$ ֆունկցիան $(-1, 1)$ միջակայքում վերլուծել Ֆուրյեի շարքի:

$$\text{Պատ. } \frac{e^1 - e^{-1}}{2l} + l(e^1 - e^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{n\pi x}{l}}{l^2 + n^2\pi^2} + \pi(e^1 - e^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n \sin \frac{n\pi x}{l}}{l^2 + n^2\pi^2}.$$

12. $f(x)=2x$ ֆունկցիան $(0, 1)$ միջակայքում վերլուծել սինուսների շարքի:

$$\text{Պատ. } \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\pi x}{n^2}.$$

13. $f(x)=x$ ֆունկցիան $(0, 1)$ միջակայքում վերլուծել սինուսների շարքի:

$$\text{Պատ. } \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n}.$$

14. $(0, 2)$ միջակայքում

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{երբ } 0 < x \leq 1, \\ 2-x, & \text{երբ } 1 < x < 2 \end{cases}$$

ֆունկցիան վերլուծել՝ ա) սինուսների շարքի, բ) կոսինուսների շարքի:

$$\text{Պատ. ա) } \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}, \text{ բ) } \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§ 1. Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների հիմնական տիպերը

Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հիմնական հավասարումներ են անվանում (երկու փոփոխականների ֆունկցիաների դեպքի համար) հետևյալ մասնական ածանցյալներով երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումները:

I. Ալիքային հավասարում.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Այս հավասարման ուսումնասիրությանը հանդեցնում է լարի լայնակի տատանումների, ձողի երկայնակի տատանումների, հաղորդալարում էլեկտրական տատանումների, լիսեռի ոլորման տատանումների, դադի տատանումների և այլ պրոցեսների քննարկումը: Այս հավասարումը հիպերբոլական տիպի պարզագույն հավասարում է:

II. Ջերմահաղորդականության թվան հավասարում կամ ֆուրյեի հավասարում.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

Այս հավասարման ուսումնասիրությանը հանդեցնում է ջերմության տարածման, ծակուղեկ միջավայրում հեղուկի և գազի ֆիլտրման (օրինակ, նավթի և գազի ֆիլտրումը ստորերկրյա ավազաշերտերում) պրոցեսների, համակարգիչների տեսության միջանդակի հարցերի քննարկումը: Այս հավասարումը պարաբոլական տիպի պարզագույն հավասարում է:

III. Լապլասի հավասարում.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

Այս հավասարման ուսումնասիրությանը բերում է էլեկտրական և մագնիսական դաշտերի, սառցիոնար ջերմային փոխակի փերաբերյալ, հիդրոդինամիկայի խնդիրների, դիֆուզիայի և այլ հարցերի քննարկումը: Այս հավասարումը էլիպտիկական տիպի պարզագույն հավասարում է:

(1), (2) և (3) հավասարումներում որոնվող և ֆունկցիան կախված է երկու փոփոխականներից: Քննարկվում են նաև այնպիսի մեծ թվով փոփոխականների համար համապատասխան հավասարումներ: Այսպես, երեք անկախ փոփոխականներով ալիքային հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{1'}$$

Երեք անկախ փոփոխականներով ջերմահաղորդականության հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2'}$$

Երեք անկախ փոփոխականներով Լապլասի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{3'}$$

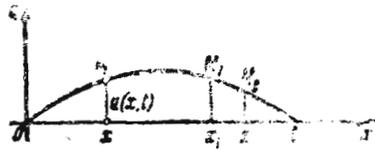
§ 2. Լարի տատանման հավասարման արտածումը:

Ծայրային խնդրի ձևակերպումը:

Հաղորդալարերում էլեկտրական տատանումների արտածումը

Մաթեմատիկական ֆիզիկայում լար սակայն հասկանում են ձկուն, առաձգական թելը: Ժամանակի ցանկացած պահին նշված թելում առաջացած լարումներն ուղղված են նրա պրոֆիլի շոշափողով: Դիցուք l երկարությամբ լարը սկզբնական պահին ուղղված է Ox առանցքի O և l կետերի միջև ընկած հատվածով: Ենթադրենք, որ լարի ծայրերն ամրացված են $x=0$ և $x=l$ կետերում: Եթե լարը շեղենք իր սկզբնական դիրքից և ապա ազատ թողնենք կամ, շեղելով լարը, սկզբնական պահին նրա կետերին տանք որոշ արագություն, կամ շեղենք լարը և նրա կետերին տանք որոշ արագություն, ապա լարի կետերը կկատարեն շարժում. ասում են, որ լարը կսկսի տատանվել: Խնդիրը կախնում է ժամանակի ցանկացած պահին լարի ձևի որոշման և ժամանակից կախված՝ լարի լուրջաքանչյուր կետի շարժման օրենքի որոշման մեջ:

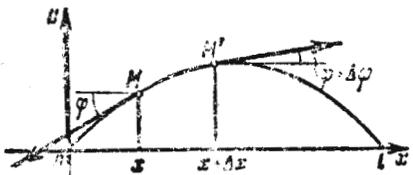
Դիտարկելու ենք սկզբնական դիրքից լարի կետերի փոքր շեղումները: Համաձայն դրան կարելի է ենթադրել, որ լարի կետերի շարժումը կատարվում է Ox առանցքին ուղղահայաց և մեկ հարթության մեջ: Այս ենթադրության դեպքում լարի տատանումները նրկարագրվում են $u(x, t)$ մեկ ֆունկցիայի միջոցով, որը տալիս է լարի x արացիան ունեցող կետի տեղափոխման մեծությունը ժամանակի t պահին (նկ. 389):



Նկ. 389

Քանի որ (x, u) հարթության վրա քննարկում ենք լարի փոքր տատանումները, ապա ենթադրելու ենք, որ լարի M_1M_2 տարրի երկարությունը հավասար է Ox առանցքի վրա նրա պրոյեկցիային, այսինքն՝ $M_1M_2 = x_2 - x_1$: Ենթադրելու ենք նաև, որ ձգումը լարի բոլոր կետերում միևնույնն է, այն նշանակենք T -ով:

Դիտարկենք լարի MM' տարրը (նկ. 390): Այդ տարրի ծայրերում, լարի շոշափողի ուղղությամբ, ազդում են T ուժերը: Դիցուք շոշափողները Ox առանցքի հետ կազմում են φ և $\varphi + \Delta\varphi$ անկյունները:



Նկ. 390

Այդ դեպքում MM' տարրի վրա ազդող ուժերի պրոյեկցիան Ox առանցքի վրա հավասար կլինի $T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi$: Քանի որ φ անկյունը փոքր է, ապա կարելի է ընդունել $\text{tg} \varphi \approx \sin \varphi$, և կունենանք.

$$\begin{aligned} T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi &\approx T \text{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T \text{tg} \varphi = T \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \\ &= T \frac{\partial^2 u(x + \theta \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x \approx T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x, \end{aligned}$$

$0 < \theta < 1$

(այստեղ քառակուսի փակագծերում գտնվող արտահայտությունն նկատմամբ կիրառեցինք Լագրանժի թեորեմը):

* Այս ենթադրությունը համարվեց է նրան, որ l -ի համեմատությամբ անտեսում ենք u_{x^2} արտահայտությունը: Իրոք,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_{x^2}} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 + \frac{1}{2} u_{x^2} - \dots \right) dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1,$$

Շարժման հավասարումը ստանալու համար պետք է տարրի վրա կիրառված արտաքին ուժերը հավասարեցնել իներցիայի ուժին: Դիցուք ρ -ն լարի զծային խտությունն է: Այս դեպքում լարի տարրի զանգվածը կլինի $\rho \Delta x$: Տարրի արագացումը հավասար է $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$: Հետևաբար, ըստ Նյուտոնի սկզբունքի, կունենանք.

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x,$$

Կրճատելով Δx -ով և նշանակելով $\frac{T}{\rho} = a^2$, ստանում ենք շարժման հավասարումը՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

Սա էլ հենց ալիքային հավասարումն է՝ լարի տատանման հավասարումը: Լարի տատանումը լիովին որոշելու համար միայն (1) հավասարումը բավական չէ: Որոշվող $u(x, t)$ ֆունկցիան պետք է բավարարի նաև եզրային պայմաններին, որոնք ցույց են տալիս, թե ինչ է կատարվում լարի ծայրերում ($x=0$ և $x=l$), և սկզբնական պայմաններին, որոնք նկարագրում են լարի վիճակը սկզբնական պահին ($t=0$): Եզրային և սկզբնական պայմանների համախումբը կոչվում է ծայրային պայմաններ:

Դիցուք, օրինակ, ինչպես ենթադրել ենք, լարի ծայրերը $x=0$ և $x=l$ դեպքում անշարժ են: Այդ դեպքում ցանկացած t -ի համար պետք է բավարարվեն հետևյալ հավասարությունները.

$$u(0, t) = 0, \quad (2')$$

$$u(l, t) = 0: \quad (2'')$$

Այս հավասարությունները մեր խնդրի համար հանդիսանում են եզրային պայմաններ:

$t=0$ սկզբնական պահին լարն անի որոշակի ձև, որը մենք նրան տվել ենք: Դիցուք այդ ձևը որոշվում է $f(x)$ ֆունկցիայով: Այսպիսով, պետք է, որ

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = f(x): \quad (3')$$

Այնուհետև, սկզբնական պահին պետք է տրված լինի արագությունը լարի յուրաքանչյուր կետում, որը որոշվում է $\varphi(x)$ ֆունկցիայով: Այսպիսով, պետք է, որ

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x): \quad (3'')$$

(3') և (3'') պայմանները կոչվում են սկզբնական պայմաններ:

Դիտողութունն: Մասնավորապես, կարող է լինել $f(x) \equiv 0$ կամ $\varphi(x) \equiv 0$: Իսկ եթե $f(x) \equiv 0$ և $\varphi(x) \equiv 0$, ապա լարը կգտնվի անշարժ վիճակում, հետևաբար, $u(x, t) \equiv 0$:

Ինչպես նշվեց վերևում, (1) հավասարմանն է բերում նաև հաղորդալարերում էլեկտրական տատանումների ինդիբրե: Յույց տանք դա: Հաղորդալարում էլեկտրական հոսանքը բնորոշվում է $i(x, t)$ մեծությամբ և $v(x, t)$ լարվածությունը, որոնք կախված են հաղորդալարի x կետի կոորդինատից և t ժամանակից: Դիտարկելով հաղորդալարի Δx տարրը, կարող ենք գրել, որ Δx տարրի լարվածությունն անկումը հավասար է $v(x, t) - v(x + \Delta x, t) \approx -\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$: Լարվածության

ալս անկումը դումարվում է օմակաճությունից, որը հավասար է $iR \Delta x$, և ինդուկտիվից, որը հավասար է $\frac{\partial i}{\partial t} L \Delta x$: Եվ այսպես,

$$-\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x = iR \Delta x + \frac{\partial i}{\partial t} L \Delta x, \quad (4)$$

որտեղ R -ը և L -ը ինդուկտիվության գիմադրությունը և գործակիցն են՝ հաշված հաղորդալարի միավոր երկարություն համար: Մինուս նշանը վերցված է այն բանի համար, որ հոսանքը գնում է v -ի աճմանը հակառակ ուղղությամբ: Կրճատելով Δx -ով, ստանում ենք

$$\frac{\partial v}{\partial x} + iR + L \frac{\partial i}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

Այնուհետև, Δt ժամանակում Δx տարրից դուրս եկող և այնտեղ մըտնող հոսանքների տարբերությունը կլինի.

$$[i(x, t) - i(x + \Delta x, t)] \Delta t \approx -\frac{\partial i}{\partial x} \Delta x \Delta t,$$

Այն ծախսվում է տարրի լիցքավորման վրա, որը հավասար է $C \Delta x \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t$ -ի և մեկուսացման անկատարյալ լինելու պատճառով հաղորդալարի կողմնային մակերևույթով հոսքի վրա, որը հավասար է $A v \Delta x \Delta t$ (այստեղ A -ն հոսքի գործակիցն է): Հավասարեցնելով այս արտահայտությունները և կրճատելով $\Delta x \Delta t$ -ով, կստանանք

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + A v = 0 \quad (6)$$

հավասարումը: (5) և (6) հավասարումներն ընդունված է անվանել հեռագրային հավասարումներ:

(5) և (6) հավասարումների համակարգից կարելի է ստանալ հավասարում, որը պարունակում է միայն որոնվող $i(x, t)$ ֆունկցիան և հավասարում, որը պարունակում է միայն որոնվող $v(x, t)$ ֆունկցիան: (6) հավասարման անդամները զիֆերենցենք ըստ x -ի, (5) հավասարման անդամները զիֆերենցենք ըստ t -ի և դրանք բազմապատկենք C -ով: Կատարելով հանում, կստանանք.

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A \frac{\partial v}{\partial x} - CR \frac{\partial i}{\partial x} - CL \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0,$$

վերջին հավասարման մեջ (5) հավասարումից տեղադրելով $\frac{\partial v}{\partial x}$ -ի արտահայտությունը, կստանանք.

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A \left(-iR - L \frac{\partial i}{\partial t} \right) - CR \frac{\partial i}{\partial x} - CL \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

կամ

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (CR + AL) \frac{\partial i}{\partial t} + ARi, \quad (7)$$

նման ձևով ստացվում է հավասարում՝ $v(x, t)$ -ի որոշման համար.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (CR + AL) \frac{\partial v}{\partial t} + ARv, \quad (8)$$

Եթե կարելի է անսեփել մեկուսացումով կատարվող հոսքի կուրսուսը ($A=0$) և գիմադրությունը ($R=0$), ապա (7) և (8) հավասարումները դառնում են այնպիսին հավասարումների՝

$$a^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \quad a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

որտեղ նշանակված է՝ $a^2 = \frac{1}{CL}$: Ելնելով ֆիզիկական պայմաններից բանաձևում են խնդրի եզրային և սկզբնական պայմանները:

§ 3. Լարի տատանումների հավասարման լուծումը փոփոխականների անջատման մեթոդով (Ֆուրյեի մեթոդով)

Փոփոխականների անջատման մեթոդը (կամ Ֆուրյեի մեթոդը), որն այժմ քննարկում ենք, տիպական է մասթեմատիկական ֆիզիկայի շատ խնդիրների լուծման համար: Դիցուք պահանջվում է գտնել

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ ծայրային պայմաններին.

$$u(0, t) = 0 \quad (2)$$

$$u(l, t) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x), \quad (5)$$

(1) հավասարման այն մասնակի լուծումը, որը նույնաբար հավասար է զրոյի և բավարարում է (2) և (3) եզրային պայմաններին, որոնելու ենք $X(x)$ և $T(t)$ երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով. ֆունկցիաներից առաջինը կախված է միայն x -ից, իսկ երկրորդը՝ միայն t -ից.

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad (6)$$

Տեղադրելով (1) հավասարման մեջ, ստանում ենք $X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$ և, հավասարաթվան անդամները բաժանելով $a^2 XT$ -ի վրա,

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}, \quad (7)$$

Այս հավասարության ձախ մասը x -ից կախում չունեցող ֆունկցիա է, իսկ աջ մասը՝ t -ից կախում չունեցող ֆունկցիա: (7) հավասարությունը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ ձախ և աջ մասերը կախված չեն ոչ x -ից, ոչ էլ t -ից, այսինքն՝ հավասար են հաստատուն թվի: Այն նշանակենք $-\lambda$ -ով, որտեղ $\lambda > 0$ (ազնիլի ուշ կքննարկվի նաև $\lambda < 0$ դեպքը): Այսպես, ուրեմն,

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Այս հավասարություններից ստանում ենք հետևյալ երկու հավասարումները.

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (8)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \quad (9)$$

Այս հավասարումների ընդհանուր լուծումները կլինեն (տես XIII գլխի § 21).

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x, \quad (10)$$

$$T(t) = C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \sin a \sqrt{\lambda} t, \quad (11)$$

որտեղ A -ն, B -ն, C -ն, D -ն կամայական հաստատունն են:

$X(x)$ -ի և $T(t)$ -ի արտահայտությունները տեղադրելով (6) հավասարության մեջ, կստանանք.

$$u(x, t) = (A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x)(C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \sin a \sqrt{\lambda} t).$$

Այժմ A և B հաստատուններն ընտրենք այնպես, որ բավարարեն (2) և (3) պայմանները: Քանի որ $T(t) \neq 0$ (հակառակ դեպքում կունենանք $u(x, t) \equiv 0$, որը հակասում է դրված պայմանին), ապա $X(x)$ ֆունկցիան պետք է բավարարի (2) և (3) պայմաններին, այսինքն՝ պետք է, որ լինի $X(0) = 0$, $X(l) = 0$: $x = 0$ և $x = l$ արժեքները տեղադրելով (10) հավասարության մեջ, (2)-ի և (3)-ի հիման վրա ստանում ենք.

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0, \quad 0 = A \cos \sqrt{\lambda} l + B \sin \sqrt{\lambda} l.$$

Առաջին հավասարումից գտնում ենք՝ $A = 0$: Երկրորդից հետևում է

$$B \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

$B \neq 0$, քանի որ հակառակ դեպքում կլինեիր $X \equiv 0$ և $u \equiv 0$, որը հակասում է պայմանին: Հետևաբար, պետք է լինի

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

որտեղից

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (12)$$

($n=0$ արժեքը չ'են վերցնում, քանի որ այդ դեպքում կլինեիր $X \equiv 0$ և $u \equiv 0$): Եվ այսպես, ստացանք՝

$$X = B \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (13)$$

λ -ի գտած արժեքները տվյալ ծայրային խնդրի համար կոչվում են սեփական արժեքներ: Նրանց համապատասխանող $X(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են սեփական ֆունկցիաներ:

Ի հատկություն: Եթե $-\lambda$ -ի փոխարեն վերցնենք $+\lambda = k^2$, ապա (8) հավասարումը կընդունի

$$X'' - k^2 X = 0$$

տեսքը: Այս հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$X = A e^{kx} + B e^{-kx}.$$

Զրոյից տարբեր լուծումն այս տեսքով չի կարող բավարարել (2) և 3) եզրային պայմաններին:

Իմանալով $\sqrt{\lambda}$ -ն և օգտվելով (11) հավասարությունից, կարող ենք գրել.

$$T(t) = C \cos \frac{an\pi}{l} t + D \sin \frac{an\pi}{l} t \quad (n=1, 2, \dots), \quad (14)$$

Ուի լուրջ քանջյուր արժեքի համար, հետևաբար լուրջ քանջյուր λ -ի համար, (13) և (14) արտահայտությունները տեղադրում ենք (6) հավասարության մեջ և ստանում ենք (1) հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է (2) և (3) եզրային պայմաններին: Այդ լուծումը նշանակենք $u_n(x, t)$ -ով.

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right), \quad (15)$$

Ուի լուրջ քանջյուր արժեքի համար կարող ենք վերցնել իր C և D հաստատունները. ուստի կգրենք C_n և D_n . (Ե հաստատունն ընդգրկված է C_n -ի և D_n -ի մեջ): Քանի որ (1) հավասարումը գծային և համասեռ է, ապա լուծումների գումարը նույնպես լուծում է և, հետևաբար

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

կամ

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (16)$$

շարքով ներկայացված ֆունկցիան նույնպես կլինի (1) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը, որը կբավարարի (2) և (3) եզրային պայմաններին: Այնհայտ է, որ (16) շարքը (1) հավասարման լուծումը կլինի միայն այն դեպքում, երբ C_n և D_n գործակիցներն այնպիսին են, որ այդ շարքը զուգամիտում է. զուգամիտում են նաև այն շարքերը, որոնք ստացվում են ըստ x -ի և ըստ t -ի երկու անգամ անգամ առ անգամ դիֆերենցումից հետո:

(16) լուծումը պետք է նաև բավարարի (4) և (5) սկզբնական պայմաններին: Մենք դրան հասնելու ենք C_n և D_n հաստատունների ընտրություն ճանապարհով: (16) հավասարության մեջ տեղադրելով $t=0$, կստանանք (տես (4) պայմանը).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (17)$$

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ $(0, l)$ միջակայքում այն կարելի է վերլուծել Ֆուրյեի շարքի (տես XVII գլխի §1), ապա (12) պայմանը տեղի կունենա, եթե ընդունենք

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad (18)$$

Այնուհետև, (16) հավասարության անդամները դիֆերենցենք ըստ t -ի և տեղադրենք $t=0$: (5) պայմանից ստացվում է

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

հավասարությունը: Որոշում ենք այս շարքի Ֆուրյեի գործակիցները.

$$D_n \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

կամ

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad (19)$$

Եվ այսպես, ապացուցեցինք, որ (16) շարքը, որտեղ C_n և D_n գործակիցները որոշված են (18) և (19) բանաձևերով, եթե այն թույլ է տալիս կրկնապատիկ անդամ առ անդամ դիֆերենցում, ներկայացնում է $u(x, t)$ ֆունկցիան, որը (1) հավասարման լուծումն է և բավարարում է (2)–(5) եզրային ու սկզբնական պայմաններին:

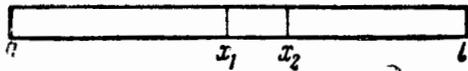
Դիտողություն: Այլ ժային հավասարման համար քննարկված խնդիրը լուծելով ուրիշ մեթոդով, կարելի է ապացուցել, որ (16) շարքը լուծում է ներկայացնում նաև այն դեպքում, երբ այն թույլ չի տալիս անդամ առ անդամ դիֆերենցում: Ընդ որում $f(x)$ ֆունկցիան պետք է լինի երկու անգամ դիֆերենցելի, իսկ $\varphi(x)$ -ը՝ մեկ անգամ դիֆերենցելի*:

§ 4. Չողում ջերմության տարածման հավասարումը: Օայրային խնդրի ձևակերպումը

Դիտարկենք l երկարություն ունեցող համասեռ ձողը: Ենթադրելու ենք, որ ձողի կողմնային մակերևույթը անջերմամթափանցիկ է և որ ձողի լայնակի հատույթի բոլոր կետերում ջերմաստիճանը միևնույնն է: Ուսումնասիրենք ձողում ջերմություն տարածման պրոցեսը: Օ՝X առանցքը դասավորենք այնպես, որ ձողի մի ծայրը համ-

* Այս պայմանների մասին մանրամասն տես, օրինակ, А. А. Тихонов, А. А. Самарский. «Уравнения математической физики», Гостехиздат, 1954 г., գրքում:

ընկնի $x=0$ կետի հետ, իսկ մյուսը՝ $x=l$ կետի հետ (չկ. 391): Դիցուք $u(x, t)$ -ն ձողի՝ x արսցիսով հատույթի ջերմաստիճանն է և



Նկ. 391

պահին: Փորձնական ճանապարհով հաստատված է, որ ջերմության տարածման արագությունը, այսինքն՝ ջերմության այն քանակությունը, որն անցնում է միավոր ժամանակում x արսցիս ունեցող հատույթով, որոշվում է

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x} S \quad (1)$$

բանաձևով, որտեղ S -ը դիտարկվող ձողի հատույթի մակերեսն է, k -ն՝ ջերմահաղորդականության գործակիցը*:

Դիտարկենք ձողի այն տարրը, որը պարփակված է x_1 և x_2 ($x_2 - x_1 = \Delta x$) արսցիսներ, ունեցող հատույթների միջև: Δt ժամանակում x արսցիս ունեցող հատույթով անցնող ջերմության քանակությունը հապասար կլինի

$$\Delta Q_1 = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} S \Delta t, \quad (2)$$

նույնը x_2 արսցիսն ունեցող հատույթի համար կլինի

$$\Delta Q_2 = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} S \Delta t, \quad (3)$$

Ձողի տարրի միջով $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ ջերմության ներհոսքը Δt ժամանակում հապասար կլինի

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left[-k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} S \Delta t \right] - \left[-k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} S \Delta t \right] \approx k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S \Delta t \quad (4)$$

* Ջերմության տարածման արագությունը կամ ջերմային հոսքի արագությունը սահմանվում է այսպես.

$$q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

որտեղ ΔQ -ն ջերմության այն քանակությունն է, որն անցնում է S հատույթի միջով Δt ժամանակում:

(Լագրանժի թեորեմը կիրառեցի՝ $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1}$ տարբերության նկատմամբ): Δt ժամանակում ջերմության այս ներհոսքը ծախսվել է ձողի տարրի ջերմաստիճանը Δu մեծությունը բարձրացնելու վրա.

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c \rho \Delta x S \Delta u$$

կամ

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c \rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t, \quad (5)$$

որտեղ c -ն ձողի նյութի ջերմունակությունն է, ρ -ն՝ ձողի նյութի խտությունը ($\rho \Delta x S$ -ը ձողի տարրի զանգվածն է):

Հավասարեցնելով $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ ջերմության միևնույն քանակության (4) և (5) արտահայտությունները, կստանանք.

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S \Delta t = c \rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$$

կամ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c \rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

նշանակելով $\frac{k}{c \rho} = a^2$, վերջնականապես ստանում ենք

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6)$$

Սա էլ հենց համասեռ ձողում ջերմության տարածման հավասարումն է (ջերմահաղորդականության հավասարումը):

Որպեսզի (6) հավասարման լուծումը լիովին որոշված լինի, $u(x, t)$ ֆունկցիան պետք է բավարարի ինչդրի ֆիզիկական պայմաններին համապատասխանող ծայրային պայմաններին: (6) հավասարման լուծման համար ծայրային պայմանները կարող են տարբեր լինել: $0 \leq t \leq T$ միջակայքի համար, այսպես կոչված, առաջին ծայրային խնդրին համապատասխանող պայմաններն են.

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (7)$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad (8)$$

$$u(l, t) = \psi_2(t): \quad (9)$$

Ֆիզիկական տեսակետից (7) պայմանը (սկզբնական պայման) համապատասխանում է նրան, որ $t=0$ դեպքում ձողի տարբեր հատույթներում տրված է ջերմաստիճան, որը հապասար է $\varphi(x)$ -ի: (8) և (9) պայմանները (եզրային պայմաններ) համապատասխանում են

նրան, որ Δ ողի ∂ ալրերում, երբ $x=0$ և երբ $x=l$ պահպանվում են համապատասխանաբար $\psi_1(t)$ -ին և $\psi_2(t)$ -ին հավասար շերմաստիճաններ:

§ 6-ում ապացուցվում է, որ (6) հավասարումը $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ հատվածում ունի միակ լուծումը, որը բավարարում է (7), (8), (9) պայմաններին:

§ 5. Ջերմության տարածումը տարածության մեջ

Քննարկենք եռաչափ տարածությունում շերմության տարածման պրոցեսը: Դիցուք $u(x, y, z, t)$ -ն t պահին (x, y, z) կետում շերմաստիճանն է: Փորձնական ճանապարհով հաստատված է, որ ΔS հարթակի միջով շերմության անցման արագությունը, այսինքն՝ շերմության այն քանակությունը, որը հոսում է միավոր ժամանակում, որոշվում է հետևյալ բանաձևով (որը նման է նախորդ պարագրաֆի (1) բանաձևին)

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S, \quad (1)$$

որտեղ k -ն դիտարկվող միջավայրի շերմահաղորդականության գործակիցն է, այդ միջավայրը համարում ենք համասեռ և իզոտրոպ, n -ը միավոր վեկտոր է, որն ազդված է ΔS հարթակի նորմալով՝ շերմության շարժման ուղղությամբ: VIII գլխի § 14-ի հիման վրա կարող ենք գրել.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

որտեղ $\cos \alpha$ -ն, $\cos \beta$ -ն, $\cos \gamma$ -ն n վեկտորի ուղղորդ կոսինուսներն են, կամ

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n \text{ grad } u:$$

$\frac{\partial u}{\partial n}$ -ի արժեքը տեղադրելով (1) բանաձևի մեջ, ստանում ենք.

$$\Delta Q = -k \text{ grad } u \Delta S:$$

ΔS հարթակի միջով Δt ժամանակամիջոցում անցնող շերմության քանակությունը հավասար կլինի.

$$\Delta Q \Delta t = -k \text{ grad } u \Delta t \Delta S:$$

Վերադառնանք պարագրաֆի սկզբում դրված խնդրին: Քննարկվող միջավայրում առանձնացնենք V փոքր ծավալ, որը սահմանա-

փակված է S մակերևույթով: S մակերևույթի միջով անցնող շերմության քանակը հավասար կլինի.

$$Q = -\Delta t \int_S k \text{ grad } u \, ds, \quad (2)$$

որտեղ n -ը S մակերևույթի արտաքին նորմալով ուղղված միավոր վեկտորն է: Այնհայտ է, որ (2) բանաձևը տալիս է շերմության այն քանակությունը, որը Δt ժամանակամիջոցում մտնում է V ծավալ (կամ դուրս է գալիս V ծավալից): V ծավալ մտնող շերմության քանակությունը ծախսվում է այդ ծավալի նյութի շերմաստիճանի բարձրացման վրա:

Դիտարկենք ΔV տարրական ծավալը: Դիցուք Δt ժամանակամիջոցում նրա շերմաստիճանը բարձրացել է Δu -ով: Այնհայտ է, որ շերմության այն քանակությունը, որը ծախսվել է ΔV տարրի շերմաստիճանը բարձրացնելու վրա, հավասար կլինի.

$$c \Delta V \rho \Delta u \approx c \Delta V \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

որտեղ c -ն նյութի շերմաստիճանի փոփոխության գործակիցն է, ρ -ն՝ խտությունը: Δt ժամանակամիջոցում V ծավալի շերմաստիճանի բարձրացման վրա ծախսված շերմության քանակությունը կլինի.

$$\Delta t \int_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dv:$$

Բայց սա այն շերմությունն է, որը Δt ժամանակամիջոցում ընդունել է V ծավալը. այն որոշված է (2) բանաձևով: Այսպիսով, տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$-\Delta t \int_S k \text{ grad } u \, ds = \Delta t \int_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dv:$$

Կրճատելով Δt -ով, ստանում ենք.

$$-\int_S k \text{ grad } u \, ds = \int_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dv, \quad (3)$$

Այս հավասարության ձախ մասի մակերևույթային ինտեգրալը ձևափոխենք ըստ Օստրոգրադսկու բանաձևի (տես XV գլխի § 8), ընդունելով $F = k \text{ grad } u$.

$$\int_S (k \text{ grad } u) \, ds = \int_V \text{div} (k \text{ grad } u) \, dv:$$

(3) հավասարության ձախ մասի կրկնակի ինտեգրալը փոխարինելով հոսակի ինտեգրալով, կստանանք.

$$-\int \int \int_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dv = \int \int \int_V c_p \frac{\partial u}{\partial t} dv$$

կամ

$$\int \int \int_V \left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + c_p \frac{\partial u}{\partial t} \right] dv = 0, \quad (4)$$

Ձախ կողմում գտնվող եռակի ինտեգրալի նկատմամբ կիրառելով միջինի մասին թեորեմը (տես. XIV գլխի § 12), կստանանք.

$$\left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + c_p \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x=x_1, y=y_1, z=z_1} = 0, \quad (5)$$

որտեղ $P(x_1, y_1, z_1)$ -ը V ծավալի որոշ կետն է:

Քանի որ եռաչափ տարածությունում կարող ենք անջատել կամայական V ծավալ, որտեղ տեղի է ունենում ջերմության տարածումը, և քանի որ ենթադրում ենք, որ (4) հավասարության մեջ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան անընդհատ է, ապա (5) հավասարությունը տեղի կունենա տարածության յուրաքանչյուր կետում: Այսպես, ուրեմն.

$$c_p \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u), \quad (6)$$

Սակայն

$$k \operatorname{grad} u = k \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + k \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + k \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

և

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

(տես XV գլխի § 8): Տեղադրելով (6) հավասարման մեջ, ստանում ենք.

$$-c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (7)$$

Եթե k -ն հաստատուն է, ապա

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = k \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

և (6) հավասարումն այս դեպքում տալիս է.

$$-c_p \frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$կամ \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (8)$$

(8) հավասարումը կրճատ գրված է այսպես.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u,$$

որտեղ $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ -ն Լապլասի օպերատորն է: (8) հավասարումն էլ հենց տարածության մեջ ջերմահաղորդականության հավասարումն է: Դրված ինդեքսն համապատասխանող նրա միակ լուծումը գտնելու համար պետք է տալ ծայրային պայմանները.

Դիցուք ունենք σ մակերևույթն ունեցող Ω մարմինը: Այդ մարմնում դիտարկվում է ջերմության ամբարձման պրոցեսը: Սկզբնական պահին մարմնի ջերմաստիճանը տրված է: Դա համապատասխանում է այն բանին, որ հայտնի է լուծման արժեքը $t=0$ դեպքում՝

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) \quad (9)$$

սկզբնական պայմանը: Բացի այդ, մարմնի σ մակերևույթի ցանկացած M կետում ժամանակի ցանկացած t պահին պետք է հայտնի լինի ջերմաստիճանը, այսինքն՝

$$u(M, t) = \psi(M, t) \quad (10)$$

եզրային պայմանը: (Հնարավոր են և ուրիշ եզրային պայմաններ):

Եթե որոշվող $u(x, y, z, t)$ ֆունկցիան կախված չէ z -ից, ապա ստանում ենք.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (11)$$

հարթության վրա ջերմության տարածման հավասարումը: Եթե քննարկվում է ջերմության տարածումը C եզրագծով D հարթ տիրույթում, ապա (9)-ին և (10)-ին համանման, ծայրային պայմանները բանաձևվում են այսպես.

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u(M, t) = \psi(M, t),$$

որտեղ φ -ն և ψ -ն տրված ֆունկցիաներ են, M -ը՝ C եզրագծի կետն է:

Իսկ եթե u ֆունկցիան կախված չէ ոչ z -ից, ոչ y -ից, ապա ստանում ենք.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

հավասարումը՝ ձողում ջերմության տարածման հավասարումը:

§ 6. Ջերմահղորդականության հավասարման համար առաջին ծայրային խնդրի լուծումը վերջավոր տարբերությունների մեթոդով

Ինչպես և սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների դեպքում, վերջավոր տարբերությունների մեթոդով մասնական սծանցյալներով հավասարումները լուծելիս անհրաժեշտ է փոխարինելով են համապատասխան տարբերություններով (նկ. 392).

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h} \left[\frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} - \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} \right]$$

կամ

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}, \quad (2)$$

Նման ձևով

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \approx \frac{u(x, t+l) - u(x, t)}{l}, \quad (3)$$

Ջերմահղորդականության հավասարման համար առաջին ծայրային խնդիրը ձևակերպվում է (տես § 4) այսպես՝ Պահանջվում է գտնել

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ ծայրային պայմաններին.

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5)$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

$$u(L, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

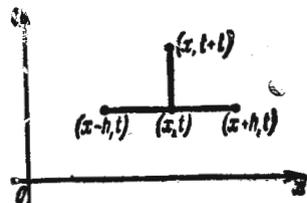
այսինքն՝ պահանջվում է գտնել $u(x, t)$ լուծումը $t=0, x=0, x=L, t=T$ ուղիղներով սահմանափակված ուղղանկյանում, եթե նրա երևք

կողմերի վրա որպես են որոնվող ֆունկցիայի արժեքները՝ $t=0, x=0, x=L$ (նկ. 393): Մեր տիրույթը ծածկենք

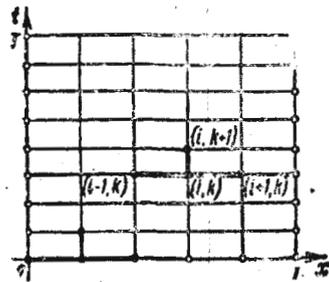
$$x = ih, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$t = kl, \quad k = 1, 2, \dots,$$

ուղիղներով առաջացած ցանցով և որոշենք լուծման մոտավոր արժեքները ցանցի հանգույցներում, այսինքն՝ նշված ուղիղների հատ-



Նկ. 392



Նկ. 393

ման կետերում: Մտցնենք նշանակումներ՝ $u(ih, kl) = u_{i,k}$: (4) հավասարման վերաբերյալ գրենք (ih, kl) կետի համար նրան համապատասխանող վերջավոր ածերով հավասարումը: (3) և (2) բանաձևերի համաձայն կստանանք.

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l} = a^2 \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2}, \quad (8)$$

Որոշենք $u_{i, k+1}$.

$$u_{i, k+1} = \left(1 - \frac{2a^2 l}{h^2} \right) u_{i, k} + a^2 \frac{l}{h^2} (u_{i+1, k} + u_{i-1, k}), \quad (9)$$

(9) բանաձևից հետևում է, որ եթե k -րդ շարքում հայտնի են երեք արժեքներ՝ $u_{i, k}, u_{i+1, k}, u_{i-1, k}$, ապա $(k+1)$ -րդ շարքում որոշվում է $u_{i, k+1}$ արժեքը: Մեզ հայտնի են $t=0$ ուղիղի վրա բոլոր արժեքները (տես բանաձև (5)-ը): Ըստ (9) բանաձևի որոշենք արժեքները $t=l$ հասվածի բոլոր ներքին կետերում: Այդ հասվածի ծայրերում արժեքները մեզ հայտնի են՝ համաձայն (6) և (7) բանաձևերի: Այսպես շարքը շարքի հետևյալ կորոշենք որոնվող լուծման արժեքները ցանցի բոլոր հանգույցներում.

Կարելի է պայցուցել, որ (9) բանաձևով հնարավոր է լուծման մոտավոր արժեքն ստանալ h և l քայլերի ոչ կամայական հարաբերության դեպքում, այլ միայն այն դեպքում, եթե $l \leq \frac{h^2}{2a^2}$: (9) բանաձևը

հատկապես պարզ տեսք է ստանում, եթե l քայլն ըստ t առանցքի ընտրվի այնպես, որ լինի

$$1 - \frac{2a^2 l}{h^2} = 0 \quad \text{կամ} \quad l = \frac{h^2}{2a^2};$$

Այս դեպքում (9) հավասարումը ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$u_{i, k+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1, k} + u_{i-1, k}), \quad (10)$$

Այս բանաձևը առավել հարմար է հաշվումների համար (նկ. 394):

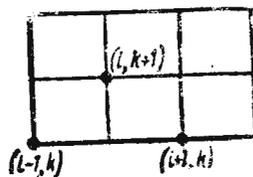
Նշված մեթոդով լուծումը որոշվում է ցանցի հանգույցներում: Յանցի հանգույցների միջև լուծման արժեքը կարելի է ստանալ, օրինակ, էքստրապոլյացիայով. (x, t, u) տարածութան մեջ յուրաքանչյուր կետից կետով տանելով հարթութուն: Ըստ (10) բանաձևի ստացված և նշված ձևով էքստրապոլյացված լուծումը նշանակենք $u_h(x, t)$ -ով: Կարելի է ապացուցել, որ

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h(x, t) = u(x, t),$$

որտեղ $u(x, t)$ -ն մեր խնդրի լուծումն է: Կարելի է ապացուցել նաև*, որ

$$|u_h(x, t) - u(x, t)| < Mh^2,$$

որտեղ M -ը h -ից կախում չունեցող հաստատուն է:



Նկ. 394

§ 7. Չերմության տարածումը անսահմանափակ ձողում

Դիցուք սկզբնական պահին տրված է շերմաստիճանը անսահմանափակ ձողի տարբեր հատույթներում: Պահանջվում է որոշել ջերմութան բաշխումը ձողում՝ ժամանակի հաջորդ պահերին: (Անսահմանափակ ձողում ջերմութան տարածման խնդրին են հանդուս ֆիզիկական խնդիրներն այն դեպքում, երբ ձողն այնքան երկար է, որ ջերմաստիճանը ձողի ներքին կետերում դիտարկվող պահերին քիչ է կախված ձողի ծայրերում եղած պայմաններից):

* Այս հարցի ավելի մանրամասն շարադրանքը տես, օրինակ, Д. Ю. Панов, Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, Гостелиздат, 1951; Л. Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953.

Եթե ձողը համընկնում է Ox առանցքի հետ, ապա խնդիրը մաթեմատիկորեն ձևակերպվում է այսպես: Գտնել

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

հավասարման լուծումը $-\infty < x < \infty, t > 0$ տիրույթում, որը բավարարում է

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2)$$

պայմանին:

Լուծումը գտնելու համար կիրառենք իրոֆոսականների անջատման մեթոդը (տես § 3), այսինքն՝ (1) հավասարման մասնավոր լուծումը որոնելու ենք երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով՝

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (3)$$

Տեղադրելով (1) հավասարման մեջ, կունենանք

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

կամ

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad (4)$$

Այս հարաբերություններից յուրաքանչյուրը չի կարող կախված լինել ոչ x -ից, ոչ էլ t -ից. ուստի այն հավասարեցնում ենք $-\lambda^2$ հաստատունին*: (4)-ից ստանում ենք հետևյալ երկու հավասարումները՝

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad (5)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (6)$$

Լուծելով դրանք, կգտնենք.

$$T = Ce^{-a^2 \lambda^2 t}, \quad X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x;$$

Տեղադրելով (3)-ի մեջ, ստանում ենք.

$$u_h(x, t) = e^{-a^2 \lambda^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] \quad (7)$$

(C հաստատունը մտցված է $A(\lambda)$ -ի և $B(\lambda)$ -ի մեջ): λ -ի յուրաքանչյուր արժեքի համար ստանում ենք (7) տեսքի լուծում: λ -ի յուրաքանչյուր արժեքի համար A և B կամայական հաստատուններն ունեն որոշակի արժեքներ: Ուստի A -ն և B -ն կարելի է հա-

* Քանի որ ըստ խնդրի իմաստի $T(t)$ -ն t -ի ցանկացած արժեքի դեպքում պետք է լինի սահմանափակ, եթե $\varphi(x)$ -ը սահմանափակ է, ապա $\frac{T'}{T}$ -ն պետք է լինի բացասական: Ուստի և գրում ենք $-\lambda^2$.

մարեւ λ -ի ֆունկցիաներ: (7) տեսքի լուծումների գումարը նույնպես լուծում է (շնորհիվ (1) հավասարման գծային լինելուն):

$$\sum_{\lambda} e^{-a^2 \lambda^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x],$$

(7) արտահայտությունն ինտեգրելով ըստ λ պարամետրի՝ 0-ից մինչև անվերջ սահմաններում, նույնպես ստանում ենք լուծում՝

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (8)$$

եթե $A(\lambda)$ -ն և $B(\lambda)$ -ն այնպիսին են, որ այս ինտեգրալը, ըստ t -ի նրա ածանցյալը և ըստ x -ի երկրորդ ածանցյալը գոյություն ունեն և ստացվում են ինտեգրալն ըստ t -ի և x -ի դիֆերենցիալ ճանապարհով: $A(\lambda)$ -ն և $B(\lambda)$ -ն ընտրենք այնպես, որ $u(x, t)$ լուծումը բավարարի (2) պայմանին: (8) հավասարություն մեջ ընդունելով $t=0$, (2) պայմանի հիման վրա ստանում ենք.

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda. \quad (9)$$

Ենթադրենք, թե $\varphi(x)$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ այն կարելի է ներկայացնել Ֆուրյեի ինտեգրալով (տես XVII գլխի § 13)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda(\alpha - x) d\alpha \right) d\lambda.$$

կամ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha \right) \cos \lambda x + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha \right) \sin \lambda x \right] d\lambda, \quad (10)$$

Համեմատելով (9)-ի և (10)-ի աջ մասերը, ստանում ենք.

$$\left. \begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha, \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$A(\lambda)$ -ի և $B(\lambda)$ -ի գտած արտահայտությունները տեղադրելով (8) բանաձևի մեջ, կստանանք.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha \right) \cos \lambda x + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha \right) \sin \lambda x \right] d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) (\cos \lambda \alpha \cos \lambda x + \sin \lambda \alpha \sin \lambda x) d\alpha \right] d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda(\alpha - x) d\alpha \right) d\lambda \end{aligned}$$

կամ, փոխելով ինտեգրման կարգը, վերջնականապես կստանանք.

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(\alpha) \left(\int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(\alpha - x) d\lambda \right) \right) d\alpha. \quad (12)$$

Սա էլ զրված խնդրի լուծումն է:

Ձևափոխենք (12) բանաձևը: Հաշվենք կլոր փակագծերի մեջ կրած ինտեգրալը.

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(\alpha - x) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \beta z dz, \quad (13)$$

Ինտեգրալի այս ձևափոխությունը կատարվել է հետևյալ տեղադրություների ճանապարհով՝

$$a\lambda\sqrt{t} = z, \quad \frac{\alpha - x}{a\sqrt{t}} = \beta, \quad (14)$$

Նշանակենք

$$K(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \beta z dz, \quad (15)$$

Դիֆերենցիալ*, ստանում ենք

$$K'(\beta) = - \int_0^{\infty} e^{-z^2} z \sin \beta z dz$$

* Դիֆերենցիալն հնարավորությունը հեշտությամբ հիմնավորվում է:

Ինտեգրելով մասերով, կգտնենք.

$$K'(\beta) = \frac{1}{2} [e^{-z^2} \sin \beta z]_0^\infty - \frac{\beta}{2} \int_0^\infty e^{-z^2} \cos \beta z dz$$

կամ

$$K'(\beta) = -\frac{\beta}{2} K(\beta);$$

Ինտեգրելով այս դիֆերենցիալ հավասարումը, կստանանք.

$$K(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4}}, \quad (16)$$

Որոշենք C հաստատունը: (15)-ից հետևում է.

$$K(0) = \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(տես XIV գլխի § 5): Հետևաբար, (16) հավասարության մեջ պետք է լինի.

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

Այսպես, ուրեմն

$$K(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}, \quad (17)$$

(15) ինտեգրալի (17) արժեքը տեղադրում ենք (13)-ի մեջ

$$\int_0^\infty e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda (\alpha - x) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

β -ի փոխարեն տեղադրելով նրա (14) արտահայտությունը, վերջնականապես ստանում ենք (15) ինտեգրալի արժեքը՝

$$\int_0^\infty e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda (\alpha - x) d\lambda = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}}, \quad (18)$$

Ինտեգրալի այս արտահայտությունը տեղադրելով (12) լուծման մեջ, վերջնականապես կստանանք.

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}} dz, \quad (19)$$

Այս բաւածեր, որը կոչվում է Պուասոնի ինտեգրալ, իրենից

ներկայացնում է անվերջ ձողում ջերմության տարածման վերաբերյալ առաջադրված խնդրի լուծումը:

Դիտողութուն: Կարելի է ապացուցել, որ $u(x, t)$ ֆունկցիան, որը որոշվում է (19) ինտեգրալով, (1) հավասարման լուծումն է և բավարարում է (2) սլաբանին, եթե $\varphi(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $(-\infty, \infty)$ անվերջ միջակայքում:

Պարզենք (19) բանաձևի ֆիզիկական իմաստը: Դիտարկենք

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } -\infty < x < x_0, \\ \varphi(x), & \text{երբ } x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, \\ 0, & \text{երբ } x_0 + \Delta x < x < \infty \end{cases} \quad (20)$$

Ֆունկցիան: Այս դեպքում

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}} d\alpha \quad (21)$$

Ֆունկցիան (1) հավասարման լուծումն է, որը $t=0$ դեպքում ստանում է $\varphi(x)$ արժեքը: Ուշադրություն դարձնելով (20)-ի վրա, կարելի է գրել.

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \varphi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}} dz,$$

Վերջին ինտեգրալի նկատմամբ կիրառելով միջինի վերաբերյալ թեորեմը, կստանանք.

$$u^*(x, t) = \frac{\varphi(\xi)\Delta x}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}, \quad x_0 < \xi < x_0 + \Delta x, \quad (22)$$

(22) բանաձևը տալիս է ջերմաստիճանի արժեքը ձողի կետում $t=0$ մասնակի ցանկացած պահին, եթե $t=0$ դեպքում ձողում ամենուրեք ջերմաստիճանը՝ $u^*=0$, բացի $[x_0, x_0 + \Delta x]$ հատվածից, որտեղ այն հավասար է $\varphi(x)$ -ի: (22) տեսքի ջերմաստիճանների գումարն էլ տալիս է (19) լուծումը: Նկատենք, որ եթե ρ -ն ձողի գծային խտությունն է, C -ն՝ նյութի ջերմահաղորդականությունը, ապա $[x_0, x_0 + \Delta x]$ հատվածում ջերմության քանակությունը $t=0$ դեպքում կլինի.

$$\Delta Q \approx \varphi(\xi)\Delta x \rho C, \quad (23)$$

Այնուհետև դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}, \quad (24)$$

Այն համեմատելով (22) բանաձևի աջ մասի հետ և հաշվի առնելով (54)-ը, ասում են, որ այն տալիս է ջերմաստիճանի արժեքը ձողի լուրաքանչյուր կետում ժամանակի ցանկացած t պահին, եթե $t=0$ դեպքում է հատույթում (սահմանային դեպքը, երբ $\Delta x \rightarrow 0$) եղել է $Q = c\rho$ ջերմություն քանակությունն ունեցող ջերմություն ակնթարթային աղբյուր:

§ 8. Խնդիրներ, որոնք բերում են Լապլասի հավասարման լուծումների հետապոտությանը: Ծայրային խնդիրների ձևակերպումը

Այս պարագրաֆում կքննարկեն մի քանի խնդիրներ, որոնք բերում են

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Լապլասի հավասարման լուծմանը: Ինչպես արդեն նշվել է, (1) հավասարման ձախ մասը նշանակվում է

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u,$$

որտեղ Δ -ն կոչվում է Լապլասի օպերատոր: Լապլասի հավասարմանը բավարարող u ֆունկցիաները կոչվում են հարմոնիկ ֆունկցիաներ:

I. Ջերմաստիճանի ստացիոնար (կայուն) աղբյուրի բաշխումը համասեռ մարմնում: Դիցուք ունենք Ω համասեռ մարմին, որը սահմանափակված է σ մակերևույթով: § 5-ում ցույց է տրվել, որ մարմնի տարրեր կետերում ջերմաստիճանը բավարարում է

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

հավասարմանը: Եթե պրոցեսը կայունացված է, այսինքն՝ եթե ջերմաստիճանը կախված չէ ժամանակից, այլ կախված է միայն մարմնի կետերի կոորդինատներից, ապա $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ և, հետևաբար, ջերմաստիճանը բավարարում է

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Լապլասի հավասարմանը: Որպեսզի այս հավասարումից մարմնում ջերմաստիճանը որոշվի միարժեք, պետք է իմանալ ջերմաստիճանը

σ մակերևույթի վրա: Այսպիսով, (1) հավասարման համար ծայրային խնդիրը ձևակերպվում է այսպես:

Գտնել այնպիսի $u(x, y, z)$ ֆունկցիա, որը Ω ծավալի ներսում բավարարում է (1) հավասարմանը և σ մակերևույթի լուրաքանչյուր M կետում ընդունում է տրված արժեքները:

$$u|_{\sigma} = \psi(M): \quad (2)$$

Այս խնդիրը կոչվում է (1) հավասարման համար Դիրիխլեի խնդիր կամ առաջին ծայրային խնդիր:

Եթե մարմնի մակերևույթի վրա ջերմաստիճանն անհայտ է, իսկ մակերևույթի լուրաքանչյուր կետում ջերմային հոսքը հայտնի է, ընդ որում այն համեմատական է $\frac{\partial u}{\partial n}$ -ին (տես § 5), ապա σ մակերևույթի վրա (2) ծայրային պայմանի փոխարեն կունենանք հետևյալ պայմանը.

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\sigma} = \psi^*(M): \quad (3)$$

(1) հավասարման (3) ծայրային պայմաններին բավարարող լուծումը գտնելու խնդիրը կոչվում է Նեյմանի խնդիր կամ երկրորդ ծայրային խնդիր:

Եթե դիտարկվում է ջերմաստիճանների բաշխումը C եզրագծով սահմանափակված D հարթ տիրույթում, ապա u ֆունկցիան կախված կլինի x և y երկու փոփոխականներից ու կրավարարի

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

հավասարմանը, որը կոչվում է Լապլասի հավասարում՝ հարթության վրա: (2) կամ (3) ծայրային պայմանները պետք է տեղի ունենան C եզրագծի վրա:

II. Հեղուկի կամ գազի պոտենցիալ հոսքը: Անխզելի ու թշյան հավասարումը: Դիցուք σ մակերևույթով սահմանափակված Ω ծավալի ներսը (մասնագործապես Ω -ն կարող է լինել և անսահմանափակ) կատարվում է հեղուկի շարժում: Դիցուք ρ -ն հեղուկի խտությունն է: Հեղուկի արագությունը նշանակենք

$$v = v_x i + v_y j + v_z k, \quad (5)$$

որտեղ v_x -ը, v_y -ը, v_z -ը \mathcal{V} վեկտորի պրոյեկցիաներն են կոորդինատային առանցքների վրա: Ω մարմնում առանձնացնենք ω փոքր ծավալ, որը սահմանափակված է S մակերևույթով: S մակերևույթի լուրաքանչյուր Δs տարրով Δt ժամանակամիջոցում կանցնի

$$\Delta Q = \rho v n \Delta s \Delta t$$

հեղուկի քանակություն, որտեղ n -ը S մակերևույթի արտաքին նորմալով ուղղված միավոր վեկտորն է: Հեղուկի Q ընդհանուր քանակությունը, որը մտնում է ω ծավալ (կամ հոսում է ω ծավալից), արտահայտվում է հետևյալ ինտեգրալով.

$$Q = \Delta t \int_S \rho v n ds \quad (6)$$

(տես XV գլխի §§ 5 և 6): ω ծավալում հեղուկի քանակությունը է պահին եղել է

$$\iiint_{\omega} \rho d\omega$$

Նստություն փոփոխության շնորհիվ Δt ժամանակամիջոցում հեղուկի քանակությունը կփոխվի

$$Q = \iiint_{\omega} \Delta \rho d\omega \approx \Delta t \iiint_{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega \quad (7)$$

մեծությունը:

Ենթադրելով, որ ω ծավալում չկան աղբյուրներ, եզրակացնում ենք, որ այդ փոփոխությունը պայմանավորված է հեղուկի հոսքով, որի քանակը որոշվում է (6) հավասարությունով: Հավասարեցնելով (6) և (7) հավասարությունների աջ մասերը և կրճատելով Δt -ով, կըստանանք.

$$\int_S \rho v n ds = \iiint_{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega \quad (2)$$

Ձախակողմյան կրկնապատիկ ինտեգրալը ձևափոխենք ըստ Օստրոգրադսկու բանաձևի (XV գլխի § 8): Այդ դեպքում (8) հավասարությունը կընդունի

$$\iiint_{\omega} \operatorname{div}(\rho v) d\omega = \iiint_{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega$$

կամ

$$\iiint_{\omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho v) \right) d\omega = 0$$

տեսքը: ω ծավալի կամայական լինելու և ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ ստանում ենք.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad (9)$$

կամ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0, \quad (9')$$

Սա էլ հենց սեղմվող հեղուկի հոսքի անխզելիության հավասարումն է:

Դիտողություն: Մի քանի խնդիրներում, օրինակ, ստորերկրյա ծակոտկեն միջավայրում դեպի հորատանցքը նավթի կամ գազի շարժման պրոցեսը քննարկելիս, կարելի է ընդունել

$$v = -\frac{k}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

որտեղ ρ -ն ճնշումն է, k -ն՝ թափանցելիության գործակիցը. և

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \lambda \frac{\partial p}{\partial t},$$

$\lambda = \text{const}$: Տեղադրելով (9) անխզելիության հավասարման մեջ, կըստանանք.

$$-\lambda \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} p) = 0$$

կամ

$$-\lambda \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \rho}{\partial z} \right), \quad (10)$$

Եթե k -ն հաստատուն է, ապա այս հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{k}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right), \quad (11)$$

և մենք գալիս ենք ջերմահաղորդականության հավասարմանը:

Դառնանք (9) հավասարմանը: Եթե հեղուկը չսեղմվող է, ապա $\rho = \text{const}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ և (9) հավասարումն ընդունում է

$$\operatorname{div} v = 0 \quad (12)$$

տեսքը: Եթե շարժումը պոտենցիալային է, այսինքն՝ v վեկտորը մի որոշ φ ֆունկցիայի գրադիենտն է՝

$$v = \operatorname{grad} \varphi,$$

ապա (12) հավասարումն ընդունում է

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

կամ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

տեսքը, այսինքն՝ φ արտադրության պոտենցիալային ֆունկցիան պետք է բավարարի Լապլասի հավասարմանը: Շատ խնդիրներում, ինչպես օրինակ, ֆիլտրացման խնդիրներում, կարելի է ընդունել

$$\tau = -k_1 \text{grad } p,$$

որտեղ p -ն ճնշումն է, k_1 -ը՝ հաստատունը. այս դեպքում ճնշումը որոշելու համար ստանում ենք.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (13')$$

Լապլասի հավասարումը:

(13) կամ (13') հավասարման համար ծայրային պայմաններ կարող են լինել հետևյալները.

1. σ մակերևույթի վրա տրվում են ճնշման p ֆունկցիայի արժեքները (պայման (12)): Սա Դիրիխլեի խնդիրն է:

2. σ մակերևույթի վրա տրվում են $\frac{\partial p}{\partial n}$ նորմալ ածանցյալի արժեքները, այսինքն՝ տրվում է հոսքը մակերևույթի միջով (պայման (3)): Սա Նեյմանի խնդիրն է:

3. σ մակերևույթի մի մասի վրա տրվում են որոշվող ճնշման p ֆունկցիայի արժեքները, իսկ մակերևույթի մյուս մասի վրա տրվում են $\frac{\partial p}{\partial n}$ նորմալ ածանցյալի արժեքները, այսինքն՝ հոսքը մակերևույթի միջով: Սա Դիրիխլե-Նեյմանի խնդիրն է:

Եթե շարժումը հարթ-զուգահեռ է, այսինքն՝ φ (կամ p) ֆունկցիան կախված չէ z -ից, ապա ստացվում է Լապլասի հավասարումը C եզրագծի ունեցող D երկչափ սիրույթում.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (14)$$

(2) տիպի ծայրային պայմանները (Դիրիխլեի խնդիրը) կամ (3) պայմանները (Նեյմանի խնդիրը) տրվում են C եզրագծի վրա:

III. Ստացիոնար էլեկտրական հոսանքի պոտենցիալը: Դիցուք որևէ V ծավալ ունեցող համասեռ միջավայրում անցում է էլեկտրական հոսանք, որի խտությունը չորաբանչյուր կետում տրվում է $J(x, y, z) = J_x i + J_y j + J_z k$ վեկտորով: Ենթադրենք, որ հոսանքի խտությունը կախված չէ t ժամանակից: Այնուհետև ենթադր-

րենք, որ դիտարկվող ծավալում չկան հոսանքի աղբյուրներ: Հետևաբար, J վեկտորի հոսքը V ծավալի ներսն ընկած ցանկացած S փակ մակերևույթի միջով հավասար կլինի զրոյի.

$$\iint_S J n ds = 0,$$

որտեղ n -ը մակերևույթի արտաքին նորմալով ուղղված միավոր վեկտորն է: Օստրոգրադսկու բանաձևից եզրակացնում ենք, որ

$$\text{div } J = 0, \quad (15)$$

Օհմի ընդհանրացված օրենքի հիման վրա որոշվում է դիտարկվող հաղորդող միջավայրում E էլեկտրական ուժը.

$$E = J/\lambda \quad (16)$$

կամ

$$J = \lambda E,$$

որտեղ λ -ն միջավայրի հաղորդականությունն է, որը համարելու ենք հաստատուն:

Էլեկտրամագնիսական դաշտի ընդհանուր հավասարումներից հետևում է, որ եթե պրոցեսը ստացիոնար է, ապա E վեկտորական դաշտը անմարրիկային է, այսինքն՝ $\text{rot } E = 0$: Այս դեպքում համանման նրան, ինչ մենք ունեինք հեղուկի արագությունների դաշտը դիտարկելիս, վեկտորական դաշտը պոտենցիալային է (տես XV գլխի §9): Գոյություն ունի այնպիսի φ ֆունկցիա, որ

$$E = \text{grad } \varphi, \quad (17)$$

(16)-ի հիման վրա ստանում ենք.

$$J = \lambda \text{grad } \varphi, \quad (18)$$

(15)-ից և (18)-ից հետևում է

$$\lambda \text{div}(\text{grad } \varphi) = 0$$

կամ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (19)$$

Ստացանք Լապլասի հավասարումը:

Լուծելով այս հավասարումը համապատասխան ծայրային պայմանների դեպքում, կգտնենք φ ֆունկցիան, իսկ (18) և (17) բանաձևերով կգտնենք J հոսքը և E էլեկտրական ուժը:

§ 9. Լապլասի հավասարումը գլանային կոորդինատներով: Դիրիլլեի խնդրի լուծումն այնպիսի օղակի համար, որի ներքին և արտաքին շրջանագծերի վրա որոնվող ֆունկցիան ունի հաստատուն արժեքներ

Դիցուք $u(x, y, z)$ -ը u կրեք փոփոխականների հարմոնիկ ֆունկցիա է:

Այս դեպքում

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

Մուծենք (r, φ, z) գլանային կոորդինատները.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

որտեղից

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad z = z, \quad (2)$$

x, y և z անկախ փոփոխականները փոխարինելով r, φ և z -ով, կդառնանք u^* ֆունկցիան.

$$u(x, y, z) = u^*(r, \varphi, z):$$

Գտնենք այն հավասարումը, որին կբավարարի $u^*(r, \varphi, z)$ ֆունկցիան՝ որպես r, φ և z արգումենտների ֆունկցիա:

Ունենք

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

նման ձևով,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

բացի դրանից,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

համար արտահայտությունները գտնում ենք (2) հավասարություններից: Գտնարելով (3), (4) և (5) հավասարությունների աջ մասերը և գումարը հավասարեցնելով զրոյի (քանի որ (1)-ի համաձայն այդ հավասարությունների ձախ մասերի գումարը հավասար է զրոյի), ստանում ենք.

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} = 0, \quad (6)$$

Սա էլ հենց Լապլասի հավասարումն է՝ գլանային կոորդինատներով:

Եթե u ֆունկցիան կախված չէ z -ից և կախված է x -ից և y -ից, ապա միայն r -ից և φ -ից կախված u^* ֆունկցիան բավարարում է

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (7)$$

հավասարմանը, որտեղ r -ն և φ -ն հարթության վրա բևեռային կոորդինատներն են:

Այժմ գտնենք Լապլասի հավասարման լուծումը $K_1: x^2 + y^2 = R_1^2$ և $K_2: x^2 + y^2 = R_2^2$ շրջանագծերով սահմանափակված D տիրույթում (օղակում), որն ընդգրկում է հետևյալ ծալրային արժեքները.

$$u|_{K_1} = u_1, \quad (8)$$

$$u|_{K_2} = u_2, \quad (9)$$

որտեղ u_1 և u_2 հաստատուններ են:

Խնդիրը կլուծենք բևեռային կոորդինատներով: Պարզ է, որ նպատակահարմար է որոնել այն լուծումները, որը կախված չէ φ -ից: Այս դեպքում (7) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0,$$

Իստեղրելով այս հավասարումը, կդառնանք.

$$u = C_1 \ln r + C_2, \quad (10)$$

(8) և (9) պայմաններից որոշենք C_1 -ը և C_2 -ը.

$$u_1 = C_1 \ln R_1 + C_2, \quad u_2 = C_1 \ln R_2 + C_2,$$

Այստեղից գտնում ենք.

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad C_2 = u_1 - (u_2 - u_1) \frac{\ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{u_1 \ln R_2 - u_2 \ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}},$$

C_1 -ի և C_2 -ի այս արժեքները տեղադրելով (10) բանաձևի մեջ, վերջնականապես ստանում ենք.

$$u = u_1 + \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} (u_2 - u_1) = \frac{u_2 \ln \frac{r}{R_1} - u_1 \ln \frac{r}{R_2}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad (11)$$

Դիտող ու թյուև: Փաստորեն մենք լուծեցինք հետևյալ խնդիրը: Գտնել այնպիսի u ֆունկցիա, որը $r=R_1$, $r=R_2$, $z=0$, $z=H$ մակերևույթներով (պլանային կոորդինատներով) սահմանափակված տիրույթում բավարարում է հետևյալ եզրային պայմաններին.

$$u|_{r=R_1} = u_1, \quad u|_{r=R_2} = u_2, \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0,$$

(Դիրիխլե-Նեյմանի խնդիր): Ակնհայտ է, որ որոնվող լուծումը կախված չէ ոչ z -ից, ոչ էլ φ -ից և տրվում է (11) բանաձևով:

§ 10. Դիրիխլեի խնդրի լուծումը շրջանի համար

Դիցուք Oxy հարթության վրա ունենք R շառավղով շրջան, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, և որի շրջանագծի վրա տրված է որոշ $i(\varphi)$ ֆունկցիա, որտեղ φ -ն բևեռային անկյունն է: Պահանջվում է գտնել $u(r, \varphi)$ ֆունկցիա, որն անընդհատ է շրջանի մեջ, ներառյալ նրա եզրագիծը, շրջանի ներսը բավարարում է Լապլասի հավասարմանը.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

և շրջանագծի վրա ընդհանում է

$$u|_{r=R} = i(\varphi) \quad (2)$$

տրված արժեքները: Խնդիրը կլուծենք բևեռային կոորդինատներով: (1) հավասարումը գրենք այդ կոորդինատներով.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

կամ

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1')$$

Լուծումը կորոնենք փոփոխականների անջատման մեթոդով, ընդունելով

$$u = \Phi(\varphi)R(r), \quad (3)$$

Տեղադրելով (1') հավասարման մեջ, կստանանք.

$$r^2 \Phi(\varphi) R''(r) + r \Phi(\varphi) R'(r) + \Phi''(\varphi) R(r) = 0$$

կամ

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -k^2, \quad (4)$$

Քանի որ այս հավասարության ձախ մասը կախված չէ r -ից, իսկ աջ մասը՝ φ -ից, հետևաբար, զրանք հավասար են հաստատուն թվի, որը մենք նշանակում ենք $-k^2$ -ով: Այսպիսով, (4) հավասարությունը տալիս է երկու հավասարումներ.

$$\Phi''(\varphi) + k^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad (5)$$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - k^2 R(r) = 0, \quad (5')$$

(5) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի.

$$\Phi = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi, \quad (6)$$

(5') հավասարման լուծումը կորոնենք $R(r) = r^m$ տեսքով: (5')-ի մեջ տեղադրելով $R(r) = r^m$, կստանանք.

$$r^{2m}(m-1)r^{m-2} + r m r^{m-1} - k^2 r^m = 0$$

կամ

$$m^2 - k^2 = 0,$$

Եվ այսպես, կա երկու գծորեն անկախ մասնավոր լուծումներ՝ r^k և r^{-k} , (5') հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի.

$$R = C r^k + D r^{-k}, \quad (7)$$

(6) և (7) արտահայտությունները տեղադրում ենք (3)-ի մեջ

$$u_k = (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)(C_k r^k + D_k r^{-k}), \quad (8)$$

(8) ֆունկցիան կլինի (1') հավասարման լուծում k -ի զրոյից տարբեր ցանկացած արժեքի դեպքում: Եթե $k=0$, (5) և (5') հավասարումներն ընդունում են՝

$$\Phi'' = 0, \quad r R''(r) + R'(r) = 0,$$

և հետևաբար,

$$u_0 = (A_0 + B_0 \varphi)(C_0 + D_0 \ln r) \quad (8')$$

տեսքը:

Լուծումը պետք է լինի φ -ի պարբերական ֆունկցիա, քանի որ r -ի միևնույն արժեքի համար φ -ի և $\varphi + 2\pi$ -ի դեպքում մենք պետք է ունեն-

նաև ք միևնույն լուծումը, որովհետև դիտարկվում է շրջանի միևնույն կետը: Ուստի ակնհայտ է, որ (8') բանաձևում պետք է լինի $B_0=0$: Այնուհետև, մենք որոնում ենք շրջանի մեջ անընդհատ և վերջավոր լուծումը: Հետևաբար, շրջանի կենտրոնում, երբ $r=0$, լուծումը պետք է լինի վերջավոր և ստի (8') բանաձևում պետք է լինի $D_0=0$, իսկ (8) բանաձևում՝ $D_k=0$:

Այսպիսով, (8')-ի աջ մասը դառնում է A_0C_0 արտադրյալ, որը նշանակենք $\frac{A_0}{2}$ -ով: Եվ այսպես,

$$u_0 = \frac{A_0}{2}, \quad (8'')$$

Մեր խնդրի լուծումը կազմելու ենք (8) տեսքի լուծումների գումարի տեսքով, քանի որ լուծումների գումարը լուծում է: Գումարը պետք է լինի φ -ի պարբերական ֆունկցիա: Դա այդպես կլինի, եթե լուրջաբանչյուր գումարելի լինի φ -ի պարբերական ֆունկցիա: Դրա համար k -ն պետք է ընդունի ամբողջ արժեքներ: (Նկատենք, որ եթե (4) հավասարության մասերը հավասարեցնենք $+k^2$ թվին, ապա պարբերական լուծում չէինք ստանա): Կարող ենք սահմանափակվել միայն

$$k=1, 2, \dots, n, \dots,$$

ամբողջ արժեքներով, քանի որ A, B, C, D գործակիցների կամայական լինելու շնորհիվ k -ի բացասական արժեքները նոր մասնավոր լուծումներ չեն տալիս: Եվ այսպես,

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n \quad (9)$$

(C_n հաստատունը մտցված է A_n -ի և B_n -ի մեջ): Այժմ A_n և B_n հաստատուններն ընտրենք այնպես, որ բավարարվի (2) ծալրալին պայմանը:

(9) հավասարության մեջ տեղադրելով $r=R$, (2) պայմանի հիման վրա ստանում ենք.

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) R^n, \quad (10)$$

(10) հավասարությունը տեղի ունենալու համար պետք է, որ $f(\varphi)$ ֆունկցիան $(-\pi, \pi)$ միջակայքում վերլուծվի Ֆուրյեի շարքի և որ

$A_n R^n$ -ը և $B_n R^n$ -ը լինեն նրա Ֆուրյեի գործակիցները: Հետևաբար, A_n -ը և B_n -ը պետք է որոշվեն հետևյալ բանաձևերով.

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad (11)$$

Եվ այսպես, (9) շարքը, որի գործակիցները որոշվում են (11) բանաձևերով, կլինի մեր խնդրի լուծումը, եթե այն թույլատրում է երկու անգամ անգամ առ անգամ դիֆերենցում (սա մենք չենք ապացուցել): Ձևափոխենք (9) բանաձևը: A_n -ի և B_n -ի փոխարեն տեղադրելով նրանց (11) արտահայտությունները և կատարելով եռանկյունաչափական ձևափոխություններ, կստանանք.

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t-\varphi) dt \left(\frac{r}{R}\right)^n = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi) \right] dt, \end{aligned} \quad (12)$$

Ձևափոխենք քառակուսի փակագծերում գտնվող արտահայտությունը*.

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n [e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}] = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}\right)^n + \left(\frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}\right)^n \right] = \\ &= 1 + \frac{\frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}} + \frac{\frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}} = \\ &= \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - 2 \frac{r}{R} \cos(t-\varphi) + \left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t-\varphi) + r^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

* Արտածման ընթացքում որոշում ենք այն անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը, որի հայտարարը մեկից փոքր մոդուլ ունեցող կոմպլեքս թիվ է: Երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի այս բանաձևը արտածվում է այնպես, ինչպես և իրական թվերի դեպքում: Ընդ որում պետք է հաշվի առնել իրական արգումենտի կոմպլեքս ֆունկցիայի սահմանումը: Այստեղ արգումենտ է ուր (տես 1 հատ. VII գլխի § 4):

(12) բանաձևում քառակուսի փակագծերում եղած արտահայտությունը փոխարինելով (13) արտահայտությամբ, կստանանք.

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(t - \varphi) + r^2} dt \quad (14)$$

(14) բանաձևը կոչվում է Պուասոնի ինտեգրալ: Այս բանաձևի քննարկումից ելնելով ապացուցվում է, որ եթե $f(\varphi)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա (14) ինտեգրալով որոշված $u(r, \varphi)$ ֆունկցիան բավարարում է (1') հավասարմանը և $r \rightarrow R$ դեպքում $u(r, \varphi) \rightarrow f(\varphi)$, այսինքն՝ $u(r, \varphi)$ -ն շրջանի համար Դիրիխլեի խնդրի լուծումն է:

§ 11. Դիրիխլեի խնդրի լուծումը վերջավոր տարբերությունների մեթոդով

Դիցուք Oxy հարթության վրա տրված է C եզրագծով սահմանափակված D տիրույթը և C եզրագծի վրա տրված է f անընդհատ ֆունկցիան: Պահանջվում է գտնել

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Լապլասի հավասարման այն մոտավոր լուծումը, որը բավարարում է

$$u|_C = f \quad (2)$$

եզրային պայմանին:

Տանենք ուղիղների երկու ընտանիք՝

$$x = ih \text{ և } y = kh, \quad (3)$$

որտեղ h -ը տրված թիվ է, i -ն և k -ն հաջորդական ամբողջ թվով արժեքներ: Կասենք, որ D տիրույթը ծածկված է ցանցով: Ուղիղների հատման կետերը կանվանենք ցանցի հանգույցներ:

Որոնվող ֆունկցիայի մոտավոր արժեքը

$$x = ih, \quad y = kh$$

կետում կնշանակենք $u_{i,k}$ -ով, այսինքն՝ $u(ih, kh) = u_{i,k}$: D տիրույթը մոտարկենք D^* ցանցային տիրույթով, ուր կազմված է այն բոլոր քառակուսիներից, որոնք ընկած են D տիրույթում և մի քանիսն էլ հատում են C եզրագիծը (վերջիններս կարելի է հաշվի չառնել): Այդ դեպքում C եզրագիծը մոտարկվում է C^* եզրագծով, որը կազմված է (3) տիպի ուղիղների հատվածներից: C^* եզրագծի վրա ընկած յուրա-

քանչյուր հանգույցում տանք f^* արժեքը, որը հավասար է C եզրագծի ամենամոտ կետում f ֆունկցիայի արժեքին (նկ. 395):

Որոնվող ֆունկցիայի արժեքները կդիտարկենք միայն ցանցի հանգույցներում: Ինչպես արդեն ասվել է, § 6-ում քննարկվող մոտավոր մեթոդում ածանցյալները փոխարինվում են վերջավոր տարբերություններով.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=ih, y=kh} &= \frac{u_{i+1, k} - 2u_{i, k} + u_{i-1, k}}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{x=ih, y=kh} &= \frac{u_{i, k+1} - 2u_{i, k} + u_{i, k-1}}{h^2}, \end{aligned}$$

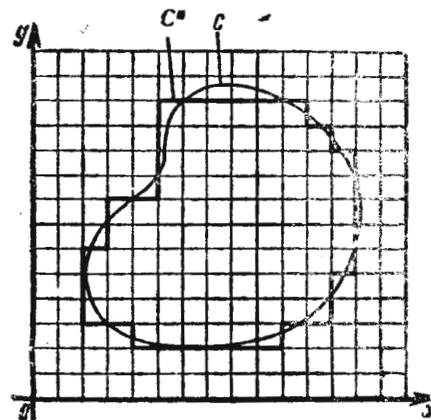
(1) դիֆերենցիալ հավասարումը փոխարինվում է տարբերակային հավասարումով կամ վերջավոր տարբերությունների հավասարումով (h^2 -ով կրճատելուց հետո)

$$u_{i+1, k} - 2u_{i, k} + u_{i-1, k} + u_{i, k+1} - 2u_{i, k} + u_{i, k-1} = 0$$

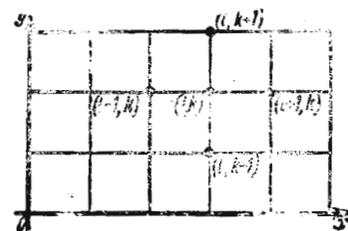
կամ (նկ. 396)

$$u_{i, k} = \frac{1}{4} (u_{i+1, k} + u_{i-1, k} + u_{i, k+1} + u_{i, k-1}): \quad (4)$$

Ցանցի յուրաքանչյուր հանգույցի համար, որը գտնվում է D տիրույթի ներսը (և ընկած չէ C^* եզրագծի վրա), կազմում ենք (4) հավասարումը: Եթե $(x = ih, y = kh)$ կետը C^* եզրագծի կետի հարևան կետն է, ապա (4) հավասարության աջ մասում որոշ



Նկ. 395



Նկ. 396

գումարելիներ f^* -ի հայտնի արժեքներն են: Այսպիսով, ստանում ենք N անհայտով N հավասարումների անհամասեռ համակարգ (N -ը ցանցի այն հանգույցների թիվն է, որոնք ընկած են D^* տիրույթում):

Ապացուցենք, որ (4) համակարգն ունի լուծում, և ընդ որում՝

միակը: Այս N անհարող N գծային հավասարումների համակարգ է: Սա միակ լուծում ունի այն դեպքում, եթե համակարգի դետերմինանտը զրոյից տարբեր է: Համակարգի դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, եթե համասեռ համակարգն ունի միայն տրիվիալ (զրոյական) լուծում: Համակարգը կլինի համասեռ, եթե C^* եզրագծի վրա ցանցի հանգույցներում $f^*=0$: Մենք հենց նոր ապացույցեցինք, որ այդ դեպքում $u_{i,k}$ բոլոր արժեքները ցանցի բոլոր ներքին հանգույցներում հավասար են զրոյի: Դիցուք տիրույթի ներսում կա զրոյից տարբեր $u_{i,k}$: Որոշակիություն համար ենթադրենք, որ նրանցից ամենամեծը դրական է: Այն նշանակենք $\bar{u}_{i,k} > 0$:

(4) բանաձևի հիման վրա կգրենք.

$$\bar{u}_{i,k} = \frac{1}{4} (u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1}), \quad (4')$$

Այս հավասարումը կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, եթե աջ մասում գտնվող U-ի բոլոր արժեքները հավասար են (ամենամեծ) $\bar{u}_{i,k}$ -ին: Այժմ ունենք հինգ կետեր, որոնցում որոնվող ֆունկցիայի արժեքները $\bar{u}_{i,k}$ են: Եթե այդ կետերից ոչ մեկը եզրագծին չի պատկանում, ապա, վերցնելով նրանցից մեկը և նրա համար գրելով (4) հավասարությունը, ապացուցենք, որ մի քանի ուրիշ կետերում որոնվող ֆունկցիայի արժեքը հավասար կլինի $\bar{u}_{i,k}$ -ին: Շարունակելով այսպես, կհասնենք մինչև եզրագիծ և կապացուցենք, որ եզրագծի կետում ֆունկցիայի արժեքը հավասար կլինի $u_{i,k}$ -ին: Սա հակասում է այն բանին, որ եզրագծի կետերում $f^*=0$:

Ենթադրելով, որ տիրույթի ներսում գոյություն ունի բացասական ամենափոքր արժեք, կապացուցենք, որ եզրագծի վրա ֆունկցիայի արժեքը բացասական է: Սա հակասում է տրված պայմանին: Եվ այսպես, (4) համակարգն ունի լուծում, այն էլ միակը:

(4) համակարգից որոշված $u_{i,k}$ արժեքներն էլ հենց վերը ձևակերպված Դիրիլեյի խնդրի լուծման մոտավոր արժեքներն են: Ապացուցված է, որ եթե տվյալ տիրույթի և տվյալ ֆունկցիայի համար Դիրիլեյի խնդրի լուծումը գոյություն ունի (այն նշանակենք $u(x, y)$) և եթե $u_{i,k}$ -ն (4) համակարգի լուծումն է, ապա տեղի ունի հետևյալ սունչությունը.

$$|u(x, y) - u_{i,k}| < Ah^2, \quad (5)$$

որտեղ A-ն h-ից կախում չունեցող հաստատուն է: Դիտողություն: Խիստ ապացուցված չլինելով հանդերձ, իրեն արդարացնում է մոտավոր սխալանքի գնահատման հետևյալ եղանակը: Դիցուք $u_{i,k}^{(2h)}$ -ը մոտավոր լուծումն է 2h քալի դեպքում,

$u_{i,k}^{(h)}$ -ը՝ մոտավոր լուծումը h քալի դեպքում, $E_h(x, y)$ -ը՝ $u_{i,k}^{(h)}$ լուծման սխալանքն է: Այս դեպքում ցանցերի ընդհանուր կետերում տեղի ունի

$$E_h(x, y) \approx \frac{1}{3} (u_{i,k}^{(2h)} - u_{i,k}^{(h)})$$

մոտավոր հավասարությունը: Եվ այսպես, h քալի դեպքում մոտավոր լուծման սխալանքը որոշելու համար պետք է գտնել լուծումը 2h քալի դեպքում: Հենց այդ մոտավոր լուծումների տարբերության մեկ երրորդն էլ h քալի դեպքում լուծման սխալ գնահատականն է: Այս դիտողությունը կարելի է կիրառել նաև վերջավոր տարբերությունների մեթոդով չեմամահաղորդականություն հավասարման լուծման նկատմամբ:

Վարժություններ XVIII գլխի վերաբերյալ

1. Արտածել համասեռ դանային ձողի ոլորման տատանումների հավասարումը:

Ցուցում: Ձողի x արսցիսն ունեցող հատույթում ոլորող մոմենտը որոշվում է $M = GI \frac{\partial \theta}{\partial x}$ բանաձևով, որտեղ $\theta(x, t)$ -ն t պահին x արսցիսն ունեցող հատույթի ոլորման անկյունն է, GI-ն տեղաշարժման մոդուլը, I-ն՝ ձողի լայնակի հատույթի իներցիայի բևեռային մոմենտը:

Պատ. $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$, որտեղ $a^2 = \frac{GI}{k}$, k-ն ձողի միավոր երկարության իներցիայի մոմենտն է.

2. Գտնել $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$\theta(0, t) = 0, \quad \theta(l, t) = 0, \quad \theta(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial t} = 0$$

$$\varphi(x) = \frac{2\theta_0 x}{l}, \quad \text{երբ } 0 \leq x \leq \frac{l}{2},$$

$$\varphi(x) = -\frac{2\theta_0 x}{l} + 2\theta_0, \quad \text{երբ } \frac{l}{2} < x \leq l.$$

Ցույ խնդրի երկրաչափական մեկնարանությունը:

Պատ.

$$\theta(x, t) = \frac{8\theta_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{l}$$

3. Արտածել համասեռ դանային ձողի երկայնակի տատանումների հավասարումը:

Ցուցում: Եթե $u(x, t)$ -ն ձողի x արսցիսն ունեցող հատույթի տեղափո-

խությունն է t պահին, ապա x հատույթում T ձողը լարումը որոշվում է $T=ES \frac{\partial u}{\partial x}$ բանաձևով, որտեղ E -ն նյութի առաձգականության մոդուլն է, S -ը՝ ձողի լայնահի հատույթի մակերեսը:

Պատ. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, որտեղ $a^2 = \frac{E}{\rho}$, ρ -ն ձողի նյութի խտությունն է:

4. $2l$ երկարություն ունեցող ձողն իր ծայրերին կիրառված ուժերի ազդեցության տակ կարճացվել է 2λ մեծությամբ: $t=0$ դեպքում այն ազատված է գարծող արտաքին ուժերից: Որոշել ձողի x արդյուն ունեցող հատույթի շեղումը t պահին (ձողի առանցքի միջնակետն ունի $x=0$ արդյուն):

$$\text{Պատ. } u(x, t) = \frac{8\lambda}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi \alpha t}{2l}$$

5. l երկարությամբ ձողի մի ծայրն ամրացված է, իսկ մյուսի վրա ազդում է P ձող ուժը: Գտնել ձողի երկայնակի տատանումները, եթե $t=0$ դեպքում P ուժը չի գործում:

$$\text{Պատ. } \frac{8Pl}{ES\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi \alpha t}{2l} \quad (E\text{-ի և } S\text{-ի իմաստը տես խնդիր 3-ում):$$

6. Գտնել $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \sin \omega t, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

պայմաններին: Տալ խնդրի մեխանիկական մեկնաբանությունը:

$$\text{Պատ. } u(x, t) = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \frac{\omega}{a} l} + \frac{2A\omega a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2} \sin \frac{n\pi \alpha t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

8 ու ը ս ու մ: Լուծումը որոնել երկու լուծումների գումարի տեսքով:

$$u = v + w, \quad \text{որտեղ } w = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \frac{\omega}{a} l}$$

լուծում, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին:

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \\ v(x, 0) = -w(x, 0), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t}$$

(ծնթաղբովում է, որ $\sin \frac{\omega}{a} l \neq 0$):

7. Գտնել $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{երբ } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ l-x, & \text{երբ } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

Պատ.

$$u(x, t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

8 ու ը ը ս ու մ, Խնդրել լուծել փոփոխականների անջատման մեթոդով:

8. Գտնել $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{x(l-x)}{l}$$

$$\text{Պատ. } u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

9. Գտնել $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad u(l, t) = u_0, \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

պայմաններին, Ցույց տալ խնդրի ֆիզիկական իմաստը:

$$\text{Պատ. } u(x, t) = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

որտեղ

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \frac{(-1)^n 4u_0}{\pi(2n+1)}$$

8 ու ը ը ս ու մ: Լուծումը որոնել $u = u_0 + v(x, t)$ տեսքով:

10. Գտնել $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = -Hu \Big|_{x=1}, \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

պայմաններին, Ցույց տալ խնդրի ֆիզիկական իմաստը:

$$\text{Պատ. } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{\mu_n x}{l}, \quad \text{որտեղ}$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\mu_n x}{l} dx, \quad p=Hl, \quad \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n = l \text{ և } \mu = -\frac{\mu}{p} \text{ հավա-}$$

սարման գրական արժանատիքն են,

11. Գտնել (ըստ § 6-ի (10) բանաձևի, ընդունելով $h=0,2$) $\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին:

$$u(x, 0) = x \left(\frac{3}{2} - x \right), \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \frac{1}{2} \quad 0 \leq t \leq 4l.$$

12. $0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \infty$ շերտում գտնել $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Լապլասի հավա-

սարման այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին:

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = A \left(1 - \frac{x}{a} \right), \quad u(x, \infty) = 0,$$

Պատ. $u(x, t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a}y} \sin \frac{n\pi x}{a}.$

Ցուցում: Լուծումը որոնել փոփոխականների անջատման մեթոդով:

13. $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ ուղղանկյան մեջ գտնել $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Լապլասի հավա-

սարման այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad u(0, y) = Ay(b-y), \quad u(a, y) = 0,$$

Պատ. $u(x, t) = \frac{8Ab^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{b}}{(2n+1)^3 \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi a}{b}}$

14. $x^2 + y^2 = R_1^2, x^2 + y^2 = R_2^2$ շրջանագծերով սահմանափակված օղակում գտն-

ել $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = +\frac{Q}{\lambda 2\pi R_1}, \quad u \Big|_{r=R_2} = u_2$$

պայմաններին: Տալ խնդրի հիդրոդինամիկական մեկնաբանությունը:

Ցուցում: Խնդիրը լուծել բեռային կոորդինատներով:

Պատ. $u = u_2 - \frac{Q}{2\lambda\pi} \ln \frac{R^2}{r}$

15. Ապացուցել, որ $u(x, y) = e^{-y} \sin x$ ֆունկցիան $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ բառա-

կուսուռ մեջ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ հավասարման լուծումն է, որը բավարարում է հետևյալ

պայմաններին:

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = e^{-y} \sin 1, \quad u(x, 0) = \sin x, \quad u(x, 1) = e^{-1} \sin x.$$

16. 12-15 խնդիրներում լուծել Լապլասի հավասարումը տրված եզրային պայմանների դեպքում՝ վերջավոր տարբերությունների մեթոդով, երբ $h=0,25$; Համեմատել մոտավոր և ճշգրիտ լուծումները:

XIX Գ Լ Ո Ւ Խ

Օպերացիոն շահիվ եվ նրա մի ըսնի ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Օպերացիոն հաշիվը ներկայումս մաթեմատիկական անալիզի կարևոր բնագավառներից մեկն է: Ֆիզիկայում, մեխանիկայում, էլեկտրատեխնիկայում և ուրիշ գիտություններում տարբեր խնդիրներ լուծելիս օգտագործվում են օպերացիոն հաշիվի մեթոդները: Օպերացիոն հաշիվը ստացել լալն կիրառություն է գտնում ժամանակակից ավտոմատիկայում և տեղեմեխանիկայում: Այս գլխում (դասագրքի նախորդ գլուխների հիման վրա) տրված են օպերացիոն հաշիվ* հիմնական հասկացությունները և շարադրված են սովորական գիՖերենցիալ հավասարումների լուծման օպերացիոն մեթոդները:

§ 1. Սկզբնական ֆունկցիա և նրա պատկերը

Դիցուք տրված է t իրական փոփոխականի ֆունկցիա, որը որոշված է $t \geq 0$ դեպքում (երբեմն ընդունելու ենք, որ $f(t)$ ֆունկցիան որոշված է $-\infty < t < \infty$ միջակայքում, բայց $f(t) = 0$ $t < 0$ դեպքում): Ենթադրելու ենք, որ $f(t)$ ֆունկցիան կտոր առ կտոր անընդհատ է, այսինքն՝ այնպիսին, որ ցանկացած վերջավոր միջակայքում այն ունի վերջավոր թվով 1-ին սևոի խզման կետեր (տես I հատ. II գլխի § 9):

* Օպերացիոն հաշիվ և նրա կիրառությունների հետագա ուսումնասիրության համար կարելի է նշել հետևյալ դրքերը. Ա. Ի. Լурье, Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, М.—Л., Гостехиздат, 1950; В. А. Диткин и П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, М.—Л., Гостехиздат, 1951; В. А. Диткин и А. П. Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление, Физматгиз, 1961; Я. Микусинский, Операционное исчисление, М., ИЛ, 1956.

$0 \leq t < \infty$ անվերջ միջակայքում մի քանի ինտեգրալների գոյությունն ապահովելու համար $f(t)$ ֆունկցիայի վրա դնում ենք լրացուցիչ սահմանափակում: Այն է՝ ենթադրելու ենք, որ գոյություն ունեն M և s_0 այնպիսի հաստատուն դրական թվեր, որ $0 \leq t < \infty$ միջակայքից վերջրած t -ի ցանկացած արժեքի համար

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}, \quad (1)$$

Դիտարկենք $f(t)$ ֆունկցիայի և t իրական փոփոխականի e^{-pt} կոմպլեքս ֆունկցիայի* արտադրյալը, որտեղ $p = a + ib$ ($a > 0$) որևէ կոմպլեքս թիվ է:

$$e^{-pt} f(t), \quad (2)$$

(2) ֆունկցիան նույնպես t իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիա է:

$$e^{-pt} f(t) = e^{-(a+ib)t} f(t) = e^{-at} f(t) e^{-ibt} = e^{-at} f(t) (\cos bt - i \sin bt)$$

Այնուհետև, դիտարկենք հետևյալ անիսկական ինտեգրալը.

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos bt dt - i \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \sin bt dt. \quad (3)$$

Ցույց տանք, որ եթե $f(t)$ ֆունկցիան բավարարում է (1) պայմանին և $a > s_0$, ապա (3) հավասարության աջ կողմում գտնվող ինտեգրալները գոյություն ունեն և ինտեգրալների զուգամիտությունը բացարձակ է: Նախ գնահատենք ալի ինտեգրալներից առաջինը.

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos bt dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-at} f(t) \cos bt| dt < \\ < M \int_0^{\infty} e^{-at} e^{s_0 t} dt = M \int_0^{\infty} e^{-(a-s_0)t} dt = \frac{M}{a-s_0},$$

Նման ձևով գնահատվում է նաև երկրորդ ինտեգրալը: Եվ այսպես,

$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ ինտեգրալը գոյություն ունի: Այն որոշում է p -ի մի որոշ ֆունկցիա, որը կնշանակենք** $F(p)$ -ով.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (4)$$

* Իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիաների մասին տես VII գլխի § 4-ը:

** $F(p)$ ֆունկցիան $p \neq 0$ դեպքում կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիա է (տես, օրինակ, В. И. Смирно в. „Курс высшей математики“, т. III, ч. 2); (4) ձևափոխությունը նման է XVII գլխի § 14-ում քննարկված Ֆուրյեի ձևափոխությանը:

$F(p)$ ֆունկցիան կոչվում է լապլասյան պատկեր կամ L -պատկեր կամ էլ պարզապես $f(t)$ ֆունկցիայի պատկեր: $f(t)$ ֆունկցիան անվանում են սկզբնական ֆունկցիա կամ օրիգինալ: Եթե $F(p)$ -ն $f(t)$ ֆունկցիայի պատկերն է, ապա գրում են այսպես.

$$F(p) \overset{\cdot}{\rightarrow} f(t) \quad (5)$$

կամ

$$f(t) \overset{\cdot}{\leftarrow} F(p) \quad (6)$$

կամ

$$L\{f(t)\} = F(p), \quad (7)$$

Ինչպես հետագայում կտեսնենք, պատկերների մոծման իմաստն այն է, որ նրանց միջոցով հաջողվում է պարզեցնել շատ խնդիրների լուծումը, մասնավորապես, դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումը հանգեցնել պատկերը գտնելու համար պարզագույն հանրահաշվական գործողությունների: Իմանալով պատկերը, կարելի է գտնել օրիգինալը կամ նախօրոք կազմած «Օրիգինալ—պատկեր» աղյուսակներով կամ ստորև շարադրվող մեթոդներով: Ծագում են հետևյալ բնական հարցերը:

Իրցուք տրված է որոշ $F(p)$ ֆունկցիա: Գոյություն ունի արդյոք այնպիսի $f(t)$ ֆունկցիա, որի համար $F(p)$ -ն պատկեր է: Եթե գոյություն ունի, ապա միակն է արդյոք այդպիսի ֆունկցիան $F(p)$ և $f(t)$ ֆունկցիաների նկատմամբ սրոշակի ենթադրությունների վերաբերում այս երկու հարցերին էլ արվում է դրական պատասխան: Մասնավորապես, պատկերի միակությունը հաստատվում է հետևյալ թեորեմով, որը բերում ենք ստանց ապացուցման:

Միակություն թեորեմ: Եթե $\varphi(t)$ և $\psi(t)$ երկու անընդհատ ֆունկցիաներն ունեն միևնույն $F(p)$ L -պատկերը, ապա այդ ֆունկցիաները նույնաբար հավասար են:

Այս թեորեմը հետագայում ամենուրեք կատարում է շատ կարևոր դեր: Իրոք, եթե գործնական խնդիրներ լուծելիս ինչ-որ ձևով որոշել ենք որոնվող ֆունկցիայի պատկերը, իսկ այնուհետև ըստ պատկերի գտնել ենք սկզբնական ֆունկցիան, ապա ձևակերպած թեորեմի հիման վրա եզրակացնում ենք, որ գտած ֆունկցիան առաջագրված խնդրի լուծումն է և արիշ լուծումներ գոյություն չունեն:

§ 2. $\cos t$, $\sin t$, $\cos t$ ֆունկցիաների պատկերը

I. $f(t)$ ֆունկցիան, որը սահմանվում է այսպես.

$$f(t) = 1, \text{ երբ } t \geq 0,$$

$$f(t) = 0, \text{ երբ } t < 0,$$

Կոչվում է Հեվիսայդի միավոր ֆունկցիա և նշանակվում է $\sigma_0(t)$ -ով: Այս ֆունկցիայի պրաֆիկը պատկերված է նկ. 397-ում: Գտնենք Հեվիսայդի ֆունկցիայի L-պատկերը:

$$L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p},$$

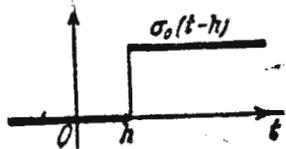
Այսպես, ուրեմն*,

$$1 \stackrel{\leftarrow}{\leftarrow} \frac{1}{p} \quad (8)$$

Կամ, ավելի ճիշտ,

$$\sigma_0(t) \stackrel{\leftarrow}{\leftarrow} \frac{1}{p},$$

Օպերացիոն հաշվի մի քանի ձեռնարկներում $f(t)$ ֆունկցիայի պատկեր անվանում են



նկ. 397

$$F^*(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

արտահայտությունը:

Այսպիսի սահմանման դեպքում կունենանք

$$\sigma_0(t) \stackrel{\leftarrow}{\leftarrow} 1, \text{ և, հետևաբար, } C \stackrel{\leftarrow}{\leftarrow} C, \text{ ավելի}$$

ճիշտ $C\sigma_0(t) \stackrel{\leftarrow}{\leftarrow} C$: II. Դիցուք $f(t) = \sin t$, այս դեպքում

$$L\{\sin t\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin t dt = \frac{e^{-pt}(-p \sin t - \cos t)}{p^2 + 1} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p^2 + 1},$$

Այսպես, ուրեմն,

$$\sin t \stackrel{\leftarrow}{\leftarrow} \frac{1}{p^2 + 1}, \quad (9)$$

III. Դիցուք $f(t) = \cos t$. այս դեպքում

* $\int_0^{\infty} e^{-pt} dt$ ինտեգրալը հաշվելիս այն կտրելի էր ներկայացնել որպես իրական ֆունկցիաների ինտեգրալների գումար. կստանայինք նույն արդյունքը: Այս գիտողությունը վերաբերում է նաև հաջորդ երկու ինտեգրալներին:

Կան ֆունկցիաների ինտեգրալների գումար. կստանայինք նույն արդյունքը: Այս գիտողությունը վերաբերում է նաև հաջորդ երկու ինտեգրալներին:

$$L\{\cos t\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos t dt = \frac{e^{-pt}(\sin t - p \cos t)}{p^2 + 1} \Big|_0^{\infty} = \frac{p}{p^2 + 1},$$

Այսպես, ուրեմն,

$$\cos t \stackrel{\leftarrow}{\leftarrow} \frac{p}{p^2 + 1}, \quad (10)$$

§ 3. Տունկցիայի պատկերը, երբ անկախ փոփոխականի մասշտաբը փոփոխված է: $\sin at$, $\cos at$ ֆունկցիաների պատկերը

Դիտարկենք $f(at)$ (որտեղ $a > 0$) ֆունկցիայի պատկերը:

$$L\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(at) dt:$$

Վերջին ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում, ընդունենլով $z = at$, հետևաբար, $dz = a dt$. այս դեպքում

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a}z} f(z) dz$$

կամ

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right),$$

Այսպիսով, եթե

$$F(p) \stackrel{\leftarrow}{\leftarrow} f(t),$$

այլա

$$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \stackrel{\leftarrow}{\leftarrow} f(at), \quad (11)$$

Օրինակ 1. (11)-ի հիման վրա (9) բանաձևից անմիջապես ստանում ենք.

$$\sin at \stackrel{\leftarrow}{\leftarrow} \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

կամ

$$\sin at \stackrel{\leftarrow}{\leftarrow} \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad (12)$$

Օրինակ 2. (11) բանաձևի հիման վրա (10) բանաձևից ստանում ենք.

$$\cos at \leftarrow \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

կամ

$$\cos at \leftarrow \frac{p}{p^2 + a^2}, \quad (13)$$

§ 4. Պատկերի գծայնության հատկությունը

Թեորեմ: Հաստատուններով բազմապատկված մի քանի ֆունկցիաների գումարի պատկերը հավասար է այդ ֆունկցիաների պատկերների և համապատասխան հաստատունների արտադրյալների գումարին, այսինքն՝ եթե

$$f(t) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(t) \quad (14)$$

(C_i -հաստատուններ են) և

$$F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t), \quad F_i(p) \xrightarrow{\cdot} f_i(t),$$

այա

$$F(p) = \sum_{i=1}^n C_i F_i(p), \quad (14')$$

Ապացուցում: (14) հավասարության բոլոր անդամները բազմապատկելով e^{-pt} -ով և 0-ից մինչև ∞ սահմաններում ինտեգրելով ըստ t -ի (C_i հաստատունները հանելով ինտեգրալի նշանից), ըստանում ենք (14') հավասարությունը:

Օրինակ 1. Գտնել $f(t) = 3\sin 4t - 2\cos 5t$ ֆունկցիայի պատկերը:

Լուծում: (12), (13) և (14') բանաձևերի հիման վրա ստանում ենք.

$$L\{f(t)\} = 3 \frac{4}{p^2 + 16} - 2 \frac{p}{p^2 + 25} = \frac{12}{p^2 + 16} - \frac{2p}{p^2 + 25}$$

Օրինակ 2. Գտնել այն սկզբնական ֆունկցիան, որի պատկերն արտահայտվում է

$$F(p) = \frac{5}{p^2 + 4} + \frac{20p}{p^2 + 9}$$

բանաձևով:

Լուծում: $F(p)$ -ն ներկայացնենք այսպես.

$$F(p) = \frac{5}{2} \frac{2}{p^2 + (2)^2} + 20 \frac{p}{p^2 + (3)^2},$$

Հետևաբար, (12), (13) և (14') բանաձևերի հիման վրա ստանում ենք.

$$f(t) = \frac{5}{2} \sin 2t + 20 \cos 3t:$$

§ 1-ի միակուսյան թեորեմից հետևում է, որ դա տվյալ $F(p)$ -ին համապատասխանող միակ սկզբնական ֆունկցիան է:

§ 5. Տեղաշարժման թեորեմը

Թեորեմ: Եթե $F(p)$ -ն $f(t)$ ֆունկցիայի պատկերն է, այա $F(p+\alpha)$ -ն էլ $e^{-\alpha t} f(t)$ ֆունկցիայի պատկերն է, այսինքն՝

$$\left. \begin{aligned} \text{եթե } F(p) &\xrightarrow{\cdot} f(t), \\ \text{այա } F(p+\alpha) &\xrightarrow{\cdot} e^{-\alpha t} f(t): \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(Այստեղ ենթադրվում է, որ $\text{Re}(p+\alpha) > s_0$);

Ապացուցում: Գտնենք $e^{-\alpha t} f(t)$ ֆունկցիայի պատկերը.

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt - \alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t) dt:$$

Այսպիսով,

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(p+\alpha),$$

Ապացուցած թեորեմի միջոցով կարելի է նշանակալիորեն ընդլայնել այն պատկերների դասը, որոնց սկզբնական ֆունկցիաները կարելի է գտնել հեշտությամբ:

§ 6. e^{-at} , $\text{sh} at$, $\text{ch} at$, $e^{-at} \sin at$, $e^{-at} \cos at$ ֆունկցիաների պատկերները

(15) բանաձևերի հիման վրա (8) բանաձևից անմիջապես հետևում է.

$$\frac{1}{p+\alpha} \xrightarrow{\cdot} e^{-at}, \quad (16)$$

նման ձևով՝

$$\frac{1}{p-\alpha} \xrightarrow{\cdot} e^{at}, \quad (16')$$

(16') առնչութիւն անդամներից հանելով (16) առնչութիւն համապատասխան անդամները և հանման արդիւնքները բաժանելով 2-ի վրա, ստանում ենք.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a} \right) \rightarrow \frac{1}{2} (e^{at} - e^{-at})$$

կամ

$$\frac{a}{p^2 - a^2} \rightarrow \text{sh} at, \quad (17)$$

Նման ձևով, (16)-ի և (16')-ի գումարման ճանապարհով ստանում ենք.

$$\frac{p}{p^2 - a^2} \rightarrow \text{ch} at, \quad (18)$$

(12) բանաձևից (15) բանաձևի հիման վրա հետևում է.

$$\frac{a}{(p+a)^2 + a^2} \rightarrow e^{-at} \sin at, \quad (19)$$

(13) բանաձևից (15) բանաձևի հիման վրա հետևում է.

$$\frac{p+a}{(p+a)^2 + a^2} \rightarrow e^{-at} \cos at, \quad (20)$$

Օրինակ 1. Գտնել այն սկզբնական ֆունկցիան, որի պատկերը տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$F(p) = \frac{7}{p^2 + 10p + 41}$$

Լուծում. $F(p)$ -ն ձևափոխում ենք (19) առնչութիւն ձախ մասի արտահայտութիւն տեսքի.

$$\frac{7}{p^2 + 10p + 41} = \frac{7}{(p+5)^2 + 16} = \frac{7}{4} \frac{4}{(p+5)^2 + 4^2}$$

Եվ այսպէս,

$$F(p) = \frac{7}{4} \frac{4}{(p+5)^2 + 4^2}$$

Հետևաբար, (19) բանաձևի հիման վրա կունենանք.

$$F(p) \rightarrow \frac{7}{4} e^{-5t} \sin 4t$$

Օրինակ 2. Գտնել այն սկզբնական ֆունկցիան, որի պատկերը տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2 + 2p + 10}$$

Լուծում. Ձևափոխենք $F(p)$ ֆունկցիան.

$$\begin{aligned} \frac{p+3}{p^2 + 2p + 10} &= \frac{(p+1)+2}{(p+1)^2 + 9} = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 3^2} + \frac{2}{(p+1)^2 + 3^2} = \\ &= \frac{p+1}{(p+1)^2 + 3^2} + \frac{2}{3} \frac{3}{(p+1)^2 + 3^2} \end{aligned}$$

(19) և (20) բանաձևերի հիման վրա գտնում ենք սկզբնական ֆունկցիան.

$$F(p) \rightarrow e^{-t} \cos 3t + \frac{2}{3} e^{-t} \sin 3t$$

§ 7. Պատկերի դիֆերենցումը

Թեորեմ: Եթե $F(p) \rightarrow f(t)$, ապա

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) \rightarrow t^n f(t); \quad (21)$$

Ապացուցում: Նախ ապացուցենք, որ եթե $f(t)$ ֆունկցիան բավարարում է (1) պայմանին, ապա

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} (-t)^n f(t) dt \quad (22)$$

ինտեգրալը գոյութիւն ունի:

Ըստ պայմանի $|f(t)| < M e^{\beta_0 t}$, $p = a + ib$, $a > \beta_0$. Ընդ որում $a > 0$, $\beta_0 > 0$: Ակնհայտ է որ կզանվի այնպիսի $\varepsilon > 0$, որ տեղի կունենա $a > \beta_0 + \varepsilon$ անհավասարութիւնը: Ինչպիսի և § 1-ում, ապացուցվում է, որ

$$\int_0^{\infty} e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)| dt$$

ինտեգրալը գոյութիւն ունի: Այնուհետև, գնահատենք (22) ինտեգրալը.

$$\int_0^{\infty} |e^{-pt} t^n f(t)| dt = \int_0^{\infty} |e^{-(p-\varepsilon)t} e^{-\varepsilon t} t^n f(t)| dt$$

Քանի որ $t > 0$ ցանկացած արժեքի դեպքում $e^{-\varepsilon t^n}$ ֆունկցիան սահմանափակ է և բացարձակ մեծությունը փոքր է որոշ N թվից, ապա կարելի է գրել.

$$\int_0^{\infty} |e^{-pt} f(t)| dt < N \int_0^{\infty} |e^{-(p-\varepsilon)t} f(t)| dt = N \int_0^{\infty} e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)| dt < \infty,$$

Այսպիսով, ապացուցվեց, որ (22) ինտեգրալ գոյություն ունի: Սակայն այդ ինտեգրալը կարելի է դիտել որպես

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

ինտեգրալի n -րդ կարգի ածանցյալը ըստ p պարամետրի*:

Այսպես, ուրեմն

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

բանաձևից ստանում ենք հետևյալ բանաձևը.

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} (-t)^n f(t) dt = \frac{d^n}{dp^n} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

Այս երկու հավասարություններից ստանում ենք.

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n f(t) dt,$$

այսինքն՝ (21) բանաձևը:

(22) բանաձևն օգտագործենք առօրինակային ֆունկցիայի պատկերը գտնելու համար: Գրենք (8) բանաձևը.

$$\frac{1}{p} \rightarrow 1:$$

Այս բանաձևից (21) բանաձևի հիման վրա ստանում ենք.

$$(-1) \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) \rightarrow t$$

* Ավելի վաղ ստացել ենք որոշյալ ինտեգրալն ըստ իրական պարամետրի դիֆերենցման բանաձևը (տես I հատորի IX գլխի § 10): Այստեղ d պարամետրը կոմպլեքս թիվ է, բայց դիֆերենցման բանաձևը մնում է նշտ:

կամ

$$\frac{1}{p^2} \rightarrow t:$$

Նման ձևով

$$\frac{2}{p^3} \rightarrow t^2,$$

Յանկացած n -ի դեպքում ստանում ենք.

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \rightarrow t^n, \quad (23)$$

Օրինակ 1, $\frac{a}{p^2+a^2} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin at dt$ բանաձևից (տես (12)) աջ և ձախ

մասերը ըստ p պարամետրի դիֆերենցման ճանապարհով ստանում ենք.

$$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2} \rightarrow t \sin at, \quad (24)$$

Օրինակ 2, (13) բանաձևից (21) բանաձևի հիման վրա ստանում ենք.

$$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2} \rightarrow t \cos at, \quad (25)$$

Օրինակ 3, (15) բանաձևից (21) բանաձևի հիման վրա ստանում ենք.

$$\frac{1}{(p+a)^2} \rightarrow t e^{-at}, \quad (26)$$

§ 8. Ածանցյալների պատկերը

Թեոթեմ: Եթե $F(p) \rightarrow f(t)$, ապա

$$pF(p) - f(0) \rightarrow f'(t), \quad (27)$$

Ապացուցում: Պատկերի սահմանման հիման վրա կարող ենք գրել.

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt, \quad (28)$$

ենթադրելու ենք, որ $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ բոլոր ածանցյալները, որոնք մեզ հանդիպելու են, բավարարում են (1) պայմանին և, հետևաբար, (28) ինտեգրալը և համանման ինտեգրալները հաջորդ

ածանցյալների համար դրուծյուն ունեն: (28) հավասարության աջ մասի ինտեգրալը հաշվելով մասերով, կգտնենք.

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt:$$

Բայց ըստ (1) պայմանի

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0,$$

իսկ

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p):$$

Ուստի

$$L\{f'(t)\} = -f(0) + pF(p):$$

Թեորեմն ապացուցված է: Այնուհետև դիտարկենք ցանկացած կարգի ածանցյալների պատկերը: (27) բանաձևում $F(p)$ -ի փոխարեն տեղադրելով $pF(p) - f(0)$ արտահայտությունը, իսկ $f(t)$ -ի փոխարեն՝ $f'(t)$ -ի արտահայտությունը, կստանանք.

$$p[pF(p) - f(0)] - f'(0) \rightarrow f''(t)$$

կամ, բացելով փակագծերը՝

$$p^2 F(p) - p f(0) - f'(0) \rightarrow f''(t): \quad (29)$$

Ուրդ կարգի ածանցյալի համար, պատկերը կլինի.

$$p^n F(p) - [p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + p f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] \rightarrow f^{(n)}(t), \quad (30)$$

Դիտողություն: (27), (29), (30) բանաձևերը պարզեցվում են, եթե $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$: Այս դեպքում ստանում ենք.

$$F(p) \rightarrow f(t),$$

$$pF(p) \rightarrow f'(t),$$

$$p^n F(p) \rightarrow f^{(n)}(t),$$

№№ ը/կ	$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin at$
3	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
5	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\text{sh } at$
6	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\text{ch } at$
7	$\frac{a}{(p+a)^2 + a^2}$	$e^{-at} \sin at$
8	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + a^2}$	$e^{-at} \cos at$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
11	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
12	$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
13	$\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at)$
14	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$	$t^n f(t)$
15	$F_1(p) F_2(p)$	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$

§ 9. Մի բանի պատկերների աղյուսակ

Ստացած պատկերների օգտագործման հարմարության համար դրանք տեղափոխենք մեկ աղյուսակի մեջ:

Ծանոթություն: Այս աղյուսակի 13 և 15 բանաձևերը կարտաձվեն ավելի ուշ:

Դիտողություն: Եթե որպես $f(t)$ ֆունկցիայի պատկերվերցնենք

$$F^*(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

ապա աղյուսակի 1—13 բանաձևերի առաջին սյունակում գտնվող արտահայտությունները պետք է բազմապատկել p -ով: Իսկ 14 և 15 բանաձևերը նշանակալի կփոփոխեն: Քանի որ $F^*(p) = pF(p)$, ապա 14 բանաձևի ձախ մասում $F(p)$ -ի փոխարեն տեղադրելով $\frac{F^*(p)}{p}$ արտահայտությունը և բազմապատկելով p -ով, կստանանք.

$$14'. \quad (-1)^n p \frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{F^*(p)}{p} \right) \rightarrow t^n f(t),$$

15 բանաձևի ձախ մասում տեղադրելով

$$F_1(p) = \frac{F_1^*(p)}{p}, \quad F_2(p) = \frac{F_2^*(p)}{p}$$

և բազմապատկելով այդ արտադրյալը p -ով, կստանանք.

$$15'. \quad \frac{1}{p} F_1^*(p) F_2^*(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

§ 10. Տրված դիֆերենցիալ հավասարման համար օժանդակ հավասարում

Դիցուք ունենք $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ հաստատուն գործակիցներով n -րդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարում՝

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x(t) = f(t), \quad (31)$$

Պահանջվում է $t \geq 0$ դեպքում գտնել այդ հավասարման այն $x = x(t)$ լուծումը, որը բավարարում է

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0', \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \quad (32)$$

սկզբնական պայմաններին: Այս խնդիրը ավելի վաղ լուծել ենք այսպես. գտել ենք (31) հավասարման ընդհանուր լուծումը, որը պարունակում է կամայական հաստատուններ. այնուհետև այդ հաստատուն-

ներն ընտրել ենք այնպես, որ բավարարվեն (32) սկզբնական պայմանները:

Այստեղ կշարադրենք այս խնդրի լուծման ավելի պարզ մեթոդ՝ օպերացիոն հաշվի մեթոդը: Կգտնենք (31) հավասարման՝ (32) պայմաններին բավարարող $x(t)$ լուծման L -պատկերը: Այդ L -պատկերը նշանակենք $\bar{x}(p)$ -ով. այսպիսով, $\bar{x}(p) \rightarrow x(t)$:

Ենթադրենք, որ գոյություն ունեն (31) հավասարման լուծման և նրա՝ մինչև n -րդ կարգի ածանցյալների պատկերները (այս ենթադրությունը ճշտությունը կարող ենք ստուգել լուծումը որոնելուց հետո): (31) հավասարության բոլոր անդամները բազմապատկենք e^{-pt} -ով, որտեղ $p = a + ib$, և 0 -ից մինչև ∞ սահմաններում ինտեգրենք ըստ t -ի.

$$a_0 \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{d^n x}{dt^n} dt + a_1 \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} dt + \dots + a_n \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (33)$$

Հավասարության ձախ մասում $x(t)$ ֆունկցիայի և նրա ածանցյալների L -պատկերներն են, աջ կողմում՝ $f(t)$ ֆունկցիայի L -պատկերը որը նշանակենք $F(p)$ -ով: Հետևաբար, (33) հավասարությունը կարելի է գրել այսպես.

$$a_0 L \left\{ \frac{d^n x}{dt^n} \right\} + a_1 L \left\{ \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \right\} + \dots + a_n L \{ x(t) \} = L \{ f(t) \};$$

Այս հավասարության մեջ ֆունկցիայի և նրա ածանցյալների պատկերների փոխարեն տեղադրելով (27), (29), (30) արտահայտությունները, ստանում ենք.

$$a_0 \{ p^n \bar{x}(p) - (p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + p^{n-3} x_0'' + \dots + x_0^{(n-1)}) \} + a_1 \{ p^{n-1} \bar{x}(p) - (p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_0' + \dots + x_0^{(n-2)}) \} + \dots + a_{n-1} \{ p \bar{x}(p) - x_0 \} + a_n \bar{x}(p) = F(p); \quad (34)$$

(34) հավասարումը կոչվում է օժանդակ հավասարում կամ պատկերային հավասարում: Այս հավասարման մեջ անհայտը $\bar{x}(p)$ պատկերն

Աղյուսակ 1-ի 1 և 3 բանաձևերի հիման վրա գտնում ենք լուծումը.

$$x(t) = -\frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{9}$$

Օրինակ 3. Գտնել $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t$ հավասարման այն լուծումը, որը

բավարարում է $x_0 = x'_0 = 0$. $t=0$ դեպքում սկզբնական պայմաններին:

Լուծում. Գրենք (34') օժանդակ հավասարումը.

$$\bar{x}(p)(p^2 + 3p + 2) = \frac{1}{p^2}$$

կամ

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{(p^2 + 3p + 2)} = \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}$$

Այս կոտորակը անորոշ գործակիցների մեթոդով վերլուծելով տարրական կոտորակների, կստանանք.

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{4}{4(p+2)}$$

Աղյուսակ 1-ի 9, 1 և 4 բանաձևերով գտնում ենք լուծումը.

$$x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

Օրինակ 4. Գտնել $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = \sin t$ հավասարման այն լուծումը,

որը բավարարում է $x_0 = 1$, $x'_0 = 2$, $t=0$ դեպքում սկզբնական պայմաններին:

Լուծում. Գրենք (34') օժանդակ հավասարումը.

$$\bar{x}(p)(p^2 + 2p + 5) = p \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 1 + L\{\sin t\}$$

կամ

$$\bar{x}(p)(p^2 + 2p + 5) = p + 4 + \frac{1}{p^2 + 1}$$

որտեղից գտնում ենք $\bar{x}(p)$ -ն.

$$\bar{x}(p) = \frac{p+4}{p^2+2p+5} + \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}$$

Այժմ սխ վերջին կոտորակը վերլուծելով տարրական կոտորակների, կարելի է գրել.

$$\bar{x}(p) = \frac{\frac{11}{10}p+4}{p^2+2p+5} + \frac{-\frac{1}{10}p+\frac{1}{5}}{p^2+1}$$

կամ

$$\bar{x}(p) = \frac{11}{10} \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{29}{10 \cdot 2} \cdot \frac{2}{(p+1)^2+2^2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p^2+1}$$

Աղյուսակ 1-ի 8, 7, 3 և 2 բանաձևերի հիման վրա ստանում ենք լուծումը.

$$x(t) = \frac{11}{10}e^{-t} \cos 2t + \frac{29}{20}e^{-t} \sin 2t - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t$$

կամ վերջնականապես

$$x(t) = e^{-t} \left(\frac{11}{10} \cos 2t + \frac{29}{20} \sin 2t \right) - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t$$

§11. Վերլուծման թեորեմը

Նախորդ պարագրաֆի (36) բանաձևից հետևում է, որ դժային դիֆերենցիալ հավասարման լուծման պատկերը կազմված է երկու անդամներից. առաջին անդամը p -ի կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ է, երկրորդ անդամը մի կոտորակ է, որի համարիչը հավասարման աջ մասի $F(p)$ պատկերն է, իսկ հայտարարը՝ $\varphi_n(p)$ բազմանդամը: Եթե $F(p)$ -ն ռացիոնալ կոտորակ է, ապա երկրորդ անդամը կլինի ռացիոնալ կոտորակ: Այսպիսով, պետք է կարողանալ գտնել այն սկզբնական ֆունկցիան, որի պատկերը կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ է: Այս հարցով էլ զբաղվելու ենք ներկա պարագրաֆում: Դիցուք որևէ ֆունկցիայի L -պատկերը p -ի

$$\frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}$$

ռացիոնալ կանոնավոր կոտորակ է: Պահանջվում է գտնել սկզբնական ֆունկցիան (օրիգինալը): Ի հատորի X գլխի § 7-ում ցույց է տրվել, որ ամեն մի կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ կարելի է ներկայացնել հետևյալ շորս տեսքի տարրական կոտորակների գումարի տեսքով.

- I. $\frac{A}{p-a}$,
- II. $\frac{A}{(p-a)^k}$,
- III. $\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}$, որտեղ հայտարարի արմատները կոմպլեքս

են, այսինքն՝ $\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0$,

IV. $\frac{Ap+B}{(p^2+a_1p+a_2)^k}$, որտեղ $k \geq 2$, հայտարարի արմատները

կոմպլեքս են:

Գտնենք այս տարրական կոտորակների համար սկզբնական ֆունկցիաները:

I տեսքի կոտորակի համար աղյուսակ 1-ի 4 բանաձևի հիման վրա ստանում ենք.

$$\frac{A}{p-a} \rightarrow Ae^{at},$$

II տեսքի կոտորակի համար աղյուսակ 1-ի 9 և 4 բանաձևերի հիման վրա ստանում ենք.

$$\frac{A}{(p-a)^k} \rightarrow A \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{at}, \quad (37)$$

Այժմ դիտարկենք III տեսքի կոտորակը: Կատարենք նույնական ձևափոխություններ.

$$\begin{aligned} \frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2} &= \frac{Ap+B}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} \\ &= \frac{A\left(p+\frac{a_1}{2}\right) + \left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} = A \frac{p+\frac{a_1}{2}}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} + \\ &\quad + \left(B-\frac{Aa_1}{2}\right) \frac{1}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}, \end{aligned}$$

Այստեղ առաջին և երկրորդ գումարելիները նշանակելով M-ով և N-ով, աղյուսակ 1-ի 8 և 7 բանաձևերի հիման վրա, համապատասխանաբար, կստանանք.

$$M \rightarrow Ae^{-\frac{a_1}{2}t} \cos t \sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}},$$

$$N \rightarrow \left(B-\frac{Aa_1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}} e^{-\frac{a_1}{2}t} \sin t \sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}},$$

Այսպիսով, վերջնականապես

$$\begin{aligned} &\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2} \rightarrow \\ &\rightarrow e^{-\frac{a_1}{2}t} \left[A \cos t \sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}} + \frac{B-\frac{Aa_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}} \sin t \sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}} \right], \quad (38) \end{aligned}$$

IV տեսքի տարրական կոտորակի դեպքը այստեղ չենք քննարկի, քանի որ դա կապված է մեծ հաշվումների հետ: Մի քանի մասնավոր դեպքերի համար այս հարցը քննարկենք ստորև: Անհրաժեշտության դեպքում ընթերցողը կարող է դիմել այս գլխի սկզբում նշված դասընթացներից մեկին:

§ 12. Օպերացիոն մեթոդով դիֆերենցիալ հավասարումների և դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծման օրինակներ

Օրինակ 1. Գտնել

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin 3x$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $x_0=0$, $x'_0=0$, երբ $t=0$ սկզբնական պայմաններին:

Լուծում, կազմում ենք (34') օժանդակ հավասարումը.

$$\bar{x}(p)(p^2+4) = \frac{3}{p^2+9}, \quad \bar{x}(p) = \frac{3}{(p^2+9)(p^2+4)}$$

կամ

$$\bar{x}(p) = \frac{-\frac{3}{5}}{p^2+9} + \frac{\frac{3}{5}}{p^2+4} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{p^2+9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{p^2+4},$$

որտեղից ստացվում է լուծումը՝

$$x(t) = \frac{3}{10} \sin 2t - \frac{1}{5} \sin 3t.$$

Օրինակ 2. Գտնել

$$\frac{d^3x}{dt^3} + x = 0$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $x_0=1$, $x'_0=3$, $x''_0=8$, երբ $t=0$ սկզբնական պայմաններին:

Լ ու ծ ու լ մ: Կազմում ենք (34') օժանդակ հավասարումը

$$\bar{x}(p)(p^3+1)=p^2 \cdot 1+p \cdot 3+8,$$

զտնում ենք

$$\bar{x}(p)=\frac{p^2+3p+8}{p^3+1}=\frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)},$$

Ստացած աստիճանի կոտորակը վերլուծում ենք տարրական կոտորակների.

$$\begin{aligned} & \frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)} = \frac{2}{p+1} + \frac{-p+6}{p^2-p+1} = \\ & = 2 \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{11}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \end{aligned}$$

Օգտվելով աղյուսակ 1-ից, գրում ենք լուծումը.

$$x(t)=2e^{-t} + e^{\frac{1}{2}t} \left(-\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{11}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right),$$

Օրինակ 3. Գտնել

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = t \cos 2t$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $x=0$, $x_0=0$, երբ $t=0$ սկզբնական պայմաններին:

Լ ու ծ ու լ մ, Գրենք (34') օժանդակ հավասարումը

$$\bar{x}(p)(p^2+1) = \frac{1}{p^2+4} - \frac{8}{(p^2+4)^2},$$

որտեղից որոշ ձևափոխություններից հետո կստանանք

$$\bar{x}(p) = -\frac{5}{9} \frac{1}{p^2+1} + \frac{5}{9} \frac{1}{p^2+4} + \frac{8}{5} \frac{1}{(p^2+4)^2},$$

Հետևաբար,

$$x(t) = -\frac{5}{9} \sin t + \frac{5}{18} \sin 2t + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \sin 2t - t \cos 2t \right),$$

Ակնհայտ է, որ օպերացիոն մեթոդով կարելի է լուծել նաև զծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերը. Դա ցույց տանք օրինակի վրա:

Օրինակ 4. Գտնել

$$3 \frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} = 1,$$

$$\frac{dx}{dt} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

հավասարումների համակարգի այն լուծումը, որը բավարարում է $x=0$, $y=0$, երբ $t=0$ սկզբնական պայմաններին:

Լ ու ծ ու լ մ, Նշանակենք $x(t) \doteq \bar{x}(p)$, $y(t) \doteq \bar{y}(p)$ և գրենք օժանդակ հավասարումների համակարգը.

$$(3p+2)\bar{x}(p) + p\bar{y}(p) = \frac{1}{p},$$

$$p\bar{x}(p) + (4p+3)\bar{y}(p) = 0,$$

Լուծելով այս համակարգը, գտնում ենք.

$$\bar{x}(p) = \frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p+1)} - \frac{33}{10(11p+6)},$$

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{(11p+6)(p+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{11}{11p+6} \right),$$

Հստ պատկերների գտնում ենք սկզբնական ֆունկցիաները, այսինքն՝ համակարգի որոնվող լուծումները.

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} e^{-t} - \frac{3}{10} e^{-\frac{6}{11}t},$$

$$y(t) = \frac{1}{5} \left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t} \right),$$

Նման ձևով լուծվում են և բարձր կարգի զծային համակարգերը:

§ 13. Փաթաթման թեորեմը

Դիֆերենցիալ հավասարումները օպերացիոն մեթոդով լուծելիս օգտակար է լինում հետևյալը.

Փ ա թ ա թ մ ա ն թ ե ո Ր ե մ: Եթե $F_1(p)$ -ն և $F_2(p)$ -ն $f_1(t)$ և $f_2(t)$ ֆունկցիաների պատկերներն են, այսինքն՝

$$F_1(p) \doteq f_1(t) \text{ և } F_2(p) \doteq f_2(t),$$

այլա $F_1(p)F_2(p)$ -ն

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

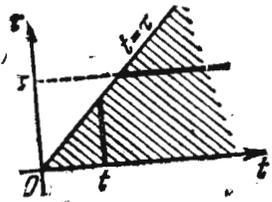
ֆունկցիայի պատկերն է, այսինքն՝

$$F_1(p)F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau, \quad (39)$$

Այսպես ցուցում: Գտնենք $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ ֆունկցիայի պատկերը, ելնելով պատկերի սահմանումից.

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \right] dt:$$

Այս կողմի ինտեգրալը կրկնապատիկ ինտեգրալ է, որը տարածված է $\tau=0$, $t=\infty$ ուղիղներով սահմանափակված տիրույթով: Այդ ինտեգրալում փոխենք ինտեգրման կարգը, կստանանք.



Նկ. 398

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty \left[\int_\tau^\infty f_1(\tau) \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau) dt \right] d\tau:$$

Ներքին ինտեգրալում կատարելով $t-\tau=z$ փոփոխականի փոխարինումը, կստանանք.

$$\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau) dt = \int_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f_2(z) dz = e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-pz} f_2(z) dz = e^{-p\tau} F_2(p):$$

Հետևաբար,

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} F_2(p) d\tau = F_2(p) \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau = F_2(p) F_1(p):$$

Եվ այսպես,

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \doteq F_1(p)F_2(p):$$

Սա աղյուսակ 1-ի 15 բանաձևն է:

Դիտողություն 1: $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ արտահայտությունը կոչվում է $f_1(t)$ և $f_2(t)$ երկու ֆունկցիաների փաթույթ: Փաթույթը ըստանալու գործողությունը կոչվում է երկու ֆունկցիաների փաթաթում, ընդ որում

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau:$$

Վերջին հավասարությունը ճշտությունը հաստատվում է աջակողմյան ինտեգրալում $t-\tau=z$ փոփոխականի փոխարինման ճանապարհով:

Օրինակ, Գտնել $\frac{d^2x}{dt^2} + x = f(t)$, հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $x_0 = x'_0 = 0$, երբ $t=0$ սկզբնական պայմաններին:

Լուծում: Գրենք (34') օժանդակ հավասարումը.

$$\bar{x}(p)(p^2+1) = F(p),$$

որտեղ $F(p)$ -ն $f(t)$ ֆունկցիայի պատկերն է: Հետևաբար, $\bar{x}(p) = \frac{1}{p^2+1} F(p)$, բայց

$\frac{1}{p^2+1} \doteq \text{sint } t$ և $F(p) \doteq f(t)$: Կիրառելով (39) փաթաթման բանաձևը և նշանակելով $\frac{1}{p^2+1} = F_2(p)$, $F(p) = F_1(p)$, կստանանք.

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \text{sint}(t-\tau) d\tau. \quad (40)$$

Դիտողություն 2: Փաթաթման թեորեմի հիման վրա հեշտությունը գտնվում է ֆունկցիայի ինտեգրալի պատկերը, եթե հայտնի է այդ ֆունկցիայի պատկերը, այն է՝ եթե $F(p) \doteq f(t)$, ապա

$$\frac{1}{p} F(p) \doteq \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (41)$$

Իրոք, եթե նշանակենք

$$f_1(t) = f(t), \quad f_2(t) = 1, \quad \text{ապա } F_1(p) = F(p), \quad F_2(p) = \frac{1}{p},$$

Այս ֆունկցիաները տեղադրելով (39) բանաձևի մեջ, կստանանք (41) բանաձևը:

§ 14. Մեխանիկական տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումներ: Էլեկտրական շղթաների տեսության դիֆերենցիալ հավասարումներ

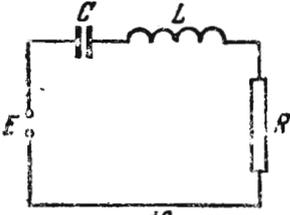
Մեխանիկայից հայտնի է, որ m զանգվածն ունեցող նյութական կետի տատանումները նկարագրվում են

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{I}{m} f_1(t) \quad (42)$$

հավասարումով* այստեղ x -ը որևէ դիրքից կետի շեղումն է, k -ն առաձգական համակարգի, օրինակ, զսպանակի (զսպակի) կոշտությունն է, շարժմանը դիմադրող ուժը համեմատական է (λ համեմատականության գործակցով) արագության առաջին աստիճանին, $f_3(t)$ -ն արտաքին կամ դրդող ուժն է:

(42) տիպի հավասարման լուծման միջոցով նկարագրվում են փոքր տատանումները և ազատության մեկ աստիճան ունեցող մեխանիկական համակարգերի, օրինակ, լիսեռի վրա, թափանցիկ ոլորող տատանումները, եթե x -ը թափանցիկ պտտման անկյունն է, m -ը՝ թափանցիկ իներցիայի մոմենտը, k -ն՝ լիսեռի ոլորման կոշտությունը, իսկ $m f_3(t)$ -ն՝ արտաքին ուժերի մոմենտը պտտման առանցքի նկատմամբ: (42) տիպի հավասարումները նկարագրում են ոչ միայն մեխանիկական տատանումները, այլև էլեկտրական շղթաներում տեղի ունեցող երևույթները:

Դիցուք ունենք էլեկտրական շղթա, որը կազմված է L ինդուկտիվությամբ, R դիմադրությամբ և C ունակությամբ, որի նկատմամբ կիրառված է E է. շ. ու-ն (նկ. 399): i -ով նշանակենք շղթայում եղած հոսանքը, իսկ Q -ով՝ կոնդենսատորի լիցքը, այդ դեպքում, ինչպես հայտնի է էլեկտրատեխնիկայից, i -ն և Q -ն բավարարում են հետևյալ հավասարումներին՝



$i = \frac{dQ}{dt}$
նկ. 399

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = E, \quad (43)$$

$$\frac{dQ}{dt} = i, \quad (44)$$

(44) հավասարումից ստանում ենք.

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{di}{dt}, \quad (44')$$

Տեղադրելով (44)-ը և (44')-ը (43) հավասարման մեջ, i -ի համար ստանում ենք (42) տիպի հավասարում.

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E, \quad (45)$$

Դիֆերենցելով (43) հավասարման երկու մասերը և օգտագործելով

* Տե՛ս օրինակ, XIII դիտի § 28, որտեղ այդպիսի հավասարում ստացվել է զսպակի վրա բեռի տատանումը քննարկելիս:

(44) հավասարումը, i հոսանքը որոշելու համար ստանում ենք հետևյալ հավասարումը.

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dE}{dt}, \quad (46)$$

(45) և (46) հավասարումները (42) տիպի հավասարումներ են:

§ 15. Տատանումների դիֆերենցիալ հավաւարման լուծումը

Ցատանումների հավասարումը գրենք

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = f(t) \quad (47)$$

տեսքով, որտեղ սրտնվող x ֆունկցիայի, a_1, a_2 հաստատունների և $f(t)$ ֆունկցիայի մեխանիկական կամ ֆիզիկական իմաստը պարզաբանվում է տվյալ հավասարումը (42), (45), (46) հավասարումների հետ համեմատելու միջոցով: Գտնենք (47) հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $x = x_0, x' = x_0'$, երբ $t = 0$ սկզբնական պայմաններին:

Կազմենք (47) հավասարման համար օժանդակ հավասարումը՝

$$\bar{x}(p)(p^2 + a_1 p + a_2) = x_0 p + x_0' + a_1 x_0 + F(p), \quad (48)$$

որտեղ $F(p)$ -ն $f(t)$ ֆունկցիայի պատկերն է: (48) հավասարությունից դանում ենք.

$$\bar{x}(p) = \frac{x_0 p + x_0' + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} + \frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}, \quad (49)$$

Այնպես, ինչպես (45) հավասարման $Q = Q_0, Q' = Q_0'$, երբ $t = 0$, սկզբնական պայմաններին բավարարող $Q(t)$ լուծման համար, պատկերը կունենա

$$\bar{Q}(p) = \frac{L(Q_0 p + Q_0') + R Q_0}{L p^2 + R p + \frac{1}{C}} + \frac{\bar{E}(p)}{L p^2 + R p + \frac{1}{C}}$$

տեսքով: Լուծման բնույթը էապես կախված է այն բանից, թե $p^2 + a_1 p + a_2$ եռանդամի արմատները կոմպլեքս են, կամ իրական տարրեր, կամ իրական հավասար: Մանրամասն քննարկենք այն դեպքը,

երբ եռանդամի արմատները կոմպլեքս են, այսինքն՝ երբ $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 -$

$-a_2 < 0$: Մնացած դեպքերը քննարկվում են համանմանորեն: Քանի որ երկու ֆունկցիաների գումարի պատկերը հավասար է նրանց պատկերների գումարին, ապա (38) բանաձևի հիման վրա (49) արտահայտության աջ մասի առաջին կոտորակի համար սկզբնական ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{x_0 p + x_0 + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} \rightarrow e^{-\frac{a_1}{2} t} \left[x_0 \cos t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \frac{x_0 + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \right], \quad (50)$$

Այնուհետև գտնենք

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}$$

կոտորակին համապատասխանող սկզբնական ֆունկցիան: Այստեղ օգտվում են փաթաթման թեորեմից, նկատելով, որ

$$\frac{1}{p^2 + a_1 p + a_2} \rightarrow \frac{e^{-\frac{a_1}{2} t}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}, \quad F(p) \rightarrow f(t):$$

Հետևաբար, ըստ (39) բանաձևի ստանում ենք.

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \sin(t-\tau) \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} d\tau, \quad (51)$$

Այսպես, ուրեմն, հաշվի առնելով (50)-ը և (51)-ը, (49)-ից ստանում ենք.

$$x(t) = e^{-\frac{a_1}{2} t} \left[x_0 \cos t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \frac{x_0 + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \sin(t-\tau) \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} d\tau, \quad (52)$$

Եթե արտաքին ուժը՝ $f(t) \equiv 0$, այսինքն՝ եթե ունենք ազատ մեխանիկական կամ էլեկտրական տատանումներ, ապա լուծումը սղրվում է (52) արտահայտության աջ մասի առաջին գումարելիով: Եթե սկզբնական տվյալները հավասար են զրոյի՝ $x_0 = x'_0 = 0$, ապա լուծումը սղրվում է (52) հավասարության աջ մասի երկրորդ գումարելիով: Մանրամասն քննարկենք այդ դեպքերը:

§ 16. Ազատ տատանումների հետազոտությունը

Դիցուք (47) հավասարումը նկարագրում է ազատ տատանումները, այսինքն՝ $f(t) \equiv 0$: Բանաձևերի գրության հարմարության համար մտնենք հետևյալ նշանակումները. $a_1 = 2n$, $a_2 = k^2$, $k_1^2 = k^2 - n^2$. Այս դեպքում (47) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0, \quad (53)$$

Այս հավասարման x_{wq} լուծումը, որը բավարարում է $x = x_0$, $x' = -x_0$, երբ $t = 0$ սկզբնական պայմաններին, սղրվում է (50) բանաձևով կամ (52) բանաձևի առաջին գումարելիով.

$$x_{wq}(t) = e^{-nt} \left[x_0 \cos k_1 t + \frac{x_0 + x_0 n}{k_1} \sin k_1 t \right], \quad (54)$$

Նշանակենք $x_0 = a$, $\frac{x_0 + x_0 n}{k_1} = b$. Այնհայտ է, ցանկացած a - և b -ի դեպքում կարելի է ընտրել այնպիսի M և δ , որ լինի $a = M \sin \delta$, $b = M \cos \delta$, ընդ որում $M^2 = a^2 + b^2$, $\operatorname{tg} \delta = \frac{a}{b}$: (54) բանաձևը գրենք այսպես.

$$x_{wq} = e^{-nt} [M \cos k_1 t \sin \delta + M \sin k_1 t \cos \delta],$$

կամ վերջնականապես լուծումը կարելի է գրել այսպես,

$$x_{wq} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{-nt} \sin(k_1 t + \delta), \quad (55)$$

(55) լուծումը համապատասխանում է մաքուր տատանումներին:

Եթե $2n = a_1 = 0$, այսինքն՝ եթե ներքին շփումը բացակայում է, ապա լուծումը կունենա

$$x_{\omega} = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(k_1 t + \delta)$$

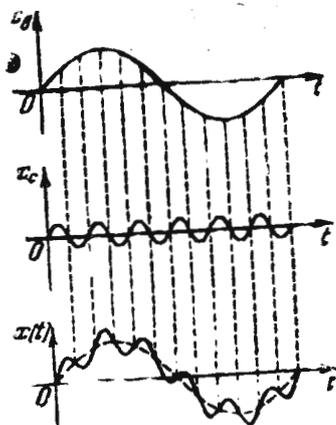
տեսքը: Այդ դեպքում տեղի ունեն երկրաչափական տատանումներ: (XIII գլխի § 27-ում, նկ. 276-ում և նկ. 278-ում տրված են հարմոնիկ և մարող տատանումների գրաֆիկները):

§ 17. Մեխանիկական և էլեկտրական տատանումների հետազոտությունը պարբերական արտաքին ուժերի դեպքում

Մեխանիկական համակարգերի առաձգական տատանումները, մասնավորապես էլեկտրական տատանումներն ուսումնասիրելիս հարկ է լինում քննարկել $i(t)$ արտաքին ուժի տարբեր տեսակները: Մանրամասն քննարկենք պարբերական արտաքին ուժի դեպքը: Դիցուք (47) հավասարումն ունի

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = A \sin \omega t \quad (56)$$

տեսքը: Շարժման բնույթը պարզելու համար բավական է քննարկել այն դեպքը, երբ $x_0 = \dot{x}_0 = 0$: Հավասարման լուծումը կարելի է բերտանալ ըստ (52) բանաձևի, բայց այստեղ մեթոդական տեսակետից հարմար է լուծումը ստանալ, կատարելով բոլոր միջանկյալ հաշվումները:



Նկ. 400

Գրենք արտապատկերող հավասարումը՝

$$\bar{x}(p)(p^2 + 2np + k^2) = A \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

որտեղից ստանում ենք.

$$\bar{x}(p) = \frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)} \quad (57)$$

Քննարկենք այն դեպքը, երբ $2n \neq 0$ ($n^2 < k^2$): Այդ կողմում գտնվող կոտորակը վերլուծենք տարրական կոտորակների.

$$\frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)} = \frac{Np + B}{p^2 + 2np + k^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + \omega^2} \quad (58)$$

N, B, C, D հաստատունները որոշում ենք անորոշ գործակիցների մեթոդով: Օգտվելով (38) բանաձևից, (57)-ից կգտնենք սկզբնական ֆունկցիան.

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \left\{ (k^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2n\omega \cos \omega t + e^{-nt} \left[(2n^2 - k^2 + \omega^2) \frac{\omega}{k_1} \sin k_1 t + 2n\omega \cos k_1 t \right] \right\} \quad (59)$$

այստեղ նորից $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$: Սա էլ հենց (56) հավասարման այն լուծումն է, որը բավարարում է $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, երբ $t = 0$ սկզբնական պայմաններին:

Քննարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ $2n = 0$: Սա համապատասխանում է այն բանին, որ, օրինակ, մեխանիկական համակարգում չկա ներքին դիմադրություն, չկա մեղմիչ (амортизатор): Էլեկտրական կոնտուրի դեպքում դա համապատասխանում է նրան, որ $R = 0$, այսինքն՝ բացակայում է շղթայի ներքին դիմադրությունը: (56) հավասարումն այս դեպքում ընդունում է

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A \sin \omega t \quad (60)$$

տեսքը, իսկ այս հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, երբ $t = 0$ սկզբնական պայմաններին, ստացվում է, եթե (59) բանաձևում ընդունենք $n = 0$.

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)k} [-\omega \sin kt + k \sin \omega t] \quad (61)$$

Այստեղ ունենք երկու հարմոնիկ տատանումների գումար՝ սեփական, որն ունի k հաճախություն

$$x_c(t) = -\frac{A}{k^2 - \omega^2} \frac{\omega}{k} \sin kt$$

և հարկադրական, որն ունի ω հաճախություն

$$x_B(t) = \frac{A}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

Այն դեպքի համար, երբ $k \gg \omega$, տատանումների բնույթը պատկերված է նկ. 400-ում:

Վերադառնանք (59) բանաձևին: Եթե $2n > 0$, որը և տեղի ունի քննարկվող մեխանիկական և էլեկտրական համակարգերում, ապա e^{-nt} բազմապատկիչ պարունակող անդամը, որը ներկայացնում է մարդ սեփական տատանումները, t -ի աճման դեպքում արագ նվազում է: Բավականաչափ մեծ t -ի դեպքում տատանումների բնույթը կորոշվի e^{-nt} բազմապատկիչ չպարունակող անդամով, այսինքն՝

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \{ (k^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2n\omega \cos \omega t \} \quad (62)$$

անդամով: Մուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$\frac{A(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = M \cos \delta, \quad \frac{A \cdot 2n\omega}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = M \sin \delta, \quad (63)$$

որտեղ

$$M = \frac{A}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}$$

(62) լուծումը կարելի է գրել այսպես.

$$x(t) = \frac{A}{k^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{\omega^2}{k^4}}} \sin(\omega t + \delta) \quad (64)$$

(64) բանաձևից հետևում է, որ հարկադրական տատանումների k հաճախությունը չի համընկնում արտաքին ուժի ω հաճախությանը: Եթե n թվով բնորոշվող ներքին դիմադրությունը փոքր է, իսկ ω հաճախությունը մոտ է k հաճախությանը, ապա տատանումների ամպլիտուդը կարող է արվել հնարավորին չափ մեծ, քանի որ հայտարարը կարող է լինել հնարավորին չափ փոքր: Երբ $n=0$, $\omega^2=k^2$ լուծումը (64) բանաձևով չի արտահայտվում:

§ 18. Տատանումների հավասարման լուծումը ռեզոնանսի դեպքում

Քննարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ $a_1=2n=0$, այսինքն՝ երբ դիմադրությունը բացակայում է, իսկ արտաքին ուժի հաճախությունը համընկնում է սեփական տատանումների $k=\omega$ հաճախությանը: Այս դեպքում հավասարումն ունի

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A \sin kt \quad (65)$$

տեսք: Կորոնենք այս հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $x_0=0$, $\dot{x}_0=0$, երբ $t=0$ սկզբնական պայմաններին: Օժանդակ հավասարումը կլինի

$$\bar{x}(p)(p^2 + k^2) = A \frac{k}{p^2 + k^2},$$

որտեղից

$$\bar{x}(p) = \frac{Ak}{(p^2 + k^2)^2} \quad (66)$$

Ստացանք IV տիպի կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ, որը մենք ընդհանուր տեսքով չենք քննարկել: (66) պատկերի համար սկզբնական ֆունկցիան գտնելու համար օգտվենք հետևյալ եղանակից: Գրում ենք հետևյալ նույն թվումը (աղյուսակ 1-ի (2) բանաձևը).

$$\frac{k}{p^2 + k^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \sin kt \, dt \quad (67)$$

Այս հավասարության երկու մասը դիֆերենցում ենք* ըստ k -ի.

$$\frac{1}{p^2 + k^2} - \frac{2k^2}{(p^2 + k^2)^2} = \int_0^\infty e^{-pt} t \cos kt \, dt,$$

Օգտվելով (67) նույն թվումից, այս հավասարությունը կարելի է գրել այսպես.

$$-\frac{2k^2}{(p^2 + k^2)^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \left[t \cos kt - \frac{1}{k} \sin kt \right] dt:$$

Այստեղից անմիջապես հետևում է.

$$\frac{Ak}{(p^2 + k^2)^2} = \frac{A}{2k} \left(\frac{1}{k} \sin kt - t \cos kt \right)$$

(այս բանաձևից ստացվում է աղյուսակ 1-ի 13 բանաձևը): Այսպես, ուրեմն, (65) հավասարման որոնվող լուծումը կլինի.

$$x(t) = \frac{A}{2k} \left(\frac{1}{k} \sin kt - t \cos kt \right) \quad (68)$$

* Այլ կողմում գտնվող ինտեգրալը կարելի է ներկայացնել իրական փոփոխականի երկու ինտեգրալների գումարի տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրը կախված է k պարամետրից:

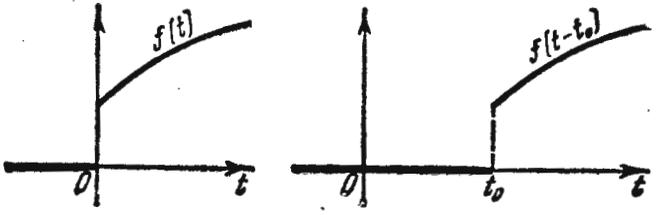
Ուսումնասիրենք այս լուծման երկրորդ գումարիչին.

$$x_2(t) = -\frac{A}{2k} t \cos kt, \quad (68')$$

t-ն մեծանալիս այս մեծությունը սահմանափակ չէ: (68') բանաձևին համապատասխանող տատանումների ամպլիտուդը անսահմանափակորեն աճում է, երբ t-ն անսահմանափակորեն աճում է: Հետևաբար, նաև (68) բանաձևին համապատասխանող տատանումների ամպլիտուդն է անսահմանափակորեն աճում: Այս երևույթը, որը տեղի ունի, երբ սեփական տատանումների հաճախությունը համընկնում է արտաքին ուժերի հաճախությանը, կոչվում է ռեզոնանս (տես նաև XIII գլխի § 28, նկ. 280):

§ 19. Ուշացման թեորեմը

Դիցուք $t < 0$ արժեքների համար $f(t)$ ֆունկցիան նույնաբար հավասար է զրոյի (նկ. 401, ա): Այդ դեպքում $f(t-t_0)$ ֆունկցիան նույնաբար զրոյի հավասար կլինի $t < t_0$ դեպքում (նկ. 401, բ): Ապացուցենք հետևյալ ուշացման թեորեմը.



նկ. 401

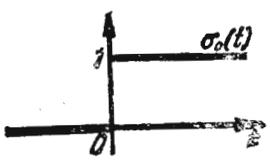
Թեորեմ: Եթե $F(p)$ -ն $f(t)$ ֆունկցիայի պատկերն է, ապա $e^{-pt_0}F(p)$ -ն էլ $f(t-t_0)$ ֆունկցիայի պատկերն է, այսինքն՝ եթե $f(t) \stackrel{\Delta}{=} F(p)$, ապա

$$f(t-t_0) \stackrel{\Delta}{=} e^{-pt_0}F(p): \quad (69)$$

Ապացուցում: Ըստ պատկերի սահմանման ունենք.

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt = \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t-t_0) dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt:$$

Հավասարության աջ մասի առաջին ինտեգրալը հավասար է զրոյի, քանի որ $t < t_0$ դեպքում $f(t-t_0) = 0$: Վերջին ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում, ընդունելով $t-t_0 = z$



նկ. 402

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-p(z+t_0)} f(z) dz = e^{-pt_0} \int_0^{\infty} e^{-pz} f(z) dz = e^{-pt_0} F(p):$$

Այսպիսով,

$$f(t-t_0) \stackrel{\Delta}{=} e^{-pt_0} F(p):$$

Օրինակ, § 2-ում ցույց է տրվել, որ Հեյվիսայդի միավոր ֆունկցիայի համար $\sigma_0(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{p}$: Ապացուցված թեորեմից հետևում է, որ նկ. 402-ում պատկերված $\sigma_0(t-h)$ ֆունկցիայի համար L-պատկեր կլինի $\frac{1}{p} e^{-ph}$ -ը, այսինքն՝

$$\sigma_0(t-h) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{p} e^{-ph}, \quad (70)$$

§ 20. Դելտա-ֆունկցիան և նրա պատկերը

Դիտարկենք

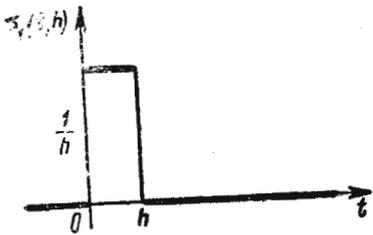
$$\sigma_1(t, h) = \frac{1}{h} [\sigma_0(t) - \sigma_0(t-h)] = \begin{cases} 0, & \text{երբ } t < 0, \\ \frac{1}{h}, & \text{երբ } 0 \leq t < h, \\ 0, & \text{երբ } h \leq t \end{cases} \quad (71)$$

ֆունկցիան, որը պատկերված է նկ. 403-ում:

Եթե այս ֆունկցիան դիտվի որպես ուժ, որը գործում է 0-ից մինչև h ժամանակամիջոցում, իսկ մնացած ժամանակում հավասար է զրոյի, ապա, ակնհայտ է, այդ ուժի իմպուլսը հավասար կլինի միավորի:

(8) և (70) բանաձևերի հիման վրա այդ ֆունկցիայի պատկերը կլինի

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-ph} \right),$$



Նկ. 403

ալսինքն՝

$$\sigma_1(t, h) \leftarrow \frac{1}{p} \left(\frac{1 - e^{-ph}}{h} \right) \quad (72)$$

Մեխանիկայում հարմար է լինում դիտարկել այնպիսի ուժեր, որոնք ազդում են շատ կարճ ժամանակամիջոցում, որպես ակնթարթորեն գործող ուժեր, բայց ունեն վերջավոր

իմպուլս: Ուստի մոտում են $\delta(t)$ ֆունկցիան որպես $\sigma_1(t, h)$ ֆունկցիայի սահման $h \rightarrow 0$ դեպքում:

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_1(t, h)^*:$$

Այս ֆունկցիան անվանում են միավոր իմպուլսային ֆունկցիա, կամ դելտա-ֆունկցիա: Բնական է ընդունել

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad (74)$$

Գրում են նաև

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad (75)$$

Նշենք, որ $\delta(x)$ ֆունկցիան կիրառվում է ոչ միայն մեխանիկայում, այլև մաթեմատիկայի շատ բաժիններում, մասնավորապես մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների շատ խնդիրներ լուծելիս:

Դիտարկենք $\delta(t)$ -ի ադեքուսիվությունը, եթե այն պատկերացվի որպես ուժ: Կգտնենք

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \delta(t) \quad (76)$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $s=0$, $\frac{ds}{dt}=0$, երբ

* Պետք է նկատի ունենալ, որ $\delta(t)$ -ն ֆունկցիա չէ՝ սովորական ըմբռնմամբ: (Շատ ֆիզիկոս-հեղինակներ $\delta(t)$ ֆունկցիան անվանում են Դիրակի ֆունկցիա):

$t=0$ պայմաններին: (76) հավասարումից, հաշվի առնելով (75)-ը, գտնում ենք

$$v = \frac{ds}{dt} = \int_0^t \delta(\tau) d\tau = 1 \quad (77)$$

ցանկացած t -ի դեպքում, մասնավորապես, երբ $t=0$: Հետևաբար, (73) հավասարումից ստացված $\delta(x)$ -ը, կարելի է այդ ֆունկցիան մեկնաբանել որպես այնպիսի ուժ, որը $t=0$ պահին միավոր զանգվածն ունեցող նյութական կետին հաղորդում է միավոր արագություն: $\delta(t)$ ֆունկցիայի L -պատկերը սահմանենք որպես $\delta_1(t, h)$ ֆունկցիայի պատկերի սահման, երբ $h \rightarrow 0$.

$$L\{\delta(x)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{p} \cdot \frac{1 - e^{-ph}}{h} = \frac{1}{p} \cdot p = 1$$

(այստեղ օգտվեցինք սահմանը գտնելու վերաբերյալ Լոպիտալի կանոնից): Եվ այսպես,

$$\delta(t) \leftarrow 1:$$

Այնուհետև որոշվում է $\delta(t-t_0)$ ֆունկցիան, որը մեկնաբանվում է որպես այնպիսի ուժ, որն ակնթարթորեն, $t=t_0$, պահին միավոր զանգվածին հաղորդում է 1-ի հավասար արագություն: Ակնհայտ է, որ ուշացման թեթևամի հիման վրա կունենանք.

$$\delta(t-t_0) \leftarrow e^{-pt} \quad (79)$$

Նման ձևով կարող ենք գրել

$$\int_0^{t_0} \delta(t-t_0) dt = 1, \quad (80)$$

Դելտա-ֆունկցիայի մեխանիկական մեկնաբանման հիման վրա հետևում է, որ հավասարման աջ մասում դելտա-ֆունկցիայի առկայությունը կարող է փոխարինվել սկզբնական պայմանների համապատասխան փոփոխումով: Դիցուք ունենք

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t) + \delta(t) \quad (81)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը՝ $x_0=0$, $\dot{x}_0=0$, երբ $t=0$ սկզբնական պայմաններով: Օժանդակ հավասարումը կլինի

$$p^2 \bar{x}(p) = F(p) + 1, \quad (82)$$

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{p^2} + \frac{1}{p^2}$$

Օգտվելով աղյուսակի 9 և 15 բանաձևերից, ստանում ենք

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)(t-\tau)d\tau + t \quad (83)$$

Այս նույն արդյունքին կգայինք, եթե գտնեինք

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $x_0=0$, $x'_0=1$, երբ $t=0$ սկզբնական պայմաններին: Այս դեպքում օժանդակ հավասարումը կունենար

$$p^2\bar{x}(p) - 1 = F(p) \quad (84)$$

տեսքը: Այն համարժեք է (82) օժանդակ հավասարմանը և, հետևաբար, նրա լուծումը կհամընկնի (83) լուծմանը:

Վերջում, որպես եզրափակում, նշենք դելտա-ֆունկցիայի հետևյալ կարևոր հատկությունը: (74) և (75) հավասարությունների հիման վրա կարող ենք գրել.

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0, & \text{երբ } -\infty < t < 0, \\ 1, & \text{երբ } 0 \leq t < \infty, \end{cases} \quad (85)$$

այսինքն՝ այս ինտեգրալը հավասար է Հեվիսայդի $\sigma_0(t)$ միավոր ֆունկցիային: Եվ այսպես,

$$\sigma_0(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau \quad (86)$$

Հավասարությունն աջ և ձախ մասերը դիֆերենցելով ըստ t -ի, ստանում ենք

$$\sigma'_0(t) = \delta(t) \quad (87)$$

պայմանական հավասարությունը:

(87) պայմանական հավասարությունն իմաստը պարզելու համար դիտարկենք նկ. 404-ում պատկերված $\bar{\sigma}_0(t, h)$ ֆունկցիան: Ակնհայտ է, որ

$$\bar{\sigma}_0(t, h) = \sigma_1(t, h) \quad (88)$$

(բացի $t=0$ և $t=h$ կետերից): (88) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $h \rightarrow 0$, տեսնում ենք, որ $\bar{\sigma}(t, h) \rightarrow \sigma_0(t)$, և կգրենք

$$\bar{\sigma}'_0(t, h) \rightarrow \sigma'_0(t), \text{ երբ } h \rightarrow 0:$$

(88) հավասարության աջ մասը՝ $\sigma_1(t, h) \rightarrow \delta(t)$, երբ $h \rightarrow 0$: Այսպիսով, (88) հավասարությունն անցնում է (87) պայմանական հավասարությանը:

Վարժություններ XIX գլխի վերաբերյալ

Գտնել հետևյալ հավասարումների լուծումը՝ նշված սկզբնական պայմանների դեպքում.

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0, \quad x=1, \quad x'=2, \quad \text{երբ } t=0. \quad \text{Պատ. } x=4e^{-t}-3e^{-2t},$

2. $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad x=2, \quad x'=0, \quad x''=1, \quad \text{երբ } t=0. \quad \text{Պատ. } x=1-t+e^t,$

3. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + (a^2+b^2)x = 0, \quad x=x_0, \quad x'=x'_0, \quad \text{երբ } t=0. \quad \text{Պատ. } x = \frac{e^{at}}{b} \times$

$\times [x_0 b \cos bt + (x'_0 - x_0 a) \sin bt]:$

4. $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = e^{5t}, \quad x=1, \quad x'=2, \quad \text{երբ } t=0. \quad \text{Պատ. } x = \frac{1}{12}e^{5t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{2}{3}e^{2t},$

5. $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = a \cos nt, \quad x=x_0, \quad x'=x'_0, \quad \text{երբ } t=0. \quad \text{Պատ. } x = \frac{a}{m^2-n^2} \times$

$\times (\cos nt - \cos mt) + x_0 \cos mt + \frac{x'_0}{m} \sin mt.$

6. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} = t^2, \quad x=0, \quad x'=0, \quad \text{երբ } t=0. \quad \text{Պատ. } x = 2e^t - \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 2t - 2:$

7. $\frac{d^3x}{dt^3} + x = \frac{1}{2}t^2e^t, \quad x=x'=x''=0, \quad \text{երբ } t=0. \quad \text{Պատ. } x = \frac{1}{4} \left(t^2 - 3t + \frac{3}{2} \right) \times$
 $\times e^t - \frac{1}{24}e^{-t} - \frac{1}{3} \left\{ \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right\} e^{\frac{1}{2}t},$

8. $\frac{d^3x}{dt^3} + x = 1, \quad x_0=x'_0=x''_0=0, \quad \text{երբ } t=0. \quad \text{Պատ. } x = 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}.$

9. $\frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin t$, $x_0 = x'_0 = x''_0 = x'''_0 = 0$, երբ $t=0$: Պատ. $x =$

$= \frac{1}{8} [e^t(t-2) + e^{-t}(t+2) + 2\sin t]$,

10. Գտնել

$\frac{d^2x}{dt^2} + y = 1$, $\frac{d^2y}{dt^2} + x = 0$

գիծերենցիալ հավասարումների համակարգի այն լուծումը, որը բավարարում է $x_0 = y_0 = x'_0 = y'_0 = 0$, երբ $t=0$ սկզբնական պայմաններին:

Պատ. $x(t) = -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{-t}$, $y(t) = -\frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{4} e^{-t} + 1$,

XX ԳԼՈՒԽ

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԵՐԸ

Ամենօրյա փորձը մեզ համոզում է այն բանում, որ առօրյա կյանքում, գործնական իրավիճակներում, ինչպես նաև գիտական հետազոտություններում հարկ է լինում հանդիպել այնպիսի դրությունների, երբ մանկությունից մեզ համար սովորական դարձած խիստ զետեմինիզմի օրինաչափությունները տեղի չեն ունենում: Բերենք մի քանի օրինակներ: Պատկերացնենք, որ մեզ հետաքրքրում է կանչերի այն քանակը, որոնք օրվա ընթացքում ստացվում են շտապ օգնություն կայանում:

Երկարատև դիտումները ցույց են տալիս, որ հնարավորություն չկա ճշգրիտ գուշակելու մոտակա օրերի ընթացքում կայանում ստացվելիք կանչերի քանակը: Այդ թիվը ենթարկված է նշանակալից և այն էլ պատահական տատանումների: Ծիշտ այդպես էլ պատահական է այն ժամանակը, որը կծախսի հիվանդի կանչով ժամանած բժիշկը:

Եթե փորձարկման դրվի որևէ N թվով ինչ-որ արտադրանք, որոնք, թվում է թե, պատրաստված են միևնույն պայմաններում և միևնույն նյութից, ապա փորձարկման սկզբից մինչև նրանց անաշխատունակ վիճակին հասնելու ժամանակը (այսինքն՝ մինչև մնացուց դառնալը) նույնպես պատահական է, ենթարկված է խիստ ցրման:

Հրանոթից նշանակալից հարվածելու ընթացքում դիտվում է, այսպես կոչված, արկերի ցրման երևույթը: Նպատակի կենտրոնից արկի անկման կետերի շեղումը նախօրոք հնարավոր չէ նշել. այն պատահական է:

Պատահականություն անկալություն փաստի միայն հավաստումը բնությունից երևույթների կամ տեխնոլոգիական պրոցեսների վստահ օգտագործման համար միանգամայն անբավարար է, անհրաժեշտ է սովորել քանակապես գնահատել պատահական երևույթները, գուշակել

նրանց ընթացքը: Այժմ համառորեն այդ են պահանջում ինչպես տեսական, այնպես էլ գործնական խնդիրները: Այս կապակցությամբ ծագող հարցերի լուծմամբ և ընդհանուր մաթեմատիկական տեսությունների ստեղծմամբ զբաղվում են մաթեմատիկայի երկու ճյուղ՝ հավանականությունների տեսությունը և մաթեմատիկական փիճակագրությունը: Այս գլխում շարադրված են հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական փիճակագրության տարրերը:

§ 1. Պատահույթ: Պատահույթի հարաբերական հաճախությունը: Պատահույթի հավանականությունը: Հավանականությունների տեսության առարկան

Հավանականությունների տեսության հիմնական գաղափարը պատահույթն է: Պատահույթ է կոչվում այն երևույթը, որը որոշ պայմանների իրագործման ժամանակ կարող է տեղի ունենալ կամ տեղի չունենալ:

Օրինակ 1: Դրամը վեր նետելուց հետո գերբի երևան գալը պատահույթ է:

Օրինակ 2: Տվյալ հրանոթից տվյալ օբյեկտի կամ տիրույթի վրա կրակելիս այդ օբյեկտին կամ տիրույթին հարվածելը պատահույթ է:

Օրինակ 3: Տրված 20 սմ տրամագծով դրանը պարաստելիս 0,2 մմ-ից փոքր սխալանք ստանալը պատահույթ է:

Սահմանում 1: A պատահույթի p^* հարաբերական հաճախությունը կատարված փորձերի ընթացքում տվյալ պատահույթի երևան գալու m^* թվի հարաբերությունը այդ փորձերի n^* ընդհանուր թվին. փորձերից յուրաքանչյուրում տվյալ պատահույթը կարող է երևան գալ կամ երևան չգալ: Գրելու ենք այսպես

$$P^*(A) = p^* = \frac{m^*}{n^*} \quad (1)$$

Օրինակ 4: Դիցուք տվյալ օբյեկտի վրա տվյալ հրանոթից միևնույն պայմաններում կատարված է կրակոցների 6 սերիա.

- 1-ին սերիայում կար 5 կրակոց, խոցումների թիվը՝ 2,
- 2-րդ սերիայում կար 10 կրակոց, խոցումների թիվը՝ 6,
- 3-րդ սերիայում կար 12 կրակոց, խոցումների թիվը՝ 7,
- 4-րդ սերիայում կար 50 կրակոց, խոցումների թիվը՝ 27,
- 5-րդ սերիայում կար 100 կրակոց, խոցումների թիվը՝ 49,
- 6-րդ սերիայում կար 200 կրակոց, խոցումների թիվը՝ 102,

A պատահույթը նպատակակետը խոցելն է: Սերիաներում խոցելու հարաբերական հաճախությունը կլինի

$$1\text{-ին սերիայում } \frac{2}{5} = 0,40,$$

2-րդ սերիայում	$\frac{6}{10} = 0,60,$
3-րդ սերիայում	$\frac{7}{12} = 0,58,$
4-րդ սերիայում	$\frac{27}{50} = 0,54,$
5-րդ սերիայում	$\frac{49}{100} = 0,49,$
6-րդ սերիայում	$\frac{102}{200} = 0,51,$

Տարբեր երևույթների դիտումից հետևում է, որ եթե յուրաքանչյուր սերիայում փորձարկումների թիվը մեծ չէ, ապա յուրաքանչյուր սերիայում A պատահույթի երևան գալու հարաբերական հաճախությունները կարող են մեկը մյուսից էապես տարբերվել: Իսկ եթե սերիաներում փորձերի թիվը մեծ է, ապա, որպես կանոն, A պատահույթի երևան գալու հարաբերական հաճախությունները քիչ են տարբերվում միմյանցից, և այդ տարբերությունը փոքր է այնքան, որքան մեծ է սերիաներում փորձարկումների թիվը: Ասում են, որ մեծ թվով փորձարկումների դեպքում հարաբերական հաճախությունը ավելի ու ավելի է դադարում պատահական բնույթ կրելուց: Սակայն նշենք, որ գոյություն ունեն այնպիսի պատահույթներ, որոնց հաճախությունը կայուն բնույթ չունի և նրա մեծությունը տարբեր, նույնիսկ շատ մեծ սերիաներում կարող է շատ տարբերվել մեկը մյուսից:

Փորձը ցույց է տալիս, որ դեպքերի գերակշռող մասի համար գոյություն ունի այնպիսի p թիվ, որ մեծ թվով փորձարկումների դեպքում, բացի հազվագյուտ դեպքերից, A պատահույթի երևան գալու հարաբերական հաճախությունները քիչ են տարբերվում այդ p թվից:

Այս փորձնական փաստը սիմվոլիկ ձևով գրում են այսպես.

$$\frac{m^*}{n^*} \xrightarrow{n^* \rightarrow \infty} p \quad (2)$$

p թիվը կոչվում է A պատահույթի երևան գալու հավանականությունը: Վերջին դարձվածքը սիմվոլիկ ձևով գրում են այսպես.

$$P(A) = p \quad (3)$$

P հավանականությունը A պատահույթի բնույթը որոշող տվյալ փորձարկումներում այդ պատահույթի երևան գալու հնարավորության օբյեկտիվ բնութագիրն է:

Մեծ թվով փորձարկումների դեպքում հարաբերական հաճախու-

թյունը քիչ է տարբերվում հավանականությունից. «բացի հավասարադեպքերից», որոնց գոյությունը հաճախ կարելի է անտեսել:

(2) առնչությունը բառերով համառոտ ձևակերպվում է այսպես.

Փորձերի n^* քիվն անսահմանափակորեն ավելացնելիս A պատահույթի հարաբերական հաճախությունը զուգամիտում է այդ պատահույթի երևան գալու p հավանականությանը:

Դիտողություն: Բերված դասադասություններում փորձերի հիման վրա սահմանեցինք (2) առնչությունը: Բայց սահմանում են փորձից բխող նաև այլ բնական պայմաններ: Նրանցից արտածվում է (2) առնչությունը, որն այս դեպքում արդեն կլինի թեորև: Դա հավանականությունների տեսությունում հայտնի Յա. Բերնուլլիի (1654—1705) թեորեմն է:

Քանի որ հավանականությունը որևէ պատահույթի երևան գալու հնարավորության օբյեկտիվ բնութագիրն է, ապա ռազմական դրոժում, արտադրության կազմակերպման մեջ, էկոնոմիկայում և այլ ընդհանրապես գիտարկվող շատ պրոցեսների ընթացքի բնույթը գուշակելու համար պետք է կարողանալ հաշվել որոշ բարդ պատահույթների երևան գալու հավանականությունները: Տվյալ բարդ պատահույթը որոշող տարրական պատահույթների հավանականություններով այդ պատահույթի երևան գալու հավանականության որոշումը, տարբեր պատահական երևույթների հավանականային օրինաչափությունների տեսության սահմաններում էլ հավանականությունների տեսության ատարկան է:

§ 2. Հավանականության դասական սահմանումը և հավանականությունների անմիջական հաշվումը

Շատ դեպքերում քննարկվող պատահույթի հավանականությունը կարելի է հաշվել, ելնելով դիտարկվող փորձարկման վերլուծություններից:

Հետագա շարադրանքը հասկանալու համար քննարկենք օրինակ:

Օրինակ 1. Համասեռ խորանարդը, որի նիստերին զրված են 1-ից մինչև 6 տարբեր բնական թվերը, անվանելու ենք խաղոսկր: Դիտարկում ենք խաղոսկրը նետելիս նրա վերին նիստի վրա ($1 \leq l \leq 6$) թվի երևան գալու պատահույթը: Քանի որ խաղոսկրի սիմետրիկության հետևանքով 1-ից մինչև 6 ցանկացած թվի երևան գալու պատահույթները միատեսակ հնարավոր են, ապա նրանց տնվանում են հավասարահնարավոր: Խաղոսկրի n մեծ թվով նետումների դեպքում կարելի է սպասել, որ l թվի, ինչպես և 1-ից մինչև 6 յուրաքանչյուր ուրիշ թվի վերին նիստի վրա երևան կգա մոտավորապես $\frac{n}{6}$ դեպքում: Դա հաստատվում է փոր-

ձով:

հարաբերական հաճախությունը մոտ կլինի $p^* = \frac{1}{6}$ թվին. Ուստի ընդունում են, որ վերին նիստի վրա l թվի, ինչպես նաև 1-ից մինչև 6 ցանկացած ուրիշ թվի, երևան գալու հավանականությունը հավասար է $\frac{1}{6}$ -ի:

Ստորև կգրադրվենք այնպիսի պատահույթների վերլուծություններ, որոնց հավանականությունը հաշվվում է անմիջականորեն:

Սահմանում 1: Պատահույթները կոչվում են տվյալ փորձարկման ընթացքում անհամատեղելի, եթե նրանցից ոչ մի երկուսը միաժամանակ չեն կարող երևան գալ:

Սահմանում 2: Կասենք, որ պատահույթները կազմում են լրիվ խումբ, եթե յուրաքանչյուր փորձարկման ժամանակ կարող է երևան գալ նրանցից ցանկացածը և չի կարող երևան գալ ուրիշ որևէ այլ պատահույթ, որը նրանց հետ համատեղելի չէ:

Դիտարկենք հավասարահնարավոր, անհամատեղելի պատահարների լրիվ խումբը: Այդպիսի պատահույթներն անվանելու ենք դեպքեր (կամ շանսեր):

Այդպիսի խմբի պատահույթը (դեպքը) կոչվում է A պատահույթի հանդես գալուն նպաստող, եթե այդ դեպքի երևան գալն իր հետ բերում է A պատահարի երևան գալը:

Օրինակ 2: Սափորի մեջ գտնվում են 8 գնդակ, որոնցից յուրաքանչյուրի վրա զրված է 1-ից մինչև 8 թվանշաններից մեկը, 1, 2, 3 թվանշաններով գնդակները կարծիք են, իսկ մնացած գնդակները՝ սև, 1 թվանշանով (ինչպես նաև 2 և 3 թվանշանով) գնդակի երևան գալը պատահույթ է, որը բարենպաստ է կարձիք գնդակ երևան գալուն:

Քննարկվող դեպքի համար կարելի է տալ հավանականության \S 1-ում տվածից այլ սահմանում:

Սահմանում 3: A պատահույթի p հավանականությունը կոչվում է նպաստող դեպքերի m թվի հարաբերությունը բոլոր հնարավոր դեպքերի n թվին, որոնք կազմում են հավասարահնարավոր անհամատեղելի պատահույթների լրիվ խումբ, կամ սիմվոլիկ ձևով՝

$$P(A) = p = \frac{m}{n}, \quad (1)$$

Սահմանում 4: Եթե ինչ-որ պատահույթի նպաստում են հավասարահնարավոր անհամատեղելի պատահույթների լրիվ խումբ կազմող բոլոր n դեպքերը, ապա այդպիսի պատահույթը կոչվում է հավաստի. հավաստի պատահույթի հավանականությունը՝ $p=1$:

Այն պատահույթը, որին չի նպաստում հավասարահնարավոր անհամատեղելի պատահույթների լրիվ խումբ կազմող n դեպքերից և ոչ մեկը, կոչվում է անհնարին. նրա հավանականությունը՝ $p=0$:

Դիտողություն 1: Տվյալ դեպքում հակադիր պնդումները նույնպես իրավացի են: Բայց և այնպես ուրիշ դեպքերում, օրինակ, անընդհատ պատահական մեծություն (§ 12) դեպքում, հակադիր պնդումները կարող են և ճիշտ չլինել, այսինքն՝ նրանից, որ ինչ-որ պատահություն հավանականությունը հավասար է 1-ի կամ 0-ի, դեռ չի հետևում, որ այդ պատահությունը հավասար է կամ անհնարին է:

Հավանականություն սահմանումից հետևում է, որ այն բավարարում է հետևյալ անհշտությունը՝

$$0 \leq p \leq 1:$$

Օրինակ 3: 36 խաղաթղթերից կազմված կոմպլեկտից հանվում է մեկ խաղաթուղթ: Ինչին է հավասար ադամանդան պատկերող խաղաթղթի երկվան գալու հավանականությունը:

Լուծում: Այստեղ առկա է դեպքերի սխեման: A պատահությունը ազդանշանով խաղաթղթի երեան գալն է: Այստեղ հնարավոր է ընդամենը 36 դեպք: A պատահությունը նպաստում են $m=9$ դեպքեր:

$$\text{Հետևաբար, } p = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}:$$

Օրինակ 4: Միաժամանակ նետվում են երկու զրամ, Ինչպիսին է երկու զրամների վրա դերը երևալու հավանականությունը:

Լուծում: Կազմենք հնարավոր դեպքերի սխեման:

	Առաջին զրամ	Երկրորդ զրամ
1-ին դեպք	գերը	գերը
2-րդ դեպք	գերը	ոչ գերը
3-րդ դեպք	ոչ գերը	գերը
4-րդ դեպք	ոչ գերը	ոչ գերը

Ընդամենը 4 դեպք է: Նպաստող է 1 դեպք:

Հետևաբար, երկու զրամի վրա գերը լինելու հավանականությունը կլինի

$$p = \frac{1}{4}:$$

Օրինակ 5: Հրաձգության ընթացքում որևէ նպատակակետի հարվածելու հավանականությունը առաջին հրանոթի համար հավասար է $\frac{8}{10}$ -ի, մյուս հրանոթի համար՝ $\frac{7}{10}$ -ի: Պտնել երկու հրանոթից միաժամանակյա կրակոցով նպատակակետը ոչնչացնելու հավանականությունը, նպատակակետը կոչնչացվի, եթե լինի գոնե մեկ խոցում որևէ հրանոթից:

Լուծում: Այս խնդիրը մոդելացվում է հետևյալ կերպ: Երկու սափորում

կան 10-ական գնդիկներ, որոնք համարակալված են 1-ից մինչև 10: Առաջին սափորում կա 8 կարմիր և 2 սև, իսկ երկրորդում՝ 7 կարմիր և 3 սև գնդիկներ: Յուրաքանչյուր սափորից հանվում է մեկական գնդիկ: Ինչպիսին է հավանականությունը այն բանի, որ հանված երկու գնդիկից գոնե մեկը կարմիր է:

Քանի որ առաջին սափորի յուրաքանչյուր գնդիկ կարող է հանվել երկրորդ ցանկացած գնդիկի հետ, ապա ընդամենը կլինի 100 դեպք: $n=100$:

Հաշվենք նպաստող դեպքերը:

Առաջին սափորի 8 կարմիր գնդիկներից յուրաքանչյուրը միաժամանակ երկրորդ սափորի ցանկացած գնդիկի հետ հանելիս, հանվածների թվում կլինի առնվազն մեկ կարմիր գնդիկ: Կլինեն այդպիսի $10 \times 8 = 80$ դեպքեր: Առաջին սափորի 2 սև գնդիկներից յուրաքանչյուրը միաժամանակ երկրորդ սափորի ցանկացած 7 կարմիր գնդիկներից ցանկացածի հետ հանելու դեպքում հանված գնդիկների թվում կլինի մեկ կարմիր գնդիկ: Կլինեն այդպիսի $2 \times 7 = 14$ դեպքեր: Այսպիսով, ընդամենը կլինեն $m=80+14=94$ նպաստող դեպքեր:

Այն բանի հավանականությունը, որ հատվածների մեջ կլինի առնվազն մեկ կարմիր գնդիկ, հավասար է

$$p = \frac{m}{n} = \frac{94}{100}:$$

Այսպիսին կլինի նաև նպատակակետը ոչնչացնելու հավանականությունը:

Դիտողություն 2: Այս օրինակում հրաձգության ժամանակ հավանականություն մասին խնդիրը հանգեցրինք սափորից գնդիկներ հանելիս այսպիսի կամ այն գնդիկի երևան գալու հավանականություն մասին խնդրին: Հավանականություն տեսությունը շատ խնդիրներ կարելի է հանգեցնել սափորների սխեմային: Ուստի սափորներից գնդիկներ հանելու խնդիրներին պետք է նայել որպես ընդհանրացված խնդիրներին:

Օրինակ 6: 100 դետալների խմբաքանակի թվում 10 հատը խոտան է: Ինչպիսին է այն բանի հավանականությունը, որ վերցրած 4 դետալներից 3-ը կլինեն ոչ խոտան:

Լուծում: 100 դետալներից 4 դետալ կարելի է վերցնել $n = C_{100}^4$ եղանակներով: Այն դեպքերի թիվը, երբ վերցրած 4 դետալներից 3-ը կլինեն ոչ խոտան, հավասար է $m = C_{30}^3 \cdot C_{10}^1$:

Որոշվող հավանականությունը կլինի

$$p = \frac{m}{n} = \frac{C_{30}^3 \cdot C_{10}^1}{C_{100}^4} = \frac{1424}{4753} \approx 0,3:$$

§ 3. Հավանականությունների գումարումը: Հակադիր պատահություններ

Սահմանում 1: A_1 և A_2 երկու պատահություն գումար կոչվում է այն C պատահություն, որը կայանում է այդ պատահություններից գոնե մեկի երևան գալու մեջ:

Ստորև կքննարկվի A_1 և A_2 երկու անհամատեղելի պատահություն

Ներքին գումարի հավանականությունը: Այդ պատահությունների գումարը նշանակվում է

$$A_1 + A_2$$

կամ

$$A_1 \text{ կամ } A_2^*$$

Իրավացի է հետևյալ թեորեմը, որը կոչվում է հավանականությունների գումարման մասին թեորեմ:

Թեորեմ 1: Դիցուք ավյալ փորձարկման (երևույթի, փորձի) ընթացքում կարող են տեղի ունենալ A_1 պատահույթը՝ $P(A_1)$ հավանականությամբ և A_2 պատահույթը՝ $P(A_2)$ հավանականությամբ: A_1 և A_2 պատահույթներն անհամատեղելի են: Այս դեպքում պատահույթների գումարի, այսինքն՝ այն բանի, որ տեղի կունենա կամ A_1 պատահույթը կամ A_2 պատահույթը, հավանականությունը հաշվվում է

$$P(A_1 \text{ կամ } A_2) = P(A_1) + P(A_2) \quad (1)$$

բանաձևով:

Ապացուցում: Դիցուք

$$P(A_1) = \frac{m_1}{n}, \quad P(A_2) = \frac{m_2}{n}$$

Քանի որ A_1 և A_2 պատահույթներն անհամատեղելի են, ապա դեպքերի n ընդհանուր թվի դեպքում միաժամանակ A_1 և A_2 պատահույթներին նպաստող դեպքերի թիվը հավասար է 0-ի, իսկ A_1 պատահույթի կամ A_2 պատահույթի երևան գալուն նպաստող դեպքերի թիվը հավասար է $m_1 + m_2$: Հետևաբար,

$$P(A_1 \text{ կամ } A_2) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A_1) + P(A_2)$$

ինչ պահանջվում էր ապացուցել:

Նման ձևով կարելի է այս թեորեմին ապացուցել ցանկացած թվով գումարելիների համար.

$$P(A \text{ կամ } A_2 \text{ կամ } \dots \text{ կամ } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (1')$$

Վերջին հավասարությունը գրվում է նաև այսպես.

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (1'')$$

* Նկատենք, որ այս արտահայտության մեջ «կամ» բառը չունի բացառման բնույթ, այլ նշանակում է, որ երևան կզա այդ պատահույթներից գոնե մեկը՝ սահմանում 1-ի համաձայն:

Դիտողություն: Մենք գումարման թեորեմին ապացուցեցինք այդ դեպքերի սխեմայի համար, երբ հավանականությունը որոշվում է անմիջական հաշվամար: Հետագայում ընդունելու ենք, որ հավանականությունների գումարման թեորեմին՝ իրավացի է նաև այն դեպքում, երբ հավանականությունների անմիջական հաշվումն անհնարին է: Այս պնդումը հիմնված է հետևյալ կշռադատությունների վրա: Մեծ թվով փորձարկումների դեպքում (չնչին բացառությամբ) պատահույթների հավանականությունները մոտ են հարաբերական հաճախություններին, իսկ հարաբերական հաճախությունների համար ապացույցը կատարվում է այնպես, ինչպես տրված է վերևում: Այս դիտողությունը կվերաբերվի նաև հետագա այն թեորեմների ապացուցմանը, որոնք կապացուցենք՝ օգտվելով սախորների սխեմայից:

Օրինակ 1: Կատարվում է հրաձգություն 3 չհատվող գոտիներից բաղկացած որևէ D տիրույթի վրա: I գոտին ընկնելու հավանականությունը՝ $P(A_1) = \frac{5}{100}$, II գոտին՝ $P(A_2) = \frac{10}{100}$, III գոտին՝ $P(A_3) = \frac{17}{100}$: Ինչպիսի՞ն է D տիրույթն ընկնելու հավանականությունը: Ըստ (1') բանաձևի ունենք.

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{17}{100} = \frac{32}{100}$$

Սահմանում 2: Երկու պատահույթներ կոչվում են հակադիր, եթե նրանք անհամատեղելի են և կազմում են լրիվ խումբ:

Եթե պատահույթներից մեկը նշանակենք A -ով, ապա հակադիր պատահույթը նշանակում են \bar{A} -ով:

Դիցուք A պատահույթի երևան գալու հավանականությունը p -ն է, A պատահույթի երևան չգալու, այսինքն՝ \bar{A} պատահույթի երևան գալու հավանականությունը նշանակենք $P(A) = q$:

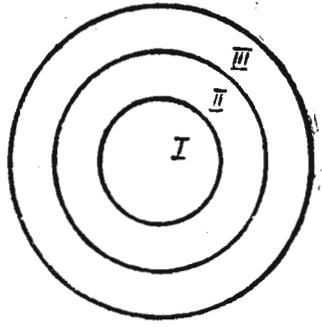
Քանի որ փորձարկման ընթացքում անպայման իրականանում է կամ A պատահույթը կամ \bar{A} պատահույթը, ապա (1) թեորեմի հիման վրա ստանում ենք.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

այսինքն՝ հակադիր պատահույթների հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի.

$$p + q = 1 \quad (2)$$

Օրինակ 2: Թիրախի վրա կատարվում է մեկ կրակոց: A պատահույթը Թիրախը խոցելն է: Խոցվու հավանականությունը հավասար է p -ի. $P(A) = p$: Որոշել վրիպելու հավանականությունը:



Նկ. 405

Վերջինը A պատահույթին հակադիր \bar{A} պատահույթն է, ուստի վերջինը հավանականությունը՝ $q=1-p$:

Օրինակ 3. Կատարվում է որևէ շափում: A պատահույթը շափման ընթացքում λ -ից փոքր սխալի ստանալն է: Դիցուք $P(A)=p$: Հակադիր պատահույթը՝ λ -ից մեծ կամ λ -ին հավասար սխալի ստանալը \bar{A} պատահույթն է: Այդ պատահույթի հավանականությունը՝ $P(\bar{A})=q=1-p$:

Հետևանք 1: Եթե A_1, A_2, \dots, A_n պատահույթները կազմում են պատահույթների լրիվ խումբ, ապա տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1: \quad (3)$$

Ապացուցում: Քանի որ A_1, A_2, \dots, A_n պատահույթները կազմում են պատահույթների լրիվ խումբ, ապա նրանցից մեկի երեւման գալը հավաստի պատահույթ է: Հետևաբար,

$$P(A_1 \text{ կամ } A_2 \text{ կամ } \dots \text{ կամ } A_n) = 1:$$

Ձախ մասը ձևափոխելով ըստ (1') բանաձևի, կստանանք (3) հավասարությունը:

Սահմանում 3: A և B պատահույթները կոչվում են համատեղելի, եթե ավելի փորձարկման ընթացքում երկու պատահույթներն էլ կարող են երևան գալ, այսինքն տեղի կունենա A և B պատահույթների համատեղում:

Այն պատահույթը, որը կախում է A և B պատահույթների համատեղման մեջ կնշանակենք $(A \text{ և } B)$ կամ (AB) : A և B պատահույթների համատեղման հավանականությունը կնշանակենք $P(A \text{ և } B)$:

Թեորեմ 2: Համատեղելի պատահույթների գումարի հավանականությունը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$P(A \text{ կամ } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ և } B)$$

(4) բանաձևի իրավացիությունը լուսարանենք երկրաչափորեն: Նախորոք տանք հետևյալ սահմանումը.

Սահմանում 4: Դիցուք որված է որևէ D տիրույթ, որի մակերեսը հավասար է S -ի: Դիտարկենք D -ի մեջ մտնող d տիրույթը, որն անի \bar{S} մակերես: Այս դեպքում կետի՝ d տիրույթն ընկնելու հավանականությունը, եթե համարենք, որ կետի՝ D տիրույթն ընկնելը հավաստի է, ըստ սահմանման, հավասար է $\frac{S}{S}$, այսինքն՝ $P = \frac{S}{S}$:

Այս հավանականությունն անվանում են երկրաչափական հավանականություն:

Այս դեպքում, կետի ընկնելը մեկի հավասար կողմ ունեցող քառակուսու մեջ համարելով հավաստի, կունենանք.

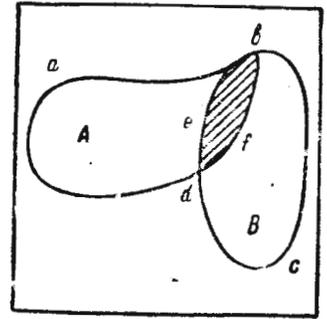
$$\left. \begin{aligned} P(A \text{ կամ } B) &= \text{մակ. } abcd a, \\ P(A) &= \text{մակ. } abfd a, \\ P(B) &= \text{մակ. } bcdeb, \\ P(A \text{ և } B) &= \text{մակ. } debfd: \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Այնհայտ է, որ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը
 $\text{մակ. } abcd a = \text{մակ. } abfd a + \text{մակ. } bcdeb - \text{մակ. } debfd:$

Այս հավասարության մեջ տեղադրելով (5) հավասարությունների ձախ մասերը, կստանանք (4) հավասարությունը:

Նման ձևով կարելի է հաշվել ցանկացած թվով համատեղելի պատահույթների գումարի հավանականությունը:

Նշենք, որ թեորեմ 2-ը կարելի է ապացուցել, ելնելով վերևում տրված սահմանումներից և գործողությունների կանոններից:



Նկ. 106

§ 4. Անկախ պատահույթների հավանականությունների բազմապատկումը

Սահմանում 1: A պատահույթը կոչվում է B պատահույթից անկախ, եթե A պատահույթի երևան գալու հավանականությունը կախված չէ այն բանից, թե B պատահույթը տեղի է ունեցել կամ տեղի չի ունեցել:

Թեորեմ 1: Եթե A և B պատահույթներն անկախ են, ապա A և B պատահույթների համատեղման հավանականությունը հավասար է A և B պատահույթների երևան գալու հավանականությունների արտադրյալին.

$$P(A \text{ և } B) = P(A) \cdot P(B): \quad (1)$$

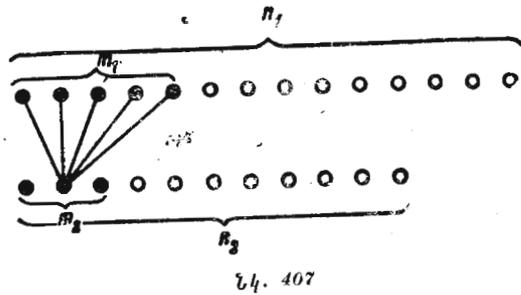
Ապացուցում: Այս թեորեմի ապացուցումը կատարենք սափորների սխեմայի համար: Երկու սափորներից լուրջանջլուրում կան, համապատասխանաբար, n_1 և n_2 գնդիկներ: Առաջին սափորում կա m_1 կարմիր գնդիկ, իսկ մնացածները սև են: Երկրորդ սափորում կա m_2 կարմիր գնդիկ, իսկ մնացածները սև են: Յուրաքանչյուր սափորից հանվում է մեկական գնդիկ: Ինչի՞ է հավասար այն բանի հավանականությունը, որ հանված երկու գնդակները կլինեն կարմիր:

Դիցուք A պատահույթը 1-ին սափորից կարմիր գնդիկ հանելն է.

B պատահույթը՝ 2-րդ սափորից կարմիր գնդիկ հանելն է: Այս պատահույթներն անկախ են: Ակնհայտ է, որ

$$P(A) = \frac{m_1}{n_1}, \quad P(B) = \frac{m_2}{n_2} \quad (2)$$

Միաժամանակ չորս քանչյուր սափորից մեկական գնդիկ հանելու



Նկ. 407

ընդամենը $n_1 n_2$ հնարավոր դեպք կլինի: Երկու սափորից միաժամանակ կարմիր գնդիկներ հանելուն նպաստող դեպքերի թիվը կլինի $m_1 m_2$: A և B պատահույթների համատեղման հավանականությունը կլինի

$$P(A \text{ և } B) = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}$$

Այս բանաձևում $\frac{m_1}{n_1}$ -ը և $\frac{m_2}{n_2}$ -ը փոխարինելով (2)-ից իրենց արտահայտություններով, ստանում ենք (1) հավասարությունը: Այս թեորեմի լուսաբանումը տես Նկ. 407-ում:

Եթե ունենք A_1, A_2, \dots, A_n n հատ անկախ պատահույթներ, ապա նման ձևով կարելի է ապացուցել

$$P(A_1 \text{ և } A_2 \text{ և } \dots \text{ և } A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (3)$$

հավասարության արդարև լինելով:

Օրինակ 1: Երկու տանկից կրակում են միևնույն նպատակահետին: Առաջին տանկից նպատակահետին հարվածելու հավանականությունը $\frac{9}{10}$ է, երկրորդինը՝ $\frac{5}{6}$, Յուրաքանչյուր տանկից միաժամանակ կատարվում է մեկական կրակոց, որոշել այն բանի հավանականությունը, որ երկուսն էլ կհարվածեն նպատակահետին:

Լուծում: Այստեղ $P(A) = \frac{9}{10}$, $P(B) = \frac{5}{6}$, $P(A \text{ և } B)$ -ն, այսինքն՝ երկու խոցումները հավանականությունը, գտնում ենք ըստ (1) բանաձևի:

$$P(A \text{ և } B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{4}$$

Օրինակ 2: Սարքի անխափան աշխատանքը որոշվում է այդ սարքը կազմող 3 հանդույցներից յուրաքանչյուրի անխափան աշխատանքով: Որևէ ցիկլի ընթացքում հանդույցների անխափան աշխատանքի հավանականությունը համապատասխանաբար հավասար է $p_1=0,6$; $p_2=0,7$; $p_3=0,9$: Գտնել նշված ցիկլի ընթացքում սարքի անխափան աշխատանքի հավանականությունը:

Լուծում: Հավանականությունների բաղմապատկման (3) բանաձևով կունենանք.

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,378$$

Դիտողություն: Համատեղելի պատահույթների գումարի հավանականության մասին § 3-ի թեորեմ 2-ը (բանաձև (4)) (1) բանաձևի հաշվարմամբ կգրվի այսպես.

$$P(A \text{ կամ } B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \quad (4)$$

Օրինակ 3: § 2-ի օրինակ 5-ի խնդիրը լուծել, օգտվելով (4) բանաձևից: Լուծում: A պատահույթը 1-ին հրանոթից նպատակահետին հարվածելն է: B պատահույթը՝ 2-րդ հրանոթից նպատակահետին հարվածելը: Ակնհայտ է, որ

$$P(A) = \frac{8}{10}, \quad P(B) = \frac{7}{10}$$

$$P(A \text{ կամ } B) = \frac{8}{10} + \frac{7}{10} - \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{94}{100}$$

Բնական է, որ ստացանք նախկինում ստացած արդյունքը:

Օրինակ 4: Նպատակակետը մեկ կրակոցով ոչնչացնելու հավանականությունը հավասար է p-ի: Որոշել կրակոցների այն n թիվը, որ անհրաժեշտ է Q-ին հավասար կամ նրանից մեծ հավանականությամբ նպատակակետը ոչնչացնելու համար:

Լուծում: Հավանականությունների գումարման և բազմապատկման մասին թեորեմների հիման վրա կարող ենք գրել.

$$Q \geq 1 - (1-p)^n$$

Այս անհավասարությունը լուծելով n-ի նկատմամբ, ստանում ենք

$$n \geq \frac{\lg(1-Q)}{\lg(1-p)}$$

Այսպիսի անալիտիկ լուծման խնդիրը հեշտ է ձեռնարկել «սափորների սիստեմի» տերմիններով:

§ 5. Կախյալ պատահույթներ: Պայմանական հավանականություն: Լրիվ հավանականություն

Սահմանում 1: A պատահույթը կոչվում է կախյալ B պատահույթից, եթե A պատահույթի երևան գալու հավանականությունը

կախված է այն բանից, թե տեղի է ունեցել կամ տեղի չի ունեցել A պատահույթը:

A պատահույթի երևան գալու հավանականությունն այն պայմանով, որ B պատահույթը տեղի է ունեցել, կնշանակենք $P(A/B)$ -ով և կանվանենք A պատահույթի պայմանական հավանականություն B պայմանի դեպքում:

Օրինակ 1: Մափորում կա 3 սպիտակ և 2 սև գնդիկներ: Մափորից հանվում է մեկ գնդիկ (առաջին հանում), և այնուհետև երկրորդը (երկրորդ հանում): B պատահույթը առաջին հանման ժամանակ սպիտակ գնդիկի երևան գալն է: A պատահույթը երկրորդ հանման ժամանակ սպիտակ գնդիկի երևան գալն է:

Ակնհայտ է, որ A պատահույթի հավանականությունը, եթե B-ն տեղի է ունեցել, կլինի

$$P(A|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

A պատահույթի հավանականությունը, այն պայմանով, որ B պատահույթը տեղի չի ունեցել (առաջին հանման ժամանակ երևան է եկել սև գնդիկ), կլինի

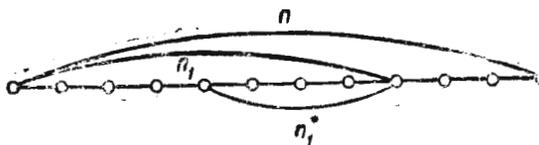
$$P(A|\bar{B}) = \frac{3}{4},$$

Տեսնում ենք, որ

$$P(A|B) \neq P(A|\bar{B}),$$

Թե որեւէ երկու պատահույթների համատեղման հավանականությունը հավասար է նրանցից մեկի հավանականությանը՝ բազմապատկած երկրորդի պայմանական հավանականությամբ, հաշված այն պայմանով, որ առաջին պատահույթը տեղի է ունեցել, այսինքն՝

$$P(A \text{ և } B) = P(B) \cdot P(A/B): \quad (1)$$



Նկ. 408

Ապացուցում: Ապացուցումը կատարենք այն պատահույթների համար, որոնք հանգեցվում են սափորների սխեմային (այսինքն՝ երբ կիրառելի է հավանականության դասական սահմանումը):

Դիցուք սափորում կան n թվով գնդիկներ, որոնցից n_1 -ը սպիտակ է, իսկ n_2 -ը՝ սև: Դիցուք n_1 սպիտակ գնդիկներից n_1^* գնդիկները «աստղանիշով» են, իսկ մյուսները լիովին սպիտակ են (Նկ. 408):

Սափորից հանվում է մեկ գնդիկ: Ընչպիսի՞ն է «աստղանիշով» գնդիկ հանելու պատահույթի հավանականությունը:

Դիցուք B-ն սպիտակ գնդիկ երևան գալու պատահույթն է, իսկ A-ն «աստղանիշով» գնդիկ երևան գալու պատահույթը: Ակնհայտ է, որ

$$P(B) = \frac{n_1}{n}, \quad (2)$$

«Աստղանիշով» սպիտակ գնդիկի երևան գալու հավանականությունն այն պայմանով, որ երևան է եկել սպիտակ գնդիկ, կլինի

$$P(A/B) = \frac{n_1^*}{n_1}, \quad (3)$$

«Աստղանիշով» սպիտակ գնդիկի երևան գալու հավանականությունը կլինի $P(A \text{ և } B)$ -ն: Ակնհայտ է, որ

$$P(A \text{ և } B) = \frac{n_1^*}{n}, \quad (4)$$

Բայց

$$\frac{n_1^*}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_1^*}{n_1}, \quad (5)$$

(5)-ի մեջ տեղադրելով (2), (3) և (4) արտահայտությունների ձախ մասերը, ստանում ենք

$$P(A \text{ և } B) = P(B) \cdot P(A/B):$$

(1) հավասարությունն ապացուցված է:

Եթե դիտարկվող պատահույթները չեն համապատասխանում դասական սխեմային, ապա (1) բանաձևը ծառայում է պայմանական հավանականության որոշման համար: Այն է, A-ի պայմանական հավանականությունը՝ B պատահույթի իրականացման պայմանով որոշվում է հետևյալ բանաձևի օգնությամբ.

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ և } B)}{P(B)} \quad (\text{երբ } P(B) \neq 0):$$

Դիտողություն 1: Վերջին բանաձևը կիրառենք $P(B \text{ և } A)$ արտահայտության նկատմամբ.

$$P(B \text{ և } A) = P(A) \cdot P(B/A): \quad (6)$$

(1) և (6) հավասարությունների ձախ մասերը հավասար են՝ որպես միևնույն հավանականություն, հետևաբար, հավասար են նաև աջ մասերը: Ուստի կարող ենք գրել հետևյալ հավասարությունը՝

$$P(A \text{ և } B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A): \quad (7)$$

Օրինակ 2: Այս պարագրաֆի սկզբում բերված օրինակ 1-ի դեպքում ունենք.

$$P(B) = \frac{3}{5}, \quad P(A/B) = \frac{1}{2},$$

Հստ (1) բանաձևի ստանում ենք.

$$P(A \text{ և } B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10},$$

$P(A \text{ և } B)$ հավանականությունը հեշտությամբ ստացվում է նաև անմիջական հաշվումով.

Օրինակ 3: Տվյալ դազդյանի՝ պիտանի դետալ պատրաստելու հավանականությունը հավասար է 0,9: Պիտանի դետալները մեջ 1-ին տեսակի դետալի երեան գալու հավանականությունը 0,8 է: Որոշել տվյալ դազդյանի՝ 1-ին տեսակի դետալի պատրաստման հավանականությունը.

Լուծում: Այստեղ B -ն տվյալ դազդյանի՝ պիտանի դետալ պատրաստելու պատահույթն է, իսկ A -ն՝ 1-ին տեսակի դետալի երեան գալու պատահույթը:

Այստեղ $P(B) = 0,9$, $P(A/B) = 0,8$:

Տեղադրելով (1) բանաձևի մեջ, ստանում ենք որոշվող հավանականությունը.

$$P(A \text{ և } B) = 0,9 \cdot 0,8 = 0,72.$$

Թեորեմ 2: Եթե A պատահույթը կարող է իրականացնել միայն անհամատեղելի պատահույթների լրիվ խումբ կազմող B_1, B_2, \dots, B_n պատահույթներից մեկի հետ, ապա A պատահույթի հավանականությունը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \dots + P(B_n)P(A/B_n); \quad (8)$$

(8) բանաձևը կոչվում է լրիվ հավանականության բանաձև:

Ապացուցում: A պատահույթը կարող է տեղի ունենալ հետևյալ պատահույթներից ցանկացածի իրականացման դեպքում՝

$$(B_1 \text{ և } A), (B_2 \text{ և } A), \dots, (B_n \text{ և } A):$$

Հետևաբար, հավանականությունների գումարման մասին թեորեմի համաձայն ստանում ենք

$$P(A) = P(B_1 \text{ և } A) + P(B_2 \text{ և } A) + \dots + P(B_n \text{ և } A):$$

Այս մասի գումարելիները փոխարինելով ըստ (1) բանաձևի, կստանանք (8) հավասարությունը:

Օրինակ 4. Նպատակակետին կատարված է երեք հաջորդական կրակոց: Առաջին կրակոցով նպատակակետին հարվածելու հավանականությունը՝ $p_1 = 0,3$, երկրորդով՝ $p_2 = 0,6$, երրորդով՝ $p_3 = 0,8$: Մեկ հարվածով նպատակակետը ոչնչացնելու հավանականությունը՝ $\lambda_1 = 0,4$, երկու հարվածով՝ $\lambda_2 = 0,7$, երեք հարվածով՝ $\lambda_3 = 1,0$: Որոշել երեք կրակոցների դեպքում նպատակակետը ոչնչացնելու հավանականությունը:

Լուծում: Դիտարկենք հետևյալ անհամատեղելի պատահույթների լրիվ խումբը.

B_1 — եղել է մեկ խոցում,

B_2 — եղել է երկու խոցում,

B_3 — եղել է երեք խոցում,

B_4 — չի եղել ոչ մի խոցում:

Որոշենք յուրաքանչյուր պատահույթի հավանականությունը: Մեկ խոցում կկատարվի, եթե առաջին կրակոցը տա խոցում, իսկ երկրորդը և երրորդը՝ վրիպում, կամ առաջին կրակոցը՝ վրիպում, երկրորդը՝ խոցում, երրորդը՝ վրիպում, կամ առաջին կրակոցը՝ վրիպում, երկրորդը՝ վրիպում, երրորդը խոցում, Ուստի ըստ հավանականությունների բազմապատկման և գումարման թեորեմների մեկ խոցման հավանականության համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը.

$$P(B_1) = p_1(1-p_2)(1-p_3) + (1-p_1)p_2(1-p_3) + (1-p_1)(1-p_2)p_3 = 0,332,$$

Դատելով նման ձևով, կստանանք.

$$P(B_2) = p_1p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)p_3 + (1-p_1)p_2p_3 = 0,468,$$

$$P(B_3) = p_1p_2p_3 = 0,144,$$

$$P(B_4) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 0,056.$$

Գրենք նպատակակետը ոչնչացնելու պայմանական հավանականությունները՝ այս պատահույթներից յուրաքանչյուրի իրականացման դեպքում.

$$P(A/B_1) = 0,4, \quad P(A/B_2) = 0,7, \quad P(A/B_3) = 1,0, \quad P(A/B_4) = 0,$$

Ստացած արտահայտությունները տեղադրելով (8) բանաձևի մեջ, կստանանք նպատակակետը ոչնչացնելու հավանականությունը.

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3) + P(B_4) \cdot P(A/B_4) = 0,332 \cdot 0,4 + 0,468 \cdot 0,7 + 0,144 \cdot 1,0 + 0,056 \cdot 0 = 0,6044.$$

Դիտողություն 2. Եթե A պատահույթը կախված չէ B պատահույթից, ապա

$$P(A/B) = P(A),$$

և (1) բանաձևն ընդունում է

$$P(A \text{ և } B) = P(B) \cdot P(A)$$

սեսքը, այսինքն՝ ստանում ենք § 4-ի (1) բանաձևը:

§ 6. Հիպոթեզների հավանականությունը: Բայեսի բանաձևը

Ննդրի ձևակերպումը: Ընչպես և § 5-ի թեորեմ 2-ում, կզիտարկենք B_1, B_2, \dots, B_n անհամատեղելի պատահույթների լրիվ խումբը, որոնց երեան գալու հավանականություններն են $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$: A պատահույթը կարող է տեղի ունենալ B_1, B_2, \dots, B_n պատահույթներից որևէ մեկի հետ, որոնց մեկն անպայմանաբար հիպոթեզներ:

A պատահույթի երևան գալու պայմանական հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են.

$$P(A|B_1)=0,7 \quad P(A|B_2)=0,1, \\ P(A|B_3)=0,1, \quad P(A|B_4)=0,02,$$

Դիցուք փորձարկման ընթացքում A պատահույթը տեղի է ունեցել. Այդ դեպքում ըստ (3) բանաձևերի ստանում ենք.

$$P(B_1|A) = \frac{0,25 \cdot 0,7}{0,25 \cdot 0,7 + 0,25 \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 0,02} = \frac{0,175}{0,23} = 0,76, \\ P(B_2|A) = \frac{0,25 \cdot 0,1}{0,23} = 0,11, \\ P(B_3|A) = \frac{0,25 \cdot 0,1}{0,23} = 0,11, \\ P(B_4|A) = \frac{0,25 \cdot 0,02}{0,23} = 0,02,$$

Այստեղ եղել է $P(B_1)=0,25 \cdot P(B_1|A)=0,76$ մեծացավ այն պատճառով, որ A պատահույթը տեղի ունեցավ. Ընդ որում $P(A|B_1)$ հավանականությունը մյուս պայմանական հավանականությունների համեմատությամբ մեծ է:

Օրինակ 2. Տանկերից յուրաքանչյուրը միմյանցից անկախ որևէ նպատակակետի վրա բացել են կրակ. նպատակակետը առաջին տանկի հարվածով ոչնչացնելու հավանականությունը՝ $P_1=0,8$, երկրորդ տանկով՝ $P_2=0,4$. Օբյեկտը ոչնչացվեց մեկ հարվածով. Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ օբյեկտը ոչնչացվել է առաջին տանկի հարվածով.

Լուծում. A պատահույթը օբյեկտի ոչնչացումն է մեկ հարվածով. Մինչև հրաձգությունը հնարավոր են հետևյալ հիպոթեզները.

- B_1 —երկու տանկն էլ վրիպել են,
- B_2 —երկու տանկն էլ խոցել են,
- B_3 —առաջին տանկը խոցել է, երկրորդը՝ վրիպել,
- B_4 —առաջին տանկը վրիպել է, երկրորդը՝ խոցել:

Այս հիպոթեզների հավանականությունները որոշենք ըստ հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի.

$$P(B_1)=(1-p_1)(1-p_2)=0,2 \cdot 0,6=0,12, \\ P(B_2)=p_1 p_2=0,8 \cdot 0,4=0,32, \\ P(B_3)=p_1(1-p_2)=0,8 \cdot 0,6=0,48, \\ P(B_4)=(1-p_1)p_2=0,2 \cdot 0,4=0,08,$$

Որոշենք պատահույթի երևան գալու պայմանական հավանականությունները.

$$P(A|B_1)=0, \quad P(A|B_2)=0, \quad P(A|B_3)=1, \quad P(A|B_4)=1,$$

Ըստ (2) բանաձևի գտնում ենք հիպոթեզների պայմանական հավանականությունները.

§ 5-ի (8) բանաձևի համաձայն A պատահույթի երևան գալու հավանականությունը կլինի

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\dots+P(B_n)P(A|B_n): \quad (1)$$

Ընդունենք, որ A պատահույթը տեղի է ունեցել: Այն, որ A պատահույթը տեղի է ունեցել, կփոխի $P(B_1), \dots, P(B_n)$ հավանականությունները: Պահանջվում է որոշել այդ հիպոթեզների իրականացման պայմանական հավանականություններն այն ենթադրությամբ, որ A պատահույթը տեղի է ունեցել, այսինքն՝ որոշել

$$P(B_1|A), P(B_2|A), \dots, P(B_n|A).$$

հավանականությունները:

Խնդրի լուծումը: Ըստ § 5-ի (7) բանաձևի գտնենք $P(A \text{ և } B_1)$ հավանականությունը.

$$P(A \text{ և } B_1)=P(B_1) \cdot P(A|B_1)=P(A) \cdot P(B_1|A),$$

որտեղից

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(A)}:$$

$P(A)$ -ի փոխարեն տեղադրելով նրա (1) արտահայտությունը, կստանանք.

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)}, \quad (2)$$

Նման ձևով որոշվում են $P(B_2|A), P(B_3|A), \dots, P(B_n|A)$ հավանականությունները:

Եվ այսպես,

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)}, \quad (3)$$

(2) բանաձևը կոչվում է Բայեսի բաճառ կամ հիպոթեզների թեորեմ:

Դիտողություն: (3) բանաձևերից հետևում է, որ $P(B_k|A)$ հավանականության, այսինքն՝ B_k հիպոթեզի իրականացման (A պատահույթի տեղի ունենալու պայմանով) հավանականության արտահայտություն մեջ հայտարարը k համարից կախված չէ:

Օրինակ 1. Դիցուք փորձից առաջ եղել են չորս հավասարահարավոր հիպոթեզներ.

$$B_1, B_2, B_3, B_4: P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4)=0,25,$$

$$P(B_1/A) = \frac{0,12 \cdot 0}{0,12 \cdot 0 + 0,32 \cdot 0 + 0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{0}{0,56} = 0,$$

$$P(B_2/A) = \frac{0,32 \cdot 0}{0,56} = 0,$$

$$P(B_3/A) = \frac{0,48 \cdot 1}{0,56} = \frac{6}{7},$$

$$P(B_4/A) = \frac{0,08 \cdot 1}{0,56} = \frac{1}{7}.$$

Օրինակ 3: Սարքերի 30 %-ը հավաքում է բարձր որակավորում ունեցող մասնագետը, իսկ 70 %-ը՝ միջին որակավորում ունեցողը, բարձր որակավորում ունեցող մասնագետի հավաքած սարքի աշխատանքի հուսալիությունը 0,90 է, իսկ միջին որակավորում ունեցող մասնագետի հավաքած սարքինը՝ 0,80, վերջրած սարքը հուսալի է: Որոշել հավանականությունն այն բանի, որ այն հավաքել է բարձր որակավորում ունեցող մասնագետը:

Լուծում: A պատահույթը սարքի անխափան աշխատելն է, Մինչև սարքի ստուգումը հնարավոր են հետևյալ հիպոթեզները.

B_1 -սարքը հավաքել է բարձր որակավորում ունեցող մասնագետը,

B_2 -սարքը հավաքել է միջին որակավորում ունեցող մասնագետը:

Գրենք այս հիպոթեզների հավանականությունները.

$$P(B_1) = 0,3, \quad P(B_2) = 0,7,$$

Պատահույթների պայմանական հավանականությունները կլինեն.

$$P(A/B_1) = 0,9, \quad P(A/B_2) = 0,8,$$

Որոշենք B_1 և B_2 հիպոթեզների հավանականություններն այն պայմանով, որ A պատահույթը տեղի է ունեցել:

Ըստ (2) բանաձևի ունենք.

$$P(B_1/A) = \frac{0,3 \cdot 0,9}{0,3 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,8} = \frac{0,27}{0,83} = 0,325,$$

$$P(B_2/A) = \frac{0,7 \cdot 0,8}{0,3 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,8} = \frac{0,56}{0,83} = 0,675.$$

§ 7. Դիսկրետ պատահական մեծություն: Դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը

Սահմանում 1: X փոփոխականը, որը փորձարկման ընթացքում ընդունում է $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$ արժեքների վերջավոր կամ անվերջ հաջորդականությունից մեկը, կոչվում է դիսկրետ պատահական մեծություն, եթե լուրջաքանչյուր X_k արժեքին համապատասխանում է այն բանի P_k որոշակի հավանականությունը, որ X փոփոխական մեծությունը կընդունի X_k արժեքը:

Սահմանումից հետևում է, որ լուրջաքանչյուր X_k արժեքին համապատասխանում է P_k հավանականություն:

X_k -ից P_k -ի ֆունկցիոնալ կախումը կոչվում է X դիսկրետ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման օրենք*:

Պատահական մեծության հնարավոր արժեքները	x_1	x_2	x_k	...
Այդ արժեքների հավանականությունները	p_1	p_2	p_k	...

Բաշխման օրենքը կարող է տրվել նաև գրաֆիկորեն՝ հավանականությունների բաշխման բազմանկյան տեսքով, երբ կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում կառուցվում են (X_k, P_k) կոորդինատներն ունեցող կետերը և դրանք միացվում են բեկյալով (նկ. 409):

Բաշխման օրենքը կարող է տրվել նաև անալիտիկորեն՝

$$p_k = f(x_k):$$

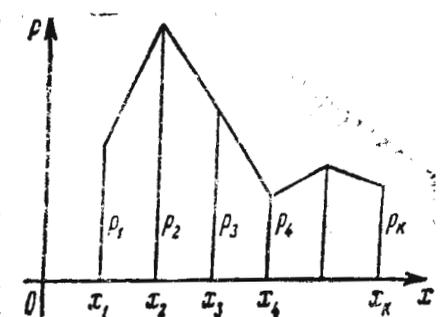
Այն, որ X պատահական մեծությունը կընդունի $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$, հաջորդականության արժեքներից մեկը, հավաստի պատահույթ է, և ուստի պետք է կատարվի

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad (1)$$

պայմանը՝ N արժեքների վերջավոր հաջորդականության դեպքում և

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \quad (1')$$

անվերջ հաջորդականության դեպքում: Նկատենք, որ պատահական մեծության այն x_1 արժեքը, որն ունի ամենամեծ հավանականությունը, կոչվում է մոդ: Նկ. 409-ում պատկերված պատահական մեծությունն ունի x_2 մոդը:



Նկ. 409

Օրինակ 1: X պատահական մեծությունը մեկ անգամ խաղոսկըը նետելիս նրա վերին նիստի վրա բացված միավորների թիվն է: X փոփոխականը կարող է ընդունել հետևյալ արժեքներից մեկը՝ 1, 2, 3, 4, 5, 6: Յուրաքանչյուր արժեքի

* Երբեմն համարոտ առում են «Պատահական մեծության բաշխման օրենք»:

բացվելու հավանականությունը $\frac{1}{6}$ է: Հետևաբար, այդ պատահական մեծությունը բաշխման աղյուսակը կունենա հետևյալ տեսքը.

x	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Օրինակ 2: Փորձարկումների անվերջ հաջորդականություններից յուրաքանչյուրի դեպքում A պատահույթի երևան գալու հավանականությունը հավասար է p-ի: X պատահական մեծությունն այն փորձարկման համարն է, որի դեպքում A պատահույթն առաջին անգամ տեղի է ունեցել: Գտնել X պատահական մեծության բաշխման օրենքը:

Լուծում: X պատահական մեծությունը կարող է ընդունել 1, 2, 3, ... ցանկացած ամբողջ դրական արժեքը: Այն բանի P_1 հավանականությունը, որ A պատահույթը տեղի կունենա առաջին փորձարկման ժամանակ, կլինի

$$P_1 = P(A) = p,$$

Այն բանի P_2 հավանականությունը, որ պատահույթը առաջին փորձարկման ժամանակ տեղի չի ունենա և տեղի կունենա երկրորդի ժամանակ, կլինի

$$P_2 = P(\bar{A} \text{ և } A) = (1-p)p,$$

Այն բանի P_3 հավանականությունը, որ A պատահույթը տեղի չի ունենա ոչ առաջին, ոչ երկրորդ փորձարկման ժամանակ, այլ տեղի կունենա երրորդում, կլինի

$$P_3 = P(\bar{A} \text{ և } \bar{A} \text{ և } A) = (1-p)(1-p)p = (1-p)^2 p$$

և այլն
$$P_k = (1-p)^{k-1} p, \quad (2)$$

Հավանականությունների բաշխման աղյուսակը կլինի

x	1	2	3	k	...
P _k	p	(1-p)p	(1-p) ² p	(1-p) ^{k-1} p	...

Այստեղ նույնպես ունենք

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1,$$

Խնդիր մինչև առաջին խոցումը կատարվող հրաձգություն մասին: Քննարկված խնդիրն ունի կիրառություն, մասնավորապես, հրաձգության հարցերի նկատմամբ:

Դիցուք կատարվում է հրաձգություն մինչև առաջին խոցումը:

Յուրաքանչյուր կրակոցի ժամանակ խոցելու հավանականությունը p է: X պատահական մեծությունն այն կրակոցի համարն է, որի ժամանակ կատարվել է խոցումը: Այս պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման աղյուսակը կլինի նույնը, ինչ և օրինակ 2-ում:

Օրինակ 3: Յուրաքանչյուր կրակոցի ժամանակ խոցելու հավանականությունը p=0,8, կա երեք արկ: Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ կծախսվի մեկ արկ, երկու արկ, երեք արկ, եթե հրաձգությունը կատարվում է մինչև առաջին խոցումը կամ երեք կրակոցների վրիպումը. կադմել ծախսված արկերի թվի՝ X պատահական մեծության բաշխման աղյուսակը:

Լուծում: Դիցուք X-ը պատահական մեծություն է, ծախսված արկերի թիվը: P(x=x₁)-ն այն բանի հավանականությունն է, որ կծախսվի x₁ արկ: Այդ դեպքում P(x=1)=p=0,8 հավասար է և եկ (առաջին) կրակոցով խոցելու հավանականությանը:

$$P(x=2) = (1-p)p = (1-0,8) \cdot 0,8 = 0,16$$

այն բանի հավանականությունն է, որ առաջին կրակոցի ժամանակ եղել է վրիպում, երկրորդի ժամանակ՝ խոցում:

$$P(x=3) = (1-p)^2 = (1-0,8) \cdot (1-0,8) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04,$$

քանի որ կա ընդամենը երեք արկ և հրաձգություն ընդհատում են անկախ այն բանից, թե երրորդ կրակոցի ժամանակ խոցում կլինի կամ վրիպում: Վերջին հավանականությունը կարելի է հաշվել և որպես տարբերություն՝

$$1 - P(x=1) - P(x=2) = 1 - 0,8 - 0,16 = 0,04,$$

Բաշխման աղյուսակը կունենա հետևյալ տեսքը.

x	1	2	3
P(x=x _k)	0,8	0,16	0,04

Դիտողություն: Տվյալ խնդիրը կարելի է ձևակերպել ռափորների սխեմայի տեսքով, հետևաբար, այն կարող է նշանակություն ունենալ և ուրիշ հարցեր քննարկելիս: Այս դիտողությունը վերաբերում է և մի քանի ուրիշ խնդիրների:

§ 8. Հարաբերական հաճախությունը և հարաբերական հաճախության հավանականությունը կրկնվող փորձարկումների դեպքում

Դիցուք կատարվում է n փորձարկումների սերիա: Յուրաքանչյուր փորձարկման ժամանակ կարող է իրականանալ A պատահույթը՝ p հավանականությամբ: Դիցուք x-ը պատահական մեծություն է, որը նշանակում է n փորձարկումների սերիայում A պատահույթի երևան

գալու հարաբերական հաճախությունը: Պահանջվում է որոշել n փորձարկումների x պատահական մեծության բաշխման օրենքը:

Ակնհայտ է, որ n փորձարկումների դեպքում x պատահական մեծությունն ընդունում է հետևյալ արժեքներից մեկը՝

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$$

Թե որեւէ x : Այն բանի $P\left(x=\frac{m}{n}\right)$ հավանականությունը, որ

x փոփոխական մեծությունը կընդունի $\frac{m}{n}$ արժեքը, այսինքն՝ որ n փորձարկումների դեպքում A պատահույթը երևան կգա m անգամ, իսկ \bar{A} պատահույթը (A պատահույթի երևան չգալը) $n-m$ անգամ հավասար է $C_n^m p^m q^{n-m}$, որտեղ C_n^m -ը n տարրերից m -ական զուգորդությունների թիվն է, p -ն՝ A պատահույթի երևան գալու հավանականությունը՝ $p=P(A)$, q -ն՝ A պատահույթի երևան չգալու հավանականությունը. $q=1-p=P(\bar{A})$:

Ապացուցում: A պատահույթը n փորձարկումների ընթացքում երևան կգա m անգամ, օրինակ, եթե A և \bar{A} պատահույթների հերթագայությունը լինի այսպիսին՝

$$\underbrace{AA \dots AA}_m \underbrace{\bar{A}\bar{A} \dots \bar{A}}_{n-m}$$

այսինքն՝ առաջին m փորձարկումներում երևան է է գալիս A պատահույթը, իսկ հաջորդ $n-m$ փորձարկումներում A -ն երևան չի գալիս (երևան է գալիս \bar{A} պատահույթը): Քանի որ

$$P(A)=p, \quad P(\bar{A})=1-p=q,$$

այս ըստ բազմապատկման թեորեմի A և \bar{A} պատահույթների այդպիսի հերթագայության հավանականությունը կլինի

$$p^m \cdot q^{n-m},$$

Բայց n փորձարկումների ընթացքում A պատահույթը կարող է m անգամ երևան գալ \bar{A} և A պատահույթների հերթագայության ուրիշ հաջորդականություններով: Օրինակ, $\underbrace{AA \dots AA}_{m-1} \underbrace{\bar{A}\bar{A} \dots \bar{A}}_{n-m} A$: Բայց A

պատահույթը պարտադիր կերպով պետք է կատարվի m անգամ, իսկ \bar{A} պատահույթը՝ $n-m$ անգամ: A և \bar{A} պատահույթների այդպիսի հերթագայության երևան գալու հավանականությունը կլինի

$$p^{m-1} q^{n-m} p = p^m q^{n-m},$$

Իսկ A և \bar{A} պատահույթների քանի տարբեր հերթագայություններ կարող է լինել n փորձարկումների ընթացքում, որոնց մեջ A պատահույթը երևան կգա m անգամ: Ակնհայտ է, որ այն հավասար է n տարրերից m -ական զուգորդությունների թվին.

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$$

Այսպիսով, ըստ գումարման թեորեմի ստանում ենք

$$P\left(x=\frac{m}{n}\right) = \frac{p^m q^{n-m} + p^m q^{n-m} + \dots + p^m q^{n-m}}{C_n^m}$$

կամ

$$P\left(x=\frac{m}{n}\right) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (1)$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Ապացուցելով թեորեմը, դրանով իսկ որոշեցինք x պատահական մեծության բաշխման օրենքը, որը և արտահայտում ենք հետևյալ աղյուսակի տեսքով.

x	$\frac{0}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	\dots	$\frac{m}{n}$	\dots	\dots	$\frac{n}{n}$
$P\left(x=\frac{m}{n}\right)$	$1 \cdot q^n$	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	\dots	$C_n^m p^m q^{n-m}$	\dots	\dots	$1 \cdot p^n$

Ստացած բաշխման օրենքը կոչվում է երկանդամային օրենք, որովհետև $P\left(x=\frac{m}{n}\right)$ հավանականությունները հավասար են $(q+p)^n$ արտահայտության՝ ըստ Նյուտոնի երկանդամային բանաձևի վերլուծության համապատասխան անդամներին.

$$(q+p)^m = \sum_{n=0}^m C_n^m p^n q^{m-n}, \quad (2)$$

Ինչպես և պետք էր սպասել, փոփոխական մեծության բոլոր հնարավոր արժեքների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի, քանի որ

$$(p+q)^n = 1^n = 1:$$

Դիտողություն: Շատ հարցեր ուսումնասիրելիս հարկ է լինում որոշել այն բանի հավանականությունը, որ A պատահույթը կիրականանա «գոնե մեկ անգամ», այսինքն՝ այդ պատահույթի հարա-

բերական հաճախությունը՝ $x \geq \frac{1}{n}$: Ակնհայտ է, որ այդ $P\left(x \geq \frac{1}{n}\right)$

հավանականությունը կորոշվի

$$P\left(x \geq \frac{1}{n}\right) = 1 - P\left(x = \frac{0}{n}\right) = 1 - q^n \quad (3)$$

հավասարությունից: Բաշխման աղյուսակից նաև հետևում է, որ

$P\left(x \geq \frac{k}{n}\right)$ այն բանի հավանականությունը, որ A պատահույթը տեղի կունենա ոչ պակաս քան k անգամ, կորոշվի

$$P\left(x \geq \frac{k}{n}\right) = \sum_{m=k}^n C_n^m p^m q^{n-m} \quad (4)$$

կամ

$$P\left(x \geq \frac{k}{n}\right) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m}$$

բանաձևով:

Օրինակ 1: Պրաֆիկորեն պատկերել x պատահական մեծություն բաշխման երկանդամային օրենքը, երբ $n=8$, $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$:

Լուծում: Որոշենք աղյուսակի մեջ մտնող բոլոր հավանականությունների արժեքները.

$$P(x=0) = C_8^0 q^8 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$$

$$P\left(x=\frac{1}{8}\right) = C_8^1 \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{8}{1} \cdot \frac{1}{256} = \frac{1}{32}$$

$$P\left(x=\frac{2}{8}\right) = C_8^2 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{7}{64}$$

$$P\left(x=\frac{3}{8}\right) = C_8^3 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}$$

$$P\left(x=\frac{4}{8}\right) = C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{35}{128}$$

$$P\left(x=\frac{5}{8}\right) = C_8^5 \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}$$

$$P\left(x=\frac{6}{8}\right) = C_8^6 \frac{1}{2^8} = \frac{7}{64}$$

$$P\left(x=\frac{7}{8}\right) = C_8^7 \frac{1}{2^8} = \frac{1}{32}$$

$$P\left(x=\frac{8}{8}\right) = C_8^8 = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$$

կառուցենք բաշխման բաղմանկյունը (նկ. 410).

Օրինակ 2: Ինչպիսին է հավանականությունն այն բանի, որ A պատահույթը տեղի կունենա 2 անգամ ա) երկու փորձարկումների դեպքում, բ) երեք փորձարկումների դեպքում, գ) տասը փորձարկումների դեպքում, եթե յուրաքանչյուր փորձարկման ընթացքում պատահույթի երևան գալու հավանականությունը հավասար է 0,4-ի:

Լուծում: ա) այստեղ $n=2$, $p=0,4$, $q=0,6$.

$$P\left(x=\frac{2}{2}\right) = C_2^2 p^2 q^0 = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} (0,4)^2 = 0,16:$$

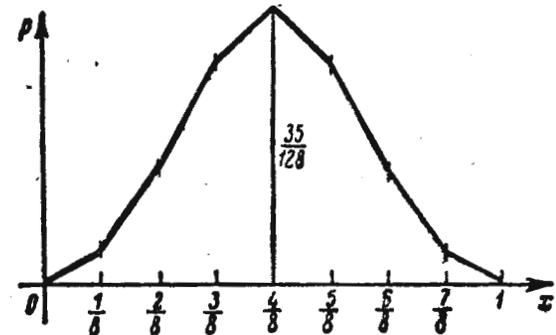
բ) այստեղ $n=3$, $p=0,4$, $q=0,6$

$$P\left(x=\frac{2}{3}\right) = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} (0,4)^2 \cdot 0,6 = 0,288;$$

գ) այստեղ $n=10$, $p=0,4$, $q=0,6$.

$$P\left(x=\frac{2}{10}\right) = C_{10}^2 p^2 q^8 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} (0,4)^2 \cdot (0,6)^8 = 0,121:$$

Օրինակ 3: Նպատակակետի վրա կատարվում են 5 անկախ կրակոցներ: Յուրաքանչյուր կրակոցի ժամանակ նպատակակետը խոցելու հավանականությունը հավասար է 0,2: Նպատակակետը ոչնչացնելու համար բավական է 3 խոցում: Որոշել նպատակակետը ոչնչացնելու հավանականությունը:



նկ. 410

Լուծում: Այստեղ $n=5$, $p=0,2$, $q=0,8$: Ակնհայտ է, որ ոչնչացնելու հավանականությունը պետք է հաշվել

$$P_{\text{չն}} = P\left(x=\frac{3}{5}\right) + P\left(x=\frac{4}{5}\right) + P\left(x=\frac{5}{5}\right)$$

բանաձևով կամ

$$P_{\text{չն}} = 1 - \left[P\left(x=\frac{0}{5}\right) + P\left(x=\frac{1}{5}\right) + P\left(x=\frac{2}{5}\right) \right]$$

բանաձևով:

Ըստ առաջին բանաձևի ունենք

$$P_{n,2} = C_3^3 p^3 q^2 + C_4^3 p^4 q^1 + C_5^3 p^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (0,2)^3 \cdot (0,8)^2 + \\ + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (0,2)^4 \cdot 0,8 + 1 \cdot (0,2)^5 = 0,05792 \approx 0,06.$$

x	x ₁	x ₂	...	x _k	...	x _n
P(x=x _k)	P ₁	P ₂	...	P _k	...	P _n

Օրինակ 4: Կատարվում են չորս անկախ փորձարկումներ: Յուրաքանչյուր փորձարկման ժամանակ A պատահույթի երևան գալու հավանականությունը 0,5 է: Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ A պատահույթը երևան կգա երկու անգամից ոչ պակաս:

Լուծում: Այստեղ n=4, p=0,5, q=0,5:

$$P\left(x \geq \frac{2}{4}\right) = P\left(x = \frac{2}{4}\right) + P\left(x = \frac{3}{4}\right) + P\left(x = \frac{4}{4}\right)$$

կամ

$$P\left(x \geq \frac{2}{4}\right) = 1 - \left[P\left(x = \frac{0}{4}\right) + P\left(x = \frac{1}{4}\right) \right],$$

Հաշվենք հավանականությունը.

$$P\left(x < \frac{2}{4}\right) = P\left(x = \frac{0}{4}\right) + P\left(x = \frac{1}{4}\right) = q^4 + 4q^3 p^1 = (0,5)^4 + 4(0,5)^4 = 0,3125,$$

Հետևաբար, բանաձևերից երկրորդով ստանում ենք.

$$P\left(x \geq \frac{2}{4}\right) = 1 - [(0,5)^4 + 4(0,5)^4] = 0,6875 \approx 0,69.$$

Օրինակ 5: Դետալների տվյալ խմբաքանակում խոտանի հավանականությունը՝ p=0,1: Ինչպիսի՞ն է այն բանի հավանականությունը, որ երեք դետալների խմբաքանակում կլինեն m=0, 1, 2, 3 խոտան դետալներ:

Լուծում:

$$P\left(x = \frac{0}{3}\right) = C_3^0 q^3 = 1 \cdot 0,9^3 = 0,729,$$

$$P\left(x = \frac{1}{3}\right) = C_3^1 p q^2 = \frac{3}{1} \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,243,$$

$$P\left(x = \frac{2}{3}\right) = C_3^2 p^2 q = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,027,$$

$$P\left(x = \frac{3}{3}\right) = C_3^3 p^3 = 1 \cdot 0,1^3 = 0,001.$$

Սահմանում 1: X դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասում (այդ կնշանակենք M[X] կամ m_x) կոչվում է այդ պատահական մեծության բոլոր հնարավոր արժեքների և այդ արժեքների հավանականությունների արտադրյալների գումարը՝

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n,$$

կամ կրճատ

$$M[X] = \sum_{k=1}^n x_k p_k, \quad (1)$$

Ընդ որում, ինչպես ցույց է տրվել ավելի վաղ, $\sum_{k=1}^n p_k = 1$:

Եթե պատահական մեծության արժեքները կազմում են արժեքների անվերջ հաջորդականություն, ապա

$$m_x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k, \quad (1')$$

Քննարկելու ենք միայն այնպիսի պատահական մեծություններ, որոնց համար այդ շարքը զուգամիտում է:

Կապ հաստատենք փորձարկումների մեծ թվի դեպքում պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումի և պատահական մեծության միջին թվաքանակի արժեքի միջև, այն է՝ ցույց տանք, որ փորձարկումների մեծ թվի դեպքում դիտվող արժեքների միջին թվաքանականը մոտ է նրա մաթեմատիկական սպասումին, կամ § 1-ում ընդունված տերմիններով, կարելի է ասել, որ պատահական մեծության գիտվող արժեքների միջին թվաքանականը փորձարկումների թվին անառնամանափափոք են ահելիս ձգտում է այդ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումին:

Դիցուք կատարվում են N անկախ փորձեր: Ենթադրենք, որ

- x₁ արժեքը երևան է եկել n₁ անգամ,
- x₂ արժեքը երևան է եկել n₂ անգամ,
- ...
- x_v արժեքը երևան է եկել n_v անգամ:

X պատահական մեծությունն ընդունում է X₁, X₂, ..., X_v ար-

§ 9. Դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը

Դիցուք ունենք X դիսկրետ պատահական մեծությունը՝ համապատասխան բաշխման օրենքով.

ժեքները: Հաշվենք x մեծություն ստացված արժեքների միջին թվաքանակները (այն կնշանակենք $\overline{M}[x]$ -ով կամ \overline{m}_x -ով):

$$\overline{m}_x = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_n n_n}{N} = x_1 \frac{n_1}{N} + x_2 \frac{n_2}{N} + \dots + x_n \frac{n_n}{N} \quad (2)$$

Բայց քանի որ N մեծ թվով փորձարկումների դեպքում $\frac{n_k}{N}$ հարաբերական հաճախությունը ձգտում է x_k արժեքի կրեան գալու հավանականությունը, ապա

$$\sum_{k=1}^n x_k \frac{n_k}{N} \approx \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

Բավականաչափ բնական ենթադրությունների դեպքում ստացվում է

$$\overline{M}[x] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M[x] \quad (3)$$

Դիտողություն 1: Եթե դիտարկենք N թվով գնդիկներ պարունակող սափորների խնդիրը, որտեղ n_1 գնդիկներն ունեն x_1 թվանշումը, n_2 գնդիկները՝ x_2 թվանշումը և այլն, ապա մեկ գնդիկ հանելիս «սպասվող թիվը» կարտահայտվի (1) բանաձևով, այսինքն՝ հավասար է \overline{m}_x -ի:

Օրինակ 1: Որոշել 3 կրակոցների դեպքում խոցումների թիվ հանդիսացող x պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, եթե յուրաքանչյուր կրակոցով խոցելու հավանականությունը՝ $p=0,4$:

Լուծում: x պատահական մեծությունը կարող է ընդունել հետևյալ արժեքները.

$$x_1=0, \quad x_2=1, \quad x_3=2, \quad x_4=3,$$

կազմենք տվյալ պատահական մեծության բաշխման աղյուսակը:

Այդ արժեքների հավանականությունը գտնում ենք ըստ կրկնվող փորձարկումների մասին թեորեմի ($n=3, p=0,4, q=0,6$).

$$P(x=0) = C_3^0 (0,6)^3 = 0,216,$$

$$P(x=1) = C_3^1 (0,4)(0,6)^2 = 0,432,$$

$$P(x=2) = C_3^2 (0,4)^2 \cdot (0,6) = 0,288,$$

$$P(x=3) = C_3^3 (0,4)^3 = 0,064.$$

Պատահական մեծության բաշխման աղյուսակը կլինի.

x	0	1	2	3
$P(x=x_k)$	0,216	0,432	0,288	0,064

Մաթեմատիկական սպասումը հաշվում ենք ըստ (1) բանաձևի.

$$m_x = 0 \cdot 0,216 + 1 \cdot 0,432 + 2 \cdot 0,288 + 3 \cdot 0,064 = 1,2 \text{ խոցում:}$$

Օրինակ 2: Օբյեկտի վրա կատարվում է մեկ կրակոց: Խոցելու հավանականությունը հավասար է p -ի, Որոշել խոցումների թվի՝ x պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը:

Կազմենք պատահական մեծության բաշխման աղյուսակը.

x	0	1
p_k	$1-p$	p

Հետևաբար, $m_x = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$:

Դիտողություն 2: Հետագայում կհաստատվի, որ n անկախ փորձարկումներում A պատահույթի երեան գալու թվի $M[x]$ մաթեմատիկական սպասումը հավասար է փորձարկումների թվի և յուրաքանչյուր փորձարկման ժամանակ A պատահույթի երեան գալու p հավանականության արտադրյալին.

$$M[x] = np \quad (4)$$

Եթե (4) բանաձևում n -ը կրակոցների թիվն է, p -ն՝ խոցելու հավանականությունը, ապա օրինակ 1-ի խնդրի լուծումը կլինի.

$$M[x] = np = 3 \cdot 0,4 = 1,2 \text{ խոցում:}$$

Եթե (4) բանաձևում հալտնի են $M[x]$ -ը և p -ն, ապա գտնում են n -ը՝ փորձարկումների թիվը, որը տալիս է պատահույթի երեան գալու տրված մաթեմատիկական սպասումը.

$$n = \frac{M[x]}{p}$$

Օրինակ 3: Մեկ կրակոցով խոցելու հավանականությունը՝ $p=0,2$: Որոշել ծախսվող արկերի այն թիվը, որպեսզի խոցումների թվի մաթեմատիկական սպասումը հավասար լինի 5-ի.

$$n = \frac{5}{0,2} = 25 \text{ արկ:}$$

(Մեկ անգամ ես նշենք, որ նման խնդիրների հանդիպում են տարբեր հետադոտություններում: Այնտեղ «խոցում» բառը փոխարինվում է «պատահարի երեան գալ» բառերով, «կրակոց» բառը՝ «փորձարկում» բառով):

Օրինակ 4: Որոշել այն x պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, որն ունի հետևյալ բաշխման աղյուսակը.

x	1	2	3	...	k	...
p_k	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$...	$(1-p)^{k-1} p$...

Լ ու ծ ու մ: Ըստ (1) բանաձևի ունենք (նշանակելով $1-p=q$).

$$m_x = 1 \cdot p + 2qp + 3q^2p + \dots + kq^{k-1}p + \dots =$$

$$= p(1 + 2q + 3q^2 + \dots + kq^{k-1} + \dots) =$$

$$= p(q + q^2 + q^3 + \dots + q^k + \dots)' = p \left(\frac{q}{1-q} \right)' = p \cdot \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-q)^2} =$$

$$= \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p},$$

Եվ այսպես,

$$m_x = \frac{1}{p},$$

Նկատենք, որ

$$m_x \rightarrow 1, \text{ երբ } p \rightarrow 1,$$

$$m_x \rightarrow \infty, \text{ երբ } p \rightarrow 0:$$

Այս առնչությունները կարելի է բացատրել՝ ելնելով խնդրի իմաստից:

Իրոք, եթե լուրջանշյուր փորձարկման ժամանակ A պատահույթի երեան գալու հավանականությունը մոտ է 1-ին ($p \approx 1$), ապա կարելի է սպասել, որ A պատահույթը տեղի կունենա մեկ (առաջին) փորձարկման ժամանակ ($m_x \approx 1$): Իսկ եթե p հավանականությունը փոքր է ($p \approx 0$), ապա կարելի է սպասել, որ այն բանի համար, որ պեսզի A պատահույթը տեղի ունենա, կպահանջվի կատարել շատ ու շատ փորձարկումներ ($m_x \approx \infty$):

X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը կոչվում է X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման կենտրոն:

Դիտող ու լ թ յ ու Ն: «Հավանականությունների բաշխման կենտրոն» անվանումը մտցված է «Ժանրություն կենտրոն» անվանման նմանությունից: Եթե O_x առանցքի x_1, x_2, \dots, x_n արացիսներն ունեցող կետերում տեղավորված են p_1, p_2, \dots, p_n զանգվածները, ապա անալիտիկ երկրաչափությունից հայտնի է, որ այդ զանգվածների ծանրության կենտրոնի արացիսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով:

$$X_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k p_k}{\sum_{k=1}^n p_k},$$

Եթե

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1, \text{ ապա}$$

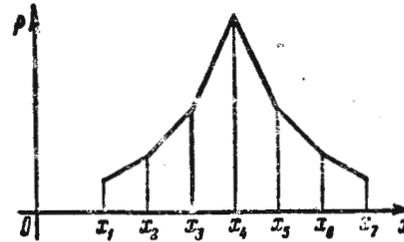
$$X_C = \sum_{k=1}^n x_k p_k \tag{5}$$

(5) բանաձևը տեսքով համընկնում է մաթեմատիկական սպասումի համար (1) բանաձևին:

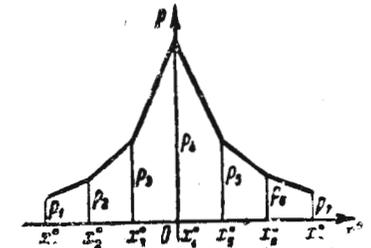
Եվ այսպես, հաստատված է, որ զանգվածների ծանրության կենտրոնը և մաթեմատիկական սպասումը հաշվվում են համանման բանաձևերով: Այստեղից էլ՝ «հավանականությունների բաշխման կենտրոն» անվանումը:

Դիցուք տրված է X պատահական մեծությունը համապատասխան օրենքով (նկ. 411). դիցուք դրա մաթեմատիկական սպասումն է m_x : Այնուհետև դիտարկենք X պատահական մեծության և նրա մաթեմատիկական սպասումի $X - m_x$ տարբերությունը:

Այս պատահական մեծությունը կանվանենք կենտրոնագիր պատահական մեծություն կամ շեղում և կնշանակենք X° -ով:



Նկ. 411



Նկ. 412

Այնհայտ է, որ այս X° պատահական մեծության բաշխման օրենքը կլինի.

x^0	$x_1^0 = x_1 - m_x$	$x_2^0 = x_2 - m_x$	\dots	$x_k^0 = x_k - m_x$
p_k	p_1	p_2	\dots	p_k

(տես նկ. 412):

Գտնենք կենտրոնադիր պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը.

$$\begin{aligned} M[x - m_x] &= \sum_{k=1}^n (x_k - m_x) p_k = \sum_{k=1}^n x_k p_k - \sum_{k=1}^n m_x p_k = \\ &= m_x - m_x \sum_{k=1}^n p_k = m_x - m_x \cdot 1 = 0, \end{aligned}$$

Այսպես, ուրեմն, կենտրոնադիր պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է զրոյի:

Դիտողություն 4: Երբեմն նպատակահարմար է լինում ոչ պատահական (հավաստի) և հաստատուն մեծությունը դիտարկել որպես պատահական մեծություն, որը 1 հավանականություն է ընդունում է և արժեքը, իսկ մյուս արժեքներն ընդունում է 0 հավանականություն:

Այս դեպքում իմաստ ունի խոսել հաստատունի մաթեմատիկական սպասումի մասին

$$M[c] = c \cdot 1 = c, \quad (6)$$

այսինքն՝ հաստատունի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է հենց իրեն՝ հաստատունին:

§ 10. Դիսպերսիա: Միջին քառակուսային շեղում: Հասկացություն մոմենտների մասին

Բացի x պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումից, որը որոշում է հավանականությունների բաշխման կենտրոնի դիրքը, պատահական մեծության բաշխման քանակական բնութագիրն է x պատահական մեծության դիսպերսիան:

Դիսպերսիան կնշանակենք $D[x]$ կամ σ_x^2 :

«Դիսպերսիա» բառը նշանակում է ցրում: Դիսպերսիան պատահական մեծության արժեքների՝ իր մաթեմատիկական սպասումից ունեցած ցրման, սփռման թվային բնութագիրն է:

Սահմանում 1: x պատահական մեծության դիսպերսիա կոչվում է x պատահական մեծության և նրա մաթեմատիկական սպասումի տարբերության քառակուսու մաթեմատիկական սպասումը (այսինքն՝ համապատասխան կենտրոնադիր պատահական մեծության քառակուսու մաթեմատիկական սպասումը).

$$D[x] = M[(x - m_x)^2] \quad (1)$$

կամ

$$D[x] = \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2 p_k, \quad (2)$$

Դիսպերսիան ունի պատահական մեծության քառակուսու չափականություն: Երբեմն, ցրումը բնութագրելու համար, ավելի հարմար է օգտվել այնպիսի մեծությունից, որի չափականությունը համընկնում է պատահական մեծության չափականությունը: Այդպիսի մեծություն է միջին քառակուսային շեղումը:

Սահմանում 2: Պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղում կոչվում է նրա դիսպերսիայի քառակուսի արմատը՝

$$\sigma[x] = \sqrt{D[x]},$$

կամ բացված տեսքով

$$\sigma[x] = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2 p_k}, \quad (3)$$

Միջին քառակուսային շեղումը նշանակում են նաև σ_x -ով:

Դիտողություն 1: Դիսպերսիան հաշվելիս հարմար է լինում (1) բանաձևը ձևափոխել այսպես.

$$\begin{aligned} D[x] &= \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2 p_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - 2 \sum_{k=1}^n x_k m_x p_k + \sum_{k=1}^n m_x^2 p_k = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - 2m_x \sum_{k=1}^n x_k p_k + m_x^2 \sum_{k=1}^n p_k = \\ &= M[x^2] - 2m_x \cdot m_x + m_x^2 \cdot 1 = M[x^2] - m_x^2. \end{aligned}$$

եվ այսպես,

$$D[x] = M[x^2] - m_x^2, \quad (4)$$

այսինքն՝ դիսպերսիան հավասար է պատահական մեծության քառակուսու մաթեմատիկական սպասումի և պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումի քառակուսու տարբերությանը:

Օրինակ 1: Օրսեկտի վրա կատարվում է մեկ կրակոց: Խոցելու հավանականությունը p է: Որսեկ մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը:

Լուծում: Կառուցենք խոցումների թվի արժեքների աղյուսակը.

x	1	0
p_k	p	q

$q = 1 - p$, Հետևաբար,

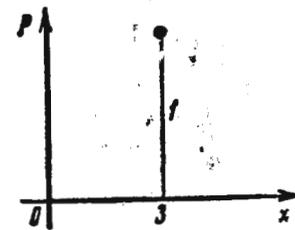
$$\left. \begin{aligned} M[x] &= 1 \cdot p + 0 \cdot q = p, \\ D[x] &= (1-p)^2 p + (0-p)^2 q = q^2 p + p^2 q = pq, \\ \sigma[x] &= \sqrt{pq}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Դիսպերսիայի և միջին քառակուսային շեղման՝ որպես պատահական մեծության ցրման բնութագրությունների իմաստը պատկերացնելու համար քննարկենք օրինակներ.

Օրինակ 2: x պատահական մեծությունը տրված է հետևյալ բաշխման օրենքով (տես աղյուսակը և նկ. 113-ը).

x	2	3	4
P_k	0,3	0,4	0,3

x	3
p	1



Նկ. 413

Որոշել՝ 1) մաթեմատիկական սպասումը, 2) դիսպերսիան, 3) միջին քառակուսային շեղումը:

Որոշել 1) մաթեմատիկական սպասումը, 2) դիսպերսիան, 3) միջին քառակուսային շեղումը:

Լուծում:

Լուծում:

- $M[x] = 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 = 3,$
- $D[x] = (2-3)^2 \cdot 0,3 + (3-3)^2 \cdot 0,4 + (4-3)^2 \cdot 0,3 = 0,6,$
- $\sigma[x] = \sqrt{D[x]} = \sqrt{0,6} = 0,77,$

- $M[x] = 3 \cdot 1 = 3,$
- $D[x] = (3-3)^2 \cdot 1 = 0,$
- $\sigma[x] = 0:$

Օրինակ 3: X պատահական մեծությունը տրված է հետևյալ բաշխման օրենքով (տես աղյուսակը և նկ. 414-ը):

Այս պատահական մեծության արժեքների ցրումը բացակայում է:

x	1	3	5
P_k	0,3	0,4	0,3

Դիտողություն 2: Եթե հաստատուն թիվը դիտենք որպես պատահական մեծություն, որը 1 հավանականությունով քաղվում է C արժեքը, ապա հեշտ է ցույց տալ, որ $D[c] = 0:$

Ապացուցում: Յուրյ է տրվել, որ $M[c] = c$ (տես § 9, (5): Հստ (1) բանաձևի ստանում ենք.

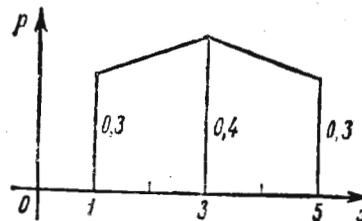
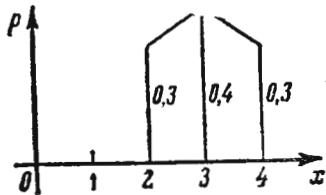
$$D[c] = M[(c-c)^2] = M[0] = 0, \text{ ինչ պ. ապ.}$$

Որոշել. 1) մաթեմատիկական սպասումը, 3) դիսպերսիան, 3) միջին քառակուսային շեղումը:

Դիտողություն 3: Մեխանիկայում ընդունված տեղման-բանություն նմանություններ, $(x-m_x)$, $(x-m_x)^2$ մեծությունների մաթեմատիկական սպասումը անվանում են X պատահական մեծության առաջին և երկրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտ: Դիտարկվում է նաև երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը՝

$$\sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^3 p_k$$

Եթե պատահական մեծությունը հավանականությունների բաշխման կենտրոնի նկատմամբ բաշխված է սիմետրիկ (նկ. 411), ապա ակընհայտ է, որ նրա երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը հավասար կլինի զրոյի: Եթե երրորդ կարգի մոմենտը զրոյից տարբեր է, ապա պատահական մեծությունը չի կարող բաշխված լինել սիմետրիկ:



Նկ. 413

Նկ. 414

Լուծում:

- $M[x] = 1 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,3 = 3,$
- $D[x] = (1-3)^2 \cdot 0,3 + (3-3)^2 \cdot 0,4 + (5-3)^2 \cdot 0,3 = 2,4,$
- $\sigma[x] = \sqrt{2,4} = 1,55,$

Առաջին օրինակում պատահական մեծության ցրումը փոքր է երկրորդ օրինակի պատահական մեծության ցրումից (տես նկ. 414 և 415): Այդ մեծությունների դիսպերսիաները համապատասխանաբար հավասար են 0,6 և 2,4:

Օրինակ 4: X պատահական մեծությունը տրված է հետևյալ բաշխման օրենքով (տես աղյուսակը և նկ. 415-ը):

§ 11. Պատահական մեծությունների ֆունկցիաներ

Դիցուք պատահական մեծությունը տրված է հետևյալ աղյուսակի տեսքն ունեցող բաշխման օրենքով:

x	x ₁	x ₂	...	x _k	...	x _n
p _k	p ₁	p ₂	...	p _k	...	p _n

Դիտարկենք X պատահական մեծության

$$y=f(x)$$

Ֆունկցիան:

Փունկցիայի $y_k=f(x_k)$ արժեքները կլինեն y պատահական մեծության արժեքները:

Եթե $y_k=f(x_k)$ բոլոր արժեքները տարբեր են, ապա y պատահական մեծության բաշխման օրենքը տրվում է հետևյալ աղյուսակով.

y=f(x)	y ₁ =f(x ₁)	y ₂ =f(x ₂)	...	y _k =f(x _k)	...	y _n =f(x _n)
p _k	p ₁	p ₂	...	p _k	...	p _n

Եթե $y_k=f(x_k)$ արժեքների մեջ կան հավասարները, ապա համապատասխան սլունակները պետք է միավորել մեկ սլունակի մեջ, դումարելով համապատասխան հավանականությունները:

X պատահական մեծության y=f(x) ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը կորոշվի § 10-ի (1) բանաձևին համանման բանաձևով.

$$M[f(x)] = \sum_{k=1}^n f(x_k) p_k \quad (1)$$

Նման ձևով որոշվում է նաև ֆունկցիայի դիսպերսիան.

$$D[f(x)] = M[(f(x) - M[f(x)])^2] = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - m_{f(x)})^2 p_k$$

Օրինակ. φ պատահական մեծությունը տրված է հետևյալ բաշխման օրենքով.

φ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
p _k	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

Դիտարկվում է այդ պատահական մեծության $y=A \sin \varphi$ ֆունկցիան:

Կազմենք y պատահական մեծության համար բաշխման աղյուսակը.

y	-A	$-\frac{A\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{A\sqrt{2}}{2}$	A
p _k	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

Փունկցիայի ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը.

$$\begin{aligned} M[A \sin \varphi] &= -A \cdot 0,1 - \frac{A\sqrt{2}}{2} \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + \frac{A\sqrt{2}}{2} \cdot 0,3 + A \cdot 0,3 = \\ &= A \left(0,2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,2 \right) = A(0,2 + 0,14) = 0,34 A. \end{aligned}$$

Նման տիպի խնդիրները կառող են ծագել տատանողական պրոցեսները դիտարկելիս:

§ 12. Անընդհատ պատահական մեծություն:

Անընդհատ պատահական մեծության բաշխման խտությունը:

Պատահական մեծության՝ տվյալ միջակայքն ընկնելու հավանականությունը

Տվյալ հարցն ըմբռնելու համար քննարկենք մի օրինակ:

Օրինակ. Շահագործման որևէ ժամանակամիջոցից հետո չափվում է զլանի մաշվածքի մեծությունը. Այդ մեծությունը որոշվում է զլանի տրամագծի մեծացման արժեքով. Սա նշանակենք \bar{x} -ով: Խնդրի էությունից հետևում է, որ \bar{x} մեծությունը կարող է իր հնարավոր արժեքների միջակայքից ընդունել ցանկացած արժեք:

Այդպիսի մեծությունն անվանում են անընդհատ պատահական մեծություն:

Այսպես, որեմն, դիտարկենք որևէ (a, b) միջակայքում տրված \bar{x} անընդհատ պատահական մեծությունը, ընդ որում (a, b)-ն կարող է լինել նաև $(-\infty, \infty)$ անվերջ միջակայքը: Այդ միջակայքը $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ կամայական կետերով բաժանենք $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ երկաթություններ փոքր միջակայքերի:

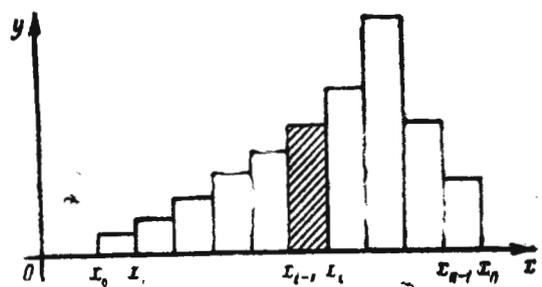
Ընդունենք, որ մեզ հայտնի է այն բանի հավանականությունը, որ \bar{x} պատահական մեծությունն ընկել է (x_{i-1}, x_i) միջակայքի ներսը: Այդ հավանականությունը նշանակենք այսպես՝ $P(x_{i-1} < \bar{x} < x_i)$ և այն պատկերենք Δx_i հիմքով ուղղանկյան մակերեսի տեսքով (նկ. 416):

Յուրաքանչյուր (x_{i-1}, x_i) միջակայքի համար որոշվում է \bar{x} պատահական մեծության՝ այդ միջակայքն ընկնելու հավանականությունը և, հետևաբար, կարող է կառուցվել համապատասխան ուղղանկյուն: Այսպիսով, ստանում ենք սանդղածն բեկյալ:

Սահմանում 1: Եթե գոյություն ունի այնպիսի $y=f(x)$ ֆունկցիա, որ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \bar{x} < x + \Delta x)}{\Delta x} = f(x), \quad (1)$$

այս ալի $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է \bar{x} պատահական մեծության բաշխման խտություն կամ բաշխման օրենք: (Ասում են նաև «բաշխման խտություն» կամ «հավանականության խտություն»): \bar{x} -ով նշանակենք պատահական անընդհատ մեծությունը, x -ով կամ x_k -ով՝ ալի



Նկ. 416

պատահական մեծության արժեքները: Բայց երբեմն, եթե դա չի խանգարում հասկանալուն, և առաջին գեպը, գծիկը բաց կթողենք: $y=f(x)$ կորը կոչվում է հավանականությունների բաշխման կոր կամ բաշխման կոր (Նկ. 417): Օգտվելով սահմանի սահմանումից, (1) հավասարությունից, Δx -ի նկատմամբ բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ճշտությամբ, հետևում է հետևյալ մոտավոր հավասարությունը՝

$$P(x < \bar{x} < x + \Delta x) \cong f(x) \Delta x, \quad (2)$$

Այնուհետև ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1: Դիցուք $f(x)$ -ը

\bar{x} պատահական մեծության բաշխման խտությունն է: Այդ դեպքում հավանականությունն այն բանի, որ \bar{x} պատահական մեծության արժեքը

կընկնի (α, β) միջակայքի ներքը, հավասար է $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալին՝ վերցրած α -ից մինչև β սահմաններում, այսինքն՝ իրավացի է հետևյալ հավասարությունը.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \quad (3)$$

Ապացուցում: (x, β) միջակայքը $\alpha = x_1, x_2, \dots, x_{n+1} = \beta$ կետերով արոհենք n փոքր միջակայքերի (Նկ. 418): Այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրի նկատմամբ կիրառենք (2) բանաձևը.

$$P(x_1 < \bar{x} < x_2) \cong f(x_1) \Delta x_1,$$

$$P(x_2 < \bar{x} < x_3) \cong f(x_2) \Delta x_2,$$

$$\dots$$

$$P(x_n < \bar{x} < x_{n+1}) \cong f(x_n) \Delta x_n:$$

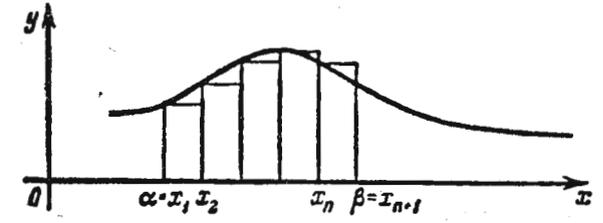
Գումարենք հավասարության ձախ և աջ մասերը: Ակնհայտ է, որ ձախից կստանանք $P(\alpha < \bar{x} < \beta)$: Այսպես, ուրեմն

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) \cong \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i,$$

Ստացանք մոտավոր հավասարություն: Աջ մասում անցնելով սահմանին, երբ $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ինտեգրալային գումարների հատկությունների հիման վրա կստանանք.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

ճշգրիտ հավասարությունը: (Ենթադրում ենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան այն-



Նկ. 418

պիսին է, որ աջ մասի սահմանը գոյություն ունի): Բայց աջ մասի սահմանը $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալն է՝ α -ից մինչև β սահմաններում: Եվ այսպես,

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով, իմանալով պատահական մեծության բաշխման խտությունը, կարող ենք որոշել այն բանի հավանականությունը, որ պատահական մեծության արժեքն ընկել է տվյալ միջակայքի ներքը:

Նրկրաչափորեն այդ հավանականությունը հավասար է համապատասխան կորագիծ սեղանի մակերեսին (նկ. 419):

Դիտողություն: Անընդհատ պատահական մեծության դեպքում այն պատահույթի հավանականությունը, ըստ որի $\bar{x} = x_0$, հավասար կլինի զրոյի:

Իրոք, (2) հավասարության մեջ ընդունելով $x = x_0$, կստանանք

$$P(x_0 < \bar{x} < x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) \Delta x,$$

որտեղից

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x_0 < \bar{x} < x_0 + \Delta x) = 0$$

կամ

$$P(\bar{x} = x_0) = 0:$$

(Տես նաև էջ 508-ի դիտողություն 1-ը): Ուստի (3) և նախորդ հավասարություններում կարող ենք գրել ոչ միայն $P(\alpha < \bar{x} < \beta)$, այլև $P(\alpha \leq \bar{x} \leq \beta)$, քանի որ

$$P(\alpha \leq \bar{x} \leq \beta) = P(\bar{x} = \alpha) + P(\alpha < \bar{x} < \beta) + P(\bar{x} = \beta) = P(\alpha < \bar{x} < \beta):$$

Եթե \bar{x} պատահական մեծության բոլոր հնարավոր արժեքները գտնվում են (a, b) միջակայքում, ապա

$$\int_a^b f(x) dx = 1, \quad (4)$$

քանի որ հավասար է, որ պատահական մեծության արժեքը

կլնկնի (a, b) միջակայքի ներսը:

Եթե հնարավոր արժեքների միջակայքը $(-\infty, \infty)$ -ն է, ապա

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1: \quad (5)$$

Նկատենք, որ եթե քննարկվող խնդրի էությունից հետևում է, որ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է (a, b) վերջավոր միջակայքում, ապա կարելի է համարել, որ այն որոշված է ամբողջ $(-\infty, \infty)$ անվերջ միջակայքում, բայց

$$f(x) = 0$$

(a, b) միջակայքից դուրս: Այս դեպքում տեղի ունի (4) հավասար-

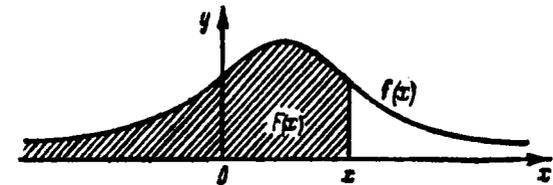
ությունը և (5) հավասարությունը: Պատահական մեծության բաշխման խտությունը լրիվ որոշում է պատահական մեծությունը:

§ 13. Բաշխման ֆունկցիան կամ բաշխման ինտեգրալային օրենքը: Հավանականությունների հավասարաչափ բաշխման օրենքը

Սահմանում 1: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որևէ $\bar{x} (-\infty < \bar{x} < \infty)$ պատահական մեծության բաշխման խտությունն է. այդ դեպքում

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (1)$$

ֆունկցիան կոչվում է հավանականությունների բաշխման ֆունկցիա կամ բաշխման ինտեգրալային օրենք:



Նկ. 420

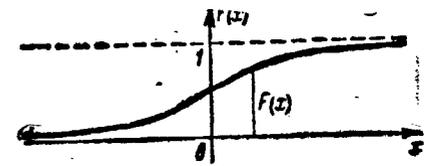
Դիտարեն պատահական մեծության համար բաշխման ֆունկցիան հավասար է նրա այն x_k արժեքների հավանականությունների գումարին, որոնք փոքր են x -ից.

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k$$

§ 12-ի (3) հավասարության հիման վրա հետևում է, որ $F(x)$ բաշխման ֆունկցիան այն բանի հավանականությունն է, որ \bar{x} պատահական մեծությունը կընդունի x -ից փոքր արժեք (նկ. 421).

$$F(x) = P(-\infty < \bar{x} < x): \quad (2)$$

Նկ. 420-ից հետևում է, որ x -ի տվյալ արժեքի դեպքում բաշխման ֆունկցիան թվապես հավասար է այն պատկերի մակերեսին, որը սահմանափակված է բաշխման կորով և ընկած է x կետով տարած օրդինատից ձախ:



Նկ. 421

$F(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոչվում է բաշխման ինտեգրալային կոր (Նկ. 421):

(1) հավասարության մեջ անցնելով սահմանին, երբ $x \rightarrow +\infty$ և հաշվի առնելով § 12-ի (5)-ը, ստանում ենք.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

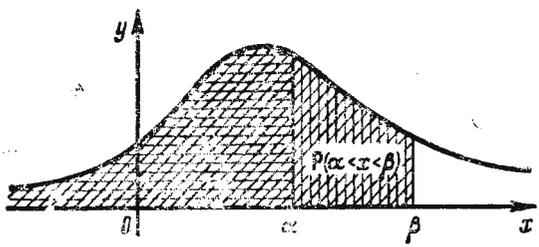
Այնուհետև ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1: \bar{x} պատահական մեծության՝ արված (α, β) միջակայքն ընկնելու հավանականությունը հավասար է այդ միջակայքում բաշխման ֆունկցիայի անից.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = F(\beta) - F(\alpha):$$

Ապացուցում: Արտահայտենք \bar{x} պատահական մեծության՝ արված (α, β) միջակայքն ընկնելու հավանականությունը: § 12-ի (3) բանաձևը գրենք այսպես.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\beta} f(x) dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx$$



Նկ. 422

(տես Նկ. 422): Կամ, օգտվելով (1) հավասարությունից, կարող ենք գրել

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

ինչ պետք էր ապացուցել (տես Նկ. 423):

Նկատենք, որ $f(x)$ բաշխման խտությունը և համապատասխան $F(x)$ բաշխման ֆունկցիան կապված են

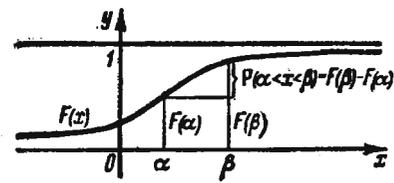
$$F'(x) = f(x) \quad (3)$$

առնչությունը: Դա հետևում է (1) հավասարությունից և որոշյալ ինտեգրալն ըստ վերին սահմանի դիֆերենցիալ մասին թեորեմից:

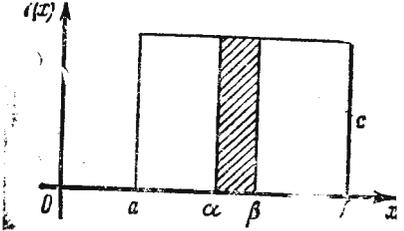
Այնուհետև դիտարկենք հավանականությունների հավասարաչափ բաշխում ունեցող պատահական մեծությունը: Այդպիսի պատահական մեծության բաշխման օրենքը կամ $f(x)$ բաշխման խտությունը տրվում է հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \text{ երբ } x < a, \\ f(x) &= c \text{ երբ } a < x < b, \\ f(x) &= 0 \text{ երբ } b < x: \end{aligned}$$

(a, b) միջակայքում $f(x)$ խտությունն ունի c հաստատուն արժեքը



Նկ. 423



Նկ. 424

(Նկ. 424), իսկ այդ միջակայքից դուրս հավասար է զրոյի: Այսպիսի բաշխումն անվանում են նաև հավասարաչափ խտության օրենք:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \text{ պայմանից գտնում ենք } c\text{-ի արժեքը.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b-a) = 1,$$

հետևաբար,

$$c = \frac{1}{b-a}, \quad b-a = \frac{1}{c}$$

Վերջին հավասարությունից հետևում է, որ (a, b) միջակայքը, որում տեղի ունի հավասարաչափ բաշխում, անպայման վերջավոր է: Որոշենք այն բանի հավանականությունը, որ \bar{x} պատահական մեծությունն ընդունում է (α, β) միջակայքում պարփակված արժեքների.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$

եվ այսպես, որոնվող հավանականությունը՝

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$

(ալիս տունչութիւնը համանման է էջ 513 -ում բերված երկչափ դեպքի համար երկրաչափական հավանականութիւն սահմանմանը):

Որոշենք բաշխման ինտեգրալային օրինքը՝

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx,$$

եթե $x < a$, ապա $f(x) = 0$ և, հետևաբար,

$$F(x) = 0:$$

եթե $a < x < b$, ապա $f(x) = \frac{1}{b-a}$ և, հետևաբար,

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} \cdot dx = \frac{x-a}{b-a},$$

եթե $b < x$, ապա

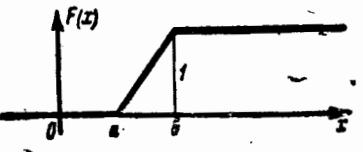
$$f(x) = 0, \quad \int_b^{\infty} f(x) dx = 0,$$

հետևաբար,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

(տես նկ. 425):

Բերենք հավասարաչափ խտութիւն օրինք ունեցող պատահական մեծութիւնների մի քանի կոնկրետ օրինակներ:



Նկ. 425

Օրինակ 1. Որեւէ մեծութիւն չափելիս կատարվում է կորացում մինչև սանդղակի (шкала) մտակա բաժանքը, կլորացնելիս թույլ տված սխալները պատահական մեծութիւն են, որ ունեն հավանականութիւնների հավասարաչափ բաշխում: Եթե $2l$ -ը սանդղակի մեկ բաժանքում մի քանի միավորների թիվն է, ապա այդ պատահական մեծութիւն բաշխման խտութիւնը կլինի.

$$f(x) = 0, \text{ երբ } x < -l,$$

$$f(x) = \frac{1}{2l}, \text{ երբ } -l < x < l,$$

$$f(x) = 0, \text{ երբ } l < x:$$

Այստեղ $a = -l, b = l, c = \frac{1}{2l}$.

Օրինակ 2. Պտտող սիմետրիկ անիվը շփման հետևանքով կանգ է առնում: Անիվի կանգառումից հետո նրա որեւէ ֆիքսած շառավղով և անշարժ շառավղով կազմված θ անկյունը պատահական մեծութիւն է, որի բաշխման խտութիւնն է.

$$f(\theta) = 0, \text{ երբ } \theta < 0,$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \text{ երբ } 0 < \theta < 2\pi,$$

$$f(\theta) = 0, \text{ երբ } 2\pi < \theta:$$

§ 14. Անընդհատ պատահական մեծութիւնների թվային բնութագրերը

Համանման նրան, ինչպես դա ավելի վաղ արվել է դիսկրետ պատահական մեծութիւն համար, քննարկենք $f(x)$ բաշխման խտութիւնը \bar{x} անընդհատ պատահական մեծութիւնի թվային բնութագրերը:

Սահմանում 1: $f(x)$ բաշխման խտութիւն ունեցող x անընդհատ պատահական մեծութիւն մաթեմատիկական սպասում կոչվում է

$$M[\bar{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (1)$$

արտահայտութիւնը:

Եթե x պատահական մեծութիւնը կարող է արժեքներ ընդունել միայն $[a, b]$ վերջավոր էջատվածում, ապա $M[\bar{x}]$ մաթեմատիկական սպասումն արտահայտվում է

$$M[\bar{x}] = \int_a^b x f(x) dx \quad (1')$$

բանաձևով: (1') բանաձևը կարելի է դիտարկել որպես § 9-ի (1) բանաձևի ընդհանրացում:

Իրոք, $[a, b]$ հատվածը տրոհենք (x_{k-1}, x_k) միջակայքերի: Յուրաքանչյուր միջակայքում վերջնենք ξ_k կետը: Դիտարկենք ξ օժանդակ դիսկրետ պատահական մեծութիւնը, որը կարող է ընդունել

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n$$

արժեքները:

Դիցուք դիսկրետ պատահական մեծութիւն համապատասխան արժեքների հավանականութիւններն են $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n$

$$p_1 = f(\xi_1)\Delta x_1, p_2 = f(\xi_2)\Delta x_2, \dots,$$

$$p_k = f(\xi_k)\Delta x_k, \dots, p_n = f(\xi_n)\Delta x_n^*.$$

Տրված է դիսկրետ մեծություն մաթեմատիկական սպասումը կլինի

$$M[\xi] = \sum_{k=1}^n \xi_k p_k$$

կամ

$$M[\xi] = \xi_1 f(\xi_1)\Delta x_1 + \xi_2 f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k + \dots + \xi_n f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^n \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Անցնելով սահմանին, երբ $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, ստանում ենք

$$\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b x f(x) dx.$$

Այլ կողմում գտնվող արտահայտությունը x անընդհատ պատահական մեծության (որը կարող է ընդունել $[a, b]$ հատվածին պատկանող ցանկացած x արժեք) մաթեմատիկական սպասումն է: Համանման դատողություն կարելի է կատարել նաև անվերջ միջակայքի համար, այսինքն՝ (1) արտահայտության համար: (1) և (1') բանաձևերը նման են դիսկրետ պատահական մեծության համար § 9-ի (1) բանաձևին: Այստեղ էլ մաթեմատիկական սպասումը կնշանակենք m_x -ով:

Մաթեմատիկական սպասումն անվանում են \bar{x} պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման կենտրոն (նկ. 426): Եթե բաշխման կորը սիմետրիկ է O_y առանցքի նկատմամբ, այսինքն՝ $f(x)$ ֆունկցիան զույգ է, ապա ակնհայտ է, որ

$$M[\bar{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0.$$

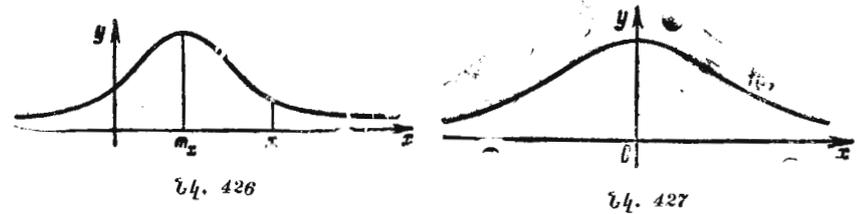
Այս դեպքում հավանականությունների բաշխման կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ (նկ. 427): Դիտարկենք $x - m_x$ կենտրոնադիր պատահական մեծությունը: Գտնենք նրա մաթեմատիկական սպասումը.

* Միավորական $f(\xi_k)\Delta x_k$ -ն այն բանի հավանականությունն է, որ x անընդհատ պատահական մեծությունը արժեքներ է ընդունում (x_{k-1}, x_k) միջակայքից:

$$M[\bar{x} - m_x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx - m_x \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = m_x - m_x \cdot 1 = 0.$$

Կենտրոնադիր պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է զրոյի:

Սահմանում 2: \bar{x} պատահական մեծության դիսպերսիա կոչվում է



վում է համապատասխան կենտրոնադիր պատահական մեծության քառակուսու մաթեմատիկական սպասումը՝

$$D[\bar{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (2)$$

(2) բանաձևը նման է § 10-ի (2) բանաձևին:

Սահմանում 3: \bar{x} պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղում կոչվում է նրա դիսպերսիայից քառակուսի արմատը.

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{D[\bar{x}]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx}. \quad (3)$$

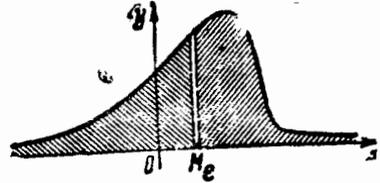
Այս բանաձևը նման է § 10-ի (3) բանաձևին: Կոնկրետ օրինակներ քննարկելիս կտեսնենք, որ ինչպես և դիսկրետ պատահական մեծության դեպքում, դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը բնորոշում են պատահական մեծության արժեքների ցրվածությունը:

Սահմանում 4: \bar{x} պատահական մեծության այն արժեքը, որի դեպքում բաշխման խտությունն ունի ամենամեծ արժեքը, կոչվում է մոդ (սա նշանակելու ենք M_0 -ով): Այն \bar{x} պատահական մեծության համար, որի բաշխման կորը պատկերված է նկ. 426-ում, և նկ. 427-ում, մոդը համընկնում է մաթեմատիկական սպասումի հետ:

Սահմանում 5: M_0 թիվը կոչվում է մեդիան, եթե այն բավարարում է

$$\int_{-\infty}^{M_0} f(x) dx = \int_{M_0}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

հավասարությունը (նկ. 428): Վերջին հավասարությունը կարելի է գրել այսպես՝



նկ. 428

$$P(\bar{x} < M_e) = P(M_e < \bar{x}) = \frac{1}{2},$$

այսինքն, հավասարահարավոր է, որ \bar{x} պատահական մեծությունը կընդունի M_e -ից փոքր և M_e -ից մեծ արժեքներ:

Նկատենք, որ \bar{x} պատահական

մեծությունը կարող է և M_e արժեքը չընդունել:

§ 15. Բաշխման նորմալ Օրենքը: Նորմալ բաշխման մաթեմատիկական սպասումը

Տարբեր երևույթների ուսումնասիրությունը ցույց է տալիս, որ շատ պատահական մեծություններ, օրինակ, այնպիսիք, ինչպես չափման ընթացքում սխալները, հրաձգության ժամանակ կողմնային շեղումները և որևէ կենտրոնից անկման կետի շեղումն ըստ հեռավորության, շատ մեխանիզմներում դետալների մաշվածքի մեծությունը և այլն ունեն այնպիսի հավանականությունների բաշխման խտություն, որն արտահայտվում է

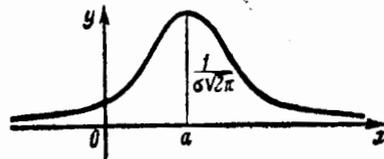
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

բանաձևով:

Այս դեպքում ասում են, որ պատահական մեծությունը ենթարկվում է բաշխման ցորմալ օրենքին (այս բաշխումն անվանում են նաև Գաուսի օրենք): Նորմալ բաշխման կորը պատկերված է նկ. 429-ում: (1) ֆունկցիայի արժեքների սպասումը, երբ $a=0$, $\sigma=1$ տեղավորված է գրքի վերջում (տես այլուսակ 2): Համանման կորը մանրամասն ուսումնասիրված է I հատորի V գլխի § 9-ում:

Նախ ցույց տանք, որ (1) բաշխման ֆունկցիան բավարարում է § 12-ի (5) հիմնական առնչությանը.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$



նկ. 429

Իրոք, մտցնելով

$$\frac{x-a}{\sqrt{2} \cdot \sigma} = t, \quad dx = \sqrt{2}\sigma dt$$

նշանակումները, կարող ենք գրել

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1,$$

քանի որ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

(տես XV գլխի, § 5):

Որոշենք (1) բաշխման նորմալ օրենքն ունեցող պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը: Ըստ § 14-ի (1) բանաձևի ունենք.

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (2)$$

կատարելով

$$\frac{x-a}{\sqrt{2} \cdot \sigma} = t$$

փոփոխականի փոխարինումը, ստանում ենք.

$$x = a + \sqrt{2}\sigma t, \quad dx = \sqrt{2}\sigma dt,$$

Հետևաբար,

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a + \sqrt{2}\sigma t) e^{-t^2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt, \end{aligned}$$

Այդից առաջին ինտեգրալը հավասար է $\sqrt{\pi}$ -ի: Հաշվենք երկրորդ ինտեգրալը.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

եվ այսպես,

$$m_x = a,$$

(3)

(1) բանաձևում a պարամետրի արժեքը հավասար է գիտարկվող պա-

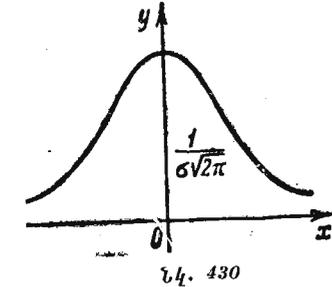
տահական մեծություն մաթեմատիկական սպասումին: $x=a$ կետը հավանականությունների բաշխման կամ ցրման կենտրոնն է: Երբ $x=a$ $f(x)$ ֆունկցիան ունի ամենամեծ արժեքը, ուստի $x=a$ արժեքը պատահական մեծություն մոդն է: Քանի որ (1) կորը սիմետրիկ է $x=a$ ուղղի նկատմամբ, ապա

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx,$$

այսինքն՝ $x=a$ արժեքը նորմալ բաշխման մեդիանն է: Եթե (1) բանաձևում ընդունենք $a=0$, ապա կստանանք.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

Համապատասխան կորը սիմետրիկ է Oy առանցքի նկատմամբ: $f(x)$ ֆունկցիան այն պատահական մեծության նորմալ բաշխման խտությունն է, որի հավանականությունների բաշխման կենտրոնը համընկնում է կորը ինտանսիտի սկզբնակետի հետ (նկ. 430): (1) և (4) բաշխման օրենքներն ունեցող պատահական մեծությունների այն թվային բնութագրերը, որոնք որոշում են պատահական մեծության արժեքների ցրման կենտրոնի նկատմամբ ցրվածության բնույթը, որոշվում են կորի ձևով, որը կախված չէ a -ի մեծությունից, և ուստի համընկնում են: a -ի մեծությունը որոշում է (1) կորի տեղաշարժը դեպի աջ ($a > 0$ դեպքում) կամ դեպի



նկ. 430

ձախ ($a < 0$ դեպքում): Գրությունը համառոտելու համար հետագա շատ կշռադատություններ կկատարենք (4) բանաձևով որոշվող բաշխման խտության նկատմամբ:

§ 16. Բաշխման նորմալ օրենքին ենթարկվող պատահական մեծության դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը

Դիցուք \bar{x} պատահական մեծության բաշխման խտությունը ստիվում է

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

բանաձևով: Անընդհատ պատահական մեծություն դիսպերսիան որոշվում է § 14-ի (2) բանաձևով:

Մեր դեպքում

$$m_x = a = 0,$$

Ունենք

$$D[\bar{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx,$$

կատարենք $\frac{x}{\sqrt{2\sigma}} = t$ փոփոխականի փոխարինումը. այդ դեպքում

$$D[\bar{x}] = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot 2t \cdot e^{-t^2} dt,$$

Ինտեգրելով մասերով, կստանանք.

$$D[\bar{x}] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left[-t \cdot e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right],$$

Քանի որ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot e^{-t^2} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

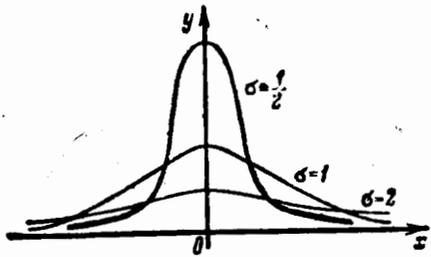
ապա վերջնականապես ստանում ենք

$$D[\bar{x}] = \sigma^2 \quad (2)$$

Համաձայն § 14-ի (3) բանաձևի միջին քառակուսային շեղումը կլինի

$$\sigma[\bar{x}] = \sqrt{D[\bar{x}]} = \sigma \quad (3)$$

Այսպիսով, դիսպերսիան հավասար է հավանականությունների բաշխման (1) բանաձևում մասնակցող σ^2 պարամետրին: Վերևում արդեն տեսել ենք, որ դիսպերսիան բնորոշում է պատահական մեծության արժեքների ցրվածությունը՝ ցրման կենտրոնի նկատմամբ: Տեսնենք ինչպես է ազդում σ^2 պարամետրի արժեքը բաշխման կորի ձևի վրա: Նկ. 431-ում պատկերված են բաշխման կորերը $\sigma = \frac{1}{2}$, $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ արժեքների համար: Դիտարկելով այդ կորերը, տեսնում ենք, որ որքան փոքր է σ -ն, այնքան մեծ է $f(x)$ ֆունկցիայի մաքսիմումը, ցրման կենտրոնին ($x=0$) մոտ արժեքների հավանականու-



Նկ. 431

թյունը մեծ է, իսկ կենտրոնից հեռու արժեքների հավանականությունը՝ փոքր: Այս հանգամանքը բառերով արտահայտում են այսպես. որքան փոքր է դիսպերսիան, այնքան փոքր է պատահական մեծության արժեքների ցրվածությունը:

§ 17. Պատահական մեծության արժեքի՝ տվյալ միջակայքն ընկնելու հավանականությունը: Լապլասի ֆունկցիան: Բաշխման ինտեգրալային ֆունկցիան նորմալ բաշխման համար

§ 12-ի (3) բանաձևին համապատասխան որոշենք հավանականությունն այն բանի, որ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

բաշխման խտություն ունեցող \bar{x} պատահական մեծության արժեքն ընկնում է (α, β) միջակայքը.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

կամ

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (1)$$

(Նկ. 432): Կատարենք

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t$$

փոփոխականի փոխարինումը: Ստանում ենք.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt, \quad (1')$$

Այդ կողմում գտնվող ինտեգրալը տարրական ֆունկցիաներով չի արտահայտվում: Այդ ինտեգրալի արժեքներն արտահայտվում են

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2)$$

հավանականությունների ինտեգրալի արժեքների միջոցով: Մատնանշենք $\Phi(x)$ ֆունկցիալի մի քանի հատկություններ, որոնցից օգտվելու ենք ստորև:

1. $\Phi(x)$ ֆունկցիան որոշված է x -ի բոլոր արժեքների դեպքում:
2. $\Phi(0) = 0$;

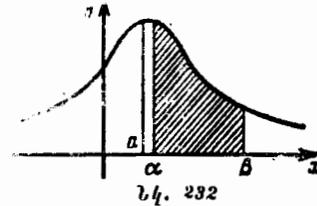
$$3. \Phi(+\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1;$$

4. $\Phi(x-\sigma)$ $(0, \infty)$ միջակայքում մոնոտոն աճում է;

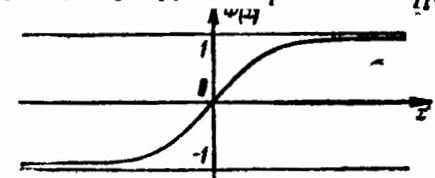
5. $\Phi(x)$ ֆունկցիան՝ կենտ է, քանի որ

$$\Phi(-x) = -\Phi(x); \quad (3)$$

6. $\Phi(x)$ ֆունկցիալի գրաֆիկը պատկերված է Նկ. 433-ում: Կազմված են այս ֆունկցիալի արժեքների մանրամասն աղյու-



Նկ. 432



Նկ. 433

սակներ: Համառոտ աղյուսակը բերված է գրքի վերջում (տես աղյուսակ (1)):

Գրենք (1') հավասարությունը, օգտվելով ինտեգրման միջակայքի տրոհման մասին թեորեմից.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^0 e^{-t^2} dt + \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[- \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt + \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \right],$$

Վերջին հավասարությունը կարելի է գրել այսպես.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\beta-\alpha}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \right],$$

Օգտվելով $\Phi(x)$ ֆունկցիայից (տես (2)), վերջնականապես արտահայտենք նորմալ օրենքին ենթարկվող \bar{x} պատահական մեծություն (α, β) միջակայքն ընկնելու հավանականությունը.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right], \quad (4)$$

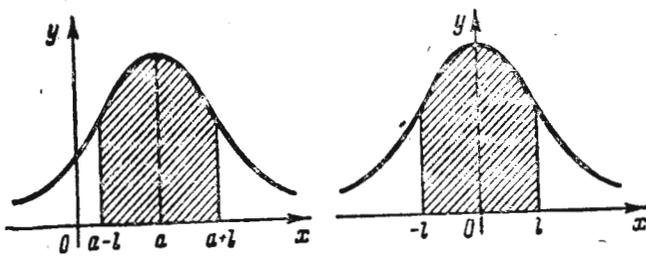
Երբ $a=0$ ստանում ենք.

$$F(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right], \quad (5)$$

Հավասարեցնելով $a=0$ դեպքի համար (1) հավասարությունների և (5) հավասարության աջ մասերը, ստանում ենք.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right], \quad (5')$$

Հաճախ հարկ է լինում հաշվել այն բանի հավանականությունը, որ պատահական մեծության արժեքը կընկնի $x=a$ կետի նկատմամբ սիմետրիկ ($a-l, a+l$) միջակայքի ներսը (նկ. 434): Այս դեպքում (4) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը.



Նկ. 434

$$P(a-l < \bar{x} < a+l) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right],$$

Հաշվի առնելով, որ $\Phi\left(-\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right) = -\Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right)$ (տես (3) բանաձևը), վերջնականապես ստանում ենք.

$$P(a-l < \bar{x} < a+l) = \Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right), \quad (6)$$

Այլ մասը կախված չէ ցրման կենտրոնի դիրքից, հետևաբար, և $a=0$ դեպքում ստանում ենք

$$P(-l < \bar{x} < l) = \Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right), \quad (7)$$

Օրինակ 1: \bar{x} պատահական մեծությունը ենթարկված է բաշխման նորմալ օրենքին, որի ցրման կենտրոնը՝ $a=0,5$ և դիսպերսիան՝ $\sigma^2 = \frac{1}{8}$. Ուրոշել այն բանի հավանականությունը, որ \bar{x} պատահական մեծության արժեքը կընկնի (0,4; 0,6) միջակայքի ներսը (նկ. 435).

Լուծում. Այստեղ $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} = 2$: Ըստ (4) բանաձևի ստանում ենք.

$$P(0,4 < \bar{x} < 0,6) = \frac{1}{2} \{ \Phi[2(0,6-0,5)] - \Phi[2(0,4-0,5)] \} = \frac{1}{2} \{ \Phi(0,2) - \Phi(-0,2) \},$$

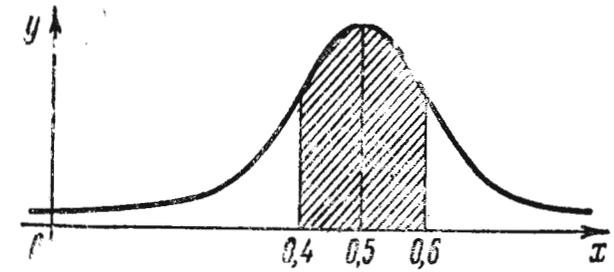
Բայց $\Phi(-0,2) = -\Phi(0,2)$ (տես (3) բանաձևը), ուստի կարող ենք գրել.

$$P(0,4 < \bar{x} < 0,6) = \frac{1}{2} [\Phi(0,2) + \Phi(0,2)] = \Phi(0,2),$$

$\Phi(x)$ ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակով (տես զրբի վերջում աղյուսակ 1-ը) գտնում ենք

$$P(0,4 < \bar{x} < 0,6) = 0,223:$$

Օրինակ 2: Ավտոմատի պատրաստած դետալի երկարությունը պատահական մեծություն է, որը բաշխված է ըստ նորմալ օրենքի հետևյալ պարամետրե-



Նկ. 435

րով՝ $M[\bar{x}] = 10$, $\sigma^2 = \frac{1}{200}$: Գտնել խոտանի հավանականությունը, եթե դետալի թույլատրելի չափերը պետք է լինեն $10 \pm 0,05$.

Լուծում. Մեր դեպքում $a=10$, $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} = 10$, $\sigma = \frac{1}{10\sqrt{2}}$: Խոտանի P_{μ} .

հավանականությունը (4) բանաձևին համապատասխան արտահայտվում է այսպես.

$$P_{\mu} = 1 - P(9,95 < \bar{x} < 10,05) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} (\Phi[10(10,05-10)] - \Phi[10(9,95-10)]) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} (\Phi(0,5) - \Phi(-0,5)) = 1 - \Phi(0,5) = 1 - 0,52 = 0,48.$$

Օրինակ 3. Որոշել $2l=3,5$ մ լայնությունը շերտի մեջ ընկնելու հավանականությունը, եթե հրաձգության սխալները ենթարկվում են $a=0, \sigma=1,9$ պարամետրեր ունեցող բաշխման նորմալ օրենքին:

Լուծում: Մեր դեպքում $\alpha=-1,75, \beta=1,75, \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}=0,372$: Հստ (7) բանաձևի ստանում ենք.

$$P(-1,75 < \bar{x} < 1,75) = \Phi(1,75 \cdot 0,372) = \Phi(0,651) = 0,643.$$

Դիտողություն: (2) $\Phi(x)$ ֆունկցիայի փոխարին հաճախ օգտվում են

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (8)$$

Լայլասի ֆունկցիայից, որը $\Phi(x)$ ֆունկցիայի հետ կապված է պարզ առնչությամբ: (8) ինտեգրալում կատարելով $\frac{t}{\sqrt{2}} = z$ փոխարինումը, ստանում ենք

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

եվ այսպես,

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (9)$$

և, ակնհայտ է,

$$\bar{\Phi}(x\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \Phi(x), \quad (10)$$

Օգտագործելով $\bar{\Phi}(x)$ ֆունկցիան և (9) առնչությունը (5) բանաձևը կարելի է գրել այսպես.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \bar{\Phi}\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - \bar{\Phi}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \quad (11)$$

և $\sigma=1$ դեպքում

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \bar{\Phi}(\beta) - \bar{\Phi}(\alpha),$$

$\bar{\Phi}(x)$ Լայլասի ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակը գետեղված է գրքի վերջում (տես աղյուսակ 3):

Այնուհետև որոշենք բաշխման նորմալ օրենքի ինտեգրալի և ֆունկցիան: Հստ § 13-ի (1) բանաձևի ունենք.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = P(-\infty < \bar{x} < x),$$

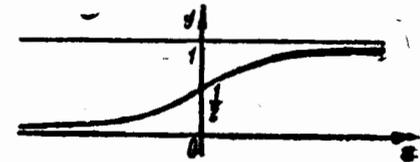
Օգտվելով (4) բանաձևից $\alpha=-\infty, \beta=x$ դեպքի համար ստանում ենք.

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi(-\infty) \right],$$

բայց $\Phi(-\infty) = -1$ (տես (3) բանաձևը): Հետևաբար,

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) + 1 \right], \quad (12)$$

$F(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, երբ $a=0$ պատկերված է նկ. 436-ում:



Նկ. 436

§ 18. Հավանական շեղում կամ հավանական սխալ

Հավանականությունների կիրառական տեսության շատ հարցերում, մասնավորապես հրաձգության տեսության մեջ, ինչպես նաև սխալների տեսության մեջ օգտվում են ցրման բնութագրից, որն անվանում են հավանական շեղում: Հրաձգության տեսության մեջ այն անվանում են հավանական սխալ:

Սահմանում 1: Հավանական շեղում կոչվում է այնպիսի E թիվը, եթե այն բանի հավանականությունը, որ պատահական մեծությունը (օրինակ, սխալը), որը ենթարկված է

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

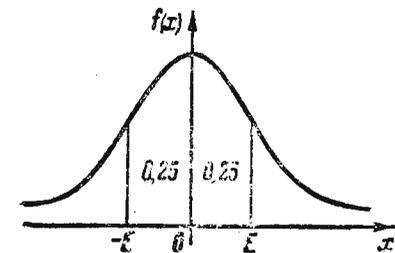
բաշխման նորմալ օրենքին, կընկնի $(-E, E)$ միջակայքի մեջ, հավասար է $\frac{1}{2}$ -ի (նկ. 437), այսինքն՝

$$P(-E < \bar{x} < E) = \frac{1}{2}, \quad (1)$$

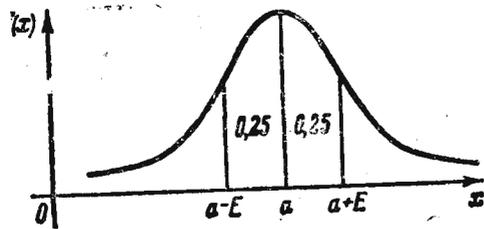
Յանկացած \bar{x} պատահական մեծություն համար, որը $x=a$ ցրման կենտրոնի դեպքում ենթարկվում է բաշխման նորմալ օրենքին, E հավանական շեղումը (նկ. 438) բավարարում է հետևյալ առնչությունը.

$$P(a - E < \bar{x} < a + E) = \frac{1}{2}, \quad (2)$$

σ միջին քառակուսային շեղումն արտահայտենք E հավանական սխալի միջոցով:



Նկ. 437



Նկ. 438

(1) հավասարությունն ձևի մասն արտահայտենք $\Phi(x)$ ֆունկցիայի միջոցով.

$$P(-E < \bar{x} < E) = \int_{-E}^E \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (3)$$

Ըստ § 17-ի (7) բանաձևի ստանում ենք.

$$P(-E < \bar{x} < E) = \Phi\left(\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}\right), \quad (4)$$

(1) և (4) հավասարությունների ձևի մասերը հավասար են, հետևաբար, հավասար են նաև աջ մասերը.

$$\Phi\left(\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}, \quad (5)$$

$\Phi(x)$ ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակով գտնում ենք արգումենտի $x=0,4769$ արժեքը, որի համար $\Phi(x) = \frac{1}{2}$: Հետևաբար,

$$\frac{E}{\sigma\sqrt{2}} = 0,4769:$$

Այս 0,4769 թիվը ընդունված է նշանակել ρ -ով.

$$\frac{E}{\sigma\sqrt{2}} = \rho = 0,4769, \quad (6)$$

Այստեղից

$$\left. \begin{aligned} E &= \rho\sqrt{2}\sigma, \\ \sigma &= \frac{E}{\rho\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

§ 19. Բաշխման նորմալ օրենքի արտահայտությունը հավանական շեղման միջոցով: Լապլասի բերված ֆունկցիան

Ըստ § 18-ի (7) բանաձևի σ պարամետրն արտահայտելով E պարամետրի միջոցով և տեղադրելով § 15-ի (4) բանաձևի մեջ, կըստանանք բաշխման օրենքի արտահայտությունը հավանական շեղման միջոցով.

$$f(x) = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E^2}}, \quad (1)$$

Պատահական մեծություն (օրինակ, սխալի) (α, β) միջակայքն ընկնելու հավանականությունը § 17-ի (5) բանաձևին համապատասխան կլինի.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\rho \frac{\beta}{E}\right) - \Phi\left(\rho \frac{\alpha}{E}\right) \right] \quad (2)$$

և § 17-ի (7) բանաձևին համապատասխան՝

$$P(-l < \bar{x} < l) = \Phi\left(\rho \frac{l}{E}\right), \quad (3)$$

(2) բանաձևի աջ մասում գտնվող $\frac{\beta}{E}$ և $\frac{\alpha}{E}$ թվերը որոշվում են խնդրի բնույթով, ρ -ն՝ հայտնի թիվ է, $\rho=0,4769$:

ρ -ով բազմապատկելուց խուսափելու համար $\Phi(\rho x)$ ֆունկցիայի համար կազմված են աղյուսակներ: Այս ֆունկցիան նշանակում են $\hat{\Phi}(x)$.

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi(\rho x), \quad (4)$$

$\hat{\Phi}(x)$ -ն անվանում են Լապլասի բերված ֆունկցիա: Այս ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակը գետեղված է զրքի վերջում (տես աղյուսակ 1):

§ 17-ի (2)-ի հիման վրա $\hat{\Phi}(x)$ -ը որոշվում է հետևյալ ինտեգրալով՝

$$\hat{\Phi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{px} e^{-t^2} dt,$$

Կատարելով $t = pz$ փոփոխականի փոխարինումը, կստանանք.

$$\hat{\Phi}(x) = \frac{2p}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2 z^2} dz, \quad (5)$$

(2) հավասարության աջ մասն արտահայտենք L ապրասի բերված ֆունկցիայով.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2} \left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{E}\right) \right], \quad (6)$$

Մասնավորապես, պատահական մեծության արժեքները ցրման կենտրոնի նկատմամբ սիմետրիկ $(-l, l)$ միջակայքն ընկնելու հավանականությունը (3) բանաձևի համաձայն կարտահայտվի այսպես.

$$P(-l < \bar{x} < l) = \hat{\Phi}\left(\frac{l}{E}\right) \quad (7)$$

և

$$P(0 < \bar{x} < l) = \frac{1}{2} \hat{\Phi}\left(\frac{l}{E}\right), \quad (8)$$

Նկատենք, որ \bar{x} պատահական մեծությունը (α, β) միջակայքն ընկնելու հավանականությունը, եթե մաթեմատիկական սպասումը՝ $a \neq 0$, E հավանական սխալի միջոցով կարտահայտվի այսպես (տես § 17-ի (4) բանաձևը).

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\rho \frac{\beta - a}{E}\right) - \Phi\left(\rho \frac{\alpha - a}{E}\right) \right], \quad (9)$$

Վերջին հավասարությունը L ապրասի բերված ֆունկցիայի միջոցով կարտահայտվի այսպես.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2} \left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta - a}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\alpha - a}{E}\right) \right], \quad (10)$$

§ 20. Երեք սիգմաների կանոնը: Սխալների բաշխման հավանականությունների սանդղակը

Գործնական հաշվումներ կատարելիս որպես նորմալ օրենքին ենթարկվող պատահական մեծության՝ իր ցրման կենտրոնից (մաթեմատիկական սպասումից) շեղման չափման միավոր ընդունում են σ միջին քառակուսային շեղումը: Այդ դեպքում § 17-ի (7) բանաձևի հիման վրա ստացվում են տարբեր հաշվումների ժամանակ օգտակար հետևյալ հավասարությունները.

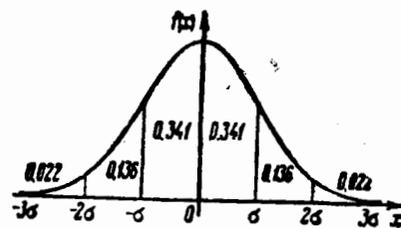
$$P(-\sigma < \bar{x} < \sigma) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,683,$$

$$P(-2\sigma < \bar{x} < 2\sigma) = \Phi(\sqrt{2}) = 0,954,$$

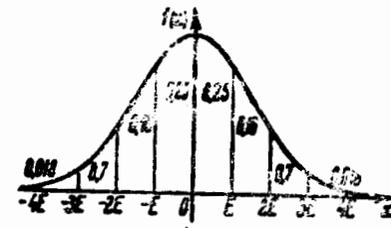
$$P(-3\sigma < \bar{x} < 3\sigma) = \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0,997,$$

Այս արդյունքները երկրաչափորեն պատկերված են նկ. 439-ում:

Համարյա հավաստի է, որ պատահական մեծության (սխալի) մաթեմատիկական սպասումից ունեցած շեղումը բացարձակ մեծությունը 3σ -ից ավելի չէ: Այս առաջադրությունն անվանում են երեք սիգմաների կանոն:



Նկ. 439



Նկ. 440

Հրաձգության տեսության մեջ և տարբեր վիճակագրական նյութեր մշակելիս օգտակար է լինում իմանալ \bar{x} մեծության՝ $(0, E)$, $(E, 2E)$, $(2E, 3E)$, $(3E, 4E)$, $(4E, 5E)$ միջակայքներն ընկնելու հավանականությունը բաշխման այնպիսի խտություն դեպքում, որը որոշվում է § 19-ի (1) բանաձևով: Այդ հավանականություններն իմանալը շատ դեպքերում կրճատում է հաշվումները և օգնում է կրկնվածները վերլուծելիս:

Այդ հավանականությունները հաշվելիս օգտվելու ենք § 19-ի (8) բանաձևից և $\hat{\Phi}(x)$ ֆունկցիայի աղյուսակից.

$$P(0 < \bar{x} < E) = \frac{1}{2} \hat{\Phi}(1) = 0,2500.$$

$$P(E < \bar{x} < 2E) = \frac{1}{2} [\hat{\Phi}(2) - \hat{\Phi}(1)] = 0,1613,$$

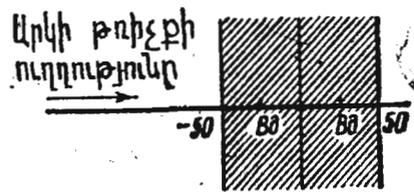
$$P(2E < \bar{x} < 3E) = \frac{1}{2} [\hat{\Phi}(3) - \hat{\Phi}(2)] = 0,0672,$$

$$P(3E < \bar{x} < 4E) = \frac{1}{2} [\hat{\Phi}(4) - \hat{\Phi}(3)] = 0,0180,$$

$$P(4E < \bar{x} < \infty) = \frac{1}{2} [\hat{\Phi}(\infty) - \hat{\Phi}(4)] = \frac{1}{2} (1 - 0,9930) = 0,0035.$$

Հաշվումների արդյունքները երկրաչափորեն պատկերված են նկ. 440-ում, որը կոչվում է սխալների ցրման սանդղակ: Այս հաշվարկներից հետևում է, որ գործնականորեն հավասար է, որ պատահական մեծությունների արժեքն ընկնում է $(-4E, 4E)$ միջակայքը: Այն բանի հավանականությունները, որ պատահական մեծությունների արժեքն ընկնում է այդ միջակայքից դուրս, փոքր է 0,01-ից:

Օրինակ 1. 100 մ լայնությամբ շերտի վրա կատարվում է մեկ կրակոց: Նշանադրությունը կատարված է շերտի միջին գծի ուղղությամբ: Ցրումը ենթարկվում է ըստ հեռավորության $E=20$ մ հավանական սխալ ունեցող նորմալ բաշխմանը: Որոշել շերտի մեջ ընկնելու հավանականությունը (նկ. 441): Ըստ հեռավորության հավանական շեղումը հրաձգության տեսության մեջ նշանակում են $B\delta$ -ով, կոդիցիանը, $B\delta$ -ով:



նկ. 441

Լ ու ծ ու մ: Փոփոխում ենք § 10-ի (7) բանաձևից: Մեր դեպքում $l=50$ մ, $E=B\delta=20$ մ: Հետևաբար,

$$P(-50 < \bar{x} < 50) = \hat{\Phi}\left(\frac{50}{20}\right) =$$

$$= \hat{\Phi}(2,5) = 0,9082 \approx 0,91.$$

Դիտողություն: Խնդիրը կարելի է լուծել մոտավորապես, չօգտվելով $\hat{\Phi}(x)$ ֆունկցիայի աղյուսակներից, այլ օգտվելով ցրման սանդղակից (նկ. 440): Մեր դեպքում $l=2,5E$: Հետևաբար,

$$P(-50 < \bar{x} < 50) = 2(0,25 + 0,16 + 0,04) = 0,90:$$

Օրինակ 2. Փորձով հաստատված է, որ հեռավորությունը չափելու համար սարքի սխալը ենթարկվում է $E=10$ մ հավանական սխալն ունեցող նորմալ օրենքին: Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ այդ սարքով որոշված հեռավորությունը իսկականից կշեղվի ոչ ավելի քան 1,5 մ:

Լ ու ծ ու մ: Տվյալ դեպքում $l=15$ մ, $E=10$ մ: Ըստ § 10-ի (7) բանաձևի ստանում ենք.

$$P(-15 < \bar{x} < 15) = \hat{\Phi}\left(\frac{15}{10}\right) = \hat{\Phi}(1,5) = 0,6883 \approx 0,69.$$

§ 21. Միջին թվաբանական սխալ

Սխալների բնութագրման համար մտցնում են միջին թվաբանական սխալի գաղափարը, որը հավասար է սխալների բացարձակ մեծությունների միջին արժեքին: Միջին թվաբանական սխալը նշանակելու ենք d -ով: Որոշենք միջին թվաբանական սխալը, եթե x սխալները ենթարկվում են § 15-ի (4) նորմալ օրենքին: § 15-ի (2) բանաձևին համանման բանաձևով ստանում ենք ($a=0$).

$$d = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(-\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

Եվ այսպես, միջին թվաբանական սխալը σ միջին քառակուսային շեղման միջոցով արտահայտվում է այսպես.

$$d = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (1)$$

§ 22. ձգրտության չափը: Սխալների բաշխման բնութագրերի միջև եղած առնչությունը

Շատ պրոցեսներ քննարկելիս, հատկապես հրաձգության տեսությունից մեջ, նորմալ օրենքի բաշխման խտությունը գրում են

$$i(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (1)$$

ձևով: Համեմատելով § 15-ի (4) բանաձևը և (1)-ը տեսնում ենք, որ մտցրած h պարամետրը σ պարամետրի միջոցով արտահայտվում է այսպես.

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}. \quad (2)$$

h մեծությունը հակադարձ համեմատական է σ -ին, այսինքն՝ հակադարձ համեմատական է միջին քառակուսային սխալին կամ միջին քառակուսային շեղմանը Որքան փոքր է σ^2 դիսպերսիան, այսինքն՝ որքան փոքր է ցրումը, այնքան մեծ է h-ի արժեքը: Ուստի h-ն անվանում են ճշգրտության չափ:

(2)-ից և § 21-ի (1)-ից ստանում ենք

$$\sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \quad (3)$$

$$d = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \quad (4)$$

E հավանական սխալը h ճշգրտության չափի միջոցով § 18-ի (7) բանաձևի և (3)-ի հիման վրա արտահայտվում է այսպես.

$$E = \frac{\rho}{h}, \quad (5)$$

Երբեմն հարկ է լինում սխալների բաշխման մեկ բնութագիրն արտահայտել մյուսով: Ուստի օգտակար են լինում հետևյալ հավասարությունները.

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{\sigma} = \rho\sqrt{2} = 0.6745, \quad \frac{E}{d} = \rho\sqrt{\pi} = 0.8453, \quad \frac{\sigma}{d} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.2533, \\ \frac{\sigma}{E} = \frac{1}{\rho\sqrt{2}} = 1.4826, \quad \frac{d}{E} = \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}} = 1.1829, \end{aligned} \right\} (6)$$

§ 23. Երկչափ պատահական մեծություն

Երկչափ պատահական մեծությունների հետ հարկ է լինում գործ ունենալ, օրինակ, (\bar{x}, \bar{y}) հարթության վրա գտնվող օբյեկտը ոչնչացնելու պրոցեսը դիտարկելիս:

Երկչափ պատահական մեծության արժեքը որոշվում է x և y երկու թվերով. երկչափ պատահական մեծությանը նշանակելու ենք (\bar{x}, \bar{y}) -ով: Դիցուք \bar{x} -ը և \bar{y} -ը ընդունում են x_1 և y_1 դիսկրետ արժեքները և յուրաքանչյուր (x_1, y_1) արժեքների զույգին որևէ համախմբությունից համապատասխանում է P_{ij} որոշակի հավանականություն: Կարող ենք կազմել դիսկրետ երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման հետևյալ աղյուսակը.

$\begin{matrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{matrix}$	x_1	x_2	x_n
y_1	P_{11}	P_{21}				P_{n1}
y_2	P_{12}	P_{22}				P_{n2}
⋮						
⋮						
y_m	P_{1m}	P_{2m}				P_{nm}

Ակնհայտ է, որ պետք է բավարարվի հետևյալ հավասարությունը.

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n P_{ij} = 1, \quad (1)$$

Այնուհետև սահմանենք անընդհատ երկչափ պատահական մեծությունը: Այն բանի հավանականությունը, որ (\bar{x}, \bar{y}) երկչափ պատահական մեծության արժեքը բավարարում է $x < \bar{x} < x + \Delta x$, $y < \bar{y} < y + \Delta y$ անհավասարություններին, կնշանակենք այսպես.

$$P(x < \bar{x} < x + \Delta x, y < \bar{y} < y + \Delta y);$$

Սահմանում 1: $f(x, y)$ ֆունկցիան կոչվում է (\bar{x}, \bar{y}) երկչափ պատահական մեծության բաշխման խտություն, եթե $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ նկատմամբ բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ճշտությամբ տեղի ունի

$$P(x < \bar{x} < x + \Delta x, y < \bar{y} < y + \Delta y) \cong f(x, y) \Delta x \Delta y \quad (2)$$

հավասարությունը: (2) բանաձևը լիովին համահման է § 12-ի (2) բանաձևին:

Դիտարկենք (xOy) ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը: Եթե (\bar{x}, \bar{y}) պատահական մեծության արժեքները նշանակենք համապատասխան x և y կոորդինատներ ունեցող հարթության կետերով, ապա $P(x < \bar{x} < x + \Delta x, y < \bar{y} < y + \Delta y)$ արտահայտությունը նըշանակում է այն բանի հավանականությունը, որ (\bar{x}, \bar{y}) պատահական մեծությունը կընդունի այնպիսի արժեք, որը նշանակված է ΔS

ստվերագծված ուղղանկյունում գտնվող կետով (նկ. 442): Կասենք, որ «պատահական մեծություն արժեքն ընկել է ΔS տիրույթի ներսը*»:

$P(x < \bar{x} < x + \Delta x, y < \bar{y} < y + \Delta y)$ հավանականությունը կնշանակենք $P[(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta S]$: Այս նշանակումներով (2) հավասարությունը կարելի է գրել այսպես.

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta S] \approx f(x, y) \Delta S, \quad (3)$$

Այնուհետև ապացուցենք հետևյալ թեորեմը, որը նման է § 12-ի թեորեմ 1-ին:

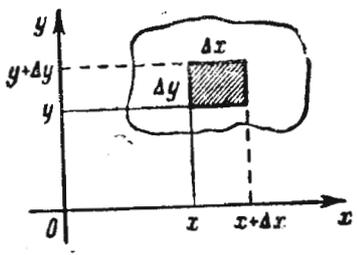
Թեորեմ 1: $P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D]$ հավանականությունն այն բանի, որ $f(x, y)$ բաշխման խտություն ունեցող (\bar{x}, \bar{y}) երկչափ պատահական մեծությունը կընկնի D տիրույթը, արտահայտվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալով՝ տարածված ըստ D տիրույթի, այսինքն՝

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D] = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (4)$$

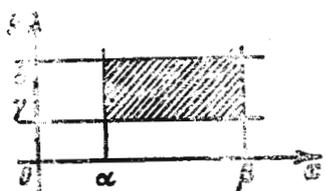
Ապացուցում: Ինչպես այդ արվել է կրկնակի ինտեգրալների տեսությունում, D տիրույթը տրոհենք ΔS հարթակների: Յուրաքանչյուր հարթակի համար գրենք (3) հավասարությունը և գումարենք ստացված հավասարությունների ձախ և աջ մասերը: Քանի որ

$$\sum \Delta S = D \text{ և } \sum P[(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta S] = P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D],$$

ապա ΔS -ի նկատմամբ բարձր կարգի անվերջ փոքրների ճշտությամբ



Նկ. 442



Նկ. 443

ստանում ենք հետևյալ մոտավոր հավասարությունը.

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D] \approx \sum f(x, y) \Delta S:$$

* (3) հավասարության մեջ հարթակը կարելի էր փրփրենել նաև կամայական

Վերջին հավասարություն մեջ անցնելով սահմանին երբ $\Delta S \rightarrow 0$, աջ կողմում կստանանք կրկնակի ինտեգրալ և ինտեգրալին գումարի հատկությունների հիման վրա էլ՝

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D] = \iint_D f(x, y) dx dy$$

ճշգրիտ հավասարությունը: Թեորեմն ապացուցված է: Դիտողություն 1: Եթե D տիրույթը $x = \alpha, x = \beta, y = \gamma, y = \delta$ ուղիղներով սահմանափակված ուղղանկյուն է, (նկ. 443), ապա

$$P[\alpha < \bar{x} < \beta, \gamma < \bar{y} < \delta] = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dx dy, \quad (5)$$

Դիտողություն 2: (1) հավասարությունը համանման տեղի ունի նաև

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1 \quad (6)$$

հավասարությունը, քանի որ հավաստի է, որ երկչափ մեծությունը կընդունի ինչ-որ արժեք: Այնտեղ, որտեղ $f(x, y)$ ֆունկցիան ըստ խնդրի իմաստի որոշված չէ, ընդունում ենք $f(x, y) = 0$:

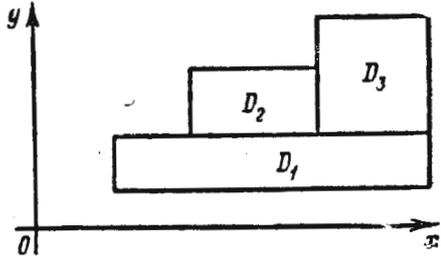
Եթե D տիրույթը նկ. 444-ում պատկերված տեսքի ուղղանկյունների գումար է, ապա պատահական մեծություն՝ այդպիսի տիրույթն ընկնելու հավանականությունը որոշվում է որպես առանձին ուղղանկյունների համար հավանականությունների գումար, այսինքն՝ որպես ըստ յուրաքանչյուր ուղղանկյան որոշյալ ինտեգրալների գումար.

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D] = P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D_1] + P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D_2] + P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D_3],$$

Օրինակ: Երկչափ պատահական մեծության բաշխման խտությունը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)},$$

Որոշել հավանականությունն այն բանի, որ պատահական մեծության արժեքը կընկնի $x=0, x=1, y=\frac{1}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}$ ուղիղներով սահմանափակված ուղղանկյան ներսը:



Նկ. 444

Հ. ու ծ ու լ մ: Ըստ (5) բանաձևի ստանում ենք.

$$P\left[0 < \bar{x} < 1, \frac{1}{\sqrt{3}} < \bar{y} < \sqrt{3}\right] = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\pi^2} \arctg x \Big|_0^1 \arctg y \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{24}.$$

Ս ա հ մ ա ն ու լ մ 2: Հետևյալ ֆունկցիան՝

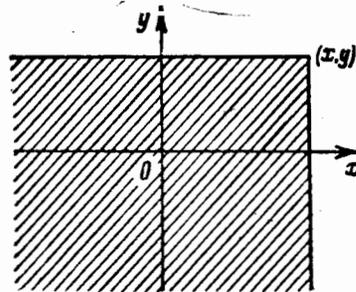
$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv \quad (7)$$

կոչվում է (\bar{x}, \bar{y}) երկչափ պատահական մեծություն հավանականությունների բաշխման ինտեգրալային ֆունկցիա:

Ակնհայտ է, որ բաշխման ինտեգրալային ֆունկցիան արտահայտում է այն բանի հավանականությունը, որ $\bar{x} < x$, $\bar{y} < y$, այսինքն՝

$$F(x, y) = P(\bar{x} < x, \bar{y} < y):$$

Բաշխման ֆունկցիան երկրաչափորեն արտահայտում է այն բանի հավանականությունը, որ երկչափ պատահական մեծությունն ընկել է նկ. 445-ի վրա ստվերագծված անվերջ քառանկյան մեջ: Որոշյալ ինտեգրալն ըստ պարամետրի դիֆերենցման մասին թեորեմի հիման վրա կապ է հաստատվում բաշխման խտություն և բաշխման ինտեգրալային ֆունկցիալ միջև.



Նկ. 445

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \int_{-\infty}^y f(x, v) dv, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= f(x, y): \end{aligned} \right\} (8)$$

Երկչափ պատահական մեծության հավանականության խտությունը բաշխման ինտեգրալային ֆունկցիայի երկրորդ կարգի խառը ածանցյալն է:

§ 24. Նորմալ բաշխման օրենքը հարթության վրա

Ս ա հ մ ա ն ու լ մ 1: Երկչափ պատահական մեծության բաշխումը կոչվում է նորմալ, եթե այդ մեծության բաշխման խտությունը արտահայտվում է

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \quad (1)$$

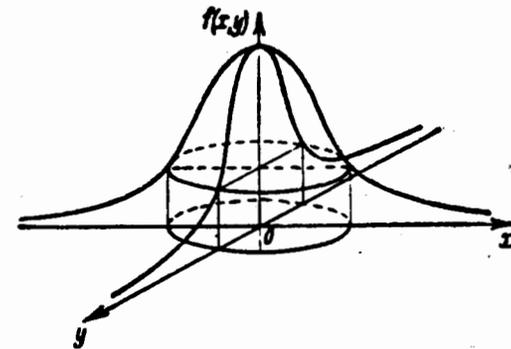
բանաձևով:

Այն ֆունկցիայի գրաֆիկը նկ. 446-ի վրա պատկերված մակերևույթն է:

(1) Բաշխման խտությունն ունեցող պատահական մեծության ցրման կենտրոնը $(0, 0)$ կեան է*: σ_x -ը և σ_y -ը կոչվում են զլխավոր միջին քառակուսային շեղումներ:

(1) Բանաձևը գրենք այսպես.

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}, \quad (2)$$



Նկ. 446

Այսպիսով, $f(x, y)$ -ը կարելի է դիտել որպես \bar{x} և \bar{y} պատահական մեծությունների երկու նորմալ բաշխումների արտադրյալ: Ինչպես և միաչափ պատահական մեծության դեպքում, սահմանենք երկչափ

* Եթե ցրման կենտրոնը գտնվում է (a, b) կետում, ապա բաշխման օրենքը տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-b)^2}{2\sigma_y^2}} \quad (1')$$

պատահական մեծություն E_x և E_y գլխավոր հավանական շեղումները (տես § 18-ի (7) բանաձևը).

$$E_x = \rho \sqrt{2} \sigma_x, \quad E_y = \rho \sqrt{2} \sigma_y, \quad (3)$$

σ_x -ը և σ_y -ը, արտահայտված E_x -ի և E_y -ի միջոցով, տեղադրելով (1) բանաձևի մեջ, կստանանք.

$$f(x, y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2 \left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} \right)}, \quad (4)$$

Դիտարկենք (4) մակերևութի մակարդակի գծերը.

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} = k^2 = \text{const} \quad (5)$$

(այս դեպքում $f(x, y) = \text{const}$): Մակարդակի գծերն են kE_x և kE_y կիսաառանցքներն ունեցող էլիպսները: Էլիպսները կենտրոնները համընկնում են ցրման կենտրոնների հետ: Այդ էլիպսները կոչվում են ցրման էլիպսներ: Նրանց առանցքները կոչվում են ցրման առանցքներ: Միավոր ցրման էլիպս կոչվում է այն էլիպսը, որի կիսաառանցքները հավասար են E_x և E_y հավանական շեղումներին: Միավոր էլիպսի հավասարումը կստացվի, եթե (5) հավասարումների մեջ ընդունվի $k=1$.

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} = 1, \quad (6)$$

Ցրման լրիվ էլիպս կոչվում է այն էլիպսը, որի կիսաառանցքները հավասար են $4E_x$ և $4E_y$: Այդ էլիպսի հավասարումն է.

$$\frac{x^2}{(4E_x)^2} + \frac{y^2}{(4E_y)^2} = 1, \quad (7)$$

Հաշորդ պարագրաֆում կուպացուցենք, որ երկչափ պատահական մեծության՝ ցրման լրիվ էլիպսն ընկնելու հավանականությունը հավասար է 0,97, այսինքն՝ գործնականորեն հավասար է:

§ 25. Երկչափ պատահական մեծությունը ցրման գլխավոր առանցքներին փոքահեռ կողմեր ունեցող ուղղանկյան մեջ ընկնելու հավանականությունը բաշխման նորմալ օրենքի դեպքում

Դիցուք

$$f(x, y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2 \left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} \right)}$$

Ըստ § 23-ի (5) բանաձևի (տես նկ. 443) պատահական մեծություն $x=\alpha$, $x=\beta$, $y=\gamma$, $y=\delta$ ուղիղներով սահմանափակված ուղղանկյան մեջ ընկնելու հավանականությունն արտահայտվում է այսպես.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta, \gamma < \bar{y} < \delta) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2 \left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} \right)} dx dy, \quad (1)$$

Ենթաինտեգրալին ֆունկցիան ներկայացնելով երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով, կարող ենք դրել.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta, \gamma < \bar{y} < \delta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\rho}{\sqrt{\pi} E_x} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E_x^2}} dx \int_{\gamma}^{\delta} \frac{\rho}{\sqrt{\pi} E_y} e^{-\rho^2 \frac{y^2}{E_y^2}} dy, \quad (2)$$

և § 19-ի (6) բանաձևի հիման վրա վերջնականապես ստանում ենք.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta, \gamma < \bar{y} < \delta) = \frac{1}{4} \left[\widehat{\Phi} \left(\frac{\beta}{E_x} \right) - \widehat{\Phi} \left(\frac{\alpha}{E_x} \right) \right] \left[\widehat{\Phi} \left(\frac{\delta}{E_y} \right) - \widehat{\Phi} \left(\frac{\gamma}{E_y} \right) \right], \quad (3)$$

Եթե վերջին բանաձևում ընդունենք $\alpha = -l_1$, $\beta = l_1$, $\gamma = -l_2$, $\delta = l_2$, այսինքն՝ դիտարկենք կոորդինատների սկզբնակետում կենտրոն ունեցող ուղղանկյուն, ապա § 19-ի (7) բանաձևի հիման վրա (3) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$P(-l_1 < \bar{x} < l_1, -l_2 < \bar{y} < l_2) = \widehat{\Phi} \left(\frac{l_1}{E_x} \right) \widehat{\Phi} \left(\frac{l_2}{E_y} \right), \quad (4)$$

Դիտողություն: Պատահական մեծություն, կոորդինատների առանցքներին զուգահեռ կողմերով ուղղանկյան ներսն ընկնելու հավանականություն մտտին խնդիրը կարելի էր լուծել նաև այսպես: Ուղղանկյան մեջ ընկնելը բարդ պատահույթ է, որը կայանում է $-l_1 < \bar{x} < l_1$ շերտը և $-l_2 < \bar{y} < l_2$ շերտը ընկնելու երկու անկախ պատահույթների համընկնման մեջ: (Գրություն համառոտություն համար դիտարկում ենք այնպիսի ուղղանկյուն, որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում): Դիցուք \bar{x} պատահական մեծության բաշխման խտությունն է՝

$$f_1(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi} E_x} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E_x^2}}$$

\bar{y} պատահական մեծությունն է՝

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi E_y}} e^{-\frac{y^2}{E_y^2}}$$

Հաշվենք պատահական մեծություն՝ $-l_1 < \bar{x} < l_1$ շերտը և $-l_2 < \bar{y} < l_2$ շերտը ընկնելու հավանականությունը: Ըստ § 19-ի (7) բանաձևի ստանում ենք.

$$P(-l_1 < \bar{x} < l_1) = \hat{\Phi}\left(\frac{l_1}{E_x}\right),$$

$$P(-l_2 < \bar{y} < l_2) = \hat{\Phi}\left(\frac{l_2}{E_y}\right),$$

Քարդ պատահումի՝ ուղղանկյան մեջ ընկնելու հավանականությունը հավասար կլինի հավանականությունների արտադրյալին.

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta, \gamma < \bar{y} < \delta) = P(-l_1 < \bar{x} < l_1) P(-l_2 < \bar{y} < l_2) = \hat{\Phi}\left(\frac{l_1}{E_x}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{l_2}{E_y}\right),$$

Ստացանք (4) բանաձևը:

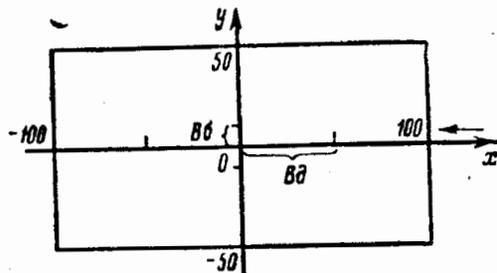
Օրինակ: Կատարվում է հրաձգություն զեպի 200 մ և 100 մ կողմերով $x = -100, x = 100, y = -50, y = 50$

զձերով սահմանափակված ուղղանկյան մակերեսը: Գլխավոր հավանական շերտները, համապատասխանաբար, հավասար են $E_x = B\theta = 50$ մ, $E_y = B\delta = 10$ մ: Գտնել մեկ կրակոցի զեպում ուղղանկյան մեջ ընկնելու հավանականությունը (Նկ. 447):

Լուծում: Մեր զեպում

$$l_1 = 100, l_2 = 50, E_x = 50, E_y = 10.$$

Այս արժեքները տեղադրում ենք (4) բանաձևի մեջ և, օգտվելով $\hat{\Phi}(x)$ ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակից (տես աղյուսակ 1-ը գրքի վերջում):



Նկ. 447

գտնում ենք.

$$P = \hat{\Phi}\left(\frac{100}{50}\right) \cdot \hat{\Phi}\left(\frac{50}{10}\right) = \hat{\Phi}(2) \cdot \hat{\Phi}(5) = 0,8227 \cdot 0,9993 = 0,8221.$$

§ 26. Երկչափ պատահական մեծությունը ցրման էլիպսի մեջ ընկնելու հավանականությունը

Սխալների տեսության մեջ հարկ է լինում դիտարկել հետևյալ խնդիրը: Հաշվել այն բանի հավանականությունը, որ պատահական մեծությունը, օրինակ՝ սխալը հարթության վրա, կընկնի

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} = k^2 \quad (1)$$

ցրման էլիպսի մեջ, եթե բաշխման խտությունը տրվում է § 24-ի (4) բանաձևով: Ըստ § 23-ի (4) բանաձևի ստանում ենք.

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D] = \iint_{D_k} \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2 \left[\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} \right]} dx dy, \quad (2)$$

որտեղ D_k տիրույթը սահմանափակված է (1) էլիպսով: Կատարենք փոփոխականի փոխարինում, ընդունելով

$$x = E_x u, \quad y = E_y v,$$

այս ձևափոխության ժամանակ D_k էլիպսը կանցնի

$$u^2 + v^2 = k^2 \quad (3)$$

շրջանի: Քանի որ ձևափոխության լակոբիանը հավասար է $I = E_x \cdot E_y$, ապա (2) հավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D_k] = \frac{1}{\pi} \int_{D_k} \rho^2 e^{-\rho^2 (u^2 + v^2)} du dv, \quad (4)$$

Վերջին ինտեգրալում անցնենք

$$u = r \cos \varphi, \quad v = r \sin \varphi$$

բևեռային կոորդինատներին: Այս դեպքում (4) հավասարության աջ մասն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D_k] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^k \rho^2 e^{-\rho^2 r^2} r dr d\varphi,$$

Այս մասում կատարելով հաշվումներ, կստանանք ցրման էլիպսի մեջ ընկնելու հավանականության արտահայտությունը.

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D_k] = 1 - e^{-\rho^2 k^2}, \quad (5)$$

Դիտարկենք մասնավոր դեպքեր: Միավոր ցրման էլիպսի մեջ ընկնելու հավանականությունը կատացվի, եթե (5) բանաձևում ընդունենք $k=1$.

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D_{\epsilon}]_{k=1} = 1 - e^{-\epsilon^2} = 0,203. \quad (6)$$

§ 24-ի (7) լրիվ ցրման էլիպսի մեջ ընկնելու հավանականությունը կատացվի, եթե (5) բանաձևում ընդունվի $k=4$.

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D_{\epsilon}]_{k=4} = 1 - e^{-16\epsilon^2} = 0,974. \quad (7)$$

Դիտարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ § 24-ի (4) բանաձևում $E_x = E_y = E$: § 24-ի (5) ցրման էլիպսը փոխակերպվում է $R = kE$ շառավղով

$$x^2 + y^2 = k^2 E^2 \quad (8)$$

շրջանի: Երկչափ պատահական մեծություն R շառավղով շրջանի մեջ ընկնելու հավանականությունը (5) բանաձևի համաձայն կլինի.

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \in D_R] = 1 - e^{-\frac{R^2}{E^2}}, \quad (9)$$

Մասնավորապես: Ռադիալ հավանականացիոն շեղում կոչվում է այնպիսի E_R թիվը, որ երկչափ պատահական մեծություն $R = E_R$ շառավղով շրջանի մեջ ընկնելու հավանականությունը հավասար է $\frac{1}{2}$ -ին:

Մասնամասից հետևում է, որ $R = E_R$ մեծությունը որոշվում է

$$1 - e^{-\frac{E_R^2}{E^2}} = \frac{1}{2}$$

առնչությունից: Յուրաքանչյուր ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակից գտնում ենք.

$$E_R = 1,75E:$$

§ 27. Մաթեմատիկական վիճակագրության խնդիրները: Վիճակագրական նյութ

Դիտումների արդյունքում և մասսայական պատահական երեվոյթիքներ գրանցելիս ստացվում են վիճակագրական տվյալներ կամ վիճակագրական նյութ: Մասնավորապես, վիճակագրական նյութ են չափումների սխալները:

Եթե դիտարկվող մեծությունը պատահական մեծություն է, ապա այն ուսումնասիրվում է հավանականությունների տեսության մեթոդ-

ներով: Այդ պատահական մեծություն բնույթը հասկանալու համար պետք է իմանալ նրա բաշխման օրենքը: Դիտարկվող մեծությունների բաշխման օրենքների որոշումը և դիտված արժեքների հիման վրա բաշխման պարամետրերի արժեքների գնահատումը մաթեմատիկական վիճակագրության խնդիրն է:

Մաթեմատիկական վիճակագրության մի խնդիրն էլ վիճակագրական նյութերի մշակման և վերլուծության մեթոդների ստեղծումն է՝ որոշակի հետևություններ ստանալու նպատակով, որոնք անհրաժեշտ են այն լավագույն պրոցեսի կազմակերպման համար, որտեղ մասնակցում են դիտարկվող մեծությունները:

Օրինակ 1. Չափիչ գործիքի օգնությամբ որևէ օբյեկտ բազմակի չափման ժամանակ, մասնավորապես մինչև որևէ օբյեկտ եղած հետազոտությունը որոշվել, ստացվում են դիտարկվող մեծության տարբեր արժեքներ: Այդ արժեքները կանխաձեռնաբար դիտված արժեքներ (այսպես կանխաձեռնաբար ցանկացած երևույթի ուսումնասիրության ընթացքում ստացված ամեն մի արժեք):

Այս ձևով ստացված արժեքները, նախքան նրանց հիման վրա կարելի լինի կատարել ինչ-որ հետևություններ, պահանջում են համակարգել և մշակել:

Ինչպես արդեն նշվեց, x դիտված արժեքի և դիտվող արժեքի a իսկական արժեքի միջև եղած δ տարբերությունը ($x - a = \delta$) կոչվում է չափման սխալ: Վերը ասվածը կարելի է արտահայտել համակարգել տեղիքներով: Չափման սխալները պահանջում են մաթեմատիկական մշակում՝ որոշակի հետևություններ ստանալու նպատակով:

Օրինակ 2. Մասսայական արտադրության ընթացքում հարկ է լինում դիտարկել ստացված արտադրանքի որևէ չափի (օրինակ, երկարության) շեղման մեծությունը ստացված արտադրանքի համար նախատեսված չափից (պատրաստման սխալը):

Օրինակ 3. Հրաձգության ժամանակ անկման կետի կոորդինատի և նշանառման կետի կոորդինատի տարբերությունը հրաձգության սխալն է (ցրում): Այս սխալները պահանջում են մաթեմատիկական հետազոտություն:

Օրինակ 4. Շահագործումից հետո և մինչև շահագործումը (նախագծային) ղեկավարի չափերի շեղումների չափման արդյունքները պահանջում են մաթեմատիկական վերլուծություն: Այս շեղումներն էլ կարելի է դիտարկել որպես սխալներ:

Ինչպիսի օրինակներից հետևում է, որ դիտարկված մեծությունները պատահական մեծություններ են, իսկ յուրաքանչյուր դիտված արժեք սխալ է դիտարկել որպես պատահական մեծություն մասնավոր արժեքը:

Այսպես, օրինակ, ըստ հետազոտության սխալները (ցրում) հրա-

ձգության դեպքում որոշվում է լիցքը կշռելիս կատարված սխալով, արկը պատրաստելիս կատարված սխալով, նշանառություն սխալով, հեռավորությունը որոշելիս թույլ տրված սխալով, օդերևութաբանական պայմանների փոփոխմամբ և այլն: Այս բոլորը պատահական մեծություններ են և ցրումը՝ որպես նրանց համատեղ ազդեցություն արդյունք, պատահական մեծություն է:

§ 28. Վիճակագրական շարք: Հիստոգրամ

Դիտումների (չափումների) օգնությամբ ստացված վիճակագրական նյութը տեղավորվում է երկու տողանի աղյուսակում: Առաջին տողում նշվում է i չափման համարը, երկրորդում՝ X չափվող մեծության X_i արժեքը:

i	1	2	3	...	i	...	n
X_i	X_1	X_2	X_3	...	X_i	...	X_n

Այսպիսի, աղյուսակը կոչվում է պարզ վիճակագրական շարք: Չափումների մեծ թվի դեպքում այսպիսի աղյուսակում ղետեղված վիճակագրական նյութը դժվար է ընկալվում և, հետևաբար, նրա վերլուծությունն էլ է դժվարանում: Այդ պատճառով ստացված պարզ վիճակագրական շարքի հիման վրա կազմվում է խմբավորում: Այդ կատարվում է հետևյալ կերպ:

X մեծության ստացված արժեքների ամբողջ միջակայքը տրոհում ենք $(a_0, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{k-1}, a_k)$ մասնակի հաստատ միջակայքերի և հաշվում ենք X մեծության (a_{k-1}, a_k) միջակայքն ընկած արժեքների m_k թիվը: Այն արժեքները, որոնք ընկել են միջակայքի ծայրի վրա, վերագրում են կա՛մ ձախ, կա՛մ աջ միջակայքերին (երբեմն դրանց վերագրում են ն՛ ձախ, ն՛ աջ միջակայքերին՝ ըստ նրանց թվի կեսի):

$$\frac{m_k}{n} = p_k^* \quad (1)$$

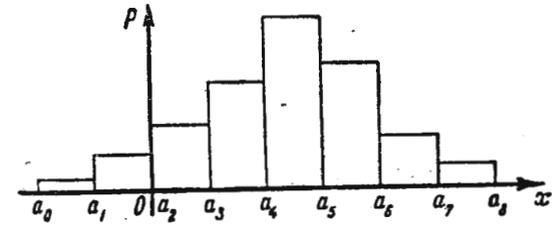
Թիվը (a_{k-1}, a_k) միջակայքին համապատասխանող հարաբերական հաճախությունն է: Ակնհայտ է, որ

$$\sum_{k=1}^k p_k^* = 1 \quad (2)$$

Այսպիսի արդյունքների հիման վրա կազմում ենք Յ տողանի աղյուսակ: Առաջին տողում, a_k -ի անման կարգով, նշում ենք միջակայքերը, երկրորդ տողում՝ դրանց համապատասխանող m_k թիվերը, իսկ երրորդում՝ $p_k^* = \frac{m_k}{n}$ հաճախությունները:

Միջակայք-ներ	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)	...	(a_{k-1}, a_k)	...	(a_{k-1}, a_k)
m_k	m_1	m_2	...	m_k	...	m_λ
p_k^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*	...	p_λ^*

Սա էլ հենց խմբավորումն է: Խմբավորումը ձևակերպում են երկրաչափորեն: Այդ կատարվում է հետևյալ ձևով: Ox առանցքի վրա նշում ենք $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots, a_\lambda$ կետերը: $[a_{k-1}, a_k]$ հատվածի վրա, որպես հիմքի, կառուցում ենք ուղղանկյուն, որի մակերեսը հավասար է p_k^* -ի: Ստացված պատկերը կոչվում է հիստոգրամ (Նկ. 448):



Նկ. 448

Խմբավորման և հիստոգրամի հիման վրա մոտավոր ձևով կառուցվում է բաշխման վիճակագրական ֆունկցիան:

Նյութի հետագա մշակումը կատարվում է հետևյալ ձևով: (a_{k-1}, a_k) միջակայքերի միջնակետերը նշանակում են \tilde{X}_k -ով և այս արժեքը համարում են չափման արդյունքի արժեք, որը կրկնվում է m_k անգամ: Դրանից հետո խմբավորումը ներկայացնող աղյուսակի փոխարեն կառուցվում է հետևյալ աղյուսակը:

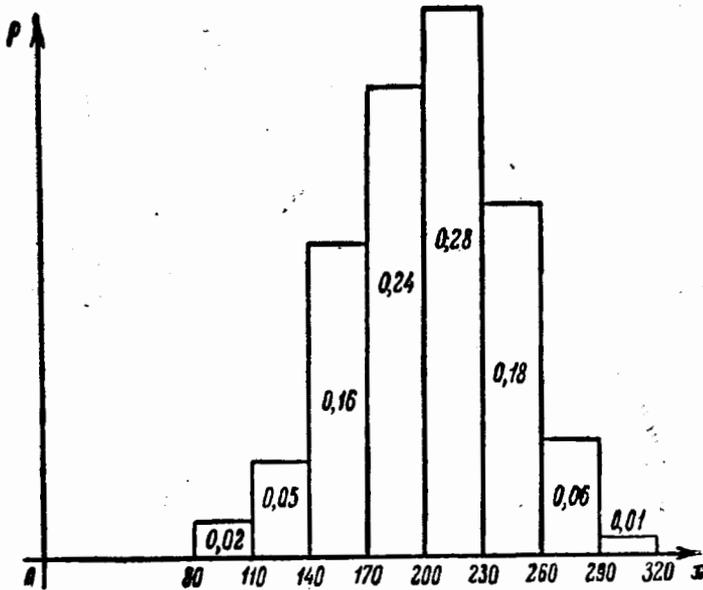
\tilde{x}_k	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	...	\tilde{x}_k	...	\tilde{x}_λ
m_k	m_1	m_2	...	m_k	...	m_λ
p_k^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*	...	p_λ^*

Տվյալ մշակումը կատարված է այն բանի հիման վրա, որ (a_{k-1} , a_k) միջակալքի բոլոր արժեքները մոտ են միմյանց և ուստի դրանց համարում են միջակալքի X_k արսցիսին հավասար:

Օրինակ: Տվյալ հեռավորությունը 100 անգամ չափելիս ստացված արդյունքների հիման վրա կառուցված է հետևյալ խմբավորումը.

Միջակալքներ	80-110	110-140	140-170	170-200	200-230	230-260	260-290	290-320
m_k	2	5	16	24	28	18	6	1
p_k^*	0,02	0,05	0,16	0,24	0,28	0,18	0,06	0,01

Խմբավորման հիման վրա կառուցենք վիճակագրական շարքի գրաֆիկական պատկերը (հիստոգրամը) (նկ. 449):



Նկ. 449

Այնուհետև կազմենք հետևյալ աղյուսակը.

\tilde{x}_k	95	125	155	185	215	245	275	305
m_k	2	5	16	24	28	18	6	1
p_k^*	0,02	0,05	0,16	0,24	0,28	0,18	0,06	0,01

§ 29. Չափվող մեծության հարմար արժեքի որոշումը

Դիցուք որևէ մեծություն չափելիս ստացել ենք X_1, X_2, \dots, X_n չափման արդյունքները: Այս արժեքները կարելի է դիտել որպես X պատահական մեծության մասնավոր արժեքներ: Իրրև որոշվող մեծության հարմար արժեքը ընդունում են ստացված արժեքների միջին թվաբանականը՝

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad (1)$$

m_x^* մեծությունն անվանում են վիճակագրական միջին:

Եթե չափումների n թիվը մեծ է, ապա օգտվում են §28-ում դիտարկված աղյուսակի նյութից, և m_x^* -ը հաշվում են այսպես.

$$m_x^* = \frac{\tilde{x}_1 m_1 + \tilde{x}_2 m_2 + \dots + \tilde{x}_k m_k + \dots + \tilde{x}_\lambda m_\lambda}{n}$$

կամ, օգտվելով § 28-ի (1) նշանակումներից,

$$m_x^* = \sum_{k=1}^{\lambda} \tilde{x}_k p_k^* \quad (2)$$

ստացված արժեքն անվանում են միջին կշռային:

Դիտող ութ լուն: Հետագայում ըստ (1) և (2) բանաձևերի հաշվումների արդյունքները կնշանակենք միևնույն տառով: Այս դիտողությունը կվերաբերի նաև (3) և (4) բանաձևերին:

Կարելի է ապացուցել, որ որոշ սահմանափակումների դեպքում վիճակագրական միջինն ըստ հավանականության, երբ $n \rightarrow \infty$, ձգտում է X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումին: Այս պնդումը հետևում է Չեբիշևի թեորեմից:

Այնուհետև սահմանենք վիճակագրական դիսպերսիան: Այն սահմանվում է այսպես*.

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2}{n} \quad (3)$$

Այս մեծությունը բնորոշում է դիսպերսիայի մեծությունը արժեքների ցրումը:

Եթե օգտվենք § 28-ի աղյուսակի նյութից, ապա վիճակագրական դիսպերսիան կորոշվի ըստ

$$D^* = \sum_{k=1}^{\lambda} (x_k - m_x)^2 p_k \quad (4)$$

բանաձևի: Այս բանաձևը նման է § 10-ի (2) բանաձևին:

Օրինակ: § 28-ի օրինակի վիճակագրական նյութերի հիման վրա որոշել վիճակագրական միջինը և վիճակագրական դիսպերսիան:

Լուծում: Ըստ (2) բանաձևի ստանում ենք.

$$m_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \sum_{k=1}^{\lambda} x_k p_k = 95 \cdot 0,02 + 125 \cdot 0,05 + 155 \cdot 0,16 + 185 \cdot 0,24 + 215 \cdot 0,28 + 245 \cdot 0,18 + 275 \cdot 0,06 + 305 \cdot 0,01 = 201,20.$$

Ըստ (4) բանաձևի ստանում ենք.

$$D^*[\bar{x}] = \frac{\sum_{k=1}^{\lambda} (x_k - m_x)^2}{n} = \sum_{k=1}^{\lambda} (x_k - m_x)^2 p_k = \sum_{k=1}^{\lambda} x_k^2 p_k - m_x^2 = 95^2 \cdot 0,02 + 125^2 \cdot 0,05 + 155^2 \cdot 0,16 + 185^2 \cdot 0,24 + 215^2 \cdot 0,28 + 245^2 \cdot 0,18 + 275^2 \cdot 0,06 + 305^2 \cdot 0,01 - (201,20)^2 = 1753,56.$$

§ 30. Բաշխման օրենքի պարամետրերի որոշումը: Լյապունովի թեորեմը: Լապլասի թեորեմը

Դիցուք \bar{x} -ը պատահական մեծություն է, օրինակ, չափման արդյունքն է, a -ն՝ չափվող մեծությունն է, δ -ն՝ չափման սխալը: Այդ դեպքում այս մեծությունները կապված են հետևյալ առնչությամբ՝

$$\delta = \bar{x} - a, \quad \bar{x} = a + \delta \quad (1)$$

* Իրականում վիճակագրական դիսպերսիան ավելի լավ է հաշվել ուրիշ բանաձևով, որը բերված է 587 էջում:

Բազմաթիվ փորձեր և դիտումներ ցույց են տալիս, որ չափումների սխալները սխառեմատիկ սխալի, այսինքն՝ այնպիսի սխալի, որը բոլոր չափումներում հաստատուն է (օրինակ, սարքի սխալը) և այնպիսի սխալի, որը չափումից-չափում փոխվում է ըստ հայտնի օրենքի, բացառելուց հետո ենթարկվում են բաշխման այնպիսի նորմալ օրենքի, որի բաշխման կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում: Այդ հաստատվում է նաև տեսական հիմնավորումներով:

Եթե պատահական մեծությունը մեծ թվով պատահական մեծությունների գումար է, ապա որոշ սահմանափակումների դեպքում այդ գումարը ենթարկվում է բաշխման նորմալ օրենքին: Այս պնդումը ձևակերպվում է, այսպես կոչված, կենտրոնական սահմանային թեորեմի տեսքով, որը պատկանում է Ա. Մ. Լյապունովին (1857—1918): Այստեղ այդ թեորեմը կբանաձևենք մի քիչ պարզեցված տեսքով:

Թեորեմ 1: Եթե $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ անկախ պատահական մեծություններն ունեն a մաթեմատիկական սպասումով և σ^2 դիսպերսիայով միևնույն բաշխման օրենքը (առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարելի է ենթադրել, որ $a=0$), ապա n -ը անսահմանափակո-

րեն մեծացնելիս $\bar{y}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i}{\sigma \sqrt{n}}$ գումարի բաշխման օրենքը որքան կամենանք քիչ է տարբերվում նորմալից (\bar{y}_n -ը նորմավորված է այնպես, որ $M[\bar{y}_n]=0, D[\bar{y}_n]=1$):

Լյապունովի թեորեմի գործնական նշանակությունը կայանում է հետևյալում: Դիտարկվում է որևէ պատահական մեծություն, օրինակ, ինչ-որ մեծության շեղումը տրվածից: Այդ շեղումը պայմանավորված է շատ գործոնների ներգործությամբ, որոնցից յուրաքանչյուրը տալիս է շեղման մի որոշ բաղադրիչ, օրինակ, հրաձգության դեպքում նշանառության և խոցման կետերի շեղումը հետևանք է նշանառության սխալի, հեռավորության որոշման սխալի, արկի պատրաստման սխալի և այլն: Բոլոր բաղադրիչները նույնիսկ մեզ հայտնի չեն, ինչպես նաև կարող են թանկատ լինել բաղադրիչ պատահական մեծությունների բաշխման օրենքները: Բայց Լյապունովի թեորեմից հետևում է, որ պատահական մեծությունը՝ ընդհանուր շեղումը ենթարկվում է նորմալ օրենքին:

Լյապունովի թեորեմից հետևում է, որ եթե $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ մի որոշ մեծության չափման արդյունքներն են (\bar{x}_i -ից յուրաքանչյուրը պատահական մեծություն է), ապա

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n}{n}$$

միջին թվաբանականը, որը պատահական մեծություն է, բավականաչափ մեծ n -ի դեպքում ենթարկվում է մի բաշխման օրենքի, որը որքան կամենանք մոտ է նորմալին, եթե X_i պատահական մեծությունները ենթարկվում են միևնույն բաշխման օրենքին:

Որոշ լրացուցիչ պայմանների դեպքում, որոնք, որպես կանոն, գործնականում դիտարկվող պատահական մեծությունների համար տեղի ունեն, թեորեմը մնում է ճիշտ նաև տարբեր բաշխման օրենքներ ունեցող պատահական մեծությունների դումարի համար: Ինչպես ցույց է տալիս փորձը, գումարելիների 10-ի կարգի թվի դեպքում կարելի է նրանց գումարը համարել նորմալ բաշխված:

\bar{a} -ով և σ^2 -ով նշանակենք մասթեմատիկական սպասումի և դիսպերսիայի մոտավոր արժեքները: Այդ դեպքում կարող ենք մոտավորապես գրել $\bar{\sigma}$ և \bar{X} պատահական մեծությունների բաշխման օրենքները.

$$\bar{f}(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}, \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{a})^2}{2\sigma^2}}, \quad (3)$$

\bar{a} պարամետրը փորձնական տվյալների հիման վրա որոշվում է § 29-ի (1) բանաձևով՝

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (4)$$

Այդ հետևում է, այսպես կոչված, Չերիշևի (1821—1894) թեորեմից: Կանգ չառնելով ապացուցման վրա, նշենք, որ ավելի բնական կլինի σ պարամետրը որոշել ոչ թե ըստ § 29-ի (3) բանաձևի, այլ ըստ

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{a})^2}{n-1} \quad (5)$$

բանաձևի:

Նշենք, որ (5) և § 29-ի (3) բանաձևերի աջ մասերը տարբերվում են $\frac{n}{n-1}$ բազմապատկիչով, որը գործնական խնդիրներում մոտ է 1-ին:

Օրինակ 1, § 28-ի օրինակում բերված չափումների արդյունքների և

§ 29-ի օրինակում բերված հաշվումների հիման վրա գրել պատահական մեծությունների բաշխման օրենքի արտահայտությունը:

Հուլիս 1901 թ. § 29-ի օրինակում բերված հաշվումների հիման վրա ստանում ենք.

$$\bar{a} = m_x = 201, \\ \bar{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{100}{99} \cdot 1754 = 1771, \\ \bar{\sigma} = \sqrt{1771} \approx 41.$$

Տեղադրելով (3) բանաձևի մեջ, ստանում ենք.

$$f(x) = \frac{1}{41\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-201)^2}{2 \cdot 1771}}$$

Դիտողություն: Եթե որոշ X պատահական մեծության համար ստացված է բաշխման վիճակագրական ֆունկցիան, ապա այն հարցը, թե պետք է արդյոք համարել, որ տվյալ պատահական մեծությունը ենթարկվում է բաշխման նորմալ օրենքին թե ոչ, երբեմն լուծում են այսպես:

Դիցուք ունենք պատահական մեծություններ X_1, X_2, \dots, X_n արժեքները: (4) բանաձևով որոշում ենք \bar{a} միջին թվաբանական արժեքը: Որոշում ենք պատահական մեծություններ Y_1, Y_2, \dots, Y_n կենտրոնադիր արժեքները:

Y_i արժեքների բացարձակ մեծությունները դասավորում են շարքի ձևով, աճողական կարգով: Եթե n -ը կենտ է, ապա իբրև E_d միջին շեղում կամ միջին սխալ ընդունում են կազմած բացարձակ արժեքների շարքի այն $|Y_{d+1}|$ բացարձակ մեծությունը, որը գրավում է $\frac{n-1}{2} + 1$ տեղը, եթե n -ը զույգ է, ապա որպես E_{d+1} ընդունում են

$\frac{n}{2}$ և $\frac{n}{2} + 1$ համարներով տեղերում գտնվող բացարձակ մեծությունների միջին թվաբանականը:

Այնուհետև,

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|}{n} \quad (6)$$

բանաձևով կազմում ենք միջին թվաբանական սխալը: Ըստ (5) բանաձևի որոշում ենք

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n-1}} \quad (7)$$

միջին քառակուսային շեղումը: Այնուհետև որոշում ենք $\frac{E_d}{d}$ և $\frac{E_d}{\sigma}$ հա-

րաբերությունները:

Այն պատահական մեծություն համար, որը ենթարկված է նոր-

մալ օրենքին, $\frac{E}{d}$ և $\frac{E}{\sigma}$ հարաբերությունները, համապատասխանաբար,

հավասար են 0,8453 և 0,6745 (տես § 22-ի (6) բանաձևը): Եթե $\frac{E_d}{d}$ և $\frac{E_d}{\sigma}$ հարաբերությունները 0,8453 և 0,6745 թվերից տարբերվում են 10% -ի մեծությամբ, ապա պայմանականորեն ընդունում են, որ y պատահական մեծությունը ենթարկվում է նորմալ օրենքին: Կենտրոնական սահմանային թեորեմի հետևանք է հանդիսանում Լապլասի կարևորագույն թեորեմն այն բանի հավանականություն մասին, որ պատահույթը երևան կգա ոչ պակաս քան α անգամ և ոչ ավելի քան β անգամ: Բերենք այդ թեորեմն առանց ապացուցման:

Թեորեմ 2 (Լապլասի): Եթե կատարվում են n անկախ փորձարկումներ, որոնցից յուրաքանչյուրում A պատահույթի երևան գալու հավանականությունը p է, ապա նշմարիտ է հետևյալ առնչությունը:

$$P(\alpha < m < \beta) = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2npq}} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}} \right) \right], \quad (8)$$

որտեղ m -ը A պատահույթի երևումների թիվն է, $q=1-p$, $P(\alpha < m < \beta)$ -ն՝ այն բանի հավանականությունը, որ A պատահույթի երևումների թիվը պարփակված է α և β թվերի միջև:

$\Phi(x)$ ֆունկցիան սահմանված է էջ 556-ում:

Ցույց տանք Լապլասի թեորեմի կիրառությունը խնդիրների լուծման համար:

Օրինակ 2: Որոշ դետալներ արտադրելիս խոտանի հավանականություններ՝ $p=0,01$: Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ 1000 դետալի թվում խոտանվածները 20-ից ավելի չեն:

Լուծում: Տվյալ դեպքում

$$n=1000, \quad p=0,01, \quad q=0,99, \quad \alpha=0, \quad \beta=20.$$

Այնուհետև գտնում ենք.

$$\frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}} = \frac{0 - 10}{\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 9,9}} = -2,25,$$

$$\frac{\beta - np}{\sqrt{2npq}} = \frac{20 - 10}{\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 9,9}} = 2,25.$$

Հետ (8) բանաձևի ստանում ենք.

$$P(0 \leq m \leq 20) = \frac{1}{2} [\Phi(2,25) - \Phi(-2,25)] = \Phi(2,25),$$

Հետ $P(x)$ ֆունկցիայի աղյուսակների գտնում ենք.

$$P(0 \leq m \leq 20) = 0,9985,$$

Նշենք, որ Բեռնուլիի, Լյապունովի, Չեֆրիի, Լապլասի թեորեմները, որոնց մասին խոսվել է վերը, կազմում են այսպես կոչված հավանականությունների տեսության մեծ թվերի օրենքը:

Վարժություններ XX գլխի վերաբերյալ

1. Միաժամանակ նետվում են երկու խաղողիչներ: Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ նրանց վրա շարժված միավորների գումարը հավասար է 5-ի: Պատ. $\frac{1}{9}$:

2. Վիճակագրում կա 10 տոմս՝ 5-ը շահող և 5-ը շահող: Վերցնում ենք երկու տոմս: Ինչպիսի՞ն է շահելու հավանականությունը: Պատ. $\frac{7}{9}$:

3. Խաղողիչը նետվում է 5 անգամ: Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ 4 միավորը գոնե մեկ անգամ երևան չի գա: Պատ. 0,99987:

4. Հրացանի կրակոցով ինքնաթիռն հարվածելու հավանականությունը հավասար է 0,004: Քանի հրածիգներ պետք է միաժամանակ կրակեն, որպեսզի հարվածելու հավանականությունը մեծ լինի 70 %-ից: Պատ. $n > 300$:

5. Երկու հրանոթից միեւնոյն նպատակահետի վրա կատարվում են մեկական կրակոց: Առաջին հրանոթից հարվածելու հավանականությունը 0,7 է, երկրորդից՝ 0,6: Որոշել գոնե մեկ անգամ հարվածելու հավանականությունը: Պատ. 0,88:

6. 100 հատ քարտերի վրա գրված են 1-ից մինչև 100 թվերը: Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ պատահաբար վերցրած քարտի վրա կլինի 5 թվանշանը: Պատ. 0,19:

7. Կա շորս մեքենա, Այն բանի հավանականությունը, որ մեքենան կամայական t պահին աշխատում է, հավասար է 0,9: Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ t պահին աշխատում է գոնե մեկ մեքենա: Պատ. 0,9999:

8. Նպատակահետը խոցելու հավանականությունը՝ $p=0,9$: Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ երեք կրակոցի դեպքում կլինի երեք խոցում: Պատ. $\approx 0,73$:

9. Մի արկղի դետալների 30 %-ը, մյուս արկղի դետալների 40 %-ը առաջին տեսակի են: Յուրաքանչյուր արկղից հանվում է մեկական դետալ: Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ հանված երկու դետալներն էլ առաջին տեսակի են: Պատ. 0,12:

10. Մի խանդիվ կազմված է երեք դետալից: Առաջին դետալը պատրաստելիս խոտանի հավանականությունը՝ $p_1=0,008$, երկրորդ դետալը խոտան լինելու հավանականությունը՝ $p_2=0,012$, երրորդ դետալին՝ $p_3=0,01$: Որոշել ամբողջ մեխանիզմը պատրաստելիս խոտանի հավանականությունը: Պատ. 0,03:

11. Մեկ կրակոցով խոցելու հավանականությունը՝ $p=0,6$, Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ երեք կրակոցից զոնե մեկը կխոցի նպատակակետը: Պատ. 0,936:

12. 350 մեխանիզմների մեջ 160-ը առաջին տեսակի է, 110-ը՝ երկրորդ տեսակի և 80-ը՝ երրորդ տեսակի: Առաջին տեսակի մեխանիզմների մեջ խոտանի հավանականությունը 0,01 է, երկրորդ տեսակի մեջ՝ 0,02, երրորդ տեսակի մեջ՝ 0,04: Որոշել հավանականությունը, որ վերցրած մեկ մեխանիզմը կլինի սարքին: Պատ. 0,98:

13. Դիցուք հայտնի է, որ հրաձգությանը նախապատրաստվելիս թույլ տրված սխալների հետևանքով արկերի ցրման կենտրոնը (ԱՅԿ) առաջին կրակոցի ժամանակ ըստ հեռավորության կարող է գտնվել հինգ կետերից որևէ մեկում: Հավանականությունն այն բանի, որ ԱՅԿ-ն կգտնվի այդ կետերում, համապատասխանաբար, հավասար են $p_1=0,1$, $p_2=0,2$, $p_3=0,4$, $p_4=0,2$, $p_5=0,1$: Հայտնի է նաև, որ եթե ԱՅԿ-ն գտնվի առաջին կետում, ապա ըստ հեռավորության նպատակակետին խփելու հավանականությունը հավասար կլինի $p_1=0,15$ և մնացած կետերի համար, համապատասխանաբար, $p_2=0,25$, $p_3=0,60$, $p_4=0,25$, $p_5=0,15$:

Նշանացույցի նախնական դիրքով կատարված է կրակոց, որի հետևանքով ըստ հեռավորության ոտացված է վրելում: Որոշել, թե ինչի է հավասար հավանականությունն այն բանի, որ կրակոցը կատարվել է նշանացույցի այն դիրքով, որը համապատասխանում է ԱՅԿ-ի նշած հինգ կետերին, այսինքն՝ որոշել փորձարկումից (կրակոցից) հետո ԱՅԿ-ի դիրքում տարբեր սխալների մասին հիպոթեզների հավանականությունները, Պատ. 0,85; 0,75; 0,40; 0,75; 0,85:

14. Խաղոսկրը նետվում է 5 անգամ: Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ 2 անգամ կրացվի 6 միավորը և 3 անգամ էլ՝ մյուս միավորները: Պատ. $\frac{625}{3888}$:

15. Կատարված է 6 կրակոց: Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ ոչ բոլոր կրակոցները կտան գերթոնիչ (перелет), եթե գերթոնիչի հավանականությունը՝ $p=\frac{1}{2}$, թերթոնիչի (недолет) հավանականությունը՝ $q=\frac{1}{2}$: (հրաձգողությունը կատարվում է շնորհ նպատակակետի վրա): Պատ. $\frac{31}{32}$:

16. Նախորդ խնդրի պայմանների համար որոշել այն բանի հավանականությունը, որ կլինի 3 գերթոնիչ և 3 թերթոնիչ: Պատ. $\frac{5}{16}$:

17. Գտնել խաղոսկրի մեկ նետման ժամանակ միավորների թվի մաթեմատիկական սպասումը: Պատ. $\frac{7}{2}$:

18. Գտնել այն X պատահական մեծության դիստրիբուցիան, որը տրված է հետևյալ բաշխման աղյուսակով.

x	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Պատ. 1,05:

19. Մեկ փորձարկման ընթացքում A պատահույթի երևան գալու հավանականությունը հավասար է 0,4: Կատարվում է 5 անկախ փորձարկում: Գտնել A պատահույթի երևումների թվի դիստրիբուցիան: Պատ. 1,2:

20. Թիրախի վրա կատարվում է հրաձգություն, խոցելու հավանականությունը 0,8 է, հրաձգությունը շարունակվում է մինչև առաջին խոցումը, հա 4 արկ: Որոշել օգտագործված արկերի թվի մաթեմատիկական սպասումը: Պատ. 1,242:

21. Ինչ-որ «բարակ» նշանակետի վրա կատարվող հրաձգության ժամանակ գերթոնիչի հավանականությունը՝ $p=\frac{1}{4}$, թերթոնիչի հավանականությունը՝ $q=\frac{3}{4}$: Որոշել վեց կրակոցի դեպքում 2 գերթոնիչի և 4 թերթոնիչի համակցության հավանականությունը: Պատ. 0,297:

22. Դետալը խոտան լինելու հավանականությունը՝ $p=0,01$: Ինչպիսի՞ն է այն բանի հավանականությունը, որ 10 դետալից կազմված խմբաբանակում կլինեն 0, 1, 2, 3 խոտան դետալներ: Պատ. 0,9045, 0,0904, 0,0041, 0,0011:

23. Գտնել 10 կրակոցի դեպքում զոնե մեկ անգամ նպատակակետը խոցելու հավանականությունը, եթե մեկ կրակոցով նպատակակետը խոցելու հավանականությունը՝ $p=0,15$: Պատ. $1-(0,85)^{10} \approx 0,803$:

24. X պատահական մեծությունը տրված է հետևյալ բաշխման ինտեգրալային ֆունկցիայով՝

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եբբ } x < 0, \\ x, & \text{եբբ } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{եբբ } 1 < x. \end{cases}$$

Գտնել $f(x)$ բաշխման խտությունը, $M[x]$ -ը և $D[x]$ -ը:

$$\text{Պատ. } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{եբբ } x < 0, \\ 1, & \text{եբբ } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{եբբ } 1 < x. \end{cases} \quad M[x] = \frac{1}{2}, \quad D(x) = \frac{1}{12}$$

25. X պատահական մեծությունը ենթարկվում է այնպիսի նորմալ բաշխման օրենքի, որի մաթեմատիկական սպասումն է 30, իսկ դիսպերսիան՝ 100: Գտնել այն բանի հավանականությունը, որ պատահական մեծության արժեքը պարփակված է (10, 50) միջակայքում: Պատ. 0,954:

26. Պատահական մեծությունը ենթարկված է այնպիսի բաշխման նորմալ օրենքի, որի դիսպերսիան՝ $\sigma^2=0,16$: Գտնել այն բանի հավանականությունը, որ պատահական մեծության արժեքը մաթեմատիկական սպասումից բացարձակ մեծության վրա կտարբերվի ոչ ավելի, քան 0,3-ը: Պատ. 0,5468:

27. X պատահական մեծությունը ենթարկված է $a=0,3$ ցրման կենտրոնով և $h=2$ ճշտության չափով բաշխման նորմալ օրենքին: Գտնել (0,5; 2,0) միջակայքն ընկնելու հավանականությունը: Պատ. 0,262:

28. 4 մ լայնությամբ շերտի վրա կատարվում է հրաձգություն: Նշանառություն սխտեմատիկ սխալը 1 մ է (սլակասորդով): Հավանական շեղումը 5 մ է: Գտնել ցրման նորմալ օրենքի դեպքում շերտի մեջ ընկնելու հավանականությունը: Պատ. 0,211:

29. Հրաձգությունը կատարվում է $x_1=10$ մ, $x_2=20$ մ, $y_1=15$ մ, $y_2=35$ մ ուղղիներով սահմանափակված ուղղանկյան վրա այն ուղիղի ուղղությամբ, որը կիսում է ուղղանկյան փոքր կողմը: Հարթության վրա նորմալ բաշխման հավա-

նական շեղումներն են՝ $E_x=5$ մ, $E_y=10$ մ: Գտնել մեկ կրակոցով ուղղանկյան մեջ ընկնելու հավանականությունը: Պատ. 0,25:

30. Տրված 20 սմ երկարություն ունեցող դետալի պատրաստման ժամանակ կատարած սխալը պատահական մեծություն է, որը ենթարկված է նորմալ օրենքին ($\sigma=0,2$ սմ): Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ պատրաստված դետալի երկարությունը տրվածից կտարբերվի 0,3 սմ-ից պակասով: Պատ. 0,866:

31. Նախորդ խնդրի պայմաններում որոշել դետալը պատրաստելիս թույլ տրված այն սխալը, որը չի գերազանցվի 0,95 հավանականությամբ: Պատ. 0,392:

32. X պատահական մեծությունը բաշխված է ըստ $M[X]=5$ և $\sigma=2$ պարամետրեր ունեցող նորմալ օրենքի: Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ պատահական մեծությունը կլինի (1, 10) միջակայքում: Կատարել դժագիրը: Պատ. 0,971:

33. Ավտոմատի պատրաստած դետալի երկարությունը պատահական մեծություն է, որը բաշխված է ըստ $M[X]=15$, $\sigma=0,2$ պարամետրեր ունեցող նորմալ օրենքի: Գտնել խոտանի հավանականությունը, եթե դետալի թույլատրելի չափերը պետք է լինեն $15 \pm 0,3$: 0,97 հավանականությամբ պատրաստվող դետալի երկարության ինչպիսի ճշտություն կարելի է երաշխավորել: Կատարել դժագիրը:

34. Որոշ մեծություն չափելիս ստացվել է հետևյալ վիճակագրական շարքը.

x	1	2	3	4
Հաճախահիություն	20	15	10	5

Որոշել վիճակագրական միջինը և վիճակագրական զիսպերսիան: Պատ. 2; 1:

35. Չափման արդյունքները տրվում են հետևյալ աղյուսակով.

x	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28
Հաճախահիություն	4	18	33	35	9	1

Որոշել \bar{a} վիճակագրական միջինը և σ^2 վիճակագրական զիսպերսիան: Պատ. 0,226; 0,004:

36. Դետալների արտադրության ժամանակ խոտանի հավանականությունը՝ $p=0,02$: Գտնել այն բանի հավանականությունը, որ 400 դետալների խմբաքանակում կլինեն 7-ից մինչև 10 խոտանված դետալներ: Պատ. 0,414:

37. Նպատակակետը խոցելու հավանականությունը՝ $p=\frac{1}{2}$: Ինչպիսի՞ն է այն բանի հավանականությունը, որ 250 կրակոցի դեպքում նպատակակետը կխոցեն 100-ից մինչև 150 կրակոց: Պատ. 0,998:

38. Որոշ դետալներ պատրաստելիս խոտանի հավանականությունը՝ $p=0,02$: Որոշել այն բանի հավանականությունը, որ վերջրած 1000 դետալի մեջ խոտանված դետալները 25-ից ավելի չեն: Պատ. 0,87:

XXI Գ Լ Ո Ի Ե

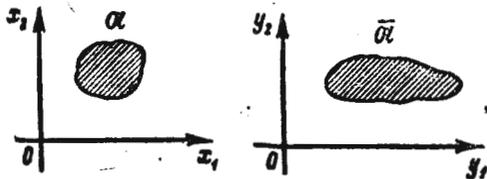
ՄԱՏՐԻՑԱՆԵՐ: ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԳՐԱՌՈՒՄԸ

§ 1. Գծային ձևափոխություններ: Մատրիցա

Դիտարկենք P և Q երկու հարթությունները: Դիցուք P հարթության վրա տրված է $x_1 O x_2$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը և Q հարթության վրա՝ $y_1 O y_2$ կոորդինատային համակարգը: P և Q հարթությունները կարող են համընկնել: Կոորդինատային համակարգերը նույնպես կարող են համընկնել: Դիտարկենք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \right\} (1)$$

(1) հավասարությունների հիման վրա $x_1 O x_2$ հարթության լուրաքանչյուր $M(x_1, x_2)$ կետին համապատասխանում է $y_1 O y_2$ հարթության $\bar{M}(y_1, y_2)$ կետը:



Նկ. 450

Ասում են, որ (1) հավասարումները կոորդինատների գծային ձևափոխություններ են: Այդ հավասարումները $(x_1 O x_2)$ հարթությունը

արտապատկերում են (y_1, y_2) հարթություն վրա (պարտադիր չէ ամբողջ հարթություն վրա): Քանի որ (1) հավասարումները գծային են, ապա արտապատկերումը կոչվում է գծային արտապատկերում:

Եթե (x_1, x_2) հարթություն վրա դիտարկենք որոշ \bar{U} տիրույթ, ապա (1) հավասարումների միջոցով կորոշվի (y_1, y_2) հարթության \bar{U} կետերի բազմությունը (նկ. 450):

Իհարկո՞ւթյուն: Նշենք, որ դիտարկում են նաև

$$y_1 = \varphi(x_1, x_2), \quad y_2 = \psi(x_1, x_2)$$

ոչ գծային արտապատկերումները:

Այստեղ կառահմանափակվենք միայն գծային արտապատկերումների քննարկմամբ:

(1) արտապատկերումը լիովին որոշվում է $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ գործակիցների միջոցով:

Այդ գործակիցներից կազմված ուղղանկյունաձև աղյուսակը գրվում է այսպես.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{կամ} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

որը կոչվում է (1) արտապատկերման մատրիցա: $\| \quad \|$ կամ () սիմվոլները մատրիցայի սիմվոլներն են:

Մատրիցաները նշանակում են նաև մեկ տառով, օրինակ, A կամ $\|A\|$,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

Այս դետերմինանտը, որը կազմված է մատրիցայի տարրերից՝ առանց նրանց տեղափոխման (նշանակենք այն $\Delta(A)$ -ով)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (3)$$

կոչվում է այդ մատրիցայի դետերմինանտ:

Օրինակ 1: Հետևյալ արտապատկերումը՝

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, \\ y_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{aligned}$$

անկյունով պտույտ է: Այս արտապատկերման ժամանակ (ρ, θ) բևեռային կոորդինատներով յուրաքանչյուր M կետը անցնում է $(\rho, \theta + \alpha)$ բևեռային կոորդինատներով \bar{M} կետի, եթե (x_1, x_2) և (y_1, y_2) համակարգերը համընկնում են (նկ. 451):

Այդ արտապատկերման մատրիցան է

$$A = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix},$$

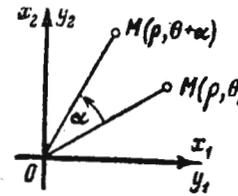
Օրինակ 2: Հետևյալ արտապատկերումը

$$\begin{aligned} y_1 &= kx_1, \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

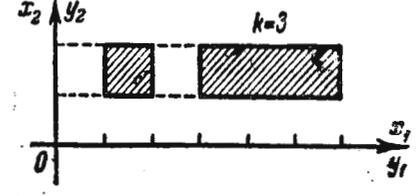
Ox_1 առանցքի երկայնքով կատարվող ձգում է՝ k ձգման գործակցով (նկ. 452):

Այդ արտապատկերման մատրիցան է

$$A = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$



նկ. 451



նկ. 452

Օրինակ 3: Հետևյալ արտապատկերումը՝

$$\begin{aligned} y_1 &= kx_1, \\ y_2 &= kx_2 \end{aligned}$$

ձգում է k անգամ ինչպես Ox_1 առանցքի ուղղությամբ, այնպես էլ Ox_2 առանցքի ուղղությամբ (նկ. 453):

Այս արտապատկերման մատրիցան է

$$A = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix},$$

Օրինակ 4: Հետևյալ ձևափոխությունը

$$\begin{aligned} y_1 &= -x_1, \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

կոչվում է հայելային արտապատկերում Ox_2 առանցքից (նկ. 454): Ձևափոխության մատրիցան է՝

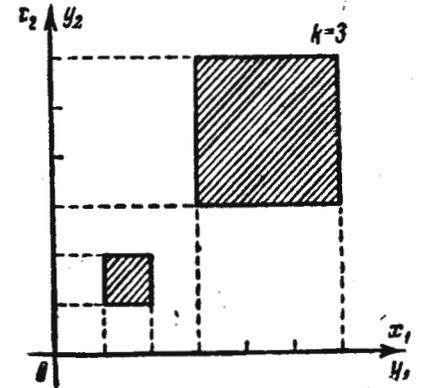
$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

Օրինակ 5: Հետևյալ ձևափոխությունը՝

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \lambda x_2, \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

կոչվում է տեղաշարժ Ox_2 առանցքի երկայնքով (նկ. 455): Այս ձևափոխության մատրիցան է՝

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$



նկ. 453

կարելի է դիտարկել փոփոխականների ցանկացած թվով գծային ձևափոխություններ:

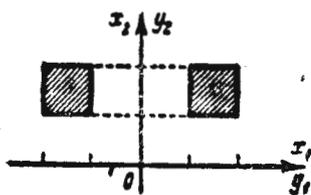
Այսպես,

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

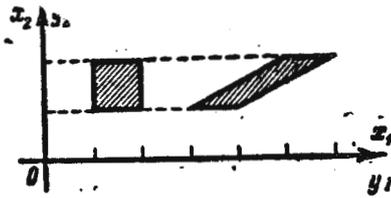
ձևափոխությունը (x_1, x_2, x_3) եռաչափ տարածության արտապատկերումն է (y_1, y_2, y_3) եռաչափ տարածությունում, Այս ձևափոխության մատրիցան կլինի.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

կարելի է քննարկել ոչ քառակուսային մատրիցաներով (այսինքն՝



Նկ. 454



Նկ. 455

անհավասար թվով տողեր և սյուներ ունեցող) գծային ձևափոխություններ: Այսպես,

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{33}x_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ձևափոխությունը $x_1 \times x_2$ հարթության արտապատկերումն է (y_1, y_2, y_3) տարածության մեջ կետերի մի որոշ բազմություն վրա:

Այս ձևափոխության մատրիցան կլինի.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

Քննարկում են ցանկացած թվով տողեր և ցանկացած թվով սյուներ ունեցող մատրիցաներ: Մատրիցաները գծային ձևափոխություններից բացի օգտագործվում են նաև ուրիշ բաժիններում: Ուստի մատրիցան ինքնուրույն մաթեմատիկական հասկացություն է, որը նման է դետերմինանտի հասկացությանը: Ստորև ձևակերպենք մատրիցայի հասկացության հետ կապված մի քանի սահմանումներ:

§ 2. Մատրիցայի գաղափարի հետ կապված ընդհանուր սահմանումներ

Սահմանում 1: $m \times n$ թվերից կազմված m տող և n սյուն պարունակող

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

ուղղանկյուն աղյուսակը կոչվում է մատրիցա: Մատրիցան կրճատ նշանակում են այսպես.

$$A = \|a_{ij}\| \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

որտեղ a_{ij} -ն մատրիցայի անդամներն են:

Եթե մատրիցայի տողերի թիվը հավասար է սյուների թվին՝ $m=n$, ապա այն կոչվում է քառակուսային.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

Սահմանում 2: Քառակուսային մատրիցայի տարրերից (առանց տեղափոխման) կազմված դետերմինանտը կոչվում է մատրիցայի դետերմինանտ. այն կնշանակենք $\Delta(A)$ -ով.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

Նկատենք, որ ոչ քառակուսային մատրիցան դետերմինանտ չունի:

Սահմանում 3: A^* մատրիցան կոչվում է A մատրիցայի նկատմամբ արանսպոնացված, եթե A մատրիցայի սյուները հանդիսանում են A^* մատրիցայի տողեր:

Օրինակ. ենթադրենք

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

A^* արանսպոնացված մատրիցան կլինի՝

$$A^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix},$$

Սահմանում 4: A քառակուսային մատրիցան կոչվում է գլխավոր անկյունագծի նկատմամբ սխեմարիկ, եթե $a_{ij} = a_{ji}$: Ակն-

հայտ է, որ սիմետրիկ մատրիցան համընկնում է իր տրանսպոնացվածի հետ:

Սահմանում 5: Այն քառակուսային մատրիցան, որի գլխավոր անկյունագծի վրա չգտնվող բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի, կոչվում է անկյունագծային: Եթե անկյունագծային մատրիցայի գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող բոլոր տարրերը հավասար են մեկի, ապա մատրիցան կոչվում է միավոր: Այն նշանակելու ենք E տառով:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

Սահմանում 6: Դիտարկում են մեկ սյունից կամ տողից կազմված մատրիցաներ:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad Y = \|y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m\|: \quad (6)$$

Առաջին մատրիցան կոչվում է սյունային, երկրորդը՝ աղային:

Սահմանում 7: A և B երկու մատրիցաները համարվում են հավասար, եթե նրանք ունեն միևնույն քանակությամբ տողեր և սյուներ և նրանց համապատասխան տարրերը հավասար են, այսինքն՝

$$A = B \quad (7)$$

կամ

$$\|a_{ij}\| = \|b_{ij}\| \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

եթե

$$a_{ij} = b_{ij}: \quad (9)$$

Երբեմն հարմար է լինում սյունային մատրիցան նույնացնել համապատասխան չափումների թվով տարածության վեկտորի հետ, որտեղ մատրիցայի տարրերը վեկտորի պրոյեկցիաներն են համապատասխան առանցքների վրա: Այսպես, կարող ենք գրել՝

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 i + x_2 j + x_3 k: \quad (10)$$

Երբեմն հարմար է լինում տողային մատրիցան ևս նույնացնել վեկտորի հետ:

§ 3. Հակադարձ ձևափոխություն

§ 1-ի (1) հավասարումներից՝

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

հետևում է, որ $x_1 \circ x_2$ հարթության արտապատկերումը $y_1 \circ y_2$ հարթության վրա միարժեք է, քանի որ $x_1 \circ x_2$ հարթության չորս քանչյուր կետին համապատասխանում է $y_1 \circ y_2$ հարթության մեկ կետ:

Եթե ձևափոխության մատրիցայի դետերմինանտը զրոյից տարբեր է՝

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ կամ } a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0, \quad (2)$$

ապա, ինչպես հայտնի է, (1) հավասարումների համակարգը x_1 -ի և x_2 -ի նկատմամբ ունի միակ լուծումը:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

կամ բացված տեսքով՝

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{22}}{\Delta} y_1 + \frac{-a_{12}}{\Delta} y_2, \\ x_2 &= \frac{-a_{21}}{\Delta} y_1 + \frac{a_{11}}{\Delta} y_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

($y_1 \circ y_2$) հարթության չորս քանչյուր $M(y_1, y_2)$ կետին համապատասխանում է ($x_1 \circ x_2$) հարթության որոշակի $M(x_1, x_2)$ կետը: Այս դեպքում (1) արտապատկերումը կոչվում է փոխմիարժեք (չեափոխված):

(y_1, y_2) կոորդինատների ձևափոխությունը (x_1, x_2) կոորդինատների կոչվում է հակադարձ: Այս դեպքում հակադարձ արտապատկերումը գծային է: Նկատենք, որ գծային չեափոխված արտապատկերումը կոչվում է աֆինական:

Հակադարձ ձևափոխության մատրիցան կնշանակենք A^{-1} -ով:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{-a_{12}}{\Delta} \\ \frac{-a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

Եթե A մատրիցայի դետերմինանտը հավասար է զրոյի՝

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0, \quad (5)$$

ապա (1) ձևափոխությունը կոչվում է եավոյսված: Այն փոխարժեք չէ:

Ապացուցենք այդ: Դիտարկենք երկու հնարավոր դեպք.

1) Եթե $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$, ապա ցանկացած x_1 -ի և x_2 -ի համար կլինեն $y_1 = 0$, $y_2 = 0$: Այս դեպքում ($x_1 \circ x_2$) հարթության ցանկացած (x_1, x_2) կետն անցնում է ($y_1 \circ y_2$) հարթության կոորդինատների սկզբնակետը:

2) Իրցուք ձևափոխության գործակիցներից զոնն մեկը տարբեր է զրոյից, օրինակ, $a_{11} \neq 0$:

(1) հավասարություններից առաջինը բազմապատկելով a_{21} -ով, երկրորդը a_{11} -ով, այնուհետև հանելով և հաշվի առնելով (5)-ը, կըստանանք.

$$\frac{\begin{array}{l} a_{21} | y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ a_{11} | y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \\ \hline a_{21}y_1 - a_{11}y_2 = 0 \end{array}}{\quad} \quad (6)$$

Եվ այսպես, ցանկացած x_1, x_2 դեպքում y_1 և y_2 արժեքների համար ստանում ենք (6) հավասարությունը, այսինքն՝ $x_1 \circ x_2$ հարթության համապատասխան կետն ընկնում է $y_1 \circ y_2$ հարթության (6) ուղիղի վրա: Ակնհայտ է, որ այս արտապատկերումը փոխարժեք չէ, քանի որ $y_1 \circ y_2$ հարթության (6) ուղիղի լուրջքանչյուր կետին համապատասխանում է $x_1 \circ x_2$ հարթության այն կետերի բազմությունը, որոնք ընկած են $y = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ ուղիղի վրա:

Երկու դեպքում էլ արտապատկերումը փոխարժեք չէ:

Օրինակ 1: Հետևյալ ձևափոխությունը՝

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2, \\ y_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

փոխարժեք է, քանի որ A ձևափոխության $\Delta(A)$ դետերմինանտը տարբեր զրոյից.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Հակադարձ ձևափոխությունը կլինի.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2, \\ x_2 &= \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2. \end{aligned}$$

(4) Ըննաձևին համապատասխան, հակադարձ ձևափոխության մատրիցան կլինի.

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix},$$

Օրինակ 2: Հետևյալ դժային ձևափոխությունը

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2, \\ y_2 &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

էավոյսված է, քանի որ ձևափոխության մատրիցայի դետերմինանտը՝

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Այս ձևափոխությունը (x_1, x_2) հարթության բոլոր կետերը փոխադրում է (y_1, y_2) հարթության $y_2 - 2y_1 = 0$ ուղիղին:

§ 4. Գործողությունների ձևափոխաների նկատմամբ: Մատրիցաների գումարումը

Սահմանում 1: $\|a_{ij}\|$ և $\|b_{ij}\|$ տղերի միևնույն քանակություն և սյուների միևնույն քանակություն ունեցող երկու մատրիցաների գումար կոչվում է այնպիսի $\|c_{ij}\|$ մատրիցան, որի c_{ij} տարրը $\|a_{ij}\|$ և $\|b_{ij}\|$ մատրիցաների համապատասխան տարրերի $a_{ij} + b_{ij}$ գումարն է, այսինքն՝

$$\|a_{ij}\| + \|b_{ij}\| = \|c_{ij}\|, \quad (1)$$

եթե

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n); \quad (2)$$

Օրինակ 1,

$$\left\| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{array} \right\|,$$

Համանման ձևով սահմանվում է երկու մատրիցաների տարբերությունը:

Երկու մատրիցաների գումարի այսպիսի սահմանման նպատակահարմարությունը, մասնավորապես, հետևում է վեկտորի՝ որպես սյունալին մատրիցայի ներկայացումից:

Մատրիցայի բազմապատկումը թվով: Մատրիցան λ թվով բազմապատկելու համար պետք է այդ թվով բազմապատկել մատրիցայի լուրջքանչյուր տարրը.

$$\lambda \|a_{ij}\| = \|\lambda a_{ij}\|. \quad (3)$$

Եթե λ -ն ամբողջ է, ապա (3) բանաձևը ստացվում է որպես մատրիցաների զումարման կանոնի հետևանք.

Օրինակ 2.

$$\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix},$$

Երկու մատրիցաների արտադրյալը Դիցուք ունենք X_1Ox_2 հարթությունը Y_1Oy_2 հարթությունը ձևափոխող զծային ձևափոխությունը՝

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}Y_2, \\ Y_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

որի ձևափոխության մատրիցան է՝

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

Դիցուք այնուհետև կատարված է Y_1Oy_2 հարթության զծային ձևափոխությունը Z_1Oz_2 հարթության՝

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= b_{11}Y_1 + b_{12}Y_2, \\ Z_2 &= b_{21}Y_1 + b_{22}Y_2 \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

որի ձևափոխության մատրիցան է՝

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

Պահանջվում է որոշել X_1Ox_2 հարթությունը Z_1Oz_2 հարթության ձևափոխության մատրիցան: (4) արտահայտությունները տեղադրելով (6) հավասարությունների մեջ, ստանում ենք.

$$\begin{aligned} Z_1 &= b_{11}(a_{11}X_1 + a_{12}X_2) + b_{12}(a_{21}X_1 + a_{22}X_2), \\ Z_2 &= b_{21}(a_{11}X_1 + a_{12}X_2) + b_{22}(a_{21}X_1 + a_{22}X_2) \end{aligned}$$

կամ

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})X_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})X_2, \\ Z_2 &= (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})X_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})X_2 \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

Ստացված ձևափոխության մատրիցան կլինի՝

$$C = \begin{vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{vmatrix} \quad (9)$$

կամ կարճ՝

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

(9) մատրիցան անվանում են (7) և (5) մատրիցաների արտադրյալ և գրում են՝

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{vmatrix} \quad (11)$$

կամ կարճ՝

$$B \cdot A = C, \quad (12)$$

Այնուհետև ձևակերպենք B և A մատրիցաների բազմապատկման կանոնը, եթե առաջինը պարունակում է m տող և k սյուն, իսկ երկրորդը՝ k տող և n սյուն:

Սլանմատիկորեն այն ցույց է տրված հետևյալ հավասարությունում.

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{vmatrix} \quad (13)$$

B և A մատրիցաների արտադրյալը հանդիսացող C մատրիցայի C_{ij} տարրը հավասար է B մատրիցայի i -րդ տողի տարրերի և A մատրիցայի j -րդ սյան համապատասխան տարրերի արտադրյալների գումարին, այսինքն՝

$$c_{ij} = \sum_{\lambda=1}^k b_{i\lambda} a_{\lambda j} \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n),$$

Օրինակ 3. Դիցուք

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

այս դեպքում

$$\begin{aligned} 1) \quad BA &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ 2) \quad AB &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

Այս օրինակում

$$BA \neq AB.$$

Մենք եկանք հետևյալ եզրակացությունը: Մատրիցաները բազմապատկելիս անափոխական օրենքը տեղի չունի:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցաները, գտնել AB -ն և BA -ն:

Լուծում: Ըստ (3) բանաձևի գտնում ենք՝

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Օրինակ 5: Գտնենք հետևյալ մատրիցաների արտադրյալը:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \end{pmatrix}.$$

Անմիջական ստուգամար կարելի է համոզվել մատրիցաների համար հետևյալ առնչությունների ճշտությունը (k -ն թիվ է, A , B , C -ն՝ մատրիցաներ),

$$(kA) \cdot A = B \cdot (kB), \quad (14)$$

$$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \quad (15)$$

$$C \cdot (A+B) = CA + CB, \quad (16)$$

$$A(BC) = (AB)C, \quad (17)$$

A քառակուսային մատրիցան k թվով բազմապատկելու կանոնի հիման վրա և n -րդ կարգի մատրիցայի դետերմինանտի սյունների տարրերի ընդհանուր բազմապատկիչը դուրս բերելու կանոնից հետևում է, որ

$$\Delta(kA) = k^n \Delta(A), \quad (18)$$

Քանի որ A և B երկու քառակուսային մատրիցաներ բազմապատկելիս ստացվում է քառակուսային մատրիցա, որի տարրերը կոզմվում են դետերմինանտների բազմապատկման կանոնով, ապա ակնհայտ է, որ ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$\Delta(AB) = \Delta(A) \cdot \Delta(B), \quad (19)$$

Բազմապատկումը միավոր մատրիցայով: Քառակուսային մատրիցան, որի գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող տարրերը հավասար են մեկի, իսկ մյուս բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի (ինչպես նշվել է վերը), կոչվում է միավոր մատրիցա:

Այսպես, երկրորդ կարգի միավոր մատրիցան կլինի՝

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

Մատրիցաների բազմապատկման կանոնի հիման վրա ստանում ենք.

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

այսինքն՝

$$AE = A, \quad (21)$$

ինչպես նաև

$$EA = A, \quad (22)$$

Նշատ է տեսնել, որ ցանկացած կարգի քառակուսային մատրիցայի և համապատասխան միավոր մատրիցայի արտադրյալը հավասար է սկզբնական մատրիցային, այսինքն՝ (21) և (22) հավասարությունները ճիշտ են: Այսպիսով, մատրիցաները բազմապատկելիս միավոր մատրիցան կատարում է 1-ի դերը, այդ պատճառով էլ կոչվում է միավոր:

(20) միավոր մատրիցային համապատասխանում է հետևյալ ձևափոխությունը.

$$y_1 = x_1,$$

$$y_2 = x_2.$$

Այսպիսի ձևափոխությունը կոչվում է նույնական: Հակադարձը, նույնական ձևափոխությունը համապատասխանում է միավոր մատրիցան: Նման ձևով սահմանվում է ցանկացած թվով փոփոխականների նույնական ձևափոխությունը:

§ 5. Մատրիցայի միջոցով վեկտորի ձևափոխությունը ուրիշ վեկտորի

Դիցուք տրված է

$$X = x_1 i + x_2 j + x_3 k$$

վեկտորը, որը գրենք սյունային մատրիցայի տեսքով՝

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

կատարենք այդ վեկտորի պրոյեկցիաների ձևափոխությունը

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

մատրիցայի միջոցով.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

կատանանք

$$Y = y_1i + y_2j + y_3k$$

նոր վեկտորը, որը սյունային մատրիցայի տեսքով կարելի է գրել այսպես.

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

Օգտվելով մատրիցաների բազմապատկման կանոնից, ձևափոխությունն այս գործողությունը կարելի է գրել այսպես.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

այսինքն՝

$$Y = AX, \quad (6)$$

Քառակուսային մատրիցան սյունային մատրիցայով բազմապատկելիս ստացվում է նույն բարձրությամբ սյունային մատրիցա:

Այնհայտ է, որ X եռաչափ վեկտորի ձևափոխությունը Y վեկտորի՝ եռաչափ տարածությունը եռաչափ տարածության ձևափոխության այլ բանաձևում է:

Նշենք, որ (3) հավասարությունների համակարգը բխում է (4) մատրիցային հավասարությունից՝ աջ և ձախ մասերում գտնվող մատրիցաների տարրերի հավասարեցման ճանապարհով:

(4) հավասարությունը տալիս է A մատրիցայի միջոցով X վեկտորի ձևափոխությունն Y վեկտորի:

Բերված բոլոր դատողությունները եռաչափ տարածության վեկտորի համար տեղափոխվում են չափումների ցանկացած թվով տարածության վեկտորների վրա:

§ 6. Հակադարձ մատրիցա

Դիցուք տրված է X վեկտորը: Նրա նկատմամբ A քառակուսային մատրիցայի միջոցով կատարելով ձևափոխություն, կատանանք Y վեկտորը՝

$$Y = AX, \quad (1)$$

Դիցուք A մատրիցայի դետերմինանտը տարբեր է զրուից՝ $\Delta(A) \neq 0$: Այս դեպքում գոյություն ունի Y վեկտորի հակադարձ ձևափոխությունը X վեկտորի: Այդ ձևափոխությունը գտնում են § 5-ի (3) հավասարումների համակարգը x_1, x_2, x_3 -ի նկատմամբ լուծելու ճանապարհով: Հակադարձ ձևափոխության մատրիցան կոչվում է A^{-1} -ին հակադարձ մատրիցա և նշանակվում է՝ A^{-1} : Այսպիսով, կարող ենք գրել՝

$$X = A^{-1}Y, \quad (2)$$

Այստեղ X -ը, Y -ը, AX -ը սյունային մատրիցաներ են, իսկ A^{-1} -ը՝ քառակուսային մատրիցա է: (2) հավասարության աջ մասում Y փոխարեն տեղադրելով (1) հավասարության աջ մասը, ստանում ենք.

$$X = A^{-1}AX, \quad (3)$$

X վեկտորի նկատմամբ հաջորդաբար կատարեցինք A և A^{-1} մատրիցաներն ունեցող ձևափոխություն, այսինքն՝ կատարեցինք $(A^{-1}A)$ մատրիցաների արտադրյալին հավասար մատրիցայով ձևափոխություն: Արդյունքում ստացվեց նույնական ձևափոխություն: Հետևաբար, $A^{-1}A$ մատրիցան միավոր մատրիցա է՝

$$A^{-1}A = E, \quad (4)$$

(3) հավասարությունն ունի հետևյալ տեսքը.

$$X = EX, \quad (5)$$

Թե ե ո ռ ե մ 1: Եթե A^{-1} մատրիցան A մատրիցայի նկատմամբ հակադարձ է, ապա A մատրիցան էլ հակադարձ է A^{-1} մատրիցայի նկատմամբ, այսինքն՝ Ֆիշտ է հետևյալ հավասարությանը՝

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E, \quad (6)$$

Ա պ ա ց ո ց ո մ: (3) հավասարության երկու մասերի նկատմամբ A մատրիցայի միջոցով կատարենք ձևափոխություն

$$AX = A(A^{-1}A)X,$$

Օգտվելով մատրիցաների բազմապատկման զուգորդության հատկությունից, վերջին հավասարությունը կարելի է գրել այսպես.

$$AX = (AA^{-1})AX,$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$AA^{-1}=E: \quad (7)$$

Պնդումն ապացուցված է:

(4) և (7) հավասարություններից հետևում է, որ A և A^{-1} մատրիցաները փոխհակադարձ են: Նշված հավասարություններից հետևում է նաև

$$(A^{-1})^{-1}=A: \quad (8)$$

Իրոք, (7) հավասարություններից հետևում է՝

$$A^{-1}(A^{-1})^{-1}=E:$$

Համեմատելով վերջին հավասարությունը (4) հավասարության հետ, ստանում ենք (8) հավասարությունը:

§ 7. Տրված մատրիցայի էակադարձ մատրիցայի գտնելը

Դիցուք տրված է հետևյալ մատրիցան, որը եզակի չէ՝

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

$$\Delta = \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2)$$

Ապացուցենք, որ A^{-1} հակադարձ մատրիցան հետևյալն է՝

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

որտեղ A_{ij} -ն $\Delta = \Delta(A)$ դետերմինանտի a_{ij} տարրի հանրահաշվական լրացումն է:

Գտնենք C մատրիցան՝ AA^{-1} մատրիցաների արտադրյալը.

$$C = AA^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

Իրոք, մատրիցաների բազմապատկման կանոնի հիման վրա C մատրիցայի անկյունագծային անդամները Δ դետերմինանտի տողի տարրերի և նրանց համապատասխան հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարն է, բաժանած Δ դետերմինանտի վրա, այսինքն՝ հավասար են մեկի: Օրինակ, C_{11} տարրը որոշվում է այսպես.

$$C_{11} = a_{11} \frac{A_{11}}{\Delta} + a_{12} \frac{A_{21}}{\Delta} + a_{13} \frac{A_{31}}{\Delta} = \frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}}{\Delta} = 1,$$

Յուրաքանչյուր ոչ անկյունագծային անդամ որևէ տողի տարրերի և մի այլ տողի հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարն է՝ բաժանած Δ դետերմինանտի վրա. օրինակ, C_{23} տարրը որոշվում է այսպես.

$$C_{23} = a_{21} \frac{A_{31}}{\Delta} + a_{22} \frac{A_{32}}{\Delta} + a_{23} \frac{A_{33}}{\Delta} = \frac{a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33}}{\Delta} = 0 = 0,$$

Այսպիսով, թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն: Հետևյալ մատրիցան՝

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} \quad (4)$$

կոչվում է A մատրիցայի կցված մատրիցա: A^{-1} հակադարձ մատրիցան \tilde{A} կցված մատրիցայի միջոցով արտահայտվում է այսպես.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \tilde{A}, \quad (5)$$

Այս հավասարության ճշտությունը հետևում է (3) հավասարությունից:

Օրինակ: Տրված է

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

մատրիցան: Գտնել A^{-1} հակադարձ մատրիցան և \tilde{A} կցված մատրիցան:

Լ ու ծ ու ժ. Գտնում ենք A մատրիցայի դետերմինանտը.

$$\Delta(A) = 5.$$

Գտնում ենք հանրահաշվական լրացումները.

$$A_{11} = 5, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0,$$

$$A_{21} = -4, \quad A_{22} = 2, \quad A_{23} = -1,$$

$$A_{31} = 2, \quad A_{32} = -1, \quad A_{33} = 3.$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{5}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix},$$

Ըստ (4) բանաձևի գտնում ենք կցված մատրիցան.

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix},$$

§ 8. Գծային հավասարումների համակարգի և նրա լուծման մատրիցային գրառումը

Դատողությունները կատարելու ենք եռաչափ տարածության համար: Դիցուք ունենք հետևյալ գծային հավասարումների համակարգը.

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= d_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= d_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Դիտարկենք հետևյալ երեք մատրիցաները.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$$D = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

Այս դեպքում օգտվելով մատրիցաների բազմապատկման կանոնից, (1) համակարգը մատրիցային տեսքով կարելի է գրել այսպես.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

Իրոք, վերջին հավասարության ձախ մասը երկու մատրիցաների արտադրյալն է, որը հավասար է (5) հավասարության մոտ ընկած

տարրերով սյունային մատրիցային: Այս կողմում նույնպես սյունային մատրիցա է: Երկու մատրիցա հավասար են, եթե նրանց համապատասխան տարրերը հավասար են: Հավասարեցնելով համապատասխան տարրերը, կստանանք (1) հավասարումների համակարգը: (5) մատրիցային հավասարությունը կարճ գրում են այսպես՝

$$AX = D; \quad (6)$$

Օրինակ, Հետևյալ հավասարումների համակարգը գրել մատրիցային ձևով.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5, \\ 3x_2 + x_3 &= 9, \\ x_2 + 2x_3 &= 8; \end{aligned}$$

Լուծում: Գրենք սխեմի A մատրիցան, X լուծման մատրիցան և D ազատ անդամների մատրիցան.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{vmatrix},$$

Տրված հավասարումների համակարգը մատրիցային ձևով գրվում է այսպես.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{vmatrix},$$

§ 9. Գծային հավասարումների համակարգի լուծումը մատրիցային մեթոդով

Դիցուք A մատրիցայի դետերմինանտը՝ $\Delta(A) \neq 0$: § 8-ի (6) հավասարության ձախ և աջ մասերը ձախից բազմապատկենք A մատրիցային հակադարձ A^{-1} մատրիցայով, կստանանք՝

$$A^{-1}AX = A^{-1}D; \quad (1)$$

Իսկ

$$A^{-1}A = E, \quad EX = X,$$

ուստի (1)-ից հետևում է

$$X = A^{-1}D; \quad (2)$$

Հաշվի առնելով § 7-ի (5) հավասարությունը, վերջին հավասարությունը կարելի է գրել այսպես.

$$X = \frac{1}{\Delta(A)} \tilde{A}D \quad (3)$$

կամ ծավալուն տեսքով՝

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix};$$

D մատրիցան կլինի

$$D = \begin{vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{vmatrix}.$$

Լուծումը մատրիցային տեսքով ըստ (2) բանաձևի գրվում է այսպես.

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \cdot 5 - \frac{4}{5} \cdot 9 + \frac{2}{5} \cdot 8 \\ 0 \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 9 - \frac{1}{5} \cdot 8 \\ 0 \cdot 5 - \frac{1}{5} \cdot 9 + \frac{3}{5} \cdot 8 \end{vmatrix}.$$

Հավասարեցնելով ձախ և աջ մասերում գտնվող մատրիցաների տողերը, ստանում ենք.

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \cdot 5 - \frac{4}{5} \cdot 9 + \frac{2}{5} \cdot 8 = 1, \\ x_2 &= 0 \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 9 - \frac{1}{5} \cdot 8 = 2, \\ x_3 &= 0 \cdot 5 - \frac{1}{5} \cdot 9 + \frac{3}{5} \cdot 8 = 3. \end{aligned}$$

Օրինակ 2: Հետևյալ հավասարումների համակարգը լուծել մատրիցային մեթոդով.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Լուծում: Գտնում ենք համակարգի մատրիցայի դետերմինանտը.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Գտնում ենք հակադարձ մատրիցան.

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Հավասարումների համակարգի լուծումը գրենք մատրիցային ձևով.

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{vmatrix}.$$

Կատարելով աջակողմյան մատրիցաների բազմապատկումը, կըստանանք.

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{vmatrix} d_1 A_{11} + d_2 A_{21} + d_3 A_{31} \\ d_1 A_{12} + d_2 A_{22} + d_3 A_{32} \\ d_1 A_{13} + d_2 A_{23} + d_3 A_{33} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Հավասարեցնելով ձախ և աջ մասերում գտնվող մատրիցաների անդամները, ստանում ենք.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{d_1 A_{11} + d_2 A_{21} + d_3 A_{31}}{\Delta}, \\ x_2 &= \frac{d_1 A_{12} + d_2 A_{22} + d_3 A_{32}}{\Delta}, \\ x_3 &= \frac{d_1 A_{13} + d_2 A_{23} + d_3 A_{33}}{\Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6) լուծումը կարելի է գրել դետերմինանտների միջոցով.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, & x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \\ x_3 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \end{aligned} \quad (7)$$

Օրինակ 1: Հետևյալ հավասարումների համակարգը լուծել մատրիցային մեթոդով.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5, \\ 3x_2 + x_3 &= 9, \\ x_2 + 2x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Լուծում: Գտնենք համակարգի մատրիցայի դետերմինանտը.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

Հավասարեցնելով ձան և աջ մասերում գտնվող մատրիցաների տողերը, ստանում ենք.

$$x_1=3, \quad x_2=2, \quad x_3=-7.$$

§ 10. Օրթոգոնալ արտապատկերումներ: Օրթոգոնալ մատրիցաներ

Դիցուք եռաչափ տարածությունում ունենք (x_1, x_2, x_3) և (x'_1, x'_2, x'_3) երկու ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը, որոնք ունեն O ընդհանուր սկզբնակետ: Դիցուք կոորդինատային առաջին և երկրորդ համակարգերում M կետն ունի (x_1, x_2, x_3) և (x'_1, x'_2, x'_3) կոորդինատները (կոորդինատների սկզբնակետը կարելի է նաև չհամատեղել):

e_1, e_2, e_3 -ով նշանակենք առաջին կոորդինատային համակարգի կոորդինատային առանցքների միավոր վեկտորները (օրթեր), իսկ e'_1, e'_2, e'_3 -ով՝ երկրորդ կոորդինատային համակարգի օրթերը: e_1, e_2, e_3 վեկտորները (x_1, x_2, x_3) տարածությունում բազիսային վեկտորներ են, իսկ e'_1, e'_2, e'_3 -ը՝ բազիսային են (x'_1, x'_2, x'_3) -ում:

Այդ դեպքում \overline{OM} վեկտորը առաջին կոորդինատային համակարգում կարգում կարգի ալպես.

$$\overline{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \quad (1)$$

երկրորդ սիստեմում՝

$$\overline{OM} = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3: \quad (2)$$

Դիտարկենք կամայական M կետի x_1, x_2, x_3 կոորդինատների ձևափոխությունը այդ նույն կետի x'_1, x'_2, x'_3 կոորդինատներին: Կարելի է ասել, որ դիտարկելու ենք (x_1, x_2, x_3) տարածության ձևափոխությունը (x'_1, x'_2, x'_3) տարածությանը:

Այս ձևափոխությունն օժտված է այն հատկությամբ, որ l երկարությամբ հատվածն անցնում է նույն l երկարությամբ հատվածի: Եռանկյունն անցնում է հավասար եռանկյանը, հետևաբար, մեկ կետից ելնող և ψ անկյունը կազմող երկու վեկտորներ անցնում են նույն երկարությամբ և նույն անկյունը կազմող երկու վեկտորներին:

Նշված հատկությամբ օժտված ձևափոխությունը կոչվում է օրթոգոնալ:

Կարելի է ասել, որ օրթոգոնալ ձևափոխության դեպքում տեղի է ունենում ամբողջ տարածության՝ որպես պինդ մարմնի տեղափոխություն կամ էլ տեղափոխություն և հայելային արտապատկերում: Որոշենք այդ ձևափոխության մատրիցան:

e'_1, e'_2, e'_3 միավոր վեկտորներն արտահայտենք e_1, e_2, e_3 միավոր վեկտորների միջոցով.

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= \alpha_{11} e_1 + \alpha_{21} e_2 + \alpha_{31} e_3, \\ e'_2 &= \alpha_{12} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \alpha_{32} e_3, \\ e'_3 &= \alpha_{13} e_1 + \alpha_{23} e_2 + \alpha_{33} e_3, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Այստեղ

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(e_1, e'_1), & \alpha_{12} &= \cos(e_1, e'_2), & \alpha_{13} &= \cos(e_1, e'_3), \\ \alpha_{21} &= \cos(e_2, e'_1), & \alpha_{22} &= \cos(e_2, e'_2), & \alpha_{23} &= \cos(e_2, e'_3), \\ \alpha_{31} &= \cos(e_3, e'_1), & \alpha_{32} &= \cos(e_3, e'_2), & \alpha_{33} &= \cos(e_3, e'_3): \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ինը ուղղորդ կոսինուսները գրենք հետևյալ մատրիցայի տեսքով՝

$$S = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

Օգտվելով (4) առնչություններից, կարող ենք գրել նաև.

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11} e'_1 + \alpha_{12} e'_2 + \alpha_{13} e'_3, \\ e_2 &= \alpha_{21} e'_1 + \alpha_{22} e'_2 + \alpha_{23} e'_3, \\ e_3 &= \alpha_{31} e'_1 + \alpha_{32} e'_2 + \alpha_{33} e'_3, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ակնհայտ է, որ

$$S^* = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad (7)$$

մատրիցան S մատրիցայի նկատմամբ տրանսպոնացված մատրիցան է: Քանի որ e'_1, e'_2, e'_3 միավոր փոխուղղահայաց վեկտորներ են, ապա նրանց վեկտորակալար արտադրյալը հավասար է ± 1 -ի: Հետևաբար,

$$(e'_1 e'_2 e'_3) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \pm 1: \quad (8)$$

Համանման ձևով

$$(e_1 e_2 e_3) = \Delta(S^*) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \pm 1: \quad (9)$$

Հաշվենք մատրիցաների արտադրյալը.

$$SS^* = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = E, \quad (10)$$

Իրոք, եթե C_{ij} -ով նշանակենք արտադրյալ-մատրիցայի տարրերը, ապա կստանանք.

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1, \\ C_{22} &= \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 = 1, \\ C_{33} &= \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$C_{12} = \alpha_{12}\alpha_{11} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = (e_1 e_2) = 0;$$

Համանման ձևով

$$C_{ij} = e_i e_j \quad \text{երբ } i \neq j \quad (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3), \quad (12)$$

Եվ այսպես,

$$SS^* = E;$$

Այսպիսով, S^* տրանսպոնացված մատրիցան համընկնում է S^{-1} հակադարձ մատրիցայի հետ.

$$S^* = S^{-1}, \quad (14)$$

(13) և (14) պայմաններին բավարարող, այսինքն՝ իր տրանսպոնացվածին հակադարձ մատրիցան կոչվում է օրթոգոնալ: Այժմ հետևեցնենք (x_1, x_2, x_3) կոորդինատները (x'_1, x'_2, x'_3) կոորդինատներին ձևափոխելու և հակադարձ ձևափոխության բանաձևերը: (3) և (6) բանաձևերի համաձայն (1) և (2) հավասարությունների աջ մասերը կարելի է արտահայտել (e_1, e_2, e_3) բազիսի միջոցով, ինչպես նաև (e'_1, e'_2, e'_3) բազիսի միջոցով: Հետևաբար, կարելի է գրել հետևյալ հավասարությունը.

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3 \quad (15)$$

(15) հավասարության բոլոր անդամները հաջորդաբար բազմապատկելով e'_1, e'_2, e'_3 վեկտորներով և հաշվի առնելով, որ

$$\left. \begin{aligned} e'_i e'_j &= 0 \quad \text{երբ } i \neq j, \\ e'_i e'_j &= 1 \quad \text{երբ } i = j, \\ e'_i e'_j &= \alpha_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

կստանանք.

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3, \\ x'_2 &= \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3, \\ x'_3 &= \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}x_3 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(15) հավասարության անդամները հաջորդաբար բազմապատկելով e_1, e_2, e_3 -ով, կստանանք.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_{13}x'_3, \\ x_2 &= \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{23}x'_3, \\ x_3 &= \alpha_{31}x'_1 + \alpha_{32}x'_2 + \alpha_{33}x'_3 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Եվ այսպես, (17) օրթոգոնալ ձևափոխությունների մատրիցան S մատրիցան է, իսկ (18) հակադարձ ձևափոխության մատրիցան՝ S^* -ը:

Այսպիսով, ապացուցված է, որ կոորդինատների դեկարտյան համակարգում օրթոգոնալ ձևափոխությանը համապատասխանում է օրթոգոնալ մատրիցա: Կարելի է ապացուցել, որ եթե (17) և (18) ուղիղ և հակադարձ ձևափոխությունների մատրիցաները բավարարում են (13) կամ (14) առնչությունը, այսինքն՝ օրթոգոնալ են, ապա և ձևափոխությունը կլինի օրթոգոնալ:

Եթե մոժենք

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

սլունային մատրիցաները, ապա (17) և (18) համակարգերը կարելի է գրել այսպես.

$$X' = SX, \quad (20)$$

$$X = S^{-1}X', \quad (21)$$

Եթե մոժենք (19) մատրիցաների տրանսպոնացված մատրիցաները՝

$$X'^* = \|x'_1 \ x'_2 \ x'_3\|, \quad X^* = \|x_1 \ x_2 \ x_3\|, \quad (22)$$

ապա կարող ենք գրել՝

$$X'^* = X^* S^{-1}, \quad X^* = X'^* S, \quad (23)$$

§ 11. Գծային ձևափոխության սեփական վեկտորը

Սահմանում 1: Դիցուք տրված է X վեկտորը՝

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

որտեղ

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0,$$

Եթե X վեկտորը A մատրիցայի միջոցով ձևափոխելուց հետո ստացվում է Y վեկտորը՝

$$Y = AX, \quad (2)$$

(տես § 5-ի (2)-ը), որը զուգահեռ է X վեկտորին՝

$$Y = \lambda X, \quad (3)$$

որտեղ λ -ն թիվ է, ապա X վեկտորը կոչվում է A մատրիցայի սե-

փակեան վեկտոր կամ տրված գծային ձևափոխութեան սեփական վեկտորը. λ թիվը կոչվում է սեփական արժեք:

Գտնենք տված գծային ձևափոխութեան կամ տված A մատրիցայի

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

սեփական վեկտորը: Որպեսզի X -ը լինի A մատրիցայի սեփական վեկտորը, անհրաժեշտ է, որ տեղի ունենան (2) և (3) հավասարութիւնները: Հավասարեցնելով այդ հավասարութիւնների աջ մասերը, ստանում ենք.

$$AX = \lambda Y \quad (4)$$

կամ

$$AX = \lambda EX,$$

այսինքն՝

$$(A - \lambda E)X = 0 \quad (5)$$

Այս հավասարութիւնից հետևում է, որ X վեկտորը որոշվում է հաստատունի ճշտութեամբ:

Ծավալուն տեսքով (4) հավասարութիւնը գրվում է այսպես.

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \lambda x_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \lambda x_3. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Իսկ (5) հավասարութիւնը գրվում է այսպես.

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

X վեկտորի x_1, x_2, x_3 կոորդինատները որոշելու համար ստանում ենք համասեռ գծային հավասարումների համակարգ: Որպեսզի (7) համակարգը ունենա ոչ զրոյական լուծումներ, անհրաժեշտ և բավարար է, որ համակարգի դետերմինանտը հավասար լինի զրոյի.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

կամ

$$\Delta(A - \lambda E) = 0 \quad (9)$$

Սա λ -ի նկատմամբ երրորդ աստիճանի հավասարում է: Այն կոչվում

է A մատրիցայի բնութագրիչ հավասարում: Այս հավասարումից գտնում են λ սեփական արժեքները:

Քննարկենք այն դեպքը, երբ բնութագրիչ հավասարման բոլոր արմատները իրական են և տարբեր: Դրանք նշանակենք $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ -ով:

Յուրաքանչյուր λ սեփական արժեքին համապատասխանում է սեփական վեկտոր, որի կոորդինատները որոշվում են (7) համակարգից՝ λ համապատասխան արժեքի դեպքում: Սեփական վեկտորները նշանակենք τ_1, τ_2, τ_3 -ով: Կարելի է ցույց տալ, որ այդ վեկտորները գծորեն անկախ են, այսինքն՝ նրանցից ոչ մեկը չի արտահայտվում մյուսների միջոցով: Հետևաբար, ցանկացած վեկտոր կարելի է արտահայտել τ_1, τ_2, τ_3 վեկտորների միջոցով, այսինքն՝ վերջիններս կարելի է ընդունել որպես բազիսային վեկտորներ:

Առանց ապացուցման նշենք, որ սիմետրիկ մատրիցայի բնութագրիչ հավասարման բոլոր արմատներն իրական են:

Օրինակ 1. Գտնել

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

մատրիցայի սեփական վեկտորները և զրանց համապատասխանող սեփական թվերը, λ ու ծ ու մ: Կազմենք բնութագրիչ հավասարումը և գտնենք սեփական արժեքները.

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 8 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ այսինքն՝ } \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5.$$

Համապատասխան (7) հավասարումների համակարգից կգտնենք այն սեփական վեկտորը, որը համապատասխանում է $\lambda_1 = -1$ սեփական արժեքին.

$$\begin{cases} (1 - \lambda_1)x_1 + x_2 = 0, \\ 8x_1 + (3 - \lambda_1)x_2 = 0, \end{cases} \text{ կամ } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ 8x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Լուծելով այս համակարգը, գտնում ենք $x_1 = m, x_2 = -2m$, որտեղ m -ը կամայական թիվ է: Սեփական վեկտորը կլինի.

$$\tau_1 = mi - 2mj.$$

$\lambda_2 = 5$ սեփական արժեքի համար գրում ենք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 = 0, \\ 8x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Սեփական վեկտորը կլինի

$$\tau_2 = mi + 4mj.$$

Օրինակ 2. Գտնել

$$\begin{vmatrix} 7 - 2 & 0 \\ -2 & 6 - 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

մատրիցայի սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները.

λ ու ծ ու մ: Գրենք բնութագրիչ հավասարումը.

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ այսինքն՝ } -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0.$$

Այս հավասարման արմատներն են $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$,
 $\lambda_3=3$ արժեքի համար սեփական վեկտորը որոշվում է հետևյալ հավասարումների համակարգից՝

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ընդունելով $x_1=m$, ստանում ենք $x_2=2m$, $x_3=2m$ ։ Սեփական վեկտորը կլինի՝

$$\tau_1 = mi + 2mj + 2mk,$$

Նման ձևով գրում ենք

$$\begin{cases} \tau_2 = mi + \frac{1}{2}mj - mk, \\ \tau_3 = -mi + mj - \frac{1}{2}mk. \end{cases}$$

§ 12. Գծային ձևափոխության մատրիցա, որի դեպքում բազիսային վեկտորները սեփական վեկտորներն են

Այնուհետև որոշենք գծային ձևափոխության մատրիցան, երբ որպես բազիս են τ_1, τ_2, τ_3 սեփական վեկտորները։ Այդ ձևափոխության դեպքում պետք է տեղի ունենան

$$\begin{cases} \tau_1^* = \lambda_1 \tau_1, \\ \tau_2^* = \lambda_2 \tau_2, \\ \tau_3^* = \lambda_3 \tau_3, \end{cases} \quad (1)$$

առնչությունները, որտեղ $\tau_1^*, \tau_2^*, \tau_3^*$ -ը τ_1, τ_2, τ_3 վեկտորների պատկերներն են։

Դիցուք ձևափոխության մատրիցան է՝

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

Որոշենք այս մատրիցայի անդամները։ τ_1, τ_2, τ_3 բազիսում կարող ենք գրել.

$$\tau_1 = 1 \cdot \tau_1 + 0 \cdot \tau_2 + 0 \cdot \tau_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

Քանի որ τ_1 վեկտորը A' մատրիցայի միջոցով ձևափոխությունից հետո անցնում է $\tau_1^* = \lambda_1 \tau_1$ վեկտորին՝

$$\tau_1^* = \lambda_1 \tau_1 + 0 \cdot \tau_2 + 0 \cdot \tau_3,$$

սպա կարող ենք գրել.

$$\tau_1^* = \lambda_1 \tau_1 = A' \tau_1,$$

Հետևաբար,

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3)$$

կամ հավասարումների համակարգի տեսքով՝

$$\left. \begin{cases} \lambda_1 = a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0, \\ 0 = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot 0, \\ 0 = a_{31} \cdot 1 + a_{32} \cdot 0 + a_{33} \cdot 0. \end{cases} \right\} \quad (4)$$

Այս համակարգից գտնում ենք՝

$$a_{11} = \lambda_1, \quad a_{21} = 0, \quad a_{31} = 0,$$

$\tau_2^* = \lambda_2 \tau_2, \tau_3^* = \lambda_3 \tau_3$ առնչությունների հիման վրա նման ձևով կգտնենք.

$$\begin{cases} a_{12} = 0, & a_{22} = \lambda_2, & a_{32} = 0, \\ a_{13} = 0, & a_{23} = 0, & a_{33} = \lambda_3. \end{cases}$$

Այսպիսով, ձևափոխության մատրիցան ունի հետևյալ տեսքը.

$$A' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

Գծային ձևափոխությունը կլինի՝

$$\left. \begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1, \\ y_2 = \lambda_2 x_2, \\ y_3 = \lambda_3 x_3. \end{cases} \right\} \quad (6)$$

Եթե $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^*$, սպա գծային ձևափոխությունն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} y_1 = \lambda^* x_1, \\ y_2 = \lambda^* x_2, \\ y_3 = \lambda^* x_3. \end{cases}$$

Այսպիսի ձևափոխությունը կոչվում է նմանության ձևափոխություն՝ λ^* գործակցով։ Այսպիսի ձևափոխության դեպքում տարածության լուրաքանչյուր վեկտոր λ^* սեփական թիվն ունեցող սեփական վեկտոր է։

§ 13. Գծային ձևափոխության մատրիցայի ձևափոխությունը մեկ բազիսից մյուսին անցնելիս

Դիցուք X -ը կամայական վեկտոր է՝

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \quad (1)$$

որը տրված է (e_1, e_2, e_3) բազիսում: X վեկտորն A մատրիցայի միջոցով ձևափոխվում է Y վեկտորի.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, \quad (2)$$

$$Y = AX, \quad (3)$$

Քննարկվող տարածությունում մուծենք (e'_1, e'_2, e'_3) նոր բազիսը, որը հին բազիսի հետ կապված է հետևյալ անցման բանաձևերով.

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= b_{11}e_1 + b_{21}e_2 + b_{31}e_3, \\ e'_2 &= b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + b_{32}e_3, \\ e'_3 &= b_{13}e_1 + b_{23}e_2 + b_{33}e_3. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Դիցուք X վեկտորը նոր բազիսում գրվում է այսպես.

$$X' = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

կարող ենք գրել

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3 \quad (6)$$

Հավասարությունը, որտեղ աջ մասում տեղադրված են (4) արտահայտությունները: Հավասարեցնելով e_1, e_2, e_3 վեկտորներին՝ աջ և ձախ մասերում ունեցած գործակիցները, կստանանք.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3, \\ x_2 &= b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3, \\ x_3 &= b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Հավասարությունները կամ կարճ

$$X = BX', \quad (8)$$

որտեղ

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

Այս մատրիցան էափոխված չէ, ունի B^{-1} հակադարձ մատրիցան, քանի որ (7) համակարգն ունի x'_1, x'_2, x'_3 -ի նկատմամբ որոշակի լուծում: Եթե նոր բազիսում գրենք Y վեկտորը՝

$$Y' = y'_1 e'_1 + y'_2 e'_2 + y'_3 e'_3,$$

ապա, ակնհայտ է, տեղի ունի

$$Y = BY' \quad (10)$$

Հավասարությունը: (8) և (10) արտահայտությունները տեղադրելով (3)-ի մեջ, կստանանք.

$$BY' = ABX', \quad (11)$$

Հավասարության երկու մասերը բազմապատկելով B^{-1} -ով, կստանանք.

$$Y' = B^{-1}ABX', \quad (12)$$

Հետևաբար, ձևափոխություն A' մատրիցան նոր բազիսում կլինի.

$$A' = B^{-1}AB, \quad (13)$$

Օրինակ. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցայի միջոցով (e_1, e_2, e_3) բազիսում կատարվում է վեկտորի ձևափոխություն: Որոշել (e'_1, e'_2, e'_3) բազիսում ձևափոխության A' մատրիցան, եթե

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= e_1 + 2e_2 + e_3, \\ e'_2 &= 2e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e'_3 &= e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned} \right\}$$

Լուծում. Այստեղ B մատրիցան է (տես (4) և (9) բանաձևերը)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

գտնենք հակադարձ մատրիցան $(\Delta(B)=1)$.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

Այնուհետև գտնում ենք՝

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

Վերջնականապես ըստ (13) բանաձևի գտնում ենք.

$$A' = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

Այնուհետև ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1: Բնութագրիչ բազմանդամը (§ 11-ի (8) հավասար-

ման ձախ մասը) չի փոխվում՝ տվյալ գծային ձևափոխության բազիսի ընտրությունից կախված:

Այսպես ունենում ենք հետևյալ երկու մատրիցային հավասարումները.

$$A' = B^{-1}AB,$$

$$E = B^{-1}EB,$$

որտեղ A -ն և A' -ը միևնույն գծային ձևափոխության մատրիցաներն են տարբեր բազիսներում, B -ն նոր կոորդինատներից հնիքին անցնելու մատրիցան է, E -ն միավոր մատրիցա է:

Վերջին երկու հավասարումների հիման վրա ստանում ենք.

$$A' - \lambda E = B^{-1}(A - \lambda E)B,$$

Մատրիցաներից անցնելով դետերմինանտներին և օգտվելով մատրիցաների ու դետերմինանտների բազմապատկման կանոնից, ստանում ենք.

$$\Delta(A' - \lambda E) = \Delta(B^{-1}(A - \lambda E)B) = \Delta(B^{-1}) \cdot \Delta(A - \lambda E)\Delta(B),$$

Բայց

$$\Delta(B^{-1})\Delta(B) = \Delta(B^{-1}B) = \Delta(E) = 1,$$

չետևարար,

$$\Delta(A' - \lambda E) = \Delta(A - \lambda E):$$

Այս և ձախ մասերը ձևափոխության մատրիցայի բնութագրիչ բազմանդամներն են: Թեորեմն ապացուցված է:

§ 14. Քառակուսային ձևերը և դրանց ձևափոխությունները

Մահմանում 1: Մի քանի փոփոխականների քառակուսային ձև կոչվում է այդ փոփոխականների երկրորդ աստիճանի համասեռ բազմանդամը:

x_1, x_2, x_3 երեք փոփոխականների քառակուսային ձևն ունի

$$F = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \quad (1)$$

տեսքը, որտեղ a_{ij} -ն տրված թվեր են, 2 գործակիցները վերցված են այն բանի համար, որ հետագա բանաձևերն ունենան ավելի պարզ տեսք:

(1) հավասարումները կարելի է գրել այսպես.

$$F = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3), \quad (2)$$

որտեղ a_{ij} -ն տրված թվերն են ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$), ըստ որում

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32}. \quad (3)$$

Հետևյալ մատրիցան՝

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (4)$$

կոչվում է (1) քառակուսային ձևի մատրիցա: Այն սիմետրիկ մատրիցա է:

(x_1, x_2, x_3) -ը համարելու ենք տարածության կետի կոորդինատներ կամ վեկտորի կոորդինատներ (e_1, e_2, e_3) օրթոգոնալ բազիսում, որտեղ e_1, e_2, e_3 -ը միավոր վեկտորներ են:

(e_1, e_2, e_3) բազիսում դիտարկենք հետևյալ գծային ձևափոխությունը.

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Այս ձևափոխության մատրիցան համընկնում է քառակուսային ձևի մատրիցայի հետ:

Այնուհետև որոշենք երկու վեկտորները՝

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

(5) ձևափոխությունը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$X' = AX, \quad (8)$$

Այդ դեպքում (2) քառակուսային ձևը կարելի է ներկայացնել որպես այդ վեկտորների սկալյար արտադրյալ՝

$$F = X \cdot AX, \quad (9)$$

Դիցուք e'_1, e'_2, e'_3 -ը (8) ձևափոխության օրթոգոնալ սեփական վեկտորներն են, որոնց համապատասխան սեփական արժեքներն են՝ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: Կարելի է ապացուցել, որ եթե մատրիցան սիմետրիկ է, ապա գոյություն ունի A մատրիցայի սեփական վեկտորներից կազմված օրթոգոնալ բազիս: (e_1, e_2, e_3) բազիսում կատարենք (8) ձևա-

հսկողությունը: Այդ դեպքում ձևափոխություն մատրիցան տվյալ բա-
 ռիսում կլինի անկյանազոյն (տես § 12).

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}, \quad (10)$$

Կարելի է ցույց տալ, որ այդ ձևափոխությունը կիրառելով (1)
 քառակուսային ձևի նկատմամբ, վերջինս կարելի է բերել հետևյալ
 տեսքի.

$$F \Rightarrow \lambda_1^2 X_1^2 + \lambda_2^2 X_2^2 + \lambda_3^2 X_3^2, \quad (11)$$

e_1, e_2, e_3 սեփական վեկտորների ուղղությունները կոչվում են
 քառակուսային ձևի գլխավոր ուղղություններ:

§ 15. Մատրիցայի ռանգը: Գծային հավասարումների համակարգի լուծումների գոյությունը

Սահմանում 1: Տրված A մատրիցայի մի նոր կոչվում է նրա
 մի քանի տողերի և սյուների ջնջումից հետո առանց տեղափոխու-
 թյունների մնացած տարրերից կազմված դետերմինանտը:

Օրինակ 1: Գիցուք տրված է հետևյալ մատրիցան՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Այս մատրիցայի երրորդ կարգի մի նորները ստացվում են մեկ սյունը ջնջե-
 լուց և մատրիցայի $\| \quad \|$ նշանը դետերմինանտի $| \quad |$ նշանով փոխարինելուց հետո:
 Այդ մի նորները չորսն են: Երկրորդ կարգի մի նորները ստացվում են երկու սյուն
 և մեկ տող ջնջելուց հետո. զրանք 18 հատ են: Առաջին կարգի մի նորները 12
 հատ են:

Սահմանում 2: A մատրիցայի ռանգ կոչվում է այդ մատ-
 ռիցայի զրոյից տարբեր մի նորի ամենաբարձր կարգը:

Օրինակ 2: Հեշտ է ստուգել, որ

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

մատրիցայի ռանգը հավասար է 2-ի:

Օրինակ 3: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ մատրիցայի ռանգը հավասար է 1-ի:

Եթե A -ն n -րդ կարգի քառակուսային մատրիցա է, ապա այդ
 մատրիցայի k ռանգը բավարարում է $k \leq n$ սահմանին: Ինչպես

նշվել է վերևում, եթե $k = n$, ապա մատրիցան կոչվում է ոչ եզակի,
 եթե $k < n$ մատրիցան կոչվում է եզակի:

Օրինակ. հետևյալ մատրիցան՝

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

ոչ եզակի է, քանի որ $\Delta(A) = 1 \neq 0$, օրինակ 2-ի մատրիցան եզակի է, քանի որ
 այնտեղ $n=3, k=2$:

Մատրիցայի ռանգ հասկացողությունը լայնորեն օգտագործվում
 է գծային հավասարումների համակարգերի տեսության մեջ: Տեղի
 ունի հետևյալը,

Թե որեւէ 1: Գիցուք տրված է հետևյալ գծային հավասար-
 ումների համակարգը.

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Դիտարկենք համակարգի մատրիցան՝

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

և ընդլայնված մատրիցան՝

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

(1) համակարգն ունի լուծումներ, եթե A մատրիցայի ռանգը
 հավասար է B մատրիցայի ռանգին: Համակարգը լուծումներ չունի,
 եթե A մատրիցայի ռանգը փոքր է B մատրիցայի ռանգից: Եթե A
 մատրիցայի ռանգը և B մատրիցայի ռանգը հավասար է 3-ի, ապա
 համակարգն ունի միակ լուծումը: Եթե A և B մատրիցաների ռանգը
 հավասար է 2-ի, ապա համակարգն ունի անթիվ բազմություններ լու-
 ծումներ, ընդ որում երկու անհայտներն արտահայտվում են երրոր-
 դի միջոցով, որն ունի կամայական արժեք:

Եթե A և B մատրիցաների ռանգը հավասար է մեկի, ապա հա-
 մակարգն ունի անթիվ բազմություններ լուծումներ, ընդ որում երկու
 անհայտներն ունեն կամայական արժեքներ, իսկ երրորդն արտա-
 հայտվում է նրանց միջոցով:

Այս թեորեմի ճշտությունը հետույթյամբ հաստատվում է հան-
 րահաշվից հայտնի՝ հավասարումների համակարգի լուծումների

քննարկման հիման վրա: Այս թեորեմը ճիշտ է ցանկացած թվով հավասարումների համակարգի համար:

§ 16. Մատրիցաների դիֆերենցումն ու ինտեգրումը

Դիցուք տրված է $\|a_{ij}(t)\|$ մատրիցան, որտեղ մատրիցայի $a_{ij}(t)$ անդամները մի որոշ t արգումենտի ֆունկցիաներ են.

$$\|a_{ij}(t)\| = \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{vmatrix} \quad (1)$$

կամ կարճ կգրենք այսպես.

$$\|a(t)\| = \|a_{ij}(t)\| \quad (i=1,2, \dots, m; j=1,2, \dots, n). \quad (2)$$

Դիցուք մատրիցայի անդամներն ունեն

$$\frac{da_{11}(t)}{dt}, \dots, \frac{da_{mn}(t)}{dt}$$

ածանցյալները:

Սահմանում 1: $\|a(t)\|$ մատրիցայի ածանցյալ կոչվում է այն մատրիցան (նշանակում ենք $\frac{d}{dt}\|a(t)\|$), որի անդամները $\|a(t)\|$ մատրիցայի անդամների ածանցյալներն են, այսինքն՝

$$\frac{d}{dt}\|a(t)\| = \begin{vmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \dots & \frac{da_{2n}}{dt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{da_{m1}}{dt} & \frac{da_{m2}}{dt} & \dots & \frac{da_{mn}}{dt} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

Նկատենք, որ մատրիցայի ածանցյալի այսպիսի սահմանումը ստացվում է բնական ճանապարհով, եթե մատրիցաների հանման և թվով բազմապատկելու հաշտնի գործողություններին (տես § 4) միացնենք նաև սահմանալին անցման գործողությունը.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{ \|a_{ij}(t + \Delta t)\| - \|a_{ij}(t)\| \} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{a_{ij}(t + \Delta t) - a_{ij}(t)}{\Delta t} \right\| = \left\| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_{ij}(t + \Delta t) - a_{ij}(t)}{\Delta t} \right\|,$$

Սիմվոլիկ ձևով (3) հավասարությունը կարճ կարելի է գրել այսպես.

$$\frac{d}{dt}\|a(t)\| = \left\| \frac{d}{dt}a_{ij}(t) \right\| \quad (4)$$

կամ թե

$$\frac{d}{dt}\|a(t)\| = \left\| \frac{d}{dt}a(t) \right\|, \quad (5)$$

$\frac{d}{dt}$ դիֆերենցման սիմվոլի փոխարեն երբեմն հարմար է օգտագործել D սիմվոլը և (5) հավասարությունը գրել այսպես.

$$D\|a\| = \|Da\|, \quad (6)$$

Սահմանում 2: $\|a(t)\|$ մատրիցայի ինտեգրալ կոչվում է

$$\int_{t_0}^t \|a(z)\| dz$$

սիմվոլով նշանակվող մատրիցան, որի անդամները հավասար են տվյալ մատրիցայի անդամների ինտեգրալներին.

$$\int_{t_0}^t \|a(z)\| dz = \begin{vmatrix} \int_{t_0}^t a_{11}(z) dz & \dots & \int_{t_0}^t a_{1n}(z) dz \\ \int_{t_0}^t a_{21}(z) dz & \dots & \int_{t_0}^t a_{2n}(z) dz \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_{t_0}^t a_{m1}(z) dz & \dots & \int_{t_0}^t a_{mn}(z) dz \end{vmatrix}, \quad (7)$$

ավելի կարճ

$$\int_{t_0}^t \|a(z)\| dz = \left\| \int_{t_0}^t a_{ij}(z) dz \right\| \quad (8)$$

կամ

$$\int_{t_0}^t \|a(z)\| dz = \left\| \int_{t_0}^t a(z) dz \right\|, \quad (9)$$

$\int_{t_0}^t () dz$ սիմվոլը նշանակում են մեկ, օրինակ, S տառով. այդ

դեպքում (6)-ի նման (9) հավասարությունը կարելի է գրել այսպես՝

$$S\|a\| = \|Sa\|, \quad (10)$$

§ 17. Դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի և հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծումների մատրիցային գրառումը

Քննարկենք $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ որոնվող ֆունկցիաների գծային դիֆերենցիալ հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

a_{ij} գործակիցները հաստատուններ են: Մուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$\|x\| = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{vmatrix}, \quad (2)$$

Սա լուծումների մատրիցան է կամ (1) համակարգի վեկտորական լուծումը: Այնուհետև որոշենք լուծումների ածանցյալների մատրիցան՝

$$\left\| \frac{dx}{dt} \right\| = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

Դրենք դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի գործակիցների մատրիցան.

$$\|a\| = \|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

Օգտվելով մատրիցաների բազմապատկման կանոնից (տես (§ 4, (1) դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը մատրիցային ձևով կարելի է գրել այսպես:

$$\left\| \frac{dx}{dt} \right\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \quad (5)$$

կամ կարճ, մատրիցաների դիֆերենցիալ կանոնի հիման վրա՝

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\| = \|a\| \|x\|, \quad (6)$$

Վերջին հավասարումը կարճ գրում են այսպես.

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (7)$$

որտեղ x -ը սեփական է են նաև վեկտորական լուծում, a -ն՝ մատրիցայի կարճառոտ նշանակումն է:

Դիցուք

$$\|\alpha\| = \alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix}, \quad (8)$$

որտեղ α_j -երը սրտ թվեր են:

Դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծումների բազմութունը որոնելու ենք (տես XIII գլխի § 30-ի (2) բանաձևերը) հետևյալ տեսքով՝

$$\|x\| = e^{kt} \|z\|, \quad (9)$$

կամ

$$x = e^{kt} z, \quad (10)$$

Տեղադրելով (10)-ը (7)-ի մեջ (կամ (9)-ը (6)-ի մեջ), օգտվելով մատրիցան թվով բազմապատկելու և մատրիցայի դիֆերենցիալ կանոնից, ստանում ենք.

$$ke^{kt} z = a e^{kt} z, \quad (11)$$

որտեղից էլ

$$kz = az$$

կամ

$$a - kz = 0, \quad (12)$$

Հիշեցնենք, որ վերջին հավասարությունում a -ն (4) մատրիցան է,

k-ն՝ թիվ է, α-ն՝ (8) սլունային մատրիցան է: (12) հավասարութիան ձևն մասի մատրիցան կարելի է գրել այսպես.

$$(a - kE)\alpha = 0, \quad (13)$$

որտեղ E-ն n-րդ կարգի միավոր մատրիցան է: (13) հավասարութիւնը ծավալուն տեսքով գրվում է այսպես.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} = 0, \quad (14)$$

(12) հավասարութիւնը ցույց է տալիս, որ α վեկտորը a մատրիցայի միջոցով ձևափոխվում է իրեն զուգահեռ ka վեկտորին: Հետևաբար, α վեկտորը a մատրիցայի սեփական վեկտորն է, որը համապատասխանում է k սեփական արժեքին (տես § 11):

Սկալյար ձևով (12) հավասարութիւնը գրվում է որպես հանրահաշվական հավասարումների համակարգ (տես XIII գլխի § 30-ի (3) համակարգը, k թիվը պետք է որոշվի XIII գլխի § 30-ի (5) հավասարումից, որը մատրիցային ձևով կարելի է գրել այսպես.

$$\Delta(a - kE) = 0, \quad (15)$$

այսինքն՝ հետևյալ դետերմինանտը պետք է հավասար լինի զրոյի.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0, \quad (16)$$

Դիցուք (16) հավասարման բոլոր արմատները ասարեք են՝

$$k_1, k_2, \dots, k_n:$$

Յուրաքանչյուր k_j արժեքի համար (13) համակարգից որոշվում է α-ի արժեքների մատրիցան՝

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(1)} \end{vmatrix}$$

(այդ արժեքներից մեկը կամայական է): Հետևաբար, (1) համակարգի լուծումը մատրիցային ձևով գրվում է այսպես.

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \dots & \alpha_1^{(n)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \alpha_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^{(1)} & \alpha_n^{(2)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_1 e^{k_1 t} \\ C_2 e^{k_2 t} \\ \vdots \\ C_n e^{k_n t} \end{vmatrix}, \quad (17)$$

որտեղ C_j -երը կամայական հաստատուններ են, կամ կարճ՝

$$\|x\| = \|a\| \cdot \|C e^{kt}\|, \quad (18)$$

լուծումները սկալյար ձևով տրվում են XIII գլխի § 30-ի (6) բանաձևերով:

Օրինակ 1. Հետևյալ զծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը և համակարգի լուծումը գրել մատրիցային ձևով.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 + 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + 3x_2, \end{aligned}$$

Լուծում: Գրենք համակարգի մատրիցան

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Հավասարումների համակարգը մատրիցային ձևով գրվում է այսպես (տես (5) հավասարումը).

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}.$$

Կազմենք (15) բնութագրիչ հավասարումը և գտնենք նրա արմատները.

$$\begin{vmatrix} 2 - k & 2 \\ 1 & 3 - k \end{vmatrix} = 0, \text{ այսինքն, } k^2 - 5k + 4 = 0,$$

հետևաբար,

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 4.$$

$k_1 = 1$ արմատին համապատասխանող $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$ արժեքները որոշելու համար կազմում ենք (14) համակարգը.

$$\begin{aligned} (2-1)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} &= 0, \\ \alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

Ընդունելով $\alpha_1^{(1)} = 1$, ստանում ենք $\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2}$.

Նման ձևով գտնում ենք $\alpha_1^{(2)}$ -ը և $\alpha_2^{(2)}$ -ը, որոնք համապատասխանում են $k_2 = 4$ արմատին. Ստանում ենք.

$$\alpha_1^{(2)} = 1, \quad \alpha_2^{(2)} = 1.$$

Այժմ կարող ենք գրել համակարգի լուծումը մատրիցային ձևով (բանաձև 17)

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{4t} \end{vmatrix}$$

կամ սովորական ձևով՝

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^t + C_2 e^{4t}, \\ x_2 &= -\frac{1}{2} C_1 e^t + C_2 e^{4t}, \end{aligned}$$

Օրինակ 2: Հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը և համակարգի լուծումը գրել մատրիցային ձևով,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + 2x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 + x_2 + 3x_3, \end{aligned}$$

Լուծում: Գրենք համակարգի մատրիցան.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

Հետևաբար, հավասարումների համակարգը մատրիցային ձևով գրվում է այսպես (տես (5) հավասարումը).

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

կազմենք (16) բնութագրիչ հավասարումը և գտնենք նրա արմատները.

$$\begin{vmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 1 & 2-k & 0 \\ 1 & 1 & 3-k \end{vmatrix} = 1, \text{ այսինքն՝ } (1-k)(2-k)(3-k) = 0,$$

հետևաբար,

$$k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3:$$

$k_1 = 1$ արմատին համապատասխանող $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}$ արժեքները որոշենք

(14) հավասարումների համակարգից.

$$\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0,$$

$$\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + 2\alpha_3^{(1)} = 0,$$

գտնում ենք

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \quad \alpha_2^{(1)} = -1, \quad \alpha_3^{(1)} = 0,$$

$k_2 = 2$ արմատին համապատասխանող $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}$ արժեքները որոշենք

հետևյալ համակարգից.

$$-\alpha_1^{(2)} = 0,$$

$$\alpha_1^{(2)} = 0,$$

$$\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} = 0,$$

գտնում ենք $\alpha_1^{(2)} = 0, \alpha_2^{(2)} = 1, \alpha_3^{(2)} = -1:$

Որոշում ենք $k_3 = 3$ արմատին համապատասխանող $\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}$ արժեքները.

$$-2\alpha_1^{(3)} = 0,$$

$$\alpha_2^{(3)} - \alpha_3^{(3)} = 0,$$

$$\alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(3)} = 0,$$

գտնում ենք

$$\alpha_1^{(3)} = 0, \quad \alpha_2^{(3)} = 0, \quad \alpha_3^{(3)} = 1,$$

Համակարգի լուծումը գրենք մատրիցային ձևով (տես (17) բանաձևը)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

կամ սովորական ձևով՝

$$x_1 = C_1 e^t,$$

$$x_2 = -C_1 e^t + C_2 e^{2t},$$

$$x_3 = -C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t},$$

§ 18. n-րդ կարգի գծային հավասարման մատրիցային գրառումը

Դիցուք ունենք

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_n \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_{n-1} \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 x \quad (1)$$

հաստատուն գործակիցներով n-րդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումը: Նկատենք, որ հետագա շարադրանքից հետևելու է, որ գործակիցների այդպիսի համարակալումը հարմար է: Նշանակենք $x = x_1$ և այնուհետև

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3,$$

$$\dots$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n,$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n;$$

Գրենք այս համակարգի գործակիցների մատրիցան.

$$\|a^*\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Ենթադրելու ենք, որ $a(t)$ -ն անընդհատ ֆունկցիա է: Ժնչպես նշվել է XVI գլխի § 26-ում (6) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը (7) սկզբնական պայմանների դեպքում բերվում է

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t a(z)x(z)dz \quad (8)$$

ինտեգրալ հավասարման լուծմանը:

Այս հավասարումը կլուծենք հաջորդաբար մոտեցման մեթոդով

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + \int_{t_0}^t a(z)x_0 dz, \\ x_2 &= x_0 + \int_{t_0}^t a(z)x_1(z) dz, \\ &\dots \\ x_m &= x_0 + \int_{t_0}^t a(z)x_{m-1}(z) dz, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Գրառումը կրճատելու համար մտցնում են S ինտեգրման օպերատորը՝

$$S(\quad) = \int_{t_0}^t (\quad) dz \quad (10)$$

Փոտագործելով S օպերատորը, (9) հավասարությունը դրում են այսպես.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + S(ax_0), \\ x_2 &= x_0 + S(ax_1) = x_0 + S(a(x_0 + S(ax_0))), \\ x_3 &= x_0 + S(a(x_0 + S(a(x_0 + S(ax_0))))) , \\ &\dots \\ x_m &= x_0 + S(a(x_0 + S(a(x_0 + S(a(x_0 + S(a \dots))))))); \end{aligned}$$

Փակագծերը բացելով ստանում ենք.

$$x_m = x_0 + Sa x_0 + Sa Sa x_0 + Sa Sa Sa x_0 + \dots + \underbrace{Sa Sa Sa \dots Sa}_{m \text{ անգամ}} x_0$$

x_0 -ն դուրս հանելով փակագծից (x_0 -ն հաստատուն է), ստանում ենք.

$$x_m = [1 + Sa + Sa Sa + \dots + \underbrace{Sa Sa \dots Sa}_{m \text{ անգամ}}] x_0 \quad (11)$$

Վերևում (XVI գլխի § 26) ապացուցվել է, որ եթե $a(t)$ -ն ան-

ընդհատ ֆունկցիա է, ապա $\{x_m\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է: Այս հաջորդականության սահմանը

$$x = [1 + Sa + Sa Sa + \dots] x_0 \quad (12)$$

զուգամիտող շարքն է:

Ի հատուկ դեպքում: Եթե $a(t) = \text{const}$, ապա (12) բանաձևն ընդունում է պարզ տեսք: Իրոք, (10)-ի հիման վրա կարող ենք գրել.

$$\begin{aligned} Sa &= aS1 = a(t-t_0), \\ Sa Sa &= a^2 S(t-t_0) = a^2 \frac{(t-t_0)^2}{2}, \\ &\dots \\ \underbrace{Sa Sa \dots Sa}_{m \text{ անգամ}} &= a^m \frac{(t-t_0)^m}{m!}. \end{aligned}$$

Այս դեպքում (12)-ը ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$x = \left[2 + a \frac{t-t_0}{1} + a^2 \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + a^m \frac{(t-t_0)^m}{m!} + \dots \right] x_0$$

կամ

$$x = x_0 e^{a(t-t_0)} \quad (13)$$

Մեկ (6) հավասարման լուծման քննարկված մեթոդն ամբողջությամբ տեղափոխվում է (2) սկզբնական պայմաններով (1) համակարգի լուծման վրա:

(2) սկզբնական պայմանների դեպքում (1) համակարգի լուծումը մատրիցային ձևով գրվում է այսպես.

$$\frac{d}{dt} \|x\| = \|a(t)\| \|x\|, \quad (14)$$

սկզբնական պայմանները

$$\|x\| = \|x_0\| \quad \text{երբ } t = t_0, \quad (15)$$

Փոտագործելով մատրիցաների բազմապատկման և մատրիցաների ինտեգրման կանոնները, (14) համակարգի լուծումը (15) սկզբնական պայմանների դեպքում բերվում է

$$\|x(t)\| = \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|a(z)\| \cdot \|x(z)\| dz \quad (16)$$

մատրիցային ինտեգրալային հավասարման լուծմանը: Գտնում ենք

$$\|x_m(t)\| = \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|a(z)\| \|x_{m-1}(z)\| dz \quad (17)$$

հաջորդաբար մոտեցումները: Ենթադնենք, որ x_0 արտահայտությունն x_0 մեջ հաջորդաբար մոտեցումները հաջորդաբար տեղադրելու ճանապարհով համակարգի լուծումը մատրիցային ձևով կարտահայտվի այսպես.

$$\|x(t)\| = \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|a(z_1)\| \left(\|x_0\| + \int_{t_0}^{z_1} \|a(z_2)\| \left(\|x_0\| + \int_{t_0}^{z_2} \|a(z_3)\| (\dots) dz_3 \right) dz_2 \right) dz_1$$

կամ

$$\|x(t)\| = \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|a(z_1)\| \|x_0\| dz_1 + \int_{t_0}^t \|a(z_1)\| \int_{t_0}^{z_1} \|a(z_2)\| \|x_0\| dz_2 dz_1 + \dots \quad (18)$$

օգտագործելով S ինտեգրման օպերատորը, (8) հավասարությունը կարելի է գրել այսպես.

$$\|x(t)\| = [\|E\| + S\|a\| + S\|a\|S\|a\| + \dots] \|x_0\| \quad (19)$$

Քառակուսի փակագծերում գտնվող օպերատորը նշանակում են մեկ տառով: Այն նշանակենք $\mathcal{G}_{\|a\|}^{(t_0, t)}$ -ով: (19) հավասարությունը համարում են այսպես

$$\|x(t)\| = \mathcal{G}_{\|a\|}^{(t_0, t)} \|x_0\| \quad (20)$$

Հետաքրքիր է նշել հետևյալ հանգամանքը: Եթե (1) համակարգի գործակիցները հաստատուններ են, ապա օգտվելով մատրիցայի բոլոր անդամների ընդհանուր բազմապատկիչը մատրիցայի նշանից դուրս բերելու կանոնից*, կարող ենք գրել.

$$S\|a\| = \frac{t-t_0}{1} \|a\|,$$

$$S\|a\|S\|a\| = \frac{(t-t_0)^2}{2!} \|a\|^2,$$

$$S\|a\|S\|a\|S\|a\| = \frac{(t-t_0)^3}{3!} \|a\|^3$$

* Մատրիցաների նկատմամբ գործողությունների համար սահմանային անցման մասին հարցը չենք քննարկում:

(19) բանաձևը հաստատուն գործակիցների դեպքում ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$\|x(t)\| = \left[\|E\| + \frac{t-t_0}{1} \|a\| + \frac{(t-t_0)^2}{1 \cdot 2} \|a\|^2 + \dots + \frac{(t-t_0)^m}{m!} \|a\|^m + \dots \right] \|x_0\| \quad (21)$$

Վերջին հավասարությունը սիմվոլիկ ձևով գրում են այսպես.

$$\|x(t)\| = e^{(t-t_0)\|a\|} \|x_0\| \quad (22)$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ XXI ԳԼԵԻ ՎԵՐԱԲԵՐՑԱԼ

1. $y_1 = 3x_1 + 2x_2$, $y_2 = 7x_1 + 5x_2$ զծային ձևափոխության համար գտնել հակադարձ ձևափոխության մատրիցան.

$$\text{Պատ. } \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix},$$

2. Տրված է $y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = x_1$, Գտնել հակադարձ ձևափոխության մատրիցան.

$$\text{Պատ. } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},$$

3. Գտնել մատրիցաների արտադրյալը $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ և $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$.

$$\text{Պատ. } \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 18 & -4 \end{vmatrix},$$

4. Տրված են

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \text{ և } B = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

մատրիցաները, Գտնել AB և BA մատրիցաները.

$$\text{Պատ. } \begin{vmatrix} 4 & 4 & 19 \\ 9 & 0 & 16 \\ 13 & -2 & 20 \end{vmatrix} \text{ և } \begin{vmatrix} 26 & 3 & 22 \\ 14 & -1 & 8 \\ 5 & -4 & -1 \end{vmatrix},$$

5. Տրված են $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, E -ն 3 -րդ կարգի միավոր մատրիցան է, Որոշել $A + 2E$ մատրիցան.

$$\text{Պատ. } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix},$$

6. Տրված է $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ մատրիցան, Գտնել A^2 մատրիցան.

$$\text{Պատ. } \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{vmatrix},$$

7. $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, Գտնել $A^2 + 5A$ մատրիցան:

Պատ. $\begin{vmatrix} 12 & 20 \\ 30 & 42 \end{vmatrix}$,

8. Գտնել $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ մատրիցայի հակադարձ մատրիցան:

Պատ. $\begin{vmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{vmatrix}$,

9. Տրված է հետևյալ հավասարումների համակարգը:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 20, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30. \end{aligned}$$

Նրա լուծումները գրել մատրիցային ձևով և գտնել x_1 -ը, x_2 -ը, x_3 -ը:

Պատ. $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{vmatrix}$, $x_1 = 30$, $x_2 = 20$, $x_3 = -60$.

10. Տրված է հետևյալ հավասարումների համակարգը:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 11, \\ 10x_1 + 5x_2 + x_3 &= 11,5. \end{aligned}$$

Նրա լուծումը գրել մատրիցային ձևով և գտնել x_1 -ը, x_2 -ը, x_3 -ը:

Պատ. $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 11 \\ 11,5 \end{vmatrix}$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1,5$.

11. Գտնել

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

մատրիցայի սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները:

Պատ. $k_1 = 6$, $k_2 = k_3 = -3$, $\tau_j = mi + \frac{1}{2}mj - mk$, τ_2 -ը կամայական վեկտոր է, որը բավարարում է $(\tau_j - 2) = 0$, պայմանին, m -ը կամայական թիվ է:

12. Գտնել

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

մատրիցայի սեփական վեկտորները:

Պատ. Գոյություն չունեն:

13. Գտնել

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

մատրիցայի սեփական վեկտորները:

Պատ. Բոլոր վեկտորները սեփական են,

14. Մատրիցային եղանակով լուծել

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} + x_2 &= 0, \\ \frac{dx_2}{dt} + 4x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Դժային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը:

Պատ. $x_1 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$, $x_2 = -2(C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t})$,

ՀԱՎԵԼՎԱԾՆԵՐ

Աղյուսակ 1

$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ ֆունկցիայի և $\hat{\Phi}(x) = \Phi(\rho x)$ Լապլասի բերված ֆունկցիայի արժեքները

x	Φ(x)	Δ	Φ̂(x)	Δ	x	Φ(x)	Δ	Φ̂(x)	Δ
0,00	0,0000	564	0,0000	269	1,40	0,9523	74	0,6550	169
0,05	0,0564	561	0,0269	269	1,45	0,9597	64	0,6719	164
0,10	0,1125	555	0,0538	268	1,50	0,9661	55	0,6883	159
0,15	0,1680	547	0,0806	267	1,55	0,9716	47	0,7042	153
0,20	0,2227	536	0,1073	266	1,60	0,9736	41	0,7195	147
0,25	0,2763	523	0,1339	265	1,65	0,9804	34	0,7342	143
0,30	0,3286	508	0,1604	262	1,70	0,9838	29	0,7485	136
0,35	0,3794	490	0,1866	261	1,75	0,9867	24	0,7621	132
0,40	0,4284	471	0,2127	258	1,80	0,9891	20	0,7753	126
0,45	0,4755	450	0,2385	256	1,85	0,9911	17	0,7879	121
0,50	0,5205	428	0,2641	252	1,90	0,9928	14	0,8000	116
0,55	0,5633	406	0,2893	250	1,95	0,9942	11	0,8116	111
0,60	0,6039	381	0,3143	246	2,00	0,9953	10	0,8227	105
0,65	0,6420	358	0,3389	243	2,05	0,9963	7	0,8332	102
0,70	0,6778	334	0,3632	238	2,10	0,9970	6	0,8434	96
0,75	0,7112	309	0,3870	235	2,15	0,9976	5	0,8530	92
0,80	0,7421	286	0,4105	231	2,20	0,9981	4	0,8622	87
0,85	0,7707	262	0,4336	226	2,25	0,9985	3	0,8709	83
0,90	0,7969	240	0,4562	221	2,30	0,9988	3	0,8792	79
0,95	0,8209	218	0,4783	217	2,35	0,9991	2	0,8871	74
1,00	0,8427	197	0,5000	212	2,40	0,9993	2	0,8945	71
1,05	0,8624	178	0,5212	207	2,45	0,9995	1	0,9016	66
1,10	0,8802	159	0,5419	201	2,50	0,9996	1	0,9082	64
1,15	0,8961	142	0,5620	197	2,55	0,9997	1	0,9146	59
1,20	0,9103	126	0,5817	191	2,60	0,9998	0	0,9205	56
1,25	0,9229	111	0,6008	186	2,65	0,9998	1	0,9261	53
1,30	0,9340	98	0,6194	181	2,70	0,9999	0	0,9314	50
1,35	0,9438	85	0,6375	175	2,75	0,9999	0	0,9364	46

ՀԱՎԵԼՎԱԾՆԵՐ

Աղյուսակ 1 (շարունակությունը)

x	Φ(x)	Δ	Φ̂(x)	Δ	x	Φ(x)	Δ	Φ̂(x)	Δ
2,80	0,9999	1	0,9410	44	3,90			0,9915	15
2,85			0,9454	41	4,00			0,9930	13
2,90			0,9495	39	4,10			0,9943	11
2,95			0,9534	36	4,20			0,9954	9
3,00	1,0000		0,9570	33	4,30			0,9963	7
3,05			0,9603	32	4,40			0,9970	6
3,10			0,9645	29	4,50			0,9976	5
3,15			0,9664	27	4,60			0,9981	4
3,20			0,9691	25	4,70			0,9985	3
3,25			0,9716	24	4,80			0,9988	3
3,30			0,9740	21	4,90			0,9991	2
3,35			0,9761	21	5,00			0,9993	1
3,40			0,9782	36	5,10			0,9994	2
3,50			0,9818	30	5,20			0,9996	1
3,60			0,9848	26	5,30			0,9997	0
3,70			0,9874	22	5,40			0,9997	
3,80			0,9896	19					

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Աղյուսակ 2

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
0,00	0,3989	1,00	0,2420	2,00	0,0540
0,05	0,3984	1,05	0,2299	2,05	0,0488
0,10	0,3970	1,10	0,2179	2,10	0,0440
0,15	0,3945	1,15	0,2059	2,15	0,0396
0,20	0,3910	1,20	0,1942	2,20	0,0355
0,25	0,3867	1,25	0,1826	2,25	0,0317
0,30	0,3814	1,30	0,1714	2,30	0,0283
0,35	0,3752	1,35	0,1604	2,35	0,0252
0,40	0,3683	1,40	0,1497	2,40	0,0224
0,45	0,3605	1,45	0,1394	2,45	0,0198
0,50	0,3521	1,50	0,1295	2,50	0,0175
0,55	0,3429	1,55	0,1200	2,55	0,0154
0,60	0,3332	1,60	0,1109	2,60	0,0136
0,65	0,3230	1,65	0,1023	2,65	0,0119
0,70	0,3123	1,70	0,0940	2,70	0,0104
0,75	0,3011	1,75	0,0863	2,75	0,0091
0,80	0,2897	1,80	0,0790	2,80	0,0079
0,85	0,2780	1,85	0,0721	2,85	0,0069
0,90	0,2661	1,90	0,0656	2,90	0,0060
0,95	0,2541	1,95	0,0596	2,95	0,0051

ՀԱՎԵԼՎԱԾՆԵՐ

Ա գ յ ու ս ա կ 2 (շարունակությունը)

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
3,00	0,0044	3,35	0,0015	3,70	0,0004
3,05	0,0038	3,40	0,0012	3,75	0,0004
3,10	0,0033	3,45	0,0010	3,80	0,0003
3,15	0,0028	3,50	0,0009	3,85	0,0002
3,20	0,0024	3,55	0,0007	3,90	0,0002
3,25	0,0020	3,60	0,0006	3,95	0,0002
3,30	0,0017	3,65	0,0005	4,00	0,0001

Ա գ յ ու ս ա կ 3

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$
 Ֆունկցիայի արժեքները

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,95	0,3289	1,90	0,4713
0,01	0,0040	1,00	0,3413	2,00	0,4772
0,05	0,0199	1,05	0,3531	2,10	0,4821
0,10	0,0398	1,10	0,3643	2,20	0,4861
0,15	0,0596	1,15	0,3749	2,30	0,4893
0,20	0,0793	1,20	0,3849	2,40	0,4918
0,25	0,0987	1,25	0,3944	2,50	0,4938
0,30	0,1179	1,30	0,4032	2,60	0,4953
0,35	0,1368	1,35	0,4115	2,70	0,4965
0,40	0,1554	1,40	0,4192	2,80	0,4974
0,45	0,1736	1,45	0,4265	2,90	0,4981
0,50	0,1915	1,50	0,4332	3,00	0,49865
0,55	0,2088	1,55	0,4394	3,20	0,49931
0,60	0,2257	1,60	0,4452	3,40	0,49966
0,65	0,2422	1,65	0,4505	3,60	0,499841
0,70	0,2580	1,70	0,4554	3,80	0,499927
0,75	0,2734	1,75	0,4599	4,00	0,499968
0,80	0,2881	1,80	0,4641	4,50	0,499997
0,85	0,3023	1,85	0,4678	5,00	0,500000
0,90	0,3159				

ԲՈՎԱՆՂԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ֆունկցիայի ճշգրտագույն արժեքները 3
 Հինգերորդ ճշգրտագույն արժեքները 5

XIII ԳՆՈՒՆ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§ 1. Խնդրի զրկվածքը: Մարմնի շարժման հավասարումը, երբ միջավայրի դիմադրությունը համեմատական է արագությանը: Շղթայագծի հավասարումը 7
 § 2. Սահմանումներ 10
 § 3. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ (ընդհանուր հասկացություններ) 12
 § 4. Կենտրոնացված և անկենտրոն փոփոխականներով հավասարումներ: Խնդիր ուղղանկյուն շարժման մասին 18
 § 5. Առաջին կարգի համասեռ հավասարումներ 22
 § 6. Համասեռ բերվող հավասարումներ 24
 § 7. Առաջին կարգի գծային հավասարումներ 28
 § 8. Բեռնուլիի հավասարումը 32
 § 9. Լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարում 34
 § 10. Ինտեգրող բազմապատկիչ 37
 § 11. Կորեի ընտանիքի պարուրիչը 39
 § 12. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման եղակի լուծումները 47
 § 13. Կլերուլի հավասարումը 48
 § 14. Լագրանժի հավասարումը 51
 § 15. Օրթոգոնալ և իզոթոնալ հեռագծեր 53
 § 16. Բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ (ընդհանուր հասկացություն) 58
 § 17. $\Psi^{(n)} = f(x)$ տեսքի հավասարում 60
 § 18. Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների մի քանի տիպեր: որոնք բերվում են առաջին կարգի հավասարումների: Խնդիր երկրորդ անկյունային արագության վերաբերյալ 62

§ 19. Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրման գրաֆիկական մեթոդը	71
§ 20. Գծային համասեռ հավասարումներ: Սահմանումներ և ընդհանուր հասկացություններ	73
§ 21. Հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի համասեռ հավասարումներ	81
§ 22. Ուրդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ հավասարումներ	86
§ 23. Երկրորդ կարգի անհամասեռ գծային հավասարումներ	85
§ 24. Երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով անհամասեռ գծային հավասարումներ	92
§ 25. Բարձր կարգի գծային անհամասեռ հավասարումներ	99
§ 26. Մեխանիկական տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումը	103
§ 27. Ազատ տատանումներ: Հարմոնիկ տատանումների վեկտորական և կոմպլեքս պատկերումը	105
§ 28. Հարկադրական տատանումներ	109
§ 29. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգեր	113
§ 30. Հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգեր	119
§ 31. Գաղափար կյանությունի կայունության տեսության մասին: Գիֆերենցիալ հավասարման հետագծի վարքը եզակի կետի շրջակայքում	126
§ 32. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր լուծումը էլլերի մեթոդով	143
§ 33. Գիֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր լուծման տարբերական մեթոդը, որը հիմնված է Թեյլոր բանաձևի վրա: Ազատի մեթոդը	146
§ 34. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ինտեգրման մոտավոր մեթոդ	153
Վարժություններ XIII գլխի վերաբերյալ	158

XIV ԳԼՈՒԽ

ԲԼՁՄԱՊԱՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§ 1. Կրկնակի ինտեգրալ	172
§ 2. Կրկնակի ինտեգրալի հաշվումը	175
§ 3. Կրկնակի ինտեգրալի հաշվումը (շարունակություն)	181
§ 4. Մակերեսների և ծավալների հաշվումը կրկնակի ինտեգրալների միջոցով	185
§ 5. Կրկնակի ինտեգրալը բևեռային կոորդինատներով	191
§ 6. Փոփոխականների փոխարինումը կրկնակի ինտեգրալում (ընդհանուր դեպք)	195
§ 7. Մակերեսային մակերեսի հաշվումը	204
§ 8. Նյութի բաշխման խտությունը և կրկնակի ինտեգրալը	207
§ 9. Հարթ պատկերի մակերեսի ինտեգրալի մոմենտը	209
§ 10. Հարթ պատկերի մակերեսի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները	214
§ 11. Եռակի ինտեգրալ	216
§ 12. Եռակի ինտեգրալի հաշվումը	217
§ 13. Փոփոխականների փոխարինումը եռակի ինտեգրալում	222

§ 14. Ինտեգրալի մոմենտը և ծանրության կենտրոնի կոորդինատները	227
§ 15. Պարամետրից կախված ինտեգրալների հաշվումը	229
Վարժություններ XIV գլխի վերաբերյալ	230

XV ԳԼՈՒԽ

ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ ԸՍՏ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅՑԻ

§ 1. Կորագիծ ինտեգրալ	237
§ 2. Կորագիծ ինտեգրալի հաշվումը	240
§ 3. Գրինի բանաձևը	247
§ 4. Էնտեգրման ճանապարհից կորագիծ ինտեգրալի անկախության պայմանները	249
§ 5. Մակերևութային ինտեգրալ	255
§ 6. Մակերևութային ինտեգրալի հաշվումը	257
§ 7. Ստորսի բանաձևը	260
§ 8. Օտարողրադսկու բանաձևը	266
§ 9. Համիլտոնի օպերատորը: Նրա մի քանի կիրառությունները	268
Վարժություններ XV գլխի վերաբերյալ	273

XVI ԳԼՈՒԽ

ՇՐՔԵՐ

§ 1. Շարք: Շարքի գումարը	279
§ 2. Շարքի դուրամիտության անհրաժեշտ հայտանիշը	282
§ 3. Դրական անդամներով շարքերի բաղդատումը	285
§ 4. Դալամբերի հայտանիշը	287
§ 5. Կոշիի հայտանիշը	291
§ 6. Զուգամիտության ինտեգրալային հայտանիշը	294
§ 7. Հերթադաշտը նշաններով շարքեր: Հայրնիցի թեորեմը	297
§ 8. Նշանափոխ շարքեր: Բացարձակ և պայմանական դուրամիտություն	300
§ 9. Ֆունկցիոնալ շարքեր	304
§ 10. Մաժորացվող շարքեր	305
§ 11. Շարքի գումարի անընդհատությունը	308
§ 12. Շարքերի ինտեգրումը և դիֆերենցումը	311
§ 13. Աստիճանային շարքեր: Զուգամիտության միջակայք	314
§ 14. Աստիճանային շարքերի դիֆերենցումը	319
§ 15. Շարքերը ըստ $(x-a)$ -ի աստիճանների	321
§ 16. Թեյլորի և Մակլորենի շարքերը	322
§ 17. Ֆունկցիաները շարքերի վերածելու օրինակներ	324
§ 18. էլլերի բանաձևը	327
§ 19. Երկանդամային շարք	328
§ 20. $\ln(1+x)$ ֆունկցիայի վերլուծությունը աստիճանային շարքի: Լոգարիթմներ	330

§ 21. Որոշել ինտեգրալների հաշվումը շարքերի օֆնոթյամբ	333
§ 22. Դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրումը շարքերի միջոցով	335
§ 23. Բեռնի հավասարումը	388
§ 24. Կոմպլեքս անդամներով շարքեր	343
§ 25. Կոմպլեքս փոփոխականով աստիճանային շարքեր	345
§ 26. Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը հաջորդական մոտեցումների մեթոդով (խեռացիայի մեթոդով)	348
§ 27. Դիֆերենցիալ հավասարման լուծման զոյուսթյան ասլացուցումը: Մոտավոր լուծման ժամանակ կատարած սխալանքի գնահատականը	349
§ 28. Դիֆերենցիալ հավասարման լուծման միակության թեորեմը	355
Վարժություններ XVI գլխի վերաբերյալ	357

XVII ԳԼՈՒԽ

ՖՈՐՄԱԿԱՆ ԸՆԴՈՒՄՆԵՐ

§ 1. Սահմանում: Խնդրի զրվածքը	366
§ 2. Ֆունկցիաների՝ Ֆուրյեի շարքերի վերլուծության օրինակներ	371
§ 3. Մի դիտողություն պարբերական ֆունկցիան Ֆուրյեի շարքի վերլուծելու վերաբերյալ	376
§ 4. Ֆուրյեի շարքերը զույգ և կենտ ֆունկցիաների համար	379
§ 5. Ֆուրյեի շարքը 2l պարբերությամբ ֆունկցիայի համար	380
§ 6. Ոչ պարբերական ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքի վերլուծության մասին	382
§ 7. Տրված ֆունկցիային միջին իմաստով մոտարկումը եռանկյունաշափաղկան բազմանդամի միջոցով	384
§ 8. Դիրիխլեի ինտեգրալը	391
§ 9. Ֆուրյեի շարքի գույզամիտությունը տրված կետում	394
§ 10. Ֆուրյեի շարքի գույզամիտության մի քանի բավարար պայմաններ	396
§ 11. Գործնական հարմոնիկ անալիզ	399
§ 12. Ֆուրյեի շարքը կոմպլեքս տեսքով	400
§ 13. Ֆուրյեի ինտեգրալը	402
§ 14. Ֆուրյեի ինտեգրալը կոմպլեքս տեսքով	407
§ 15. Ֆուրյեի շարքն ըստ ֆունկցիաների օրթոգոնալ համակարգի	410
§ 16. Գաղափար գծային ֆունկցիոնալ տարածության մասին: Համանմանություն ֆունկցիաների Ֆուրյեի շարքի վերլուծության և վեկտորների վերլուծության միջև	413
Վարժություններ XVII գլխի վերաբերյալ	418

XVIII ԳԼՈՒԽ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§ 1. Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների հիմնական տիպերը	420
§ 2. Կարի տատանման հավասարման արտածումը: Մայրային խնդրի ձևակերպումը: Հաղորդակարգում էլեկտրական տատանումների հավասարումների արտածումը	421

§ 3. Կարի տատանումների հավասարման լուծումը փոփոխականների անջատման մեթոդով (Ֆուրյեի մեթոդով)	425
§ 4. Չորում շերմության տարածման հավասարումը: Մայրային խնդրի ձևակերպումը	429
§ 5. Զերմության տարածումը տարածության մեջ	432
§ 6. Զերմահաղորդականության հավասարման համար առաջին ծայրային խնդրի լուծումը վերջավոր տարբերությունների մեթոդով	436
§ 7. Զերմության տարածումը անահամանափակ ձողում	438
§ 8. Խնդիրներ, որոնք բերում են Լապլասի հավասարման լուծումների հետադարձությանը: Մայրային խնդիրների ձևակերպումը	444
§ 9. Լապլասի հավասարումը զլանային կոորդինատներով: Դիրիխլեի խնդրի լուծումն այնպիսի օղակի համար, որի ներքին և արտաքին շրջանագծերի վրա որոնվող ֆունկցիան ունի հաստատուն արժեքներ	450
§ 10. Դիրիխլեի խնդրի լուծումը շրջանի համար	452
§ 11. Դիրիխլեի խնդրի լուծումը վերջավոր տարբերությունների մեթոդով Վարժություններ XVIII գլխի վերաբերյալ	456
Վարժություններ XVIII գլխի վերաբերյալ	459

XIX ԳԼՈՒԽ

ՓԳԵՐԱՑԻՈՆ ՀԱՇՎ ԵՎ ՆՐԱ ՄԻ ԲԱՆԻ ԿԵՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

§ 1. Սկզբնական ֆունկցիա և նրա պատկերը	463
§ 2. $\sigma_n(t)$, sint , cost ֆունկցիաների պատկերը	465
§ 3. Ֆունկցիայի պատկերը, երբ անկախ փոփոխականի մասշտաբը փոփոխված է: sinat , cosat ֆունկցիաների պատկերը	467
§ 4. Պատկերի գծայնության հատկությունը	468
§ 5. Տեղաշարժման թեորեմը	469
§ 6. e^{-at} , shat , chat , e^{-ai} sinat , e^{-at} cosat ֆունկցիաների պատկերները	469
§ 7. Պատկերի դիֆերենցումը	471
§ 8. Պծանցյալների պատկերը	473
§ 9. Մի բունի պատկերների աղյուսակ	474
§ 10. Տրված դիֆերենցիալ հավասարման համար օժանդակ հավասարում	476
§ 11. Վերլուծման թեորեմը	481
§ 12. Օպերացիոն մեթոդով դիֆերենցիալ հավասարումների և դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծման օրինակներ	483
§ 13. Փախարման թեորեմը	485
§ 14. Մեխանիկական տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումներ: էլեկտրական շղթաների տեսության դիֆերենցիալ հավասարումներ	487
§ 15. Տատանումների դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը	489
§ 16. Աղատ տատանումների հետադարձությունը	491
§ 17. Մեխանիկական և էլեկտրական տատանումների հետադարձությունը պարբերական արտաքին ուժերի դեպքում	492
§ 18. Տատանումների հավասարման լուծումը սեղանանսի դեպքում	494
§ 19. Ուշացման թեորեմը	496
§ 20. Դերտա-ֆունկցիան և նրա պատկերը	497
Վարժություններ XIX գլխի վերաբերյալ	501

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԵՐԸ

§ 1. Պատահույթ: Պատահույթի հավանականությունը: 508
 Հավանականությունների տեսության առարկան 504

§ 2. Հավանականության դասական սահմանումը և հավանականությունների անմիջական հաշվումը 506

§ 3. Հավանականությունների զումարումը: Հակադիր պատահույթներ 509

§ 4. Անկախ պատահույթների հավանականությունների բազմապատկումը 513

§ 5. Կախյալ պատահույթներ: Պայմանական հավանականություն: Լրիվ հավանականություն 515

§ 6. Հիպոթեզների հավանականությունը: Բայեսի բանաձևը 519

§ 7. Գիտելիս պատահական մեծություն: Գիտելիս պատահական մեծության բաշխման օրենքը 522

§ 8. Հարաբերական հաճախությունը և հարաբերական հաճախության հավանականությունը կրկնվող փորձարկումների դեպքում 525

§ 9. Գիտելիս պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը 530

§ 10. Գիսպերիս: Միջին քառակուսային շեղում: Հասկացություն մոմենտների մասին 536

§ 11. Պատահական մեծությունների ֆունկցիաներ 539

§ 12. Անընդհատ պատահական մեծություն: Անընդհատ պատահական մեծության բաշխման խտությունը: Պատահական մեծության՝ տվյալ միջակայքն ընկրելու հավանականությունը 541

§ 13. Բաշխման ֆունկցիան կամ բաշխման ինտեգրալային օրենքը: Հավանականությունների հավասարաչափ բաշխման օրենքը 545

§ 14. Անընդհատ պատահական մեծության թվային բնութագրերը 549

§ 15. Բաշխման նորմալ օրենքը: Նորմալ բաշխման մաթեմատիկական սպասումը 552

§ 16. Բաշխման նորմալ օրենքին ենթարկվող պատահական մեծության դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը 554

§ 17. Պատահական մեծության արժեքի՝ տվյալ միջակայքն ընկնելու հավանականությունը: Կապլասի ֆունկցիան: Բաշխման ինտեգրալային ֆունկցիան նորմալ բաշխման համար 556

§ 18. Հավանական շեղում կամ հավանական սխալ 561

§ 19. Բաշխման նորմալ օրենքի արտահայտությունը հավանական շեղման միջոցով: Կապլասի բերված ֆունկցիան 563

§ 20. Նրեր սիզմանների կանոնը: Սխալների բաշխման հավանականությունների աննպակը 565

§ 21. Միջին թվաբանական սխալ 567

§ 22. Զջրտություն շափր: Սխալների բաշխման բնութագրերի միջև Լոզձ առնությունը 567

§ 23. Երկչափ պատահական մեծություն 568

§ 24. Նորմալ բաշխման օրենքը հարթության վրա 573

§ 25. Երկչափ պատահական մեծությունը ցրման գլխավոր առանցքներին ղուգահեռ կողմեր ունեցող ուղղանկյան մեջ ընկնելու հավանականությունը բաշխման նորմալ օրենքի դեպքում 574

§ 26. Երկչափ պատահական մեծությունը ցրման Էլիպսի մեջ ընկնելու հավա-

հակառակությունը 577

§ 27. Մաթեմատիկական վիճակագրության խնդիրները: Վիճակագրական նյութ 578

§ 28. Վիճակագրական շարք: Հիստոգրամ 580

§ 29. Չափվող մեծության հարմար արժեքի որոշումը 583

§ 30. Բաշխման օրենքի պարամետրերի որոշումը: Լյապունովի թեորեմը: Կապլասի թեորեմը 587

Վարժություններ XX գլխի վերաբերյալ 589

XXI Գլուխ

ՄԱՏՐԻՑԱՆԵՐ: ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԳՐԱՌՈՒՄԸ

§ 1. Գծային ձևափոխություններ: Մատրիցա 593

§ 2. Մատրիցայի գազափարի հետ կապված ընդհանուր սահմանումներ 597

§ 3. Հակադարձ ձևափոխություն 599

§ 4. Գործողություններ մատրիցաների նկատմամբ: Մատրիցաների գումարումը 601

§ 5. Մատրիցայի միջոցով վեկտորի ձևափոխությունը ուրիշ վեկտորի 605

§ 6. Հակադարձ մատրիցա 607

§ 7. Տրված մատրիցայի հակադարձ մատրիցայի գտնելը 608

§ 8. Գծային հավասարումների համակարգի և նրա լուծման մատրիցային գրառումը 610

§ 9. Գծային հավասարումների համակարգի լուծումը մատրիցային մեթոդով 611

§ 10. Օրթոգոնալ արտապատկերումներ: Օրթոգոնալ մատրիցաներ 614

§ 11. Գծային ձևափոխության սեփական վեկտորը 617

§ 12. Գծային ձևափոխության մատրիցա, որի դեպքում բազիսային վեկտորները սեփական վեկտորներն են 620

§ 13. Գծային ձևափոխության մատրիցայի ձևափոխությունը մեկ բազիսից մյուսին անցնելիս 622

§ 14. Քառակուսային ձևերը և դրանց ձևափոխությունները 624

§ 15. Մատրիցայի ուսնգը: Գծային հավասարումների համակարգի լուծումների ղույությունը 626

§ 16. Մատրիցաների դիֆերենցուն ու ինտեգրումը 628

§ 17. Դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի և հաստատուն գործաչիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծումների մատրիցային գրառումը 630

§ 18. Ուրղ կարգի գծային հավասարման մատրիցային գրառումը 635

§ 19. Փոփոխական գործաչիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծումը հաջորդաբար մոտեցումների մեթոդով՝ մատրիցային գրառման օգտագործմամբ 636

Վարժություններ XXI գլխի վերաբերյալ 641

ՀԱՎԵԼՎԱԾՆԵՐ 644

ՆԻԿՈԼԱՅ ՍԵՄՅՈՆՈՎԻՉ
ՊԻՍԿՈՒՆՈՎ

ՊԻՃԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎՆԵՐ

Թարգմանիչ՝ Հ. Հ. ԲԱԲԱՅԱՆ

Մասնագետ խմբագիր՝ Վ. Խ. ԹՈՐԳՈՄՅԱՆ

Խմբագիր՝ Ի. Հ. Պողոսյան
Տեխն. խմբագիր՝ Ա. Կ. Տոնոյան
Գեղ. խմբագիր՝ Խ. Հ. Գյուլամիրյան
Վերստուգող սրբագրիչ՝ Գ. Ն. Երզնկյան, Ս. Հ. Զավախյան

Պատվեր 108

Տպաքանակ 7000

Հանձնված է շարվածքի 15.03.79 թ.: Ստորագրված է տպագրության 18.10.1979 թ.:
Փուլթ № 3, 60×90^{1/16}: Բարձր տպագրություն, տառատեսակը՝ զրբի սովորական
Տպագր. 41.0 մամուլ, հրատ. 36,45 մամուլ: Գինը 1 ո. 15 Կ.: ԻԵ № 475

«Լույս» հրատարակչություն, Երևան-9, Կիրովի փ. 19ա:

Издательство «Луйс», Ереван-9, ул. Кирова 19а.

ՀՅՍՀ հրատարակչությունների, պոլիգրաֆիայի և զրբի առևտրի գործերի պետական
կոմիտեի № 1 տպարան, Երևան, Ալավերդյան փող. № 65:

Типография № 1 Госкомитета Арм. ССР по делам издательств, по-
лиграфии и книжной торговли, Ереван, ул. Алавердяна, 65.