Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный технический университет»

В.П. Первадчук, С.Н. Трегубова, Д.Б. Шумкова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие

Издательство
Пермского государственного технического университета
2007

УДК 517
ББК 22.11
П26

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
В.Ю. Пирогов – кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой прикладной информатики
ГОУ ВПО «Шадринский государственный педагогический институт»;

А.Р. Абдуллаев – доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей математики
ГОУ ВПО «Пермский государственный технический университет»

Первадчук, В.П.

П26 Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / В.П. Первадчук, С.Н. Трегубова, Д.Б. Шумкова. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2007. – 450 с.

ISBN 978-5-88151-850-9

В учебном пособии изложены основы математического анализа, линейной алгебры, векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциальных уравнений, рядов, линейного программирования, теории вероятностей и математической статистики. Содержит примеры решения типовых задач, экономические приложения и модели, контрольные вопросы, варианты контрольных работ по всем темам, представленным в данном пособии. Материал соответствует государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования

Учебное пособие предназначено для студентов экономических специальностей вузов, экономистов, а также для тех, кто хочет самостоятельно углубить свои знания по математике и ее приложениям в экономике.

Издано в рамках приоритетного национального проекта «Образование» по программе Пермского государственного технического университета «Создание инновационной системы формирования профессиональных компетенций кадров и центра инновационного развития региона на базе многопрофильного технического университета».

ISBN 978-5-88151-850-9

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель изучения математики в вузе – овладение основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и прикладных задач; формирование умений формализации задач, представления их в виде математических моделей, анализа и интерпретации полученных результатов; выработка навыков математического исследования прикладных вопросов; формирование математической культуры, развитие математического мышления, знаний и умений в использовании математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности.

Данная дисциплина относится к циклу ЕН, федеральному компоненту рабочего учебного плана. Является фундаментом математического образования выпускников по направлению «Экономика», ориентирована на применение математических методов к решению прикладных задач с учетом характера будущей профессиональной деятельности выпускников.

В результате изучения дисциплины студент должен:

иметь представление: о математике как особом способе познания мира, общности ее понятий и представлений; о математическом моделировании;

знать: основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления, векторного анализа и теории поля, функционального анализа, гармонического анализа, последовательностей и рядов, теории функций комплексного переменного, линейного программирования, теории вероятностей и математической статистики;

уметь выполнять: исследование, аналитическое и численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений; аналитическое и численное решение алгебраических уравнений; вероятностные модели для конкретных процессов и проводить необходимые расчеты в рамках построенной модели;

владеть: основными приемами обработки экспериментальных данных; основными приемами построения и анализа математических моделей экономических процессов;

иметь навыки: употребления математической символики для выражения количественных и качественных отношений объектов; построения простейших математических моделей и ориентации в возможностях их реализации на вычислительной технике.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов экономических специальностей высших учебных заведений. Данное пособие содержит основной теоретический материал, необходимый для освоения курса высшей математики, примеры решения типовых задач, контрольные задания по следующим разделам: элементы линейной алгебры, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной, интегральное исчисление функции одной переменной, функции нескольких переменных, ряды, дифференциальные уравнения, элементы линейного программирования, теория вероятностей и математическая статистика.

В изложении материала почти отсутствует доказательная база, т.к. основное внимание уделено приобретению навыков использования математического аппарата. Всего предусматривается выполнение 11 контрольных работ, каждая из которых содержит 30 вариантов.

Изучение математики и ее методов в экономике, составляющих основу современной экономической математики, позволит будущему специалисту приобрести необходимые базовые навыки, расширить кругозор, повысить уровень мышления и общую культуру. Все это понадобится ему для ориентации в профессиональной деятельности и успешной работы.

Учебное пособие предназначено для студентов экономических специальностей вузов, экономистов, а также для тех, кто хочет самостоятельно углубить свои знания по математике и ее приложениям в экономике.

Тема 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Основные теоретические сведения

1. *Определителем* (или детерминантом) n-го порядка называется число D, равное алгебраической сумме $n!$ членов, составленных определенным образом из элементов a_{ij} определителя. Рассмотрим определитель n-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n–1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца и умноженный на $(-1)^{i+j}$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n–1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

Определитель n-го порядка может быть вычислен с помощью разложения по элементам i-й строки (или j-го столбца):

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

(разложение определителя по элементам i-й строки),

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

(разложение определителя по элементам j-го столбца).

Определителем второго порядка называется число, определяемое как

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определителем третьего порядка называется число, определяемое как

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Свойства определителей n-го порядка:

1^0. Величина определителя не изменится, если его строки и столбцы поменять местами.

2^0. Перестановка двух столбцов или двух строк определителя равносильна умножению его на -1.

3^0. Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.

4^0. Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя на любое число λ равносильно умножению определителя на это число λ.

5^0. Если все элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

6^0. Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

7^0. Если каждый элемент n-го столбца (n-й строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в n-м столбце (n-й строке) имеет первые из названных слагаемых, а другой – вторые; элементы, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же.

2. Матрицей $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица размера $n\times n$ называется квадратной матрицей n-го порядка. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ образуют *главную диагональ* матрицы. Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, называется определителем матрицы и обозначается $|A|$ или $\det A$.

Матрица E с элементами $a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad i=j, \\ 0 & \text{при} \quad i\neq j \end{cases}$ называется *единичной матрицей* n-го порядка.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A ($\det A\neq 0$), если

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E. \tag{1}$$

Элементы a_{ij}^{-1} обратной матрицы $A^{-1}=(a_{ij}{}^{-1})$ вычисляются по формулам

$$a_{ij}{}^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A_{ij}{}^{T}, \tag{2}$$

где $A_{ij}{}^{T}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} транспонированной матрицы.

Действия с матрицами.

1. Суммой матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C=(c_{ij})$ того же размера, причем $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.

2. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, что и матрица *A*, причем $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

3. Произведением $A \cdot B$ матриц *A* и *B* (размеров $m \times r$ и $r \times n$ соответственно) называется матрица *C* размера $m \times n$, такая, что

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{in} \cdot b_{nj} \qquad (3)$$

(поэлементное умножение *i*-й строки матрицы *A* на *k*-й столбец матрицы *B*).

4. Транспонированной к матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $A^T = (a_{ij}^T)$ такая, что $a_{ij}^T = a_{ji}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

3. Матрица A_r называется *канонической*, если в начале ее главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Любая матрица *A* может быть приведена к каноническому виду A_r путем элементарных преобразований:

1) перестановки столбцов (строк);

2) умножения элементов столбца (строки) на число, отличное от нуля;

3) прибавления к элементам какого-либо столбца (строки) соответствующих элементов другого столбца (строки), умноженных на число.

Матрицы, получаемые в результате элементарных преобразований, называются *эквивалентными*: $A \sim A_r$.

Число *r* единиц, стоящих на главной диагонали канонической матрицы A_r, не зависит от способа приведения матрицы *A* к каноническому виду и называется *рангом* исходной матрицы *A*: $r(A) = r$. Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг.

Рангом матрицы *A* называется наибольший порядок отличного от нуля минора.

Метод элементарных преобразований нахождения ранга матрицы заключается в том, что матрицу *A* приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований; количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг матрицы *A*.

Метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы *A* состоит в следующем. Необходимо:

1. Найти какой-нибудь минор M_1 первого порядка (т.е. элемент матрицы), отличный от нуля; если такого минора нет, то матрица *A* нулевая и ее ранг $r(A) = 0$.

2. Вычислять миноры второго порядка, содержащие M_1 (окаймляющие M_1), до тех пор, пока не найдется минор M_2, отличный от нуля. Если такого минора нет, то ее ранг $r(A) = 1$; если есть, то $r(A) \geq 2$, и т.д.

…

k. Вычислять (если они существуют) миноры k-го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет или они равны нулю, то $r(A) = k-1$, если есть хотя бы один минор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geq k$ и процесс вычисления продолжается.

При нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти всего один ненулевой минор k-го порядка, причем искать его необходимо только среди миноров, содержащих минор $M_{k-1} \neq 0$.

Пример 1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу A к каноническому виду A_r путем элементарных преобразований. Прибавляя к элементам первого столбца элементы третьего, а из элементов третьего вычитая элементы второго столбца соответственно, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножим элементы первого столбца на $\frac{1}{4}$, затем вычтем из элементов третьей строки элементы первой строки соответственно:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из элементов третьей строки вычтем элементы второй, умноженные на 4, а затем к элементам второго и третьего столбцов прибавим элементы первого столбца, умноженные соответственно на 3 и на 1:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен 2.

Пример 2. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Рассмотрим минор первого порядка $M_1 = a_{11} = 8 \neq 0$, следовательно, ранг матрицы $r \geq 1$.

Далее рассмотрим минор второго порядка: $M_2 = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 8 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) = 8 - 3 = 5 \neq 0$, т.к. минор второго порядка отличен от нуля, то $r \geq 2$. Найдем значение минора третьего порядка:

$M_3 = \begin{vmatrix} 8 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 - 12 + 16 - 8 - 0 = -8 \neq 0$, следовательно, ранг матрицы равен 3, т.е. $r = 3$.

4. *Алгоритм вычисления обратной матрицы*:

1. Найти определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратная ей матрица A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.

2. Найти матрицу A^T, транспонированную к матрице A.

3. Найти алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A_{ij}{}^T = A_{ji}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ и составить из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$: $\tilde{a}_{ij} = A_{ij}{}^T = A_{ji}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

4. Вычислить обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$.

5. Проверить правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Вычисление обратной матрицы методом Гаусса:

1) к матрице A приписать справа единичную матрицу E той же размерности;

2) путем преобразований методом Гаусса над строками расширенной матрицы $(A \mid E)$ матрица A приводится к единичной матрице;

3) в результате вычислительного процесса на месте приписанной справа матрицы E получится обратная матрица A^{-1}.

Схематично процесс нахождения обратной матрицы выглядит следующим образом: $(A \mid E) \Rightarrow (E \mid A^{-1})$.

Пример 3. Найти обратную матрицу методом Гаусса для $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. 1. Составим расширенную матрицу $(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)$.

2. Элементы первой строки умножим на (–3) прибавим соответственно к элементам второй строки, получим $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)$. Затем элементы второй строки прибавим соответственно к элементам первой строки, получим $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)$. При выполнении следующего преобразования элементы второй строки умножим на (–1/2). В результате получим матрицу $\left(E\,|\,A^{-1}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2\end{array}\right)$.

3. Итак, обратная матрица имеет вид $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$.

5. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases} \tag{4}$$

где a_{ij} – коэффициенты системы, b_i – свободные члены $(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3})$. Определитель третьего порядка Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы*. Если Δ ≠ 0, то единственное решение системы (4) выражается *формулами Крамера:*

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{5}$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – определители третьего порядка, получаемые из определителя системы Δ заменой первого, второго или третьего столбца соответственно столбцом свободных членов $\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$.

Систему (4) можно записать в матричной форме: $AX=B$,

где $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$.

Тогда ее решение имеет вид

$$X = A^{-1}B, \tag{6}$$

если определитель матрицы A отличен от нуля.

Одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных алгебраических уравнений является *метод Гаусса*, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения методом Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду (в частности к треугольному) виду.

Для исходной системы m алгебраических уравнений n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

система в ступенчатом виде может быть представлена следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

где $k \le n$, $a_{ii} \ne 0$, $i = \overline{1,k}$. Коэффициенты a_{ii} называются *главными элементами системы*.

На втором этапе (обратный ход) происходит последовательное нахождение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Рассмотрим данный метод на примере решения системы (4). Будем считать, что элемент $a_{11} \ne 0$ (иначе первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при $x_1 \ne 0$). Используя элементарные преобразования системы (4), исключим неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого. Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и прибавим соответственно ко второму уравнению системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и прибавим соответственно к третьему уравнению системы. Получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)}, \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)}. \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ $(i, j = 2;3)$ – новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после выполнения первого шага.

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из третьего уравнения системы. На этом шаге выполнение прямого хода заканчивается.

Второй этап (обратный ход) заключается в решении ступенчатой системы. В последнем уравнении выражаем x_3 и подставляем во второе уравнение найденное значение. Из второго уравнения находим x_2 и подставляем значения x_2 и x_3 в первое уравнение, из которого находим значение x_1.

Замечание. На практике удобно работать не с системой (4), а с расширенной матрицей этой системы, выполняя элементарные преобразования над ее строками.

Метод обратной матрицы решения систем алгебраических уравнений заключается в нахождении обратной матрицы A^{-1} по одному из алгоритмов, представленных в п. 4, и использовании формулы

$$X = A^{-1} \cdot B$$

для нахождения решения системы.

Замечание. Если система линейных уравнений с n неизвестными совместна, а ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, т.е.

$$r < n, \tag{7}$$

то система имеет бесконечное множество решений. Свободные n-r неизвестных выбираются произвольно, а главные r неизвестных определяются единственным образом через свободные неизвестные.

Пример 4. С помощью формул Крамера найти решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases} \tag{8}$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -26.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то решение системы может быть найдено по формулам Крамера (5). Для этого найдем $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 17 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -78, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 17 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 130, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 17 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -52.$$

Подставляя найденные значения определителей в формулы (5), получим искомое решение системы: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 3,\quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -5,\quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 2$.

Пример 5. Найти решение системы примера 4 с помощью обратной матрицы.

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Так как определитель матрицы системы отличен от нуля $|A|=-26$, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}. Для ее нахождения вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы $A_{ij}{}^T$. Транспонированная матрица имеет вид

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A_{11}{}^T = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -8,\quad A_{12}{}^T = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -6,\quad A_{13}{}^T = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{21}{}^T = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,\quad A_{22}{}^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 9,\quad A_{23}{}^T = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{31}{}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3,\quad A_{32}{}^T = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\quad A_{33}{}^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5,$$

Согласно формуле (3) матрица A^{-1}, обратная к матрице A, имеет вид

$$A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность вычисления A^{-1}, исходя из определения обратной матрицы (2) и используя формулу (1):

$$A^{-1}A = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -8\cdot 2 + (-6)\cdot 1 + (-4)\cdot 1 & -8\cdot 1 + (-6)\cdot(-2) + (-4)\cdot 1 & -8\cdot(-3) + (-6)\cdot 2 + (-4)\cdot 3 \\ -1\cdot 2 + 9\cdot 1 + (-7)\cdot 1 & -1\cdot 1 + 9\cdot(-2) + (-7)\cdot 1 & -1\cdot(-3) + 9\cdot 2 + (-7)\cdot 3 \\ 3\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + (-5)\cdot 1 & 3\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + (-5)\cdot 1 & 3\cdot(-3) + (-1)\cdot 2 + (-5)\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-26 & 0 & 0\\ 0 & -26 & 0\\ 0 & 0 & -26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Матричное решение системы (8) в силу формулы (6) имеет вид

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-8 & -6 & -4\\ -1 & 9 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 17\\ 4\end{pmatrix}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-78\\ 130\\ -52\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 2\end{pmatrix},$$

откуда следует (из условия равенства двух матриц), что $x_1=3, x_2=-5, x_3=2$.

Пример 6. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3=-5,\\ x_1-2x_2+2x_3=17,\\ x_1+x_2+3x_3=4.\end{cases}$$

Решение. Здесь $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5\\ 17\\ 4\end{pmatrix}$.

Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -3 & -5\\ 1 & -2 & 2 & 17\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{array}\right).$$

Выполним прямой ход метода Гаусса.

Шаг 1. Для удобства вычислений поменяем местами первую и вторую строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 2 & 17\\ 2 & 1 & -3 & -5\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{array}\right).$$

Так как $a_{11}\neq 0$, то умножая первую строку на (–2) и на (–1) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй и третьей строкам, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 2 & 17\\ 0 & 5 & -7 & -39\\ 0 & 3 & 1 & -13\end{array}\right).$$

Шаг 2. Так как $a_{22}^{(1)}\neq 0$, то умножим вторую строку на (–3/5) и прибавим к третьей, таки образом исключим переменную x_2 из третьей строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 0 & \frac{26}{5} & \frac{52}{5} \end{array}\right).$$

Получили систему уравнений, соответствующую последней матрице,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ 5x_2 - 7x_3 = -39, \\ \frac{26}{5}x_3 = \frac{52}{5}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из третьего уравнения $x_3 = 2$; из второго уравнения найдем $x_2 = \frac{-39 + 7 \cdot 2}{5} = -5$; из первого уравнения $x_1 = \frac{17 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-5)}{1} = 3$.

Ответ: (3; –5; 2).

Пример 7. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Выполним прямой ход метода Гаусса. Для этого произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{array}\right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Выполним обратный ход метода Гаусса, найдем значения неизвестных: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Ответ: (1; 1; 1).

6. *Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.*

Система m линейных уравнений с n неизвестными называется системой линейных *однородных* уравнений, если все их свободные члены равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0., \end{cases} \tag{9}$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое решение (0; 0; …; 0).

Если в системе (9) $m=n$, а ее определитель отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение. Ненулевые решения, следовательно, возможны лишь для таких систем линейных однородных уравнений, в которых число уравнений меньше числа переменных, или при их равенстве, когда определитель системы равен нулю.

Другими словами, *система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных*, т.е. при $r(A) < n$.

Обозначим решение системы (9) $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots x_n = k_n$ в виде строки $e_1 = (k_1, k_2, \ldots k_n)$. Решение системы линейных однородных уравнений обладает следующими свойствами:

1. Если строка $e_1 = (k_1, k_2, \ldots k_n)$ – решение системы (9), то и строка $\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, \ldots \lambda k_n)$ – также решение этой системы.

2. Если строки $e_1=(k_1,k_2,...k_n)$ и $e_2=(l_1,l_2,...l_n)$ – решения системы (9), то при любых c_1 и c_2 их линейная комбинация $c_1e_1+c_2e_2=$ $=(c_1k_1+c_2l_1,c_1k_2+c_2l_2,...c_1k_n+c_2l_n)$ – также решение данной системы.

Из сформулированных свойств следует, *что всякая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы.*

Система линейно независимых решений $e_1,e_2,...e_k$ называется *фундаментальной*, если каждое решение системы (9) является линейной комбинацией решений $e_1,e_2,...e_k$.

Теорема. Если ранг *r* матрицы коэффициентов при переменных системы линейных однородных уравнений (9) меньше числа переменных *n*, то всякая фундаментальная система решений системы (9) состоит из *n–r* решений.

Поэтому общее решение системы (9) линейных однородных уравнений имеет вид

$$c_1e_1+c_2e_2+...+c_ke_k, \tag{10}$$

где $e_1,e_2,...e_k$ – любая фундаментальная система решений, $c_1,c_2,...c_k$ – произвольные числа и $k=n-r$.

Можно показать, что общее решение системы *m* однородных уравнений с *n* переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

равно сумме общего решения соответствующей ей системы линейных однородных уравнений (9) и произвольного частного решения этой системы (9).

7. *Применение элементов линейной алгебры в экономике.*

Использование элементов алгебры матриц является одним из основных методов решения многих экономических задач. Особенно этот вопрос стал актуальным при разработке и использовании баз данных: при работе с ними почти вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме.

Матричные вычисления

7.1. Предприятие выпускает 4 вида изделий с использованием 4 видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы матрицы *A*:

$$\begin{array}{cc} & \text{вид сырья} \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} 1 & \\ 2 & \text{вид} \\ 3 & \text{изделия} \\ 4 & \downarrow \end{array}$$

Требуется найти затраты сырья на каждый вид изделия при заданном плане их выпуска: соответственно 60, 50, 35 и 40 ед.

Решение. Составим вектор-план выпуска продукции,

$$\vec{q} = (60, 50, 35, 40).$$

Тогда решение задачи дается вектором затрат, координаты которого и являются величинами затрат сырья по каждому его виду; этот вектор затрат вычисляется как произведение вектора $\vec{q}$ на матрицу A:

$$\vec{q}A = \begin{pmatrix} 60, & 50, & 35, & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120+50+245+160 \\ 180+100+70+200 \\ 240+250+105+240 \\ 300+300+70+320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 575 \\ 550 \\ 835 \\ 990 \end{pmatrix}.$$

7.2. Пусть затраты 4 видов сырья на выпуск 4 видов продукции характеризуются матрицей A, приведенной в предыдущей задаче. Требуется найти: а) общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку; б) общие затраты на сырье и его транспортировку при условии заданного вектора-плана предыдущей задачи, если известны себестоимости каждого вида сырья и его доставки (соответственно 4, 6, 5, 8 и 2, 1, 3, 2 ден. ед.).

Решение. Составим матрицу себестоимостей сырья и его доставки (соответственно 1-я и 2-я строки):

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда ответ на первый вопрос задачи дается в виде произведения матрицы A на транспонированную матрицу C^T:

$$AC^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & 29 \\ 89 & 31 \\ 71 & 29 \\ 140 & 47 \end{pmatrix}.$$

Суммарные затраты на сырье и его доставку (в денежных единицах) при векторе-плане выпуска продукции $\vec{q} = (60, 50, 35, 40)$ определяются произведением вектора $\vec{q}$ на матрицу AC^T:

$$\vec{q}AC^T = \begin{pmatrix} 60, & 50, & 35, & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 86 & 29 \\ 89 & 31 \\ 71 & 29 \\ 140 & 47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17695, & 6185 \end{pmatrix}.$$

7.3. Прогноз выпуска продукции по запасам сырья. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Необходимые характеристики производства указаны в табл. 1. Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Таблица 1

Вид сырья	**Расход сырья по видам продукции, вес. ед./изд.**			**Запас сырья, вес. ед.**
	1	**2**	**3**	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Задачи такого рода типичны для прогнозов и оценок функционирования предприятия, экспертных оценок освоения месторождений полезных ископаемых, а также для планирования микроэкономики предприятий.

Решение. Обозначим неизвестные объемы выпуска продукции через x_1, x_2 и x_3. Тогда при условии полного расхода запасов для каждого вида сырья можно записать балансовые соотношения, которые образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными,

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдем, что при заданных запасах сырья объемы выпуска продукции составят по каждому виду соответственно (в условных единицах) $x_1 = 150$, $x_2 = 250$, $x_3 = 100$.

7.4. В табл. 2 приведены данные о дневной производительности 5 предприятий, выпускающих 4 вида продукции с потреблением 3 видов сырья, а также продолжительность работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья.

Таблица 2

<table>
<tr><th rowspan="2">Вид изделия, № п/п</th><th colspan="5">Производительность предприятия, изд./день</th><th colspan="3">Затраты видов сырья изделия, ед.веса/изд.</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>7</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>8</td><td>15</td><td>0</td><td>4</td><td>6</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>10</td><td>7</td><td>5</td><td>4</td><td>5</td><td>8</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><th colspan="5">Кол-во рабочих дней в году</th><th colspan="3">Цены видов сырья</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>200</td><td>150</td><td>170</td><td>120</td><td>140</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td></tr>
</table>

Требуется определить:

1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий;

2) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья;

3) годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска продукции указанных видов и количеств.

Решение. Нужно составить матрицы, характеризующие весь экономический спектр производства, указанный в задаче, а затем при помощи соответствующих операций над ними получить решение данной задачи.

Вначале приведем матрицу производительности предприятий по всем видам продукции:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{производительность} & \\
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\
A = & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{cc} 1 & \\ 2 & \text{вид} \\ 3 & \text{изделия} \\ 4 & \downarrow \end{array}
\end{array}$$

Каждый столбец этой матрицы соответствует дневной производительности отдельного предприятия по каждому виду продукции. Следовательно, годовая производительность j-го предприятия по каждому виду продукции получается умножением j-го столбца матрицы A на количество рабочих дней в году для этого предприятия (j = 1, 2, 3, 4, 5). Таким образом, годовая производительность по каждому из изделий описывается матрицей

$$A_{год} = \begin{pmatrix} 800 & 750 & 510 & 720 & 980 \\ 0 & 300 & 680 & 360 & 0 \\ 1600 & 2250 & 0 & 480 & 840 \\ 600 & 1500 & 1190 & 600 & 560 \end{pmatrix}$$

Матрица затрат сырья на единицу изделия (эти показатели по условию задачи одинаковы для всех предприятий) имеет вид

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{вид изделия} & \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\
A = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{cc} 1 & \text{вид} \\ 2 & \text{сырья} \\ 3 & \downarrow \end{array}
\end{array}$$

Данный дневной расход по типам сырья на предприятиях описывается произведением матрицы B на матрицу A,

$$BA = \begin{pmatrix} 55 & 126 & 53 & 62 & 58 \\ 68 & 165 & 85 & 89 & 77 \\ 74 & 167 & 78 & 92 & 82 \end{pmatrix},$$

где i-я строка соответствует номеру типа сырья, а j-й столбец – номеру предприятия согласно табл.2 (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5). Ответ на второй вопрос получим в результате умножения столбцов матрицы BA на соответствующие количества рабочих дней в году для предприятий, т.е. годовую потребность каждого предприятия в каждом виде сырья:

$$BA_{\text{год}} = \begin{pmatrix} 11000 & 18900 & 9010 & 7440 & 8120 \\ 13600 & 24750 & 14450 & 10680 & 10780 \\ 14800 & 25050 & 13260 & 11040 & 11480 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вектор стоимости сырья $\vec{p}$ = (40, 50, 60). Тогда стоимость общего годового запаса сырья для каждого предприятия получается в результате умножения вектора $\vec{p}$ на матрицу $BA_{\text{год}}$:

$$\vec{P} = \vec{p}BA_{\text{год}} = \left(2008000, 3496500, 1878500, 1552600\right).$$

Следовательно, суммы кредитования предприятий для закупки сырья определяются соответствующими компонентами вектора $\vec{P}$.

Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей?
2. Перечислите виды матриц и охарактеризуйте каждый из них.
3. Какие действия можно выполнять над матрицами?
4. Перечислите свойства операции умножения матриц.
5. Какие преобразования матриц называются элементарными?
6. Если матрицы A и B можно умножать, следует ли из этого, что их можно складывать?
7. Могут ли совпадать матрицы A и A^T?
8. Что называется обратной матрицей?
9. В чем заключается алгоритм нахождения обратной матрицы методом Гаусса?
10. На примере матрицы третьего порядка покажите реализацию алгоритма нахождения обратной матрицы через алгебраические дополнения.

11. Если матрица A неквадратная, может ли существовать такая матрица B, что:
   а) $BA=E$?
   б) $AB=E$?
12. Докажите, что если для квадратной матрицы A найдутся две такие матрицы B и C, что если $BA=AC=E$, то $B=C$.
13. Что называется определителем второго, третьего, n-го порядка?
14. Сформулируйте свойства определителей.
15. Покажите методы вычисления определителей (на примере определителей третьего порядка).
16. Может ли определитель изменить знак на противоположный при транспонировании матрицы?
17. Сколько всего миноров у квадратной матрицы n-го порядка?
18. Что называется минором матрицы $A=(a_{ij})$?
19. Можно ли вычислять миноры, дополнительные к элементам неквадратной матрицы?
20. Дайте определение алгебраического дополнения матрицы $A=(a_{ij})$.
21. Верно ли, что:
   а) если $|A|=0$, то $|A^{-1}|=0$;
   б) если $|A|=2$, то $|A^{-1}|=-2$;
   в) если $|A|=2$, то $|A^{-1}|=0,5$;
   г) $|A|\cdot|A^{-1}|=1$?
22. Дайте определение ранга матрицы.
23. Может ли ранг матрицы быть равным нулю? меньше нуля? равным 2,5?
24. Как может измениться ранг матрицы при транспонировании?
25. Докажите, что у матрицы ранга, равного одному, все строки (столбцы) пропорциональны.
26. В чем заключается алгоритм нахождения ранга матрицы методом окаймляющих миноров и элементарных преобразований?
27. Сформулируйте и докажите теорему Кронекера–Капелли.
28. Сформулируйте алгоритм решения систем линейных уравнений методом Гаусса.
29. Сформулируйте алгоритм решения систем линейных уравнений с помощью формул Крамера.
30. Сформулируйте алгоритм решения систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

31. К системе линейных уравнений с n неизвестными дописали произвольное уравнение с n неизвестными. Как при этом изменится множество решений системы?
32. Множества решений двух систем линейных уравнений совпадают. Равны ли расширенные матрицы этих систем? Равны ли ранги этих систем?
33. Докажите, что система n линейных уравнений с n–1 неизвестными совместна тогда и только тогда, когда равен нулю определитель расширенной матрицы.
34. Возможно ли, чтобы система линейных уравнений имела решение методом Гаусса, но не имела решения с помощью формул Крамера?
35. Дайте определение системы линейных однородных уравнений.
36. Дайте определение фундаментальной системы решений линейных однородных уравнений.
37. Может ли количество решений, составляющих фундаментальную систему решений, быть больше числа неизвестных? равно?
38. Может ли частное решение однородной (неоднородной) системы линейных уравнений быть ее общим решением?
39. Фундаментальные системы решений двух однородных систем линейных уравнений совпадают. Равны ли матрицы однородных систем? Равны ли ранги этих матриц?
40. Верно ли, что сумма (разность) двух любых решений системы линейных уравнений также является ее решением, если система:
    а) однородна;
    б) неоднородна?
41. Приведите примеры применения элементов линейной алгебры в экономике.

Контрольная работа №1 по теме «Элементы линейной алгебры»

I.1. Найти ранг матрицы системы; исследовать систему линейных уравнений на совместность:

а) методом элементарных преобразований;

б) методом окаймляющих миноров.

2. Решить систему линейных уравнений:

а) по формулам Крамера;

б) методом обратной матрицы;

в) методом Гаусса.

3. Найти обратную матрицу:

а) методом Гаусса $(A\,|\,E) \Rightarrow (E\,|\,A^{-1})$;

б) сделать проверку $A \cdot A^{-1} = E$.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -7, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 26, \\ x_2 - 2x_3 = 12. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_3 = 17, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 23, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 22, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 15. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 13, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -7, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ 4x_1 - 2x_3 = -10. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13, \\ 2x_1 - x_3 = 12, \\ 3x_1 - x_2 = 12. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ x_1 + 2x_2 = 12, \\ 3x_2 - x_3 = 12. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -6, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -22. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -13, \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -14. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1, \\ -5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 23, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + 4x_3 = -10. \end{cases}$

19. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 23, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 26. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -20, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ -5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_2 - 5x_3 = -9. \end{cases}$

22. $\begin{cases} -2x_2 - 5x_3 = -12, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

23. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ -2x_2 - x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

26. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -11, \\ -2x_1 - 2x_2 = 1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

II. Найти множество решений однородной системы трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ -x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ -9x_1 - 4x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 8x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 9x_4 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 - 15x_4 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -4x_1 + 14x_2 - 8x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ -4x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 10x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 20x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 15x_4 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 0, \\ 7x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 18x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 12x_4 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 9x_4 = 0, \\ 3x_2 - 7x_3 - 10x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 - 7x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 15x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 - 7x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} -3x_1 - 9x_2 + 25x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 9x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -4x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 0, \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ -x_1 + 10x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -4x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

III. Вычислить определитель четвертого порядка:

1. $\begin{vmatrix} a & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 1 & c & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

6. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$;

7. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 10 & 13 \\ 5 & 11 & 16 & 21 \\ -7 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$;

8. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

10. $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$; **11.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$; **12.** $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

13. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 12 & 13 & 9 \\ 4 & 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}$; **14.** $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 8 & 6 \\ 12 & 13 & 9 & 7 \\ 6 & 6 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; **15.** $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; **17.** $\begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$; **18.** $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$;

19. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$; **20.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; **21.** $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$;

22. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; **23.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -5 & 7 \end{vmatrix}$; **24.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$;

25. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 7 & -6 & 5 & -3 \end{vmatrix}$; **26.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 7 & -6 & 6 & -3 \end{vmatrix}$; **27.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 12 & 6 \\ 4 & 4 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -3 \end{vmatrix}$;

28. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 6 \end{vmatrix}$; **29.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -3 & 6 \\ 7 & 5 & 6 & -6 \end{vmatrix}$; **30.** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 5 \\ 7 & -6 & 5 & 9 \end{vmatrix}$.

IV. Вычислить матрицу $C = B^2 + (BA)^T - 2AB$, если:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -3 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$;

4. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 1 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$;

5. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 4\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & 5 & 2\end{pmatrix}$;

6. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -2 & 5 & 0\\ 10 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -3 & 4 & 0\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 4 & -5 & 0\\ -2 & 2 & 5\end{pmatrix}$;

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ 2 & 6 & -13\\ 1 & 4 & -8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 4\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$;

9. $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ -4 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 3 & -3 & 2\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$;

10. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

11. $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 2\\ 5 & -6 & 1\\ 3 & -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

12. $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & -4 & 3\\ -2 & 0 & 5\end{pmatrix}$;

13. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

14. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

15. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

16. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 4 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

17. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

18. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$;

19. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

20. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

21. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 10 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

22. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

23. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & 5 & -2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ -3 & 1 & 2\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$;

24. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & 8 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -4\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$;

25. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 3 & 4 & -5\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

26. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -3 & 5\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

27. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -2 & 1\\ 3 & -7 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

28. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 1\\ -2 & 5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$;

29. $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 6\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -4\\ -1 & 5 & 2\end{pmatrix}$;

30. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}$.

Тема 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Основные теоретические сведения

1. *Вектором* называется направленный отрезок.

Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной (или модулем) и обозначается $|AB|$или $|\vec{a}|$.

Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором*.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется *ортом* вектора $\vec{a}$.

Два ненулевых вектора называются *противоположными*, если они имеют одинаковую длину и противоположно направлены.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или параллельных прямых.

Три вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если они сонаправлены и имеют равные длины.

2. *Разложение вектора по базису*. Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей прямоугольной системы координат *Oxyz*, то любой вектор $\vec{a}$ единственным образом можно представить в виде их суммы (линейной комбинации) с коэффициентами *x, y, z*, т.е. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Коэффициенты *x, y, z* линейной комбинации называются *координатами вектора* $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Пусть система векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ является базисом, вектор $\vec{b}$ – их линейная комбинация. Разложение любого вектора в базисе, если оно существует, является единственным. Значит,

$$\vec{b} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3}.$$

Пример 1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{a_4} = \{2;-4;3\}$ в базисе $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$, если $\overrightarrow{a_1} = \{-2;0;0\}$, $\overrightarrow{a_2} = \{0;3;0\}$, $\overrightarrow{a_3} = \{0;0;4\}$.

Решение. Используя формулу $\vec{b} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3}$, составим систему уравнений для нахождения координат вектора $\overrightarrow{a_4}$ в базисе $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$.

$$\begin{cases} 2=\alpha_1\cdot(-2)+\alpha_2\cdot 0+\alpha_3\cdot 0, \\ -4=\alpha_1\cdot 0+\alpha_2\cdot 3+\alpha_3\cdot 0, \\ 3=\alpha_1\cdot 0+\alpha_2\cdot 0+\alpha_3\cdot 4, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha_1=-1, \\ \alpha_2=-\dfrac{4}{3}, \\ \alpha_3=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Пример 2. Показать, что векторы $\overrightarrow{a_1}=\{1;1;-3\}$, $\overrightarrow{a_2}=\{3;-1;1\}$, $\overrightarrow{a_3}=\{0;1;1\}$ образуют базис.

Решение. Составим определитель третьего порядка из координат данных векторов и найдем его,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-9+0-0-1-3=-14\neq 0,$$

следовательно, векторы линейно независимы, значит, они образуют базис.

3. *Длина вектора* $\vec{a}=\{x,y,z\}$ определяется по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Пусть вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями *Ox, Oy, Oz* углы α, β, γ соответственно. Направление вектора $\vec{a}$ определяется с помощью *направляющих косинусов*:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Направляющие косинусы связаны соотношением $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Пусть даны два вектора $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$. Тогда:

1) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты;

2) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, при вычитании – вычитаются, при умножении вектора на число – соответственно умножаются на это число:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\{x_1\pm x_2, y_1\pm y_2, z_1\pm z_2\},$$

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}.$$

4. *Проекция вектора на заданное направление.*

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось u называется число, равное длине вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 1), взятой со знаком «плюс», если направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси и со знаком «минус» в противном случае.

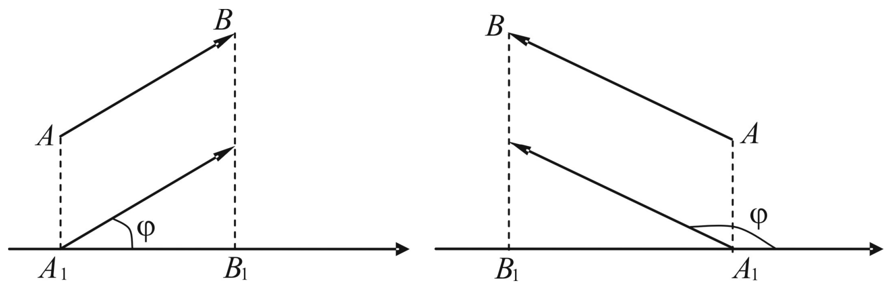


Рис. 1

Точки A_1, B_1 – это точки пересечения оси u с перпендикулярными ей плоскостями, проходящими через точки A и B.

Нахождение проекции вектора $\bar{a}$ на направление, заданное вектором $\bar{b}$, может осуществляться по формуле, если $\vec{a} = \{\ x_1, y_1, z_1\ \}$ и $\vec{b} = \{\ x_2, y_2, z_2\ \}$,

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}\left(\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}\right), \text{т.е. } \text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

5. *Линейное пространство.*

Совокупность векторов одной размерности называют системой векторов и обозначают

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n. \qquad (1)$$

Система ненулевых векторов (1) называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, не равные нулю одновременно, что линейная комбинация данной системы с указанными числами равна нулевому вектору,

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}. \qquad (2)$$

Если равенство (2) для данной системы векторов (1) возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, то такая система векторов называется *линейно независимой*.

Максимально независимой подсистемой системы векторов (1) называется частичный набор векторов этой системы, удовлетворяющий условиям: 1) векторы этого набора независимы; 2) любой вектор системы (1) линейно выражается через векторы этого набора.

Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным ниже восьми свойствам (рассматриваемым как аксиомы), называется *векторным пространством*.

Линейные операции над любыми векторами удовлетворяют следующим свойствам:

1°. **x+y=y+x** – коммутативное (переместительное) свойство сложения.

2°. **(x+y)+z=x+(y+z)** – ассоциативное (сочетательное) свойство сложения.

3°. α(β**x**)=(αβ)**x** – ассоциативное свойство относительно числового множителя.

4°. α**(x+y)=**α**x**+α**y** – дистрибутивное (распределительное) свойство относительно суммы векторов.

5°. (α+β)**x**=α**x**+β**x** – дистрибутивное свойство относительно суммы числовых множителей.

6°. Существует нулевой вектор **0**=(0;0;…0) такой, что **x+0=x** для любого вектора **x**.

7°. Для любого вектора *x* существует противоположный вектор **(–x)** такой, что **x+(–x)=0**.

8°. $1 \cdot x = x$ для любого вектора **x**.

Отметим, что под **x, y, z** можно рассматривать не только векторы, но и элементы (объекты) любой природы. В этом случае множество элементов называется *линейным пространством*.

6. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ называется число, определяемое равенством

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2, \qquad (3)$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Некоторые приложения скалярного произведения.

1.Угол между векторами.

Определение угла φ между ненулевыми векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}, \text{ т.е. } \cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Отсюда следует *условие перпендикулярности* ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

2.Работа постоянной силы.

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы $\overline{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overline{AB} = \overline{S}$ (рис. 2).

Из курса физики известно, что работа силы $\overline{F}$ при перемещении $\overline{S}$ равна $A = F \cdot S \cdot \cos\varphi$, т.е. $A = \overline{F} \cdot \overline{S}$.

Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

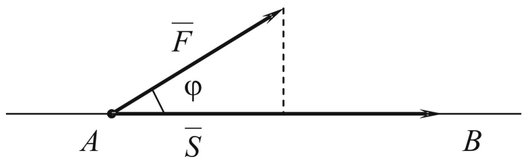


Рис. 2

Пример 3. Вычислить работу, произведенную силой $\overline{F} = \{3;2;4\}$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(2;4;6)$ в положение $B(4;2;7)$. Под каким углом к AB направлена сила $\overline{F}$?

Решение. Найдем $\overline{S} = \overline{AB} = \{2;-2;1\}$. Следовательно,

$$A = \overline{F} \cdot \overline{S} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 6 \text{(ед. работы)}.$$

Угол φ между $\overline{F}$ и $\overline{S}$ находим по формуле $\cos\varphi = \dfrac{\overline{F} \cdot \overline{S}}{|\overline{F}| \cdot |\overline{S}|}$ т. е.

$$\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{9+4+16} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{29} \cdot 3} = \frac{6}{\sqrt{29} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{29}}, \ \varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{29}}.$$

Евклидово пространство.

Скалярное произведение имеет следующие свойства:

1°. **xy=yx** – коммутативное свойство.

2°. **x(y+z)=xy+xz** – дистрибутивное свойство.

3°. **(αx)y**=α**(xy)** – для любого действительного числа α.

4°. **xx**>0, если **x** – ненулевой вектор, **xx**=0, если **x** – нулевой вектор.

Линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее указанным четырем свойствам (рассматриваемым как аксиомы), называется *евклидовым пространством*.

7. *Векторным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, длина которого равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними и который направлен перпендикулярно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов (рис. 3),

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{4}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi.$$

Геометрически $\vec{c}$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$$S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi.$$

Условие коллинеарности векторов

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ (и наоборот), т. е.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \bar{0} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

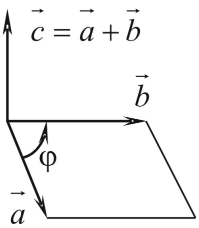


Рис. 3

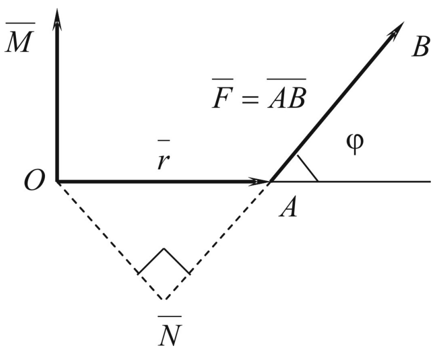


Рис. 4

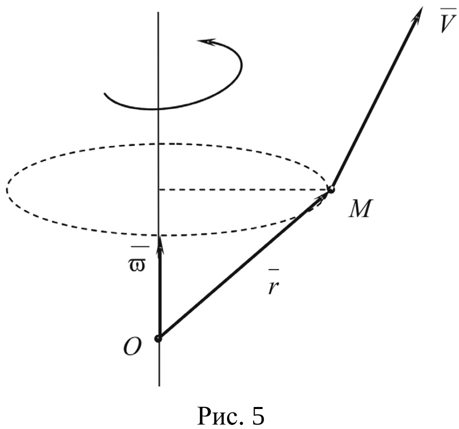


Рис. 5

Некоторые приложения векторного произведения.

1. Определение момента силы относительно точки.

Пусть в точке A приложена сила $\overline{F} = \overline{AB}$ и пусть O – некоторая точка пространства (рис. 4).

Из курса физики известно, что *моментом силы* $\overline{F}$ относительно точки O называется вектор $\overline{M}$, который проходит через точку O и:

1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

2) численно равен произведению силы на плечо

$$|\overline{M}| = |\overline{F}| \cdot ON = |\overline{F}| \cdot |\bar{r}| \cdot \sin\varphi =$$
$$= |\overline{F}| \cdot |\overline{OA}| \cdot \sin\left(\overline{F}, \overline{OA}\right);$$

3) образует правую тройку с векторами $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$.

Значит, $\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F}$.

2. Нахождение линейной скорости вращения

Скорость $\bar{\upsilon}$ точки M твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\bar{\varpi}$ вокруг неподвижной оси, определяется формулой Эйлера $\bar{\upsilon} = \bar{\varpi} \times \bar{r}$, $\bar{r} = \overline{OM}$, где O – некоторая неподвижная точка оси (рис. 5).

8. *Смешанным произведением* трех векторов $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ и $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$ называется число

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

Условие компланарности векторов

Векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю при условии, что $\overline{a} \neq \vec{0}, \overline{b} \neq \vec{0}, \overline{c} \neq \vec{0}$:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{ векторы } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \text{ компланарны.}$$

Пример 4. По координатам вершин пирамиды $A_1(3;-2;2)$, $A_2(1;-3;1)$, $A_3(2;0;4)$, $A_4(6;-4;6)$ найти: 1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды.

Решение. 1) Найдем векторы A_1A_2 и A_1A_3:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (1-3)\vec{i} + (-3-(-2))\vec{j} + (1-2)\vec{k} = -2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k},$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-3)\vec{i} + (0-(-2))\vec{j} + (4-2)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Найдем длины этих векторов, т.е. длины ребер A_1A_2 и A_1A_3:

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \; |\overrightarrow{A_1A_3}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

2) Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ найдем по формуле (3)

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} = (-2)\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 2 = -2,$$

косинус угла между этими векторами – по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}}{|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_3}|} = \frac{-2}{3\sqrt{6}} \approx -0{,}27.$$

Следовательно, φ – тупой угол, равный $\pi - \arccos\, 0{,}27 = 1{,}85$ рад с точностью до 0,01. Это есть искомый угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3.

9. Вектор-столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$

называется *собственным вектором* квадратной матрицы A n-го порядка, соответствующим собственному значению λ, если он удовлетворяет матричному уравнению $AX = \lambda X$ или $(A-\lambda E)X = 0$.

Здесь E – единичная матрица n-го порядка, 0 – нулевой вектор-столбец. При условии, что вектор $X \neq 0$, получаем *характеристическое уравнение* для определения собственных значений λ,

$$\det(A-\lambda E) = 0. \tag{6}$$

Координаты собственного вектора X_i, соответствующего собственному значению λ_i, являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda_i)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda_n)x_n = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Собственный вектор определяется до постоянного множителя.

Пример 5. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Характеристическое уравнение для данной матрицы имеет вид (6):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda_2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

откуда следует, что матрица A имеет два собственных значения $\lambda_1 = 4;\quad \lambda_2 = -1$. Собственный вектор X_1, соответствующий $\lambda_1 = 4$, определяется из системы уравнений вида (7)

$$\begin{cases} (1-4)x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1 + (2-4)x_2 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению $x_1 = 2x_2$. Полагая $x_2 = t$, получаем решение в виде $x_1 = 2t,\ x_2 = t.$ Следовательно, первый собственный вектор есть $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$.

Второй собственный вектор X_2, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = -1$, определяется из системы уравнений вида (7)

$$\begin{cases} (1+1)x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1 + (2+1)x_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система уравнений также сводится к одному уравнению $x_1 + 3x_2 = 0$; полагая $x_2 = t$, получаем решение в виде $x_1 = -3t,\ x_2 = t.$ Следовательно, первый собственный вектор есть $X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} t$.

Таким образом, матрица А имеет два собственных различных значения $\lambda_1 = 4;\quad \lambda_2 = -1$ и два собственных вектора, равных $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$ и $X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} t$.

10. *Применение векторной алгебры в экономике*

10.1. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели которых приведены в табл. 3.

Таблица 3

Вид изделия, № п/п	Кол-во изделий, ед.	Расход сырья, кг	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден.ед./изд.
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	40

Требуется определить следующие ежесуточные показатели: расход сырья *S*, затраты рабочего времени *T* и стоимость *P* выпускаемой продукции предприятия.

Решение. По данным табл. 3 составим четыре вектора, характеризующие весь производственный цикл:

$\vec{q}$ = (20, 50, 30, 40) – вектор ассортимента,

$\vec{s}$ = (5,2,7,4) – вектор расхода сырья,

$\vec{t}$ = (10,5,15,8) – вектор затраты рабочего времени,

$\vec{p}$ = (30,15,45,20) – ценовой вектор.

Тогда искомые величины будут представлять собой соответствующие скалярные произведения вектора ассортимента $\vec{q}$ на три другие вектора, т.е.

$S = \vec{q}\vec{s}$ =100+100+210+160=570 *(кг),*

$T = \vec{q}\vec{t}$ = 1220 *(ч),*

$P = \vec{q}\vec{t}$ = 3500 *(ден. ед.).*

10.2. *Линейная модель обмена*

В качестве примера математической модели экономического процесса, приводящейся к понятию собственного вектора и собственного значения матрицы, рассмотрим *линейную модель обмена* (*модель международной торговли*).

Пусть имеется n стран $S_1, S_2, \dots S_n$, национальный доход каждой из которых равен соответственно $x_1, x_2, \dots x_n$. Обозначим коэффициентами a_{ij} долю национального дохода, которую страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i. Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров или внутри страны, или на импорт из других стран, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots n). \tag{8}$$

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

которая получила название структурной матрицы торговли. В соответствии с (8) сумма элементов любого столбца матрицы A равна 1.

Для любой страны S_i $(i = 1, 2, \dots n)$ выручка от внутренней и внешней торговли определяется по формуле

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n.$$

Для сбалансированной торговли необходима бездефицитность торговли каждой страны S_i, т.е. выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше ее национального дохода,

$$p_i \ge x_i (i = 1, 2, \dots n).$$

Если считать, что $p_i > x_i (i = 1, 2, \dots n)$, то получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n > x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n > x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n > x_n. \end{cases} \tag{9}$$

Сложив все неравенства системы (9), получим после группировки

$$\begin{aligned} & x_1(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2}) + \dots + x_n(a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn}) > \\ & > x_1 + x_2 + \dots + x_n \end{aligned}.$$

Учитывая (8), выражения в скобках равны единице, таким образом, мы пришли к противоречию в неравенстве

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n > x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Значит, неравенство $p_i > x_i (i=1,2,...n)$ невозможно, условие $p_i \geq x_i$ принимает вид $p_i = x_i (i=1,2,...n)$ (с экономической точки зрения не все страны одновременно могут получать прибыль).

Вводя вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, ...x_n)$ национальных доходов стран, получим матричное уравнение

$$AX = X, \tag{10}$$

где X – матрица-столбец координат вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, ...x_n)$, т.е. задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы A, соответствующего собственному значению $\lambda = 1$.

Контрольные вопросы

1. Что называется вектором?
2. Какие операции над векторами можно выполнять?
3. Дайте определение координаты вектора.
4. Что называется модулем вектора?
5. Дайте определение направляющим косинусам вектора.
6. Что называется проекцией вектора на ось?
7. Дайте определение скалярного произведения векторов.
8. Сформулируйте свойства скалярного произведения векторов.
9. С помощью каких формул можно вычислить скалярное произведение векторов?
10. Приведите формулы вычисления длины вектора и угла между векторами в координатной форме.
11. Сформулируйте условие ортогональности двух векторов.
12. Дайте определение векторного произведения векторов.
13. Сформулируйте свойства векторного произведения векторов.
14. Сформулируйте условие коллинеарности двух векторов.
15. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если коллинеарны векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$?
16. Докажите, что векторное произведение не изменится, если к одному из множителей прибавить вектор, коллинеарный другому множителю.
17. Чему равно векторное произведение противоположных векторов?
18. Равносильны ли равенства $\vec{a}=\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$?
19. Дайте определение смешанного произведения векторов.
20. Сформулируйте условие компланарности векторов.
21. Докажите, что для любых заданных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторы $\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}-\vec{a}$ компланарны.

22. Покажите, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.
23. Дайте геометрическое построение разложения вектора $\vec{a}$ на два компланарных с ним слагаемых, если известны:
    а) длина и направление одного слагаемого;
    б) направление обоих слагаемых;
    в) направление одного и длина другого слагаемого.

    Исследовать, когда разложение возможно, сколько имеет решений, если ни одно из слагаемых не параллельно $\vec{a}$.
24. Дайте определение линейного оператора.
25. Дайте определение собственного вектора линейного оператора.
26. Дайте определение собственных значений линейных операторов.
27. Что называется линейным пространством?
28. Что называется евклидовым пространством?
29. Дайте определение ортогональной системы векторов.
30. Приведите примеры экономической интерпретации многомерных векторов и матриц, использование их в плановых расчетах.

Контрольная работа №2
по теме «Векторная алгебра»

I. По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти: 1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды:

1. $A_1(-1;2;1)$, $A_2(-2;2;5)$, $A_3(-3;3;1)$, $A_4(-1;4;3)$.

2. $A_1(-2;1;-1)$, $A_2(-3;1;3)$, $A_3(-4;2;-1)$, $A_4(-2;3;1)$.

3. $A_1(1;1;2)$, $A_2(0;1;6)$, $A_3(-1;2;2)$, $A_4(1;3;4)$.

4. $A_1(-1;-2;1)$, $A_2(-2;-2;5)$, $A_3(-3;-3;1)$, $A_4(-1;0;3)$.

5. $A_1(2;-1;1)$, $A_2(1;-1;5)$, $A_3(0;0;1)$, $A_4(2;1;3)$.

6. $A_1(-1;1;-2)$, $A_2(-2;1;2)$, $A_3(-3;2;-2)$, $A_4(-1;3;0)$.

7. $A_1(1;2;1)$, $A_2(0;2;5)$, $A_3(-1;3;1)$, $A_4(1;4;3)$.

8. $A_1(-2;-1;1)$, $A_2(-3;-1;5)$, $A_3(-4;0;1)$, $A_4(-2;1;3)$.

9. $A_1(1;-1;2)$, $A_2(0;-1;6)$, $A_3(-1;0;2)$, $A_4(1;1;4)$.

10. $A_1(1;-2;1)$, $A_2(0;-2;5)$, $A_3(-1;-1;1)$, $A_4(1;0;3)$.

11. $A_1(0;3;2)$, $A_2(-1;3;6)$, $A_3(-2;4;2)$, $A_4(0;5;4)$.

12. $A_1(-1;2;0)$, $A_2(-2;2;4)$, $A_3(-3;3;0)$, $A_4(-1;4;2)$.

13. $A_1(2;2;3)$, $A_2(1;2;7)$, $A_3(0;3;3)$, $A_4(-2;4;5)$.

14. $A_1(0;-1;2)$, $A_2(-1;-1;6)$, $A_3(-2;0;2)$, $A_4(0;1;4)$.

15. $A_1(3;0;2)$, $A_2(2;0;6)$, $A_3(1;1;2)$, $A_4(3;2;4)$.

16. $A_1(0;2;-1)$, $A_2(-1;2;3)$, $A_3(-2;3;7)$, $A_4(0;4;2)$.

17. $A_1(2;3;2)$, $A_2(1;3;6)$, $A_3(0;4;2)$, $A_4(2;5;4)$.

18. $A_1(-1;0;2)$, $A_2(-2;0;6)$, $A_3(-3;1;2)$, $A_4(-1;2;4)$.

19. $A_1(2;0;3)$, $A_2(1;0;7)$, $A_3(0;1;3)$, $A_4(2;2;5)$.

20. $A_1(2;-1;2)$, $A_2(1;-1;6)$, $A_3(0;0;2)$, $A_4(2;1;4)$.

21. $A_1(0;7;2)$, $A_2(0;2;7)$, $A_3(4;2;5)$, $A_4(1;5;0)$.

22. $A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;4)$.

23. $A_1(4;6;5)$, $A_2(6;9;4)$, $A_3(2;10;10)$, $A_4(7;5;9)$.

24. $A_1(3;5;4)$, $A_2(8;7;4)$, $A_3(5;10;4)$, $A_4(4;7;8)$.

25. $A_1(10;6;6)$, $A_2(-2;8;2)$, $A_3(6;8;9)$, $A_4(7;10;3)$.

26. $A_1(5;2;6)$, $A_2(5;7;4)$, $A_3(4;10;9)$, $A_4(1;8;2)$.

27. $A_1(6;9;3)$, $A_2(4;6;11)$, $A_3(4;9;5)$, $A_4(6;6;5)$.

28. $A_1(5;3;1)$, $A_2(5;7;7)$, $A_3(7;2;2)$, $A_4(2;3;7)$.

29. $A_1(10;5;5)$, $A_2(8;6;4)$, $A_3(8;10;7)$, $A_4(5;6;8)$.

30. $A_1(6;5;8)$, $A_2(7;7;3)$, $A_3(8;4;1)$, $A_4(3;5;8)$.

II. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы третьего порядка.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$; **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -5 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; **4.** $\begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$; **6.** $\begin{pmatrix} -6 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; **8.** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \\ -2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix} -6 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 8 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; **10.** $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

11. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; **12.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$;

13. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; **14.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

15. $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; **16.** $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

17. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; **18.** $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$;

19. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; **20.** $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; **22.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

23. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}$; **24.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

25. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; **26.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

27. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$; **28.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

29. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; **30.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

III. Даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$.

1. Показать, что $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{a}_4$ в этом базисе.

2. Найти: а) $np_{\vec{a}_1}\vec{a}_2$;

б) $|\vec{a}_1+\vec{a}_2|$;

в) $(\vec{a}_1+2\vec{a}_2)\times(\vec{a}_3-2\vec{a}_4)$;

г) $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$;

д) угол между векторами $\vec{a}_1,\vec{a}_2$.

1. $\vec{a}_1=\{1;2;3\}$, $\vec{a}_2=\{-1;3;2\}$, $\vec{a}_3=\{7;-3;5\}$, $\vec{a}_4=\{6;10;17\}$.

2. $\vec{a}_1=\{9;1;3\}$, $\vec{a}_2=\{4;7;8\}$, $\vec{a}_3=\{2;-4;1\}$, $\vec{a}_4=\{1;-13;-13\}$.

3. $\vec{a}_1=\{8;2;3\}$, $\vec{a}_2=\{3;-2;1\}$, $\vec{a}_3=\{4;6;10\}$, $\vec{a}_4=\{7;4;11\}$.

4. $\vec{a}_1=\{3;9;2\}$, $\vec{a}_2=\{10;3;1\}$, $\vec{a}_3=\{1;4;2\}$, $\vec{a}_4=\{19;30;7\}$.

5. $\vec{a}_1=\{2;4;1\}$, $\vec{a}_2=\{5;3;1\}$, $\vec{a}_3=\{1;3;6\}$, $\vec{a}_4=\{24;20;6\}$.

6. $\vec{a}_1=\{4;8;5\}$, $\vec{a}_2=\{1;7;3\}$, $\vec{a}_3=\{3;4;2\}$, $\vec{a}_4=\{7;32;14\}$.

7. $\vec{a}_1=\{-1;2;-3\}$, $\vec{a}_2=\{6;4;2\}$, $\vec{a}_3=\{4;7;2\}$, $\vec{a}_4=\{14;18;6\}$.

8. $\vec{a}_1=\{6;8;5\}$, $\vec{a}_2=\{1;4;3\}$, $\vec{a}_3=\{3;1;4\}$, $\vec{a}_4=\{21;18;33\}$.

9. $\vec{a}_1=\{-2;7;-4\}$, $\vec{a}_2=\{2;7;3\}$, $\vec{a}_3=\{3;7;2\}$, $\vec{a}_4=\{16;14;27\}$.

10. $\vec{a}_1=\{4;3;5\}$, $\vec{a}_2=\{-3;-4;2\}$, $\vec{a}_3=\{7;2;1\}$, $\vec{a}_4=\{-2;5;13\}$.

11. $\vec{a}_1=\{1;3;2\}$, $\vec{a}_2=\{-1;-3;2\}$, $\vec{a}_3=\{3;2;1\}$, $\vec{a}_4=\{1;1;1\}$.

12. $\vec{a}_1=\{1;3;2\}$, $\vec{a}_2=\{-1;-3;2\}$, $\vec{a}_3=\{7;2;1\}$, $\vec{a}_4=\{-2;5;13\}$.

13. $\vec{a}_1=\{4;1;2\}$, $\vec{a}_2=\{-1;4;2\}$, $\vec{a}_3=\{4;2;1\}$, $\vec{a}_4=\{-2;5;6\}$.

14. $\vec{a}_1=\{-1;3;5\}$, $\vec{a}_2=\{-3;-4;2\}$, $\vec{a}_3=\{7;2;1\}$, $\vec{a}_4=\{-2;5;3\}$.

15. $\vec{a}_1=\{4;-3;5\}$, $\vec{a}_2=\{-3;4;2\}$, $\vec{a}_3=\{-1;2;1\}$, $\vec{a}_4=\{-2;5;1\}$.

16. $\vec{a}_1=\{2;3;5\}$, $\vec{a}_2=\{-1;-4;2\}$, $\vec{a}_3=\{6;2;1\}$, $\vec{a}_4=\{-2;5;7\}$.

17. $\vec{a}_1=\{4;3;1\}$, $\vec{a}_2=\{-3;-4;2\}$, $\vec{a}_3=\{3;2;1\}$, $\vec{a}_4=\{-2;1;3\}$.

18. $\vec{a}_1=\{2;1;5\}$, $\vec{a}_2=\{-3;-1;2\}$, $\vec{a}_3=\{1;2;3\}$, $\vec{a}_4=\{-2;3;10\}$.

19. $\vec{a}_1=\{-4;-3;-5\}$, $\vec{a}_2=\{3;4;-2\}$, $\vec{a}_3=\{7;2;1\}$, $\vec{a}_4=\{-2;5;13\}$.

20. $\vec{a}_1=\{4;3;-5\}$, $\vec{a}_2=\{-3;-4;2\}$, $\vec{a}_3=\{-7;2;1\}$, $\vec{a}_4=\{2;5;13\}$.

21. $\vec{a}_1=\{-2,4,7\}$, $\vec{a}_2=\{0,1,2\}$, $\vec{a}_3=\{1,0,1\}$, $\vec{a}_4=\{-1,2,4\}$.

22. $\vec{a}_1=\{6,12,-1\}$, $\vec{a}_2=\{1,3,0\}$, $\vec{a}_3=\{2,-1,1\}$, $\vec{a}_4=\{0,-1,2\}$.

23. $\vec{a}_1=\{1,-4,4\}$, $\vec{a}_2=\{2,1,-1\}$, $\vec{a}_3=\{0,3,2\}$, $\vec{a}_4=\{1,-1,1\}$.

24. $\vec{a}_1=\{-9,5,5\}$, $\vec{a}_2=\{4,1,1\}$, $\vec{a}_3=\{2,0,-3\}$, $\vec{a}_4=\{-1,2,1\}$.

25. $\vec{a}_1=\{-5,5,5\}$, $\vec{a}_2=\{-2,0,1\}$, $\vec{a}_3=\{1,3,-1\}$, $\vec{a}_4=\{0,4,1\}$.

26. $\vec{a}_1=\{13,2,7\}$, $\vec{a}_2=\{5,1,0\}$, $\vec{a}_3=\{2,-1,3\}$, $\vec{a}_4=\{1,0,-1\}$.

27. $\vec{a}_1=\{-19,-1,7\}$, $\vec{a}_2=\{0,1,1\}$, $\vec{a}_3=\{-2,0,1\}$, $\vec{a}_4=\{3,1,0\}$.

28. $\vec{a}_1=\{3,-3,4\}$, $\vec{a}_2=\{1,0,2\}$, $\vec{a}_3=\{0,1,1\}$, $\vec{a}_4=\{2,-1,4\}$.

29. $\vec{a}_1=\{3,3,-1\}$, $\vec{a}_2=\{3,1,0\}$, $\vec{a}_3=\{-1,2,1\}$, $\vec{a}_4=\{-1,0,2\}$.

30. $\vec{a}_1=\{-1,7,-4\}$, $\vec{a}_2=\{-1,2,1\}$, $\vec{a}_3=\{2,0,3\}$, $\vec{a}_4=\{1,1,-1\}$.

Тема 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Основные теоретические сведения

1. Прямоугольные координаты (x; y) точки M и ее полярные координаты $(\rho;\varphi)$ связаны соотношениями:

$$x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, \tag{1}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \mathrm{tg}\varphi=\frac{y}{x}, \tag{2}$$

где ρ – полярный радиус, φ – полярный угол точки M (рис. 3).

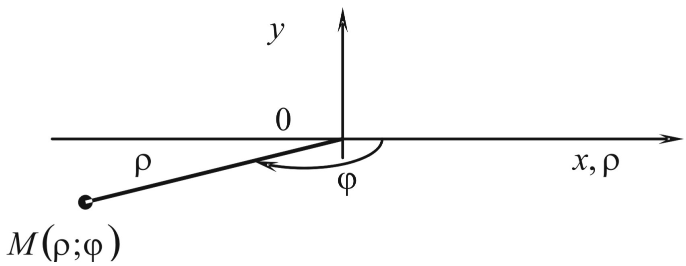


Рис. 3

2. *Общее уравнение прямой*. Всякое уравнение первой степени с двумя неизвестными x и y, т.е. уравнение вида

$$Ax+By+C=0 \tag{3}$$

(где A, B, C – постоянные коэффициенты, причем $A^2+B^2\neq 0$) определяет на плоскости прямую. Это уравнение называется *общим уравнением прямой*.

Частные случаи общего уравнения прямой:

1) если $A=0$, то уравнение приводится к виду $y=b$, где $b=-\dfrac{C}{B}$ (это есть уравнение прямой, параллельной оси Ox);

2) если $B=0$, то уравнение прямой приводится к виду $x=a$, где $a=-\dfrac{C}{A}$ (прямая параллельна оси Oy);

3) если $C=0$, то уравнение приводится к виду $Ax+By=0$ (прямая проходит через начало координат).

Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Если в общем уравнении прямой $B\neq 0$, то, разрешив его относительно y, получим уравнение вида

$$y=kx+b, \tag{4}$$

где $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$. Его называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Уравнение прямой в отрезках. Если в общем уравнении прямой $C \neq 0$, то, разделив все его части на *(– C)*, получим уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{5}$$

где $a = -\dfrac{C}{A}$, $b = -\dfrac{B}{A}$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Если прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом *k*, то уравнение прямой имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{6}$$

Данное уравнение с различными значениями коэффициента *k* называют также *уравнениями пучка прямых* с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то уравнение прямой имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{7}$$

где $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Если прямая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\vec{n}(A, B)$, то уравнение прямой имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{8}$$

Вектор $\vec{n}(A, B)$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором этой прямой*.

Полярное уравнение прямой. Положение прямой в полярных координатах определено, если указано расстояние *p* от полюса *O* до данной прямой и угол α между полярной осью *OP* и осью *l*, проходящей через полюс *O* перпендикулярно данной прямой (рис. 4).

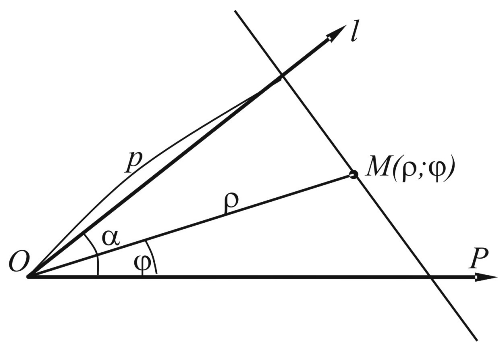


Рис. 4

Для любой точки $M(\rho, \varphi)$ на данной прямой имеем

$$\rho \cos(\varphi - \alpha) = p. \tag{9}$$

Нормальное уравнение прямой. Если прямая определяется заданием p и α (рис. 5), то уравнение (9) прямой в прямоугольной системе координат имеет вид

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) можно получить из общего уравнения прямой (3), умножив обе части данного уравнения на нормирующий множитель,

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{11}$$

учитывая, что знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой.

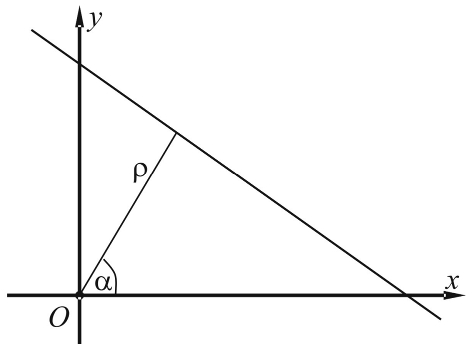


Рис. 5

Пример 1. Привести уравнение $-3x + 4y + 15 = 0$ к нормальному виду.

Решение. Найдем нормирующий множитель $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}$.

Умножая данное уравнение на λ, получим искомое нормальное уравнение прямой:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0.$$

3. *Угол между прямыми*. Если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно, то тангенс угла между этими прямыми можно вычислить по формуле

$$\mathrm{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|. \tag{12}$$

Условие параллельности двух прямых. Для того чтобы прямые L_1 и L_2, заданные уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно, были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы $k_1 = k_2$.

Для того чтобы прямые L_1 и L_2, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно, были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$.

Условие перпендикулярности двух прямых. Для того чтобы прямые L_1 и L_2, заданные уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно, были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Для того чтобы прямые L_1 и L_2, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно, были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$.

4. *Расстояние от точки до прямой*. Если прямая L задана уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ не принадлежит данной прямой, то расстояние от точки до прямой находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{13}$$

Пример 2. Найти расстояние от точки $M_0(2;-1)$ до прямой $-3x + 4y + 15 = 0$.

Решение. По формуле (13) получаем $d = \frac{|-3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 15|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$.

5. *Общее уравнение плоскости P* имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{14}$$

где $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ – нормальный вектор плоскости (рис. 6).

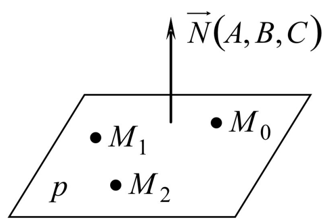


Рис. 6

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Если $D = 0$, то оно принимает вид *Ax+By+Cz=0*. Этому уравнению удовлетворяет точка *O*(0;0;0). Следовательно, в этом случае плоскость *проходит через начало координат*.

2. Если *C=0*, то имеем уравнение *Ax+By+D=0*. Нормальный вектор $\vec{N} = (A; B; 0)$ перпендикулярен оси *Oz*. Следовательно, плоскость параллельна *Oz*; если *B*=0 – параллельна оси *Oy*, если *A*=0 – параллельна оси *Ox*.

3. Если *C*=*D*=0, то плоскость проходит через *O*(0;0;0) параллельно оси *Oz*, т.е. плоскость *Ax*+*By*=0 проходит через ось *Oz*. Аналогично, уравнениям

$By+Cz=0$ и $Ax+Cz=0$ отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси Ox и Oy.

4. Если $A=B=0$, то уравнение (14) принимает вид $Cz+D=0$, т.е. $z=-\dfrac{D}{C}$. Плоскость параллельна плоскости Oxy. Аналогично, уравнениям $Ax+D=0$ и $By+D=0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz.

5. Если $A=B=D=0$, то уравнение () примет вид $Cz=0$, т.е. $z=0$. Это уравнение плоскости Oxy. Аналогично $y=0$ – уравнение плоскости Oxz; $x=0$ – уравнение плоскости Oyx.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0. \tag{15}$$

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору. Если в пространстве $Oxyz$ плоскость P задана точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и вектором $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$, перпендикулярным этой плоскости (рис. 7), то уравнение плоскости имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{16}$$

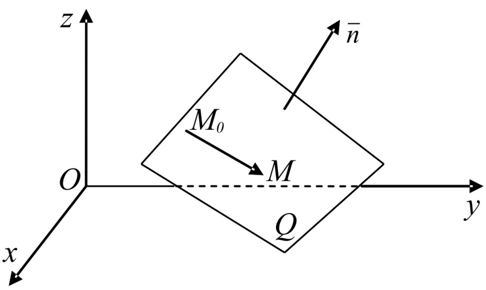


Рис. 7

Уравнение плоскости в отрезках. Если плоскость отсекает на осях Ox, Oy, Oz соответственно отрезки a, b, c (рис. 8), т.е. проходит через точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$, то уравнение плоскости имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{17}$$

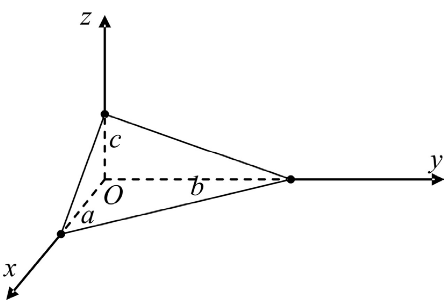


Рис. 8

Замечание. Уравнением (17) удобно пользоваться при построении плоскостей.

Нормальное уравнение плоскости. Положение плоскости P определяется заданием единичного вектора $\vec{e}$, имеющего направление перпендикуляра OK, проведенного на плоскость из начала координат, и длиной p этого перпендикуляра (рис. 9).

Если α, β, γ – это углы, образованные единичным вектором $\vec{e}$ с осями *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно, то уравнение плоскости имеет вид

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \quad (18)$$

Замечание. Общее уравнение плоскости (14) можно привести к нормальному уравнению (18), умножив обе части уравнения (14) на нормирующий

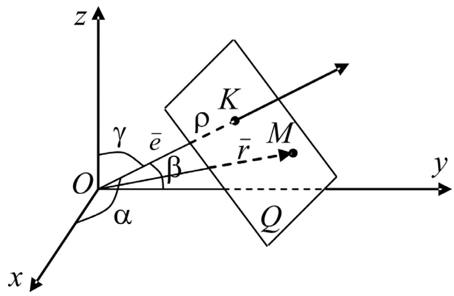


Рис. 9

множитель $\lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, учитывая, что знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена *D* общего уравнения плоскости.

6. *Угол между двумя плоскостями*, имеющими нормальные векторы $\overrightarrow{N_1} = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ и $\overrightarrow{N_2} = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$ (рис. 10), определяется как угол между $\overrightarrow{N}_1$ и $\overrightarrow{N}_2$; косинус этого угла находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|}$$

или

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (19)$$

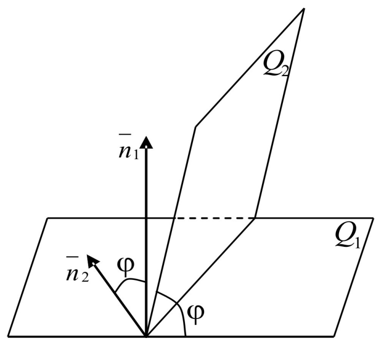


Рис. 10

Пример 3. Найти угол между плоскостью P_1, проходящей через точки $A_1(2; -4; 1)$, $A_2(-1; 2; 0)$, $A_3(0; -2; 3)$, и плоскостью P_2, заданной уравнением $5x + 2y - 3z + 1 = 0$.

Решение. Уравнение плоскости P_1 найдем по формуле (15):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z-1 \\ -1-2 & 2+4 & 0-1 \\ 0-2 & -2+4 & 3-1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z-1 \\ -3 & 6 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $7(x-2) + 4(y+4) + 3(z-1) = 0$ или $7x + 4y + 3z - 1 = 0$.

По уравнениям плоскостей определим их нормальные векторы: $\overrightarrow{N_1} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{N_2} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Угол φ между плоскостями P_1 и P_2 найдем по формуле (19),

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|} \approx 0,64,$$

откуда $\varphi = \arccos 0,64$.

7. Пусть заданы две плоскости P_1 и P_2 в виде общих уравнений плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно.

Условие параллельности плоскостей. Для того чтобы плоскости P_1 и P_2 были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей. Для того чтобы плоскости P_1 и P_2 были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$.

8. *Расстояние от точки до прямой*. Если прямая L задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ не принадлежит данной прямой, то расстояние от точки до прямой находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (20)$$

9. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \qquad (21)$$

Прямая может быть задана уравнениями двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

пересекающихся по этой прямой.

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

определяют прямую, проходящую через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $s = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$.

Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \\ z = nt + z_0. \end{cases}$$

Угол между двумя прямыми, заданными их каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$, определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Необходимое и достаточное условие нахождения двух прямых, заданных их каноническими уравнениями, в одной плоскости (*условие компланарности двух прямых*):

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

Если величины l_1, m_1, n_1 не пропорциональны величинам l_2, m_2, n_2, то указанное соотношение является необходимым и достаточным условием пересечения двух прямых в пространстве.

Угол между прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}};$$

условие параллельности прямой и плоскости:

$$Al+Bm+Cn=0;$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$A/l=B/m=C/n.$$

Пример 4. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(4; -3; 1)$, $A_2(5; -3; 0)$.

Решение. Используя формулу (21), получим

$$\frac{x-4}{5-4}=\frac{y-(-3)}{-3-(-3)}=\frac{z-1}{0-1} \quad \text{или} \quad \frac{x-4}{1}=\frac{y-(-3)}{0}=\frac{z-1}{-1}.$$

Равенство нулю второй дроби означает, что прямая принадлежит плоскости $y=-3$.

10. *Кривые второго порядка.*

Окружность – это множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра) на данное расстояние.

Если R – радиус окружности, точка $C(x_0, y_0)$ – ее центр, то уравнение окружности имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \tag{22}$$

Пример 5. Найти координаты центра и радиус окружности $2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$.

Решение. Разделим исходное уравнение на 2, сгруппируем выражения относительно *x* и *y*:

$$(x^2-4x)+(y^2+\frac{5}{2}y)=4.$$

Дополним выражения, стоящие в скобках, до полных квадратов:

$$(x^2-4x+4)-4+(y^2+\frac{5}{2}y+\frac{25}{16})-\frac{25}{16}=4 \text{ или}$$

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}.$$

Таким образом, координаты центра окружности $x_0=2; y_0=-\frac{5}{4}$, радиус окружности $R=\frac{11}{4}$.

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через *2a*), причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

Если оси координат расположены по отношению к эллипсу так, как на рис. 11, а фокусы эллипса находятся на оси *Ox* на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, то получится простейшее (каноническое) *уравнение эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{23}$$

Здесь *a* – большая, *b* – малая полуось, причем *a*, *b* и *c* (*c* – половина расстояния между фокусами) связаны соотношением $b^2+a^2=c^2$.

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его *эксцентриситетом* $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Расстояния некоторой точки эллипса *M* от его фокусов называются *фокальными радиус-векторами* этой точки. Их обычно обозначают r_1 и r_2. Для любой точки эллипса в силу определения $r_1+r_2=2a$.

Фокальные радиус-векторы выражаются через абсциссу точки эллипса по формулам: $r_1=a-\varepsilon x$ (правый фокальный радиус-вектор), $r_2=a+\varepsilon x$ (левый фокальный радиус-вектор).

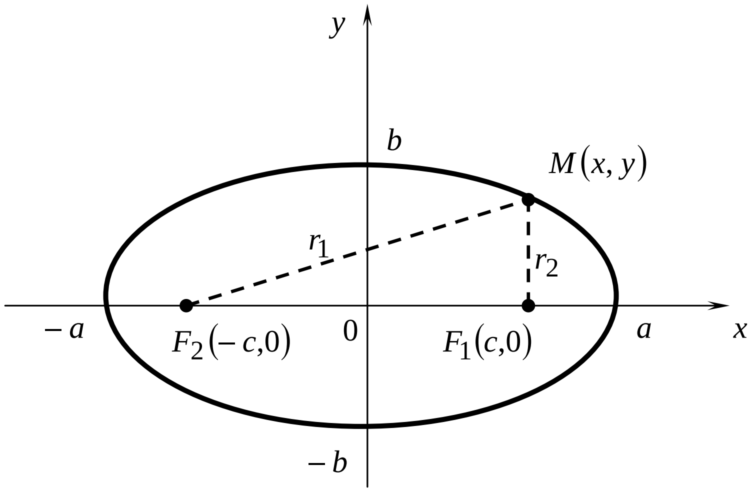


Рис. 11

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через 2*a*), причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами.

Если поместить фокусы гиперболы в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, то получим *каноническое уравнение гиперболы*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{24}$$

где $b^2=c^2-a^2$. Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно осей координат. Точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ называются вершинами гиперболы. Отрезок A_1A_2 такой, что $A_1A_2=2a$ называется *действительной осью* гиперболы, а отрезок B_1B_2 такой, что $B_1B_2=2b$, – *мнимой осью*. При этом $B_1(0;b), B_2(0;-b)$.

Прямая называется *асимптотой* гиперболы, если расстояние точки *M*(*x;y*) гиперболы этой прямой стремится к нулю при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$. Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y=\pm\frac{b}{a}x$.

На рис. 12 указано взаимное расположение гиперболы и ее асимптот. Отношение $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$ называется *эксцентриситетом гиперболы*.

Фокальные радиус-векторы правой ветви гиперболы: $r_1=\varepsilon x-a$ (правый фокальный радиус-вектор), $r_2=\varepsilon x+a$ (левый фокальный радиус-вектор).

Фокальные радиус-векторы левой ветви гиперболы: $r_1 = -\varepsilon x + a$ (правый фокальный радиус-вектор), $r_2 = -\varepsilon x - a$ (левый фокальный радиус-вектор).

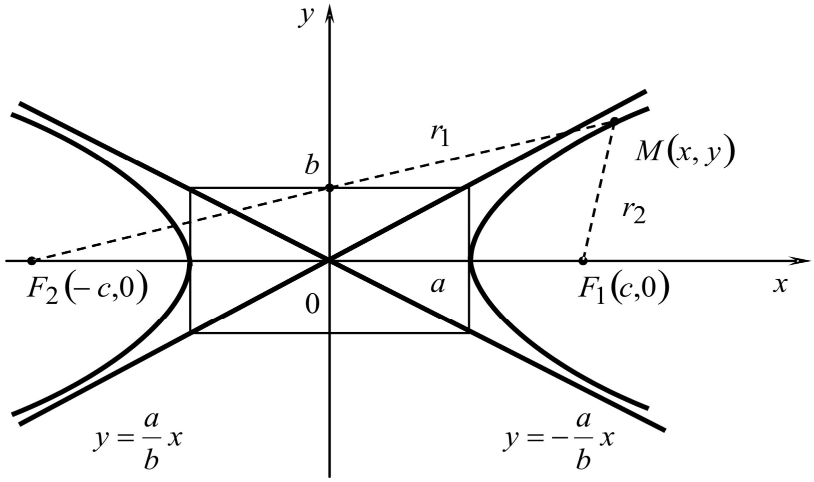


Рис. 12

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*.

Если директрисой параболы является прямая $x = -\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, то уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{25}$$

Эта парабола расположена симметрично относительно оси абсцисс (рис. 13, где $p > 0$). При $p > 0$ ветви параболы обращены в положительную сторону.

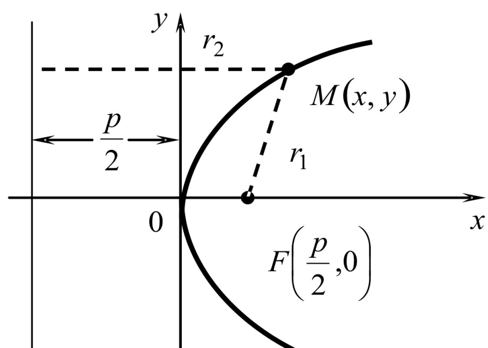


Рис. 13

Длина фокального радиус-вектора параболы $y^2 = 2px$ определяется по формуле $r = x + \frac{p}{2}$ ($p > 0$).

11. Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{26}$$

где *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* – произвольные действительные числа. Оно определяет на плоскости *Oxy* эллипс, гиперболу или параболу (с возможными случаями распада и вырождения этих кривых) с осями симметрии, параллельными осям координат:

1) если $AC - B^2 > 0$, тогда определяемая этим уравнением кривая есть эллипс (действительный, мнимый или выродившийся в точку);

2) если $AC - B^2 < 0$, тогда соответствующая кривая является гиперболой;

3) если $AC - B^2 = 0$, тогда уравнение определяет параболу.

Если кривая второго порядка задана уравнением (26) то, применив преобразование поворота осей координат с использованием формул

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \tag{27}$$

следует при соответствующем выборе α освободиться в уравнении от члена с произведением координат и свести исходное уравнение к одному из трех вышеперечисленных типов.

Пример 6. Привести к каноническому виду уравнение
$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$.

Решение. 1. Преобразуем данное уравнение, использовав формулы поворота осей координат (4):

$$5(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 4(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$$
$$+8(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 8(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 14(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 5 = 0$$

или

$$(5\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\sin^2\alpha)x'^2 + (5\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha)y'^2 +$$
$$+\left[6\sin\alpha\cos\alpha + 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\right]x'y' + (8\cos\alpha + 14\sin\alpha)x' +$$
$$+(14\cos\alpha - 8\sin\alpha)y' + 5 = 0.$$

Найдем α из условия $4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 6\sin\alpha\cos\alpha = 0$, т.е. приравняем к нулю коэффициент при $x'y'$. Получим уравнение $2\mathrm{tg}^2\alpha - 3\mathrm{tg}\alpha - 2 = 0$. Отсюда $\mathrm{tg}\alpha_1 = 2$, $\mathrm{tg}\alpha_2 = -\frac{1}{2}$.

Заметим, что эти значения $\mathrm{tg}\alpha$ соответствуют двум взаимно перпендикулярным направлениям. Поэтому, взяв $\mathrm{tg}\alpha = 2$ вместо $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$, мы только меняем ролями оси x' и y' (рис. 14).

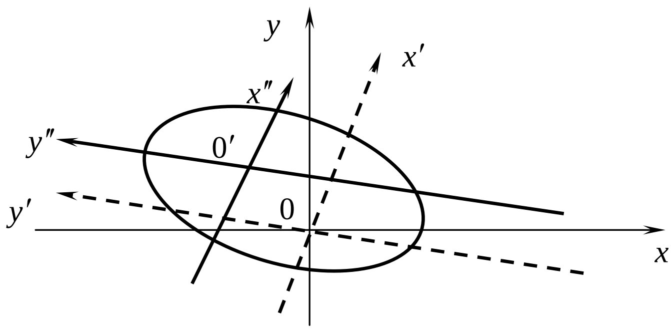


Рис. 14

Пусть $\mathrm{tg}\alpha = 2$, тогда $\sin\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$; возьмем положительные значения sinα и cosα. Тогда уравнение принимает вид

$$9x'^2 + 4y'^2 + \frac{36}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 5 = 0, \text{ или}$$

$$9\left(x'^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}x'\right) + 4\left(y'^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right) = -5.$$

2. Выражения, стоящие в скобках, дополним до полных квадратов:

$$9\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{33}{5} + \frac{1}{20} - 5,$$

или

$$9\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Приняв за новое начало точку $O'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$, применим формулы преобразования координат $x' = x'' - \frac{2}{\sqrt{5}}, y' = y'' + \frac{1}{4\sqrt{5}}$, получим

$$9x''^2 + 4y''^2 = \frac{9}{4}, \quad \text{или} \quad \frac{x''^2}{1/4} + \frac{y''^2}{9/16} = 1 \text{ (уравнение эллипса).}$$

11. *Метод координат* заключается в установлении соответствия между точками прямой (плоскости, пространства) и их координатами – действительными числами при помощи системы координат.

Прямоугольная система координат Oxy на плоскости задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок.

Координатами точки М в системе координат Oxy называются координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{28}$$

Координаты $(x; y)$ *точки M, делящей в заданном отношении λ отрезок AB*, где $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\lambda = \dfrac{AM}{MB}$, находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{29}$$

Если $\lambda = 1$, т.е. точка M делит отрезок AB пополам, получаются *формулы координат середины отрезка*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{30}$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}|\Delta|, \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \tag{31}$$

Пример 6. Отрезок AB четырьмя точками разделён на пять равных частей. Определить координату ближайшей к A точки деления, если $A(-3)$, $B(7)$.

Решение. Пусть $C(x)$ – искомая точка; тогда $\lambda = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{1}{4}$.

Следовательно, по формуле $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ находим $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} =$

$= \dfrac{-3 + (1/4) \cdot 7}{1 + 1/4} = -1$, т.е. $C(-1)$.

Пример 7. Известны точки $A(1)$, $B(5)$ – концы отрезка AB; вне этого отрезка расположена точка C, причем ее расстояние от точки A в три раза больше расстояния от точки B. Определить координату точки C.

Решение. Отметим, что $\lambda = \dfrac{AC}{CB} = -3$. Таким образом,

$x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \dfrac{1 - 3 \cdot 5}{1-3} = 7$, т.е. $C(7)$.

Пример 8. Определить расстояние между точками $A(3;8)$ и $B(-5;14)$.

Решение.

По формуле (28) получим

$$d = \sqrt{\left(-5-3\right)^2 + \left(14-8\right)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

Пример 9. Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Определить координаты точки пересечения медиан треугольника.

Решение. Найдем координаты точки D – середины отрезка AB; имеем $x_D = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_D = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. Точка M, в которой пересекаются медианы, делит отрезок CD в отношении 2:1, считая от вершины C. Следовательно, координаты точки M можно определить по формулам

$$x = \frac{x_3 + 2x_D}{1+2}, \quad y = \frac{y_3 + 2y_D}{1+2},$$

т.е.

$$x = \frac{x_3 + 2 \cdot \dfrac{x_1 + x_2}{2}}{3}, \quad y = \frac{y_3 + 2 \cdot \dfrac{y_1 + y_2}{2}}{3}.$$

В результате получаем

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Пример 10. Определить площадь треугольника с вершинами: $A(-2;-4)$, $B(2;8)$, $C(10;2)$.

Решение. Используя формулу (31), получим

$$S = \frac{1}{2}\left|\Delta\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|(2+2)\cdot(2+4) - (10+2)\cdot(8+4)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|24 - 144\right| = 60 \text{ (кв.ед.)}.$$

Пример 11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;-5)$ параллельно прямой $3x + 4y + 2 = 0$.

Решение. Разрешив последнее уравнение относительно y, получим $y = -(3/4)x - 1/2$. Следовательно, в силу условия параллельности угловой коэффициент искомой прямой равен –3/4. Воспользовавшись уравнением $y - y_1 = k(x - x_1)$, получаем $y - (-5) = (-3/4)[x - (-2)]$, т.е. $3x + 4y + 26 = 0$.

Пример 12. Даны вершины треугольника: $A(2;\ 2)$, $B(-2;\ -8)$ *и* $C\ (-6;-2)$. Составить уравнение медиан треугольника.

Решение. Находим координаты середин сторон BC, AC и AB:

$x' = (-2-6)/2 = -4$, $y' = (-8-2)/2 = -5$, $A_1(-4;-5)$;

$x'' = (2-6)/2 = -2$, $y'' = (2-2)/2 = 0$, $A_1(-2;0)$;

$x''' = (2-2)/2 = 0$, $y''' = (2-8)/2 = -3$, $A_1(0;-3)$.

Уравнения медиан находим с помощью уравнения прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение медианы AA_1:

$(y-2)/(-5-2) = (x-2)/(-4-2)$, или $(y-2)/7 = (x-2)/6$,

т.е. $7x-6y-2=0$.

Находим уравнение медианы BB_1: поскольку точки $B(-2;-8)$ *и* $B_1(-2;0)$ имеют одинаковые абсциссы, медиана BB_1 параллельна оси ординат. Ее уравнение $x+2=0$.

Уравнение медианы CC_1: $(y+2)/(-3+2) = (x+6)/(0+6)$, или $x+6y+18=0$.

Пример 13. Даны вершины треугольника: $A(0; 1)$, $B(6; 5)$ и $C(12; -1)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C.

Решение. По формуле $k = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ найдем угловой коэффициент стороны AB; имеем $k = (5-1)/(6-0) = 4/6 = 2/3$. В силу условия перпендикулярности угловой коэффициент высоты, проведенной их вершины C, равен $-3/2$. Уравнение этой высоты имеет вид $y+1 = (-3/2)(x-12)$, или $3x+2y-34=0$.

12. Приложения в экономике

12.1. *Кривые спроса и предложения. Точка равновесия*

Рассмотрим зависимости спроса $D(demand)$ и предложения S *(supply)* от цены на товар $P(price)$.Чем меньше цена, тем больше спрос при постоянной покупательной способности населения. Обычно зависимость D от P имеет вид ниспадающей линии, например, прямой:

$$D = -aP + C,\ a > 0,\ c > 0. \tag{32}$$

В свою очередь, предложение растет с увеличением цены на товар, и потому зависимость S от P имеют следующую характерную форму:

$$S = bP + d, \quad b > 0, d > 0. \tag{33}$$

В формулах (32) и (33) a, b, c и d – так называемые экзогенные величины; они зависят от ряда других причин (благосостояние общества, политическая обстановка и т.п.). Переменные, входящие в формулы (32) и (33), положительны, поэтому графики функций имеют смысл только в первой координатной четверти.

Для экономики представляет интерес условие равновесия, т.е. равенство спроса и предложения; это условие дается уравнением

$$D(P) = S(P) \tag{34}$$

и соответствует точке M пересечения кривых D и S – это так называемая *точка равновесия* (рис. 15). Цена P_0, при которой выполнено это условие, называется *равновесной.*

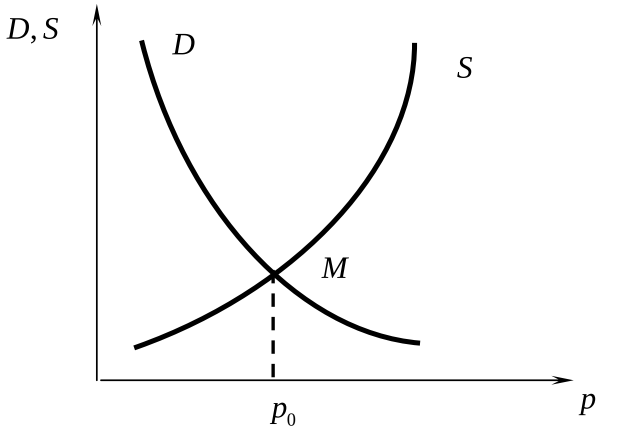


Рис. 15. Точка равновесия

При увеличении благосостояния населения, что соответствует росту величины c в формуле (32), точка равновесия M смещается вправо, так как кривая D поднимается вверх; при этом цена товара растет при неизменной кривой предложения S.

12.2. *Паутинная модель рынка*

Рассмотрим простейшую задачу поиска равновесной цены. Это одна из основных проблем рынка, означающая торг между производителем и покупателем (рис. 16).

Пусть сначала цену P_1 называет производитель (в простейшей схеме он же и продавец). Цена P_1 выше равновесной (всякий производитель стремится получить максимум выгоды из своего производства). Покупатель оценивает спрос D_1 при этой цене и определяет свою цену P_2, при которой этот спрос D_1 равен предложению. Цена P_2 ниже равновесной (всякий покупатель стремится купить подешевле). В свою очередь, производитель оценивает спрос D_2 соответствующий цене P_2, и определяет свою цену P_3, при которой спрос равен предложению; эта цена выше равновесной. Процесс торга продолжается и при определенных условиях приводит к устойчивому приближению к равновесной цене, т. е. к «скручиванию» спирали.

Если рассматривать последовательность чисел, состоящую из называемых в процессе торга цен, то она имеет своим пределом равновесную цену P_0 (см. рис. 16, *а)*. Следует заметить, что в данной схеме спираль торга скручивается, если $b < a$. В противном случае, имеет место либо циркулирование по замкнутому циклу ($b = a$, см. рис. 16, *б*), либо «раскручивание» спирали и уход от равновесной цены ($b > a$, см. рис. 16, *в*).

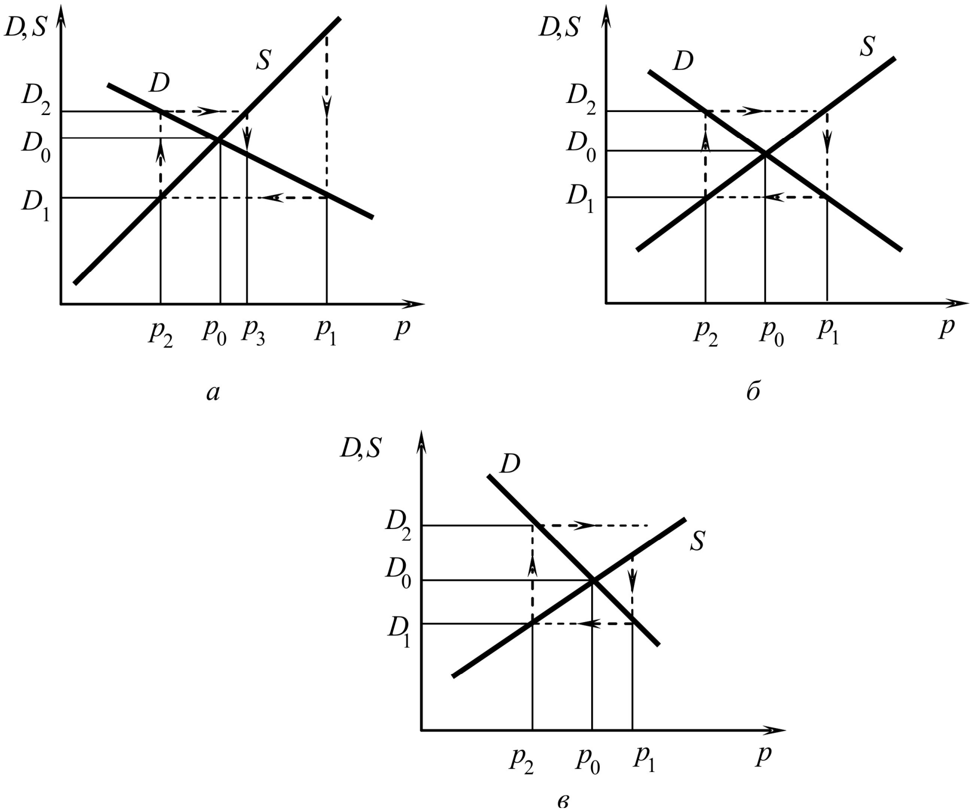


Рис. 16 Поиск равновесной цены

Контрольные вопросы

1. Дайте определение уравнения линии на плоскости.
2. Приведите формулы различных видов уравнения прямой на плоскости (в пространстве).
3. Приведите формулу вычисления угла между прямыми на плоскости (в пространстве).
4. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости (в пространстве).

5. Как найти расстояние от точки до прямой на плоскости (в пространстве)?
6. Докажите, что если две прямые параллельны, то их уравнения можно представить в таком виде, что они будут отличаться только свободными членами.
7. В чем заключается метод координат на плоскости?
8. Как расположены точки, имеющие одну и ту же проекцию на ось Ox? на ось Oy?
9. Как расположена точка в прямоугольной системе координат, если одна ее координата равна нулю? две ее координаты равны нулю?
10. Докажите, что во всяком прямоугольном треугольнике длина медианы, соединяющей вершину прямого угла с серединой гипотенузы, равна половине гипотенузы.
11. Приведите формулы уравнений плоскости в пространстве.
12. Приведите формулу угла между плоскостями.
13. Приведите формулу угла между прямой и плоскостью.
14. Какие линии называются кривыми второго порядка?
15. Дайте определение окружности, приведите ее геометрические свойства.
16. Найдите уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в точке (x_0, y_0).
17. Дайте определение эллипса, приведите его геометрические свойства.
18. Выведите условие, при котором прямая $Ax + By + C = 0$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
19. Докажите, что отношение расстояний от любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная □.
20. Дайте определение гиперболы, приведите ее геометрические свойства.
21. Докажите, что длина перпендикуляра, опущенного из фокуса на одну из асимптот гиперболы, равна мнимой полуоси.
22. Выведите условие, при котором прямая $Ax + By + C = 0$ касается гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
23. Дайте определение параболы, приведите ее геометрические свойства.
24. Сформулируйте алгоритм приведения уравнений кривых второго порядка к каноническому виду.

Контрольная работа №3
по теме «Аналитическая геометрия»

I. По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти: 1) уравнения прямых A_1A_2 и A_1A_3; 2) уравнения плоскостей $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$; 3) угол между плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$:

1. $A_1(-1;2;1)$, $A_2(-2;2;5)$, $A_3(-3;3;1)$, $A_4(-1;4;3)$.

2. $A_1(-2;1;-1)$, $A_2(-3;1;3)$, $A_3(-4;2;-1)$, $A_4(-2;3;1)$.

3. $A_1(1;1;2)$, $A_2(0;1;6)$, $A_3(-1;2;2)$, $A_4(1;3;4)$.

4. $A_1(-1;-2;1)$, $A_2(-2;-2;5)$, $A_3(-3;-3;1)$, $A_4(-1;0;3)$.

5. $A_1(2;-1;1)$, $A_2(1;-1;5)$, $A_3(0;0;1)$, $A_4(2;1;3)$.

6. $A_1(-1;1;-2)$, $A_2(-2;1;2)$, $A_3(-3;2;-2)$, $A_4(-1;3;0)$.

7. $A_1(1;2;1)$, $A_2(0;2;5)$, $A_3(-1;3;1)$, $A_4(1;4;3)$.

8. $A_1(-2;-1;1)$, $A_2(-3;-1;5)$, $A_3(-4;0;1)$, $A_4(-2;1;3)$.

9. $A_1(1;-1;2)$, $A_2(0;-1;6)$, $A_3(-1;0;2)$, $A_4(1;1;4)$.

10. $A_1(1;-2;1)$, $A_2(0;-2;5)$, $A_3(-1;-1;1)$, $A_4(1;0;3)$.

11. $A_1(0;3;2)$, $A_2(-1;3;6)$, $A_3(-2;4;2)$, $A_4(0;5;4)$.

12. $A_1(-1;2;0)$, $A_2(-2;2;4)$, $A_3(-3;3;0)$, $A_4(-1;4;2)$.

13. $A_1(2;2;3)$, $A_2(1;2;7)$, $A_3(0;3;3)$, $A_4(-2;4;5)$.

14. $A_1(0;-1;2)$, $A_2(-1;-1;6)$, $A_3(-2;0;2)$, $A_4(0;1;4)$.

15. $A_1(3;0;2)$, $A_2(2;0;6)$, $A_3(1;1;2)$, $A_4(3;2;4)$.

16. $A_1(0;2;-1)$, $A_2(-1;2;3)$, $A_3(-2;3;7)$, $A_4(0;4;2)$.

17. $A_1(2;3;2)$, $A_2(1;3;6)$, $A_3(0;4;2)$, $A_4(2;5;4)$.

18. $A_1(-1;0;2)$, $A_2(-2;0;6)$, $A_3(-3;1;2)$, $A_4(-1;2;4)$.

19. $A_1(2;0;3)$, $A_2(1;0;7)$, $A_3(0;1;3)$, $A_4(2;2;5)$.

20. $A_1(2;-1;2)$, $A_2(1;-1;6)$, $A_3(0;0;2)$, $A_4(2;1;4)$.

21. $A_1(0;7;2)$, $A_2(0;2;7)$, $A_3(4;2;5)$, $A_4(1;5;0)$.

22. $A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;4)$.

23. $A_1(4;6;5)$, $A_2(6;9;4)$, $A_3(2;10;10)$, $A_4(7;5;9)$.

24. $A_1(3;5;4)$, $A_2(8;7;4)$, $A_3(5;10;4)$, $A_4(4;7;8)$.

25. $A_1(10;6;6)$, $A_2(-2;8;2)$, $A_3(6;8;9)$, $A_4(7;10;3)$.

26. $A_1(5;2;6)$, $A_2(5;7;4)$, $A_3(4;10;9)$, $A_4(1;8;2)$.

27. $A_1(6;9;3)$, $A_2(4;6;11)$, $A_3(4;9;5)$, $A_4(6;6;5)$.

28. $A_1(5;3;1)$, $A_2(5;7;7)$, $A_3(7;2;2)$, $A_4(2;3;7)$.

29. $A_1(10;5;5)$, $A_2(8;6;4)$, $A_3(8;10;7)$, $A_4(5;6;8)$.

30. $A_1(6;5;8)$, $A_2(7;7;3)$, $A_3(8;4;1)$, $A_4(3;5;8)$.

II. Привести уравнение кривой второго порядка $f(x,y)=0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с прямой $Ax+By+C=0$. Построить графики кривой и прямой.

1. $2x^2-4x-y+3=0,\quad 2x-y-1=0.$
2. $x-2y^2+4y-3=0,\quad x-2y+1=0.$
3. $x^2-2x-y+2=0,\quad x-y=0.$
4. $x-y^2+2y-2=0,\quad x+y-2=0.$
5. $x^2-2x+y+2=0,\quad x-y-2=0.$
6. $x+y^2-2y+3=0,\quad x+y+1=0.$
7. $2x^2+8x+y+7=0,\quad 2x+y+3=0.$
8. $x+2y^2-4y+4=0,\quad x-2y+4=0.$
9. $x^2+4x+y+3=0,\quad x-y+3=0.$
10. $x+2y^2+4y+1=0,\quad x+2y+1=0.$
11. $x^2-2x+y-3=0,\quad 3x-y-2=0.$
12. $x+y^2-4y+6=0,\quad 3x+10=0.$
13. $2x^2-12x+y^2+10=0,\quad x+y-2=0.$
14. $x^2+2x+y-2=0,\quad 2x-y+4=0.$
15. $2x^2+4x+y^2-2=0,\quad 2x+y+2=0.$
16. $x^2+2y^2-12y+10=0,\quad x+y-3=0.$
17. $x^2-6x+y^2+5=0,\quad 2x+y-6=0.$
18. $y^2+x+4y+3=0,\quad x+2y+2=0.$
19. $x^2+2y^2+8y+4=0,\quad 5y+4=0.$
20. $x^2+y^2-4y+3=0,\quad 3x+y-3=0.$
21. $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0,\quad x+y-3=0.$
22. $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0,\quad x-y+3=0.$
23. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2+\frac{2}{3}y-x-1=0,\quad x+y-1=0.$
24. $x^2-4x+4y^2-8y+8=0,\quad x+y-2=0.$
25. $x^2+4y^2+8y+5=0,\quad x+y-\sqrt{5}=0.$
26. $x^2-y^2-6x+10=0,\quad -x+y+\sqrt{10}=0.$
27. $2x^2-4x+2y-3=0,\quad x+y-\frac{3}{2}=0.$
28. $x^2-6x+8=0,\quad 3x+y-12=0.$
29. $x^2+2x+5=0,\quad 3x+y-3=0.$
30. $4x^2+2y^2-3y+8=0,\quad x+y-3=0.$

III. Даны три последовательные вершины параллелограмма A, B, C. Найти:

а) уравнение стороны AD;

б) уравнение высоты, проведенной из вершины B на сторону AD, длину этой высоты;

в) уравнение диагонали BD;

г) площадь параллелограмма;

д) угол между диагоналями параллелограмма.

1. $A(1;5), B(4;1), C(1;-3)$;

2. $A(-2;1), B(2;2), C(3;-2)$;

3. $A(2;4), B(3;0), C(0;-2)$;

4. $A(-3;2), B(2;1), C(-1;-3)$;

5. $A(-1;4), B(2;0), C(-1;-3)$;

6. $A(-2;3), B(3;2), C(0;-2)$;

7. $A(-2;5), B(1;2), C(-1;-2)$;

8. $A(-2;1), B(2;5), C(5;-1)$;

9. $A(-2;3), B(2;1), C(-1;-3)$;

10. $A(5;3), B(3;-3), C(-1;-1)$;

11. $A(-1;3), B(3;5), C(4;-1)$;

12. $A(1;4), B(-2;-1), C(4;-2)$;

13. $A(-3;1), B(4;2), C(1;-2)$;

14. $A(-6;1), B(-5;5), C(1;3)$;

15. $A(1;1), B(4;5), C(5;-1)$;

16. $A(-4;-3), B(-3;1), C(2;-1)$;

17. $A(-1;-1), B(-2;3), C(2;4)$;

18. $A(-2;-2), B(1;2), C(4;1)$;

19. $A(1;-2), B(-1;2), C(3;4)$;

20. $A(-1;-2), B(3;1), C(5;-3)$;

21. $A(1;1), B(-1;4), C(2;7)$;

22. $A(-1;-2), B(3;4), C(5;-1)$;

23. $A(-3;-2), B(-2;3), C(1;1)$;

24. $A(-3;-1), B(-1;1), C(2;-3)$;

25. $A(-3;-2), B(-1;4), C(1;2)$;

26. $A(-1;3), B(4;2), C(-1;-1)$;

27. $A(-1;1), B(2;4), C(3;2)$;

28. $A(-5;1), B(-4;4), C(3;2)$;

29. $A(-1;4), B(2;7), C(4;5)$;

30. $A(-3;-3), B(-2;2), C(4;-1)$.

IV. Задачи на уравнения прямой и плоскости в пространстве.

1. Даны две точки $A(1;-1;2)$ и $B(3;0;1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{AB}$.

2. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(-1;3;-2)$ параллельно плоскости $2x-3y+4z-1=0$.

3. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;-2;4)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{4}$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;-3;-1)$ параллельно двум векторам $\bar{a}=\{1;3;-2\}$, $\bar{b}=\{3;-1;1\}$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x-2y+3z-1=0$, $x+3y-2z-5=0$ и точку $A(1;-1;2)$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-1;6)$ перпендикулярно плоскости $2x-4+3z-4=0$.

7. Найти угол между прямыми $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+5}{-1}$ и $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z-2}{4}$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-4;5)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+4}{-1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+1}{6}$.

9. Найти точку пересечения прямой и плоскости: $\frac{x+1}{4}=\frac{y+5}{-5}=\frac{z+1}{6}$ и $3x+4y-3z+7=0$.

10. При каком значении k прямая $\frac{x-2}{4}=\frac{y+5}{2}=\frac{z+1}{k}$ параллельная плоскости $x-4y+5z-1=0$?

11. Даны две точки $A(2;-1;-2)$ и $B(-4;1;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{AB}$.

12. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(1;0;-3)$ параллельно плоскости $x-4y-2z+5=0$.

13. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;2;-3)$ параллельно прямой $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1}$.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-4;-1)$ параллельно двум векторам $\bar{a}=\{1;-3;2\}$, $\bar{b}=\{-3;1;-1\}$.

15. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $3x-y+2z-6=0$, $-4x+y-2z+5=0$ и точку $A(1;-1;-1)$.

16. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;-1;2)$ перпендикулярно плоскости $x+3y-4z-1=0$.

17. Найти угол между прямыми $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+5}{-5}$ и $\frac{x}{4}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z+1}{-1}$.

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-1;2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+5}{2}$.

19. Найти точку пересечения прямой и плоскости: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+5}{-1}$ и $3x-4y-z+10=0$.

20. При каком значении k прямая $\frac{x-1}{2k}=\frac{y}{-3}=\frac{z+4}{-2}$ параллельная плоскости $3x+2y+z-11=0$?

21. Даны две точки $A(-2;1;4)$ и $B(3;6;0)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{AB}$.

22. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(3;-2;1)$ параллельно плоскости $-x+3y+4z-3=0$.

23. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;4;-2)$ параллельно прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-4}{-3}$.

24. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1;2;3)$ параллельно двум векторам $\bar{a}=\{-1;3;-2\}$, $\bar{b}=\{3;1;-1\}$.

25. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $-3x+2y+z-10=0$, $3x+y-5z-9=0$ и точку $A(1;-3;2)$.

26. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-2;1)$ перпендикулярно плоскости $-2y+3y+z+1=0$.

27. Найти угол между прямыми $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+5}{1}$ и $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}$.

28. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(4;-1;-3)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{8}=\frac{z+4}{-3}$.

29. Найти точку пересечения прямой и плоскости: $\frac{x+4}{-3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+7}{2}$ и $x-y-z+12=0$.

30. При каком значении k прямая $\frac{x-3}{2k}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{-4}$ параллельна плоскости $2x-3y+4z-3=0$?

V. Даны кривые, описанные уравнениями в обобщенной полярной системе координат.

1. Найти точки, лежащие на кривой, задавая значения φ через промежуток, равный $\frac{\pi}{8}$, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$.

2. Построить кривую, соединив полученные точки линией.

3. Составить уравнение этой кривой в декартовой системе координат (полюс совпадает с началом координат, положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью).

1. $\rho = \dfrac{4}{3-\cos\varphi}$; **2.** $\rho = \dfrac{4}{1-3\cos\varphi}$;

3. $\rho = \dfrac{5}{3-2\cos\varphi}$; **4.** $\rho = \dfrac{5}{2-3\cos\varphi}$;

5. $\rho = 3+2\cos\varphi$; **6.** $\rho = 2+3\cos\varphi$;

7. $\rho = 3-\sin 2\varphi$; **8.** $\rho = 1+\sin 3\varphi$;

9. $\rho = -2\cos 2\varphi$; **10.** $\rho = 3\cos 2\varphi$;

11. $\rho = 1+\sin\varphi$; **12.** $\rho = 4-\sin\varphi$;

13. $\rho = 4-\sin 3\varphi$; **14.** $\rho = 1+\cos\varphi$;

15. $\rho = 1+\sin 2\varphi$; **16.** $\rho = -3+\sin 2\varphi$;

17. $\rho = \dfrac{1}{2-\cos\varphi}$; **18.** $\rho = \dfrac{-1}{1+\cos\varphi}$;

19. $\rho = \dfrac{2}{1-\cos\varphi}$; **20.** $\rho = \dfrac{-2}{3-\cos\varphi}$;

21. $\rho = \dfrac{3}{2+4\cos\varphi}$; **22.** $\rho = \dfrac{4}{-3+\cos\varphi}$;

23. $\rho = 2+\cos 2\varphi$; **24.** $\rho = -3-\cos 2\varphi$;

25. $\rho = -1+\sin 3\varphi$; **26.** $\rho = -1+\cos 3\varphi$;

27. $\rho = \dfrac{7}{4-3\cos\varphi}$; **28.** $\rho = \dfrac{7}{3-4\cos\varphi}$;

29. $\rho = \dfrac{6}{3+\cos\varphi}$; **30.** $\rho = \dfrac{6}{3-\cos\varphi}$.

Тема 4. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Основные теоретические сведения

1. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется $M > 0$ такое, что $\forall x: |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A_1 называется *пределом функции* $y = f(x)$ слева в точке a, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $x \in (a - \delta; a)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

Аналогично определяется предел функции справа. Пределы функции слева и справа называются *односторонними пределами*.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Две бесконечно малые функции можно сравнивать с помощью их отношения. Пусть $f = f(x)$ и $\phi = \varphi(x)$ есть бесконечно малые функции при $x \to a$.

1. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A \neq 0$ ($A \in R$), то функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка*.

2. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$, то функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются *эквивалентными*.

3. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, то $f(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем $\varphi(x)$.

4. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$, то $f(x)$ называется *бесконечно малой более низкого порядка*, чем $\varphi(x)$.

5. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ не существует, то функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются *несравнимыми бесконечно малыми*.

Важнейшие эквивалентности, используемые при вычислении пределов:

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.
2. $\mathrm{tg}x \sim x$ при $x \to 0$.
3. $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$.
4. $\mathrm{arctg}x \sim x$ при $x \to 0$.
5. $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.
6. $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.
7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ при $x \to 0$.
8. $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$.
9. $\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$ при $x \to 0$.
10. $(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x, k > 0$ при $x \to 0$.

2. *Приемы раскрытия неопределенностей:*

1) сокращение на множитель, создающий неопределенность;

2) деление числителя и знаменателя на старшую степень переменной (для отношения многочленов при $x \to \infty$);

3) применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших;

4) использование двух замечательных пределов;

5) умножение числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное числителю (и/или знаменателю) при неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, получающейся при $x \to a$.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{1/\alpha} = e. \tag{2}$$

Свойства пределов функции в точке

Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то:

1) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)/g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) / \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\mathrm{ctg}(x-3)}{\ln(4-x)}$.

Решение. Подставляя вместо x его предельное значение, равное 3, получим неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{0}\right]$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\mathrm{ctg}(x-3)}{\ln(4-x)} = \infty$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+5x}{-4x^4+7}$.

Решение. Подставляя вместо x его предельное значение, равное ∞, получим неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель на наибольшую степень x, т.е. на x^4. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^4+5x}{-4x^4+7}=\lim_{x\to a}\frac{12+5/x^3}{-4+7/x^4}=\frac{12+0}{-4+0}=-3,$$

так как при $x\to\infty$ функции $\dfrac{5}{x^3}$ и $\dfrac{7}{x^4}$ являются бесконечно малыми.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\ln(1-x^2)}$.

Решение. В данном случае получилась неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для раскрытия этой неопределенности используем метод замены бесконечно малых функций эквивалентными. При $x\to 0$ $1-\cos 4x=2\sin^2 2x\sim 8x^2$, $\ln\left(1-x^2\right)\sim -x^2$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\ln(1-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{-x^2}=-8.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to -2}\left(5+2x\right)^{\frac{1}{2x}}$.

Решение. При подстановке $x=-2$ получим неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Выполним замену переменной: $y=x+2$, тогда $y\to 0$ при условии, что $x\to -2$.

$$\lim_{x\to -2}\left(5+2x\right)^{\frac{1}{2+x}}=\lim_{y\to 0}\left(1+2y\right)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}\left(\left(1+2y\right)^{\frac{1}{2y}}\right)^2=e^2.$$

Пример 5. Указать слагаемое, эквивалентное всей сумме $\alpha(x)=\sin^3 x-4\operatorname{tg}x$ при $x\to 0$.

Решение. При $x\to 0$ оба слагаемых являются бесконечно малыми. Найдем предел отношения суммы к каждому из слагаемых, используя замену бесконечно малых эквивалентными:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x-4\operatorname{tg}x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{4\operatorname{tg}x}{\sin^3 x}\right)=1-4\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin^3 x}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x-4\operatorname{tg}x}{-4\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{-4\operatorname{tg}x}+1=1.$$

Следовательно, функция $\alpha(x)=\sin^3 x-4\operatorname{tg}x$ эквивалента при $x\to 0$ второму слагаемому.

3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x=a$, если: 1) эта функция определена в некоторой окрестности точки a; 2) существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; 3) этот предел равен значению функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Классификация точек разрыва функции:

1) если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$, причем не все три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ равны между собой, то a называется *точкой разрыва I рода*;

1.1) если $f(a-0)=f(a+0)\neq f(a)$, то a называется *точкой устранимого разрыва;*

1.2) если $f(a-0)\neq f(a+0)$, то a называется *точкой скачка;*

2) если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$ не существует или равен ∞, то a называется *точкой разрыва II рода*.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теорема (Вейерштрасса)

Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Следствие

Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема (Больцано – Коши).

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a)=A$ и $f(b)=B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

Следствие

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a;b]$ найдется хотя бы одна точка ξ, в которой данная функция обращается в ноль: $f(\xi)=0$.

Пример 6. Исследовать функцию

$$y=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1} & \text{при} \quad x<-1,\\ \sqrt{1-x^2} & \text{при} \quad -1\le x\le 0,\\ 1-x & \text{при} \quad x>0\end{cases}$$

на непрерывность; найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

Решение. Данная функция определена на всей числовой прямой. Точками разрыва могут быть точки, в которых изменяется аналитическое выражение функции, т.е. $x=-1$ и $x=0$. Вычислим односторонние пределы в этих точках.

Для точки $x=-1$

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1-0}\frac{-(x+1)}{x+1}=-1;$$

$$\lim_{x\to-1+0}\sqrt{1-x^2}=0.$$

Односторонние пределы функции в точке $x=-1$ существуют, но не равны между собой, следовательно, эта точка является точкой разрыва первого рода.

Для точки $x=0$

$$\lim_{x\to-0-0}\sqrt{1-x^2}=1,\quad \lim_{x\to-0+0}(1-x)=1.$$

Односторонние пределы функции при $x\to 0$ равны между собой и равны значению функции $f(0)=\sqrt{1-0^2}=1$, следовательно, точка $x=0$ является точкой непрерывности данной функции.

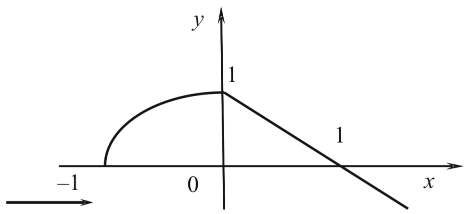


Рис. 17

График данной функции приведен на рис. 17.

4. *Определение производной; ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой.*

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором интервале $(a;b)$. Выполним следующие операции:

– аргументу $x\in(a;b)$ дадим приращение $\Delta x: x+\Delta x\in(a;b)$;

– найдем соответствующее приращение функции: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

– составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

– найдем предел этого отношения при $\Delta x\to 0: \lim\limits_{\Delta x}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел существует, то его называют производной функции $f(x)$.

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x\to 0$ называется *производной функции* $y=f(x)$ в точке x.

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Производная функции $f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, *произведенная* из данной функции.

Функция $y=f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a;b)$ называется *дифференцируемой* в этом интервале; операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

Значение производной функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ обозначается одним из символов: $f'(x_0)$или $y'(x_0)$.

Пример 7. Найти производную функции $y=C,\ C-\text{const}$.

Решение. Значению x даем приращение Δx;

– находим приращение функции Δy: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$;

– значит, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0}{\Delta x}=0$;

– следовательно, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0,$ т.е. $(c)'=0.$

Пример 8. Найти производную функции $y=x^2$.

Решение. Аргументу x даем приращение Δx;

– находим Δy: $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$;

– составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}:\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x;$

– находим предел этого отношения: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

Таким образом, $\left(x^2\right)'=2x.$

Физический смысл производной состоит в следующем: если функция $y=f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то *производная* y' *есть скорость протекания этого процесса*.

Геометрический смысл производной заключается в следующем: *производная* $f'(x)$*в точке* x *равна угловому коэффициенту касательной к графику функции* $y=f(x)$ *в точке, абсцисса которой равна* x.

Если точка касания M имеет координаты $(x_0;y_0)$ (рис. 18), то угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ есть $k=f'(x_0)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении $(y-y_0=k(x-x_0))$, можно записать *уравнение касательной*

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется *нормалью к кривой.*

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поэтому *уравнение нормали* имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \text{ (если } f'(x_0) \neq 0\text{)}.$$

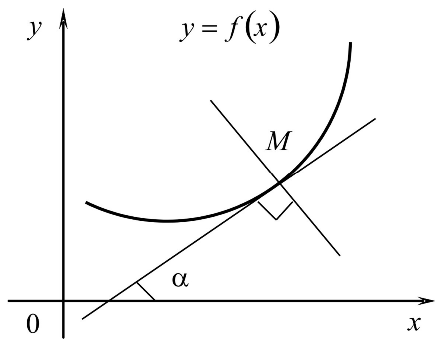


Рис. 18

5. *Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции*

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Отсюда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Переходя к пределу, при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Это означает, что функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x.

Обратная теорема неверна: непрерывная функция может не иметь производной. Примером такой функции является функция

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{если} & x \geq 0, \\ -x, \text{если} & x < 0. \end{cases}$$

Изображенная на рис. 19 функция непрерывна в точке $x=0$, но не дифференцируема в ней.

Действительно, в точке $x=0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{если} & \Delta x > 0, \\ -1, \text{если} & \Delta x < 0. \end{cases}$$

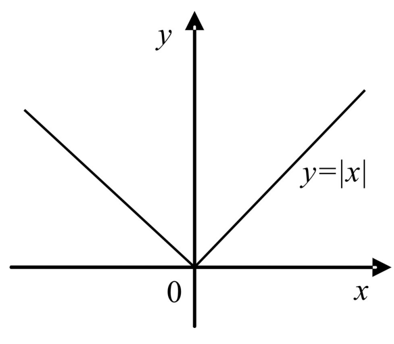


Рис. 19

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т.е. функция $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. $y=|x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, график функции не имеет касательной в точке $O(0; 0)$.

Замечания:

1. Существуют односторонние пределы функции $y=|x|$ в точке $x=0$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-1,\ \lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$. В таких случаях говорят, что функция имеет *односторонние производные* (или «производные слева и справа»), и обозначают соответственно $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.

Если $f'_-(x)\neq f'_+(x)$, то производная в точке не существует. Не существует производной и в точках разрыва функции.

2. Производная $y'=f'(x)$ непрерывной функции $y=f(x)$ сама не обязательно является непрерывной.

Если функция $y=f(x)$ имеет непрерывную производную $y'=f'(x)$ в некотором интервале *(a; b),* то функция называется *гладкой.*

6. *Правило Лопиталя.* Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций (неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ или $\left[\dfrac{0}{0}\right]$) равен пределу отношения их производных,

$$\lim_{\Delta x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\Delta x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \qquad (4)$$

если предел $\lim\limits_{\Delta x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ существует.

Раскрытие неопределенностей различных видов

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$, которые называют *основными.* Неопределенности вида $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0}, 0^{0}$ сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

1. Пусть $f(x)\to 0, \varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тогда очевидны следующие преобразования:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\varphi(x)\right)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right] \text{ или } \lim_{x\to x_0}\frac{\varphi}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Пример 9. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}(2-x)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}(2-x)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{4}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{4}}}=\frac{\pi}{4}.$$

2. Пусть $f(x)\to\infty, \varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тогда можно применить следующие преобразования:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-\varphi(x)\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{1}{f(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Решение

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x\cdot(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

3. Пусть или $f(x)\to 1$ и $\varphi(x)\to\infty$, или $f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to 0$, или $f(x)\to 0$ и $\varphi(x)\to 0$ при $x\to x_0$. Для нахождения предела вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ необходимо сначала прологарифмировать выражение $A=f(x)^{\varphi(x)}$.

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^{∞}. Логарифмируем выражение $A=(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$, получим $\ln A=\dfrac{1}{x^2}\ln\cos 2x$. Затем находим предел

$$\lim_{x\to 0}\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)2}{2x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x}{2x}=-2,$$

т. е. $\ln\lim\limits_{x\to 0}A=-2$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}A=e^{-2}$, и $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}$.

Решение можно оформить короче, если воспользоваться формулой

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)}=\exp\left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)\right)$$

(использовано основное логарифмическое тождество $f^{\varphi}=e^{\ln f^{\varphi}}$).

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}=\left[\infty^0\right]=\exp\left(\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}x\ln\frac{1}{x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\operatorname{ctg}x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right)=$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)=e^{0\cdot 1}=e^0=1.$$

Пример 13. Пусть $f(x)=\begin{cases}e^{-x^{-2}} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$

Найти $f'(x)$. (Дополнительно найти $f^{(n)}(0)$)

Решение. При $x\neq 0$ имеем

$$f'(x)=e^{-x^{-2}}\cdot\left(-2^{-2}\right)'=2e^{-x^{-2}}\cdot x^{-3}.$$

При $x=0$ по определению производной:

$$f'(0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(0+\lambda)-f(0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda}.$$

Делаем замену $y=\dfrac{1}{\lambda^2}$ и применяем правило Лопиталя

$$\lim_{\lambda\to 0}\left|\frac{e^{-\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda}\right|=\lim_{y\to\infty}\frac{\sqrt{y}}{e^y}=\lim_{y\to y}\frac{1}{2\sqrt{y}\cdot e^y}=0.$$

Таким образом, $f'(x)=\begin{cases}2x^{-3}\cdot e^{-x^{-2}} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$

Аналогично можно показать, что $f^{(n)}(0)=0$.

Пример 14. Используя правило Лопиталя, вычислить предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-5x^2+8x-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}}{x^2}$.

Решение. 1) Подставив предельное значение $x=2$, получим неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Раскроем ее с помощью правила Лопиталя.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-5x^2+8x-4}=\lim_{x\to2}\frac{\left(x^3-x^2-8x+12\right)'}{\left(x^3-5x^2+8x-4\right)'}=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-2x-8}{3x^2-10x+8}.$$

Применив один раз правило Лопиталя, снова получили неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, поэтому применяем правило еще раз:

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-2x-8}{3x^2-10x+8}=\lim_{x\to2}\frac{\left(3x^2-2x-8\right)'}{\left(3x^2-10x+8\right)'}=\lim_{x\to2}\frac{6x-2}{6x-10}=\frac{12-2}{12-10}=5.$$

2) Здесь имеет место неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, поэтому применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{x^2}\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2xe^{x^2}}{2x}=\infty.$$

7. *Дифференциал функции. Основные теоремы о дифференциалах*

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке:

$$dy = f'(x_0)\,\Delta x. \tag{5}$$

Так как дифференциал dx независимой переменной x является приращением Δx этой переменной, то соотношение (5) принимает вид

$$dy = f'(x_0)\,dx. \tag{6}$$

Из равенства (14) производную $f'(x)$ в любой точке х можно вычислить как отношение дифференциала функции dy к дифференциалу независимой переменной dx:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}. \tag{7}$$

Теорема. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$d\left(u+\upsilon\right)=du+d\upsilon,$$

$$d\left(u\upsilon\right)=\upsilon\cdot du+u\cdot d\upsilon,$$

$$d\left(\frac{u}{\upsilon}\right)=\frac{\upsilon du-ud\upsilon}{\upsilon^2}\ \left(\upsilon\neq0\right).$$

Теорема. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

Таблица дифференциалов

1. $d(u \pm \upsilon) = du \pm d\upsilon;$
2. $d(u \cdot \upsilon) = \upsilon du \pm u d\upsilon;$ в частности, $d(cu) = c \cdot du;$
3. $d\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right) = \dfrac{\upsilon du - u d\upsilon}{\upsilon^2};$ в частности, $d\left(\dfrac{c}{\upsilon}\right) = -\dfrac{c \cdot du}{\upsilon^2};$
4. $du = y'_x dx$, если $y = f(x);$
5. $du = y'_u du$, если $y = f(u).\ u = \varphi(x);$
6. $dc = 0;$
7. $d\left(u^{\alpha}\right) = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot du;$
8. $d\left(a^u\right) = a^u \cdot \ln a \cdot du,$ в частности, $d\left(e^u\right) = e^u \cdot du;$
9. $d(\log_a u) = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot du,$ в частности, $d(\ln u) = \dfrac{1}{u} \cdot du;$
10. $d(\sin u) = \cos u du;$
11. $d(\cos u) = -\sin u du;$
12. $d(\mathrm{tg} u) = \dfrac{1}{\cos^2 u} du;$
13. $d(\mathrm{ctg} u) = -\dfrac{1}{\sin^2 u} du;$
14. $d(\arcsin u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} du;$
15. $d(\arccos u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} du;$
16. $d(\mathrm{arctg} u) = \dfrac{1}{1+u^2} du;$
17. $d(\mathrm{arcctg} u) = -\dfrac{1}{1+u^2} du;$
18. $d(sh\, u) = ch\, u\, du;$
19. $d(ch\, u) = sh\, u\, du;$
20. $d(th\, u) = \dfrac{1}{ch^2 u} du;$
21. $d(cth\, u) = -\dfrac{1}{sh^2 u} du.$

8. Если в окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ (или $f(x) > f(x_0)$), то точка x_0 называется точкой экстремума функции $f(x)$ (соответственно точкой максимума или минимума).

Необходимое условие экстремума: если x_0 – это точка экстремума функции $f(x)$, то первая производная $f'(x_0)$ или равна нулю, или равна бесконечности, или не существует. *Достаточное условие экстремума:* x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, если ее первая производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0: с плюса на минус – при максимуме; с минуса на плюс – при минимуме.

Точка x_0 называется точкой перегиба кривой $y = f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба: если x_0 – точка перегиба кривой $y = f(x)$, то вторая производная $f''(x_0)$ или равна нулю, или равна бесконечности, или не существует. *Достаточное условие точки перегиба:* x_0 – точка перегиба кривой $y = f(x)$, если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак.

Будем говорить, что график функции $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ *выпуклость, направленную вниз (вверх),* если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на $(a;b)$ (рис. 20).

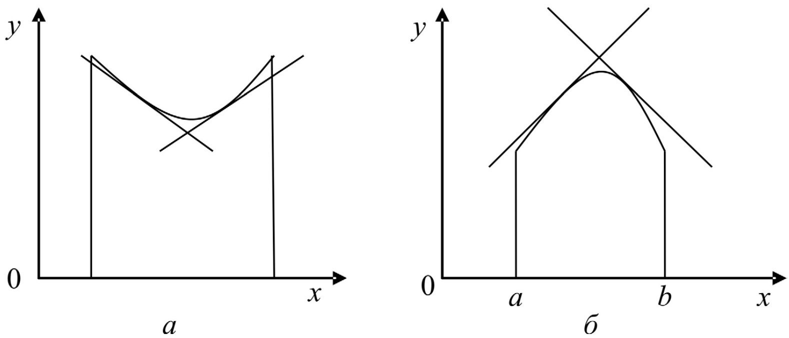


Рис. 20. Выпуклость графика функции на интервале *(a;b):*
а) направленная вниз; *б*) направленная вверх

Способ определения направления выпуклости графика функции дается теоремой.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ вторую производную и $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) на $(a;b)$, то график функции имеет на $(a;b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх).

В точке перегиба касательная пересекает график функции, поскольку он переходит с одной стороны касательной на другую, т.е. «перегибается» через нее (рис. 21).

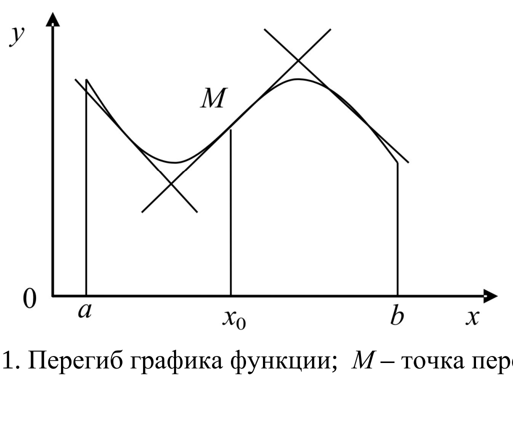


Рис. 21. Перегиб графика функции; M – точка перегиба

Пример 15. Найти точки перегиба и направления выпуклости графиков функции $f(x) = \exp(-x^2)$.

Решение. Последовательно находим:

$$f'(x) = -2x \exp(-x^2),\ f''(x) = 2 \exp(-x^2)(2x^2 - 1).$$

Приравнивая вторую производную к нулю, получаем критические точки $x = \pm\ 1/\sqrt{2}$. В силу четности функции достаточно исследовать точку $x=1/\sqrt{2}$. Нетрудно увидеть, что при переходе через эту точку слева направо $f''(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, на левой ветви функции точка $M_1\left(-1/\sqrt{2}, e^{-1/2}\right)$ является точкой перегиба графика функции со сменой выпуклости вниз слева на выпуклость вверх справа (рис. 22). На правой ветви в точке перегиба $M_2\left(-1/\sqrt{2}, e^{-1/2}\right)$ графика функции выпуклость вверх слева меняется на выпуклость вниз справа.

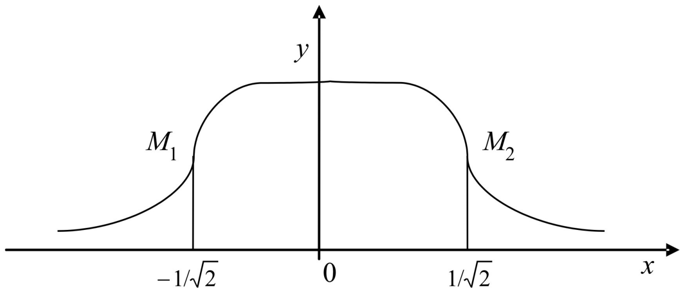


Рис. 22. График функции $f(x) = x^{1/3}$ с точкой перегиба в начале координат

9. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки $(x; f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при $x \to \infty$.

При этом

$$k = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x\to a}(f(x) - kx). \tag{8}$$

Если $k = 0$, то прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой*.

Если

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty, \tag{9}$$

то прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой*.

10. *Общая схема исследования функции и построения ее графика*:

1) найти область определения функции;

2) найти (если возможно) точки пересечения графика с осями координат;

3) найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x)>0$ или $f(x)<0$);

4) выяснить четность (нечетность) функции, ее периодичность;

5) найти асимптоты графика функции;

6) найти интервалы монотонности функции;

7) найти экстремумы функции;

8) найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции;

9) на основании полученных результатов построить график функции.

Пример 16. Построить график функции $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

Решение. Область определения функции – вся ось Ox, за исключением точки $x=0$, т.е. $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

1) Функция не является четной или нечетной.

2) Найдем точки пересечения графика с осью Ox, имеем $\dfrac{x^3+4}{x^2}=0$; $x=-\sqrt[3]{4}$.

3) Тогда точка разрыва $x=0$, причем, $\lim\limits_{x\to 0} y=\infty$; следовательно, $x=0$ (ось Oy) является вертикальной асимптотой графика.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

Наклонная асимптота имеет уравнение $y=x$.

4) Найдем экстремумы функции и интервалы возрастания и убывания. Имеем $y'=1-\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{\left(x^3-8\right)}{x^3}$; $y'=0$ при $x=2$; $y'=\infty$ при $x=0$ (точка разрыва функции). Точки $x=0$ и $x=2$ разбивают числовую ось на промежутки $(-\infty,0)$, $(0,2)$ и $(2,+\infty)$, причем, $y'>0$ в промежутках $(-\infty,0)$ и $(2,+\infty)$ (функция возрастает) и $y'<0$ в промежутке $(0,2)$ (функция убывает).

Далее, находим $y''=\dfrac{24}{x^4}$; $y''(2)>0$, следовательно, $x=2$ – точка минимума; $y_{\min}=3$.

5) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки ее перегиба. Так как $y''>0$, то график функции всюду вогнут. Точек перегиба

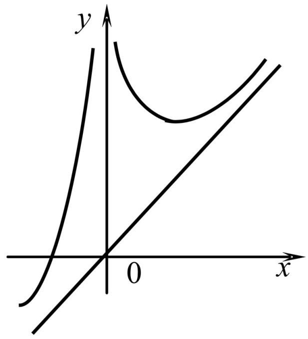


Рис. 23

кривая не имеет. Используя полученные данные, строим график функции (рис. 23).

11. *Логарифмическое дифференцирование*

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию *сначала прологарифмировать*. А затем полученный результат продифференцировать. Такую операцию называют *логарифмическим дифференцированием*.

Пример 17. Найти производную функции
$$y=\frac{\left(x^2+2\right)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}.$$

Решение. Применим логарифмическое дифференцирование для нахождения y'. Прологарифмируем функцию
$$\ln y=\ln\left(x^2+2\right)+\frac{3}{4}\ln(x-1)+x-3\ln(x+5).$$

Продифференцируем полученное равенство по x,
$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{x^2+2}\cdot 2x+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+1-3\cdot\frac{1}{x+5}.$$

Выразим y':
$$y'=y\left(\frac{2x}{x^2+2}+\frac{3}{4(x-1)}+1-\frac{3}{x+5}\right),$$

т. е.
$$y'=\frac{\left(x^2+2\right)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+2}+\frac{3}{4(x-1)}+1-\frac{3}{x+5}\right).$$

Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая *показательно-степенная функция* $y=u^v$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – заданные дифференцируемые функции от x. Найдем производную этой функции:
$$\ln y=v\cdot\ln u,\Rightarrow\frac{1}{y}\cdot y'=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}u',\Rightarrow y'=y\left(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right),$$

т. е.
$$(\ln y)'=y\left(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right),$$

или
$$\left(u^v\right)'=u^v\cdot\ln u\cdot v'+v\cdot u^{v-1}\cdot u'. \tag{10}$$

Сформулируем мнемоническое правило для формулы (10): производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии $u=\mathrm{const}$, и производной степенной функции при условии $v=\mathrm{const}$.

Пример 18. Найти производную функции $y=(\sin 2x)^{x^2+1}$.

Решение. Пользуясь формулой (10), получаем

$$y'=(\sin 2x)^{x^2+1}\cdot\ln\sin 2x\cdot 2x+\left(x^2+1\right)(\sin 2x)^{x^2}\cdot\cos 2x\cdot 2.$$

Отметим, что запоминать формулу (10) необязательно, важно понять и запомнить суть логарифмического дифференцирования.

12. *Производная неявно заданной функции*

Если функция задана уравнением $y=f(x)$, разрешенным относительно y, то функция *задана в явном виде* (явная функция).

Под *неявным заданием* функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x;y)=0$, неразрешенного относительно y.

Всякую явно заданную функцию $y=f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $f(x)-y=0$, но не наоборот. Не всегда возможно разрешить уравнение относительно y (например, $y+2x+\cos y-1=0$ или $2^y-x+y=0$).

Если неявная функция задана уравнением $F(x;y)=0$, то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y: *достаточно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию x*, и полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

Производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y.

Пример 19. Найти производную функции y, заданную уравнением $x^3+y^3-3xy=0$.

Решение. Функция y задана неявно. Дифференцируем по x равенство $x^3+y^3-3xy=0$. Из полученного соотношения

$$3x^2+3\cdot y^2\cdot y'-3(1\cdot y+x\cdot y')=0$$

следует, что $y^2y'-xy'=y-x^2$, т.е. $y'=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$.

13. *Производная сложной и обратной функций*

Пусть $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, тогда $y=f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема. Если функция $u=\varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y=f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u=\varphi(x)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ имеет производную y'_u в точке x, которая находится по формуле $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

По условию $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u$. Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u+\alpha$ или

$$\Delta y=y'_u\cdot\Delta u+\alpha\cdot\Delta u \tag{11}$$

где $\alpha\to 0$ при $\Delta u\to 0$.

Функция $u=\varphi(x)$ имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x$, поэтому

$$\Delta u=u'_x\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta x,$$

где $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Подставив значение Δu в равенство (11), получим

$$\Delta y=y'_u\left(u'_x\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta x\right)+\alpha\left(u'_x\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta x\right)$$

т. е.

$$\Delta y=y'_u\cdot u'_x\cdot\Delta x+y'_u\cdot\beta\cdot\Delta x+u'_x\cdot\alpha\cdot\Delta x+\alpha\cdot\beta\cdot\Delta x.$$

Разделив полученное равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

Итак, для нахождения производной сложной функции надо *производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу*.

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

Пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ – взаимно обратные функции.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ строго монотонна на интервале $(a;b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x=\varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ или $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$.

Рассмотрим обратную функцию $x=\varphi(y)$. Дадим аргументу y приращение $\Delta y\neq 0$. Ему соответствует приращение Δx обратной функции, причем

$\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y = f(x)$. Поэтому можно записать

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \qquad (12)$$

Если $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности обратной функции приращение $\Delta x \to 0$. И так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, то из (12) следуют равенства

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}, \text{ т.е. } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Таким образом, *производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.*

Правило дифференцирования обратной функции записывают так:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Пример 20. Найти производную функции $y = \log_2^3 \mathrm{tg} x^4$.

Решение. Данная функция является сложной. Ее можно представить в виде следующей цепочки функций: $y = u^3$, где $u = \log_2 z$, где $z = \mathrm{tg} q$, где $q = x^4$. По правилу дифференцирования сложной функции $\left(y'_x = y'_u \cdot u'_z \cdot z'_q \cdot q'_x\right)$ получаем

$$y'_x = 3 \cdot \log_2^2 \mathrm{tg} x^4 \cdot \frac{1}{\mathrm{tg} x^4 \cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^4} \cdot 4x^3.$$

Пример 21. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение.

Обратная функция $x = y^3 + 1$ имеет производную $x'_y = 3y^2$. Следовательно, $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

14. *Производная функции, заданной параметрически*

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad (13)$$

где t – вспомогательная переменная, называемая параметром.

Найдем производную y'_X, считая, что функции (13) имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}, \qquad (14)$$

Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями (13), можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем $y'_x = y'_t \cdot t'_x$.

С учетом равенства (14) получаем

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t},$$

Следлвательно,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (15)$$

Полученная формула (15) позволяет находить производную y'_X от функции заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример 22. Пусть $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти y'_x.

Решение. Имеем $x'_t = 3t^2, y'_t = 2t$. Следовательно, $y'_x = \frac{2t}{3t^2}$, т.е. $y'_x = \frac{2}{3t}$. В этом можно убедиться, найдя непосредственно зависимость y от x. Действительно, $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Отсюда $y'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, т.е. $y = \frac{2}{3t}$.

15. *Понятие производной n-го порядка*

Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ является функцией аргумента x. Производная от первой производной некоторой функции $y = f(x)$ называется *второй производной, или производной второго порядка,* этой функции. Производная от второй производной называется *третьей производной, или производной третьего порядка* и т.д. Производные, начиная со второй, называются *производными высших порядков*. Производная *n-го* порядка определяется, таким образом, как производная от производной $(n – 1)$*-го* порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Пример 23. Найти производную второго порядка от функции $y = x^3+2x$.

Решение. Последовательно находим первую производную, а затем и производную от нее,

$$y' = 3x^2 + 2,\ y'' = 6x.$$

Пример 24. Найти производную второго порядка от функции $y = e^{-x^2}$.

Решение. Сначала находим первую производную сложной функции

$$y' = -2xe^{-x^2}.$$

Затем ищем вторую производную, дифференцируя полученное произведение функций,

$$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{x^2} = 2e^{x^2}(2x^2 - 1).$$

Пример 25. Найти производную третьего порядка от функции $y=x\ \ln x$.

Решение. Последовательно находим:

$$y' = \ln x + 1,\ y'' = 1/x,\ y''' = -1/x^2.$$

Пример 26. Найти производную *n-го* порядка от функции $y=e^{2x}$. Находим:

$$y' = 2e^{2x},\ y'' = 4e^{2x},$$

т.е. каждое дифференцирование прибавляет к исходной функции сомножитель 2. Отсюда получаем

$$y^{(n)} = 2^n\ e^{2x}.$$

Пример 27. Найти производную *13-го* порядка функции $y = \sin x$.

Решение. $y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$

$$y'' = (y') = (\cos x')' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 2\right),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 3\right),$$

$$y^{\mathrm{IV}} = (-\cos x')' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 4\right),$$

……………………………………………………..

$$y^{13} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 13\right).$$

16. *Понятие дифференциала высшего порядка*

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая функция, а аргумент x – независимая переменная. Тогда ее первый дифференциал $dy = f'(x)dx$ есть функция от переменной x.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется *дифференциалом второго порядка*, т.е. $d^2y = d(dy)$. Таким образом,

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Дифференциал n-го порядка может быть представлен в виде

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n .$$

17. *Приближенные вычисления с помощью дифференциала*

Приближенные вычисления с применением дифференциала функции основаны на приближенной замене приращения функции в точке на ее дифференциал:

$$\Delta y \approx dy.$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{16}$$

Формула (16) является основной в приближенных вычислениях.

Пример 28. Вычислить приближенное значение корня $\sqrt{1,07}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^{0,5}$ в окрестности точки $x_0 = 1$. Поскольку производная этой функции вычисляется по формуле $f'(x)=\dfrac{1}{2x}$, то, принимая $\Delta x = 0,07$, получаем из формулы (16):

$$f(1+ 0,07) = \sqrt{1,07} \approx f(1) + f'(1)0,07 = 1,0035.$$

18. *Формула Тейлора для произвольной функции*

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Формула Тейлора позволяет, при определенных условиях, приближенно представить функцию $f(x)$ в виде многочлена и дать оценку погрешности этого приближения.

Теорема. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производные до $(n+1)$-*го* порядка включительно, то для любого x из этой окрестности найдется точка $c \in (x_0; x)$ такая, что справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$$\left(c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1\right). \tag{17}$$

Формула (17) называется *формулой Тейлора для функции* $f(x)$. Эту формулу можно записать в виде $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, где

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots.. + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется *многочленом Тейлора*, а

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

называется *остаточным членом* формулы Тейлора, записанным в форме Лагранжа. $R_n(x)$ есть погрешность приближенного равенства $f(x)\approx P_n(x)$. Таким образом, формула Тейлора дает возможность заменить функцию $y=f(x)$ многочленом $y=P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена $R_n(x)$.

При $x_0=0$ получаем частный случай формулы Тейлора – *формулу Маклорена:*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+......+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (18)$$

где c находится между 0 и x $(c=\theta x, 0<\theta<1)$.

При $n=0$ формула Тейлора (17) имеет вид $f(x)=f(x_0)+f'(c)(x-x_0)$ или $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, т.е. совпадает с формулой Лагранжа конечных приращений. Рассмотренная ранее формула для приближенных вычислений $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ является частным случаем более точной формулы

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+......+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Пример 29. Найти число e с точностью до $0{,}001$.

Решение. Запишем формулу Маклорена для функции $f(x)=e^x$. Находим производные этой функции: $f'(x)=e^x, f''(x)=e^x,..., f^{(n+1)}(x)=e^x$. Так как $f(0)=e^0=1, f'(0)=e^0=1,..., f^{(n)}(0)=1, f^{(n+1)}(c)=e^c$, то по формуле (18) имеем

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Пусть $x=1$:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Для нахождения e с точностью $0{,}001$ определим n из условия, что остаточный член $\frac{e^c}{(n+1)!}$ меньше $0{,}001$. Так как $0<c<1$, то $e^c<3$.

Поэтому при $n=6$ имеем

$$\frac{e^c}{7!}<\frac{3}{5040}=0{,}0006<0{,}001.$$

Итак, получаем приближенное равенство

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!} \approx 2+0,5+0,1667+0,0417+0,0083+0,0014=$$

$$=2,7181 \approx 2,718,$$

т.е. $e \approx 2,718.$

Приведем разложения по формуле Маклорена некоторых других элементарных функций:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}+\left(-1\right)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{\left(2n+3\right)}\cdot\cos c,$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}+\left(-1\right)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{\left(2n+2\right)}\cdot\cos c,$$

$$\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}...+\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\left(-1\right)^n\frac{x^{n+1}}{\left(n+1\right)\left(1+c\right)n+1},$$

$$\left(1+x\right)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu\left(\mu-1\right)}{2!}x^2+.....+\frac{\mu\left(\mu-1\right)......\left(\mu-n+1\right)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{\mu\left(\mu-1\right)....\left(\mu-n\right)\left(1+c\right)^{\mu-n-1}}{\left(n+1\right)!}x^{n+1}.$$

***19.** Применение дифференциального исчисления в экономике*

Рассмотрим примеры двух предельных показателей в микроэкономике.

19.1. Первый их них связан с зависимостью себестоимости C произведенной продукции от ее объема Q: $C=f(Q)$. Так называемая предельная себестоимость характеризует себестоимость ΔC прироста продукции ΔQ:

$$MC=\frac{\Delta C}{\Delta Q}. \qquad (19)$$

В предположении о непрерывной зависимости ΔC от ΔQ можно заменить разностное отношение в (17) его пределом:

$$MC \approx \lim_{\Delta Q\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta Q}=C'(Q). \qquad (20)$$

Обычно в приложениях с использованием математического аппарата под предельной себестоимостью понимают величину, находимую по формуле (20).

Например, пусть зависимость издержек производства от объема выпускаемой продукции выражается формулой $C=40Q-0,03Q^3$ ден. ед.

Определим средние и предельные издержки при объеме продукции $Q=15$ ден. ед.

1. Функция средних издержек на единицу продукции определяется по формуле $\overline{C} = \frac{C}{Q}$ или, как в данном случае $C = 40 - 0,03Q^2$, откуда $\overline{C}(15) = 40 - 0,03 \cdot 225 = 33,25$ ден. ед.

2. Предельные издержки определяются, согласно формуле (20), следующим образом:

$$C' = 40 - 0,09Q^2,$$

откуда при Q =15 получаем $C'(15) = 19,75$ ден. ед.

Таким образом, при средних издержках на производство единицы продукции в 33,25 ден. ед. дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции составят 19,75 ден. ед. и не превысят средних издержек.

19.2. *Эластичность экономических показателей*

В анализе и прогнозах ценовой политики применяется понятие *эластичности спроса*. Пусть $D = f(P)$ – функция спроса от цены товара P. Тогда под эластичностью спроса понимается процентное изменение спроса при изменении цены товара на один процент:

$$E = \frac{\Delta D \ / \ D \, 100 \ \%}{\Delta P \ / \ P \, 100 \ \%} \ .$$

В случае непрерывной зависимости ΔP от ΔQ можно перейти к пределу при $\Delta P \to 0$:

$$E(D) = P\frac{D'(P)}{D(P)}. \tag{21}$$

Аналогичное понятие можно ввести и для функции предложения $S(P)$. Напомним, что функция $D(P)$ убывает, а функция $S(P)$ возрастает с ростом цены P.

Пример 30. Пусть спрос на товар определяется формулой

$$D(P) = 100 – 3P.$$

Найти эластичность спроса при цене на товар P = 20 ден. ед.

Решение. Согласно формуле (21),

$$E(D) = 20 \cdot (-3)/(100 - 3 \cdot 20) = -1,5.$$

Это означает, что при повышении (понижении) цены товара на 1% спрос на него понизится (повысится) на 1,5 %.

Укажем некоторые свойства эластичности. Как следует из формулы (19), ее можно выразить так:

$$E(D) = P(\ln D\,(P))'. \tag{22}$$

Из равенства (20) следует, что $E(D)$ обладает свойствами логарифма, а значит,

$$E(D_1D_2) = E(D_1) + E(D_2), \quad E(D_1/D_2) = E(D_1) - E(D_2). \tag{23}$$

Заметим, что поскольку функция $D(P)$ убывающая, то $D'(P) < 0$, а тогда, согласно формуле (21), и $E(D) < 0$. Напротив, поскольку функция предложения возрастающая, то соответствующая эластичность $E(S) > 0$.

Различают три вида спроса в зависимости от величины $|E(D)|$:

а) если $|E(D)| > 1$ ($E(D) < -1$), то спрос считается эластичным;

б) если $|E(D)| = 1$ ($E(D) = -1$), то спрос нейтрален;

в) если $|E(D)| < 1$ ($E(D) > -1$), то спрос неэластичный.

Пример 31. Найти изменение выручки с увеличением цены на товар при разных вариантах эластичности спроса.

Решение. Выручка I равна произведению цены P товара на величину спроса D:

$$I(P) = D(P)P. \tag{24}$$

Найдем производную этой функции:

$$I'(P) = D(P) + PD'(P). \tag{25}$$

Теперь проанализируем все варианты эластичности спроса, приведенные ранее, с учетом формулы (19).

1. $E(D) < -1$; тогда, подставляя (21) в это неравенство, получаем, что правая часть уравнения (23) отрицательна. Таким образом, при эластичности спроса повышение цены P ведет к снижению выручки. Напротив, снижение цены товара увеличивает выручку.

2. $E(D) = -1$. Из (21) следует, что правая часть (25) равна нулю, т.е. при нейтральном спросе изменение цены товара не влияет на выручку.

3. $E(D) > -1$. Тогда $I'(P) > 0$, т.е. при не эластичном спросе повышение цены Р товара приводит к росту выручки.

Понятие эластичности распространяется и на другие области экономики.

Пример 32. Пусть зависимость между себестоимостью продукции C и объемом Q ее производства выражается формулой

$$C = 50 - 0{,}5\,Q.$$

Требуется определить эластичность себестоимости при выпуске продукции $Q = 30$ ден. ед.

Решение. По формуле (21) получаем

$$E(C) = -\frac{0{,}5Q}{50 - 0{,}5Q},$$

Откуда при Q=30 искомая эластичность составит около –0,42, т.е. увеличение данного объема выпуска продукции на 1 % приведет к снижению его себестоимости примерно на 0,42 %.

19.3. *Максимизация прибыли*

Пусть Q – количество реализованной продукции, $R(Q)$ – функция дохода, $C(Q)$ – функция затрат на производство продукции. В реальности вид этих функций зависит в первую очередь от способа производства, организации инфраструктуры и т.п. Прибыль от реализации произведенной продукции находим по формуле

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q). \qquad (26)$$

В микроэкономике известно утверждение: для того чтобы прибыль была максимальной, необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны. Оба упомянутых предельных показателя определяются по аналогии с (22), так что этот принцип можно записать в виде $R'(Q) = C'(Q)$. Действительно, из необходимого условия экстремума для функции (26) следует, что $\Pi'(Q) = 0$, откуда и получается приведенный ранее основной принцип.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение предела функции в точке.
2. Сформулируйте правила вычисления пределов элементарных функций в точке, принадлежащей области определения.
3. Укажите виды неопределенностей и способы их раскрытия.
4. Сформулируйте первый и второй замечательные пределы.
5. Дайте определение бесконечно малой и бесконечно большой величины.
6. Сформулируйте правило сравнения бесконечно малых (бесконечно больших).
7. Сформулируйте основные свойства пределов.
8. Приведите примеры применения понятия бесконечно малой для вычисления пределов.
9. Дайте определение непрерывности функции в точке.
10. Дайте определение производной функции.
11. Сформулируйте геометрический, механический и экономический смысл производной.
12. Покажите связь понятий непрерывности и дифференцируемости.
13. Сформулируйте основные правила нахождения производных.
14. Сформулируйте правило нахождения производной сложной функции.
15. Таблица основных производных.
16. Дайте определение дифференциала функции и сформулируйте его геометрический смысл.
17. Производные и дифференциалы высших порядков: определения и формулы вычисления.
18. Сформулируйте правило Лопиталя и покажите его применение для вычисления пределов.

19. Дайте определение промежутков возрастания и убывания функции.
20. Что называется точками экстремума графика функции?
21. Приведите классификацию и формулы вычисления асимптот функции.
22. Дайте определение выпуклости и вогнутости графика функции.
23. Что называется точкой перегиба графика функции?
24. Применение пределов и производных к исследованию функций и построению графиков: схема исследования функции с помощью производной.
25. Как находится производная функции, заданной неявно?
26. Приведите примеры использования понятия производной в экономической теории.

Контрольная работа №4 по теме «Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

I. Вычислить пределы, не пользуясь средствами дифференциального исчисления.

1. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x}{-5x^2+x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\ln(x+4)}{\operatorname{ctg}(x+2)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{e^{x^2}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}(3+2x)^{\frac{5}{x+7}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-3}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

2. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+7x+2}{x^2-5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x-1}{\ln(0,5-x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\arcsin(4-x)}{\ln(x-3)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{2x^2}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2+x+2}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$.

3. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2-x}{3x^2+7x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3^x}{1-\cos\dfrac{2}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi x}{4}\right)}{e^{x+1}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}(5-x)^{-\frac{2}{x-4}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+3x-2}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

4. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+5}{-5x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{\sin(x-1)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 3x)}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to -3}(7+2x)^{\frac{4}{x+3}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-3}+\sqrt{x^2+2x-3}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

5. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2-x}{2x^2+3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{x-3}}{x^2-5x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\mathrm{tg}^2(\pi-3x)}{(3x-\pi)^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{-\frac{3}{4-2x}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x-4}+\sqrt{x^2-2x+5}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$.

6. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+5x+2}{x^2+4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x+1}}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi x}{2}}{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x^2)^{-\frac{3}{x^2}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}-1}$.

7. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+5x}{x^2+4x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{3x^2+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1-3x)}$; 4) $\lim\limits_{x\to -4}(9+2x)^{\frac{6}{x+4}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+4x+4}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x-1}{-2x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)}{\sin 5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\mathrm{tg}x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}(-3-2x)^{-\frac{2}{x+2}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{5}}{x-4}$.

9. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7x^2+4x}{3x^2-x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\mathrm{ctg}(x-3)}{2^x}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+4}{\arcsin(x+2)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{-\frac{3}{x-1}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{x+10}-\sqrt{x}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x+7}-\sqrt{3}}{x+1}$.

10. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-3x-1}{-4x^2+2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x-3}{tg(x+1)}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{e^{-x^2}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{\frac{1}{6-2x}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-1}{x+2}$.

11. 1) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\cos(x-3)+2x}{x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{3x^2-3x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to-0,5}\dfrac{6x^2+5x+1}{2x^2-x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to4}(5-x)^{\frac{2}{x-4}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{3x}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{6x+3}-3}{2x-2}$.

12. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{2x^2-2x+7}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{\mathrm{tg}\pi x}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-x-6}$; 4) $\lim\limits_{x\to-3}(7+2x)^{\frac{-4}{x+3}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{2x-8}$.

13. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-4}{4x^2+3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to-0,5}\dfrac{2x^2+3x+1}{6x^2+x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\sin^2 2x\right)^{\frac{1}{1-\cos4x}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}-2}{x-3}$.

14. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-2}{x^3-x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin3x)^{\frac{1}{1-\cos2x}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4+3x^2}-\sqrt{3}\,x\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{2x^2+x+1}-2}{2x-1}$.

15. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+11}{7x^3-5x^2+x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x\cdot(\mathrm{tg}x+x)$;

3) $\lim\limits_{x\to-1/3}\dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2-5x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to3}(10-3x)^{\frac{1}{3(3-x)}}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)$. 6) $\lim\limits_{x\to1/3}\dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$.

16. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^3+5x-10}$; 2) $\lim\limits_{x\to-0}(2+x)^{\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{3x^2+7x+2}{3x^2-2x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)$.

6) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$.

17. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-e^{-x^2}-1}{\operatorname{arctg}x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+8}{3x^2+6x+15}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x^2)^{\frac{1}{2(1-x)}}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n\left(n^4-1\right)}-\sqrt{n^5-8}\right)$.

6) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

18. 1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{ctg}x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-8}{3x^2-5x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2+x-1}{6x^2-x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(9-x^3)^{\frac{4}{x-2}}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right]$.

6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.

19. 1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{e^{x+2}-1}{\ln(x+2)}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^3+9x+17}{21x^3+10x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+11x-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to -4}(9+2x)^{\frac{-1}{2(x+4)}}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right]$.

6) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

20. 1) $\lim\limits_{x\to -1}(4-x)^{\frac{1}{(1+x)^2}}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+9x^2+2x}{3x^3-8x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{6x^2-5x+1}{2x^2-3x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{\frac{3}{x+1}}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)$.

6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

21. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}(x+3)\right)^{x+2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$.

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x}-1}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$.

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

22. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin(x+2)\right)^{3/(3+x)}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\sin^2 x}\right)^{1/\ln\cos x}$.

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n\left(n^2+5\right)}}{\sqrt{n}}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

23. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{6/(1+x)}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2\cos x\right)^{-\operatorname{cosec}^2 x}$.

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 2x-\sin x}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\left(n^2+1\right)\left(n^2-4\right)}-\sqrt{n^4-9}\right]$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

24. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/\ln\left(1+\sin^2 x\right)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right)n\sqrt{n}$. 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

25. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^3-2x-1\right)^2}{x^4+2x+1}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg}x}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$. 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.

26. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+8}{3x+10}\right)^{x+2}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\cos 3x\right)^{1/\ln\left(1+x^2\right)}$.

3) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2+3x}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$. 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

27. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-5^{\arcsin x^3}\right)^{\left(\operatorname{cosec}^2 x\right)/x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$. 6) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

28. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^3}-1}{x^2}\right)^{(8x+3)/(1+x)}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\sin^2 x\right)^{1/\ln\left(1+\pi x^3\right)}$.

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^2+3x+2\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg}3x}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right)$. 6) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

29. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}4x}{x}\right)^{2+x}$.   2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg}x}$.

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.   4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+5\pi/2)\operatorname{tg}x}{\arcsin 2x^2}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$.   6) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

30. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{x/(x+2)}$.   2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{1/\ln\cos x}$.

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^3-2x-1\right)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$.   4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\right]$.   6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

II. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$).

1. $a_n=\dfrac{3n-2}{2n-1},\quad a=\dfrac{3}{2}.$ **2.** $a_n=\dfrac{4n-1}{2n+1},\quad a=2.$

3. $a_n=\dfrac{7n+4}{2n+1},\quad a=\dfrac{7}{2}.$ **4.** $a_n=\dfrac{2n-5}{3n+1},\quad a=\dfrac{2}{3}.$

5. $a_n=\dfrac{7n-1}{n+1},\quad a=7.$ **6.** $a_n=\dfrac{4n^2+1}{3n^2+2},\quad a=\dfrac{4}{3}.$

7. $a_n=\dfrac{9-n^3}{1+2n^3},\quad a=-\dfrac{1}{2}.$ **8.** $a_n=\dfrac{4n-3}{2n+1},\quad a=2.$

9. $a_n=\dfrac{1-n^2}{2+4n^2},\quad a=-\dfrac{1}{2}.$ **10.** $a_n=-\dfrac{5n}{n+1},\quad a=-5.$

11. $a_n=\dfrac{n+1}{1-2n},\quad a=-\dfrac{1}{2}.$ **12.** $a_n=\dfrac{2n+1}{3n-5},\quad a=\dfrac{2}{3}.$

13. $a_n=\dfrac{1-n^2}{2+4n^2},\quad a=-\dfrac{1}{2}.$ **14.** $a_n=\dfrac{3n^2}{2-n^2},\quad a=-3.$

15. $a_n=\dfrac{n}{3n-1},\quad a=\dfrac{1}{3}.$ **16.** $a_n=\dfrac{3n^3}{n^3-1},\quad a=-3.$

17. $a_n=\dfrac{4+2n}{1-3n},\quad a=-\dfrac{2}{3}.$ **18.** $a_n=\dfrac{5n+15}{6-n},\quad a=-5.$

19. $a_n=\dfrac{3-n^2}{1+2n^2},\quad a=-\dfrac{1}{2}.$ **20.** $a_n=\dfrac{2n-1}{2-3n},\quad a=-\dfrac{2}{3}.$

21. $a_n=\dfrac{3n-1}{5n+1},\quad a=\dfrac{3}{5}.$ **22.** $a_n=\dfrac{4n-3}{2n+1},\quad a=2.$

23. $a_n=\dfrac{1-2n^2}{2+4n^2},\quad a=-\dfrac{1}{2}.$ **24.** $a_n=\dfrac{5n+1}{10n-3},\quad a=\dfrac{1}{2}.$

25. $a_n = \dfrac{2-2n}{3+4n}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

26. $a_n = \dfrac{23-4n}{2-n}, \quad a = 4.$

27. $a_n = \dfrac{1+3n}{6-n}, \quad a = -3.$

28. $a_n = \dfrac{2n+3}{n+5}, \quad a = 2.$

29. $a_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}, \quad a = \dfrac{3}{4}.$

30. $a_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\dfrac{3}{5}.$

III. Функция $f(x)$ представляет собой сумму трех одночленов. Указать среди них одночлен, эквивалентный всей сумме: а) при $x \to 0$; б) при $x \to \infty$.

1. $f(x) = 5x^2 - 3x + \sqrt[3]{x}.$

2. $f(x) = -3x^2 + x - \sqrt[4]{x^3}.$

3. $f(x) = x^2 - 5x + 4\sqrt[3]{x^2}.$

4. $f(x) = -2x^2 + 4x - 3\sqrt[4]{x^5}.$

5. $f(x) = -4x^2 - 2x + 5\sqrt[3]{x^4}.$

6. $f(x) = 4x^2 + 7x - 2\sqrt[5]{x}.$

7. $f(x) = -6x^2 - 2x + 3\sqrt[3]{x^5}.$

8. $f(x) = x^2 - 4x - \sqrt[5]{x^2}.$

9. $f(x) = -5x^2 - 3x + \sqrt[4]{x}.$

10. $f(x) = 3x^2 + 6x - 2\sqrt[5]{x^5}.$

11. $f(x) = 3x^2 + 7\sin 2x + x.$

12. $f(x) = 5x^3 + 1 - \cos x.$

13. $f(x) = x^4 - 2\sin^2 x + 1.$

14. $f(x) = 3x^5 - 2\cos x + 2.$

15. $f(x) = x^3 + 4\sin^2 3x - x.$

16. $f(x) = 2x^6 - 1 + \cos\left(x^2\right).$

17. $f(x) = x^3 - \sin x + 2x.$

18. $f(x) = x^4 + 3 - 3\cos 2x.$

19. $f(x) = 2x^5 - \sin^3 x - 5.$

20. $f(x) = 6x^2 + x - \sqrt{1-\cos 2x}.$

21. $f(x) = 6x^3 + \sqrt{1+\cos x} + x.$

22. $f(x) = -6x^2 + 4x + \sqrt{1+\cos 3x}.$

23. $f(x) = -x^3 + \sqrt{1-\sin 2x} + 7x.$

24. $f(x) = -2x^2 - x - \sqrt{\cos 2x}.$

25. $f(x) = x^2 + 2 + \sqrt{-2+3\cos 2x}.$

26. $f(x) = -3x^2 + x^4 - \sqrt{1+4\cos 3x}.$

27. $f(x) = 3x^2 + \sqrt{1-x^2} + 4x.$

28. $f(x) = -5x^2 + \sqrt{1-2x} - 8x.$

29. $f(x) = -6x^2 + \cos x - 3\sqrt{1-\cos 2x}.$

30. $f(x) = 6x^4 + \sin 3x + \sqrt{4-2x^3}.$

IV. Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность: найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематически график функции.

1. $y = \dfrac{|x+5|}{x+5} - \dfrac{5}{x};$

2. $y = \dfrac{|x-5|}{x-5} + \dfrac{5}{x};$

3. $y = \dfrac{|x+4|}{x+4} - \dfrac{4}{x};$

4. $y = \dfrac{|x-4|}{x-4} + \dfrac{4}{x};$

5. $y = \dfrac{|x+3|}{x+3} - \dfrac{3}{x};$

6. $y = \dfrac{|x-3|}{x-3} + \dfrac{3}{x};$

7. $y = \dfrac{|x+2|}{x+2} - \dfrac{2}{x};$

8. $y = \dfrac{|x-2|}{x-2} + \dfrac{2}{x};$

9. $y=\frac{|x+1|}{x+1}-\frac{1}{x}$;

10. $y=\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{1}{x}$;

11. $y=\frac{|x+6|}{x+6}-\frac{6}{x}$;

12. $y=\frac{|x-6|}{x-6}+\frac{6}{x}$;

13. $y=\frac{|x+7|}{x+7}-\frac{7}{x}$;

14. $y=\frac{|x-7|}{x-7}+\frac{7}{x}$;

15. $y=\frac{|x+8|}{x+8}-\frac{8}{x}$;

16. $y=\frac{|x-8|}{x-8}+\frac{8}{x}$;

17. $y=\frac{|x+9|}{x+9}-\frac{9}{x}$;

18. $y=\frac{|x-9|}{x-9}+\frac{9}{x}$;

19. $y=\frac{|x+10|}{x+10}-\frac{10}{x}$;

20. $y=\frac{|x-10|}{x-10}+\frac{10}{x}$.

21. $y=\frac{|2x-1|}{2x-1}-\frac{1}{x}$;

22. $y=\frac{|2x-1|}{2x-1}+\frac{10}{x}$.

23. $y=\frac{|3x+10|}{3x+10}-\frac{10}{x}$;

24. $y=\frac{|3x-1|}{3x-1}+\frac{1}{x}$.

25. $y=\frac{|2x+1|}{2x+1}-\frac{1}{x}$;

26. $y=\frac{|4x-10|}{4x-10}+\frac{1}{2x}$.

27. $y=\frac{3|x+1|}{x+1}-\frac{1}{3x}$;

28. $y=\frac{|5x-1|}{5x-1}+\frac{1}{5x}$.

29. $y=\frac{4|x+1|}{x+1}-\frac{1}{4x}$;

30. $y=\frac{2|x-1|}{x-1}+\frac{2}{x}$.

V. Найти производную функции одной переменной, исходя из определения производной.

1. $y=-\frac{5}{3x-4}$;

2. $y=\frac{3}{5x+4}$;

3. $y=-\frac{4}{3x-5}$;

4. $y=\frac{5}{4x+3}$;

5. $y=-\frac{3}{4x-5}$;

6. $y=\frac{5}{3x+4}$;

7. $y=-\frac{3}{5x-4}$;

8. $y=\frac{4}{3x+5}$;

9. $y=-\frac{5}{4x-3}$;

10. $y=\frac{3}{4x+5}$;

11. $y=\sqrt{2x-3}$;

12. $y=\sqrt{1-2x}$;

13. $y=\sqrt{4-3x}$;

14. $y=\sqrt{3x+4}$;

15. $y=\sqrt{3x-7}$;

16. $y=\sqrt{2x+3}$;

17. $y=\sqrt{3-2x}$;

18. $y=\sqrt{2x-9}$;

19. $y=\sqrt{1+2x}$;

20. $y=\sqrt{5-3x}$.

21. $y=\sqrt{2-3x}$;

22. $y=-\dfrac{1}{3x-4}$;

23. $y=\sqrt{10+2x^2}$;

24. $y=\dfrac{2}{4-5x}$;

25. $y=-\sqrt{1+5x^3}$;

26. $y=-\dfrac{5}{6x-1}$;

27. $y=-\sqrt{5-3x}$;

28. $y=-\dfrac{2x}{5x^2-4}$;

29. $y=-\dfrac{3}{5x^2-4}$;

30. $y=\sqrt{5-3x^2}$.

VI. Найти производные первого порядка данных функций, используя правила вычисления производных.

1. 1) $y=\dfrac{2\left(3x^3+4x^2-x-2\right)}{15\sqrt{1+x}}$.

2) $y=-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^4+2x^2+2\right)$.

3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x+\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}^2\,x}\right)$.

4) $\begin{cases} x=\left(\arcsin t\right)^2, \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

2. 1) $y=\dfrac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$.

2) $y=\arcsin e^{-x}-\sqrt{1-e^{2x}}$.

3) $y=\log_a\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.

4) $\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{t}, \\ y=\sqrt{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$

3. 1) $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2\left(x^2-4\right)}$.

2) $y=-\dfrac{e^{3x}}{3\,\mathrm{sh}^3\,x}$.

3) $y=\lg\ln\left(\mathrm{ctg}\,x\right)$.

4) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\ln t}, \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$

4. 1) $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$.

2) $y=3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120\right)$.

3) $y=\ln\cos\dfrac{2x+3}{x+1}$.

4) $\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{t}, \\ y=\sqrt{t^2-1}+\arcsin\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

5. 1) $y=\dfrac{\left(1+x^{8}\right)\sqrt{1+x^{8}}}{12x^{12}}.$ 2) $y=\operatorname{arctg}\left(e^{x}-e^{-x}\right).$

3) $y=x\left(\cos\ln x+\sin\ln x\right)/2.$ 4) $\begin{cases} x=\ln\dfrac{1-t}{1+t}, \\ y=\sqrt{1-t^{2}}. \end{cases}$

6. 1) $y=\dfrac{x^{2}}{2\sqrt{1-3x^{4}}}.$ 2) $y=\dfrac{e^{x}}{2}\left[\left(x^{2}-1\right)\cos x+\left(x-1\right)^{2}\sin x\right].$

3) $y=\log_{4}\log_{2}\operatorname{tg}x.$ 4) $\begin{cases} x=\left(1+\cos^{2}t\right)^{2}, \\ y=\dfrac{\cos t}{\sin^{2}t}. \end{cases}$

7. 1) $y=\dfrac{\left(x^{2}-6\right)\sqrt{\left(4+x^{2}\right)^{3}}}{120x^{5}}.$ 2) $y=e^{\sin x}\left(x-\dfrac{1}{\cos x}\right).$

3) $y=\log_{16}\log_{5}\operatorname{tg}x.$ 4) $\begin{cases} x=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^{2}}}, \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^{2}}}{t}. \end{cases}$

8. 1) $y=\dfrac{\left(x^{2}-8\right)\sqrt{x^{2}-8}}{6x^{3}}.$ 2) $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+e^{x}+e^{2x}}-e^{x}-1}{\sqrt{1+e^{x}+e^{2x}}-e^{x}+1}.$

3) $y=\ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}.$ 4) $\begin{cases} x=\arcsin\left(\sqrt{1-t^{2}}\right), \\ y=\left(\arccos t\right)^{2}. \end{cases}$

9. 1) $y=\dfrac{4+3x^{3}}{x\sqrt[3]{\left(2+x^{3}\right)^{2}}}.$ 2) $y=3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^{2}}-2\sqrt[3]{x}+2\right).$

3) $y=x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}+a^{\pi^{\sqrt{2}}}.$ 4) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^{2}}, \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^{2}}}. \end{cases}$

10. 1) $y=\sqrt[3]{\frac{\left(1+x^{3/4}\right)^2}{x^{3/2}}}$.

2) $y=\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

3) $y=\ln\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

4) $\begin{cases} x=\ln\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}, \\ y=\arcsin\frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

11. 1) $y=\frac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$.

2) $y=\frac{e^{x^3}}{1+x^3}$.

3) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$.

4) $\begin{cases} x=\ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

12. 1) $y=\frac{\left(x^2-2\right)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$.

2) $y=x-\ln\left(1+e^x\right)-2e^{-x/2}\operatorname{arctg}e^{x/2}-\left(\operatorname{arctg}e^{x/2}\right)^2$.

3) $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$.

4) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{t/2}, \\ y=\sqrt{\mathrm{e}^t+1}. \end{cases}$

13. 1) $y=\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$.

2) $y=x-e^{-x}\arcsin e^x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$.

3) $y=\ln^3(1+\cos x)$.

4) $\begin{cases} x=\ln(\operatorname{ctg}t), \\ y=\frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

14. 1) $y=\frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$.

2) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+\arcsin e^{-x}$.

3) $y=\ln^2(x+\cos x)$.

4) $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}\left(2\mathrm{e}^t\right), \\ y=\ln\left(\operatorname{tg}\mathrm{e}^t\right). \end{cases}$

15. 1) $y=\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}$.

2) $y=x+\frac{8}{1+e^{x/4}}$.

3) $y=\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$

4) $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\arcsin(t-1). \end{cases}$

16. 1) $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}.$

2) $y=x-3\ln\left[\left(1+e^{x/6}\right)\sqrt{1+e^{x/3}}\right]-3\operatorname{arctg}e^{x/6}.$

3) $y=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right).$

4) $\begin{cases} x=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right), \\ y=t\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$

17. 1) $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}\,(x-2)}{x^2}.$

2) $y=x+\dfrac{1}{1+e^x}-\ln\left(1+e^x\right).$

3) $y=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}.$

4) $\begin{cases} x=\arcsin(\sin t), \\ y=\arccos(\cos t). \end{cases}$

18. 1) $y=\left(1-x^2\right)\sqrt[5]{x^3+\dfrac{1}{x}}.$

2) $y=e^{ax}\left[\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{2\left(a^2+4b^2\right)}\right].$

3) $y=2\sqrt{x}-4\ln\left(2+\sqrt{x}\right).$

4) $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-t)^2}}. \end{cases}$

19. 1) $y=\dfrac{\left(2x^2+3\right)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}.$

2) $y=\dfrac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x-\alpha\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}.$

3) $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right).$

4) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$

20. 1) $y=\dfrac{x-1}{\left(x^2+5\right)\sqrt{x^2+5}}.$

2) $y=2(x-2)\sqrt{1+e^x}-2\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}.$

3) $y=\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right)-\sqrt{x+a}.$

4) $\begin{cases} x=\dfrac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y=\sin\left(\dfrac{t^3}{3}+t\right). \end{cases}$

21. 1) $y=\dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$.

2) $y=\dfrac{2\left(\sqrt{2^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{2^x-1}\right)}{\ln 2}$.

3) $y=\ln\ln^3\ln^2 x$.

4) $\begin{cases} x=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t+\ln\sqrt{1-t^2}, \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

22. 1) $y=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

2) $y=\ln\left(e^x+1\right)+\dfrac{18e^{2x}+27e^x+11}{6\left(e^x+1\right)^3}$.

3) $y=\ln\ln\sin\left(1+1/x\right)$.

4) $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{\sec^2 t}, \\ y=\operatorname{tg} t\cdot\ln\cos t+\operatorname{tg} t-t. \end{cases}$

23. 1) $y=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$.

2) $y=\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)-2\operatorname{arctg} e^x$.

3) $y=\ln\dfrac{\ln x}{\sin(1/x)}$.

4) $\begin{cases} x=\dfrac{t^2\ln t}{1-t^2}+\ln\sqrt{1-t^2}, \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t+\ln\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

24. 1) $y=3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$.

2) $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(\operatorname{arctg} e^x\right)^3}$.

3) $y=\ln\dfrac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}(x/2)}$.

4) $\begin{cases} x=\ln\operatorname{tg} t, \\ y=\dfrac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

25. 1) $y=3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)}{(x-1)^2}}$.

2) $y=2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+\ln\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+1}$.

3) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$.

4) $\begin{cases} x=\sqrt{t-t^2}-\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}, \\ y=\sqrt{t}-\sqrt{1-t}\arcsin\sqrt{t}. \end{cases}$

26. 1) $y=\dfrac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$.

2) $y=\dfrac{1}{\ln 4}\ln\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$.

3) $y=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

4) $\begin{cases} x=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin t}{1+\sin t}}, \\ y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 t+\ln\cos t. \end{cases}$

27. 1) $y=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$.

2) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-3}{2}$.

3) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{2}}$.

4) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\dfrac{t+1}{t-1}, \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

28. 1) $y=\dfrac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$.

2) $y=e^{2x}\left(2-\sin 2x-\cos 2x\right)/8$.

3) $y=\ln\left(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right)$.

4) $\begin{cases} x=\ln\left(1-t^2\right), \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

29. 1) $y=\dfrac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$.

2) $y=x-\ln\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)$.

3) $y=\ln\arccos\sqrt{1-e^{4x}}$.

4) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}. \end{cases}$

30. 1) $y=\dfrac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$.

2) $y=\dfrac{e^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x\right)}{\alpha^2+\beta^2}$.

3) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$.

4) $\begin{cases} x=t\sqrt{t^2+1}, \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$

VII. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-6x}+2x}{x^2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x/2}-2-x}{x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin 2x-12x}{x^3}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1-2x}{x^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3tg\,2x-6x}{x^3}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)+3x}{x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{x^2}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x-4x}{x^3}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x-6x}{x^3}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+0{,}5x)-x}{x^2}$;

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$;

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$;

13. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\operatorname{arctg}(2+x)}{x+2}$;

14. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)^2}{\sin^2(x-3)}$;

15. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x-7}+2}$;

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 2x}$;

17. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(x^{2.}-3)}{x^2+3x-10}$;

18. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$;

19. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{x+1}$;

20. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{5-2x}-1}$.

21. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

22. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$.

23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left(e^x+e^{-x}\right)}{e^{x^3}-e}$.

24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

26. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

27. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{\ln x-\ln a}$.

28. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

29. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x\sin x\ -\cos 2x}{\sin^2 x}$.

30. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$.

VIII. Построить график функции $y=f(x)$, используя общую схему исследования функции.

1. $y=x^3+6x^2+9x+4$;

2. $y=x^3+3x^2-9x+5$;

3. $y=x^3+6x^2-15x+8$;

4. $y=x^3-3x^2-24x-28$;

5. $y=x^3+12x^2+45x+50$;

6. $y=x^3-6x^2+9x-4$;

7. $y=x^3-3x^2-9x-5$;

8. $y=x^3-6x^2-15x-8$;

9. $y=x^3+3x^2-24x+28$;

10. $y=x^3-12x^2+45x-50$;

11. $y=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$;

12. $y=\dfrac{-x^2+5x-6}{x^2-3x+3}$;

13. $y=\dfrac{3x^2+x+2}{x^2+x+1}$;

14. $y=\dfrac{2x^2-4x+3}{x^2-3x+3}$;

15. $y=\dfrac{x^2+5x+3}{x^2+x+1}$;

16. $y=\dfrac{-x^2+7x+9}{x^2-3x+3}$;

17. $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}$;

18. $y=\dfrac{-x^2-x+3}{x^2-3x+3}$;

19. $y=\dfrac{-x^2+3x+1}{x^2+x+1}$;

20. $y=\dfrac{2x^2-8x+9}{x^2-3x+3}$.

21. $y=\dfrac{x^2-3x+1}{-x^2+x+2}$;

22. $y=\dfrac{2x^2-8x+2}{-x^2+3x+3}$.

23. $y=\dfrac{x^2+3x-4}{2x^2-x+1}$;

24. $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-4x+3}$.

25. $y=\dfrac{-4x^2+3x+1}{x^2-x+3}$;

26. $y=\dfrac{-3x^2+4x+2}{x^2-3x+1}$.

27. $y=\dfrac{3x^2-3x}{3x^2+x-4}$;

28. $y=\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2-3x+1}$.

29. $y=\dfrac{-3x^2+x+2}{x^2+2x+1}$;

30. $y=\dfrac{-x^2-7x+9}{3x^2-x+3}$.

IX. Найти производную функции $y=f\left(x\right)$ с помощью логарифмического дифференцирования:

1. $y=(\sin x)^{x^2}$;

2. $y=(\cos x)^{x^2}$;

3. $y=x^{2\sin x}$;

4. $y=x^{2\cos x}$;

5. $y=x^{\sin 2x}$;

6. $y=x^{\cos 2x}$;

7. $y=\left(\mathrm{tg}x\right)^{\sqrt{x}}$;

8. $y=\left(\mathrm{ctg}x\right)^{\sqrt{x}}$;

9. $y=\left(x^2+3\right)^{\ln x}$;

10. $y=\left(x^2-1\right)^{\ln x}$;

11. $y=\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)^{\sin x}$;

12. $y=\left(\ln\left(x^2-1\right)\right)^{\cos x}$;

13. $y=(\sin x)^{\cos x}$;

14. $y=(\cos x)^{\sin x}$;

15. $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\mathrm{tg}x}$;

16. $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\mathrm{ctg}x}$;

17. $y=(\ln x)^{x^2+3}$;

18. $y=(\ln x)^{x^2-1}$;

19. $y=\left(e^x\right)^{\sin x}$;

20. $y=\left(e^x\right)^{\cos x}$;

21. $y=\left(e^x\right)^{\mathrm{tg}x}$;

22. $y=\left(e^x\right)^{\mathrm{ctg}x}$;

23. $y=\left(\mathrm{tg}\sqrt{x}\right)^{\cos x}$;

24. $y=\left(\mathrm{ctg}\sqrt{x}\right)^{\sin x}$;

25. $y=\left(\mathrm{tg}\sqrt{x}\right)^{\sin x}$;

26. $y=\left(\mathrm{ctg}\sqrt{x}\right)^{\cos x}$;

27. $y=\left(\sqrt{x}+1\right)^{\ln x}$;

28. $y=\left(\sqrt{x}-1\right)^{\ln x}$;

29. $y=\left(x^2+3x-1\right)^{e^{x^2}}$;

30. $y=\left(2x^2-3x+1\right)^{e^{-x^2}}$.

Задача X. Найти производную.

1. $y=\sin\sqrt{3}+\frac{1}{3}\frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$.

2. $y=\cos\ln 2-\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$.

3. $y=\operatorname{tg}\lg\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$.

4. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{5}-\frac{1}{8}\frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$.

5. $y=\frac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$.

6. $y=\frac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$.

7. $y=\frac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$.

8. $y=\cos\left(\operatorname{ctg} 2\right)-\frac{1}{16}\frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$.

9. $y=\operatorname{ctg}\left(\cos 2\right)+\frac{1}{6}\frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$.

10. $y=\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2}-\frac{1}{20}\frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$.

11. $y=\frac{1}{3}\cos\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{10}\frac{\sin^2 10x}{\cos 20x}$.

12. $y=\ln\sin\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$.

13. $y=8\sin\left(\operatorname{ctg} 3\right)+\frac{1}{5}\frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$.

14. $y=\frac{\cos\left(\operatorname{ctg} 3\right)\cdot\cos^2 14x}{28\sin 28x}$.

15. $y=\frac{\cos\left(\operatorname{tg}\frac{1}{3}\right)\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x}$.

16. $y=\frac{\sin\left(\operatorname{tg}\frac{1}{7}\right)\cdot\cos^2 16x}{32\sin 32x}$.

17. $y=\frac{\operatorname{ctg}\left(\sin\frac{1}{3}\right)\cdot\sin^2 17x}{17\cos 34x}$.

18. $y=\frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$.

19. $y=\frac{\operatorname{tg}\left(\ln 2\right)\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x}$.

20. $y=\operatorname{ctg}\left(\cos 5\right)-\frac{1}{40}\frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$.

21. $y=\sqrt{\operatorname{tg} 4}+\frac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}$.

22. $y=\cos\left(\ln 13\right)-\frac{1}{44}\frac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$.

23. $y=\ln\cos\frac{1}{3}+\frac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}.$

24. $y=\operatorname{ctg}\left(\sin\frac{1}{13}\right)-\frac{1}{48}\frac{\cos^2 24x}{\sin 48x}.$

25. $y=\sin\ln 2+\frac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}.$

26. $y=\sqrt[3]{\cos\sqrt{2}}-\frac{1}{52}\frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}.$

27. $y=\sqrt[7]{\operatorname{tg}(\cos 2)}+\frac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}.$

28. $y=\sin\sqrt[3]{\operatorname{tg}2}-\frac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}.$

29. $y=\cos^2\sin 3+\frac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}.$

30. $y=\sin^3\cos 2-\frac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}.$

Задача XI. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t=t_0$.

1. $\begin{cases} x=a\sin^3 t, \\ y=a\cos^3 t, \quad t_0=\pi/3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t, \\ y=\sin t, \quad t_0=\pi/3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \quad t_0=\pi/3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3, \quad t_0=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=\dfrac{2t+t^2}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{2t-t^2}{1+t^3}, \quad t_0=1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0=-1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=t(t\cos t-2\sin t), \\ y=t(t\sin t+2\cos t), \quad t_0=\pi/4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}, \quad t_0=2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=2\ln(\operatorname{ctg}t)+\operatorname{ctg}t, \\ y=\operatorname{tg}t+\operatorname{ctg}t, \quad t_0=\pi/4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{4}t^4, \\ y=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3, \quad t_0=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=at\cos t, \\ y=at\sin t, \quad t_0=\pi/2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t, \quad t_0=\pi/6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \dfrac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \dfrac{3+2\ln t}{t}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^2}, \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = a(t\sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}, \quad t_0 = -1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = t(1-\sin t), \\ y = t\cos t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \dfrac{t}{t^2-1}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = -\pi/3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg} t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \quad t_0 = -2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = a^t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

Задача XII. Найти производную n-го порядка.

1. $y = x\mathrm{e}^{ax}$.

2. $y = \sin 2x + \cos(x+1)$.

3. $y = \sqrt[5]{\mathrm{e}^{7x-1}}$.

4. $y = \dfrac{4x+7}{2x+3}$.

5. $y = \lg(5x+2)$.

6. $y = a^{3x}$.

7. $y = \dfrac{x}{2(3x+2)}$.

8. $y = \lg(x+4)$.

9. $y = \sqrt{x}$.

10. $y = \dfrac{2x+5}{13(3x+1)}$.

11. $y = 2^{3x+5}$.

12. $y = \sin(x+1) + \cos 2x$.

13. $y = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x+1}}$.

14. $y = \dfrac{4+15x}{5x+1}$.

15. $y = \lg(3x+1)$.

16. $y = 7^{5x}$.

17. $y = \dfrac{x}{9(4x+9)}$.

18. $y = \lg(1+x)$.

19. $y = \dfrac{4}{x}$.

20. $y = \dfrac{5x+1}{13(2x+3)}$.

21. $y = a^{2x+3}$.

22. $y = \sin(3x+1) + \cos 5x$.

23. $y = \sqrt{\mathrm{e}^{3x+1}}$.

24. $y = \dfrac{11+12x}{6x+5}$.

25. $y = \lg(2x+7)$.

26. $y = 2^{kx}$.

27. $y = \dfrac{x}{x+1}$.

28. $y = \log_3(x+5)$.

29. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$.

30. $y = \dfrac{7x+1}{17(4x+3)}$.

Тема 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Основные теоретические сведения

1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке (a,b), если для любого $x \in (a,b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)$.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, которые могут быть представлены в виде $F(x) + C$, где C – это постоянная.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (1)$$

Нахождение неопределенного интеграла называется интегрированием функции.

Основные свойства неопределенных интегралов.

1^0. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции,

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \ \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2^0. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной,

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3^0. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int k f(x)dx = k\int f(x)dx, \ k \neq 0.$$

4^0. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций,

$$(f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5^0. *Инвариантность формулы интегрирования.* Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)dx = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

2. *Непосредственное интегрирование функций*

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием.*

При сведении данного интеграла к табличному часто используют следующие преобразования дифференциала:

$$dx = d(x+a),\ a - \text{число},$$

$$dx = \frac{1}{a}d(ax),\ a \neq 0 - \text{число},$$

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2),$$

$$\cos x dx = d(\sin x),$$

$$\sin x dx = -d(\cos x),$$

$$\frac{1}{x}dx = d(\ln x),$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\mathrm{tg}x),$$

$$f'(x)dx = d(f(x)).$$

Пример 1. Вычислить $\int \frac{dx}{x+3}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$.

Пример 2. Вычислить $\int (3x-1)^{24} dx$.

Решение. $\int (3x-1)^{24} dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{24} d(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$.

Пример 3. Вычислить $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$.

Решение. $\int \mathrm{ctg}^2 x dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int dx = -\mathrm{ctg}x - x + C$.

Пример 4. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2} + C$.

Пример 5. Вычислить $\int \sin^2 6x dx$.

Решение.

$$\int \sin^2 6x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 12x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 12x d(12x)\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x + C.$$

Пример 6. Вычислить $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3}\int \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)(x+2)}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{x-1}{(x-1)(x+2)}dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{(x-1)(x+2)}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{d(x+2)}{(x+2)} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C.$$

3. *Метод замены переменной* (метод интегрирования подстановкой)

Метод интегрирования заменой переменной заключается во введении новой переменной интегрирования (т.е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным, или к нему сводится.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную, тогда имеет место *формула замены переменной в неопределенном интеграле,*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (2)$$

Формула (2) также называется формулой интегрирования подстановкой. После нахождения правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t обратно к исходной переменной x.

Пример 7. Вычислить $\int e^{\frac{x}{4}}dx$.

Решение. Пусть $x = 4t$, тогда $dx = 4dt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{4}}dx = 4\int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C.$$

Пример 8. Вычислить $\int x\cdot\sqrt{x-3}dx$.

Решение. Пусть $\sqrt{x-3} = t$, тогда $x = t^2+3$, $dx = 2tdt$. Следовательно,

$$\int x\cdot\sqrt{x-3}dx = \int (t^2+3)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int (t^4+3t^2)dt =$$

$$= \int t^4 dt + 6\int t^2 dt = 2\cdot\frac{t^5}{5} + 6\cdot\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C.$$

Пример 9. Вычислить $\int x\cdot(x+2)^{100}dx$.

Решение. Пусть $x+2=t$, тогда $x=t-2$, $dx=dt$. Следовательно,

$$\int x\cdot(x+2)^{100}dx=\int(t-2)\cdot t^{100}dt=\int t^{101}dt-2\int t^{100}dt=\frac{t^{102}}{102}-2\cdot\frac{t^{101}}{101}+C=$$

$$=\frac{(x+2)^{102}}{102}-\frac{2(x+2)^{101}}{101}+C.$$

Пример 10. Вычислить $\int\frac{1}{e^x+1}dx$.

Решение. Пусть $e^x=t$, тогда $x=\ln t$, $dx=\frac{dt}{t}$. Следовательно,

$$\int\frac{1}{e^x+1}dx=\int\frac{\frac{dt}{t}}{t+1}=\int\frac{dt}{t\cdot(t+1)}=\int\frac{dt}{t^2+t}=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=-\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right|+C=-\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right|+C=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C.$$

4. *Метод интегрирования по частям*

Пусть $u=u(x)$, $v=v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные, тогда *формула интегрирования по частям* имеет вид

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (3)$$

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-то образом в виде произведения двух множителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения du и v, используется формула интегрирования по частям.

Интегралы, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям:

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, где $P(x)$ – многочлен, k – число. *Подстановка*: $u=P(x)$, dv – остальные множители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\mathrm{arctg}xdx$, $\int P(x)\mathrm{arcctg}xdx$. *Подстановка*: $P(x)dx=dv$, u – остальные множители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, где a и b – числа. Подстановка: $u = e^{ax}$, dv – остальные множители.

Пример 11. Вычислить $\int (2x+1)e^{3x}dx$.

Решение. Пусть $u = 2x+1$, $dv = e^{3x}dx \Rightarrow du = 2dx$, $v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$ (положим, что C=0). По формуле интегрирования по частям получим

$$\int (2x+1)e^{3x}dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\cdot 2dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

Пример 12. Вычислить $\int \ln xdx$.

Решение. Пусть $u = \ln x$, $dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$, $v = x$. Следовательно,

$$\int \ln xdx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$$

Пример 13. Вычислить $\int x^2e^xdx$.

Решение. Пусть $u = x^2$, $dv = e^xdx \Rightarrow du = 2xdx$, $v = e^x$. Следовательно,

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int e^x\cdot xdx.$$

Для вычисления интеграла $\int xe^xdx$ снова используем формулу интегрирования по частям: $u = x$, $dv = e^xdx \Rightarrow du = dx$, $v = e^x$. Значит,

$$\int xe^xdx = xe^x - \int e^xdx = xe^x - e^x + C.$$

Поэтому $\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x + C)$.

Пример 14. Вычислить $\int \mathrm{arctg}xdx$.

Решение. Пусть $u = \mathrm{arctg}x$, $dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx$, $v = x$. Следовательно,

$$\int \mathrm{arctg}xdx = x\cdot\mathrm{arctg}x - \int\frac{x}{1+x^2}dx = x\cdot\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x\cdot\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

5. *Дробно-рациональной функцией* (или *рациональной дробью*) называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е. $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени *m*, $Q_n(x)$ – многочлен степени *n*.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя ($m < n$); иначе ($m \geq n$) рациональная дробь называется *неправильной*.

Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} ... (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} ... (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + ... + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + ... + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \\ + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + ... + \frac{C_{s_1} x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} + ... \tag{4}$$

где A_1, A_2, …C_1, C_2, … – некоторые действительные коэффициенты.

Методы нахождения неопределенных коэффициентов A_1, A_2, …C_1, C_2, … в равенстве (4): а) метод сравнения коэффициентов; б) метод отдельных значений аргумента.

Алгоритм метода сравнения коэффициентов:

1. В правой части равенства (4) привести к общему знаменателю $Q(x)$; в результате получится тождество $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{S(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т.е.

$$P(x) \equiv S(x). \tag{5}$$

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества (5), получим систему линейных уравнений, из которых определим коэффициенты A_1, A_2, …C_1, C_2, …

Пример 15. Представить дробь $\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}$ в виде суммы простейших дробей.

Решение. Представим исходную дробь по формуле (4) в виде суммы простейших дробей, получим

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5}.$$

Таким образом,

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A(x^2-2x+5)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Отсюда следует

$$2x^2-3x-3\equiv Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C.$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0, получаем

$$\begin{cases} 2=A+B, \\ -3=-2A-B+C, \\ -3=5A-C. \end{cases}$$

Решив систему, находим, что A=–1, B=3, C=–2. Следовательно,

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}.$$

Метод отдельных значений аргумента заключается в следующем: после получения тождества (5) аргументу x придают конкретные значения столько раз, сколько неопределенных коэффициентов (обычно полагают вместо x значения действительных корней многочлена $Q(x)$).

Пример 16. Представить дробь $\dfrac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}$ в виде суммы простейших дробей.

Решение. Имеем $\dfrac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x+1}$. Следовательно,

$$3x-4\equiv A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2).$$

Пусть $x=0$, тогда $-4=-2A\Rightarrow A=2$;

пусть $x=2$, тогда $2=6B\Rightarrow B=\dfrac{1}{3}$;

пусть $x=-1$, тогда $-7=3C\Rightarrow C=-\dfrac{7}{3}$. Следовательно,

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{2}{x}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2}+\frac{-\frac{7}{3}}{x+1}.$$

6. *Интегрирование простейших рациональных дробей.*

1. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C.$

2. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C.$

3. Для нахождения интеграла $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ выделяем в знаменателе полный квадрат, т.е.

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},\quad \text{где } q-\frac{p^2}{4}>0,$$

затем выполняют подстановку $x+\frac{p}{2}=t$, после применения табличных интегралов и возвращения к исходной переменной, получаем

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

4. Вычисление интеграла $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx, k\geq 2, q-\frac{p^2}{2}>0$ с помощью подстановки $x+\frac{p}{2}=t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}, a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Первое слагаемое

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+C.$$

Вычислим второй интеграл:

$$J_k=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\frac{1}{a^2}\left(J_{k-1}-\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}\right)$$

или

$$J_k=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Пример 17. Найти $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx$.

Решение. $x^2+2x+10=(x+1)^2+9$. Выполним подстановку $x+1=t\Rightarrow$ $\Rightarrow x=t-1\Rightarrow dx=dt$.

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx=\int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9}dt=3\int \frac{tdt}{t^2+9}-2\int \frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(t^2+9)-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10)-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

Пример 18. Найти $J_3=\int\frac{dt}{(t^2+1)^3}$.

Решение. Здесь $a=1, k=3$. Так как

$$J_1=\int\frac{dt}{t^2+1}=\mathrm{arctg}t+C,$$

то

$$J_2=\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}J_1+\frac{t}{2\cdot(2-1)(t^2+1)}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}t+\frac{t}{2\cdot(t^2+1)}+C,$$

$$J_3=\frac{3}{4}J_2+\frac{t}{4(t^2+1)^2}=\frac{t}{4(t^2+1)^2}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}t+\frac{t}{2(t^2+1)}\right)+C.$$

7. *Интегрирование рациональных дробей.* Алгоритм интегрирования рациональных дробей:

1. Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.
2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей.
3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример 19. Найти $\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла представлена неправильная дробь, выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

8. *Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка*

Функции с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x;\cos x)$, где R – знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x;\cos x)dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции с помощью подстановки $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, которая называется *универсальной*. Причем,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ x=2\operatorname{arctg}t,\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если функция $R(\sin x;\cos x)$ нечетная относительно $\sin x$, т.е. $R(-\sin x;\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$, то применяется подстановка $\cos x=t$;

2) если функция $R(\sin x;\cos x)$ нечетная относительно $\cos x$, т.е. $R(\sin x;-\cos x)=R(\sin x;\cos x)$, то применяется подстановка $\sin x=t$;

3) если функция $R(\sin x;\cos x)$ четная относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x;-\cos x)=R(\sin x;\cos x)$, то подстановка имеет вид $\operatorname{tg}x=t$. Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(\operatorname{tg}x)dx$.

Пример 20. Найти $\int\frac{1}{3+\sin x+\cos x}dx$.

Решение. Сделаем универсальную подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Тогда $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$. Следовательно,

$$\int\frac{1}{3+\sin x+\cos x}dx=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{t^2+t+2}=\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}+C.$$

Интегралы вида $\int\sin^m x\cos^n x dx$. Для нахождения таких интегралов используются следующие постановки:

1) постановка $t=\sin x$, если n – целое, положительное, нечетное число;

2) постановка $t=\cos x$, если m – целое, положительное, нечетное число;

3) формулы понижения порядка степени:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

если n и m – целые, неотрицательные, четные числа;

4) подстановка $t = \operatorname{tg} x$, если $(m+n)$ – целое, четное, отрицательное число.

Пример 21. Найти $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

Решение. Здесь $m = 4$, $n = 5$. Применяем подстановку $t = \sin x$, тогда $x = \arcsin t$, $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$.

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int t^4 \cdot (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4 (1-t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

9. *Квадратичные иррациональности*

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции.

Интегралы типа $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx, \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей.

Данные интегралы можно найти следующим образом: под радикалом выделить полный квадрат

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

и сделать подстановку $x + \frac{b}{2a} = t$. При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий – к сумме двух табличных интегралов.

Интегралы типа $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, можно вычислять, пользуясь формулой

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (6)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени (n–1) с неопределенными коэффициентами, λ – неопределенный коэффициент.

Все неопределенные коэффициенты находятся из тождества, получаемого дифференцированием обеих частей равенства (6):

$\dfrac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \equiv \left(Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' + \dfrac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, после чего необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной x.

10. *Дробно-линейная подстановка*

Интегралы типа $\int R\left(x,(ax+b)^{m_1/n_1},(ax+b)^{m_2/n_2},\ldots\right)dx$, где a,b – действительные числа, $m_1,n_1,m_2,n_2,\ldots$ – целые числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем подстановки $ax+b=t^k$,

где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\dfrac{m_1}{n_1},\dfrac{m_2}{n_2},\ldots$.

Пример 22. Найти $\int\dfrac{dx}{(2x+1)^{2/3}-(2x+1)^{1/2}}$.

Решение. Здесь $n_1=3,\ n_2=2$, следовательно, k = 6. Применяем подстановку $2x+1=t^6$, тогда $x=\dfrac{t^6-1}{2}$, $dx=3t^5dt$.

$$\int\frac{dx}{(2x+1)^{2/3}-(2x+1)^{1/2}}=\int\frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=3\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=$$

$$=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C.$$

Вернемся к исходной переменной. Поскольку $t=(2x+1)^{1/6}$, то

$$I=\frac{3}{2}(2x+1)^{1/3}+3(2x+1)^{1/6}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C.$$

11. *Тригонометрическая подстановка.*

Интегралы типа $\int\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx, \int\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью следующих *тригонометрических подстановок*: $x=a\cdot\sin t$ для первого интеграла; $x=a\cdot\operatorname{tg}t$ для второго интеграла; $x=\dfrac{a}{\sin t}$ для третьего интеграла.

12. *Интегралы типа* $\int\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Здесь подынтегральная функция есть рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$, интегралы указанного типа приводятся к интегралам уже рассмотренного типа, т.е. к интегралам типа $\int R\left(t;\sqrt{a^2-t^2}\right)dt$, $\int R\left(t;\sqrt{t^2+a^2}\right)dt, \int R\left(t;\sqrt{t^2-a^2}\right)dt$. Эти интегралы можно вычислить с помощью соответствующих тригонометрических подстановок.

Замечание: Интеграл типа $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ целесообразно находить с помощью подстановки $x=\frac{1}{t}$.

13. *Определенный интеграл, его основные свойства*

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n произвольных отрезков точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_i<\ldots x_n=b$. Выберем в каждом из частичных отрезков $[x_i;x_{i+1}]$ произвольную точку ξ_i, где $x_i<\xi_i<x_{i+1}$, $0\le i\le n-1$. Найдем сумму произведений

$$f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

которую будем называть интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Обозначим через λ длину максимального частичного отрезка данного разбиения, т.е. $\lambda=\max\limits_{0\le i\le n}\left\{\Delta x_i\right\}$.

Конечный предел I интегральной суммы при $\lambda\to 0$, если он существует, называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Определенный интеграл обозначается символом

$$I=\int_a^b f(x)dx.$$

Если определенный интеграл существует, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a;b]$, числа a и b – соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования.

Интегрируемыми на отрезке $[a;b]$ являются функции:

1) непрерывные на отрезке $[a;b]$ функции;
2) ограниченные на отрезке $[a;b]$ функции, имеющие конечное число точек разрыва;
3) монотонные на отрезке $[a;b]$ функции.

Основные свойства определенных интегралов.

1^0. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2^0. Для любых чисел a, b и c имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

3^0. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла,

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx .$$

4^0. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов,

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx .$$

5^0. Если функция $f(x) \ge 0$ на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

6^0. Если $f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

7^0. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

8^0. Если M и m – соответственно, максимум и минимум функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

14. *Формула Ньютона–Лейбница:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$

Формула Ньютона–Лейбница дает широкие возможности вычисления определенных интегралов. Нужно вычислить неопределенный интеграл и затем найти разность значений первообразной в пределах интегрирования.

Пример 23. Найти $\int_1^e \frac{1}{x}dx$.

Решение. $\int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$.

Вычисление определенного интеграла с помощью замены переменной и интегрирование по частям

Теорема. Пусть: 1) $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a;b]$; 2) функция $\varphi(t)$ – дифференцируемая на $[\alpha;\beta]$, причем $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$ и множеством значений функции $\varphi(t)$ является отрезок $[a;b]$; 3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Данная формула называется *формулой замены переменной* (или *подстановки*) в определенном интеграле.

Замечание.

1. При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной возвращаться к исходной переменной не надо.

2. При подстановке новой переменной необходимо найти новые пределы интегрирования и выполнить преобразования подынтегральной функции.

Пример 24. Найти $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$.

Решение. Выполним подстановку $t=1+x^2$. Тогда $dt=2xdx$. Если x = 0, то $t=1$; если x = 1, то $t=2$. Т.к. функция $x=\sqrt{1-t^2}$ непрерывна на [1; 2], то и новая подынтегральная функция также непрерывна, значит, для нее существует первообразная на этом отрезке. Получим

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx=\int_1^2 \frac{dt}{t}=\ln t\Big|_1^2=\ln 2.$$

Теорема. Пусть функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, тогда имеет место формула

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

Данная формула называется формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример 25. Найти $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

Решение. Здесь $u=x\Rightarrow du=dx$, $dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}$. Тогда

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}-e^{-x}\Big|_0^1=-e^{-1}-e^{-1}+1=1-\frac{2}{e}.$$

15. Приложения определенного интеграла: вычисление площади плоской фигуры, нахождение объема тела.

15.1. Рассмотрим на плоскости Oxy фигуру, ограниченную графиком непрерывной и положительной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, отрезком $[a;b]$ оси Ox, вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ (см. рис. 23). Эта фигура называется *криволинейной трапецией*.

16. *Приложения определенного интеграла в экономике*. В экономических задачах переменные меняются дискретно. Для использования определенного интеграла в экономике нужно составить некоторую идеализированную модель, предполагающую непрерывное изменение зависимых переменных (функций) и независимых переменных (аргумента).

16.1. *Дневная выработка*. Найти дневную выработка P за рабочий день продолжительностью 8 часов, если производительность труда в течение дня меняется по эмпирической формуле

$$p = f(t) = p_0\left(-0,2t^2/t_0{}^2 + 1,6t/t_0 + 3\right),$$

где t – время в часах, p_0 – размерность производительности (объем продукции в час), t_0 – размерность времени (ч). Эта формула отражает реальный процесс работы (см. рис. 16): производительность сначала растет, достигая максимума в середине рабочего дня при $t = 4$ ч, затем падает.

Решение. Полагая, что производительность меняется в течение дня непрерывно, т.е. p является непрерывной функцией аргумента t на отрезке $[0;8]$, дневную выработку P можно выразить с помощью определенного интеграла:

$$P = p_0\int\limits_0^8 \left(-0,2t^2/t_0{}^2 + 1,6t/t_0 + 3\right)dt = F(t)\Big|_0^8 =$$

$$= p_0\left(-0,2\frac{t^3}{3t_0{}^2} + 0,8\frac{t^2}{t_0} + 3t\right)\Bigg|_0^8 = 41,06\,p_0t_0 = 41,06a_0$$

где a_0 – множитель, имеющий размерность единицы продукции.

Если бы в течение всего дня работа велась ритмично и с максимальной производительностью $p_{\max} = 6,2\,p_0$, то дневная выработка составила бы $P_{\max} = 49,6\,p_0$, или примерно на 21% больше.

На рис. 24 проиллюстрировано решение задачи: дневная выработка численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком кривой $f(t)$; вторая кривая показывает рост выпуска продукции во времени (график первообразной $F(t)$ соответствует правой оси ординат P).

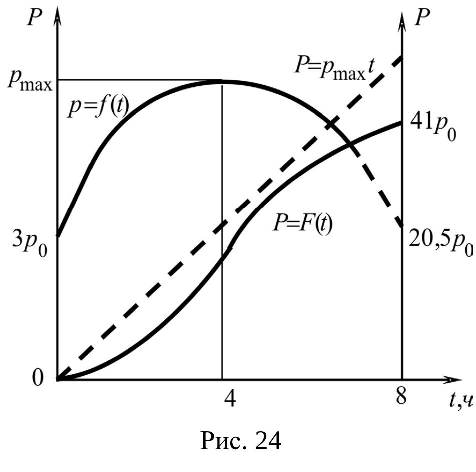


Рис. 24

Значение $m=4$ ч соответствует точке перегиба кривой $F(t)$: в первой половине рабочего дня интенсивность выработки продукции выше, чем во второй. Штрихпунктирная прямая $P = p_{\max}t$ соответствует выпуску продукции с равномерной производительностью $p_{\max}$.

16.2. *Выпуск оборудования при постоянном темпе роста*

Производство оборудования некоторого вида характеризуется темпом роста его выпуска

$$K = \frac{\Delta y_1}{\Delta t_y},$$

где Δy – прирост выпуска этого оборудования за промежуток времени Δt, а $y-$ уровень его производства за единицу времени на момент времени t. Найти общее количество оборудования, произведенного к моменту времени t, полагая, что $K-$известная постоянная величина, единицей времени является год, а в начальный момент времени $t=0$ уровень ежегодного производства оборудования составлял y_0.

Решение. Перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, полагая, что он существует. Будем также полагать, что y является непрерывной функцией от времени t. Согласно определению производной функции

$$K = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta t_y} = \frac{y'}{y} = \left(\ln y\right)'.$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до t, получаем

$$\ln y \Big|_{y_0}^{y} = Kt \Big|_{0}^{t} = Kt \quad \text{или} \quad \ln \frac{y}{y_0} = Kt,$$

откуда $y = y_0 e^{Kt}$.

Суммарное количество оборудования, выпущенного за промежуток времени t, дается определенным интегралом

$$Y(t) = \int_0^t y(t)\,dt = \int_0^t y_0 e^{Kt}\,dt = \frac{1}{K} y_0 e^{Kt} \Big|_0^t = \frac{1}{K} y_0 \left(e^{Kt} - 1\right).$$

Например, при $K = 0{,}05$ ($5\,\%$ ежегодного темпа роста) общее количество оборудования, выпущенного за 10 лет, составит

$$Y(10) = 20 y_0 \left(e^{0,5} - 1\right) \approx 13 y_0,$$

причем уровень производства за указанный период времени увеличится почти на 65%.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
4. Сформулируйте теорему существования неопределенного интеграла.
5. В чем заключается суть метода непосредственного интегрирования?
6. Сформулируйте суть метода интегрирования по частям.
7. В чем заключается метод замены переменной?
8. Интегрирование рациональных функций; простейшие рациональные дроби и их интегрирование.
9. Интегрирование рациональных функций: разложение рациональной дроби на простейшие методом неопределенных коэффициентов.
10. Интегрирование простейших иррациональных функций.
11. Интегрирование тригонометрических функций.
12. Приведите примеры задач, приводящих к понятию определенного интеграла.
13. Дайте определение определенного интеграла.
14. Сформулируйте теорему существования определенного интеграла.
15. Сформулируйте простейшие свойства определенного интеграла.
16. Формула Ньютона–Лейбница.
17. Определенный интеграл с переменным верхним пределом.
18. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.
19. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций.
20. Приложения определенного интеграла: вычисление площади плоской фигуры, нахождение объема тела.
21. Приложения определенного интеграла в экономике.

Контрольная работа №5 по теме «Интегральное исчисление функции одной переменной»

I. Найти неопределенные интегралы.

1. 1) $\int \frac{xdx}{7+x^2}$; 2) $\int \frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$; 3) $\int (3-x)\cos x dx$;

4) $\int \frac{x^5-x+1}{x^2+1}dx$; 5) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$; 6) $\int e^{\sqrt{x}}dx$;

7) $\int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx$; 8) $\int \frac{3x^3+7x^2+12x+6}{\left(x^2+x+3\right)\left(x^2+2x+3\right)}dx$;

9) $\int \frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3}dx$; 10) $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx.$

2. 1) $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}$; 2) $\int \frac{(x+4)dx}{x^2-2x-8}$; 3) $\int x\ln(1-3x)dx$;

4) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$; 5) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx$; 6) $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$;

7) $\int \sin 2x \cdot \cos 5x dx$; 8) $\int \frac{x+4}{\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+2\right)}dx$;

9) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x}{(x-2)(x+1)^3}dx$; 10) $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}dx.$

3. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$; 2) $\int \frac{(x+23)dx}{x^2+x-20}$; 3) $\int xe^{-7x}dx$;

4) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$; 5) $\int \frac{1}{(1+x)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}dx$; 6) $\int \ln^2 x dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; 8) $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}dx$;

9) $\int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3}dx$; 10) $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}dx.$

4. 1) $\int \frac{dx}{5x+3}$; 2) $\int \frac{(x+12)dx}{x^2-x-6}$; 3) $\int \mathrm{arctg}4x dx$;

4) $\int \frac{1-3x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$; 5) $\int \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1dx}{\sqrt{1+2x^2}}$; 6) $\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

7) $\int \mathrm{tg}^4 x \frac{1}{\cos^6 x}dx$; 8) $\int \frac{2x^3+2x+1}{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+1\right)}dx$;

9) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3}dx$; 10) $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx.$

5. 1) $\int \sin(2-3x)dx$; 2) $\int \frac{(x+19)dx}{x^2-x-6}$; 3) $\int \sqrt{x^3}\ln x dx$;

4) $\int \frac{2-\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$; 5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$; 6) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$;

7) $\int \mathrm{ctg}^6 x dx$; 8) $\int \frac{x^3+x+1}{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+1\right)}dx$;

9) $\int \frac{2x^3+x+1}{(x+1)x^3}dx$; 10) $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx.$

6. 1) $\int e^{\frac{1}{4}x-2}dx$; 2) $\int \frac{(5x+6)dx}{x^2-2x-15}$; 3) $\int x\sin 5x dx$;

4) $\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$; 5) $\int \frac{1}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+1}}dx$; 6) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{5x-1}dx$;

7) $\int \operatorname{tg}^7 x dx$;

8) $\int \frac{x^3+x^2+1}{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+1\right)}dx$;

9) $\int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}dx$;

10) $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx$.

7. 1) $\int \frac{xdx}{7+4x^2}$; 2) $\int \frac{(5x-7)dx}{x^2-x-20}$; 3) $\int (2x+5)\sin x dx$;

4) $\int \frac{x^4+x^2+x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2}dx$; 5) $\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx$; 6) $\int xe^{5x}dx$;

7) $\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x dx$;

8) $\int \frac{2x^2-x+1}{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+1\right)}dx$;

9) $\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3}dx$;

10) $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x}dx$.

8. 1) $\int \frac{xdx}{\cos^2 2x}$; 2) $\int \frac{5xdx}{x^2+x-6}$; 3) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$;

4) $\int \frac{e^{3x}+2e^{2x}+e^x-1}{e^x}dx$; 5) $\int \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}}dx$; 6) $\int xe^{-x}dx$;

7) $\int \frac{1}{8-4\sin x+7\cos x}dx$;

8) $\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+2x+2\right)}dx$;

9) $\int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-2)^3}dx$;

10) $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}dx$.

9. 1) $\int \cos\left(\frac{x}{3}-4\right)dx$; 2) $\int \frac{(5x+2)dx}{x^2+2x-8}$; 3) $\int \arcsin\frac{x}{3}dx$;

4) $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x+\sqrt{x}-1\right)dx$; 5) $\int \frac{3\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x}}dx$; 6) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$;

7) $\int \frac{\sin x}{5+3\sin x}dx$;

8) $\int \frac{4x^2+3x+4}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)}dx$;

9) $\int \frac{x^3-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)^3}dx$;

10) $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)}dx$.

10. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$; 2) $\int \frac{(5x+1)dx}{x^2+2x-15}$; 3) $\int xe^{3x}dx$;

4) $\int\left(2^x+3^x+4e^x\right)dx$; 5) $\int \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt[3]{x-4}+2}dx$; 6) $\int\left(2x^2+x\right)\ln x dx$;

7) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx$.

8) $\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)}dx$;

9) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^3}dx$;

10) $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}dx$.

11. 1) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$; 2) $\int \frac{(19-4x)dx}{2x^2+x-3}$; 3) $\int (5x-2)\ln x dx$;

4) $\int \frac{e^{3x}+2e^{2x}+e^x-1}{e^x}dx$; 5) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}dx$; 6) $\int x\ln x dx$;

7) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$; 8) $\int \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}dx$;

9) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3}dx$; 10) $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx$.

12. 1) $\int x\sqrt{3-x^2}dx$; 2) $\int \frac{(2x+9)dx}{x^2+5x+6}$; 3) $\int x\cos^2 2x dx$;

4) $\int (x^2+2x^3+x+e^{2x})dx$; 5) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; 6) $\int x\,\mathrm{arctg}\,x dx$;

7) $\int \frac{1}{4\sin^2 x-4\sin x\cos x+8\cos^2 x-3}dx$; 8) $\int \frac{x^2+x+3}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$;

9) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3}dx$; 10) $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$.

13. 1) $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x dx}{1+x^2}$; 2) $\int \frac{(x+9)dx}{x^2+2x-3}$; 3) $\int \ln(3+x^2)dx$;

4) $\int \left(x^2\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$; 5) $\int \frac{2}{\sqrt{2x+5}+3\sqrt[3]{2x+5}}dx$; 6) $\int (x^2-x+1)\ln x dx$;

7) $\int \frac{1}{\cos^3 x\sin x}dx$; 8) $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$;

9) $\int \frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}dx$; 10) $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx$.

14. 1) $\int \sin 2x\sqrt{2-\cos^2 x}dx$; 2) $\int \frac{(2x+27)dx}{x^2-x-12}$; 3) $\int x\arcsin x dx$;

4) $\int \left(\frac{3}{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; 5) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-4x+5}}$; 6) $\int x\cos x dx$;

7) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^9 x}dx$; 8) $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$;

9) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^3}dx$; 10) $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$.

15. 1) $\int \frac{\sin x dx}{1-\cos x}$; 2) $\int \frac{(4x+31)dx}{2x^2+11x+12}$; 3) $\int (2-x)\sin x dx$;

4) $\int \frac{x^5-5x+1}{x^2+1}dx$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+2x-3}}$; 6) $\int \arccos x dx$;

7) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x - 8} dx$; 8) $\int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2 (x^2 + 2x + 2)} dx$;

9) $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x+1)(x+2)^3} dx$; 10) $\int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx$.

16. 1) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x} dx}{x}$; 2) $\int \frac{(11x-2)dx}{x^2 + x - 2}$; 3) $\int (1 - \ln x) dx$;

4) $\int \frac{x^5 - x + 1}{x^2 + 1} dx$; 5) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+5} + 2\sqrt[4]{2x+5}} dx$; 6) $\int \sin \ln x dx$;

7) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx$; 8) $\int \frac{3x^3 + x + 46}{(x-1)^2 (x^2 + 9)} dx$;

9) $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x+2)(x-2)^3} dx$; 10) $\int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6} dx$.

17. 1) $\int \frac{1 - \mathrm{tg} x dx}{\cos^2 x}$; 2) $\int \frac{(17-2x)dx}{x^2 - 5x + 4}$; 3) $\int (3x+4) \cos x dx$;

4) $\int (2^x + 3^x)^2 dx$; 5) $\int \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt[5]{x}} dx$; 6) $\int e^{2x} \cos x dx$;

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x - 6 \sin x \cos x + 3 \sin^2 x} dx$; 8) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2 (x^2 - x + 1)} dx$;

9) $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x+1)(x+2)^3} dx$; 10) $\int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx$.

18. 1) $\int \frac{x^2 dx}{8 + x^3}$; 2) $\int \frac{(9-2x)dx}{x^2 - 5x + 6}$; 3) $\int \mathrm{arcctg} 4x dx$;

4) $\int \frac{x^5 - 4x + 3}{x^2 + 5} dx$; 5) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} dx$; 6) $\int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx$;

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x + 1} dx$; 8) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2 (x^2 - x + 1)} dx$;

9) $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx$; 10) $\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx$.

19. 1) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^2 x + 3}$; 2) $\int \frac{(4x+27)dx}{2x^2 - x - 6}$; 3) $\int x \ln^2 x dx$;

4) $\int \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 2}} dx$; 5) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[4]{3x+1}} dx$; 6) $\int x^2 \sin x dx$;

7) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x^2 + \sin x} dx$; 8) $\int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x-2)^2 (x^2 - x + 1)} dx$;

9) $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx$; 10) $\int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx$.

20. 1) $\int\frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}$; 2) $\int\frac{(x-13)dx}{x^2-2x-8}$; 3) $\int x^2\sin 3xdx$;

4) $\int\frac{1}{9x^2+25}dx$; 5) $\int\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+3x+1}}dx$; 6) $\int x^2\sin xdx$;

7) $\int\frac{\sin^5 x+1}{\sin^2 x}dx$; 8) $\int\frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2\left(x^2+4x+5\right)}dx$;

9) $\int\frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx$; 10) $\int\frac{x^3+1}{x^2-x}dx$.

21. 1) $\int\frac{xdx}{\cos^2 x^2}$; 2) $\int\frac{(x-8)dx}{x^2+2x-8}$; 3) $\int x\cos 3xdx$;

4) $\int x\cos x^2dx$; 5) $\int\frac{5x-1}{\sqrt{-2x^2+5x+3}}dx$; 6) $\int(x+1)e^xdx$;

7) $\int\frac{1}{3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5}dx$; 8) $\int\frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx$;

9) $\int\frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx$; 10) $\int\frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)}dx$.

22. 1) $\int\left(3x^4+2\right)^9\cdot x^3dx$; 2) $\int\frac{x}{x^2-6x+18}dx$; 3) $\int\sin\ln xdx$;

4) $\int x^2\cos x^3dx$; 5) $\int\frac{1}{\sqrt{2x^2+5}-\sqrt[3]{2x^2+5}}dx$; 6) $\int x^2\operatorname{arctg}xdx$;

7) $\int\sin^2 x\cos xdx$; 8) $\int\frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2\left(x^2+4x+5\right)}dx$;

9) $\int\frac{x^3+6x^2-10x+52}{(x-2)(x+2)^3}dx$; 10) $\int\frac{2x^4+2x^3-3x^2+2x-9}{x(x-1)(x+3)}dx$.

23. 1) $\int\frac{1}{x\ln x}dx$; 2) $\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$; 3) $\int(3x-1)e^{3x}dx$;

4) $\int\frac{2}{3x^2-25}dx$; 5) $\int\frac{1}{\sqrt{2x+5}+\sqrt[5]{2x+5}}dx$; 6) $\int\arcsin xdx$;

7) $\int\sin^2 x\cos^3 xdx$; 8) $\int\frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2\left(x^2+4\right)}dx$;

9) $\int\frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3}dx$; 10) $\int\frac{3x^3-x^2-12x-2}{x(x+1)(x-2)}dx$.

24. 1) $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}}dx$; 2) $\int\frac{x+1}{x^2-6x+8}dx$; 3) $\int\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx$;

4) $\int\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}dx$; 5) $\int\frac{3x-1}{\sqrt{2x^2+2x-5}}dx$; 6) $\int x\ln xdx$;

7) $\int\sin^2 x\cos^4 xdx$; 8) $\int\frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2\left(x^2+4\right)}dx$;

9) $\int \frac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)(x-1)^3}dx$; 10) $\int \frac{x^5-x^4-6x^3+13x+6}{x(x-3)(x+2)}dx.$

25. 1) $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$; 2) $\int \frac{2x-1}{x^2-4x+5}dx$; 3) $\int \ln(x^2+4)dx$;

4) $\int \frac{-2}{3x^2+12}dx$; 5) $\int \frac{4x+1}{\sqrt{-2x^2+5x-1}}dx$; 6) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx,\quad a>0$;

7) $\int \sin^2 x\cos^{-3}xdx$; 8) $\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$;

9) $\int \frac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)(x+2)^3}dx$; 10) $\int \frac{2x^4+2x^3-41x^2+20}{x(x-4)(x+5)}dx.$

26. 1) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \frac{4x+3}{x^2-2x+18}dx$; 3) $\int e^{2x}\cos 3xdx$;

4) $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+5}}dx$; 5) $\int \frac{-3x-1}{\sqrt{2-5x^2+2x}}dx$; 6) $\int e^x \sin xdx$;

7) $\int \sin^4 xdx$; 8) $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}dx$;

9) $\int \frac{x^3-6x^2+14x-4}{(x+2)(x-2)^3}dx$; 10) $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+2}{x(x-1)(x+2)}dx.$

27. 1) $\int \frac{\sin(3x-7)}{\cos^2(3x-7)+4}dx$; 2) $\int \frac{4x-1}{2x^2+5x+18}dx$; 3) $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$;

4) $\int \frac{3}{\sqrt{2x^2-7}}dx$; 5) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx$; 6) $\int x^2e^x dx$;

7) $\int \sin^2 x\cos^5 xdx$; 8) $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}dx$;

9) $\int \frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)(x+2)^3}dx$; 10) $\int \frac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}dx.$

28. 1) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2xdx$; 2) $\int \frac{4-x}{x^2-6x+4}dx$; 3) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

4) $\int \frac{8}{\sqrt{-3x^2+5}}dx$; 5) $\int \frac{1}{\sqrt{-2x+3}+\sqrt[3]{(-2x+3)^2}}dx$; 6) $\int x\sin xdx$;

7) $\int \frac{1}{\sin^2 x-3\cos x\sin x+2\cos^2 x}dx$; 8) $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$;

9) $\int \frac{x^3+6x^2+14x+4}{(x-2)(x+2)^3}dx$; 10) $\int \frac{2x^4-5x^2-8x-8}{x(x-2)(x+2)}dx.$

29. 1) $\int \frac{\mathrm{arctg}x+x}{1+x^2}dx$; 2) $\int \frac{1-2x}{x^2-6x+18}dx$; 3) $\int e^{-2x}\cos 4xdx$;

4) $\int \frac{3}{\sqrt{-2x^2+7}}dx;$ 5) $\int \frac{1}{\sqrt{-2x+5}+\sqrt[3]{(-2x+5)^5}}dx;$ 6) $\int x\sin x dx$;

7) $\int \frac{1}{3\cos^2 x-\sin^5 x}dx;$ 8) $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}dx;$

9) $\int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}dx;$ 10) $\int \frac{x^5+2x^4-2x^3+5x^2-7x+9}{(x+3)(x-1)x}dx.$

30. 1) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+2x\right)^2}}dx;$ 2) $\int \frac{5x+3}{x^2-2x+10}dx;$ 3) $\int \operatorname{arcctg}\sqrt{3x+1}dx;$

4) $\int \sqrt{5-2x^2}dx;$ 5) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt[3]{(2x-3)^4}}dx;$ 6) $\int (2x+1)\ln x dx$;

7) $\int \frac{1}{\cos^4 x\sin x}dx;$ 8) $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}dx;$

9) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}dx;$ 10) $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}dx.$

II. Вычислить определенный интеграл.

1. 1) $\int_0^2 \ln\left(x^2+4\right)dx;$ 2) $\int_0^3 \frac{4xdx}{\sqrt[3]{\left(3x-8\right)^2}-2\sqrt[3]{3x-8}+4};$

2. 1) $\int_0^1 x^3\operatorname{arctg}x dx;$ 2) $\int_0^1 \frac{4xdx}{\sqrt[3]{\left(9x-1\right)^2}-\sqrt[3]{9x-1}+1};$

3. 1) $\int_{-1}^0 \left(2x+3\right)e^{-2x}dx;$ 2) $\int_0^7 \frac{4xdx}{\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1};$

4. 1) $\int_0^1 3x^2\arcsin x dx;$ 2) $\int_{-1}^0 \frac{\left(7x-16\right)dx}{\sqrt[3]{\left(7x+8\right)^2}+\ 2\sqrt[3]{7x+8}};$

5. 1) $\int_0^{\pi/4} x^2\sin 2x dx;$ 2) $\int_1^4 \frac{\left(x-1\right)dx}{\sqrt[3]{\left(3x-4\right)^2}-\sqrt[3]{3x-4}+1};$

6. 1) $\int_{-1}^2 3x^2\ln\left(x+2\right)dx;$ 2) $\int_0^3 \frac{15xdx}{\sqrt[4]{\left(5x+1\right)^3}+\sqrt[4]{\left(5x+1\right)}};$

7. 1) $\int_0^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx;$ 2) $\int_0^5 \frac{27xdx}{\sqrt[4]{\left(3x+1\right)^3}+\sqrt[4]{3x+1}};$

8. 1) $\int_0^{\pi} x\cos\frac{x}{2}dx;$ 2) $\int_1^4 \frac{\left(13-5x\right)dx}{\sqrt[4]{\left(5x-4\right)^3}+3\sqrt[4]{5x-4}};$

9. 1) $\int_0^{1/2} \arcsin 2x dx$; 2) $\int_0^5 \frac{3x dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}$;

10. 1) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^3} dx$; 2) $\int_1^2 \frac{5x dx}{\sqrt{5x^2-4}+\sqrt[4]{5x^2-4}}$;

11. 1) $\int_0^3 \ln\left(x^2+9\right) dx$; 2) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}+3\sqrt[3]{3x-8}}$;

12. 1) $\int_1^3 \operatorname{arctg}\frac{x}{3} dx$; 2) $\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt[3]{(9x-1)^2}+3\sqrt[3]{9x-1}}$;

13. 1) $\int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx$; 2) $\int_0^7 \frac{2dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+4\sqrt[3]{x+1}}$;

14. 1) $\int_0^1 (x+1) e^{2x} dx$; 2) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x+8)^2}+2\sqrt[3]{7x+8}}$;

15. 1) $\int_0^{\pi/6} x^2 \sin 3x dx$; 2) $\int_1^4 \frac{(3x-3) dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}+\sqrt[3]{3x-4}}$;

16. 1) $\int_{-2}^1 3x^2 \ln(x+3) dx$; 2) $\int_0^3 \frac{5dx}{\sqrt[4]{(5x+1)^3}+\sqrt[4]{5x+1}}$;

17. 1) $\int_0^{1/4} \operatorname{arctg} 4x dx$; 2) $\int_0^5 \frac{6dx}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}+2\sqrt[4]{3x+1}}$;

18. 1) $\int_0^{\pi/4} x \cos x 2x dx$; 2) $\int_1^4 \frac{5dx}{\sqrt[4]{(5x-4)^3}+3\sqrt[4]{5x-4}}$;

19. 1) $\int_0^{1/3} \arcsin 3x dx$; 2) $\int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}$;

20. 1) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$; 2) $\int_1^2 \frac{5x dx}{\sqrt[4]{(5x^2-4)^3}+\sqrt[4]{5x^2-4}}$;

21. 1) $\int_0^5 \ln\left(x^2+25\right) dx$; 2) $\int_0^3 \frac{3dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}+4\sqrt[3]{3x-8}}$;

22. а) $\int_0^{1/2} \operatorname{arctg} x dx$; б) $\int_0^1 \frac{3dx}{\sqrt[3]{(9x-1)^2}+2\sqrt[3]{9x-1}}$;

23. а) $\int_0^{\pi} x \sin\frac{x}{2} dx$; б) $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{x+1}}$;

24. 1) $\int_0^{\pi} x^2 \sin\frac{x}{2} dx$; 2) $\int_1^4 \frac{9(x-1) dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}+\sqrt[3]{3x-4}}$;

25. 1) $\int\limits_{0}^{1}(2x+1)e^{-x}dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{7dx}{\sqrt[3]{(7x+8)^2}+3\sqrt[3]{7x+8}}$;

26. 1) $\int\limits_{-4}^{-1}3x^2\ln(x+5)\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{3}\frac{5dx}{\sqrt[4]{(5x+1)^3}+2\sqrt[4]{5x+1}}$;

27. 1) $\int\limits_{0}^{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{5}\frac{9dx}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}+4\sqrt[4]{3x+1}}$;

28. 1) $\int\limits_{0}^{\pi/2}x\cos 3x dx$; 2) $\int\limits_{0}^{3}\frac{25xdx}{\sqrt{5x+1}+\sqrt[4]{5x+1}}$;

29. 1) $\int\limits_{0}^{2}\arcsin\frac{x}{2}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{\sqrt{3x+1}+3\sqrt[4]{3x+1}}$;

30. 1) $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln^2 x}{x^2}dx$; 2) $\int\limits_{1}^{4}\frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}+\sqrt[3]{3x-4+1}}$;

III. Вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_{-2}^{0}(x^2+5x+6)\cos 2xdx.$

2. $\int\limits_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 3xdx.$

3. $\int\limits_{-1}^{0}(x^2+4x+3)\cos xdx.$

4. $\int\limits_{-2}^{0}(x+2)^2\cos 3xdx.$

5. $\int\limits_{-4}^{0}(x^2+7x+12)\cos xdx.$

6. $\int\limits_{0}^{\pi}(2x^2+4x+7)\cos 2xdx.$

7. $\int\limits_{0}^{\pi}(9x^2+9x+11)\cos 3xdx.$

8. $\int\limits_{0}^{\pi}(8x^2+16x+17)\cos 4xdx.$

9. $\int\limits_{0}^{2\pi}(3x^2+5)\cos 2xdx.$

10. $\int\limits_{0}^{2\pi}(2x^2-15)\cos 3xdx.$

11. $\int\limits_{0}^{2\pi}(3-7x^2)\cos 2xdx.$

12. $\int\limits_{0}^{2\pi}(1-8x^2)\cos 4xdx.$

13. $\int\limits_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\sin 3xdx.$

14. $\int\limits_{0}^{3}(x^2-3x)\sin 2xdx.$

15. $\int\limits_{0}^{\pi}(x^2-3x+2)\sin xdx.$

16. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x^2-5x+6)\sin 3xdx.$

17. $\int\limits_{-3}^{0}(x^2+6x+9)\sin 2xdx.$

18. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(x^2+17{,}5)\sin 2xdx.$

19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-5x^2)\sin xdx.$

20. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{3}(3x-x^2)\sin 2xdx.$

21. $\int\limits_1^2 x\ln^2 x dx.$

22. $\int\limits_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$

23. $\int\limits_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$

24. $\int\limits_0^1 (x+1)\ln^2(x+1)dx.$

25. $\int\limits_2^3 (x-1)^3\ln^2(x-1)dx.$

26. $\int\limits_{-1}^0 (x+2)^3\ln^2(x+2)dx.$

27. $\int\limits_0^2 (x+1)^2\ln^2(x+1)dx.$

28. $\int\limits_1^e \sqrt{x}\ln^2 x dx.$

29. $\int\limits_{-1}^1 x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} dx.$

30. $\int\limits_0^1 x^2 \mathrm{e}^{3x} dx.$

IV. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертеж области.

1. $3x^2-4y=0, \quad 2x-4y+1=0.$
2. $3x^2+4y=0, \quad 2x-4y-1=0.$
3. $2x+3y^2=0, \quad 2x+2y+1=0.$
4. $3x^2-4y=0, \quad 2x+4y-1=0.$
5. $3x^2+4y=0, \quad 2x+4y+1=0.$
6. $2x-3y^2=0, \quad 2x+2y-1=0.$
7. $3x^2-2y=0, \quad 2x-2y+1=0.$
8. $4x+3y^2=0, \quad 4x+2y+1=0.$
9. $3x^2-2y=0, \quad 2x+2y-1=0.$
10. $4x-3y^2=0, \quad 4x+2y-1=0.$
11. $y=x^3+3, \quad x=0, \quad y=x-1, \quad x=2.$
12. $y=x^3+2, \quad x=0, \quad y=x-2, \quad x=2.$
13. $y=x^3+1, \quad x=0, \quad y=x-3, \quad x=2.$
14. $y=x^3-1, \quad x=0, \quad y=x-5, \quad x=2.$
15. $y=x^3-2, \quad x=0, \quad y=x-6, \quad x=2.$
16. $y=x^3+3, \quad x=0, \quad y=x+7, \quad x=-2.$
17. $y=x^3+2, \quad x=0, \quad y=x+6, \quad x=-2.$
18. $y=x^3+1, \quad x=0, \quad y=x+5, \quad x=-2.$
19. $y=x^3-1, \quad x=0, \quad y=x+3, \quad x=-2.$
20. $y=x^3-2, \quad x=0, \quad y=x+2, \quad x=-2.$
21. $y=-x^2$, $x+y+2=0$;
22. $y=\frac{16}{x^2}$, $y=17-x^2$ (I четверть);
23. $y^2=4x^3$, $y=2x^2$;
24. $xy=20$, $x^2+y^2=41$ (I четверть);

25. $x=\sqrt{y}$, $x=0$, $y=4$;

26. $y=-x^2$, $y=x-2$, $y=0$;

27. $y=x^2-2$, $y=x$;

28. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$;

29. $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$, $y=4$ (I четверть);

30. $y=\ln x$, $x=0$, $y=0$, $y=1$.

V. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой L.

1. $x^2-y=0,\quad x=-1,\quad y=0.$

2. $x^2+y=0,\quad x=0,\quad y=-1.$

3. $x^2+y=0,\quad x=1,\quad y=0.$

4. $x^2-y=0,\quad x=0,\quad y=1.$

5. $x^2-y=0,\quad x=1,\quad y=0.$

6. $x-y^2=0,\quad x=1,\quad y=0.$

7. $x-y^2=0,\quad x=0,\quad y=-1.$

8. $x+y^2=0,\quad x=-1,\quad y=0.$

9. $x-y^2=0,\quad x=0,\quad y=1.$

10. $x+y^2=0,\quad x=0,\quad y=1.$

11. $y=-4x^3,\quad x=0,\quad y=4.$

12. $y=-4x^3,\quad x=1,\quad y=0.$

13. $y=4x^3,\quad x=0,\quad y=4.$

14. $y=4x^3,\quad x=1,\quad y=0.$

15. $y=1+8x^3,\quad x=0,\quad y=9.$

16. $y=4x^3,\quad x=0,\quad y=-4.$

17. $y=-4x^3,\quad x=-1,\quad y=0.$

18. $y=-4x^3,\quad x=0,\quad y=-4.$

19. $y=4x^3,\quad x=-1,\quad y=0.$

20. $y=1+8x^3,\quad x=-\frac{1}{2},\quad y=1.$

21. $y^2=(x-1)^3$, $x=2$.

22. $y=\frac{64}{x^2+16}$, $x^2=8y$.

23. $y^2=x$, $x^2=y$.

24. $y=\sqrt{xe^x}$, $x=1$, $y=0$.

25. $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{x^3}{8}$.

26. $y=\frac{1}{x^2+16}, x^2=4y$.

27. $y=e^x,\quad x=1,\quad x=2,\quad y=0$.

28. $y=1+x^3,\quad x=-1,\quad y=1.$

29. $y=-4x^3,\quad x=-1,\quad y=0.$

30. $y=1-8x^3,\quad x=-\frac{1}{2},\quad y=0.$

VI. Вычислить длины дуг кривых:

1. $y^2=x^3$ от $x=0$ до $x=1$ ($y\ge 0$);

2. $x=\cos^5 t$, $y=\sin^5 t$ от $t_1=0$ до $t_2=\frac{\pi}{2}$;

3. $\rho=\sin^3\frac{\theta}{3}$ от $\theta_1=0$ до $\theta_2=\frac{\pi}{2}$;

4. $y=\ln\sin x$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{\pi}{2}$;

5. $y=\frac{2}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$ между точками пересечения с осью Ox;

6. $x=\frac{t^3}{3}-t$, $y=t^2+2$ от $t_1=0$ до $t_2=3$;

7. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ от $t_1=0$ до $t_2=\ln\pi$;

8. $x=8\sin t+6\cos t$, $y=6\sin t-8\cos t$ от $t_1=0$ до $t_2=\frac{\pi}{2}$;

9. $\rho=\theta^2$ от $\theta_1=0$ до $\theta_2=\pi$;

10. $\rho=a\cos^3\frac{\theta}{3}$ от $\theta_1=0$ до $\theta_2=\frac{\pi}{2}$;

11. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$ от $x=1$ до $x=2$;

12. $y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$ от $x=0$ до $x=\frac{1}{4}$;

13. $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,\quad y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$;

14. $\rho=5e^{\frac{5\theta}{12}}$ от $\theta_1=0$ до $\theta_2=\frac{\pi}{3}$;

15. $\rho=3(1+\sin\theta)$ от $\theta_1=-\frac{\pi}{6}$ до $\theta_2=0$;

16. $y=\ln x$ от $x=\sqrt{3}$ до $x=\sqrt{15}$;

17. $x=3(t-\sin t),\quad y=3(1-\cos t)$ от $t=0$ до $t=\pi$;

18. $\rho=3e^{\frac{3\theta}{4}}$ от $\theta_1=0$ до $\theta_2=\frac{\pi}{3}$;

19. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$ от $x=\sqrt{3}$ до $x=\sqrt{8}$;

20. $x=3(2\cos t-\cos 2t),\quad y=3(2\sin t-\sin 2t)$ от $t=0$ до $t=2\pi$;

21. $\rho=3e^{\frac{3\theta}{4}}$ от $\theta_1=-\frac{\pi}{2}$ до $\theta_2=\frac{\pi}{2}$;

22. $y=\ln\frac{5}{2}x$ от $x=\sqrt{3}$ до $x=\sqrt{8}$;

23. $x=4(\cos t+t\sin t),\quad y=(4\sin t-t\cos t)$ от $t=0$ до $t=2\pi$;

24. $\rho=2e^{\frac{4\theta}{3}}$ от $\theta_1=-\frac{\pi}{3}$ до $\theta_2=\frac{\pi}{2}$;

25. $y=-\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$;

26. $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,\quad y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$ от $t=0$ до $t=\pi$;

27. $\rho=\sqrt{2}e^{\theta}$ от $\theta_1=-\frac{\pi}{2}$ до $\theta_2=\frac{\pi}{2}$;

28. $y=\ln(x^2-1)$ от $x=2$ до $x=3$;

29. $x=10\cos^3 t,\quad y=10\sin^3 t$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$;

30. $\rho=5e^{\frac{5\theta}{12}}$ от $\theta_1=-\frac{\pi}{2}$ до $\theta_2=\frac{\pi}{2}$.

Тема 6. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные теоретические сведения

1. *Функции двух переменных. Основные понятия*

Пусть задано множество D упорядоченных чисел (x, y). Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x, y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in R$, называется ***функцией двух переменных***, определенной на множестве D со значениями в R, и записывается в виде $z = f(x, y)$ или $f : D \to R$. При этом x и y называются *независимыми переменными (аргументами)*, а z – *зависимой переменной (функцией)*.

Множество $D = D(f)$ называется *областью определения* функции. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется *областью изменения* этой функции, обозначается $E(f)$ или E.

Примером функции двух переменных может служить площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y; $S=xy$. Областью определения этой функции является множество $\{(x; y) \mid x > 0, y > 0\}$.

Функцию $x = f(x; y)$, где $(x; y) \in D$ можно рассматривать как функцию точки $M(x; y)$ координатной плоскости Oxy. В частности, областью определения может быть вся плоскость или её часть, ограниченная некоторыми линиями.

Линию, ограничивающую область, называют *границей области*. Точки области, не лежащие на границе, называются *внутренними*. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется *открытой*. Область с присоединенной к ней границей, называется *замкнутой*, обозначается $\overline{D}$. Примером замкнутой области является круг с окружностью.

Функция двух независимых переменных допускает геометрическое истолкование. Каждой точке $M_0(x_0; y_0)$ области D в системе координат $Oxyz$ соответствует точка $M(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0; y_0)$ – *аппликата* точки M. Совокупность всех таких точек представляет собой некоторую поверхность, которая и будет геометрически изображать данную функцию $z = f(x; y)$.

2. *Предел функции*

Для функции двух (и большего числа) переменных вводится понятие предела функции и непрерывности, аналогично случаю функции одной переменной.

Введем понятие окрестности точки. Множество всех точек $M(x; y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x - x_o)^2 - (y - y_0)^2} < \delta$, называется δ-*окрестностью точки* $M_0(x_0;y_0)$. Иными словами, δ-окрестность точки M_0 – это все внутренние точки круга с центром M_0 и радиусом δ.

Пусть функция $z=f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число *A* называется ***пределом функции*** $z=f(x;y)$ при $x\to x_0$ и $y\to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x;y)\ \to M_0(x_0;y_0)$), если для любого $\varepsilon<0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\neq x_0$ и $y\neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_o)^2-(y-y_0)^2}<\delta$ выполняется неравенство $|f(x;y)-A|<\varepsilon$.

Обозначение:

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$$

или

$$A=\lim_{M\to M_0} f(M)$$

3. *Непрерывность функции двух переменных*

Функция $z=f(x;y)$ (или $f(M)$) называется *непрерывной в точке* $M_0(x_{0;}y_0)$, если она:

а) определена в этой точке и некоторой её окрестности,

б) имеет предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$,

в) этот предел равен значению функции z в точке M_0, т.е.

$\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=f(x_0;y_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва $z=f(x;y)$ могут образовывать целые *линии разрыва*. Так, функция $z=\dfrac{2}{y-x}$ имеет линию разрыва $y=x$.

Пример 1. Найти область определения функции $u=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

Решение. Функция *u* принимает действительные значения при условии $a^2-x^2-y^2\geq 0$, т.е. $x^2+y^2\leq a^2$. Областью определения этой функции является круг радиусом *a* с центром в начале координат, включая граничную окружность.

Пример 2. Найти область определения функции $u = \arcsin(x/y^2)$.

Решение. Эта функция определена, если $y \neq 0$ и $-1 \le x/y^2 \le 1$, т.е. $-y^2 \le x \le y^2$. Областью определения функции является часть плоскости, заключенная между двумя параболами $y^2 = x$ и $y^2 = -x$, за исключением точки $O\ (0;\ 0)$.

Пример 3. Найти область определения функции $u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$.

Решение. Данная функция зависит от трех переменных и принимает действительные значения при $2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6 > 0$, т.е. $x^2/1 + y^2/2 - z^2/3 < -1$. Областью определения функции является часть пространства, заключенная внутри полостей двуполостного гиперболоида.

4. *Производные и дифференциалы функции нескольких переменных. Частные производные первого порядка и их геометрическое истолкование*

Пусть задана функция $z = f(x;y)$. Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется *частным приращением* z по x и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x;y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x;y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x;y).$$

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x; y) - f(x;y)}{\Delta x}$, то он называется *частной производной* функции $z = f(x;y)$ в точке $M(x;y)$ по переменной x и обозначается одним из символов: $z'_{x'}, \dfrac{\partial z}{\partial x}, f'_{x'}\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Частные производные по x в точке $M_0(x_{0;} y_0)$ обычно обозначают символами $f'_x(x_0; y_0),\ f'_x\ \big|_{M_0}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x;y)$ по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функция нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функция одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных незавимых переменных. Поэтому частные производные функции $f(x;y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

5. *Дифференцируемость и полный дифференциал функции*

Пусть функция $z=f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x;y)$. Составим полное приращение функции в точке M:

$$\Delta z=f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x;y).$$

Функция $z=f(x;y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M(x;y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\cdot Dx+\beta\cdot Dy$, где $\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)\to 0$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)\to 0$ при $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$. Сумма первых двух слагаемых в равенстве представляет собой *главную часть приращения функции.* Главная часть приращение функции $z=f(x;y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется *полным дифференциалом* этой функции и обозначается символом dz:

$$dz=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y.$$

Выражения $A\cdot\Delta x$ и $B\cdot\Delta y$ называют *частными дифференциалами.* Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x=dx$ и $\Delta y=dy$. Поэтому равенство можно переписать в виде $dz=A\cdot dx+B\cdot dy$.

Формула для вычисления полного дифференциала имеет вид

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$$

или

$$dz=d_xz+d_yz,$$

где $d_xz=\dfrac{dz}{dx}dx,d_yz=\dfrac{dz}{dy}dy$ – частные дифференциалы функции $z=f(x;y)$.

Отметим, что для функции $y=f(x)$ одной переменной существование производной $f'(x)$ в точке является необходимым и достаточным условием ее дифференцируемости в этой точке.

Чтобы функция $z=f(x;y)$ была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в ней частные производные, и достаточно, чтобы она имела в точке непрерывные частные производные.

6. *Дифференцирование сложных функций*

Пусть $z=f(x,y)$, где $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и функции $f(x,y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы. Тогда производная сложной функции $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Если $z = f(x, y)$, где $y = \varphi(x)$, то полная производная от z по x находится по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Если $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = (\xi, \eta)$, то частные производные выражаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

Пример 4. Задана функция $z = e^{x^2} + y^2$, где $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. Найти $\dfrac{dz}{dt}$.

Решение. Имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x(-a\sin t) + e^{x^2+y^2} \cdot 2y(a\cos t) =$$

$$= 2ae^{x^2+y^2}(y\cos t - x\sin t).$$

Выразив x и y через t, получим

$$\frac{dz}{dt} = 2ae^{a^2}\left(a\sin t\cos t - a\cos t\sin t\right) = 0.$$

7. *Производная в данном направлении. Градиент функции*

Производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$ в направлении вектора $l = \overline{MM}_1$ называется предел:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{|MM_1| \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{\left|MM_1\right|} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho}, \text{ где } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема, то производная в данном направлении вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

где α – угол, образованный вектором l с осью Ox.

В случае функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ производная в данном направлении определяется аналогично. Соответствующая формула имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора l.

Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$ называется вектор с началом в точке M, имеющий своими координатами частные производные функции z:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Градиент функции и производная в направлении вектора l связаны формулой

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \text{пр}_l \, \text{grad}\, z.$$

Градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке. Производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\text{наиб}} = |\text{grad}\, z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

В случае функции $u = f\,(x, y, z)$ градиент функции

$$\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Пример 5. Найти производную функции $z=x^2-y^2$ в точке M (1; 1) в направлении вектора l, составляющем угол $\alpha = 60^0$ с положительным направлением оси Ox.

Решение. Найдем значения частных производных в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2, \ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = -2.$$

Так как $\cos\alpha = \cos 60^0 = 1/2$, $\sin\alpha = \sin 60^0 = \sqrt{3}/2$, то

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3} \approx -0{,}7\,.$$

Пример 6. Найти производную функцию $u = xy^2z^3$ в точке M (3;2;1) в направлении вектора $\overline{M}\overline{N}$, где n (5;4;2).

Решение. Найдем вектор $\overline{M}\overline{N}$ и его направляющие косинусы: $\overline{M}\overline{N} = l = (5-3)i + (4-2)\,j + (2-1)k = 2i + 2\,j + k$; $\cos\alpha = 2/\sqrt{2^2+2^2+1^2} = 2/3$; $\cos\beta = 2/3$; $\cos\gamma = 1/3$. Вычислим значения частных производных в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3; \ \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2; \ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 4; \ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 12; \ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 36.$$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial l} = 4\cdot\frac{2}{3} + 12\cdot\frac{2}{3} + 36\cdot\frac{1}{3} = 22\frac{2}{3.}$

Пример 7. Найти производную функции $z = \ln\,(x^2+y^2)$ в точке M (3;4) в направлении градиента функции z.

Решение. Здесь вектор l совпадает с градиентом функции $z = \ln\,(x^2 + y^2)$ в точке M (3;4),

$$\text{grad}\, z = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)_M \vec{i} + \left(\frac{2y}{x^{2+y^2}}\right)_M \vec{j} = \frac{6}{25}\vec{i} + \frac{8}{25}\vec{j}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\left|\text{grad } z\right|=\sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2+\left(\frac{8}{25}\right)^2}=\frac{2}{5}.$$

Пример 8. Найти величину и направление градиента функции u = tg$x$ –x+3 sin$y$ – sin^3y +z+ctg$z$ в точке M (π/4; π/3; π/2).

Решение. Найдем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sec^2 x-1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3\ \ \cos y-3\sin^2 y\ \ \cos y.\ \frac{\partial u}{\partial z}=1-\cos ec^2 z$$

и вычислим их значения в точке M (π/4; π/3; π/2):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=\ 2-1=1,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=3\cdot\frac{1}{2}-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8},\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=1-1=0.$$

Следовательно,

$$\left(\text{grad } u\right)_M=\vec{i}+\frac{3}{8}\vec{j};\ \left|\text{grad } u\right|_M=\sqrt{1^2+\left(3/8\right)^2}=\sqrt{73}/8;$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{73}/8}=\frac{8}{\sqrt{73}};\ \cos\beta=\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{73}}.$$

8. *Дифференцирование неявной функции*

Функция $z=f(x;y)$ называется *неявной*, если она задается уравнением

$$F\left(x;y;z\right)=0,$$

неразрешенным относительно z. Для этого, подставив в уравнение вместо z функцию $f\left(x;y\right)$, получим тождество $F\left(x;y;f(x;y\right)\equiv 0$.Частные производные по x и по y функции, тождественно равной нулю, также равны нулю:

$$\frac{d}{dx}F\left(x;y;f\left(x;y\right)\right)=\frac{dF}{dx}=\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0\quad\left(y-\text{ считаем постоянным}\right),$$

$$\frac{d}{dy}F\left(x;y;f\left(x;y\right)\right)=\frac{dF}{dy}=\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}=0\quad(x-\text{считаем постоянным}),$$

откуда

$$\frac{dz}{dx}=\frac{F_x'}{F_z'}\text{ и }\frac{dz}{dy}=-\frac{F_y'}{F_z'},\left(F_Z'\neq 0\right).$$

9. *Касательная плоскость и нормаль к поверхности*

Касательной плоскостью к поверхности в точке M называется плоскость, проходящая через точку M поверхности, если угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку M и любую точку M_1 поверхности стремится к нулю, когда M_1 стремится к M.

Касательная плоскость к поверхности в точке M содержит касательные ко всем кривым, проведенным на поверхности через точку M.

Нормалью к поверхности в точке M называется прямая, проходящая через M перпендикулярно касательной плоскости в этой точке.

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ частные производные $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M$ конечны и не обращаются в нуль одновременно, то *уравнение касательной плоскости* к поверхности в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ записываются в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z - z_0) = 0,$$

а *уравнения нормали* к поверхности в этой же точке – в виде

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$$

Если же уравнение поверхности задано явным образом: $z = f(x, y)$, где частные производные $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M$ *и* $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M$ в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ конечны (и могут быть равны нулю одновременно), то уравнение касательной плоскости в точке M записывается в виде

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M (y - y_0),$$

а уравнения нормали – в виде

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Равенство нулю, например $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M$, означает, что касательная плоскость параллельна оси Ox, а нормаль лежит в плоскости $x = x_0$.

Пример 9. Дана поверхность $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$. Составить уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности в точке $M(1; 1; 1)$.

Решение.

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$ и их значения в точке $M(1; 1; 1)$: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = -1$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2$.

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1), \text{ или } x - 2y + z = 0.$$

Уравнения нормали:

$$(x - 1)/(-1) = (y - 1)/2 = (z - 1)/(-1).$$

10. *Экстремум функции двух независимых переменных*

Функция $z = f(x, y)$ имеет *максимум (минимум)* в точке M_0 (x_0; y_0), если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке M (x, y) некоторой окрестности точки M_0, т.е. $f(x_0,y_0) > f(x, y)$ [соответственно $f(x_0,y_0) < f(x, y)$] для всех точек M (x; y), удовлетворяющих условию $|M_0M| < \delta$, где δ – достаточно малое положительное число.

Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом*. Точка M_0, в которой функция имеет экстремум, называется *точкой экстремума*.

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке M_0 (x_0; y_0), то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т.е.

$$\frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} = 0$$

(необходимые условия экстремума).

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются *стационарными точками*. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пусть M_0 (x_0; y_0) – стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x \, \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y^2}$$

и составим *дискриминант* $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

если $\Delta > 0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, а именно максимум при $A < 0$ (или $C < 0$) и минимум при $A > 0$ (или $C > 0$);

если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет (достаточные условия наличия или отсутствия экстремума);

если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

Пример 10. Найти экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Решение. Находим частные производные первого порядка: $\frac{\partial z}{\partial x} 2x + y - 3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6$. Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0, \\ x+2y-6=0, \end{cases}$$

откуда $x = 0$, $y = 3$; M (0;3).

Находим значения частных производных второго порядка в точке M:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}=1,$$

и составляем дискриминант $\Delta = AC - B^2 = 2{\cdot}2 - 1 = 3 > 0$; $A > 0$. Следовательно, в точке M (0;3) заданная функция имеет минимум. Значение функции в этой точке $z_{\min} = -9$.

Пример 11. Найти экстремум функции $z=\frac{1}{2}xy+\left(47-x-y\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$.

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}.$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} -\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3}=0, \\ -\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 8x+y=188, \\ x+6y=141. \end{cases}$$

Отсюда $x = 21$, $y = 20$; стационарная точка M (21;20).

Найдем значения вторых производных в точке M:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}=-\frac{1}{12}.$$

Тогда $\Delta = AC - B^2 = (-2/3)(-1/2) - (-1/12)^2 = 1/3 - 1/144 > 0$. Так как $A < 0$, то в точке M (21; 20) функция имеет максимум: $z_{\max} = 282$.

11. *Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области*

Рассмотрим задачу, когда экстремум функций нескольких переменных ищется не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющем некоторому условию.

Рассмотрим функцию $z=f\left(x,y\right)$, аргументы x и y которой удовлетворяют условию $g(x,y)=C$, называемому *уравнением связи.*

Точка $\left(x_0,y_0\right)$ называется точкой *условного максимума (минимума),* если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $\left(x,y\right)$ из этой окрестности, удовлетворяющих условию $g(x,y)=C$, выполняется неравенство

$$f\left(x_0,y_0\right)\geq f\left(x,y\right)\ \left(f(x_0,y_0\right)\leq f\left(x,y\right)).$$

На рис. 25 изображена точка условного максимума $\left(x_0,y_0\right)$. Очевидно, что она не является точкой безусловного экстремума функции $z=f\left(x,y\right)$ (на рис. 1 это точка $\left(x_1,y_1\right)$).

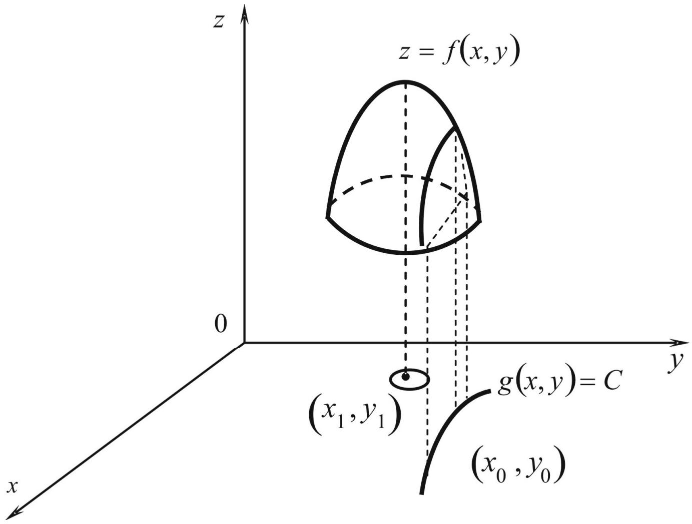


Рис. 25

Наиболее простым способом нахождения условного экстремума функции двух переменных является сведение задачи к отысканию экстремума функции одной переменной. Допустим уравнение связи $g(x,y)=C$ удалось разрешить относительно одной из переменных, например, выразить y через $x: y=\varphi(x)$. Подставив полученное выражение в функцию двух переменных, получим $z=f\left(x,y\right)=f\left(x,\varphi\left(x\right)\right)$, т.е. функцию одной переменной. Ее экстремум и будет условным экстремумом функции $z=f(x,y)$.

Пример 12. Найти точки максимума и минимума функции $z=x^2+2y^2$ при условии $3x+2y=11$.

Решение. Выразим из уравнения $3x+2y=11$ переменную y через переменную x и подставим полученное выражение $y=\dfrac{11-3x}{2}$ в функцию z.

Получим $z=x^2+2\left(\dfrac{11-3x}{2}\right)^2$ или $z=\dfrac{11}{2}\left(x^2-6x+11\right)$. Эта функция имеет единственный минимум при $x_0=3$. Соответствующее значение функции $y_0=\dfrac{11-3x_0}{2}=1$. Таким образом, $(3;1)$ – точка условного экстремума (минимума).

В рассмотренном примере уравнение связи $g(x,y)=C$ оказалось линейным, поэтому его легко удалось разрешить относительно одной из переменных. Однако в более сложных случаях сделать это не удается.

Для отыскания условного экстремума в общем случае используется *метод множителей Лагранжа.*

Рассмотрим функцию трех переменных $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\left[g(x,y)-C\right]$.

Эта функция называется *функцией Лагранжа,* а λ – *множителем Лагранжа*. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если точка (x_0,y_0) является точкой условного экстремума функции $z=f(x,y)$ при условии $g(x,y)=C$, то существует значение λ_0 такое, что точка (x_0,y_0,λ_0) является точкой экстремума функции $L(x,y,\lambda)$.

Таким образом, для нахождения условного экстремума функции $z=f(x,y)$ при условии $g(x,y)=C$ требуется найти решение системы

$$\begin{cases} L'_x=f'_x(x,y)+\lambda g'_x(x,y)=0, \\ L'_y=f'_y(x,y)+\lambda g'_y(x,y)=0, \\ \quad L'_\lambda=g(x,y)-C=0. \end{cases}$$

Последнее из этих уравнений совпадает с уравнением связи. Первые два уравнения системы можно переписать в виде

$$\operatorname{grad} f=-\lambda \operatorname{grad} g,$$

т.е. в точке условного экстремума градиенты функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ коллинеарны.

На рис. 26 показан геометрический смысл условий Лагранжа. Линия $g(x,y)=C$ пунктирная, линии уровня $g(x,y)=Q$ функции $z=f(x,y)$ сплошные.

Из рис. 26 следует, что в точке условного экстремума линия уровня функции $z=f(x,y)$ касается линии $g(x,y)=C$.

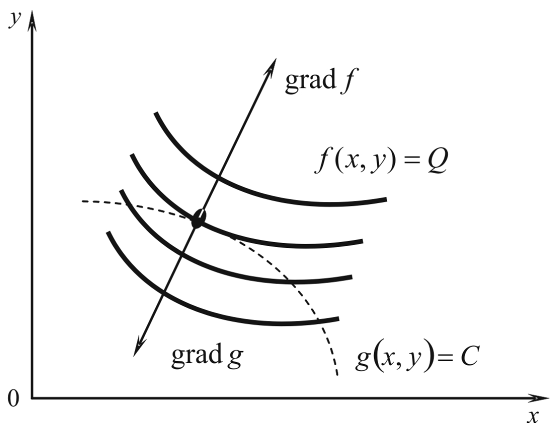


Рис. 26

Пример 13. Найти точки экстремума функции $z = x^2 + y^2$ при условии $3x + 2y = 11$, используя метод множителей Лагранжа.

Решение. Составим функцию Лагранжа $L = x^2 + 2y^2 + \lambda(3x + 2y - 11)$. Приравнивая к нулю ее частные производные, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3\lambda = 0, \\ 4y + 2\lambda = 0, \\ 3x + 2y - 11 = 0. \end{cases}$$

Ее единственное решение $(x = 3, y = 1, \lambda = -2)$. Таким образом, точкой условного экстремума может быть только точка $(3;1)$. Нетрудно убедиться в том, что в этой точке функция $z = f(x, y)$ имеет условный минимум.

Пример 14. Найти экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x + 3y - 5 = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию Лагранжа $u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$. Имеем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda.$

Из системы уравнений (необходимые условия экстремума)

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

находим $\lambda = -5/12$, $x = 5/4$, $y = 5/6$. Нетрудно видеть, что в точке $(5/4;\ 5/6)$ функция $z = xy$ достигает наибольшего значения $z_{max} = 25/24$.

В случае, если число переменных более двух, может рассматриваться и несколько уравнений связи. Соответственно в этом случае будет и несколько множителей Лагранжа.

Отметим, что во многих задачах критическая точка функции Лагранжа оказывается единственной и соответствует не только локальному, но и глобальному условному минимуму или максимуму.

Задача нахождения условного экстремума используется при решении таких экономических задач, как нахождение оптимального распределения ресурсов, выбор оптимального портфеля ценных бумаг и др.

Для того чтобы найти *наибольшее* и *наименьшее* значения функции в замкнутой области, надо:

1) найти стационарные точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;

3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 15. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

Решение. Пусть x и y – катеты треугольника, а z – гипотенуза. Так как $z^2 = x^2 + y^2$, то задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $xy/2 = S$, т.е. $xy - 2S = 0$. Рассмотрим функцию $u = x^2 + y^2 + \lambda\,(xy - 2S)$ и найдем ее частные производные

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + \lambda y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y + \lambda x$. Так как $x > 0$, $y > 0$, то из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0, \\ 2y + \lambda x = 0, \\ xy/2 = S \end{cases}$$ получаем решение $\lambda = -2$, $x = y = \sqrt{2S}$.

Таким образом, гипотенуза имеет наименьшее значение, если катеты треугольника равны между собой.

12. *Функции нескольких переменных в экономической теории*

Рассмотрим некоторые приложения функций нескольких переменных в экономической теории.

12.1. Значительная часть экономических механизмов иллюстрируется на рисунках, изображающих линии уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$. Например, линии уровня производственной функции называются *изоквантами*.

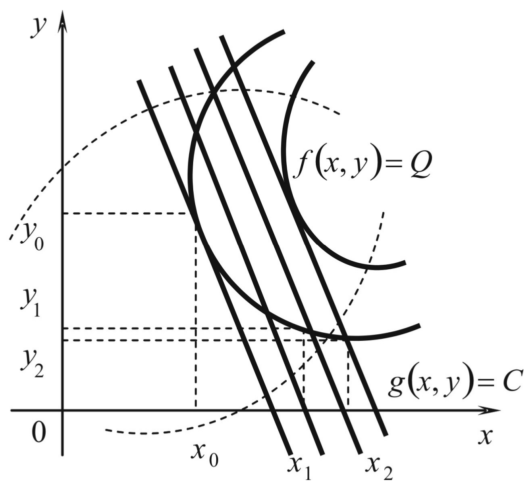


Рис. 27

Пусть x и y – два различных фактора производства, а функция $z = f(x, y)$ характеризует выпуск продукции, который позволяют значения факторов x и y. На рис. 27 линии уровня $f(x, y) = Q$ изображены сплошными линиями, а штриховкой выделена так называемая экономическая область, которая характеризуется тем, что высекаемые ею части изоквант представляют собой графики убывающих функций, т.е. увеличение количества одного фактора позволяет уменьшить количество другого, не меняя размера выпуска. Иными словами, экономическая область – это множество значений факторов, допускающих замещение одного из них другим. Очевидно, что все «разумные» значения x и y принадлежат экономической области.

Изокванты позволяют геометрически иллюстрировать решение *задачи об оптимальном распределении ресурсов*. Пусть $z = f(x, y)$ – функция издержек, характеризующая затраты, необходимые для обеспечения значений ресурсов x и y (часто можно считать, что функция издержек линейная: $g(x, y) = p_x x + p_y y$, где p_x и p_y – «цены» факторов x и y). Комбинации линий уровня функции $f(x)$ и $g(x)$ позволяют делать выводы о предпочтительности того или иного значения факторов x и y. Оптимальными же значениями факторов будут значения (x_0, y_0) – координаты точки касания линии уровня функции выпуска и функции издержек.

Линии уровня функции полезности (они называются *кривыми безразличия*) также позволяют рассматривать вопросы замещения одного товара другим и иллюстрировать решение задачи об оптимальном потреблении (потребительского выбора) (рис. 28).

Линия уровня затрат на приобретение товаров x, y изображены на рис. 4 пунктиром. Оптимальное потребление обеспечивается значением (x_0, y_0) – координатами точки касания кривой безразличия и линии уровня затрат. В этой точке полезность достигается наиболее экономичным образом.

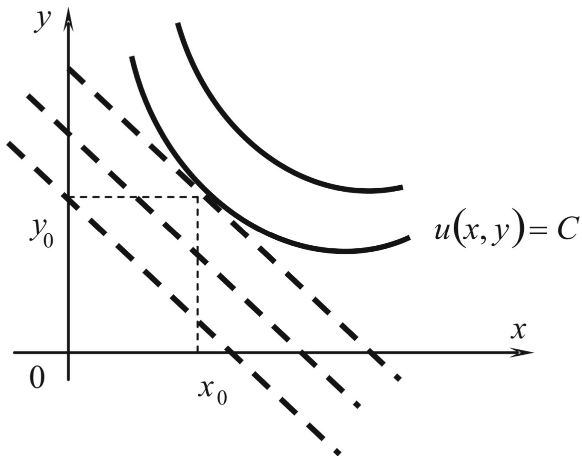


Рис. 28

12.2. Другой пример кривых безразличия возникает *в теории инвестиций*.

Портфель ценных бумаг (*под портфелем* мы здесь будем понимать совокупность определенных ценных бумаг в определенных количествах) характеризуется двумя основными параметрами – ожидаемой доходностью r и риском σ (точное определение величин здесь не может быть приведено, так как оно использует понятия теории вероятностей и математической статистики). Каждому портфелю можно поставить в соответствие точку на координатной плоскости (σ, r), и тогда множество всех возможных портфелей представляет некоторую область D (рис. 29).

Очевидно, что при равных доходностях инвестор предпочтет портфель с меньшим риском. Таким образом, кривые безразличия – линии уровня функции предпочтения $U = U(\sigma, r)$ – выпуклы вниз. Точка T, в которой линия безразличия касается области D, соответствует наиболее предпочтительному для данного инвестора портфелю. Соответствующая теория была предложена американским экономистом Харри Марковицем в 1952 г. и с тех пор получила широкое развитие в теории инвестиций.

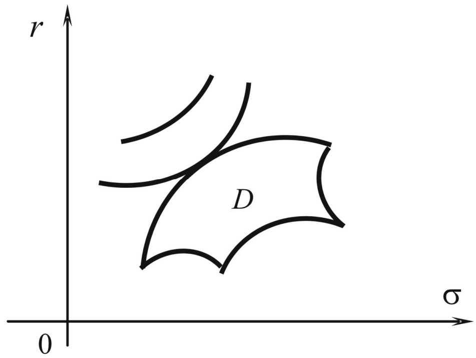


Рис. 29

12.3. Понятие частной производной также находит применение в экономической теории. Введем понятие *частной эластичности функции* нескольких переменных $z = (x_1, x_2, ..., x_n)$ относительно переменной x_i:

$$E_{x_i}(z) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \left(\frac{\Delta_{xi} z}{z} : \frac{\Delta xi}{xi} \right) = \frac{x_i}{z} \cdot z'_{xi}.$$

Так, например, в производственной функции Кобба – Дугласа $z = b_0 x^{b_1} y^{b_2}$, как нетрудно убедиться, $E_x(z) = b_1$, $E_y(z) = b_2$, т.е. показатели b_1 и b_2 приближенно показывают, на сколько процентов изменится выпуск продукции при изменении только затрат труда x или только объема производственных фондов y на 1%.

Рассмотрим частные производные u'_x, u'_y – функции полезности. Они называются *предельными полезностями* Mu_x, Mu_y. Если измерять количество товара в стоимостном выражении, то предельные полезности можно рассматривать как функции спроса на соответствующий товар. Найдем предельные полезности для функции постоянной эластичности

$$u(x,y)=\frac{a_1}{1-b_1}x^{1-b_1}+\frac{a_2}{1-b_2}y^{1-b_2}.$$

Имеем $Mu_x=a_1x^{-b_1}, Mu_y=a_2x^{-b_2}$, т.е. функции спроса с ростом стоимости каждого товара являются убывающими, а параметры b_1, b_2 представляют частные эластичности спроса на эти товары.

Если рассматривать спрос q как функцию нескольких переменных, например двух – цены товара p и доходов потребителей r, т.е. $q=f(p,r)$, то можно говорить о *частных эластичностях спроса от цены* $E_p(q)=\frac{p}{p}q'_p$ *и спроса от доходов* $E_r(q)=\frac{r}{p}q'_r$.

Например, можно установить, что $E_r(q)>0$ для качественных товаров и $E_r(q)<0$ для низкосортных, так как с ростом доходов спрос на качественные товары увеличивается, а на низкосортные – уменьшается.

Если при исследовании спроса на данный товар рассматривать влияние другого, *альтернативного* товара ценой p_i, т.е. рассматривать спрос как функцию трех переменных $q=f(p,p_1,r)$, то можно ввести *перекрестный коэффициент эластичности спроса*, определяемый по формуле $E_{p_1}(q)=\frac{p_1}{q}q'_{p_1}$ и показывающий приближенно процентное изменение спроса на данный товар при изменении цены альтернативного товара на 1%.

Очевидно, что *для взаимозаменяемых товаров* $E_{p_1}(q)>0$, так как увеличение цены одного товара приводит к увеличению спроса на другой. В то же время *для взаимодополняющих товаров* $E_{p_1}(q)<0$, т.к. в этом случае рост цены любого товара приводит к снижению спроса.

Рассмотрим еще один коэффициент эластичности, характеризующий производственную функцию нескольких переменных и имеющий важное значение для экономической теории.

Пусть $z=f(x,y)$ – производственная функция и $MP(x)=f'_x(x,y)$, $MP(y)=f'_y(x,y)$ – предельные продукты, соответствующие затратам ресурсов x и y. *Коэффициентом эластичности замещения* называется величина

$$\sigma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta \ln \frac{x}{y}}{\Delta \ln \frac{MP(x)}{MP(y)}} = -\frac{d \ln \frac{x}{y}}{d \ln \frac{MP(x)}{MP(y)}} .$$

Так как при малых приращениях аргумента Δt имеет место приближенное равенство $\Delta \ln t = \frac{\Delta t}{t}$, приращение логарифма переменной величины можно рассматривать как относительное приращение самой величины. Таким образом, величина, обратная коэффициенту *эластичности замещения, показывает приближенно, на сколько процентов изменится отношение предельных продуктов* $MP(x)/MP(y)$ *при изменении отношения затрат ресурсов* (x/y) *на 1%.*

В общем случае коэффициент эластичности замещения есть функция от двух переменных. Рассмотрим ее выражение в точках изокванты. Так как вдоль изокванты значение функции $z = f(x, y)$ постоянно, то полный дифференциал этой функции $dz = f'_x dx + f'_y dy$ вдоль изокванты равен нулю, т.е. $MP(x)dx + MP(y)dy = 0$. Отсюда имеем $-\frac{dy}{dx} = \frac{MP(x)}{MP(y)}$, т.е. при сохранении объема выпуска z величина $\left(-\frac{dy}{dx}\right)$, называемая *предельной нормой замещения ресурса* x *ресурсом* y, равна отношению их предельных продуктов. С учетом последнего равенства можно записать, что

$$\frac{1}{\sigma_{xy}} = \frac{d \ln \left(-\frac{dy}{dx}\right)}{d \ln \frac{x}{y}}.$$

Очевидно, что $\frac{dy}{dx}$ – тангенс угла α наклона касательной к изокванте в точке $M(x, y)$, $\frac{y}{x}$ – тангенс угла наклона радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки $M(x, y)$ (рис. 30).

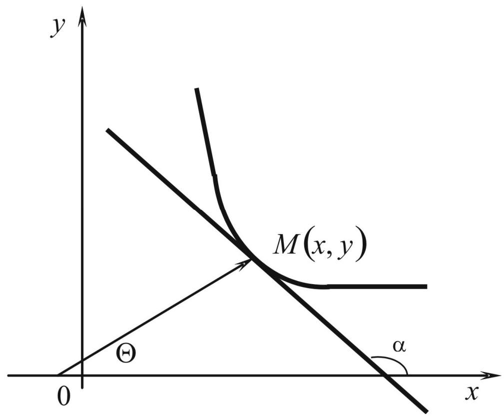


Рис. 30

Таким образом, величина $\frac{1}{\sigma_{xy}}$ характеризует *относительное изменение угла наклона касательной к изокванте при изменении угла наклона ее радиуса-вектора, т.е. кривизну изокванты.*

Если рассматривать $\operatorname{tg}\alpha$ как функцию $\operatorname{tg}\Theta$, то $\dfrac{1}{\sigma_{xy}}$ есть коэффициент эластичности в обычном смысле.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение точечных множеств в N-мерном пространстве.
2. Дайте определение функции нескольких переменных.
3. Что называется областью определения функции нескольких переменных?
4. Дайте определение предела функции нескольких переменных.
5. Сформулируйте определение непрерывности функции нескольких переменных.
6. Сформулируйте определение производной функции нескольких переменных.
7. Сформулируйте определение дифференциала функции нескольких переменных.
8. Что называется частными производными функции нескольких переменных?
9. Дайте определение полного приращения и полного дифференциала функции нескольких переменных.
10. Что называется частными производными высших порядков.
11. Дайте определение производной по направлению.
12. Что называется градиентом функции?
13. Дайте определение экстремума функции нескольких переменных.
14. Сформулируйте необходимое и достаточное условия экстремума.
15. В чем заключается условный экстремум функции нескольких переменных.
16. В чем заключается метод множителей Лагранжа?

Контрольная работа №7 по теме «Функции нескольких переменных»

I. Дана функция $z = f(x, y)$. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}$.

1. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{1+x^2}$.

2. $z = e^{x+y}(x\cos y + y\sin x)$.

3. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$.

4. $z = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

6. $z = x^{\frac{1}{y}} + \sin y$.

7. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}.$

8. $z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}.$

9. $z=\sqrt[3]{5e^{x}+xy+y^{2}}.$

10. $z=x^{2}\ln(x+y).$

11. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+y^{2}}.$

12. $z=\operatorname{arcctg}\dfrac{y}{1+x^{2}}.$

13. $z=\cos(2x+e^{y})$.

14. $z=e^{x+e^{y}}$.

15. $z=\dfrac{1}{2}\ln(x^{2}+y^{2})$.

16. $z=x^{2}\cdot\ln(x+y)$.

17. $z=\ln\operatorname{tg}(x+y)$.

18. $z=xy+\sin(x+y)$.

19. $z=4x^{3}+3x^{2}y+3xy^{2}-y^{3}$.

20. $z=\sin x\cdot\sin y$.

21. $z=\cos\left(2y+e^{x}\right).$

22. $z=x\cdot e^{x^{2}+y^{2}}$.

23. $z=e^{xy}\sin\left(x-2\right).$

24. $z=e^{2x+y}\cos\left(x-y\right).$

25. $z=\dfrac{\sin\left(x-y\right)}{x}.$

26. $z=e^{x-y}\sin(x+3y).$

27. $z=e^{xy}+x^{2}y.$

28. $z=\operatorname{arcctg}(xy).$

29. $z=\ln\left(x+e^{-y}\right).$

30. $z=x\cdot e^{\frac{y}{x}}$.

II. Вычислить приближенно:

1. $\sqrt{3{,}98}\cdot(1{,}03)^{3{,}98}$.

2. $\sqrt[5]{(2{,}97)^{3}+(2{,}02)^{2}+1}$.

3. $\ln\left(\sqrt[5]{0{,}98}+\sqrt[4]{1{,}03}-1\right).$

4. $1{,}94^{2}\cdot e^{0{,}12}$

5. $\operatorname{arctg}\dfrac{(1{,}04)^{2}}{0{,}98}$.

6. $\sqrt[5]{(3{,}03)^{4}-(1{,}98)^{5}-17}$.

7. $\ln\left[(2{,}02)^{3}-3\cdot\sqrt[3]{0{,}98}-4\right].$

8. $\dfrac{10}{(4{,}98)^{3}-(5{,}03)^{2}}$.

9. $\ln\left(\sqrt[2]{4{,}02}-\sqrt[3]{0{,}97}\right).$

10. $\left(2-\sqrt{0{,}97}\right)^{3{,}02}$.

11. $\sqrt{3{,}98}\cdot(1{,}05)^{3{,}98}$.

12. $\sqrt{(4{,}03)^{2}+(2{,}95)^{2}}$.

13. $(1{,}02)^{3{,}02}\cdot(0{,}97)^{2}$.

14. $(2{,}68)^{\sin 0{,}05}$.

15. $(1{,}94)^{2}e^{0{,}12}$.

16. $\sqrt{(1{,}04)^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$.

17. $\sqrt{5e^{0{,}02}+(2{,}03)^{2}}$.

18. $\sqrt[5]{(1{,}02)^{2}+(0{,}05)^{2}}$.

19. $\ln(0{,}09^{3}+0{,}99^{3})$.

20. $(1{,}02)^{4{,}05}$.

21. $\sqrt{\ln 1{,}03+1{,}03^{1{,}98}}$.

22. $\sqrt{(2{,}02)^{3}-(1{,}96)^{2}}$.

23. $\sqrt[5]{0{,}98}+\sqrt[4]{1{,}03}$.

24. $\sqrt[4]{(2{,}97)^{2}+(2{,}02)^{2}+3}$.

25. $\left(3-\sqrt{3{,}97}\right)^{2{,}03}$.

26. $\sqrt{(4{,}05)^{2}+(2{,}93)^{2}}$.

27. $\ln\left(\sqrt[3]{8{,}03}-\sqrt[3]{0{,}97}\right).$

28. $\sqrt[5]{(3{,}03)^{4}-(1{,}98)^{5}-17}$.

29. $\ln\left(\sqrt[4]{0{,}97}-\sqrt[3]{1{,}03}+1\right).$

30. $\sqrt[4]{(2{,}95)^{2}+(2{,}03)^{2}+3}$.

III. Исследовать функцию $z = f(x, y)$ на экстремум:

1. $z=(x-1)^2+2y^2$.

2. $z=(x-1)^2-2y^2$.

3. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

4. $z=(x-y)^2+(y+1)^2$.

5. $z=2xy-3x^2-2y^2+10x$.

6. $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

7. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$.

8. $z=(x-y)^2+(y-1)^2$.

9. $z=x^2+2xy-12x+10y$.

10. $z=\frac{1}{3}x^3+x^2-y^2$.

11. $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

12. $z=2xy-3x^2-2y^2+10x$.

13. $z=(x-y)^2-(y-1)^2$.

14. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

15. $z=(x-1)^2-2y^2$.

16. $z=(x-1)^2+2y^2$.

17. $z=x^2+2xy-3y^2+1$.

18. $z=x^2+3y^2-x+18y-4$.

19. $z=x^2+xy+y^2-2x-3y$.

20. $z=-x^2-xy-y^2+x+y$.

21. $z=(x+1)^2+y^2$.

22. $z=2xy-2x^2-3y^2+10y$.

23. $z=2x^2+xy+y^2-x-2y.$

24. $z=-2x^2+(y-1)^2$.

25. $z=2x^2+(y-1)^2$.

26. $z=2xy+2x+4y$.

27. $z=2xy-4y-2x$.

28. $z=x^2+2xy-12x+10y.$

29. $z=x^2+2y^2-2xy+4y+4$.

30. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$.

IV. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

1. $z=x^2+xy$ в прямоугольнике $-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 3$.

2. $z=2x+y-xy$ в квадрате $0\le x\le 4,\ 0\le y\le 4$.

3. $z=x^2-2y^2+4$ в круге $x^2+y^2\le 1$.

4. $z=x^2-y^2$ в круге $x^2+y^2\le 1$.

5. $z=\frac{1}{2}x^2-xy$ в области, ограниченной параболой $y=\frac{x^2}{3}$ и прямой $y=3$.

6. $z=x^3+y^3-3xy$ в прямоугольнике $0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 3$.

7. $z=xy$ в области, ограниченной треугольником с вершинами в точках $O(0;0), B(2;0), C(0;3)$.

8. $z=xy-2x-y$ в прямоугольнике $0\le x\le 3,\ 0\le y\le 4$.

9. $z=4-2x^2-y^2$ в круге $x^2+y^2\le 1$.

10. $z=4x^2+9y^2-4x-6y+3$ в треугольнике, ограниченном прямыми: $x=0; y=0; x+y=1$.

11. $z=x^2-xy$ в области, ограниченной параболой $y=\frac{x^2}{3}$ и прямой $y=2.$

12. $z=x^3+y^3+2xy$ в прямоугольнике $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4$.

13. $z=x^2-2y^2+4$ в круге $x^2+y^2\le 1$.

14. $z=1+xy^2$ в прямоугольнике $0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2$.

15. $z = x^2 + xy$ в прямоугольнике $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3$.

16. $z = 2x + y - xy$ в квадрате $0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4$.

17. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в треугольнике с вершинами в точках $O(0;0), A(0;4), B(4;4)$.

18. $z = x^3 + 3y^2 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2;\quad 0 \le y \le 1$.

19. $z = x^3 - 2y^3 + 3xy - 5$ в квадрате $-1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$.

20. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в квадрате $0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1$.

21. $z = 2x - xy + y$ в квадрате $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

22. $z = \dfrac{1}{2}y^2 - xy$ в области, ограниченной параболой $x = \dfrac{y^2}{3}$, прямыми $y = 3$ и $x = 0$.

23. $z = y^2 - 2x^2 + 4$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

24. $z = x + 2y - xy$ в квадрате $0 \le x \le 4;\ 0 \le y \le 4$.

25. $z = y^2 + xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 3, -1 \le y \le 1$.

26. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0; y = 0; x + y = 3$.

27. $z = 4 - 2x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

28. $z = x^2 y$ в области, ограниченной параболой $y = 1 - x^2$ $O(0;0), B(2;0), C(0,3)$ и осью Ox.

29. $z = xy$ в области, ограниченной треугольником с вершинами в точках $O(0;0), B(2;0), C(0,3)$.

30. $z = xy - 2x - y$ в прямоугольнике $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4$.

V. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

1. $z = 2x^2 - 4y^2$ в точке $(2;1;4)$.

2. $z = xy$ в точке $(1;1;1)$.

3. $z = 8 - x^2 + y^2$ в точке $(3;2;3)$

4. $z = \dfrac{1}{2}(x^3 - 6xy + y^3)$ в точке $(2;2;-2)$.

5. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ в точке $(3;4;-7)$.

6. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке $(1;1;\dfrac{\pi}{4})$.

7. $z = x^2 + y^2 - 4$ в точке $(1;1;2)$.

8. $z = x^2 + 2y^2$ в точке $(1;1;3)$.

9. $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$ в точке $(-2;0;1)$.

10. $z = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)$ в точке $(2;2;0)$.

11. $z = \dfrac{1}{2}\left(y^2 - x^2\right)$ в точке $(2;2;0)$.

12. $z = \dfrac{4}{x^2 + 2y^2}$ в точке $(-2;0;1)$.

13. $z = 2x^2 + y^2$ в точке $(1;1;3)$.

14. $z = x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ в точке $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

15. $z=\operatorname{arctg}\ x\cdot y$ в точке $(1;1;\frac{\pi}{4})$.

16. $z=\left(x^3-6xy\right)$ в точке $(2;2;-2)$.

17. $z=xy-\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $(3;4;-7)$.

18. $z=\frac{1}{2}xy$ в точке $(1;1;2)$.

19. $z=x^2-2y^2$ в точке $(2;1;4)$.

20. $z=4-x^2-y^2$ в точке $(1;1;2)$.

21. $z=2x^2+xy-6$ в точке $(2;2;0)$.

22. $z=\dfrac{4}{2x^2+y^2}$ в точке $(0;-2;1)$.

23. $z=\dfrac{1}{2x^2+4y^2}$ в точке $(-2;0;1)$.

24. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=1$ в точке $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

25. $z=\operatorname{arctg}(x-y)$ в точке $\left(2;1;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

26. $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ в точке $(3;4;-7)$.

27. $z=\frac{1}{2}(-6xy+y^3)$ в точке $(2;2;-2)$.

28. $z=\dfrac{xy}{3}$ в точке $(1;1;3)$.

29. $z=-4x^2+2y^2$ в точке $(1;2;4)$.

30. $z=4+x^2+y^2$ в точке $(1;1;2)$.

VI.

1. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(3;2)$, если $z=x^2+y^2$.

2. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(2;1)$, если $z=\sin(x+\cos y)$.

3. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(1;1)$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

4. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(6;4)$, если $z=\ln\left(x^2+4y^2\right)$.

5. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке, если $z=x^y$.

6. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(3;2)$, если $z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$.

7. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(\sqrt{2};1)$, если $z=\sqrt{x^2+2y^2}$.

8. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(1;3)$, если $z=x-3y+\sqrt{3xy}$.

9. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(0;1)$, если $z=\ln\left(x+\dfrac{1}{y}\right)$.

10. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(3;2)$, $z=2x^2+y^2-1$.

11. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(1;0)$, если $z=\ln\left(\dfrac{1}{x}+y\right)$.

12. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(3;1)$, если $z=y-3x+\sqrt{3xy}$.

13. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(3;4)$, если $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

14. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(2;3)$, если $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

15. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(2;2)$, если $z=x^{y-1}$.

16. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(6;4)$, если $z=\ln(4x^2+y^2)$.

17. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(1;1)$, если $z=\arcsin(x-y)$.

18. Найти $\mathrm{grad}\, z$ в точке $(2;2)$, если $z=\sqrt{4+2x^2+y^2}$.

19. Найти $\mathrm{grad}\, z$ в точке $(1;2)$, если $z=2x^2+y^2$.

20. Найти производную в направлении биссектрисы координатного угла в точке $(0;0)$, если $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$.

21. Найти $\mathrm{grad}\, z$ в точке $(3;2)$, если $z=\ln\left(x^2+3y^2\right)$.

22. Найти $\mathrm{grad}\, z$ в точке $(2;2)$, если $z=y^x$.

23. Найти $\mathrm{grad}\, z$ в точке $(1;1)$, если $z=\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$.

24. Найти $\mathrm{grad}\, z$ в точке $(1;2)$, если $z=\sqrt{x^2+y^2+4}$.

25. Найти $\mathrm{grad}\, z$ в точке $(2;3)$, если $z=2x^2+y^2$.

26. Найти $\mathrm{grad}\, z$ в точке $(3;2)$, если $z=5\ln(4y^2+x^2)$.

27. Найти $\mathrm{grad}\, z$ в точке М $(1;1)$, если $z=\mathrm{arctg}(y-x)$.

28. Найти $\mathrm{grad}\, z$ в точке $(2;2)$, если $z=\sqrt{4+x^2+2y^2}$.

29. Найти $\mathrm{grad}\, z$ в точке М $(2;1)$, если $z=x^2+2y^2$.

30. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ в точке М $(1;1)$ в направлении, образующем с осью Ox угол 60^0, если $z=x^2-y^2$.

VII. Функция $z=f\left(x,y\right)$ задана в неявном виде. Найти полный дифференциал функции dz.

1. $x+y-z=e^{2z}$;

2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

3. $z^2=e^{xy\left(x^2+y^2\right)}$;

4. $e^{\frac{x}{y}}+e^{-\frac{z}{y}}=z$;

5. $z^2+\ln\left(x^2+y^2\right)=3$;

6. $\ln z+\ln\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}=-2$;

7. $\cos z+\sin\left(x^2+y^2\right)=1$;

8. $\ln z=x^y$;

9. $3z^3-y\ln x=5$;

10. $x^2=\ln\left(z^2+y^2\right)$;

11. $y=e^x\left(\cos z+x\sin z\right)$;

12. $x=e^z\left(\cos y+x\sin y\right)$;

13. $y=x^{y^2z}$;

14. $x=y^{x^2z}$;

15. $y=\ln\mathrm{tg}\,\dfrac{z}{x}$;

16. $y=\ln\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{z}$;

17. $z-x^2=e^{xyz}$;

18. $z+y^2=e^{xyz}$;

19. $z+y=x\ln z;$

20. $z+\ln z=x^2y^3;$

21. $\cos z=x^2y;$

22. $\sin^2 z=xy^2;$

23. $y=\ln\dfrac{x-z^2}{x+y^2};$

24. $x=\ln\dfrac{y-z^2}{y+z^2};$

25. $y=xy+\sin\left(z+y\right);$

26. $x=xy+\cos\left(z+x\right);$

27. $e^z+x^2+y^2=10;$

28. $\ln e^z+\ln\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=10;$

29. $z^2+\dfrac{x^2-y}{x^2+y}=-4;$

30. $\cos z=x^2\cos y+5.$

VIII. Найти область определения функций:

1. $u=\sqrt{x^2+y^2-1}.$

2. $u=1/\sqrt{1-x^2-y^2}.$

3. u = arcsin (x + y).

4. $u=\sqrt{\cos\left(x^2+y^2\right)}.$

5. u = ln (– x + y).

6. $u=y+\sqrt{x}.$

7. $u=\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}.$

8. $u=\arcsin z/\sqrt{x^2+y^2}.$

9. u = 1/ ln (1 – x^2 – y^2 – z^2).

10. $u=\sqrt{x+y+z}.$

11. $u=\sqrt{x^2+y^2-4}.$

12. $u=1/\sqrt{4-x^2-y^2}.$

13. u = arcsin (x – y).

14. u = ln (x – y).

15. $u=y-\sqrt{x}.$

16. $y=\arccos(x-y).$

17. $u=y+\sqrt{-x}.$

18. $y=e^{\arccos(x-y)}.$

19. $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}.$

20. $u=\sqrt{x-y+z}.$

21. u = ln (– x – y).

22. $u=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}.$

23. $u=\sqrt{\cos\left(x^2-y^2\right)}.$

24. $u=\sqrt{\sin\left(x^2+y^2\right)}.$

25. $u=\sqrt{\cos\left(-x^2+y^2\right)}.$

26. u =1/ ln (–x –y).

27. u =4/ln (x – y).

28. $u=3/\sqrt{3-x^2-y^2}.$

29. $y=e^{\arcsin(x-y)}.$

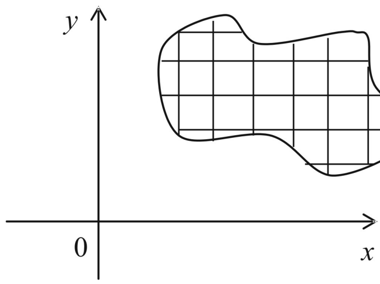
30. $y=e^{\arccos(x+y)}.$

Тема 7. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Как известно, интегрирование является процессом суммирования. Однако суммирование может производится неоднократно, что приводит нас к понятию кратных интегралов. Рассмотрение этого вопроса начнем с рассмотрения двойных интегралов.

Двойные интегралы

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой $f(x, y) = 0$.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой, назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой областью Δ.

С геометрической точки зрения Δ – площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i. Вообще говоря, такой порядок разбиения наобязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i,$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ.

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

<u>Определение:</u> Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum\limits_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции $f(x, y)$ по области Δ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \iint\limits_{\Delta} f(x, y)dxdy.$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i.$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y.

Поскольку деление области интегрирования произвольно, а также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу

$$\iint\limits_{\Delta} f(x, y)dydx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sum\sum_{\Delta} f(x, y)\Delta y\Delta x.$$

Условия существования двойного интеграла

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла.

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл* $\iint\limits_{\Delta} f(x, y)d\Delta$ *существует.*

Теорема. *Если функция f(x, y) ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно-гладких линий, то двойной интеграл* $\iint\limits_{\Delta} f(x, y)d\Delta$ *существует.*

Свойства двойного интеграла

1) $$\iint\limits_{\Delta}[f_1(x, y) + f_2(x, y) - f_3(x, y)]dydx =$$
$$= \iint\limits_{\Delta} f_1(x, y)dydx + \iint\limits_{\Delta} f_2(x, y)dydx - \iint\limits_{\Delta} f_3(x, y)dydx.$$

2) $$\iint\limits_{\Delta} kf(x, y)dydx = k\iint\limits_{\Delta} f(x, y)dydx.$$

3) Если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx = \iint\limits_{\Delta_1} f(x,y)dydx + \iint\limits_{\Delta_2} f(x,y)dydx.$$

4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx = f(x_0, y_0)\cdot S.$$

5) Если $f(x, y) \geq 0$ в области Δ, то $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx \geq 0$.

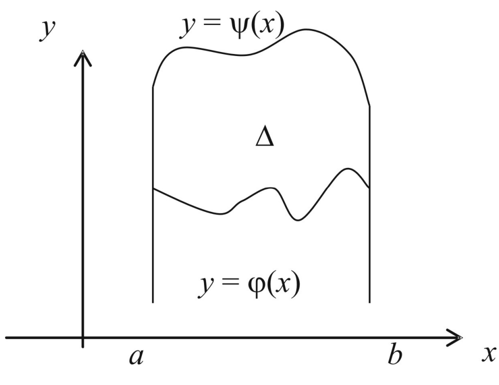
6) Если $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то $\iint\limits_{\Delta} f_1(x,y)dydx \leq \iint\limits_{\Delta} f_2(x,y)dydx$.

7) $\left|\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx\right| \leq \iint\limits_{\Delta} |f(x,y)|dydx$.

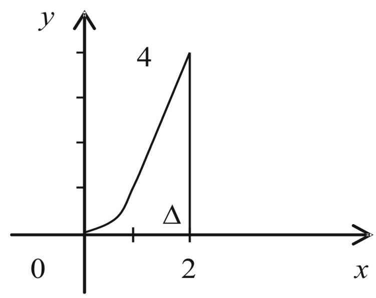
Вычисление двойного интеграла

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$,* где *φ и ψ – непрерывные функции и $\varphi \leq \psi$, тогда*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$



Пример 1. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x-y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: $y = 0$, $y = x^2$, $x = 2$.



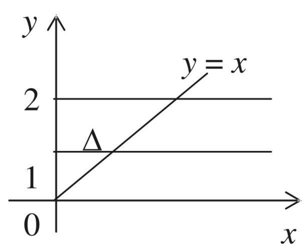
$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} (x-y)dy = \int\limits_0^2 (xy - \frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int\limits_0^2 (x^3 - \frac{x^4}{2})dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^2 = 4 - 3{,}2 = 0{,}8.$$

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c < d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤Ψ(y)),* то

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx \,.$$

<u>Пример 2.</u> Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями $y = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.



$$\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^x (x^2+y^2)dx = \int\limits_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Big|_0^y dy =$$

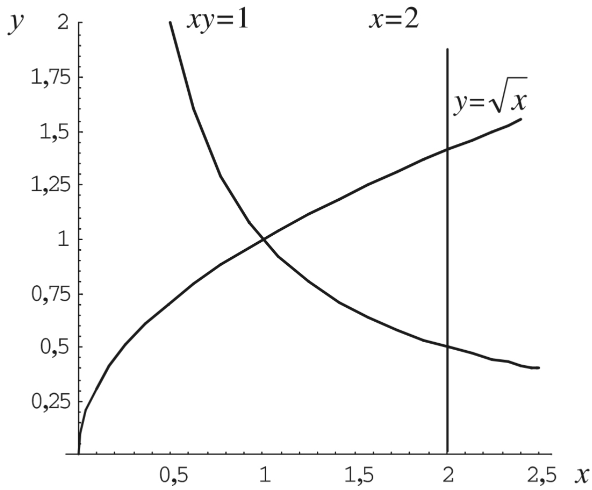
$$= \int\limits_1^2 \frac{4}{3} y^3 dy = \frac{4}{12} y^4 \Big|_1^2 = \frac{64}{12} - \frac{4}{12} = 5.$$

<u>Пример 3.</u> Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2 - 2xy + y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)dx=\int\limits_0^2 (x^3-yx^2+yx)\Big|_0^{y^2}dy=$$

$$=\int\limits_0^2 (y^6-y^5+y^3)dy=\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^6}{6}+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{244}{21}.$$

Пример 4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Delta} y\ln x dxdy$, если область интегрирования ограничена линиями $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.



$$\iint\limits_{\Delta} y\ln x dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x dy=\int\limits_1^2 \frac{y^2}{2}\ln x\Big|_{1/x}^{\sqrt{x}}dx=\int\limits_1^2\left[\frac{x\ln x}{2}-\frac{\ln x}{2x^2}\right]dx.$$

1. $\int x\ln x dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x;\ dv=xdx; \\ du=\frac{1}{x}dx;\ v=\frac{x^2}{2} \end{matrix}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4};$

$$\int\limits_1^2 x\ln x dx=\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^2=2\ln 2-1+\frac{1}{4}=2\ln 2-\frac{3}{4}.$$

2. $\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\left\{\begin{matrix} \ln x=t;\ x=e^t; \\ dt=\frac{1}{x}dx; \end{matrix}\right\}=\int\frac{txdt}{x^2}=\int\frac{tdt}{x}=\int e^{-t}tdt=\left\{\begin{matrix} u=t;\ du=dt; \\ dv=e^{-t}dt;\ v=-e^{-t}; \end{matrix}\right\}=$

$$=-te^{-t}+\int e^{-t}dt=-te^{-t}-e^{-t}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x};$$

$$\int\limits_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\left(-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}+1=-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2};$$

3. $\iint\limits_{\Delta} y\ln x dxdy = \frac{1}{2}\left(2\ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5\ln 2}{2} - \frac{5}{4}\right) = \frac{5\ln 2}{4} - \frac{5}{8}.$

Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим двойной интеграл вида $\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx$, где переменная x изменяется в пределах от a до b, а переменная y – от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$.

Положим $x = f(u, v)$; $y = \varphi(u, v)$.

Тогда $dx = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$; $dy = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv$;

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)dy.$$

Так как при первом интегрировании переменная x принимается за постоянную, то $dx = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = 0, \text{ т.е. } du = -\frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u}\cdot dv,$$

подставляя это выражение в записанное выше соотношение для dy, получаем

$$dy = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u}dv + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u}}\cdot dv.$$

Выражение $\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = |i|$ называется **определителем Якоби** или **Якобианом** функций $f(u, v)$ и $\varphi(u, v)$.

Тогда $\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} F(f(x,y),\varphi(x,y))\cdot\frac{|i|}{\partial f/du}dv.$

Поскольку при первом интегрировании приведенное выше выражение для dx принимает вид $dx = \frac{\partial f}{\partial u}du$ (при первом интегрировании полагаем $v = \text{const}$, $dv = 0$), то при изменении порядка интегрирования, получаем соотношение

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_{V_1}^{V_2} dv \int\limits_{\Theta_1(v)}^{\Theta_2(v)} F(f(u,v),\varphi(u,v))\cdot|i|\cdot du.$$

Двойной интеграл в полярных координатах

Воспользуемся формулой замены переменных

$$\iint_{\Delta} F(x,y)dxdy = \iint_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))\left|i\right|dudv.$$

При этом известно, что $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$. В этом случае Якобиан имеет вид

$$\left|i\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin\theta = \rho.$$

Тогда $\iint_{\Delta} F(x,y)dxdy = \iint_{\tau} F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \iint_{\tau} f(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta$.

Здесь τ – новая область значений, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\theta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$.

Тройной интеграл

При рассмотрении тройного интеграла не будем подробно останавливаться на всех тех теоретических выкладках, которые были детально разобраны применительно к двойному интегралу, т.к. существенных различий между ними нет.

Единственное отличие заключается в том, что при нахождении тройного интеграла интегрирование ведется не по двум, а по трем переменным, а областью интегрирования является не часть плоскости, а некоторая область в трехмерном пространстве.

$$\iiint_{r} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \sum\sum_{v}\sum \quad f(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Суммирование производится по области v, которая ограничена некоторой поверхностью $\varphi(x, y, z) = 0$.

$$\iiint_{r} f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dzdydx.$$

Здесь x_1 и x_2 – постоянные величины, y_1 и y_2 – могут быть некоторыми функциями от x или постоянными величинами, z_1 и z_2 – могут быть функциями от x и y или постоянными величинами.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2}\int\limits_0^{xy} x^2 yzdzdydx$.

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2}\int\limits_0^{xy} x^2 yzdzdydx = \int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} x^2 y\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy}\right)dydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} x^2 yx^2y^2dydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} x^4y^3dydx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^4\left(\frac{y^4}{4}\Big|_0^{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^4x^8}{4}dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^1 x^{12}dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{13}x^{13}\Big|_0^1 = \frac{1}{104}.$$

Замена переменных в тройном интеграле

Операция замены переменных в тройном интеграле аналогична соответствующей операции для двойного интеграла.

Можно записать

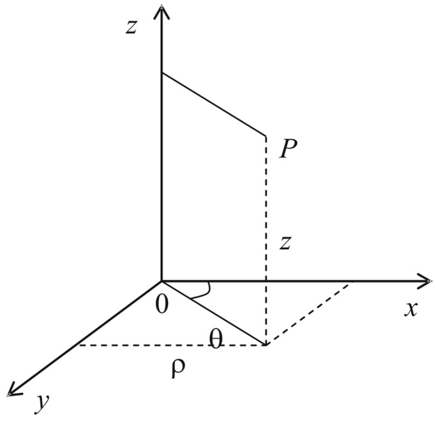
$$\iiint\limits_r F(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_\tau F(f(u,v,w),\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w))\cdot|i|\cdot dudvdw,$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Наиболее часто к замене переменной в тройном интеграле прибегают с целью перейти от декартовой прямоугольной системы координат к цилиндрической или сферической системе.

Рассмотрим эти преобразования подробнее.

Цилиндрическая система координат



Связь координат произвольной точки P пространства в цилиндрической системе с координатами в декартовой прямоугольной системе осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

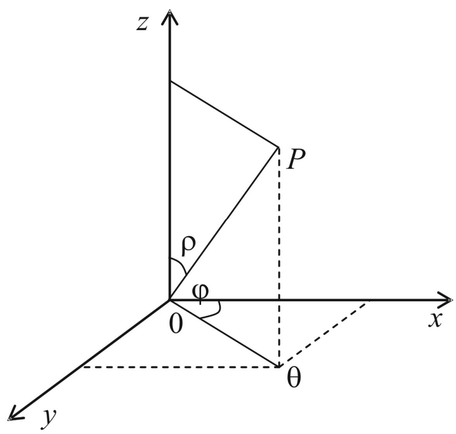
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x};\ z = z.$$

Для представления тройного интеграла в цилиндрических координатах вычисляем Якобиан:

$$|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho.$$

Тогда $\iiint\limits_{r} F(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\tau} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho d\theta d\rho dz$.

Сферическая система координат



Связь координат произвольной точки P пространства в сферической системе с координатами в декартовой прямоугольной системе осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi, \end{cases}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\ \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x};\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

Для представления тройного интеграла в сферических координатах вычисляем Якобиан:

$$|i|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=\cos\varphi(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta+$$

$$+\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta)+\rho\sin\varphi(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho\sin^2\varphi\sin^2\theta)=\rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi+\rho^2\sin^3\varphi=$$

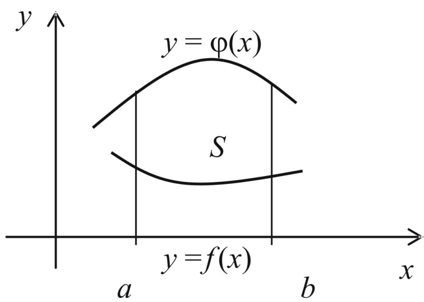
$$=\rho^2\sin\varphi.$$

Окончательно получаем

$$\iiint\limits_{r}F(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\tau}f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

Геометрические и физические приложения кратных интегралов

1) Вычисление площадей в декартовых координатах

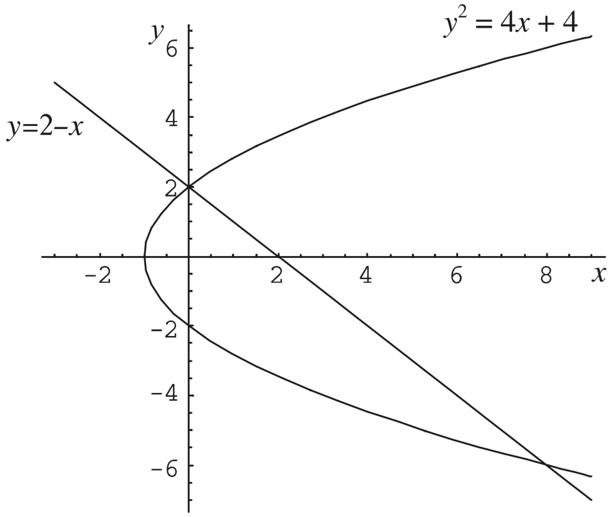


Площадь S, показанная на рисунке, может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле

$$S=\int\limits_a^b\int\limits_{f(x)}^{\varphi(x)}dydx.$$

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x+4$; $x+y-2=0$.

Построим графики заданных функций:



Линии пересекаются в двух точках: (0, 2) и (8, –6). Таким образом, область интегрирования ограничена по оси Ox графиками кривых от $x=\frac{y^2-4}{4}$ до $x = 2-y$, а по оси Oy – от –6 до 2.

Тогда искомая площадь

$$S=\int_{-6}^{2}\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y}dxdy=\int_{-6}^{2}\left(2-y-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=\int_{-6}^{2}\left(\frac{8-4y-y^2+4}{4}\right)dy=\frac{1}{4}\int_{-6}^{2}\left(-y^2-4y+12\right)dy=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{y^3}{3}-\frac{4y^2}{2}+12y\right)\Big|_{-6}^{2}=\frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3}-8+24-\left(\frac{36\cdot 6}{3}-\frac{4\cdot 36}{2}-12\cdot 6\right)\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(88-\frac{8}{3}\right)=21\frac{1}{3}.$$

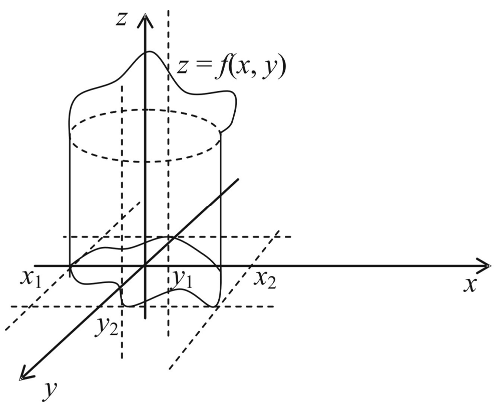
2) Вычисление площадей в полярных координатах

$$S=\iint_{\tau}\rho d\rho d\theta=\iint_{\Delta}dydx=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{f(\theta)}^{\varphi(\theta)}\rho d\rho d\theta.$$

3) Вычисление объемов тел

Пусть тело ограничено снизу плоскостью xOy, а сверху – поверхностью $z = f(x, y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью. Такое тело называется **цилиндрическим** или **цилиндроидом.**

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{\Delta}\sum z\Delta y\Delta x=\iint_{\Delta}zdydx=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}zdydx.$$



Пример 7. Вычислить объем, ограниченный поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$; $x + y + z = 3$ и плоскостью Oxy.

Пределы интегрирования: по оси Оx: $y_1 = -\sqrt{1-x^2}$; $y_2 = \sqrt{1-x^2}$;

по оси Оy: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$;

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x}} (3 - x - y)dydx = 3\pi.$$

4) Вычисление площади кривой поверхности

Если поверхность задана уравнением $f(x, y, z) = 0$, то площадь ее поверхности находится по формуле

$$S = \iint_{\Delta} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} dydx.$$

Если поверхность задана в неявном виде, т.е. уравнением $z = \varphi(x, y)$, то площадь этой поверхности вычисляется по формуле

$$S = \iint_{\Delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dydx.$$

5) Вычисление моментов инерции площадей плоских фигур

Пусть площадь плоской фигуры (область Δ) ограничена линией, уравнение которой $f(x,y) = 0$. Тогда моменты инерции этой фигуры находятся по формулам:

– относительно оси Ox: $I_x = \iint_{\Delta} y^2 dydx$;

– относительно оси Oy: $I_y = \iint_{\Delta} x^2 dydx$;

– относительно начала координат: $I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_{\Delta} (x^2 + y^2)dydx$ – этот момент инерции называют еще **полярным моментом инерции.**

6) Вычисление центров тяжести площадей плоских фигур

Координаты центра тяжести находятся по формулам:

$$x_C = \frac{\iint\limits_{\Delta} wxdydx}{\iint\limits_{\Delta} wdydx}, \; y_C = \frac{\iint\limits_{\Delta} wydydx}{\iint\limits_{\Delta} wdydx},$$

здесь w – поверхностная плотность ($dm = wdydx$ –масса элемента площади).

7) Вычисление объемов тел с помощью тройного интеграла

Если поверхность тела описывается уравнением $f(x, y, z) = 0$, то объем тела может быть найден по формуле

$$V = \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} \int\limits_{z_1}^{z_2} dzdydx,$$

при этом z_1 и z_2 – функции от x и y или постоянные, y_1 и y_2 – функции от x или постоянные, x_1 и x_2 – постоянные.

8) Координаты центра тяжести тела

$$x_C = \frac{\iiint\limits_{r} wxdv}{\iiint\limits_{r} wdv}; \; y_C = \frac{\iiint\limits_{r} wydv}{\iiint\limits_{r} wdv}; \; z_C = \frac{\iiint\limits_{r} wzdv}{\iiint\limits_{r} wdv}.$$

9) Моменты инерции тела относительно осей координат

$$I_x = \iiint\limits_{r} (y^2 + z^2)wdv; \; I_y = \iiint\limits_{r} (x^2 + z^2)wdv; \; I_z = \iiint\limits_{r} (x^2 + y^2)wdv.$$

10) Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей

$$I_{xy} = \iiint\limits_{r} z^2 wdv; \; I_{xz} = \iiint\limits_{r} y^2 wdv; \; I_{yz} = \iiint\limits_{r} x^2 wdv.$$

11) Момент инерции тела относительно начала координат

$$I_0 = \iiint\limits_{r} (x^2 + y^2 + z^2)wdv.$$

В приведенных выше формулах п. 8–11 r – область вычисления интеграла по объему, w – плотность тела в точке (x, y, z), dv – элемент объема:

– в декартовых координатах: $dv = dxdydz$;

– в циллиндрических координатах: $dv = \rho dzd\varphi d\theta$;

– в сферических координатах: $dv = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$.

12) Вычисление массы неоднородного тела

$$M = \iiint_r w dv,$$

где плотность w – величина переменная.

Контрольные вопросы

1. Определение двойного и тройного интегралов. Их геометрический и физический смысл.
2. Основные свойства двойных и тройных интегралов.
3. Теорема о среднем для двойного и тройного интегралов.
4. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (случай прямоугольной области).
5. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (общий случай).
6. Замена переменных в двойном интеграле.
7. Якобиан, его геометрический смысл.
8. Двойной интеграл в полярных координатах.
9. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
10. Тройной интеграл в сферических координатах.

Контрольная работа №7
по теме "Кратные интегралы"

Задача 1. Изменить порядок интегрирования.

1.1. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f\, dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f\, dx \cdot$

1.2. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\, dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f\, dx \cdot$

1.3. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f\, dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f\, dx \cdot$

1.4. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f\, dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f\, dx \cdot$

1.5. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f\, dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f\, dy \cdot$

1.6. $\int_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\arcsin y} f\, dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int_{0}^{\arccos y} f\, dx \cdot$

1.7. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f\, dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{-y}} f\, dx \cdot$

1.8. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\, dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f\, dx \cdot$

1.9. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\ dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\ dy \cdot$

1.10. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy \cdot$

1.11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f\ dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f\ dy \cdot$

1.12. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f\ dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f\ dx \cdot$

1.13. $\int\limits_{0}^{\pi/4} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f\ dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f\ dx. \cdot$

1.14. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f\ dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f\ dy \cdot$

1.15. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\ dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f\ dx \cdot$

1.16. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f\ dx \cdot$

1.17. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{0} f\ dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\ dx \cdot$

1.18. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^2} f\ dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f\ dx \cdot$

1.19. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\ dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\ dy \cdot$

1.20. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f\ dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f\ dx \cdot$

1.21. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f\ dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f\ dx \cdot$

1.22. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\ dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\ dy \cdot$

1.23. $\int\limits_{0}^{\pi/4} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f\ dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_{0}^{\cos x} f\ dy \cdot$

1.24. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\ dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f\ dx \cdot$

1.25. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\ dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f\ dy \cdot$

1.26. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f\ dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f\ dy \cdot$

1.27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f\ dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f\ dy \cdot$

1.28. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f\ dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\ dy \cdot$

1.29. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\ dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f\ dx \cdot$

1.30. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f\ dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x}} f\ dy \cdot$

Задача 2. Вычислить.

2.1. $\iint\limits_{D} \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right) dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

2.2. $\iint\limits_{D} \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right) dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

2.3. $\iint\limits_{D} \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right) dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.4. $\iint\limits_{D} \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right) dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.5. $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.6. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$

2.7. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

2.8. $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$

2.9. $\iint\limits_D \left(4xy + 3x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

2.10. $\iint\limits_D \left(12xy + 9x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

2.11. $\iint\limits_D \left(8xy + 9x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.12. $\iint\limits_D \left(24xy + 18x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.13. $\iint\limits_D \left(12xy + 27x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.14. $\iint\limits_D \left(8xy + 18x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$

2.15. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

2.16. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$

2.17. $\iint\limits_D \left(24xy - 48x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

2.18. $\iint\limits_D \left(6xy + 24x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

2.19. $\iint\limits_D \left(4xy + 16x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.20. $\iint\limits_D \left(4xy + 16x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.21. $\iint\limits_D \left(44xy + 16x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.22. $\iint\limits_D \left(4xy + 176x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.23. $\iint\limits_D \left(xy - 4x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

2.24. $\iint\limits_D \left(4xy + 176x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$

2.25. $\iint\limits_D \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

2.26. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 25x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

2.27. $\iint\limits_D \left(3x^2y^2 + \dfrac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.28. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 25x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.29. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2 + 150x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.30. $\iint\limits_D \left(xy - 9x^5y^5\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$

Задача 3. Вычислить.

3.1. $\iint\limits_D ye^{xy/2}dxdy;$

$D:\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=2,\ x=4.$

3.2. $\iint\limits_D y^2 \sin\dfrac{xy}{2}\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\dfrac{x}{2}.$

3.3. $\iint\limits_D y\cos xy\ dxdy;$

$D:\ y=\pi/2,\ y=\pi,\ x=1,\ x=2.$

3.4. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/4}dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=2,\ y=x.$

3.5. $\iint\limits_D y\sin xy\ dxdy;$

$D:\ y=\pi/2,\ y=\pi,\ x=1,\ x=2.$

3.6. $\iint\limits_D y^2 \cos\dfrac{xy}{2}\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi/2},\ \mathrm{y}=x/2.$

3.7. $\iint\limits_D 4ye^{2xy}dxdy;$

$D:\ y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=1.$

3.8. $\iint\limits_D 4y^2\sin xy\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\ y=x.$

3.9. $\iint\limits_D y\cos 2xy\ dxdy;$

$D:\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=1.$

3.10. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/8}dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=2,\ y=\dfrac{x}{2}.$

3.11. $\iint\limits_D 12y\sin 2xy\ dxdy;$

$D:\ y=\dfrac{\pi}{4},\ y=\dfrac{\pi}{2},\ x=2,\ x=3.$

3.12. $\iint\limits_D y^2\cos xy\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x.$

3.13. $\iint\limits_D ye^{xy/4}dxdy;$

$D:\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=4,\ x=8.$

3.14. $\iint\limits_D y^2\sin 2xy\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x.$

3.15. $\iint\limits_D 2y\cos 2xy\ dxdy;$

$D:\ y=\dfrac{\pi}{4},\ y=\dfrac{\pi}{2},\ x=1,\ x=2.$

3.16. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/2}dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{2},\ y=x.$

3.17. $\iint\limits_D y\sin xy\; dxdy;$

$D:\ y=\pi,\ y=2\pi,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=1.$

3.18. $\iint\limits_D y^2\cos 2xy\; dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\ y=\dfrac{x}{2}.$

3.19. $\iint\limits_D 8ye^{4xy}dxdy;$

$D:\ y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\dfrac{1}{4},\ x=\dfrac{1}{2}.$

3.20. $\iint\limits_D 3y^2\sin\dfrac{xy}{2}\; dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{4\pi}{3}},\ y=\dfrac{2}{3}x.$

3.21. $\iint\limits_D y\cos xy\; dxdy;$

$D:\ y=\pi,\ y=3\pi,\ x=1/2,\ x=1.$

3.22. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/2}dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=1,\ y=\dfrac{x}{2}.$

3.23. $\iint\limits_D y\sin 2xy\; dxdy;$

$D:\ y=\pi/2,\ y=3\pi/2,\ x=1/2,\ x=2.$

3.24. $\iint\limits_D y^2\cos xy\; dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=2x.$

3.25. $\iint\limits_D 6ye^{xy/3}dxdy;$

$D:\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=3,\ x=6.$

3.26. $\iint\limits_D y^2\sin\dfrac{xy}{2}\; dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x.$

3.27. $\iint\limits_D y\cos 2xy\; dxdy;$

$D:\ y=\pi/2,\ y=3\pi/2,\ x=1/2,\ x=2.$

3.28. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/8}dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=4,\ y=2x.$

3.29. $\iint\limits_D 3y\sin xy\; dxdy;$

$D:\ y=\pi/2,\ y=3\pi,\ x=1,\ x=3.$

3.30. $\iint\limits_D y^2\cos\dfrac{xy}{2}\; dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x.$

Задача 4. Вычислить.

4.1. $\iiint\limits_V 2y^2e^{xy}\; dx\; dy\; dz;$

$V\ \begin{cases} x=0,\ y=1,\ y=x, \\ z=0,\ z=1. \end{cases}$

4.2. $\iiint\limits_V x^2z\sin(xyz)\; dx\; dy\; dz;$

$V\ \begin{cases} x=2,\ y=\pi,\ \mathrm{z}=1, \\ x=0,\ y=1,\ z=0. \end{cases}$

4.3. $\iiint\limits_V y^2\mathrm{ch}(2xy)\; dx\; dy\; dz;$

$V\ \begin{cases} x=0,\ y=-2,\ \mathrm{y}=4x, \\ z=0,\ z=2. \end{cases}$

4.4. $\iiint\limits_V 8y^2z\; e^{2xyz}\; dx\; dy\; dz;$

$V\begin{cases} x=-1,\ y=2,\ z=1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.5. $\iiint\limits_V x^2\mathrm{sh}(3xy)\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=1,\ y=2x,\ \mathrm{y}=0, \\ z=0,\ z=36. \end{cases}$

4.6. $\iiint\limits_V y^2 z\cos(xyz)\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=1,\ y=2\pi,\ \mathrm{z}=2, \\ x=0,\ y=1,\ z=0. \end{cases}$

4.7. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\frac{\pi}{4}xy\right)\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=0,\ y=-1,\ \mathrm{y}=x/2, \\ z=0,\ z=-\pi^2. \end{cases}$

4.8. $\iiint\limits_V x^2 z\sin\frac{xyz}{4}\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=1,\ y=2\pi,\ \mathrm{z}=4, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.9. $\iiint\limits_V y^2 e^{-xy}\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=0,\ y=-2,\ \mathrm{y}=4x, \\ z=0,\ z=1. \end{cases}$

4.10. $\iiint\limits_V 2y^2 z\ e^{2xyz}\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=1,\ y=1,\ \mathrm{z}=1, \\ x=0,\ \mathrm{y}=0,\ z=0. \end{cases}$

4.11. $\iiint\limits_V y^2\mathrm{ch}(2xy)\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=0,\ y=1,\ \mathrm{y}=x, \\ z=0,\ z=8. \end{cases}$

4.12. $\iiint\limits_V x^2 z\ \mathrm{sh}(\mathrm{xyz})\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=2,\ y=1,\ \mathrm{z}=1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.13. $\iiint\limits_V y^2 e^{xy/2}\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=0,\ y=2,\ \mathrm{y}=2x, \\ z=0,\ z=-1. \end{cases}$

4.14. $\iiint\limits_V y^2 z\cos\frac{xyz}{3}\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=3,\ y=1,\ \mathrm{z}=2\pi, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.15. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right)\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=0,\ y=-1,\ \mathrm{y}=x, \\ z=0,\ z=2\pi^2. \end{cases}$

4.16. $\iiint\limits_V x^2 z\ \mathrm{sh}(\mathrm{xyz})\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=1,\ y=-1,\ \mathrm{z}=1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.17. $\iiint\limits_V y^2\cos(\pi xy)\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=0,\ y=1,\ \mathrm{y}=2x, \\ z=0,\ z=\pi^2. \end{cases}$

4.18. $\iiint\limits_V 2x^2 z\ \mathrm{sh}(2\mathrm{xyz})\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=2,\ y=1/2,\ \mathrm{z}=1/2, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.19. $\iiint\limits_V x^2\mathrm{sh}(2xy)\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=-1,\ y=x,\ \mathrm{y}=0, \\ z=0,\ z=8. \end{cases}$

4.20. $\iiint\limits_V x^2 z\ \sin\frac{\mathrm{xyz}}{2}\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=1,\ y=4,\ \mathrm{z}=\pi, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.21. $\iiint\limits_V y^2\mathrm{ch}(xy)\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=0,\ y=-1,\ \mathrm{y}=x, \\ z=0,\ z=2. \end{cases}$

4.22. $\iiint\limits_V x^2 z\ \mathrm{ch}(\mathrm{xyz})\ dx\ dy\ dz;$

$V \begin{cases} x=1,\ y=1,\ \mathrm{z}=1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.23. $\iiint\limits_V x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}xy\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=2,\ y=x,\ \mathrm{y}=0, \\ z=0,\ z=\pi. \end{cases}$

4.24. $\iiint\limits_V y^2 z\cos\frac{xyz}{9}\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=9,\ y=1,\ \mathrm{z}=2\pi, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.25. $\iiint\limits_V x^2\cos(\pi xy)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=1,\ y=2x,\ \mathrm{y}=0, \\ z=0,\ z=4\pi. \end{cases}$

4.26. $\iiint\limits_V y^2 z\ \mathrm{ch}\left(\frac{\mathrm{xyz}}{2}\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=2,\ y=-1,\ \mathrm{z}=2, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.27. $\iiint\limits_V y^2\mathrm{ch}(3xy)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=0,\ y=2,\ \mathrm{y}=6x, \\ z=0,\ z=-3. \end{cases}$

4.28. $\iiint\limits_V 2y^2 z\ \mathrm{ch}(2xyz)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=\frac{1}{2},\ y=2,\ \mathrm{z}=-1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.29. $\iiint\limits_V x^2\sin(4\pi xy)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=1,\ y=x/2,\ \mathrm{y}=0, \\ z=0,\ z=8\pi. \end{cases}$

4.30. $\iiint\limits_V 8y^2 z\ e^{-xyz}\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=2,\ y=-1,\ \mathrm{z}=2, \\ x=0,\ \mathrm{y}=0,\ z=0. \end{cases}$

Задача 5. Вычислить.

5.1. $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz;$

$V:\ y=10x,\ y=0,\ x=1,$
$z=xy,\ z=0.$

5.2. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{\mathrm{x}}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4};$

$V:\ 1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.3. $\iiint\limits_V 15\left(y^2+z^2\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V:\ z=x+y,\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.4. $\iiint\limits_V (3x+4y)\,dx\,dy\,dz;$

$V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=5\left(x^2+y^2\right),\ z=0.$

5.5. $\iiint\limits_V \left(1+2x^3\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V:\ y=9x,\ y=0,\ x=1,$
$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.6. $\iiint\limits_V \left(27+54y^3\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.7. $\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz;$

$V:\ y=15x,\ y=0,\ x=1,$
$z=xy,\ z=0.$

5.8. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{\mathrm{x}}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5};$

$V:\ \frac{x}{16}+\frac{y}{5}+\frac{z}{3}=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.9. $\iiint\limits_V (3x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz;$
$V:\ z=10y,\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.10. $\iiint\limits_V (15x+30z)\,dx\,dy\,dz;$
$V:\ z=x^2+3y^2,\ z=0,$
$y=x,\ y=0,\ z=0.$

5.11. $\iiint\limits_V (4+8z^3)\,dx\,dy\,dz;$
$V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.12. $\iiint\limits_V (1+2x^3)\,dx\,dy\,dz;$
$V:\ y=36x,\ y=0,\ x=1,$
$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.13. $\iiint\limits_V 21xz\,dx\,dy\,dz;$
$V:\ y=x,\ y=0,\ x=2,$
$z=xy,\ z=0.$

5.14. $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}\right)^6};$
$V:\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.15. $\iiint\limits_V (x^2+3y^2)\,dx\,dy\,dz;$
$V:\ z=10x,\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.16. $\iiint\limits_V (60y+90z)\,dx\,dy\,dz;$
$V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=x^2+y^2,\ z=0.$

5.17. $\iiint\limits_V \left(\dfrac{10}{3}x+\dfrac{5}{3}\right)dx\,dy\,dz;$
$V:\ y=9x,\ y=0,\ x=1,$
$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.18. $\iiint\limits_V (9+18z)\,dx\,dy\,dz;$
$V:\ y=4x,\ y=0,\ x=1,$
$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.19. $\iiint\limits_V 3y^2\,dx\,dy\,dz;$
$V:\ y=2x,\ y=0,\ x=2,$
$z=xy,\ z=0.$

5.20. $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}\right)^6};$
$V:\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.21. $\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz;$
$V:\ z=10(x+3y),\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.22. $\iiint\limits_V (8y+12z)\,dx\,dy\,dz;$
$V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=3x^2+2y^2,\ z=0.$

5.23. $\iiint\limits_V 63(1+2\sqrt{y})\,dx\,dy\,dz;$
$V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

5.24. $\iiint\limits_V (x+y)\,dx\,dy\,dz;$
$V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=30x^2+60y^2,\ z=0.$

5.25. $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}\right)^6}$;

$V:\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.26. $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$;

$V:\ y=x,\ y=0,\ x=2,$
$z=xy,\ z=0.$

5.27. $\iiint\limits_V y^2\,dx\,dy\,dz$;

$V:\ z=10(3x+y),\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.28. $\iiint\limits_V \left(5x+\dfrac{3z}{2}\right)dx\,dy\,dz$;

$V:\ y=x,\ y=0,\ x=2,$
$z=x^2+15y^2,\ z=0.$

5.29. $\iiint\limits_V \left(x^2+4y^2\right)dx\,dy\,dz$;

$V:\ z=20(2x+y),\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

5.30. $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{5}\right)^6}$;

$V:\ \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{5}=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

6.1. $y=3/x,\ y=4e^x,\ y=3,\ y=4.$

6.2. $x=\sqrt{36-y^2},\ x=6-\sqrt{36-y^2}.$

6.3. $x^2+y^2=72,\ 6y=-x^2\ \ (y\le 0).$

6.4. $x=8-y^2,\ x=-2y.$

6.5. $y=\dfrac{3}{x},\ y=8e^x,\ y=3,\ y=8.$

6.6. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2},\ y=\dfrac{1}{2x},\ \mathrm{x}=16.$

6.7. $x=5-y^2,\ x=-4y.$

6.8. $x^2+y^2=12,\ \ -\sqrt{6}y=x^2\,(y\le 0).$

6.9. $y=\sqrt{12-x^2},\ y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2},\ x=0\ (x\ge 0).$

6.10. $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x},\ y=\dfrac{3}{2x},\ x=9.$

6.11. $y=\sqrt{24-x^2},\ 2\sqrt{3}y=x^2,\ x=0\ (x\ge 0).$

6.12. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0,\ (x\ge 0).$

6.13. $y=20-x^2,\ y=-8x.$

6.14. $y=\sqrt{18-x^2},\ y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}.$

6.15. $y=32-x^2,\ y=-4x.$

6.16. $y=2/x,\ y=5e^x,\ y=2,\ y=5.$

6.17. $x^2+y^2=36,\ \ 3\sqrt{2}y=x^2\ \ (y\ge 0).$

6.18. $y=3\sqrt{x},\ y=3/x,\ x=4.$

6.19. $y=6-\sqrt{36-x^2},\ y=\sqrt{36-x^2},\ x=0\ (x\ge 0).$

6.20. $y=25/4-x^2,\ y=x-5/2.$

6.21. $y=\sqrt{x},\ y=1/x,\ x=16.$

6.22. $y=2/x,\ y=7e^x,\ y=2,\ y=7.$

6.23. $x=27-y^2,\ x=-6y.$

6.24. $x=\sqrt{72-y^2},\ 6x=y^2,\ y=0\ (y\ge 0).$

6.25. $y=\sqrt{6-x^2},\ y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}.$

6.26. $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x},\ y=\dfrac{3}{2x},\ x=4.$

6.27. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0,\ (x\le 0).$

6.28. $y=\dfrac{1}{x},\ y=6e^x,\ y=1,\ y=6.$

6.29. $y=3\sqrt{x},\ y=3/x,\ x=9.$

6.30. $y=11-x^2,\ y=-10x.$

Задача 7. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

7.1. $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.2. $x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ y=x/\sqrt{3}.$

7.3. $y^2-6y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.4. $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=0,\ y=x.$

7.5. $y^2-8y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.6. $x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ y=x.$

7.7. $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-6y+x^2=0,\ y=x,\ \ x=0.$

7.8. $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-10x+y^2=0,\ y=0,\ y=\sqrt{3}x.$

7.9. $y^2-6y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=x,\ \ x=0.$

7.10. $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.11. $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}x,\ \ x=0.$

7.12. $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.13. $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-6y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}x,\ \ x=0.$

7.14. $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.15. $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-6y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=0.$

7.16. $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=0,\ y=x/\sqrt{3}.$

7.17. $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.18. $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=0,\ y=x/\sqrt{3}.$

7.19. $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.20. $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=0,\ \ y=x.$

7.21. $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=x,\ \ x=0.$

7.22. $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=0,\ \ y=\sqrt{3}x.$

7.23. $y^2-6y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=x,\ \ x=0.$

7.24. $x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ \ y=\sqrt{3}x.$

7.25. $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=x,\ \ x=0.$

7.26. $x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.27. $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}x,\ \ x=0.$

7.28. $x^2-4x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.29. $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ \ x=0.$

7.30. $x^2-6x+y^2=0,\ x^2-10x+y^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

Задача 8. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

8.1. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ \ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2+y.$

8.2. $D:\ x^2+y^2=1,\ \ x^2+\ y^2=4,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(x+y)\big/\left(x^2+y^2\right).$

8.3. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ \ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2/2+5y.$

8.4. $D:\ x^2+y^2=9,\ \ x^2+\ y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(2x+5y)\big/\left(x^2+y^2\right).$

8.5. $D:\ x=2,\ y=0,\ y^2=2x\ \ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2/8+2y.$

8.6. $D:\ x^2+y^2=1,\ \ x^2+\ y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(x+y)\big/\left(x^2+y^2\right).$

8.7. $D:\ x=2,\ y=0,\ y^2=x/2\ \ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2/2+6y.$

8.8. $D:\ x^2+y^2=4,\ \ x^2+\ y^2=25,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\le 0);$
$\mu=(2x-3y)\big/\left(x^2+y^2\right).$

8.9. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ \ (y\ge 0);$
$\mu=x+3y^2.$

8.10. $D:\ x^2+y^2=1,\ \ x^2+\ y^2=9,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\le 0);$
$\mu=(x-y)\big/\left(x^2+y^2\right).$

8.11. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=x\ \ (y\ge 0);$
$\mu=3x+6y^2.$

8.12. $D:\ x^2+y^2=9,\ \ x^2+\ y^2=25,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\le 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(2y-x)\big/\left(x^2+y^2\right).$

8.13. $D:\ x=2,\ y=0,\ y^2=x/2\ \ (y\ge 0);$
$\mu=2x+3y^2.$

8.14. $D:\ x^2+y^2=4,\ \ x^2+\ y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\le 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(2y-3x)\big/\left(x^2+y^2\right).$

8.15. $D:\ x=\dfrac{1}{2},\ y=0,\ y^2=8x\ \ (y\ge 0);$
$\mu=7x+3y^2.$

8.16. $D:\ x^2+y^2=9,\ \ x^2+\ y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\le 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(2y-5x)\big/\left(x^2+y^2\right).$

8.17. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ \ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2+2y.$

8.18. $D:\ x^2+y^2=1,\ \ x^2+\ y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(x+3y)\big/\left(x^2+y^2\right).$

8.19. $D:\ x=2,\ y^2=2x,\ y=0\ \ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2/4+y/2.$

8.20. $D:\ x^2+y^2=1,\ \ x^2+\ y^2=4,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(x+2y)\big/\left(x^2+y^2\right).$

8.21. $D:\ x=2,\ y=0,\ y^2=2x\ \ (y\geq 0);$
$\mu=7x^2/4+y.$

8.22. $D:\ x^2+y^2=1,\ \ x^2+\ y^2=9,$
$x=0,\ y=0\ (x\geq 0,\ y\leq 0);$
$\mu=(2x-y)/(x^2+y^2).$

8.23. $D:\ x=2,\ y=0,\ y^2=x/2\ \ (y\geq 0);$
$\mu=7x^2/2+8y.$

8.24. $D:\ x^2+y^2=1,\ \ x^2+\ y^2=25,$
$x=0,\ y=0\ (x\geq 0,\ y\leq 0);$
$\mu=(x-4y)/(x^2+y^2).$

8.25. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ \ (y\geq 0);$
$\mu=6x+3y^2.$

8.26. $D:\ x^2+y^2=4,\ \ x^2+\ y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ (x\geq 0,\ y\leq 0);$
$\mu=(3x-y)/(x^2+y^2).$

8.27. $D:\ x=2,\ y=0,\ y^2=x/2\ \ (y\geq 0);$
$\mu=4x+6y^2.$

8.28. $D:\ x^2+y^2=4,\ \ x^2+\ y^2=9,$
$x=0,\ y=0\ (x\leq 0,\ y\geq 0);$
$\mu=(y-4x)/(x^2+y^2).$

8.29. $D:\ x=\frac{1}{2},\ y=0,\ y^2=2x\ \ (y\geq 0);$
$\mu=4x+9y^2.$

8.30. $D:\ x^2+y^2=4,\ \ x^2+\ y^2=9,$
$x=0,\ y=0\ (x\leq 0,\ y\geq 0);$
$\mu=(y-2x)/(x^2+y^2).$

Задача 9. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

9.1. $y=16\sqrt{2x},\ \ y=\sqrt{2x},$
$z=0,\ \ x+z=2.$

9.2. $y=5\sqrt{x},\ \ y=5x/3,$
$z=0,\ \ z=5+5\sqrt{x}/3.$

9.3. $x^2+y^2=2,\ \ y=\sqrt{x},\ \ y=0,$
$z=0,\ \ z=15x.$

9.4. $x+y=2,\ \ y=\sqrt{x},$
$z=12y,\ \ z=0.$

9.5. $x=20\sqrt{2y},\ \ x=5\sqrt{2y},$
$z=0,\ \ z+y=1/2.$

9.6. $x=5\sqrt{y}/2,\ \ x=5y/6,$
$z=0,\ \ z=\frac{5}{6}\left(3+\sqrt{y}\right).$

9.7. $x^2+y^2=2,\ \ x=\sqrt{y},\ \ x=0,$
$z=0,\ \ z=30y.$

9.8. $x+y=2,\ \ x=\sqrt{y},$
$z=12x/5,\ \ z=0.$

9.9. $y=17\sqrt{2x},\ \ y=2\sqrt{2x},$
$z=0,\ \ x+z=1/2.$

9.10. $y=5\sqrt{x}/3,\ \ y=5x/9,$
$z=0,\ \ z=5\left(3+\sqrt{x}\right)/9.$

9.11. $x^2+y^2=8,\ \ y=\sqrt{2x},\ \ y=0,$
$z=0,\ \ z=15x/11.$

9.12. $x+y=4,\ \ y=\sqrt{2x},$
$z=3y,\ \ z=0.$

9.13. $x=\frac{5}{6}\sqrt{y},\ x=\frac{5}{18}y,$
$z=0,\ z=\frac{5}{18}\left(3+\sqrt{y}\right).$

9.14. $x=19\sqrt{2y},\ x=4\sqrt{2y},$
$z=0,\ z+y=2.$

9.15. $x^2+y^2=8,\ x=\sqrt{2y},\ x=0,$
$z=30y/11,\ z=0.$

9.16. $x+y=4,\ x=\sqrt{2y},$
$z=3x/5,\ z=0.$

9.17. $y=6\sqrt{3x},\ y=\sqrt{3x},$
$z=0,\ x+z=3.$

9.18. $y=\frac{5}{6}\sqrt{x},\ y=\frac{5}{18}x,$
$z=0,\ z=\frac{5}{18}\left(3+\sqrt{x}\right).$

9.19. $x^2+y^2=18,\ y=\sqrt{3x},\ y=0,$
$z=0,\ z=5x/11.$

9.20. $x+y=6,\ y=\sqrt{3x},$
$z=4y,\ z=0.$

9.21. $x=7\sqrt{3y},\ x=2\sqrt{3y},$
$z=0,\ z+y=3.$

9.22. $x=5\sqrt{y}/3,\ x=5y/9,$
$z=0,\ z=5\left(3+\sqrt{y}\right)/9.$

9.23. $x^2+y^2=18,\ x=\sqrt{3y},\ x=0,$
$z=0,\ z=10y/11.$

9.24. $x+y=6,\ x=\sqrt{3y},$
$z=4x/5,\ z=0.$

9.25. $y=\sqrt{15x},\ y=\sqrt{15}x,$
$z=0,\ z=\sqrt{15}\left(1+\sqrt{x}\right).$

9.26. $x^2+y^2=50,\ y=\sqrt{5x},$
$y=0,\ z=0,\ z=3x/11.$

9.27. $x+y=8,\ y=\sqrt{4x},$
$z=3y,\ z=0.$

9.28. $x=16\sqrt{2y},\ x=\sqrt{2y},$
$z+y=2,\ z=0.$

9.29. $x=\sqrt{y},\ x=15y,$
$z=0,\ z=15\left(1+\sqrt{y}\right).$

9.30. $x^2+y^2=50,\ x=\sqrt{5y},$
$x=0,\ z=0,\ z=6y/11.$

Задача 10. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

10.1. $x^2+y^2=2y,$
$z=5/4-x^2,\ z=0.$

10.2. $x^2+y^2=y,\ x^2+y^2=4y,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0.$

10.3. $x^2+y^2=8\sqrt{2}x,$
$z=x^2+y^2-64,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

10.4. $x^2+y^2+4x=0,$
$z=8-y^2,\ z=0.$

10.5. $x^2+y^2=6x,\ x^2+y^2=9x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,$
$y=0\ \ (y\le 0)$

10.6. $x^2+y^2=6\sqrt{2}y,$
$z=x^2+y^2-36,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

10.7. $x^2+y^2=2y,$
$z=9/4-x^2,\ \ z=0.$

10.8. $x^2+y^2=2y,\ \ x^2+y^2=5y,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0.$

10.9. $x^2+y^2+2\sqrt{2}y=0,$
$z=x^2+y^2-4,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

10.10. $x^2+y^2=4x,$
$z=10-y^2,\ \ z=0.$

10.11. $x^2+y^2=7x,\ \ x^2+y^2=9x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0,$
$y=0\ \ (y\le 0).$

10.12. $x^2+y^2=8\sqrt{2}y,$
$z=x^2+y^2-64,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

10.13. $x^2+y^2=2y,$
$z=13/4-x^2,\ \ z=0.$

10.14. $x^2+y^2=3y,\ \ x^2+y^2=6y,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0.$

10.15. $x^2+y^2=6\sqrt{2}x,$
$z=x^2+y^2-36,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

10.16. $x^2+y^2=2\sqrt{2}y,$
$z=x^2+y^2-4,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

10.17. $x^2+y^2=4x,$
$z=12-y^2,\ \ z=0.$

10.18. $x^2+y^2=8x,\ \ x^2+y^2=11x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0,$
$y=0\ \ (y\le 0).$

10.19. $x^2+y^2=4\sqrt{2}x,$
$z=x^2+y^2-16,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

10.20. $x^2+y^2=4y,$
$z=4-x^2,\ \ z=0.$

10.21. $x^2+y^2=4y,\ \ x^2+y^2=7y,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0.$

10.22. $x^2+y^2=4\sqrt{2}y,$
$z=x^2+y^2-16,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

10.23. $x^2+y^2+2x=0,$
$z=17/4-y^2,\ \ z=0.$

10.24. $x^2+y^2=9x,\ \ x^2+y^2=12x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0,$
$y=0\ \ (y\ge 0).$

10.25. $x^2+y^2+2\sqrt{2}x=0,$
$z=x^2+y^2-4,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

10.26. $x^2+y^2=4y,$
$z=6-x^2,\ \ z=0.$

10.27. $x^2+y^2=10x,\ \ x^2+y^2=13x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0,$
$y=0\ \ (y\ge 0)$

10.28. $x^2+y^2=2\sqrt{2}x,$
$z=x^2+y^2-4,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

10.29. $x^2+y^2=2x,$
$z=21/4-y^2,\ \ z=0.$

10.30. $x^2+y^2=5y,\ \ x^2+y^2=8y,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0.$

Тема 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \; dy = f(x, y)dx; \; f(x, y)dx - dy = 0.$$

Функцию $f(x,y)$ представим в виде $f(x, y) = -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, $Q(x, y) \neq 0$; тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

– это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = y(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению.

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

Задача Коши (задача с начальным условием)

Пусть функция $f(x, y)$ определена в области D, точка $(x_0, y_0) \in D$. Требуется найти решение уравнения

$$y' = f(x, y),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0$$

(начальное условие $y(x_0) = y_0$ часто записывают в форме $y\big|_{x=x_0} = y_0$).

<u>Теорема Коши</u> (существования и решения задачи Коши). Если в области D функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $f'_y(x, y)$, то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ в окрестности точки x_0 существует единственное решение задачи $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

На самом деле для существования решения в окрестности точки x_0 достаточно только непрерывности функции $f(x, y)$; условие непрерывности $f'_y(x, y)$ обеспечивает единственность этого решения.

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Такое уравнение можно представить также в виде

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0;\ dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0;\ \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \text{ при } \beta(y) \neq 0.$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x);\ \dfrac{1}{\beta(y)} = Y(y).$

Получаем
$$X(x)dx + Y(y)dy = 0;$$

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C.$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина C, а соответственно, и частное решение.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $yy' = \dfrac{-2x}{\cos y}$.

$$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x;\quad y\cos y dy = -2x dx;\quad \int y\cos y dy = -2\int x dx.$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям:

$$\int y\cos y dy = \begin{Bmatrix} u = y;\ dv = \cos y dy; \\ du = dy;\ v = \sin y \end{Bmatrix} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C;$$

$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0.$$

Это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения.**

Чтобы проверить правильность полученного ответа, продифференцируем его по переменной x.

$$y'\sin y + yy'\cos y - y'\sin y + 2x = 0$$

$$yy' = -\frac{2x}{\cos y} \text{ – верно.}$$

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии $y(2) = 1$.

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y;\ dx = \frac{\ln y dy}{y};\ \int dx = \int \frac{\ln y dy}{y};\ x + C = \int \ln y d(\ln y);\ x + C = \frac{\ln^2 y}{2};$$

при $y(2) = 1$ получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \Rightarrow 2 + C = 0; \Rightarrow C = -2.$

Таким образом, $2(x-2) = \ln^2 y;$ или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ – частное решение;

Проверка: $y' = e^{\pm\sqrt{2x-4}} \cdot \frac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$, $\frac{y}{y'} = \frac{e^{\pm\sqrt{2x-4}}(\pm\sqrt{2x-4})}{e^{\pm\sqrt{2x-4}}} = \pm\sqrt{2x-4} = \ln y$ – верно.

Замечание. Осуществление проверки правильности полученного решения не является обязательным.

Пример 3. Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3};\ y^{-2/3}dy = dx;\ \int y^{-2/3}dy = \int dx;\ 3y^{1/3} = x + C$$

$$27y = (x+C)^3 \text{ – общий интеграл,}$$

$$y = \frac{1}{27}(x+C)^3 \text{ – общее решение.}$$

Пример 4. Решить уравнение $y' = x(y^2+1)$.

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx;\ \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx;\ \mathrm{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C;\ y = \mathrm{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

Пример 5. Решить уравнение $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ при условии $y(1) = 0$.

$$\frac{ydy}{dx} + xe^y = 0;\ \ ydy + xe^y dx = 0;\ \ \frac{y}{e^y}dy = -xdx;\ \ \int \frac{y}{e^y}dy = -\int xdx.$$

Интеграл, стоящий в левой части, будем брать по частям.

$$\int ye^{-y}dy = \left\{\begin{matrix} u = y;\ e^{-y}dy = dv; \\ du = dy;\ v = -e^y; \end{matrix}\right\} = -e^y y - \int -e^y dy = -e^{-y}y - e^{-y} = -e^{-y}(y+1);$$

$$e^{-y}(y+1)=\frac{x^2}{2}+C_0;$$
$$2e^{-y}(y+1)=x^2+C.$$

Если $y(1)=0$, то $2e^0(0+1)=1+C;\Rightarrow 2=1+C;\Rightarrow C=1.$

Частный интеграл: $2e^{-y}(y+1)=x^2+1.$

Пример 6. Решить уравнение $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$.

$$y'+\sin(x+y)-\sin(x-y)=0,$$
$$y'-2\sin\frac{x-y-x-y}{2}\cos\frac{x-y+x+y}{2}=0,$$
$$y'-2\sin(-y)\cos x=0,$$
$$y'+2\sin y\cos x=0,$$
$$\frac{dy}{\sin y}=-2\cos x dx;\ \int\frac{dy}{\sin y}=-2\int\cos x dx,$$
$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right|=-2\sin x+C.$$

Пример 7. Найти решение задачи Коши $(xy^2-x)dx=(x^2y-y)dy$; $y\big|_{x=0}=5.$

Решаем уравнение $x(y^2-1)dx=y(x^2-1)dy\Rightarrow\frac{ydy}{y^2-1}=\frac{xdx}{x^2-1}\Rightarrow\int\frac{ydy}{y^2-1}=\int\frac{xdx}{x^2-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{2}\ln|C|.$

Здесь постоянная интегрирования записана как $\frac{1}{2}\ln|C|$.

Далее, $\ln|y^2-1|=\ln|C(x^2-1)|\Rightarrow y^2-1=C(x^2-1)$.

Общий интеграл уравнения $y^2=C(x^2-1)+1$.

Определим частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=5$. Подстановка значений $x=0$, $y=5$ в общий интеграл даёт $C=-24$, таким образом, $y^2=-24(x^2-1)+1$ и есть решение задачи Коши.

Пример 8. Решить уравнение $y'=x(y^2+1)$.

$$\frac{dy}{dx}=x(y^2+1);\ \frac{dy}{y^2+1}=xdx;\ \int\frac{dy}{y^2+1}=\int xdx;\ \operatorname{arctg}y=\frac{x^2}{2}+C;$$
$$y=\operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2}+C\right).$$

Допустим, заданы некоторые начальные условия x_0 и y_0. Тогда

$$\operatorname{arctg} y_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \Rightarrow C_0 = \operatorname{arctg} y_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

Получаем частное решение $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} y_0 - \frac{x_0^2}{2}\right).$

Однородные уравнения

Определение. Функция $f(x, y)$ называется **однородной *n*-го измерения** относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Пример 9. Является ли однородной функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3(x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x, y).$$

Таким образом, функция $f(x, y)$ является однородной 3-го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x, y)$.

Поскольку функция $f(x, y)$ – однородная нулевого измерения, то можно записать

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Параметр t, вообще говоря, произвольный, предположим, что $t = \frac{1}{x}$. Получаем

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \frac{y}{x}$, т.е.

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u).$$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде

$$y' = \varphi(u).$$

Далее заменяем $y = ux$, $y' = u'x + ux'$,

$$u'x + ux' = \varphi(u);\ u'x + u = \varphi(u);\ u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u,

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x};\ \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

Пример 10. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x} + 1\right)$.

Введем вспомогательную функцию u.

$$u = \frac{y}{x};\ y = ux;\ y' = u'x + u\,.$$

Отметим, что введенная нами функция u всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln\dfrac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение

$$u'x + u = u(\ln u + 1);\ u'x + u = u\ln u + u;\ u'x = u\ln u;$$

Разделяем переменные: $\dfrac{du}{u\ln u} = \dfrac{dx}{x};\ \displaystyle\int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получаем $\ln\left|\ln u\right| = \ln\left|x\right| + C;\ \ln u = Cx;\ u = e^{Cx}$.

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение

$$y = xe^{Cx}.$$

Уравнения, приводящиеся к однородным

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут быть приведены к однородным.

Это уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$.

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой

$$x = u + \alpha; \;\; y = v + \beta,$$

где α и β – решения системы уравнений $\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a_1 x + b_1 y + c_1 = 0. \end{cases}$

<u>Пример 11.</u> Решить уравнение $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0.$

Получаем $(x - 2y + 3)\dfrac{dy}{dx} = -2x - y + 1; \;\; \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x - y + 1}{x - 2y + 3}.$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0\,.$

Решаем систему уравнений $\begin{cases} -2x - y + 1 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0, \end{cases} \begin{cases} y = 1 - 2x, \\ x - 2 + 4x + 3 = 0, \end{cases} \begin{cases} x = -1/5, \\ y = 7/5. \end{cases}$

Применяем подстановку $x = u - 1/5, \;\; y = v + 7/5,$ в исходное уравнение

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)dv + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)du = 0;$$

$$(u - 2v)dv + (2u + v)du = 0;$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{2v - u} = \frac{2 + v/u}{2v/u - 1}.$$

Заменяем переменную $\dfrac{v}{u} = t; \;\; v = ut; \;\; v' = t'u + t;$ при подстановке в выражение, записанное выше, имеем

$$t'u + t = \frac{2 + t}{2t - 1}.$$

Разделяем переменные: $\dfrac{dt}{du}u = \dfrac{2 + t}{2t - 1} - t = \dfrac{2 + t - 2t^2 + t}{2t - 1} = \dfrac{2(1 + t - t^2)}{2t - 1};$

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2t}{1 + t - t^2}dt; \;\; \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\int \frac{(1 - 2t)dt}{1 + t - t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1 + t - t^2\right| = \ln|u| + \ln C_1$$

$$\ln\left|1 + t - t^2\right| = -2\ln|C_1 u|$$

$$\ln\left|1 + t - t^2\right| = \ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|; \;\; 1 + t - t^2 = \frac{C_2}{u^2}.$$

Переходим теперь к первоначальной функции y и переменной x.

$$t=\frac{v}{u}=\frac{y-7/5}{x+1/5}=\frac{5y-7}{5x+1};\; u=x+1/5;$$

$$1+\frac{5y-7}{5x+1}-\left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2=\frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$

$$(5x+1)^2+(5y-7)(5x+1)-(5y-7)^2=25C_2;$$

$$25x^2+10x+1+25xy+5y-35x-7-25y^2+70y-49=25C_2;$$

$$25x^2-25x+25xy+75y-25y^2=25C_2+49-1+7;$$

$$x^2-x+xy+3y-y^2=C_2+\frac{55}{25}=C.$$

Таким образом, выражение $x^2-x+xy+3y-y^2=C$ является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

В случае, если в исходном уравнении вида $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой

$$ax+by=t.$$

<u>Пример 12.</u> Решить уравнение $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0.$

Получаем $2(x+y)\frac{dy}{dx}=-3x-3y+1;\; \frac{dy}{dx}=\frac{-3x-3y+1}{2x+2y}=-\frac{3x+3y-1}{2x+2y}.$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-6+6=0.$

Применяем подстановку $3x+3y=t,$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t'}{3}-1.$$

Подставляем это выражение в исходное уравнение:

$$\frac{t'}{3}-1=-\frac{3(t-1)}{2t};\; 2t(t'-3)=-9t+9;\; 2tt'=6t-9t+9;\; 2tt'=-3t+9.$$

Разделяем переменные: $\frac{2t}{-3t+9}dt=dx;\; \frac{t}{t-3}dt=-\frac{3}{2}dx;$

$$\int\left(1+\frac{3}{t-3}\right)dt=-\frac{3}{2}\int dx;$$

$$t+3\ln|t-3|=-\frac{3}{2}x+C_1.$$

Далее возвращаемся к первоначальной функции y и переменной x.

$$2x+2y+2\ln\left|3(x+y-1)\right|=-x+C_2;$$
$$3x+2y+2\ln 3+2\ln\left|x+y-1\right|=C_2;$$
$$3x+2y+2\ln\left|x+y-1\right|=C.$$

Таким образом, мы получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Линейные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде

$$y'+P(x)y=Q(x),$$

при этом если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)* – функции непрерывные на некотором промежутке $a < x < b$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y'+P(x)y=0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx;\ \ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|;\ \ln\left|\frac{y}{C}\right|=-\int P(x)dx.$$

Общее решение: $$y=Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений ($Q(x)\neq 0$) применяются в основном два метода: метод Бернулли или метод Лагранжа.

Метод Бернулли

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y=uv$.

Очевидно, что $y'=u\cdot\dfrac{dv}{dx}+v\cdot\dfrac{du}{dx}$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+P(x)uv=Q(x);$$

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x).$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y=2x^2$ может быть представлена как $y=1\cdot 2x^2$; $y=2\cdot x^2$; $y=2x\cdot x$ и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx}+P(x)u=0$.

Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u}=-P(x)dx;\ \int\frac{du}{u}=-\int P(x)dx;\ \ln|u|=-\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1|+\ln|u|=-\int P(x)dx;\ u=Ce^{-\int P(x)dx};\ C=1/C_1.$$

Для нахождения второй неизвестной функции *v* подставим поученное выражение для функции *u* в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx}=Q(x);\ Cdv=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Интегрируя, можем найти функцию *v*:

$$Cv=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1,\qquad v=\frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2,$$

т.е. была получена вторая составляющая произведения $y=uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем

$$y=uv=Ce^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right).$$

Окончательно получаем формулу

$$y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right),\quad C_2 \text{ – произвольный коэффициент.}$$

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Метод Лагранжа

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом **вариации произвольной постоянной**.

Вернемся к поставленной задаче:

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем.

$$y' + P(x)y = 0.$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C_1(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x)).$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x) e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x) e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = Q(x) e^{\int P(x)dx} dx.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right).$$

Таким образом мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Далее рассмотрим примеры решения различных дифференциальных уравнений описанными методами.

Пример 13. Решить уравнение $x^2 y' + y = ax^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Приведем данное уравнение к стандартному виду $y' + \frac{1}{x^2} y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Положим $y = uv$; $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$. Подставим в уравнение: $u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{x^2} \cdot u \cdot v = ae^{\frac{1}{x}}$; $u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x^2} \right) = ae^{\frac{1}{x}}$. Положим $\frac{du}{dx} + \frac{u}{x^2} = 0$, откуда получаем $u = e^{\frac{1}{x}}$. Подставив полученное выражение в уравнение, получим $e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{dv}{dx} = ae^{\frac{1}{x}}$; $v = ax + C$. Окончательно имеем $y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C)$.

Пример 14. Решить уравнение $x^2 y' + y = ax^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Приведем данное уравнение к стандартному виду $y' + \frac{1}{x^2} y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Применим полученную выше формулу: $P = \frac{1}{x^2}$; $Q = ae^{\frac{1}{x}}$;

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2} dx} \left(\int ae^{\frac{1}{x}} e^{\int \frac{1}{x^2} dx} dx + C \right); \; y = e^{\frac{1}{x}} \left(\int ae^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx + C \right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\int a dx + C \right);$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$

Пример 15. Решить уравнение $(x + y^2)\, dy = y dx$.

Представим уравнение в виде $\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^2}{y}$; $x' - x \cdot \frac{1}{y} = y$. Очевидно, оно является линейным относительно функции $x = x(y)$. Решим его методом вариации произвольной постоянной. Соответствующее однородное уравнение – $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$. Его решение: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = \ln|y| + \ln|C| \Rightarrow x = Cy$.

Ищем решение данного уравнения в форме $x = C(y)y$.

Тогда $x' = C'(y)y + C(y) \Rightarrow C'(y)y + C(y) = \frac{C(y)y}{y} + y \Rightarrow C'(y) = 1 \Rightarrow C(y) = $ $= y + C_0 \Rightarrow x = y(y + C)$ (постоянная C_0 переобозначена как C).

Уравнение Бернулли

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + Py = Q \cdot y^n,$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n.

$$\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q.$$

Применим подстановку, учтя, что $z' = -\dfrac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\dfrac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q;$$

$$z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q.$$

Получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z. Решение этого уравнения будем искать в виде

$$z = e^{-\int P dx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx + C\right);$$

$$Q_1 = -(n-1)Q; \ P_1 = -(n-1)P.$$

Пример 16. Решить уравнение $xy' + y = xy^2 \ln x$.

Разделим уравнение на xy^2: $\dfrac{y'}{y^2} + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \ln x$.

Полагаем $z = \dfrac{1}{y}$; $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$.

$$-z' + \frac{1}{x}z = \ln x; \ z' - \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Полагаем $P = -\dfrac{1}{x}$, $Q = -\ln x$.

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(\int -\ln x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C\right); \ z = e^{\ln x}\left(\int -\ln x e^{-\ln x} dx + C\right);$$

$$z = x\left(\int -\ln x \cdot \frac{dx}{x} + C\right); \ z = x\left(-\int \ln x d(\ln x) + C\right);$$

$$z = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right).$$

Произведя обратную подстановку, получаем

$$\frac{1}{y}=x\left(-\frac{\ln^2 x}{2}+C\right).$$

Пример 17. Решить уравнение $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$.

Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{y}$.

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}\sqrt{y}=x.$$

Полагаем $z=\sqrt{y};\ z'=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}y';\ y'=2\sqrt{y}z';$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}2\sqrt{y}z'-\frac{4}{x}z=x;\ \frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x}=\frac{x}{2}.$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Рассмотрим соответствующее ему линейное однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x}=0;\ \frac{dz}{dx}=\frac{2z}{x};\ \frac{dz}{z}=\frac{2dx}{x};$$

$$\int\frac{dz}{z}=2\int\frac{dx}{x}+C_1;\ \ln z=2\ln x+\ln C;\ z=Cx^2.$$

Полагаем $C=C(x)$ и подставляем полученный результат в линейное неоднородное уравнение, с учетом того, что

$$\frac{dz}{dx}=2xC(x)+x^2\frac{dC(x)}{dx};$$

$$2xC(x)+x^2\frac{dC(x)}{dx}-\frac{2x^2C(x)}{x}=\frac{x}{2};$$

$$\frac{dC(x)}{dx}=\frac{1}{2x};\ C(x)=\frac{1}{2}\ln x+C_2.$$

Получаем: $z=x^2\left(C_2+\dfrac{1}{2}\ln x\right).$

Применяя обратную подстановку, получаем окончательный ответ:

$$y=x^4\left(C_2+\frac{1}{2}\ln x\right)^2.$$

Уравнения в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u=F(x,y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции *u*, после чего решение легко находится в виде $du = 0;\ u = C$.

Таким образом, для решения надо определить:

1) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции *u*;

2) как найти эту функцию.

Если дифференциальная форма $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции *u*, то можно записать:

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Следовательно, $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y). \end{cases}$

Найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по *y*, а второе – по *x*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем **необходимое и достаточное условие** того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом.

$$\frac{\partial M\ (x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N\ (x,y)}{\partial x}.$$

Это условие называют **условием тотальности**.

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении собственно функции *u*.

Проинтегрируем равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$:

$$u = \int M(x,y)dx + C(y).$$

Вследствие интегрирования получаем не постоянную величину *C*, а некоторую функцию *C*(*y*), т.к. при интегрировании переменная *y* полагается постоянным параметром. Определим функцию *C*(*y*). Продифференцируем полученное равенство по переменной *y*.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + C'(y).$$

Откуда получаем $C'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$

Для нахождения функции $C(y)$ необходимо проинтегрировать приведенное выше равенство. Однако перед интегрированием надо доказать, что функция $C(y)$ не зависит от x. Это условие будет выполнено, если производная этой функции по x равна нулю.

$$\left[C'(y)\right]_x' = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx =$$

$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Определяем функцию $C(y)$:

$$C(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + C.$$

Подставляя этот результат в выражение для функции u, получаем

$$u = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy + C.$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$\int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy = C.$$

Следует отметить, что при решении уравнений в полных дифференциалах необязательно использовать полученную формулу. Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, которым формула была получена.

Пример 18. Решить уравнение $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0.$

Проверим условие тотальности: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2+10xy)}{\partial y} = 10x;$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x.$$

Условие тотальности выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Определим функцию u.

$$u = \int M(x,y)dx + C(y) = \int(3x^2 + 10xy)dx + C(y) = x^3 + 5x^2y + C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x,y) = 5x^2 - 1;$$

$$C'(y) = -1;\ C(y) = \int(-1)dy = -y + C_1.$$

Итого, $u = x^3 + 5x^2y - y + C_1$.

Находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$u = x^3 + 5x^2y - y + C_1 = C_2;$$

$$x^3 + 5x^2y - y = C.$$

Дифференциальные уравнения высших порядков

Определение. Дифференциальным уравнением порядка *n* называется уравнение вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0\,.$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же, как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Определение. Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, ... , $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Определение. Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, называется **решением задачи Коши.**

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если функция (n–1)-й переменных вида $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *в некоторой области D (n–1)-мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по* $y, y', ..., y^{(n-1)}$, *то какова бы ни была точка* $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ *в этой области, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, *определенного в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *удовлетворяющее начальным условиям* $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Рассмотрим подробнее методы нахождения решений этих уравнений.

Уравнения, допускающие понижение порядка

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$

Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2;$$

……………………………………………………………

$$y = \int dx \int dx....\int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n.$$

Пример 19. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y_0' = -1$; $y_0'' = 0$.

$$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;\; y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2\right) = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

Подставим начальные условия: $1 = \frac{1}{8} + C_3;\; -1 = \frac{1}{4} + C_2;\; 0 = \frac{1}{2} + C_1;$

$$C_1 = -\frac{1}{2};\; C_2 = -\frac{5}{4};\; C_3 = \frac{7}{8}.$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши):

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}.$$

Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка (k – 1) включительно

Рассмотрим уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$. В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = z;\; y^{(k+1)} = z';\; ...\; y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0$.

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

<u>Пример 20.</u> Найти общее решение уравнения $y''' = \dfrac{y''}{x}$.

Применяем подстановку $z = y''$; $z' = y'''$; $z' = \dfrac{z}{x}$; $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x}$; $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x}$; $\int \dfrac{dz}{z} = \int \dfrac{dx}{x}$;

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \quad z = C_1 x.$$

Произведя обратную замену, получаем

$$y'' = C_1 x; \quad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2; \ y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C.$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3.$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной x, кроме значения $x = 0$.

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной

Рассмотрим уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$. Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\dfrac{dp}{dy} p \right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}} \right) = 0.$$

Если это уравнение проинтегрировать и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ – совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

<u>Пример 21.</u> Найти общее решение уравнения $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Замена переменной: $p = y'$; $y'' = \frac{dp}{dy}p$; $yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0$; $p\left(y\frac{dp}{dy} - p - 4y\right) = 0$;

1) $y\frac{dp}{dy} - p - 4y = 0$; $\frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y}$.

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной: $u = \frac{p}{y}$.

$$u + \frac{du}{dy}y = 4 + u;\ du = 4\frac{dy}{y};\ \int du = 4\int\frac{dy}{y};\ u = 4\ln|y| + 4\ln C_1;\ u = 4\ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y\ln|C_1 y|.$$

С учетом того, что $p = \frac{dy}{dx}$, получаем $\frac{dy}{dx} = 4y\ln|C_1 y|$; $\int\frac{dy}{4y\ln|C_1 y|} = \int dx$;

$$x = \frac{1}{4}\int\frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4}\ln\left|\ln|C_1 y|\right| + C_2.$$

Общий интеграл имеет вид $\ln\left|\ln|C_1 y|\right| = 4x + C$;

2) $p = 0$; $y' = 0$; $y = C$.

Таким образом, получено два общих решения.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Решение линейного однородного дифференциального уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где k = const.

Поскольку $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$; ... $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то $L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n)$.

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ называется **характеристическим многочленом** дифференциального уравнения.

Для того чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^{kx}) = 0;\ \text{т.е.}\ e^{kx}F(k) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то $F(k)=0$ – это уравнение называется **характеристическим уравнением**.

Как и любое алгебраическое уравнение степени *n*, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет *n* корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов *k* характеристическое уравнение может иметь либо *n* различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно-сопряженные корни как различные, так и кратные.

Не будем подробно рассматривать каждый случай, а сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности *m* ставится в соответствие *m* решений:

$$e^{kx};\ xe^{kx};\ \ldots\ x^{m-1}e^{kx}.$$

в) каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \ \text{ и } \ e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

г) каждой паре *m*-кратных комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие 2*m* решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример 22. Решить уравнение $y''' - y = 0$.

Составим характеристическое уравнение: $k^3 - 1 = 0$;

$$(k-1)(k^2+k+1)=0;\ k_1=1;\ k^2+k+1=0;$$

$$D=1-4=-3;\ k_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ k_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Общее решение имеет вид $y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$.

Пример 23. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.
Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0$; $D = -16$; $k_1 = -1 + 2i$;
$k_2 = -1 - 2i$.
Общее решение: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Пример 24. Решить уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.
Характеристическое уравнение: $k^2 - k - 2 = 0$; $k_1 = -1$; $k_2 = 2$;
Общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

Пример 25. Решить уравнение $y^V - 9y''' = 0$.
Характеристическое уравнение: $k^5 - 9k^3 = 0$; $k^3(k^2 - 9) = 0$;

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0;\ k_4 = 3;\ k_5 = -3;$$

Общее решение: $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}$.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$.
С учетом обозначения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = L(x)$ можно записать $L(x) = f(x)$. При этом будем полагать, что правая часть этого уравнения непрерывны на некотором интервале (конечном или бесконечном).

Теорема. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения* $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$ *в некоторой области есть сумма его частного решения и общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.*

Таким образом, в соответствии с теоремой, для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения и каким-то образом отыскать одно частное решение неоднородного уравнения. В случае, если уравнение имеет правую часть специального вида, отыскание частного решения не представляет трудностей.

Уравнения с правой частью специального вида

Различают следующие случаи:

I. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x},$$

где $P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + ... + A_m$ – многочлен степени m.

Тогда частное решение ищется в виде

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x).$$

Здесь *Q(x)* – многочлен той же степени, что и *P(x)*, но с неопределенными коэффициентами, а r – число, показывающее, сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (кратность корня).

Пример 26. Решить уравнение $y''' - 4y' = x$.

Решим соответствующее однородное уравнение: $y''' - 4y' = 0$.

$$k^3 - 4k = 0;\ k(k^2 - 4) = 0;\ k_1 = 0;\ k_2 = 2;\ k_3 = -2;\ \ y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}.$$

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения.

Сопоставим правую часть уравнения с видом правой части, рассмотренным выше.

$$P(x) = x;\ \alpha = 0.$$

Частное решение ищем в виде $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$, где $r = 1;\ \alpha = 0;\ Q(x) = Ax + B$, т.е. $y = Ax^2 + Bx.$ Теперь определим неизвестные коэффициенты A и B.

Подставим частное решение в общем виде в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

$$y' = 2Ax + B;\ y'' = 2A;\ y''' = 0;$$

$$0 - 8Ax - 4B = x;\ -8A = 1;\ A = -\frac{1}{8};\ B = 0.$$

Частное решение: $y = -\dfrac{x^2}{8}$.

Тогда общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = -\frac{x^2}{8} + C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}.$$

II. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right].$$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right],$$

где число r показывает, сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения (кратность корня), а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени m, где m-большая из степеней m_1 и m_2.

Заметим, что если правая часть уравнения является линейной комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

Следовательно, если уравнение имеет вид $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого уравнения будет $y = y_1 + y_2$, где y_1 и y_2 – частные решения вспомогательных уравнений

$$L(y) = f_1(x) \text{ и } L(y) = f_2(x).$$

Рассмотрим примеры применения описанных методов.

<u>Пример 27.</u> Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x.$

Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin x)$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0;\ k_{1,2} = \pm\ i.$

1. Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

Получаем: $\alpha = 0,\ r = 0,\ Q(x) = Ax + B;$ т.е. $y_1 = Ax + B;$

$$y_1' = A;\ y_1'' = 0;\quad Ax + B = x;\ A = 1;\ B = 0; \text{ тогда } y_1 = x.$$

2. Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде

$$y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x).$$

Анализируя функцию $f_2(x)$, получаем: $P_1(x) = 0;\ P_2(x) = -1;\ \alpha = 0;\ \beta = 2;\ r = 0;$

Таким образом, $y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x;$

$$y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;\quad y_2'' = -4C2\cos x - 4D\sin 2x;$$

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$$

$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x;\ A = 0;\ B = \frac{1}{3};\quad y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x.$$

Тогда искомое частное решение имеет вид $y = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x.$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$$

<u>Пример 28.</u> Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 3e^x$.

Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$k^2 - 2k + 1 - 0;\quad k_1 = k_2 = 1.$$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.
Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x);\ \alpha = 1;\ r = 2;\ Q(x) = C;\quad y = Cx^2 e^x.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$y' = 2Cxe^x + Cx^2 e^x;\ y'' = 2Ce^x + 2Cxe^x + 2Cxe^x + Cx^2 e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$2Ce^x + 4Cxe^x + Cx^2 e^x - 4Cxe^x - 2Cx^2 e^x + Cx^2 e^x = 3e^x;\quad 2C = 3;\ C = \frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y = \dfrac{3}{2} x^2 e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \dfrac{3}{2} x^2 e^x$.

<u>Пример 29.</u> Решить уравнение $y''' - y' = x^2 - 1$.
Характеристическое уравнение: $k^3 - k = 0;\ k(k^2 - 1) = 0;\ k_1 = 0;\ k_2 = 1; k_3 = -1$.
Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.
Частное решение неоднородного уравнения: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

$$\alpha = 0;\ r = 1;\ Q(x) = Ax^2 + Bx + C;\quad y = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Находим производные и подставляем их в исходное неоднородное уравнение:

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C;\ y'' = 6Ax + 2B;\ y''' = 6A;$$

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 - 1;$$

$$-3A = 1;\ -2B = 0;\ 6A - C = -1;\quad A = -\frac{1}{3};\ B = 0;\ C = -1;$$

Получаем общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - \frac{1}{3} x^3 - x.$$

Метод вариации произвольных постоянных

Для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений также удобно применять метод **вариации произвольных постоянных**.
Для этого сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i.$$

Затем, полагая коэффициенты C_i функциями от x, ищется решение неоднородного уравнения

$$y=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i.$$

Можно доказать, что для нахождения функций $C_i(x)$ надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i=0,\\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i'=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)}=f(x).\end{cases}$$

<u>Пример 30.</u> Решить уравнение $y''+y=x-\sin 2x$.
Решаем линейное однородное уравнение $y''+y=0$.

$$k^2+1=0;\ k_1=i;\ k_2=-i.$$

$$y=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x);\ \alpha=0;\ \beta=1;$$

$$y=A\cos x+B\sin x.$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y=A(x)\cos x+B(x)\sin x.$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases}A'(x)\cos x+B'(x)\sin x=0,\\ -A'(x)\sin x+B'(x)\cos x=x-\sin 2x.\end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases}B'(x)=-A'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x},\\ -A'(x)\sin x-A'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}=x-\sin 2x,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{-A'(x)}{\sin x}=x-\sin 2x,\\ B'(x)=\cos x(x-\sin 2x).\end{cases}$$

Из соотношения $A'(x)=2\sin^2 x\cos x-x\sin x$ найдем функцию $A(x)$.

$$A(x)=\int\left(2\sin^2 x\cos x-x\sin x\right)dx=2\int\sin^2 x\cos x dx-\int x\sin x dx=\frac{2}{3}\sin^3 x-\int x\sin x dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=x;\ dv=\sin x dx;\\ du=dx;\ v=-\cos x\end{matrix}\right\}=\frac{2}{3}\sin^3 x+x\cos x-\int\cos x dx=\frac{2}{3}\sin^3 x+x\cos x-\sin x+C_1.$$

Теперь находим $B(x)$.

$$B(x)=\int x\cos x dx-2\int\cos^2 x\sin x dx=\begin{Bmatrix} u=x;\ dv=\cos x dx; \\ du=dx;\ v=\sin x; \end{Bmatrix}=$$

$$=x\sin x-\int\sin x dx+\frac{2}{3}\cos^3 x=\frac{2}{3}\cos^3 x+x\sin x+\cos x+C_2.$$

Подставляем полученные значения в формулу общего решения неоднородного уравнения:

$$y=\frac{2}{3}\sin^3 x\cos x+x\cos^2 x-\sin x\cos x+C_1\cos x+\frac{2}{3}\sin x\cos^3 x+x\sin^2 x+\sin x\cos x+$$

$$+C_2\sin x=\frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)+x(\sin^2 x+\cos^2 x)+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Окончательный ответ: $y=\frac{1}{3}\sin 2x+x+C_1\cos x+C_2\sin x.$

Таким образом, удалось избежать нахождения частного решения неоднородного уравнения методом подбора.

Вообще говоря, метод вариации произвольных постоянных пригоден для нахождения решений любого линейного неоднородного уравнения. Но т.к. нахождение решений соответствующего однородного уравнения в некоторых примерах может быть достаточно сложной задачей, этот метод в основном применяется для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Дифференциальные уравнения в экономике

Дифференциальные уравнения имеют достаточно широкое применение в экономике. Исчерпывающих правил для составления дифференциальных уравнений, описывающих процессы в экономике, нет. Рассмотрим некоторые рекомендации.

Составление дифференциального уравнения по условию конкретной задачи включает обычно следующие основные этапы:

а) рассматриваем изучаемый процесс на достаточно малом промежутке его изменения (отрезок времени Δt, приращение Δx фактора, определяющего течение процесса) и предполагаем, что на этом промежутке течение процесса подчиняется достаточно простым закономерностям (линейной зависимости, пропорциональности, постоянстве некоторых факторов);

б) на выбранном промежутке составляем математическое описание процесса, связывая приращение искомой функции, характеризующей процесс, с другими переменными и постоянными в соответствии с условиями задачи;

в) переходим к пределу, заменяя приращения дифференциалами соответствующих переменных. В результате получаем описание процесса в форме дифференциального уравнения.

Пример 31. Рассмотрим задачу из области социологических исследований. Пусть некоторое сообщение распространяется среди множества N человек. Предполагая, что число встреч для передачи информации за время Δt пропорционально количеству людей, уже владеющих этой информацией, количеству людей, не владеющих информацией, и промежутку времени Δt, определить закон распространения сообщения во времени.

Решение. Обозначим число людей, владеющих информацией, через Δy. Тогда, согласно условию задачи, число всреч для передачи информации (число людей, получающих информацию Δy за время Δt) будет определятся равенством $\Delta y = ky\,(N - y)\,\Delta t$.

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим $dy = ky\,(N - y)\,\mathrm{d}t$.
Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{y(N-y)} = kdt \Rightarrow \int \frac{dy}{y(N-y)} = \int kdt,$$

$$\frac{1}{N}\left(\ln y - \ln\left(N-y\right)\right) + \frac{1}{N}\ln c = kt \Rightarrow \ln\frac{y.c}{N-y} = Nkt,$$

$$\frac{yc}{N-y} = e^{Nkt} \Rightarrow y = \frac{N}{1+ce^{-Nkt}}.$$

Постоянную C можно определять из начальных условий: $y(0) = y_0$.

Частное решение: $y = \dfrac{N}{1+\dfrac{N-y_0}{y_0}e^{-Nkt}}$.

График этой кривой экономисты называют *логистической*.
Коэффициент k характеризует скорость передачи информации.

Пример 32. Из статистических материалов известно, что число новорожденных за год пропорционально численности населения с коэффициентом пропорциональности k_1, а число умерших за год также пропорционально численности населения с коэффициентом пропорциональности k_2. Найти формулу, определяющую численность населения в любой момент времени t, если известна численность населения y_0 в момент $t = 0$. Предполагается, что не имеют места эмиграция и иммиграция.

Решение. Обозначим численность населения в момент времени t через y, тогда по условию задачи число родившихся за единицу времени равно k_1y, а число умерших – k_2y. Прирост населения за единицу времени выражается разностью $k_1y - k_2y = (k_1 - k_2)\,ydt$, а за малый промежуток времени dt: $dy = (k_1 - k_2)\,ydt$.

Число $k_1 - k_2 = k$ называют коэффициентом естественного прироста. Проинтегрировав уравнение, получим $y = C\mathrm{e}^{k\,t}$.

Используя начальное условие $y(0) = y_0$, находим $C = y_0$. Поэтому искомая формула принимает вид $y = y_0\,e^{kt}$. При $k > 0$ получаем рост численности населения, при $k < 0$ – убывание, при $k = 0$ численность населения сохраняется стабильной во времени.

В ряде задач две переменные величины x и время t, участвующие в них, обладают тем общим свойством, что скорость изменения одной из них (x) по отношению к другой (t) пропорциональна наличному количеству величины x в рассматриваемый момент времени t.

Учитывая, что скорость изменения величины x есть производная $\frac{dx}{dt}$, обозначив коэффициент пропорциональности через k, получим дифференциальное уравнение, описывающее этот процесс: $\frac{dx}{dt} = kx$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим $x=Ce^{kt}$.

Решением является показательная функция. Условие задачи должно содержать данные:

1) для определения произвольной постоянной, т.е. значение x_0 величины x в момент времени $t = t_0$: $x\,(t_0) = x_0$;
2) для определения коэффициента пропорциональности k.

Уравнение описывает процесс непрерывного роста (при $k > 0$) или непрерывного убывания (при $k < 0$).

Рассмотрим конкретный экономический пример.

Пример 33. Будем полагать, что некоторая продукция продается по фиксированной цене P. Обозначим через $Q\,(t)$ количество продукции, реализованной на момент времени t; тогда на этот момент времени получен доход, равный $PQ(t)$. Пусть часть указанного дохода расходуется на инвестиции в производство реализуемой продукции, т.е.

$$I\,(t) = m\,PQ\,(t), \tag{1}$$

где m – норма инвестиции, постоянное число, причем $0 < m < 1$.

Если исходить из предположения о ненасыщаемости рынка (или о полной реализации производимой продукции), то в результате расширения производства будет получен прирост дохода, часть которого опять будет использована для расширения выпуска продукции. Это приведет к росту скорости выпуска (акселерации), причем скорость выпуска пропрорциональна увеличению инвестиций, т.е.

$$Q' = \gamma I, \tag{2}$$

где $1/\gamma$ – норма акселерации. Подставив в (2) формулу (1), получим

$$Q' = kQ, \quad \text{где} \quad k = \gamma m P. \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение (3) представляет собой уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Общее решение этого уравнения имеет вид $Q = C\,\mathrm{e}^{kt}$, где C – произвольная простоянная. Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ зафиксирован (задан) объем выпуска продукции Q_0:

$$Q_0 = C\ e^{kt_0}.$$

Тогда из этого условия можно выразить постоянную C:

$$C = Q_0\ e^{-kt_0}.$$

Отсюда получаем частное решение уравнения (3) – решение задачи Коши для этого уравнения:

$$Q = Q_0\ e^{k(t-t_0)}. \tag{4}$$

Данную модель называют **моделью естественного роста выпуска.** Мы уже встречались с подобной моделью в примере 2.

Усложним условия примера 3 и рассмотрим **рост выпуска в условиях конкуренции.**

Пример 34. Будем полагать, что рынок не насыщается. Пусть $P = P(Q)$ – убывающая функция, т.е. с увеличением объема продукции на рынке цена на нее падает: $dP/dQ < 0$. Теперь из формул (1) – (3) мы получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно Q с разделяющимися переменными:

$$Q' = \alpha P(Q)Q, \tag{5}$$

где $\alpha = \gamma m$.

Поскольку все сомножители в правой части этого уравнения положительны, то $Q' > 0$, т.е. функция $Q(t)$ возрастающая. Характер возрастания функции определяется ее второй производной.

Из уравнения (5) получаем $Q'' = a\left[Q'P(Q) + Q\dfrac{dP}{dQ}Q'\right] = aQ'\left(P + \dfrac{dP}{dQ}Q\right).$

Это равенство можно преобразовать, введя **эластичность спроса** $E(P) = \dfrac{dQ}{dP}\ \dfrac{P}{Q}$, откуда $Q'' = a \cdot Q'P\left(1 + \dfrac{dP}{dQ}\dfrac{Q}{P}\right)$, или, так как $\dfrac{dQ}{dP} < 0$ и, значит, $E<0$, окончательно получаем

$$Q'' = aQ'P(1 - 1/|E|). \tag{6}$$

Из уравнения (6) следует, что при эластичном спросе, т.е., когда $|E| > 1$, $Q'' > 0$ и график функции $Q(t)$ имеет направление выпуклости вниз, что означает прогрессирующий рост; при неэластичном спросе, когда $|E| < 1$, $Q'' < 0$ – направление выпуклости функции $Q(t)$ вверх, что означает замедленный рост (насыщение).

Для простоты примем зависимость в виде линейной функции

$$P(Q) = a–bQ, \quad a>0, \quad b>0. \qquad (7)$$

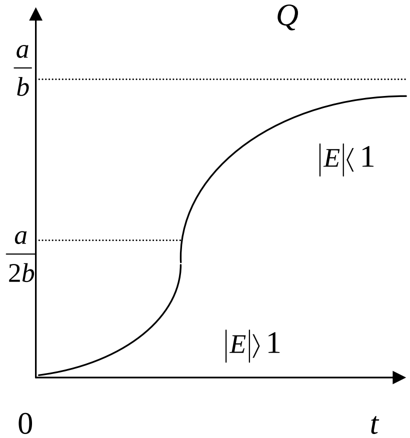
Тогда уравнение (5) имеет вид

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q, \qquad (8)$$

откуда

$$Q'' = \alpha Q' (a - 2bQ). \qquad (9)$$

Из соотношений (8) и (9) получаем $Q' = 0$ при $Q = 0$ и при $Q = a/b$,
$Q'' > 0$ при $Q < a/(2b)$ и $Q'' < 0$ при Q > $a/(2b)$;
$Q = a/(2b)$ – точка перегиба графика функции $Q = Q(t)$.



Приведенный на рисунке график этой функции (одной из интегральных кривых дифференциального уравнения) носит название **логистической кривой**. Аналогичные кривые характеризуют и другие процессы, например размножение бактерий в органической среде обитания, динамику эпидемий внутри ограниченной общности биологических организмов и др.

Пример 35. Рассмотрим модель рынка с прогнозируемыми ценами. В простых моделях рынка обычно полагают, что спрос и предложение зависят только от текущей цены на товар. Однако в реальных ситуациях они зависят еще и от тенденции ценообразования, и от темпов изменения цены. В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени t функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены $P(t)$.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть функции спроса D и предложения S имеют следующие зависимости от цены P и ее производных:

$$D(t) = 3P'' - P' - 2P + 18,$$
$$S(t) = 4P'' + P' - 3P + 3.$$

Принятые здесь зависимости вполне реалистичны: поясним слагаемые с производными функции цены.

1. Спрос «подогревается» темпом изменения цены: если темп роста растет ($P'' > 0$), рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот. Быстрый рост цены отпугивает покупателя, поэтому слагаемое с первой производной функции цены входит со знаком «минус».

2. Предложение в еще большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при P'' в функции $S(t)$ больше, чем в $D(t)$. Рост цены также увеличивает предложение, поэтому слагаемое, содержащее P', входит в выражение для $S(t)$ со знаком "плюс".

Требуется установить зависимость цены от времени. Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D = S$, приравняем правые части уравнений модели. После приведения подобных получаем

$$P'' + 2P' + 5P = 15.$$

Данное соотношение представляет линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $P(t)$. Общее решение такого уравнения состоит из суммы какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения,

$$P' + 2P + 5P = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 2k + 5 = 0$. Его корни – комплексно сопряженные числа, и, следовательно, общее решение уравнения (3) дается формулой $\tilde{P}(t) = e^{-t}\,(\mathrm{C}_1\cos 2t + \mathrm{C}_2\sin 2t)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В качестве частного решения неоднородного уравнения (2) возьмем решение $P = P_{st}$ – постоянную величину как **установившуюся** цену. Подстановка в уравнение (2) дает значение $P_{st} = 3$. Таким образом, общее решение уравнения (2) имеет вид

$$P(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

Нетрудно видеть, что $P(t) \to P_{st} = 3$ при $t \to \infty$, т.е. все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $P = 3$ и колеблются около нее. Это означает, что все цены стремятся к установлению с колебаниями около установившейся цены P_{st}, причем амплитуда этих колебаний затухает со временем.

Контрольные вопросы

1. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные и приводящиеся к однородным.
2. Линейные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли.
3. Уравнения в полных дифференциалах.
4. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка методом изоклин.

5. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Общее и частное решения. Общий и частный интегралы.
6. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
7. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней характеристического уравнения).
8. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней характеристического уравнения).
9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения.
10. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Контрольная работа №8
по теме “Дифференциальные уравнения”

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x,y)=C.$)

1.1. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$

1.2. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$

1.3. $\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy.$

1.4. $\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x^2ydy.$

1.5. $6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx.$

1.6. $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0.$

1.7. $\left(\mathrm{e}^{2x}+5\right)dy+y\,\mathrm{e}^{2x}\,dx=0.$

1.8. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0.$

1.9. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$

1.10. $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0.$

1.11. $y\left(4+\mathrm{e}^x\right)dy-\mathrm{e}^x\,dx=0.$

1.12. $\sqrt{4-x^2}\,y'+xy^2+x=0.$

1.13. $2xdx-2ydy=x^2ydy-2xy^2dx.$

1.14. $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0.$

1.15. $\left(\mathrm{e}^x+8\right)dy-y\,\mathrm{e}^x\,dx=0.$

1.16. $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0.$

1.17. $6xdx-ydy=yx^2dy-3xy^2dx.$

1.18. $y\ln y+xy'=0.$

1.19. $\left(1+\mathrm{e}^x\right)y'=y\,\mathrm{e}^x.$

1.20. $\sqrt{1-x^2}\,y'+xy^2+x=0.$

1.21. $6xdx-2ydy=2yx^2dy-3xy^2dx.$

1.22. $y\left(1+\ln y\right)+xy'=0.$

1.23. $\left(3+\mathrm{e}^x\right)yy'=\mathrm{e}^x.$

1.24. $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}\,yy'=0.$

1.25. $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx.$

1.26. $\sqrt{5+y^2}dx + 4\left(x^2y + y\right)dy = 0.$

1.27. $\left(1+e^x\right)yy' = e^x.$

1.28. $3\left(x^2y + y\right)dy + \sqrt{2+y^2}dx = 0.$

1.29. $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx.$

1.30. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}\,y' = 0.$

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

2.1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$

2.2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$

2.3. $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

2.4. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$

2.5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$

2.6. $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$

2.7. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$

2.8. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

2.9. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$

2.10. $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$

2.11. $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$

2.12. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

2.13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$

2.14. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$

2.15. $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$

2.16. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

2.17. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$

2.18. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$

2.19. $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$

2.20. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

2.21. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$

2.22. $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$

2.23. $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$

2.24. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$

2.25. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5.$

2.26. $xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$

2.27. $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}.$

2.28. $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

2.29. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10.$

2.30. $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

Задача 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

3.1. $y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}.$

3.2. $y' = \frac{x+y-2}{2x-2}.$

3.3. $y' = \frac{3y-x-4}{3x+3}.$

3.4. $y' = \frac{2y-2}{x+y-2}.$

3.5. $y' = \frac{x+y-2}{3x-y-2}.$

3.6. $y' = \frac{2x+y-3}{x-1}.$

3.7. $y' = \dfrac{x+y-8}{3x-y-8}$.

3.8. $y' = \dfrac{x+3y+4}{3x-6}$.

3.9. $y' = \dfrac{3y+3}{2x+y-1}$.

3.10. $y' = \dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$.

3.11. $y' = \dfrac{x-2y+3}{-2x-2}$.

3.12. $y' = \dfrac{x+8y-9}{10x-y-9}$.

3.13. $y' = \dfrac{2x+3y-5}{5x-5}$.

3.14. $y' = \dfrac{4y-8}{3x+2y-7}$.

3.15. $y' = \dfrac{x+3y-4}{5x-y-4}$.

3.16. $y' = \dfrac{y-2x+3}{x-1}$.

3.17. $y' = \dfrac{x+2y-3}{x-1}$.

3.18. $y' = \dfrac{3x+2y-1}{x+1}$.

3.19. $y' = \dfrac{5y+5}{4x+3y-1}$.

3.20. $y' = \dfrac{x+4y-5}{6x-y-5}$.

3.21. $y' = \dfrac{x+y+2}{x+1}$.

3.22. $y' = \dfrac{2x+y-3}{4x-4}$.

3.23. $y' = \dfrac{2x+y-3}{2x-2}$.

3.24. $y' = \dfrac{y}{2x+2y-2}$.

3.25. $y' = \dfrac{x+5y-6}{7x-y-6}$.

3.26. $y' = \dfrac{x+y-4}{x-2}$.

3.27. $y' = \dfrac{2x+y-1}{2x-2}$.

3.28. $y' = \dfrac{3y-2x+1}{3x+3}$.

3.29. $y' = \dfrac{6y-6}{5x+4y-9}$.

3.30. $y' = \dfrac{x+6y-7}{8x-y-7}$.

Задача 4. Найти решение задачи Коши.

4.1. $y' - y/x = x^2, \quad y(1) = 0.$

4.2. $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$

4.3. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0.$

4.4. $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2.$

4.5. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2.$

4.6. $y' - \dfrac{1}{x+1} y = \mathrm{e}^x (x+1), \quad y(0) = 1.$

4.7. $y' - \dfrac{y}{x} = x \sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

4.8. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}.$

4.9. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$

4.10. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2} y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \dfrac{2}{3}.$

4.11. $y' - \dfrac{2x-5}{x^2} y = 5, \quad y(2) = 4.$

4.12. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}\mathrm{e}^x, \quad y(1) = \mathrm{e}.$

4.13. $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

4.14. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$

4.15. $y' + \dfrac{2}{x} y = x^3, \quad y(1) = -5/6.$

4.16. $y' + \dfrac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$

4.17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$

4.18. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1.$

4.19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$

4.20. $y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = \mathrm{e}^{-1}.$

4.21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$

4.22. $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$

4.23. $y' - \frac{2}{x+1} y = \mathrm{e}^x (x+1)^2, \quad y(0) = 1.$

4.24. $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$

4.25. $y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3, \ y(0) = 1/2.$

4.26. $y' - y\cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$

4.27. $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -1/2.$

4.28. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

4.29. $y' - 3x^2 y = x^2 (1 + x^3)/3, \quad y(0) = 0.$

4.30. $y' - y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1.$

Задача 5. Найти решение задачи Коши.

5.1. $y' + xy = (1+x)\mathrm{e}^{-x} y^2, \quad y(0) = 1.$

5.2. $xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = 1/2.$

5.3. $2(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 2.$

5.4. $y' + 4x^3 y = 4(x^3+1)\mathrm{e}^{-4x} y^2, \quad y(0) = 1.$

5.5. $xy' - y = -y^2 (\ln x + 2)\ln x, \quad y(1) = 1.$

5.6. $2(y' + xy) = (1+x)\mathrm{e}^{-x} y^2, \quad y(0) = 2.$

5.7. $3(xy' + y) = y^2 \ln x, \ y(1) = 3.$

5.8. $2y' + y\cos x = y^{-1} \cos x (1 + \sin x), \ y(0) = 1.$

5.9. $y' + 4x^3 y = 4y^2 \mathrm{e}^{4x} (1 - x^3), \quad y(0) = -1.$

5.10. $3y' + 2xy = 2xy^{-2} \mathrm{e}^{-2x^2}, \quad y(0) = -1.$

5.11. $2xy' - 3y = -(5x^2+3)y^3, \quad y(1) = 1/\sqrt{2}.$

5.12. $3xy' + 5y = (4x-5)y^4, \quad y(1) = 1.$

5.13. $2y' + 3y\cos x = \mathrm{e}^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, \ y(0) = 1.$

5.14. $3(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 3.$

5.15. $y' - y = 2xy^2, \quad y(0) = 1/2.$

5.16. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, \ y(1) = 1/2\sqrt{2}.$

5.17. $y' + 2xy = 2x^3 y^3, \quad y(0) = \sqrt{2}.$

5.18. $xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1.$

5.19. $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)\mathrm{e}^{2x} y^{-1}, \ y(0) = 2.$

5.20. $4y' + x^3 y = (x^3 + 8)\mathrm{e}^{-2x} y^2, \ y(0) = 1.$

5.21. $8xy' - 12y = -(5x^2+3)y^3, \quad y(1) = \sqrt{2}.$

5.22. $2(y' + y) = xy^2, \quad y(0) = 2.$

5.23. $y' + xy = (x-1)\mathrm{e}^{x} y^2, \quad y(0) = 1.$

5.24. $xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 1.$

5.25. $y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1.$

5.26. $2(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 2.$

5.27. $y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1.$

5.28. $y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x,\ y(1) = 1/\operatorname{sh}1.$

5.29. $2(y' + xy) = (x-1)\mathrm{e}^x y^2, \quad y(0) = 2.$

5.30. $y' - y \operatorname{tg} x = -(2/3) y^4 \sin x,\ y(0) = 1.$

Задача 6. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

6.1. $3x^2 \mathrm{e}^y\, dx + \left(x^3 \mathrm{e}^y - 1\right) dy = 0.$

6.2. $\left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}\,dy = 0.$

6.3. $\left(3x^2 + 4y^2\right)dx + \left(8xy + \mathrm{e}^y\right)dy = 0.$

6.4. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0.$

6.5. $\left(y^2 + y\sec^2 x\right)dx + (2xy + \operatorname{tg} x)\,dy = 0.$

6.6. $\left(3x^2 y + 2y + 3\right)dx + \left(x^3 + 2x + 3y^2\right)dy = 0.$

6.7. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0.$

6.8. $\left[\sin 2x - 2\cos(x+y)\right]dx - 2\cos(x+y)\,dy = 0.$

6.9. $\left(xy^2 + x/y^2\right)dx + \left(x^2 y - x^2/y^3\right)dy = 0.$

6.10. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}\,dy = 0.$

6.11. $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\,dx - \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y\right)dy = 0.$

6.12. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0.$

6.13. $\frac{1+xy}{x^2 y}\,dx + \frac{1-xy}{xy^2}\,dy = 0.$

6.14. $\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}\,dy = 0.$

6.15. $\frac{y}{x^2}\,dx - \frac{xy+1}{x}\,dy = 0.$

6.16. $\left(x\mathrm{e}^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}\,dy = 0.$

6.17. $xdx + ydy + (xdy - ydx)\big/\left(x^2 + y^2\right) = 0.$

6.18. $\left(\frac{y}{x^2+y^2} + \mathrm{e}^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0.$

6.19. $\mathrm{e}^y\, dx + \left(\cos y + x\mathrm{e}^y\right)dy = 0.$

6.20. $\left(y^3 + \cos x\right)dx + \left(3xy^2 + \mathrm{e}^y\right)dy = 0.$

6.21. $x\mathrm{e}^{y^2}\, dx + \left(x^2 y \mathrm{e}^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y\right)dy = 0.$

6.22. $\left(5xy^2 - x^3\right)dx + \left(5x^2 y - y\right)dy = 0.$

6.23. $\left[\cos\left(x + y^2\right) + \sin x\right]dx + 2y\cos\left(x + y^2\right)dy = 0.$

6.24. $\left(x^2 - 4xy - 2y^2\right)dx + \left(y^2 - 4xy - 2x^2\right)dy = 0.$

7.25. $\left(\sin y + y\sin y + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$

6.26. $\left(1 + \frac{1}{y}\mathrm{e}^{x/y}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{x/y}\right)dy = 0.$

7.27. $\frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2 + y^2} = 0.$

6.28. $2\left(3xy^2 + 2x^3\right)dx + 3\left(2x^2 y + y^2\right)dy = 0.$

7.29. $\left(3x^3 + 6x^2 y + 3xy^2\right)dx + \left(2x^3 + 3x^2 y\right)dy = 0.$

6.30. $xy^2 dx + y\left(x^2 + y^2\right)dy = 0.$

Задача 8. Найти общее решение дифференциального уравнения.

8.1. $y'''x\ln x = y''$.

8.2. $xy''' + y'' = 1$.

8.3. $2xy''' = y''$.

8.4. $xy''' + y'' = x + 1$.

8.5. $\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$.

8.6. $x^2 y'' + xy' = 1$.

8.7. $y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0$.

8.8. $x^3 y''' + x^2 y'' = 1$.

8.9. $\operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''$.

8.10. $y''' \operatorname{cth} 2x = 2y''$.

8.11. $x^4 y'' + x^3 y' = 1$.

8.12. $xy''' + 2y'' = 0$.

8.13. $\left(1 + x^2\right) y'' + 2xy' = x^3$.

8.14. $x^5 y''' + x^4 y'' = 1$.

8.15. $xy''' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0$.

8.16. $xy''' + y'' + x = 0$.

8.17. $\left(1 + x^2\right) y'' + 2xy' = 12x^3$.

8.18. $xy''' + y'' = \sqrt{x}$.

8.19. $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1$.

8.20. $y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''$.

8.21. $y''' \operatorname{th} 7x = 7y''$.

8.22. $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$.

8.23. $\operatorname{cth} x \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} = 0$.

8.24. $(x+1) y''' + y'' = (x+1)$.

8.25. $(1 + \sin x) y''' = \cos x \cdot y''$.

8.26. $xy''' + y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

8.27. $-xy''' + 2y'' = \dfrac{2}{x^2}$.

8.28. $\operatorname{cth} xy'' + y' = \operatorname{ch} x$.

8.29. $x^4 y'' + x^3 y' = 4$.

8.30. $y'' + \dfrac{2x}{x^2 + 1} y' = 2x$.

Задача 9. Найти решение задачи Коши.

9.1. $4y^3 y'' = y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = 1\big/\left(2\sqrt{2}\right)$.

9.2. $y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$.

9.3. $y'' y^3 + 64 = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2$.

9.4. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

9.5. $y'' = 32\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 4.$

9.6. $y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7.$

9.7. $y''y^3 + 49 = 0, \quad y(3) = -7, \quad y'(3) = -1.$

9.8. $4y^3y'' = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}/2, \quad y'(0) = 1/\sqrt{2}.$

9.9. $y'' + 8\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

9.10. $y'' = 72y^3, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 6.$

9.11. $y''y^3 + 36 = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$

9.12. $y'' = 18\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 3.$

9.13. $4y^3y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = 1/\sqrt{2}.$

9.14. $y'' = 50y^3, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 5.$

9.15. $y''y^3 + 25 = 0, \quad y(2) = -5, \quad y'(2) = -1.$

9.16. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$

9.17. $y'' = 8\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 2.$

9.18. $y'' = 32y^3, \quad y(4) = 1, \quad y'(4) = 4.$

9.19. $y''y^3 + 16 = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 2.$

9.20. $y'' + 32\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$

9.21. $y'' = 50\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 5.$

9.22. $y'' = 18y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$

9.23. $y''y^3 + 9 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$

9.24. $y^3y'' = 4(y^4 - 1), \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$

9.25. $y''y^3 + 1 = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = -1.$

9.26. $y'' = 8y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

9.27. $y''y^3 + 4 = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2.$

9.28. $y'' = 2\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 1.$

9.29. $y^3 y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$

9.30. $y'' = 2y^3, \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = 1.$

Задача 10. Найти общее решение дифференциального уравнения.

10.1. $y'' - 2y' = 2\,\mathrm{ch}\,2x.$

10.2. $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2\mathrm{e}^x.$

10.3. $y''' - y' = 2\mathrm{e}^x + \cos x.$

10.4. $y'' - 3y' = 2\,\mathrm{ch}\,3x.$

10.5. $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4\mathrm{e}^{2x}.$

10.6. $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4\mathrm{e}^x.$

10.7. $y'' - 4y' = 16\,\mathrm{ch}\,4y.$

10.8. $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18\mathrm{e}^{3x}.$

10.9. $y''' - 4y' = 24\mathrm{e}^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x.$

10.10. $y'' - 5y' = 50\,\mathrm{ch}\,5x.$

10.11. $y'' + 16y = 16\cos 4x - 16\mathrm{e}^{4x}.$

10.12. $y''' - 9y' = -9\mathrm{e}^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x.$

10.13. $y'' - y' = 2\,\mathrm{ch}\,x.$

10.14. $y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x + 50\mathrm{e}^{5x}.$

10.15. $y''' - 16y' = 48\mathrm{e}^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x.$

10.16. $y'' + 2y' = 2\,\mathrm{sh}\,2x.$

10.17. $y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36\mathrm{e}^{6x}.$

10.18. $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50\mathrm{e}^{5x}.$

10.19. $y'' + 3y' = 2\,\mathrm{sh}\,3x.$

10.20. $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98\mathrm{e}^{7x}.$

10.21. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x)$.

10.22. $y'' + 4y' = 16 \operatorname{sh} 4x$.

10.23. $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}$.

10.24. $y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x)$.

10.25. $y'' + 5y' = 50 \operatorname{sh} 5x$.

10.26. $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}$.

10.27. $y''' - 64y' = 128\cos 8x - 64e^{8x}$.

10.28. $y'' + y' = 2 \operatorname{sh} x$.

10.29. $y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x - 200e^{10x}$.

10.30. $y''' - 81y' = 162e^{9x} + 81\sin 9x$.

Задача 11. Найти решение задачи Коши.

11.1. $y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \cos \pi x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

11.2. $y'' + 3y' = 9e^{3x} / (1 + e^{3x})$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = 3(1 - \ln 2)$.

11.3. $y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x$, $y(\pi/4) = 5$, $y'(\pi/4) = 4$.

11.4. $y'' - 6y' + 8y = 4 / (1 + e^{-2x})$, $y(0) = 1 + 2\ln 2$, $y'(0) = 6\ln 2$.

11.5. $y'' - 9y' + 18y = 9e^{3x} / (1 + e^{-3x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

11.6. $y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \sin \pi x = 1$, $y(1/2)$, $y'(1/2) = \pi^2 / 2$.

11.7. $y'' + \dfrac{1}{\pi^2} y = \dfrac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

11.8. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$, $y(0) = 4\ln 4$, $y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$.

11.9. $y'' + y = 4 \operatorname{ctg} x$, $y(\pi/2) = 4$, $y'(\pi/2) = 4$.

11.10. $y'' - 6y' + 8y = 4 / (2 + e^{-2x})$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 10\ln 3$.

11.11. $y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x} / (2 + e^{2x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

11.12. $y'' + 9y = 9/\sin 3x, \quad y(\pi/6) = 4, \quad y'(\pi/6) = 3\pi/2.$

11.13. $y'' + 9y = 9/\cos 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

11.14. $y'' - y' = e^{-x}/(2 + e^{-x}), \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = \ln 9 - 1.$

11.15. $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x, \quad y(\pi/4) = 3, \quad y'(\pi/4) = 2.$

11.16. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 8\ln 2, \quad y'(0) = 14\ln 2.$

11.17. $y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}/(1 + e^{-2x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

11.18. $y'' + 16y = 16/\sin 4x, \quad y(\pi/8) = 3, \quad y'(\pi/8) = 2\pi.$

11.19. $y'' + 16y = 16/\cos 4x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$

11.20. $y'' - 2y' = 4e^{-2x}/(1 + e^{-2x}), \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = \ln 4 - 2.$

11.21. $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}(x/2), \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = 1/2.$

11.22. $y'' - 3y' + 2y = 1/(2 + e^{-x}), \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 5\ln 3.$

11.23. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}/(2 + e^{x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

11.24. $y'' + 4y = 4/\sin 2x, \quad y(\pi/4) = 2, \quad y'(\pi/4) = \pi.$

11.25. $y'' + 4y = 4/\cos 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

11.26. $y'' + y' = e^{x}/(2 + e^{x}), \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = 1 - \ln 9.$

11.27. $y'' + y = 2\operatorname{ctg} x, \quad y(\pi/2) = 1, \quad y'(\pi/2) = 2.$

11.28. $y'' - 3y' + 2y = 1/(1 + e^{-x}), \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 3\ln 2.$

11.29. $y'' - 3y' + 2y = e^{x}/(1 + e^{-x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

11.30. $y'' + y = 1/\sin x, \quad y(\pi/2) = 1, \quad y'(\pi/2) = \pi/2.$

Тема 9. РЯДЫ

Числовой ряд. Общий член ряда

Определение. Пусть дана последовательность чисел a_1, a_2, a_3, ..., то выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется **числовым рядом,** числа a_1, a_2, a_3, ... – членами (элементами) ряда, a_n – общим членом ряда.

Пример 1. Дан ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$**,** где общий член $a_n = \frac{1}{n^2}$. Найти a_{n+1}. Заменяя в общем члене n на $n+1$, получим $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Сходящиеся и расходящиеся ряды

Сумма первых n членов ряда называется n**-й частичной суммой** и обозначается через A_n. Следовательно, суммы

$A_1 = a_1$	– 1-я частичная сумма;
$A_2 = a_1 + a_2$	– 2-я частичная сумма;
$A_3 = a_1 + a_2 + a_3$	– 3-я частичная сумма;
…	– ………………………
$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$	– n-я частичная сумма;
...	– ………………………

образуют последовательность частичных сумм A_1, A_2, ..., A_n, ...

Определение. Ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности частичных сумм, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. При этом число A называется **суммой ряда**. Если для данного ряда последовательность частичных сумм $\{A_n\}$ не имеет конечного предела при $n \to \infty$, то этот ряд называется **расходящимся.**

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд, составленный из членов геометрической прогрессии (геометрический ряд),

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad (a \neq 0).$$

Из элементарной математики известно, что сумма n членов геометрической прогрессии $A_n = \dfrac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}$. Отсюда следует, что если $|q|<1$, то геометрический ряд сходится, если же $|q|\geq 1$, то геометрический ряд расходится.

<u>Пример 3</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+ +\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\ldots$.Так как $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, то n-я частичная сумма данного ряда

$$A_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Эта сумма при $n\to\infty$ имеет предел $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1.$

Итак, данный ряд сходится и его сумма равна единице.

Основные свойства сходящихся рядов

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и ряд, полученный отбрасыванием из него любого конечного числа членов.

2) Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$. Если оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, а их суммы соответственно равны A и B, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$, причем его сумма равна $A+B$.

3) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет сумму A, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\cdot a_n$, причем его сумма равна числу $\lambda\cdot A$, где λ – любое фиксированное число.

4) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и любой ряд, полученный из него группировкой слагаемых, не изменяющей порядок расположения чле-

нов ряда, и суммы этих рядов одинаковы. К примеру, если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна A, то ряд

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + \ldots$$

также сходится, и его сумма равна A.

Признаки сходимости числовых рядов

Часто не столь важно найти сумму ряда, как ответить на вопрос о сходимости ряда. Для этой цели используются признаки сходимости, основанные на свойствах общего члена ряда.

Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член a_n стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Кратко: если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю.

Отсюда вытекает **достаточный признак расходимости ряда.**

Теорема. Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots$

Для этого ряда общий член $a_n = \frac{n}{n+1}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$.

Следовательно, данный ряд расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots$

Очевидно, что общий член этого ряда, вид которого не указан ввиду громоздкости выражения, стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. необходимый признак сходимости ряда выполняется, однако этот ряд расходится, так как его сумма $1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots$ стремится к бесконечности.

Знакоположительные числовые ряды

Числовой ряд, все члены которого неотрицательны, называется знакоположительным.

Теорема (Критерий сходимости знакоположительного ряда). Для сходимости знакоположительного ряда необходимо и достаточно, чтобы все его частичные суммы были ограничены сверху.

Эта теорема в большей степени имеет теоретическое, чем практическое значение. Ниже мы приведем другие признаки сходимости, имеющие большее практическое применение.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Теорема (Первый признак сравнения)
Пусть даны два знакоположительных ряда:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

и

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

причем, начиная с некоторого номера N, для любого $n > N$ выполняется неравенство $a_n \le b_n$ Тогда:

1) из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Схематическая запись первого признака сравнения:

$$a_n \le b_n$$

сход.$\leftarrow$сход.

расх.$\rightarrow$расх.

Для применения этого признака часто используют такие ряды-эталоны, сходимость или расходимость которых известна заранее, например:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – геометрический (он сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1$);

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический (он расходится);

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ – ряд Дирихле (он сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$).

Кроме этого часто используют ряды, которые можно получить с помощью следующих очевидных неравенств:

$$\ln x > 1 \ (x > e), \ \sin x < x < \operatorname{tg} x \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \ |\sin x| \le 1, \ |\cos x| \le 1.$$

Рассмотрим на конкретном примере схему исследования знакоположительного ряда на сходимость с помощью первого признака сравнения.

<u>Пример 6</u>. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[5]{n+2}}$ на сходимость.

Шаг 1. Проверим знакоположительность ряда: $a_n = \frac{1}{n \cdot \sqrt[5]{n+2}} > 0$ для $n = 1, \ 2, \ldots$

Шаг 2. Проверим выполнение необходимого признака сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Так как $a_n = \frac{1}{n \cdot \sqrt[5]{n+2}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[5]{n+2}} = 0$.
(Если вычисление предела вызывает трудности, то этот шаг можно пропустить.)

Шаг 3. Используем первый признак сравнения. Для этого подберем для данного ряда ряд-эталон. Так как $\frac{1}{n \cdot \sqrt[5]{n+2}} \le \frac{1}{n \cdot \sqrt[5]{n}} = \frac{1}{n^{6/5}}$, то в качестве эталона можно взять ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{6/5}}$, т.е. ряд Дирихле. Этот ряд сходится, так как показатель степени $\alpha = \frac{6}{5} > 1$. Следовательно, согласно первому признаку сравнения сходится и исследуемый ряд.

<u>Пример 7</u>. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1) \cdot 3^n}$ на сходимость.

1) Данный ряд знакоположительный, так как $a_n = \frac{n}{(n+1) \cdot 3^n} > 0$ для $n = 1, \ 2, \ldots$

2) Необходимый признак сходимости ряда выполняется, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1) \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n/n}{(n/n + 1/n) \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + 1/n} \cdot \frac{1}{3^n} = 1 \cdot 0 = 0.$$

3) Подберем ряд-эталон. Так как $\frac{n}{(n+1) \cdot 3^n} < \frac{n}{n \cdot 3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$, то в качестве эталона можно взять геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \ \left(q = \frac{1}{3} < 1\right)$. Этот ряд сходится, следовательно, сходится и исследуемый ряд.

Теорема (Второй признак сравнения)

Если для знакоположительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ существует отличный от нуля конечный предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=r$, то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. Если $a_n \to 0$ при $n\to\infty$ (необходимый признак сходимости), то из условия $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda\neq 0$, следует, что a_n и b_n – бесконечно малые одного порядка малости (эквивалентные при $\lambda=1$). Следовательно, если дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n\to 0$ при $n\to\infty$, то для этого ряда можно брать ряд-эталон $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где общий член b_n имеет тот же порядок малости, что и общий член данного ряда.

При выборе ряда-эталона можно пользоваться следующей таблицей эквивалентных бесконечно малых при $\alpha\to 0$:

1) $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$;
2) $\sin\alpha\sim\alpha$;
3) $\mathrm{tg}\alpha\sim\alpha$;
4) $e^{\alpha}-1\sim\alpha$;
5) $\arcsin\alpha\sim\alpha$;
6) $1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n^2-n}{n^4+3n+2}$.

Данный ряд знакоположительный, так как $a_n=\frac{n^3+2n^2-n}{n^4+3n+2}>0$ для любого $n\in N$.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2-n}{n^4+3n+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3/n^4+2n^2/n^4-n/n^4}{n^4/n^4+3n/n^4+2/n^4}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n+2/n^2-1/n^3}{1+3/n^3+2/n^4}=\frac{0}{1}=0.$$

Так как $\frac{n^3+2n^2-n}{n^4+3n+2}\sim\frac{n^3}{n^4}\sim\frac{1}{n}$, то возьмем в качестве ряда-эталона гармонический расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Поскольку предел отношения общих членов a_n и b_n конечен и отличен от нуля (он равен 1), то на основании второго признака сравнения данный ряд расходится.

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n^2}$ по двум признакам сравнения.

Данный ряд знакоположительный, так как $a_n=\sin\frac{\pi}{2n^2}>0$, и $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n^2}=0$. Поскольку $\sin\frac{\pi}{2n^2}<\frac{\pi}{2n^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$, то в качестве ряда-эталона можно брать сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Сследовательно, по первому признаку сравнения, исследуемый ряд также сходится.

Так как для данного ряда и ряда-эталона выполняется условие $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n^2}\right)}{\frac{\pi}{2n^2}}=1$ (здесь использован 1-й замечательный предел), то на основании второго признака сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n^2}$ – сходится.

Теорема (Признак Даламбера)

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$, то ряд сходится при $\lambda<1$ и расходится при $\lambda>1$.

Замечания:

1) Если $\lambda=1$, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда, и поэтому необходимо использовать другие признаки сходимости.

2) Признак Даламбера дает оценку и остатка ряда. Из неравенства

$$a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}+\ldots\le a_{k+1}+a_{k+1}q+a_{k+1}q^2+\ldots,$$

следует, что остаток ряда

$$R_k\le\frac{a_{k+1}}{1-q}.$$

3) Признак Даламбера удобен на практике тогда, когда общий член ряда содержит показательную функцию или факториал.

Пример 10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ по признаку Даламбера.

Данный ряд знакоположительный и $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3^n(\ln 3)^2}=0$.

(Здесь при вычислении дважды применено правило Лопиталя.)
Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\div\frac{n^2}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n^2}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{3}<1,$$

то по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Данный ряд знакоположительный и $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}\div\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,$$

то данный ряд сходится.

Теорема (Признак Коши)

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$, то при $\lambda<1$ ряд сходится, а при $\lambda>1$ ряд расходится.

Замечания:

1) Если $\lambda=1$, признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда, и поэтому необходимо использовать другие признаки сходимости.

2) Если $\lambda=\infty$, то ряд расходится.

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$.

Данный ряд знакоположительный, так как $a_n=\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n>0$ для любого $n\in N$. Поскольку вычисление предела $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$ вызывает определенные трудности, то проверку выполнимости необходимого признака сходимости ряда опускаем.

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+1/n}=2>1,$$

то по признаку Коши данный ряд расходится.

Теорема. (Интегральный признак сходимости Маклорена – Коши)
Пусть дан ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

члены которого положительны и не возрастают:

$$u_1\ge u_2\ge u_n\ge\ldots$$

Пусть, далее $f(x)$ – функция, которая определена для всех вещественных $x\ge 1$, непрерывна, не возрастает и

$$f(1)=u_1,\ f(2)=u_2,\ \ldots,\ f(n)=u_n,\ \ldots$$

Тогда для сходимости ряда (7) необходимо и достаточно, чтобы сходился (существовал) несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}f(x)dx.$$

<u>Пример 13</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Решение

Члены ряда суть значения функции $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$ при $x=2,3,\ldots$ Так как для $x\ge 2$ $(n=2)$ эта функция непрерывна, положительна и убывает, то вопрос о сходимости ряда эквивалентен вопросу о сходимости интеграла $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$. По определению несобственного интеграла

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{t\to+\infty}\int_2^{t}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{t\to+\infty}\int_2^{t}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\Bigg|_2^t\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится, а следовательно, сходится и исходный числовой ряд.

Знакочередующиеся ряды

Определение. Числовой ряд называется знакочередующимся, если его члены поочередно меняют знак. Знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n,$$

где $a_n > 0$.

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий *достаточный признак сходимости.*

Теорема (Признак Лейбница)

Если для знакочередующегося ряда все его члены удовлетворяют условиям:

а) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ (т.е. члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине);

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (т.е. общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$), то такой ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена.

Ряд, удовлетворяющий условиям данной теоремы, называют **рядом Лейбница.**

Пример 14. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \ldots$ по признаку Лейбница.

Данный знакочередующийся ряд сходится, так как удовлетворяет условиям признака Лейбница:

а) $\frac{1}{1^2} > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \ldots$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Пример 15. Исследовать сходимость ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$

Данный знакочередующийся ряд сходится, так как удовлетворяет условиям признака Лейбница:

а) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Заметим, что данный ряд отличается от гармонического только знаками четных членов.

Знакопеременные ряды

Определение. Ряд называется **знакопеременным**, если он содержит как положительные, так и отрицательные члены.

Пример 15. Ряды

$$-1-1-1+1+1+\ldots+(-1)^{n(n-1)/2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}$$

и

$$\sin\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{2}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n},\ \alpha\neq\frac{\pi k}{2},\ k\in N$$

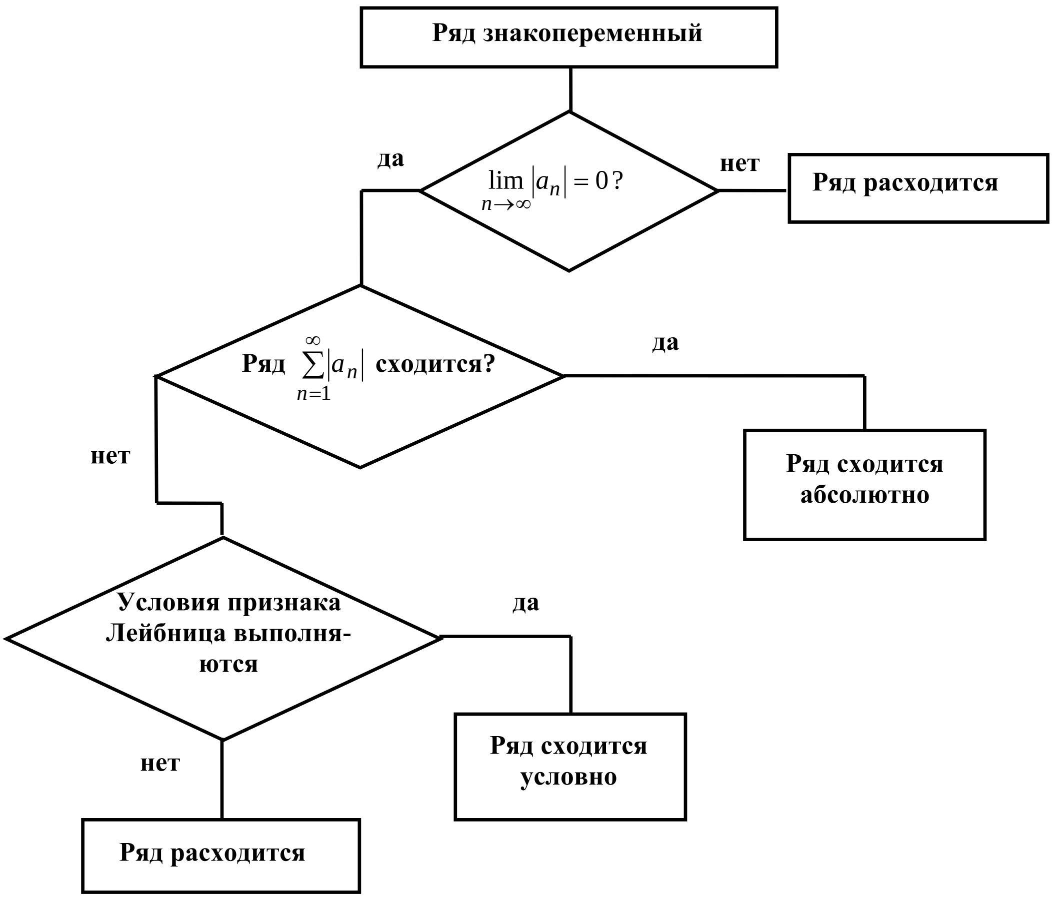
являются знакопеременными.

Знакочередующиеся ряды, очевидно, являются частным случаем знакопеременных рядов. Для знакопеременного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ возникает вопрос о связи его сходимости со сходимостью знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Теорема (Признак абсолютной сходимости). Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Определения. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется ***абсолютно сходящимся***. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется ***условно сходящимся***.

При исследовании знакочередующихся рядов на сходимость можно рассуждать по следующей схеме:



<u>Пример 16</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Общий член этого ряда $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. Так как $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, так как является рядом Дирихле, в котором $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ согласно признаку Лейбница сходится. Следовательно, исследуемый ряд сходится условно.

<u>Пример 17</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$.

Этот ряд сходится абсолютно, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходящийся ряд Дирихле.

Пример 18. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$.

Данный ряд знакочередующийся. Исследуем ряд, составленный из модулей его членов, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$. Используя признак Коши, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Функциональные ряды.

Функциональный ряд и его область сходимости

Пусть $u_1(x)$, $u_2(x),...,u_n(x),...$ – последовательность функций, определенных на некотором множестве X.

Определение. Выражение вида

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$

называется **функциональным рядом**.

Придавая x различные числовые значения из множества X, будем получать различные числовые ряды. В частности, при $x=x_0\in X$ функциональный ряд становится числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$. Этот числовой ряд может быть сходящимся или расходящимся. Если он сходится, то x_0 называется **точкой сходимости функционального ряда**.

Множество всех точек сходимости функционального ряда называют его **областью сходимости** и обозначают ее через D. Очевидно, $D\subset X$. В частных случаях множество D может совпадать или не совпадать с множеством X, или же может быть и пустым множеством. В последнем случае функциональный ряд расходится в каждой точке множества X.

Вид области D для произвольного функционального ряда может быть различным: вся числовая ось, интервал, объединение интервалов и полуинтервалов и т.д. В простейших случаях при исследовании функциональных рядов на сходимость можно применить рассмотренные выше признаки сходимости числовых рядов, если под x понимать фиксированное число.

Определения. Сумма первых n членов функционального ряда $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ называется **n-ой частичной суммой**, а функция $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, определенная в области D, – **суммой функционального ряда**. Функция $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$, определенная в области D, называется **остатком ряда**. Функциональный ряд называется **абсолютно сходящимся** на множестве $D\in X$, если в каждой точке D сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_n(x)\right|$.

Степенные ряды

Частным случаем функциональных рядов являются степенные ряды.

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(x-x_0\right)^n=C_0+C_1\left(x-x_0\right)+C_2\left(x-x_0\right)^2+\ldots+C_n\left(x-x_0\right)^n+\ldots,$$

члены которого являются произведениями постоянных C_0, C_1, ..., C_n,... на степенные функции от разности $x-x_0$ с целыми неотрицательными показателями степеней, точка x_0 называется **центром степенного ряда**.

Пример 19. Ряд $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot x^n$ – степенной ряд с центром в точке $x_0=0$.

Ряд $\frac{x+3}{1!}+\frac{(x+3)^2}{2!}+\frac{(x+3)^3}{3!}+\ldots+\frac{(x+3)^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+3)^n$ – степенной ряд с центром в точке $x_0=-3$.

Ряд $\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots$ – функциональный ряд.

Исследование степенного ряда на сходимость, а именно нахождение области сходимости степенного ряда является одним из главных вопросов в теории функциональных рядов. Решение этого вопроса связано с теоремой Абеля.

Теорема (Абеля)

1. Если степенной ряд сходится при $x=x_1$ $\left(x_1\neq x_0\right)$, то он сходится, и притом абсолютно, для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$\left|x-x_0\right|<\left|x_2-x_0\right|.$$

2. Если степенной ряд расходится при $x=x_2$, то он расходится для всех x, удовлетворяющих неравенству

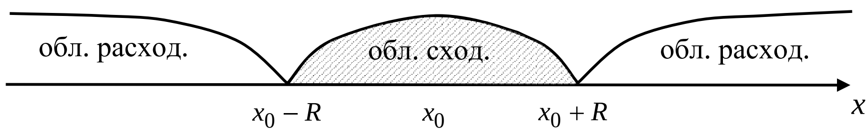
$$\left|x-x_0\right|>\left|x_2-x_0\right|.$$

Геометрическая интерпретация теоремы Абеля

Если степенной ряд сходится в точке $x = x_1$, то он сходится и во всех точках, расположенных ближе к центру степенного ряда x_0, чем x_1. Если же ряд расходится при $x = x_2$, то он расходится и во всех более удаленных от центра ряда точках.

Опираясь на теорему Абеля, можно доказать, что существует такое положительное число R, при котором для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < R$, ряд сходится абсолютно и расходится при всех x, для которых $|x - x_0| > R$.

Число R называется **радиусом сходимости** ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$, а интервал $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ – **интервалом сходимости**.



В частном случае интервал сходимости степенного ряда может совпадать со всей числовой осью (в этом случае $R = \infty$) или может превращаться в точку (в этом случае $R = 0$). Заметим, что интервал сходимости всегда симметричен относительно центра степенного ряда.

Если для степенного ряда существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right| \neq 0$, то радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|.$$

Рассмотрим способы определения области сходимости степенного ряда на примерах.

<u>Пример 20</u>. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n}$.

Первый способ решения

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x-2|^n}{n}$. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{|x-2|^n} = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x-2|.$$

Если $|x-2|<1$, то ряд сходится. Итак, $-1<x-2<1$, $1<x<3$ – интервал сходимости данного ряда. Поведение данного ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x=1$ и $x=3$, исследуется отдельно.

При $x=1$ из данного ряда получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, который условно сходится.

При $x=3$ получаем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Таким образом, данный ряд сходится в области, для каждой точки которой выполняется неравенство $1<x<3$.

Второй способ решения

В нашем случае $C_n=\frac{1}{n}$ и $C_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, поэтому

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{1}=1.$$

Так как $x_0=2$ – центр степенного ряда, то $(x_0-R,\ x_0+R)=(1;\ 3)$ – интервал сходимости данного ряда.

Сходимость ряда на концах интервала сходимости исследована выше. Итак, данный ряд сходится абсолютно при $1<x<3$ и условно при $x=1$.

Разложение элементарных функций в степенные ряды

Одной из центральных задач в теории степенных рядов является задача разложения элементарных функций в степенные ряды.

Постановка задачи. Пусть дана некоторая функция $f(x)$, бесконечное число раз дифференцируемая в своей области определения. Требуется установить:

1) может ли эта функция быть представлена на заданном интервале в виде некоторого степенного ряда, т.е. может ли быть «разложена в степенной ряд»?

2) если да, то как найти этот ряд?

Предположим, что для функции $f(x)$ степенной ряд существует, т.е. имеет место разложение

$$f(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\ldots+C_n(x-x_0)^n+\ldots$$

Найдем коэффициенты C_0, $C_1, C_2, \ldots$

Если в последнее равенство подставить $x=x_0$, то получим

$$f(x_0)=[C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+C_3(x-x_0)^3+\ldots+C_n(x-x_0)^n+\ldots]\big|_{x=x_0}=C_0.$$

Продифференцируем последовательно обе части равенства и, полагая в полученных равенствах $x = x_0$, получим:

$$f'(x_0) = [C_1 + 2C_2(x - x_0) + 3C_3(x - x_0)^2 + 4C_4(x - x_0)^3 + \ldots$$

$$+nC_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots]\big|_{x=x_0} = C_1.$$

$$f''(x_0) = [2C_2 + 3\cdot 2\cdot C_3(x - x_0) + 4\cdot 3\cdot C_4(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+n\cdot(n-1)\cdot C_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots]\big|_{x=x_0} = 2C_2.$$

$$f'''(x_0) = [3\cdot 2\cdot C_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot C_4(x - x_0) + \ldots$$

$$+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot C_n(x - x_0)^{n-3} + \ldots]\big|_{x=x_0} = 3\cdot 2\cdot C_3.$$

$$\ldots\ldots\qquad\qquad\ldots\ldots\qquad\qquad\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x_0) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot C_n.$$

Следовательно, искомые коэффициенты степенного ряда вычисляются по формулам:

$$C_0 = f(x_0),\ C_1 = f'(x_0),\ C_1 = f'(x_0),\ C_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!},\ \ldots,\ C_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставив найденные коэффициенты, получим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n \text{ – ряд Тейлора.}$$

При $x_0 = 0$ имеем $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$ – ряд Маклорена.

Ответ на вопрос о возможности разложения функции в степенной ряд дает сформулированная ниже теорема. Предварительно представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – остаточный член ряда, который может быть представлен в форме Лагранжа $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, ξ заключено между x_0 и x.

Теорема. Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд по степеням $(x - x_0)$ в окрестности точки x_0, то этот ряд является **рядом Тейлора**.

Условия разложимости функции в степенной ряд:

1) $f(x)$ должна иметь в интервале сходимости производные всех порядков;

2) n-я частичная сумма ряда Тейлора должна стремиться к $f(x)$ при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Условие 2 выполняется, если все производные $f^{(n)}(x)$ ограничены, т.е. если существует такое число M, при котором во всех точках интервала сходимости $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$, $\quad (n \in N)$.

Приближенные вычисления с помощью степенных рядов

Сравнительная простота разложения некоторых функций в степенные ряды привела к широкому их использованию в приближенных вычислениях. Наиболее часто используются следующие разложения элементарных функций в ряд Маклорена:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \text{ (по определению } 0!=1\text{).}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n+1))}{n!} \cdot x^n .$$

Так как область сходимости первых трех рядов $x \in (-\infty; +\infty)$, то эти равенства справедливы для любого значения x. Два последних ряда сходятся при $x \in (-1;\ 1)$.

За приближенное значение функции берется n-я частичная сумма ряда Маклорена. При этом остаточный член ряда представляет собой абсолютную ошибку вычислений. Оценка остатка позволяет определить требуемое число слагаемых в частичной сумме.

Оценка остатка для знакочередующегося ряда проводится на основании признака Лейбница (абсолютная величина остатка ряда не превосходит абсолютной величины первого из отбрасываемых членов ряда).

Оценка остатка для знакоположительных рядов обычно производится подбором легко суммируемого ряда, члены которого больше оцениваемого остатка. Чаще всего это геометрическая прогрессия.

Однако далеко не всякий ряд, имеющий суммой интересующее нас число, пригоден для фактического вычисления этого ряда (даже если члены просты и оценка остатка производится легко). Вопрос заключается в быстроте сходимости, т.е. в быстроте приближения частичной суммы к предельному значению. Например, ряды Маклорена для $\sin x$ и $\cos x$ удобны при малых x, при больших x эти ряды также сходятся, но медленно и для вычислений неудобны.

Пример 21. Вычислить число *e*, воспользовавшись рядом $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, и найти сумму первых пяти членов при $x = 1$. Оценить величину погрешности δ.

$x = 1$, $e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$. Оценим остаток данного ряда с положительными членами двумя способами.

I способ

Воспользуемся остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

В нашем примере $x_0 = 0$, $x = 1$, $n = 4$, $x_0 < \xi < x$. Поэтому

$$R_n = \frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} = \frac{e}{5!} < \frac{3}{5!} = \frac{1}{40}, \quad \delta < \frac{1}{40}.$$

II способ

$$R_n = \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \ldots\right) = \frac{1}{5!}\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{5!}\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots\right) = \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{1 - 1/6} = \frac{1}{120} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{100}.$$

Остаток ряда $\delta < \frac{1}{100}$, т.е. после запятой оставляем две первые цифры

$$e \approx 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}166 + 0{,}042 \approx 2{,}71.$$

Следует отметить, что в данном примере второй способ оценки ошибки оказался более точным, что позволяет взять меньшее число членов ряда.

Приближенное вычисление корней

Пусть нужно извлечь корень $\sqrt[m]{A}$. Всегда можно подобрать такое целое число a, чтобы a^m было возможно ближе к A, тогда

$$\sqrt[m]{A}=\sqrt[m]{a^m+b}=\left[a^m\left(1+\frac{b}{a^m}\right)\right]^{\frac{1}{m}}=a\left(1+\frac{b}{a^m}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

При условии $\left|\frac{b}{a^m}\right|<1$ последнее выражение можно вычислить, используя биномиальный ряд:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n+1))}{n!}\cdot x^n,\quad |x|<1.$$

<u>Пример 22</u>. Вычислить $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,0001.

$$\sqrt[4]{17}=\sqrt[4]{16+1}=2\sqrt[4]{1+\frac{1}{16}}=2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Используя биномиальный ряд

$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha\quad x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots$, при $\alpha=\frac{1}{4}$, получим

$$\sqrt[4]{17}=2\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{16^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{16^3}-\ldots\right)=$$

$$=2+\frac{1}{2\cdot 16}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 8\cdot 16^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 8\cdot 12\cdot 16^3}-\ldots$$

Это знакочередующийся ряд.

$$\frac{1\cdot 3}{2\cdot 8\cdot 16^2}=\frac{3}{16^3}>0{,}0001;\ \frac{1\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 8\cdot 12\cdot 16^3}<0{,}0001.$$

Поэтому, ограничившись суммой первых трех членов, получаем $\sqrt[4]{17}\approx 2{,}0305$.

Приближенное вычисление определенных интегралов

Многие практически нужные интегралы не могут быть вычислены с помощью формулы Ньютона–Лейбница, так как первообразная не может быть выражена элементарными функциями.

Однако, если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат интервалу сходимости, то можно вычислить определенный интеграл с заданной степенью точности.

<u>Пример 23</u>. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью 0,0001.

1) Разложим подынтегральную функцию в ряд:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

2) Проинтегрируем его почленно:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!5}-\frac{1}{3!7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)n!}+\ldots$$

3) Получили знакочередующийся ряд. Для обеспечения требуемой точности достаточно взять сумму первых 7 членов, так как при $n=6$

$$\frac{1}{(2n+1)n!}=\frac{1}{13\cdot 720}=\frac{1}{9360}>\frac{1}{10000},$$

при $n=7$ $\quad \dfrac{1}{15\cdot 720\cdot 7}<\dfrac{1}{10000}$.

4) Вычислим приближенно интеграл с одной запасной цифрой.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\frac{1}{11\cdot 5!}+\frac{1}{13\cdot 6!}\approx$$

$$\approx 1-0,33333+0,1-0,02381+0,00463-0,00011=1,10474-0,35790=0,74684.$$

Округляя, получим $\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx 0,7468$.

Приближенное решение дифференциальных уравнений

Степенные ряды широко используются при интегрировании дифференциальных уравнений. В этом случае решение задачи Коши $y^{(n)}=f(x,y,...y^{(n\text{-}1)})$; $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y'_0,\ldots,y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ ищется в виде степенного ряда $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n$.

Пример 24. Найти первые пять членов разложения в степенной ряд решения задачи Коши $y'=x^2-y^2$, $y(0)=1$.

Так как начальное условие задано при $x_0=0$, то

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}\cdot x+\frac{y''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{y'''(0)}{3!}\cdot x^3+\ldots$$

$C_0 = y(0) = 1$ (начальное условие).

$$C_1 = \frac{y'(0)}{1!} = \left.\frac{x^2 - y^2}{1!}\right|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{0-1}{1!} = -1.$$

$$C_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \left.\frac{2x - 2yy'}{2!}\right|_{\substack{x=0\\y=1\\y'=-1}} = \frac{2}{2!} = 1.$$

$$C_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \left.\frac{2 - 2\left(y'^2 + yy''\right)}{3!}\right|_{\substack{x=0\\y=1\\y'=-1\\y''=2}} = \frac{2-6}{3!} = \frac{-4}{3!} = -\frac{2}{3}.$$

$$C_4 = \frac{y^{(\mathrm{IV})}(0)}{4!} = \frac{-4y'y'' - 2\left(y'y'' + yy'''\right)}{4!} = \left.\frac{-6y'y'' - 2yy'''}{4!}\right|_{\substack{x=0\\y=1\\y'=-1\\y''=2\\y'''=-4}} =$$

$$= \frac{-6\cdot(-1)\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot(-4)}{4!} = \frac{12+8}{4!} = \frac{20}{4!} = \frac{5}{6}.$$

Получаем ряд $$y = 1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^4 - \ldots.$$

Контрольные вопросы

1. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда.
2. Теоремы сравнения.
3. Признаки Даламбера и Коши.
4. Интегральный признак сходимости ряда.
5. Теорема Лейбница.
6. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
7. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда.
8. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.
9. Разложение по степеням x бинома $(1+x)^m$.
10. Условие разложимости функции в ряд Тейлора.
11. Разложение по степеням x функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$.

Контрольная работа № 9
по теме "Ряды"

Задача 1. Найти сумму ряда.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$. 1.2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$. 1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$.

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$. 1.5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$. 1.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-28n-45}$.

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$. 1.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$. 1.9. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$.

1.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$. 1.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{36n^2-24n-5}$. 1.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-84n-13}$.

1.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$. 1.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+35n-6}$. 1.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+3n-20}$.

1.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-42n-40}$. 1.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$. 1.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-21n-10}$.

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$. 1.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$. 1.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-35n-6}$.

1.22. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$. 1.23. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{12}{36n^2+12n-35}$. 1.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+21n-10}$.

1.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$. 1.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2-5n-6}$. 1.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2+8n-15}$.

1.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-56n-33}$. 1.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2-12n-35}$. 1.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+7n-12}$.

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}+n-1}$. 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$. 2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$.

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$. 2.5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$. 2.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2+3\right)^2}{n^5+\ln^4 n}$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$.

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+\cos n}{3^n+\sin n}$.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 6n}$.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$.

2.13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\sin\frac{1}{n-1}$.

2.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}+2}\operatorname{arctg}\frac{n+3}{n^2+5}$.

2.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right)$.

2.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2+n+2}$.

2.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^3}$.

2.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3}{n^3+1}$.

2.19. $\sum_{n=3}^{\infty}n^3\operatorname{tg}^5\frac{\pi}{n}$.

2.20. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{\left(\sqrt[3]{n}-1\right)\left(n\sqrt[4]{n^3}-1\right)}$.

2.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

2.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$.

2.23. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(e^{\sqrt{n}/\left(n^3-1\right)}-1\right)$.

2.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n+1}{n^2\left(n+1\right)^2}$.

2.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{\sqrt{n}}$.

2.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+7n}{5^n+n}$.

2.27. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(e^{1/n}-1\right)^2$.

2.28. $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

2.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}$.

2.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5}$.

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд.

3.1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n\left(n-1\right)!}$.

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n!\right)^2}{2^{n^2}}$.

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\left(n^3+1\right)}{\left(n+1\right)!}$.

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n 2n!}{\left(2n\right)!}$.

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n+2\right)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$.

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}$.

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{5}{n}}{n!}$.

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$.

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(2n\right)!}\operatorname{tg}\frac{1}{5^n}$.

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\left(n^2-1\right)}{n!}$.

3.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n+2\right)!}$.

3.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\left(n!\right)^2}$.

3.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$. 3.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n!)}$. 3.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{3^n(n+1)!}$.

3.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n-1}}$. 3.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$. 3.18. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$.

3.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$. 3.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$. 3.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

3.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$. 3.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!4^n}$. 3.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7...(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8...(3n-1)}$.

3.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7...(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11...(2n+5)}$. 3.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$. 3.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$.

3.28. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$. 3.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$. 3.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд.

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$. 4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$. 4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$. 4.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}(n+1)^3$.

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$. 4.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$. 4.9. $\sum_{n=1}^{\infty}n\arcsin^n\frac{\pi}{4n}$.

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$. 4.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\frac{n}{5^n}$. 4.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

4.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}(n-1)^2$. 4.14. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$. 4.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

4.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}$. 4.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$. 4.18. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{\pi}{2n}$.

4.19. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$. 4.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$. 4.21. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\operatorname{arctg}^n\frac{\pi}{3n}$.

4.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$. 4.23. $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}e^{-n}$. 4.24. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$.

4.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$. 4.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}$. 4.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

4.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$. 4.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$. 4.30. $\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд.

5.1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$. 5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$. 5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$.

5.4. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$. 5.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$. 5.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2\left(n\sqrt{5}+2\right)}$.

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n\sqrt{2}+1\right)\ln^2\left(n\sqrt{3}+1\right)}$. 5.8. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$. 5.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$.

5.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(2n)}$. 5.11. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}$. 5.12. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$.

5.13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$. 5.14. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$. 5.15. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$.

5.16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$. 5.17. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n-1)}$. 5.18. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$.

5.19. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$. 5.20. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$. 5.21. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$.

5.22. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n/3)\ln^2(n+7)}$. 5.23. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$. 5.24. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}$.

5.25. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n/3-1)\ln^2(n/2)}$. 5.26. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\ln n}$. 5.27. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}$.

5.28. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}$. 5.29. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n+1}{(3n^2/2+2)\ln(n/2)}$. 5.30. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$.

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд.

6.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

6.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n}$.

6.3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

6.4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n(\ln\ln n)\ln n}$.

6.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}2n^{2}}{n^{4}-n^{2}+1}$.

6.6. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{(n+1)\ln n}$.

6.7. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n\ln(n+1)}$.

6.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$.

6.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$.

6.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cos\dfrac{\pi}{6n}$.

6.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n!}$.

6.12. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n\ln(2n)}$.

6.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$.

6.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^{2}}$.

6.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$.

6.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{\cos\dfrac{\pi}{3\sqrt{n}}\sqrt[3]{3n+\ln n}}$.

6.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(3/2)^{n}}$.

6.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2n-1}{3n}$.

6.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}(n+3)}{\ln(n+4)}$.

6.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^{3}}}$.

6.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}$.

6.22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

6.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\sin\left(n\sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}}$.

6.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n+\cos\left(2/\sqrt{n+4}\right)}$.

6.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\dfrac{\pi}{2^{n}}$.

6.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n^{2}+\sin^{2}n}$.

6.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\sin 3^{n}}{3^{n}}$.

6.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{2}}\right)$.

6.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\dfrac{1}{n}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$.

6.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Задача 7. Найти область сходимости функционального ряда.

7.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-2)^{3}(x+3)^{2n}}{2n+3}$.

7.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}(x-3)^{n}}{(n+1)5^{n}}$.

7.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{n9^{n}}$.

7.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{(n+1)^{5}x^{2n}}$.

7.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

7.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

7.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^n(x-2)^n}$. 7.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$. 7.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$.

7.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$. 7.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$. 7.12. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$.

7.13. $\sum_{n=1}^{\infty}(x+5)^n \operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$. 7.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$. 7.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 9^n(x-1)^{2n}}$.

7.16. $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$. 7.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$. 7.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$.

7.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$. 7.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$. 7.21. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)(x-3)^{2n}}$.

7.22. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2(x+2)^n}$. 7.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}$. 7.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{x^n}$.

7.25. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n(x+3)^n}$. 7.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}$. 7.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{(2n+9)^5(x+2)^{2n}}$.

7.28. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n(x+4)^n}$. 7.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$. 7.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}$.

Задача 8. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

8.1. $\frac{9}{20-x-x^2}$. 8.2. $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$. 8.3. $\ln(1-x-6x^2)$.

8.4. $2x\cos^2(x/2)-x$. 8.5. $\frac{\operatorname{sh}2x}{x}-2$. 8.6. $\frac{7}{12+x-x^2}$.

8.7. $\frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$. 8.8. $\ln(1+x-6x^2)$. 8.9. $(x-1)\sin 5x$.

8.10. $\frac{\operatorname{ch}3x-1}{x^2}$. 8.11. $\frac{6}{8+2x-x^2}$. 8.12. $\frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$.

8.13. $\ln(1-x-12x^2)$. 8.14. $(3+e^{-x})^2$. 8.15. $\frac{e^{-x^2}}{x}$.

8.16. $\frac{7}{12-x-x^2}$. 8.17. $x^2\sqrt{4-3x}$. 8.18. $\ln(1+2x-8x^2)$.

8.19. $2x\sin^2(x/2)-x$.

8.20. $(x-1)\operatorname{sh}x$.

8.21. $\dfrac{5}{6+x-x^2}$.

8.22. $x\sqrt[3]{27-2x}$.

8.23. $\ln\left(1+x-12x^2\right)$.

8.24. $\dfrac{\sin 3x}{x}-\cos 3x$.

8.25. $\dfrac{e^{3x}}{x}$.

8.26. $\dfrac{5}{6-x-x^2}$.

8.27. $\sqrt[4]{16-5x}$.

8.28. $\ln\left(1-x-20x^2\right)$.

8.29. $\left(2-e^x\right)^2$.

8.30. $\dfrac{3}{2-x-x^2}$.

Задача 9. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

9.1. $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$.

9.2. $\int\limits_0^{0,1} \sin\left(100x^2\right)dx$.

9.3. $\int\limits_0^{1} \cos x^2 dx$.

9.4. $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

9.5. $\int\limits_0^{0,1} \dfrac{1-e^{-2x}}{x}dx$.

9.6. $\int\limits_0^{1} \dfrac{\ln(1+x/5)}{x}dx$.

9.7. $\int\limits_0^{1,5} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$.

9.8. $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$.

9.9. $\int\limits_0^{0,2} \sin\left(25x^2\right)dx$.

9.10. $\int\limits_0^{0,5} \cos\left(4x^2\right)dx$.

9.11. $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$.

9.12. $\int\limits_0^{0,2} \dfrac{1-e^{-x}}{x}dx$.

9.13. $\int\limits_0^{0,4} \dfrac{\ln(1+x/2)}{x}dx$.

9.14. $\int\limits_0^{2} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$.

9.15. $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2}dx$.

9.16. $\int\limits_0^{0,4} \sin(5x/2)^2 dx$.

9.17. $\int\limits_0^{0,2} \cos\left(25x^2\right)dx$.

9.18. $\int\limits_0^{1,5} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$.

9.19. $\int\limits_0^{0,4} \dfrac{1-e^{-x/2}}{x}dx$.

9.20. $\int\limits_0^{0,1} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}dx$.

9.21. $\int\limits_0^{2,5} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$.

9.22. $\int\limits_0^{0,4} e^{-3x^2/4}dx$.

9.23. $\int\limits_0^{0,5} \sin\left(4x^2\right)dx$.

9.24. $\int\limits_0^{0,4} \cos(5x/2)^2 dx$.

9.25. $\int\limits_0^{2} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$.

9.26. $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

9.27. $\int\limits_0^{2,5} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$.

9.28. $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$.

9.29. $\int\limits_0^{0,5} e^{-3x^2/25}dx$.

9.30. $\int\limits_0^{1} \sin x^2 dx$.

Тема 10. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

10. 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Элементы комбинаторики

При вычислении вероятностей часто приходится использовать некоторые формулы *комбинаторики* – науки, изучающей комбинации, которые можно составить по определенным правилам из элементов некоторого конечного множества. Комбинаторика происходит от латинского слова «combinatio» – соединение.

Определим основные такие комбинации.

Группы, составленные из каких-либо предметов (безразлично каких, например букв, цветных шаров, кубиков, чисел и т.п.), **называются соединениями** (комбинациями).

Предметы, из которых состоят соединения, называются элементами.

Различают три типа соединений: размещения, перестановки и сочетания.

Размещения

Размещениями из *n* элементов по *m* в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит *m* элементов, взятых из числа данных *n* элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо лишь порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m в каждом обычно обозначается символом A_n^m и вычисляется по следующей формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)\,.$$

Понятие факториала

Произведение n натуральных чисел от 1 до n обозначается сокращенно $n!$, т. е. $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n = n!$ (читается: n факториал). Например:

$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$.

Считается, что **0! = 1.**

Используя понятие факториала, формулу для нахождения **числа размещений** можно представить так:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \text{ где } 0 < m \leq n.$$

Очевидно, что $A_n^1 = n$ (при $m = 1$) и $A_n^0 = n$ (при $m = 0$).

<u>Пример 1</u>**.** Правление коммерческого банка выбирает из 10 кандидатов 3 человек на различные должности (все 10 кандидатов имеют равные шан-

сы). Сколько всевозможных групп по 3 человека можно составить из 10 кандидатов?

Решение. В условии задачи речь идет о расчете числа комбинаций из 10 элементов по 3. Так как группы по 3 человека могут отличаться и составом претендентов, и заполняемыми ими вакансиями, т. е. порядком, то для ответа необходимо рассчитать число размещений из 10 элементов по 3:

$$N = A^3_{10} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Ответ. Можно составить 720 групп по 3 человека из 10.

Размещения с повторениями

Размещение с повторениями из n элементов по $m(mn)$ элементов может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до m включительно, или не содержать его совсем, т.е. каждое размещение с повторениями из n элементов по m элементов может состоять не только из различных элементов, но из m каких угодно и как угодно повторяющихся элементов.

Соединения, отличающиеся друг от друга хотя бы порядком расположения элементов, считаются различными размещениями.

Число размещений с повторениями из n элементов по m элементов будем обозначать символом $A_n^m{}_{(\text{с повт.})}$. Можно доказать, что оно равно n^m:

$$A_n^m{}_{(\text{с повт.})} = n^m$$

<u>Пример 2</u>. Изменим условие предыдущего примера. Правление коммерческого банка выбирает из 10 кандидатов 3 человек на 3 различные должности. Предположим, что один и тот же отобранный из 10 претендентов кандидат может занять не только одну, но и 2, и даже все 3 *различные* вакантные должности. Сколько в данном случае возможно комбинаций замещения 3 вакантных должностей?

Решение. Как и в предыдущей задаче, комбинации замещения вакантных должностей могут отличаться и составом претендентов и заполняемыми ими вакансиями, т.е. порядком. Следовательно, и в этом случае для ответа на вопрос задачи необходимо рассчитать число размещений. Однако теперь вакантные должности могут замещаться одним и тем же претендентом, а значит, здесь речь идет о расчете числа размещений с повторениями.

По условию задачи $n = 10$, $m = 3$. Следовательно, $A_n^m = 10^3 = 1000$.

Ответ. Можно составить 1000 комбинаций.

Сочетания

Сочетаниями из *n* элементов по *m* в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит *m* элементов, взятых из числа данных *n* элементов, и которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m в каждом обозначается символом C_n^m и вычисляется так:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad \text{где } 0 \le m \le n.$$

Пример 3. Правление коммерческого банка выбирает из 10 кандидатов 3 человек на *одинаковые* должности (все 10 кандидатов имеют равные шансы). Сколько всевозможных групп по 3 человека можно составить из 10 кандидатов?

Решение**.** Состав различных групп должен отличаться по крайней мере хотя бы одним кандидатом и порядок выбора кандидата не имеет значения, следовательно, этот вид соединений представляет собой сочетания. По условию задачи $n = 10$, $m = 3$. Подставив данные в формулу (1.5), получаем $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$.

Ответ. Можно составить 120 групп из 3 человек по 10.

Замечание. Надо уметь различать сочетания от размещений. Например: если в группе 25 студентов и 10 человек из них, выйдя из аудитории на перерыв, стоят вместе и беседуют, то *порядок,* в котором они стоят, *несуществен.* Число всех возможных групп из 25 человек по 10 в данном случае — *сочетания.* Если же студенты отправились на перерыве в буфет или в кассу за стипендией, то тогда *существенно, в каком, порядке они стали,* т.е. кто из них первый, второй и т.д. В этой ситуации при подсчете возможных групп из 25 человек по 10 необходимо составлять *размещения.*

Сочетания с повторениями

Сочетание с повторениями из n элементов по m ($n \in m$) элементов может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до m включительно или не содержать его совсем, т. е. каждое сочетание из n элементов по m элементов может состоять не только из m различных элементов, но из m каких угодно и как угодно повторяющихся элементов.

Следует отметить, что если, например, два соединения по m элементов отличаются друг от друга только порядком расположения элементов, то они не считаются различными сочетаниями.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m будем обозначать символом $(C_n^m)_{\text{с повт}}$ и вычислять по формуле

$$\left(C_n^m\right)_{\text{с повт.}} = \frac{(n+m\text{-}1)!}{m!(n-1)!}.$$

Замечание, m может быть и больше n.

Пример 4. Сколькими способами можно выбрать 6 пирожных в кондитерской, где есть 4 разных сорта пирожных?
Решение.

$$N = \left(C_4^6\right)_{\text{с повт.}} = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = 84, \quad m > n.$$

Ответ. Существует 84 различных способа выбора пирожных.

Перестановки

Перестановками из *n* элементов называются такие соединения, из которых каждое содержит все *n* элементов и которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n, это то же самое, что число размещений из n элементов по n в каждом, поэтому

$$P_n = A_n^n = n!$$

Пример 5. Менеджер ежедневно просматривает 6 изданий экономического содержания. Если порядок просмотра изданий случаен, то сколько существует способов его осуществления?

Решение. Способы просмотра изданий различаются только порядком, так как число, а значит, и состав изданий при каждом способе неизменны. Следовательно, при решении этой задачи необходимо рассчитать число перестановок.

По условию задачи $n = 6$. Следовательно,

$$P_n = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Ответ. Можно просмотреть издания 720 способами.

Перестановки с повторениями

Число перестановок с повторениями выражается формулой

$$\left(P_n\right)_{\text{с повт.}} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}.$$

Пример 6. Сколькими способами можно разделить $m + n + s$ предметов на 3 группы, чтобы в одной группе было m предметов, в другой n предметов, в третьей – s предметов?

Решение.

$$N = \left(P_{m+n+s}\right)_{\text{с повт.}} = \frac{(m+n+s)!}{m!\ n!\ s!}.$$

Основные понятия теории вероятностей

Определение. Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Значит, в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие A может произойти совместно с событием B, в другом – нет.

Определение. События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Определение. Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение. Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Определение. События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

Исходя из этих общих понятий, можно дать определение вероятности.

Определение. Вероятностью события A называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события A равна отношению числа, благоприятствующих событию A исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Исход опыта является благоприятствующим событию A, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события A.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0\le P(A)\le 1.$$

Пример 7. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие A, появление зеленого – событие B, появление белого – событие C.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$$P(A)=\frac{3}{10};\ P(B)=\frac{2}{10};\ P(C)=\frac{5}{10}.$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Определение. Относительной частотой события A называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие A к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так, в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара

$$W(A)=\frac{2}{5}.$$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Вообще говоря, классическое определение вероятности – довольно относительное.

Это обусловлено тем, что на практике сложно представить результат опыта в виде совокупности элементарных событий, доказать, что события равновероятные.

К примеру, при произведении опыта с подбрасыванием монеты на результат опыта могут влиять такие факторы, как несимметричность монеты, влияние ее формы на аэродинамические характеристики полета, атмосферные условия и т.д.

Классическое определение вероятности не применимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Чтобы преодолеть этот недостаток вводится понятие **геометрической вероятности**, т.е. вероятности попадания точки в какой-либо отрезок или часть плоскости (пространства).

Так, если на отрезке длиной L выделен отрезок длины l, то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок l равна отношению l/L.

Операции над событиями

Определение. События A и B называются **равными**, если осуществление события A влечет за собой осуществление события B, и наоборот.

Определение. Объединением или **суммой** событий A_k называется событие A, которое означает появление **хотя бы одного** из событий A_k.

$$A = \bigcup_k A_k .$$

Определение. Пересечением или **произведением** событий A_k называется событие А, которое заключается в осуществлении **всех** событий A_k.

$$A = \bigcap_k A_k .$$

Определение. Разностью событий A и B называется событие C, которое означает, что происходит событие A, но не происходит событие B.

$$C = A \setminus B .$$

Определение. Дополнительным к событию A называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие A **не происходит.**

Определение. Элементарными исходами опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие A, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется **пространством элементарных событий**.

Теорема (сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) .$$

Следствие 1: *Если события* $A_1, A_2, ..., A_n$ *образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице,*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Определение. Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Следствие 2: *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице,*

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Определение. Событие *A* называется **независимым** от события *B*, вероятность события *A* не зависит от того, произошло событие *B* или нет. Событие *A* называется **зависимым** от события *B*, если вероятность события *A* меняется в зависимости от того, произошло событие *B* или нет.

Определение. Вероятность события *B*, вычисленная при условии, что имело место событие *A*, называется **условной вероятностью** события *B*.

$$P_A(B) = P(B/A) = P(AB)/P(A).$$

Теорема. (Умножения вероятностей) *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.*

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B).$$

Также можно записать: $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) = P(B)P_B(A)$.

Если события независимые, то $P(B/A) = P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться n событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n .$$

Здесь событие A обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

<u>Пример 8.</u> Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие A, появление хотя бы одной червонной карты – событие B. Таким образом нам надо определить вероятность события $C = A + B$.

Кроме того, события A и B – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной, ни бубновой карты, равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты – $\frac{25}{51}$, третьей – $\frac{24}{50}$, четвертой – $\frac{23}{49}$.

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных определяется как $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$.

<u>Пример 9.</u> Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна $\frac{1}{6}$. Вероятность того, что не выпадет 6 очков – $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что при броске трех костей не выпадет ни разу 6 очков $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

<u>Пример 10.</u> В барабане револьвера находятся 4 патрона из шести в произвольном порядке. Барабан раскручивают, после чего нажимают на спусковой крючок два раза. Найти вероятности хотя бы одного выстрела, двух выстрелов, двух осечек.

Вероятность выстрела при первом нажатии на курок (событие A) определяется как $P(A)=\frac{4}{6}$, вероятность осечки – $P(\overline{A})=\frac{2}{3}$. Вероятность выстрела при втором нажатии на курок зависит от результата первого нажатия.

Так, если в первом случае произошел выстрел, то в барабане осталось только 3 патрона, причем они распределены по 5 гнездам, т.к. при втором нажатии на курок напротив ствола не может оказаться гнездо, в котором был патрон при первом нажатии на курок.

Условная вероятность выстрела при второй попытке $P(B/A)=\frac{3}{5}$, если в первый раз был выстрел, $P(B/\overline{A})=\frac{4}{5}$ – если в первый раз произошла осечка.

Условная вероятность осечки во второй раз $P(\overline{B}/A)=\frac{2}{5}$, если в первый раз произошел выстрел; $P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{1}{5}$ – если в первый раз была осечка.

Рассмотрим вероятности того, что во втором случае произойдет выстрел (событие B) или произойдет осечка (событие $\overline{B}$) при условии, что в первом случае произошел выстрел (событие A) или осечка (событие $\overline{A}$).

$P(B)=P(A)P(B/A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{15}=0,4$ – два выстрела подряд;

$P(B)=P(\overline{A})P(B/\overline{A})=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{15}\approx 0,267$ – первая осечка, второй выстрел;

$P(\overline{B})=P(A)P(\overline{B}/A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}\approx 0,267$ – первый выстрел, вторая осечка;

$P(\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}\approx 0,067$ – две осечки подряд.

Эти четыре случая образуют полную группу событий (сумма их вероятностей равна единице).

Анализируя полученные результаты, видим, что вероятность хотя бы одного выстрела $P_1=\frac{6}{15}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{14}{15}\approx 0,933$.

Теперь рассмотрим другой случай. Предположим, что после первого нажатия на курок барабан раскрутили и опять нажали на курок.

Вероятности первого выстрела и первой осечки не изменились – $P(A)=\frac{4}{6}$, $P(\overline{A})=\frac{2}{6}$. Условные вероятности второго выстрела и осечки вычисляются из условия, что напротив ствола может оказаться то же гнездо, что и в первый раз.

Условная вероятность выстрела при второй попытке $P(B/A)=\frac{3}{6}$, если в первый раз был выстрел, $P(B/\overline{A})=\frac{4}{6}$ – если в первый раз произошла осечка.

Условная вероятность осечки во второй раз $P(\overline{B}/A)=\frac{3}{6}$, если в первый раз произошел выстрел, $P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{2}{6}$ – если была осечка.

Тогда:

$P(B)=P(A)P(B/A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{9}\approx 0{,}333$ – два выстрела подряд;

$P(B)=P(\overline{A})P(B/\overline{A})=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{9}\approx 0{,}222$ – первая осечка, второй выстрел;

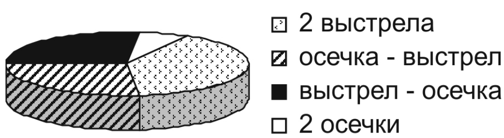
$P(\overline{B})=P(A)P(\overline{B}/A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{9}\approx 0{,}333$ – первый выстрел, вторая осечка;

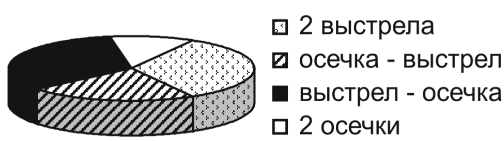
$P(\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{9}\approx 0{,}111$ – две осечки подряд.

В этом случае вероятность того, что произойдет хотя бы один выстрел, определяется как

$$P_2=\frac{3}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}=\frac{8}{9}\approx 0{,}889.$$

Ниже показаны диаграммы вероятностей для первого и второго рассмотренных случаев.





Пример 11. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Обозначим попадание в цель первым стрелком – событие A, вторым – событие B, промах первого стрелка – событие $\overline{A}$, промах второго – событие $\overline{B}$.

$$P(A)=0{,}7;\ P(\overline{A})=0{,}3;\ P(B)=0{,}8;\ P(\overline{B})=0{,}2.$$

Вероятность того, что первый стрелок попадет в мишень, а второй – нет

$$P(A)P(\overline{B}) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14.$$

Вероятность того, что второй стрелок попадет в цель, а первый – нет

$$P(\overline{A})P(B) = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24.$$

Тогда вероятность попадания в цель только одним стрелком определяется как

$$P = 0,14 + 0,24 = 0,38.$$

Тот же результат можно получить другим способом – находим вероятности того, что оба стрелка попали в цель и оба промахнулись. Эти вероятности соответственно равны:

$$P(A)P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56; \; P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06.$$

Тогда вероятность того, что в цель попадет только один стрелок,

$$P = 1 - 0,56 - 0,06 = 0,38.$$

Пример 12. Вероятность того, что взятая наугад деталь из некоторой партии деталей, будет бракованной равна 0,2. Найти вероятность того, что из трех взятых деталей 2 окажется не бракованными.

Обозначим бракованную деталь – событие A, не бракованную – событие $\overline{A}$.

$$P(A) = 0,2; \; P(\overline{A}) = 0,8;$$

Если среди трех деталей оказывается только одна бракованная, то это возможно в одном из трех случаев: бракованная деталь будет первой, второй или третьей.

$$P = P(A)P(\overline{A})P(\overline{A}) + P(\overline{A})P(A)P(\overline{A}) + P(\overline{A})P(\overline{A})P(A),$$

$$P = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,384.$$

Пример 13. Вероятности того, что нужная деталь находится в первом, втором, третьем или четвертом ящике, соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Найти вероятности того, что эта деталь находится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее, чем в двух ящиках.

а) Вероятность того, что данная деталь находится во всех четырех ящиках

$$P = P_1P_2P_3P_4 = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,3024.$$

Вероятность того, что нужная деталь находиться не более чем в трех ящиках равна вероятности того, что она не находится во всех четырех ящиках,

$$P(A) = 1 - P = 1 - 0,3024 = 0,6976.$$

б) Вероятность того, что нужная деталь находится не менее чем в двух ящиках, складывается из вероятностей того, что деталь находиться только в двух ящиках, только в трех ящиках, только в четырех ящиках. Конечно, эти вероятности можно посчитать, а потом сложить, однако проще поступить иначе. Та же вероятность равна вероятности того, что деталь не находится только в одном ящике и имеется вообще.

Вероятность того, что деталь находится только в одном ящике

$$P = P_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 P_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 P_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 P_4,$$

$$P = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,9 =$$
$$= 0,0036 + 0,0056 + 0,0096 + 0,0216 = 0,0404,$$

$$Q = 1 - 0,0404 = 0,9596.$$

Вероятность того, что нужной детали нет ни в одном ящике,

$$P_0 = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,0024,$$

$$Q_0 = 1 - 0,0024 = 0,9976.$$

Искомая вероятность $P(B) = Q \cdot Q_0 = 0,9596 \cdot 0,9976 = 0,9573.$

Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие A может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события A при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. *Вероятность события A, которое может произойти вместе с одним из событий* $H_1, H_2, ..., H_n$, *равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события A.*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i).$$

Фактически эта формула **полной вероятности** уже использовалась при решении примеров, приведенных выше, например, в задаче с револьвером.

Пример 14. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$.

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

– для первого стрелка: $p_1^2 = 0,4^2 = 0,16$;

– для второго стрелка: $p_2^2 = 0,6^2 = 0,36$;

– для третьего стрелка: $p_3^2 = 0,8^2 = 0,64$;

Искомая вероятность определяется как

$$p = \frac{1}{3}p_1^2 + \frac{1}{3}p_2^2 + \frac{1}{3}p_3^3 = \frac{1}{3}(0,16 + 0,36 + 0,64) = \frac{29}{75}$$

Формула Бейеса (формула гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие *A*, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1)$, $P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ относительно события *A*, т.е. условные вероятности $P(H_i / A)$.

<u>Теорема.</u> *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.*

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Эта формула называется **формулой Бейеса**.

<u>Пример 15.</u> Трое охотников одновременно выстрелили по медведю, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит первым стрелком, если вероятности попадания для этих стрелков равны соответственно 0,3, 0,4, 0,5.

В этой задаче требуется определить вероятность гипотезы уже после того, как событие уже совершилось. Для определения искомой вероятности надо воспользоваться формулой Бейеса. В нашем случае она имеет вид

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)}.$$

В этой формуле H_1, H_2, H_3 – гипотезы, что медведя убьет первый, второй и третий стрелок соответственно. До произведения выстрелов эти гипотезы равновероятны и их вероятность равна $\frac{1}{3}$.

$P(H_1/A)$ – вероятность того, что медведя убил первый стрелок при условии, что выстрелы уже произведены (событие A).

Вероятности того, что медведя убьет первый, второй или третий стрелок, вычисленные до выстрелов, равны соответственно:

$$P(A/H_1) = p_1 q_2 q_3 = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,09,$$
$$P(A/H_2) = q_1 p_2 q_3 = 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,14,$$
$$P(A/H_3) = q_1 q_2 p_3 = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,21.$$

Здесь $q_1 = 0,7$; $q_2 = 0,6$; $q_3 = 0,5$ – вероятности промаха для каждого из стрелков, рассчитаны как $q = 1 - p$, где p – вероятности попадания для каждого из стрелков.

Подставим эти значения в формулу Бейеса:

$$P(H_1 / A) = \frac{0,09}{0,44} = \frac{9}{44}.$$

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие A, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события *A***.

Допустим, что событие A наступает в каждом испытании с вероятностью $P(A)=p$. Определим вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате n испытаний событие A наступило ровно m раз.

Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, как это делалось в рассмотренных выше примерах. Однако при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям. Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи. Этот подход реализован в формуле Бернулли.

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие A наступает с вероятностью $P(A) = p$, а противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Обозначим A_i – наступление события A в испытании с номером i. Поскольку условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате n опытов событие A наступает ровно m раз, то остальные n-m раз это событие не наступает. Событие A может появиться m раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по m. Это количество сочетаний находится по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^m(1-p)^{n-m}.$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **формулу Бернулли:**

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m(1-p)^{n-m}.$$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, т.е. того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

Вероятности того, что событие наступит: а) менее m раз; б) более m раз; в) не менее m раз; г) не более m раз — находятся по формулам:

а) $P_{n,0} + P_{n,1} + \ldots + P_{n,m\text{-}1}$;

б) $P_{n,m+1} + P_{n,m+2} + \ldots + P_{n,n}$;

в) $P_{n,m} + P_{n,m+1} + \ldots + P_{n,n}$;

г) $P_{n,0} + P_{n,1} + \ldots + P_{n,m}$.

Пример 16. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий.

Поскольку выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в m испытаниях событие с вероятностью p наступает ровно n раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m(1-p)^{n-m}.$$

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_{5,5} = p^5 = 0,4^5 = 0,01024.$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_{4,5} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} p^4 (1-p) = 0{,}0768.$$

Три попадания из пяти:

$$P_{3,5} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0{,}2304.$$

Окончательно, получаем вероятность **не менее трех попаданий из пяти** выстрелов:

$$P = 0{,}01204 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744.$$

Локальная теорема Лапласа

Пусть проводится n испытаний Бернулли с вероятностью p появления события A в каждом из них. Пусть при этом n достаточно большое число ($n >> 1$) и $npq \geq 10$ (n – большое, а p – не очень маленькое). Тогда вероятность, того, что событие A произойдет ровно k раз может быть найдена по приближенной формуле:

$$P_k = \frac{p}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $x = \dfrac{k - np}{npq}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Замечание. Таблица значений функции $\varphi(x)$ обычно приводится в задачниках Теории вероятностей.

Свойства функции $\varphi(x)$

1. $\varphi(x) > 0$,
2. $\varphi(-x) = \varphi(x)$,
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$.

Пример 17. Какова вероятность, что из 100 новорожденных ровно 40 окажутся мальчики?

$$\left.\begin{aligned} n &= 100 \\ k &= 40 \\ p &= 0{,}5 \end{aligned}\right\} \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 100\cdot 0{,}5}{\sqrt{100\cdot 40\cdot 0{,}5}} = -2,$$

$$P_{100}(40) = \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}} \varphi(-2) = \frac{1}{5}\varphi(-2) = \frac{1}{5}\varphi(2) = \frac{1}{5}\cdot 0{,}054 = 0{,}04.$$

Интегральная теорема Лапласа

В условиях локальной теоремы Лапласа вероятность того, что событие A произойдет от k_1 до k_2 раз $k_1 \leq k \leq k_2$,

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x''') - \Phi(x'),$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},$$

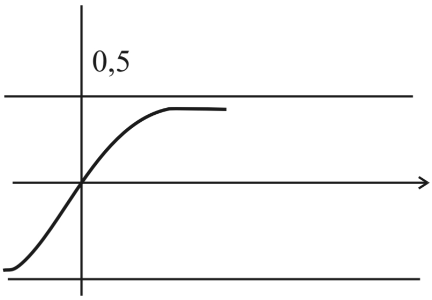
$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.

<u>Свойства функции Лапласа</u>

$\Phi(-x) = \Phi(x)$,

$\Phi(x)$ монотонно возрастает,

$0,5 < \Phi(x) < 0,5; \lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x) = 0,5.$



<u>Пример 18</u>. Всхожесть семян составляет 90%. Какова вероятность, что из 100 семян взойдут от 84 до 96 семян?

$n = 100,$

$p = 0,9,$

$84 \leq k \leq 96.$

$k_1 = 84,$

$k_2 = 96,$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{96 - 100 \cdot 0,9}{\sqrt{9}} = 2,$$

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{94 - 100 \cdot 0,9}{\sqrt{9}} = -2,$$

$$P_{100}(84,96) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 0,95.$$

Формула Пуассона

Пусть проводится n испытаний Бернулли, вероятностью p появления в каждом, при этом n – большое, p – маленькое, $n >> 1$, $p << 1$, $np \cong 1$. Тогда вероятность того, что в n испытаниях событие A произойдет ровно $к$ раз, можно найти по приближенной формуле

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} .$$

Наивероятнейшее количество наступлений m_0 события A при этом находится по следующей формуле:

$$m_0 = np .$$

Пример 19. На первом курсе учится 1825 студентов. Какова вероятность, что 1 сентября ровно у 4 студентов будет день рождения?

По формуле Бернулли

$$p = \frac{1}{365},$$

$$P_{1825}(4) = C_{1825}^4 \cdot \frac{1}{365^4} = \frac{1825!}{4! \cdot 1821!} \cdot \frac{1}{365^4}(1 - \frac{1}{365})^{1821} = \frac{1825 \cdot 1824 \cdot 1823 \cdot 1822 \cdot}{4! \cdot 1821!} =$$

$$= (1 - \frac{1}{365})^{1821} \approx \frac{5^4}{4!}.$$

Близкий результат дает использование приближенной формулы Пуассона:

$$P_{1825}(4) \approx \frac{5^4}{4!} \cdot e^{-5} .$$

Пример 20. Вероятность, что студент опоздает на лекцию, равна одной сотой. Каково наиболее вероятное количество опозданий на 800 лекций? Какова вероятность этого количества опозданий? Какова вероятность того, что студент опоздает не более чем на две лекции?

$$m_0 = np = 800 \cdot 0{,}01 = 8,$$

$$P_{800}(8) = \frac{8^8}{8!} e^{-8} \approx 0{,}14,$$

$$P_{800}(\le 2) = P_{800}(0) + P_{800}(1) + P_{800}(2) = \frac{8^0}{0!} e^{-8} + \frac{8^1}{1!} e^{-8} + \frac{8^2}{2!} e^{-8} = (1 + 8 + \frac{8^2}{2}) \approx 0{,}014.$$

Отклонения относительной частоты от вероятности в испытаниях Бернулли

Пусть n – количество испытаний, κ – количество успехов ($\kappa \le n$). Вероятность отклонения относительной частоты $\frac{k}{n}$ от вероятности p успеха в каждом из них, а также интервальная оценка для числа успехов κ находятся по формулам:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{m}{pq}}\right),$$

$$np - \varepsilon < k < np + \varepsilon.$$

Контрольные вопросы по теме “Случайные события”

1. Событие и вероятность. Классическое определение вероятности.
2. Комбинаторика, основные определения.
3. Сложение вероятностей.
4. Условная вероятность. Умножение вероятностей.
5. Полная вероятность. Формула Байеса.
6. Повторение испытаний. Схема Бернулли.
7. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

Контрольная работа № 10.1 по теме “Случайные события”

Вариант 1

1. В ящике среди 10 одинаковых по внешнему виду деталей имеется 8 стандартных. Наудачу взяты три детали. Составить полную группу возможных событий и найти их вероятности.

2. Вероятность того, что студент сдает первый экзамен, равна 0,9; второй экзамен – 0,85; третий экзамен – 0,95. Найти вероятности событий:

а) студент сдаст все три экзамена;

б) сдаст не менее двух экзаменов;

в) не сдаст только третий экзамен.

3. На склад поступают изделия трех заводов, производительности которых относятся как 1:2:1. Вероятность изготовления первосортного изделия на 1-м заводе равна 0,8; на 2-м заводе – 0,7; на 3-м – 0,9. Наудачу взятое изделие

оказалось первосортным. Найти вероятность того, что оно изготовлено на первом заводе.

4. Контрольная работа состоит из шести задач, причем для «зачета» необходимо решить любые четыре задачи. Если студент будет решать в течение отведенного времени лишь четыре задачи, то вероятность правильного решения любой из них равна 0,8. Если он попробует решать пять задач, то вероятность правильного решения любой из них равна 0,7, а если он возьмется за решение всех шести задач, то вероятность снизится до 0,6. Какой тактики должен придерживаться студент, чтобы иметь наибольшие шансы получить зачет?

Вариант 2

1. В коробке 5 красных, 3 синих и 2 желтых карандаша. Наудачу взяли три карандаша. Найти вероятности событий:

а) среди выбранных карандашей – 2 красных и 1 синий;

б) эти карандаши одного цвета;

в) разных цветов.

2. Вероятность попадания стрелком в цель при выстреле равна 0,7. Стрелок стреляет до первого попадания. Чему равна вероятность того, что ему потребуется:

а) три выстрела;

б) не более трех выстрелов?

3. Половина поступивших на склад изделий изготовлена на первом заводе, третья часть – на втором заводе. Остальные изделия – на третьем. Первый завод производит 1 % с браком, второй – 0,7 % и третий – 0,5 %. Произвольно выбранное изделие оказалось с браком. Какова вероятность того, что оно изготовлено:

а) на первом заводе;

б) на втором заводе.

4. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключается) три партии из четырех или пять из восьми?

Вариант 3

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков:

а) равна пяти;

б) больше десяти.

2. В экзаменационном билете 3 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,95, на второй вопрос – 0,9 и на третий вопрос – 0,85. Определить вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого ему необходимо ответить хотя бы на два вопроса.

3. В классе обучаются 20 девочек и 10 мальчиков. К уроку не выполнили домашнее задание 4 девочки и 3 мальчика. Наудачу вызванный ученик оказался неподготовленным к уроку. Какова вероятность того, что отвечать был вызван мальчик?

4. На каждое из 6 заданий теста даны пять ответов, из которых один верный. Чему равна вероятность, что студент угадает ответы трех заданий? Чему равна вероятность, что студент получит «зачет», отвечая наудачу, если должны быть получены не менее четырех верных ответов?

Вариант 4

1. На группу из 10 юношей и 14 девушек выдали 6 билетов в театр. Какова вероятность, что при случайном распределении билетов:

а) в группе «театралов» окажется поровну юношей и девушек;

б) все билеты достанутся девушкам?

2. Имеются две урны: в первой 4 белых и 2 черных шара, во второй 6 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, два шара. Затем из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что шар будет белым.

3. Три орудия ведут стрельбу по цели. Вероятности попадания в цель для них соответственно равны 0,4; 0,5; 0,55. Для поражения цели достаточно двух попаданий. Орудия сделали залп по цели. Найти вероятность того, что цель будет поражена. Вычислить вероятность того, что хотя бы одно оружие попадет в цель.

4. Вероятность преждевременного перегорания электролампы составляет 0,02. Найти вероятность того, что не менее 4 из 6 ламп перегорит преждевременно. Найти вероятность того, что из 100 электроламп перегорит:

а) три лампы;

б) хотя бы одна лампа.

Вариант 5

1. Подсчитать вероятность того, что в наудачу выбранном телефонном номере, состоящем из 6 цифр, все цифры окажутся различными.

2. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены потребует его внимания первый станок, равна 0,7; второй – 0,75; третий – 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены внимания рабочего потребуют:

а) какие-либо два станка;

б) хотя бы один станок.

3. Изделия изготавливаются на трех станках-автоматах. Первый производит 40 %, второй – 50 %, а третий 10 % всех изделий. Брак в их продукции

составляет соответственно 3 %, 4 %, 1 %. Случайно выбранное изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно произведено:

а) первым станком-автоматом;

б) вторым станком-автоматом.

4. Пусть вероятность того, что покупателю необходима обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из пяти первых покупателей обувь этого размера будет необходима:

а) одному покупателю;

б) по крайней мере одному.

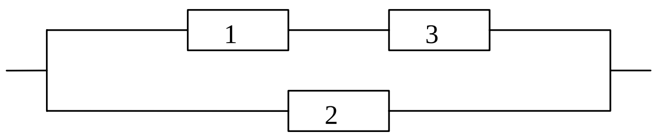
Вариант 6

1. На полке наугад расставлены 18 книг. Найти вероятность того, что:

а) три тома одного сочинения окажутся поставленными вместе в порядке номеров;

б) три тома будут поставлены вместе.

2. Вероятность отказа за время T для первого элемента равна 0,1; для второго – 0,2; для третьего – 0,15. Найти вероятность безотказной работы цепи за время T. Схема включения элементов цепи приведена на рисунке:



3. На сборку поступило 3 000 деталей с первого автомата и 2 000 со второго. Первый автомат дает 0,27 % брака, а второй – 0,33 %. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если деталь выбирается наудачу из всех деталей. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь изготовлена первым автоматом, если при проверке она оказалась стандартной.

4. Производится 6 выстрелов по цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что:

а) произойдет одно попадание в цель;

б) произойдет не менее пяти попаданий;

в) произойдет хотя бы одно попадание.

Вариант 7

1. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

а) все пассажиры выйдут на пятом этаже;

б) все выйдут одновременно;

в) все пассажиры выйдут на разных этажах.

2. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8; а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он:

а) попадет один раз;

б) попадет два раза;

в) попадет хотя бы один раз.

3. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25 %, вторая – 35 %, третья – 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2 %. Какова вероятность того, что случайно взятый со склада болт оказался дефектным? Найти вероятность того, что болт произведен первой машиной, если установлено, что случайно взятый болт дефектный.

4. Всхожесть семян данного растения составляет 70 %. Найти вероятность того, что из десяти посеянных семян взойдут:

а) шесть;

б) не менее шести;

в) хотя бы два.

Чему равно наивероятнейшее число взошедших семян, если будет посеяно 200 семян этого растения? Найти вероятность того, что из 200 посеянных семян взойдет не менее половины.

Вариант 8

1. В коробке из 25 конфет 10 с ореховой начинкой. Ребенок наудачу берет 3 конфеты. Найти вероятность того, что:

а) они все с ореховой начинкой;

б) хотя бы одна с ореховой начинкой;

в) с ореховой начинкой среди выбранных конфет больше.

2. Два стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,8. Составить полную группу возможных событий и найти их вероятности. Найти вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в мишень.

3. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, а во второй – 6 белых и 4 черных. Из наудачу выбранной урны выбирают наугад шар и перекладывают в другую урну. Шары в этой урне перемешивают и наудачу выбирают два шара. Чему равна вероятность, что эти шары белые?

4. Вероятность выигрыша по билету «Спортивная лотерея» равна 0,01. Чему равна вероятность выигрыша для владельца 10 билетов:

а) по 2 билетам;

б) хотя бы по одному билету?

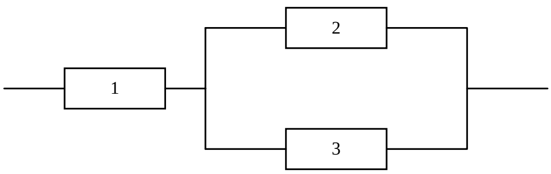
Вариант 9

1. Код банковского сейфа состоит из 6 цифр. Найти вероятность «взломать» сейф, если взломщик знает:

а) первые три цифры кода;

б) что все цифры кода различные.

2. Вероятность отказа за время T первого элемента равна 0,4; для второго – 0,2; для третьего – 0,1. Найти вероятности безотказной работы цепи за время T. Схема включения элементов цепи приведена на рисунке:



Как переставить элементы, чтобы увеличить вероятность безотказной работы цепи?

3. Вероятность, что безработный найдет работу, обратившись в службу занятости, равна 0,3. Оценить вероятность того, что среди 12 человек, обратившихся за день, работу найдут пять. Чему равна вероятность того, что из 320, обратившихся за месяц, работу получат от 100 до 200?

4. При исследовании больного имеется подозрение на одно из трех заболеваний: A_1, A_2, A_3. Их вероятности (по мнению врача) соответственно следующие: $p_1 = \frac{1}{2}$; $p_2 = \frac{1}{6}$; $p_3 = \frac{1}{3}$. Для уточнения диагноза назначен анализ, дающий положительный результат с вероятностью 0,1 в случае заболевания A_1, с вероятностью 0,2 в случае заболевания A_2 и с вероятностью 0,9 в случае заболевания A_3. Анализ был произведен пять раз и дал четыре раза положительный результат и один раз отрицательный. Требуется найти вероятность каждого заболевания после анализа.

Вариант 10

1. Первенство по баскетболу оспаривают 18 лучших команд, которые путем жеребьевки распределяются на две группы по 9 команд в каждой. Пять команд обычно занимают первые места. Какова вероятность попадания всех лидирующих команд в одну группу? Какова вероятность попадания двух лидирующих команд в одну группу и трех – в другую?

2. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

3. Имеется 30 билетов, из которых данный студент знает 25. У студента есть две возможности: взять билет первым или, уступив очередь, вторым. В каком случае вероятность успешной сдачи выше?

4. Случайно встреченное лицо с вероятностью 0,2 может оказаться брюнетом, с вероятностью 0,3 – шатеном, с вероятностью 0,4 – блондином и с вероятностью 0,1 – рыжим. Найти вероятность того, что среди шести случайно встреченных лиц:

а) не менее 4 блондинов;

б) хотя бы один рыжий;

в) 3 блондина и 3 шатена.

Вариант 11

1. В библиотеке среди двухсот сорока книг – 20 книг по теории вероятностей. Наугад выбрали 5 книг. Найти вероятности следующих событий:

а) в выборке нет ни одной книги по теории вероятностей;

б) в выборке будут две книги по теории вероятностей;

в) хотя бы одна книга по теории вероятностей.

2. Рабочий обслуживает три автоматических станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок потребует внимания рабочего, равна 0,4; для второго и третьего станков эти вероятности соответственно равны 0,3 и 0,5. Вычислить вероятности следующих событий:

а) в течение часа только один станок потребует внимания рабочего;

б) хотя бы один станок потребует внимания.

3. На предприятии имеются однотипные приборы, изготовленные на двух заводах. При этом число приборов, полученных от первого завода, составило 70 %, а от второго – 30 %. Известно, что первый завод выпускает 90 % приборов, могущих прослужить установленный срок, а второй – 95 %. Взятый наугад прибор прослужил установленный срок. Найти вероятность того, что этот прибор был получен от второго завода.

4. Сколько раз надо подбросить монету, чтобы наивероятнейшее число выпадений герба было равно 32?

Вариант 12

1. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что абсолютная величина разности выпавших очков равна 2?

2. Покупатель приобрел пылесос и полотер. Вероятность того, что пылесос не выйдет из строя в течение гарантийного срока, равна 0,95. Для полотера такая вероятность равна 0,94. Найти вероятности следующих событий:

а) оба прибора выдержат гарантийный срок;

б) ни один не выдержит гарантийный срок;

в) хотя бы один прибор выдержит гарантийный срок.

3. На сборочный конвейер поступают детали с четырех автоматических станков. Первый станок дает 0,5 % брака, второй – 0,4 % брака, третий – 0,7 %, четвертый – 0,6 %. С первого станка на конвейер поступило 1 200 деталей, со

второго – 1 500, с третьего – 2 000, с четвертого – 1 300. Вычислить вероятность попадания на конвейер бракованной детали.

4. Вероятность попадания в цель стрелка при одном выстреле равна 0,7. Определить наивероятнейшее число попаданий и соответствующую ему вероятность, если произведено 9 выстрелов.

Вариант 13

1. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что выпадет:

а) одинаковое число очков на обеих костях;

б) сумма выпавших очков будет больше 10.

2. Первый стрелок поражал цель в 80 % случаев, а второй – в 60 %. Каждый стрелок сделал по одному выстрелу. Вычислить вероятности следующих событий:

а) в цель попадут оба стрелка;

б) в цель попадет только один стрелок;

в) попадет хотя бы один стрелок.

3. Винты изготавливаются на двух станках. Вероятность брака первого станка равна 0,04, для второго – 0,02. Производительность первого станка в 3 раза больше, чем второго. Готовые винты складываются в один ящик. Определить вероятность того, что наудачу взятый винт будет без дефекта.

Чему равна вероятность того, что винт изготовлен на первом заводе, если известно, что он без дефекта?

4. Вероятность выигрыша по отдельному билету лотереи равна 0,2. Какова вероятность, имея шесть билетов, выиграть:

а) по двум билетам;

б) хотя бы по одному?

Вариант 14

1. Из колоды в 36 карт наугад выбираются четыре карты. Найти вероятности следующих событий:

а) в выборке не будет ни одного туза;

б) в выборке окажется хотя бы один туз;

в) только один туз.

2. Акционер имеет по одной акции трех различных видов. Первый вид акций приносил прибыль акционерам в среднем в 70 % случаев, а два других вида, соответственно, в 50 % и 60 % случаев. Вычислить вероятности следующих событий:

а) только один вид акций даст прибыль;

б) хотя бы один вид акций даст прибыль акционеру.

3. В обследуемой группе мужчин некоторого возраста 30 % курящих и 70 % некурящих. В среднем 20 % курящих мужчин этого возраста имеют

заболевания легких, у некурящих – 5 %. *У* обследуемого мужчины оказалось заболевание легких. Найти вероятности следующих событий:

а) обследуемый мужчина был курящим;

б) пациент был некурящим.

4. Предполагая, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковы, найти вероятность того, что в семье, имеющей шесть детей, не менее двух девочек.

Вариант 15

1. Четырехтомное собрание сочинений расставлялось на книжную полку в случайном порядке. Найти вероятность того, что все тома будут стоять в порядке возрастания номеров слева направо.

2. Три фермера независимо возвращают банку кредит. Вероятности своевременного возвращения ими кредитов таковы: 0,8; 0,7; 0,6. Вычислить вероятности следующих событий:

а) все три фермера своевременно возвратят кредит;

б) только один фермер своевременно возвратит кредит;

в) хотя бы один своевременно возвратит кредит.

3. Магазин медтехники приобрел 70 % однотипных приборов одного завода и 30 % – другого. Известно, что первый завод выпускает 90 % приборов, могущих прослужить определенный срок, а второй – 95 %. Найти вероятность того, что наугад приобретенный прибор прослужит заданный срок.

4. Приживаемость саженцев кедра составляет 90 %. Вычислить вероятности следующих событий:

а) при четырех посаженных приживется только один;

б) хотя бы один из четырех.

Вариант 16

1. В группе из 24 студентов 8 отличников. Для проверки знаний по математике случайно выбрали 6 студентов. Вычислить вероятности следующих событий:

а) в выборку попадут 6 отличников;

б) в выборке не будет ни одного отличника;

в) в выборке хотя бы один отличник.

2. Два стрелка производят по одному выстрелу в цель. Первый стрелок поражал цель в 80 % случаев, а второй – в 70 %. Найти вероятности следующих событий:

а) в цель не попадет ни один стрелок;

б) в цель попадет только один стрелок;

в) попадет хотя бы один.

3. Три мастера изготавливают однотипные приборы, при этом первый делает в день половину всей работы, а два других выполняют оставшуюся

часть в равной доле. Первый мастер дает 2 % брака, второй – 1,5 %, третий – 1 %. Взятый случайно контролером на проверку прибор оказался с браком. Каким вероятнее мастером он изготовлен?

4. Всхожесть семян некоторой культуры составляет 90 %. Чему равна вероятность того, что из 7 посеянных семян взойдет 5? Чему равна вероятность, что из 100 посеянных семян взойдет более 80?

Вариант 17

1. На группу из 10 юношей и 15 девушек выделили 8 билетов в театр. Какова вероятность, что при случайном распределении билетов в группе «театралов» окажется поровну юношей и девушек?

2. Три охотника выстрелили в гуся. Вероятности их попаданий таковы: 0,7; 0,8; 0,6. Найти вероятности событий:

а) гусь уцелеет;

б) в него попадет только один охотник;

в) попадет хотя бы один охотник.

3. Два рабочих производят однотипные детали, при этом производительность первого в два раза больше, чем у второго. *У* первого рабочего получается в среднем 2 % брака, у второго – 1 %. Контролер обнаружил бракованную деталь. Каким вероятнее рабочим она изготовлена?

4. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,6. Найти наивероятнейшее число поступивших заявок на снабжение в данный день и его вероятность.

Вариант 18

1. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые по жребию распределяются в две группы по 10 человек. Определить вероятность того, что два наиболее сильных игрока будут играть в разных группах.

2. Вероятности сдачи экзамена по математике для трех данных студентов таковы: 0,9; 0,85; 0,8. Найти вероятности следующих событий:

а) только один из этих студентов сдаст экзамен;

б) не сдаст ни один;

в) хотя бы один студент сдаст экзамен.

3. В обследуемой группе мужчин некоторого возраста 60 % курящих, а остальные – некурящие. В среднем 30 % курящих этого возраста имеют заболевания легких, у некурящих – 5 %. Вычислить вероятность того, что случайно обследуемый мужчина этого возраста имеет заболевание легких.

4. В цехе работает 120 рабочих, при этом 75 % из них перевыполняют месячный план. Найти наивероятнейшее число перевыполняющих месячный план рабочих и соответствующую ему вероятность.

Вариант 19

1. Группа из десяти мужчин и десяти женщин делится случайно на две равные части. Какова вероятность того, что в каждой из частей мужчин и женщин будет поровну?

2. Два спортсмена выполняют норму мастера спорта. Вероятность выполнения нормы для первого спортсмена равна 0,8, а для второго – 0,7. Найти вероятности следующих событий:

а) норму выполнит только один какой-нибудь спортсмен;

б) не выполнит ни один;

в) выполнит хотя бы один спортсмен.

3. В первой урне имеется 10 белых и 5 красных шаров, во второй – 8 белых и 10 красных, в третьей – 6 белых и 6 красных. Выбирающий наугад подошел к одной из урн и наугад взял один шар. Вычислить вероятность того, что этот шар оказался красным.

4. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: две партии из четырех или три из шести?

Вариант 20

1. Колоду из 36 карт наугад разделили на две равные части. Какова вероятность того, что в каждой из частей будет поровну карт черных и красных мастей?

2. В среднем 80 % саженцев яблони и 90 % саженцев груш приживались при посадке. На садовом участке будет посажено по одному саженцу каждой культуры. Найти вероятности следующих событий:

а) приживется только один из саженцев;

б) приживутся оба;

в) приживется хотя бы один саженец.

3. Три мальчика с одинаковыми корзинами собирали в лесу грибы. Первый нашел 5 белых и 10 подосиновиков, второй – 8 белых и 10 подосиновиков, третий – 6 белых и 8 подосиновиков. При встрече они составили корзины вместе. Через некоторое время первый мальчик случайно взял с одной из корзин белый гриб. Какова вероятность того, что он взял этот гриб со своей корзины?

4. Жюри состоит из пяти членов, каждый из которых выносит верное решение с вероятностью 0,9. Вычислить вероятность, что жюри вынесет верное решение, если оно принимается большинством членов.

Вариант 21

1. В группе 25 студентов, среди которых 6 отличников. Для контроля за самостоятельной работой случайным образом вызвано 8 студентов. Найти вероятность того, что среди вызванных будет:

а) два отличника;

б) ни одного отличника;

в) хотя бы один отличник.

2. Два студента при сдаче зачета получили по две задачи. Первый студент решает верно каждую из полученных задач с вероятностью 0,9, а второй – с вероятностью 0,8. Для получения зачета необходимо верно решить обе задачи. Какова вероятность, что:

а) оба студента получат зачет;

б) хотя бы один студент получит зачет?

3. Три бухгалтера обрабатывают одинаковое количество счетов за рабочий день. Вероятности допустить ошибку первым, вторым и третьим бухгалтером равны 0,05; 0,02 и 0.01 соответственно. При проверке одного из счетов была обнаружена ошибка. Какова вероятность, что его обрабатывал первый бухгалтер?

4. Оптовая база снабжает 10 магазинов. Вероятность поступления заявки от каждого из этих магазинов на очередной день равна 0,4. Найти:

а) наивероятнейшее число заявок;

б) вероятность того, что число заявок будет равно наивероятнейшему числу;

в) вероятность того, что число заявок будет менее наивероятнейшего числа.

Вариант 22

1. В группе из 26 студентов имеются две сестры. Какова вероятность, что при случайном делении группы на две части сестры попадут в одну часть?

2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность, что сумма выпавших очков равна:

а) четырем очкам;

б) не меньше одиннадцати.

3. Предприятие по сборке телеаппаратуры имеет две линии, причем производительность первой линии в два раза меньше производительности второй. Известно, что первая линия в среднем дает 1,5 % изделий, имеющих производственные дефекты, а вторая линия – 2 %. Найти вероятности того, что:

а) приобретенный телевизор данного предприятия не будет иметь производственных дефектов;

б) телевизор был изготовлен на первой линии, если оказалось, что он имеет производственный дефект.

4. На участке леса, где промышляет охотник, 90 % обитающих лис имеет рыжий окрас и 10 % – черно-бурый. Найти вероятность, что среди добытых охотником 8 лисьих шкурок:

а) 2 черно-бурых;

б) не более 2 черно-бурых;

в) хотя бы одна черно-бурая.

Вариант 23

1. На одиннадцати одинаковых карточках написаны числа: 2, 2, 4, 6, 5, 7, 8, 11, 12, 12, 13. Случайным образом берутся две карточки. Какова вероятность, что составленная из написанных на них числах дробь:

а) сократима;

б) равна единице?

2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого орудия равна 0,8, а для второго – 0,6. Оба орудия сделали по два выстрела. Найти вероятности следующих событий:

а) ровно два снаряда попали в цель;

б) хотя бы один снаряд попал в цель.

3. Студент добирается на занятия в половине случаев на автобусе, а в половине случаев на троллейбусе. Вероятность опоздания в первом случае равна 0,05, а во втором – 0,09. Найти вероятность, что сегодня студент добирался на автобусе, если он сегодня опоздал.

4. В автомат для продажи шариков жевательной резинки заправили шарики красного и синего цвета в отношении 3:7. Девочка покупает 6 шариков. Она не хочет, чтобы все шарики были одного цвета. Считая вероятности получения шарика каждого цвета постоянными, найти вероятность того, что:

а) не все шарики будут одного цвета;

б) красных и синих ей достанется поровну.

Вариант 24

1. Из колоды карт в 36 листов достали случайным образом 4 карты. Найти вероятность, что среди вынутых карт:

а) есть один туз;

б) есть пиковый туз;

в) есть все масти.

2. Деталь проходит при обработке четыре операции. Вероятности испортить деталь при этих операциях соответственно равны 0,1; 0,05; 0,1 и 0,01. Чему равна вероятность получения не бракованной детали?

3. В группе в 30 человек имеется четыре человека, которые в десяти случаях из десяти верно решают задачи, предлагаемые на практических занятиях; одиннадцать человек это делают в восьми случаях из десяти; десять человек в шести случаях; остальные пять – в трех случаях из десяти. На занятии наудачу вызванный студент верно решил задачу. Найти вероятность, что это был студент:

а) принадлежащий к первой из перечисленных групп;

б) последней из перечисленных групп.

4. В среднем 90 % из числа взявших кредит возвращают его в срок договора. Восемь человек 1 июля взяли кредит. Чему равна вероятность, что из них в срок расплатятся :

а) шесть человек;

б) хотя бы один?

Вариант 25

1. Какова вероятность при игре в спортлото «6 из 49» отгадать:

а) четыре номера;

б) все шесть номеров?

2. В двух урнах находится по 4 красных и 6 синих шаров. Из каждой урны вынули по два шара. Найти вероятности следующих событий:

а) все вынутые шары одного цвета;

б) есть хотя бы один синий.

3. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6; 0,5 и 0,4.

4. График работ состоит из семи частей, каждая из которых может быть выполнена без нарушения своего срока выполнения с вероятностью 0,8 независимо от того, нарушались ли сроки выполнения других частей. Найти вероятность, что при выполнении работ срок будет нарушен:

а) для трех частей графика;

б) хотя бы для одной части графика.

Вариант 26

1. В ящике находится 8 синих, 5 красных и 4 белых шара. Из ящика достали случайным образом 3 шара. Найти вероятность, что:

а) все вынутые шары одного цвета;

б) среди вынутых есть хотя бы один белый шар.

2. Если при проверке механических часов оказывается, что точность хода недостаточна, то производится регулировка с последующей проверкой. В среднем 60% часов, сошедших с конвейера, нуждаются в дополнительной регулировке, а из всех часов, прошедших хотя бы одну дополнительную регулировку, 20% нужно регулировать заново. Часы, точность которых недостаточна после трех проведенных регулировок, отправляются в брак. С конвейера наудачу сняли часы. Найти вероятности событий:

а) они будут подвергнуты одной регулировке;

б) будут отправлены в брак.

3. Курс разбит на три темы. При подготовке к экзамену студент выучил 90 % вопросов по первой теме, 80 % вопросов по второй теме и лишь 40 % вопросов по третьей теме. На экзамене он получил два вопроса по случайно выбранным преподавателем двум темам из трех. Вопросы также выбирались случайным образом. Какова вероятность, что студент знает оба вопроса?

4. На бахче к началу уборки урожая 40 % арбузов некоторого сорта имеет вес более 3 килограммов. Найти вероятность, что среди восьми наудачу взятых арбузов более трех килограммов будут весить:

а) пять арбузов;

б) не менее шести арбузов.

Вариант 27

1. Количество участников соревнований по фигурному катанию равно 14. Среди участников выступают три сестры. Какова вероятность, что при жеребьевке номеров окажется, что сестры выступают друг за другом?

2. Вероятности принесения прибыли за фиксированный период времени каждым из трех филиалов предприятия независимы и соответственно равны: 0,8; 0,9 и 0,6. Найти вероятности событий:

а) все филиалы принесут прибыль;

б) один филиал принесет прибыль;

в) хотя бы один филиал принесет прибыль.

3. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

4. После сборки 30 % механических часов нуждаются в дополнительной регулировке. Какова вероятность, что из взятых наудачу восьми сошедших с конвейера часов количество не требующих дополнительной регулировки:

а) равно шести;

б) не менее шести?

Вариант 28

1. Из колоды карт в 36 листов случайным образом вынули 6 карт. Найти вероятности следующих событий:

а) все вынутые карты пиковой масти;

б) среди вынутых нет ни одного короля;

в) есть один король и есть туз трефовой масти.

2. Какова вероятность, что ни у кого из четырех членов семьи дни рождения не совпадают? (Считать, что никто не родился в високосный год).

3. Вероятности принесения прибыли за фиксированный период времени каждым из трех филиалов предприятия независимы и соответственно равны: 0,8; 0,9 и 0,6. Если все филиалы принесут прибыль, то вероятность того, что банк даст кредит этому предприятию равна 0,95; для случаев, когда два филиала, один филиал и ноль филиалов дадут прибыль, вероятности получения кредита будут иметь значения 0,8; 0,7 и 0,2 соответственно. Чему равна вероятность, что по истечении рассматриваемого периода времени банк даст кредит этому предприятию?

4. Партия арбузов содержит 20 % зеленых арбузов или перезревших. Найти вероятности, что количество арбузов хорошей спелости среди 9 наудачу купленных будет:

а) равно наивероятнейшему числу;

б) равно пяти;

в) не менее пяти.

Вариант 29

1. Среди 12 механических часов 5 нуждаются в дополнительной регулировке. Часовой мастер берет наудачу шесть часов. Найти вероятность, что из них:

а) трое часов нуждаются в дополнительной регулировке;

б) ни одни не нуждаются в дополнительной регулировке;

в) хотя бы одни нуждаются в дополнительной регулировке.

2. Колоду карт в 36 листов раскладывают в ряд. Какова вероятность, что первая карта бубновой масти будет лежать в ряду пятой по счету?

3. В течение семестра каждый студент должен написать две контрольные работы. Вероятности допущения студента к досрочной сдаче экзамена при наличии двух, одной и ни одной отличных оценок за текущие контрольные работы равны 0,9; 0,7 и 0,3 соответственно. Вероятности написания студентом Петровым контрольных на «отлично» равны 0,8 для первой работы и 0,9 второй работы. Найти вероятность, что студент Петров будет допущен к досрочной сдаче экзамена.

4. Среди студентов, принятых в высшее учебное заведение, иногородние в среднем составляют 20%. Чему равна вероятность, что среди десяти студентов группы количество иногородних:

а) будет равно шести;

б) не менее пяти?

Вариант 30

1. В группе из 25 человек случайным образом выбирается бригада в составе 7 человек, после чего в бригаде случайным образом выбирается бригадир. Чему равна вероятность, что студент Петров окажется рядовым членом бригады, а студент Сидоров в ней будет бригадиром?

2. Трасса авторалли имеет два участка. В авторалли принимают участие две российские машины. Первая машина проходит первый участок трассы с вероятностью 0,9, а второй – с вероятностью 0,7. Для второй машины эти вероятности равны соответственно 0,8 и 0,5. Найти вероятности того, что:

а) обе машины преодолеют трассу;

б) только одна преодолеет трассу;

в) хотя бы одна машина преодолеет трассу.

3. В студенческой группе 15 девушек и 10 юношей. Зимнюю сессию сдали на «отлично» 4 девушки и 2 юноши. Деканат наудачу выбирает студента группы. Он оказался «отличником». Найти вероятность, что этот студент является юношей.

4. Вероятность повреждения единицы товара при перевозке равна 0,1. Найти вероятность, что при перевозке 8 единиц товара:

а) будет повреждено 3 единицы товара;

б) не менее 2 единиц;

в) хотя бы 1 единица.

10.2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

Определение. Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

Определение. Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

Определение. Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения.

Закон распределения дискретной случайной величины

Определение. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения дискретной** случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется **рядом распределения**.

Графическое представление этой таблицы называется **многоугольником распределения.** При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.

Биноминальное распределение

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одинаковой вероятностью p в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину X.

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

Значения найти достаточно просто. Очевидно, что в результате n испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до n раз.

Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \; k = 0,1,2,...$$

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется **биноминальным**.

<u>Пример 1.</u> В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1.

Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1) Вообще нет нестандартных.

$$P_4(0) = \frac{4!}{0! \cdot 4!} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561.$$

2) Одна нестандартная.

$$P_4(1) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916.$$

3) Две нестандартные детали.

$$P_4(2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486.$$

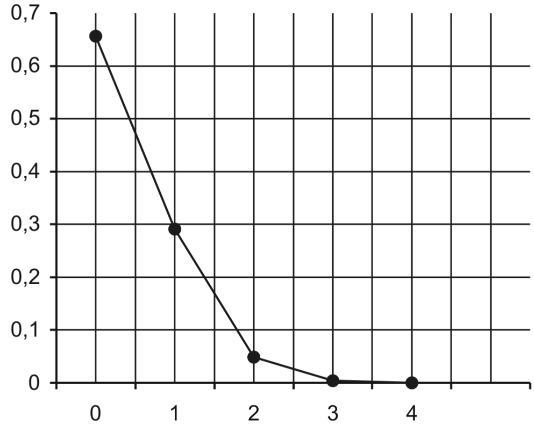
4) Три нестандартные детали.

$$P_4(3) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}0036.$$

5) Четыре нестандартных детали.

$$P_4(4) = \frac{4!}{4! \cdot 0!} 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001.$$

Построим многоугольник распределения.



Распределение Пуассона

Пусть производится n независимых испытаний, в которых появление события A имеет вероятность p. Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события A в каждом испытании мало ($p \le 0{,}1$), то для нахождения вероятности появления события A k раз находится следующим образом.

Сделаем важное допущение – произведение np сохраняет постоянное значение:

$$\mathrm{np} = \lambda .$$

Практически это допущение означает, что среднее число появления события в различных сериях испытаний (при разном n) остается неизменным.

По формуле Бернулли получаем:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Переходя к пределу этой вероятности при $n \to \infty$, получаем формулу **распределения Пуассона:**

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} .$$

Если известны числа λ и k, то значения вероятности можно найти по соответствующим таблицам распределения Пуассона.

Гипергеометрическое распределение

Пусть имеется множество *N* элементов, из которых *M* элементов обладают некоторым признаком *A*. Извлекается случайным образом без возвращения *n* элементов. Требуется найти вероятность того, что из них *m* элементов обладают признаком *A*. Искомая вероятность (зависящая от *N*, *M*, *n*, *m*) определяется по формуле

$$P_{N,m} = \frac{C_n^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Полученный с помощью данной формулы ряд распределения называется **гипергеометрическим законом распределения**.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако, когда невозможно найти закон распределения, или этого не требуется, можно ограничиться нахождением значений, называемых числовыми характеристиками случайной величины. Эти величины определяют некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины, и степень их разбросанности вокруг этого среднего значения.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математическое ожидание существует, если ряд, стоящий в правой части равенства, сходится абсолютно.

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.

$$M(C) = C.$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M(Cx) = CM(x).$$

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Это свойство справедливо для произвольного числа случайных величин.

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(X+Y) + M(X) + M(Y).$$

Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

Пусть производится *n* независимых испытаний, вероятность появления события *A* в которых равна *p*.

Теорема. *Математическое ожидание M(X) числа появления события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.*

$$M(X) = \text{пр}.$$

Однако математическое ожидание не может полностью характеризовать случайный процесс. Кроме математического ожидания надо ввести величину, которая характеризует отклонение значений случайной величины от математического ожидания.

Это отклонение равно разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием. При этом математическое ожидание отклонения равно нулю. Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, другие отрицательны, и в результате их взаимного погашения получается ноль.

Определение. Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2.$$

Пример 2. Для рассмотренного выше примера закон распределения случайной величины имеет вид:

X	0	1	2
p	0,0625	0,375	0,5625

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Математическое ожидание случайной величины равно:

$$M(X) = 0\cdot 0{,}0625 + 1\cdot 0{,}375 + 2\cdot 0{,}5625 = 1{,}5.$$

Возможные значения квадрата отклонения:

$$\left[x_1 - M(X)\right]^2 = (0-1{,}5)^2 = 2{,}25,$$

$$\left[x_2 - M(X)\right]^2 = (1-1{,}5)^2 = 0{,}25,$$

$$\left[x_3 - M(X)\right]^2 = (2-1{,}5)^2 = 0{,}25.$$

Тогда

$[X\text{-}M(X)]^2$	2,25	0,25	0,25
p	0,0625	0,375	0,5625

Дисперсия равна:

$$D(X) = 2,25 \cdot 0,0625 + 0,25 \cdot 0,375 + 0,25 \cdot 0,5625 = 0,375.$$

Однако на практике подобный способ вычисления дисперсии неудобен, т.к. приводит при большом количестве значений случайной величины к громоздким вычислениям. Поэтому применяется другой способ.

Вычисление дисперсии

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания.*

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2.$$

Применим эту формулу для рассмотренного выше примера:

X	0	1	2
X^2	0	1	4
p	0,0625	0,375	0,5625

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,375 + 4 \cdot 0,5625 = 2,625,$$

$$D(X) = 2,625 - \left[1,5\right]^2 = 0,375.$$

Свойства дисперсии

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C) = 0.$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y).$$

Справедливость этого равенства вытекает из свойства 2.

Теорема. *Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события посто-*

янна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в каждом испытании.

$$D(X) = \text{п}\text{р}q\,.$$

Среднее квадратическое отклонение

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,.$$

Теорема. *Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.*

$$\sigma(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n)}\,.$$

Пример 3. Завод выпускает 96% изделий первого сорта и 4% изделий второго сорта. Наугад выбирают 1000 изделий. Пусть X – число изделий первого сорта в данной выборке. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Выбор каждого из 1000 изделий можно считать независимым испытанием, в котором вероятность появления изделия первого сорта одинакова и равна p = 0,96.

Таким образом, закон распределения может считаться биноминальным.

$$m_x = pn = 1000 \cdot 0{,}96 = 960;$$

$$D_x = \text{п}\text{р}q = 1000 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 = 38{,}4.$$

Пример 4. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления этого события в каждом испытании равны и известно, что $M(X)$ = 0,9.

Поскольку случайная величина X распределена по биноминальному закону, то

$$M(X) = \text{п}\text{р} = 2p = 0{,}9; \Rightarrow\ p = 0{,}45;$$

$$D(X) = \text{п}\text{р}q = 2p(1-p) = 2 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 = 0{,}495.$$

Пример 5. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события A в каждом испытании. Найти вероятность появления события A, если дисперсия числа появлений события в трех независимых испытаниях равна 0,63.

По формуле дисперсии биноминального закона получаем

$$D(X) = \text{п}\text{р}q = 3p(1-p) = 0{,}63;$$

$$3p^2 - 3p + 0{,}63 = 0$$

$$p^2 - p + 0{,}21 = 0;$$

$$p_1 = 0{,}7;\ \ p_2 = 0{,}3;$$

Пример 6. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа каждого из приборов равны соответственно p_1=0,3; p_2=0,4; p_3=0,5; p_4=0,6. Найти математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

Принимая за случайную величину число отказавших приборов, видим что эта случайная величина может принимать значения 0, 1, 2, 3 или 4.

Для составления закона распределения этой случайной величины необходимо определить соответствующие вероятности. Примем $q_i = 1 - p_i$.

1) Не отказал ни один прибор.

$$p(0) = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,084.$$

2) Отказал один из приборов.

$$p(1) = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 = 0,302.$$

3) Отказали два прибора.

$$p(2) = p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 p_4 + q_1 q_2 p_3 p_4 = 0,38.$$

4) Отказали три прибора.

$$p(3) = p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 p_4 = 0,198.$$

5) Отказали все приборы.

$$p(4) = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0,036.$$

Получаем закон распределения:

X	0	1	2	3	4
X^2	0	1	4	9	16
P	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Математическое ожидание:

$$M(X) = 0,302 + 2 \cdot 0,38 + 3 \cdot 0,198 + 4 \cdot 0,036 = 1,8.$$

$$M(X^2) = 0,302 + 4 \cdot 0,38 + 9 \cdot 0,198 + 16 \cdot 0,036 = 4,18.$$

Дисперсия:

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = 4,18 - 3,24 = 0,94.$$

Числовые характеристики случайных величин, распределенных по известным законам

Для случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, имеем

$$\mathbf{M(X) = np;}$$

$$\mathbf{D(X) = npq.}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ, который определяет этот закон, т. е.

$$\mathbf{M(X) = D(X) = \lambda.}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по гипергеометрическому закону, определяются формулами:

$$\mathrm{M}(X) = n\frac{M}{N};$$

$$D(X) = n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).$$

Функция распределения

Во всех рассмотренных выше случаях случайная величина определялась путем задания значений самой величины и вероятностей этих значений.

Однако такой метод применим далеко не всегда. Например, в случае непрерывной случайной величины, ее значения могут заполнять некоторый произвольный интервал. Очевидно, что в этом случае задать все значения случайной величины просто нереально.

Даже в случае, когда это сделать можно, зачастую задача решается чрезвычайно сложно. Рассмотренный только что пример даже при относительно простом условии (приборов только четыре) приводит к достаточно неудобным вычислениям, а если в задаче будет несколько сотен приборов?

Поэтому встает задача по возможности отказаться от индивидуального подхода к каждой задаче и найти по возможности наиболее общий способ задания любых типов случайных величин.

Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т.е. $X < x$, обозначим через $F(x)$.

Определение. Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x.

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцию распределения также называют **интегральной функцией**. Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

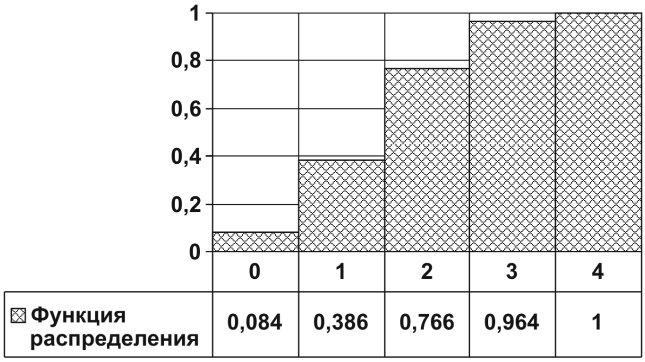
Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента x.

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.

Так, для примера, рассмотренного выше, функция распределения будет иметь вид:



Свойства функции распределения

1) Значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1].

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2) $F(x)$ – неубывающая функция.

$$F(x_2) \ge F(x_1) \text{ при } x_2 \ge x_1.$$

3) Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале.

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

4) На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

5) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой-либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

Плотность распределения

Функция распределения полностью характеризует случайную величину, однако, имеет один недостаток. По функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси.

Определение. Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция *f(x)* – первая производная от функции распределения $F(x)$.

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения также называют **дифференциальной функцией**. Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки x при повторении опытов.

После введения функций распределения и плотности распределения можно дать следующее определение непрерывной случайной величины.

Определение. Случайная величина X называется **непрерывной**, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей оси Ox, а плотность распределения $f(x)$ существует везде, за исключением(может быть, конечного числа точек.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что некоторая случайная величина X примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Геометрически это означает, что вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения $f(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$.

Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Свойства плотности распределения

1) Плотность распределения – неотрицательная функция.

$$f(x) \ge 0.$$

2) Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Пример 7. Случайная величина подчинена закону распределения с плотностью:

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x, \text{ при } 0\le x\le \pi, \\ 0, \text{ при } x<0 \text{ или } x>\pi. \end{cases}$$

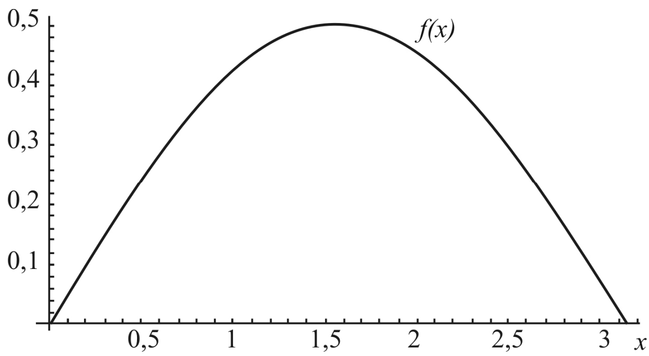
Требуется найти коэффициент a, построить график функции плотности распределения.

Для нахождения коэффициента a воспользуемся свойством $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{\pi} a\sin xdx+\int\limits_{\pi}^{\infty} 0dx=a\int\limits_{0}^{\pi}\sin xdx=-a\cos x\Big|_0^{\pi}=2a=1;$$

$$a=\frac{1}{2}.$$

Построим график плотности распределения.



Пример 8. Задана непрерывная случайная величина x своей функцией распределения $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} A\cos 2x, \text{ при } -\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{4}, \\ 0, \text{ при } |x|>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Требуется определить коэффициент A, найти функцию распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина x попадет в интервал $\left(\frac{\pi}{6};\ 2\right)$. Найдем коэффициент A.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx+\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2xdx+\int\limits_{\pi/4}^{\infty} 0dx=\frac{A\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=A=1.$$

Найдем функцию распределения:

1) На участке $x < -\dfrac{\pi}{4}$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$

2) На участке $-\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}$:

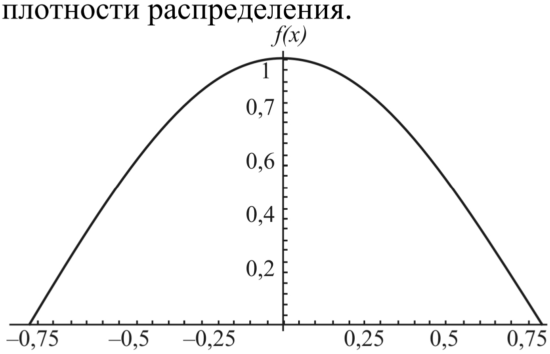
$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{x} \cos 2xdx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}.$$

3) На участке $x > \dfrac{\pi}{4}$:

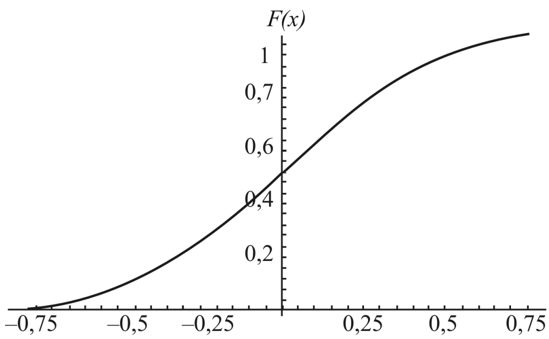
$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2xdx + \int\limits_{\pi/4}^{x} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$$

Итого: $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, \text{ при } -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 0, \text{ при } |x| > \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$ $\quad F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < -\dfrac{\pi}{4}; \\ \dfrac{\sin 2x + 1}{2}, \text{ при } -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, \text{ при } x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Построим график плотности распределения.



Построим график функции распределения.



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{\pi}{6};\ 2\right)$,

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int_{\pi/6}^{2} f(x)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int_{\pi/4}^{2} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067.$$

Ту же самую вероятность можно искать и другим способом:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F(\pi/6) = 1 - \frac{\sin(\pi/3)+1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067.$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Пусть непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения *f(x)*. Допустим, что все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку [*a*,*b*].

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины *X*, возможные значения которой принадлежат отрезку [*a*,*b*], называется определенный интеграл

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx.$$

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то математическое ожидание находится по формуле

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

При этом, конечно, предполагается, что несобственный интеграл сходится.

Определение. Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения,

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx.$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины для практического вычисления дисперсии используется формула

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Определение. Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Определение. Модой M_0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Для непрерывной случайной величины мода – такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум,

$$f(M_0) = \max.$$

Если многоугольник распределения для дискретной случайной величины или кривая распределения для непрерывной случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется **двухмодальным** или **многомодальным**.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется **антимодальным**.

Определение. Медианой M_D случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины,

$$P(X < M_D) = P(X > M_D).$$

Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам.

Отметим, что если распределение одномодальное, то мода и медиана совпадают с математическим ожиданием.

Определение. Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k,

$$\alpha_k = M[X^k].$$

Для дискретной случайной величины $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины $\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$.

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию.

Определение. Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - m_x)^k$,

$$\mu_k = M[(X - m_x)^k]$$

Для дискретной случайной величины $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x)dx$.

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю, а центральный момент второго порядка равен дисперсии. Центральный момент третьего порядка характеризует асимметрию распределения.

Определение. Отношение центрального момента третьего порядка к среднему квадратическому отклонению в третьей степени называется **коэффициентом асимметрии**.

$$a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}.$$

Определение. Для характеристики островершинности и плосковершинности распределения используется величина, называемая **эксцессом**,

$$C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3.$$

Кроме рассмотренных величин используются также так называемые абсолютные моменты:

Абсолютный начальный момент $\beta_k = M[|X|^k]$.

Абсолютный центральный момент $\nu_k = M[|X - m_x|^k]$.

Абсолютный центральный момент первого порядка называется **средним арифметическим отклонением**.

Пример 9. Для рассмотренного выше примера определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 2xdx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x; \ dv = \cos 2xdx; \\ du = dx; \ v = \dfrac{\sin 2x}{2}; \end{matrix} \right\} = \frac{x\sin 2x}{2} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{\cos 2x}{4} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 0.$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\cos 2xdx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x^2; \ dv = \cos 2xdx; \\ du = 2xdx; \ v = \dfrac{\sin 2x}{2}; \end{matrix} \right\} = \frac{x^2\sin 2x}{2} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\sin 2xdx = \left\{ \begin{matrix} u = x; \ \sin 2xdx = dv; \\ du = dx; \ v = -\dfrac{\cos 2x}{2}; \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{\pi^2}{16} + \frac{x\cos 2x}{2} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = 0{,}1163.$$

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = 0{,}1163 - 0 = 0{,}1163.$$

Пример 10. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из нее пять раз подряд извлекают шар, причем каждый раз вынутый шар возвращают обратно и шары перемешивают. Приняв за случайную величину X число извлеченных белых шаров, составить закон распределения этой величины, определить ее математическое ожидание и дисперсию.

Поскольку шары в каждом опыте возвращаются обратно и перемешиваются, то испытания можно считать независимыми (результат предыдущего опыта не влияет на вероятность появления или непоявления события в другом опыте).

Таким образом, вероятность появления белого шара в каждом опыте постоянна и определяется как $P_Б = \frac{6}{10} = 0,6.$

Таким образом, в результате пяти последовательных испытаний белый шар может не появиться вовсе, появиться один раз, два, три, четыре или пять раз.

Для составления закона распределения надо найти вероятности каждого из этих событий.

1) Белый шар не появился вовсе: $P_Б(0) = (1 - P_Б)^5 = 0,0102.$

2) Белый шар появился один раз: $P_Б(1) = C_5^1 P_Б^1 (1 - P_Б)^4 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} 0,6 \cdot 0,4^4 = 0,0768.$

3) Белый шар появится два раза: $P_Б(2) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} 0,6^2 \cdot 0,4^3 = 0,2304$.

4) Белый шар появится три раза: $P_Б(3) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} 0,6^3 \cdot 0,4^2 = 0,3456.$

5) Белый шар появится четыре раза: $P_Б(4) = \frac{5!}{4! \cdot 1!} 0,6^4 \cdot 0,4^1 = 0,2592.$

6) Белый шар появился пять раз: $P_Б(5) = 0,6^5 = 0,0778.$

Получаем следующий закон распределения случайной величины X.

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{X^2}$	0	1	4	9	16	25
$\boldsymbol{P(X)}$	0,0102	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0778

$M(X) = 0,0768 + 2 \cdot 0,2304 + 3 \cdot 0,3456 + 4 \cdot 0,2592 + 5 \cdot 0,0778 = 3,0002.$

$M(X^2) = 0,0768 + 4 \cdot 0,2304 + 9 \cdot 0,3456 + 16 \cdot 0,2592 + 25 \cdot 0,0778 = 10,201.$

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 10,201 - 9,0012 = 1,1998.$

При решении практических задач зачастую точно найти закон распределения случайной величины довольно сложно. Однако все происходящие процессы, связанные со случайными величинами, можно разделить на несколько типов, каждому из которых можно поставить в соответствие какой-либо закон распределения.

Выше были рассмотрены некоторые типы распределений дискретной случайной величины такие, как биноминальное распределение и распределение Пуассона.

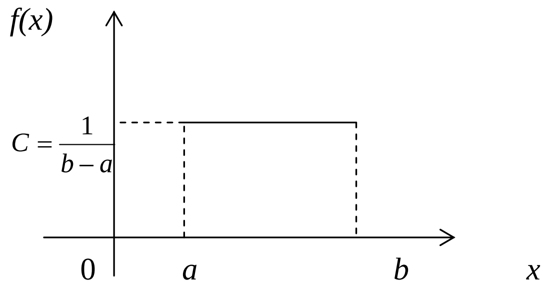
Рассмотрим теперь некоторые типы законов распределения для непрерывной случайной величины.

Равномерное распределение

Определение. Непрерывная случайная величина имеет **равномерное** распределение на отрезке [a, b], если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ C, & a\le x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Постоянная величина C может быть определена из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения.

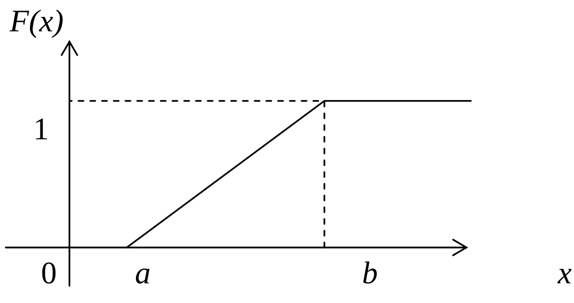


Получаем $C=\dfrac{1}{b-a}$.

Найдем функцию распределения $F(x)$ на отрезке [a,b].

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x}{b-a}\Big|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ при } a\le x\le b,\\ 1, \text{ при } x>b.\end{cases}$$



Для того чтобы случайная величина подчинялась закону равномерного распределения, необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала, и внутри этого интервала значения этой случайной величины были бы равновероятны.

Определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, подчиненной равномерному закону распределения.

$$m_x = \int_a^b x f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$m_{x^2} = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$D_x = m_{x^2} - m_x^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Показательное распределение

Определение. Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } \ x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ при } \ x \ge 0, \end{cases}$$

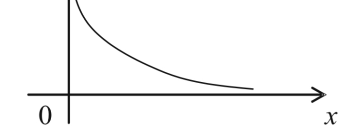
где λ – положительное число.

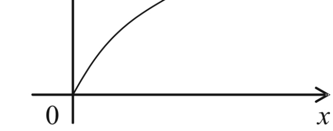
Найдем закон распределения.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \lambda\int_0^x e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } \ x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} \ \text{ при } \ x \ge 0. \end{cases}$$

Графики функции распределения и плотности распределения:





Найдем математическое ожидание случайной величины, подчиненной показательному распределению.

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x;\ e^{-\lambda x}dx = dv; \\ du = dx;\ -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = v; \end{matrix}\right\} = \lambda\left(-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Результат получен с использованием того факта, что

$$xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}} - 0 = \left\{\begin{matrix}\text{По правилу} \\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\lambda e^{\lambda x}} = 0.$$

Для нахождения дисперсии найдем величину $M(X^2)$.

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty}\lambda x^2 e^{-\lambda x}dx.$$

Дважды интегрируя по частям, аналогично рассмотренному случаю, получим:

$$M(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Тогда $D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}.$

Итого: $M(X) = \dfrac{1}{\lambda};\ D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2};\ \sigma_x = \dfrac{1}{\lambda}.$

Видно, что в случае показательного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равны.

Также легко определить и вероятность попадания случайной величины, подчиненной показательному закону распределения, в заданный интервал.

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Показательное распределение широко используется в теории надежности.

Допустим, некоторое устройство начинает работать в момент времени $t_0 = 0$, а через какое-то время t происходит отказ устройства.

Обозначим T непрерывную случайную величину – длительность безотказной работы устройства.

Таким образом, функция распределения $F(t) = P(T<t)$ определяет вероятность отказа за время длительностью t.

Вероятность противоположного события (безотказная работа в течение времени t) равна $R(t) = P(T>t) = 1 - F(t)$.

Определение. Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы устройства в течение времени t.

Часто на практике длительность безотказной работы подчиняется показательному закону распределению.

Вообще говоря, если рассматривать новое устройство, то вероятность отказа в начале его функционирования будет больше, затем количество отказов снизится и будет некоторое время иметь практически одно и то же значение. Затем (когда устройство выработает свой ресурс) количество отказов будет возрастать.

Другими словами, можно сказать, что функционирование устройства на протяжении всего существования (в смысле количества отказов) можно описать комбинацией двух показательных законов (в начале и конце функционирования) и равномерного закона распределения.

Функция надежности для какого-либо устройства при показательном законе распределения определяется как

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

Данное соотношение называют **показательным законом надежности**.

Важным свойством, позволяющим значительно упростить решение задач теории надежности, является то, что вероятность безотказной работы устройства на интервале времени t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t.

Таким образом, безотказная работа устройства зависит только от интенсивности отказов λ и не зависит от безотказной работы устройства в прошлом.

Поскольку подобным свойством обладает только показательный закон распределения, то этот факт позволяет определить, является ли закон распределения случайной величины показательным или нет.

Нормальный закон распределения

Определение. Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Нормальный закон распределения также называется **законом Гаусса**.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Можно легко показать, что параметры m_x и σ_x, входящие в плотность распределения, являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины *X*.

Найдем функцию распределения *F*(*x*),

$$F(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx.$$

График плотности нормального распределения называется **нормальной кривой** или **кривой Гаусса**.

Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

1) Функция определена на всей числовой оси.

2) При всех *x* функция распределения принимает только положительные значения.

3) Ось *Ox* является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента *x* значение функции стремится к нулю.

4) Найдем экстремум функции,

$$y'=-\frac{x-m}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}=0;\ x=m;$$

Поскольку при $y' > 0$ при $x < m$ и $y' < 0$ при $x > m$, то в точке $x = m$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5) Функция является симметричной относительно прямой $x = a$, т.к. разность $(x - a)$ входит в функцию плотности распределения в квадрате.

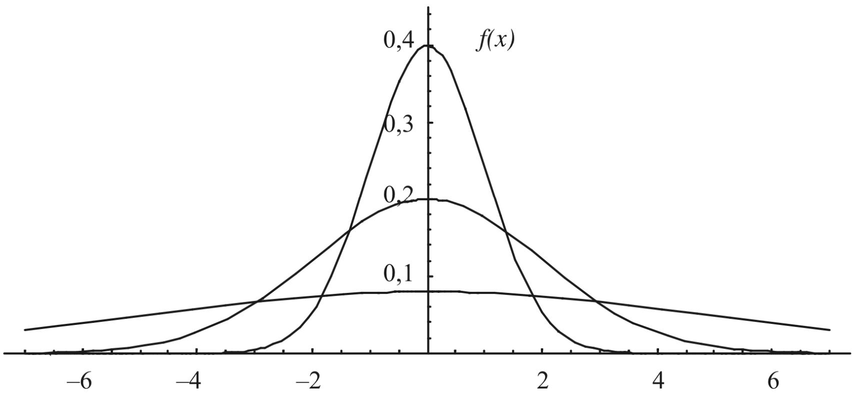
6) Для нахождения точек перегиба графика найдем вторую производную функции плотности.

$$y''=-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\left[1-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right].$$

При $x = m + \sigma$ и $x = m - \sigma$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки меняет знак, т.е. в этих точках функция имеет перегиб.

В этих точках значение функции равно $\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}$.

Построим график функции плотности распределения.



Построены графики при $m = 0$ и трех возможных значениях среднего квадратичного отклонения $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ и $\sigma = 7$. Как видно, при увеличении значения среднего квадратичного отклонения график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается.

Если $a > 0$, то график сместится в положительном направлении, если $a < 0$ – в отрицательном.

При $a = 0$ и $\sigma = 1$ кривая называется **нормированной**. Уравнение нормированной кривой:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Функция Лапласа

Найдем вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал,

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Обозначим $\dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t;\ \dfrac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} = \alpha;\ \dfrac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} = \beta;$

Тогда $P(a < X < b) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_\alpha^\beta e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}dt = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_\alpha^\beta e^{-t^2} dt = \dfrac{1}{2}\left[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\right].$

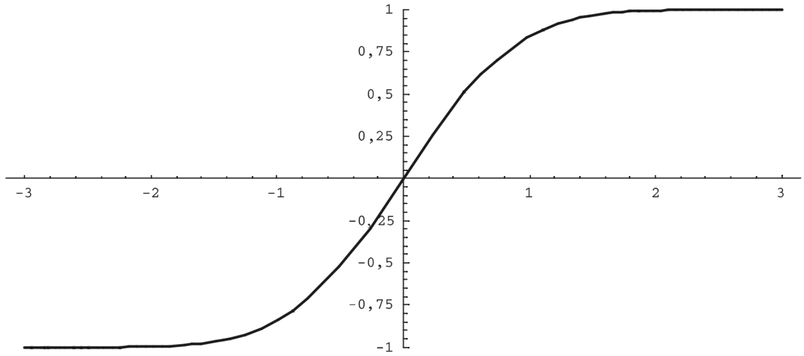
Поскольку интеграл $\int e^{-t^2} dt$ не выражается через элементарные функции, то вводится в рассмотрение функция

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

которая называется **функцией Лапласа** или **интегралом вероятностей**.

Значения этой функции при различных значениях x посчитаны и приводятся в специальных таблицах.

Ниже показан график функции Лапласа.



$\Phi(x)$

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1) $\Phi(0) = 0$;

2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

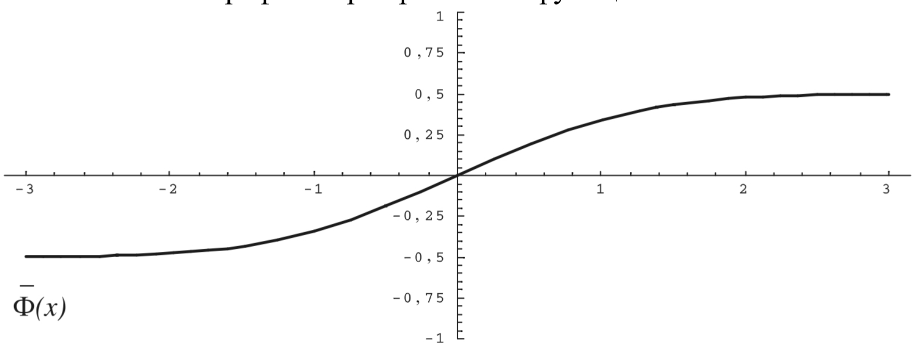
3) $\Phi(\infty) = 1$.

Функцию Лапласа также называют **функцией ошибок** и обозначают $\operatorname{erf} x$.

Еще используется **нормированная** функция Лапласа, которая связана с функцией Лапласа соотношением:

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt.$$

Ниже показан график нормированной функции Лапласа.



$\overline{\Phi}(x)$

При рассмотрении нормального закона распределения выделяется важный частный случай, известный как **правило трех сигм**.

Запишем вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше заданной величины Δ:

$$P(|X - m| < \Delta) = \overline{\Phi}\left[\frac{m+\Delta-m}{\sigma}\right] - \overline{\Phi}\left[\frac{m-\Delta-m}{\sigma}\right] = \overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right] - \overline{\Phi}\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right] = 2\overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right].$$

Если принять Δ = 3σ, то получаем с использованием таблиц значений функции Лапласа:

$$P(|X-m|<3\sigma)=2\overline{\Phi}(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973$$

Следовательно, вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания на величину, большую чем утроенное среднее квадратичное отклонение, практически равна нулю.

Это правило называется **правилом трех сигм**.

Не практике считается, что если для какой-либо случайной величины выполняется правило трех сигм, то эта случайная величина имеет нормальное распределение.

Пример 11. Поезд состоит из 100 вагонов. Масса каждого вагона – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием a = 65 т и средним квадратичным отклонением σ = 0,9 т. Локомотив может везти состав массой не более 6600 т, в противном случае необходимо прицеплять второй локомотив. Найти вероятность того, что второй локомотив не потребуется.

Второй локомотив не потребуется, если отклонение массы состава от ожидаемого (100·65 = 6500) не превосходит 6600 – 6500 = 100 т.

Поскольку масса каждого вагона имеет нормальное распределение, то и масса всего состава тоже будет распределена нормально.

Получаем

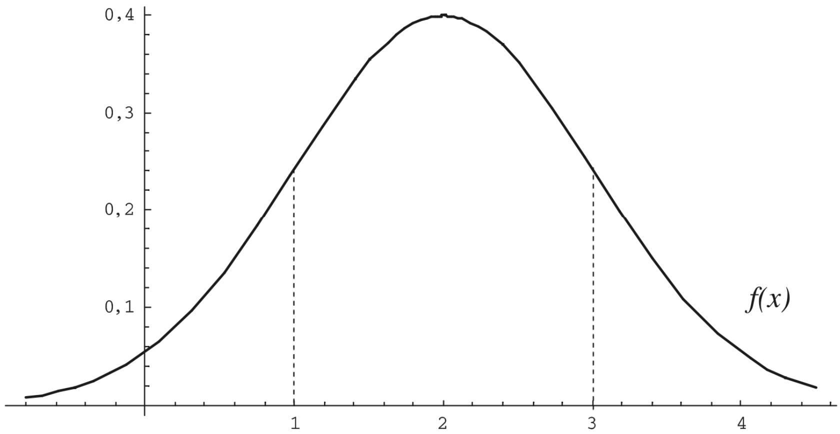
$$P(|X-M(X)|<100=2\overline{\Phi}\left[\frac{100}{100\sigma}\right]=2\overline{\Phi}[1{,}111]=2\cdot 0{,}3665=0{,}733$$

Пример 12. Нормально распределенная случайная величина X задана своими параметрами – a =2 – математическое ожидание и σ = 1 – среднее квадратическое отклонение. Требуется написать плотность вероятности и построить ее график, найти вероятность того, что X примет значение из интервала (1; 3), найти вероятность того, что X отклонится (по модулю) от математического ожидания не более чем на 2.

Плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}.$$

Построим график



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 3).

$$P(1 < X < 3) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi(0{,}7071) + \Phi(0{,}7071)\right] = 0{,}6778.$$

Найдем вероятность отклонение случайной величины от математического ожидания на величину, не большую чем 2.

$$P(|X-2| < 2) = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(\sqrt{2}) \approx 0{,}95.$$

Тот же результат может быть получен с использованием нормированной функции Лапласа.

$$P(|X-2| < 2) = 2\overline{\Phi}\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = 2\overline{\Phi}(2) = 2 \cdot 0{,}4772 \approx 0{,}95.$$

Центральная предельная теорема Ляпунова

Теорема. *Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.*

На практике для большинства случайных величин выполняются условия теоремы Ляпунова.

Контрольные вопросы по теме 10.2 “Случайные величины”

1. Случайные величины. Дискретная случайная величина и ее закон распределения.
2. Случайные величины. Непрерывная случайная величина и ее закон распределения.
3. Функция распределения. Плотность вероятности.

4. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия.
5. Нормальное распределение, его числовые характеристики.
6. Биноминальное распределение, его числовые характеристики.
7. Равномерное распределение, его числовые характеристики.
8. Распределение Пуассона, его числовые характеристики.
9. Функция Лапласа.

Контрольная работа
№ 10.2 по теме “Случайные величины”

Вариант 1

1. В городе 5 коммерческих банков. *У* каждого риск банкротства в течение года составляет 10%. Составить закон распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года. Найти числовые характеристики. Составить функцию распределения и построить ее график. Найти вероятность того, что в течение года обанкротится не больше одного банка.
2. Из 20 лотерейных билетов выигрышными являются 4 билета. Наугад извлекают 4 билета. Составить закон распределения числа выигрышных билетов среди отобранных. Найти числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *У*.
   1) Составить закон распределения случайной величины *Z*.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.
   3) Составить функцию распределения *Z* и построить ее график.

x_i	3	6	9
p_i	0,6	0,3	0,1

y_i	5	15	25
p_i	0,9	0,05	0,05

$$Z = \frac{1}{3}X - \frac{1}{5}У\ .$$

4. Случайная величина *X* задана плотностью вероятности *f*(*x*).
   Требуется:
   1) Найти коэффициент *C*.
   2) Найти функцию распределения *F*(*x*).
   3) Найти *M*(*x*), *D*(*x*), σ(*x*).
   4) Найти вероятность *P* (α<*x*<β).
   5) Построить графики *f*(*x*) и *F*(*x*).

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 3; \\ \dfrac{1}{c}(4x-5),\ 3 < x \le 4, \\ 0, x > 4. \end{cases} \quad \alpha=2{,}5\ ,\ \beta=3{,}5;$$

5. Случайная величина X равномерно распределена на интервале (2;6). Составить $f(x)$, $F(x)$. Найти $M(x)$, $D(x)$. Построить графики $f(x)$, $F(x)$.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.

   Требуется:

   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=0{,}9;\ \sigma(x)=0{,}25;\ \alpha=0{,}01;\ \beta=1{,}2;\ \delta=0{,}03.$$

Вариант 2

1. Нефтеразведывательная компания получила финансирование для проведения 6 нефтеразработок. Вероятность успешной нефтеразведки 0,05. Нефтеразведку осуществляют независимые друг от друга разведывательные партии. Составить закон распределения числа успешных нефтеразведок. Найти числовые характеристики. Составить функцию распределения, построить ее график. Найти вероятность того, что не меньше 2 нефтеразведок принесут успех.
2. В банк поступило 30 авизо. Подозревают, что среди них 5 фальшивые. Тщательной проверке подвергаются 15 случайно отобранных авизо. Составить закон распределения числа фальшивых авизо, которые могут быть выявлены в ходе проверки. Найти числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	–1	0	2	y_i	1	3	5
p_i	0,4	0,5	0,1	p_i	0,2	0,5	0,3

$Z = (2X)\cdot У$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$.

   Требуется:

   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность $P\ (\alpha<x<\beta)$.
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 4; \\ (x-4)^2, \quad 4 < x \le 5, \quad \alpha=2, \ \beta=5; \\ 1, x > 5. \end{cases}$$

5. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda=4$. Составить $f(x)$, $F(x)$. Найти $P(1<x<3)$ и числовые характеристики.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.

   Требуется:

   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=12; \ \sigma(x)=4; \ \alpha=10; \ \beta=14; \ \delta=5.$$

Вариант 3

1. Под руководством бригадира производственного участка работают 3 мужчин и 4 женщины. Бригадиру необходимо выбрать двух рабочих для специальной работы. Не желая оказывать кому-либо предпочтения, он решил выбрать двух рабочих случайно. Составить закон распределения числа женщин в выборке. Найти числовые характеристики. Составить функцию распределения и построить ее график.
2. В городе 10 машиностроительных предприятий, из которых 6 рентабельных и 4 убыточных. Программой приватизации намечено приватизировать 5 предприятий. При условии проведения приватизации в случайном порядке составить закон распределения рентабельных предприятий, попавших в число приватизируемых. Найти числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.

   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

X_i	2	5	8	y_i	2	4	6
p_i	0,7	0,1	0,2	p_i	0,35	0,4	0,25

$$Z = X + \frac{1}{2}У.$$

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$. Требуется:

   1) Найти коэффициент С.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.

3) Найти $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$.
4) Найти вероятность $P(\alpha<x<\beta)$.
5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} 0, x\le 1; \\ \dfrac{c}{x^4}, & 1<x\le 3, \quad \alpha=1, \quad \beta=2; \\ 0, x>3. \end{cases}$$

5. Случайная величина X равномерно распределена на интервале (–1; 4). Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x).
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=10\ ;\ \sigma(x)=4\ ;\ \alpha=12\ ;\ \beta=14;\ \delta=0{,}1$$

Вариант 4

1. Хорошим считается руководитель, принимающий не менее 70 % правильных решений. Управляющему банком предстоит принять решения по 4 важным вопросам банковской политики. Считая вероятность принятия правильного решения постоянной, составить закон распределения возможного числа правильных решений управляющего. Найти числовые характеристики. Записать функцию распределения и построить ее график. Найти вероятность того, что управляющий примет менее 3 правильных решений.
2. В магазине имеется 15 автомобилей определенной марки. Среди них – 7 черного цвета. Представители фирмы обратились в магазин с предложением о продаже им 3 автомобилей этой марки. Составить закон распределения числа проданных автомобилей черного цвета, при условии, что автомобили отбирались случайно. Найти числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

X_i	2	3	4	y_i	3	4	5
p_i	0,2	0,4	0,4	p_i	0,3	0,4	0,3

$Z=X\cdot У$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$.
   Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, $D(\text{x})$, $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность P ($\alpha<x<\beta$).
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 2; \\ (x-2)^3, \quad 2 < x \le 3, \quad \alpha=2, \ \beta=2{,}5; \\ 1, x > 3. \end{cases}$$

5. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda=3$. Составить $f(x)$, $F(x)$. Найти P ($0{,}5<x<2{,}5$) и числовые характеристики.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу ($\alpha;\beta$).
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=20;\ \sigma(x)=0{,}5;\ \alpha=19;\ \beta=25;\ \delta=1{,}5.$$

Вариант 5

1. В ходе аудиторской проверки строительной компании аудитор случайным образом отбирает 5 счетов. Известно, что 3% счетов содержат ошибки. Составить закон распределения правильных счетов. Найти числовые характеристики. Составить функцию распределения, построить ее график. Найти вероятность того, что хотя бы один счет будет с ошибкой.
2. В туристической компании работает 15 человек. Среди них 5 человек имеют два высших образования. Для сопровождения туристской группы случайным образом отбираются 3 человека. Составить закон распределения числа работников с двумя высшими образованиями среди отобранных. Найти числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

X_i	2	4	6	y_i	-1	0	2
p_i	0,6	0,2	0,2	p_i	0,15	0,25	0,6

$Z = \dfrac{1}{2}X + 2У$.

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$.
   Требуется:
   1) Найти коэффициент C.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.
   3) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   4) Найти вероятность P $(\alpha<x<\beta)$.
   5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ c(x^3 + 6x^2), \quad 0 < x \le 1, \quad \alpha = -0{,}5, \quad \beta = 0{,}5; \\ 0, x > 0. \end{cases}$$

5. Случайная величина X равномерно распределена на интервале (3;5). Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x).
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=5;\ \sigma(x)=0{,}81;\ \alpha=4;\ \beta=7;\ \delta=2.$$

Вариант 6

1. Для того чтобы проверить точность своих финансовых счетов, компания регулярно пользуется услугами аудиторов для проверки бухгалтерских проводок счетов. Известно, что служащие компании при обработке входящих счетов допускают 5% ошибок. Аудитор случайно отбирает 3 входящих документа. Составить закон распределения числа ошибок, выявленных аудитором. Найти числовые характеристики. Составить функцию распределения, построить ее график. Найти вероятность того, что аудитор обнаружит более чем одну ошибку.
2. Известно, что среди 10 объектов, нуждающихся в капитальном ремонте, 4 – объекты производственного назначения. Случайным образом отбираются 4 объекта для первоочередного ремонта. Составить закон распределения числа объектов производственного назначения среди отобранных.

3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	10	20	30	y_i	20	25	30
p_i	0,1	0,5	0,4	p_i	0,5	0,4	0,1

$Z = 5X - 4У$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность P ($\alpha<x<\beta$).
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 3; \\ \dfrac{(x-3)^2}{4}, & 3 < x \le 5, \quad \alpha=3, \quad \beta=4; \\ 1, x > 5. \end{cases}$$

5. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda=\frac{1}{2}$. Найти P ($1<x<2$) и числовые характеристики. Составить $f(x)$, $F(x)$.

6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу ($\alpha;\beta$).
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=4{,}5;\ \sigma(x)=0{,}05;\ \alpha=3{,}5;\ \beta=4{,}35;\ \delta=0{,}1.$$

Вариант 7

1. Торговый агент в среднем контактирует с 8 потенциальными покупателями в день. Из опыта ему известно, что вероятность того, что потенциальный покупатель совершит покупку, равна 0,1. Составить закон распределения ежедневного числа продаж для агента. Найти числовые характеристики. Составить функцию распределения, построить ее график.
2. По данным статистики из 30 предприятий общественного питания – 15 являются частными. Для контроля за качеством обслуживания случай-

ным образом выбрали 5 предприятий. Составить закон распределения числа частных предприятий, подвергнутых контролю. Найти числовые характеристики.

3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *У*.
   1) Составить закон распределения случайной величины *Z*.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.
   3) Составить функцию распределения *Z* и построить ее график.

x_i	0	1	2	y_i	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,6	p_i	0,8	0,1	0,1

$Z = (4X)\cdot У$.

4. Случайная величина *X* задана плотностью вероятности $f(x)$.
   Требуется:
   1) Найти коэффициент С.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.
   3) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   4) Найти вероятность $P\ (\alpha<x<\beta)$.
   5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 1; \\ \dfrac{1}{c}(x^2+2x), \quad 1 < x \le 3, \ \alpha = -1, \quad \beta=2; \\ 0, x > 3. \end{cases}$$

5. Случайная величина *X* равномерно распределена на интервале (–2; 3). Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x).
6. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$M(x)=375$; $\sigma(x)=25$; $\alpha=300$; $\beta=425$; $\delta=0,1$.

Вариант 8

1. Контролер проверяет на соответствие стандарту 6 изделий. Вероятность того, что каждое из изделий будет признано годным, равна 0,9. Составить закон распределения числа стандартных изделий среди проверенных. Составить функцию распределения, построить ее график. Найти числовые характеристики.

2. Вероятность того что случайно выбранная страница рукописи содержит грамматическую ошибку, равна 0,02. Составить закон распределения случайной величины X – числа страниц содержащих ошибки, если проверено 50 страниц.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	1	3	5	y_i	7	8	9
p_i	0,3	0,5	0,2	p_i	0,4	0,3	0,3

$Z= X\cdot У$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$.
   Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность P $(\alpha<x<\beta)$
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x<1; \\ x-1,\ 1\le x<2, \\ 1, x\ge 2. \end{cases} \quad \alpha=-1, \quad \beta=2.$$

5. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda=1$. Составить $f(x)$, $F(x)$. Найти P $(0<x<3)$ и числовые характеристики.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=16;\ \sigma(x)=100;\ \alpha=15{,}75;\ \beta=16{,}3;\ \delta=16{,}25.$$

Вариант 9

1. В лотерее на 100 билетов разыгрываются две вещи, стоимости которых 210 и 60 у.е. Составить закон распределения суммы выигрыша для лица, имеющего один билет. Найти числовые характеристики. Составить функцию распределения, построить ее график.
2. На предприятии 1 000 единиц оборудования определенного вида. Вероятность отказа единицы оборудования в течение часа составляет 0,001.

Составить закон распределения числа отказов оборудования в течение часа. Найти числовые характеристики.

3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	–2	0	1	y_i	–1	1	2
p_i	0,3	0,2	0,5	p_i	0,1	0,7	0,2

$Z = 3X - У$.

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$.
   Требуется:
   1) Найти коэффициент C.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.
   3) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   4) Найти вероятность P $(\alpha<x<\beta)$.
   5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 1; \\ \dfrac{c}{x}, 1 < x \le e, \\ 0, x > e. \end{cases} \quad \alpha=1, \quad \beta=2;$$

5. Случайная величена X равномерно распределена на интервале (2;7). Составить $f(x)$, $F(x)$, построить графики. Найти $M(x)$, Д(x).
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=25;\ \sigma(x)=4;\ \alpha=13;\ \beta=30;\ \delta=0{,}1.$$

Вариант 10

1. Известно, что 20% хабаровчан предпочитают добираться на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека. Составить закон распределения числа людей, предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом, среди отобранных. Найти числовые характеристики. Составить функцию распределения, построить ее график.

2. Два частных предприятия выпускают одинаковый ассортимент товаров. Вероятность того, что изделие первого предприятия будет дефектным, равна 0,2; для второго предприятия – 0,15. С каждого предприятия взяли по одному изделию для контроля. Составить закон распределения случайной величины X – числа дефектных изделий среди отобранных. Найти числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	–3	–2	–1
p_i	0,2	0,3	0,5

y_i	1	2	3
p_i	0,7	0,1	0,2

$Z = X\cdot(-У)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность $P(\alpha<x<\beta)$.
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ x^3, 0 < x \le 1, \\ 1, x > 1. \end{cases} \quad \alpha = -2, \quad \beta = \frac{1}{2};$$

5. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda=2$. Составить $f(x)$, $F(x)$. Найти $P(\frac{1}{2}<x<1)$ и числовые характеристики.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=164;\ \sigma(x)=5{,}5;\ \alpha=153;\ \beta=170;\ \delta=0{,}1.$$

Вариант 11

1. В некотором цехе брак составляет 5% всех изделий. Составить закон распределения числа бракованных изделий в случайно отобранной партии из трех изделий. Вычислить числовые характеристики.
2. В партии из 30 деталей 3 нестандартных. Из партии наудачу выбирают две детали. Составить закон распределения случайного числа стандартных деталей среди отобранных. Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	1	2	4	y_i	0	3	4
p_i	0,1	0,6	0,3	p_i	0,2	0,5	0,3

$Z = 2X + У$.

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$.
   Требуется:
   1) Найти коэффициент С.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.
   3) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   4) Найти вероятность ш ($\alpha<x<\beta$).
   5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ c \cdot x, 0 < x \le 8, \quad \alpha=1, \quad \beta=9; \\ 0, x > 8. \end{cases}$$

5. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке (0; 5). Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, Р($2<x<6$).
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу ($\alpha;\beta$).
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$M(x)=10$; $\sigma(x)=2$; $\alpha=5$; $\beta=12$; $\delta=5$.

Вариант 12

1. Предприятие в среднем выпускает 90% изделий высшего сорта. Составить закон распределения случайного числа изделий высшего сорта из взятых наугад четырех изделий. Вычислить числовые характеристики.
2. Вероятность того, что денежный автомат при опускании монеты сработает правильно, равна 0,85. Составить закон распределения случайного числа опущенных монет в автомат до первого правильного срабатывания. Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	0	1	2	y_i	0	2	4	6
p_i	0,3	0,2	0,5	p_i	0,1	0,35	0,15	0,4

$Z = X - У$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность $P\ (\alpha<x<\beta)$.
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ \frac{1}{8}x^3, 0 < x \le 2, \\ 1, x > 2. \end{cases} \quad \alpha=1,\ \beta=2{,}5;$$

5. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda=2$. Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, $P\ (0<x<2)$.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=50;\ \sigma(x)=10;\ \alpha=40;\ \beta=55;\ \delta=5.$$

Вариант 13

1. Производится пять независимых выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,8. Составить закон распределения случайного числа попаданий в мишень. Вычислить числовые характеристики.
2. Среди 12 измерительных приборов имеется 5 недостаточно точных. Наудачу выбирают 4 прибора. Составить закон распределения случайного числа неточных приборов среди отобранных. Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	1	3	4	6	y_i	1	2	5
p_i	0,1	0,2	0,2	0,5	p_i	0,15	0,55	0,3

$Z = X^2 + У$.

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$.
   Требуется:
   1) Найти коэффициент C.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.
   3) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   4) Найти вероятность P $(\alpha<x<\beta)$.
   5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ c \cdot \sin x \ , 0<x\le \pi, \ \ \alpha=\pi/2, \quad \beta=\pi; \\ 0, x > \pi. \end{cases}$$

5. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке (2; 5). Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, Р $(3<x<4{,}5)$.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=2; \ \sigma(x)=5; \ \alpha=1; \ \beta=4 \ ; \ \delta=2.$$

Вариант 14

1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа в одном опыте для каждого элемента равна 0,1. Составить закон распределения случайного числа отказавших элементов в одном опыте. Вычислить числовые характеристики.
2. В среднем на телефонной станции заказывают три телефонных разговора в течение пяти минут. Какова вероятность, что будет заказано 0, 1, 2, 3, 4 или больше четырех разговоров в течение пяти минут? Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *У*.
   1) Составить закон распределения случайной величины *Z*.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.
   3) Составить функцию распределения *Z* и построить ее график.

x_i	–1	0	2	y_i	2	6	10
p_i	0,6	0,3	0,1	p_i	0,5	0,4	0,1

$Z = X\cdot У$.

4. Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей $F(x)$.
   Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность P ($\alpha<x<\beta$).
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 1; \\ \frac{1}{2}(x^2 - x),\ 1<x\le 2, \\ 1, x > 2. \end{cases} \quad \alpha=0{,}5; \quad \beta=1{,}5;$$

5. Случайная величина *X* распределена по показательному закону с параметром $\lambda=6$. Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, P ($1{,}5<x<4$).
6. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу ($\alpha;\beta$).
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=165;\ \sigma(x)=6;\ \alpha=155;\ \beta=175;\ \delta=5.$$

Вариант 15

1. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету – 0,1. Составить закон распределения случайного числа выигрышных билетов среди пяти купленных. Вычислить числовые характеристики.
2. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из урны наудачу извлекают 3 шара. Составить закон распределения случайного числа белых шаров, оказавшихся в выборке. Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	0	1	2	*3*	y_i	0	1	4
p_i	0,2	0,3	0,4	*0,1*	P_i	0,7	0,2	0,1

$Z = 4X - 2У$.

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$.
   Требуется:
   1) Найти коэффициент C.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.
   3) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   4) Найти вероятность P $(\alpha<x<\beta)$.
   5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ \dfrac{c}{1+x^2}, & 0<x\le 1, \quad \alpha=0{,}5, \quad \beta=2; \\ 0, x > 1. \end{cases}$$

5. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке (–5;3). Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, Р $(-2<x<2)$.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=1;\ \sigma(x)=5;\ \alpha=-2;\ \beta=4\ ;\ \delta=2.$$

Вариант 16

1. Всхожесть семени некоторой культуры составляет 0,8. Составить закон распределения случайного числа взошедших семян из четырех посеянных. Вычислить числовые характеристики.
2. В среднем за пять дней рабочей недели на автоматической линии происходят 3,4 неполадки. Какова вероятность, что в течение дня возникнет 0,1,2,3 неполадки? Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

X_i	1	3	5	y_i	–1	0	1	2
p_i	0,5	0,9	0,1	p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

$Z = X + У^2$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность P $(\alpha<x<\beta)$.
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le -\dfrac{\pi}{2}; \\ \cos x, -\dfrac{\pi}{2} < x < 0, \\ 1, x \ge 0. \end{cases} \quad \alpha = -\pi/4, \quad \beta = \pi;$$

5. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda=2{,}5$. Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, Р $(2<x<5)$.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=600;\ \sigma(x)=70;\ \alpha= 500;\ \beta=700;\ \delta=40.$$

Вариант 17

1. Товаровед проверяет качество трех, наудачу выбранных изделий из партии. Вероятность того, что случайно отобранное изделие окажется высшего сорта, равна 0,6. Составить закон распределения числа изделий высшего сорта среди отобранных. Вычислить числовые характеристики.
2. На сборку поступило 30 деталей, из них 25 стандартных. Сборщик наудачу берет 3 детали. Составить закон распределения случайного числа стандартных изделий среди отобранных. Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	0	1	2	y_i	0	3	4
p_i	0,7	0,2	0,1	p_i	0,2	0,5	0,3

$Z= 2X^2 - У$.

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$.
   Требуется:
   1) Найти коэффициент C.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.
   3) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   4) Найти вероятность $P\ (\alpha<x<\beta)$
   5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 1; \\ \dfrac{c}{x}, 1 < x \le 5, \\ 0, x > 5. \end{cases} \qquad \alpha=2, \quad \beta=3;$$

5. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке (5, 10). Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, $P\ (7<x<9)$.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$M(x)=8$; $\sigma(x)=3$; $\alpha= 7$; $\beta=12$; $\delta=2$.

Вариант 18

1. Совет директоров некоторой фирмы состоит из пяти человек. Вероятность того, что случайно выбранный из них проголосует за выдвинутого кандидата в президенты фирмы, составляет 0,7. Составить закон распределения числа акционеров, проголосовавших «за». Вычислить числовые характеристики.
2. Производится стрельба по мишени до первого попадания или до полного израсходования пяти пуль. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,9. Составить закон распределения случайного числа произведенных выстрелов. Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *У*.
   1) Составить закон распределения случайной величины *Z*.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.
   3) Составить функцию распределения *Z* и построить ее график.

x_i	3	10	15	y_i	0	2	4
p_i	0,3	0,5	0,2	p_i	0,1	0,6	0,3

$Z = (X - У)^2$.

4. Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность $P(\alpha<x<\beta)$.
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{4}, 0 < x < 2, \\ 1, x \ge 2. \end{cases} \quad \alpha=1, \quad \beta=6;$$

5. Случайная величина *X* распределена по показательному закону с параметром $\lambda=0{,}3$. Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, P $(1{,}5<x<3{,}5)$.
6. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=9; \ \sigma(x)=6; \ \alpha=5; \ \beta=12; \ \delta=2.$$

Вариант 19

1. Статистическая вероятность ошибки аудитора, проверяющего счета, равна 0,02. Составить закон распределения случайного числа возможных ошибок, если были проверены пять наудачу выбранных счетов. Вычислить числовые характеристики.
2. В компании, сдающей на прокат две машины, каждодневный спрос на автомобили подчиняется распределению Пуассона и в среднем составляет 1,3 машины в день. Предположительно, машины используются в равной степени. Составить закон распределения числа машин, арендованных за день. Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	2	4	y_i	1	4	25
p_i	0,4	0,6	p_i	0,15	0,55	0,3

$Z=\frac{1}{2}X+У.$

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$.
   Требуется:
   1) Найти коэффициент C.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.
   3) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   4) Найти вероятность P ($\alpha<x<\beta$).
   5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x<-1; \\ \dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & -1\le x\le 1, \qquad \alpha=-2, \quad \beta=2; \\ 0, x>1. \end{cases}$$

5. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке (70; 90), Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, P ($75<x<85$).
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу ($\alpha;\beta$).
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$M(x)=10$; $\sigma(x)=5$; $\alpha= 8$; $\beta=13$; $\delta=2$.

Вариант 20

1. Вероятность отказа за время испытаний на надежность для каждого прибора серии равна 0,3. Наудачу выбрано пять приборов. Составить закон распределения случайного числа приборов, выдержавших испытание. Вычислить числовые характеристики.
2. На курсах повышения квалификации бухгалтеров учат проверять правильность накладной. В качестве проверки преподаватель предлагает обучающимся проверить 10 накладных, 4 из которых содержат ошибки. Он берет наугад из этих десяти три накладные и просит проверить. Приведите возможные варианты проверки с соответствующими им вероятностями. Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	–1	0	1	y_i	1	3	5
p_i	0,7	0,1	0,2	p_i	0,3	0,5	0,2

$Z=X^2-3У$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность $P\ (\alpha<x<\beta)$.
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 2;\\(x-2)^2,\ 2<x\le 3,\\1, x>3.\end{cases}\qquad \alpha=1,\quad \beta=10;$$

5. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda=5$. Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, $P\ (1<x<5)$.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$M(x)=20$; $\sigma(x)=0,6$; $\alpha=17$; $\beta=25$; $\delta=0,3$

Вариант 21

1. Производители карманных калькуляторов знают из опыта работ, что 1% производимых и проданных калькуляторов имеют дефекты и их должны заменить по гарантии. На контроле произвольным образом выбирают три калькулятора. Составить закон распределения числа калькуляторов, подлежавших замене. Вычислить числовые характеристики.
2. Вероятность того, что случайно выбранный лицевой счет клиента отделения сбербанка содержит ошибки, равна 0,05. Ревизором проводится выборочная проверка счетов до первого неправильно оформленного. Составить закон распределения случайного числа проверенных счетов. Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	–2	1	2	y_i	0	1	2
p_i	0,15	0,5	0,35	p_i	0,2	0,1	0,7

$Z = У^2 + 2X$.

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$.
   Требуется:
   1) Найти коэффициент C.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.
   3) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   4) Найти вероятность $P\ (\alpha<x<\beta)$.
   5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 1; \\ c\cdot(x-1),\ 1<x\le 3, \\ 0, x>3. \end{cases} \qquad \alpha=0; \qquad \beta=3;$$

5. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке (13; 17), Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, P $(13<x<15)$.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$M(x)= –5$; $\sigma(x)=7$; $\alpha= –7$; $\beta=5$; $\delta=3$.

Вариант 22

1. Практика показывает, что 7% накладных, проходящих проверку в бухгалтерии, оказываются неправильно оформленными. Наугад отобраны пять накладных. Составить закон распределения случайного числа накладных, не содержащих ошибки. Вычислить числовые характеристики.
2. В транспортной компании работают десять водителей, трое из которых имеют высшую квалификацию. В кабинет директора были приглашены четверо. Составить закон распределения случайного числа водителей высшей квалификации среди вызванных. Вычислить числовые характеристики.
3. Дан закон распределения случайной величины X.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	0	2	5
p_i	0,3	0,4	0,3

$Z_1 = X^2$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность P ($\alpha<x<\beta$).
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 2; \\ \sqrt{x-2}\ , 2<x\le 3, \\ 1, x>3. \end{cases} \qquad \alpha=2,25; \qquad \beta=4;$$

5. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda=0,5$. Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, Р ($1,5<x<3$).
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.

   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу ($\alpha;\beta$).
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)= -15;\ \sigma(x)=2;\ \alpha= -10;\ \beta=16;\ \delta=1.$$

Вариант 23

1. Семейная фирма решила начать продажу своих акций на бирже. Известно, что 80% брокеров посоветовали своим клиентам купить эти акции. Наудачу отобрали шесть брокеров. Составить закон распределения случайного числа брокеров, предложивших своим клиентам купить акции фирмы. Вычислить числовые характеристики.
2. Среднее число грузовиков, прибывающих на склад под разгрузку в течение года, равно трем. Составить закон распределения случайного числа прибывших в течение часа машин, если автопарк предприятия составляет пять грузовиков. Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	3	5	7	y_i	–1	0	1
p_i	0,3	0,6	0,1	p_i	0,4	0,5	0,1

$Z = X^2 + У^2$.

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$.
   Требуется:
   1) Найти коэффициент C.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.
   3) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   4) Найти вероятность $P\ (\alpha<x<\beta)$.
   5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ c \cdot (4x - x^3),\ 0<x \le 2, \\ 0, x > 2. \end{cases} \qquad \alpha=0, \qquad \beta=3;$$

5. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке (–2; 8), Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, $P\ (0<x<5)$.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)= 150;\ \sigma(x)=25;\ \alpha= 120;\ \beta=200;\ \delta=10.$$

Вариант 24

1. Вероятность поломки одного из пяти независимо друг от друга работающих станков равно 0,2. Если происходит поломка, станок до конца дня не работает. Составить закон распределения случайного числа станков, вышедших из строя в течение дня. Вычислить числовые характеристики.
2. Среди 10 поступивших в ремонт часов 6 нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в общей чистке механизма, рассматривает их поочередно, пока не найдет такие часы. Составить закон распределения случайного числа просмотренных часов. Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	0	1	2
p_i	0,4	0,5	0,1

y_i	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,6

$Z = (X – У)^2$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, $D(\text{x})$, $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность $P\ (\alpha<x<\beta)$.
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 1; \\ \dfrac{x-1}{2}, & 1<x\le 3, \\ 1, x > 3. \end{cases} \qquad \alpha = -10, \quad \beta = 2;$$

5. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda=3$. Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, $Д(x)$, $\sigma(x)$, Р $(4<x<0)$.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)= 450;\ \sigma(x)=20;\ \alpha= 430;\ \beta=490;\ \delta=15.$$

Вариант 25

1. Ежемесячно 2% компаний в крае прекращают свою деятельность по тем или иным причинам. Составить закон распределения закрывшихся организаций среди пяти наудачу выбранных. Вычислить числовые характеристики.
2. Академией рассматриваются десять кандидатур студентов, претендующих на обучение за границей. Среди них трое в совершенстве владеют иностранным языком. Путем жеребьевки отобрали четверо студентов. Составить закон распределения случайного числа студентов, владеющих языком. Среди четырех отобранных. Вычислить числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	2	4	6	y_i	0	1	2	3
P_i	0,5	0,4	0,1	p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

$Z= 2\cdot(X^2+У)$.

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$.
   Требуется:
   1) Найти коэффициент C.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.
   3) Найти $M(x)$; D(x); $\sigma(x)$.
   4) Найти вероятность $P\ (\alpha<x<\beta)$.
   5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ c\cdot(3x - x^2),\ 0<x \le 3, \quad \alpha=0, \quad \beta=2; \\ 0, x > 3. \end{cases}$$

5. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке (12; 20), Составить $f(x)$, $F(x)$, построить их графики. Найти $M(x)$, Д(x), $\sigma(x)$, P $(15<x<18)$.
6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)= 0;\ \sigma(x)=5;\ \alpha= -3;\ \beta=2;\ \delta=1.$$

Вариант 26

1. Телевизионный канал рекламирует новый вид товара. Вероятность того, что телезритель увидит эту рекламу, равна 0,2. Случайно выбирают 10 телезрителей. Составить закон распределения числа лиц, видевших рекламу. Найти числовые характеристики. Составить функцию распределения, построить ее график.
2. На предприятии 1 000 единиц оборудования определенного вида. Вероятность отказа единицы оборудования в течение часа составляет 0,001. Составить закон распределения числа отказов оборудования в течение часа. Найти числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *У*.
   1) Составить закон распределения случайной величины *Z*.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.
   3) Составить функцию распределения *Z* и построить ее график.

x_i	–2	0	1	y_i	–1	2	5
p_i	0,4	0,3	0,3	p_i	0,1	0,2	0,7

$Z= 4X + У$.

4. Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность $P\ (\alpha<x<\beta)$.
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le -1; \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & , -1<x \le 2, \quad \alpha= -0{,}5, \quad \beta=1{,}5; \\ 1, x > 2. \end{cases}$$

5. Написать функцию плотности распределения и функцию распределения вероятности показательного распределения с параметром λ. Найти вероятность попадания случайной величины в промежуток $(\alpha;\beta)$ и числовые характеристики.

$$\lambda=6;\ \ \alpha=1;\ \ \beta=4.$$

6. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)= 7;\ \sigma(x)=16;\ \alpha= 4;\ \beta=10;\ \delta=3.$$

Вариант 27

1. На железнодорожную станцию поступило восемь вагонов угля. Проверка показала, что в трех вагонах зольность угля составляет 11%, в четырех – 13%, в одном – 15%. Один из прибывших вагонов поступил на завод. Составить закон распределения зольности угля, поступившего на завод. Составить функцию распределения, построить ее график. Найти числовые характеристики.
2. В магазин поступила обувь от двух поставщиков. Известно, что в среднем 20% обуви от первого поставщика и 35% обуви от второго имеют различные дефекты. Из общей массы наугад выбрали две упаковки с обувью. Составить закон распределения числа дефектных упаковок среди выбранных. Найти числовые характеристики.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	2	3	5	y_i	0	1	4
p_i	0,25	0,15	0,6	p_i	0,7	0,2	0,1

$Z=2X–У$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$.
   Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$.
   3) Найти вероятность $P\ (\alpha<x<\beta)$.
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 4; \\ (x-4)^2, 4 \le x \le 5, \\ 1, x > 5. \end{cases} \quad \alpha=3, \quad \beta=4{,}5;$$

5. Написать функцию плотности распределения и функцию распределения вероятности показательного распределения с параметром λ. Найти вероятность попадания случайной величины в промежуток $(\alpha;\beta)$ и числовые характеристики.

$$\lambda=0{,}4; \ \alpha=0; \ \beta=1.$$

6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.

3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$M(x)= 10$; $\sigma(x)=9$; $\alpha= 7$; $\beta=14$; $\delta=0{,}9$.

Вариант 28

1. Из всей выпускаемой заводом продукции 95% составляют стандартные изделия. Наугад отобрано 6 деталей. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Составить функцию распределения, построить ее график. Найти числовые характеристики.
2. Стрельбу по цели ведут до получения двух попаданий. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,2. Составить закон распределения числа произведенных выстрелов.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

X_i	3	5	7	y_i	1	2	3
p_i	0,4	0,4	0,2	p_i	0,1	0,15	0,75

$Z= 3\cdot(X\cdot У)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Требуется:
   1) Найти функцию плотности распределения $f(x)$.
   2) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   3). Найти вероятность P $(\alpha<x<\beta)$.
   4) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \dfrac{x^3}{27}, 0 \le x \le 3, \\ 1, x > 3. \end{cases} \quad \alpha=1, \quad \beta=2;$$

5. Написать функцию плотности распределения и функцию распределения вероятности показательного распределения с параметром λ. Найти вероятность попадания случайной величины в промежуток $(\alpha;\beta)$.

$\lambda=2$; $\alpha=1$; $\beta=3$.

6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.

2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=15;\ \sigma(x)=0{,}81;\ \alpha=14;\ \beta=18;\ \delta=0{,}3.$$

Вариант 29

1. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует регулировки, равна 0,9; второй – 0,8; третий – 0,75; четвертый – 0,7. Составить закон распределения числа станков, которые в течение часа не потребуют регулировки. Составить функцию распределения, построить ее график.
2. Установлено, что в среднем 10% изделий имеют дефект. Из партии наугад выбирают 5 изделий. Составить закон распределения числа дефектных изделий среди отобранных.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин *X* и *У*.
   1) Составить закон распределения случайной величины *Z*.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины *Z*.
   3) Составить функцию распределения *Z* и построить ее график.

x_i	–1	0	4	y_i	0	2	4
p_i	0,6	0,2	0,2	p_i	0,5	0,3	0,2

$Z=(4X)\cdot(2У)$.

4. Случайная величина *X* задана плотностью вероятности $f(x)$.
   Требуется:
   1) Найти коэффициент *C*.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.
   3) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   4) Найти вероятность $P\ (\alpha<x<\beta)$.
   5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ c\cdot(3x-x^2),\ 0\le x\le 3,\\ 0, x>3.\end{cases}\quad \alpha=1,\quad \beta=2;$$

5. Случайная величина *X* равномерно распределена на интервале (a,b). Записать функцию распределения и функцию плотности распределения. Найти числовые характеристики. Вычислить вероятность попадания случайной величины *X* в промежуток $(c,\ d)$,

$$a=5;\ b=10;\ c=4;\ d=7.$$

6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.
   Требуется:
   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)=20;\ \sigma(x)=0{,}25;\ \alpha=19;\ \beta=23;\ \delta=0{,}2.$$

Вариант 30

1. Вероятность того, что студент сможет взять в библиотеке необходимую ему книгу, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые посетил студент, если в городе 4 библиотеки. Составить функцию распределения, построить ее график.
2. Известно, что в среднем 64% студентов потока выполняют контрольные работы в срок. Наугад из потока выбрали 3 человека. Составить закон распределения числа студентов, в срок выполняющих контрольные работы, среди отобранных.
3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и $У$.
   1) Составить закон распределения случайной величины Z.
   2) Найти числовые характеристики случайной величины Z.
   3) Составить функцию распределения Z и построить ее график.

x_i	1	7	10	y_i	0	1	5
p_i	0,4	0,3	0,3	p_i	0,25	0,25	0,5

$Z = X\cdot(2У)$.

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$.
   Требуется:
   1) Найти коэффициент C.
   2) Найти функцию распределения $F(x)$.
   3) Найти $M(x)$, D(x), $\sigma(x)$.
   4) Найти вероятность $P\ (\alpha<x<\beta)$.
   5) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ c\cdot(5x-x^2), 0\le x\le 5,\\ 0, x>5.\end{cases}\qquad \alpha=-1,\quad \beta=3;$$

5. Случайная величина X равномерно распределена на интервале (a,b). Записать функцию распределения и функцию плотности распределения. Найти числовые характеристики. Вычислить вероятность попадания случайной величины X в промежуток (c, d)

$$a=0{,}95;\ b=1{,}05;\ c=0{,}99;\ d=1.$$

6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$.

   Требуется:

   1) Составить функцию плотности распределения и построить ее график.
   2) Найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$.
   3) Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

$$M(x)= 7;\ \sigma(x)=2{,}25;\ \alpha= 6;\ \beta=9;\ \delta=0{,}9.$$

Тема 11. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Выборочный метод

Проведение экономических исследований связано с изучением свойств различных совокупностей однотипных объектов (людей, предприятий, товаров и т.п.). При этом каждый объект, входящий в состав совокупности, характеризуется некоторым числом – величиной изучаемого признака X. Для обозначения таких совокупностей вводится понятие *генеральной совокупности*.

Под **генеральной совокупностью** понимается вся совокупность однотипных объектов, которые изучаются в данном исследовании.

Пример генеральной совокупности – данные о доходах всех жителей какой-либо страны; о результатах голосования населения по какому-либо вопросу и т.д.

Однако на практике в большинстве случаев мы имеем дело только с частью возможных наблюдений, взятых из генеральной совокупности.

Выборка (выборочная совокупность) – это совокупность случайно отобранных объектов, составляющих лишь часть генеральной совокупности.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

В зависимости от способов отбора объектов из генеральной совокупности различают несколько типов выборок. Их типы, определения, свойства, примеры использования рекомендуется изучить самостоятельно.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, $x_2 - n_2$ раз,..., $x_k - n_k$ раз и $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют вариантами, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – вариационным рядом. Числа наблюдений (n_i) называют частотами, а их отношения к объему выборки $\frac{n_i}{n} = w_i$ – относительными частотами.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант x_i и соответствующих им частот n_i или относительных частот w_i (причем сумма всех частот равна объему выборки, а сумма всех относительных частот равна 1).

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

или

x_i	x_1	x_2	…	x_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Вариационный ряд, заданный в таком виде, называют **дискретным**. Геометрической характеристикой дискретного вариационного ряда является полигон частот.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1,n_1), (x_2,n_2), …, (x_k,n_k), где x_i – варианты выборки, а n_i – соответствующие им частоты.

Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот. Для непрерывно распределенного признака весь интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на ряд частичных интервалов длины h и находят n_i – сумму частот вариант попавших в i-й интервал. Такое распределение называют **интервальным вариационным рядом.** Геометрической характеристикой интервального вариационного ряда является гистограмма частот.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению $\dfrac{n_i}{h}$.

<u>Пример1.</u> Из большой группы предприятий одной из отраслей промышленности случайным образом отобрано 30, по которым получены показатели основных фондов в млн руб.:

3; 4; 2; 3; 3; 6; 5; 2; 4; 7; 5; 5; 3; 4; 3; 2; 6; 7; 5; 4; 3; 4; 5; 7; 6; 2; 3; 6; 6; 4.

Составить дискретное статистическое распределение выборки, записать распределение относительных частот, построить полигон частот.

Различные значения признака запишем в порядке возрастания и под каждым из них запишем соответствующие частоты. Получим дискретное статистическое распределение выборки:

x_i	2	3	4	5	6	7
n_i	4	7	6	5	5	3

Проверка: сумма всех частот должна быть равна объему выборки:

$$n=4+7+6+5+5+3=30.$$

Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки

$$w_1=\frac{4}{30}=0{,}13;\ w_2=\frac{7}{30}=0{,}23;\ w_3=\frac{6}{30}=0{,}2;\ w_4=\frac{5}{30}=0{,}17;\ w_5=\frac{5}{30}=0{,}17;$$

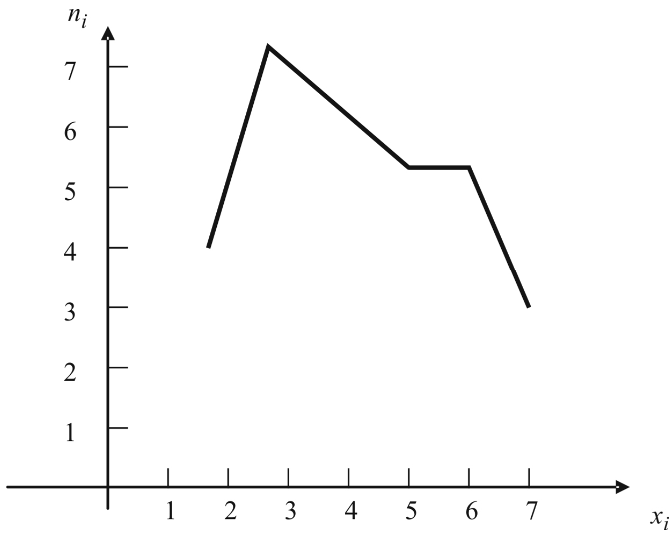
$$w_6=\frac{3}{30}=0{,}1.$$

Напишем распределение относительных частот:

x_i	2	3	4	5	6	7
w_i	0,13	0,23	0,2	0,17	0,17	0,1

Контроль: $\sum w_i = 0{,}13 + 0{,}23 + 0{,}2 + 0{,}17 + 0{,}17 + 0{,}1 = 1$.

Строим полигон частот. Для этого строим точки с координатами (x_i;n_i): (2;4), (3;7), (4;6), (5;5), (6;5), (7;3) и соединяем их последовательно отрезками.



Пример 2. Выборочно обследовано 26 предприятий легкой промышленности по валовой продукции. Получены следующие результаты в млн руб.:

15,0; 16,4; 17,8; 18,0; 18,4; 19,2; 19,8; 20,2; 20,6; 20,6; 20,6; 21,3; 21,4; 21,7; 22,0; 22,2; 22,3; 22,7; 23,0; 24,2; 24,2; 25,1; 25,3; 26,0; 26,5; 27,1.

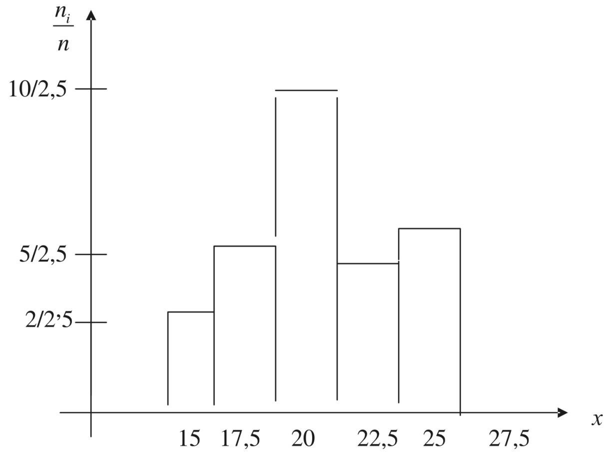
Составить интервальное распределение выборки с началом x_0=15 и длиной частичного интервала h=2,5. Построить гистограмму частот.

Для составления интервального распределения составим таблицу. В первой строке расположим в порядке возрастания интервалы, длина каждого из которых h=2,5. Во второй строке запишем количество значений признака в выборке, попавших в этот интервал (т.е. сумму частот вариант, попавших в соответствующий интервал).

Частичный интервал	15–17,5	17,5–20	20–22,5	22,5–25	25–27,5
Частота интервала	2	5	10	4	5

Объем выборки: n=2+5+10+4+5=26.

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладываем частичные интервалы; на каждом из них строим прямоугольники высотой $\frac{n_i}{h}$.



Площадь каждого прямоугольника равна частоте интервала, на котором он построен. Сумма площадей этих прямоугольников равна объему выборки.

Статистические оценки параметров распределения

Пусть требуется изучить количественный признак генеральной совокупности. Располагая лишь выборочными значениями признака, можно оценить, а не определить точно значения параметров; эти оценки будут случайными и меняться от выборки к выборке. Поэтому важно не только знать оценки параметров, определенные на основе выборочных данных, но и понимать меры их надежности.

Цель любого оценивания – получить как можно более точное значение неизвестной характеристики генеральной совокупности по данным выборочного наблюдения.

Статистической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин. В зависимости от способа выражения оценки делятся на точечные оценки, выражаемые одним числом, и интервальные оценки, определяющие числовой интервал, внутри которого может находиться оцениваемый параметр генеральной совокупности.

Генеральная совокупность характеризуется двумя сторонами:

1) видом распределения (например, равномерное, нормальное, Пуассоновское и т.д.); 2) параметрами распределения (например, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и т.п.). В связи с этим существуют два класса оценок: оценки вида распределения и оценки параметров распределения.

Оценка Θ^* должна быть несмещенной, эффективной, состоятельной. Определения несмещенной, эффективной, состоятельной оценок рекомендуется изучить самостоятельно.

Несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой генеральной средней (математического ожидания признака X генеральной совокупности) является выборочная средняя $\overline{x_{\text{в}}}$ — среднее арифметическое значений признака в выборке:

$$\overline{x_{\text{в}}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{\text{к}}}{n}, \qquad (1)$$

где n – объем выборки, x_i — значение признака в выборке. Если результаты выборки представлены в виде дискретного распределения:

x_i	x_1	x_2	….	x_k
n_i	n_1	n_2	….	n_k

то

$$\overline{x_{\text{в}}} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_{\text{k}} n_{\text{k}}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}. \qquad (2)$$

Состоятельной, смещенной оценкой генеральной дисперсии (дисперсия признака X генеральной совокупности) является выборочная дисперсия:

$$Д_{\text{в}} = \overline{x^2} - \left(\overline{x_{\text{в}}}\right)^2, \qquad (3)$$

где

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_{\text{i}}}{n}, \qquad \overline{x_{\text{в}}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i\, n_{\text{i}}}{n}.$$

Несмещенной, состоятельной оценкой генеральной дисперсии является исправленная выборочная дисперсия

$$\text{S}^2 = \frac{n}{n-1} Д_{\text{в}}. \qquad (4)$$

Пример 3. При изучении производительности труда X тыс. руб. на одного работника было обследовано 10 предприятий и получены следующие значения:

4,2; 4,8; 4,7; 5,0; 4,9; 4,3; 3,9; 4,1; 4,3; 4,8.

Определить выборочное среднее $\overline{x_{\text{в}}}$, выборочную дисперсию, исправленное среднее квадратическое отклонение.

По формуле (1) находим выборочную среднюю при n=10:

$$\overline{x_{\text{в}}} = \frac{4,2 + 4,8 + 4,7 + 5,0 + 4,9 + 4,3 + 3,9 + 4,1 + 4,3 + 4,8}{10} = \frac{45}{10} = 4,5 \text{ (тыс. руб).}$$

По формуле (3) найдем выборочную дисперсию. Для этого вычислим $\overline{x^2}$ и $\left(\overline{x_в}\right)^2$.

$$\overline{x^2} = \frac{4,2^2+4,8^2+4,7^2+5,0^2+4,9^2+4,3^2+3,9^2+4,1^2+4,3^2+4,8^2}{10} = 20,382,$$

$$\left(\overline{x_в}\right)^2 = (4,5)^2 = 20,25,\; Д_в = \overline{x^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2 = 20,382 - 20,25 = 0,132.$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$\mathrm{S} = \sqrt{\mathrm{S}^2} = \sqrt{\frac{10}{10-1}\times 0,132} = \sqrt{0,147} \approx 0,383.$$

Смысл полученных результатов заключается в следующем. Величина $\overline{x_в}$ характеризует среднее значение признака X в пределах рассматриваемой выборки. Средняя производительность труда для изученных предприятий составила $\overline{x_в}$ = 4,5 тыс. руб. на одного работника. Исправленное среднее квадратическое отклонение S описывает абсолютный разброс значений показателя X и в данном случае составляет S = 0,383 тыс. руб.

Если дано интервальное распределение выборки, то надо перейти к дискретному, взяв за значения вариант середины частичных интервалов.

Выборочные оценки являются приближенными. Чтобы с помощью статистических данных можно было сделать правильные выводы, нужно знать точность и надежность этих оценок.

Пусть Θ* — статистическая оценка неизвестного параметра Θ. Надежностью (доверительной вероятностью) оценки Θ по Θ* называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\Theta - \Theta^*| < \Delta$. Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве γ берут число, близкое к единице. По надежности γ ищут такое число Δ, чтобы

$$P(|\Theta - \Theta^*| < \Delta) = \gamma. \qquad (5)$$

Число Δ называют точностью оценки, или предельной ошибкой. Из равенства (5) следует, что

$$P(\Theta^* - \Delta < \Theta < \Theta^* + \Delta) = \gamma. \qquad (6)$$

Интервал (Θ*–Δ, Θ*+Δ) называется доверительным интервалом; он называется интервальной оценкой неизвестного параметра Θ.

Интервальной оценкой с надежностью γ математического ожидания $M(X) = a$ нормально распределенного признака X генеральной совокупности при известном среднем квадратическом отклонении $\sigma = \sqrt{D(X)}$ этого признака служит доверительный интервал

$$\overline{x_\text{в}}-\frac{\sigma\cdot t}{\sqrt{n}}\le a\le\overline{x_\text{в}}+\frac{\sigma\cdot t}{\sqrt{n}}, \qquad (7)$$

где n – объем выборки, $\overline{x_\text{в}}$ – выборочная средняя, t – значение аргумента функции Лапласа Ф(t), при котором $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\sigma\cdot t}{\sqrt{n}}=\Delta$ – точность оценки.

Пример 4. В ходе обследования банковских счетов была проведена случайная выборка записей по вкладам. Из выборки $n = 100$ оказалось, что средний размер вклада составляет 1 837 у.е.; среднее квадратическое отклонение размера вклада равно 280 у.е. Найти с надежностью $\gamma = 0{,}95$ доверительный интервал для среднего размера a вкладов по всем счетам, если известно, что размер вкладов распределен по нормальному закону.

По условию $\overline{x_\text{в}}=1837$; $n=100$; $\sigma=280$; $\gamma=0{,}95$. По таблице значений функции $\Phi(\text{t})=\frac{1}{\sqrt{2\text{n}}}\int_0^t e^{\frac{-z^2}{2}}dz$ находим t из условия $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}=\frac{0{,}95}{2}=0{,}475$, получаем $t=1{,}96$. По формуле (7) находим доверительный интервал:

$$1837-\frac{1{,}96\times 280}{\sqrt{100}}\le a\le 1837+\frac{1{,}96\times 280}{\sqrt{100}},\ 1837-54{,}88\le a\le 1837+54{,}88,$$

$$1782{,}12\le a\le 1891{,}88.$$

Это означает, что с вероятностью, равной 0,95, можно утверждать, что средний размер вклада генеральной совокупности находится в пределах от 1 782,12 у.е. до 1 891,88 у.е. Интервал ±54,88 составляет примерно ±3% среднего размера вклада в выборке (1 837). Это не очень большое отклонение, поэтому среднее значение выборки можно считать надежной оценкой среднего значения генеральной совокупности. Однако существует вероятность, равная 0,05, того, что можно получить значение вне доверительного интервала.

Элементы теории корреляции

Различные экономические показатели не являются независимыми, а связаны между собой; например цена какого-либо товара и величина спроса на этот товар, объем производства и прибыль фирмы, располагаемый доход и объем личного потребления, инфляция и безработица. Взаимосвязи показателей в экономике редко имеют простой функциональный вид, поскольку на интересующий нас показатель, кроме явно учитываемых факторов, влияет еще множество других, которые являются случайными. Поэтому одной из основных задач в экономических исследованиях является анализ зависимостей между переменными.

Пусть требуется оценить связь между переменными X и Y. Возникают два вопроса: 1) связаны ли между собой эти переменные; 2) какова теснота этой связи?

В качестве характеристики тесноты линейной связи между количественными признаками в выборке используется выборочный коэффициент корреляции (r_B).

Свойства выборочного коэффициента корреляции:

1) значения $r_в$ заключены в промежутке от –1 до +1;
2) если $r_в = 0$, то между X и Y отсутствует линейная корреляционная связь, но возможно наличие между ними другого типа связи;
3) если $r_в > 0$, то увеличение признака X в среднем приводит к увеличению признака Y. Если $r_в < 0$, то с увеличением X в среднем признак Y уменьшается;
4) если $|r_в| = 1$, то между X и Y существует линейная функциональная зависимость, не искажаемая действием случайных факторов.

Для качественной оценки тесноты корреляционной связи между X и Y можно воспользоваться таблицей Чеддока:

Диапазон изменения $\lvert r_в \rvert$	0,1–0,3	0,3–0,5	0,5–0,7	0,7–0,9	0,9–0,99
Характер тесноты связи	слабая	умеренная	заметная	высокая	весьма высокая

Пример. Выборочно обследовано 100 снабженческо-сбытовых предприятий некоторого региона по количеству работников X и объемам складской реализации Y (у.е.). Результаты представлены в корреляционной таблице.

Y \ X	5	15	25	35	45	n_y
130	7	1				8
132	2	7	1			10
134	1	5	4	1		11
136		1	15	10	8	34
138			3	12	15	30
140				1	6	7
n_x	10	14	23	24	29	n=100

По данным исследования требуется:

1) в прямоугольной системе координат построить эмпирические ломаные регрессии Y на X и X на Y, сделать предположение в виде корреляционной связи;

2) оценить тесноту линейной корреляционной связи;

3) составить линейные уравнения регрессии Y на X и X на Y, построить их графики в одной системе координат;

4) используя полученные уравнения регрессии, оценить ожидаемое среднее значение признака Y при x = 40 чел. Дать экономическую интерпретацию полученных результатов.

1. Для построения эмпирических ломаных регрессии вычислим условные средние $\overline{Y_x}$ и $\overline{X_y}$ Вычисляем $\overline{Y_x}$. Так как при $x = 5$ признак Y имеет распределение

Y	130	132	134
n_i	7	2	1

то условное среднее $\overline{Y_{x=5}} = \dfrac{130 \cdot 7 + 132 \cdot 2 + 134 \cdot 1}{7 + 2 + 1} = 130{,}8$.

При x=15 признак Y имеет распределение

Y	130	132	134	136
n_i	1	7	5	1

тогда $\overline{Y_{x=15}} = \dfrac{130 \cdot 1 + 132 \cdot 7 + 134 \cdot 5 + 136 \cdot 1}{14} = 132{,}86$.

Аналогично вычисляются все $\overline{Y_X}$ и $\overline{X_Y}$. Получим таблицы, выражающие корреляционную зависимость Y от X, (*а*) и X от Y (*б*).

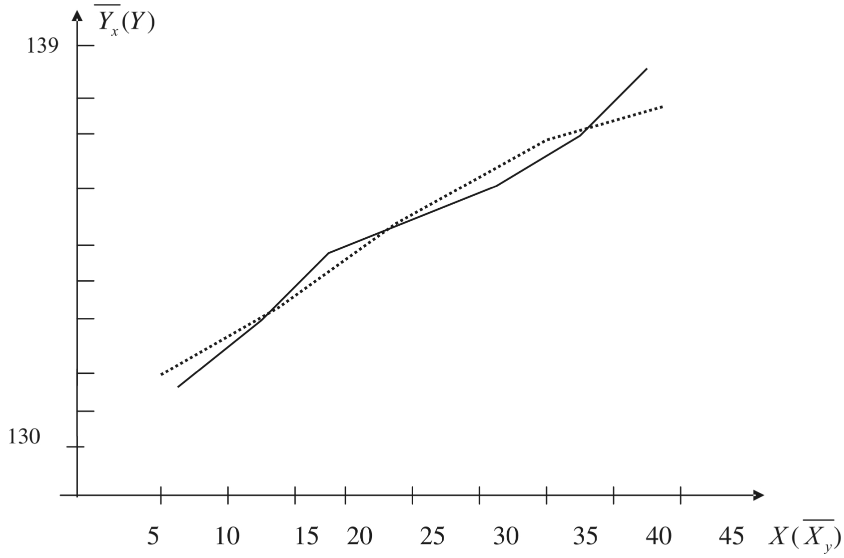
$\overline{X}$	5	15	25	35	45
$\overline{Y_X}$	130,8	132,86	135,74	137,08	137,86

а

$\overline{Y}$	130	132	134	136	138	140
$\overline{X_Y}$	6,25	14	19,54	32,35	39	43,57

б

В прямоугольной системе координат построим точки $A_i(x_i, \overline{Y_{Xi}})$, соединим их отрезками прямых, получим эмпирическую линию регрессии Y на X (точечная линия). Аналогично строятся точки $B_i(\overline{X_{Yi}}, y_i)$ и эмпирическая линия регрессии X на Y (сплошная линия).



Построенные эмпирические ломаные регрессии Y на X и X на Y свидетельствуют о том, что между количеством работающих (X) и объемом складских реализаций (Y) существует линейная зависимость. Из графика видно, что с увеличением X, также увеличивается $\overline{Y_X}$, поэтому можно выдвинуть гипотезу о прямой линейной корреляционной зависимости между количеством работающих и объемом складских реализаций.

2. Оценим тесноту связи. Вычислим выборочный коэффициент корреляции.

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad \overline{x} = \frac{\sum x_i n_x}{n}, \quad \overline{y} = \frac{\sum y_j n_y}{n},$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2 n_x}{n}, \quad \overline{y^2} = \frac{\sum y_j^2 n_x}{n}, \quad \overline{xy} = \frac{\sum x_i y_j n_{ij}}{n};$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2};$$

$$\overline{x} = \frac{5 \cdot 10 + 14 \cdot 14 + 25 \cdot 23 + 35 \cdot 24 + 45 \cdot 29}{100} = 29{,}8;$$

$$\overline{y} = \frac{130 \cdot 8 + 132 \cdot 10 + 134 \cdot 11 + 136 \cdot 34 + 138 \cdot 30 + 140 \cdot 7}{100} = 135{,}78;$$

$$\overline{x^2} = \frac{5^2 \cdot 10 + 14^2 \cdot 14 + 25^2 \cdot 23 + 35^2 \cdot 24 + 45^2 \cdot 29}{100} = 1059;$$

$$\overline{y^2} = \frac{130^2 \cdot 8 + 132^2 \cdot 10 + 134^2 \cdot 11 + 136^2 \cdot 34 + 138^2 \cdot 30 + 140^2 \cdot 7}{100} = 18443{,}4$$

$$\overline{xy}=\frac{1}{100}\big(130\cdot 5\cdot 7+130\cdot 15\cdot 1+132\cdot 52+132\cdot 15\cdot 7+132\cdot 25\cdot 1+134\cdot 5\cdot 1+134\cdot 15\cdot 5+$$
$$+134\cdot 25\cdot 4+134\cdot 35\cdot 1+136\cdot 15\cdot 1+136\cdot 25\cdot 15+136\cdot 35\cdot 10+136\cdot 45\cdot 8+138\cdot 25\cdot 3+$$
$$+138\cdot 35\cdot 12+138\cdot 45\cdot 15+140\cdot 35\cdot 1++140\cdot 45\cdot 6)=4075{,}55\ ;$$

$$\sigma_x=\sqrt{1059-(29{,}8)^2}=13{,}08;\ \sigma_y=\sqrt{18443{,}4-(135{,}78)^2}=2{,}68;$$

$$r_в=\frac{4075{,}55-29{,}8\cdot 135{,}78}{13{,}08\cdot 2{,}68}=0{,}84.$$

Полученное значение $r_В$ говорит о том, что линейная связь между количеством работников и объемом складских реализаций высокая. Этот вывод подтверждает первоначальное предположение, сделанное исходя из графика.

3. Запишем уравнения регрессии:

$$\overline{y_x}-\overline{y}=r_в\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x}),\ \overline{x_y}-\overline{x}=r_в\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\overline{y}).$$

Подставляя в эти уравнения найденные величины, получаем искомые уравнения регрессии:

1) уравнение регрессии Y на X:

$\overline{y_x}-135{,}78=0{,}84\cdot\dfrac{2{,}68}{13{,}08}(x-29{,}8)$, или $\overline{y_x}=0{,}17x+130{,}71$;

2) уравнение регрессии X на Y:

$\overline{x_y}-29{,}8=0{,}84\cdot\dfrac{13{,}08}{2{,}68}(y-135{,}78)$, или $\overline{x_y}=4{,}1y-526{,}9$.

Построим графики найденных уравнений регрессии.

Зададим координаты двух точек, удовлетворяющих уравнению $\overline{y_x}=0{,}17x+130{,}71$ (точечная линия).

Пусть x = 10, тогда $\overline{y_x}=132{,}41$.

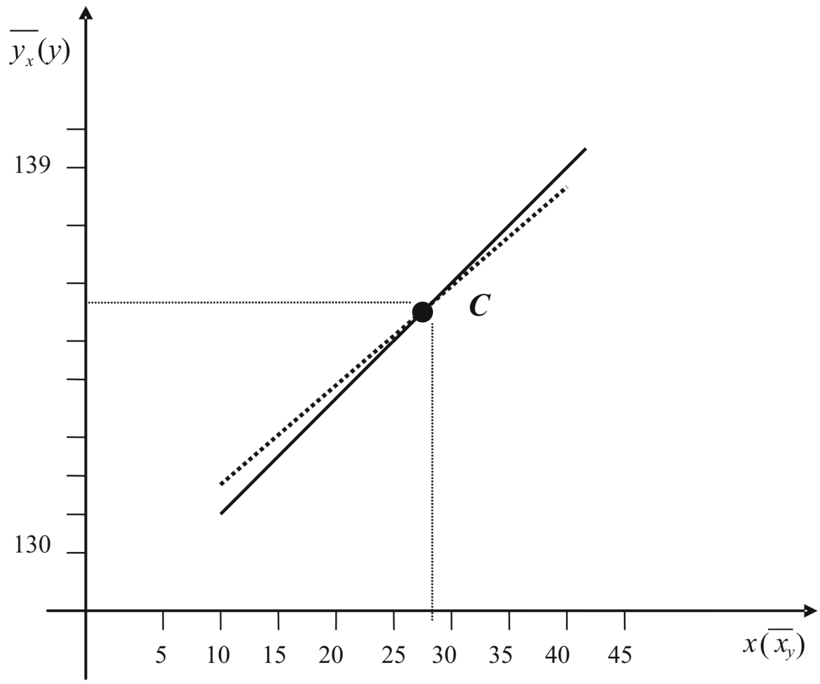
A_1(10; 132,41),

Если x = 40, тогда $\overline{y_x}=137{,}51$.

A_2(40; 137,51)

Аналогично находим точки, удовлетворяющие уравнению $\overline{x_y}=4{,}1y-526{,}9$ (сплошная линия).

B_1(10,2; 131), B_2(43; 139).



Контроль: точка пересечения прямых линий регрессии имеет координаты $(\overline{x};\overline{y})$. В нашем примере: C(29,8; 135,78).

4. Найдем среднее значение Y при $x = 40$ чел., используя уравнение регрессии Y на X. Подставим в это уравнение $x = 40$, получим $\overline{y_x} = 0{,}17 \cdot 40 + 130{,}71 = 137{,}51$.

Ожидаемое среднее значение объема складских реализаций при заданном количестве работников ($x = 40$) составляет 137,51 у.е.

Замечание 1. Если в корреляционной таблице даны интервальные распределения, то за значения вариант надо брать середины частичных интервалов.

Замечание 2. Если данные наблюдений над признаками X и Y заданы в виде корреляционной таблицы с равноотстоящими вариантами, то целесообразно перейти к условным вариантам:

$$U_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \; V_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

где h_1 – шаг, т.е. разность между двумя соседними вариантами x_i;

C_1 – «ложный нуль» вариант x_i (в качестве «ложного нуля» удобно принять варианту, которая расположена примерно в середине ряда);

h_2 – шаг варианты Y;

C_2 – «ложный нуль» варианты Y.

В этом случае выборочный коэффициент корреляции

$$r_{\text{в}} = \frac{\overline{U \times V} - \overline{U} \times \overline{V}}{\sigma_u * \sigma_v}, \text{ где } \overline{U} = \frac{\sum U_i n_x}{n},\ \overline{V} = \frac{\sum V_j n_y}{n},$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{U^2} - \left(\overline{U}\right)^2},\ \sigma_v = \sqrt{\overline{V^2} - \left(\overline{V}\right)^2}.$$

Зная эти величины, определим

$\overline{x} = \overline{U} h_1 + C_1$, $\overline{y} = \overline{V} h_2 + C_2$, $\sigma_x = \sigma_u h_1$, $\sigma_y = \sigma_v h_2$.

Так, в данном примере C_1 =25, h_1=10, C_2=136, h_2=2; $U_i = \dfrac{x_i - 25}{10}$, $V_j = \dfrac{y_j - 136}{2}$.

U V	–2	–1	0	1	2	n_y
–3	7	1				8
–2	2	7	1			10
–1	1	5	4	1		11
0		1	15	10	8	34
1			3	12	15	30
2				1	6	7
n_x	10	14	23	24	29	n=100

$$\overline{U} = \frac{-2 \cdot 10 - 1 \cdot 14 + 0 \cdot 23 + 1 \cdot 24 + 2 \cdot 29}{100} = 0{,}48$$

$$\overline{V} = \frac{-3 \cdot 8 - 2 \cdot 10 - 1 \cdot 11 + 0 \cdot 34 + 1 \cdot 30 + 2 \cdot 7}{100} = -0{,}11;$$

$$\overline{U^2} = \frac{4 \cdot 10 + 1 \cdot 14 + 0 \cdot 23 + 1 \cdot 24 + 4 \cdot 29}{100} = 1{,}94;$$

$$\overline{V^2} = \frac{9 \cdot 8 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 11 + 0 \cdot 34 + 1 \cdot 30 + 4 \cdot 7}{100} = 1{,}81;$$

$$\overline{U \cdot V} = \frac{1}{100}\big((-3) \cdot (-2) \cdot 7 + (-3) \cdot (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \cdot 7 +$$

$$+(-1) \cdot (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 12 + 1 \cdot 2 \cdot 15 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 6) = 1{,}4\ ;$$

$$\sigma_u = \sqrt{1{,}94 - 0{,}2304} = 1{,}308;\ \sigma_V = \sqrt{1{,}81 - 0{,}012} = 1{,}34;$$

$$r_{\text{в}} = \frac{1{,}4 - 0{,}48 \cdot (-0{,}11)}{1{,}308 \cdot 1{,}34} = 0{,}84;$$

$$\overline{x}=\overline{U}h_1+C_1=0,48\cdot10+25=29,8;$$
$$\overline{y}=\overline{V}h_2+C_2=-0,11\cdot2+136=135,78;$$
$$\sigma_x=\sigma_u h_1=1,308\cdot10=13,08;\ \sigma_y=\sigma_v h_2=1,34\cdot2=2,68;$$
$$\overline{y_x}=0,17x+130,71;\ \overline{x_y}=4,1y-526,9.$$

Статистическая проверка гипотез. Критерий согласия Пирсона

В экономических исследованиях часто возникает необходимость знать закон распределения генеральной совокупности. С этой целью производят наблюдения и получают опытное (или эмпирическое) распределение случайной величины в виде вариационного ряда. Поставленная задача сводится к оценке закона распределения признака в генеральной совокупности на основе выборочных данных.

Для точной формулировки проблемы дадим основные определения.

Определение 1. Распределение признака в выборке называется эмпирическим распределением.

Определение 2. Распределение признака в генеральной совокупности называется теоретическим распределением.

Определение 3. Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределение или о параметрах известных распределений.

Определение 4. Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Определение 5. Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит основной.

В результате проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов.

Определение 6. Ошибка 1-го рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки 1-го рода называется уровнем значимости и обозначается α.

Определение 7. Ошибка 2-го рода состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки 2-го рода обозначается β.

Определение 8. Критерием согласия называется критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. Это численная мера расхождения между эмпирическим и теоретическим распределением.

<u>Основная задача.</u> Дано эмпирическое распределение (выборка). Сделать предположение (выдвинуть гипотезу) о виде теоретического распределения и проверить выдвинутую гипотезу на заданном уровне значимости a.

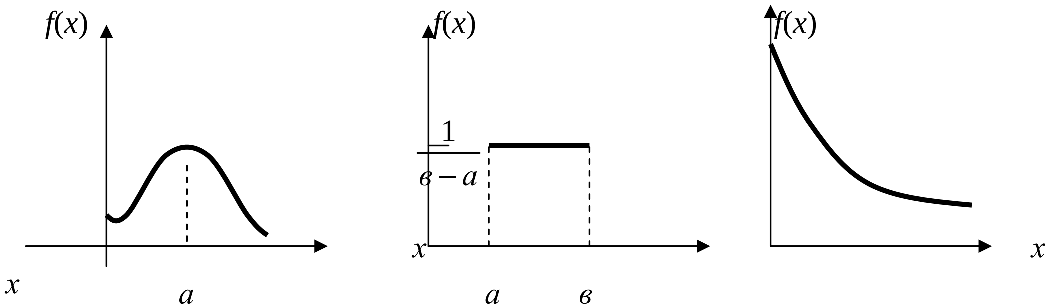
Решение основной задачи состоит из двух частей:

I. Выдвижение гипотезы.

I. Проверка гипотезы на заданном уровне значимости. Рассмотрим подробно эти части.

I. **Выбор гипотезы** о виде теоретического распределения удобно делать с помощью полигонов или гистограмм частот. Сравнивают эмпирический полигон (или гистограмму) с известными законами распределения и выбирают наиболее подходящий.

Приведем графики важнейших законов распределения:



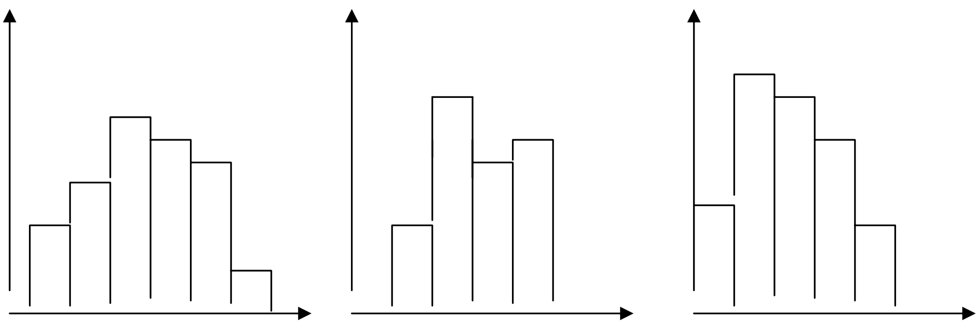
Нормальное распределение $N(a,\sigma)$

Равномерное распределение $[a,b]$

Распределение Пуассона

$$P_к = \frac{\lambda^к}{к!}e^{-\lambda}$$

Пример эмпирических законов распределения:



а *б* *в*

В случае (*а*) выдвигается гипотеза о нормальном распределении, в случае (*б*) – гипотеза о равномерном распределении, в случае (*в*) – гипотеза о распределении Пуассона.

Основанием для выдвижения гипотезы о теоретическом распределении могут быть теоретические предпосылки о характере изменения признака. Например, выполнение условий теоремы Ляпунова позволяет сделать гипотезу о нормальном распределении. Равенство средней и дисперсии наводит на гипотезу о распределении Пуассона.

На практике чаще всего приходится встречаться с нормальным распределением, поэтому в наших задачах требуется проверить только гипотезу о нормальном распределении.

II**. Проверка гипотезы** о теоретическом распределении отвечает на вопрос: можно ли считать расхождение между предполагаемыми теоретическим и эмпирическим распределениями случайным, несущественным, объясняемым случайностью попадания в выборку тех или иных объектов, или же это расхождение говорит о существенном расхождении между распределениями. Для проверки существуют различные методы (критерии согласия) – χ^2 (хи-квадрат), Колмогорова, Романовского и др. В наших задачах рассматривается метод χ^2.

Алгоритм метода χ^2

Эмпирическое распределение задано в виде последовательности интервалов одинаковой длины и соответствующих им частот.

1. Находим $\overline{x}_{\text{в}}$, $\sigma_{\text{в}}$. В качестве вариант принимают среднее арифметическое концов интервала.

2. Переходим к случайной величине *Z*, $Z = \dfrac{X - \overline{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}$. Вычисляем концы интервалов $Z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}$, $Z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}$, причем наименьшее значение *Z* полагают равным $-\infty$, а наибольшее — $+\infty$.

3. Вычисляем теоретические частоты.

$n' = n \cdot P_i$, где n – объем выборки, $P_i = \Phi(Z_{i+1}) - \Phi(Z_i)$; $\Phi(Z)$ – интегральная функция Лапласа.

4. Сравниваем эмпирические и теоретические частоты. Для этого:

а) находим наблюдаемое значение критерия Пирсона $\chi^2_{\text{набл}} = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$;

б) по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $R=S-3$ (S – число интервалов в выборке) находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; R)$.

Если $\chi^2_{\text{табл}} < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha; R)$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Если $\chi^2_{\text{табл}} < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha; R)$, то гипотезу отвергают.

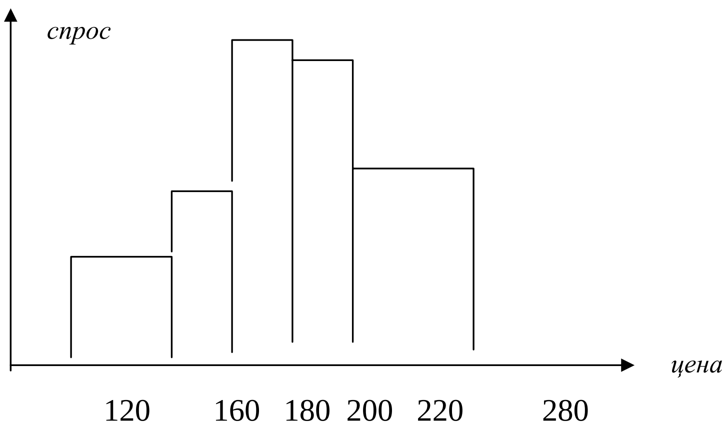
Пример 5. Результаты исследования спроса на товар представлены ниже:

Цена товара	120–160	160–180	180–200	200–220	220–280
Показатель спроса	5	10	14	12	9

Выдвинуть гипотезу о виде распределения и проверить ее на уровне значимости α=0,01.

I. Выдвижение гипотезы.

Для указания вида эмпирического распределения построим гистограмму



По виду гистограммы можно сделать предположение о нормальном распределении генеральной совокупности.

II. Проверим выдвинутую гипотезу о нормальном распределении, используя критерий согласия Пирсона.

1. Вычисляем $\overline{\text{x}}_{\text{B}}$, σ_B. В качестве вариант возьмем среднее арифметическое концов интервалов:

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{140 \cdot 5 + 170 \cdot 10 + 190 \cdot 14 + 210 \cdot 12 + 250 \cdot 9}{50} = 196{,}6; \quad \sigma_{\text{в}} = 32{,}1.$$

2. Найдем интервалы (Z_i; Z_{i+1}): $Z_i = \dfrac{x_i - 196{,}6}{32{,}1}$; $Z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - 196{,}6}{32{,}1}$.

Левый конец первого интервала примем равным $-\infty$, а правый конец последнего интервала $+\infty$. Результаты представлены ниже в таблице.

i	Граница интервалов				$\Phi(Z_i)$	$\Phi(Z_{i+1})$	P_i=$\Phi(Z_{i+1})$– $\Phi(Z_i)$	$n'_i = 50 \cdot P_i$
	x_i	x_{i+1}	Z_i	Z_{i+1}				
1	120	160	–∞	–1,14	–0,5	–0,3729	0,1271	6,36
2	160	180	–1,14	–0,52	–0,3729	–0,1985	0,1744	8,72
3	180	200	–0,52	0,11	–0,1985	0,0438	0,2423	12,12
4	200	220	0,11	0,73	0,0438	0,2673	0,2235	11,18
5	220	280	0,73	+∞	0,2673	0,5	0,2327	11,64

3. Найдем теоретические вероятности P_i и теоретические частоты n'_i. P_i=$\Phi(Z_{i+1}) - \Phi(Z_i)$, где $\Phi(Z)$ – интегральная функция Лапласа.
$n'_i = n \cdot P_i = 50 \cdot P_i$ (см. таблицу).

4. Сравним эмпирические и теоретические частоты. Для этого:

а) вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона.

$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$. Вычисления представлены в таблице ниже.

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2 / n'_i$
1	5	6,36	–1,36	1,8496	0,291
2	10	8,72	1,28	1,6384	0,188
3	114	12,12	1,88	3,5344	0,292
4	12	11,18	0,82	0,6724	0,060
5	9	11,64	–2,64	6,9696	0,599
Σ	50	50			$\chi^2_{\text{набл}} = 1,43$

б) найдем число степеней свободы R=S–3=5–3=2.

По таблице критических точек распределения χ^2, по уровню значимости α=0,01 и числу степеней свободы R=2 находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; R)$.

$$\chi^2_{\text{кр}}(0,01; 2) = 9,2.$$

Сравниваем $\chi^2_{\text{набл}}$ с $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; R)$. $\chi^2_{\text{набл}} = 1,43 < \chi^2_{\text{кр}} = 9,2$. Следовательно, нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, т.е. расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами незначимо (случайно).

Замечание. Интервалы, содержащие малочисленные эмпирические частоты (n_i<5), следует объединить, а частоты этих интервалов сложить. Если производилось объединение интервалов, то при определении числа степеней свободы по формуле R=S–3 следует в качестве S принять число оставшихся после объединения интервалов.

Контрольные вопросы

1. Статистические оценки параметров распределения.
2. Построение гистограмм частот.
3. Элементы теории корреляций.
4. Методы проверки статистических гипотез.
5. Выбор статистических гипотез.
6. Критерий $\chi^2_{л}$.

Контрольная работа № 11
по теме “Математическая статистика”

В задачах 1.1–1.30 выборочные совокупности заданы из соответствующих генеральных совокупностей. Требуется: 1) по несгруппированным данным найти выборочную среднюю; 2) найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания признака X генеральной совокупности (генеральной средней), если признак X распределен по нормальному закону; известно γ – надежность и σ – среднее квадратическое отклонение; 3) составить интервальное распределение выборки с шагом h, взяв за начало первого интервала x_0; 4) построить гистограмму частот; 5) дать экономическую интерпретацию полученных результатов.

1.1. Получены результаты о фондовооруженности в 25 производственных объединениях (тыс. руб.):
16,8 17,2 17,6 17,6 17,9 18,0 18,2 18,4 18,6 18,9 18,9
19,0 19,1 19,2 19,2 19,3 19,7 19,9 20,0 20,0 20,2 20,3
20,4 20,8 21,5
γ=0,95; σ=1; h=1; x_0=16,5.

1.2. Для определения удельного веса активных элементов основных производственных фондов было выборочно обследовано 25 производственных объединений и получены следующие результаты:
22,3 23,7 24,5 25,9 26,1 26,6 27,3 27,9 28,2 28,5 28,8
29,1 29,2 29,9 30,5 30,7 31,4 32,2 32,3 33,5 34,2 34,4
34,9 35,7 38,9
γ=0,95; σ=4; h=5; x_0=20.

1.3. Произведено выборочное обследование 25 магазинов по величине товарооборота. Получены следующие результаты (в тыс. руб.):
42,5 60,0 63,5 70,5 82,0 83,5 92,0 95,5 100,0 101,0 105,0
108,5 110,0 115,5 120,0 120,5 122,0 130,0 138,5 140,0
142,0 150,5 160,0 162,1 180,5
γ=0,96; σ=31; h=20; x_0=42,5.

1.4. При изучении уровня инфляции за некоторый период времени было обследовано 25 стран, получены следующие результаты:
0,35 0,41 0,53 0,59 0,64 0,68 0,71 0,73 0,77 0,78 0,82
0,83 0,85 0,86 0,88 0,89 0,92 0,93 0,97 1,01 1,07 108 1,14 1,25 1,28
γ=0,98; σ=0,22; h=0,2; x_0=0,3.

1.5. Для определения себестоимости продукции было произведено выборочное обследование 25 предприятий пищевой промышленности и получены следующие результаты (руб.)
15,0 16,4 17,8 18,0 18,4 19,2 19,8 20,2 20,6 20,6
20,6 21,3 21,4 21,7 22,0 22,2 22,3 22,7 23,0 24,2
24,2 25,1 25,3 26,0 26,5 27,1.
γ=0,95; σ=2,8; h=2,5; x_0=15.

1.6. Проведено выборочное обследование 25 частных фирм по количеству занятых в них служащих, получены следующие результаты (чел.):
266 278 315 336 347 354 368 369 391 408
411 416 427 437 444 448 457 462 481 483
495 512 518 536 576
γ=0,96; σ=65; h=50; x_0=250.

1.7. Проведена случайная выборка личных заемных счетов в банке, получены следующие результаты (тыс. руб.):
1850 2200 2400 2450 2500 2550 2800 2900 2950 3100
3150 3200 3200 3300 3350 3400 3450 3550 3550 3600
3800 3900 4100 4300 4550
γ=0,96; σ=690; h=500; x_0=1550.

1.8. Выборочно исследовано 25 предприятий для определения объема выпущенной продукции в месяц на одного рабочего, получены следующие результаты:
773 792 815 827 843 854 861 869 877 886 889 892 885
901 903 905 911 918 919 923 929 937 941 955 981
γ=0,92; σ=50; h=40; x_0=760.

1.9. В Сбербанке проведено выборочное обследование 25 вкладов, которое дало следующие результаты (тыс.руб.):
75 210 350 350 400 520 540 560 590 680 700 700 720
750 780 790 810 850 875 890 1000 1000 1100 1200 1250
γ=0,95; σ=280; h=250; x_0=50.

1.10. При исследовании объема продаж некоторого товара в супермаркете за 25 дней были получены следующие результаты (шт.):
69 76 77 79 83 86 87 88 89 89 90 91 91 92 93 93
94 94 96 96 99 101 103 107 108
γ=0,98; σ=9,5; h=10; x_0=65.

1.11. Получены следующие данные о государственных закупках товаров и услуг (усл. д. ед.):
331 346 362 385 404 411 419 429 435 437 441 445 458
468 469 477 481 491 507 518 536 542 543 544 544
γ=0,95; σ=55; h=50; x_0=325.

1.12. Проведено выборочное обследование 16 компаний по индексу акций нефтяных предприятий и получены следующие результаты:
630 645 652 656 678 687 693 694 697 704
715 716 729 732 745 772
γ=0,95; σ=55; h=40; x_0=600.

1.13. Проведено выборочное обследование объема промышленного производства за 16 месяцев и получены следующие результаты:
750 950 1000 1050 1050 1150 1150 1150 1200 1200 1250
1250 1350 1400 1400 1550
γ=0,98; σ=200; h=200; x_0=700.

1.14. Проведено выборочное обследование 25 предприятий, состоящих на самостоятельном балансе, по объему валовой продукции и получены следующие результаты:
627 645 651 664 666 675 679 684 687 693 694 699 702
708 709 711 715 716 725 728 737 744 751 768 781
γ=0,92; σ=60; h=40; x_0=608.

1.15. При изучении производительности труда (тыс.руб.) на одного рабочего было обследовано 25 однотипных предприятий и получены следующие результаты:
2,5 3,0 3,6 3,8 4,0 4,1 4,2 4,2 4,4 4,6 4,7 4,85 5,2
5,25 5,3 5,4 5,4 5,45 5,6 5,8 5,8 5,85 6,0 6,5 7,0
γ =0,98; σ=1; h=1; x_0=25.

1.16. Получены результаты выборочного обследования по выполнению плана выработки на одного рабочего (в %):

90,0 96,0 980 980 98,5 99,0 101,5 102 102 102,5 103
103 103,5 104 104 104 104,5 105,5 106 108 108,2 108,7
109 112 113,5

γ=0,98; σ=4,7; h=5; x_0=90.

1.17. Для определения себестоимости строительно-монтажных работ было произведено выборочное обследование 25 строительно-монтажных управлений и получены следующие результаты (тыс.руб.):

1250 1450 1550 1700 1760 1820 1880 1960 2100 2175
2190 2200 2220 2275 2280 2310 2400 2550 2580 2600
2670 2800 2950 3000 3075

γ=0,94; σ=446; h=400; x_0=1100.

1.18.Было проведено обследование 25 частных фирм по вкладу в национальный доход. Получены следующие результаты:

159 162,5 164 164,5 165,5 166 168,5 169 169 170,5 171
171 171 173 174,5 174,5 176 176,5 178 179 182 183,5
184 185 188

γ=0,95; σ=7; h=5; x_0=155.

1.19. В сборочном цехе завода было произведено выборочное обследование заработной платы рабочих и получены следующие результаты (в тыс.руб.):

136 155 160 169 175 175 180 188 189 192 195 200 202
205 205 205 208 212 215 220 225 234 242 245 260

γ=0,95; σ=31; h=20; x_0=130.

1.20. Получены выборочные данные об индексе потребительских цен за 25 лет:

31 33,5 34,5 35 36,5 37 37 38,5 38,5 39 39,5 40 40
40,5 40,5 41 41,5 42 43 43 44 45 46,5 48 49

γ=0,9; σ=7,5; h=4; x_0=30.

1.21. Получены следующие данные о закупках товаров в торговом центре (усл.д.ед.):

311 316 362 375 404 421 439 449 485 487 501 515 528
568 599 617 628 641 653 678 696 722 733 739 764

γ=0,95; σ=55; h=70; x_0=300.

1.22. Проведено выборочное обследование 16 компаний по индексу акций нефтеперерабатывающих предприятий и получены следующие результаты:

620 635 642 646 668 677 683 684 687 704
719 725 729 735 741 762

$\gamma=0{,}95$; $\sigma=55$; $h=40$; $x_0=600$.

1.23. Проведено выборочное обследование объема производства оргтехники компании «Hewlett Packed» за 16 месяцев и получены следующие результаты:

740 930 1020 1080 1090 1150 1160 1180 1200 1300 1350
1290 1350 1400 1450 1550

$\gamma=0{,}98$; $\sigma=200$; $h=200$; $x_0=700$.

1.24. Проведено выборочное обследование 25 предприятий по объему выпускаемой продукции и получены следующие результаты:

617 635 641 654 656 665 669 674 677 683 684 689 697
701 708 711 715 716 724 728 737 746 758 769 785

$\gamma=0{,}92$; $\sigma=60$; $h=40$; $x_0=610$.

1.25. При изучении производительности труда (у.е.) одного рабочего места механика автосервиса было обследовано 25 однотипных предприятий и получены следующие результаты:

2,6 3,1 3,6 3,9 4,0 4,1 4,2 4,3 4,4 4,6 4,7 4,85 5,2
5,25 5,3 5,4 5,45 5,5 5,6 5,8 5,8 5,85 6,0 6,5 7,0

$\gamma=0{,}98$; $\sigma=1$; $h=1$; $x_0=2{,}5$.

1.26. Получены результаты выборочного обследования по выполнению плана выработки на одного рабочего (в %):

91,0 97,0 98,0 98,5 99,0 99,5 101,0 101,5 102,0 102,5 103,0
103,5 104 104,5 105 105,5 106,0 106,5 108,0 108,5 109,0
109 112 113,5

$\gamma=0{,}98$; $\sigma=4{,}7$; $h=5$; $x_0=90$.

1.27. Для определения себестоимости авторемонтных работ было произведено выборочное обследование 25 автосервисов и получены следующие результаты (тыс.у.е.):

1210 1410 1520 1730 1740 1810 1820 1940 2000 2150
2170 2200 2220 2275 2280 2330 2400 2550 2580 2620
2670 2800 2950 3000 3075

$\gamma=0{,}94$; $\sigma=446$; $h=400$; $x_0=1100$.

1.28. Было проведено обследование 25 частных фирм по уровню среднего недельного дохода сотрудников. Получены следующие результаты:

158 162,5 163 164,5 165,5 166 167,5 168 169 170,5 171
171,5 172 173 174,5 175,5 176 176,5 178 179 182 183,5
184 185 187

γ=0,95; σ=7; h=5; x_0=155.

1.29. В страховой компании было произведено выборочное исследование страховых выплат за определенный период и получены следующие результаты (в тыс. руб.):

135 153 162 169 174 175 180 188 189 192 198 200 202
205 205 207 208 212 215 220 225 234 242 245 260

γ=0,95; σ=31; h=20; x_0=130.

1.30. Получены выборочные данные об индексе потребительских цен за 25 месяцев:

31 31,5 33,5 35,5 36,5 37 37,5 38 38,5 39 39,5 40 40,5
40,5 40,5 41 41,5 42 43 43 44 45 46,5 48 49

γ=0,9; σ=7,5; h=4; x_0=30.

В задачах 2.1–2.30 по корреляционной таблице требуется: 1) в прямоугольной системе координат построить эмпирические ломаные регрессии Y на X и X на Y, сделать предположение о виде корреляционной связи; 2) оценить тесноту линейной корреляционной связи; 3) составить линейные уравнения регрессии Y на X и X на Y, построить их графики в одной системе координат; 4) используя полученное уравнение регрессии, оценить ожидаемое среднее значение признака Y при $x = x_0$. Дать экономическую интерпретацию полученных результатов.

2.1. В таблице дано распределение 50 производственных объединений по выработке на одного работника X тыс. руб. и по фондоотдаче Y тыс. руб.:

X / Y	8	13	18	23	28	n_y
1,25				2	6	8
1,5			4	7	4	15
1,75	1	1	7	5		14
2	2	4	1			7
2,25	3	3				6
n_x	6	8	12	14	10	n=50

x=15.

2.2. В таблице дано распределение 100 предприятий по еженедельным издержкам X и по отработанному времени в отделах Y:

X Y	30	40	50	60	70	n_y
12	8	8			4	20
18	7	16	7			30
24		15	10	1		26
30		4	9	5	3	21
36				2	1	3
n_x	15	43	26	8	8	n=100

x=57.

2.3. В таблице дано распределение 100 торговых предприятий по затратам X тыс. руб. и по ежемесячным объемам продаж Y:

X Y	1,0–3,5	1,5–2,0	2,0–2,5	2,5–3,0	3,0–3,5	n_y
100–150	4	.				4
150–200	12	4	2			18
200–250	2	9	10	4		25
250–300		9	18	9	3	39
300–350				11	3	14
n_x	18	22	30	24	6	n=100

x=2,7

2.4. В таблице дано распределение 200 коммерческих предприятий по цене товара X д.ед. и по количеству проданного товара Y тыс.шт.:

X Y	0,4–0,8	0,8–1,2	1,2–1,6	1,6–2,0	2,0–2,4	2,4–2,8	n_y
7,25–9,25	14	22					36
9,25–11,25		10	38	6			54
11,25–13,25			30	30	4		64
13,25–15,25			10	12	8		30
15,25–17,25				2	8	6	16
n_x	14	32	78	50	20	6	n=200

x=1,3.

2.5. В таблице дано распределение 100 производственных объединений по фондовооруженности основных промышленных фондов на одного работника *X* тыс. руб. и по выработке на одного работника *Y* тыс. руб.

X *У*	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	n_y
5–15	1	2				3
15–25	3	6	1	1		11
25–35		7	9			16
35–45		1	16	8		25
45–55			21	4	5	30
55–65			10	3	2	15
n_x	4	16	57	16	7	n=100

x=22.

2.6. В таблице дано распределение 100 однотипных предприятий по основным фондам *X* млн руб. и себестоимости единицы продукции *Y* руб.

X *Y*	20	30	40	50	60	n_y
1	8	2				10
3	12	20	8			40
5			10	1		11
7			9	6	2	17
9			10	4	8	22
n_x	20	22	37	11	10	n=100

x=35.

2.7. В таблице дано распределение 100 предприятий производительности труда *X* и по объемам производства *Y*:

X *Y*	10	15	20	25	30	35	40	45	n_y
15	2	4							6
20	1	6	5	8		3			23
25		3	13	4	2	1			23
30			4	11	*5*	7			27
35				2	1	4	3	1	11
40				1	2	5	1	1	10
n_x	3	13	22	26	10	20	4	2	n=100

x=21.

2.8. В таблице дано распределение 100 заводов по объему основных производственных фондов X млн руб. и по суточной выработке продукции Y:

X Y	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100	n_y
0–6					4	6	10
6–12			6	6	8		20
12–18	1	2	14	3			20
18–24	6	18	2				26
24–30	4	10	2				16
3.0–36	6	2					8
n_x	17	32	24	9	12	6	n=100

x=42.

2.9. В таблице дано распределение 100 предприятий по величине основных фондов X млн руб. и себестоимости продукции Y млн руб.:

X Y	98–100	100–102	102–104	104–106	106–108	108–110	n_y
15,5–16,5	2	3	1				6
16,5–17,5	3	6	4	1			14
17,5–18,5		4	13	14	10		41
18,5–19,5			5	10	8	6	29
19,5–20,5				2	5	3	10
n_x	5	13 _!	23	27	23	9	n=100

x=103.

2.10. В таблице дано распределение 100 заводов по энерговооруженности X и по стоимости продукции Y:

X Y	30	40	50	60	70	80	n_y
30	3	6	12	1 7	2		30
36		2	8	10	2	1	23
42			1	4	16	6	27
48				2	3	5	10
54					4	6	10
n_x	3	8	21	23	27	18	n=100

x=77.

2.11. В таблице дано распределение 55 компаний по возрасту X и заработной плате Y усл.ден.ед.

X Y	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75	n_y
50–80	5	4				9
80–110		12	8	1		21
110–140			5	5		10
140–170			4	7		11
170–200				2	1	3
200–230					1	1
n_x	5	16	17	15	2	n=55

x=28.

2.12. В таблице дано распределение 100 предприятий по производительности труда одного рабочего X (в руб.) и по валовой продукции Y тыс.руб.

X Y	80	90	100	110	120	n_y
100	2	3	5			10
110	2	6	20	7		35
120	1	3	10	9	5	28
130	1	2	5	4	7	19
140			2	3	3	8
n_x	6	14	42	23	15	n=100

x=95.

2.13. В таблице дано распределение 200 заводов по основным фондам X млн руб. и по готовой продукции Y млн руб.:

X Y	20	30	40	50	60	70	80	90	100	n_y
12	4									4
18	6	10	2							18
24		8	13	1	1					23
30		4	7	9	3	4	2			29
36		1	2	3	12	4	8			30
42				1	3	18	24	1		47
48							7	12	3	22
54								9	18	27
n_x	10	23	24	14	19	26	41	22	21	n=200

x=98.

2.14. В таблице дано распределение 80 рабочих по объемам выпускаемой продукции в месяц на одного рабочего *X* и по среднемесячной зарплате *Y* руб.:

X *Y*	325–375	375–425	425–475	475–525	525–575	n_y
1250–1750	3					3
1750–2250	2	8	2			12
2250–2750		7	5	13		25
2750–3250		1	10	10	7	28
3250–3750				7	5	12
n_x	5	16	17	30	12	n=80

x=463.

2.15. В таблице дано распределение 60 семей по доходу семьи *X* д.е. и уровню потребления *Y*:

X *Y*	15–30	30–45	45–60	60–75	75–90	n_y
16–24			1	4	1	6
24–32			7	7	2	16
32–40		4	12	2		18
40–48		8	6			14
48–56	2	4				6
n_x	2	16	26	13	3	n=60

x=80.

2.16. В таблице дано распределение 100 предприятий по производственным средствам *X* млн руб. и суточной выработки *Y* т.

X *Y*	20	30	40	50	60	n_y
10	8	7	2			17
20	2	16	8	6	2	34
30		9	12	12	4	37
40			2	4	5	11
50					1	1
n_x	10	32	24	22	12	n=100

x=45.

2.17. В таблице дано распределение 80 снабженческо-сбытовых организаций по складским площадям X тыс.м" и по объему складских реализаций Y млн руб.:

X Y	8–16	16–24	24–32	32–40	40–48	n_y
30–70	2	3				5
70–110	3	4	8	1		16
110–150	1	5	16	8	1	31
150–190			12	3	2	17
190–230			1	4	6	11
n_x	6	12	37	16	9	n=80

x=44.

2.18. В таблице дано распределение 50 заводов по объему валовой продукции X млн руб. и себестоимости Y:

X Y	1500	2500	3500	4500	5500	n_y
2				1	6	7
2,5			4	6	3	13
3		3	6	4		13
3,5	2	6	3	1		12
4	3	2				5
n_x	5	11	13	12	9	n=50

x=3783.

2.19. В таблице дано распределение 50 малых предприятий по выпуску продукции X тыс.ед. в день и по издержкам Y тыс. руб. за день.

X Y	4–6	6–8	8–10	10–32	12–14	n_y
0,5–2,0			2	3	1	6
2,0–3,5		4	5	1		10
3,5–5,0		8	5	5		18
5,0–6,5	3	8	2			13
6,5–8,0	2	1				3
n_x	5	21	14	9	1	n=50

x=13.

2.20. В таблице дано распределение 200 предприятий по основным фондам X млн руб. и по готовой продукции Y млн руб.:

X Y	40	50	60	70	80	n_y
15	5					5
20	7	4	8			19
25		16	20	11		47
30		23	32	29	9	93
35			27	2	7	36
n_x	12	43	87	42	16	n=200

x=63.

2.21. В таблице дано распределение 50 производственных объединений по выработке на одного работника X тыс.руб. и по фондоотдаче $У$ тыс.руб.:

X Y	8	13	18	23	28	n_y
1,25				2	6	8
1,5			4	7	4	15
1,75	1	1	7	5		14
2	2	4	1			7
2,25	3	3				6
n_x	6	8	12	14	10	n=50

x=25.

2.22. В таблице дано распределение 100 предприятий по ежегодным издержкам X и по отработанному времени в отделах Y:

X Y	30	40	50	60	70	n_y
12	8	8			4	20
18	7	16	7			30
24		15	10	1		26
30		4	9	5	3	21
36				2	1	3
n_x	15	43	26	8	8	n=100

x=45.

2.23. В таблице дано распределение 100 торговых предприятий по затратам X тыс. руб. и по ежемесячным объемам продаж Y:

X / Y	1,0–3,5	1,5–2,0	2,0–2,5	2,5–3,0	3,0–3,5	n_y
100–150	4	.				4
150–200	12	4	2			18
200–250	2	9	10	4		25
250–300		9	18	9	3	39
300–350				11	3	14
n_x	18	22	30	24	6	n=100

x=2,2

2.24. В таблице дано распределение 200 коммерческих предприятий по цене товара X д.ед. и по количеству проданного товара Y тыс.шт.:

X / Y	0,4–0,8	0,8–1,2	1,2–1,6	1,6–2,0	2,0–2,4	2,4–2,8	n_y
7,25–9,25	14	22					36
9,25–11,25		10	38	6			54
11,25–13,25			30	30	4		64
13,25–15,25			10	12	8		30
15,25–17,25				2	8	6	16
n_x	14	32	78	50	20	6	n=200

x=2,2.

2.25. В таблице дано распределение 100 производственных объединений по фондовооруженности основных промышленных фондов на одного работника X тыс. руб. и по выработке на одного работника Y тыс. руб.

X / $У$	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	n_y
5–15	1	2				3
15–25	3	6	1	1		11
25–35		7	9			16
35–45		1	16	8		25
45–55			21	4	5	30
55–65			10	3	2	15
n_x	4	16	57	16	7	n=100

x=18.

2.26. В таблице дано распределение 100 однотипных предприятий по основным фондам *X* млн руб. и себестоимости единицы продукции *Y* руб.

X *Y*	20	30	40	50	60	n_y
1	8	2				10
3	12	20	8			40
5			10	1		11
7			9	6	2	17
9			10	4	8	22
n_x	20	22	37	11	10	n=100

x=55.

2.27. В таблице дано распределение 100 предприятий производительности труда *X* и по объемам производства *Y*:

X *Y*	10	15	20	25	30	35	40	45	n_y
15	2	4							6
20	1	6	5	8		3			23
25		3	13	4	2	1			23
30			4	11	5	7			27
35				2	1	4	3	1	11
40				1	2	5	1	1	10
n_x	3	13	22	26	10	20	4	2	n=100

x=37.

2.28. В таблице дано распределение 100 заводов по объему основных производственных фондов *X* млн руб. и по суточной выработке продукции *Y*:

X *Y*	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100	n_y
0–6					4	6	10
6–12			6	6	8		20
12–18	1	2	14	3			20
18–24	6	18	2				26
24–30	4	10	2				16
3.0–36	6	2					8
n_x	17	32	24	9	12	6	n=100

x=85.

2.29. В таблице дано распределение 100 предприятий по величине основных фондов X млн руб. и себестоимости продукции Y млн руб.:

X Y	98–100	100–102	102–104	104–106	106–108	108–110	n_y
15,5–16,5	2	3	1				6
16,5–17,5	3	6	4	1			14
17,5–18,5		4	13	14	10		41
18,5–19,5			5	10	8	6	29
19,5–20,5				2	5	3	10
n_x	5	13 _!	23	27	23	9	n=100

x=107.

2.30. В таблице дано распределение 100 заводов по энерговооруженности X и по стоимости продукции Y:

X Y	30	40	50	60	70	80	n_y
30	3	6	12	$_1$ 7	2		30
36		2	8	10	2	1	23
42			1	4	16	6	27
48				2	3	5	10
54					4	6	10
n_x	3	8	21	23	27	18	n=100

x=55.

В задачах 3.1–3.30 даны эмпирические значения случайной величины. Требуется: 1) выдвинуть гипотезу о виде распределения; 2) проверить гипотезу с помощью критерия Пирсона при заданном уровне значимости α. За значения параметров a и σ принять среднюю выборочную и выборочное среднее квадратичное отклонение, вычисленные по эмпирическим данным.

α=0,01. Сумма банковских вкладов имеет следующее распределение:

3.1

2–6	6–10	10–14	14–18	18–22
7	15	29	18	11

3.2

8–10	10–12	12–14	14–16	16–18
9	17	33	14	7

3.3

0,2–0,4	0,4–0,6	0,6–0,8	0,8–1,0	1,0–1,2	1,2–1,4
5	17	23	16	7	2

3.4

0,4–1	1–1,6	1,6–2,2	2,2–2,8	2,8–3,4
6	12	21	14	7

3.5

0,3–0,7	0,7–1,1	1,1–1,5	1,5–1,9	1,9–2,3
10	22	42	18	8

3.6

1,7–2,1	2,1–2,5	2,5–2,9	2,9–3,3	3,3–3,7
12	16	21	15	6

3.7

3–4	4–5	5–6	6–7	7–8
6	8	18	11	7

3.8

1–5	5–9	9–13	13–17	17–21	21–25
6	10	17	12	4	1

3.9

3–5	5–7	7–9	9–11	11–13
7	10	18	10	5

3.10

12–22	22–32	32–42	42–52	52–62
14	20	25	13	8

3.11

5–15	15–25	25–35	35–45	45–55
50	230	310	200	110

3.12

7–27	27–47	47–67	67–87	87–107
55	67	46	38	48

3.13

6–12	12–18	18–24	24–30	30–36	36–42
10	21	25	17	14	18

3.14

4–10	10–16	16–22	22–28	28–34
15	25	38	21	19

3.15

20–24	24–28	28–32	32–36	36–40
5	25	30	15	12

α=0,05. В таблицах дано распределение дохода от реализации некоторого товара:

3.16

7–9	9–11	11–13	13–15	15–17
5	23	41	20	11

3.17

7–17	17–27	27–37	37–47	47–57
5	11	13	12	9

3.18

8–12	12–16	16–20	20–24	24–28	28–32
6	11	25	13	4	1

3.19

4–8	8–12	12–16	16–20	20–24
7	25	38	21	9

3.20

20–24	24–28	28–32	32–36	36–40
10	21	30	17	12

3.21

3–4	4–5	5–6	6–7	7–8
5	11	13	12	9

3.22

0–2	2–4	4–6	6–8	8–10
6	11	16	12	5

3.23

5–11	11–17	17–23	23–29	29–35
7	12	18	15	8

3.24

0–6	6–12	12–18	18–24	24–30
5	11	23	13	8

3.25

2–14	14–26	26–38	38–50	50–62
6	13	19	15	7

3.26

3–8	8–13	13–18	18–23	23–28
7	13	17	14	8

3.27

0–4	4–8	8–12	12–16	16–20
5	12	15	11	7

3.28

5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
6	13	17	16	9

3.29

0–6	6–12	12–18	18–24	24–30
4	14	21	17	8

3.30

2–14	14–26	26–38	38–50	50–62
8	15	22	18	11

Тема 12. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Проблема оптимизации встречается в различных областях человеческой деятельности, в том числе и в экономике. Поэтому студентам экономических специальностей необходимо освоить методы решения задач математического программирования.

В общем случае цель состоит в определении наиболее эффективного метода такого распределения ресурсов по соответствующим переменным, которое оптимизирует некоторый результат функционирования системы. Очень часто полезным инструментом в процессе распределения ресурсов являются методы моделирования. Математическим программированием называется использование математических моделей и методов для решения проблем программирования. Существует ряд различных методов, основанных на идеях математического программирования, однако мы рассмотрим только один из них, который нашел наиболее широкое применение, **– линейное программирование**.

Линейное программирование является подходящим методом для моделирования распределения ресурсов, если цель и ограничения на ресурсы можно выразить количественно в форме линейных взаимосвязей между переменными. Этот метод включает в себя ряд шагов:

1. Необходимо осуществить математическую формализацию задачи линейного программирования. Это означает, что нужно идентифицировать управляемые переменные и цель задачи. Затем с помощью этих переменных цель и ограничения на ресурсы описываются в форме линейных соотношений.

2. После завершения формулировки задачи линейного программирования рассматриваются все допустимые сочетания переменных. Из них выбирается то, которое оптимизирует целевую функцию задачи. Если исследуемая задача содержит только две переменные, ее можно решить графически. Однако в случае исследования задачи со многими переменными необходимо прибегнуть к одному из алгебраических методов решения задач линейного программирования, для использования которых существуют пакеты прикладных программ.

3. Когда оптимальное решение получено, производится его оценка. Она включает в себя анализ задачи на чувствительность.

Решение задачи линейного программирования, как и любой иной математический инструмент, применяемый в теории принятия решений, является лишь одним из факторов, влияющих на конечное решение, принимаемое администрацией. Рассмотрение линейного программирования мы начнем с проблемы формулировки задачи.

Формулировка задачи линейного программирования

Основная процедура является общей для формулирования всех задач линейного программирования:

Шаг 1. Определение переменных задачи, значения которых нужно получить в пределах существующих ограничений.

Шаг 2. Определение цели и ограничений на ресурсы.

Шаг 3. Описание цели через переменные задачи.

Шаг 4. Описание ограничений через переменные задачи.

Хотя на применение данной процедуры не влияет число переменных в задаче линейного программирования, рассмотрим сначала задачу с двумя переменными.

Пример 1. Завод-производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей: X и Y. Завод располагает фондом рабочего времени в 4000 чел.-ч в неделю. Для производства одной детали типа X требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа Y – 2 чел.-ч. Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей типа X и 1750 деталей типа Y в неделю. Каждая деталь типа X требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали типа Y необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла. Уровень запасов каждого вида металла составляет 10 000 кг в неделю. Кроме того, еженедельно завод поставляет 600 деталей типа X своему постоянному заказчику. Существует также профсоюзное соглашение, в соответствии с которым общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук.

Сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю, если доход от производства одной детали типа X составляет 30 ф. ст., а от производства одной детали типа Y – 40 ф. ст.?

Решение. Сначала необходимо сформулировать задачу линейного программирования.

Шаг 1. Идентификация переменных. Необходимо произвести x деталей типа X и у деталей типа Y в неделю.

Шаг 2. Какова цель задачи? Каковы ограничения на процесс производства? Цель состоит в максимизации общего дохода за неделю. Производственный процесс ограничивается уровнем:

а) фонда рабочего времени – максимально возможный фонд рабочего времени составляет 4000 чел.-ч в неделю;

б) производственной мощности – для каждого типа деталей существует отдельное ограничение по производственной мощности. Оборудование позволяет выпускать не более 2250 деталей типа X и 1750 типа Y в неделю;

в) металлических стержней – максимальный их уровень составляет 10000 кг в неделю;

г) листового металла – максимальный уровень этого ресурса равен 10000 кг в неделю.

Кроме того, существуют ограничения на минимальный объем производства деталей каждого вида:

а) постоянные заказы – число произведенных деталей X должно быть достаточным для удовлетворения размера постоянных заказов;

б) профсоюзное соглашение – общее число деталей ($x + y$) не должно быть ниже объема, предусмотренного соглашением.

Шаг 3. Целевая функция. Пусть P – общий доход за неделю, ф. ст., где

$$P = 30x + 40y \text{ (ф. ст. в неделю).}$$

Шаг 4. Ограничения на производственный процесс. Для каждого ограничения на ресурсы, необходимые для производства x деталей типа X и y деталей типа Y в неделю, ниже приведены количества и соответствующие им максимальные уровни наличных ресурсов.

Требуемый фонд рабочего времени: $x + 2y$ S 4000 чел.-ч.

Требуемая производственная мощность: $x \leq 2250$ деталей,

$y \leq 1750$ деталей.

Требуемое количество металлических стержней: $2x + 5y \leq 10000$ кг.

Требуемое количество листового металла: $5x + 2y \leq 10000$ кг.

Постоянные заказы: $x \geq 600$ деталей.

Профсоюзное соглашение: $x + y \geq 1500$ деталей.

Условие неотрицательности: $x, y \geq 0$.

Окончательная формулировка задачи линейного программирования имеет вид: производится x деталей типа X и y деталей типа $У$ в неделю.

Максимизировать: $P = 30x+40y$ (ф.ст.) при ограничениях:

Фонд рабочего времени: $1\,x + 2\,y \leq 4000$ чел.-ч.

Производственная мощность: $x \leq 2250$ деталей, $y \leq 1750$ деталей.

Металлические стержни: $2\,x + 5\,y \leq 10000$ кг.

Листовой металл: $5\,x + 2\,y \leq 10000$ кг.

Постоянные заказы: $x \geq 600$ деталей.

Профсоюзное соглашение: $x + y \geq 1500$ деталей.

Условие неотрицательности: $x, y \geq 0$.

<u>Пример 2.</u> Для изготовления четырех видов продукции (А, Б, В, Г) используются три вида сырья $(S_1,\ S_2,\ S_3)$.

Ресурсы сырья, нормы его расхода на единицу продукции и получаемая прибыль от единицы продукции заданы в нижеследующей таблице.

Сырье	Нормы расхода				Ресурсы
	А	Б	В	Г	
S_1 S_2 S_3	8 7 2	4 1 8	3 4 2	0 1 6	7 500 2 800 5 000
Прибыль	12	11	8	6	

Определить оптимальный план выпуска продукции при условии максимизации прибыли.

Составим математическую модель задачи.

Обозначим через x_1 выпуск продукции А, x_2 – продукции Б, x_3 – продукции В и x_4 – продукции Г. Следовательно, $\overline{X} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ – план выпуска продукции.

Сырья S_1 потребуется в количестве

$$8x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4.$$

Это количество не должно превышать ресурсы сырья S_1, т.е.

$$8x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4 \le 7\ 500.$$

Аналогично по другим видам сырья получим ограничения

$$7x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 1x_4 \le 2\ 800,$$

$$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 5\ 000.$$

Подсчитаем прибыль $Z = 12x_1 + 11x_2 + 8x_3 + 6x_4$.

Таким образом, мы получили математическую модель, поставленной задачи. Среди решений системы ограничений

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 \qquad\quad \le 7\ 500, \\ 7x_1 \ \ + x_2 + 4x_3 \ \ + x_4 \le 2\ 800, \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 5\ 000, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$$

необходимо найти такое, при котором целевая функция

$$Z = 12x_1 + 11x_2 + 8x_3 + 6x_4$$

достигает максимума.

Решение задачи линейного программирования

Рассмотрим процесс нахождения значений переменных, которые удовлетворяют системе ограничений и оптимизируют целевую функцию задачи. Однако гораздо удобнее исследовать не систему неравенств, а систему уравнений. Процесс преобразования неравенств в уравнения достаточно прост. Для этого в левую часть неравенства вводится дополнительная переменная. Эта переменная призвана отразить величину разности между правой и левой частями неравенства. Чтобы продемонстрировать этот алгоритм, обратимся к примеру 1, в котором рассматривается производство деталей типов X и Y к автомобилям. Для получения системы уравнений в каждое ограничение введем дополнительную переменную. Обозначим данную переменную через s, таким образом, в первое ограничение вводится переменная s_1, во второе – s_2 и т.д. Кроме того, примем предпосылку о неотрицательности значений этих переменных, т.е. $s_i \geq 0$. Это значит, что дополнительные переменные прибавляются к левым частям всех ограничений знака «$\leq$» и вычитаются из левых частей ограничений знака «$\geq$». Задача линейного программирования в данном случае принимает следующий вид: производится x деталей типа X и y деталей типа Y в неделю. Цель состоит в максимизации общего дохода в неделю. Максимизировать:

$$P = 30\,x + 40\,y \text{ (ф. ст. в неделю)}$$

при ограничениях:

Фонд рабочего времени: $1x+2y+s_1 = 4000$ (чел.-ч/нед.).

Производственная мощность: $x+s_2 = 2250$ (деталей/нед.),

$y+s_3 = 1750$ (деталей/нед.).

Металлические стержни: $2x+5y+s_4 = 10000$ (кг/нед.).

Листовой металл: $5x+2y+ s_5 = 10000$ (кг/нед.).

Постоянные заказы: $x–s_6 = 600$ (деталей/нед.).

Профсоюзное соглашение: $x+y–s_7 = 1500$ (деталей/нед.).

Условие неотрицательности: $x, y \geq 0$.

Такие вспомогательные переменные для ограничений со знаком «$\leq$» называются **остаточными переменными**. Они представляют собой количество недоиспользуемого ресурса, т.е. разность между используемым количеством ресурса и его максимальным объемом. Рассмотрим, например, ограничение на фонд рабочего времени, указанное выше. Предположим, что в течение недели выпускается 1000 деталей каждого типа, тогда используемое число человеко-часов составит: $1\times1000 + 2\times1000 = 3000$. Поскольку максимальный фонд рабочего времени равен 4000 чел.-ч, резерв времени, или остаток, составит: 4000–3000 = 1000 чел.-ч. Следовательно, для данной комбинации x–y и s_1 принимают значение, равное 1000.

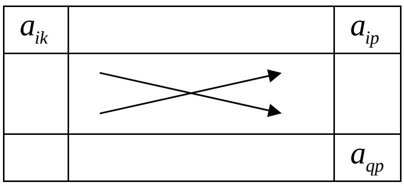
Вспомогательные переменные, используемые в ограничениях типа «$\geq$», называются **избыточными переменными**, так как они показывают количество ресурса, используемое сверх минимального его объема. Рассмотрим, к примеру, ограничение на постоянные заказы в случае, когда выпускается 1000 деталей типа X. Минимальное число деталей типа X составляет в соответствии с данным ограничением 600 штук, следовательно, уровень производства, равный 1000 деталей, порождает излишек в 400 штук сверх минимального количества. Таким образом, s_6 принимает значение, равное 400.

Итак, мы получили систему уравнений. Однако мы не можем решить ее с применением традиционных алгебраических методов и получить единственное множество значений переменных (единственное решение), поскольку число переменных превосходит число уравнений системы. Единственное множество решений можно получить только в случае, если число переменных и число уравнений системы совпадают.

Метод Жордана – Гаусса.
Однократное замещение в канонических системах

Решение системы линейных алгебраических уравнений приводится в таблице Гаусса согласно алгоритму метода последовательных исключений:

1) каждая последовательная итерация начинается с выбора разрешающего элемента, отличного от нуля, в предыдущей таблице (удобно в качестве разрешающего элемента выбирать элемент, равный 1);
2) элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент;
3) элементы разрешающего столбца, не принадлежащие разрешающей строке, заполняем нулями;
4) элементы остальных строк пересчитываем по «правилу прямоугольника»:



a_{qp} – разрешающий элемент.

Тогда элемент a'_{ik} вычисляется по формуле

$$a'_{ik} = \frac{a_{ik}a_{qp} - a_{qk}a_{ip}}{a_{qp}}.$$

Алгоритм применяется до тех пор, пока в каждой строке не получим базисные переменные (такой вид системы называется каноническим).

Приравнивая к нулю свободные неизвестные, получим базисное решение, которое в случае своей неотрицательности называется **опорным**.

Пример 3. Решить систему методом Жордана – Гаусса. Если система имеет множество решений, найти хотя бы одно базисное и указать, будет ли оно опорным.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \quad + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10, \\ 6x_1 \quad - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$$

Решение:

Б	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
	2 5 6	7 12 –1	3 5 -2	1 3 5	6 10 –2
x_4	2 –1 –4	7 –9 –36	3 –4 –17	1 0 0	6 –8 –32
x_4 x_1	0 1 0	–11 9 0	-5 4 –1	1 0 0	–10 8 0
x_4 x_1 x_3	0 1 0	–11 9 0	0 0 1	1 0 0	–10 8 0

Систему привели к системе с базисом:

$$\begin{cases} -11x_2 + x_4 = -10, \\ x_1 + 9x_2 = 8, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Базисное решение $\overline{X} = (8,\ 0,\ 0,\ -10)$ **не является** опорным.

Для нахождения опорного решения (множества опорных решений) выполняется операция **однократного замещения**, проиллюстрируем ее на примере.

Пример 4. Дана каноническая система:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_3 - 2x_5 = 3, \end{cases}$$

где $x_2,\ x_3,\ x_4$ – базисные неизвестные, свободные члены неотрицательны. Если свободные неизвестные $x_1,\ x_5$ приравнять к нулю, то получим базисное неотрицательное решение, которое является опорным.

Итак, $\overline{X}_1 = (0;\ 2;\ 3;\ 1;\ 0)$ – опорное решение.

Для нахождения других опорных решений выполняем операцию **однократного замещения**, при этом:

1) разрешающий столбец выбираем так, чтобы в нем оказался хотя бы один положительный элемент;

2) разрешающую строку выбираем по наименьшему Θ, который равен отношению свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца.

Б	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	Θ
x_2	1	1	0	0	–3	2	2/1=2
x_4	3	0	0	1	1	1	1/3
x_3	0	0	1	0	–2	3	–
x_2	0	1	0	–3	–10/3	5/3	
x_1	1	0	0	1/3	1/3	1/3	
x_3	0	0	1	0	–2	3	

$\bar{X}_2 = (1/3;\ 5/3;\ 3;\ 0;\ 0)$ – опорное решение.

Можно найти и другие опорные решения, например, в качестве разрешающего столбца можно выбрать столбец, соответствующий x_5.

При решении подобных систем возникает необходимость в отыскании множества допустимых решений системы уравнений. Данное множество содержит все сочетания переменных, которые удовлетворяют системе ограничений. Затем из этого множества можно будет выбрать одно или несколько решений, оптимизирующих целевую функцию задачи.

Как следует поступать при определении множества допустимых решений? Если задача содержит только две переменные, это можно сделать графически. Однако в случае решения задачи с множеством переменных необходимо прибегнуть к алгебраическому методу решения.

Графический метод

Графически решаются задачи в стандартной форме, содержащие не более двух переменных; задачи общего вида, в системе ограничений которых не более двух свободных неизвестных.

Рассмотрим примеры.

<u>Пример 5.</u> Решить графически задачу линейного программирования.

$$Z = 3x_1 + x_2 \to \max,$$

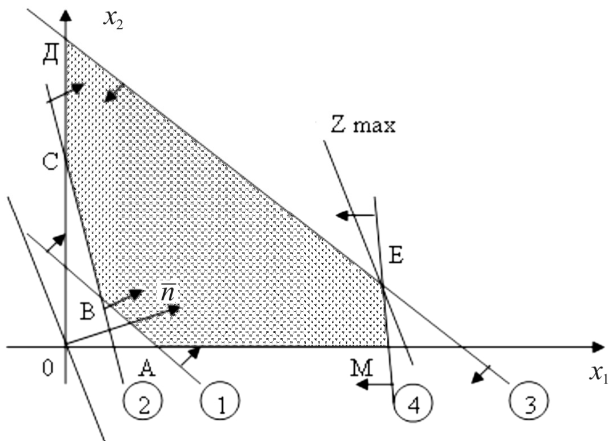
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ 5x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \qquad \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Строим область решений системы ограничений. Для этого последовательно определяем области решений каждого неравенства.

Чтобы найти область решений первого неравенства, строим граничную прямую $x_1 + x_2 = 2$, которая делит плоскость на две полуплоскости, а затем, испытывая какую-либо точку (проще О(0;0)), определяем полуплоскость, точки которой удовлетворяют неравенству. Точка О(0;0) не удовлетворяет неравенству $x_1 + x_2 \geq 2$, следовательно, область решений неравенства не включает начала координат. Отмечаем область стрелками.

Решаем аналогично остальные неравенства, находим общую область решений, удовлетворяющую всем неравенствам.



Областью решений системы неравенств является многоугольник *АВСДЕМ*. Так как решения удовлетворяют условиям $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, область решений называется допустимой областью решений задачи.

В этой же системе координат строим целевой вектор $\overline{n} = (3,\ 1)$, перпендикулярный к линиям уровня $Z = 3x_1 + x_2$. Строим перпендикулярно вектору линию уровня и, перемещая ее параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{n}$, определим крайнюю точку области, в которой *Z* примет наибольшее значение.

В решаемой задаче максимальное значение *Z* будет достигнуто в точке *E*. Определяем координаты этой точки:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8, \\ x_1 = 6, \end{cases} \quad E(6;\ 2),$$

$$Z_{\max} = 3 \cdot 6 + 2 = 20\,.$$

Пример 6. Решить графически:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 7, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,4.$$

Приводим систему к системе с базисом:

Б	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
	1 1	1 1	1 –1	1 3	5 7
x_1	1 0	1 0	1 –2	1 2	5 2
x_1 x_4	1 0	1 0	2 –1	0 1	4 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad = 4, \\ \qquad\qquad -x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Перейдем от канонической системы к стандартной, отбрасывая в уравнениях базисные переменные.

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 \leq 4, \\ \quad -x_3 \leq 1. \end{cases}$$

Исключаем базисные переменные из выражения для функции Z

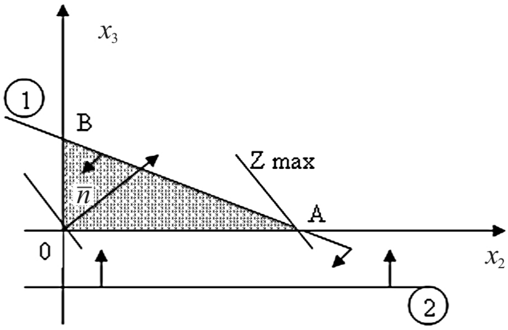
$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - 2x_3, \\ x_4 = 1 \qquad + x_3, \end{cases}$$

$$Z = 8 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_2 + x_3 + 5 + 5x_3 = 13 + 2x_2 + 2x_3.$$

Решаем графически задачу:

$$Z = 13 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 \leq 4, \\ \quad -x_3 \leq 1, \\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$



Максимальное значение функции Z достигается в точке $A(4;0)$:

$$Z_{\max} = 13 + 8 = 21.$$

Найдем оптимальное значение $x_1,\ x_4$:

$$x_1 = 4 - 4 = 0,$$

$$x_4 = 1.$$

Ответ: $Z_{\max} = 21,\ \overline{X} = (0,\ 4,\ 0,\ 1)$.

Симплекс-метод

Если система ограничений основной задачи каноническая, то задачу линейного программирования можно решить симплексным методом.

Поясним суть симплекс-метода на конкретном примере.

Пример 7. Решить задачу симплекс-методом:

$$Z = x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Преобразуем стандартную задачу в основную, добавляя к левым частям ограничений балансовые переменные. Целевая функция при этом не изменится.

$$Z = x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + x_5 = 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Получим каноническую задачу. Неизвестные x_3, x_4, x_5 – базисные, x_1, x_2 – свободные. Можно записать исходное опорное решение: $\overline{X}(0;\ 0;\ 6;\ 4;\ 4)$.

Составим симплексную таблицу:

C_j базиса	Базис	0	C_1=1	C_2=6	C_3=0	C_4=0	C_5=0	θ
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0 0 0	x_3 x_4 x_5	6 4 4	1 1 –2	1 –2 1	1 0 0	0 1 0	0 0 1	6 – 4
	Z =	0	–1	–6	0	0	0	
0 0 6	x_3 x_4 x_2	2 12 4	3 –3 –2	0 0 1	1 0 0	0 1 0	–1 2 1	2/3 – –
	Z =	24	–13	0	0	0	6	
1 0 6	x_1 x_4 x_2	2/3 14 16/3	1 0 0	0 0 1	1/3 1 2/3	0 1 0	–1/3 1 1/3	
	Z =	98/3	0	0	13/3	0	5/3	

C_j – коэффициенты целевой функции. При x_1 коэффициент C_1=1, при x_2 – C_2=6, неизвестные x_3, x_4, x_5 отсутствуют в целевой функции, следовательно их коэффициенты равны нулю. В первом столбце таблицы записываются коэффициенты целевой функции, соответствующие базисным неизвестным второго столбца таблицы.

Алгоритм симплекс-метода

1. Записываем данную задачу в исходную симплекс-таблицу.
2. Если все элементы оценочной строки симплексной таблицы неотрицательны, то исходный план является оптимальным.
3. Если в оценочной строке содержится отрицательный элемент, над которым в таблице нет положительных элементов, то целевая функция не ограничена сверху и задача не имеет решения.
4. Если над каждым отрицательным элементом оценочной строки в соответствующем столбце есть хотя бы один положительный элемент, то можно перейти к лучшему плану.

С этой целью:

а) выбираем в исходной таблице разрешающий столбец. Это столбец, соответствующий наименьшей отрицательной оценке. Пусть это столбец, соответствующий переменной x_p;

б) выбираем разрешающую (q-ю) строку из условия

$$\frac{a_{q0}}{a_{qp}} = \Theta = \min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{ip}}\right\}, \qquad a_{ip} > 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

в) элемент a_{qp} – разрешающий;

г) элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент;

д) элементы остальных строк вычисляем по правилу «прямоугольника»;

е) элементы оценочной строки также вычисляются по правилу нахождения оценок. Эту формулу можно использовать в качестве контроля вычислений.

Правило нахождения оценок

Оценка для x_j равна сумме произведений элементов данного столбца на соответствующие элементы первого столбца (C_j-базисные) минус C_j данного столбца (коэффициент над x_j).

Например, в первой части таблицы оценка при x_2 равна

$1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 6 = -6,$

в третьей части таблицы оценка при x_3 равна

$1/3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2/3 \cdot 6 - 0 = 13/3.$

Значение целевой функции при данном базисе подсчитывается по правилу нахождения оценок. Так, в третьей части таблицы

$2/3 \cdot 1 + 14 \cdot 0 + 16/3 \cdot 6 - 0 = 98/3.$

При решении задачи на максимум опорный план будет оптимальным, если все оценки будут неотрицательными. Исходный опорный план $\overline{X} = (0;\ 0;\ 6;\ 4;\ 4)$ не будет оптимальным, т.к. оценки при x_1 и x_2 – отрицательные.

По наименьшей отрицательной оценке выбираем разрешающий столбец (столбец x_2). Можно перейти к лучшему опорному плану методом однократного замещения, если в этом столбце есть хотя бы один положительный элемент. В нашем примере это условие выполняется. Теперь необходимо выбрать разрешающую строку.

Разрешающую строку определяем по наименьшему θ, равному отношению свободных членов (a_{i0}) к соответствующим *положительным* элементам разрешающего столбца. В разрешающем столбце x_2 два положительных элемента. Находим отношения:

$$a_{10} : a_{12} = 6 : 1 = 6,$$

$$a_{30} : a_{32} = 4 : 1 = 4.$$

Наименьшим отношением является отношение $a_{30}:a_{32}$, следовательно, $a_{32}=1$ – разрешающий элемент. Неизвестное x_2 входит в базис вместо x_5. Таким образом, посредством преобразования однократного замещения мы перешли к лучшему опорному плану $\overline{X}=(0;\ 4;\ 2;\ 12;\ 0)$, при котором $Z=24$. Но этот план также не является оптимальным, т.к. при x_3 оценка отрицательная. В третьей части таблицы получен оптимальный план (нет отрицательных оценок): $\overline{X}_{\text{опт}}=(2/3;\ 16/3;\ 0;\ 14;\ 0)$, $Z_{\max}=98/3$.

Замечание 1. Оценки и значение целевой функции, начиная со второй части таблицы, следует для контроля считать и по правилу нахождения оценок, и по правилу прямоугольника.

Замечание 2. Если в столбце с отрицательной оценкой нет положительных элементов, то задача оптимального решения не имеет, а целевая функция на множестве допустимых решений неограниченна ($Z\to\infty$).

Замечание 3. Если требуется найти минимум функции

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n,$$

то можно перейти к задаче максимизации функции

$$Z_1=-Z=-c_1x_1-c_2x_2-\ldots-c_nx_n\to\max.$$

Замечание 4. Признаком альтернативного оптимума задачи является наличие нулевой оценки при свободном неизвестном оптимальной таблицы. В задаче с альтернативным оптимумом необходимо найти
опорные оптимальные планы $\overline{X}_1, \overline{X}_2,\ \ldots, \overline{X}_k$ и записать оптимальное решение в виде выпуклой линейной комбинации этих планов:

$$\overline{X}_{опт.}=t_1\overline{X}_1+t_2\overline{X}_2+\ldots+t_k\overline{X}_k,\ \text{ где } t_j\ge 0,\ \ \sum_{j=1}^{k}t_j=1.$$

Метод искусственного базиса (М-задача)

Метод искусственного базиса применяется при решении задач линейного программирования, системы ограничений которых не являются каноническими.

Рассмотрим задачу в общем виде:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=a_{i0}\quad \left(i=\overline{1,m}\right), \tag{1}$$

$$x_j\ge 0(j=\overline{1,n}),\quad a_{i0}\ge 0.$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max. \tag{2}$$

Пусть система (1) не является системой с базисом. Прибавим к левой части каждого уравнения системы (1) переменную $y_i \geq 0$, которую назовем искусственной. Система примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = a_{i0} \quad \left(i = \overline{1, m}\right). \tag{3}$$

(3) – система с базисом.

Составим новую целевую функцию:

$$T = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} y_i \to \max. \tag{4}$$

Задача нахождения максимума функции (4) при ограничениях (3) называется М-задачей.

Замечание 1. Если исходная задача решается на минимум, то целевая функция М-задачи составляется так:

$$T = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} y_i \to \min.$$

В обоих случаях М может принимать сколь угодно большое положительное значение.

Замечание 2. Искусственные неизвестные следует вводить только в те ограничения, которые не содержат базисных неизвестных.

Связь между решениями исходной и М-задачей устанавливается следующими теоремами.

Теорема 1. Если в оптимальном плане $\overline{Y} = \left(\alpha_1,\ \alpha_2, ...,\ \alpha_n,\ 0, ..., 0\right)$ М-задачи все искусственные переменные равны нулю, то соответствующее решение $\overline{X} = \left(\alpha_1,\ \alpha_2, ...,\ \alpha_n\right)$ исходной задачи также является оптимальным.

Теорема 2. Если в оптимальном плане М-задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача решения не имеет.

Алгоритм метода искусственного базиса имеет свои особенности:

1) симплексная таблица имеет две оценочные строки: М-строку и Z-строку. Оценка в М-задаче имеет вид: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\mathbf{M}$, где $M > 0$ сколь угодно большое число. Следовательно, знак оценки определяется знаком коэффициента $\boldsymbol{b}$. Число $\boldsymbol{a}$ записываем в Z-строку (первую строку оценки), а коэффициент $\boldsymbol{b}$ – в М-строку (вторую строку);

2) разрешающий столбец выбирается по оценкам М-строки;

3) если все искусственные переменные вышли из базиса, задача решается дальше обычным симплекс-методом;

4) если М-задача решена, но искусственные переменные не вышли из базиса, то исходная задача решения не имеет.

Пример 8.

$$Z = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1, \ 2, \ 3.$$

Преобразуем систему ограничений к системе уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_5 = 1. \end{cases}$$

Второе и третье ограничения не содержат базисных неизвестных, поэтому мы добавляем искусственные переменные именно в эти уравнения:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_5 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Целевая функция М-задачи:

$$T = 5x_1 + x_2 - x_3 - M\left(y_1 + y_2\right) \to \max.$$

Составляем симплексную таблицу:

C_j	Б	0	5	2	-1	0	0	θ
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0 $-M$ $-M$	x_4 y_1 y_2	5 6 1	2 3 5	1 2 3	1 1 4	1 0 0	0 0 –1	5/2 2 1/5
	Z	0	–5	–2	1	0	0	
	M	–7	–8	–5	–5	0	1	
0 $-M$ 5	x_4 y_1 x_1	23/5 27/5 1/5	0 0 1	–1/5 1/5 3/5	–3/5 –7/5 4/5	1 0 0	2/5 3/5 –1/5	23/2 27/3 –
	Z	1	0	1	5	0	–1	
	M	–27/5	0	–1/5	7/5	0	–3/5	
0 0 5	x_4 x_5 x_1	1 9 2	0 0 1	–1/3 1/3 2/3	1/5 –7/5 1/3	1 0 0	0 1 0	
	Z	10	0	4/3	8/3	0	0	

Оптимальный план: $\begin{array}{l} \overline{X}_{\text{опт}} = (2,\ 0,\ 0), \\ Z_{\max} = 10. \end{array}$

Замечание. Как только искусственные переменные выходят из базиса, элементы М-строки обращаются в ноль, и в дальнейшем М-строка из рассмотрения исключается.

Пример 9.

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 \le 1, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Вводим балансовые переменные:

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + x_3 \qquad = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 = 6. \end{cases}$$

Система не каноническая.

Составляем М-задачу:

$$T = 2x_1 + 3x_2 - My \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + x_3 \qquad\qquad = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 + y = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 4, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Решаем М-задачу симплексным методом:

C_j	Б	a_{i0}	2	3	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
0 $-M$	x_3 y	1 6	1 3	1 2	1 0	0 –1	1 2
	Z	0	–2	–3	0	0	
	M	–6	–3	–2	0	1	
2 $-M$	x_1 y	1 3	1 0	1 –1	1 –3	0 –1	
	Z	2	0	–1	2	0	
	M	–3	0	1	3	1	

М-задача решена (нет отрицательных оценок в М-строке), но в этом решении искусственная неизвестная y осталась в базисе, следовательно, исходная задача не имеет оптимального решения, так как область допустимых решений этой задачи пустая.

Двойственность

Пример 10. Рассмотрим задачу об оптимальном плане выпуска продукции: для изготовления 4 видов продукции используются 2 вида сырья. Запасы сырья и его расход на изготовление единицы каждого вида продукции даны в таблице:

Виды сырья	Запасы	Виды продукции			
		I	II	III	IV
А Б	160 900	4 –	3 4	1 9	1 12
Доход		12	5	4	1

Определить оптимальный план выпуска продукции из условия максимизации прибыли.

Математическая формулировка (модель) задачи:

Максимизировать функцию

$$Z = 12x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \le 160, & \Big| y_1 \\ \qquad 4x_2 + 9x_3 + 12x_4 \le 900, & \Big| y_2 \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,\ldots,4). \end{cases}$$

Предположим, что некоторая организация желает приобрести сырье, которым располагает предприятие. Надо оценить каждую единицу используемых ресурсов. Будем такую оценку условно называть ценой.

Обозначим соответственно через y_1 и y_2 цену единицы сырья А и Б.

Производство продукции вида I приносит предприятию доход 12 денежных единиц. При этом расходуются 4 единицы сырья А и 0 единиц сырья Б. Выручка от продажи сырья, расходуемого на единицу продукции I по ценам y_1 и y_2, составит

$$4y_1 + 0 \cdot y_2 .$$

Эта величина должна быть не меньше тех доходов, которые предприятие получит от реализации продукции вида I, следовательно,

$$4y_1 + 0 \cdot y_2 \ge 12 .$$

Аналогичные рассуждения в отношении единицы продукции вида II, III, IV приводят к следующим неравенствам:

$$\begin{cases} 3y_1 + 4\ y_2 \ge 5, \\ y_1 + 9\ y_2 \ge 4, \\ y_1 + 12y_2 \ge 1. \end{cases}$$

Общая стоимость всех запасов сырья, приобретаемого организацией, составит $W = 160y_1 + 900y_2$.

Покупатель будет стремиться купить сырье как можно дешевле, т.е. минимизировать функцию W.

Получим задачу

$$W = 160y_1 + 900y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 0 \cdot y_2 \ge 12, \\ 3y_1 + \ \ 4y_2 \ge 5, \\ y_1 + \ \ 9y_2 \ge 4, \\ y_1 + 12y_2 \ge 1, \end{cases} \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right.$$

$$y_1 \ge 0, \ \ y_2 \ge 0.$$

Получили задачу, двойственную данной. Следовательно, для стандартной задачи нужно выполнить следующие действия, для того чтобы получить ей двойственную:

1) число неизвестных в двойственной задаче равно числу ограничений в исходной;

2) неравенства в системе ограничений двойственной задачи будут противоположного смысла, чем неравенства в системе ограничений исходной задачи; сохраняется неотрицательность переменных;

3) свободные члены ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи, а коэффициенты целевой функции исходной задачи превращаются в свободные члены двойственной задачи;

4) в исходной задаче целевая функция минимизируется, а в двойственной – максимизируется.

По решению одной из задач можно сразу определить решение другой.

Решим исходную задачу симплекс-методом:

C_j	Б	0	12	5	4	1	0	0	θ
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0 0	x_5 x_6	160 900	4 0	3 4	1 9	1 12	1 0	0 1	40 –
	$Z =$	0	–12	–5	–4	–1	0	0	
12 0	x_1 x_6	40 900	1 0	3/4 4	1/4 9	1/4 12	1/4 0	0 1	160 100
	$Z =$	480	0	4	–1	2	3	0	
12 4	x_1 x_3	15 100	1 0	23/36 4/9	0 1	–1/12 4/3	1/4 0	–1/36 1/9	
	$Z =$	580	0	40/9	0	10/3	3	1/9	
							y_2	y_2	

$$Z_{\max} = 580 \text{ ден. ед. при } \overline{X} = (15,\ 0,\ 100,\ 0).$$

Следовательно, для двойственной задачи

$$W_{\min} = 580 \text{ ед. при } \overline{Y} = (3,\ 1/9).$$

Неизвестные в двойственной задаче равны соответствующим оптимальным оценкам базисных переменных исходной задачи плюс коэффициент, стоящий в таблице над соответствующей базисной переменной (C_j), т.е. $y_1 = 3 + 0 = 3$; $y_2 = 1/9 + 0 = 1/9$.

Проверим:

$$W = 160y_1 + 900y_2 \to \min .$$

При $y_1 = 3,\quad y_2 = 1/9$, $W_{\min} = 160 \cdot 3 + 900 \cdot 1/9 = 480 + 100 = 580$.

Пример 11. В двойственной задаче к основной переменные могут иметь любой знак. Составим двойственную задачу к основной:

$$Z = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \end{array} \right.$$

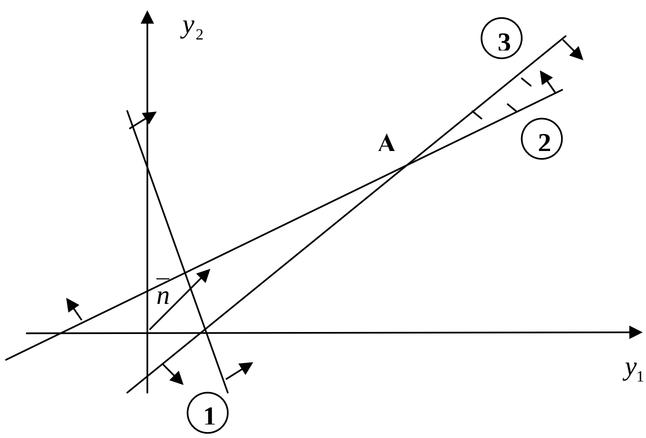
$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ 2,\ 3.$$

Двойственная задача имеет следующий вид:

$$W = 6y_1 + 4y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + \quad y_2 \ \geq 3, \\ -y_1 + 2y_2 \geq 1, \\ y_1 - \quad y_2 \ \geq 1\ . \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right.$$

Решим двойственную задачу графически



Координаты точки А дают значения неизвестных y_1 и y_2, при которых функция W принимает минимальное значение.

Найдем координаты этой точки:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 = 3, \\ \;\; y_1 - \;\; y_2 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} -y_1 + 2y_2 = 3, \\ \;\; y_1 = 1 + y_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 3, \\ y_2 = 2, \end{cases} \qquad \text{А } (3,\, 2),$$

$$W_{\min} = 6 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 18 + 8 = 26.$$

По решению двойственной задачи найдем решение исходной по второй теореме двойственности (теореме равновесия).

Подставим координаты точки $A\ (3,\, 2)$ в систему ограничений двойственной задачи

$$\begin{cases} 2y_1 + \;\; y_2 \ge 3, \\ -y_1 + 2y_2 \ge 1, \\ \;\; y_1 - \;\; y_2 \;\; \ge 1\ . \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 + 2 > 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \\ -3 + 2 \cdot 2 = 1 \;\; \Rightarrow \quad x_2 > 0, \\ 3 - 2 = 1 \qquad \Rightarrow \quad x_3 > 0. \end{cases}$$

Первое неравенство выполняется как строгое неравенство, следовательно, соответствующая переменная x_1 исходной задачи равна 0. Последние два неравенства обращаются в равенства, следовательно, соответствующие им переменные > 0.

Решая систему

$$\begin{cases} -x_1 \qquad\qquad = 0, \\ \qquad - x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad 2x_2 - x_3 = 1, \end{cases}$$

получим ответ для исходной задачи $\overline{X} = (0;\ 10;\ 16), \quad Z_{\max} = 26$.

Транспортная задача

Классическая транспортная задача – задача о наиболее экономном плане перевозок однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов из пунктов отправления в пункты назначения.

На m станциях отправления $A_1, A_2, ..., A_m$ сосредоточено соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц некоторого однородного груза. Этот груз следует перевезти в n пунктов назначения $B_1, B_2, ..., B_n$, причем в каждый из них надлежит завезти соответственно $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц этого груза.

Известны транспортные издержки c_{ij}, связанные с перевозкой единицы груза из пункта A_i в пункт B_j.

Требуется составить такой план перевозок, при котором сумма транспортных издержек окажется минимальной.

Рассмотрим закрытую модель, т. е. будем рассматривать задачи, в которых суммарные запасы грузов у поставщиков равны суммарным потребностям потребителей,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Составим математическую модель задачи.

Ограничения по ресурсам:

$$x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ (i = 1, \ 2, ..., \ m).$$

Ограничения по потребителям:

$$x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ (j = 1, \ 2, ..., \ n).$$

Условия неотрицательности:

$$x_{ij} \geq 0, \qquad (i = 1, \ 2, ..., \ m; \ j = 1, \ 2, ..., \ n).$$

Целевая функция:

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{1n}x_{1n} + ... + c_{mn}x_{mn} \to \min.$$

Транспортную задачу решают методом потенциалов, но применить его можно только в том случае, когда найден какой-то план задачи. Существует несколько методов нахождения исходного допустимого решения (плана): метод «северо-западного» угла, метод минимального тарифа.

Метод «северо-западного» угла

Не учитывая стоимости перевозки единицы груза, начинаем заполнение таблицы с удовлетворения потребностей первого потребителя B_1 за счет запаса поставщика A_1. Затем удовлетворяем потребности потребителя B_2, и так далее, пока все потребители не будут удовлетворены, а поставщики разгружены.

Метод минимального тарифа

Выбираем клетку с наименьшим тарифом c_{ij}; записываем в клетку максимально возможную поставку.

При этом могут встретиться три случая:

1) $a_i > b_j$, 2) $a_i < b_j$, 3) $a_i = b_j$.

В первом случае потребности B_j удовлетворятся полностью запасами поставщика $A_i : x_{ij} = b_j$. Столбец B_j исключаем из рассмотрения.

Во втором исключаем строку A_i, записав в клетку $A_i B_j$ груз a_i.

В третьем принимаем $x_{ij} = a_i$. Затем записываем ноль в следующую по строке или столбцу клетку и исключаем и пункт A_i и B_j.

На каждом шаге таблица сокращается, и в итоге получим допустимый план задачи.

Замечание 1. В транспортной таблице занятые клетки соответствуют базисным неизвестным, а пустые клетки – свободным неизвестным. Число базисных неизвестных в системе ограничений транспортной задачи равно *m*+*n*–1, где *m* – число поставщиков, *n* – число потребителей.

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

1. Составляем исходный опорный план.
2. Находим потенциалы потребителей и поставщиков. Для этого составляем систему уравнений

$$u_i + v_j = c_{ij},$$

где c_{ij} – тарифы занятых клеток. Уравнений в системе будет столько, сколько заполнено клеток, т. е. *m* + *n* – 1. Потенциалов *m*+*n*. Поэтому положим $u_1 = 0$, остальные неизвестные находим из уравнений.

3. Для каждой свободной клетки находим сумму потенциалов, соответствующих этой клетке. Назовем ее косвенным тарифом и обозначим $c'_{ij} = u_i + v_j$.
4. Определим разности между тарифами и косвенными тарифами

$$E_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}.$$

Эти разности называются характеристиками свободных клеток.

Если все характеристики неотрицательны, то план оптимален.

Если среди характеристик есть хотя бы одна отрицательная, то план можно улучшить. Отрицательные характеристики записывают в нижний левый угол клетки.

5. Для улучшения плана занесем поставку в ту клетку, которая соответствует наименьшей отрицательной характеристике. Для определения величины поставки отметим выбранную клетку знаком «+» и построим для нее «контур».

Для контура характерно следующее:

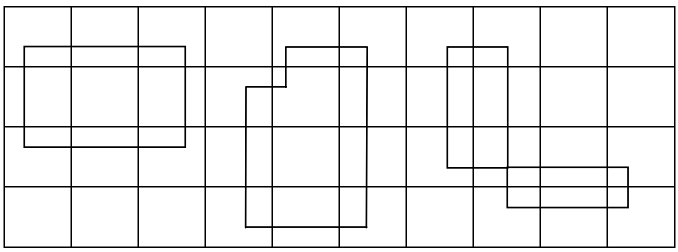
1) контур является замкнутой ломаной, состоящей из горизонтальных и вертикальных отрезков;

2) вершины контура лежат в занятых клетках, за исключением клетки, для которой строится контур;

3) отрезки контура могут пересекать занятые клетки, не являющиеся вершинами данного контура;

4) каждой свободной клетке соответствует только один контур.

Некоторые разновидности контуров показаны на рисунке.



Двигаясь по контуру от клетки, отмеченной знаком «+», поочередно проставляем в вершинах контура знаки «–» и «+».

Затем находим $Q = \min\left\{x_{ij}\right\}$, где x_{ij} – величина грузов в клетках, отмеченных знаком «–». Q и определяет величину груза, который надо занести в свободную клетку. Далее, двигаясь по контуру, прибавляем Q к величинам поставок, находящихся в «положительных» клетках, и вычитаем Q из величин поставок, находящихся в «отрицательных» клетках. Получаем новый опорный план. Проверяем его на оптимальность.

Процесс продолжается до тех пор, пока все характеристики свободных клеток не станут неотрицательными.

Замечание 2. Часто приходится решать задачи, в которых нарушено в ту или иную сторону условие равновесия, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Такие задачи называются открытыми. Чтобы привести задачу к закрытой задаче, в первом случае вводится дополнительный столбец так называемого фиктивного потребителя со спросом, равным избытку продукции

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Все тарифы этого столбца полагаем равными нулю.

Во втором случае приведение к закрытой задаче достигается введением фиктивного поставщика с объемом возможных поставок, равным недостатку продукции

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Стоимости перевозок от фиктивного поставщика ко всем потребителям также равны нулю.

<u>Пример 12</u>. Рассмотрим задачу: имеется три поставщика с определенными запасами однородного груза $a_i = (30,\ 40,\ 50)$ и четыре потребителя с известными потребностями в этом грузе $b_j = (10,\ 20,\ 20,\ 50)$. Кроме того, задана матрица тарифов

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Модель задачи открытая, так как $\sum_i a_i > \sum_j b_j$:

$$30 + 40 + 50 > 10 + 20 + 20 + 50 .$$

Поэтому вводим фиктивного потребителя с потребностью в 20 единиц груза и нулевыми тарифами.

Составляем таблицу и первоначальное распределение поставок производим по методу «северо-западного» угла:

b_j / a_i	B_1 / 10	B_2^{+} / $\boxed{20}$	B_3^{+} / 20	B_4 / 50	B_5 / 20	U_i
A_1 / 30	10 ^{3}	20 – ^{4}	0 ^{1}	^{4}	^{0} -1	0
A_2 / 40	^{2} -2	^{1} -4	20 ^{2}	20 ^{3}	^{0} -2	1
A_3 / 50	^{3}	^{2} -1	^{3}	30 ^{1}	20 ^{0}	-1
V_j	3	4	1	2	1	

Число занятых клеток должно быть равно 3 + 5 – 1 = 7, у нас получилось 6. Это получилось потому, что при заполнении клетки (1, 2) мы одновременно вычеркнули первую строку и второй столбец. Надо занести нулевую поставку в одну из клеток, расположенных рядом по строке или столбцу, то клетки (1, 2), т.е. или в (1, 3), или в (2, 2). Займем клетку (1, 3). При таком расположении поставок затраты на перевозку груза составят:

$$Z_1 = 10\cdot 3 + 20\cdot 4 + 0\cdot 1 + 20\cdot 2 + 20\cdot 3 + 30\cdot 1 + 20\cdot 0 = 240\,.$$

Вычислим потенциалы $U_i,\ i = \left(1,...,3\right),\ V_j,\ j = \left(1,...,5\right)$ исходя из того, что для занятых клеток должно выполняться равенство $U_i + V_j = c_{ij}$. Полагаем, что один из потенциалов равен нулю, например $\mathrm{U}_1 = 0$.

$$
\begin{array}{lllll}
U_1 + V_1 = c_{11} & \rightarrow & 0 \quad + V_1 \ = 3 & \rightarrow & V_1 = 3, \\
U_1 + V_2 = c_{12} & \rightarrow & 0 \quad + V_2 = 4 & \rightarrow & V_2 = 4, \\
U_1 + V_3 = c_{13} & \rightarrow & 0 \quad + V_3 \ = 1 & \rightarrow & V_3 = 1, \\
U_2 + V_3 = c_{23} & \rightarrow & U_2 + \ 1 \ = 2 & \rightarrow & U_2 = 1, \\
U_2 + V_4 = c_{24} & \rightarrow & 1 \ + V_4 \ = 3 & \rightarrow & V_4 = 2, \\
U_3 + V_4 = c_{34} & \rightarrow & U_3 + 2 \ = 1 & \rightarrow & U_3 = 1, \\
U_3 + V_5 = c_{35} & \rightarrow & -1 \quad + V_5 = 0 & \rightarrow & V_5 = 1.
\end{array}
$$

Далее вычислим характеристики для свободных клеток: $E_{ij} = c_{ij} - \left(U_i + V_j\right)$. Отрицательные характеристики заносятся в левый нижний угол клетки.

$$
\begin{array}{ll}
E_{14} = c_{14} - \left(U_1 + V_4\right) = 4 - \left(0 + 2\right) = 2, & E_{25} = c_{25} - \left(U_2 + V_5\right) = 0 - \left(1 + 1\right) = -2, \\
E_{15} = c_{15} - \left(U_1 + V_5\right) = 0 - \left(0 + 1\right) = -1, & E_{31} = c_{31} - \left(U_3 + V_1\right) = 3 - \left(-1 + 3\right) = 1, \\
E_{21} = c_{21} - \left(U_2 + V_1\right) = 2 - \left(1 + 3\right) = -2, & E_{32} = c_{32} - \left(U_3 + V_2\right) = 2 - \left(-1 + 4\right) = -1, \\
E_{22} = c_{22} - \left(U_2 + V_2\right) = 1 - \left(1 + 4\right) = -4, & E_{33} = c_{33} - \left(U_3 + V_3\right) = 3 - \left(-1 + 1\right) = 3.
\end{array}
$$

Выбираем клетку с наименьшей отрицательной характеристикой, т.е. (2,2). Строим контур с вершиной в этой клетке. Свободную клетку помечаем знаком «+», следующую по контуру – знаком «–» и т.д., меняя знаки. В свободную клетку заносится минимальная поставка из клеток, помеченных знаком «–». В нашем случае обе поставки равны 20 единицам. Поэтому мы вычитаем 20 единиц груза из поставок, стоящих в «отрицательных клетках», и прибавляем 20 единиц груза к поставкам, стоящим в « положительных клетках». Так как в «отрицательных клетках» было по 20 единиц груза, то после перераспределения поставок в одну из них запишем нулевую поставку, а другую оставим пустой. Получим следующее (лучшее) распределение:

b_j / a_i	B_1 10	B_2 20	B_3 20	B_4 50	B_5 20 +	U_i
A_1 30	10 ^{3}	^{4}	20 ^{1}	+ ^{4}	^{0} -1 −	0
A_2 40	^{2} -2	20 ^{1}	0 ^{2}	20 ^{3}	^{0} -2	1
A_3 50	^{3}	^{2}	^{3}	30 ^{1}	20 ^{0}	−1
V_j	3	0	1	2	1	

При таком распределении поставка в 20 ед. попала в клетку с характеристикой, равной –4, следовательно функция затрат улучшилась на $20 \cdot 4 = 80$ ед. Таким образом, $Z_2 = Z_1 - 80 = 240 - 80 = 160$.

Снова полагаем $U_1 = 0$ и вычисляем потенциалы. Далее, как и прежде, вычисляем характеристики для свободных клеток. Выбираем клетку с наименьшей отрицательной характеристикой, например (2, 5). Строим контур. Груз, равный min (20, 20) = 20 ед., перераспределяем по контуру. Получаем следующее распределение:

b_j / a_i	B_1 - 10	B_2 20	B_3 + 20	B_4 50	B_5 20	U_i
A_1 30	+ 10 - ^{3}	^{4}	20 - ^{1}	^{4}	^{0}	0
A_2 40	^{2} -2	20 ^{1}	0 ^{2}	^{3}	20 ^{0}	1
A_3 50	^{3} -1	^{2}	^{3}	50 ^{1}	0 ^{0}	1
V_j	3	0	1	0	−1	

При таком распределении $Z_3 = Z_2 - 20 \cdot \mathrm{E}_{25} = 160 - 20 \cdot 2 = 120$.

Находим потенциалы, характеристики для незанятых клеток и строим контур для клетки (2,1). Поставку, равную min (10,0) = 0, перераспределяем по контуру. Получаем следующее распределение:

b_j / a_i	B_1 - 10	B_2 20	B_3 20	B_4 50	B_5 + 20	U_i
A_1 30	10 ^{3} +	^{4}	20 ^{1}	^{4}	^{0} - $_{-1}$	0
A_2 40	0 ^{2}	20 ^{1}	^{2}	^{3}	20 ^{0}	-1
A_3 50	^{3}	^{2}	^{3}	50 ^{1}	0 ^{0}	-1
V_j	3	2	1	2	1	

Продолжая вышеописанный процесс нахождения потенциалов, характеристик для пустых клеток и построение контура, приходим к следующему распределению:

b_j / a_i	B_1 10	B_2 20	B_3 20	B_4 50	B_5 20	U_i
A_1 30	^{3} $_{1}$	^{4} $_{3}$	20 ^{1}	^{4} $_{3}$	10 ^{0}	0
A_2 40	10 ^{2}	20 ^{1}	^{2} $_{1}$	^{3} $_{2}$	10 ^{0}	0
A_3 50	^{3} $_{1}$	^{2} $_{1}$	^{3} $_{2}$	50 ^{1}	0 ^{0}	0
V_j	2	1	1	1	0	

Найдя для этого распределения характеристики незанятых клеток, видим, что среди них нет отрицательных характеристик, и, следовательно, мы нашли оптимальное решение, при котором функция затрат на перевозку груза достигла своего минимального значения:

$$Z_{\min} = 1\cdot 20 + 2\cdot 10 + 1\cdot 20 + 1\cdot 50 = 110.$$

Чтобы оптимальный план получить за меньшее число итераций, надо первоначальное распределение поставок проводить по методу «наименьшего тарифа», т.е. сначала заполнить клетки, соответствующие минимальным тарифам.

Контрольные вопросы

1. Задачи линейного программирования: примеры постановок.
2. Метод Жордана – Гаусса. Однократное замещение в канонических системах.
3. Графический метод.
4. Симплекс-метод.
5. Метод исскуственного базиса.
6. Двойственность.
7. Транспортная задача. Метод потенциалов.

Контрольная работа № 12 по теме “Линейное программирование”

1. Найти все опорные решения следующих систем.

1.1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3, \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -5. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

1.6 $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1, \\ 6x + 5y + 4z = -2. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} x_1 + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + x_5 = 2. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 3x_1 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 3, \\ x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 - x_3 + x_6 = 4. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_3 + x_5 = 2. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_2 - x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} x_1 - 2x_4 + x_5 = 1, \\ x_3 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 11. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} x_1 + x_4 + 3x_5 = 18, \\ x_2 + 3x_4 - x_5 = 14, \\ x_3 + x_4 - 3x_5 = 2. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} x_1 + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 3, \\ x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 - x_3 + 2x_6 = 4. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_3 + x_5 = 2. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_2 - x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} x_1 - 2x_4 + x_5 = 1, \\ x_3 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_2 + 3x_4 - x_5 = 1, \\ x_3 + x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

2. Решить графически следующие задачи линейного программирования.

2.1. $Z = x_1 + x_2 \to \max$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.2. $Z = x_1 + x_2 \to \max$

$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.3. $Z = 5x_1 - 3x_2 \to \min$

$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge -6, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ 4x_1 + 7x_2 \le 28, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.4. $Z = -x_1 - 2x_2 \to \min$

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 27, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.5. $Z=-7x_1+2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 5x_1-2x_2 \le 3, \\ x_1+x_2 \ge 1, \\ -3x_1+x_2 \le 3, \\ 2x_1+x_2 \le 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.6. $Z=x_1+x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1+2x_2 \le 4, \\ 5x_1+2x_2 \ge 10, \\ 4x_1-3x_2 \le 12, \\ 7x_1+4x_2 \le 28, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.7. $Z=2x_1+x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 7x_1+5x_2 \le 28, \\ -5x_1+4x_2 \le 7, \\ x_1+2x_2 \ge 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.8. $Z=x_1+x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1+x_2 \ge 8, \\ x_1+2x_2 \ge 6, \\ x_1-x_2 \le 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.9. $Z=7x_1-x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \ge 3, \\ 5x_1+x_2 \ge 5, \\ x_1+5x_2 \ge 4, \end{cases}$$

$x_1 \le 4,\ x_2 \le 4.$

2.10. $Z=2x_1+2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2 \ge -6, \\ x_1+x_2 \ge 3, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.11. $Z=x_1-3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \ge 3, \\ 4x_1-x_2 \ge -4, \\ 3x_1+2x_2 \le 24, \\ 5x_1-4x_2 \le 20, \\ x_2 \le 6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.12. $Z=7x_1-2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \le 5, \\ 2x_1-3x_2 \le 6, \\ 3x_1+x_2 \ge 3, \\ x_1+x_2 \ge 2, \\ x_1-x_2 \ge -3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.13. $Z=5x_1-3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \ge 6, \\ 2x_1-3x_2 \ge -6, \\ x_1-2x_2 \le 4, \\ 4x_1+7x_2 \le 28, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.14. $Z=-x_1-2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \le 14, \\ -3x_1+2x_2 \le 9, \\ 3x_1+4x_2 \le 27, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.15. $Z=x_1+x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \le 10, \\ x_1+x_2 \ge 1, \\ 2x_1+x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.16. $Z=x_1+x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1+3x_2 \le 1, \\ x_1+x_2 \le 4, \\ x_1-4x_2 \le 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.17. $Z = 5x_1 - 3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge -6, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ 4x_1 + 7x_2 \le 28, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.18. $Z = -x_1 - 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 20, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.19. $Z = -7x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.20. $Z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 10, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 20, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.21. $Z = 2x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 20, \\ -5x_1 + 4x_2 \le 7, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.22. $Z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \le 3, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.23. $Z = 7x_1 - x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ 5x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$x_1 \le 4, x_2 \le 4.$

2.24. $Z = 2x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -2, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 5, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.25. $Z = x_1 - 3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ 2x_1 - x_2 \ge -4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 5x_1 - 4x_2 \le 20, \\ x_2 \le 6, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.26. $Z = 7x_1 - 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \ge -3, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.27. $Z = 5x_1 - 3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge -6, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ 4x_1 + 7x_2 \le 28, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.28. $Z = -x_1 - 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 18, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.29. $Z = 5x_1 - 3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge -6, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ 4x_1 + 7x_2 \le 28, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2.30. $Z = -x_1 - 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9, \\ x_1 + x_2 \le 12, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3. Решить симплексным методом.

3.1. $Z = x_1 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0$.

3.2. $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0$, j = 1,...,5.

3.3. $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 \le 6, \\ x_2 \le 5, \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0.$

3.4. $Z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \le 5, \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0$.

3.5. $Z = x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,...,4.$

3.6. $Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 6, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

3.7. $Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 12, \end{cases}$$
$x_j \ge 0$, $j = 1,...,4.$

3.8. $Z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 6, \end{cases}$$
$x_j \ge 0$, $j = 1,...,5$.

3.9. $Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 0.5x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,...,4.$

3.10. $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ -2x_2 - 5x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 + 2x_3 + x_5 = 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,...,5.$

3.11. $Z = x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

3.12. $Z = 2x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

3.13. $Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ \ j = 1, 2, 3.$

3.14. $Z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 2, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 \le 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ \ j = 1,\ldots,4.$

3.15. $Z = x_2 - 2x_3 + 2x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ \ j = 1,\ldots,6.$

3.16. $Z = -x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ \ j = 1,\ldots,5.$

3.17. $Z = x_1 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0$.

3.18. $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,5.$

3.19 $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

3.20 $Z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \le 5, \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0$.

3.21. $Z = x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,4.$

3.22. $Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ \ j = 1, 2, 3.$

3.23. $Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,4.$

3.24. $Z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,5$.

3.25. $Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$

3.26. $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ -2x_2 - 5x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + x_5 = 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,5.$

3.27. $Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 6, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

3.28. $Z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 2, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 \le 3, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$

3.29. $Z = x_2 - 2x_3 + 2x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_5 = 0, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ -x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 6, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,6.$

3.30. $Z = -x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,5.$

4. Решить следующие задачи методом искусственного базиса.

4.1. $Z = x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$

4.2. $Z = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 34x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0.$

4.3. $Z = x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0.$

4.4. $Z = x_1 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 + x_2 \ge -1, \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0.$

4.5. $Z = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

4.6. $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 1, \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0.$

4.7. $Z = 4x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_2 - x_3 = 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

4.8. $Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_2 - 3x_3 = 8, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

4.9. $Z = x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 3, \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

4.10. $Z = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 3, \\ -x_1 + 4x_2 = 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

4.11. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

4.12. $Z = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 14, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

4.13. $Z = 2x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

4.14. $Z = 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \ge 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

4.15. $Z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

4.16. $Z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \ge 7, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

4.17. $Z = x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 4.$

4.18. $Z = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

4.19. $Z = x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

4.20. $Z = x_1 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 + x_2 \ge -1, \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

4.21. $Z = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

4.22. $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 1, \end{cases}$$

$x_{1,2} \geq 0.$

4.23. $Z = 4x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_2 - x_3 = 1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

4.24. $Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_2 - 3x_3 = 6, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

4.25. $Z = x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 3, \end{cases}$$

$x_{1,2} \geq 0.$

4.26. $Z = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 = 1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

4.27. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + 4x_2 \geq 4, \end{cases}$$

$x_{1,2} \geq 0.$

4.28. $Z = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

4.29. $Z = 2x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$x_{1,2} \geq 0.$

4.30. $Z = 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 2, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

5. Составить двойственную задачу к данной. Одну из задач решить и найти оптимальное решение другой задачи (по основной теореме двойственности; по теореме равновесия).

5.1. $Z = x_1 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \end{cases}$$

$x_{1,2} \geq 0.$

5.2. $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 9, \end{cases}$$

$x_{1,2} \geq 0.$

5.3. $Z = 2x_1 + 2x_2 + 12x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

5.4. $Z = 6x_1 + x_2 + 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \ge 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

5.5. $Z = x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0.$

5.6. $Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 10. \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0.$

5.7. $Z = 3x_1 + 12x_2 + 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

5.8. $Z = 3x_1 + 12x_2 + 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le -2, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 \ge 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

5.9. $Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$

5.10. $Z = -x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

5.11. $Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 + 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 5, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,6.$

5.12. $Z = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

5.13. $Z = 2x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0.$

5.14. $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 = 50, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 14, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$

5.15. $Z = -x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$

5.16. $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,5.$

5.17 $Z = x_1 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 1, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0.$

5.18 $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 3, \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0.$

5.19. $Z = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

5.20. $Z = 6x_1 + x_2 + 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \ge 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

5.21. $Z = x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0.$

5.22. $Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 1. \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0.$

5.23. $Z = 3x_1 + 12x_2 + 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

5.24. $Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le -2, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

5.25. $Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,4.$

5.26. $Z = -x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \ge 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

5.27. $Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,6.$

5.28. $Z = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

5.29. $Z = 2x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \end{cases}$$
$x_{1,2} \ge 0.$

5.30. $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,4.$

6. Решить транспортную задачу.

6.1. $a_i = (20, 30, 50)$,
$b_j = (20, 20, 40, 20)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.2. $a_i = (50, 70, 80)$,
$b_j = (50, 60, 90)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 10 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

6.3. $a_i = (30,30,40,60)$,
$b_j = (20, 40, 70, 30)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.4. $a_i = (40,50,10, 50)$,
$b_j = (20, 30, 50, 50)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.5. $a_i = (20, 50, 70)$,
$b_j = (10, 20, 30, 80)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.6. $a_i = (27, 8, 50)$,
$b_j = (15,12,13, 45)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.7. $a_i = (50, 70, 60)$,
$b_j = (40, 60, 80, 60)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.8. $a_i = (60, 80, 100)$,
$b_j = (30, 60, 90)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

6.9. $a_i = (50, 60, 80, 100)$,
$b_j = (30, 70, 100, 100)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 9 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.10. $a_i = (20, 30, 55, 25)$,
$b_j = (30, 40, 60)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.11. $a_i = (51, 110, 40, 100)$,
$b_j = (72, 48, 195)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 4 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.12. $a_i = (60, 80, 100)$,
$b_j = (40, 60, 80, 60)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.13. $a_i = (80, 75, 45)$,
$b_j = (55, 90, 40, 15)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.14. $a_i = (35, 50, 40)$,
$b_j = (25, 20, 30, 50)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & 5 \\ 12 & 13 & 10 & 11 \\ 6 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

6.15. $a_i = (30, 40, 20)$,
$b_j = (20, 30, 10, 10)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

6.16. $a_i = (13, 14, 15)$,
$b_j = (16, 19, 10, 11)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.17. $a_i = (20, 40, 50)$,
$b_j = (20, 30, 40, 20)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.18. $a_i = (50, 60, 80)$,
$b_j = (50, 70, 90)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 10 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

6.19. $a_i = (30, 40, 50, 60)$,
$b_j = (20, 40, 60, 30)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. 20. $a_i = (40,50,30, 50)$,
$b_j = (20, 40, 50, 30)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.21. $a_i = (20, 60, 70)$,
$b_j = (10, 20, 30, 80)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. 22. $a_i = (20, 30, 50)$,
$b_j = (10, 10, 20, 40)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.23. $a_i = (40, 60, 50)$,
$b_j = (40, 60, 80, 60)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.24. $a_i = (40, 70, 100)$,
$b_j = (30, 60, 90)$,
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

6.25 $a_i = (50,\ 70,\ 80,\ 90)$,

$b_j = (30,\ 70,\ 100,\ 100)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 9 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. 26 $a_i = (20,\ 30,\ 50,\ 40)$,

$b_j = (30,\ 40,\ 60)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.27. $a_i = (50,\ 90,\ 60,\ 100)$,

$b_j = (72,\ 48,\ 195)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 4 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.28. $a_i = (50,\ 70,\ 90)$,

$b_j = (40,\ 60,\ 80,\ 60)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.29. $a_i = (80,\ 70,\ 50)$,

$b_j = (55,\ 90,\ 40,\ 15)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.30. $a_i = (50,\ 20,\ 40)$,

$b_j = (25,\ 20,\ 30,\ 50)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & 5 \\ 12 & 13 & 10 & 11 \\ 6 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Список рекомендуемой литературы

1. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000. – 366 с.
2. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер [и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 471 с.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – изд. 6-е, стереотип. – М.: Высшая школа, 2001. – 479 с.
4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 т.: учеб. пособие для втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1999. – 416 с.
5. Красс М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2005. – 464 с.: ил. – (Серия «Учебное пособие»).
6. Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Дело, 2005. – 576 с.

Приложение

Таблица производных

1. $(x^m)' = mx^{m-1}$

2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

4. $(e^x)' = e^x$

5. $(a^x)' = a^x \ln a$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\mathrm{tg} x)' = \sec^2 x$

10. $(\mathrm{ctg}\ x)' = -\mathrm{cos}ec^2 x$

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\mathrm{arctg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

14. $(\mathrm{arcctg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

15. $(sh\ x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = ch\ x$

16. $(ch\ x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = sh\ x$

17. $(th\ x)' = \left(\frac{sh\ x}{ch\ x}\right)' = \frac{1}{ch^2\ x}$

18. $(cth\ x)' = \left(\frac{ch\ x}{sh\ x}\right)' = -\frac{1}{sh^2\ x}$

Таблица интегралов

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^m dx = \frac{x^m + 1}{m+1} + C$, при $m \neq -1$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

10. $\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$

11. $\int \cos ec^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x + C$

12. $\int sh\, x\, dx = ch\, x + C$

13. $\int ch\, x\, dx = sh\, x + C$

14. $\int \frac{dx}{ch^2\, x} = th\, x + C$

15. $\int \frac{dx}{sh^2\, x} = -cth\, x + C$

16. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

17. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

18. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

19. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \lambda}\right| + C$

22. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x\right| + C$

23. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|\sec x + \operatorname{tg} x\right| + C$

24. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln\left|\cos x\right| + C$

25. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln\left|\sin x\right| + C$

Основные формулы теории вероятностей

1. Биноминальное распределение:
   $P_n(X=m) = C_n^{\,m} \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, $m=\overline{0,n}$
2. Пуассоновское распределение:
   $P_n(X=m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, $\lambda=n \cdot p$
3. Гипергеометрическое распределение:
   $$P_n(X=m) = \frac{C_s^m \cdot C_{n-s}^{r-m}}{C_n^r}, \quad \begin{matrix} 0 \le m \le r \\ r \le n \\ s \le n \end{matrix}$$
4. Числовые характеристики ДСВ:
   $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$
   $Д(X) = M(X^2)-(M(X))^2$
   $\sigma(X) = \sqrt{Д(X)}$
5. Числовые характеристики НСВ:
   $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$
   $Д(X) = M(X^2)-(M(X))^2$
   $M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$
   $\sigma(X) = \sqrt{Д(X)}$

7. Нормальное распределение:
   $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$
   $P(\alpha<X<\beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$
   $P(\left|X - a\right| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{Z^2}{2}}dZ$

x	**Φ(*x*)**	*x*	**Φ(*x*)**	*x*	**Φ(*x*)**	*x*	**Φ(*x*)**
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,71	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	**Φ(*x*)**	*x*	**Φ(*x*)**	*x*	**Φ(*x*)**	*x*	**Φ(*x*)**
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4836	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,86	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4367	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Учебное издание

Первадчук В.П., Трегубова С.Н., Шумкова Д.Б.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие

Редактор и корректор *И.Н. Жеганина*

Подписано в печать 14.11.2007. Формат 70х100/16.
Усл.печ.л. 36,6. Тираж 100 экз. Заказ № 222/2007.

Издательство
Пермского государственного технического университета.
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29, к. 113.
Тел. (342) 219-80-33.