Հ.Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ա.Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Տ.Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ,
Գ.Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Հ. Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ա. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ,
Գ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ-2002

ՀՏԴ 517.93
ԳՄԴ 22.161.6
Ս 750

Հաստատված է ՀՀ կրթության և գիտության նախարարության կողմից
որպես դասագիրք բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական
ֆակուլտետների համար

Ս 750 Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ / Հ. Գ. Ղազարյան, Ա. Հ. Հովհաննիսյան, Տ. Ն. Հարությունյան, Գ. Ա. Կարապետյան.- Եր.: «Զանգակ-97», 2002.- 320 էջ:

Գիրքը նպատակ ունի ծառայելու որպես դասագիրք Հայաստանի Հանրապետությունում գործող բարձրագույն ուսումնական հաստատություններում «Դիֆերենցիալ հավասարումներ» առարկայի դասավանդման համար: Դասագրքում շարադրված նյութը համաձայնեցված է ԵՊՀ ֆիզիկամաթեմատիկական ֆակուլտետներում դասավանդվող «Դիֆերենցիալ հավասարումներ» առարկայի ծրագրերի հետ: Այն շարադրված է ուսանողներին մատչելի լեզվով: Միաժամանակ պահպանված է գիտական անհրաժեշտ մակարդակը:

Ս $\frac{1602070100}{0003(01)-2002}$ 2002 ԳՄԴ 22.161.6

ISBN 99930-2-432-5

ՆԱԽԱԲԱՆ

Այս դասագրքի նպատակն է շարադրել «Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ» առարկան այն ծավալով, որն ընդունված է Երևանի պետական համալսարանի ֆիզիկամաթեմատիկական ֆակուլտետներում: Միաժամանակ այն կարող է օգտակար լինել այլ բուհերի ուսանողներին:

Մինչև վերջին տարիները հայաստանյան բուհերի ուսանողությունը օգտվում էր հիմնականում ռուսերեն լեզվով գոյություն ունեցող դասագրքերից: Այդ դասագրքերը լավագույններից լինելով հանդերձ այժմ ավելի ու ավելի հազվադեպ են հանդիպում մեր գրադարաններում ու գրախանութներում: Որքան էլ ցավալի, բայց փաստ է, որ վերջին տասնամյակում ստեղծված աշխարհաքաղաքական իրավիճակի արդյունքում ռուսերեն լեզվով գրականությունը մեր ուսանողության համար աստիճանաբար անմատչելի է դառնում: Անկախ բերված և չբերված հանգամանքներից, կարծում ենք, որ օտար լեզուներով գրքերին զուգահեռ արժե (թեկուզ որպես այլընտրանք) դասագիրք ունենալ նաև մայրենի լեզվով:

Գիրքը բաղկացած է 7 գլխից, որոնք բաժանված են պարագրաֆների:

Համարակալված բանաձևերի հղումները տվյալ գլխի սահմաններում կատարվում են սովորական ձևով, իսկ գլխից դուրս՝ ավելացնելով գլխի համարը հռոմեական թվանշանով: Օրինակ, եթե որևէ գլխում հղում է արվում (I, 2.1) բանաձևին, ապա խոսքը վերաբերում է I գլխի 2-րդ պարագրաֆի 1-ին բանաձևին:

Հեղինակներն իրենց երախտագիտությունն են արտահայտում իրենց գործընկերներ Հ. Ներսիսյանին, Ռ. Շահբաղյանին, Ի. Խաչատրյանին և Լ. Միքայելյանին, որոնց դիտողություններն ու առաջարկությունները զգալիորեն բարելավեցին սույն ձեռնարկի սկզբնական տարբերակը:

Չնայած դրան՝ հեղինակները շնորհակալությամբ կընդունեն շահագրգիռ ընթերցողի յուրաքանչյուր դիտողություն և առաջարկ:

Այս գիրքը մենք նվիրում ենք մեր ուսուցիչ Ռաֆայել Ալեքսանդրյանի և մեր գործընկերներ Գագիկ Վիրաբյանի, Ֆելիքս Մամիկոնյանի և Ֆրիկ Մելիք-Ադամյանի անմոռաց հիշատակին:

Երևան, 5 հունիսի, 2002 թ.

Հայկ Ղազարյան, Արթուր Հովհաննիսյան,

Տիգրան Հարությունյան, Գառնիկ Կարապետյան

ԳԼՈՒԽ I

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ

§ 1. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ: ԿՈՇԻ ԽՆԴԻՐ

Դիֆերենցիալ հավասարումներ կոչվում են այնպիսի հավասարումները, որոնցում որոնելի են հանդիսանում մեկ կամ մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաները, ըստ որում, հավասարման մեջ մասնակցում են ոչ միայն անհայտ ֆունկցիաները, այլև անհրաժեշտաբար այդ ֆունկցիաների ածանցյալները:

Եթե որոնելի ֆունկցիաները մեկ փոփոխականի են, ապա հավասարումը կոչվում է *սովորական դիֆերենցիալ հավասարում*, հակառակ դեպքում՝ մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարում: Մեր դասընթացը գերազանցապես նվիրված է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությանը, սակայն վերջին գլխում կդիտարկվեն նաև առաջին կարգի մասնական ածանցյալներով հավասարումներ ևս:

Ելնելով նրանից, որ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներին բերվող բնագիտության մեծաքիվ խնդիրներում անկախ փոփոխականի դերը կատարում է ժամանակը, որն ընդունված է նշանակել լատինական t տառով, սույն դասագրքում, որպես կանոն, անկախ փոփոխականը կնշանակվի t տառով: Որոնելի ֆունկցիաները կնշանակվեն x, y, z և այլ տառերով: Որոնելի $x = x(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալները կնշանակվեն

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \ldots, x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}, \ldots \quad :$$

Նախ բերենք մի քանի նշանակումներ և հասկացություններ, որոնց հետ գործ կունենանք ողջ դասընթացում:

Դիցուք Ω-ն երկչափանի R^2 էվկլիդյան տարածության որևէ տիրույթ է (բաց, կապակցված բազմություն), իսկ $f(t, y)$-ը Ω-ում տրված անընդհատ ֆունկցիա է:

$$y' \equiv \frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1.1}$$

հավասարումը, որտեղ t-ն անկախ փոփոխականն է, իսկ որոնելին՝ $y = y(t)$ ֆունկցիան, կոչվում է ածանցյալի նկատմամբ լուծված առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարում:

Սահմանում 1.1: $y=\varphi(t)$ ֆունկցիան կոչվում է (1.1) հավասարման լուծում (r_1,r_2) միջակայքում, եթե՝

ա) $\varphi(t)$-ն (r_1,r_2)-ում դիֆերենցելի ֆունկցիա է,

բ) $(t,\varphi(t))\in\Omega$, երբ $t\in(r_1,r_2)$,

գ) $\varphi'(t)\equiv f(t,\varphi(t))$, երբ $t\in(r_1,r_2)$:

Ըստ որում, (r_1,r_2)-ը կոչվում է $y=\varphi(t)$ լուծման որոշման տիրույթ:

Սովորական դիֆերենցիալ հավասարման լուծման գոյության կամ լուծման կառուցման խնդիրները հանդիպում են ինտեգրալ հաշվի տեսությունում, երբ տրված է $f(t)$ մեկ փոփոխականի ֆունկցիան և պետք է գտնել այդ ֆունկցիայի նախնականը (անորոշ ինտեգրալը): Եթե որոնելի նախնական ֆունկցիան նշանակենք $y=y(t)$-ով, ապա նշված խնդիրը կարելի է գրել.

$$\frac{dy}{dt}=f(t) \qquad (1.2)$$

հավասարման տեսքով: Այս հավասարումը, որտեղ f-ը տրված, իսկ y-ը որոնելի ֆունկցիաներ են, սովորական դիֆերենցիալ հավասարման պարզագույն օրինակ է, որի լուծումները, ինչպես հայտնի է, տրվում են

$$y(t)=\int f(t)dt+c$$

բանաձևով, որտեղ c-ն կամայական հաստատուն է:

Բերված բանաձևից հետևում է, որ (1.2) հավասարումն ունի անվերջ թվով լուծումներ, որոնք համապատասխանում են c հաստատունի տարբեր արժեքներին: Այս երևույթը հատկանշական է դիֆերենցիալ հավասարումներին ընդհանրապես: Ի տարբերություն, օրինակ, հանրահաշվական հավասարումների, որտեղ n-րդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումն ունի ճիշտ n արմատներ (լուծումներ, հաշվի առած նաև լուծումների պատիկությունը), դիֆերենցիալ հավասարումները, ընդհանրապես ասած, ունեն անվերջ թվով լուծումներ: Եվ այդիվ դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունում հարց է դրվում ոչ թե լուծումների քանակի մասին, այլ լուծումների համախմբի նկարագրման կամ լուծումների համախմբից որոշակի պայմանների բավարարող լուծման գոյության և ապա ընտրության մասին: Նման հարցադրման պատասխանները տրվում են գոյության և միակության թեորեմներով, որոնք այս գլխում կշարադրվեն առանց ապացույցների՝ թողնելով դրանք հետագա գլուխներին:

Նկատենք, որ (1.1) հավասարման լուծման սահմանման մեջ (r_1, r_2) բազմությունը կարելի է փոխարինել $[r_1, r_2)$, $(r_1, r_2]$ կամ $[r_1, r_2]$ բազմություններից որևէ մեկով: Այստեղ անհրաժեշտ է միայն ծայրակետերում նկատի ունենալ ձախակողմյան կամ աջակողմյան ածանցյալները: Սակայն այդ սահմանման մեջ էական է, որ (r_1, r_2)-ը կապակցված բազմություն է: Այդ բանը ցուցադրելու համար դիտարկենք

$$y' = y^2 \tag{1.3}$$

հավասարումը, որի աջ մասը՝ $f(t, y) = y^2$ ֆունկցիան, որոշված է ամբողջ R^2 հարթությունում: Անմիջական տեղադրմամբ հեշտ է համոզվել, որ կամայական a իրական թվի համար

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{a-t}, \qquad -\infty < t < a$$

ֆունկցիան հանդիսանում է (1.3) հավասարման լուծում $(-\infty, a)$-ում, իսկ

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{a-t}, \qquad a < t < \infty$$

ֆունկցիան՝ (1.3)-ի լուծում $(a, +\infty)$-ում:

Սակայն $\quad \varphi(t) = \dfrac{1}{a-t} \qquad t \in X \equiv (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$

ֆունկցիան չի հանդիսանում (1.3) հավասարման լուծում, քանի որ X բազմությունը կապակցված չէ:

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ տվյալ դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների բազմության նկարագիրը էապես կախված է այն բանից, թե ինչպես են սահմանվում այդ հավասարման լուծումները:

Մինչ այժմ խոսք գնաց ածանցյալի նկատմամբ լուծված առաջին կարգի հավասարումների մասին: Ընդհանուր դեպքում առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումն ունի

$$F(t, y, y') = 0 \tag{1.4}$$

տեսքը, որտեղ F-ը երեք փոփոխականի տրված ֆունկցիա է, իսկ $y = y(t)$-ն՝ որոնելին: Երբեմն հնարավոր է լինում (1.4) առնչությունից y'-ը արտահայտել t և y փոփոխականներով և այդ դեպքում (1.4) հավասարումը բերվում է (1.1) տեսքի:

Օրինակ, եթե $F(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+2z_2+z_3$, ապա համապատասխան դիֆերենցիալ հավասարումն ունի $t^2+2y+y'=0$, կամ, որ նույնն է $y'=-2y-t^2$ տեսքը:

(1.4) հավասարման լուծումը կարելի է սահմանել այնպես, ինչպես դա արվեց (1.1) հավասարման դեպքում, սակայն երբեմն նպատակահարմար է (1.4) հավասարման (և դրա մասնավոր դեպք հանդիսացող (1.1) հավասարման) կամ նրա լուծումների գաղափարներին մոտենալ այլ կերպ:

Դիտարկենք հետևյալ օրինակը՝

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{t}{y}, \tag{1.5}$$

որտեղ $f(t,y)\equiv-\dfrac{t}{y}$ ֆունկցիան որոշված է R^2 հարթության բոլոր (t,y) կետերի համար, բացի $y=0$ ուղղից: Անմիջական տեղադրմամբ կարելի է համոզվել, որ կամայական a դրական թվի համար $y=\varphi_\pm(t)=\pm\sqrt{a-t^2}$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է (1.5) հավասարման լուծում $-\sqrt{a}<t<\sqrt{a}$ միջակայքում:

Մյուս կողմից դիտարկենք

$$\frac{dt}{dy}=-\frac{y}{t} \tag{1.5$'$}$$

հավասարումը, որտեղ $f_1(t,y)\equiv-\dfrac{y}{t}$ ֆունկցիան որոշված R^2 հարթության բոլոր այնպիսի (y,t) զույգերի համար, որոնցում $t\neq0$: Դարձյալ հեշտությամբ համոզվում ենք, որ $t=\psi_\pm(y)=\pm\sqrt{a-y^2}$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է (1.5)՛ հավասարման լուծում $-\sqrt{a}<y<\sqrt{a}$ միջակայքում:

Ակնհայտ է, որ և՛ $y=\varphi_\pm(t)$ և՛ $y=\psi_\pm(t)$ ֆունկցիաները ստացվում են $y^2+t^2=a$ առնչությունից՝ լուծելով այն y-ի կամ t-ի նկատմամբ:

Բերված օրինակները հուշում են, որ նշված դիֆերենցիալ հավասարումները երբեմն նպատակահարմար է գրել այնպիսի տեսքով, որոնցում t և y փոփոխականները մասնակցում են սիմետրիկ տեսքով:

Ամբողջ հարթության մեջ դիտարկենք t և y փոփոխականների նկատմամբ

$$ydy + tdt = 0 \qquad (1.6)$$

առնչությունը:

Օգտվելով $dF(t,y) = \dfrac{\partial F}{\partial t}dt + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy$ երկու փոփոխականի ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալի հասկացությունից (1.6)՝ առնչությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\frac{1}{2}d(y^2 + t^2) = 0:$$

Այստեղից y և t փոփոխականների միջև ստացվում է նույն

$$y^2 + t^2 = a$$

կապը, ինչ (1.5) և (1.5)՛ հավասարումների լուծման դեպքում: Ելնելով սրանից

$$ydy + tdt = 0$$

առնչությանը ևս կանվանենք դիֆերենցիալ հավասարում և այն կհասկանանք (1.5) հավասարումը, երբ $y \neq 0$ և (1.5)՛-ը, երբ $t \neq 0$: Այժմ դիֆերենցիալ հավասարման գաղափարը կարելի է ընդհանրացնել այսպես.

$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0 \qquad (1.7)$$

հավասարումը, որտեղ $M(t,y)$-ը և $N(t,y)$-ը տրված ֆունկցիաներ են ևս կանվանենք առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարում: Այն կհամարենք

$$y' = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)}$$

հավասարումը, երբ $N(t,y) \neq 0$ և կհասկանանք

$$t' = -\frac{N(t,y)}{M(t,y)}$$

հավասարումը, երբ $M(t,y) \neq 0$:

(1.7) հավասարման որոշման տիրույթ ասելով կհասկանանք հարթության այն (t,y) կետերի բազմությունը, որտեղ որոշված են $M(t,y)$ և $N(t,y)$ ֆունկցիաները և նրանք միաժամանակ զրո չեն դառնում $(M^2 + N^2 \neq 0)$:

(r_1, r_2) միջակայքում որոշված $y=y(t)$ դիֆերենցելի ֆունկցիան կանվանենք (1.7) հավասարման լուծում, եթե՝

$$M(t, y(t))dt + N(t, y(t))dy(t) \equiv 0$$

կամ, որ նույնն է՝

$$M(t, y(t)) + N(t, y(t))y'(t) \equiv 0:$$

Քանի որ (1.7) հավասարման մեջ t և y փոփոխականները հավասարազոր են, նմանապես կարելի է սահմանել (1.7) հավասարման $t=t(y)$ տեսքի լուծումը, որպես որևէ (α_1, α_2) միջակայքում որոշված այնպիսի դիֆերենցելի ֆունկցիա, որի համար

$$M(t,(y))t'(y) + N(t(y), y) \equiv 0$$

(α_1, α_2)-ում:

Հաճախ (1.7) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը հնարավոր չէ բացահայտորեն ներկայացնել $y=y(t)$ կամ $t=t(y)$ տեսքով, այդ պատճառով նպատակահարմար է ընդլայնել լուծման գաղափարը:

Դիտարկենք

$$\Phi(t, y) = 0 \tag{1.8}$$

տեսքի առնչությունը, որտեղ հարթության $Q \subset R^2$ տիրույթում որոշված $\Phi(t, y)$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է $(t_0, y_0) \in Q$ կետի որևէ $U \subset Q$ շրջակայքում, ընդ որում,

$$\begin{cases} \Phi(t_0, y_0) = 0 \\ (\Phi'_t(t_0, y_0))^2 + (\Phi'_y(t_0, y_0))^2 \neq 0 \end{cases}$$

Կասենք, որ (1.8) առնչությունից որոշվող անբացահայտ ֆունկցիան ($\Phi'_t(t_0, y_0) \neq 0$ դեպքում $t=t(y)$ ֆունկցիան y_0 կետի շրջակայքում, իսկ $\Phi'_y(t_0, y_0) \neq 0$ դեպքում $y=y(t)$ ֆունկցիան t_0 կետի շրջակայքում) (1.7) դիֆերենցիալ հավասարման անբացահայտ լուծում է, եթե

$$M(t, y)\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y} - N(t, y)\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial t} \equiv 0$$

նշված U շրջակայքում (1.8) առնչությամբ որոշվող կորի վրա:

Լուծման նման սահմանումը երբեմն հնարավորություն է ընձեռում նշելու այնպիսի լուծումներ, որոնք չէին կարող ստացվել, եթե մենք սահմանափակվեինք միայն սկզբնական սահմանումով: Ցուցադրենք ասվածը հետևյալ օրինակով, դիտարկենք

$$y' = \frac{1}{1-t} \quad \text{հավասարումը:}$$

Գրենք այն $t' = \dfrac{dt}{dy} = 1 - t$ տեսքով:

Ակնհայտ է, որ $t = \psi(y) \equiv 1$ ֆունկցիան հանդիսանում է այդ հավասարման լուծում: Այս լուծումը չէր կարող ստացվել սկզբնական սահմանումով:

Բերենք նաև բարձր կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման գաղափարը:

$$F(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1.7)$$

հավասարումը, որտեղ, $F(z_1, z_2, \cdots, z_{n+2})$-ը $n+2$ փոփոխականի տրված ֆունկցիա է, իսկ $y = y(t)$-ն որոնելին, կոչվում է n-րդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարում: Ընդհանրապես սովորական դիֆերենցիալ հավասարման կարգ կոչվում է այդ հավասարման մեջ առկա որոնելի ֆունկցիայի ածանցյալներից ամենաբարձրի կարգը: Հավասարման կարգի սահմանումից հետևում է, որ (1.7) հավասարումը n-րդ կարգի է, եթե F ֆունկցիան այնպիսին է, որ որոնելի ֆունկցիայի n-րդ ածանցյալը (վերջին փոփոխականը) մասնակցում է նրանում, (այսինքն՝ $\dfrac{\partial F}{\partial z_{n+2}} \neq 0$):

Ինչպես տեսանք վերևում, դիֆերենցիալ հավասարումը կարող է ունենալ անվերջ թվով լուծումներ: Սակայն բնական է սպասել, որ բնագիտության որոշակի խնդիրը, որը բերվում է դիֆերենցիալ հավասարման, ունենա որոշակի (միակ) լուծում: Նման որոշակիության հաճախ հնարավոր է լինում հասնել, եթե խնդիր դնել գտնելու (1.5) հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է որոշակի նախնական պայմանների: Ցուցադրենք դա ուղիղ գծով ընթացող մարմնի շարժման հավասարման օրինակով:

Դիցուք ժամանակի յուրաքանչյուր t պահին հայտնի է ուղիղ գծով շարժվող մարմնի (օրինակ ավտոմեքենայի) $v(t)$ արագությունը, որը դիտարկման A կետից t_0 սկզբնական պահին ունեցել է s_0 հեռավորությունը: Պահանջվում է որոշել մարմնի $s(t)$ հեռավորությունը A կետից ժամանակի կամայական t պահին: Խնդիրը բերվում է (1.1) տեսքի հավասարման համար խնդրին.

$$\begin{cases} s' = v(t) & (1.8) \\ s(t_0) = s_0 & (1.9) \end{cases}$$

Քանի որ ֆունկցիայի նախնականները իրարից տարբերվում են հաստատուն գումարելիով, ապա (1.8) հավասարման լուծումները (ենթադրելով, որ $v(t)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է) կտրվեն

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau + c$$

բանաձևով, որտեղ c-ն կամայական հաստատուն է: Օգտվելով (1.9) սկզբնական պայմանից, շարադրված խնդրի լուծման համար կստանանք

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau + s_0$$

արտահայտությունը:

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ եթե մեզ հետաքրքրում է (1.1) (կամ (1.7)) հավասարման կոնկրետ լուծումը, ապա պետք է դնել լրացուցիչ պայմաններ այնպես, որպեսզի բոլոր հնարավոր լուծումներից գտնել հենց այդ պայմաններին բավարարող լուծումը: Այդպիսի խնդիրներից է *Կոշու* կամ *սկզբնական խնդիրը* : Եվ այսպես (1.1) հավասարման համար Կոշու խնդիրը կայանում է (1.1) հավասարման այնպիսի $y = y(t)$ լուծման գտնելուն, որը բավարարում է

$$y(t_0) = y_0 \tag{1.10}$$

սկզբնական պայմանին:

Նշված t_0, y_0 թվերին անվանում են սկզբնական տվյալներ, իսկ (1.1), (1.10) խնդրին՝ Կոշու խնդիր:

Կոշու խնդիրը սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներին ամենաբնորոշ և բնագիտության տարբեր ոլորտներում հաճախ հանդիպող խնդիրներից է: Ինչպես տեսանք վերևում, ուղիղ գծով ընթացող մարմնի շարժման խնդիրը բերվում է (1.8), (1.9) Կոշու խնդրին:

Դիֆերենցիալ հավասարման կամ այդ հավասարմանը համապատասխանող

Կոշու խնդրի յուրաքանչյուր լուծման հետ անմիջականորեն առնչվում է այդ լուծման որոշման տիրույթի գաղափարը: Բնական ցանկություն է առաջանում հնարավորին չափ ընդլայնել տվյալ լուծման որոշման տիրույթը: Որքա՞ն է այդ հնարավոր: Պարզաբանելու նպատակով սահմանենք հետևյալ հասկացությունները.

Սահմանում 1.2. Դիցուք $y=\varphi_1(t)$-ն (1.1) հավասարման լուծումն է (α_1,α_2) որոշման տիրույթով և $y=\varphi_2(t)$-ն նույն հավասարման լուծումն է (β_1,β_2) որոշման տիրույթով: Կասենք, որ φ_1 լուծումը հանդիսանում է φ_2 լուծման շարունակություն, եթե $(\beta_1,\beta_2)\subset(\alpha_1,\alpha_2)$ և $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$, երբ $t\in(\beta_1,\beta_2)$:

(1.1) հավասարման $y=\varphi(t)$ լուծումը կանվանենք չշարունակվող լուծում (անշարունակելի լուծում, լրիվ լուծում), եթե այն հանդիսանում է (1.1) հավասարման կամայական լուծման շարունակություն:

Մենք ցույց կտանք (տես գլ.V, §6), որ որոշակի պայմանների առկայության դեպքում (1.1) հավասարումն ունի չշարունակվող լուծում: Մյուս կողմից դիֆերենցիալ հավասարմանը համապատասխանող Կոշու խնդրի հետ է առնչվում այդ խնդրի լուծման միակության գաղափարը: Պարզենք, թե ինչպես է հասկացվում այն:

Սահմանում 1.3: Կասենք, որ (1.1), (1.10) խնդրի լուծումը միակն է, եթե այն բանից, որ $y=\varphi(t)$-ն այդ խնդրի լուծում է (α_1,α_2)-ում, իսկ $y=\psi(t)$-ն լուծում է (β_1,β_2)-*ում հետևում է, որ*

$$\varphi(t)=\psi(t)\text{, երբ } t\in(\alpha_1,\alpha_2)\cap(\beta_1,\beta_2):$$

Նկատենք, որ ա) $X=(\alpha_1,\alpha_2)\cap(\beta_1,\beta_2)$ բազմությունը ոչ դատարկ $(t_0\in X)$ բաց, կապակցված բազմություն է

բ) Եթե $y=\varphi(t)$-ն և $y=\psi(t)$-ն (1.1), (1.10) նույն Կոշու խնդրի չշարունակվող լուծումներ են, ապա ըստ չշարունակվող լուծման սահմանման նրանց որոշման տիրույթները համընկնում են և միակությունը այս դեպքում (չշարունակվող լուծման դեպքում) նշանակում է, որ $\varphi(t)\equiv\psi(t)$ այդ լուծումների որոշման ողջ տիրույթում:

Հետագա շարադրանքում, եթե այդ մասին հակառակը չի ասված, լուծում ասելով մենք ի նկատի կունենանք չշարունակվող լուծումը:

Այժմ շարադրենք բնագիտական ևս մի քանի խնդիրներ, որոնք բերվում են սովորական դիֆերենցիալ հավասարման կամ հավասարումների համակարգի (տես ստորև §2):

Ռադիոակտիվ նյութի տրոհման խնդիրը : Պահանջվում է գտնել սկզբնական t_0 պահին $m_0 = m(t_0)$ սկզբնական զանգված ունեցող ռադիոակտիվ նյութի $m(t)$ զանգվածը ժամանակի կամայական t պահին:

Հայտնի է, որ ռադիոակտիվ նյութի $m(t)$ զանգվածի փոփոխման արագությունն ուղիղ համեմատական է t պահին ունեցած $m(t)$ զանգվածին, այսինքն՝ $m'(t) = -km(t)$, որտեղ k -ն տվյալ նյութը բնութագրող դրական հաստատուն է: Այսպիսով՝ հարցը բերվում է ռադիոակտիվ նյութի տրոհումը բնութագրող հավասարման համար

$$\begin{cases} m' = -km & (1.11) \\ m(t_0) = m_0 & (1.12) \end{cases}$$

Կոշու խնդրին:

Անմիջական տեղադրմամբ հեշտ է համոզվել, որ (1.11) հավասարման լուծումների ընտանիքը տրվում է

$$m(t) = c \cdot e^{-kt}$$

բանաձևով, որտեղ c -ն կամայական հաստատուն է: Լուծումների այս բազմությունից (1.12) պայմանին բավարարող լուծումը տրվում է $m(t) = m_0 \cdot e^{-k(t-t_0)}$ առնչությամբ:

Մաթեմատիկական ճոճանակի հարթ տատանման հավասարումը: Դիցուք l երկարություն ունեցող ձգված լարի մի ծայրը ամրացված է O անշարժ կետում (տե՛ս Նկ.1), իսկ մյուս A ծայրին ամրացված է m զանգված ունեցող բեռը: Բեռը (A կետը) կարող է հարթության մեջ կատարել ազատ տատանումներ O կենտրոնով և l շառավղով շրջանագծով: Բեռի B դիրքը ժամանակի t պահին բնութագրվում է AB աղեղի $s(t)$ երկարությամբ: Պահանջվում է գտնել $s(t)$ ֆունկցիան, եթե բեռի վրա ազդում է միայն $P = m \cdot g$ (g -ն ազատ անկման արագացումն է) ծանրականության ուժը:

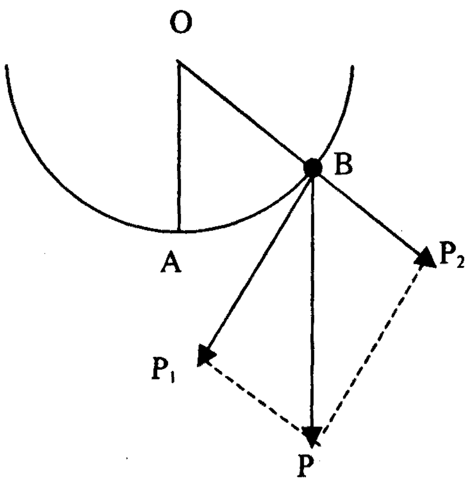
Նշանակելով $\varphi(t)$ -ով ժամանակի t պահին AOB կենտրոնական անկյան ռադիանային մեծությունը՝ կունենանք $s(t) = l \cdot \varphi(t)$: Վերլուծենք P ուժը շառավղային և շոշափողային բաղադրիչների: Շոշափողային բաղադրիչի համար կստանանք $P_1 = m \cdot g \cdot \sin\varphi$ մեծությունը, իսկ շառավղային բաղադրիչը հավասարակշռում է լարի դիմադրության ուժին: Այդ դեպքում ըստ Նյուտոնի շարժման օրենքի $s(t)$ որոնելի ֆունկցիայի համար կստացվի

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \cdot \sin\varphi$$

կամ, որ նույնն է, $\varphi(t) = \frac{1}{l} \cdot s(t)$ որոնելի ֆունկցիայի համար

$$l \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g \cdot \sin\varphi$$

դիֆերենցիալ հավասարումը, որին անվանում են մաթեմատիկական ճոճանակի տատանման հավասարում:



Նյութական կետի շարժման հավասարումը ծգողականության դաշտում: Դիցուք O սկզբնակետում տեղադրված է M անշարժ զանգվածը, որը ստեղծում է ծգողականության դաշտ, իսկ տարածության մեջ շարժվում է m զանգված ունեցող $A(x, y, z)$ կետը: Պահանջվում է որոշել A շարժվող կետի $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ կոորդինատներն արտահայտող ֆունկցիաները ժամանակի կամայական t պահին:

Ըստ ծգողականության օրենքի՝ A կետի վրա ազդում է OA հատվածով դեպի O կետը ուղղված

$$k \cdot \frac{m \cdot M}{x^2 + y^2 + z^2}$$

ձգողականության ուժը, որտեղ k -ն գրավիտացիոն հաստատունն է:

Ըստ Նյուտոնի շարժման օրենքի՝ հավասարեցնելով ձգողականության ուժի կոորդինատական բաղադրիչները և կրճատելով $m \neq 0$ հաստատունով, կստանանք սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot \dfrac{m \cdot M}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot \dfrac{m \cdot M}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -k \cdot \dfrac{m \cdot M}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases},$$

որին անվանում են ձգողականության դաշտում նյութական կետի շարժման հավասարումների համակարգ:

Ինչպես հանրահաշվական, այնպես նաև դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության հիմնական (պատմականորեն գուցե և առաջին) հարցերից մեկն է՝ տվյալ հավասարման (կամ դրան համապատասխանող խնդրի) բոլոր հնարավոր կամ գոնե մեկ լուծման գտնելու ընթացակարգի մշակումը: Հանրահաշվական հավասարումների տեսությունում հայտնի են Վիետի, Կարդանի, Ֆերրարիի բանաձևերը համապատասխանաբար 2-րդ, 3-րդ և 4-րդ աստիճանի հավասարումների բոլոր լուծումները գտնելու համար, և հայտնի է որ ավելի բարձր աստիճանի ընդհանուր հանրահաշվական հավասարումների համար նման ընթացակարգ մշակել հնարավոր չէ: Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունը այդ տեսակետից շատ ավելի բարդ ու բազմաբովանդակ է: Չնայած դիֆերենցիալ հավասարումների մի քանի մասնավոր տեսակներ հնարավոր է լուծել (ինտեգրել) անալիտիկ բանաձևերով (կվադրատուրաներով), սակայն անգամ առաջին կարգի ընդհանուր (1.1) տեսքի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար գոյություն չունեն նման ընթացակարգեր: Եվ ինչպես հանրահաշվում, այստեղ նույնպես, հավասարումների կամ դրանց համապատասխանող այս կամ այն խնդիրների լուծման համար կիրառվում են մոտավոր լուծումների գտնելու ընթացակարգեր՝ եղանակներ, որոնք բավականին պտղաբեր են և շարունակում են առաջընթաց ապրել:

Դասագրքում կբերվեն դիֆերենցիալ հավասարումների մի քանի դասեր, որոնք ինտեգրվում են տարրական եղանակներով, կամ որ նույնն է, որոնց լուծման համար կարելի է գտնել որոշակի բանաձևեր: Սակայն դասընթացում հիմնական շեշտը կդրվի ոչ թե հավասարման լուծման գտնելու, այլ այդ հավասարմանը համապատասխան խնդրի լուծման գոյության, միակության, ողորկության, կայունության և այլ հարցերի վրա:

Հետագա դատողությունները հնարավորին չափ ակնառու դարձնելու նպատակով տանք (1.1), (1.10) Կոշու խնդրի լուծման երկրաչափական մեկնաբանությունը:

Դիցուք Ω-ն երկչափ էվկլիդյան R^2 տարածության տիրույթ է, R^2-ում մտցված է (t, y) դեկարտյան կոորդինատական համակարգ, ըստ որում, t-ն որպես անկախ փոփոխական ընթանում է աբսցիսների առանցքով, իսկ y-ը որպես կախյալ փոփոխական՝ օրդինատների առանցքով: Դիֆերենցիալ հավասարումը բնութագրող $f(t, y)$ ֆունկցիան որոշված է իր արգումենտների այն (t, y) զույգերի համար, որ $(t, y) \in \Omega$: Այդ դեպքում (1.1) հավասարման կամայական $y = \varphi(t)$ լուծման գրաֆիկը մի կոր է, որն ընկած է Ω տիրույթում: Այդ կորին կամ, որ նույնն է, $y = \varphi(t)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին կանվանենք (1.1) հավասարման *ինտեգրալային կոր*: Ինչպես արդեն ասվել է, ստորև ցույց կտրվի, որ եթե, օրինակ, f-ը Ω-ում անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է, ապա Ω տիրույթի կամայական (t_0, y_0) կետով անցնում է (1.1) հավասարման մեկ և միայն մեկ ինտեգրալային կոր: Ածանցյալի երկրաչափական մեկնաբանությունից հետևում է, որ այդ ինտեգրալային կորը իր յուրաքանչյուր $(t_1, y_1) = (t_1, \varphi(t_1))$ կետում ունի շոշափող, որի անկյունային գործակիցը որոշվում է $k(t_1) = f(t_1, \varphi(t_1))$ առնչությամբ:

Այսպիսով, եթե ենթադրենք, որ յուրաքանչյուր $(t_0, y_0) \in \Omega$ կետի համար (1.1), (1.10) Կոշու խնդիրն ունի լուծում, ապա երկրաչափորեն դա կնշանակի, որ Ω տիրույթի կամայական (t_0, y_0) կետով անցնում է (1.1) հավասարման որևէ ինտեգրալային կոր, այսինքն՝ Ω տիրույթը կարելի է ծածկել (1.1) հավասարման լուծումների գրաֆիկներով (ինտեգրալային կորերով): Ըստ որում, եթե կամայական $(t_0, y_0) \in \Omega$ կետի համար Կոշու խնդրի լուծումը միակն է, ապա Ω-ի յուրաքանչյուր կետով անցնում է մեկ և միայն մեկ ինտեգրալային կոր:

Տալու համար (1.3) հավասարման երկրաչափական մեկնաբանությունը, վարվենք հետևյալ կերպ. Ω տիրույթի յուրաքանչյուր (t, y) կետով տանենք $k(t, y) = f(t, y)$ անկյունային գործակից ունեցող $l(t, y)$ ուղիղը, կստանանք *ուղղությունների դաշտ:* Դավասարման և նրա լուծումների երկրաչափական մեկնաբանությունները առնչվում են նրանով, որ (1.1) հավասարման կամայական $y = \varphi(t)$ լուծման գրաֆիկը իր յուրաքանչյուր (t, y) կետում շոշափվում է $l(t, y)$ ուղղով:

§ 2. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Մինչև այժմ խոսք գնաց միայն այնպիսի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների մասին, որոնցում անհայտ ֆունկցիան միակն է: Սակայն բնագիտության մի շարք խնդիրներ (տե՛ս, օրինակ, վերը բերված ծգողականության դաշտում նյութական կետի շարժման խնդիրը) բերվում են հավասարումների համակարգերի, որտեղ կարող են մասնակցել մեկից ավելի որոնելի ֆունկցիաներ: Չանդրադառնալով առայժմ ընդհանուր դեպքին՝ տանք դիֆերենցիալ հավասարումների նորմալ համակարգի, այսինքն՝ (1.1) հավասարման բազմաչափ հանգունակի գաղափարը:

Սահմանում 2.1: Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների *նորմալ համակարգ* կոչվում է

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{cases} \tag{2.1}$$

համակարգը, որտեղ t-ն անկախ փոփոխական է, $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t), \ldots,$ $x_n = x_n(t)$ որոնելի ֆունկցիաներ են, իսկ $f_1(t, x_1, \cdots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \cdots, x_n)$ որևէ $(n+1)$-չափանի G տիրույթում տրված ֆունկցիաներ են:

Այս համակարգի լուծում կոչվում է $\{\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$ ֆունկցիաների այն n-յակը, որն ինչ-որ (r_1, r_2) միջակայքում բավարարում է $(t, \psi_1(t), \psi_2(t), \ldots$ $\psi_n(t)) \in G$ պայմանին և $\psi_i'(t) \equiv f_i(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ $t \in (r_1, r_2)$ $(i = 1, \cdots, n)$ նույնություններին:

Կոշու խնդիրը (2.1) համակարգի համար կայանում է այդ համակարգի այնպիսի լուծման գտնելուն, որը բավարարում է

$$x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0\cdots,\ x_n(t_0)=x_n^0 \tag{2.2}$$

սկզբնական պայմանին, որտեղ $t_0,x_1^0,\cdots,x_n^0$ տրված թվեր են, այնպիսիք, որ

$$(t_0,x_1^0,\cdots,x_n^0)\in G:$$

Առանձնակի հետաքրքրություն են ներկայացնում գծային հավասարումների նորմալ համակարգերը, որտեղ որոնելի ֆունկցիաներն ու նրանց ածանցյալները մասնակցում են գծայնորեն, այսինքն՝ համակարգեր, որոնք ունեն

$$\begin{cases} x_1'=a_{11}(t)x_1+\cdots+a_{1n}(t)x_n+b_1(t)\\ x_2'=a_{21}(t)x_1+\cdots+a_{2n}(t)x_n+b_2(t)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n'=a_{n1}(t)x_1+\cdots+a_{nn}(t)x_n+b_n(t)\end{cases} \tag{2.3}$$

տեսքը, որտեղ՝ $a_{ij}(t)$ և $b_i(t)$-ն $(i,j=1,\cdots,n)$ որևէ (q_1,q_2) միջակայքում տրված ֆունկցիաներ են, ըստ որում, a_{ij} ֆունկցիաներն անվանում են (2.3) գծային համակարգի գործակիցներ, իսկ b_i ֆունկցիաները՝ ազատ անդամներ:

Կարելի է ցույց տալ, որ որոշակի պայմանների առկայության դեպքում սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների բավականին ընդհանուր համակարգեր (մասնավորապես՝ ավագ ածանցյալների նկատմամբ լուծված կանոնական համակարգ), կարելի է բերել հավասարումների նորմալ համակարգի, այսինքն՝ (2.1) տեսքի: Նման գործընթացը մենք կցուցադրենք միայն n-րդ կարգի մեկ, բարձր կարգի ածանցյալի նկատմամբ լուծված հավասարման համար:

Դիցուք ուսումնասիրվում է որոնելի ֆունկցիայի ավագ (բարձր կարգի) ածանցյալի նկատմամբ լուծված

$$y^{(n)}=f(t,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{2.4}$$

n-րդ կարգի հավասարումը, որտեղ $f(z_0,z_1,\cdots,z_n)$-ը $n+1$ չափանի որևէ G տիրույթում տրված ֆունկցիա է:

Ցույց տանք, որ մեկ որոնելի $y=y(t)$ ֆունկցիայի փոխարեն մտցնելով նոր՝ $x_1=x_1(t),\ \ x_2=x_2(t),...,x_n=x_n(t)$ որոնելի ֆունկցիաները, (2.4) հավասարումը կարելի է բերել այդ հավասարմանը համարժեք (2.1) տեսքի հավասարումների նորմալ համակարգի: Ըստ որում (2.4) հավասարումը և (2.1) հավասարումների համակարգը կանվանենք համարժեք, եթե նրանց լուծումների բազմությունների մեջ կա հետևյալ փոխմիարժեք համապատասխանությունը՝ ենթադրենք $y=\varphi(t)$ ֆունկցիան (2.4) հավասարման որևէ լուծում է, այդ դեպքում $x_1=\psi(t)$, $x_2=\psi'(t),\ldots,x_n=\psi^{(n)}(t)$ ֆունկցիաների n-յակը (2.1) համակարգի լուծում է և հակադարձը՝ եթե $\{\psi_1(t),\cdots,\psi_n(t)\}$ ֆունկցիաների n-յակը (2.1) համակարգի որևէ լուծում է, ապա $y=\psi_1(t)$ ֆունկցիան (2.4) հավասարման լուծում է:

Եվ այսպես, որոնելի $y=y(t)$ ֆունկցիայի փոխարեն մտցնենք $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ որոնելի ֆունկցիաները

$$x_1=y,\quad x_2=y'\ ,\ldots,\ x_n=y^{(n-1)} \tag{2.5}$$

բանաձևերով և դիտարկենք

$$\begin{cases} x_1'=x_2 \\ x_2'=x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}'=x_n \\ x_n'=f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases} \tag{2.6}$$

հավասարումների նորմալ համակարգը:

(2.4) հավասարման և (2.6) համակարգի համարժեքության ապացույցը ստացվում է անմիջական տեղադրմամբ, եթե հիմնավորվի, որ $y=\varphi(t)$ և $y=\psi_1(t)$ ֆունկցիաները անհրաժեշտաբար n անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են: Որ $y=\varphi(t)$-ն այդպիսին է, հետևում է (2.4) հավասարման լուծման սահմանումից, իսկ $y=\psi_1(t)$ ֆունկցիայի n անգամ դիֆերենցելի լինելը կարելի է ցույց տալ հետևյալ պարզ դատողությամբ՝ քանի որ $\{\psi_1(t),\cdots,\psi_n(t)\}$ n-յակը (2.6) համակարգի լուծում է, ապա $\psi_2(t)\equiv\psi_1'(t)$: Ըստ (2.6) համակարգի լուծման սահմանման՝ $\psi_2(t)$-ն դիֆերենցելի ֆունկցիա է, հետևաբար այդպիսին է նաև $\psi_1'(t)$ ֆունկցիան, այսինքն ψ_1-ը 2 անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Մյուս կողմից $\psi_3(t)\equiv\psi_2'(t)\equiv\psi_1''(t)$ և նույն դատողությամբ ψ_1-ը 3 անգամ դիֆերենցելի է: Շարունակելով նույն կերպ, կստանանք, որ ψ_1-ը n անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիա է:

Այսպիսով ցույց տրվեց, որ (2.4) հավասարումը համարժեք է (2.6) հավասարումների նորմալ համակարգին: Ելնելով այդ համարժեքությունից՝ տեսնենք, թե ինչպես է դրվում Կոշու խնդիրը (2.4) տեսքի հավասարման համար: Ըստ վերը ասվածի՝ (2.1) նորմալ համակարգի համար Կոշու խնդիրը այդ համակարգի այնպիսի լուծման գտնելն է, որը բավարարում է (2.2) պայմանին՝ տված $(t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$ կետի համար:

Քանի որ (2.4) հավասարումը (2.6) նորմալ համակարգին բերվում է (2.5) ձևափոխությամբ, ապա (2.4) հավասարման համար Կոշու խնդիրը կդրվի հետևյալ կերպ՝ գտնել (2.4) հավասարման այնպիսի $y = y(t)$ լուծում, որը բավարարում է

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \tag{2.7}$$

պայմաններին, որտեղ $t_0, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ տրված թվեր են, ըստ որում $(t_0, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}) \in G$: (2.7) պայմաններին կանվանենք սկզբնական (կամ Կոշու) պայմաններ:

Վերջում նկատենք, որ եթե (2.4) հավասարումը գծային է, այսինքն՝ $f(t, z_1, \cdots z_n)$ ֆունկցիան գծային է $z_1, \cdots, z_n$ փոփոխականների նկատմամբ, ապա համապատասխան (2.6) համակարգը նույնպես գծային է (որն ակնհայտ երևում է նրա տեսքից):

Նույն եղանակը, որով (2.4) հավասարումը բերվեց (2.6) նորմալ համակարգի, թույլ է տալիս հավասարումների կամայական համակարգ, լուծված բարձր կարգի ածանցյալների նկատմամբ բերել նորմալ համակարգի: Շարադրանքը չծանրաբեռնելու նպատակով այդ գործընթացը ցուցադրենք

$$\begin{cases} y^{(m)} = f(t, y, y', \cdots, y^{(m-1)}, z, z', \cdots, z^{(n-1)}) \\ z^{(n)} = g(t, y, y', \cdots, y^{(m-1)}, z, z', \cdots, z^{(n-1)}) \end{cases} \tag{2.8}$$

y և z երկու անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ երկու հավասարումներից բաղկացած համակարգի համար: Որոնելի $y = y(t)$ և $z = z(t)$ ֆունկցիաների փոխարեն մտցնելով $x_1(t), \ldots, x_m(t), x_{m+1}(t), \ldots, x_{m+n}(t)$ ֆունկցիաները $x_1 = y$, $x_2 = y', \ldots,\ x_m = y^{(m-1)},\ x_{m+1} = z,\ x_{m+2} = z', \ldots,\ x_{m+n} = z^{(n-1)}$ բանաձևերով՝ կստանանք (2.8)-ին համարժեք հետևյալ համակարգը.

$$
\begin{cases}
x_1' = x_2 \\
x_2' = x_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{m-1}' = x_m \\
x_m' = f(t, x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}) \\
x_{m+1}' = x_{m+2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{m+n+1}' = x_{m+n} \\
x_{m+n}' = g(t, x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n})
\end{cases} :
$$

Այն դիֆերենցիալ հավասարումներն ու համակարգերը, որոնք հնարավոր չէ լուծել ավագ ածանցյալների նկատմամբ, ընդհանրապես ասած, նկարագրված գործընթացով չեն բերվում հավասարումների նորմալ համակարգի: Դիֆերենցիալ հավասարման լուծելիությունը բարձր կարգի ածանցյալի նկատմամբ ավելի շուտ ընդհանուր ֆունկցիաների տեսության, քան դիֆերենցիալ հավասարումների հարց է, այդ պատճառով սույն դասընթացում նման հարցեր չեն ուսումնասիրվում:

Առավել ընդհանուր օբյեկտը, որն ուսումնասիրվելու է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների սույն դասընթացում, հավասարումների նորմալ համակարգն է:

Բարձր կարգի ածանցյալների նկատմամբ լուծված հավասարումների համակարգի կարգ կանվանենք այդ համակարգում մասնակցող հավասարումների կարգերի գումարը: Ըստ այս սահմանման՝ (2.1) համակարգի կարգը n է, իսկ (2.8)-ինը՝ $m+n$:

§ 3. ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ

Դիֆերենցիալ հավասարումների (սովորական թե մասնական ածանցյալներով) տեսության առումով առաջին ծագող հարցն է՝ ունի՞ արդյոք տվյալ հավասարումը կամ այդ հավասարմանը համապատասխանող խնդիրը գոնե մեկ լուծում: Հարցը որքան բնական, նույնքան էլ հիմնարար է, և փոքր-ինչ խորհելուց հետո պարզ է դառնում, որ չպետք է ակնկալել դյուրին պատասխաններ: Պատմականորեն այս հարցը ծագել է դիֆերենցիալ հավասարումների (ավելին՝ ինտեգրալ հաշվի) տեսության ակունքներում և բազմաթիվ ականավոր մաթեմատիկոսների ջանքերով ստացել իր որոշակի ավարտին վերջնական լուծումը: Ե՛վ տեսական, և՛, առավել ևս, գործնական (կիրառական) տեսանկյունից հաջորդ բնական ու խիստ կարևոր հարցը տվյալ հավասարմանը համապատասխանող խնդրի (Կոշու խնդիր, եզրային խնդիր և այլք) լուծման միակության հարցն է: Քանզի հատկապես բնագիտության խնդրի տեսակետից արժեքավոր (իսկ երբեմն միակ պիտանին) է այն խնդիրը, որն ունի միարժեք պատասխան:

Առաջին կարգի նորմալ հավասարումների համար այս հարցերի տվյալ շրջանակում քիչ թե շատ լիարժեք պատասխանը առաջին անգամ տրվել է Կոշու կողմից: Հետագայում Կոշու դասական թեորեմը ընդհանրացվել է ամենատարբեր ուղղություններով տարբեր մաթեմատիկոսների կողմից (Պեանո, Պիկար, Օսգուդ, Կնեզեր, Լինդելյոֆ, Պետրովսկի և այլք): Այս գլխում կբերվի Կոշու թեորեմի ձևակերպումը առաջին կարգի մեկ նորմալ հավասարման համար և դրա հանգունակը հավասարումների նորմալ համակարգի համար: Հետագայում (IV գլուխ) կձևակերպվի Կոշու թեորեմի ընդհանրացումը (Կոշու-Պիկարի թեորեմը) և կապացուցվի Պեանոյի (կամ հաջորդական մոտարկումների) եղանակով: Ելնելով այդ արդյունքի հիմնարարությունից՝ IV գլխում կբերվի դրա ևս մեկ ապացույց սեղմող արտապատկերումների (կամ անշարժ կետի) սկզբունքի կիրառմամբ՝ նախօրոք ձևակերպելով և ապացուցելով այդ սկզբունքը: Այնտեղ կապացուցվի նաև Պիկար-Լինդելյոֆի թեորեմը հավասարումների նորմալ համակարգի Կոշու խնդրի լուծման գոյության և միակության մասին:

Դիցուք ուսումնասիրվում է

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & (3.1)\\ y(t_0) = y_0 & (3.2)\end{cases}$$

Կոշու խնդիրը, որտեղ $f(t,y)$-ը Ω տիրույթում տրված ֆունկցիա է և (t_0, y_0)-ն կամայական կետ է Ω-ից:

Ձևակերպենք այս դասընթացի հիմնական արդյունքներից մեկը.

Թեորեմ I: (Կոշի) Դիցուք f և $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ֆունկցիաները որոշված և անընդհատ են Ω տիրույթում: Այդ դեպքում (3.1)-(3.2) Կոշու խնդիրը կամայական $(t_0, y_0) \in \Omega$ կետի համար ունի և այն էլ միակ լուծում:

Հավասարումների (2.1) նորմալ համակարգի համար տեղի ունի.

Թեորեմ II: Դիցուք f_i և $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1,\ldots,n)$ ֆունկցիաները որոշված և անընդհատ են $n+1$ չափանի G տիրույթում: Այդ դեպքում G տիրույթին պատկանող կամայական $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ կետի համար գոյություն ունի (2.1)-(2.2) Կոշու խնդրի մեկ և միայն մեկ լուծում:

Դեշտ է համոզվել, որ եթե (2.3) հավասարումների գծային համակարգի $a_{ij}(t)$ գործակիցները և $b_i(t)$ ազատ անդամները $(i, j = 1, \ldots, n)$ անընդհատ ֆունկցիաներ են ինչ-որ (r_1, r_2) միջակայքում, ապա

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}(t)x_1 + \cdots + a_{in}(t)x_n + b_i(t) \qquad i = 1, \ldots, n$$

ֆունկցիաները բավարարում են թեորեմ II-ի պայմաններին

$$G = \{(t, x_1, \ldots, x_n); \quad r_1 < t < r_2, \ (x_1, \ldots, x_n) \in R^n\}$$

տիրույթում և հետևաբար այս դեպքում թեորեմ II-ը կիրառելի է նաև գծային համակարգի համար: Սակայն պարզվում է, որ հավասարումների գծային համակարգն ունի մի հրաշալի առանձնահատկություն, որով այն շահեկանորեն զատվում է ընդհանուր (ոչ գծային) նորմալ համակարգերից՝ գծային համակարգի լուծումները որոշված են այնտեղ, որտեղ որոշված են համակարգի գործակիցները: Ստույգը, տեղի ունի

Թեորեմ III: Դիցուք $a_{ij}(t), b_i(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ ֆունկցիաները որոշված և անընդհատ են (r_1, r_2) միջակայքում: Այդ դեպքում կամայական $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ կետի համար G տիրույթից գոյություն ունի այն էլ միակ $\{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ ֆունկցիաների n-յակ, որը հանդիսանում է (2.3) համակարգի լուծում ողջ (r_1, r_2) միջակայքում և բավարարում է

$$\varphi_i(t_0) = x_i^0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

պայմաններին:

Չնայած ձևակերպված թեորեմների ապացույցները կբերվեն ոչ անմիջապես, այլ հետագա գլուխներում, սակայն հետագա շարադրանքում մենք անկաշկանդ կօգտվենք այդ արդյունքներից: Իսկ մինչ այդ, ցուցադրելու համար այդ պնդումների տեսական ու գործնական արժեքը (տվյալ դեպքում թեորեմ I-ի կամ թեորեմ III-ի միակությանը վերաբերող մասը), դիտարկենք մի օրինակ, որտեղ բերված արդյունքները հնարավորություն են տալիս նկարագրել տվյալ հավասարման լուծումների ողջ ընտանիքը: Դիտարկենք հետևյալ առաջին կարգի գծային հավասարումը՝

$$y' = \alpha y,$$

որտեղ α-ն տրված իրական թիվ է: Այստեղ $f(t,y) = \alpha y$ ֆունկցիան իր բոլոր ածանցյալների հետ որոշված և անընդհատ են ամբողջ $\Omega = R^2$ հարթությունում և հետևաբար բավարարված են թեորեմ I-ի (ավելին՝ թեորեմ III-ի) պայմանները: Անմիջական տեղադրմամբ կարելի է համոզվել, որ կամայական c հաստատունի համար

$$y(t) \equiv y_c(t) = c \cdot e^{\alpha t} \tag{3.4}$$

ֆունկցիան (3.3) հավասարման լուծում է ողջ թվային առանցքի վրա $(-\infty < t < \infty)$:

Ցույց տանք, որ (3.4) բանաձևով ստացվում են (3.3) հավասարման բոլոր լուծումները: Դիցուք $y = \varphi(t)$-ն (3.3) հավասարման որևէ լուծում է: Ըստ թեորեմ III-ի այն որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա: Նշանակենք $\varphi(t_0) = y_0$, որտեղ t_0-ն կամայականորեն վերցված կետ է և c_0 թիվը որոշենք $c_0 \cdot e^{\alpha t_0} = y_0$ պայմանից՝ $c_0 = y_0 \cdot e^{-\alpha t_0}$: Այդ դեպքում (3.3) հավասարման $y_{c_0}(t) = y_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ և $y = \varphi(t)$ երկու լուծումները բավարարում են միևնույն $y(t_0) = y_0$ սկզբնական պայմանին (անցնում են միևնույն (t_0, y_0) կետով) և ըստ թեորեմ I-ի (կամ թեորեմ III-ի) միակությանը վերաբերող մասի՝ համընկնում են ամբողջ թվային առանցքի վրա:

Այսիվ ցույց տրվեց, որ (3.3) հավասարման կամայական լուծում տրվում է (3.4) բանաձևով, այսինքն նկարագրվեց (3.3) հավասարման լուծումների ամբողջ ընտանիքը:

Շեշտենք, որ այս բոլորովին ոչ պարզունակ փաստը ստացվեց շնորհիվ գոյության և միակության ձևակերպված թեորեմների:

Մինչ այժմ ձևակերպված պնդումները (թեորեմ I – թեորեմ III) որոշակի պայմանների առկայության դեպքում ապահովում էին ինչպես Կոշու խնդրի լուծման գոյությունը, այնպես նաև միակությունը: Բնական է սպասել, որ եթե խնդիրն առարկա է միայն լուծման գոյության կամ միայն միակության հարցը, ապա թուլացնելով համապատասխան սահմանափակումները, հնարավոր է ստանալ ավելի ընդհանուր արդյունքներ: Եվ իրոք, տեղի ունեն

Թեորեմ IV: (Պեանո) Եթե $f(t,y)$ ֆունկցիան անընդհատ և սահմանափակ է Ω տիրույթում, ապա Ω տիրույթի կամայական (t_0, y_0) կետով անցնում է (3.1) հավասարման գոնե մեկ ինտեգրալային կոր: Կամ, որ նույնն է, գոյություն ունի գոնե մեկ $y=\varphi(t)$ ֆունկցիա, որը (3.1)-(3.2) խնդրի լուծում է:

Պեանոյի թեորեմը բավականին ընդհանուր դեպքում պատասխան է տալիս Կոշու խնդրի լուծման գոյության մասին հարցին, սակայն ոչինչ չի ասում այդ խնդրի լուծման միակության մասին: Եվ դա պատահական չէ: Դիտարկենք հետևյալ օրինակը, որը ցույց կտա, որ Պեանոյի թեորեմի պայմաններն ընդհանրապես ասած չեն ապահովում Կոշու խնդրի լուծման միակությունը: Դիցուք ուսումնասիրվում է

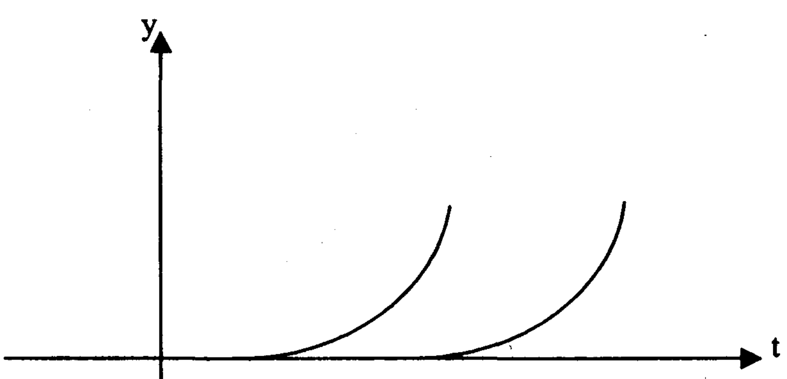
$$y' = 2\cdot|y|^{1/2}, \qquad y(0)=0$$

Կոշու խնդիրը, որտեղ $f(t,y)=2\cdot|y|^{1/2}$ ֆունկցիան ակնհայտորեն բավարարում է Պեանոյի թեորեմի պայմաններին (t,y) հարթության կամայական R շառավղով և (0,0) կենտրոնով $\Omega \equiv S(R)$ շրջանում:

Այս խնդիրն ունի անվերջ թվով լուծումներ: Իրոք $y(t)\equiv 0$ լուծման հետ միասին լուծումներ են նաև a դրական պարամետրից կախված

$$y_a(t)=\begin{cases}0, & t\le a\\ (t-a)^2, & t\ge a\end{cases}$$

ֆունկցիաները (տե՛ս նկ. 2)



Նկ. 2

և այսպես $y' = 2\cdot|y|^{1/2}$ հավասարումն ունի (0,0) կետով անցնող անվերջ թվով լուծումներ, որոնք համապատասխանում են a պարամետրի տարբեր արժեքներին:

Այս իրավիճակը հատկանշական է դիֆերենցիալ հավասարումների համար ընդհանրապես: Պարզվում է, որ (Կնեզերի թեորեմ) եթե (3.1)-(3.2) Կոշու խնդիրն ունի մեկից ավելի լուծում, ապա այն հարկադրաբար ունի անվերջ թվով (կոնտինուում) լուծումներ:

Հետևյալ պնդումն արդեն պատասխան է տալիս Կոշու խնդրի լուծման միակության մասին հարցին (անտեսելով լուծման գոյության հարցը):

Թեորեմ V: (Օսգուդ) Դիցուք գոյություն ունի դրական կիսառանցքի վրա որոշված որևէ $F(s)$ անընդհատ, դրական ֆունկցիա այնպիսին, որ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{ds}{F(s)} = \infty,$$

ըստ որում Ω տիրույթի կամայական (t, y_1) և (t, y_2) զույգի համար

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le F(|y_1 - y_2|):$$

Այդ դեպքում Ω տիրույթի կամայական (t_0, y_0) կետով անցնում է (3.1) հավասարման ոչ ավելի քան մեկ ինտեգրալային կոր:

Թեորեմ V-ում բերված պայմաններին բավարարող $F(s)$ ֆունկցիայի օրինակ կարող է ծառայել $F(s) = L\cdot s$ ֆունկցիան, որտեղ L-ը որևէ դրական թիվ է: Այս մասնավոր դեպքում (այսինքն, երբ f ֆունկցիան բավարարում է $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L\cdot|y_1 - y_2|$ պայմանին) ասում են, որ $f(t,y)$ ֆունկցիան Ω-ում բավարարում է Լիպշիցի պայմանին ըստ y փոփոխականի, հավասարաչափ t փոփոխականի նկատմամբ (L լիպշիցյան հաստատունով):

Կիրառելով Լագրանժի (միջին արժեքի մասին) թեորեմը՝ հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ եթե $f(t,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է և ունի անընդհատ ու սահմանափակ մասնական ածանցյալ ըստ y փոփոխականի Ω տիրույթում, ապա այն Ω-ում բավարարում է Լիպշիցի պայմանին ըստ y փոփոխականի, այսինքն՝ այս դեպքում F ֆունկցիայի օրինակ կարող է ծառայել հենց $F(s) = L\cdot s$ ֆունկցիան, որտեղ

$$L = \sup_{(t,y)\in\Omega}\left|\frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\right|$$

Թեորեմ V-ում բերված պայմաններին բավարարող $F(s)$ ֆունկցիայի այլ օրինակներ կարող են հանդիսանալ

$$L\cdot s\cdot|\ln s|,\quad L\cdot s\cdot|\ln s|\cdot\ln|\ln s|,\quad L\cdot s\cdot|\ln s|\cdot\ln|\ln s|\cdot\ln|\ln|\ln s||$$

ֆունկցիաները:

§ 4. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Մինչ այժմ թե լռելյայն համաձայնությամբ, թե՛ այդ մասին բացահայտորեն ասելով, մենք ուսումնասիրել ենք միայն իրական դիֆերենցիալ հավասարումները և դրանց իրական (իրականարժեք) լուծումները: Սակայն որոշ դեպքերում հավասարման մեջ կարող են մասնակցել ֆունկցիաներ, որոնք չնայած իրական փոփոխականի են, բայց ընդունում են կոմպլեքս արժեքներ, ինչպես նաև կոմպլեքս պարամետրեր: Նման (և ոչ միայն այդ) դեպքերում հավասարումների լուծումները նույնպես կարող են լինել կոմպլեքսարժեք ֆունկցիաներ: Այս պարագայում արդեն որպես կանոն սկզբում գտնում են կոմպլեքս լուծումները և ապա, անհրաժեշտության դեպքում, այդ լուծումներից անջատում իրական լուծումները:

Նկարագրված իրավիճակը հատկանշական է հատկապես հաստատուն գործակիցներով գծային հավասարումների համար, որոնց լուծումները բերվում են n-րդ կարգի $L(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$ տեսքի հանրահաշվական հավասարումների լուծմանը (տես §3.2): Հանրահաշվի հիմնական թեորեմը, որը պնդում է, որ n-րդ կարգի բազմանդամն ունի n արմատ, ներառյալ դրանց պատիկությունը, ճիշտ է կոմպլեքս թվերի դաշտում և այդիվ մենք ստիպված ենք $L(\lambda)$ բազմանդամը դիտարկել որպես λ կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիա: Ավելին՝ գտնելու համար n-րդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծումները (ունենալով այդ հավասարմանը համապատասխանող $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամի (կոմպլեքս) արմատները) մենք բախվում ենք $L(\lambda)$ բազմանդամի ըստ λ կոմպլեքս փոփոխականի ածանցյալի գաղափարի հետ:

Այսպիսով՝ մեզ անհրաժեշտ է մտցնել մի կողմից՝ իրական փոփոխականի կոմպլեքսարժեք ֆունկցիայի և դրա ըստ իրական փոփոխականի ածանցյալի, մյուս կողմից՝ կոմպլեքս փոփոխականի բազմանդամի ըստ այդ կոմպլեքս փոփոխականի ածանցյալի գաղափարները:

Ինչ վերաբերում է կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիայի (մասնավորաբար բազմանդամի) ըստ կոմպլեքս փոփոխականի ածանցյալի գաղափարին, ապա այն մաթեմատիկական անալիզի կարևորագույն հասկացություններից է և ուսումնասիրության հատուկ բնագավառ, որը չի հանդիսանում դիֆերենցիալ հավասարումների բաղկացուցիչ մասը:

Հնարավորություն (և ըստ էության անհրաժեշտություն) չունենալով խորանալու այդ բնագավառը, միայն նշենք, որ ածանցյալը ըստ կոմպլեքս փոփոխականի ենթարկվում է նույն կանոններին, ինչ ածանցյալն ըստ իրական փոփոխականի: Մասնավորաբար λ^n աստիճանային ֆունկցիայի ածանցյալը $n\cdot\lambda^{n-1}$ է, $e^{a\lambda}$ ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալը (ըստ λ կոմպլեքս փոփոխականի) $a\cdot e^{a\cdot\lambda}$-ն է և այլն:

Մյուս կողմից՝ մենք կմտցնենք իրական փոփոխականի կոմպլեքսարժեք ֆունկցիայի և դրա (ըստ իրական փոփոխականի) ածանցյալի հասկացությունը, շեշտադրելով այն նվազագույնը, որն անհրաժեշտ է հետագա նյութի շարադրման համար:

Եվ այսպես, կասենք, որ (r_1, r_2) միջակայքում տրված է t իրական փոփոխականի $\chi(t)$ կոմպլեքս արժեք ֆունկցիան, եթե կամայական $t\in(r_1,r_2)$ արժեքին համապատասխանեցված է $\chi(t)=\varphi(t)+i\cdot\psi(t)$ կոմպլեքս թիվը, որտեղ $\varphi(t)$-ն և $\psi(t)$-ն իրական փոփոխականի իրական ֆունկցիաներ են, ըստ որում, $\varphi(t)$-ն կոչվում է $\chi(t)$ կոմպլեքս ֆունկցիայի իրական մաս, իսկ $\psi(t)$-ն՝ կեղծ մաս:

$\chi(t)$ կոմպլեքս ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ (դիֆերենցելի), եթե անընդհատ են (դիֆերենցելի են) φ և ψ ֆունկցիաները, ըստ որում, $\chi(t)$ ֆունկցիայի $\chi'(t)$ ածանցյալը որոշվում է $\chi'(t)=\varphi'(t)+i\psi'(t)$ բանաձևով:

Անմիջական ստուգմամբ կարելի է համոզվել, որ կոմպլեքս ֆունկցիայի ածանցյալի համար ճիշտ են իրական ֆունկցիայի ածանցյալին հատուկ գումարի, արտադրյալի, քանորդի և այլ կանոնները:

Դիցուք ուսումնասիրվում է

$$z'=h(t,z) \tag{4.1}$$

նորմալ դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ $h(t,z)$ կոմպլեքս ֆունկցիան որոշված է t իրական և z կոմպլեքս փոփոխականների համար: Այս դեպքում բնական է հարց դնել (4.1) հավասարման կոմպլեքս լուծումների որոշման մասին: Ըստ որում, $z=\chi(t)$ կոմպլեքս ֆունկցիան կանվանենք (4.1) հավասարման լուծում (r_1, r_2) միջակայքում, եթե

$$\chi'(t) \equiv h(t, \chi(t)) \qquad t \in (r_1, r_2): \tag{4.2}$$

Նույն կերպ կարելի է մտցնել կոմպլեքս դիֆերենցիալ հավասարումների նորմալ համակարգի, ինչպես նաև բարձր կարգի ածանցյալի նկատմամբ լուծված բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարման և դրանց լուծումների գաղափարները: Ըստ որում (և դա է այստեղ հիմնականը), բոլոր նշված դեպքերում գոյության կամ միակության թեորեմները կունենան նույն ձևակերպումները, ինչ իրական հավասարումների համար: Ձևակերպենք, օրինակ, գոյության և միակության թեորեմը

$$z^{(n)} = h(t, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) \tag{4.3}$$

բարձր կարգի ածանցյալի նկատմամբ լուծված n-րդ կարգի հավասարման համար:

Թեորեմ VI: Դիցուք h ֆունկցիան բազմանդամ է ըստ $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$ կոմպլեքս փոփոխականների[1], որի գործակիցները t իրական փոփոխականի անընդհատ ֆունկցիաներ են (q_1, q_2) միջակայքում:

Դիցուք $t_0 \in (q_1, q_2)$, իսկ $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ թվերը կամայական են (իրական կամ կոմպլեքս): Այդ դեպքում գոյություն ունի $z=\chi(t)$ ֆունկցիա, որն ինչ-որ $(r_1, r_2) \subseteq (q_1, q_2)$ միջակայքում հանդիսանում է (4.3) հավասարման լուծում և բավարարում է

$$\chi(t_0) = b_0, \qquad \chi'(t_0) = b_1, \ldots, \chi^{(n-1)}(t_0) = b_{n-1} \tag{4.4}$$

սկզբնական պայմաններին:

Այդ լուծումը միակն է: Այսինքն (4.4) պայմաններին բավարարող (4.3) հավասարման կամայական երկու լուծումներ համընկնում են իրենց որոշման տիրույթի ընդհանուր մասում:

Ապացույցը բերվում է իրական դեպքի համապատասխան II թեորեմի ապացույցին, եթե z և h կոմպլեքս ֆունկցիաները ներկայացնենք $z(t) = x(t) + iy(t)$

---

[1] Այդպիսին է, օրինակ, $z^{(n)} + a_1(t) z^{(n-1)} + \cdots + a_0(t) = f(t)$ n-րդ կարգի գծային հավասարումը համապատասխանող h ֆունկցիան, եթե այն գրենք $z^{(n)} = h(t, z, \ldots, z^{(n-1)}) \equiv f(t) - a_1 z^{(n-1)} - \cdots - a_0$ տեսքով:

$$h(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t), y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) +$$
$$+ ig(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t), y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

տեսքերով, որտեղ x, y, f, g ֆունկցիաներն արդեն իրականարժեք են: Այդ դեպքում (4.3) հավասարումը կբերվի

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t), y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y^{(n)}(t) = g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t), y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \end{cases}$$

բարձր կարգի ածանցյալների նկատմամբ լուծված x և y անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ (2.8) տեսքի հավասարումների նորմալ համակարգին:

Մնում է կիրառել II թեորեմը:

ԳԼՈՒԽ II

ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՏԻՊԻ ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Այս գլուխը նվիրված է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների մի քանի դասերի ուսումնասիրությանը: Յավասարումների ուսումնասիրվող դասերը մի կողմից՝ պատմականորեն սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության ակունքներից են բխում, մյուս կողմից՝ այդ տեսության ամենալիարժեք ուսումնասիրված ու վերջնական արդյունքներով հագեցած մասն են կազմում: Մասնավորաբար հավասարումների հետազոտման տեսակետից, համարյա յուրաքանչյուրի համար, կապացուցվեն գոյության և միակության թեորեմներ, որոնք այս կամ այն առումով չեն կարող ստացվել որպես մասնավոր դեպքեր ընդհանուր տեսությունից: Սակայն այս գլխում մենք շեշտը կդնենք ոչ այնքան գոյության կամ միակության հարցերի, որքան հավասարման տվյալ տեսակի համար լուծման (ինտեգրման) ընթացակարգի կառուցման ու դրա գործնական իրականացման վրա:

§ 1. ԱՆՋԱՏՎՈՂ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

$y' = f(t,y)$ դիֆերենցիալ հավասարումը կանվանենք անջատվող փոփոխականներով հավասարում, եթե $f(t,y)$ երկու փոփոխականի ֆունկցիան հանդես է գալիս, որպես t և y մի փոփոխականի երկու ֆունկցիաների արտադրյալ՝ $f(t,y) = h(t)\cdot g(y)$:

Այսպիսով՝ սույն պարագրաֆում մենք կուսումնասիրենք

$$y' = h(t)\cdot g(y) \tag{1.1}$$

տեսքի հավասարումները:

Թեորեմ 1.1: Դիցուք $h(t)$ ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է (a,b)-ում, իսկ $g(y)$ ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է (c,d)-ում և $g(y) \neq 0$ (c,d)-ում: Այդ դեպքում Ու$=\{(t,y),\ a<t<b,\ c<y<d\ \}$ ուղղանկյան ցանկացած (t_0, y_0) կետով անցնում է (1,1) հավասարման մեկ և միայն մեկ ինտեգրալային կոր, կամ, որ նույնն է, յուրաքանչյուր $(t_0, y_0)\in$ Ու կետի համար

$$
\begin{cases} y' = h(t)g(y) & (1.1) \\ y(t_0) = y_0 & (1.2) \end{cases}
$$

Կոշու խնդիրն ունի և այն էլ միակ լուծում:

Ապացույց: Սկզբում ենթադրենք, որ գոյություն ունի այնպիսի $y = \varphi(t)$ ֆունկցիա, որն հանդիսանում է դիտարկվող Կոշու խնդրի լուծում, գտնենք նրա տեսքը:

Եվ այսպես, ենթադրենք $y = \varphi(t)$ դիֆերենցելի ֆունկցիան (1.1),(1,2) խնդրի լուծումն է՝ որոշված ողջ (a,b) միջակայքում.

$$
\begin{cases} \varphi'(t) \equiv h(t)g(\varphi(x)) \quad t \in (a,b) \\ \varphi(t_0) = y_0 \end{cases}
$$

Քանի որ ըստ պայմանի $g(\varphi(t)) \neq 0$, ապա այստեղից կունենանք

$$
\frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} \equiv h(t)
$$

նույնությունը, որն ինտեգրելով (t_0,t) միջակայքում $(t \in (a,b))$՝ կստանանք.

$$
\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(\tau)d\tau}{g(\varphi(\tau))} \equiv \int_{t_0}^{t} h(\tau)d\tau.
$$

Ստացված ինտեգրալային նույնության ձախ մասում կատարենք փոփոխականի փոխարինում, նշանակելով $\varphi(t) = s$: Ըստ որոշյալ ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինման կանոնի՝ ստացված ինտեգրալի սահմանները կլինեն $\varphi(t_0)$ -ից $\varphi(t)$ և քանի որ $\varphi(t_0) = y_0$, ապա կունենանք՝

$$
\int_{y_0}^{\varphi(t)} \frac{ds}{g(s)} \equiv \int_{t_0}^{t} h(\tau)d\tau.
$$

Եթե այժմ $G(y)$-ը և $H(t)$-ն համապատասխանաբար $\dfrac{1}{g(y)}$ և $h(t)$ ֆունկցիաների նախնականներն են, ապա ըստ Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի՝ վերջին նույնությունը կընդունի հետևյալ տեսքը,

$$G(\varphi(t)) - G(y_0) \equiv H(t) - H(t_0)$$

կամ՝

$$G(\varphi(t)) \equiv H(t) + G(y_0) - H(t_0): \tag{1.3}$$

Որպեսզի այստեղից ստանանք լուծում հանդիսացող $\varphi(t)$ ֆունկցիայի տեսքը (ներկայացումը), ցույց տանք, որ $G(y)$ ֆունկցիան հակադարձելի է (c,d)-ում: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ $G(y)$ ֆունկցիան (c,d)-ում անընդհատ դիֆերենցելի է և մոնոտոն: Որ $G(y)$-ը անընդհատ դիֆերենցելի է (c,d)-ում, բխում է այն բանից, որ G-ն $\dfrac{1}{g(y)}$ անընդհատ ֆունկցիայի նախնականն է:

Ցույց տալու համար, որ G ֆունկցիան մոնոտոն է (c,d)-ում բավական է համոզվել, որ $G'(y)$ ֆունկցիան (c,d)-ում պահպանում է նշանը: Դիցուք դա այդպես չէ, այսինքն գոյություն ունեն (c,d)-ին պատկանող y_1 և y_2 կետեր այնպիսիք, որ $G'(y_1)\cdot G'(y_2)<0$: Քանի որ $G'(y)=\dfrac{1}{g(y)}$, ապա ասվածը նշանակում է, որ $[y_1,y_2]$ միջակայքում անընդհատ $G'(y)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի ծայրակետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, հետևաբար ըստ Բոլցանո-Կոշու առաջին թեորեմի գոյություն ունի $\gamma\in(y_1,y_2)$ կետ, այնպիսին, որ $G'(\gamma)=\dfrac{1}{g(\gamma)}=0$, որը հնարավոր չէ: Ուրեմն $G'(y)$ ֆունկցիան (c,d)-ում պահպանում է իր նշանը, այսինքն՝ $G(y)$-ը անընդհատ դիֆերենցելի և մոնոտոն է (c,d)-ում: Հետևաբար գոյություն ունի G^{-1} հակադարձ ֆունկցիան:

Կիրառելով (1.3) նույնության երկու մասում G^{-1} ֆունկցիան՝ կունենանք $\varphi(t)$ ֆունկցիայի համար հետևյալ ներկայացումը՝

$$\varphi(t) = G^{-1}[H(t) + G(y_0) - H(t_0)] \tag{1.4}$$

Այսպիսով՝ ենթադրելով, որ (1.1), (1.2) խնդիրն ունի լուծում, մենք տեսանք, որ այն ներկայացվում է (1.4) բանաձևով: Այժմ ցույց տանք, որ այս ընթացակարգով ստացված և (1.4) բանաձևով տրվող φ ֆունկցիան հանդիսանում է (1.1), (1.2) խնդրի լուծում: Դրա համար, օգտվելով հակադարձ և բարդ ֆունկցիաների ածանցման կանոնից, ածանցենք (1.4) նույնությունն ըստ t-ի, հաշվի առնելով G և H ֆունկցիաների տեսքերը կունենանք.

$$\varphi'(t) = \left(G^{-1}(H(t)+G(y_0)-H(t_0))\right)'_t = \left(G^{-1}(H(t)+G(y_0)-H(t_0))\right)' \cdot$$

$$\cdot\left(H(t)+G(y_0)-H(t_0)\right)'_t = \frac{1}{(G(\varphi(t)))'}\cdot H'(t) = g(\varphi(t))\cdot h(t):$$

Ցույց տալու համար, որ (1.4) բանաձևով որոշվող φ ֆունկցիան (1.1),(1.2) խնդրի միակ լուծումն է, ենթադրենք, որ $y=\psi(t)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (1.1),(1.2) խնդրի որևէ լուծում: Կատարելով նույն դատողությունները կստանանք, որ ψ ֆունկցիան ևս ներկայացվում է (1.4) տեսքով, այսինքն $\psi(t)\equiv\varphi(t)$ $t\in(a,b)$: Թեորեմն ապացուցված է:

Եթե այժմ I կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը գրված է դիֆերենցիալների միջոցով (տես գլ. I (1.7)), ապա այն կդառնա անջատվող փոփոխականներով հավասարում, եթե ունի

$$M_1(t)N_1(y)dt + M_2(t)N_2(y)dy = 0$$

տեսքը, որտեղ M_1, M_2, N_1, N_2-ը նախապես տրված ֆունկցիաներ են: Դրա համար բավական է հավասարման երկու մասերը բաժանել $M_2(t)\cdot N_1(y)$ արտադրյալի վրա:

Օրինակ: Լուծենք

$$t(y+3)dt-(t^2-4)dy=0$$

հավասարումը: Յավասարման երկու մասերը բաժանենք $(t^2-4)\cdot(y+3)$ արտադրյալի վրա: $t^2-4=0$ և $y+3=0$ ուղիղներից դուրս դիտարկվող հավասարումը համարժեք է

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t}{t^2-4}\cdot(y+3)$$

հավասարմանը, որի լուծումները կգրվեն

$$\frac{1}{2}\ln\left|t^2-4\right| = \ln\left|y+3\right| + C\ , \qquad C\in R^1$$

անբացահայտ առնչությամբ:

Անմիջական տեղադրությամբ համոզվում ենք, որ $t=\pm 2$, $y=-3$ ուղիղները ևս դիտարկվող հավասարման լուծումներ են: Այսպիսով՝ հավասարման լուծումների բազմությունը տրվում է

$$\frac{1}{2}\ln\left|t^2-4\right|=\ln\left|y+3\right|+C,\quad C\in R^1,\quad t=\pm 2,\quad y=-3$$

առնչություններով:

Դիցուք այժմ (c,d) միջակայքի որևէ γ կետում $g(\gamma)=0$: Դիտարկենք

$$y'=f(x)g(y) \tag{1.7}$$

$$y(x_0)=\gamma,\quad x_0\in(a,b) \tag{1.8}$$

Կոշու խնդիրը:

Ակնհայտ է, որ այս Կոշու խնդրի լուծում է հանդիսանում $y(x)\equiv\gamma$ ֆունկցիան: Պարզվում է, որ* (1.7),(1.8) Կոշու խնդրի լուծման միակությունը կապված է $\int\limits_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon}\frac{1}{g(y)}dy$ և $\int\limits_{\gamma-\varepsilon}^{\gamma}\frac{1}{g(y)}dy$ անիսկական ինտեգրալների զուգամիտության հետ: Եթե նշված ինտեգրալներից յուրաքանչյուրը տարամետ է, ապա (1.7),(1.8) Կոշու խնդրի լուծումը միակն է, իսկ եթե նշված ինտեգրալներից գոնե մեկը զուգամետ է, ապա (1.7),(1.8) Կոշու խնդիրն ունի անվերջ թվով լուծումներ:

§ 2. ՀԱՄԱՍԵՌ ԵՎ ՀԱՄԱՍԵՌԻ ԲԵՐՎՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Ինչպես հայտնի է Ω հարթ տիրույթում որոշված $F(t,y)$ երկու փոփոխականի ֆունկցիան կոչվում է (զրո կարգի) համասեռ Ω-ում, եթե կամայական $\lambda>0$ թվի համար $F(\lambda t,\lambda y)=F(t,y),\ (t,y)\in\Omega$: Սրանից ելնելով բնական է

$$y'=f\left(\frac{y}{t}\right) \tag{2.1}$$

տեսքի հավասարումն անվանել համասեռ հավասարում: Այս պարագրաֆում մենք կուսումնասիրենք (2.1) տեսքի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումները: Ցույց կտրվի, որ փոփոխականների պարզագույն փոխարինմամբ (2.1) հավասարումը կարելի է բերել նախորդ պարագրաֆում ուսումնասիրված անջատվող փոփոխական-

---

* Տես И.Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений:

ներով հավասարման և հետևաբար կարելի է լուծել (2.1) հավասարմանը համապատասխանող Կոշու խնդիրը: Ստույգը, տեղի ունի հետևյալը`

Թեորեմ 2.1: Դիցուք $f(u)$ ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է (a,b)-ում և $f(u) \neq u$, երբ $u \in (a,b)$: Այդ դեպքում

U=$\left\{(t,y);\ a < \frac{y}{t} < b\right\}$ բազմության ցանկացած (t_0, y_0) կետով անցնում է (2.1) հավասարման մեկ և միայն մեկ ինտեգրալային կոր, կամ որ նույնն է, U-ին պատկանող կամայական (t_0, y_0) կետի համար

$$\begin{cases} y' = f\left(\dfrac{y}{t}\right) & (2.1) \\ y(t_0) = y_0 & (2.2) \end{cases}$$

Կոշու խնդիրն ունի միակ լուծում:

Ապացույց: (2.1) հավասարման մեջ կատարենք փոփոխականների փոխարինում $t = t,\ u = \dfrac{y}{t}$ բանաձևերով: Կունենանք` $y = ut,\ y' = u't + u$ և (2.1) հավասարումը նոր փոփոխականների նկատմամբ կվերածվի

$$u' = f(u) - u \tag{2.3}$$

անջատվող փոփոխականներով հավասարման: Քանի որ $f(u) \neq u$ ապա (2.3) հավասարման աջ մասը բավարարում է թեորեմ (1.1) պայմաններին: Ուրեմն $(t_0, u_0) = \left(t_0, \dfrac{y_0}{t_0}\right)$ կետով անցնում է (2.3) հավասարման մեկ և միայն մեկ ինտեգրալային կոր: Լուծելով (2.3) հավասարումը, կգտնենք այն $u = u(t)$ միակ լուծումը, որն անցնում է (t_0, u_0) կետով, որից հետո $y = tu$ փոխարինմամբ կգտնենք (2.1),(2.2) խնդրի միակ $y = y(t)$ լուծումը: Թեորեմն ապացուցված է:

Այն դեպքում, երբ $f(u) \equiv u$ կունենանք $y' = \dfrac{y}{t}$ անջատվող փոփոխականներով հավասարումը, որը կարելի է անմիջականորեն ինտեգրել: Իսկ երբ $f(u) \neq u$, սակայն (a,b)-ին պատկանող որևէ u_0 կետի համար $f(u_0) = u_0$, ապա համապատասխան Կոշու խնդրի լուծման միակության հարցը կբերվի §1-ի $g(y_0)=0$ դեպքում Կոշու խնդրի լուծման միակության հետազոտմանը:

Այժմ ուսումնասիրենք

$$y' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 y + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2}\right) \tag{2.4}$$

տեսքի հավասարումները, որտեղ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$-ը տրված իրական թվերն են, ընդ որում $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$:

Դիտարկենք t և y անհայտների նկատմամբ հետևյալ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 t + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Քանի որ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ապա (2.5) համակարգի հավասարումներին համապատասխանող ուղիղները հատվում են միակ (t_0, y_0) կետում:

Կատարենք փոփոխականի հետևյալ փոխարինումը՝ $\tau = t - t_0$, $\eta = y - y_0$:

Քանի որ

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{d(y - y_0)}{d(t - t_0)} = \frac{dy}{dt}$$

և նկատի ունենալով, որ (t_0, y_0) թվազույգը (2.5) համակարգի լուծում է $(a_1 t_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0,\ a_2 t_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0)$, կունենանք՝

$$\frac{d\eta}{d\tau} = f\left(\frac{a_1\tau + b_1\eta + a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1}{a_2\tau + b_2\eta + a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1\tau + b_1\eta}{a_2\tau + b_2\eta}\right),$$

որը համասեռ հավասարում է τ և η փոփոխականների նկատմամբ: Լուծելով ստացված հավասարումը և τ, η փոփոխականներից անցնելով t, y փոփոխականներին $(\tau = t - t_0, \eta = y - y_0)$՝ կստանանք (2.4) հավասարման լուծումները:

Օրինակ: Լուծենք $y' = \dfrac{4y-2t-6}{y+t-3}$ հավասարումը:

Քանի որ $4y-2t-6=0$ և $y+t-3=0$ ուղիղները հատվում են (1;2) կետում, կատարելով $\tau = t-1$, $\eta = y-2$ փոփոխականների փոխարինումը, կստանանք $\eta' = \dfrac{4\eta-2\tau}{\tau+\eta}$ համասեռ հավասարումը: $u = \dfrac{\eta}{\tau}$ փոխարինմամբ վերջինս կբերվի $u'\tau = \dfrac{-u^2+3u-2}{u+1}$ անջատվող փոփոխականներով հավասարմանը, որի ընդհանուր լուծումներն են $(u-1)^2 = \tau\cdot c(u-2)^3$ $c \in R^1$: Վերադառնալով τ, η և ապա t, y փոփոխականներին՝ կունենանք հավասարման ընդհանուր լուծումը $(y-x-1)^2 = c(y-2x)^3$:

Այժմ դիտարկենք (2.4) հավասարումը այն դեպքում, երբ $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, այսինքն՝ երբ (2.5) համակարգի հավասարումներին համապատասխանող ուղիղները զուգահեռ են և չեն համընկնում:

Նշանակելով $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k$, կունենանք $a_1t + b_1y = k(a_2t + b_2y)$:

Կատարենք փոփոխականների հետևյալ փոխարինումը՝ $x = x$, $u = a_2t + b_2y$:

Կունենանք $y' = \dfrac{u' - a_2}{b_2}$ և նոր փոփոխականների նկատմամբ (2.4) հավասարումը կընդունի

$$u' = a_2 + b_2 f\left(\frac{ku + c_1}{u + c_2}\right) = \Phi(u)$$

տեսքը, որն անջատվող փոփոխականներով հավասարում է:

Օրինակ: Լուծել հավասարումը.

$$y' = \left(\frac{t+2y+1}{3t+6y+1}\right)^2$$

Քանի որ $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, կատարենք հետևյալ փոխարինումը՝ $t=t,\ u=t+2y$

կունենանք՝ $y'=\frac{u'-1}{2}$: Այսինքն՝ t և u փոփոխականների նկատմամբ

կստանանք՝ $u'=1+2\left(\frac{u+1}{3u+1}\right)^2$ անջատվող փոփոխականներով հավասարումը:

§ 3. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

$F(t,y,y')$ առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը կոչվում է գծային, եթե նրա մեջ y որոնելի ֆունկցիան և իր ածանցյալը հանդես են գալիս գծայնորեն: Այսինքն՝ առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներն ընդհանուր դեպքում ունեն

$$a_0(t)y'+a_1(t)y=f(t)$$

տեսքը, որտեղ a_0,a_1 ֆունկցիաները, որոնց հետագայում կանվանենք հավասարման գործակիցներ և f ազատ անդամը տրված են, ըստ որում, եթե $f(t)\equiv 0$, ապա հավասարումը կանվանենք գծային համասեռ: Եթե ենթադրենք, որ գործակիցների որոշման (r_1,r_2) միջակայքում $a_0\neq 0$, ապա ուսումնասիրվող հավասարումը բերվում է

$$y'+a(t)y=b(t) \tag{3.1}$$

հավասարմանը, որտեղ $a(t)=\frac{a_1(t)}{a_0(t)},\ b(t)=\frac{f(t)}{a_0(t)}$:

Հետևյալ պնդումը տալիս է (3.1) հավասարման Կոշու խնդրի լուծման գոյության, միակության և լուծման ներկայացման հետ կապված հարցերի համակողմանի և որոշակի իմաստով վերջնական պատասխանները:

Թեորեմ 3.1: Դիցուք $a(t)$ և $b(t)$ ֆունկցիաները որոշված և անընդհատ են (r_1,r_2) միջակայքում: Այդ դեպքում $\dot{G}=\{(t,y);r_1<t<r_2;-\infty<y<+\infty\}$ շերտի ցանկացած $(t_0,y_0)\in\dot{G}$ կետով անցնում է (3.1) հավասարման մեկ և միայն մեկ լուծում, որը տրվում է

$$y(t)=\left(y_0+\int_{t_0}^{t}b(s)e^{\int_{t_0}^{s}a(\tau)d\tau}ds\right)\cdot e^{-\int_{t_0}^{s}a(\tau)d\tau} \quad \text{տեսքով}:$$

Ապացույց: Սկզբում դիտարկենք (3.1) հավասարմանը համապատասխանող համասեռ հավասարումը՝

$$z'+a(t)z=0: \tag{3.2}$$

Այն իրենից ներկայացնում է անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում: Համաձայն 1.1 թեորեմի՝ կամայական $(t_0,y_0)\in\dot{G}$ կետով անցնում է այս հավասարման միակ լուծում: Անմիջական տեղադրմամբ հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ այդ լուծումը տրվում է $z(t)=y_0\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}$ բանաձևով: Այժմ (3.1) հավասարման լուծումը փնտրենք *հաստատունի վարիացիայի* եղանակով: Այս եղանակի էությունն այն է, որ (3.1) հավասարման լուծումը փնտրվում է

$$y(t)=c(t)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau} \tag{3.3}$$

տեսքով, որտեղ $c(t)$-ն առայժմ անհայտ ֆունկցիա է: Փորձենք $c(t)$ ֆունկցիան գտնել այն պահանջից, որ (3.3) բանաձևով տրվող ֆունկցիան հանդիսանա (3.1) հավասարման լուծում:

Տեղադրելով (3.3) բանաձևով տրված ֆունկցիան (3.1)-ի մեջ և օգտվելով փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալի ածանցման բանաձևից՝ $\left(\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau\right)'=a(t)$, կունենանք՝

$$c'(t)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}-a(t)\cdot c(t)e^{-\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}+a(t)\cdot c(t)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}=b(t):$$

Այստեղից՝

$$c'(t) = b(t) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau},$$

այսինքն՝

$$c(t) = c + \int_{t_0}^{t} b(s) \cdot e^{\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds,$$

որտեղ c -ն կամայական հաստատուն է:

Ստացվածը տեղադրելով (3.3)-ի մեջ՝ կունենանք (3.1) հավասարման c պարամետրից կախված լուծումների բազմությունը (ընդհանուր լուծումը)

$$y(t) = \left(c + \int_{t_0}^{t} b(s) \cdot e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds \right) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} : \qquad (3.4)$$

Ակնհայտ է, որ լուծումների ստացված ընտանիքից $y(t_0) = y_0$ սկզբնական պայմանին բավարարող լուծումը կլինի՝

$$y(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} b(s) \cdot e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds \right) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} : \qquad (3.5)$$

Ցույց տանք, որ (3.5) բանաձևով տրվում է (3.1) հավասարման (t_0, y_0) կետով անցնող միակ լուծումը:

Ենթադրենք $y = \varphi(t)$ ֆունկցիան (3.1) հավասարման (t_0, y_0) կետով անցնող որևէ լուծում է: Դեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ այդ դեպքում $z(t) = y(t) - \varphi(t)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (3.2) համասեռ հավասարման լուծում, որը բավարարում է $z(t_0) = y(t_0) - \varphi(t_0) = y_0 - y_0 = 0$ սկզբնական պայմանին: Քանի որ §1-ում շարադրվածի համաձայն $z' + a(t)z = 0, z(t_0) = 0$ Կոշու խնդրի լուծումը միակն է, իսկ $z(t) \equiv 0$ ֆունկցիան ակնհայտորեն այդ խնդրի լուծում է, ապա դա միակ լուծումն է: Հետևաբար՝ $\varphi(t) \equiv y(t)$:

Թեորեմ 3.1-ն ապացուցված է:

Դիտողություն 3.1: Ստացված (3.5) բանաձևից անմիջականորեն բխում է, որ (3.1) հավասարման կամայական լուծում որոշված է ողջ (r_1, r_2) միջակայքում: Նկատենք, որ այս փաստը կարելի էր ստանալ որպես հետևանք թեորեմ III-ի:

§4. ԲԵՌՆՈՒԼԻԻ ԵՎ ՌԻԿԱՏԻԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1°. Բեռնուլիի հավասարումներ են կոչվում

$$y' = a(t)y + b(t)y^{\alpha} \tag{4.1}$$

տեսքի հավասարումները, որտեղ α-ն տրված իրական թիվ է, ընդ որում, $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, իսկ $a(t)$-ն և $b(t)$-ն որևէ (q_1, q_2) միջակայքում որոշված և անընդհատ ֆունկցիաներ են:

$\alpha = 0$ կամ $\alpha = 1$ դեպքում (4.1) հավասարումը գծային հավասարում է, ընդ որում, $\alpha = 1$ դեպքում՝ համասեռ, իսկ $\alpha = 0$ դեպքում՝ ոչ համասեռ:

Եթե $\alpha > 0$, ապա $y \equiv 0$ ֆունկցիան (4.1) հավասարման լուծում է, իսկ եթե $\alpha < 0$, ապա (4.1) հավասարման աջ մասը որոշված չէ (t, y) հարթության $y = 0$ գծի վրա:

Ենթադրելով, որ a և b ֆունկցիաները անընդհատ են (q_1, q_2)-ում, $y \neq 0$ և (4.1) հավասարման երկու մասերը բաժանելով y^{α}-ի վրա՝ կստանանք

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = a(t)\frac{1}{y^{\alpha-1}} + b(t) \text{ հավասարումը:}$$

Կատարենք փոփոխականների հետևյալ փոխարինումը՝ $t = t, u = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$:

Այդ դեպքում՝

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{-(\alpha-1)y^{\alpha-2} \cdot y'}{y^{2\alpha-2}} = \frac{(1-\alpha) \cdot y'}{y^{\alpha}}:$$

Այսինքն՝ t և u փոփոխականների նկատմամբ (4.1) հավասարումը բերվում է

$$u' = (1-\alpha)a(t)u + (1-\alpha)b(t)$$

առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարման:

Օրինակ: Դիտարկենք $y' - 2ty = 3t^3y^2$ հավասարումը:

Սա Բեռնուլիի հավասարում է $(\alpha = 2)$: $y \equiv 0$-ն հավասարման լուծում է: Համարելով $y \neq 0$ և հավասարման երկու մասերը բաժանելով y^2-ու վրա՝ կունենանք

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2t}{y} = 3t^3 \quad \text{հավասարումը:}$$

Կատարենք $t = t,\ u = \dfrac{1}{y}$ փոփոխականների փոխարինումը:

Քանի որ $y' = \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$, կունենանք՝ $-u' - 2tu = 3t^3$:

Ստացվածը գծային հավասարում է, որի ընդհանուր լուծումն է՝

$$u(t) = c \cdot e^{-t^2} + \frac{3}{2}(t^2 - 1),\ \ c \in R^1$$

Վերադառնալով (t, y) փոփոխականներին՝ կունենանք՝

$$y(t) = \frac{1}{c \cdot e^{-t^2} + \dfrac{3}{2}(t^2 - 1)},\ \ c \in R^1:$$

Մնում է այս լուծումներին ավելացնել $y \equiv 0$ լուծումը (որն ի դեպ չի ստացվում այս լուծումներից c հաստատունի որևէ արժեքի դեպքում):

2° ***Ռիկատիի հավասարումներ*** են կոչվում

$$y' = a(t)y + b(t)y^2 + c(t) \tag{4.2}$$

տեսքի հավասարումները, որտեղ a, b, c ֆունկցիաները որևէ (q_1, q_2) միջակայքում տրված ֆունկցիաներ են, ընդ որում, $a(t) \neq 0, c(t) \neq 0$, $t \in (q_1, q_2)$:

Ի տարբերություն նախորդ պարագրաֆներում ուսումնասիրված հավասարումների դասերի, որտեղ գտնված են դրանց լուծումները արտածող ընթացակարգեր, Ռիկատիի հավասարման ինտեգրման ընթացակարգ ընդհանուր դեպքում (ինչպես ցույց է տրվել Լագրանժի կողմից) հնարավոր չի գտնել: Սակայն, եթե հայտնի է (ինչ-որ ձևով գտնված է) Ռիկատիի հավասարման որևէ (մասնավոր) լուծում, ապա պարզվում է, որ այն կարելի է բերել Բեռնուլլի տեսքի հավասարման և այդպիսով այն լուծել:

Եվ այսպես, ենթադրենք $y=\varphi(t)$-ն (4.2) հավասարման որևէ լուծում է: Կատարելով $y=u(t)+\varphi(t)$ փոփոխականի փոխարինումը՝ (4.2) հավասարումը կբերենք իրեն համարժեք

$$u'+\varphi'(t)=a(t)u(t)+a(t)\varphi(t)+b(t)u^2+2b(t)\varphi(t)u(t)+b(t)\varphi^2+c(t)$$

հավասարման:

Յաշվի առնելով, որ φ-ն (4.2)-ի լուծում է, այսինքն՝

$$\varphi'(t)\equiv a(t)\varphi(t)+b(t)\varphi^2(t)+c(t)$$

կստանանք՝ $u'=\big(a(t)+2b(t)\varphi(t)\big)u+b(t)u^2$ հավասարումը, որը u անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ Բեռնուլիի հավասարում է:

Այսպիսով՝ Ռիկատիի հավասարման լուծումների ընտանիքի գտնելու հնարավորությունը կախված է նրա որևէ մասնավոր լուծման գտնելու հետ: Յարց է առաջանում, կա՞ որևէ ընթացակարգ Ռիկատիի հավասարման որևէ մասնավոր լուծման գտնելու համար: Ցավոք, այդ հարցը նույնպես ընդհանուր դեպքում ունի բացասական պատասխան: Երբեմն ելնելով a,b,c գործակիցների բացահայտ տեսքից՝ փորձ է արվում գտնելու մասնավոր լուծումը բազմանդամի, աստիճանային, եռանկյունաչափական կամ այլ պարզ ֆունկցիաների տեսքով:

Օրինակ: Լուծենք

$$y'-2ty+y^2=1-t^2$$

հավասարումը:

Փնտրենք մասնավոր լուծումը $y=at$ տեսքով:

Տեղադրելով $y=at$ դիտարկվող հավասարման մեջ՝ կունենանք

$$a+(a^2-2a)t^2\equiv 1-t^2$$

նույնությունը, որին բավարարում է պարամետրի $a=1$ արժեքը: Ուրեմն հավասարման մասնավոր լուծում է հանդիսանում $y=t$ ֆունկցիան: Կատարելով փոփոխականների $t=t$, $y=u+t$ փոխարինումը կունենանք՝

$$u'+u^2=0$$

հավասարումը, որի ընդհանուր լուծումն է՝ $\frac{1}{u}=t+c$:

$$\frac{1}{u}=t+c :$$

Փոխարինելով $u=y-t$ կունենանք

$$\frac{1}{y-t}=t+c,\ c\in R$$

լուծումների բազմությունը:

§5 ԼՐԻՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

$F(t,y)$ երկու փոփոխականի ֆունկցիայի *լրիվ դիֆերենցիալ* է կոչվում $dF=\frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{\partial F}{\partial y}dy$ արտահայտությունը, որտեղ dt-ը և dy-ը համապատասխանաբար t և y փոփոխականների *իրարից անկախ աճեր են,* իսկ $\frac{\partial F}{\partial t}$-ը և $\frac{\partial F}{\partial y}$-ը՝ F ֆունկցիայի մասնական ածանցյալները:

Դիցուք ուսումնասիրվում է

$$M(t,y)dt+N(t,y)dy=0 \tag{5.1}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ M և N ֆունկցիաները որոշված են հարթության որևէ Ω տիրույթում:

(5.1) հավասարումը կանվանենք լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարում, եթե նրա ձախ մասն իրենից ներկայացնում է ինչ-որ $F(t,y)$ երկու փոփոխականի ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ, այսինքն, եթե գոյություն ունի $F(t,y)$ ֆունկցիա այնպիսին, որ $dF\equiv\frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{\partial F}{\partial y}dy=Mdt+Ndy$, Ω-ում:

Այստեղից և dt, dy աճերի *անկախությունից* բխում է, որ $\frac{\partial F}{\partial t}\equiv M, \frac{\partial F}{\partial y}\equiv N$, Ω-ում:

Հայտնի է, որ եթե $M(t,y)$ և $N(t,y)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են իրենց $\frac{\partial M}{\partial y}$ և $\frac{\partial N}{\partial t}$ մասնական ածանցյալների հետ միասին Ω միակապ տիրույթում, ապա $M(t,y)dx+N(t,y)dy$ արտահայտությունը Ω-ում հանդիսանում է որևէ $F(t,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ, այն և միայն այն դեպքում երբ,

$$\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial t},\ (t,y)\in\Omega \tag{5.2}$$

Թեորեմ 5.1: Դիցուք (5.1) լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարման $M(t,y)$,$N(t,y)$ ֆունկցիաները որոշված և անընդհատ են $\frac{\partial M}{\partial y}$ և $\frac{\partial N}{\partial t}$ մասնական ածանցյալների հետ միասին $Q=\{(t,y);\ a<t<b,\ c<y<d\}$ տիրույթում, ընդ որում $N(t,y)\neq 0$ Q-ում: Այդ դեպքում ցանկացած $(t_0,y_0)\in Q$ կետով անցնում է (5.1) հավասարման մեկ և միայն մեկ լուծում:

Ապացույց: Քանի որ (5.1)-ը լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարում է, ապա գոյություն ունի այնպիսի $F(t,y)$ ֆունկցիա, որ ցանկացած $(t,y)\in Q$-ի համար

$$dF\equiv\frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{\partial F}{\partial y}dy\equiv M(t,y)dt+N(t,y)dy\text{, որտեղից}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=M,\ \frac{\partial F}{\partial y}=N \tag{5.3}$$

Սկզբում ցույց տանք, որ ցանկացած c հաստատունի համար $F(t,y)=c$ առնչությունից որոշվող $y=\varphi(t,c)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (5.1) հավասարման լուծում և որ (5.1) հավասարման կամայական $y=\psi(t)$ լուծման համար գոյություն ունի $c=c(\psi)$ հաստատուն այնպիսին, որ $F(t,\psi(t))\equiv c$: Կամ որ նույնն է, որ $y=\varphi(t)$ ֆունկցիան կհանդիսանա (5.1) հավասարման լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ որևէ c թվի համար այն հանդիսանում է $F(t,y)=c$ ֆունկցիոնալ հավասարման լուծում:

Քանի որ ըստ թեորեմի պայմանների $\frac{\partial F}{\partial y}\equiv N(t,y)\neq 0$, ապա բավարարված են անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության թեորեմի պայմանները և $F(t,y)=c$

առնչությունից կարելի է որոշել միակ $y=\varphi(t,c)$ ֆունկցիան այնպիսին, որ $F(t,\varphi(t,c))\equiv c$:

Ածանցելով այս նույնությունը, ըստ t -ի կունենանք՝

$$\frac{\partial F(t,\varphi(t,c))}{\partial t}+\frac{\partial F(t,\varphi(t,c))}{\partial y}\cdot\varphi'(t,c)\equiv 0$$

Համադրելով այս և (5.3) նույնությունները՝ կունենանք՝

$$M(t,\varphi(t,c))+N(t,\varphi(t,c))\cdot\varphi'(t,c)\equiv 0$$

այսինքն $y=\varphi(t,c)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (5.1) հավասարման լուծում:

Այժմ ցույց տանք, որ $F(t,y)=c$ առնչությամբ տրվում են (5.1) հավասարման բոլոր լուծումները:

Դիցուք $y=\psi(t)$ ֆունկցիան (5.1)-ի որևէ լուծում է: Վերցնենք որևէ $t_0\in(a,b)$ կետ և նշանակենք $\psi(t_0)=y_0$: Դիցուք $F(t_0,y_0)=c_0$:

Դիտարկենք $F(t,y)=c_0$ ֆունկցիոնալ առնչությունը: Այս առնչությունից որոշվում է միակ $y=\varphi(t,c_0)$ ֆունկցիան, այնպիսին, որ $F(t,\varphi(t,c_0))\equiv c_0$:

Մյուս կողմից, եթե $y=\psi(t)$ ֆունկցիան (5.1)-ի լուծում է, ապա

$$M(t,\psi(t))+N(t,\psi(t))\cdot\psi'(t)\equiv 0$$

Այստեղից և (5.3)-ից հետևում է

$$\frac{d}{dt}F(t,\psi(t))=\frac{\partial F(t,\psi(t))}{\partial t}+\frac{\partial F(t,\psi(t))}{\partial y}\cdot\psi'(t)\equiv 0$$

նույնությունը, որից իր հերթին բխում է, որ $F(t,\psi(t))\equiv const$, ըստ որում, քանի որ $F(t_0,\psi(t_0))=F(t_0,y_0)=c_0$, ապա $F(t,\psi(t))\equiv c_0$:

Այսպիսով՝ $y=\psi(t)$ ֆունկցիան ևս հանդիսանում է $F(t,y)=c_0$ ֆունկցիոնալ հավասարման լուծում: Անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության և միակության մասին թեորեմից հետևում է, որ $\varphi(t,c_0)\equiv\psi(t)$:

Այսպիսով՝ $F(t,y)=c$ բանաձևով տրվում են (5.1) հավասարման բոլոր լուծումները:

Ակնհայտ է, որ (t_0, y_0) սկզբնական պայմաններով որոշվող միակ լուծումը կորոշվի $F(t,y)=c_0$ առնչությունից, որտեղ $c_0 = F(t_0, y_0)$: Թեորեմն ապացուցված է:

Ստացված թեորեմից բխում է, որ (5.1) հավասարման ընդհանուր լուծման գտնելու խնդիրը բերվում է $F(t,y)$ ֆունկցիայի գտնելուն:

Ստորև (տե՛ս գլուխ VII) մենք կբերենք դիֆերենցիալ հավասարման առաջին ինտեգրալի գաղափարը և կհամոզվենք, որ այս ձևով որոշվող $F(t,y)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (5.1) հավասարման առաջին ինտեգրալ:

Վերջում տանք $F(t,y)$ ֆունկցիայի գտնելու մի ընթացակարգ:

Որոնելի $F(t,y)$ ֆունկցիայի համար ունենք (5.3) առնչությունները: Ինտեգրելով այդ նույնություններից առաջինը (t_0, t) միջակայքում, կունենանք

$$F(t,y) \equiv F(t_0, y) + \int_{t_0}^{t} M(\tau, y)d\tau \tag{5.4}$$

Ստացված նույնությունն ածանցենք ըստ y-ի:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \equiv \frac{\partial F(t_0, y)}{\partial y} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial M(\tau, y)}{\partial y} d\tau : \tag{5.5}$$

Այս նույնության երկրորդ գումարելիում կիրառվեց պարամետրից կախված ինտեգրալի ածանցման կանոնը. $\int_{t_0}^{t} M(\tau, y)d\tau$ y պարամետրից կախված ինտեգրալում քանի որ գոյություն ունի և անընդհատ է $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ ածանցյալը, հետևաբար գոյություն ունի

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{t_0}^{t} M(\tau, y)d\tau \equiv \int_{t_0}^{t} \frac{\partial M(\tau, y)}{\partial y} d\tau :$$

Այժմ օգտվելով (5.2) և (5.3) նույնություններից (5.5)-ում փոխարինենք $\dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv N$ և $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial t}$ և օգտվելով Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևից կստանանք

$$N(t,y) \equiv \frac{\partial F(t_0, y)}{\partial y} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial N(\tau, y)}{\partial t} d\tau \equiv \frac{\partial F(t_0, y)}{\partial y} + N(t,y) - N(t_0, y):$$

Այսինքն՝

$$\frac{\partial F(t_0, y)}{\partial y} \equiv N(t_0, y):$$

Ինտեգրելով ստացված նույնությունը (y_0, y) միջակայքում և ևս մեկ անգամ կիրառելով Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը՝ կունենանք.

$$F(t_0, y) = F(t_0, y_0) + \int_{y_0}^{y} N(t_0, \tau)d\tau:$$

Նկատենք, որ եթե $F(t, y)$ ֆունկցիան բավարարում է (5.3) առնչություններին, ապա (5.3)-ին բավարարում է նաև $F(t, y) + c$ ֆունկցիան, որտեղ c-ն կամայական հաստատուն է: Ուրեմն կարելի է ընտրել c հաստատունն այնպես, որ $F(t_0, y_0) = 0$: Այդ դեպքում որոնելի F ֆունկցիայի համար կունենանք հետևյալ ներկայացումը՝

$$F(t, y) = \int_{t_0}^{t} M(\tau, y)d\tau + \int_{y_0}^{y} N(t_0, \tau)d\tau:$$

Դիտողություն: Եթե (5.3) նույնության երկրորդ հավասարումում սկզբում ինտեգրումը կատարենք ըստ y-ի, ապա կստանանք $F(t, y)$ ֆունկցիայի մի այլ տեսք

$$F(t, y) = \int_{t_0}^{t} M(\tau, y_0)d\tau + \int_{y_0}^{y} N(t, \tau)d\tau$$

Օրինակ: Լուծենք

$$tydt + \left(\frac{1}{2}t^2 - y^2\right)dy = 0 \quad \text{հավասարումը:}$$

Այստեղ $M(t, y) = ty$, $N(t, y) = \frac{1}{2}t^2 - y^2$: Քանի որ $\frac{\partial M}{\partial y} = t$ և $\frac{\partial N}{\partial t} = t$, հետևաբար հավասարումը լրիվ դիֆերենցիալով է, որի լուծումները տրվում են $F(t, y) = c$ առնչությամբ: Գտնենք $F(t, y)$ ֆունկցիան: Ունենք $\frac{\partial F}{\partial t} = ty$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2}t^2 - y^2$, որտեղից և $F(t, y)$- ի համար ստացված ներկայացումից կհաշվենք $F(t, y)$-ը՝ $F(t, y) = \frac{1}{2}t^2 y - \frac{y^3}{3}$:

ԳԼՈՒԽ III

ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

§ 1. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴՐՈՒՅԹՆԵՐ

Դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը կոչվում է *գծային*, եթե անհայտ ֆունկցիաները և նրանց ածանցյալները մտնում են համակարգի հավասարումների մեջ գծայնորեն:

Այս սահմանումից, մասնավորապես, հետևում է, որ մեկ n-րդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումը մեկ y անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ պետք է ունենա

$$a_0(t)y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)y'+a_n(t)y=b(t) \tag{1.1}$$

տեսքը, այսինքն՝ հավասարումը պարունակում է y անհայտ ֆունկցիան և նրա $y',y'',\cdots,y^{(n)}$ ածանցյալները *գծային կոմբինացիայի* տեսքով, որը և նշանակում է, որ նրանք *«մտնում են հավասարման մեջ գծայնորեն»:* Հավասարման մեջ մասնակցող $a_0,a_1,\cdots,a_n$ մեծությունները t անկախ փոփոխականի տրված ֆունկցիաներ են և կոչվում են (1.1) գծային հավասարման *գործակիցներ*, իսկ $b(t)$ տրված ֆունկցիան կոչվում է *ազատ անդամ:*

Օրինակ՝ $y''+5y'-6y=e^t$ հավասարումը ***հաստատուն գործակիցներով*** $(a_0(t)\equiv 1, a_1(t)\equiv 5, a_2(t)\equiv -6)$ և $b(t)=e^t$ ազատ անդամով երկրորդ կարգի գծային հավասարում է, $e^t\cdot y'''+t^2\cdot y''+y=0$ *փոփոխական գործակիցներով* գծային հավասարում է, իսկ $y''+2y\cdot y'=0$ կամ $(y')^3+4y=\sin t$ հավասարումներն երկուսն էլ գծային չեն, քանի որ առաջինում առկա է $y\cdot y'$ արտադրյալը, իսկ երկրորդում՝ $(y')^3$-ը, որոնք և խախտում են հավասարումների գծայնությունը:

Հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի օրինակ է հանդիսանում

$$\begin{cases} 3y_1''' + y_2' - y_1 = 0 \\ y_2'' - y_1 + 5y_2 = 2t^3 \end{cases} \tag{1.2}$$

համակարգը:

Ընդհանուր դեպքում գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը կարող է բաղկացած լինել կամայական թվով հավասարումներից, որոնցում մասնակցում են կամայական թվով անհայտ ֆունկցիաներ, իրենց կամայական կարգի ածանցյալներով: Դիցուք անհայտ ֆունկցիաների թիվը m է (նշանակենք դրանք $y_1, y_2, \cdots, y_m$), իսկ համակարգի հավասարումների թիվը՝ l: Գծային լինելու համար համակարգի յուրաքանչյուր հավասարում պետք է պարունակի $y_j\ (j = 1,2,\cdots,m)$ ֆունկցիաները և նրանց ածանցյալները գծային կոմբինացիայի տեսքով: Նշանակելով $a_{ijk}(t)$-ով i-րդ հավասարման մեջ j-րդ անհայտ ֆունկցիայի k-րդ կարգի ածանցյալի գործակիցը, տեսնում ենք, որ ընդհանուր դեպքում գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը պետք է ունենա

$$\sum_{k=0}^{p_{i1}} a_{i1k}(t) y_1^{(k)} + \sum_{k=0}^{p_{i2}} a_{i2k}(t) y_2^{(k)} + \cdots + \sum_{k=0}^{p_{im}} a_{imk}(t) y_m^{(k)} = b_i(t);$$

$$i = 1,2,\ldots,l \tag{1.3}$$

տեսքը: Օրինակ՝ (1.1) հավասարումը այս համակարգի այն մասնավոր դեպքն է, երբ $m = 1,\ l = 1,\ p_{11} = n$, իսկ $a_{11k}(t) = a_{n-k}(t)\ \ (k = 0,1,\ldots,n)$: (1.2) համակարգում $m = 2,\ l = 2,\ p_{11} = 3,\ p_{12} = 1,\ p_{21} = 0,\ p_{22} = 2$: Նշանակելով $\max\limits_{\substack{1\le i\le l \\ 1\le j\le m}} p_{ij} = p$, գծային դիֆերենցիալ հավասարումների (1.3) համակարգը կարելի է գրել

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{p} a_{ijk}(t) y_j^{(k)} = b_i(t),\ \ i = 1,2,\ldots,l \tag{1.3}$$

տեսքով, որտեղ $a_{ijk}(t)$ գործակիցը համարվում է նույնաբար զրո, եթե համապատասխան $y_j^{(k)}$ ածանցյալը չի մասնակցում i-րդ հավասարման մեջ:

Եթե (1.3) համակարգի բոլոր ազատ անդամները նույնաբար հավասար են զրոյի ($b_i(t) \equiv 0,\ \ i = 1,2,\ldots,l$), ապա (1.3) համակարգը կոչվում է ***համասեռ:*** Այսպիսով՝ ամեն մի (1.3) գծային համակարգին համապատասխանում է գծային համասեռ համակարգ

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{p} a_{ijk}(t)y_j^{(k)}=0,\quad i=1,2,\ldots,l, \qquad (1.4)$$

որը ստացվում է (1.3) համակարգից, եթե $b_i(t)$ ազատ անդամները փոխարինենք զրոներով:

Ստուգենք, որ դիֆերենցիալ հավասարումների գծային համակարգերն օժտված են հատկություններով (տես ստորև Ա,Բ,Գ,Դ), շնորհիվ որոնց այդ դասը շահեկանորեն առանձնանում է մնացած բոլոր (ոչ գծային) դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերից:

Ա) Գծային համասեռ համակարգի լուծումների կամայական գծային կոմբինացիա նույնպես այդ համակարգի լուծում է:

Այս հատկությունը ստուգելու համար բավական է ապացուցել, որ՝ 1) երկու լուծումների գումարը նույնպես լուծում է, և 2) կամայական լուծման արտադրյալը հաստատուն թվով նույնպես լուծում է:

Իրոք, դիցուք

$\vec{y}=\vec{\varphi}(t)=\left(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\right)$ և $\vec{y}=\vec{\psi}(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,$ $\ldots,\psi_m(t))$ վեկտոր-ֆունկցիաները (1.4) համակարգի երկու լուծումներ են, այսինքն՝

$\sum\limits_{j,k} a_{ijk}(t)\varphi_j^{(k)}(t)\equiv 0,\ \ \sum\limits_{j,k} a_{ijk}(t)\psi_j^{(k)}(t)\equiv 0,$[1] $\ i=1,2,\cdots,l$: Քանի որ

$$(\varphi_j(t)+\psi_j(t))^{(k)}\equiv\varphi_j^{(k)}(t)+\psi_j^{(k)}(t),$$

ապա

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(\varphi_j(t)+\psi_j(t))^{(k)}\equiv$$

$$\equiv\sum_{j,k} a_{ijk}(t)\varphi_j^{(k)}(t)+\sum_{j,k} a_{ijk}(t)\psi_j^{(k)}(t)\equiv 0,\quad i=1,2,\cdots,l,$$ այսինքն՝

$\vec{\varphi}(t)+\vec{\psi}(t)=\left(\varphi_1(t)+\psi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)+\psi_m(t)\right)$-ն նույնպես լուծում է: Նմանապես, կամայական c հաստատունի համար

---

[1] $\sum\limits_{j,k} a_{ijk}(t)y_j^{(k)}\equiv\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=0}^{p} a_{ijk}(t)y_j^{(k)}$

$$\sum_{i,j} a_{ijk}(t)(c\varphi_j(t))^{(k)} \equiv c\sum_{j,k} a_{ijk}(t)\varphi_j^{(k)}(t), \quad i=1,2,\cdots,l$$ այսինքն, եթե $\vec{\varphi}$-ն

լուծում է, ապա $c\cdot\vec{\varphi}$-ն նույնպես լուծում է: Ա) հատկությունը ապացուցված է:

Բ) Եթե $\vec{y}=\vec{\varphi}(t)$ և $\vec{y}=\vec{\psi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիաները (1.3) անհամասեռ համակարգի լուծումներն են, ապա $\vec{\varphi}(t)-\vec{\psi}(t)$ տարբերությունը (1.4) համասեռ համակարգի լուծումն է:

Իրոք՝

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(\varphi_j(t)-\psi_j(t))^{(k)} \equiv$$

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)\varphi_j^{(k)}(t)-\sum_{j,k} a_{ijk}(t)\psi_j^{(k)}(t) \equiv b_i(t)-b_i(t) \equiv 0,$$

$$i=1,2,\cdots,l:$$

Նմանապես ապացուցվում է հետևյալ հատկությունը

Գ) Եթե $\vec{y}=\vec{\psi}(t)$-ն (1.3) համակարգի լուծում է, իսկ $\vec{y}=\vec{\varphi}(t)$-ն (1.4) համասեռ համակարգի լուծում է, ապա նրանց $\vec{\varphi}(t)+\vec{\psi}(t)$ գումարը (1.3)-ի լուծում է:

Դիտողություն 1.1: Եթե մեզ հայտնի է (1.4) համասեռ համակարգի բոլոր լուծումների բազմությունը (նշանակենք այն $\Phi=\{\varphi\}$) և (1.3) անհամասեռ համակարգի որևէ ψ_0 լուծում, ապա (1.3) անհամասեռ համակարգի բոլոր լուծումների $\Psi=\{\psi\}$ բազմությունը կարելի է (սիմվոլիկ) նկարագրել $\Psi=\Phi+\psi_0$ բանաձևով:

Իրոք, համաձայն Գ)-ի, եթե $\varphi\in\Phi$, ապա $\varphi+\psi_0\in\Psi$, այսինքն՝ $\Phi+\psi_0\subseteq\Psi$: Հակադարձը՝ եթե $\psi\in\Psi$, ապա համաձայն Բ)-ի՝ $\psi-\psi_0\in\Phi$, նույնն է, թե $\psi\in\Phi+\psi_0$, այսինքն՝ $\Psi\subseteq\Phi+\psi_0$: Հետևաբար՝ $\Psi=\Phi+\psi_0$:

Նշենք (1.3)-ի ևս մեկ հատկություն:

Դ) Դիցուք (1.3) համակարգի b_i ազատ անդամները ներկայացված են $b_i(t)=\alpha c_i(t)+\beta d_i(t)$, $i=1,2,\cdots,l$ գումարների տեսքով: Դիտարկենք

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)y_j^{(k)}=c_i(t), \quad i=1,2,\cdots,l \tag{1.5}$$

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)y_j^{(k)} = d_i(t), \quad i=1,2,\cdots,l \tag{1.6}$$

հավասարումների համակարգերը: Եթե $\vec{y}=\vec{\varphi}(t)$-ն (1.5)-ի լուծում է, իսկ $\vec{y}=\vec{\psi}(t)$-ն (1.6)-ի, ապա $\vec{y}=\alpha\vec{\varphi}(t)+\beta\vec{\psi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիան (1.3) համակարգի լուծում է:

Ապացույցը, ինչպես և նախորդ դեպքերում, կատարվում է անմիջական տեղադրումով:

Հետագայում կուսումնասիրվեն միայն այնպիսի համակարգեր, որոնցում անհայտ ֆունկցիաների թիվը համընկնում է հավասարումների թվի հետ: Ինչպես հայտնի է (տես գլուխ I, §2), եթե այդպիսի համակարգերը լուծված են բարձր կարգի ածանցյալների նկատմամբ, ապա նրանց կարելի է բերել համարժեք նորմալ համակարգերի, ըստ որում, եթե սկզբնական համակարգը գծային է, ապա համարժեք նորմալ համակարգը նույնպես կլինի գծային: Այս պատճառով սույն գլխում կուսումնասիրվեն

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+a_2(t)y^{(n-2)}+\cdots+a_n(t)y=b(t)$$

n-րդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումը մեկ անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ և

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(t)y_1+a_{12}(t)y_2+\cdots+a_{1n}(t)y_n+b_1(t),\\
y_2' &= a_{21}(t)y_1+a_{22}(t)y_2+\cdots+a_{2n}(t)y_n+b_2(t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n' &= a_{n1}(t)y_1+a_{n2}(t)y_2+\cdots+a_{nn}(t)y_n+b_n(t),
\end{aligned}$$

գծային նորմալ համակարգը, ըստ որում հատուկ ուշադրություն կնվիրվի նրանց համապատասխանող

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+a_2(t)y^{(n-2)}+\cdots+a_n(t)y=0 \tag{1.7}$$

համասեռ հավասարմանը և

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(t)y_1+a_{12}(t)y_2+\cdots+a_{1n}(t)y_n\ ,\\
y_2' &= a_{21}(t)y_1+a_{22}(t)y_2+\cdots+a_{2n}(t)y_n\ ,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n' &= a_{n1}(t)y_1+a_{n2}(t)y_2+\cdots+a_{nn}(t)y_n\ ,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

համասեռ համակարգին:

Գծային դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության հիմնական արդյունքներից մեկը հետևյալն է՝

(1.7) համասեռ հավասարման և (1.8) համասեռ համակարգի լուծումների բազմությունները n-չափանի գծային տարածություններ են:

Այս պնդումները կապացուցվեն համապատասխանաբար §5-ում և §8-ում: Իսկ մինչ այդ, այս ներածական մասում կհիշատակվեն գծային տարածության և նրա հետ կապված որոշ հասկացություններ, որոնց մի մասին ընթերցողը կարող է ծանոթ չլինել:

ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԳԾԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ

Սահմանում: Գծային տարածություն կոչվում է $x, y, z, \ldots$ տարրերի այնպիսի ոչ դատարկ $\mathfrak{R}$ բազմությունը, որ՝

I. $\mathfrak{R}$-ում սահմանված է գումարի գործողություն, որը $\mathfrak{R}$-ի կամայական x և y տարրերին համապատասխանեցնում է $x+y$ տարրը $\mathfrak{R}$-ից, ըստ որում գումարի այդ գործողությունը օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1ա) $x+y=y+x$,

1բ) $(x+y)+z=x+(y+z)$,

1գ) $\mathfrak{R}$-ում գոյություն ունի «զրոյական» տարր՝ 0, այնպիսին, որ $x+0=x$ կամայական x-ի համար $\mathfrak{R}$-ից:

II. $\mathfrak{R}$-ում սահմանված է կամայական x տարրի և կամայական λ թվի $\lambda \cdot x \in \mathfrak{R}$ արտադրյալը, որն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

2ա) $\lambda(\mu x)=(\lambda \cdot \mu) \cdot x$,

2բ) $1 \cdot x=x$,

2գ) $0 \cdot x=0$ (ձախում 0-ն թիվ է, աջում՝ զրոյական տարր),

2դ) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,

2ե) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,

$(-1) \cdot x$ տարրը նշանակվում է $-x$: Համաձայն 2բ), 2գ), և 2դ) հատկությունների՝

$$x+(-x)=(1+(-1)) \cdot x=0 \cdot x=0 \ :$$

$\mathfrak{R}$ գծային տարածության տարրերը կանվանենք նաև այդ տարածության վեկտորներ:

Նշենք, որ այս սահմանման մեջ բոլորովին կարևոր չէ $x, y, z, \ldots$ տարրերի բնույթը, նույնպես կարևոր չէ թե ինչպես է սահմանվում $x+y$ գումարը և $\lambda \cdot x$ արտադրյալը, պահանջվում է միայն, որպեսզի այդ հասկացությունները բավարարեն նշված պայմաններին:

Եթե $\mathfrak{R}$ գծային տարածությունում սահմանված է արտադրյալը կամայական իրական թվով, ապա $\mathfrak{R}$-ը կոչվում է իրական գծային տարածություն, իսկ եթե սահմանված է արտադրյալը կամայական կոմպլեքս թվով, ապա $\mathfrak{R}$-ը կոչվում է կոմպլեքս գծային տարածություն:

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ արտահայտությունը կոչվում է $x_1, x_2, \ldots, x_n$ տարրերի (վեկտորների) *գծային կոմբինացիա:* Գծային կոմբինացիան կոչվում է *տրիվիալ*, եթե բոլոր $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ թվերը հավասար են զրոյի, և *ոչ տրիվիալ* հակառակ դեպքում:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ վեկտորները կոչվում են *գծորեն կախյալ*, եթե նրանց որևէ ոչ տրիվիալ գծային կոմբինացիան հավասար է զրոյի, դրանք կոչվում են ***գծորեն անկախ***, եթե այդպիսի (ոչ տրիվիալ) գծային կոմբինացիա գոյություն չունի:

$\mathfrak{R}$ գծային տարածությունը կոչվում է n*-չափանի* (և ըստ այդմ *վերջավոր չափանի*), եթե նրանում գոյություն ունեն n գծորեն անկախ վեկտորներ և կամայական $n+1$ վեկտորներ գծորեն կախյալ են: Այդպիսի n (գծորեն անկախ) վեկտորները կոչվում են $\mathfrak{R}$ տարածության *բազիս*:

Եթե $\mathfrak{R}$-ում կան կամայական թվով գծորեն անկախ վեկտորներ, ապա $\mathfrak{R}$-ը կոչվում է *անվերջ չափանի*: $\mathfrak{R}$ տարածության $\mathfrak{R}'$ ենթաբազմությունը կոչվում է $\mathfrak{R}$-ի ***ենթատարածություն,*** եթե $\mathfrak{R}'$-ի տարրերի (վեկտորների, էլեմենտների) բոլոր հնարավոր գծային կոմբինացիաները $\mathfrak{R}'$-ից են, այսինքն, եթե $\mathfrak{R}'$-ը ինքը գծային տարածություն է:

Դիֆերենցիալ հավասարումների դասընթացը հիմնականում առնչվում է ֆունկցիոնալ գծային տարածությունների հետ, այսինքն այնպիսի գծային տարածությունների հետ, որոնց տարրերը ֆունկցիաներ են: Հիշատակենք դրանցից ամենահաճախ օգտագործվողները:

Ընդունված է $C(a,b)$-ով նշանակել (a,b) միջակայքում որոշված բոլոր անընդհատ ֆունկցիաների բազմությունը: Հեշտ է տեսնել, որ այս բազմությունը գծային տարածություն է (եթե ֆունկցիաների գումարը և թվով բազմապատկումը սահմանվում են սովորական ձևով): Քանի որ հետագայում ֆունկցիաների գծային կախվածությունը (և անկախությունը) խաղում է կարևոր դեր, ապա նշենք, որ այս դեպքում համապատասխան սահմանումը կընդունի հետևյալ տեսքը.

Սահմանում 1.1: Ֆունկցիաների $f_1, f_2, \ldots, f_m$ համակարգը կոչվում է *գծորեն անկախ* (a,b) միջակայքում, եթե

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \cdots + \alpha_m f_m(t) \equiv 0 \ , \quad t \in (a,b) \tag{1.9}$$

նույնությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$: եթե գոյություն ունեն $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ թվեր այնպիսիք, որ դրանցից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից $\left(\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2 \neq 0 \right)$ և տեղի ունի (1.9) նույնությունը, ապա $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ֆունկցիաների համակարգը կոչվում է *գծորեն կախյալ* (a,b)-ում:

$C(a,b)$ գծային տարածությունը անվերջ չափանի է, քանի որ այդ տարածությանը պատկանող $1, t, t^2, \ldots, t^n$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են կամայական n-ի համար: Իրոք, $\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_n t^n$ գծային կոմբինացիան (բազմանդամը) նույնաբար զրո է որևէ (a,b) միջակայքում այն և միայն այն դեպքում, երբ զրո են բոլոր $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ գործակիցները (տես հանրահաշվի հիմնական թեորեմը):

Նշանակենք $C^m(a,b)$-ով (a,b) միջակայքում որոշված բոլոր մինչև m-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ ունեցող ֆունկցիաների բազմությունը: Դեշտ է տեսնել, որ կամայական բնական m-ի համար $C^m(a,b)$-ն նույնպես անվերջ չափանի գծային տարածություն է: Նկատենք նաև, որ $C^m(a,b) \subset C(a,b)$, այսինքն $C^m(a,b)$-ն $C(a,b)$-ի գծային ենթատարածություն է:

Դիցուք D-ն $\mathfrak{R}$ գծային տարածության որևէ ենթաբազմություն է: Կամայական A արտապատկերում, որը D բազմության ամեն մի x տարրի համապատասխանության մեջ է դնում որոշակի $A[x]$ տարր[1] $\mathfrak{R}$-ից, կոչվում է *օպերատոր* $\mathfrak{R}$ տարածությունում (D որոշման տիրույթով):

[1] $A[x]$-ը կարդացվում է A-ն կիրառած x-ի վրա:

A օպերատորը կոչվում է *գծային,* եթե նրա D որոշման տիրույթը գծային ենթատարածություն է և եթե կամայական x և y տարրերի համար D-ից և կամայական λ թվի համար տեղի ունեն

$$A[x+y]=A[x]+A[y]$$
$$A[\lambda x]=\lambda A[x]$$

առնչությունները:

Ստուգենք, որ ածանցման գործողությունը կարելի է դիտարկել որպես գծային օպերատոր $C(a,b)$ գծային տարածությունում: Նշանակենք p սիմվոլով, $p\equiv\dfrac{d}{dt}$, ածանցման գործողությունը: Ակնհայտ է, որ կամայական f և g ֆունկցիաների համար $C^1(a,b)$ տարածությունից և կամայական λ թվի համար՝

$$p[f+g]\equiv\frac{d}{dt}\big(f(t)+g(t)\big)\equiv f'(t)+g'(t)\equiv p[f]+p[g]\in C(a,b),$$

$$p[\lambda f]\equiv\frac{d}{dt}\big(\lambda f(t)\big)\equiv\lambda f'(t)\equiv\lambda p[f]\in C(a,b):$$

Այսպիսով՝ $p\equiv\dfrac{d}{dt}$-ն գծային օպերատոր է $C(a,b)$ գծային տարածությունում $C^1(a,b)$ որոշման տիրույթով:

Այժմ փորձենք իմաստավորել որոշ հանրահաշվական գործողություններ p սիմվոլի (օպերատորի) նկատմամբ: Օրինակ՝ $p^2[y]\equiv p\big[p[y]\big]\equiv p[y']\equiv y''$ և ընդհանրապես, կամայական k բնական թվի համար p^k-ն սահմանենք այսպես՝

$$p^k[y]\equiv\left(\frac{d}{dt}\right)^k[y]\equiv\frac{d^k}{dt^k}[y]\equiv y^{(k)}$$

Նշանակենք $L(p)$-ով՝

$$L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\cdots+a_{n-1}p+a_n,$$

p սիմվոլի նկատմամբ n-րդ կարգի բազմանդամը: Դժվար է ստուգել, որ այդ բազմանդամը գծային օպերատոր է $C(a,b)$ տարածությունում $C^n(a,b)$ որոշման տիրույթով[1]: Իրոք, կամայական $f, g \in C^n(a,b)$ ֆունկցիաների և կամայական λ թվի համար

$$L(p)[f+g] = L(p)[f] + L(p)[g] \in C(a,b),$$
$$L(p)[\lambda f] = \lambda \cdot L(p)[f] \in C(a,b):$$

$L(p)$ օպերատորի միջոցով n-րդ կարգի հաստատուն գործակիցներով $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = b(t)$ գծային դիֆերենցիալ հավասարումը կարելի է գրել $L(p)y = b(t)$ տեսքով:

Եթե $M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_m$ որևէ m-րդ կարգի բազմանդամ է p ածանցման սիմվոլի նկատմամբ, ապա հեշտ է ստուգել, որ կամայական y *ողորկ* (բավարար անգամ դիֆերենցելի) ֆունկցիայի համար տեղի ունեն

$$\big(L(p) + M(p)\big)[y] = L(p)[y] + M(p)[y]$$
$$L(p)\big[M(p)[y]\big] = \big(L(p) \cdot M(p)\big)[y]$$

առնչությունները:

Վարժություններ

1.1. Ապացուցել, որ $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0$ հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ հավասարման կամայական լուծում անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիա է:

Ուղեցույց: Եթե $y = \varphi(t)$ ֆունկցիան լուծում է, ապա տեղի ունի $\varphi^{(n)}(t) \equiv -a_1 \varphi^{(n-1)}(t) - a_2 \varphi^{(n-2)}(t) - \cdots - a_n \varphi(t)$ նույնությունը, $t \in \mathbb{R}$: Քանի որ աջ մասը դիֆերենցելի ֆունկցիա է, ապա այդպիսին է և ձախ մասը, այսինքն՝ գոյություն ունի $\varphi^{(n+1)}(t)$ ածանցյալը և տեղի ունի $\varphi^{(n+1)}(t) \equiv -a_1 \varphi^{(n)}(t) - a_2 \varphi^{(n-1)}(t) - \cdots \cdots - a_n \varphi'(t)$ նույնությունը: Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակը՝ ապացուցել պնդումը:

---

[1] Իհարկե, որպես որոշման տիրույթ կարելի է վերցնել $C^n(a, b)$-ից տարբեր ենթատարածություններ, օրինակ՝ $C^{n+5}(a, b)$-ն:

1.2. Ապացուցել, որ եթե

$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+a_2(t)y^{(n-2)}+\cdots+a_n(t)y=b(t)$ գծային հավասարման $a_k(t)$ գործակիցները, $k=1,\ldots,n$ և $b(t)$ ազատ անդամը $C^m(a,b)$ տարածությունից են, ապա այդ հավասարման կամայական լուծում $C^{m+n}(a,b)$ տարածությունից է:

§ 2. ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ: ՊԱՐԶ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ԴԵՊՔԸ

Ուսումնասիրենք

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_ny\ =0 \tag{2.1}$$

գծային համասեռ հավասարումը, որի $a_1,a_2,\cdots,a_n$ գործակիցները հաստատուններ են[1]: Օգտագործելով նախորդ պարագրաֆում սահմանված

$$L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n$$

դիֆերենցիալ օպերատորը ($L(p)$ բազմանդամը) (2.1) հավասարումը գրենք

$$L(p)[y]=0 \tag{2.1}$$

սիմվոլիկ տեսքով:

Պարզագույն դեպքում, երբ $n=1$, ստացվում է $y'+a_1y=0$ (կամ $y'=-a_1y$) հավասարումը, որի բոլոր լուծումները տրվում են $y=c\cdot e^{-\alpha_1 t}$ բանաձևով, որտեղ c-ն կամայական հաստատուն է: Հարց է առաջանում. արդյո՞ք $n>1$ դեպքում (2.1) հավասարումը կրկին ունի $y=e^{\lambda t}$ տեսքի լուծումներ: Այս հարցին պատասխանելու համար տեղադրենք $y=e^{\lambda t}$ ֆունկցիան (2.1) հավասարման ձախ մասում՝

$$L(p)[e^{\lambda t}]=(e^{\lambda t})^{(n)}+a_1(e^{\lambda t})^{(n-1)}+\cdots+a_ne^{\lambda t}\equiv\lambda^ne^{\lambda t}+a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda t}+\cdots+a_ne^{\lambda t}\equiv$$

$$\equiv(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n)\cdot e^{\lambda t}\equiv L(\lambda)\cdot e^{\lambda t}$$

---

[1] Այսուհետև հաստատուն ասելով նկատի ունենք իրական կամ կոմպլեքս թիվ:

Նախ նկատենք, որ ստացվել է

$$L(p)[e^{\lambda t}] \equiv L(\lambda) \cdot e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.2}$$

նույնությունը, որտեղ $L(\lambda)$-ով նշանակել ենք

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

բազմանդամը, որին այսուհետ կանվանենք (2.1) հավասարման *բնութագրիչ բազմանդամ,* իսկ

$$L(\lambda) = 0 \tag{2.3}$$

հավասարումը կանվանենք (2.1) դիֆերենցիալ հավասարման *բնութագրիչ հավասարում:* Ստորև մենք կհամոզվենք, որ $L(\lambda)$ բազմանդամն իրոք «բնութագրում է» (2.1) հավասարումը, արտահայտելով այն կապը, որն առկա է (2.1) դիֆերենցիալ և (2.3) հանրահաշվական հավասարումների միջև:

Այժմ պատասխանենք վերը դրված հարցին՝ արդյո՞ք (2.1) հավասարումն ունի $y = e^{\lambda t}$ տեսքի լուծումներ:

Լեմմա 2.1: Որպեսզի $y = e^{\lambda_0 t}$ ֆունկցիան հանդիսանա (2.1) հավասարման լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ λ_0 թիվը լինի $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամի արմատ:

Իրոք, եթե $L(\lambda_0) = 0$, ապա (2.2) նույնությունից հետևում է, որ $L(p)[e^{\lambda_0 t}] \equiv 0$, այսինքն $y = e^{\lambda_0 t}$-ն (2.1) հավասարման լուծումն է: Հակադարձը, եթե $y = e^{\lambda_0 t}$-ն (2.1) հավասարման լուծում է, այսինքն $L(p)[e^{\lambda_0 t}] \equiv 0$, ապա, քանի որ $e^{\lambda_0 t} \neq 0$, (2.2) նույնությունից հետևում է, որ $L(\lambda_0) = 0$: Լեմման ապացուցված է:

Համաձայն հանրահաշվի հիմնական թեորեմի՝ (2.3) հավասարումն ունի ճիշտ n արմատ, որոնք նշանակենք $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$: Այս պարագրաֆում ուսումնասիրվում է *պարզ արմատների դեպքը,* այսինքն, երբ

$$\lambda_k \neq \lambda_j, \quad \text{եթե} \quad k \neq j, \quad k, j = 1, 2, \cdots, n: \tag{2.4}$$

Այս դեպքում, համաձայն լեմմա 2.1-ի, (2.1) հավասարումն ունի

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \ \ldots, \ \varphi_n(t) = e^{\lambda_n t} \tag{2.5}$$

n հատ իրարից տարբեր լուծումներ: Քանի որ գծային համասեռ հավասարման լուծումների յուրաքանչյուր գծային կոմբինացիա նույնպես այդ հավասարման լուծում է (տես §1, Ա), ապա

$$y(t) \equiv y(t, c_1, \cdots, c_n) \equiv c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \tag{2.6}$$

ֆունկցիան կլինի (2.1) հավասարման լուծում կամայական $c_1, c_2, \cdots, c_n$ հաստատունների դեպքում: Արդյո՞ք լուծումների այս ընտանիքը պարունակում է (2.1) հավասարման բոլոր լուծումները: Պարզ (միապատիկ) արմատների դեպքում հարցի սպառիչ պատասխանը տրվում է հետևյալ պնդումով՝

Թեորեմ 2.1: Դիցուք (2.1) հավասարմանը համապատասխանող $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամի արմատները միապատիկ են (պարզ են): Եթե $y = \varphi(t)$ ֆունկցիան (2.1) հավասարման որևէ լուծում է, ապա գոյություն ունեն (միարժեք որոշվող) այնպիսի $c_1^0, c_2^0, \cdots, c_n^0$ թվեր, որ

$$\varphi(t) \equiv c_1^0 e^{\lambda_1 t} + c_2^0 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n^0 e^{\lambda_n t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

այսինքն, (2.1) հավասարման կամայական լուծում ներկայացվում է (2.6) տեսքով:

Ապացույց: Քանի որ (2.1) հավասարման գործակիցները հաստատուններ են, ապա՝

$$\begin{cases} L(p)[y] = 0 \\ y(t_0) = z_1,\ y'(t_0) = z_2, \cdots, y^{(n-1)}(t_0) = z_n \end{cases}$$

Կոշու խնդիրն ունի միակ լուծում (որոշված իրական առանցքի վրա) կամայական $t_0 \in \mathbb{R}$ և կամայական $z_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ սկզբնական տվյալների համար (տես գլ. I թեորեմ III և թեորեմ VI):

Եթե $y = \varphi(t)$ ֆունկցիան (2.1) հավասարման որևէ լուծում է, ապա այն որոշված է ամբողջ իրական առանցքի վրա: Նշանակենք

$$\varphi(0) = b_1, \varphi'(0) = b_2, \ldots, \varphi^{(n-1)}(0) = b_n: \tag{2.7}$$

Այսպիսով $y = \varphi(t)$ ֆունկցիան (2.1), (2.7) Կոշու խնդրի լուծում է:

Այժմ ցույց տանք, որ (2.6) բանաձևով տրվող լուծումների ընտանիքում ևս գոյություն ունի միևնույն

$$y(0) = b_1, y'(0) = b_2, \ldots, y^{(n-1)}(0) = b_n \tag{2.8}$$

սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծում: Պահանջելով, որ (2.6) բանաձևով որոշված ֆունկցիան բավարարի (2.8) պայմաններին, $c_1,c_2,\dots,c_n$ անհայտների նկատմամբ կստանանք

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \cdots + c_n = b_1 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_n c_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1^{n-1} c_1 + \lambda_2^{n-1} c_2 + \cdots + \lambda_n^{n-1} c_n = b_n \end{cases} \tag{2.9}$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը: (2.9) համակարգի գլխավոր որոշիչն ունի

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

տեսքը: Հանրահաշվի դասընթացից հայտնի է, որ այս որոշիչը (որին անվանում են Վանդերմոնդի որոշիչ) հավասար չէ զրոյի[1] եթե λ_k $(k=1,2,\dots,n)$ թվերը զույգ առ զույգ իրարից տարբեր են (ինչը և պահանջվում է ապացուցվող թեորեմում):

Հետևաբար, կամայական $b_1,b_2,\dots,b_n$ հաստատունների համար (2.9) համակարգն ունի միակ $(c_1^0,c_2^0,\dots,c_n^0)$ լուծում: Այսպիսով՝ ապացուցվեց, որ գոյություն ունեն միարժեք որոշվող ($b_1,b_2,\dots,b_n$ սկզբնական տվյալներով) $c_1^0,c_2^0,\dots,c_n^0$ հաստատուններ այնպիսիք, որ (2.1) հավասարման $\varphi(t)$ և $c_1^0 e^{\lambda_1 t} + c_2^0 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n^0 e^{\lambda_n t}$ լուծումները բավարարում են նույն սկզբնական պայմաններին: Համաձայն (2.1) հավասարման համար Կոշու խնդրի լուծման միակության մասին թեորեմի՝ այդ լուծումները համընկնում են ամբողջ իրական առանցքի վրա: Թեորեմ 2.1-ը ապացուցված է:

Այսպիսով՝ (2.4) պայմանի դեպքում (2.6) բանաձևից ստացվում են (2.1) հավասարման բոլոր հնարավոր լուծումները (երբ $c_1,c_2,\dots,c_n$ հաստատունները

[1] Վանդերմոնդի որոշիչի զրո չլինելու անկախ ապացույցը (ավելի ընդհանուր դեպքում) տրվում է §3-ում:

ընդունում են բոլոր հնարավոր արժեքները՝ $c_k \in \mathbb{C}$, $k=1,2,\dots,n$): Այս պատճառով $y(t)=y(t,c_1,c_2,\dots,c_n)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\dots+c_ne^{\lambda_n t}$ ֆունկցիան կոչվում է (2.1) հավասարման *ընդհանուր լուծում* (պարզ արմատների դեպքի համար):

Լեմմա 2.2: Եթե $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ թվերը զույգ առ զույգ իրարից տարբեր են, ապա $\varphi_1(t)=e^{\lambda_1 t},\varphi_2(t)=e^{\lambda_2 t},\dots,\varphi_n(t)=e^{\lambda_n t}$, ֆունկցիաները ((2.5) լուծումները) գծորեն անկախ են:

Ապացույց: Ֆունկցիաների (2.5) համակարգի գծորեն անկախությունը նշանակում է (տես § 1, սահմանում 1.1), որ

$$c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\dots+c_ne^{\lambda_n t}\equiv 0,\ t\in\mathbb{R}, \tag{2.10}$$

նույնությունը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $c_1=c_2=\dots=c_n=0$:

Դիցուք (2.10) նույնությունը տեղի ունի: Ածանցելով այդ նույնությունը $n-1$ անգամ՝ ստանում ենք

$$\begin{cases} c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}+\dots+ c_ne^{\lambda_n t}\equiv 0\\ \lambda_1c_1e^{\lambda_1 t} + \lambda_2c_2e^{\lambda_2 t}+\dots+ \lambda_nc_ne^{\lambda_n t}\equiv 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lambda_1^{n-1}c_1e^{\lambda_1 t}+\lambda_2^{n-1}c_2e^{\lambda_2 t}+\dots+\lambda_n^{n-1}c_ne^{\lambda_n t}\equiv 0\end{cases}$$

նույնությունները, որոնցից $t=0$ արժեքի համար ստացվում է

$$\begin{cases} c_1 + c_2 +\dots+ c_n=0\\ \lambda_1c_1 + \lambda_2c_2+\dots + \lambda_nc_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lambda_1^{n-1}c_1+\lambda_2^{n-1}c_2+\dots +\lambda_n^{n-1}c_n=0\end{cases}$$

(հանրահաշվական) հավասարումների համակարգը, որին պետք է բավարարեն $c_1,c_2,\dots,c_n$ թվերը: Քանի որ այս համասեռ համակարգի գլխավոր որոշիչը Վանդերմոնդի որոշիչն է, որն ուսումնասիրվող դեպքում զրո չէ, ապա այն ունի միակ զրոյական լուծում, այսինքն $c_1=c_2=\dots=c_n=0$: Այսպիսով՝ (2.10) նույնությունը տեղի ունի միայն $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ պայմանի դեպքում, որն էլ նշանակում է, որ նշված ֆունկցիաները գծորեն անկախ են: Լեմման ապացուցված է: Թեորեմ 2.1-ից և լեմմա 2.2-ից հետևում է ևս մի կարևոր պնդում:

Լեմմա 2.3: Եթե (2.1) հավասարման բնութագրիչ բազմանդամի արմատները միապատիկ են (պարզ են), ապա այդ հավասարման լուծումների բազմությունը n-չափանի գծային տարածություն է, իսկ (2.5) լուծումների համակարգը հանդիսանում է այդ տարածության բազիս:

Ապացույցի համար բավական է հիշել գծային տարածության, նրա չափողականության և բազիսի սահմանումները (տես §1):

Այսպիսով, պարզ արմատների դեպքում, (2.1) հավասարման կամայական լուծում ներկայացվում է (2.5) լուծումների համակարգի գծային կոմբինացիայով: Այս պատճառով (2.5) համակարգն անվանվում է (2.1) հավասարման *լուծումների հիմնարար համակարգ:*

Նման սահմանում տրվում է և ընդհանուր (փոփոխական գործակիցների) դեպքում:

Սահմանում 2.1: n-րդ կարգի գծային համասեռ

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)y=0 \qquad (*)$$

հավասարման $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_k$ լուծումների համակարգը կոչվում է *հիմնարար* (ֆունդամենտալ), եթե $k=n$ և այդ լուծումները գծորեն անկախ են:

§5-ում կապացուցվի, որ (*) հավասարման հիմնարար համակարգը գոյություն ունի, և որ այդ հավասարման կամայական լուծում ներկայացվում է հիմնարար համակարգի գծային կոմբինացիայով:

Իսկ մինչ այդ, §3-ում մենք կկառուցենք լուծումների հիմնարար համակարգը (2.1) հաստատուն գործակիցներով համասեռ հավասարման համար այն դեպքում, երբ բնութագրիչ բազմանդամն ունի բազմապատիկ արմատներ:

Օրինակ 2.1: Լուծել $y''+\omega_0^2y=0$ հավասարումը $(\omega_0>0)$: Քանի որ $\lambda^2+\omega_0^2=0$ բնութագրիչ հավասարման արմատներն են $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_0$ թվերը, ապա ընդհանուր լուծումը ընդունում է

$$y(t)=c_1e^{i\omega_0 t}+c_2e^{-i\omega_0 t}$$

տեսքը: Կիրառություններում կարևոր է լինում այս ընդհանուր լուծումից անջատել իրական լուծումների բազմությունը: Քանի որ $e^{i\omega_0 t}$ և $e^{i\omega_0 t}$ ֆունկցիաները կոմպլեքս համալուծ են, ապա վերցնելով $c_2=\bar{c}_1$, կստանանք

$y(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + \overline{c_1 e^{i\omega_0 t}} = \; = 2\,\mathrm{Re}(c_1 e^{i\omega_0 t})$, այսինքն $c_2 = \bar{c}_1$ պայմանի դեպքում ստացվում են իրական լուծումները: Օգտվելով էյլերի՝

$$e^{i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t\,,\quad e^{-i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t - i\sin\omega_0 t$$

բանաձևից, ստանում ենք

$$y(t) = (c_1 + \bar{c}_1)\cos\omega_0 t + i(c_1 - \bar{c}_1)\sin\omega_0 t = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t$$

իրական լուծումների բազմությունը: Սա իր հերթին կարելի է գրել

$$y(t) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega_0 t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega_0 t\right) = A\cdot\cos(\omega_0 t - \varphi)$$

տեսքով, որտեղ $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$:

Վարժություններ

2.1. Լուծել $y'' + 6y' + 5y = 0$ հավասարումը:

2.2. Գտնել $y'' + 4y = 0$ հավասարման որևէ ոչ զրոյական իրական լուծում:

2.3. Լուծել $y^{VI} - y = 0$ հավասարումը:

2.4. Ապացուցել, որ եթե բնութագրիչ բազմանդամի բոլոր արմատները բացասական են $(\lambda_k < 0,\ k = 1,2,\ldots,n)$, ապա (2.1) հավասարման կամայական

$y = \varphi(t)$ լուծում ձգտում է զրոյի, երբ $t \to \infty$, այսինքն $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$:

2.5. Ընդհանրացնել 2.4 խնդրի արդյունքը՝

եթե բնութագրիչ բազմանդամի բոլոր արմատները ունեն բացասական իրական մասեր $(\lambda_k = \nu_k + i\mu_k,\ \ \nu_k < 0,\ \ k = 1,2,\ldots,n)$ ապա (2.1) հավասարման կամայական $y = \varphi(t)$ լուծում ձգտում է զրոյի, երբ $t \to \infty$, այսինքն $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$:

§3. ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ: ԲԱԶՄԱՊԱՏԻԿ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ԴԵՊՔԸ:

Դիցուք (2.1) հավասարման $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամն ունի բազմապատիկ արմատներ: Նշանակելով k_j-ով λ_j արմատի պատիկությունը ($j=1,2,\cdots,m;\ k_1+k_2+\cdots+k_m=n$), $L(\lambda)$ բազմանդամը կարելի է գրել

$$L(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdot\cdots\cdot(\lambda-\lambda_m)^{k_m}$$

տեսքով: Այս դեպքում, իհարկե, $y_1=e^{\lambda_1 t}$, $y_2=e^{\lambda_2 t}$, ..., $y_m=e^{\lambda_m t}$ ֆունկցիաները դարձյալ կլինեն (2.1) հավասարման լուծումներ, բայց քանի որ դրանց թիվը փոքր է n-ից, նրանք չեն կազմում լուծումների հիմնարար համակարգ:

Մեր նպատակն է ապացուցել, որ այս դեպքում նույնպես գոյություն ունեն (2.1) հավասարման n գծորեն անկախ լուծումներ (և բացահայտորեն կառուցել այդ լուծումները) այնպիսիք, որ կամայական լուծում ներկայացվի նրանց գծային կոմբինացիայով: Սա իր հերթին կնշանակի, որ (2.1) հավասարման լուծումների բազմությունը n-չափանի գծային տարածություն է:

Այս նպատակին հասնելու համար կատարենք հետևյալ ուղեցույց դատողությունները: Դիցուք λ_1-ը $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամի երկպատիկ արմատ է, այսինքն $L(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2\cdot M(\lambda)$, որտեղ $M(\lambda)$-ն $n-2$ կարգի բազմանդամ է, ըստ որում $M(\lambda_1)\neq 0$: Սա նշանակում է, որ

$$L(\lambda_1)=0,\quad L'(\lambda_1)=0: \tag{3.1}$$

Ածանցենք[1] ըստ λ-ի

$$L(p)[e^{\lambda t}]=L(\lambda)\cdot e^{\lambda t} \tag{3.2}$$

նույնությունը, որը ստացել էինք նախորդ պարագրաֆում:

Քանի որ $e^{\lambda t}$ ֆունկցիան ըստ t անկախ փոփոխականի և ըստ λ պարամետրի անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիա է, ապա $\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda t}\right)\equiv\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(\frac{d^m}{dt^m}e^{\lambda t}\right)$

[1] Ածանցումը ըստ λ կոմպլեքս փոփոխականի կատարվում է նույն կանոններով, ինչ և իրական փոփոխականի դեպքում (տես §1.4):

նույնությունը տեղի ունի կամայական m և k կարգի ածանցյալների համար: Այստեղից հետևում է

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(L(p)[e^{\lambda t}]\right) \equiv L(p)\left[\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda t}\right],\quad t\in\mathbb{R},\ \lambda\in\mathbb{C}$$

նույնությունը, այսինքն՝ $\dfrac{d^k}{d\lambda^k}$ և $L(p)$ գործողությունները (օպերատորները) տեղափոխելի են: Հետևաբար՝

$$\frac{d}{d\lambda}\left(L(p)[e^{\lambda t}]\right) \equiv L(p)\left[\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t}\right] \equiv L(p)[te^{\lambda t}],$$

իսկ (3.2)-ի աջ կողմի ածանցյալը ընդունում է

$$\frac{d}{d\lambda}\left(L(\lambda)e^{\lambda t}\right) \equiv L'(\lambda)e^{\lambda t} + tL(\lambda)e^{\lambda t} \equiv (L'(\lambda)+tL(\lambda))e^{\lambda t}$$

տեսքը, այսինքն՝ ստանում ենք

$$L(p)[te^{\lambda t}] \equiv (L'(\lambda)+t\cdot L(\lambda))\cdot e^{\lambda t},\quad t\in\mathbb{R},\ \lambda\in\mathbb{C} \tag{3.3}$$

նույնությունը: Այստեղից, $\lambda=\lambda_1$ արժեքի համար, հաշվի առնելով (3.1) առնչությունները, ստանում ենք $L(p)[t\cdot e^{\lambda_1 t}]\equiv 0$ նույնությունը, այսինքն՝ $y=t\cdot e^{\lambda_1 t}$ ֆունկցիան (ինչպես և $y=e^{\lambda_1 t}$) (2.1) հավասարման լուծում է: Մյուս կողմից՝ քանի որ $e^{\lambda t}\neq 0$, ապա (3.3) նույնությունից ստացվում է հետևյալ պնդումը՝ որպեսզի $y=t\cdot e^{\lambda_1 t}$ ֆունկցիան լինի (2.1) հավասարման լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ λ_1-ը լինի $L(\lambda)$ բազմանդամի առնվազն երկպատիկ արմատ (այսինքն, որ տեղի ունենան (3.1) առնչությունները):

Վարժություն 3.1: Ապացուցել, որ $e^{\lambda t}$ և $te^{\lambda t}$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են:

Եթե λ_1-ը $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամի k-պատիկ արմատ է, ապա λ_1-ին համապատասխանող գծորեն անկախ լուծումները կարելի է գտնել նույն եղանակով՝ ածանցենք (3.2) նույնությունը ըստ λ-ի m անգամ: Նույնության ձախ կողմի ածանցյալի համար կունենանք՝

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}\left(L(p)[e^{\lambda t}]\right) \equiv L(p)\left[\frac{d^m}{d\lambda^m}e^{\lambda t}\right] \equiv L(p)[t^m\cdot e^{\lambda t}]$$

իսկ աջ կողմի ածանցյալի համար, օգտվելով (արտադրյալի բարձր կարգի ածանցյալի համար) Լայբնիցի բանաձևից՝

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}(L(\lambda)e^{\lambda t})\equiv(L^{(m)}(\lambda)+C_m^1L^{(m-1)}(\lambda)\cdot t+\cdots+C_m^{m-1}\cdot L'(\lambda)\cdot t^{m-1}+L(\lambda)\cdot t^m)\cdot e^{\lambda t}$$

որտեղ $C_m^i=\dfrac{m(m-1)\cdot\dots\cdot(m-i+1)}{i!}$ թվերը Նյուտոնյան երկանդամի գործակիցներն են: Այսպիսով՝ ստանում ենք (3.2) և (3.3) նույնությունների հետևյալ ընդհանրացումը կամայական m բնական թվի համար՝

$$L(p)[t^me^{\lambda t}]\equiv(L^{(m)}(\lambda)+C_m^1L^{(m-1)}(\lambda)t+\cdots+C_m^{m-1}L'(\lambda)\cdot t^{m-1}+L(\lambda)t^m)e^{\lambda t} \quad (3.4)$$

Լեմմա 3.1: Եթե μ թիվը $L(\lambda)$ բազմանդամի $(k+1)$ պատիկ արմատ է, ապա $e^{\mu t},t\cdot e^{\mu t},\cdots,t^ke^{\mu t}$ ֆունկցիաները հանդիսանում են (2.1) հավասարման լուծումներ:

Ապացույց: Եթե μ-ն $L(\lambda)$ բազմանդամի $(k+1)$ պատիկ արմատ է, ապա $L(\mu)=L'(\mu)=\cdots=L^{(k-1)}(\mu)=L^{(k)}(\mu)=0$ և հետևաբար, (3.4) նույնության աջ մասը $\lambda=\mu$ արժեքի համար նույնաբար (ըստ t-ի) զրո է, երբ $m=0,1,\cdots,k$: Հետևաբար $L(p)[t^m\cdot e^{\mu t}]\equiv0$, երբ $m=0,1,\cdots,k$, այսինքն $e^{\mu t},t\cdot e^{\mu t},\cdots,t^ke^{\mu t}$ ֆունկցիաները (2.1) հավասարման լուծումներն են: Լեմման ապացուցված է:

Հակադարձ պնդումը, այսինքն՝ այն փաստը, որ

$$L(p)[e^{\mu t}]\equiv0,\ L(p)[t\cdot e^{\mu t}]\equiv0,\ \dots,\ L(p)[t^k\cdot e^{\mu t}]\equiv0$$

նույնություններից հետևում է, որ μ թիվը $L(\lambda)$ բազմանդամի $(k+1)$ պատիկ արմատ է, նույնպես ճիշտ է: Սակայն պարզվում է, որ μ թվի $(k+1)$ պատիկ արմատ լինելու համար պահանջվում է շատ ավելի քիչ բան, քան նշված նույնությունները՝ բավական է, որ $L(p)[t^m\cdot e^{\mu t}]$ ֆունկցիաները ընդունեն զրո արժեք գոնե մեկ ընդհանուր կետում: Ավելի ճշգրիտ, տեղի ունի հետևյալ պնդումը.

Լեմմա 3.2: Եթե որևէ t_0 կետի համար

$$L(p)[e^{\mu t}]\big|_{t=t_0}=0,\quad L(p)[t\cdot e^{\mu t}]\big|_{t=t_0}=0,\ \dots,\ L(p)[t^k\cdot e^{\mu t}]\big|_{t=t_0}=0, \quad (3.5)$$

ապա μ թիվը $L(\lambda)$ բազմանդամի առնվազն $(k+1)$ պատիկ արմատ է, այսինքն՝

$$L(\mu)=L'(\mu)=\cdots=L^{(k-1)}(\mu)=L^{(k)}(\mu)=0:$$

Ապացույց: Ապացույցը կատարենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով: Նախ համոզվենք, որ $k=0$ դեպքում պնդումը ճիշտ է: Իրոք, համաձայն (3.2) նույնության, (3.5) պայմանից հետևում է, որ՝

$$L(p)[e^{\mu t}]\Big|_{t=t_0}=L(\mu)e^{\mu t_0}=0:$$

Քանի որ $e^{\mu t_0}\neq 0$, ապա $L(\mu)=0$: Դիցուք պնդումը ճիշտ է որևէ r $(r=1,2,\cdots,k-1)$ թվի համար, այսինքն՝ $L(p)[e^{\mu t}]\Big|_{t=t_0}=L(p)[t\cdot e^{\mu t}]\Big|_{t=t_0}=$

$=\cdots=L(p)[t^r\cdot e^{\mu t}]\Big|_{t=t_0}=0$ պայմանից հետևում են

$L(\mu)=L'(\mu)=\cdots=L^{(r-1)}(\mu)==L^{(r)}(\mu)=0$ հավասարությունները:

Ապացուցենք, որ այդ դեպքում պնդումը ճիշտ է նաև $r+1$ $(1\leq r+1\leq k)$ թվի համար: Իրոք, համաձայն (3.4) նույնության և ըստ ինդուկցիայի պայմանի՝

$(L(\mu)=L'(\mu)=\cdots=L^{(r)}(\mu)=0)$,

$$L(p)[t^{r+1}e^{\mu t}]\Big|_{t=t_0}\equiv(L^{(r+1)}(\mu)+C^1_{r+1}L^{(r)}(\mu)t_0+\cdots+C^r_{r+1}L'(\mu)\cdot t_0^r+L(\mu)t_0^{r+1})e^{\mu t_0}=$$

$=L^{(r+1)}(\mu)\cdot e^{\mu t_0}=0$, որտեղից $L^{(r+1)}(\mu)=0$:

Լեմման ապացուցված է:

Եվ այսպես, դիցուք $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամի զույգ առ զույգ իրարից տարբեր արմատներն են $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ թվերը, համապատասխանաբար $k_1,k_2,\cdots,k_m$ պատիկություններով, $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$: Նշանակենք

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t)=e^{\lambda_1 t},\ \varphi_2(t)=te^{\lambda_1 t},\cdots,\ \varphi_{k_1}(t)=t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}\\
&\varphi_{k_1+1}(t)=e^{\lambda_2 t},\ \varphi_{k_1+2}(t)=te^{\lambda_2 t},\cdots,\ \varphi_{k_1+k_2}(t)=t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}+1}(t)=e^{\lambda_m t},\cdots,\ \varphi_n(t)=t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}
\end{aligned}\tag{3.6}$$

Համաձայն լեմմա 3.1-ի՝ (3.6) համակարգի բոլոր ֆունկցիաները (2.1) հավասարման լուծումներ են: Քանի որ դրանց թիվը n է, ապա, եթե ապացուցվի դրանց գծորեն անկախությունը, (3.6) համակարգը կլինի լուծումների հիմնարար համակարգ:

Լեմմա 3.3: (3.6) ֆունկցիաների համակարգը գծորեն անկախ է:

Ապացույց: Դիցուք գոյություն ունեն $c_1, c_2, \cdots, c_n$ թվեր, այնպիսիք, որ տեղի ունի

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0, \ t \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

նույնությունը: Ածանցելով այս նույնությունը $n-1$ անգամ, կստանանք՝

$$\begin{aligned}
&c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0 \\
&c_1\varphi_1'(t) + c_2\varphi_2'(t) + \cdots + c_n\varphi_n'(t) \equiv 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&c_1\varphi_1^{(n-1)}(t) + c_2\varphi_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(t) \equiv 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

նույնությունների համակարգը: Նշանակելով $\Phi(t)$-ով

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

(3.8) համակարգի գլխավոր մատրիցը, իսկ $\vec{C}$-ով, և $\vec{0}$-ով $\vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$ և $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ վեկտոր-սյուները, (3.8) համակարգը գրենք $\Phi(t)\cdot\vec{C} = \vec{0}$ տեսքով: $\Phi(t)$ մատրիցի որոշիչը նշանակենք $W(t) = \det\Phi(t)$: Եթե ապացուցենք, որ $W(t)$ որոշիչը որևէ

t_0 կետում զրո չի դառնում, ապա սրանից կհետևի, որ $\Phi(t_0)\cdot\vec{C}=\vec{0}$ գծային համասեռ (հանրահաշվական) համակարգն ունի միայն զրոյական լուծում, այսինքն՝ (3.7) նույնությունը հնարավոր է միայն $c_1=c_2=\cdots=c_n$ դեպքում, ինչով և ավարտած կլինենք լեմմա 3.3-ի ապացույցը: Սրա փոխարեն (որ $W(t_0)\neq 0$) ապացուցենք ավելի ընդհանուր պնդում:

Լեմմա 3. 4: $W(t)$ որոշիչը ոչ մի կետում զրո չի դառնում:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը՝ $W(t_0)=0$ որևէ t_0 կետում: Դա նշանակում է, որ $\Phi(t_0)$ մատրիցի տողերի միջև կա գծային կախվածություն, որն իր հերթին նշանակում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի $b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}$ թվեր, $\left(\sum_{k=0}^{n-1}|b_k|^2\right)\neq 0$, որ բազմապատկելով k-րդ տողը b_{k-1}-ով, $k=1,\cdots,n$ և գումարելով այդպես ստացված տողերը, կստանանք զրոյական տող, այսինքն՝

$$\sum_{k=0}^{n-1}b_k\varphi_j^{(k)}(t_0)=0,\quad j=1,2,\cdots n: \tag{3.10}$$

Նշանակենք $M(p)$-ով p դիֆերենցման սիմվոլի նկատմամբ $(n-1)$ կարգի $M(p)=\sum_{k=0}^{n-1}b_kp^k$ բազմանդամը[1]: Օգտվելով այս նշանակումից՝ (3.10) առնչություններն գրենք

$$\sum_{k=0}^{n-1}b_k\varphi_j^{(k)}(t_0)=\sum_{k=0}^{n-1}b_kp^k[\varphi_j(t)]\Big|_{t=t_0}=M(p)[\varphi_j(t)]\Big|_{t=t_0}=0, \tag{3.11}$$

$j=1,2,\cdots,n$ տեսքով: Վերցնելով $j=1,2,\cdots,k_1$, ստանում ենք (տես(3.6))՝

$$M(p)[e^{\lambda_1 t}]\Big|_{t=t_0}=0,\ M(p)[te^{\lambda_1 t}]\Big|_{t=t_0}=0,\ldots,\ M(p)[t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}]\Big|_{t=t_0}=0,$$

որտեղից, համաձայն լեմմա 3.2 –ի, հետևում է, որ λ_1 թիվը $M(\lambda)$ բազմանդամի առնվազն k_1 պատիկության արմատ է: Նմանապես $j=k_1+1,k_1+2,\cdots$

---

[1] Ավելի ճշգրիտ, $M(p)$ բազմանդամի կարգը $\leq n-1$, քանի որ $b_{n-1}=0$ դեպքը չի բացառվում:

$\cdots, k_1+k_2$ արժեքների համար (3.11) -ից և լեմմա 3.2-ից հետևում է, որ λ_2-ը $M(\lambda)$ բազմանդամի առնվազն k_2 պատիկության արմատ է: Շարունակելով այսպես՝ կստանանք, որ λ_p-ն $(1 \le p \le m)$ $M(\lambda)$ բազմանդամի առնվազն k_p պատիկության արմատ է:

Քանի որ $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$, ապա ստացվում է, որ $n-1$-րդ կարգի $M(\lambda)$ բազմանդամն ունի առնվազն n արմատ, ինչը հակասում է հանրահաշվի հիմնական թեորեմին: Լեմմա 3.4-ը ապացուցված է (հետևաբար՝ ապացուցված է և լեմմա 3.3-ը):

Դիտողություն: Միապատիկ արմատների դեպքում (3.9)-ով տրված $\Phi(t)$ մատրիցի որոշիչը $t=0$ կետում համընկնում է Վանդերմոնդի որոշիչի հետ, այնպես որ, լեմմա 3.4-ից, մասնավորապես, հետևում է Վանդերմոնդի որոշիչի զրո չլինելը:

Թեորեմ 3.1: Հաստատուն գործակիցներով (2.1) հավասարման կամայական $y=\psi(t)$ լուծում ներկայացվում է (3.6) լուծումների հիմնարար համակարգի գծային կոմբինացիայով:

Ապացույց: Դիցուք $y=\psi(t)$-ն (2.1) հավասարման որևէ լուծում է և t_0-ն որևէ իրական կետ է: $\psi(t)$ ֆունկցիան և նրա մինչև $(n-1)$-րդ կարգի ածանցյալները $t=t_0$ կետում ընդունում են որոշակի

$$\psi(t_0)=b_1,\quad \psi'(t_0)=b_2, \dots,\quad \psi^{(n-1)}(t_0)=b_n \tag{3.12}$$

արժեքներ, այսինքն՝ $y=\psi(t)$ ֆունկցիան (2.1), (3.12) Կոշու խնդրի լուծումն է: Ապացուցենք, որ գոյություն ունեն այնպիսի (միարժեք որոշվող) $c_1, c_2, \cdots c_n$ թվեր, որ $\varphi(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)$ ֆունկցիան ((2.1)-ի լուծումը) t_0 կետում կբավարարի նույն

$$\varphi(t_0)=b_1,\quad \varphi'(t_0)=b_2,\ \dots,\quad \varphi^{(n-1)}(t_0)=b_n \tag{3.12^1}$$

սկզբնական պայմաններին: Այստեղից, ըստ (2.1) հավասարման համար Կոշու խնդրի լուծման միակության, կհետևի, որ.

$$\psi(t) \equiv \varphi(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t),\quad t\in\mathbb{R} \tag{3.13}$$

և թեորեմ 3.1-ը ապացուցված կլինի: Այս նպատակով պահանջելով, որ $\varphi(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)$ բանաձևով որոշված ֆունկցիան բավարարի (3.12[1]) պայմաններին, կստանանք

$$\Phi(t_0)\cdot\vec{C}=\vec{b} \tag{3.14}$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը

$$\left(\vec{C}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\cdots\\c_n\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{pmatrix}\right)$$

$c_1,c_2,\cdots,c_n$ անհայտների նկատմամբ, որտեղ $\Phi(t)$ մատրիցը որոշված է (3.9) բանաձևով: Քանի որ (3.14) համակարգի $\Phi(t_0)$ գլխավոր մատրիցի $W(t_0)$ որոշիչը հավասար չէ զրոյի (լեմմա 3.4), ապա (3.14) համակարգը ունի միակ $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ լուծում: Թեորեմն ապացուցված է:

Եվ այսպես, մենք ստանում ենք, որ հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ հավասարման լուծումների բազմությունը տրվում է

$$\psi(t)=(c_1+c_2t+\cdots+c_{k_1}t^{k_1-1})e^{\lambda_1 t}+\cdots+(c_{k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}+1}+\cdots+c_nt^{k_m-1})e^{\lambda_m t}$$

բանաձևով, որտեղ $c_1,c_2,\cdots,c_n$-ը կամայական հաստատուններ են, կամ, որ նույնն է,

$$\psi(t)=p_1(t)e^{\lambda_1 t}+p_2(t)e^{\lambda_2 t}+\cdots+p_m(t)e^{\lambda_m t}, \tag{3.15}$$

որտեղ $p_j(t)$-ն k_j-1-րդ կարգի բազմանդամ է $(j=1,2,\cdots,m)$:

(3.15) տեսքի ֆունկցիաները կոչվում են *քվազիբազմանդամներ*[1]:

Ավարտելով հաստատուն գործակիցներով համասեռ հավասարումների ուսումնասիրությունը՝ ևս մեկ անգամ շեշտենք այն կարևոր փաստը, որ այդ հավասարումների կամայական լուծում քվազիբազմանդամ է:

[1] «Քվազի» լատինական բառը կարելի է փոխարինել «համարյա» բառով:

Վարժություն 3.2: Ապացուցել, որ կամայական քվազիբազմանդամ հանդիսանում է մի որոշակի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ հավասարման լուծում:

Եթե (2.1) հավասարման $a_1, a_2, \cdots, a_n$ գործակիցները իրական թվեր են, ապա կարելի է (2.1) հավասարման բոլոր (կոմպլեքս) լուծումների բազմությունից առանձնացնել բոլոր իրական լուծումները: Դիցուք μ-ն $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամի $k+1$ պատիկ արմատն է: Այդ դեպքում $e^{\mu t}, t \cdot e^{\mu t}, \cdots, t^k e^{\mu t}$ ֆունկցիաները (2.1) հավասարման լուծումներ են: Եթե μ արմատը իրական է, ապա $t^p e^{\mu t}$ $(0 \le p \le k)$ լուծումը իրական է, իսկ եթե μ արմատը կոմպլեքս է (ոչ իրական), ապա $t^p e^{\mu t}$ լուծման հետ առկա է դրան կոմպլեքս համալուծ $t^p e^{\bar{\mu} t}$ լուծումը, քանի որ (իրական գործակիցների դեպքում) $\bar{\mu}$ թիվը $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամի նույն $k+1$ պատիկության արմատ է, ինչ և μ թիվը: Այսպիսով՝ (3.6) լուծումների համակարգում ամեն մի կոմպլեքս լուծման հետ մասնակցում է նրա կոմպլեքս համալուծ լուծումը:

Որպեսզի (3.13) բանաձևով որոշված (ընդհանուր) լուծումը լինի իրական, անհրաժեշտ է և բավարար, որ իրական լուծումների գործակիցները լինեն իրական, իսկ կոմպլեքս համալուծ լուծումների գործակիցները լինեն կոմպլեքս համալուծ թվեր: Այս պնդման ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին:

Վարժություն 3.3: Ապացուցել, որ եթե (2.1) հավասարման $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամի բոլոր $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ արմատները ունեն բացասական իրական մասեր $(\lambda_k = \nu_k + i\mu_k,\ \nu_k < 0,\ k = 1, 2, \cdots, m)$, ապա (2.1) հավասարման կամայական $y = \varphi(t)$ լուծում ձգտում է զրոյի, երբ $t \to \infty$, այսինքն՝ $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = 0$:

§4. ՔՎԱԶԻԲԱԶՄԱՆԴԱՄԱՅԻՆ ԱԶԱՏ ԱՆԴԱՄՈՎ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ: ՌԵԶՈՆԱՆՍ

Դիտարկենք հաստատուն գործակիցներով անհամասեռ հավասարումն այն դեպքում, երբ ազատ անդամը հանդիսանում է քվազիբազմանդամ, այսինքն՝ ունի

$$F(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + f_m(t)e^{\lambda_m t}$$

տեսքը, որտեղ $f_k(t)$ $(k = 1,2,\cdots,m)$ ֆունկցիաները բազմանդամներ են: Եթե $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ թվերից որևէ երկուսը համընկնում են, օրինակ՝ $\lambda_1 = \lambda_2$, ապա համապատասխան գումարելիները կարելի է միավորել և գրել $(f_1(t) + f_2(t))e^{\lambda_1 t}$ տեսքով, այսինքն՝ $F(t)$ քվազիբազմանդամը միշտ կարելի է բերել այնպիսի տեսքի, որում $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ թվերը զույգ առ զույգ իրարից տարբեր են: Նկատենք նաև, որ քվազիբազմանդամների գումարն ու արտադրյալը նույնպես քվազիբազմանդամներ են և եթե կամայական քվազիբազմանդամի վրա կիրառենք կամայական $L(p)$ օպերատոր, ապա կրկին կստանանք քվազիբազմանդամ: Ինչպես տեսանք §3-ում, հաստատուն գործակիցներով համասեռ հավասարումների բոլոր լուծումները քվազիբազմանդամներ են: Այս հանգամանքը և քվազիբազմանդամների վերը նշված հատկությունները հուշում են, որ հաստատուն գործակիցներով $L(p)[y] = F(t)$ անհամասեռ հավասարման լուծումներ կարող են հանդիսանալ միայն քվազիբազմանդամներ: Պարզվում է, որ դա այդպես է, որում մենք կհամոզվենք ստորև:

Եվ այսպես, ուսումնասիրենք

$$L(p)[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + f_m(t)e^{\lambda_m t} \tag{4.1}$$

հավասարումը: Եթե $y = \varphi_k(t)$ ֆունկցիան $L(p)[y] = f_k(t)e^{\lambda_k t}$ $(k = 1,\cdots,m)$ հավասարման լուծումն է, ապա (տես §1,դ) $y = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \cdots + \varphi_m(t)$ ֆունկցիան կլինի (4.1) հավասարման լուծում, այնպես, որ բավական է ուսումնասիրել (լուծել)

$$L(p)[y] = P(t)e^{\mu t} \tag{4.2}$$

հավասարումը, որտեղ $P(t)$-ն կամայական բազմանդամ է, իսկ μ-ն՝ որևէ թիվ:

Մյուս կողմից (տես դիտողություն 1.1), եթե $y = \varphi(t)$ ֆունկցիան (4.2) հավասարման որևէ լուծում է, ապա այդ հավասարման կամայական լուծում տրվում է

$$y(t) = y_0(t) + \varphi(t)$$

բանաձևով, որտեղ $y_0(t)$-ն (4.2)-ին համապատասխանող $L(p)[y] = 0$ համասեռ հավասարման որոշակի լուծում է: Քանի որ մենք արդեն գիտենք, թե ինչպես է կառուցվում համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը (տես §3), ապա (4.2) հավասարման լուծման խնդիրը բերվում է նրա որևէ մասնակի լուծման կառուցմանը: Այս մասնակի լուծման կառուցման եղանակը տրվում է հետևյալ թեորեմում:

Թեորեմ 4.1: Դիտարկենք

$$L(p)[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = P_m(t) e^{\mu t} \tag{4.3}$$

հավասարումը, որտեղ $P_m(t) \equiv \sum_{j=0}^{m} p_j t^j$ m-րդ կարգի բազմանդամ է, իսկ μ-ն որևէ (կոմպլեքս) թիվ է:

Այդ դեպքում գոյություն ունի միակ m-րդ կարգի $Q_m(t)$ բազմանդամ այնպիսին, որ

$$\varphi(t) \equiv t^k Q_m(t) e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{4.4}$$

ֆունկցիան հանդիսանում է (4.3) հավասարման լուծում, ըստ որում, k թիվը հավասար է μ արմատի պատիկությանը, եթե $L(\mu) = 0$ և $k = 0$, եթե $L(\mu) \neq 0$: $Q_m(t)$ բազմանդամի գործակիցները միարժեքորեն որոշվում են $L(\lambda)$ բազմանդամի $a_1, a_2, \cdots, a_n$ և $P_m(t)$ բազմանդամի $p_m, p_{m-1}, \cdots, p_0$ գործակիցներով:

Ապացույց: Պարզության համար սկսենք այն դեպքից, երբ μ թիվը $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամի արմատ չէ, այսինքն՝ $L(\mu) \neq 0$ և, հետևաբար, $k = 0$: Ցույց տանք, որ որպեսզի $\varphi(t) \equiv Q_m(t) e^{\mu t} \equiv (q_0 + q_1 t + \cdots + q_m t^m) e^{\mu t}$ ֆունկցիան հանդիսանա (4.3) հավասարման լուծում, այսինքն տեղի ունենա

$$L(p)\left[Q_m(t) e^{\mu t}\right] \equiv P_m(t) e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{4.5}$$

նույնությունը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $q_0, q_1, \cdots, q_m$ գործակիցները հանդիսանան որոշակի (տես ստորև (4.6)) գծային հանրահաշվական համակարգի լուծում: Իրոք, օգտվելով $L(p)$ օպերատորի գծայնությունից, գրենք (4.5)-ի ձախ մասը

$$L(p)\left[Q_m(t) e^{\mu t}\right] \equiv L(p)\left[(q_0 + q_1 t + \cdots + q_m t^m) e^{\mu t}\right] \equiv$$

$$\equiv q_0 L(p)\left[e^{\mu t}\right] + q_1 L(p)\left[t e^{\mu t}\right] + \cdots + q_m L(p)\left[t^m e^{\mu t}\right]$$

տեսքով և օգտագործելով նախորդ պարագրաֆում արտածված (3.4) բանաձևը՝ (4.5) առնչությունը գրենք

$$q_0 L(\mu) e^{\mu t} + q_1 (L'(\mu) + L(\mu) t) e^{\mu t} + \cdots + q_m (L^{(m)}(\mu) + C_m^1 L^{(m-1)}(\mu) t + \cdots$$

$$\cdots + C_m^{m-1} L'(\mu) t^{m-1} + L(\mu) t^m) e^{\mu t} \equiv (p_0 + p_1 t + \cdots + p_m t^m) e^{\mu t}$$

նույնության տեսքով: Բաժանելով ստացված առնչության երկու կողմը $e^{\mu t}$-ի վրա՝ ստանում ենք նույնություն երկու m-րդ կարգի բազմանդամների միջև, որն, ինչպես հայտնի է, կարող է տեղի ունենալ այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ բազմանդամների համապատասխան գործակիցները հավասար են, այսինքն՝ (4.5) նույնությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $q_0, q_1, \cdots, q_m$ գործակիցները հանդիսանում են

$$
\begin{cases}
q_0L(\mu)+q_1L'(\mu)+q_2L''(\mu)+\ldots+q_{m-1}L^{(m-1)}(\mu) + q_mL^{(m)}(\mu)=p_o, \\
q_1L(\mu)+q_2C_2^1L'(\mu)+\ldots+q_{m-1}C_{m-1}^1L^{(m-2)}(\mu)+q_mC_m^1L^{(m-1)}(\mu)=p_1, \\
q_2L(\mu)+\ldots+q_{m-1}C_{m-1}^2L^{(m-3)}(\mu) + q_mC_m^2L^{(m-2)}(\mu)=p_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
q_{m-1}L(\mu)+q_mC_m^{m-1}L'(\mu)=p_{m-1}, \\
q_mL(\mu)=p_m
\end{cases}
\tag{4.6}
$$

հավասարումների համակարգի լուծում: Քանի որ (4.6) գծային հանրահաշվական համակարգի գլխավոր որոշիչը՝

$$
\det\begin{pmatrix}
L(\mu) & L'(\mu) & L''(\mu) & \cdots & L^{(m-1)}(\mu) & L^{(m)}(\mu) \\
0 & L(\mu) & C_2^1L'(\mu) & \cdots & C_{m-1}^1L^{(m-2)}(\mu) & C_m^1L^{(m-1)}(\mu) \\
0 & 0 & L(\mu) & \cdots & C_{m-1}^2L^{(m-3)}(\mu) & C_m^2L^{(m-2)}(\mu) \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & L(\mu) & C_m^{m-1}L'(\mu) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L(\mu)
\end{pmatrix} = (L(\mu))^{m+1} \neq 0,
$$

ապա (4.6)-ի լուծումը գոյություն ունի և միակն է, այսինքն՝ $L(\mu)\neq 0$ դեպքում $Q_m(t)$ բազմանդամի գոյությունը և միակությունը ապացուցված է:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ μ թիվը $L(\lambda)$ բազմանդամի k-պատիկ արմատ է, այսինքն՝

$$
L(\mu)=L'(\mu)=\cdots=L^{(k-1)}(\mu)=0, \qquad L^{(k)}(\mu)\neq 0. \tag{4.7}
$$

Այս դեպքում $Q_m(t)=q_mt^m+q_{m-1}t^{m-1}+\cdots+q_0$ բազմանդամի (դեռևս անորոշ) $q_m, q_{m-1}, \cdots q_0$ գործակիցները պետք է որոշվեն այն պայմանից, որ տեղի ունենա

$$
L(p)[t^kQ_m(t)e^{\mu t}]\equiv P_m(t)e^{\mu t}, \quad t\in\mathbf{R} \tag{4.8}
$$

նույնությունը, որը կնշանակի, որ (4.4) բանաձևով որոշված $\varphi(t)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (4.3) հավասարման լուծում: $L(p)$ օպերատորի գծայնությունից հետևում է, որ (4.8) նույնության ձախ մասը կարելի է ներկայացնել

$$L(p)\left[(q_0 t^k + q_1 t^{k+1} + \cdots + q_m t^{k+m})e^{\mu t}\right] \equiv q_0 L(p)\left[t^k e^{\mu t}\right] + q_1 L(p)\left[t^{k+1} e^{\mu t}\right] + \cdots$$
$$+ q_m L(p)\left[t^{k+m} e^{\mu t}\right]$$

տեսքով: Օգտվելով (3.4) նույնությունից և (4.7) պայմաններից, (4.8) նույնությունը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$L(P)\left[t^k Q_m(t) e^{\mu t}\right] \equiv q_0 (L^{(k)}(\mu) + C_k^1 L^{(k-1)}(\mu)t + \cdots + C_k^{k-1} L'(\mu)t^{k-1} + L(\mu)t^k) \cdot e^{\mu t} +$$

$$+ q_1 (L^{(k+1)}(\mu) + C_{k+1}^1 L^{(k)}(\mu)t + \cdots + C_{k+1}^k L'(\mu)t^k + L(\mu)t^{k+1}) \cdot e^{\mu t} + \cdots +$$

$$+ q_m (L^{(k+m)}(\mu) + C_{k+m}^1 L^{(k+m-1)}(\mu)t + \cdots + C_{k+m}^{k+m-1} L'(\mu)t^{k+m-1} + L(\mu)t^{k+m}) \cdot e^{\mu t} \equiv$$

$$\equiv \{q_0 L^{(k)}(\mu) + q_1 (L^{(k+1)}(\mu) + C_{k+1}^1 L^{(k)}(\mu)t) + \cdots + q_m (L^{(k+m)}(\mu) + C_{k+m}^1 L^{(k+m-1)}(\mu)t + \cdots$$

$$+ C_{k+m}^m L^{(k)}(\mu)t^m)\} e^{\mu t} \equiv (p_0 + p_1 t + \cdots + p_m t^m) e^{\mu t}:$$

Բաժանելով ստացված առնչության երկու կողմը $e^{\mu t}$-ի վրա ստանում ենք նույնություն երկու m-րդ կարգի բազմանդամների միջև, որը կարող է տեղի ունենալ այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ բազմանդամների համապատասխան գործակիցները հավասար են, այսինքն՝ (4.8) նույնությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $q_0, q_1, \cdots, q_m$ գործակիցները հանդիսանում են

$$\begin{aligned}
&q_0 L^{(k)}(\mu) + q_1 L^{(k+1)}(\mu) + q_2 L^{(k+2)}(\mu) + \cdots + q_{m-1} L^{(k+m-1)}(\mu) + q_m L^{(k+m)}(\mu) = p_0, \\
&q_1 C_{k+1}^1 L^k(\mu) + q_2 C_{k+2}^1 L^{(k+1)}(\mu) + \cdots + q_{m-1} C_{k+m-1}^1 L^{(k+m-2)}(\mu) + q_m C_{k+m}^1 L^{(k+m-1)}(\mu) = p_1, \\
&\qquad q_2 C_{k+2}^2 L^{(k)}(\mu) + \cdots + q_{m-1} C_{k+m-1}^2 L^{(k+m-3)}(\mu) + q_m C_{k+m}^2 L^{(k+m-2)}(\mu) = p_2, \\
&\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\qquad\qquad q_{m-1} C_{k+m-1}^{m-1} L^{(k)}(\mu) + q_m C_{k+m}^{m-1} L^{(k+1)}(\mu) = p_{m-1}, \\
&\qquad\qquad\qquad q_m C_{k+m}^m L^{(k)}(\mu) = p_m
\end{aligned} \tag{4.9}$$

հավասարումների համակարգի լուծում: Քանի որ այս գծային հանրահաշվական համակարգի գլխավոր մատրիցը «եռանկյունաձև է» (ինչպես և նախորդ $k = 0$

դեպքում) և նրա որոշիչը հավասար է $C_{k+1}^1 \cdot C_{k+2}^2 \cdot \dots \cdot C_{k+m}^m \cdot (L^{(k)}(\mu))^{m+1} \neq 0$ (համաձայն (4.7) պայմանի), ապա (4.9) համակարգի լուծումը գոյություն ունի և միակն է, այսինքն՝ այս դեպքում նույնպես $Q_m(t)$ բազմանդամի գոյությունն ու միակությունը ապացուցված է: Այսպիսով՝ թեորեմ 4.1-ը ապացուցված է:

Օրինակ: Լուծել $y'' - 4y' + 3y = t^2 \cdot e^{2t}$ հավասարումը:

Լուծում: Նշված հավասարմանը համապատասխանող համասեռ $y'' - 4y' + 3y = 0$ հավասարման $L(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$ բնութագրիչ բազմանդամի արմատներն են $\lambda_1 = 1$ և $\lambda_2 = 3$ թվերը: Քանի որ $\mu = 2$ թիվը չի համընկնում արմատներից ոչ մեկի հետ, անհամասեռ հավասարման մասնակի լուծումը փնտրում ենք $\varphi(t) \equiv (q_2 t^2 + q_1 t + q_0) \cdot e^{2t}$ տեսքով: Տեղադրելով $\varphi(t)$ ֆունկցիան հավասարման մեջ՝ ստանում ենք.

$$\left\{- q_2 t^2 + (q_1 - q_2)t + (2q_2 - q_1 - q_0)\right\} \cdot e^{2t} = t^2 \cdot e^{2t}:$$

Որպեսզի ստացված առնչությունը լինի նույնություն (ըստ $t \in R$) անհրաժեշտ է և բավարար, որ q_0, q_1, q_2 գործակիցները բավարարեն

$$-q_0 - q_1 + 2q_2 = 0$$

$$q_1 - 4q_2 = 0$$

$$-q_2 = 1$$

հավասարումների համակարգին, որտեղից հետևում է, որ $q_2 = -1, q_1 = -4, q_0 = 2$: Այսպիսով՝ $y'' - 4y' + 3y = t^2 \cdot e^{2t}$ հավասարման լուծումների բազմությունը (ընդհանուր լուծումը) նկարագրվում է

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + (-t^2 - 4t + 2)e^{2t}$$

բանաձևով, որտեղ c_1-ը և c_2-ը կամայական հաստատուններ են:

Եղանակը, որի միջոցով ստացվում է (4.3) հավասարման մասնակի լուծումը, կոչվում է *անորոշ գործակիցների եղանակ* (այսինքն՝ մենք փնտրում ենք լուծումը (4.4) տեսքով, որտեղ $Q_m(t)$ բազմանդամի գործակիցները սկզբում «անորոշ» թվեր են):

Եթե μ թիվը բնութագրիչ բազմանդամի արմատ է (այսինքն՝ $k \geq 1$), ապա ասում են, որ տեղի ունի *ռեզոնանս:*

Փորձենք պարզել ինչու այս դեպքին տրվում է հատուկ անվանում՝ ռեզոնանս, որը տատանումների տեսությունում նշանակում է որոշակի ֆիզիկական երևույթ:

Մեխանիկայում

$$y'' + \omega_0^2 y = 0 \qquad (4.10)$$

համասեռ հավասարումը $(\omega_0 > 0)$ անվանում են հարմոնիկ տատանումների հավասարում: Այս հավասարման իրական լուծումների բազմությունը կարելի է նկարագրել

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$$

բանաձևով (տես §2), որտեղ A-ն և φ-ն կամայական իրական հաստատուններ են: (4.10) հավասարումը նկարագրում է նյութական կետի «ազատ» (այսինքն՝ երբ բացակայում է արտաքին ազդեցությունը) տատանումները: A թիվը կոչվում է տատանումների ամպլիտուդա (լայնույթ), իսկ ω_0-ն կոչվում է (4.10) հավասարման «սեփական» հաճախականություն:

$$y'' + \omega_0^2 y = F \cdot \cos\omega t \qquad (4.11)$$

անհամասեռ հավասարումը $(\omega > 0, F = const \neq 0)$ նկարագրում է նյութական կետի տատանումները $F \cdot \cos\omega t$ արտաքին ուժի ազդեցության տակ (ω-ն կոչվում է արտաքին ուժի հաճախականություն):

Նախ նկատենք, որ եթե $y = z(t)$ ֆունկցիան

$$y'' + \omega_0^2 y = F \cdot e^{i\omega t} \qquad (4.12)$$

հավասարման լուծումն է $(z(t) \equiv \varphi(t) + i\phi(t))$, ապա այդ լուծման իրական մասը $\varphi(t)$-ն կլինի (4.11) հավասարման լուծում: Իրոք, եթե

$$\varphi''(t) + i\psi''(t) + \omega_0^2\varphi(t) + i\omega_0^2\psi(t) \equiv F \cdot e^{i\omega t} \equiv F\cos\omega t + iF\sin\omega t,$$

ապա այս նույնության իրական մասերի հավասարությունից հետևում է, որ

$$\varphi''(t) + \omega_0^2\varphi(t) \equiv F\cos\omega t :$$

Այս պատճառով, նախ լուծենք (4.12) հավասարումը, և ապա վերցնելով այդ լուծման իրական մասը, ստանանք (4.11)-ի իրական լուծումը:

Քանի որ (4.12)-ին համապատասխանող (4.10) համասեռ հավասարման բնութագրիչ բազմանդամի $(L(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2)$ արմատներն են $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$

թվերը, ապա (4.12) մասնակի ((4.4) տեսքի) լուծումը կառուցելու համար պետք է տարբերել երկու դեպք՝

1) $\omega \neq \omega_0$ և 2) $\omega = \omega_0$, որը, ըստ մեր սահմանման, ռեզոնանսի դեպքն է:

Առաջին դեպքում (4.12)-ի մասնակի լուծումը փնտրում ենք $z(t) = q_0 e^{i\omega t}$ տեսքով: Տեղադրելով (4.12)-ի մեջ՝ ստանում ենք $z(t) = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega t}$ և նրա իրական մասը՝

$$\varphi(t) = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t : \tag{4.13}$$

Երկրորդ (ռեզոնանսի) դեպքում մասնակի լուծումը փնտրում ենք $z(t) = q_0 t e^{i\omega_0 t}$ տեսքով: Տեղադրելով այն հավասարման մեջ՝ ստանում ենք $z(t) = \frac{F \cdot t}{2i\omega_0} e^{i\omega_0 t}$ և նրա իրական մասը՝

$$\varphi(t) = \frac{F \cdot t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \tag{4.14}$$

Երկու դեպքում էլ (4.13) և (4.14) լուծումները նկարագրում են տատանումներ, սակայն, եթե առաջին $(\omega \neq \omega_0)$ դեպքում (4.13) լուծման $\frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}$ ամպլիտուդան մնում է սահմանափակ (և նրա հետ մնում են սահմանափակ (4.11) հավասարման բոլոր $y(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$ լուծումները, ապա երկրորդ դեպքում (4.14) լուծման $\frac{F \cdot t}{2\omega_0}$ ամպլիտուդան անսահմանափակորեն աճում է ժամանակի հետ: Հենց այս, ամպլիտուդի անսահմանափակ աճի երևույթը տատանումների տեսությունում կոչվում է ռեզոնանս և դրա պատճառն է արտաքին ուժի ω և տատանողական համակարգի «սեփական» ω_0 հաճախականությունների համընկնումը:

§ 5. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ

Այստեղ կուսումնասիրենք

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+a_2(t)y^{(n-2)}+\cdots+a_n(t)y=0 \tag{5.1}$$

գծային համասեռ հավասարումը, որի $a_1, a_2, \cdots, a_n$ գործակիցները անընդհատ ֆունկցիաներ են, որոշված որևէ (a,b) (վերջավոր կամ անվերջ) միջակայքում: Մեր հիմնական նպատակն է ապացուցել, որ (ինչպես և հաստատուն գործակիցների դեպքում) գոյություն ունեն (5.1) հավասարման

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t) \tag{5.2}$$

լուծումներ այնպիսիք, որ

1) նրանք գծորեն անկախ են, այսինքն՝ կազմում են լուծումների հիմնարար համակարգ,

2) (5.1) հավասարման կամայական լուծում կարելի է ներկայացնել

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)$$

գծային կոմբինացիայի տեսքով: Սա նշանակի, որ (5.1) հավասարման լուծումների բազմությունը n-չափանի գծային տարածություն է և (5.2) հիմնարար համակարգը այդ տարածության բազիսն է:

Հիշեցնենք (տես գլ. I), որ

$$y=x_1, \quad y'=x_2, \quad \cdots, y^{(n-1)}=x_n$$

փոփոխականների փոխարինմամբ (5.1) հավասարումը բերվում է համարժեք

$$\begin{cases} x_1'=x_2 \\ x_2'=x_3 \\ \cdots \\ x_{n-1}'=x_n \\ x_n'=-a_n(t)x_1-a_{n-1}(t)x_2-\cdots-a_1(t)x_n \end{cases}$$

գծային համասեռ նորմալ համակարգի: Առաջին գլխում բերված թեորեմ III-ից և թեորեմ VI-ից, որպես հետևություն, բխում է գոյության և միակության հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ *5.1:* Դիցուք $a_k \in C(a,b)$, $k = 1,2,\cdots,n$, $t_0 \in (a,b)$, իսկ $z_1, z_2, \cdots, z_n$-ը կամայական կոմպլեքս թվեր են: Այդ դեպքում

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)y = 0 \\ y(t_0) = z_1, \ \ y'(t_0) = z_2, \cdots, \ y^{(n-1)}(t_0) = z_n \end{cases}$$

Կոշու խնդիրն ունի միակ լուծում, որոշված ամբողջ (a,b) միջակայքում:

Նկատենք, որ այս թեորեմը ապացուցում է նաև այն փաստը, որ (5.1) հավասարումն ունի անվերջ թվով լուծումներ: Իրոք, քանի որ կամայական $z_1, z_2, \cdots, z_n$ թվերի n-յակին համապատասխանում է մեկ լուծում, իսկ թվերի n-յակները անվերջ են, ապա լուծումների քանակն էլ անվերջ է:

Ինչպե՞ս ընտրել այս անվերջ թվով լուծումներից n հատ (n-ը հավասարման կարգն է) գծորեն անկախ լուծումներ, այսինքն՝ ինչպե՞ս ընտրել լուծումների հիմնարար համակարգը:

Այս հարցին պատասխանելու համար նկատենք, որ քանի որ թվերի կամայական n-յակ միարժեքորեն որոշում է (5.1) հավասարման մեկ լուծում, ապա եթե ընտրենք թվերի n հատ n-յակ, այսինքն որևէ

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

մատրից, ապա ստացվում է, որ կամայական $n \times n$ չափանի մատրից միարժեքորեն որոշում է (5.1) հավասարման n հատ լուծումներ: Դրանք այն $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ լուծումներն են, որոնք որոշվում են

$$\varphi_1(t_0) = z_{11}, \ \varphi_2(t_0) = z_{12}, \cdots, \varphi_n(t_0) = z_{1n},$$
$$\varphi_1'(t_0) = z_{21}, \ \varphi_2'(t_0) = z_{22}, \cdots, \varphi_n'(t_0) = z_{2n},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi_1^{(n-1)}(t_0) = z_{n1}, \ \varphi_2^{(n-1)}(t_0) = z_{n2}, \cdots, \varphi_n^{(n-1)}(t_0) = z_{nn},$$

սկզբնական պայմաններով, վերցված որևէ $t_0 \in (a,b)$ կետում: Այսպիսով՝ (5.1) հավասարման կամայական n լուծումներ միարժեքորեն որոշվում են իրենց սկզբնական արժեքներից կազմված

$$\Phi(t_0)=\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \cdots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \cdots & \varphi_n'(t_0) \\ . & . & . & . \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$$

մատրիցով, որին պայմանավորվենք անվանել $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ լուծումների համակարգի *սկզբնական մատրից*, վերցված t_0 կետում: Այժմ մենք կարող ենք պատասխանել այն հարցին, թե ինչպես կարելի է ընտրել n հատ գծորեն անկախ լուծումներ:

Լեմմա 5.1: (5.1) հավասարման կամայական n լուծումներ, որոնց սկզբնական մատրիցի որոշիչը, վերցված (a,b) միջակայքի որևէ t_0 կետում, տարբեր է զրոյից $(\det(\Phi(t_0)\neq 0)$, կազմում են լուծումների հիմնարար համակարգ, այսինքն՝ գծորեն անկախ են:

Ապացույց: Դիտարկենք (5.1) հավասարման լուծումների որևէ

$$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t) \tag{5.3}$$

n-յակ: Ապացուցենք, որ $\det\Phi(t_0)\neq 0$ պայմանի դեպքում

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)\equiv 0,\quad t\in(a,b), \tag{5.4}$$

նույնությունից կհետևի, որ $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$, որն էլ կնշանակի, որ (5.3) համակարգը գծորեն անկախ է:

Ածանցելով (5.4) նույնությունը $n-1$ անգամ՝ ստանում ենք

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)\equiv 0 \\ c_1\varphi_1'(t)+c_2\varphi_2'(t)+\cdots+c_n\varphi_n'(t)\equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(t)+c_2\varphi_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n\varphi_n^{(n-1)}(t)\equiv 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

նույնությունների համախումբը, որը կարելի է գրել

$$\Phi(t)\vec{c}\equiv\vec{0},\quad t\in(a,b) \tag{5.5}$$

տեսքով, որտեղ $\vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix},\quad \vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ . & . & . & . \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}: \tag{5.6}$$

Քանի որ $\det\Phi(t_0)\neq 0$, ապա (5.5) նույնությունից բխող $\Phi(t_0)\vec{c}=\vec{0}$ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը $c_1,c_2,\cdots,c_n$ անհայտների նկատմամբ ունի միայն զրոյական ($c_1=c_2=\cdots=c_n=0$) լուծում, այսինքն՝ $\det\Phi(t_0)\neq 0$ պայմանի դեպքում (5.3) լուծումների համակարգը գծորեն անկախ է:

Լեմման ապացուցված է:

Դիտողություն 5.1: Լեմմա 5.1-ի պնդումը նշանակում է, որ կամայական $n\times n$ չափանի չվերասերվող մատրից ծնում է մեկ հիմնարար համակարգ: Այստեղից հետևում է, որ (5.1) հավասարումն ունի անվերջ թվով հիմնարար համակարգեր:

Դիտողություն 5.2: Նկատենք, որ (5.5) համակարգին և նրա (5.6) գլխավոր մատրիցին մենք արդեն հանդիպել ենք §2-ում (տես (2.11) համակարգը) և §3-ում (տե՛ս (3.8) և (3.9)) այն մասնավոր դեպքում, երբ (5.3) լուծումների համակարգը հաստատուն գործակիցներով (2.1) հավասարման (3.6) (կամ (2.5)) լուծումների հիմնարար համակարգն էր: Այդ դեպքում լեմմա 3.4-ում ապացուցվեց, որ $\Phi(t)$ մատրիցի որոշիչը ոչ մի կետում զրո չի դառնում: Այստեղ մենք կընդհանրացնենք այդ պնդումը փոփոխական գործակիցներով (5.1) հավասարման (5.3) լուծումների համակարգի համար:

Լեմմա 5.2: Եթե (5.1) հավասարման $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ լուծումները գծորեն անկախ են, ապա այդ լուծումների միջոցով կազմված (5.6) մատրիցի որոշիչը (a,b) միջակայքի ոչ մի կետում զրո չի դառնում:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ գոյություն ունի որևէ $t_0\in(a,b)$ կետ այնպես, որ $\det\Phi(t_0)=0$: Սա նշանակում է, որ $\Phi(t_0)$ մատրիցի սյուների միջև առկա է գծային կախվածություն, այսինքն՝ գոյություն ունեն $c_1,c_2,\cdots,c_n$ հաստատուններ (որոնցից գոնե մեկը զրո չէ) այնպիսիք, որ

$$c_1\begin{pmatrix}\varphi_1(t_0)\\ \varphi_1'(t_0)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0)\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\varphi_2(t_0)\\ \varphi_2'(t_0)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \varphi_2^{(n-1)}(t_0)\end{pmatrix}+\cdots+c_n\begin{pmatrix}\varphi_n(t_0)\\ \varphi_n'(t_0)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \varphi_n^{(n-1)}(t_0)\end{pmatrix}=\vec{0}: \qquad (5.7)$$

Այս $c_1, c_2, \cdots, c_n$ հաստատունների միջոցով կազմենք

$$\varphi(t) \equiv c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t), \quad t\in(a,b) \qquad (5.8)$$

ֆունկցիան, որը որպես լուծումների գծային կոմբինացիա, նույնպես կլինի (5.1) հավասարման լուծում: (5.7) առնչությունից հետևում է, որ $\varphi(t)$ լուծումը $t=t_0$ կետում ունի $\varphi(t_0)=0, \varphi'(t_0)=0, \cdots, \varphi^{(n-1)}(t_0)=0$ սկզբնական արժեքներ:

Բայց նույն զրոյական սկզբնական արժեքներն ունի (5.1) համասեռ հավասարման $y(t)\equiv 0$ լուծումը: Համաձայն թեորեմ 5.1-ի՝ այդ լուծումները համընկնում են ամբողջ (a,b) միջակայքում, այսինքն՝ $\varphi(t)\equiv 0$ կամ, ըստ (5.8)-ի,

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)\equiv 0, \quad t\in(a,b)$$

որը նշանակում է, որ $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ համակարգը գծորեն կախյալ է (a,b) -ում: Եկանք հակասության: Լեմմա 5.2-ն ապացուցված է:

Այժմ կարող ենք ապացուցել, որ (5.1) հավասարման լուծումների կամայական հիմնարար համակարգ լուծումների տարածության բազիս է:

Թեորեմ 5.2: Դիցուք $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ ֆունկցիաները հանդիսանում են (5.1) հավասարման լուծումների հիմնարար համակարգ: Այդ դեպքում (5.1) հավասարման կամայական $y=\varphi(t)$ լուծում կարելի է ներկայացնել այդ համակարգի գծային կոմբինացիայի տեսքով:

Ապացույց: Պետք է ցույց տանք, որ գոյություն ունեն $c_1, c_2, \cdots, c_n$ հաստատուններ այնպիսիք, որ

$$\varphi(t)\equiv c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t), \qquad t\in(a,b):$$

Կամայական $t_0\in(a,b)$ կետում դիտարկենք

$$
\begin{cases}
c_1\varphi_1(t_0)+c_2\varphi_2(t_0)+\cdots+c_n\varphi_n(t_0)\equiv\varphi(t_0),\\
c_1\varphi_1'(t_0)+c_2\varphi_2'(t_0)+\cdots+c_n\varphi_n'(t_0)\equiv\varphi'(t_0),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0)+c_2\varphi_2^{(n-1)}(t_0)+\cdots+c_n\varphi_n^{(n-1)}(t_0)\equiv\varphi^{(n-1)}(t_0)
\end{cases}
\tag{5.9}
$$

գծային (հանրահաշվական) հավասարումների համակարգը $c_1,c_2,\cdots,c_n$ անհայտների նկատմամբ: Քանի որ այս համակարգի $\det\Phi(t_0)$ գլխավոր որոշիչը, համաձայն լեմմա 5.2-ի, զրո չէ, ապա այս համակարգը ունի միակ $c_1^0,c_2^0,\cdots,c_n^0$ լուծում: Ապացուցենք, որ տեղի ունի

$$
\varphi(t)\equiv c_1^0\varphi_1(t)+c_2^0\varphi_2(t)+\cdots+c_n^0\varphi_n(t),\quad t\in(a,b) \tag{5.10}
$$

նույնությունը: Իրոք, (5.10) առնչության և ձախ և աջ մասերը (5.1) հավասարման լուծումներ են, որոնց սկզբնական արժեքները, ըստ (5.9)-ի, համընկնում են: Համաձայն թեորեմ 5.1-ի՝ այդ լուծումները համընկնում են ամբողջ (a,b)-ում: Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 5.1: Եթե $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ ֆունկցիաները կազմում են (5.1) հավասարման լուծումների հիմնարար համակարգ, ապա $c_1,c_2,\cdots,c_n$ պարամետրերից ($c_k\in C$) կախված

$$
y(t)=y(t,c_1,c_2,\cdots c_n)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)
$$

ֆունկցիան կոչվում է (5.1) հավասարման *ընդհանուր լուծում:*

Ինչպես տեսնում ենք, n-րդ կարգի գծային համասեռ հավասարման ուսումնասիրություններում կարևոր դեր է խաղում վերը որոշված $\Phi(t)$ մատրիցը և նրա որոշիչը:

Սահմանում 5.2: (5.6) բանաձևով որոշված $\Phi(t)$ մատրիցի $W(t)\equiv\det\Phi(t)$ որոշիչը կոչվում է $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ ֆունկցիաների համակարգի Վրոնսկու որոշիչ[1], կամ վրոնսկյան:

Լեմմա 5.3: (5.3) լուծումների համակարգի վրոնսկյանը կամ նույնաբար զրո է (a,b)-ում (և այդ դեպքում (5.3) համակարգը գծորեն կախյալ է), կամ (a,b)-ի ոչ մի կետում զրո չի դառնում (և այդ դեպքում (5.3) համակարգը գծորեն անկախ է):

---

[1] Լեհ մաթեմատիկոս Վրոնսկու (J.Wronski) անունով, որն այս հասկացությունը սահմանել է 1812 թ.:

Ապացույց: Լեմմա 5.2-ում ապացուցվեց, որ $W(t_0)=\det\Phi(t_0)=0$ պայմանից հետևում է (5.3) լուծումների համակարգի գծորեն կախվածությունը, այսինքն՝ այնպիսի $c_1,c_2,\cdots,c_n$ հաստատունների գոյությունը, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ և որոնց համար տեղի ունի (5.4) նույնությունը: (5.4) նույնությունից ստացվում է (5.5) նույնությունների համակարգը, որը կարելի է գրել

$$c_1\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_1'(t)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \varphi_1^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\varphi_2(t)\\ \varphi_2'(t)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \varphi_2^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}+\cdots+c_n\begin{pmatrix}\varphi_n(t)\\ \varphi_n'(t)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \varphi_n^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}\equiv\vec{0},\quad t\in(a,b)$$

նույնության տեսքով, որն էլ նշանակում է, որ $\Phi(t)$ մատրիցի սյուները գծորեն կախված են (a,b) միջակայքում: Հետևաբար՝ $W(t)\equiv\det\Phi(t)\equiv 0,\ t\in(a,b)$:

Փաստորեն, մենք ապացուցեցինք, որ հետևյալ երեք պնդումները համարժեք են՝

1. $W(t_0)=0$ որևէ $t_0\in(a,b)$ կետում,
2. լուծումների (5.3) համակարգը գծորեն կախյալ է,
3. $W(t)\equiv 0,\ t\in(a,b)$:

Շարունակենք լեմմա 5.3-ի ապացույցը: Եթե որևէ $t_0\in(a,b)$ կետում $W(t_0)\neq 0$, ապա $W(t)$-ն (a,b)-ի ոչ մի կետում զրո չի դառնում, քանի որ եթե որևէ t_1 կետում $W(t_1)=0$, ապա ըստ վերը ապացուցվածի $W(t)\equiv 0$ (ինչը հակասում է $W(t_0)\neq 0$ պայմանին): Այս ($W(t_0)\neq 0$) դեպքում, ըստ լեմմա 5.1-ի, լուծումների (5.3) համակարգը գծորեն անկախ է: Լեմմա 5.3-ը ապացուցված է:

Ինչպես նշվեց դիտողություն 5.1-ում, (5.1) հավասարումն ունի անվերջ թվով հիմնարար համակարգեր: Սակայն հետաքրքիր է նկատել, որ կամայական լուծումների հիմնարար համակարգ միարժեքորեն որոշում է (վերականգնում է) այն (5.1) տեսքի հավասարումը (այսինքն՝ նրա գործակիցները), որի համար այն հիմնարար համակարգ է: Ասվածը ձևակերպենք խնդրի տեսքով:

Խնդիր 5.1: Դիցուք ունենք $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ ֆունկցիաներ, որոնք n անգամ անընդհատ դիֆերենցելի են ($\varphi_k\in C^n(a,b),\quad k=1,2,\cdots,n$) և որոնց

$W(t)$ վրոնսկյանը (a,b) միջակայքի ոչ մի կետում զրո չի դառնում: Կառուցել այն (5.1) տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումը (այսինքն՝ գտնել նրա $a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t)$ գործակիցները), որի համար $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ ֆունկցիաները կազմում են լուծումների հիմնարար համակարգ: Ապացուցել, որ այդ հավասարումը միակն է:

Պատասխան՝

$$\frac{1}{W(t)}\det\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) & y \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) & y^{(n-1)} \\ \varphi_1^{(n)}(t) & \varphi_2^{(n)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n)}(t) & y^{(n)} \end{pmatrix} = 0:$$

Դիտարկենք (5.1) հավասարման

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t) \tag{5.11}$$

լուծումների որևէ համակարգ:

Թեորեմ 5.3: (Լիուվիլի բանաձևը): Դիցուք $W(t)$-ն (5.11) լուծումների համակարգի վրոնսկյանն է: Այդ դեպքում տեղի ունի

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)d\tau}, \quad t_0, t \in (a,b), \tag{5.12}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Համաձայն որոշիչի ածանցման օրենքի (տե՛ս ստորև §7)՝

$$W'(t) \equiv W_1(t) + W_2(t) + \cdots + W_n(t),$$

որտեղ $W_k(t)$ որոշիչը $(k = 1, 2, \cdots, n)$ ստացվում է (5.6) բանաձևով որոշված $\Phi(t)$ մատրիցի k-րդ տողի տարրերը ածանցելով ըստ t-ի, իսկ մնացած տողերը թողնելով անփոփոխ: Ստացված մատրիցի որոշիչը $W_k(t)$-ն է: Հետևաբար, եթե $k < n$, ապա $W_k(t)$-ում կան երկու համընկնող տող, որի պատճառով $W_k(t) \equiv 0$: Այստեղից՝

$$W'(t) \equiv W_n(t) \equiv \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \varphi_2^{(n-2)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1^{(n)}(t) & \varphi_2^{(n)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}:$$

Քանի որ φ_k -ն (5.1) հավասարման լուծում է, այսինքն

$\varphi_k^{(n)}(t) \equiv -a_1(t)\varphi_k^{(n-1)} - a_{n-2}(t)\varphi_k^{(n-2)}(t) - \cdots - a_n(t)\varphi_k(t), \ t \in (a,b),$
$k = 1,2,\cdots,n$, ապա

$$W_n(t) \equiv -a_1(t) \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \varphi_2^{(n-2)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} - a_2(t) \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \varphi_2^{(n-2)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \varphi_2^{(n-2)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \end{vmatrix} -$$

$$- \cdots - a_{n-k}(t) \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(k)}(t) & \varphi_2^{(k)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(k)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(k)}(t) & \varphi_2^{(k)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(k)}(t) \end{vmatrix} - \cdots - a_n(t) \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \varphi_2^{(n-2)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{vmatrix}$$

Այստեղից հետևում է, որ բոլոր գումարելիները, բացի առաջինից, հավասար են զրոյի և հետևաբար տեղի ունի

$$W'(t) \equiv -a_1(t)W(t)$$

նույնությունը, որը նշանակում է, որ $W(t)$ ֆունկցիան $y' = -a_1(t)y$ անջատվող փոփոխականներով հավասարման լուծումն է: Վերջինիս ընդհանուր լուծումը, ինչպես հայտնի է, տրվում է $y(t) = Ce^{-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)d\tau}$ բանաձևով, իսկ $y(t_0) = W(t_0)$ սկզբնական պայմանին բավարարող լուծումը տրվում է (5.12) բանաձևով, որտեղ $C = W(t_0)$: Այսպիսով՝ Լիուվիլի բանաձևն ապացուցված է:

Դիտողություն 5.3: Լիուվիլի բանաձևից բացահայտորեն ստացվում է վրոնսկյանի այն (լեմմա 5.3-ում ապացուցված) հատկությունը, որ եթե վրոնսկիանը որևէ կետում զրո է $(W(t_0)=0)$, ապա այն նույնաբար զրո է, և եթե այն որևէ կետում զրո չէ, ապա ոչ մի կետում զրո չի դառնում:

(5.12) բանաձևը երկրորդ կարգի $(n=2)$ գծային համասեռ հավասարման համար առաջին անգամ բերվել է նորվեգացի մաթեմատիկոս Ն.Աբելի աշխատանքում 1827թ. (Abel N.H. "J. reine und angew. Math.", 1827, Bd.2,S. 22-30): Կամայական n-ի համար բանաձևը ապացուցվել է ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ժ.Լիուվիլի կողմից 1838թ. (Liouville J. "J. math. pures et appl." 1838, t. 3, p. 342-349) և անկախ դրանից ռուս մաթեմատիկոս Մ. Օստրոգրադսկու կողմից (М.В. Остроградский):

Վարժություն

Դիցուք հայտնի է $y''+a_1(t)y'+a_2(t)y=0$ հավասարման $y=\varphi_1(t)$ (նույնաբար զրոյից տարբեր) մասնակի լուծումը: Գտնել այդ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

§6. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Դիտարկենք

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)y=f(t) \tag{6.1}$$

գծային անհամասեռ հավասարումը, որի $a_1(t),a_2(t),\ldots,a_n(t)$ գործակիցները և $f(t)$ ազատ անդամը կամայական անընդհատ ֆունկցիաներ են՝ որոշված որևէ (a,b) միջակայքում $\left(a_k,\, f\in C(a,b),\, k=1,2,\ldots,n\right)$:

Այստեղ կապացուցվի, որ (6.1) հավասարումը լուծելու համար բավական է իմանալ (6.1)-ին համապատասխանող (§5-ում ուսումնասիրված)

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)y=0 \tag{5.1}$$

համասեռ հավասարման որևէ հիմնարար համակարգ:

Դիցուք

$$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t) \tag{6.2}$$

ֆունկցիաները հանդիսանում են (5.1) համասեռ հավասարման լուծումների (որևէ) հիմնարար համակարգ: Դիտարկենք (6.2) լուծումների համակարգի

$$W(t) = \det \Phi(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

վրոնսկյանը և նշանակենք $W_{nk}(t)$-ով $\Phi(t)$ մատրիցի n-րդ տողի և k-րդ սյան հատման վրա գտնվող $\varphi_k^{(n-1)}(t)$ տարրի հանրահաշվական լրացումը:

Թեորեմ 6.1: (6.1) հավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը նկարագրվում է

$$y(t) = y(t, c_1, c_2, \dots, c_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{t} \frac{W_{nk}(\tau)}{W(\tau)} f(\tau) d\tau \right) \cdot \varphi_k(t) \tag{6.4}$$

բանաձևով, որտեղ $c_1, c_2, \dots, c_n$-ը կամայական հաստատուններ են, իսկ t_0-ն կամայական (հաստատագրված) կետ է (a,b)-ից:

Այս թեորեմի ապացույցի հիմնական մասը կազմում է այսպես կոչված *հաստատունների վարիացիայի եղանակը* ($n=1$ դեպքում այն շարադրված է գլ. II, § 3-ում), որը կոչվում է նաև Լագրանժի[1] եղանակ և որի ստորև բերվող շարադրանքը պետք է դիտել որպես թեորեմ 6.1-ի ապացույցի առաջին մասը:

Ինչպես ապացուցվեց §5-ում, (5.1) համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը (6.2) հիմնարար համակարգի միջոցով տրվում է

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) \tag{6.5}$$

բանաձևով, որտեղ $c_1, c_2, \dots, c_n$-ը կամայական հաստատուններ են: (6.1) անհամասեռ հավասարման լուծումը փնտրում ենք

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) \cdot \varphi_k(t) \tag{6.6}$$

[1] Լագրանժ (Lagrange I.L.)՝ XVIII դարի ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

տեսքով, այսինքն՝ c_k հաստատունների փոխարեն վերցնում են $c_k(t)$ ֆունկցիաներ, որոնք ենթակա են որոշման: Այս դեպքում ասում են, որ c_k հաստատունները ենթարկվեցին վարիացիայի, այսինքն՝ փոփոխման (վարիացիա լատինական բառը նշանակում է փոփոխություն): Այս պատճառով նշված եղանակը կոչվում է հաստատունների վարիացիայի եղանակ:

Լեմմա 6.1: Որպեսզի (6.6) տեսքի ֆունկցիան լինի (6.1) հավասարման լուծում, բավարար է, որ $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$ ֆունկցիաների $c_1'(t), c_2'(t), \ldots, c_n'(t)$ ածանցյալները բավարարեն

$$\begin{cases} \varphi_1(t)c_1'(t)+\varphi_2(t)c_2'(t)+\ldots+\varphi_n(t)c_n'(t)=0 \\ \varphi_1'(t)c_1'(t)+\varphi_2'(t)c_2'(t)+\ldots+\varphi_n'(t)c_n'(t)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t)c_1'(t)+\varphi_2^{(n-2)}(t)c_2'(t)+\ldots+\varphi_n^{(n-2)}(t)c_n'(t)=0 \\ \varphi_1^{(n-1)}(t)c_1'(t)+\varphi_2^{(n-1)}(t)c_2'(t)+\ldots+\varphi_n^{(n-1)}(t)c_n'(t)=f(t) \end{cases} \tag{6.7}$$

հավասարումների համակարգին:

Ապացույց: Գրենք (6.7) համակարգը

$$\Phi(t)\cdot C'(t)=F(t) \tag{6.8}$$

վեկտորական տեսքով, որտեղ $\Phi(t)$ մատրիցի տեսքը տրված է (6.3) բանաձևում,

$$C'(t)\equiv\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix}, \qquad F(t)\equiv\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}:$$

Քանի որ $\Phi(t)$ մատրիցի որոշիչը (6.2) հիմնարար համակարգի $W(t)$ վրոնսկիանն է, որն (a,b) միջակայքի ոչ մի կետում զրո չի դառնում (տե՛ս §5), ապա $\Phi^{-1}(t)$ հակադարձ մատրիցը գոյություն ունի, անընդհատ է (a,b)-ում և (ինչպես հայտնի է հանրահաշվից) ունի

$$\Phi^{-1}(t)=\frac{1}{W(t)}\begin{pmatrix} W_{11}(t) & W_{21}(t) & \dots & W_{n1}(t) \\ W_{12}(t) & W_{22}(t) & \dots & W_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{1n}(t) & W_{2n}(t) & \dots & W_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

տեսքը, որտեղ $W_{mk}(t)$-ն $\Phi(t)$ մատրիցի $\varphi_k^{(m-1)}(t)$ տարրի $(k,m=1,\dots,n)$ հանրահաշվական լրացումն է: Հետևաբար (6.8) համակարգի լուծումը գրվում է $C'(t)=\Phi^{-1}(t)\cdot F(t)$ տեսքով: Օգտվելով $F(t)$ վեկտոր-ֆունկցիայի տեսքից $c_k'(t)$ $(k=1,\dots,n)$ կոմպոնենտների համար ստանում ենք $c_k'(t)=\dfrac{W_{nk}(t)}{W(t)}f(t)$ բանաձևերը կամ

$$c_k(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{W_{nk}(\tau)}{W(\tau)}f(\tau)d\tau+c_k\,,\quad k=1,2,\dots,n\,, \tag{6.9}$$

որտեղ c_k-ն կամայական հաստատուն է, իսկ t_0-ն կամայական (հաստատագրված) կետ (a,b)-ից:

Այժմ ապացուցենք, որ (6.6) բանաձևով որոշված $\Psi(t)$ ֆունկցիան բավարարում է (6.1) հավասարմանը, այսինքն, որ տեղի ունի

$$\sum_{p=0}^{n}a_{n-p}(t)\cdot\Psi^{(p)}(t)\equiv f(t) \tag{6.10}$$

($a_0(t)\equiv 1$) նույնությունը: Հաշվի առնելով (6.7) պայմանները, $\Psi(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալների համար ստանում ենք

$$\Psi^{(p)}(t)\equiv\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{(p)}(t)c_k(t)\,,\qquad p=0,1,\dots,n-1, \tag{6.11}$$

$$\Psi^{(n)}(t)\equiv\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{(n)}(t)c_k(t)+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{(n-1)}(t)c_k'(t)\equiv\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{(n)}(t)c_k(t)+f(t) \tag{6.12}$$

արտահայտությունները: Քանի որ (6.2) համակարգի $\varphi_k(t)$ ֆունկցիաները (5.1) համասեռ հավասարման լուծումներն են, ապա տեղի ունեն նաև

$$\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}(t)\varphi_k^{(p)}(t) \equiv 0, \quad k = 1,2,\ldots,n, \tag{6.13}$$

նույնությունները: Տեղադրելով (6.11) և (6.12) արտահայտությունները (6.10)–ի ձախ մասը և հաշվի առնելով (6.13)-ը, ստանում ենք

$$\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}(t)\Psi^{(p)}(t) \equiv \sum_{p=0}^{n} a_{n-p}(t)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{(p)}(t)c_k(t)\right) + f(t)$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}(t)\varphi_k^{(p)}(t)\right)\cdot c_k(t) + f(t) \equiv f(t)$$

նույնությունը: Լեմման ապացուցված է:

Նկատենք, որ այս լեմմայի ապացույցի ընթացքում ստացվեց նաև $c_k(t)$ ֆունկցիաների (6.9) տեսքը, որից հետևում է, որ $\Psi(t)$ լուծումներն ունեն (6.4) տեսքը, այսինքն, որ (6.4) ֆունկցիաների ընտանիքի յուրաքանչյուր ֆունկցիա հանդիսանում է (6.1) հավասարման լուծում:

Որպեսզի ավարտենք թեորեմ 6.1-ի ապացույցը, մնում է ցույց տալ, որ (6.1) հավասարման կամայական լուծում ունի (6.4) տեսքը:

Դիցուք $y = g(t)$ ֆունկցիան (6.1)-ի որևէ լուծում է: Նշանակենք

$$g(t) = \xi_1, g'(t_0) = \xi_2, \ldots, g^{(n-1)}(t_0) = \xi_n \tag{6.14}$$

Ապացուցենք, որ (6.4) բանաձևում $c_1, c_2, \ldots, c_n$ հաստատունները կարելի է ընտրել այնպես, որ (6.4)-ով որոշված $y(t)$ ֆունկցիան (նույնն է՝ $y = \Psi(t)$ ֆունկցիան) բավարարի նույն (6.14) սկզբնական պայմաններին, որտեղից (համաձայն Կոշու խնդրի լուծման միակության) կհետևի, որ $g(t) \equiv \Psi(t)$, $t \in (a,b)$: Իրոք, (6.11) և (6.9) բանաձևերից բխում է, որ

$$\Psi^{(p)}(t_0) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{(p)}(t_0)\cdot c_k = \xi_{p+1}, \quad p = 0,1,\ldots,n-1$$

հանրահաշվական հավասարումների համակարգից ($c_1, c_2, \ldots, c_n$ անհայտների նկատմամբ), որի գլխավոր մատրիցը $\Phi(t_0)$-է, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ անհայտները որոշվում են միարժեք: Թեորեմ 6.1-ն ապացուցված է:

Դիտողություն 6.1: Բնական է (6.4) բանաձևով տրվող արտահայտությունն անվանել (6.1) հավասարման ընդհանուր լուծում:

Դիտողություն 6.2. Դեշտ է տեսնել, որ (6.1) անհամասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը ներկայացվում է համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծման $\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\right)$ և անհամասեռ հավասարման մասնակի լուծման $\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{W_{nk}(\tau)}{W(\tau)} f(\tau)d\tau\right)\varphi_k(t)\right)$ գումարի տեսքով (տե՛ս §1, դիտողություն 1.1):

Հաստատունների վարիացիայի եղանակին մենք արդեն հանդիպել ենք գլուխ II-ում, պարզագույն՝ $n = 1$ դեպքում:

§9-ում, որը նվիրված է լինելու գծային նորմալ անհամասեռ համակարգերին, հաստատունների վարիացիայի եղանակի էությունը ավելի պարզ է դառնում: Մասնավորապես, (6.1) հավասարման համար այստեղ ստացված բոլոր արդյունքները այնտեղ կստացվեն որպես մասնավոր դեպք այն պնդումների, որոնք տեղի ունեն կամայական գծային նորմալ անհամասեռ համակարգի համար (հիշեցնենք, որ (6.1) հավասարումը համարժեք է գծային նորմալ համակարգի, որն ունի յուրահատուկ տեսք (տե՛ս §8)):

Օրինակ: Լուծել $y'' + y = \frac{1}{\cos t}$ հավասարումը $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$:

Այս հավասարմանը համապատասխան $y'' + y = 0$ համասեռ հավասարման լուծումների հիմնարար համակարգ են կազմում $\varphi_1(t) = \sin t$ և $\varphi_2(t) = \cos t$ ֆունկցիաները: (6.7) հավասարումների համակարգը այս դեպքում ունի

$$\begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos t} \end{pmatrix}$$

մատրիցային տեսքը: Այստեղից հետևում է, որ $c_1'(t) = 1$, $c_2'(t) = -tgt$, այսինքն՝ $c_1(t) = t + c_1$, $c_2(t) = \ln(\cos t) + c_2$, որտեղ c_1-ը և c_2-ը կամայական հաստատուններ են: Այսպիսով՝ $y'' + y = \frac{1}{\cos t}$ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի $y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + t \sin t + \cos t \cdot (\ln(\cos t))$ տեսքը:

Վարժություն

Դիցուք $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ ֆունկցիաները կազմում են (5.1) համասեռ հավասարման լուծումների այն հիմնարար համակարգը, որի սկզբնական մատրիցը, վերցված $t_0 \in (a,b)$ կետում համընկնում է միավոր մատրիցի հետ: Ապացուցել, որ այդ դեպքում

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(t)y = f(t) \\ y(t_0) = \xi_1, y'(t_0) = \xi_2, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = \xi_n \end{cases}$$

Կոշու խնդրի լուծումը տրվում է

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \frac{W_{nk}(\tau)}{W(\tau)} f(\tau) d\tau \cdot \varphi_k(t)$$

բանաձևով:

§7. ՈՐՈՇ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

Այս պարագրաֆն ունի օժանդակ բնույթ: Այն հիմնականում պարունակում է գծային հանրահաշվից որոշ հայտնի փաստեր, որոնք այստեղ բերվում են առանց ապացույցի և որոնք անհրաժեշտ են մեր հետագա շարադրանքի համար:

Դիցուք $A = (a_{ij})$-ն քառակուսի $n \times n$ չափանի մատրից է, որի տարրերը (էլեմենտները) կոմպլեքս թվեր են՝ $a_{ij} \in \mathbb{C}$ $(i, j = 1,2,\cdots,n)$: Միավոր մատրիցը կնշանակենք E, իսկ զրոյականը՝ O տառերով: Եթե պետք է հատուկ նշել, որ խոսքը գնում է $n \times n$ չափանի մատրիցի մասին, ապա կգրենք E_n և O_n:

$\mathfrak{M}^{n,m}$-ով նշանակենք այն մատրիցների բազմությունը, որոնք ունեն n տող և m սյուն: Քառակուսի $n \times n$ չափանի A մատրիցի ($A \in \mathfrak{M}^{n,n}$) որոշիչը (դետերմինանտը) նշանակենք $\det A$: Եթե $\det A = 0$, ապա A մատրիցը կոչվում է *վերասերվող:* Հայտնի է, որ *չվերասերվող* ($\det A \neq 0$) A մատրիցն ունի հակադարձ մատրից (նշանակվում է A^{-1}), որը բավարարում է $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ առնչություններին: Դիցուք λ-ն կոմպլեքս փոփոխական է: n-րդ կարգի $\det(\lambda E - A)$ բազմանդամը կոչվում է A *մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամ,* իսկ նրա արմատները՝ A *մատրիցի սեփական արժեքներ:* Եթե A մատրիցի սեփական արժեքները նշանակենք $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, ապա՝

$$\det(\lambda E - A) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i): \tag{7.1}$$

Երկու n-րդ կարգի քառակուսի A և B մատրիցներ կոչվում են *նման*, եթե գոյություն ունի n-րդ կարգի չվերասերվող P մատրից այնպիսին, որ $B = PAP^{-1}$:

Եթե A և B մատրիցները նման են, ապա նրանց բնութագրիչ բազմանդամները համընկնում են՝

$$\det(\lambda E - B) = \det\left(P(\lambda E - A) \cdot P^{-1}\right) = \det P \cdot \det(\lambda E - A) \cdot \det P^{-1} = \det(\lambda E - A):$$

Մասնավորապես, համընկնում են (ինվարիանտ են նմանության ձևափոխության նկատմամբ) բնութագրիչ բազմանդամների գործակիցները և արմատները (սեփական արժեքները): Երկու կարևոր ինվարիանտներ են $\det A$-ն և $spA \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, որը կոչվում է A մատրիցի հետք[1]:

Ձևակերպենք այն հիմնարար արդյունքը, որը կոչվում է մատրիցի բերում ժորդանի կանոնական տեսքի.

Թեորեմ 7.1: Ամեն մի n-րդ կարգի քառակուսի A մատրից նման է

$$\Im = \begin{pmatrix} \Im_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Im_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Im_s \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

տեսքի մատրիցին, որտեղ $\Im_0$-ն անկյունագծային մատրից է՝ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ տարրերով՝

$$\Im_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_q \end{pmatrix},$$

[1] spA կարդացվում է՝ շպուռ A: Մատրիցի հետքի համար օգտագործվում է նաև trA նշանակումը, որը կարդացվում է՝ թրեյս A:

$$\mathfrak{I}_i = \begin{pmatrix} \lambda_{q+i} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{q+i} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{q+i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{q+i} \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,\cdots,s \tag{7.3}$$

Այստեղ λ_j-երը, $j = 1,2,\cdots,q+s$, A մատրիցի սեփական արժեքներն են, ոչ պարտադիր տարբեր: Եթե λ_j-ն պարզ սեփական արժեք է, ապա նա հանդիպում է $\mathfrak{I}_0$-ում և, հետևաբար, եթե բոլոր սեփական արժեքները պարզ են, ապա A մատրիցը նման է

$$\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

անկյունագծային մատրիցին:

Այս թեորեմից հետևում է, որ $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, $spA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, որտեղ ամեն մի սեփական արժեք հաշվում ենք այնքան անգամ, որքան նրա պատիկությունն է:

$\mathfrak{I}_i$ մատրիցներն ունեն

$$\mathfrak{I}_i = \lambda_{q+i} \cdot E_{r_i} + Z_i, \quad i = 1,2,\cdots,s, \tag{7.5}$$

տեսքը, որտեղ $\mathfrak{I}_i$-ն և Z_i-ն r_i կարգի քառակուսի մատրիցներ են և

$$Z_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}: \tag{7.6}$$

$(\lambda-\lambda_{q+i})^{r_i}$ արտահայտությունները կոչվում են A մատրիցի էլեմենտար բաժանարարներ (պարզ, եթե $r_i=1$), $\mathfrak{I}_i$ $(i=0,1,2,\cdots,s)$ մատրիցները կոչվում են ժորդանի վանդակներ:

Անվանենք A $(A\in\mathfrak{M}^{n,m})$ *մատրիցի նորմ*

$$|A|\stackrel{\text{def}}{\equiv}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|=\sum_{i,j}|a_{ij}| \tag{7.7}$$

ոչ բացասական թիվը: Եթե $\vec{x}$ վեկտորը, որի կոմպոնենտներն են $x_1,x_2,\cdots,x_n$ թվերը, պատկերացնենք որպես մատրից, որն ունի n տող և 1 սյուն, $\vec{x}\in\mathfrak{M}^{n,1}$ ապա համաձայն (7.7)-ի՝ նրա նորմը կորոշվի $|\vec{x}|=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$ բանաձևով[1]: Դեշտ է համոզվել, որ եթե $A,B\in\mathfrak{M}^{n,n}$ և $\vec{x}\in\mathfrak{M}^{n,1}$, ապա ճիշտ են այդ կերպ սահմանված նորմի հետևյալ հատկությունները՝

$$|A+B|\le|A|+|B|,$$

$$|A\cdot B|\le|A|\cdot|B|,$$

$$|A\vec{x}|\le|A|\cdot|\vec{x}|:$$

Սահմանում 7.1: A և B մատրիցների ($A,B\in\mathfrak{M}^{n,m}$) *հեռավորություն* կանվանենք $|A-B|$ թիվը[2]:

Դիտարկենք քառակուսի մատրիցների A_k, $k=1,2,\cdots$, հաջորդականությունը ($A_k\in\mathfrak{M}^{n,n}$):

Սահմանում 7.2: Կասենք, որ մատրիցների A_k, $k=1,2,\cdots$, հաջորդականությունը զուգամիտում է A մատրիցին և կգրենք

$$A=\lim_{k\to\infty}A_k,$$

---

[1] Նկատենք, որ մատրիցի և վեկտորի նորմ կարելի է սահմանել տարբեր (համարժեք) ձևերով: Մենք ընտրել ենք հնարավորներից մեկը:
[2] Դեշտ է համոզվել, որ այս հեռավորությունը բավարարում է *մետրիկայի* (տե՛ս գլ. V) բոլոր պայմաններին:

եթե կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի N_ε բնական թիվ, այնպիսին, որ $|A_m - A| < \varepsilon$, երբ $m > N_\varepsilon$-ից:

Մատրիցի նորմի սահմանումից հետևում է, որ մատրիցների հաջորդականության զուգամիտությունը համարժեք է կոմպոնենտներից կազմած թվային հաջորդականությունների զուգամիտությանը:

Որպեսզի մատրիցների A_k, $k = 1,2,\cdots$, հաջորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա N_ε բնական թիվ այնպիսին, որ $|A_p - A_q| < \varepsilon$, երբ $p,q > N_\varepsilon$-ից:

Մատրիցներից կազմած $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$ անվերջ շարքը կոչվում է զուգամետ, եթե զուգամետ է $S_n = \sum_{m=1}^{n} A_m$, $n = 1,2,\ldots$, մասնակի գումարների հաջորդականությունը: Շարքի գումար կոչվում է մասնակի գումարների հաջորդականության սահմանային մատրիցը:

Գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի ուսումնասիրման համար կարևոր նշանակություն ունի ($A \in \Re^{n,n}$)

$$e^A \overset{def}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots$$

մատրիցային շարքը, որը կոչվում է A *մատրիցի էքսպոնենտ:* Այս շարքը զուգամետ է կամայական քառակուսի A մատրիցի համար, քանի որ կամայական p և q $(p > q)$ բնական թվերի համար տեղի ունեն

$$|S_p - S_q| = \left| \sum_{m=q+1}^{p} \frac{1}{m!} A^m \right| \le \sum_{m=q+1}^{p} \frac{|A^m|}{m!} \le \sum_{m=q+1}^{p} \frac{|A|^m}{m!}$$

առնչությունները, իսկ վերջին գումարը «Կոշու տարբերությունն է» $e^{|A|}$ թվային շարքի համար, որը զուգամետ է կամայական վերջավոր $|A|$ թվի համար:

Ընդհանուր դեպքում մատրիցների համար $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ հավասարությունը տեղի չունի: Սակայն ճիշտ է հետևյալ պնդումը.

Թեորեմ 7.2: Եթե A և B մատրիցները $\left(A, B \in \mathfrak{M}^{n,n}\right)$ տեղափոխելի են, այսինքն՝ $A \cdot B = B \cdot A$, ապա՝

$$e^{A+B} = e^{A} \cdot e^{B}: \tag{7.8}$$

Կարելի է ապացուցել, որ տեղի ունի $\det e^{A} = e^{spA}$ բանաձևը[1], որտեղից հետևում է, որ e^{A} մատրիցը չվերասերվող է կամայական A-ի համար: Քանի որ A և $-A$ մատրիցները տեղափոխելի են, ապա (7.8) բանաձևից ստանում ենք, որ

$$\left(e^{A}\right)^{-1} = e^{-A}:$$

Ձևակերպենք ևս մի կարևոր պնդում՝

Թեորեմ 7.3: Եթե $\det \mathrm{B} \neq 0$, ապա գոյություն ունի A մատրից այնպիսի, որ՝

$$B = e^{A}:$$

A մատրիցը, որի գոյությունը պնդվում է թեորեմ 7.3-ում, կոչվում է B մատրիցի լոգարիթմ: Դեշտ է համոզվել, որ այդ A մատրիցը միակը չէ: Օրինակ՝

$$e^{A} = e^{A} \cdot e^{2\pi i k \cdot E} = e^{A + 2\pi i k \cdot E}, \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots; \quad (i = \sqrt{-1}):$$

Դիցուք $\Phi(t) = \left(\varphi_{ij}(t)\right)$ մատրից-ֆունկցիա է $\left(\Phi(t) \in \mathfrak{M}^{n,m}\right)$, որի φ_{ij} տարրերը որևէ (a, b) միջակայքում որոշված ֆունկցիաներ են: Φ մատրից-ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ, դիֆերենցելի, անընդհատ դիֆերենցելի (և այլն), եթե այդպիսին են նրա φ_{ij} տարրերը: Եթե Φ մատրից-ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա նրա ածանցյալ Φ' մատրից-ֆունկցիան սահմանվում է $\Phi'(t) = (\varphi'_{ij}(t))$ բանաձևով: Մասնավորապես սա վերաբերում է վեկտոր-ֆունկցիաներին: Եթե $\Phi(t)$ և $\Psi(t)$ մատրից-ֆունկցիաները դիֆերենցելի են (և $\Phi \cdot \Psi$ արտադրյալն իմաստ ունի), ապա $\left(\Phi(t) \cdot \Psi(t)\right)' = \Phi'(t) \cdot \Psi(t) + \Phi(t) \cdot \Psi'(t)$:

Դիցուք $\Phi(t)$-ն քառակուսի մատրից-ֆունկցիա է՝ $\Phi(t) \in \mathfrak{M}^{n,n}$: Եթե t կետում $\Phi'(t)$-ն գոյություն ունի և $\Phi(t)$-ն վերասերվող չէ, ապա Φ^{-1}-ը t կետում դիֆերենցելի է: Սա հետևում է

[1] Այս բանաձևը կարելի է ստանալ որպես Լիուվիլի բանաձևի հետևանք, որն ապացուցվում է §8-ում (տե՛ս թեորեմ 8.7):

$$\Phi^{-1}(t)=\frac{1}{\det\Phi(t)}\cdot\tilde{\Phi}(t)$$

հայտնի բանաձևից, որտեղ $\tilde{\Phi}=(\tilde{\varphi}_{ij})$, իսկ $\tilde{\varphi}_{ij}$-երը φ_{ji} տարրերի հանրահաշվական լրացումներն են: Քանի որ $\Phi(t)\Phi^{-1}(t)=E$, ապա $\Phi'(t)\Phi^{-1}(t)+\Phi(t)(\Phi^{-1}(t))'\equiv 0$ և, հետևաբար, տեղի ունի $(\Phi^{-1}(t))'=-\Phi^{-1}(t)\Phi'(t)\Phi^{-1}(t)$ բանաձևը:

Կարելի է ապացուցել, որ

$$e^{At}\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\cdot A^k$$

մատրից-ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է $(t\in(-\infty;\infty))$, և որ այս շարքը կարելի է ածանցել անդամ առ անդամ:

Դիցուք $B\in\mathfrak{M}^{n,m}$: Եթե B մատրիցի սյուները նշանակենք $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_m$, ապա B մատրիցը կարելի է գրել $B=\left(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_m\right)$ տեսքով: Եթե $A\in\mathfrak{M}^{n,n}$, ապա $A\cdot B$ արտադրյալը $\left(A\cdot B\in\mathfrak{M}^{n,m}\right)$ կարելի է գրել $A\cdot B=(A\vec{b}_1,A\vec{b}_2,\ldots,A\vec{b}_m)$ տեսքով: Այս գրելաձևը որոշ դեպքերում հարմար է և կօգտագործվի հետագայում:

Որոշիչի ածանցման բանաձևը

Դիցուք

$$W=\det(w_{ij})=\det\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \ldots & w_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{n1} & w_{n2} & \ldots & w_{nn} \end{pmatrix}:$$

Այս որոշիչը կարելի է դիտարկել որպես n^2 փոփոխականների ֆունկցիա, այսինքն՝ $W=W(w_{11},w_{12},\ldots,w_{nn})$: Նշանակենք w_{ij} տարրի հանրահաշվական լրացումը V_{ij}-ով: Այդ դեպքում որոշչի վերլուծությունը ըստ i-րդ տողի $(1\le i\le n)$ ունի հետևյալ տեսքը՝

$$W(w_{11}, w_{12}, \dots, w_{nn}) = w_{i1} \cdot V_{i1} + w_{i2} \cdot V_{i2} + \dots + w_{ij} \cdot V_{ij} + \dots + w_{in} \cdot V_{in} \quad (7.9)$$

Այստեղից հետևում է, որ W որոշչի մասնակի ածանցյալը ըստ w_{ij}-ի հավասար է V_{ij}՝

$$\frac{\partial W(w_{11}, w_{12}, \dots, w_{nn})}{\partial w_{ij}} = V_{ij}, \quad (7.10)$$

քանի որ w_{ij} տարրը մասնակցում է (7.9) վերլուծության աջ մասի միայն $w_{ij} \cdot V_{ij}$ գումարելիում, իսկ V_{ij} հանրահաշվական լրացումում w_{ij} տարրը չի մասնակցում:

Դիցուք $w_{ij} = \varphi_{ij}(t)$, այսինքն՝ $W(t)$-ն $\Phi(t) = (\varphi_{ij}(t))$ քառակուսի, դիֆերենցելի մատրից-ֆունկցիայի որոշիչն է: Նշանակենք $W_i(t)$-ով, $i = 1,2,\dots,n$, այն մատրիցի որոշիչը, որը տարբերվում է $\Phi(t)$-ից միայն նրանով, որ նրա i-րդ տողը ածանցված է, օրինակ՝

$$W_1(t) = \det\begin{pmatrix} \varphi'_{11}(t) & \varphi'_{12}(t) & \dots & \varphi'_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \dots & \varphi_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}:$$

Թեորեմ 7.4: Տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$W'(t) = W_1(t) + W_2(t) + \dots + W_n(t):$$

Ապացույց: Դիտարկենք $W(t)$ որոշիչը որպես բարդ ֆունկցիա t փոփոխականից, այսինքն՝ $W(t) = W(\varphi_{11}(t), \varphi_{12}(t), \dots, \varphi_{nn}(t))$, և հաշվենք նրա ածանցյալը ըստ t-ի՝ օգտվելով (7.9) և (7.10) բանաձևերից.

$$\frac{d}{dt}W(t) = \frac{\partial W}{\partial w_{11}} \cdot \varphi'_{11}(t) + \frac{\partial W}{\partial w_{12}} \cdot \varphi'_{12}(t) + \dots + \frac{\partial W}{\partial w_{nn}} \cdot \varphi'_{nn}(t) =$$

$$= V_{11}(t) \cdot \varphi'_{11}(t) + V_{12}(t) \cdot \varphi'_{12}(t) + \dots + V_{1n}(t) \cdot \varphi'_{1n}(t) + \qquad (= W_1(t))$$

$$+ V_{21}(t) \cdot \varphi'_{21}(t) + V_{22}(t) \cdot \varphi'_{22}(t) + \dots + V_{2n}(t) \cdot \varphi'_{2n}(t) + \qquad (= W_2(t))$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+V_{n1}(t)\cdot\varphi'_{n1}(t)+V_2(t)\cdot\varphi'_{n2}(t)+\cdots+V_{nn}(t)\cdot\varphi'_{nn}(t)= \qquad (=W_n(t))$$
$$=W_1(t)+W_2(t)+\cdots+W_n(t):$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Վարժություն 7.1: Սահմանել մատրիցային շարքի հավասարաչափ զուգամիտության և բացարձակ զուգամիտության հասկացությունները (ելնելով սովորական ֆունկցիոնալ շարքերի համար նման հասկացություններից):

Վարժություն 7.2: Ապացուցել, որ $e^{At}\overset{def}{=}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^k}{k!}A^k$ մատրիցային շարքը հավասարաչափ զուգամետ է կամայական վերջավոր $[a,b]$ հատվածում $(t\in[a,b])$: Որպես հետևանք, ապացուցել, որ այս շարքը զուգամետ է $(-\infty,\infty)$ առանցքի վրա, այսինքն՝ կամայական t իրական կետում:

Վարժություն 7.3: Ապացուցել, որ e^{At} մատրից-ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է իրական առանցքի վրա:

Վարժություն 7.4: Ապացուցել, որ $e^{At}\equiv\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^k}{k!}A^k$ մատրիցային շարքը կարելի է ածանցել անդամ առ անդամ:

§ 8. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Այս պարագրաֆում ուսումնասիրվում է $y_1,y_2,\cdots,y_n$ անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ դիֆերենցիալ հավասարումների

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}(t)y_1+a_{12}(t)y_2+\cdots+a_{1n}(t)y_n \\ y_2'=a_{21}(t)y_1+a_{22}(t)y_2+\cdots+a_{2n}(t)y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n'=a_{n1}(t)y_1+a_{n2}(t)y_2+\cdots+a_{nn}(t)y_n \end{cases} \tag{8.1}$$

գծային, համասեռ, նորմալ համակարգը: Ենթադրվում է, որ a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ գործակիցները անընդհատ ֆունկցիաներ են, որոշված իրական առանցքի որևէ (վերջավոր կամ անվերջ) (a,b) միջակայքում, այսինքն՝ $a_{ij}\in\mathbb{C}(a,b)$:

Նշանակենք (8.1) համակարգի գործակիցներից կազմած մատրիցը և որոնելի ֆունկցիաներից կազմած վեկտոր-սյունը, համապատասխանաբար, $A(t)$-ով և $\vec{y}(t)$-ով՝

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{21}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}:$$

Այս նշանակումներով (8.1) համակարգը կարելի է գրել

$$\vec{y}'(t)=A(t)\vec{y}(t) \tag{8.2}$$

վեկտորական տեսքով: Կոշու խնդրի լուծման գոյության և միակության թեորեմը (8.2) համակարգի համար ձևակերպվում է հետևյալ կերպ (տե՛ս նաև գլ.I, թեորեմ III).

Թեորեմ 8.1: Դիցուք $a_{ij}\in\mathbb{C}(a,b)$, $(i,j=1,2,\cdots,n)$: Այդ դեպքում կամայական $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ վեկտորի [1] և կամայական $t_0\in(a,b)$ կետի համար

$$\begin{cases} \vec{y}'=A(t)\vec{y} \\ \vec{y}(t_0)=\vec{\xi} \end{cases}$$

Կոշու խնդիրն ունի միակ լուծում՝ որոշված ամբողջ (a,b) միջակայքում:

Այս թեորեմից, որի ապացույցը կբերվի ստորև (տես գլ. V, թեորեմ 5.1), հետևում է ոչ միայն (8.2) համակարգի լուծման գոյությունը և համապատասխան Կոշու խնդրի լուծման միակությունը, այլ նաև այն փաստը, որ (8.2) համակարգն ունի անվերջ թվով լուծումներ: Իրոք, համաձայն թեորեմ 8.1-ի՝ ամեն մի $\vec{\xi}\in\mathbb{C}^n$ վեկտորին (ֆիքսած t_0-ի դեպքում) համապատասխանում է մեկ լուծում, իսկ քանի որ այդպիսի $\vec{\xi}$ վեկտորներն անվերջ են, ապա լուծումների թիվն անվերջ է:

Մեր հիմնական նպատակներից մեկն է ապացուցել, որ (8.2) համակարգի անվերջ թվով լուծումներից կարելի է ընտրել n հատ գծորեն անկախ լուծումներ և որ (8.2) համակարգի կամայական լուծում կարելի է ներկայացնել այդ n գծորեն անկախ լուծումների գծային կոմբինացիայի միջոցով: Դա կնշանակի, որ (8.2) հա-

---

1 $\vec{\xi}\in\mathbb{C}^n$, այսինքն՝ $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$-ը կամայական կոմպլեքս թվեր են:

մակարգի լուծումների բազմությունը հանդիսանում է n-չափանի գծային տարածություն:

Վեկտոր-ֆունկցիաների գծորեն կախվածությունը և անկախությունը սահմանվում է նույն կերպ, ինչպես և սկալյար ֆունկցիաների համար (§1, սահմանում 1.1), այսինքն՝ $\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \cdots \vec{f}_m(t)$ վեկտոր-ֆունկցիաները կոչվում են գծորեն անկախ (a,b) միջակայքում, եթե նրանց միայն տրիվիալ գծային կոմբինացիան է նույնաբար հավասար զրոյական վեկտոր-ֆունկցիային (a,b) միջակայքում: Նշված վեկտոր-ֆունկցիաները կոչվում են գծորեն կախյալ (a,b) միջակայքում, եթե գոյություն ունի նրանց ոչ տրիվիալ գծային կոմբինացիա, որը նույնաբար հավասար է զրոյական վեկտոր-ֆունկցիային (a,b)-ում:

Հեշտ է տեսնել, որ եթե $\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \cdots \vec{f}_m(t)$ վեկտոր-ֆունկցիաները գծորեն անկախ են (a,b) միջակայքի որևէ t_0 կետում[1], ապա նրանք գծորեն անկախ են (a,b) միջակայքում: Իրոք, դիցուք $\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \cdots \vec{f}_m(t)$ վեկտոր-ֆունկցիաները գծորեն կախյալ են (a,b)-ում, այսինքն՝ գոյություն ունեն $c_1, c_2, \cdots, c_m$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ, այնպիսիք, որ

$$c_1\vec{f}_1(t) + c_2\vec{f}_2(t) + \cdots + c_m\vec{f}_m(t) \equiv \vec{0}, \quad t \in (a,b):$$

Մասնավորապես, $t = t_0$ կետում այստեղից հետևում է, որ

$$c_1\vec{f}_1(t_0) + c_2\vec{f}_2(t_0) + \cdots + c_m\vec{f}_m(t_0) = \vec{0},$$

ինչը հակասում է $\vec{f}_1(t_0), \vec{f}_2(t_0), \cdots, \vec{f}_m(t_0)$ վեկտորների ենթադրված գծային անկախությանը:

Հակադարձ պնդումը, ընդհանրապես ասած, ճիշտ չէ:

Օրինակ՝ $\vec{f}_1(t) \equiv \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ և $\vec{f}_2(t) \equiv \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ վեկտոր-ֆունկցիաները գծորեն անկախ են իրական առանցքի կամայական (a,b) միջակայքում, սակայն

[1] Կարևոր է նկատել, որ այս հատկությունով օժտված են բուն վեկտոր-ֆունկցիաները, այսինքն $n=1$ դեպքում, երբ վեկտոր-ֆունկցիան դառնում է սկալյար ֆունկցիա, $f_1(t_0), f_2(t_0), \cdots f_m(t_0)$ թվերի գծորեն անկախության մասին խոսելն անիմաստ է:

կամայական t_0 կետում $\vec{f}_1(t_0)=\begin{pmatrix} t_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ և $\vec{f}_2(t_0)=\begin{pmatrix} t_0^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են (ստուգել):

Ուրիշ է իրադրությունը, երբ վեկտոր-ֆունկցիաները հանդիսանում են (8.2) համասեռ համակարգի լուծումներ:

Դիցուք

$$\vec{\varphi}_1(t),\vec{\varphi}_2(t),\cdots,\vec{\varphi}_m(t) \tag{8.3}$$

վեկտոր-ֆունկցիաները (8.2)-ի լուծումներ են:

Լեմմա 8.1: 1) Եթե որևէ t_0 կետում, $t_0 \in (a,b)$,

$$\vec{\varphi}_1(t_0),\vec{\varphi}_2(t_0),\cdots,\vec{\varphi}_m(t_0) \tag{8.4}$$

(հաստատուն) վեկտորները գծորեն անկախ են, ապա (8.3) լուծումները գծորեն անկախ են ամբողջ (a,b)-ում:

2) Եթե (8.4) վեկտորները գծորեն կախյալ են, ապա (8.3) լուծումները գծորեն կախյալ են ամբողջ (a,b)-ում:

Ապացույց: Առաջին հատկությունը, որը ճիշտ է կամայական վեկտոր-ֆունկցիաների համար, ապացուցված է վերևում: Ապացուցենք երկրորդ հատկությունը: (8.4) վեկտորների գծային կախվածությունը նշանակում է, որ գոյություն ունեն $c_1,c_2,\cdots,c_m$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ, այնպիսիք, որ

$$c_1\vec{\varphi}_1(t_0)+c_2\vec{\varphi}_2(t_0)+\cdots+c_m\vec{\varphi}_m(t_0)=\vec{0} \tag{8.5}$$

Այս $c_1,c_2,\cdots,c_m$ թվերի միջոցով կառուցենք $\vec{\varphi}(t)\equiv c_1\vec{\varphi}_1(t)+c_2\vec{\varphi}_2(t)+$ $+\cdots+c_m\vec{\varphi}_m(t)$ վեկտոր-ֆունկցիան, որը (8.2)-ի լուծում է որպես (8.3) լուծումների գծային կոմբինացիա և որը t_0 կետում, համաձայն (8.5)-ի, հավասար է զրոյական վեկտորի՝ $\vec{\varphi}(t_0)=\vec{0}$: Ակնհայտ է, որ $\vec{y}(t)\equiv 0$ վեկտոր-ֆունկցիան հանդիսանում է (8.2)-ի լուծում: Մյուս կողմից՝ $\vec{\varphi}(t)$ և $\vec{y}(t)\equiv 0$ լուծումները t_0 կետում բավարարում են նույն սկզբնական պայմանին: Համաձայն թեորեմ 8.1-ի՝ այդ լուծումները համընկնում են ամբողջ (a,b) միջակայքում, այսինքն՝ տեղի ունի

$$\vec{\varphi}(t)\equiv c_1\vec{\varphi}_1(t)+c_2\vec{\varphi}_2(t)+\cdots+c_m\vec{\varphi}_m(t)\equiv\vec{0},\ t\in(a,b)$$

նույնությունը, որն էլ նշանակում է, որ (8.3) լուծումները գծորեն կախյալ են (a,b)-ում: Լեմման ապացուցված է:

Սահմանում 8.1: (8.2) համասեռ համակարգի

$$\vec{\varphi}_1(t),\vec{\varphi}_2(t),\cdots,\vec{\varphi}_n(t)$$

լուծումների n-յակը կոչվում է լուծումների հիմնարար համակարգ, եթե այն գծորեն անկախ է:

Կարևոր է նկատել, որ ըստ սահմանման՝ հիմնարար համակարգում ընդգրկված լուծումների թիվը համընկնում է (8.1) (նույնն է (8.2)) նորմալ համակարգի հավասարումների թվի հետ (որը կոչվում է նորմալ համակարգի կարգ): Այսինքն՝ ինչպես և n-րդ կարգի գծային համասեռ հավասարումների (տե՛ս §§2,3,5) դեպքում, հիմնարար համակարգ կազմող լուծումների թիվը համընկնում է հավասարման կարգի հետ:

Թեորեմ 8.2:

1) Անընդհատ գործակիցներով (8.1) համակարգի լուծումների հիմնարար համակարգ գոյություն ունի:

2) (8.1) համակարգի կամայական լուծում ներկայացվում է հիմնարար համակարգի լուծումների գծային կոմբինացիայի միջոցով:

Ապացույց: 1) Դիցուք $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_n$-ը կամայական գծորեն անկախ վեկտորներ են $\mathbb{C}^n$-ից (և հետևաբար կազմում են բազիս $\mathbb{C}^n$-ում), և դիցուք

$\vec{\varphi}_1(t),\vec{\varphi}_2(t),\cdots,\vec{\varphi}_n(t)$-ն (8.1)-ի այն լուծումներն են, որոնք բավարարում են

$$\vec{\varphi}_1(t_0)=\vec{\xi}_1,\ \ \vec{\varphi}_2(t_0)=\vec{\xi}_2,\cdots,\ \ \vec{\varphi}_n(t_0)=\vec{\xi}_n, t_0\in(a,b)$$

սկզբնական պայմաններին: Համաձայն լեմմա 8.1-ի՝ $\vec{\varphi}_1(t),\vec{\varphi}_2(t),\cdots,\vec{\varphi}_n(t)$ լուծումները գծորեն անկախ են, այսինքն՝ կազմում են լուծումների հիմնարար համակարգ:

2) Դիցուք $\vec{\varphi}(t)$-ն (8.1) համակարգի որևէ լուծում է: Նշանակենք $\vec{\varphi}(t_0)=\vec{\xi}$: Քանի որ $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_n$ գծորեն անկախ վեկտորները կազմում են բազիս C^n-ում, ապա գոյություն ունեն այնպիսի $c_1,c_2,\cdots,c_n$ թվեր, որ $\vec{\xi}=c_1\vec{\xi}_1+c_2\vec{\xi}_2+\cdots+c_n\vec{\xi}_n$, այսինքն՝ $\vec{\varphi}(t_0)\equiv c_1\vec{\varphi}_1(t_0)+c_2\vec{\varphi}_2(t_0)+\cdots+c_n\vec{\varphi}_n(t_0)$: Այսպիսով՝ $\vec{\varphi}(t)$ և $c_1\vec{\varphi}_1(t)+\ \ +c_2\vec{\varphi}_2(t)+\cdots+c_n\vec{\varphi}_n(t)$ լուծումների (սկզբնական) արժեքները t_0

կետում համընկնում են: Համաձայն թեորեմ 8.1-ի՝ այդ լուծումները համընկնում են ամբողջ (a,b)-ում, այսինքն՝

$$\vec{\varphi}(t) \equiv c_1\vec{\varphi}_1(t) + c_2\vec{\varphi}_2(t) + \cdots + c_n\vec{\varphi}_n(t), \quad t \in (a,b)$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 8.1: Հեշտ է տեսնել, որ (8.1) համակարգի լուծումների հիմնարար համակարգը միակը չէ, քանի որ ամեն մի գծորեն անկախ $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \cdots, \vec{\xi}_n$ վեկտորների n-յակ ծնում է մեկ հիմնարար համակարգ:

Դիտողություն 8.2: Ըստ թեորեմ 8.2-ի՝ (8.1) համակարգի լուծումների բազմությունը n-չափանի գծային տարածություն է, և ամեն մի լուծումների հիմնարար համակարգ այդ տարածության բազիս է:

Դիցուք

$$\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \cdots, \vec{\varphi}_n(t) \tag{8.6}$$

վեկտոր ֆունկցիաները (8.2) համակարգի լուծումներ են:

Դիտարկենք

$$\Phi(t) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

մատրից-ֆունկցիան, որի սյուներն են (8.6) համակարգի վեկտոր-ֆունկցիաները և գրենք այն

$$\Phi(t) = \left(\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \cdots, \vec{\varphi}_n(t)\right)$$ (8.7) տեսքով:

Սահմանում 8.2: $\Phi(t)$ մատրիցի $W(t) \equiv \det\Phi(t)$ որոշիչը կոչվում է (8.6) վեկտոր-ֆունկցիաների համակարգի Վրոնսկու որոշիչ կամ վրոնսկյան:

Լեմմա 8.1-ից ստացվում է վրոնսկյանի հետևյալ հատկությունը (համեմատե՛ք լեմմա 5.3-ի հետ)՝

Լեմմա 8.2: Լուծումների (8.6) համակարգի վրոնսկյանը կամ նույնաբար զրո է (a,b)-ում (և այդ դեպքում լուծումների (8.6) համակարգը գծորեն կախյալ է), կամ (a,b) միջակայքի ոչ մի կետում զրո չի դառնում (և այդ դեպքում (8.6) համակարգը գծորեն անկախ է):

Լեմմա 8.2-ի պնդումը համարժեք է հետևյալ պնդմանը՝

Դիտողություն 8.1: Որպեսզի լուծումների (8.6) համակարգը լինի հիմնարար, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա վրոնսկյանը (a,b) միջակայքի ոչ մի կետում չընդունի զրո արժեք:

Այս պարզ պնդումների ստուգումը առաջարկում ենք ընթերցողին:

Դիտարկենք $\vec{f}_1(t)=\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ և $\vec{f}_2(t)=\begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ վեկտոր-ֆունկցիաները: Նրանցով կառուցված $W(t)=\begin{vmatrix} t & t^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ որոշիչը նույնաբար հավասար է զրոյի, սակայն այդ վեկտոր-ֆունկցիաները գծորեն անկախ են իրական առանցքի կամայական (a,b) միջակայքում: Սա նշանակում է, որ գոյություն չունի այնպիսի անընդհատ $A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$ մատրից-ֆունկցիա, որ $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ և $\begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ վեկտոր-ֆունկցիաները լինեն $\bar{y}'=A(t)\bar{y}$ համակարգի լուծումներ:

Դիցուք $\vec{\varphi}_1(t),\vec{\varphi}_2(t),\cdots,\vec{\varphi}_m(t)$ վեկտոր-ֆունկցիաները (8.2) համակարգի լուծումներ են (m-ը կամայական բնական թիվ է)։ Դիտարկենք $\Phi(t)$ մատրից-ֆունկցիան, որի սյուները $\vec{\varphi}_1(t),\vec{\varphi}_2(t),\cdots,\vec{\varphi}_m(t)$ վեկտոր-ֆունկցիաներն են, այսինքն՝ $\Phi(t)=(\vec{\varphi}_1(t),\vec{\varphi}_2(t),\cdots,\vec{\varphi}_m(t))$։ Այս մատրից-ֆունկցիան ունի n տող և m սյուն, և նրա ածանցյալ մատրիցը, ըստ սահմանման (տե՛ս §7), $\Phi'(t)=(\vec{\varphi}_1'(t),\vec{\varphi}_2'(t),\cdots,\vec{\varphi}_m'(t))$ $n\times m$ չափանի մատրից-ֆունկցիան է։ Եթե քառակուսի $n\times n$ չափանի $A(t)$ մատրիցը բազմապատկենք $\Phi(t)$ $n\times m$ չափանի մատրիցով, կստանանք $A(t)\cdot\Phi(t)=(A(t)\vec{\varphi}_1(t),A(t)\vec{\varphi}_2(t),\cdots,A(t)\vec{\varphi}_m(t))$ $n\times m$ չափանի մատրիցը։ Քանի որ $\vec{\varphi}_k'(t)\equiv A(t)\vec{\varphi}_k(t)$, $k=1,2,\cdots,m$, $t\in(a,b)$, ապա $\Phi'(t)$ և $A(t)\Phi(t)$ մատրիցների սյուները համընկնում են, այսինքն տեղի ունի

$$\Phi'(t)\equiv A(t)\Phi(t),\quad t\in(a,b) \tag{8.8}$$

նույնությունը։

Սահմանում 8.3: Դիֆերենցելի $n\times m$ չափանի $\Phi(t)$ մատրից-ֆունկցիան կոչվում է

$$X'=A(t)X \tag{8.9}$$

(մատրիցային) հավասարման լուծում, եթե տեղի ունի (8.8) նույնությունը։

Թեորեմ 8.3: Որպեսզի $\Phi(t)$ մատրից-ֆունկցիան լինի (8.9) հավասարման լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա յուրաքանչյուր սյուն հանդիսանա (8.2) համակարգի (վեկտորային) լուծում։

Ապացույց: Բավարարությունը ապացուցված է վերը բերված դատողություններում։

Ապացուցենք անհրաժեշտությունը։ Դիցուք $n\times m$ չափանի դիֆերենցելի $\Phi(t)$ մատրիցի սյուներն են $\vec{\psi}_1(t),\vec{\psi}_2(t),\cdots,\vec{\psi}_m(t)$ վեկտոր-ֆունկցիաները և տեղի ունի (8.8) նույնությունը, այսինքն՝

$$\left(\vec{\psi}_1'(t),\vec{\psi}_2'(t),\cdots,\vec{\psi}_m'(t)\right)\equiv(A(t)\vec{\psi}_1(t),A(t)\vec{\psi}_2(t),\cdots,A(t)\vec{\psi}_m(t)),$$

$t\in(a,b)$։ Վերջին նույնությունից հետևում է, որ $\vec{\psi}_k'(t)\equiv A(t)\vec{\psi}_k(t)$, $k=1,2,\cdots,m$, $t\in(a,b)$։ Թեորեմն ապացուցված է։

Դեշտ է նկատել, որ մատրիցային լուծումները վեկտորական լուծումների ընդհանրացումն են, քանի որ $m=1$ դեպքում մատրիցային լուծումը համընկնում է վեկտորական լուծման հետ: Ստորև մենք կհամոզվենք, որ հիմնարար դեր են խաղում քառակուսի մատրից-լուծումները, այսինքն, երբ $m=n$:

Սահմանում 8.4: Եթե (8.6) լուծումների համակարգը հիմնարար է, ապա (8.7) բանաձևով որոշված մատրից-ֆունկցիան կոչվում է (8.2) համակարգի *հիմնարար մատրից:*

Ակնհայտ է, որ հիմնարար մատրիցը (8.9)-ի լուծում է և նրա որոշիչը ոչ մի կետում զրո չի դառնում: Ավելին՝ (8.9) հավասարման ամեն մի $n\times n$-չափանի լուծում, որի որոշիչը ոչ մի կետում զրո չի դառնում, հանդիսանում է (8.2) համակարգի հիմնարար մատրից (ստուգե՛լ):

Քանի որ (8.2)-ի լուծումների հիմնարար համակարգը միակը չէ, ապա հիմնարար մատրիցը նույնպես միակը չէ: Սակայն պարզվում է, որ կամայական երկու հիմնարար մատրիցների միջև գոյություն ունի որոշակի կապ՝

Թեորեմ 8.4: Եթե $\Phi(t)$-ն և $\Psi(t)$-ն (8.2) համակարգի հիմնարար մատրիցներ են, ապա գոյություն ունի հաստատուն, չվերասերվող P մատրից այնպիսին, որ

$$\Psi(t)\equiv\Phi(t)\cdot P: \tag{8.10}$$

Ապացույց: Դիցուք $\Psi(t)\equiv(\vec{\psi}_1(t),\vec{\psi}_2(t),\cdots,\vec{\psi}_n(t))$ և $\Phi(t)\equiv(\vec{\varphi}_1(t),\vec{\varphi}_2(t),\cdots,\vec{\varphi}_n(t))$: Քանի որ $\vec{\varphi}_1(t),\vec{\varphi}_2(t),\cdots,\vec{\varphi}_n(t)$ լուծումների համակարգը հիմնարար է, ապա $\Psi(t)$ մատրիցի կամայական $\vec{\psi}_k(t)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ սյունն, որպես (8.2) համակարգի լուծում, կարելի է ներկայացնել

$$\vec{\psi}_k(t)\equiv c_{1k}\vec{\varphi}_1(t)+c_{2k}\vec{\varphi}_2(t)+\cdots+c_{nk}\vec{\varphi}_n(t)\,,k=1,2,\cdots,n$$

գծային կոմբինացիայի տեսքով, որն իր հերթին կարելի է գրել

$$\vec{\psi}_k(t)\equiv\Phi(t)\begin{pmatrix}c_{1k}\\c_{2k}\\\vdots\\c_{nk}\end{pmatrix}\equiv\Phi(t)\vec{p}_k,\qquad \vec{p}_k=\begin{pmatrix}c_{1k}\\c_{2k}\\\vdots\\c_{nk}\end{pmatrix},$$

տեսքով: Այստեղից հետևում է, որ՝

$$\Psi(t)\equiv(\vec{\psi}_1(t),\vec{\psi}_2(t),\cdots,\vec{\psi}_n(t))\equiv(\Phi(t)\vec{p}_1,\Phi(t)\vec{p}_2,\cdots,\Phi(t)\vec{p}_n,)\equiv$$
$$\equiv\Phi(t)(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)\equiv\Phi(t)P:$$

Մնում է ապացուցել, որ այսպես կառուցված P հաստատուն մատրիցը վերասերվող չէ, այսինքն՝ $\det P \neq 0$: Իրոք, քանի որ $\det\Psi(t) \equiv \det\Phi(t)\cdot\det P$ և $\det\Psi(t) \neq 0$, $\det\Phi(t) \neq 0$, ապա թեորեմն ապացուցված է:

Չնայած (8.2) համակարգի հիմնարար մատրիցը միակը չէ, սակայն ամեն մի հիմնարար մատրից միարժեքորեն որոշում է (վերականգնում է) այն (8.2) տեսքի համակարգը (այսինքն՝ (8.1)-ի գործակիցները), որի համար նա հանդիսանում է հիմնարար մատրից: Ավելին՝ տեղի ունի հետևյալ պնդումը

Թեորեմ 8.5: Կամայական $n\times n$ -չափանի մատրից-ֆունկցիա, որի տարրերը անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են որևէ (a,b) միջակայքում և որի որոշիչը (a,b)-ի ոչ մի կետում զրո չի դառնում, հիմնարար մատրից է մի որոշակի (միակ) (8.2) տեսքի համակարգի համար:

Ապացույց: Քանի որ $\det\Phi(t) \neq 0$, $t\in(a,b)$, ապա $\Phi^{-1}(t)$ հակադարձ մատրից-ֆունկցիան գոյություն ունի և անընդհատ է (a,b)-ում: Ըստ պայմանի՝ անընդհատ է նաև $\Phi'(t)$ մատրից-ֆունկցիան: Հետևաբար՝

$$A(t) \equiv \Phi'(t)\cdot\Phi^{-1}(t) \tag{8.11}$$

բանաձևով որոշված $A(t)$ մատրից-ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է: Բազմապատկելով (8.11)-ի երկու կողմերը աջից $\Phi(t)$ մատրիցով, ստանում ենք

$$\Phi'(t) \equiv A(t)\Phi(t)$$

նույնությունը: Այսպիսով՝ $\Phi(t)$-ն $A(t)$ մատրիցով ծնված $X' = A(t)X$ մատրիցային հավասարման չվերասերվող $n\times n$-չափանի լուծումն է, ինչը համարժեք է նրան, որ $\Phi(t)$-ն (8.2) համակարգի հիմնարար մատրիցն է: Թեորեմն ապացուցված է:

Վարժություն 8.1: Օգտվելով (8.10) բանաձևից՝ ապացուցել, որ (8.2) համակարգի կամայական $\Phi(t)$ և $\Psi(t)$ հիմնարար մատրիցների համար տեղի ունի

$$\Phi'(t)\cdot\Phi^{-1}(t) \equiv \Psi'(t)\cdot\Psi^{-1}(t), \quad t\in(a,b),$$

նույնությունը:

Հիմնարար մատրիցը, որ օժտված է $\Phi(t_0) = E_n$ (E_n-ը n-չափանի միավոր մատրիցն է) հատկությամբ, կանվանենք նորմավորված t_0 կետում:

Եթե $\Phi(t)$ հիմնարար մատրիցը բազմապատկենք որևէ չվերասերվող $n\times n$-չափանի P մատրիցով, ապա ակնհայտ է, որ ստացված $\Phi(t)\cdot P$ մատրիցը նույնպես կլինի հիմնարար: Այստեղից հետևում է, որ (8.2) համակարգի կամայական հիմնարար մատրից կարելի է նորմավորել (կամայական $t_0\in(a,b)$ կետում), բազմապատկելով այն $\Phi^{-1}(t_0)$ մատրիցով, այսինքն՝ եթե $\Phi(t)$-ն (8.2) համակարգի որևէ հիմնարար մատրից է, ապա $\Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(t_0)$-ն նույն (8.2) համակարգի հիմնարար մատրիցն է, նորմավորված t_0 կետում:

Վարժություն 8.2: Ապացուցել, որ (8.2) համակարգի կամայական $\Phi(t)$ և $\Psi(t)$ հիմնարար մատրիցների և կամայական $t_0\in(a,b)$ կետի համար տեղի ունի

$$\Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(t_0)\equiv\Psi(t)\cdot\Psi^{-1}(t_0),\ \ t\in(a,b)$$

նույնությունը:

Թեորեմ 8.6: Դիցուք $A(t)$-ն $n\times n$ չափանի անընդհատ մատրից է, որոշված (a,b) միջակայքում: Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} X'=A(t)X, \\ X(t_0)=C, \qquad t_0\in(a,b), \quad C\in\mathfrak{M}^{n,n}, \end{cases}$$

Կոշու խնդրի միակ լուծումը տրվում է

$$X(t)=\Phi(t)\cdot C \tag{8.12}$$

բանաձևով, որտեղ $\Phi(t)$-ն (8.2) համակարգի հիմնարար մատրիցն է՝ նորմավորված t_0 կետում:

Այս թեորեմը, որի ապացույցը կատարվում է անմիջական տեղադրումով, ցույց է տալիս հիմնարար մատրիցի կարևորագույն դերը գծային դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունում: «Ինֆորմացիան», որը պարունակում է իր մեջ հիմնարար մատրիցը, թույլ է տալիս ոչ միայն նկարագրել ((8.12) բանաձևի միջոցով) (8.9) մատրիցային հավասարման (և մասնավորապես (8.2) համակարգի) բոլոր հնարավոր լուծումները, այլ նաև վերականգնել ((8.11) բանաձևի միջոցով) ինքը հավասարումը:

Ստորև (§9-ում) ցույց կտրվի, որ (8.2) համակարգի հիմնարար մատրիցի իմացությունը թույլ է տալիս լուծել նաև $\vec{y}'=A(t)\vec{y}+\vec{f}(t)$ անհամասեռ համակարգը: Քանի որ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների կամայական համակարգ (լուծված բարձր կարգի ածանցյալների նկատմամբ) բերվում է համարժեք $\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t)$ տիպի նորմալ համակարգի, ապա կարելի է ասել, որ $\vec{y}' = A(t)\vec{y}$ տեսքի նորմալ համակարգի հիմնարար մատրիցը այն հիմնական գործիքն է, որի ուսումնասիրմանն են հանգում գծային դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության հիմնական հարցերը:

ԼԻՈՒՎԻԼԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

Դիցուք $W(t)$-ն (8.6) լուծումների համակարգի վրոնսկյանն է, այսինքն՝ (8.7) բանաձևով որոշված $\Phi(t)$ մատրից-ֆունկցիայի որոշիչը: Նշանակենք $s(t)$-ով (8.2) համակարգը ծնող $A(t)$ մատրիցի հետքը՝

$$s(t) \equiv spA(t) \equiv a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t),$$

որը հանդիսանում է անընդհատ ֆունկցիա՝ որոշված (a,b) միջակայքում:

Թեորեմ 8.7: (Լիուվիլի բանաձևը): Կամայական $t_0 \in (a,b)$ կետի համար տեղի ունի

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} s(\tau)d\tau}, \quad t \in (a,b) \tag{8.13}$$

ներկայացումը:

Ապացույց: Բավական է ապացուցել, որ $W(t)$ ֆունկցիան բավարարում է

$$W'(t) \equiv s(t)W(t), \quad t \in (a,b), \tag{8.14}$$

նույնությանը, այսինքն՝ հանդիսանում է $y' = s(t)y$ անջատվող փոփոխականներով հավասարման լուծում: Իրոք, $y' = s(t)y$ հավասարման ընդհանուր լուծումը տրվում է $y(t) = c\,e^{\int_{t_0}^{t} s(\tau)d\tau}$ բանաձևով (գլ. II, §1), իսկ $y(t_0) = W(t_0) = c$ պայմանին բավարարող լուծումը տրվում է (8.13) բանաձևով:

Համաձայն որոշչի ածանցման բանաձևի (տե՛ս §7)՝

$$W'(t) \equiv W_1(t) + W_2(t) + \cdots + W_n(t), \tag{8.15}$$

որտեղ $W_i(t)$-ն այն մատրիցի որոշիչն է, որը ստացվում է $\Phi(t)$ (տե՛ս (8.7)) մատրիցից, եթե նրա i-րդ տողը ածանցենք ըստ t-ի, իսկ մնացած տողերը թողնենք անփոփոխ:

Քանի որ $\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \cdots, \vec{\varphi}_n(t)$ վեկտոր-ֆունկցիաները (8.2) համակարգի լուծումներն են, ապա տեղի ունեն $\vec{\varphi}_k'(t) \equiv A(t)\vec{\varphi}_k(t)$, $k = 1,2,\cdots,n$, կամ կոմպո-նենտներով գրված, $\varphi_{ik}'(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{im}(t) \cdot \varphi_{mk}(t)$, $k, i = 1,2,\cdots,n$ նույնությունները:

Այսպիսով՝ $W_i(t)$ որոշիչը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$W_i(t) \equiv \det\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{i1}'(t) & \varphi_{i2}'(t) & \cdots & \varphi_{in}'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \det\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & & \\ \sum_{m=1}^{n} a_{im}(t)\varphi_{m1}(t) & \cdots & \cdots & \sum_{m=1}^{n} a_{im}(t)\varphi_{mn}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \det\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ii}(t)\varphi_{i1}(t) & \cdots & \cdots & a_{ii}(t)\varphi_{in}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} +$$

$$+ \det\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{n} a_{im}(t)\varphi_{m1}(t) & \cdots & \cdots & \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{n} a_{im}(t)\varphi_{mn}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv a_{ii}(t)W(t) + \widetilde{W}_i(t) \equiv a_{ii}(t)W(t): \qquad (8.16)$$

$\widetilde{W}_i(t)$ որոշիչը նույնաբար զրո է, քանի որ նրա i-րդ տողը մնացած տողերի գծային կոմբինացիան է:

Այսպիսով՝ (8.15)-ից և (8.16)-ից հետևում է, որ

$$W'(t) \equiv a_{11}(t)W(t) + a_{22}(t)W(t) + \cdots + a_{nn}(t)W(t) \equiv s(t)W(t)$$

այսինքն՝ տեղի ունի (8.14) նույնությունը: Թեորեմն ապացուցված է:

Նկատենք, որ Լիուվիլի (8.13) բանաձևից հետևում է լեմմա 8.2-ի պնդումը:

Ցույց տանք նաև, որ §5-ում ստացված (5.12) Լիուվիլի բանաձևը (n-րդ կարգի գծային համասեռ հավասարման համար) կարելի է ստանալ որպես (8.13) բանաձևի հետևանք:

Իրոք, n-րդ կարգի

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0 \tag{8.17}$$

գծային համասեռ հավասարումը

$$\begin{cases} x = y_1 \\ x' = y_2 \\ \cdots\cdots \\ x^{(n-1)} = y_n \end{cases}$$

փոփոխականների փոխարինմամբ բերվում է համարժեք

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_n(t)y_1 - a_{n-1}(t)y_2 - \cdots - a_1(t)y_n \end{cases}$$

գծային նորմալ համակարգի, որը կարելի է գրել

$$\bar{y}' = A(t)\bar{y} \tag{8.18}$$

վեկտորական տեսքով: Այստեղ $\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, իսկ գործակիցներից կազմված $A(t)$

մատրից-ֆունկցիան ունի

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix} \qquad (8.19)$$

տեսքը: Այս մատրիցի հետքը հավասար է $-a_1(t)$, այսինքն՝ համաձայն մեր նշանակումների՝

$$s(t)\equiv spA(t)\equiv -a_1(t) \qquad (8.20)$$

Դիցուք

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t) \qquad (8.21)$$

ֆունկցիաները (8.17) հավասարման լուծումներ են: Դեշտ է համոզվել, որ (8.17)-ի լուծումների այդ համակարգին համապատասխանում է (8.18) նորմալ համակարգի

$$\vec{\Phi}_1(t)=\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{\Phi}_2(t)=\begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \\ \vdots \\ \varphi_2^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \ \ldots, \quad \vec{\Phi}_n(t)=\begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \varphi_n'(t) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \qquad (8.22)$$

լուծումների համակարգը և հակառակը՝ եթե

$$\vec{\psi}_1(t)=\begin{pmatrix} \psi_{11}(t) \\ \psi_{21}(t) \\ \vdots \\ \psi_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_2(t)=\begin{pmatrix} \psi_{12}(t) \\ \psi_{22}(t) \\ \vdots \\ \psi_{n2}(t) \end{pmatrix}, \ \ldots \ , \quad \vec{\psi}_n(t)=\begin{pmatrix} \psi_{1n}(t) \\ \psi_{2n}(t) \\ \vdots \\ \psi_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

վեկտոր-ֆունկցիաները (8.18) նորմալ համակարգի լուծումներ են, ապա նրանց առաջին կոմպոնենտները, այսինքն՝

$$\psi_{11}(t), \psi_{12}(t), \cdots, \psi_{1n}(t)$$

ֆունկցիաները հանդիսանում են (8.17) հավասարման լուծումներ: (8.17) հավասարման (8.21) լուծումների համակարգի վրոնսկյանը (տե'ս սահմանում 5.2) որոշվում է

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

բանաձևով և, համաձայն (8.22)-ի և սահմանում 8.2-ի համընկնում է (8.18) համակարգի լուծումների վրոնսկյանի հետ: Վերջինիս համար տեղի ունի (8.13) Լիուվիլի բանաձևը: Յաշվի առնելով (8.20) առնչությունը՝ (8.13)-ից ստանում ենք (5.12) Լիուվիլի բանաձևը (8.17) հավասարման համար:

Վարժություն 8.3: Ապացուցել, որ եթե (8.17) հավասարման (8.21) լուծումների համակարգը գծորեն անկախ է (գծորեն կախյալ է), ապա (8.18)-ի (8.22) լուծումների համակարգը նույնպես գծորեն անկախ է (գծորեն կախյալ է):

Վարժություն 8.4: Թեորեմ (8.2)-ից, որպես հետևանք, ստանալ լեմմա 5.1-ը և թեորեմ 5.2-ը:

Վարժություն 8.5: Դիցուք (8.17) հավասարումը հաստատուն գործակիցներով է, այսինքն՝ $a_i(t) \equiv a_i = const$: Ապացուցել, որ այդ դեպքում (8.17)-ի բնութագրիչ բազմանդամը $(L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n)$ համընկնում է $\det(\lambda E - A)$ բազմանդամի հետ, որտեղ A-ն որոշվում է (8.19) բանաձևով:

§9. ԳԾԱՅԻՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ: ՀԱՍՏԱՏՈՒՆՆԵՐԻ ՎԱՐԻԱՑԻԱՅԻ ԵՂԱՆԱԿԸ

Դիտարկենք գծային հավասարումների

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \ldots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \ldots + a_{2n}(t)y_n + f_2(t) \\ \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \ldots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t) \end{cases} \tag{9.1}$$

նորմալ համակարգը $y_1, y_2, \dots, y_n$ անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ: Ենթադրվում է, որ a_{ij} գործակիցները և f_i ազատ անդամները $(i, j = 1,2,\cdots,n)$ անընդհատ ֆունկցիաներ են, որոշված իրական առանցքի որևէ (a,b) միջակայքում, այսինքն՝ $a_{ij}, f_i \in C(a,b)$: Օգտվելով §8-ի նշանակումներից և ավելացնելով $\vec{f}(t)$ նշանակումը ազատ անդամներից կազմված վեկտոր-սյան համար, գրենք (9.1) համակարգը

$$\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \tag{9.2}$$

վեկտորական տեսքով:

Ցույց տանք՝ ինչպես, իմանալով (9.2)-ին համապատասխանող $\vec{y}' = A(t)\vec{y}$ համասեռ համակարգի որևէ հիմնարար մատրից (նույնն է՝ լուծումների որևէ հիմնարար համակարգ), կարելի է նկարագրել (9.2) անհամասեռ համակարգի բոլոր լուծումների բազմությունը: Այն կարելի է իրականացնել հաստատունների վարիացիայի եղանակով:

Հաստատունների վարիացիայի եղանակ; Դիցուք $\Phi(t)$-ն (8.2) համասեռ համակարգի ($\vec{y}' = A(t)\vec{y}$) հիմնարար մատրիցն է՝ նորմավորված որևէ $t_0 \in (a,b)$ կետում: Նախորդ պարագրաֆում ապացուցվեց, որ (8.2) համակարգի լուծումների բազմությունը նկարագրվում է $\vec{y}(t) = \Phi(t) \cdot \vec{C}$ բանաձևով, որտեղ $\vec{C}$-ն կամայական հաստատուն (n-չափանի) վեկտոր է: Փնտրենք (9.2) անհամասեռ համակարգի լուծումը:

$$\vec{y}(t) = \Phi(t) \cdot \vec{C}(t) \tag{9.3}$$

տեսքով, որտեղ $\vec{C}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիան ենթակա է որոշման: Տեղադրելով (9.3) արտահայտությունը (9.2) համակարգի մեջ, ստանում ենք

$$\Phi'(t) \cdot \vec{C}(t) + \Phi(t) \cdot \vec{C}'(t) = A(t) \cdot \Phi(t) \cdot \vec{C}(t) + \vec{f}(t) \tag{9.4}$$

առնչությունը, որտեղից, քանի որ $\Phi'(t) \equiv A(t)\Phi(t)$, հետևում է՝

$$\Phi(t) \cdot \vec{C}'(t) = \vec{f}(t): \tag{9.5}$$

Այսպիսով՝ որպեսզի (9.3) տեսքի վեկտոր-ֆունկցիան հանդիսանա (9.2) համակարգի լուծում (այսինքն՝ որպեսզի (9.4)-ը լինի նույնություն ըստ t-ի (a,b)

միջակայքում), անհրաժեշտ է և բավարար, որ (9.5) առնչությունը լինի նույնություն (a,b) -ում:

Քանի որ $\Phi(t)$-ն հիմնարար մատրից է, ապա $\Phi^{-1}(t)$ մատրից-ֆունկցիան գոյություն ունի և անընդհատ է (a,b) միջակայքում: (9.5)-ից ստանում ենք

$$\vec{C}'(t)=\Phi^{-1}(t)\cdot\vec{f}(t) \text{ կամ } \vec{C}(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau+\vec{C}_1,$$

որտեղ t_0-ն կամայական կետ է (a,b)-ից, իսկ $\vec{C}_1$-ը կամայական հաստատուն վեկտոր՝ $\vec{C}_1\in\mathbb{C}^n$: Այսպիսով

$$\vec{y}(t)=\Phi(t)\cdot\left\{\vec{C}_1+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau\right\} \tag{9.6}$$

վեկտոր-ֆունկցիան (9.2) համակարգի լուծում է կամայական $t_0\in(a,b)$ և կամայական $\vec{C}_1$ վեկտորի համար: Ապացուցենք, որ (9.6) բանաձևով որոշվում են (9.2) համակարգի բոլոր լուծումները: Իրոք, դիցուք $\vec{\varphi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիան (9.2) համակարգի որևէ լուծում է: Նշանակենք նրա արժեքը $t_0\in(a,b)$ կետում $\vec{C}_0$-ով՝ $\vec{\varphi}(t_0)=\vec{C}_0$: Ընտրելով (9.6) բանաձևում $\vec{C}_1=\vec{C}_0$, ստանում ենք (հիշենք, որ $\Phi(t_0)=\mathrm{E}_n$), որ $\vec{y}(t_0)=\vec{\varphi}(t_0)$, այսինքն՝ $\vec{y}(t)$ և $\vec{\varphi}(t)$ լուծումները ունեն նույն սկզբնական արժեքները t_0 կետում: (9.2) համակարգի համար Կոշու խնդրի լուծման միակությունից (տե՛ս թեորեմ III) հետևում է, որ $\vec{\varphi}(t)\equiv\vec{y}(t)$, այսինքն (9.6) բանաձևը իրոք նկարագրում է (9.2) համակարգի բոլոր լուծումները: Այս պատճառով (9.6) -ը կոչվում է (9.2) -ի *ընդհանուր լուծում*.

Այսպիսով ապացուցված է հետևյալ պնդումը

Թեորեմ 9.1: Դիցուք $\Phi(t)$-ն (8.2) համակարգի հիմնարար մատրից է՝ նորմավորված t_0 կետում: Այդ դեպքում

$$\begin{cases}\vec{y}'=\mathrm{A}(t)\vec{y}+\vec{f}(t)\\ \vec{y}(t_0)=\vec{C}_0\end{cases} t_0\in(a,b),\ \ \vec{C}_0\in\mathbb{C}^n,$$

Կոշու խնդրի լուծումը տրվում է

$$\vec{y}(t)=\Phi(t)\cdot\left\{\vec{C}_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau\right\} \tag{9.7}$$

բանաձևով:

Եթե $\Phi(t)$-ն (8.2) համակարգի որևէ հիմնարար մատրից է, ապա (տե՛ս §8) $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$-ն (8.2)-ի հիմնարար մատրիցն է, նորմավորված t_0 կետում: Այստեղից հետևում է, որ կամայական հիմնարար մատրիցի միջոցով (9.2)-ի ընդհանուր լուծումը գրվում է

$$\vec{y}(t)=\Phi(t)\cdot\left\{\Phi^{-1}(t_0)\vec{C}_1+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau\right\}$$

տեսքով:

Հեշտ է տեսնել նաև, որ եթե դիտարկենք

$$X'=A(t)X+F(t),\ F(t)\in\mathfrak{M}^{n,m}$$

մատրիցային հավասարումը, ապա նրա ընդհանուր լուծումը կգրվի

$$X(t)=\Phi(t)\cdot\left\{C+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau\right\}$$

տեսքով, որտեղ C-ն կամայական $n\times m$–չափանի հաստատուն մատրից է, իսկ $\Phi(t)$-ն նույն (8.2) համակարգի հիմնարար մատրիցն է՝ նորմավորված t_0 կետում:

Վարժություն 9.1: Ապացուցել որ լեմմա 6.1-ի (տե՛ս §6) պայմանը ոչ միայն բավարար է, այլ նաև անհրաժեշտ:

§ 10. ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Դիտարկենք դիֆերենցիալ հավասարումների

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}y_1+a_{12}y_2+......+a_{1n}y_n \\ y_2'=a_{21}y_1+a_{22}y_2+.....+a_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n'=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+......+a_{nn}y_n \end{cases} \tag{10.1}$$

գծային համասեռ նորմալ համակարգը, որի a_{ij} գործակիցները հաստատուններ են:

Այս համակարգը §8-ում ուսումնասիրված փոփոխական գործակիցներով (8.1) համակարգի մասնավոր դեպքն է և կարող է դիտարկվել որպես օրինակ, որը լուսաբանում է §8-ում շարադրված ընդհանուր տեսությունը:

Առանձնացնել այս մասնավոր դեպքի ուսումնասիրությունը մեզ մղում են այն հանգամանքները, որ հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերը ներկայացնում են իրենցից սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների մի դաս, որոնք լուծվում են մինչև վերջ էլեմենտար ֆունկցիաների միջոցով, մասնավորապես, (10.1) համակարգի կամայական $(y_1(t), y_2(t), \cdots y_n(t))$ լուծման ամեն մի $y_k(t)$, $(k = 1, \cdots, n)$ կոմպոնենտ, ինչպես և մեկ, n-րդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ հավասարման կամայական լուծում (տե՛ս §§2,3), հանդիսանում է քվազիբազմանդամ:

Արդյունքները, որոնք կստացվեն այստեղ (10.1) համակարգի համար, էական դեր են խաղում կայունության տեսությունում (տե՛ս գլ. VI)

Գրենք (10.1) համակարգը

$$\vec{y}' = A\vec{y} \tag{10.2}$$

վեկտորական տեսքով, որտեղ $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$-ն որոնելի վեկտոր-ֆունկցիան է,

իսկ A-ն գործակիցներից կազմված հաստատուն մատրիցն է, $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}^{n,n}$:

Ինչպես և մեկ n-րդ կարգի հաստատուն գործակիցներով համասեռ հավասարման դեպքում (տե՛ս §§2,3), այստեղ նույնպես նպատակ է դրվում հնարավորին չափ բացահայտ բանաձևերով (էլեմենտար ֆունկցիաների միջոցով) նկարագրել (10.1) (նույնն է (10.2)) համակարգի բոլոր լուծումների բազմությունը (ընդհանուր լուծումը):

Համաձայն թեորեմ 8.6-ի՝ (10.2) համակարգի ընդհանուր լուծումը տրվում է

$$\vec{y}(t) = \Phi(t) \cdot \vec{C} \tag{10.3}$$

բանաձևով, որտեղ $\Phi(t)$-ն (10.2) համակարգի որևէ հիմնարար մատրիցն է, իսկ $\vec{C}$-ն՝ կամայական n-չափանի վեկտոր: Այսպիսով՝ մեր խնդիրն է պարզել (10.2) համակարգի որևէ հիմնարար մատրիցի կառուցվածքը, կամ, որ նույնն է, կառուցել լուծումների որևէ հիմնարար համակարգ (որոնք հանդիսանում են հիմնարար մատրիցի սյուները):

Թեորեմ 10.1: Դիֆերենցիալ հավասարումների (10.2) համակարգի հիմնարար մատրիցը, նորմավորված $t_0 = 0$ կետում, տրվում է

$$\Phi(t) = e^{At} \tag{10.4}$$

բանաձևով:

Ապացույց: Համաձայն մատրիցի էկսպոնենտի սահմանման (տե՛ս §7)՝

$$e^{At} \equiv E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + ... + \frac{1}{n!}A^nt^n + ...: \tag{10.5}$$

Քանի որ այս շարքը կարելի է ածանցել անդամ առ անդամ (տե՛ս §7), ապա $\left(e^{At}\right)' \equiv \dfrac{d}{dt}e^{At}$ ածանցյալի համար ստանում ենք

$$\frac{d}{dt}e^{At} \equiv A\left(E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + ... + \frac{1}{n!}A^nt^n + ...\right) \equiv Ae^{At}$$

նույնությունը, այսինքն՝ e^{At} մատրից-ֆունկցիան $X' = AX$ մատրիցային հավասարման (տե՛ս (8.9)) $n \times n$-չափանի մատրիցային լուծում է և, մասնավորաբար, նրա որոշչի համար տեղի ունի Լիուվիլի բանաձևը (տե՛ս (8.13)): Մյուս կողմից՝ (10.5) բանաձևից հետևում է, որ $e^{At}\Big|_{t=0} = E$, և, հետևաբար, $t = 0$ կետում e^{At} մատրիցի որոշիչը հավասար չէ զրոյի: Համաձայն Լիուվիլի բանաձևի՝ այն զրո չէ բոլոր իրական t-երի համար: Այսպիսով ապացուցվեց, որ e^{At} մատրից-ֆունկցիան (10.2) համակարգի հիմնարար մատրիցն է՝ նորմավորված 0 կետում: Թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով՝ (10.2) համակարգի ընդհանուր լուծումը տրվում է

$$\vec{y}(t) = e^{At} \cdot \vec{C} \tag{10.6}$$

բանաձևով, որտեղ $\vec{C}$-ն կամայական n-չափանի վեկտոր է:

Նկատենք e^{At} մատրից-ֆունկցիայի մի հիանալի հատկություն ևս՝ e^{At}-ի հակադարձ $\left(e^{At}\right)^{-1}$ մատրիցը հավասար է e^{-At}: Իրոք, քանի որ At և $-At$ մատրիցները տեղափոխելի են (կոմուտատիվ են), ապա համաձայն թեորեմ 7.2-ի՝

$$e^{At} \times e^{-At} = e^{At-At} = E:$$

Ըստ թեորեմ 8.4–ի՝ (10.2) համակարգի կամայական հիմնարար մատրից ունի

$$\Phi(t) = e^{At} \cdot P \tag{10.7}$$

տեսքը, որտեղ P-ն կամայական չվերասերվող մատրից է, $P \in \mathfrak{M}^{n,n}$: Դեշտ է տեսնել նաև, որ կամայական իրական t_0 կետում նորմավորված հիմնարար մատրիցը տրվում է

$$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)} \tag{10.8}$$

բանաձևով:

Թեորեմ 8.6-ի և (10.8) բանաձևի անմիջական հետևանք է հետևյալ պնդումը.

Թեորեմ 10.2:

$$\begin{cases} \vec{y}' = A\vec{y} \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \quad \vec{y}_0 \in C^n \end{cases}$$

Կոշու խնդրի լուծումը տրվում է $\vec{y}(t) \equiv e^{A(t-t_0)} \cdot \vec{y}_0$ բանաձևով:

Վերցնելով $n=1$՝ տեսնում ենք, որ վերը բերված բանաձևերը $y' = ay$ $(a \in \mathbb{C})$ պարզագույն դիֆերենցիալ հավասարման, նրա $y(t) = ce^{at}$ ընդհանուր լուծման և $y' = ay$, $y(t_0) = y_0$ Կոշու խնդրի $y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}$ լուծման անմիջական ընդհանրացումներն են:

Եվ այսպես, անցնենք (10.2) համակարգի և, մասնավորապես, նրա e^{At} հիմնարար մատրիցի ավելի մանրամասն ուսումնասիրմանը: Այս նպատակով դիտարկենք տարբեր դեպքեր՝ սկսելով պարզագույնից:

I դեպք: Դիցուք A մատրիցը անկյունագծային է, այսինքն՝

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} : \tag{10.9}$$

Այս դեպքում (10.2) համակարգն ունի $y_k' = \lambda_k y_k$, $k = 1, \cdots, n$ տեսքը և ակնհայտ է, որ ընդհանուր լուծումը տրվում է

$$\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \ldots\ldots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \tag{10.10}$$

բանաձևով, որտեղ $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$-ը կամայական հաստատուններ են: Քանի որ (10.9) տեսքի A մատրիցի համար

$$A^m=\begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix}, \quad m=1,2,\ldots,$$

ապա

$$e^{At}\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^m t^m}{m!}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1 t)^m}{m!} & & & 0 \\ & \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda_2 t)^m}{m!} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda_n t)^m}{m!} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \tag{10.11}$$

և (10.6) ընդհանուր լուծման բանաձևից ստացվում է նույն (10.10) արդյունքը՝

$$\vec{y}(t)=e^{At}\cdot\vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad \vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}:$$

II դեպք. Դիցուք A մատրիցն ունի միայն պարզ սեփական արժեքներ: Սա նշանակում է, որ եթե այդ սեփական արժեքները նշանակենք $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ապա $\lambda_k \neq \lambda_j$ երբ $k \neq j$: Համաձայն թեորեմ 7.1- ի՝ այս դեպքում A մատրիցը նման է (7.4) (նույնն է՝ (10.9) տեսքի) անկյունագծային $\mathfrak{I}$ մատրիցին, այսինքն գոյություն ունի չվերասերվող P հաստատուն մատրից, այնպիսին, որ $A = P\mathfrak{I}P^{-1}$, կամ, որ նույնն է,

$$AP = P\mathfrak{I}: \tag{10.11}$$

Դիցուք P մատրիցի սյուները $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots \vec{p}_n$ վեկտորներն են, այսինքն՝ $P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots \vec{p}_n)$: Քանի որ P մատրիցը չվերասերվող է, ապա նրա սյուները գծորեն անկախ են, այսինքն՝

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots \vec{p}_n \tag{10.12}$$

վեկտորները կազմում են բազիս C^n-ում: Քանի որ $\mathfrak{I}$ մատրիցը անկյունագծային է (ունի (10.9) տեսքը), ապա հեշտ է համոզվել, որ $P\mathfrak{I}$ արտադրյալն ունի

$$P\mathfrak{I} = (\lambda_1 \vec{p}_1, \lambda_2 \vec{p}_2, \ldots, \lambda_n \vec{p}_n) \tag{10.13}$$

կառուցվածքը: Մյուս կողմից, եթե AP արտադրյալը գրենք $AP = (A\vec{p}_1, A\vec{p}_2, \ldots, A\vec{p}_n)$ տեսքով, ապա (10.11) և (10.13) առնչություններից կստանանք, որ

$$A\vec{p}_k = \lambda_k \vec{p}_k, \quad k = 1, \cdots, n:$$

Այսպիսով՝ ապացուցվեց հետևյալ պնդումը

Լեմմա 10.1: Եթե A մատրիցն ունի միայն պարզ սեփական արժեքներ և P-ն այն մատրիցն է[1], որը բերում է A-ն անկյունագծային տեսքի, ապա P մատրիցի (10.12) սյուները A-ի սեփական վեկտորներ են և նրանք գծորեն անկախ են:

Այժմ մենք կարող ենք կառուցել (10.2)-ի լուծումների հիմնարար համակարգը:

Թեորեմ 10.3. Եթե A մատրիցն ունի միայն պարզ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ սեփական արժեքներ և $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ վեկտորները այդ սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորներն են, ապա

$$\vec{\varphi}_k(t) = e^{\lambda_k t} \vec{p}_k, \; k = 1, \cdots, n \tag{10.14}$$

վեկտոր-ֆունկցիաները կազմում են (10.2)-ի լուծումների հիմնարար համակարգ:

---

[1] Իհարկե, պետք է նշել որ P-ն միակը չէ, ինչպես միակը չեն սեփական վեկտորները, որոնք որոշվում են հաստատուն բազմապատկիչի ճշտությամբ:

Ապացույց: Իրոք,

$$(\vec{\varphi}_k(t))' \equiv \left(e^{\lambda_k t}\vec{p}_k\right)' \equiv \lambda_k e^{\lambda_k t}\vec{p}_k \equiv e^{\lambda_k t}A\vec{p}_k \equiv$$

$$\equiv A\left(e^{\lambda_k t}\vec{p}_k\right) \equiv A\vec{\varphi}_k(t),$$

այսինքն՝ (10.14) վեկտոր-ֆունկցիաները (10.2) համակարգի լուծումներն են: Քանի որ $t=0$ կետում այդ վեկտոր-ֆունկցիաները գծորեն անկախ են $\left(\vec{\varphi}_k(0)=\vec{p}_k\right)$, ապա նրանք գծորեն անկախ են բոլոր իրական t-երի համար և, հետևաբար, կազմում են լուծումների հիմնարար համակարգ: Թեորեմն ապացուցված է:

III դեպք: Այս դեպքը ընդհանուրն է, այսինքն՝ A հաստատուն մատրիցի վրա ոչ մի սահմանափակում չի դրվում: Այս ընդհանուր դեպքում մենք կրկին կհենվենք թեորեմ 7.1-ի վրա, որը պնդում է, որ կամայական $A\in\mathfrak{M}^{n,n}$ մատրիցի համար $A=P\mathfrak{I}P^{-1}$, որտեղ $\det P\neq 0$, իսկ

$$\mathfrak{I}=\begin{pmatrix} \mathfrak{I}_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathfrak{I}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{I}_s \end{pmatrix} \tag{10.15}$$

A մատրիցի ժորդանյան ձևն է (տե՛ս թեորեմ 7.1): Դժվար է տեսնել, որ $A^2=\left(P\mathfrak{I}P^{-1}\right)\left(P\mathfrak{I}P^{-1}\right)=P\mathfrak{I}^2P^{-1}$ և կամայական m աստիճանի համար $A^m=P\mathfrak{I}^mP^{-1}$:

Հետևաբար $A^m t^m=P(\mathfrak{I}t)^m P^{-1}$: Այստեղից և $e^{At}\equiv\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{A^m t^m}{m!}$ սահմանումից հետևում է, որ

$$e^{At}\equiv P\cdot e^{\mathfrak{I}t}P^{-1}: \tag{10.16}$$

Գտնենք $e^{\mathfrak{I}t}$ մատրիցի կառուցվածքը: Քանի որ $\mathfrak{I}_m$, $m=0,L,s$ մատրիցները քառակուսի են, ապա մատրիցների բազմապատկման օրենքից հետևում է, որ կամայական աստիճանի համար՝

$$\mathfrak{J}^k = \begin{pmatrix} \mathfrak{J}_0^k & & & 0 \\ & \mathfrak{J}_1^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathfrak{J}_s^k \end{pmatrix}:$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$e^{\mathfrak{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\mathfrak{J}_0 t} & & & 0 \\ & e^{\mathfrak{J}_1 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\mathfrak{J}_s t} \end{pmatrix} \qquad (10.17)$$

Քանի որ $\mathfrak{J}_0$ մատրիցը անկյունագծային է, ապա ըստ վերը ապացուցվածի (դեպք I)՝

$$e^{\mathfrak{J}_0 t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_q t} \end{pmatrix}: \qquad (10.18)$$

Այժմ անցնենք $\mathfrak{J}_m$ մատրիցներին, $m=1,\cdots,s$, որոնք ունեն (տե՛ս (7.5)) $\mathfrak{J}_m = \lambda_{q+m}\cdot \mathrm{E}_{r_m} + \mathrm{Z}_m$ տեսքը: Քանի որ Z_m և միավոր E_{r_m} մատրիցները տեղափոխելի են, ապա

$$e^{\mathfrak{J}_m t} = e^{\lambda_{q+m} t \mathrm{E}_{r_m} + \mathrm{Z}_m \cdot t} = e^{\lambda_{q+m} t\cdot \mathrm{E}_{r_m}} \cdot e^{\mathrm{Z}_m t} : \qquad (10.19)$$

Մյուս կողմից, քանի որ $e^{\lambda_{q+m}\cdot t\cdot \mathrm{E}_{r_m}} = e^{\lambda_{q+m} t}\cdot \mathrm{E}_{r_m}$ ապա մեզ մնում է հաշվել $e^{\mathrm{Z}_m t}$ մատրիցը: Հիշելով r_m կարգի Z_m քառակուսի մատրիցի (7.6) տեսքը՝

$$Z_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

հեշտ է համոզվել, որ Z_m^2-ն տարբերվում է Z_m-ից նրանով, որ 1-երը տեղափոխված են մեկ դիրքով աջ, իսկ մնացած բոլորը զրո են: Z_m^k աստիճանը տարբերվում է Z_m-ից նրանով, որ 1-երը տեղափոխված են k դիրքով աջ: Այստեղից հետևում է, որ $Z_m^{r_m-1}$ աստիճանը մատրից է, որի միայն առաջին տողի վերջին տարրը 1-է, իսկ մնացած բոլորը զրո են: Հետևաբար, $Z_m^{r_m}$ և ավելի բարձր աստիճանները զրոյական մատրիցներ են, և

$$
e^{Z_m t} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z_m^k t^k}{k!} \equiv \sum_{k=0}^{r_m-1} \frac{Z_m^k t^k}{k!} \equiv E + Z_m t + Z_m^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + \cdots + Z_m^{r_m-1} \cdot \frac{t^{r_m-1}}{(r_m-1)!} \equiv
$$

$$
\equiv \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r_m-1}}{(r_m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r_m-2}}{(r_m-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{10.20}
$$

Այստեղից և (10.19) բանաձևից հետևում է, որ $e^{\Im_m t} = e^{\lambda_{q+m} \cdot t} \cdot e^{Z_m t}$ մատրից-ֆունկցիան ստացվում է (10.20)-ից՝ նրա բոլոր տարրերը բազմապատկելով $e^{\lambda_{q+m} \cdot t}$ ֆունկցիայով:

Եվ այսպես, եթե հայտնի է A մատրիցի (10.15) ժորդանյան ձևը, ապա e^{At} հիմնարար մատրիցը տրվում է (10.16) բանաձևով, որտեղ $e^{\Im t}$ մատրիցը կարելի է հաշվել (10.17) - (10.20) բանաձևերով:

Դիցուք P-ն այն չվերասերվող մատրիցն է, որն իրագործում է $A = P\Im P^{-1}$ նմանությունը: Նշանակենք P մատրիցի սյուները $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$, այսինքն՝ $P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n)$: Քանի որ $\det P \neq 0$, ապա $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ վեկտորները գծորեն անկախ են և, հետևաբար, կազմում են բազիս C^n-ում: Նշանակենք $\Im$ մատրիցի սյուները $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n$: $AP = P\Im$ հավասարությունը գրենք $A \cdot P = (A\vec{p}_1, A\vec{p}_2, \ldots, A\vec{p}_n) = (P\vec{q}_1, P\vec{q}_2, \ldots, P\vec{q}_n) = P \cdot \Im$ տեսքով: Հաշվի առնելով $\Im$

մատրիցի կառուցվածքը՝ ստանում ենք, որ $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ վեկտորները բավարարում են

$$A\vec{p}_1 = \lambda_1 \vec{p}_1, \; A\vec{p}_2 = \lambda_2 \vec{p}_2, \; \ldots, \; A\vec{p}_q = \lambda_q \vec{p}_q,$$

$$\begin{cases} A\vec{p}_{q+1} = \lambda_{q+1}\vec{p}_{q+1} \\ A\vec{p}_{q+2} = \lambda_{q+1}\vec{p}_{q+2} + \vec{p}_{q+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\vec{p}_{q+r_1} = \lambda_{q+1}\vec{p}_{q+r_1} + \vec{p}_{q+r_1-1} \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{cases} A\vec{p}_{n-r_{s+1}} = \lambda_{q+s}\vec{p}_{n-r_s+1} \\ A\vec{p}_{n-r_{s+2}} = \lambda_{q+s}\vec{p}_{n-r_s+2} + \vec{p}_{n-r_s+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\vec{p}_n = \lambda_{q+s}\vec{p}_n + \vec{p}_{n-1} \end{cases}$$

առնչություններին: Ասում են, որ այս առնչություններին բավարարող վեկտորները կազմում են A մատրիցի սեփական և կապակցված վեկտորների համակարգ: Ուրիշ խոսքով, $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ սեփական և կապակցված վեկտորների համակարգը այն բազիսն է, որում A մատրիցն ունի Ձ ժորդանյան տեսքը:

Այժմ անցնենք (10.2)-ի լուծումների հիմնարար համակարգի կառուցմանը: Քանի որ

$$\Phi(t) = e^{At} \cdot P = P \cdot e^{Ձt} \tag{10.21}$$

մատրից-ֆունկցիան, ինչպես և e^{At} մատրից- ֆունկցիան հիմնարար է, ապա նրա $\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$ սյուները կազմում են (10.2)-ի լուծումների հիմնարար համակարգ: (10.21) բանաձևից և $e^{Ձt}$ մատրիցի կառուցվածքից հետևում է, որ

$$\vec{\varphi}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot \vec{p}_1, \quad \vec{\varphi}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\vec{p}_2, \; \ldots, \; \vec{\varphi}_q(t) = e^{\lambda_q t}\vec{p}_q$$

$$\begin{cases} \vec{\varphi}_{q+1}(t) = e^{\lambda_{q+1}t} \cdot \vec{p}_{q+1}, \\ \vec{\varphi}_{q+2}(t) = e^{\lambda_{q+1}t} \cdot (\vec{p}_{q+2} + t \cdot \vec{p}_{q+1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{\varphi}_{q+r_1}(t) = e^{\lambda_{q+1}t} \cdot \left(\vec{p}_{q+r_1} + t \cdot \vec{p}_{q+r_1-1} + \ldots + \dfrac{t^{r_1-1}}{(r_1-1)!}\vec{p}_{q+1} \right) \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{10.22}$$

$$
\begin{cases}
\vec{\varphi}_{n-r_s+1}(t) = e^{\lambda_{q+s}t} \cdot \vec{p}_{n-r_s+1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\vec{\varphi}_n(t) = e^{\lambda_{q+s}t}\left(\vec{p}_n + t\cdot\vec{p}_{n-1} + \ldots + \dfrac{t^{r_s-1}}{(r_s-1)!}\cdot\vec{p}_{n-r_s+1}\right)
\end{cases}
$$

Այսպիսով՝ ապացուցված է հետևյալ պնդումը.

Թեորեմ 10.4: Դիցուք $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ հաստատուն վեկտորները այն P չվերասերվող մատրիցի սյուներն են, որը բերում է A մատրիցը ժորդանյան տեսքի, այսինքն $A = P\mathfrak{Z}P^{-1}$: Այդ դեպքում (10.22) բանաձևերով որոշվող $\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$ վեկտոր-ֆունկցիաները կազմում են (10.2) համակարգի լուծումների հիմնարար համակարգ և (10.2)-ի կամայական $\vec{y}(t)$ լուծում ներկայացվում է

$$
\vec{y}(t) = c_1\vec{\varphi}_1(t) + c_2\vec{\varphi}_2(t) + \ldots + c_n\vec{\varphi}_n(t) \tag{10.23}
$$

գծային կոմբինացիայի միջոցով:

Ապացուցված թեորեմից և (10.22) լուծումների հիմնարար համակարգի կառուցվածքից երևում է, որ հաստատուն գործակիցներով (10.2) համակարգի կամայական $y = \varphi(t)$ լուծում ներկայացվում է

$$
\vec{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{m} \vec{g}_k(t)\cdot e^{\lambda_k t} \tag{10.24}
$$

տեսքով, որտեղ $\vec{g}_k(t)$-ն վեկտոր-ֆունկցիա է, որի յուրաքանչյուր կոմպոնենտ բազմանդամ է:

Վարժություն 10.1: Դիցուք $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: Հաշվել e^{At} մատրիցը:

Վարժություն 10.2: Գտնել $\vec{y}' = A\vec{y}$ հավասարումների համակարգի ընդհանուր լուծումը $\left(A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$:

§ 11. ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Դիտարկենք

$$\vec{y}' = A(t)\vec{y} \tag{11.1}$$

գծային համասեռ համակարգը այն դեպքում, երբ $A(t)$-ն պարբերական մատրից-ֆունկցիա է, այսինքն՝ գոյություն ունի ω դրական թիվ այնպիսին, որ $A(t+\omega) \equiv A(t)$, $t \in \mathbb{R}$: Այդպիսի մատրից-ֆունկցիաները կանվանենք ω- պարբերական: Ակնհայտ է, որ $A(t)$ մատրիցի ω-պարբերականությունը համարժեք է նրա $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ տարրերի ω-պարբերականությանը: Ինչպես և մինչ այժմ, ենթադրվում է, որ a_{ij} գործակիցները անընդհատ ֆունկցիաներ են, այս դեպքում՝ որոշված ամբողջ իրական առանցքի վրա:

Թեորեմ 11.1 (Ֆլոկե-Լյապունով): Դիցուք $A(t)$-ն ω-պարբերական մատրից-ֆունկցիա է: Այդ դեպքում (11.1) համակարգի ամեն մի $\Phi(t)$ հիմնարար մատրից կարելի է ներկայացնել

$$\Phi(t) = G(t) \cdot e^{Rt} \tag{11.2}$$

տեսքով, որտեղ $G(t)$-ն ω-պարբերական մատրից-ֆունկցիա է, իսկ R-ը հաստատուն մատրից է:

Ապացույց: Դիցուք $\Phi(t)$-ն (11.1)-ի որևէ հիմնարար մատրից է: Ապացուցենք, որ $\Psi(t) \equiv \Phi(t+\omega)$ մատրից-ֆունկցիան նույնպես հիմնարար մատրից է (11.1) համակարգի համար: Իրոք, նախ՝

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) \equiv \frac{d}{dt}\Phi(t+\omega) \equiv \frac{d\Phi(t+\omega)}{d(t+\omega)} \cdot \frac{d(t+\omega)}{dt} \equiv \Phi'(t+\omega):$$

Քանի որ $\Phi'(t) \equiv A(t)\Phi(t)$ նույնությունը տեղի ունի ամբողջ իրական առանցքի վրա, ապա տեղի ունի նաև $\Phi'(t+\omega) \equiv A(t+\omega)\Phi(t+\omega)$ նույնությունը: Այսպիսով՝

$$\Psi'(t) \equiv \Phi'(t+\omega) \equiv A(t+\omega)\Phi(t+\omega) \equiv A(t)\Psi(t):$$

Մյուս կողմից՝ $\det\Psi(t) \equiv \det\Phi(t+\omega) \neq 0$, քանի որ $\Phi(t)$ հիմնարար մատրիցի որոշիչը իրական առանցքի ոչ մի կետում զրո չի դառնում: Այսպիսով՝ $\Phi(t+\omega)$-ն նույնպես հիմնարար մատրից է: Համաձայն թեորեմ 8.4-ի՝ գոյություն ունի չվերասերվող, հաստատուն B մատրից այնպիսին, որ՝

$$\Phi(t+\omega) \equiv \Phi(t) \cdot \mathrm{B}: \tag{11.3}$$

Քանի որ B-ն չվերասերվող է, ապա ըստ թեորեմ 7.3-ի՝ գոյություն ունի հաստատուն R_1 մատրից այնպիսին, որ $\mathrm{B}=e^{R_1}$: Նշանակելով $\frac{1}{\omega}R_1=R$ ստանում ենք, որ B-ն կարելի է ներկայացնել

$$\mathrm{B}=e^{\omega R} \tag{11.4}$$

տեսքով, որտեղ R-ը հաստատուն մատրից է: Սահմանենք $G(t)$ մատրից-ֆունկցիան

$$G(t) \equiv \Phi(t)e^{-Rt} \tag{11.5}$$

բանաձևով: Ապացուցենք, որ $G(t)$-ն ω-պարբերական է: Քանի որ $-\omega R$ և $-Rt$ մատրիցները տեղափոխելի են, ապա $e^{-R(t+\omega)}=e^{-Rt}\cdot e^{-\omega R}=e^{-\omega R}\cdot e^{-Rt}$: Մյուս կողմից՝ $\left(e^{\omega R}\right)^{-1}\equiv e^{-\omega R}$ և (11.4) –ը կարելի է գրել $Be^{-\omega R}=E$ տեսքով: Այժմ, համաձայն (11.3)-ի և (11.5)–ի՝

$$G(t+\omega)\equiv\Phi(t+\omega)e^{-R(t+\omega)}\equiv\Phi(t)\cdot\mathrm{B}\cdot e^{-\omega R}\cdot e^{-Rt}\equiv\Phi(t)e^{-Rt}\equiv G(t):$$

Բազմապատկելով (11.5)-ի երկու կողմերը աջից e^{Rt} մատրիցով՝ ստանում ենք (11.2) նույնությունը: Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 11.1: Դիցուք $\Phi(t)$-ն ω-պարբերական $\mathrm{A}(t)$ մատրիցով (11.1) համակարգի որևէ հիմնարար մատրից է: B հաստատուն մատրիցը, որը որոշվում է (11.3) առնչությունից, կոչվում է (11.1) համակարգի *մոնոդրոմիայի մատրից:*

Վերն ապացուցվեց, որ մոնոդրոմիայի մատրիցը գոյություն ունի և չվերասերվող է: Մյուս կողմից՝ քանի որ (11.1) համակարգի հիմնարար մատրիցը միակը չէ, ապա մոնոդրոմիայի մատրիցը նույնպես միակը չէ: Սակայն հեշտ է համոզվել, որ

Լեմմա 11.1: Բոլոր մոնոդրոմիայի մատրիցները նման են:

Ապացույց: Դիցուք $\Phi_1(t)$-ն և $\Phi_2(t)$-ն (11.1) համակարգի հիմնարար մատրիցներն են, իսկ B_1-ը և B_2-ը նրանցով ծնված մոնոդրոմիայի մատրիցներն են, այսինքն՝ $\Phi_i(t+\omega)\equiv\Phi_i(t)\cdot\mathrm{B}_i \quad (i=1,2)$:

Համաձայն թեորեմ 8.4-ի՝ գոյություն ունի P հաստատուն մատրից այնպիսին, որ $\Phi_2(t)\equiv\Phi_1(t)\cdot P$, $\det P\neq 0$:

Հետևաբար՝ $\Phi_1(t+\omega)\cdot P\equiv\Phi_2(t+\omega)\equiv\Phi_2(t)\cdot B_2\equiv\Phi_1(t)\cdot P\cdot B_2$:

Մյուս կողմից, ըստ (11.3)-ի՝ $\Phi_1(t+\omega)\cdot P\equiv\Phi_1(t)\cdot B_1\cdot P$:

Քանի որ $\Phi_1(t)$-ն չվերասերվող է, ապա վերջին երկու առնչություններից հետևում է, որ $PB_2=B_1P$ կամ $B_2=P^{-1}B_1P$:

Լեմման ապացուցված է:

Ստորև կբացահայտվի մոնոդրոմիայի մատրիցի դերը պարբերական գործակիցներով համակարգերի ուսումնասիրման հարցում, իսկ մինչ այդ անդրադառնանք նշված համակարգերի *համարժեքության* հասկացությանը:

Սահմանում 11.2: Դիցուք $A(t)$-ն և $C(t)$-ն ω-պարբերական անընդհատ մատրից-ֆունկցիաներ են $\left(A(t),C(t)\in\mathfrak{M}^{n,n}\right)$: (11.1) և

$$\vec{x}'=C(t)\vec{x} \tag{11.6}$$

համակարգերը կոչվում են *համարժեք,* եթե գոյություն ունի չվերասերվող, անընդհատ դիֆերենցելի, ω-պարբերական $S(t)$ մատրից-ֆունկցիա այնպիսին, որ

$$\vec{x}=S(t)\vec{y} \tag{11.7}$$

գծային ձևափոխությունը (11.1) հավասարումների համակարգը բերում է (11.6) համակարգին:

Դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի համարժեքության հասկացությունը սահմանվել էր I գլխում: Ըստ այդ սահմանման՝ դիֆերենցիալ հավասարումների երկու համակարգեր կոչվում են համարժեք, եթե նրանց լուծումների բազմությունների միջև գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն: Սահմանում 11.2-ում բերված համարժեքության հասկացությունը վերը նշված համարժեքության մասնավոր դեպքն է: Եթե ընդհանուր դեպքում կարևորվում է միայն փոխմիարժեք համապատասխանության գոյությունը, ապա այս դեպքում պահանջվում է, որ այդ համապատասխանությունը ծնվի որոշակի հատկություններ ունեցող $S(t)$ մատրից-ֆունկցիայով, որը (11.1)-ի ամեն մի $\vec{y}(t)$ լուծմանը համապատասխանության մեջ է դնում (11.6)-ի $\vec{x}(t)\equiv S(t)\cdot\vec{y}(t)$ լուծումը (և հակառակը (11.6)-ի ամեն մի $\vec{x}(t)$ լուծմանը համապատասխանության մեջ է դրվում (11.1)-ի $\vec{y}(t)\equiv S^{-1}(t)\cdot\vec{x}(t)$ լուծումը):

Օրինակ՝ $x^{(n)}+a_1(t)\cdot x^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)\cdot x=0$ հավասարման և նրան համարժեք $\vec{y}'=A(t)\cdot\vec{y}$ նորմալ համակարգի (տես (8.17), (8.18), (8.19)) լուծումների բազմությունների փոխմիարժեք համապատասխանությունը չի կարող ծնվել (11.7) տեսքի գծային ձևափոխությամբ: Այսպիսով՝ սահմանում 11.2-ում բերված համարժեքության հասկացությունը հարմարեցված է այստեղ ուսումնասիրվող պարբերական գործակիցներով համակարգերին:

Լեմմա 11.2: ω-պարբերական գործակիցներով (11.1) և (11.6) համակարգերը համարժեք են այն և միայն այն դեպքում, երբ $A(t)$ և $C(t)$ մատրիցները կապված են

$$C(t) \equiv \left[S'(t) + S(t)A(t)\right] \cdot S^{-1}(t) \tag{11.8}$$

առնչությամբ:

Ապացույց: Համածային մատրիցների արտադրյալի ածանցյալի սահմանման (տե՛ս §7)՝ (11.7)-ից հետևում է, որ եթե $\vec{y}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիան հանդիսանում է (11.1)-ի լուծում, ապա $\vec{x}(t) \equiv S(t) \cdot \vec{y}(t)$-ն բավարարում է

$$\vec{x}'(t) \equiv S'(t) \cdot \vec{y}(t) + S(t)\vec{y}'(t) \equiv S'(t)S^{-1}(t) \cdot \vec{x}(t) + S(t)A(t)\vec{y}(t) \equiv$$

$$\equiv S'(t)S^{-1}(t)\vec{x}(t) + S(t)A(t)S^{-1}(t)\vec{x}(t) \equiv \left[S'(t) + S(t)A(t)\right] \cdot S^{-1}(t)\vec{x}(t)$$

նույնությանը, այսինքն՝ հանդիսանում է (11.6) համակարգի լուծում, որտեղ $C(t)$-ն որոշված է (11.8) բանաձևով: Հակադարձ կողմը ապացուցվում է նույն դատողություններով:

Լեմմա 11.3: Դիցուք (11.1) և (11.6) համակարգերը համարժեք են և $\Phi(t)$-ն (11.1) –ի որևէ հիմնարար մատրից է: Այդ դեպքում $\Psi(t) \equiv S(t)\Phi(t)$ մատրից-ֆունկցիան հանդիսանում է հիմնարար մատրից (11.6) համակարգի համար:

Ապացույց: Համածային պայմանի՝ $\det S(t) \neq 0$ և $\det \Phi(t) \neq 0$: Հետևաբար՝ $\det \Psi(t) \neq 0$: Մյուս կողմից՝

$$\Psi'(t) \equiv S'(t)\Phi(t) + S(t)\Phi'(t) \equiv S'(t)\Phi(t) + S(t)A(t)\Phi(t) \equiv$$

$$\equiv \left[S'(t) + S(t)A(t)\right]S^{-1}(t)\Psi(t) \equiv C(t)\Psi(t)$$

Լեմման ապացուցված է:

Թեորեմ 11.2: Որպեսզի (11.1) և (11.6) համակարգերը լինեն համարժեք անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանք ունենան ընդհանուր (նույն) մոնոդրոմիայի մատրից:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն. դիցուք (11.1) և (11.6) համակարգերը համարժեք են: Եթե $\Phi(t)$-ն (11.1)-ի որևէ հիմնարար մատրից է, ապա, ըստ լեմմա

11.3-ի, $\Psi(t) \equiv S(t)\Phi(t)$ մատրից-ֆունկցիան կլինի հիմնարար (11.6)-ի համար: Եթե $\Phi(t+\omega) \equiv \Phi(t) \cdot B$, այսինքն՝ B-ն (11.1)-ի մոնոդրոմիայի մատրից է, ապա

$$\Psi(t+\omega) \equiv S(t+\omega)\Phi(t+\omega) \equiv S(t)\Phi(t)B \equiv \Psi(t) \cdot B,$$

այսինքն՝ նույն B-ն նաև (11.6)-ի մոնոդրոմիայի մատրից է:

Բավարարություն. Դիցուք $\Phi(t)$-ն և $\Psi(t)$-ն համապատասխանաբար (11.1)-ի և (11.6)-ի հիմնարար մատրիցներ են և դիցուք $\Phi(t+\omega) \equiv \Phi(t) \cdot B$, $\Psi(t+\omega) \equiv \Psi(t) \cdot \mathrm{B}$, այսինքն՝ (11.1)-ը և (11.6)-ը ունեն նույն մոնոդրոմիայի մատրիցը: Դիտարկենք $S(t) \equiv \Psi(t) \cdot \Phi^{-1}(t)$ մատրից-ֆունկցիան: Նախ նկատենք, որ այսպես որոշված $S(t)$ մատրից-ֆունկցիան չվերասերվող է և անընդհատ դիֆերենցելի է իրական առանցքի բոլոր կետերում (քանի որ այդպիսիք են $\Psi(t)$-ն և $\Phi^{-1}(t)$-ն): Ապացուցենք, որ $S(t)$-ն ω-պարբերական է: Իրոք՝

$$S(t+\omega) \equiv \Psi(t+\omega)\Phi^{-1}(t+\omega) \equiv \Psi(t) \cdot \mathrm{B} \cdot \left(\Phi(t) \cdot \mathrm{B}\right)^{-1} \equiv \Psi(t) \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{B}^{-1}\Phi^{-1}(t) \equiv$$

$$\equiv \Psi(t) \cdot \Phi^{-1}(t) \equiv S(t):$$

Որպեսզի ապացուցենք (11.1) և (11.6) համակարգերի համարժեքությունը, բավական է ապացուցել, որ $C(t)$ և $\mathrm{A}(t)$ մատրից-ֆունկցիաները կապված են (11.8) առնչությամբ, կամ, որ նույնն է՝

$$C(t)S(t) \equiv S'(t) + S(t)A(t): \tag{11.9}$$

Վերջին նույնությունը ապացուցելու համար նախ նկատենք, որ համաձայն թեորեմ 8.5-ի՝ յուրաքանչյուր գծային նորմալ համասեռ հավասարումների համակարգ միարժեք վերականգնվում է իր հիմնարար մատրիցով, այս դեպքում՝

$$\mathrm{A}(t) \equiv \Phi'(t) \cdot \Phi^{-1}(t), \qquad C(t) \equiv \Psi'(t) \cdot \Psi^{-1}(t):$$

Մյուս կողմից՝ ածանցելով $\Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t) \equiv \mathrm{E}$ նույնությունը՝ ստանում ենք.

$$\Phi'(t) \cdot \Phi^{-1}(t) + \Phi(t) \cdot \left(\Phi^{-1}(t)\right)' \equiv 0, \qquad \text{կամ} \qquad \left(\Phi^{-1}(t)\right)' \equiv -\Phi^{-1}(t)\Phi'(t)\Phi^{-1}(t)$$

ներկայացումը: Հաշվի առնելով այս ամենը, ածանցենք $S(t) \equiv \Psi(t) \cdot \Phi^{-1}(t)$ մատրից-ֆունկցիան՝

$$S'(t) \equiv \Psi'(t)\Phi^{-1}(t) + \Psi(t)\left(\Phi^{-1}(t)\right)' = \Psi'(t)\Psi^{-1}(t)\Psi(t)\Phi^{-1}(t) -$$

$$-\Psi(t)\Phi^{-1}(t)\Phi'(t)\Phi^{-1}(t) \equiv C(t)S(t) - S(t)A(t):$$

Ստացված նույնությունը համարժեք է (11.9) նույնությանը: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 11.3 (Լյապունով): Պարբերական գործակիցներով (11.1) համակարգի համար գոյություն ունի R հաստատուն մատրից այնպիսին, որ (11.1) համակարգը համարժեք է

$$\vec{x}' = R\vec{x} \tag{11.10}$$

հաստատուն գործակիցներով համակարգին:

Ապացույց: Դիցուք $\Phi(t)$-ն (11.1) համակարգի որևէ հիմնարար մատրից է և $\Phi(t+\omega) \equiv \Phi(t)B$, որտեղ B-ն (11.1)-ի մոնոդրոմիայի մատրից է: Ըստ (11.4)-ի գոյություն ունի R հաստատուն մատրից այնպիսին, որ $B = e^{\omega R}$: Մյուս կողմից, այդ R մատրիցով ծնված (11.10) համակարգի e^{Rt} հիմնարար մատրիցի համար տեղի ունի

$$e^{R(t+\omega)} \equiv e^{Rt} \cdot e^{\omega R} \equiv e^{Rt} \cdot B$$

նույնությունը, այսինքն՝ (11.10) համակարգն ունի նույն B մոնոդրոմիայի մատրիցը, ինչ և (11.1) համակարգը: Համաձայն թեորեմ 11.2-ի՝ այդ համակարգերը համարժեք են: Թեորեմն ապացուցված է:

Վարժություն 11.1: Դիցուք $a(t+\pi) \equiv a(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, $a \in C(-\infty, \infty)$: Ապացուցել, որ $y' = a(t)y$ (սկալյար) հավասարումը համարժեք է $x' = Rx$ հավասարմանը, որտեղ $R = \int_0^\pi a(\tau)d\tau$: Գտնել մոնոդրոմիայի մատրիցի (որն այս դեպքում հաստատուն թիվ է) տեսքը և այն $s(t)$ ֆունկցիայի տեսքը, որն իրականացնում է փոխմիարժեք համապատասխանությունը տրված հավասարումների լուծումների միջև:

Նկատենք, որ կամայական հաստատուն մատրից կարելի է դիտարկել որպես ω-պարբերական մատրից-ֆունկցիա:

Քանի որ (11.1) համակարգի բոլոր մոնոդրոմիայի մատրիցները նման են, իսկ նման մատրիցներն ունեն նույն սեփական արժեքները, նույն հետքերը և նույն որոշիչները (տե՛ս §7), ապա հաճախ (11.1) համակարգի մոնոդրոմիայի մատրից անվանում են այն միարժեք որոշվող B մատրիցը, որը ծնվում է $t_0 = 0$ կետում նորմավորված $\tilde{\Phi}(t)$ $(\tilde{\Phi}(0) = E)$ հիմնարար մատրիցով, այսինքն՝

$$B = \tilde{\Phi}(\omega) \tag{11.11}$$

Սահմանում 11.3: Պարբերական գործակիցներով (11.1) համակարգի մոնոդրոմիայի մատրիցի $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ սեփական արժեքները կոչվում են (11.1) համակարգի մուլտիպլիկատորներ[1]:

Մուլտիպլիկատորներ անվանումը արդարացվում է հետևյալ պնդումով:

Թեորեմ 11.4: μ թիվը (11.1) համակարգի մուլտիպլիկատոր է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի (11.1) համակարգի ոչ տրիվիալ $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ լուծում այնպիսին, որ՝

$$\vec{\varphi}(t+\omega) \equiv \mu\vec{\varphi}(t): \tag{11.12}$$

Ապացույց: Դիցուք μ թիվը (11.1)-ի մուլտիպլիկատոր է, այսինքն՝ գոյություն ունի $\vec{x}_0 \neq 0$ վեկտոր այնպիսին, որ (տե՛ս (11.11))

$$B\vec{x}_0 = \tilde{\Phi}(\omega)\vec{x}_0 = \mu\vec{x}_0:$$

(11.1) համակարգի այն $\vec{\varphi}(t)$ լուծումը, որը բավարարում է $\vec{\varphi}(0) = \vec{x}_0$ սկզբնական պայմանին, համաձայն թեորեմ 8.6-ի, ունի $\vec{\varphi}(t) \equiv \tilde{\Phi}(t)\vec{x}_0$ տեսքը: Այստեղից՝

$$\vec{\varphi}(t+\omega) \equiv \tilde{\Phi}(t+\omega)\vec{x}_0 \equiv \tilde{\Phi}(t)B\vec{x}_0 \equiv \tilde{\Phi}(t)(\mu\vec{x}_0) \equiv \mu\tilde{\Phi}(t)\vec{x}_0 \equiv \mu\vec{\varphi}(t),$$

այսինքն $\vec{\varphi}(t)$ լուծումը բավարարում է (11.12) պայմանին և քանի որ $\vec{x}_0 \neq 0$, ապա $\vec{\varphi}(t) \neq 0$:

Հակադարձը, դիցուք գոյություն ունի $\vec{\varphi}(t)$ ոչ տրիվիալ լուծում այնպիսին, որ $\vec{\varphi}(t+\omega) \equiv \mu\vec{\varphi}(t)$: Նշանակենք այդ լուծման արժեքը 0 կետում $\vec{x}_0$-ով, այսինքն՝ $\vec{\varphi}(0) = \vec{x}_0$: Քանի որ $\vec{\varphi}(t) \neq 0$, ապա $\vec{x}_0 \neq 0$: Համաձայն թեորեմ 8.6-ի՝

$$\vec{\varphi}(t) \equiv \tilde{\Phi}(t)\vec{x}_0 \tag{11.13}$$

Այստեղից հետևում է, որ $\mu\vec{\varphi}(t) \equiv \mu\tilde{\Phi}(t)\vec{x}_0$ և $\vec{\varphi}(t+\omega) \equiv \tilde{\Phi}(t+\omega)\vec{x}_0 \equiv \tilde{\Phi}(t)B\vec{x}_0$: Այժմ $\vec{\varphi}(t+\omega) \equiv \mu\vec{\varphi}(t)$ պայմանը կգրվի $\tilde{\Phi}(t)B\vec{x}_0 \equiv \mu\tilde{\Phi}(t)\vec{x}_0$ կամ, որ նույնն է, $\tilde{\Phi}(t)\cdot[B\vec{x}_0 - \mu\vec{x}_0] \equiv 0$ տեսքով: Հաշվի առնելով, որ $\det\tilde{\Phi}(t) \neq 0$, այստեղից

[1] Մուլտիպլիկատոր բառը կարելի է թարգմանել որպես բազմապատկիչ:

ստանում ենք, որ $B\bar{x}_0 \equiv \mu\bar{x}_0$, այսինքն՝ μ թիվը մուլտիպլիկատոր է: Թեորեմն ապացուցված է:

Համաձայն Լիուվիլի բանաձևի (տե՛ս (8.13))՝ $\tilde{\Phi}(t)$ նորմավորված հիմնարար մատրիցի համար տեղի ունի $\det\tilde{\Phi}(\omega) = \det\tilde{\Phi}(0)\cdot e^{\int_0^\omega spA(\tau)d\tau} = e^{\int_0^\omega spA(\tau)d\tau}$ առնչությունը, որտեղ $spA(\tau)$-ն $A(\tau)$ մատրիցի հետքն է: Քանի որ $\det B = \mu_1\cdot\mu_2\cdot\dots\cdot\mu_n$ (տես §7), ապա մուլտիպլիկատորների արտադրյալի համար ստացվում է

$$\mu_1\cdot\mu_2\cdot\ldots\cdot\mu_n = e^{\int_0^\omega spA(\tau)d\tau}$$

ներկայացումը:

Դիտարկենք այժմ

$$\bar{y}' = A(t)\bar{y} + \bar{f}(t) \qquad (11.14)$$

անհամասեռ համակարգը, որտեղ $A(t)$-ն ω-պարբերական մատրից-ֆունկցիա է, իսկ $\bar{f}(t)$-ն՝ ω-պարբերական վեկտոր-ֆունկցիա:

Թեորեմ 11.5: Որպեսզի (11.14) համակարգի $\bar{y} = \bar{\varphi}(t)$ լուծումը լինի ω-պարբերական ($\bar{\varphi}(t+\omega) \equiv \bar{\varphi}(t)$), անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\bar{\varphi}(0) = \bar{\varphi}(\omega): \qquad (11.15)$$

Ապացույց: Անհրաժեշտությունը ակնհայտ է: Բավարարությունը ապացուցելու համար դիտարկենք $\bar{\psi}(t) \equiv \varphi(t+\omega)$ վեկտոր-ֆունկցիան, որը $A(t)$-ի և $\bar{f}(t)$-ի ω-պարբերականության շնորհիվ նույնպես կլինի (11.14) համակարգի լուծում (ստուգել անմիջական տեղադրմամբ): Ըստ (11.15) պայմանի՝ $\bar{\psi}(0) = \bar{\varphi}(\omega) = \bar{\varphi}(0)$, այսինքն $\bar{\varphi}(t+\omega)$ և $\bar{\varphi}(t)$ լուծումները բավարարում են նույն սկզբնական պայմանին: Համաձայն Կոշու խնդրի լուծման միակության՝ նրանք համընկնում են ամբողջ իրական առանցքի վրա: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 11.6: Որպեսզի (11.14) անհամասեռ համակարգն ունենա մեկ և միայն մեկ ω-պարբերական լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ **(11.1)** համասեռ համակարգի մուլտիպլիկատորներից ոչ մեկը հավասար չլինի 1-ի:

Ապացույց:

$$\begin{cases} \vec{y}' = \mathrm{A}(t)\vec{y} + \vec{f}(t), \\ \vec{y}(0) = \vec{x}_0, \end{cases} \tag{11.16}$$

Կոշու խնդրի $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ լուծումը տրվում է (տե՛ս (9.7))

$$\vec{\varphi}(t) = \tilde{\Phi}(t)\left\{\vec{x}_0 + \int_0^t \tilde{\Phi}^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau\right\} \tag{11.17}$$

բանաձևով: Ըստ թեորեմ 11.5-ի՝ որպեսզի այս լուծումը լինի ω-պարբերական, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա $\vec{\varphi}(0) = \vec{\varphi}(\omega)$ պայմանը: Համաձայն (11.17)-ի այդ պայմանը կգրվի

$$\vec{x}_0 = \vec{\varphi}(0) = \vec{\varphi}(\omega) = \tilde{\Phi}(\omega)\vec{x}_0 + \tilde{\Phi}(\omega)\int_0^\omega \tilde{\Phi}^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau$$

տեսքով, այսինքն՝ ω-պարբերական $\vec{\varphi}(t)$ լուծման $\vec{\varphi}(0) = \vec{x}_0$ սկզբնական արժեքը պետք է հանդիսանա

$$\left(\tilde{\Phi}(\omega) - \mathrm{E}\right)\vec{x}_0 = -\tilde{\Phi}(\omega)\int_0^\omega \tilde{\Phi}^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau \tag{11.18}$$

հանրահաշվական համակարգի ($\vec{x}_0$ անհայտ վեկտորի նկատմամբ) լուծում: Այսպիսով՝ որպեսզի (11.14) համակարգն ունենա մեկ և միայն մեկ ω-պարբերական լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ (11.18)-ը ունենա մեկ և միայն մեկ $\vec{x}_0$ լուծում: Սրա համար, իր հերթին անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\tilde{\Phi}(\omega) - \mathrm{E}$ մատրիցը լինի հակադարձելի: Քանի որ

$\det\left(\tilde{\Phi}(\omega) - \mathrm{E}\right) = (\mu_1 - 1)(\mu_2 - 1)\dots(\mu_n - 1)$, որտեղ $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$-ը $\tilde{\Phi}(\omega) = \mathrm{B}$ մոնոդրոմիայի մատրիցի սեփական արժեքներն են, այսինքն՝ մուլտիպլիկատորները, ապա (11.14) համակարգի ω-պարբերական լուծումը գոյություն ունի և միակն է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mu_k \neq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$: Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտարկենք (11.14) անհամասեռ համակարգը այն մասնավոր դեպքում, երբ $\mathrm{A}(t)$ մատրիցը հաստատուն է՝ $\mathrm{A}(t) \equiv \mathrm{A}$

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{f}(t),\ A \in \mathfrak{M}^{n,n},\ \vec{f}(t+\omega) \equiv \vec{f}(t),\quad t \in \mathbb{R} \tag{11.19}$$

Թեորեմ 11.1: Որպեսզի հաստատուն գործակիցներով և ω-պարբերական ազատ անդամներով (11.19) համակարգը ունենա մեկ և միայն մեկ ω-պարբերական լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ A մատրիցի սեփական արժեքներից ոչ մեկը հավասար չլինի $\dfrac{2\pi i k}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\left(i = \sqrt{-1}\right)$:

Թեորեմ 11.6-ից բխող այս պնդման ապացույցը առաջարկում ենք կատարել ընթերցողին (բավական է ապացուցել, որ $\det\left(e^{A\omega} - E\right) = (e^{\lambda_1\omega} - 1)(e^{\lambda_2\omega} - 1)\cdot\ldots\cdot(e^{\lambda_n\omega} - 1)$, որտեղ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$-ը A մատրիցի սեփական արժեքներն են):

Քանի որ (11.19)-ին համապատասխանող $\vec{y}' = A\vec{y}$ համասեռ համակարգի հիմնարար մատրիցը, նորմավորված $t_0 = 0$ կետում, ունի $\tilde{\Phi}(t) = e^{At}$ տեսքը, ապա (11.19) համակարգի ω-պարբերական լուծումը (երբ այն գոյություն ունի և միակն է) կարելի է գրել բացահայտորեն:

Իրոք, (11.18) առնչությունից գտնում ենք այն $\vec{x}_0$ սկզբնական արժեքը, որը ծնում է ω-պարբերական լուծումը՝

$$\vec{x}_0 = \left(E - e^{A\omega}\right)^{-1} \cdot e^{A\omega} \cdot \int_0^\omega e^{-A\tau} \cdot \vec{f}(\tau)d\tau = \left(E - e^{A\omega}\right)^{-1} \int_0^\omega e^{A(\omega-\tau)} \cdot \vec{f}(\tau)d\tau:$$

Տեղադրելով $\vec{x}_0$-ի ստացված արժեքը (11.17) բանաձևի մեջ, ստանում ենք ω-պարբերական լուծումը հետևյալ տեսքով՝

$$\vec{\varphi}(t) = e^{At}\left(E - e^{A\omega}\right)^{-1} \cdot \int_0^\omega e^{A(\omega-\tau)} \cdot \vec{f}(\tau)d\tau + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot \vec{f}(\tau)d\tau:$$

Հաշվի առնելով, որ e^{At} և $E - e^{A\omega}$ մատրիցները տեղափոխելի են, բազմապատկենք վերջին բանաձևը ձախից ($E - e^{A\omega}$)-ով: Կստանանք՝

$$\left(E - e^{A\omega}\right)\vec{\varphi}(t) = e^{At}\int_0^\omega e^{A(\omega-\tau)}\vec{f}(\tau)d\tau + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)d\tau - e^{A\omega} \cdot e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)d\tau =$$

$$= e^{At}\left[\int_0^\omega e^{A(\omega-\tau)}\vec{f}(\tau)d\tau + \int_0^t e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)d\tau - \int_0^t e^{A(\omega-\tau)}\vec{f}(\tau)d\tau\right] =$$

$$= e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)d\tau - \int_\omega^t e^{A(\omega-\tau)}\vec{f}(\tau)d\tau\right]: \qquad (11.20)$$

Եթե վերջին ինտեգրալում կատարենք $\tau_1 = \tau - \omega$ ինտեգրման փոփոխականի փոխարինում, ապա հաշվի առնելով, որ $\vec{f}(\tau_1 + \omega) \equiv \vec{f}(\tau_1)$, կստանանք՝

$$-\int_\omega^t e^{A(\omega-\tau)}\vec{f}(\tau)d\tau = -\int_0^{t-\omega} e^{-A\tau_1}\vec{f}(\tau_1+\omega)d\tau_1 = -\int_0^{t-\omega} e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)d\tau:$$

Տեղադրելով (11.20)-ի մեջ՝ կունենանք.

$$\left(E - e^{A\omega}\right)\vec{\varphi}(t) = e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)d\tau - \int_0^{t-\omega} e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)d\tau\right] = e^{At}\cdot\int_{t-\omega}^t e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)d\tau:$$

Այսպիսով՝ (11.19) համակարգի ω-պարբերական լուծումը տրվում է

$$\vec{\varphi}(t) = \left(E - e^{A\omega}\right)^{-1}\cdot\int_{t-\omega}^t e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)d\tau$$

բանաձևով: Պարզ է, որ այս բանաձևը ճիշտ է, եթե գոյություն ունի $\left(E - e^{A\omega}\right)^{-1}$ հակադարձ մատրիցը: Իսկ վերջինս գոյություն ունի, եթե A մատրիցի սեփական արժեքներից ոչ մեկը հավասար չէ $\dfrac{2\pi ik}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$ (հետևանք 11.1):

Դիտարկենք հաստատուն գործակիցներով և ω-պարբերական $f(t)$ ազատ անդամով $L(p)[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(t)$ (11.21)

n-րդ կարգի գծային հավասարումը: Քանի որ $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամի արմատները համընկնում են (11.21)-ին համարժեք $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}(t)$ գծային նորմալ համակարգի A մատրիցի սեփական արժեքների հետ (ապացուցե՛լ), ապա (11.21) հավասարումն ունի մեկ և միայն մեկ ω-պարբերական լուծում, եթե $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամի արմատներից ոչ մեկը հավասար չէ $\dfrac{2\pi ik}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$:

Վարժություն 11.2: Գտնել $y'' - y = \sin t$ հավասարման միակ 2π պարբերական լուծումը:

ԳԼՈՒԽ IV

ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Եթե դիֆերենցիալ հավասարման լուծումներից պետք է առանձնացնել այն լուծումները, որոնք բավարարում են որոշակի պայմանների ինչ–որ տիրույթի եզրում, ապա ասում են որ դրված է եզրային խնդիր: Դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության այս մեծածավալ բնագավառից (հատկապես բովանդակալից է եզրային խնդիրների տեսությունը մասնական ածանցյալներով հավասարումների համար), սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների սույն դասընթացում ընդգրկել ենք եզրային խնդիրը n-րդ կարգի գծային հավասարման համար (§4) և որոշ չափով Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը (§2-3): Շտուրմ-Լիուվիլի եզրային խնդրի սեփական արժեքների գոյությունը ապացուցվում է (§2) երկրորդ կարգի գծային համասեռ հավասարումների լուծումների զրոների ուսումնասիրման (Շտուրմի տեսություն) հիման վրա (§1):

§ 1. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ԶՐՈՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ:

Դիտարկենք z անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ

$$z'' + p(t)z' + r(t)z = 0 \tag{1.1}$$

գծային դիֆերենցիալ հավասարումը, որի $p(t)$ և $r(t)$ գործակիցները t անկախ փոփոխականի անընդհատ իրական ֆունկցիաներ են, որոշված $[a,b]$ հատվածում:

Լեմմա 1.1: (1.1) հավասարման կամայական ոչ տրիվիալ (նույնաբար զրոյից տարբեր) $z(t)$ լուծման զրոները պարզ են, այսինքն եթե որևէ t_0 կետում $z(t_0)=0$, ապա $z'(t_0)\neq 0$: Բացի այդ, կամայական ոչ տրիվիալ լուծման զրոների բազմությունը չի կարող ունենալ սահմանային կետ $[a,b]$-ում, այսինքն՝ զրոները մեկուսացված կետեր են:

Ապացույց: Եթե (1.1) հավասարման $z(t)$ լուծման համար $z(t_0)=z'(t_0)=0$, ապա Կոշու խնդրի լուծման միակությունից հետևում է, որ $z(t)\equiv 0$, $t\in[a,b]$: Այսպիսով՝ ոչ տրիվիալ լուծման զրոները կարող են լինել միայն պարզ (ասում են նաև, որ նրանք առաջին կարգի զրոներ են): Դիցուք $z(t)$ ոչ տրիվիալ լուծման $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ զրոները ունեն սահմանային կետ, այսինքն՝ $z(t_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n \ldots$ և $t_n \to \xi \in [a,b]$, երբ $n \to \infty$: Այդ դեպքում $z(t)$ լուծման ողորկությունից հետևում է, որ $z(\xi) = 0$ և $z'(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z(t_n) - z(\xi)}{t_n - \xi} = 0$: Կոշու խնդրի լուծման միակությունից դարձյալ հետևում է, որ $z(t) \equiv 0$ $t \in [a,b]$, ինչը հակասում է մեր ենթադրությանը: Այսպիսով՝ (1.1) հավասարման ոչ մի լուծում (բացի $z(t) \equiv 0$) չի կարող ունենալ անվերջ թվով զրոներ $[a,b]$ փակ միջակայքում (ինչու*): Լեմման ապացուցված է:

Նշենք, որ այս պարագրաֆում դիտարկվում են միայն իրական լուծումները: (1.1) հավասարման ոչ տրիվիալ լուծումը կանվանենք *տատանվող*, եթե այն ունի $[a,b]$-ում առնվազն երկու զրոներ: Հակառակ դեպքում, այսինքն՝ երբ լուծումն ունի ոչ ավել, քան մեկ զրո, այն կկոչվի *չտատանվող:*

Որպես օրինակ՝ դիտարկենք

$$y'' - m^2 y = 0 \tag{1.2}$$

և

$$y'' + m^2 y = 0 \tag{1.3}$$

դիֆերենցիալ հավասարումները, որտեղ m-ը դրական թիվ է: Քանի որ (1.2) հավասարման ընդհանուր լուծումը տրվում է $y(t) = c_1 e^{mt} + c_2 e^{-mt}$ բանաձևով, ապա հեշտ է տեսնել, որ այս հավասարման կամայական ոչ տրիվիալ լուծում ամբողջ իրական առանցքի վրա կարող է ընդունել զրո արժեք ոչ ավել, քան մեկ անգամ: Այսպիսով՝ ցանկացած $[a,b]$ հատվածում (1.2) հավասարումը չունի տատանվող լուծումներ:

Մինչդեռ (1.3) հավասարումը, որի ընդհանուր իրական լուծումը տրվում է $y(t) = A\sin(mt + \varphi)$ բանաձևով (A-ն և φ-ն կամայական իրական հաստատուններ են), ակնհայտորեն ունի տատանվող լուծումներ կամայական $[a,b]$ հատվածում, որի երկարությունը մեծ է կամ հավասար $\dfrac{2\pi}{m}$-ից: Քանի որ կամայական ոչ տրիվիալ լուծման $(A \neq 0)$ հարևան զրոների հեռավորությունը հավասար է $\frac{\pi}{m}$,

ապա (1.3) հավասարման կամայական լուծում (ոչ տրիվիալ) $[a,b]$ միջակայքում ունի

$$\left[\frac{(b-a)m}{\pi}\right] \text{ կամ } \left[\frac{(b-a)m}{\pi}\right]+1 \tag{1.4}$$

զրո, որտեղ $[x]$-ով նշանակել ենք x թվի ամբողջ մասը:

Երկրորդ կարգի (1.1) հավասարման լուծումների զրոների հետազոտման հարցում կարելի է սահմանափակվել

$$y'' + q(t)y = 0 \tag{1.5}$$

տիպի հավասարումների ուսումնասիրմամբ, քանի որ անընդհատ դիֆերենցելի $p(t)$ գործակցով ընդհանուր տեսքի (1.1) հավասարումը

$$y(t) = z(t)\cdot e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(\xi)d\xi} \tag{1.6}$$

փոփոխականի փոխարինմամբ բերվում է (1.5) տեսքի, որտեղ

$$q(t) = -\frac{p^2(t)}{4} - \frac{p'(t)}{2} + r(t): \tag{1.7}$$

Իրոք, տեղի ունի հետևյալ պնդումը

Լեմմա 1.2: Եթե $p, p', r \in C[a,b]$, ապա (1.1) հավասարումը համարժեք է (1.5) հավասարմանը, որում $q(t)$ գործակիցը որոշվում է (1.7) բանաձևով, այսինքն՝ (1.1) հավասարման ամեն մի $z(t)$ լուծմանը համապատասխանում է (1.5) հավասարման մեկ և միայն մեկ $y(t)$ լուծումը, որը տրվում է (1.6) բանաձևով:

Ապացույց: Ածանցելով (1.6)-ը՝ ստանում ենք.

$$y'(t) \equiv z'(t)\cdot e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(\xi)d\xi} + \frac{1}{2}p(t)z(t)\cdot e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(\xi)d\xi}$$

որտեղից, հաշվի առնելով, որ $z''(t) + p(t)z'(t) \equiv -r(t)z(t)$, y'' ածանցյալի համար ստանում ենք

$$y''(t) \equiv z''(t)\cdot e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(\xi)d\xi} + p(t)z'(t)\cdot e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(\xi)d\xi} + \left[\frac{1}{2}p'(t)+\frac{1}{4}p^2(t)\right]z(t)\cdot e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(\xi)d\xi} \equiv$$

$$\equiv -q(t)y(t)$$

նույնությունը, որն էլ նշանակում է, որ (1.6) բանաձևով որոշված $y(t)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (1.5) հավասարման լուծում, որտեղ $q(t)$ գործակիցը որոշվում է (1.7) բանաձևով: Լեմման ապացուցված է:

Նկատենք, որ (1.6) բանաձևից երևում է, որ $z(t)$ և $y(t)$ ֆունկցիաները զրո են դառնում միաժամանակ: (1.5) հավասարման զրոների ուսումնասիրման հարցում հիմնարար դեր ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 1.1: (Շտուրմ). Դիտարկենք

$$y'' + q_1(t)y = 0 \tag{1.8}$$

$$y'' + q_2(t)y = 0 \tag{1.9}$$

հավասարումները, որտեղ $q_1, q_2 \in C[a,b]$: Եթե

$$q_2(t) \ge q_1(t),\ \ t \in [a,b] \tag{1.10}$$

ապա (1.8) հավասարման կամայական լուծման յուրաքանչյուր երկու հարևան զրոների միջև գտնվում է (1.9) հավասարման ամեն մի լուծման առնվազն մեկ զրո:

Ապացույց: Դիցուք $y = u(t)$ ֆունկցիան (1.8) հավասարման տատանվող լուծում է և t_1-ն ու t_2-ը նրա հարևան զրոներն են $(u(t_1) = u(t_2) = 0,\ a \le t_1 < t_2 \le b,\ \ u(t) \ne 0, t \in (t_1, t_2))$ իսկ $v(t)$-ն (1.9) հավասարման որևէ լուծում է: Բազմապատկելով $u''(t) + q_1(t)u(t) \equiv 0$ նույնությունը $v(t)$-ով, իսկ $v''(t) + q_2(t)v(t) \equiv 0$ նույնությունը $u(t)$-ով և հանելով ստացված առաջին նույնությունից երկրորդը՝ ստանում ենք.

$$u''(t)v(t) - v''(t)u(t) \equiv \frac{d}{dt}\{u'(t)v(t) - v'(t)u(t)\} \equiv \{q_2(t) - q_1(t)\}u(t)v(t) \tag{1.11}$$

Ինտեգրելով (1.11) նույնությունը $[t_1, t_2]$ հատվածում և հաշվի առնելով, որ $u(t_1) = u(t_2) = 0$, ստանում ենք՝

$$u'(t_2)v(t_2)-u'(t_1)v(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\{q_2(t)-q_1(t)\}u(t)\cdot v(t)dt: \quad (1.12)$$

Քանի որ t_1-ը և t_2-ը $u(t)$ ֆունկցիայի հարևան զրոներն են, ապա (t_1,t_2) միջակայքում $u(t)$-ն պահպանում է նշանը: Ընդհանրությունը չխախտելով՝ կարելի է ենթադրել, որ $u(t)>0$ (t_1,t_2)-ում (հակառակ դեպքում կարելի է դիտարկել $-u(t)$ լուծումը): Այստեղից և $u(t_1)=u(t_2)=0$ պայմանից հետևում է, որ $u'(t_1)>0$ և $u'(t_2)<0$:

Դիցուք թեորեմի պնդումը տեղի չունի, այսինքն՝ $v(t)$-ն $[t_1,t_2]$ հատվածում զրոներ չունի: Այդ դեպքում $v(t)$-ն $[t_1,t_2]$-ում պահպանում է նշանը: Դիցուք այն ամենուրեք դրական է (բացասականի դեպքը բերում է նույն արդյունքին): Այս դեպքում (1.12) հավասարության ձախ կողմը բացասական թիվ է, իսկ աջ կողմը՝ ոչ բացասական: Ստացված հակասությունը ապացուցում է թեորեմը:

Հետևանք 1.1: Եթե $q(t)\le 0$ որևէ $[a,b]$ հատվածում, ապա $y''+q(t)y=0$ հավասարումը այդ հատվածում տատանվող լուծում չունի:

Ապացույց: Դիցուք տատանվող լուծում գոյություն ունի և t_1-ն ու t_2-ը այդ լուծման հարևան զրոներն են, $a\le t_1<t_2\le b$: Համաձայն Շտուրմի թեորեմի, $y''=0$ հավասարման *ամեն մի* լուծում $[t_1,t_2]$ հատվածում առնվազն մեկ անգամ պետք է ընդունի զրո արժեք, ինչը ակնհայտորեն սխալ է օրինակ $y=const\ne 0$ լուծման համար: Հետևանքն ապացուցված է:

Հետևանք 1.2: Եթե t_1-ն ու t_2-ը $y''+q(t)y=0$ հավասարման որևէ $y=u(t)$ լուծման հարևան զրոներ են, ապա այդ հավասարման յուրաքանչյուր, $u(t)$-ի հետ գծորեն անկախ, լուծում (t_1,t_2) միջակայքում ունի ճիշտ մեկ զրո:

Ապացույց: Համաձայն Շտուրմի թեորեմի (դիտարկում ենք $q_1(t)=q_2(t)=q(t)$ դեպքը)՝ $y''+q(t)y=0$ հավասարման կամայական $y=v(t)$ լուծում $[t_1,t_2]$ հատվածում պետք է ունենա առնվազն մեկ զրո: Եթե $v(t)$ և $u(t)$ լուծումները գծորեն անկախ են (և $u(t_1)=u(t_2)=0$), ապա $v(t_1)\ne 0$ և $v(t_2)\ne 0$, քանի որ հակառակ դեպքում u և v լուծումների վրոնսկյանը, ըստ

Լիուվիլի բանաձևի, նույնաբար հավասար կլինի զրոյի, ինչը հակասում է լուծումների գծային անկախությանը: Հետևաբար $v(t)$ լուծումը ունի առնվազն մեկ զրո (t_1,t_2) բաց միջակայքում: Դիցուք $v(t)$-ն ունի մեկից ավելի զրոներ (t_1,t_2)-ում և t_3-ը ու t_4-ը $(t_1<t_3<t_4<t_2)$ նրա հարևան զրոներն են: Համաձայն Շտուրմի թեորեմի $u(t)$ լուծումը $[t_3,t_4]$ հատվածում պետք է ունենա առնվազն մեկ զրո, ինչը հակասում է այն ենթադրությանը, որ t_1-ը և t_2-ը $u(t)$-ի հարևան զրոներն են: Հետևաբար, $v(t)$-ն (t_1,t_2)-ում ունի ճիշտ մեկ զրո:

Հետևանք 1.2-ի պնդումը ուրիշ խոսքով կարելի է ձևակերպել այսպես՝ $y''+q(t)y=0$ հավասարման զծորեն անկախ լուծումների զրոները բաժանում են միմյանց (մեկընդմիջվում են):

Օրինակ կարող են ծառայել $\sin t$ և $\cos t$ ֆունկցիաները, որոնք $y''+y=0$ հավասարման գծորեն անկախ լուծումներն են և որոնց զրոները բաժանում են միմյանց:

Թեորեմ 1.2 (Համեմատության թեորեմ):

Դիցուք $u(t)$-ն (1.8), իսկ $v(t)$-ն (1.9) հավասարումների լուծումներն են, որոնք a կետում բավարարում են նույն սկզբնական պայմաններին՝

$$u(a)=v(a),\quad u'(a)=v'(a), \quad (1.13)$$

և դիցուք $\qquad q_2(t)>q_1(t),\ t\in[a,b]$:

Եթե $u(t)$-ն $(a,b]$ կիսաբաց հատվածում ունի m հատ զրո ($m\geq 1$), ապա $v(t)$-ն նույն $(a,b]$-ում ունի ոչ պակաս, քան m զրո և $v(t)$-ի k-րդ զրոն $u(t)$-ի k-րդ զրոյից փոքր է:

Ապացույց: Նշանակենք t_1-ով $u(t)$ լուծման a կետին ամենամոտ (և a-ից տարբեր) զրոն: Քանի որ $u(t)$-ի զրոները պարզ են և մեկուսացված կետեր են (տե՛ս լեմմա 1.1), ապա այդպիսի t_1 գոյություն ունի: Թեորեմն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ (a,t_1) միջակայքում $v(t)$ լուծումն ունի առնվազն մեկ զրո: Ենթադրենք հակառակը $v(t)\neq 0$, երբ $t\in(a,t_1)$: Ընդհանրությունը չխախտելով՝ կարելի է համարել, որ $v(t)>0$ և $u(t)>0$, երբ $t\in(a,t_1)$: Քանի որ

$u(t_1)=0$, ապա այս ենթադրությունից հետևում է, որ $u'(t_1)<0$: Ինտեգրելով (1.11) նույնությունը (a,t_1)-ով և հաշվի առնելով (1.13) պայմանը՝ ստանում ենք.

$$u'(t_1)v(t_1)=\int_a^{t_1}\{q_2(t)-q_1(t)\}u(t)v(t)dt:$$

Վերջին առնչության ձախ կողմում գրված թիվը՝ $u'(t_1)v(t_1)\le 0$, իսկ աջ կողմում գրված մեծությունը դրական է: Եկանք հակասության: Թեորեմն ապացուցված է:

Կիրառություններում կարևոր դեր է խաղում

$$y''+(\lambda-q(t))y=0 \tag{1.14}$$

հավասարումը, որտեղ λ-ն կոմպլեքս պարամետր է, իսկ $q(t)$-ն (ինչպես և մինչ այժմ) $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված իրական անընդհատ ֆունկցիա է:

Թեորեմ 1.3: (Օսցիլյացիայի թեորեմ[1]): Կամայական n բնական թվի համար գոյություն ունի λ_n իրական թիվ այնպիսին, որ եթե $\lambda\ge\lambda_n$, ապա (1.14) հավասարման յուրաքանչյուր $y=y(t,\lambda)$ լուծում $[a,b]$-ում ունի առնվազն n հատ զրո:

Ապացույց: Ինչպես վերը նշվեց (տե՛ս (1.4)), $y''+m^2y=0$ հավասարման կամայական լուծում $[a,b]$ հատվածում ունի $\left[\frac{(b-a)m}{\pi}\right]$ կամ $\left[\frac{(b-a)m}{\pi}\right]+1$ զրո: Կամայական n բնական թվի համար ընտրենք m դրական թիվն այնպես, որ տեղի ունենա $\left[\frac{(b-a)m}{\pi}\right]\ge n+1$ անհավասարությունը: λ պարամետրի λ_n արժեքն իր հերթին ընտրենք այնպես, որ տեղի ունենա $\lambda_n-q(t)\ge m^2$ անհավասարությունը: Քանի որ $[a,b]$ փակ հատվածի վրա $q(t)$ անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ է, այսինքն գոյություն ունեն q_0 և q_1 թվեր այնպիսիք, որ $q_0\le q(t)\le q_1$, $t\in[a,b]$, ապա λ_n արժեքը կարելի է ընտրել $\lambda_n\ge m^2+q_1$ առնչությունից:

---

[1] *Օսցիլյացիա* լատինական բառը կարելի է թարգմանել *տատանում* բառով:

Համեմատելով այժմ $y''+m^2y=0$ և $y''+(\lambda_n-q(t))y=0$ հավասարում-ները, Շտուրմի թեորեմից ստանում ենք, որ $y''+(\lambda_n-q(t))y=0$ հավասարման ամեն մի լուծում $[a,b]$-ում ունի առնվազն n հատ զրո: Եթե $\lambda\geq\lambda_n$, ապա զրոների թիվը կարող է միայն ավելանալ: Թեորեմն ապացուցված է:

§ 2. ՇՏՈՒՐՄ-ԼԻՈՒՎԻԼԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

1756 թ. Դանիիլ Բեռնուլին, ուսումնասիրելով ամրացված ծայրակետերով լարի տատանումները, եկավ այսպիսի մասնավոր խնդրի՝ պետք էր գտնել այն ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք $x\in(0,l)$ միջակայքում բավարարում են $-y''=\lambda y$ հավասարմանը, իսկ հատվածի ծայրակետերում դառնում են զրո, այսինքն $y(0)=0$ և $y(l)=0$: Հավասարման մեջ մասնակցող λ գործակիցը պարամետր է (ընդհանրապես ասած կոմպլեքս), որի արժեքները նախօրոք հայտնի չեն: Խնդրի ճշգրիտ դրվածքը այսպիսին է՝ գտնել λ պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում

$$\begin{cases}-y''=\lambda y & (2.1)\\ y(0)=0 & (2.2)\\ y(l)=0 & (2.3)\end{cases}$$

խնդիրն ունի նույնաբար զրոյից տարբեր լուծումներ և գտնել այդ լուծումները:

Խնդրի դրվածքը թվում է անսովոր մի քանի պատճառներով՝

1) նախորդ ուսումնասիրություններում, եթե ասում էինք թե տված է հավա-սարում, ենթադրվում էր, որ գործակիցները հայտնի են, իսկ (2.1) հավասարման մեջ λ պարամետրը անհայտ է,

2) (2.2) և (2.3) պայմանները սկզբնական պայմաններ չեն և, հետևաբար, (2.1)-(2.3) խնդիրը Կոշու խնդիր չէ:

Չնայած այդ անսովորությանը, մենք հեշտությամբ կարող ենք լուծել այս խնդիրը: Իրոք, նախ գտնենք (2.1) գծային համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը: Գրելով բնութագրիչ հավասարումը՝ $-\mu^2=\lambda$, գտնում ենք նրա արմատ-ները՝ $\mu_1=i\sqrt{\lambda}$, $\mu_2=-i\sqrt{\lambda}$: Եթե $\lambda\neq0$, ապա $\mu_1\neq\mu_2$ և ընդհանուր լուծումն ունի

$$y(x,\lambda)=c_1e^{i\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-i\sqrt{\lambda}x} \tag{2.4}$$

տեսքը, իսկ եթե $\lambda=0$, ապա $y(x,0)=c_1x+c_2$ (c_1-ը և c_2-ը կամայական հաստատուններ են): Որպեսզի c_1x+c_2 ֆունկցիան բավարարի (2.2) և (2.3) պայմաններին անհրաժեշտ է և բավարար, որ $c_1=c_2=0$, այսինքն՝ $\lambda=0$ դեպքում խնդրի միակ լուծումը նույնաբար զրո ֆունկցիան է: Որպեսզի (2.4) լուծումը բավարարի (2.2) պայմանին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $c_1=-c_2=c$ այսինքն (2.1)-(2.2) խնդրի լուծումներն են

$$y(x,\lambda)=c\left(e^{i\sqrt{\lambda}x}-e^{-i\sqrt{\lambda}x}\right) \tag{2.4'}$$

ֆունկցիաների բազմությունը (c-ն և λ-ն կամայական թվեր են): Որպեսզի (2.4') տեսքի ֆունկցիան բավարարի նաև (2.3) պայմանին, պետք է, որ տեղի ունենա

$$y(l,\lambda)=c\left(e^{i\sqrt{\lambda}l}-e^{-i\sqrt{\lambda}l}\right)=0 \tag{2.5}$$

առնչությունը, որն իրենից ներկայացնում է հավասարում λ անհայտի նկատմամբ (նկատենք, որ $c\neq 0$, քանի որ հակառակ դեպքում (2.4')-ից ստանում ենք նույնաբար զրո լուծումը): Գրելով (2.5)-ը $e^{2i\sqrt{\lambda}l}=1=e^{2\pi ik}$, $k\in\mathbb{Z}$, տեսքով, գտնում ենք (2.5) հավասարման լուծումները՝ $\sqrt{\lambda_k}=\dfrac{\pi k}{l}$ կամ $\lambda_k=\left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2$, $k\in\mathbb{Z}$: Տեղադրելով λ պարամետրի ստացված $\lambda_k=\left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2$ արժեքները (2.4') արտահայտության մեջ, ստանում ենք $y(x,\lambda_k)=c'_k\left(e^{i\frac{\pi k}{l}x}-e^{-i\frac{\pi k}{l}x}\right)=2ic'_k\sin\dfrac{\pi k}{l}x$, $k\in\mathbb{Z}$, ֆունկցիաների բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է (2.1)-(2.3) խնդրի լուծում: Նշանակելով $c_k=2ic'_k$, ($k\in\mathbb{Z}$), կստանանք՝ $y(x,\lambda_k)=c_k\sin\dfrac{\pi k}{l}x$:

λ պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում (2.1)-(2.3) խնդիրն ունի ոչ տրիվիալ (նույնաբար զրոյից տարբեր) լուծումներ, կոչվում են այդ խնդրի *սեփական արժեքներ,* իսկ համապատասխան լուծումները՝ *սեփական ֆունկցիաներ:*

Համաձայն այս սահմանման (2.1)-(2.3) խնդրի սեփական արժեքներն են

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k = 1,2,3,\ldots \tag{2.6}$$

թվերը, իսկ սեփական ֆունկցիաներն են

$$y_k(x) \equiv y(x,\lambda_k) = c_k \sin\frac{\pi k}{l}x, \quad c_k \neq 0, \quad k = 1,2,3,\ldots \tag{2.7}$$

ֆունկցիաները, որոնք որոշվում են հաստատուն բազմապատկչի ճշտությամբ: Նկատենք, որ սեփական արժեքները և սեփական ֆունկցիաները համարակալվում են միայն բնական ցուցիչներով՝ ինդեքսներով (այլ ոչ թե բոլոր ամբողջ), քանի որ $k = 0$ դեպքում $y_0(x) \equiv 0$ (իսկ ըստ սահմանման սեփական ֆունկցիան խնդրի ոչ տրիվիալ լուծումն է), իսկ բացասական k-երի համար $y_{-k}(x) = -c_k \sin\frac{\pi k}{l}x$, որը, c_k հաստատունի կամայականության շնորհիվ, նույնն է, ինչ և $y_k(x)$-ը:

Դեշտ է ստուգել, որ

$$\int_0^l \sin\frac{\pi k}{l}x \sin\frac{\pi m}{l}x dx = 0, \text{ երբ } k \neq m:$$

Սեփական ֆունկցիաների այս հատկությունը կոչվում է օրթոգոնալություն: Դիշենք, որ վերջավոր չափանի տարածություններում երկու վեկտոր կոչվում են օրթոգոնալ, եթե նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի: Սկալյար արտադրյալի հասկացությունը սահմանվում է նաև ֆունկցիաների համար: Այսպես՝ կամայական երկու անընդհատ f և g ֆունկցիաներին $(f, g \in C[a,b])$ համապատասխանության մեջ դնենք

$$(f,g) \equiv \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \tag{2.8}$$

թիվը և անվանենք այն f և g ֆունկցիաների *սկալյար արտադրյալ:*

Նկատենք, որ այս սահմանման մեջ f և g ֆունկցիաները կարող են լինել կոմպլեքսարժեք և, հետևաբար, սկալյար արտադրյալը, ընդհանրապես ասած, կոմպլեքս թիվ է: Դեշտ է տեսնել, որ այս կերպ սահմանված սկալյար արտադրյալը ունի հետևյալ հատկությունները.

$$(f,g) = \overline{(g,f)},$$

$$(f,f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \equiv 0,$$

$$(\lambda f, g) = \lambda(f, g), \quad (f, \lambda g) = \bar{\lambda}(f, g):$$

f և g ֆունկցիաները կոչվում են *օրթոգոնալ*, եթե $(f, g) = 0$:

Վարժություն: Ապացուցել, որ օրթոգոնալ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են (եթե նրանցից ոչ մեկը նույնաբար զրո չէ):

Այսպիսով՝ (2.1)-(2.3) խնդիրն ունի հաշվելի թվով սեփական արժեքներ, որոնք կազմում են անվերջի ձգտող հաջորդականություն (տե՛ս (2.6)) և հաշվելի թվով *գծորեն անկախ* սեփական ֆունկցիաներ (տե՛ս (2.7)), որոնք զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են:

Դիտարկված (2.1)-(2.3) խնդիրը կոչվում է *եզրային խնդիր*, քանի որ (2.2) և (2.3) պայմանները դրվում են $[0, l]$ հատվածի ծայրակետերում (եզրում):

Մեր հիմնական նպատակներից մեկն է ուսումնասիրել

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y & (2.9) \\ y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 & (2.10) \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 & (2.11) \end{cases}$$

խնդիրը, որը կոչվում է *Շտուրմ-Լիուվիլի եզրային խնդիր*: Ենթադրվում է, որ (2.9) դիֆերենցիալ հավասարման $q(x)$ գործակիցը $[a, b]$ *վերջավոր* հատվածում որոշված, իրականարժեք անընդհատ ֆունկցիա է, այսինքն $\overline{q(x)} = q(x)$, $q \in C[a, b]$: (2.10) և (2.11) *եզրային պայմաններում* մասնակցող α և β պարամետրերը (թվերը) նույնպես ենթադրվում են իրական: Խնդրի լուծում կոչվում է այնպիսի $y = y(x)$ $(x \in [a, b])$ ֆունկցիա, որն $[a, b]$ հատվածի ներսում, այսինքն՝ (a, b) միջակայքում, բավարարում է (2.9) հավասարմանը, իսկ հատվածի ծայրակետերում (a և b կետերում) բավարարում է (2.10) և (2.11) պայմաններին:

Սահմանում 2.1: λ պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում (2.9)-(2.11) խնդիրն ունի ոչ տրիվիալ լուծում, կոչվում են Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի *սեփական արժեքներ*, իսկ համապատասխան լուծումները կոչվում են այդ խնդրի *սեփական ֆունկցիաներ:*

Հեշտ է տեսնել, որ եթե (2.9)-(2.11) Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրում վերցնենք $a = 0$, $b = l$, $q(x) \equiv 0$, $\alpha = \beta = 0$ ապա կստացվի վերը ուսումնասիրված (2.1)-(2.3) խնդիրը: Ստորև ցույց կտրվի, որ Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը ընդհանուր դեպքում պահպանում է (2.1)-(2.3) խնդրի շատ հատկություններ, մասնավորապես՝

1) Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրն ունի հաշվելի թվով սեփական արժեքներ, որոնք բոլորն իրական են և կազմում են անվերջի ձգտող հաջորդականություն:

2) Տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական ֆունկցիաներն օրթոգոնալ են:

Նշանակենք ly -ով (2.9) հավասարման ձախ մասը, այսինքն՝

$ly \equiv \left(-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right)y \equiv -y''+q(x)y$ և դիտարկենք (lu,v) սկալյար արտադրյալը, ենթադրելով, որ $u,v\in C^2[a,b]$: Կիրառելով մասերով ինտեգրման բանաձևը՝ կունենանք.

$$(lu,v)\equiv\int_a^b\left(-u''(x)+q(x)u(x)\right)\cdot\overline{v}(x)dx=-\int_a^b\overline{v}(x)du'(x)+\int_a^b q(x)u(x)\overline{v}(x)dx=$$

$$=-u'\cdot\overline{v}\Big|_a^b+\int_a^b u'(x)\overline{v}'(x)dx+\int_a^b q(x)u(x)\overline{v}(x)dx=(u\overline{v}'-u'\overline{v})\Big|_a^b-\int_a^b u(x)\overline{v}''(x)dx+$$

$$+\int_a^b q(x)u(x)\overline{v}(x)dx=(u\overline{v}'-u'\overline{v})\Big|_a^b+\int_a^b u(x)\cdot\overline{[-v''(x)+\overline{q}(x)\cdot v(x)]}\,dx=$$

$$=(u\overline{v}'-u'\overline{v})\Big|_a^b+(u,l^*v),$$

որտեղ l^*v -ով նշանակել ենք $l^*v\equiv -v''(x)+\overline{q}(x)v(x)$ դիֆերենցիալ արտահայտությունը: Ստացված

$$(lu,v)=(u\overline{v}'-u'\overline{v})\Big|_a^b+(u,l^*v) \qquad (2.12)$$

առնչությունը կոչվում է Լագրանժի բանաձև (կամ Լագրանժի նույնություն):

Լեմմա 2.1: Եթե u և v ֆունկցիաները $\left(u,v\in C^2[a,b]\right)$ բավարարում են (2.10) և (2.11) եզրային պայմաններին, իսկ $q(x)$ $\left(q\in C[a,b]\right)$ ֆունկցիան իրական է, ապա

$$(lu,v)=(u,lv) \qquad (2.13)$$

Ապացույց: Քանի որ $\overline{q}(x)=q(x)$, ապա $l^*v=lv$: Համաձայն Լագրանժի (2.12) բանաձևի՝ մնում է ստուգել, որ

$$(u\bar{v}'-u'\bar{v})\Big|_a^b=u(b)\bar{v}'(b)-u'(b)\bar{v}(b)-u(a)\bar{v}'(a)\ \ +u'(a)\bar{v}(a)=0:$$

Ըստ պայմանի u և v ֆունկցիաները բավարարում են (2.10) և (2.11) եզրային պայմաններին, այսինքն՝ տեղի ունեն

$$u(a)\cos\alpha+u'(a)\sin\alpha=0,\qquad u(b)\cos\beta+u'(b)\sin\beta=0 \tag{2.14}$$

$$\bar{v}(a)\cos\alpha+\bar{v}'(a)\sin\alpha=0,\qquad \bar{v}(b)\cos\beta+\bar{v}'(b)\sin\beta=0 \tag{2.15}$$

առնչությունները ((2.15) –ը ստանալու համար օգտվում ենք α և β թվերի իրական լինելու պայմանից):

Եթե $\sin\alpha\neq 0$, ապա $u'(a)=-u(a)ctg\alpha$, $\bar{v}'(a)=-\bar{v}(a)ctg\alpha$ և, հետևաբար $u'(a)\bar{v}(a)-u(a)\bar{v}'(a)=-u(a)\bar{v}(a)ctg\alpha+u(a)\bar{v}(a)ctg\alpha=0$:

Եթե $\sin\alpha=0$, ապա $u(a)=\bar{v}(a)=0$ և կրկին $(u\bar{v}'-u'\bar{v})\Big|_a^b$ արտահայտության a կետին վերաբերող մասը դառնում է զրո: Նույնատիպ դատողություններով ապացուցվում է b կետին վերաբերող մասի զրո լինելը: Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 2.2: Իրականարժեք $q(x)$ գործակցով (2.9)-(2.11) Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի սեփական արժեքները իրական են, իսկ տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական ֆունկցիաները՝ օրթոգոնալ:

Ապացույց: Դիցուք λ_1 թիվը (2.9)-(2.11) խնդրի սեփական արժեք է և u - ն λ_1 -ին համապատասխանող սեփական ֆունկցիա է, այսինքն՝ տեղի ունեն $lu(x)\equiv\lambda_1 u(x)$, $x\in(a,b)$, նույնությունը և (2.14) առնչությունները: Վերցնելով (2.13)-ում $v=u$, ստանում ենք՝ $\lambda_1(u,u)=(lu,u)=(u,lu)=\overline{\lambda_1}(u,u)$:

Քանի որ ըստ սահմանման u սեփական ֆունկցիան նույնաբար զրո չէ, ապա $(u,u)\neq 0$: Յետևաբար $\lambda_1=\overline{\lambda_1}$, այսինքն սեփական արժեքները կարող են լինել միայն իրական:

Դիցուք λ_2 թիվը $(\lambda_2\neq\lambda_1)$ նույնպես սեփական արժեք է և v -ն դրան համապատասխանող սեփական ֆունկցիա է, այսինքն՝ $lv(x)\equiv\lambda_2 v(x)$ և բավարարված են (2.15) եզրային պայմանները: Կրկին օգտվելով (2.13)-ից՝ ստանում ենք. $\lambda_1(u,v)=(lu,v)=(u,lv)=\overline{\lambda_2}(u,v)$: Ըստ վերը ապացուցվածի՝ $\overline{\lambda_2}=\lambda_2$ և, հետևաբար, $(\lambda_1 - \lambda_2)\cdot(u,v)=0$: Քանի որ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ապա $(u,v)=0$, այսինքն՝ տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական ֆունկցիաները օրթոգոնալ են: Լեմման ապացուցված է:

Դեշտ է ստուգել, որ եթե $u(x)$-ը սեփական ֆունկցիա է (համապատասխանող որևէ λ_0 սեփական արժեքին), ապա $\overline{u}(x)$-ը նույնպես սեփական ֆունկցիա է և հետևաբար $\dfrac{u(x)+\overline{u}(x)}{2}$-ը, որն իրական է, նույնպես սեփական ֆունկցիա է, համապատասխանող λ_0 սեփական արժեքին: Այս պատճառով հետագայում կհամարենք, որ բոլոր դիտարկվող սեփական ֆունկցիաները իրական են:

Լեմմա 2.3: Նույն սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական ֆունկցիաները գծորեն կախված են:

Ապացույց: Նշանակենք սկալյար արտադրյալը $\mathbb{R}^2$ էվկլիդյան տարածությունում (իրական հարթությունում) $<\vec{a},\vec{b}>$-ով, այսինքն՝ $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ և $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ վեկտորների համար $<\vec{a},\vec{b}>=a_1b_1+a_2b_2$: $\mathbb{R}^2$-ին պատկանող $\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ վեկտորին ուղղահայաց (օրթոգոնալ) վեկտորների բազմությունը կազմում է մի չափանի տարածություն, այսինքն՝ եթե $\vec{a}\perp\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ և $\vec{b}\perp\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$, ապա $\vec{a}=c\vec{b}$ $(c\neq 0)$:

Դիցուք $u(x)$-ը և $v(x)$-ը նույն λ_0 սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական ֆունկցիաներ են: Քանի որ դրանք բավարարում են (2.10) եզրային պայմանին, այսինքն՝

$$<\begin{pmatrix}u(a)\\u'(a)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>=u(a)\cos\alpha+u'(a)\sin\alpha=0 \quad \text{և} \quad <\begin{pmatrix}v(a)\\v'(a)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>=0,$$

ապա $\begin{pmatrix}u(a)\\u'(a)\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}v(a)\\v'(a)\end{pmatrix}$, $c\neq 0$: Քանի որ $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները նույն

$-y''+q(x)y=\lambda_0 y$ հավասարման լուծումներ են, ապա դրանց $W(x)=\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix}$ վրոնսկյանի համար տեղի ունի Լիուվիլի բանաձևը (տե՛ս գլ.III, §5), որից հետևում է, որ $W(x)\equiv W(a)=0$, այսինքն՝ $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները գծորեն կախված են՝ $u(x)\equiv cv(x)$, $c\neq 0$:

Լեմման ապացուցված է:

Համառոտ գրելու նպատակով հետագայում (2.9)-(2.11) Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի համար կօգտվենք $L(q,\alpha,\beta)$ նշանակումից, ընդգծելով, որ այն ծնվում է $q(x)$ ֆունկցիայով և (2.10) և (2.11) եզրային պայմաններում մասնակցող α և β պարամետրերով: Նկատենք նաև, որ եթե եզրային պայմաններում α և β թվերը փոխարինենք $\alpha+\pi k$ և $\beta+\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$ թվերով, ապա եզրային պայմանները չեն փոխվի: Այս պատճառով բավական է ուսումնասիրել $L(q,\alpha,\beta)$ խնդիրը, երբ $\alpha\in(0,\pi]$ և $\beta\in[0,\pi)$:

Այժմ անդրադառնանք $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի սեփական արժեքների գոյության հարցին:

Նշանակենք $\varphi(x,\lambda)$-ով

$$\begin{cases} -y''+q(x)y=\lambda y\,, & (2.9)\\ y(a)=\sin\alpha\,, & (2.16)\\ y'(a)=-\cos\alpha & (2.17)\end{cases}$$

Կոշու խնդրի լուծումը: Քանի որ $\varphi(x,\lambda)$ ֆունկցիան բավարարում է (2.9) հավասարմանը և $\varphi(a,\lambda)=\sin\alpha$, $\varphi'(a,\lambda)=-\cos\alpha$ λ պարամետրի բոլոր (կոմպլեքս) արժեքների համար, ապա այն բավարարում է (2.10) եզրային պայմանին:

Որպեսզի $\varphi(x,\lambda)$-ն լինի (2.9)-(2.11) $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն բավարարի նաև (2.11) պայմանին, այսինքն՝

$$\varphi(b,\lambda)\cos\beta+\varphi'(b,\lambda)\sin\beta=0 \tag{2.18}$$

առնչությանը, որն իրենից ներկայացնում է հավասարում λ անհայտի նկատմամբ, որի լուծումները $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի սեփական արժեքներն են:

Սկզբում մենք կուսումնասիրենք (2.18) հավասարումն այն դեպքում, երբ $\beta = 0$, այսինքն՝

$$\varphi(b,\lambda) = 0 \tag{2.19}$$

հավասարումը և կապացուցենք, որ այն ունի հաշվելի թվով լուծումներ: Սրանով ապացուցված կլինի, որ $L(q,\alpha,0)$ խնդիրն ունի հաշվելի թվով սեփական արժեքներ: Յենվելով այս արդյունքի վրա՝ կապացուցենք, որ (2.18) հավասարումը նույնպես ունի հաշվելի թվով լուծումներ կամայական $\beta \in (0,\pi)$ թվի համար:

Թեորեմ 1.3-ում ապացուցվեց, որ կամայական n բնական թվի համար գոյություն ունի λ պարամետրի այնպիսի λ_n արժեք, որ $\varphi(x,\lambda_n)$ ֆունկցիան $[a,b]$ հատվածում ունի առնվազն n հատ զրո և որ λ պարամետրի աճման հետ այդ զրոների քանակը աճում է:

Քանի որ $\varphi(x,\lambda)$ լուծումը ըստ (x,λ) փոփոխականների զույգի անընդհատ ֆունկցիա է[1], որի զրոները պարզ են, ապա համաձայն անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության մասին թեորեմի, $\varphi(x,\lambda)$ ֆունկցիայի զրոները ըստ λ պարամետրի անընդհատ ֆունկցիաներ են: Ավելին՝ տեղի ունի հետևյալ պնդումը.

Լեմմա 2.4: Դիցուք λ պարամետրերի որևէ λ_0 արժեքի համար $\varphi(x,\lambda_0)$ ֆունկցիան ունի զրոներ (a,b)-ում և դիցուք x_0-ն այդ զրոներից մեկն է: Կամայական, բավականաչափ փոքր, $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ երբ $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, ապա $|x - x_0| < \varepsilon$ միջակայքում $\varphi(x,\lambda)$ ֆունկցիան ունի ճիշտ մեկ զրո:

Ապացույց: Քանի որ $\varphi(x,\lambda_0)$ լուծումը նույնաբար զրո չէ (տես (2.16) և (2.17)), ապա համաձայն լեմմա 1.1-ի՝ x_0-ն պարզ զրո է, այսինքն՝ $\varphi'(x_0,\lambda_0) \neq 0$: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $\varphi'(x_0,\lambda_0) > 0$: Դիցուք ε-ը դրական թիվ է, այնպիսին, որ $\varphi'(x,\lambda_0) > 0$ բոլոր x-երի համար $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ հատվածից (քանի որ $\varphi'(x,\lambda_0)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա այդպիսի $\varepsilon > 0$ թիվ գոյություն ունի): Այդ դեպքում $\varphi(x_0 - \varepsilon, \lambda_0) < 0$ և $\varphi(x_0 + \varepsilon, \lambda_0) > 0$: Քանի որ $\varphi'(x,\lambda)$ ֆունկցիան անընդհատ է որպես λ պարամետրի ֆունկցիա, ապա

---

[1] Տես գլուխ V. §8

գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ $\varphi'(x,\lambda)$-ն մնում է դրական, երբ $|\lambda-\lambda_0| \le \delta$ (և $|x-x_0| \le \varepsilon$): Հետևաբար, մոնոտոն աճող (ըստ x-ի, $x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ հատվածում) $\varphi(x,\lambda)$ ֆունկցիան չի կարող ունենալ մեկից ավելի զրո $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ հատվածում: Բացի այդ, եթե $\delta > 0$ թիվը ընտրենք այնքան փոքր, որ $\varphi(x_0-\varepsilon,\lambda)$-ն մնա բացասական, իսկ $\varphi(x_0+\varepsilon,\lambda)$-ն մնա դրական, երբ $|\lambda-\lambda_0| < \delta$ (դա հնարավոր է, քանի որ $\varphi(x,\lambda)$-ն անընդհատ է), ապա $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ միջակայքում $\varphi(x,\lambda)$-ն կունենա ճիշտ մեկ զրո կամայական λ-ի համար $(\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)$ միջակայքից: Լեմման ապացուցված է:

Դիցուք $\lambda_2 > \lambda_1$: $\varphi(x,\lambda_1)$ ֆունկցիան բավարարում է $y''+(\lambda_1-q(x))y=0$ հավասարմանը, իսկ $\varphi(x,\lambda_2)$-ը բավարարում է $y''+(\lambda_2-q(x))y=0$ հավասարմանը և համաձայն (2.16)-ի և (2.17)-ի դրանք բավարարում են նույն սկզբնական պայմաններին a կետում:

Ըստ թեորեմ 1.2-ի՝ $\varphi(x,\lambda_2)$-ի k-րդ զրոն $\varphi(x,\lambda_1)$-ի k-րդ զրոյից փոքր է, այսինքն՝ λ-ի աճման հետ $\varphi(x,\lambda)$ լուծման զրոները շարժվում են դեպի ձախ և, համաձայն վերը ապացուցված լեմմա 2.4-ի, շարժվում են անընդհատորեն:

Քանի որ $\varphi(x,\lambda)$ լուծման զրոները մեկուսացված կետեր են և ամեն մի վերջավոր λ-ի համար զրոների միջև եղած հեռավորությունը մեծ է որոշակի դրական թվից (եթե $m \le q(x) \le M$, ապա $\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda-m}} \le x_{k+1}(\lambda)-x_k(\lambda) \le \dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda-M}}$), ապա զրոների քանակը մնում է անփոփոխ λ պարամետրի որոշակի արժեքների համար:

Լեմմա 2.5: Նշանակենք λ^*-ով այն λ-ների վերին ճշգրիտ եզրը, որոնց համար $\varphi(x,\lambda)$ լուծումն $(a,b]$-ում ունի ճիշտ m հատ զրո: Այդ դեպքում $\varphi(x,\lambda^*)$ ֆունկցիան $(a,b]$-ում ունի ճիշտ $m+1$ զրո, որոնցից մեկը համընկնում է b-ի հետ, այսինքն՝ $\varphi(b,\lambda^*)=0$, իսկ մնացածը (a,b)-ում են:

Ապացույց: Առաջին հերթին ապացուցենք, որ $\varphi(x,\lambda^*)$ լուծումը (a,b) բաց միջակայքում չի կարող ունենալ m-ից ավելի զրոներ: Իրոք, դիցուք $\varphi(x,\lambda^*)$-ը

(a,b)-ում ունի $m+1$ (կամ ավելի) զրոներ: Համաձայն լեմմա 2.4-ի՝ գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ եթե $\lambda \in (\lambda^* - \delta, \lambda^*)$ միջակայքին, ապա $\varphi(x,\lambda)$ լուծումը (a,b)-ում նույնպես կունենա $m+1$ զրո, ինչը հակասում է λ^*-ի սահմանմանը: Այդտեղից հետևում է, որ $\varphi(x,\lambda^*)$-ը (a,b)-ում ունի $m-1$ կամ m զրո: Եթե այդ զրոների թիվը հավասար լինի $m-1$, ապա b թիվը (ծայրակետը) պարտադիր պետք է լինի զրոներից մեկը $(x_m = b)$, սակայն կրկին գալիս ենք հակասության, քանի որ այս դեպքում նույնպես (ըստ լեմմա 2.4-ի) գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ բոլոր $\lambda \in (\lambda^*, \lambda^* + \delta)$ λ-ների համար $\varphi(x,\lambda)$ լուծումն $(a,b]$-ում ունի m զրո, ինչը հակասում է λ^*-ի սահմանմանը: Այսպիսով՝ ապացուցվեց, որ $\varphi(x,\lambda^*)$-ը (a,b)-ում ունի ճիշտ m զրո: Մնում է ապացուցել, որ $\varphi(b,\lambda^*) = 0$, (այսինքն՝ $x_{m+1} = b$): Իրոք, եթե $\varphi(b,\lambda^*) \neq 0$, ապա համաձայն լեմմա 2.4-ի՝ գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ երբ $\lambda \in [\lambda^*, \lambda^* + \delta)$ $\varphi(x,\lambda)$-ն $(a,b]$-ում ունի m զրո, ինչը հակասում է λ^*-ի ընտրությանը: Լեմման ապացուցված է:

Այսպիսով՝ $\varphi(x,\lambda)$ լուծման զրոների քանակը աճում է մեկով, երբ նոր զրոն հայտնվում է b ծայրակետում:

Որպես օրինակ դիտարկենք (2.9), (2.16), (2.17) Կոշու խնդրի լուծումը $q(x) \equiv 0$, $\alpha = 0$ $(a = 0, b = \pi)$ մասնավոր դեպքում, այսինքն

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Կոշու խնդրի $y = \varphi(x,\lambda) = -\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$ լուծումը (ստուգել, որ $-\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$ ֆունկցիան իրոք այդ Կոշու խնդրի լուծումն է): Հիշելով $\sin x$ ֆունկցիայի Թեյլորի շարքը՝

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots,$$

նկատենք, որ

$$-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{\lambda}x-\frac{(\sqrt{\lambda})^3x^3}{3!}+\frac{(\sqrt{\lambda})^5x^5}{5!}-\ldots\right)=-x+\frac{\lambda x^3}{3!}-\frac{\lambda^2x^5}{5!}+\ldots+$$

$$+(-1)^k\cdot\frac{\lambda^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots\ldots,$$

այսինքն՝ $-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$ ֆունկցիան ողորկ է (նույնիսկ անվերջ դիֆերենցելի) ինչպես ըստ x-ի, այնպես էլ ըստ λ-ի, x-ի և λ-ի կամայական արժեքների համար:

Ուսումնասիրենք $\varphi(x,\lambda)=-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$ լուծման զրոները: $-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}=0$ հավասարման (x-ի նկատմամբ) լուծումներն են $x_n=x_n(\lambda)=\frac{\pi n}{\sqrt{\lambda}}$, $n\in\mathbb{Z}$ թվերը, որոնք λ պարամետրի ֆունկցիաներ են: Որպեսզի այս $x_n(\lambda)$-ները հայտնվեն $(0,\pi]$ կիսաբաց միջակայքում, պետք է տեղի ունենան $0<x_n(\lambda)=\frac{\pi n}{\sqrt{\lambda}}\le\pi$ անհավասարումները: Պարզ է, որ երբ $n\le 0$ և $\lambda\le 0$, այս անհավասարումները տեղի չունեն:

$\varphi(x,\lambda)=-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$ լուծման առաջին զրոն՝ $x_1(\lambda)=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, հայտնվում է $(0,\pi]$-ում, երբ λ պարամետրը ընդունում է $\lambda=1$ արժեք ($x_1(1)=\pi$) և λ-ի աճման ընթացքում $(1\le\lambda<\infty)$ այն շարժվում է դեպի ձախ՝ մնալով $(0,\pi]$-ում: Երկրորդ զրոն՝ $x_2(\lambda)=\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$, հայտնվում է $(0,\pi]$-ում, երբ λ-ն ընդունում է $\lambda=4$ արժեքը ($x_2(4)=\pi$) (այդ ժամանակ առաջին զրոն $x_1(\lambda)=x_1(4)=\frac{\pi}{2}$), և λ-ի աճման հետ նույնպես շարժվում է դեպի ձախ՝ միշտ մնալով $(0,\pi)$-ում: n-րդ զրոն հայտնվում է, երբ $\sqrt{\lambda}=n$, այսինքն՝ $\lambda=n^2$ արժեքի դեպքում և λ-ի աճման հետ նույնպես շարժվում է դեպի ձախ (նվազում է), մնալով $(0,\pi)$ միջակայքում:

Այս օրինակով ապացուցվեց, որ $L(0,0,0)$ խնդրի $((a,b)=(0,\pi))$ սեփական արժեքներն են $\lambda_n = n^2$, $n = 1,2,\ldots$, թվերը:

Դիցուք $m \le q(x) \le M$, երբ $x \in [a,b]$: Քանի որ $q \in C[a,b]$, ապա այդպիսի վերջավոր m և M թվեր գոյություն ունեն: Համեմատենք $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ հավասարումը $y'' + (\lambda - m)y = 0$ $(\lambda - q(x) \le \lambda - m)$ հավասարման հետ: $y'' + (\lambda - m)y = 0$ հավասարման լուծումը, որը բավարարում է $y(a) = \sin\alpha$, $y'(a) = -\cos\alpha$ սկզբնական պայմաններին ունի

$$y(x,\lambda) = \sin\alpha \cdot \frac{e^{\sqrt{m-\lambda}(x-a)} + e^{-\sqrt{m-\lambda}(x-a)}}{2} - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{m-\lambda}} \cdot \frac{e^{\sqrt{m-\lambda}(x-a)} - e^{-\sqrt{m-\lambda}(x-a)}}{2} =$$

$$= \sin\alpha \cdot ch\sqrt{m-\lambda}(x-a) - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{m-\lambda}} \cdot sh\sqrt{m-\lambda}(x-a)$$

տեսքը: Դժվար չէ ստուգել, որ բացասական և բացարձակ արժեքով բավականաչափ մեծ λ-ների համար այս ֆունկցիան $(a,b]$-ում զրոներ չունի: Համաձայն թեորեմ 1.2-ի՝ նույն λ-ների համար $\varphi(x,\lambda)$ ֆունկցիան նույնպես չունի զրոներ $(a,b]$-ում:

Համեմատելով $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ հավասարումը $y'' + (\lambda - M)y = 0$ հավասարման հետ $(\lambda - q(x) \ge \lambda - M)$ (ինչը կատարված է թեորեմ 1.3-ում), տեսնում ենք, որ $\varphi(x,\lambda)$ ֆունկցիայի զրոների քանակը $(a,b]$-ում λ պարամետրի աճման հետ գերազանցում է կամայական նախօրոք ընտրած թվից:

Համաձայն լեմմա 2.4-ի՝ $\varphi(x,\lambda)$ լուծման զրոները անընդհատ են կախված λ-ից: Մյուս կողմից՝ համաձայն թեորեմ 1.2-ի, երբ λ-ն աճում է, այդ զրոները շարժվում են դեպի ձախ, մնալով $(a,b]$-ում, քանի որ զրոների թիվը չի կարող նվազել: Համաձայն լեմմա 2.5-ի, նոր զրոները հայտնվում են $(a,b]$-ում «մտնելով» b կետից:

Դիցուք μ_0-ն λ պարամետրի առաջին արժեքն է, որի համար $\varphi(b,\mu_0) = 0$: Պարզ է, որ այդպիսի արժեք գոյություն ունի: $\varphi(x,\mu_0)$ ֆունկցիան (a,b) բաց միջակայքում ոչ մի զրո չունի: Դիցուք μ_1-ը λ պարամետրի երկրորդ արժեքն է, որի համար $\varphi(b,\mu_1)=0$: $\varphi(x,\mu_1)$ ֆունկցիան (a,b) միջակայքում ունի մեկ զրո: Եթե μ_n-ը λ պարամետրի $(n+1)$-րդ արժեքն է, որի համար $\varphi(b,\mu_n)=0$, ապա $\varphi(x,\mu_n)$ ֆունկցիան (a,b)-ում ունի n զրո: Քանի որ համաձայն թեորեմ 1.3-ի $\varphi(x,\lambda)$ լուծման զրոների թիվը անսահմանափակ աճում է երբ $\lambda\to\infty$ (և ամեն մի զրոն պարզ է կամայական վերջավոր λ-ի համար), ապա գոյություն ունեն հաշվելի թվով $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_n,\ldots$ թվեր այնպիսիք, որ $\varphi(b,\mu_k)=0$, $k=0,1,2,\ldots$, և $\mu_k\to\infty$ երբ $k\to\infty$:

Այսպիսով՝ ապացուցված է հետևյալ պնդումը.

Թեորեմ 2.1: Դիցուք $q\in C[a,b]$, $\alpha\in[0,\pi)$:

Այդ դեպքում $L(q,\alpha,0)$

$$\begin{cases} -y''+q(x)y=\lambda y \\ y(a)\cos\alpha+y'(a)\sin\alpha=0 \\ y(b)=0 \end{cases}$$

եզրային խնդիրն ունի հաշվելի թվով $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_n,\ldots$ սեփական արժեքներ, որոնք կազմում են անվերջի ձգտող հաջորդականություն, ըստ որում, μ_n սեփական արժեքին համապատասխանող $\varphi(x,\mu_n)$ սեփական ֆունկցիան (a,b) միջակայքում ունի ճիշտ n հատ զրո:

Ուրիշ խոսքով սեփական արժեքների գոյությունը ապացուցվեց $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի $\sin\beta=0$ դեպքում (նույնն է $L(q,\alpha,0)$ խնդրի համար):

Այժմ ապացուցենք, որ $L(q,\alpha,\beta)$ խնդիրը նույնպես ունի հաշվելի թվով սեփական արժեքներ, երբ β-ն կամայական կետ է $(0,\pi)$-ից:

Այս նպատակով $L(q,\alpha,0)$ խնդրի $\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_n,\cdots$ սեփական արժեքները նշանակենք $\mu_k=\lambda_k(0)$, $k=0,1,2,\cdots$, իսկ $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի սեփական արժեքները նշանակենք $\lambda_k(\beta)$, $k=0,1,2,\cdots$, ընդգծելով, որ նրանք կախված են β պարամետրից: Ըստ այդ նշանակման՝ $\mu_k=\lambda_k(0)$, $k=0,1,2,\cdots$,:

Թեորեմ 2.2: Կամայական $\beta\in(0,\pi)$ թվի համար $L(q,\alpha,\beta)$ խնդիրն ունի հաշվելի թվով սեփական արժեքներ, ըստ որում, $L(q,\alpha,0)$ և $L(q,\alpha,\beta)$ խնդիրների սեփական արժեքները մեկընդմիջվում են, այսինքն տեղի ունեն

$$\lambda_0(0)<\lambda_1(\beta)<\lambda_1(0)<\lambda_2(\beta)<\cdots<\lambda_n(0)<\lambda_n(\beta)<\lambda_{n+1}(0)<\cdots$$

առնչությունները:

Ապացույց: Դիտարկենք $f(\lambda)\equiv\dfrac{\varphi'(b,\lambda)}{\varphi(b,\lambda)}$ ֆունկցիան և ապացուցենք, որ $\lambda\in(\mu_{n-1},\mu_n)=(\lambda_{n-1}(0),\lambda_n(0))$ միջակայքում այն (խիստ) մոնոտոն նվազում է, այսինքն եթե $\mu_{n-1}<\lambda_1<\lambda_2<\mu_n$, ապա $f(\lambda_2)>f(\lambda_1)$: Եթե սա ապացուցվի, ապա քանի որ $\varphi(b,\mu_{n-1})=\varphi(b,\mu_n)=0$, իսկ $\varphi'(b,\mu_{n-1})\neq0$, $\varphi'(b,\mu_n)\neq0$, $f(\lambda)$ ֆունկցիան (μ_{n-1},μ_n) միջակայքում պետք է նվազի $+\infty$-ից մինչև $-\infty$, ընդունելով բոլոր իրական արժեքները (քանի որ այն անընդհատ է):

Մյուս կողմից, երբ β-ն փոփոխվում է $(0,\pi)$ միջակայքում $ctg\beta$-ն նույնպես ընդունում է ցանկացած իրական արժեք, յուրաքանչյուրը մեկ անգամ: Հետևաբար $(0,\pi)$ միջակայքին պատկանող ամեն մի β թվի համար կգտնվի (μ_{n-1},μ_n) միջակայքին պատկանող ճիշտ մեկ λ կետ այնպիսին, որ $f(\lambda)=-ctg\beta$: Նշանակելով այդ կետը $\lambda=\lambda_n(\beta)$, կստանանք, որ $f(\lambda_n(\beta))\equiv\dfrac{\varphi'(b,\lambda_n(\beta))}{\varphi(b,\lambda_n(\beta))}=-ctg\beta$, կամ $\varphi(b,\lambda_n(\beta))\cos\beta+\varphi'(b,\lambda_n(\beta))\sin\beta=0$, $n=1,2,3,\cdots$, ինչը նշանակում է, որ $\lambda_n(\beta)$ թիվը $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի սեփական արժեքն է:

Այսպիսով՝ թեորեմն ապացուցելու համար բավական է ապացուցել, որ $f(\lambda)\equiv\dfrac{\varphi'(b,\lambda)}{\varphi(b,\lambda)}$ ֆունկցիան մոնոտոն նվազում է $(\mu_{n-1},\mu_n)=(\lambda_{n-1}(0),\lambda_n(0))$, $n=1,2,3,\cdots$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում:

Նշանակենք $\varphi(x,\lambda_1)=u(x)$ և $\varphi(x,\lambda_2)=v(x)$, որտեղ $\mu_m<\lambda_1<\lambda_2<\mu_{m+1}$: Այդ դեպքում

$$\frac{d}{dx}\left\{u^2\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)\right\}=2uu'\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)+u^2\left(\frac{u''}{u}-\frac{v''}{v}\right)-u^2\left(\frac{u'^2}{u^2}-\frac{v'^2}{v^2}\right)=$$

$$=\frac{(u'v-v'u)^2}{v^2}+u^2(\lambda_2-\lambda_1)>0: \qquad (2.20)$$

Հետևաբար $u^2\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճում է կամայական միջակայքում, որտեղ $v(x)$-ը $\left(=\varphi(x,\lambda_2)\right)$ զրո չի դառնում: Նշանակենք x_ν-ով $u(x)$ ֆունկցիայի b-ին ամենամոտ զրոն $\left(u(x_\nu)=0\right)$: Քանի որ μ_m-ը և μ_{m+1}-ը $\varphi(b,\lambda)$ ֆունկցիայի հարևան զրոներն են, ապա $\varphi(b,\lambda_1)\neq 0$ և $\varphi(b,\lambda_2)\neq 0$: Բացի այդ, քանի որ $\lambda_2>\lambda_1$, $\varphi(x,\lambda_2)=v(x)$-ի զրոները գտնվում են ավելի ձախ, քան $\varphi(x,\lambda_1)=u(x)$-ի զրոները, այսինքն՝ $[x_\nu,b]$-ում $v(x)$-ը զրոներ չունի: Ինտեգրելով (2.20) առնչությունը x_ν-ից մինչև b, ստանում ենք

$$\int_{x_\nu}^{b}\frac{d}{dx}\left\{u^2\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)\right\}dx=u^2(b)\left\{\frac{u'(b)}{u(b)}-\frac{v'(b)}{v(b)}\right\}-u^2(x_\nu)\left\{\frac{u'(x_\nu)}{u(x_\nu)}-\frac{v'(x_\nu)}{v(x_\nu)}\right\}=$$

$$=u^2(b)\left\{\frac{u'(b)}{u(b)}-\frac{v'(b)}{v(b)}\right\}>0$$

այսինքն $f(\lambda_1)=\dfrac{\varphi'(b,\lambda_1)}{\varphi(b,\lambda_1)}>\dfrac{\varphi'(b,\lambda_2)}{\varphi(b,\lambda_2)}=f(\lambda_2)$

որն էլ նշանակում է, որ $\dfrac{\varphi'(b,\lambda)}{\varphi(b,\lambda)}=f(\lambda)$ ֆունկցիան մոնոտոն նվազում է (μ_m,μ_{m+1}) միջակայքում:

Թեորեմն ապացուցված է:

Վարժություններ

1. Գտնել

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y'(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

եզրային խնդրի սեփական արժեքները և սեփական ֆունկցիաները:

2. Ապացուցել, որ կամայական μ բացասական թվի համար գոյություն ունի $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ թիվ այնպիսին, որ այդ μ-ն հանդիսանում է $L(0, \alpha, \frac{\pi}{2})$ եզրային խնդրի սեփական արժեք:

3. Ապացուցել, որ կամայական իրական թիվ հանդիսանում է սեփական արժեք մի որևէ $L(0, \frac{\pi}{2}, \beta)$ եզրային խնդրի համար, այսինքն՝ $\forall \mu \in \mathbb{R}$ թվի համար $\exists \beta \in [0, \pi)$ այնպիսին, որ μ թիվը $L(0, \frac{\pi}{2}, \beta)$ խնդրի սեփական արժեք է:

§ 3. ՇՏՈՒՐՄ-ԼԻՈՒՎԻԼԻ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԽՆԴԻՐԸ ԵՎ ԳՐԻՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ

Դիտարկենք

$$\begin{cases} -y'' + q(x) = \lambda y + f(x) & (3.1) \\ y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 & (3.2) \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\cos\beta = 0 & (3.3) \end{cases}$$

եզրային խնդիրը, որտեղ $f(x)$ ազատ անդամը տրված անընդհատ ֆունկցիա է՝ $f \in C[a,b]$: Մյուս մեծությունները նույնն են, ինչ և §2-ում:

Ստորև բերվող թեորեմ 3.1-ում կտրվի այս անհամասեռ խնդրի լուծումը, այսպես կոչված Գրինի ֆունկցիայի միջոցով: Գրինի ֆունկցիան կառուցելու համար կատարենք որոշ նախնական ուսումնասիրություններ:

Նշանակենք $\psi(x,\lambda)$-ով

$$\begin{cases} ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y & (2.9) \\ y(b) = \sin\beta & (3.4) \\ y'(b) = -\cos\beta & (3.5) \end{cases}$$

Կոշու խնդրի լուծումը[1], իսկ $W(x,\lambda)$-ով $\psi(x,\lambda)$ և (2.9)-(2.16)-(2.17) Կոշու խնդրի $\varphi(x,\lambda)$ լուծման վրոնսկյանը՝

$$W(x,\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \varphi(x,\lambda) & \psi(x,\lambda) \\ \varphi'(x,\lambda) & \psi'(x,\lambda) \end{vmatrix} : \qquad (3.6)$$

Քանի որ φ և ψ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը (2.9) համասեռ հավասարման լուծում է, ապա համաձայն Լիուվիլի (5.12) (տե՛ս գլ. III, §5) բանաձևի $W(x,\lambda) = W(x_0,\lambda)$ (քանի որ y'-ի գործակիցը զրո է), այսինքն՝ այս վրոնսկյանը ըստ x-ի հաստատուն է: Այս փաստը ընդգծելու նպատակով հետագայում կօգտվենք $W(x,\lambda) = \omega(\lambda)$ նշանակումից:

Լեմմա 3.1: Եթե $\omega(\lambda_0) = 0$, ապա λ_0-ն $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի սեփական արժեք է և հակադարձը՝ եթե λ_0-ն $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի սեփական արժեք է, ապա $\omega(\lambda_0) = 0$: Այսպիսով՝ $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի սեփական արժեքների բազմությունը համընկնում է $\omega(\lambda)$ վրոնսկյանի զրոների բազմության հետ:

Ապացույց: Դիցուք $\omega(\lambda_0) = 0$, այսինքն՝ (3.6) վրոնսկյանը $\lambda = \lambda_0$ արժեքի դեպքում հավասար է զրոյի: Համաձայն լեմմա 5.3-ի (գլ. III) $\varphi(x,\lambda_0) = c\psi(x,\lambda_0)$, $(c \neq 0)$: Այստեղից հետևում է, որ և՛ $\varphi(x,\lambda_0)$-ն, և՛ $\psi(x,\lambda_0)$-ն $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի սեփական ֆունկցիաներ են[2], այսինքն՝ λ_0-ն սեփական արժեք է :

Դիցուք λ_0-ն սեփական արժեք է: Հետևաբար λ_0-ն $\varphi(b,\lambda)\cos\beta + \varphi'(b,\lambda)\sin\beta = 0$, ինչպես նաև $\psi(a,\lambda)\cos\alpha + \psi'(a,\lambda)\sin\alpha = 0$ հավասարման լուծում է: Այսպիսով՝ և՛ $\varphi(x,\lambda_0)$-ն, և՛ $\psi(x,\lambda_0)$-ն նույն λ_0 սեփական ար-

[1] Որոշ բանաձևերի համարակալումը կատարում ենք այնպես, որ ընդգծենք նրանց նույնությունը նախորդ բանաձևերի հետ:

[2] $\varphi(x,\lambda_0)$-ն (2.9) հավասարման լուծում է և բավարարում է (2.10) եզրային պայմանին (սա հետևում է (2.16) և (2.17)-ից: $\varphi(x,\lambda_0) = c\psi(x,\lambda_0)$-ից հետևում է (հաշվի առնելով (3.4)-ը և (3.5)-ը), որ $\varphi(x,\lambda_0)$-ն բավարարում է նաև (2.11) պայմանին, այսինքն՝ նա սեփական ֆունկցիա է:

ժեքին համապատասխանող սեփական ֆունկցիաներ են: Համաձայն լեմմա 2.3-ի՝ $\varphi(x,\lambda_0)$-ն և $\psi(x,\lambda_0)$-ն գծորեն կախված են՝ $\varphi(x,\lambda_0)=c\psi(x,\lambda_0)\quad(c\neq 0)$, որտեղից հետևում է, որ $\omega(\lambda_0)=0$: Լեմման ապացուցված է:

Սահմանենք

$$G(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\omega(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\psi(\xi,\lambda) & a\le x\le\xi\le b\\ -\dfrac{1}{\omega(\lambda)}\psi(x,\lambda)\varphi(\xi,\lambda) & a\le\xi\le x\le b\end{cases}\tag{3.7}$$

երեք փոփոխականի ֆունկցիան, որին կանվանենք $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի Գրինի ֆունկցիա: Ըստ x և ξ փոփոխականների՝ այն որոշված է $(x,\xi)\in[a,b]\times[a,b]$ քառակուսում, իսկ ըստ λ-ի՝ $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի սեփական արժեքներից տարբեր բոլոր կոմպլեքս λ-երի համար:

Թեորեմ 3.1: Եթե λ թիվը $L(q,\alpha,\beta)$ համասեռ խնդրի սեփական արժեք չէ, ապա կամայական $f\in C[a,b]$ ֆունկցիայի համար (3.1)-(3.3) եզրային խնդիրն ունի միակ լուծում, որը տրվում է

$$y(x,\lambda)\equiv\int_a^b G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\tag{3.8}$$

բանաձևով:

Ապացույց: Առաջին հերթին ստուգենք, որ (3.8) բանաձևով որոշված ֆունկցիան բավարարում է (3.1) հավասարմանը և (3.2),(3.3) եզրային պայմաններին: Այս նպատակով, օգտվելով (3.7) սահմանումից, գրենք (3.8)-ը

$$y(x,\lambda)\equiv-\frac{1}{\omega(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_a^x\varphi(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi+\varphi(x,\lambda)\int_x^b\psi(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right\}\tag{3.9}$$

տեսքով և հաշվենք $y(x,\lambda)$ ֆունկցիայի ածանցյալը ըստ x-ի (քանի որ աջ կողմում գրված արտահայտության ածանցյալը գոյություն ունի, ապա գոյություն ունի նաև $y'(x,\lambda)$-ն): Ստանում ենք.

$$y'(x,\lambda)\equiv-\frac{1}{\omega(\lambda)}\left\{\psi'(x,\lambda)\int_a^x\varphi(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi+\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)f(x)+\right.$$

$$+\varphi'(x,\lambda)\int_x^b \psi(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi-\varphi(x,\lambda)\psi(x,\lambda)f(x)\Bigg\}\equiv-\frac{1}{\omega(\lambda)}\Bigg\{\psi'(x,\lambda)\int_a^x\varphi(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi+$$

$$+\varphi'(x,\lambda)\int_x^b \psi(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\Bigg\}:$$

Ածանցելով երկրորդ անգամ՝ կստանանք.

$$y''(x,\lambda)\equiv-\frac{1}{\omega(\lambda)}\Bigg\{\psi''(x,\lambda)\int_a^x\varphi(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi+\psi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)f(x)+$$

$$+\varphi''(x,\lambda)\int_x^b\psi(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi-\varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda)f(x)\Bigg\} \tag{3.11}$$

Հաշվի առնելով $\psi''(x,\lambda)\equiv(q(x)-\lambda)\psi(x,\lambda)$,

$\varphi''(x,\lambda)\equiv(q(x)-\lambda)\varphi(x,\lambda)$ և $\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)-\psi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)\equiv\omega(\lambda)$

նույնությունները, (3.11) -ից ստանում ենք

$$y''(x,\lambda)\equiv-\frac{q(x)-\lambda}{\omega(\lambda)}\Bigg\{\psi(x,\lambda)\int_a^x\varphi(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi+\varphi(x,\lambda)\int_x^b\psi(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\Bigg\}-f(x)$$

նույնությունը, որը համարժեք է (տե՛ս (3.9))

$-y''(x,\lambda)+q(x)y(x,\lambda)\equiv\lambda y(x,\lambda)+f(x)$ նույնությանը: Այսպիսով (3.8) բանաձևով որոշված $y(x,\lambda)$ ֆունկցիան բավարարում է (3.1) հավասարմանը: Այժմ ապացուցենք, որ $y(x,\lambda)$ -ն բավարարում է եզրային պայմաններին:

Քանի որ $\varphi(x,\lambda)$ ֆունկցիան բավարարում է (2.16) և (2.17) սկզբնական պայմաններին, (3.9) և (3.10) բանաձևերից ստանում ենք.

$$y(a,\lambda)=-\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_a^b\psi(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\cdot\sin\alpha,$$

$$y'(a,\lambda)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_a^b\psi(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\cdot\cos\alpha$$

Այստեղից հետևում է, որ $y(x,\lambda)$ ֆունկցիան բավարարում է (3.2) եզրային պայմանին: Նմանապես, օգտվելով (3.4) և (3.5) սկզբնական պայմաններից, որոնց բավարարում է $\psi(x,\lambda)$ ֆունկցիան, (3.9) և (3.10) բանաձևերից ստանում ենք

$$y(b,\lambda) = -\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_a^b \varphi(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi \cdot \sin\beta$$

$$y'(b,\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_a^b \varphi(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi \cdot \cos\beta$$

արտահայտությունները, որոնցից հետևում է, որ $y(x,\lambda)$ ֆունկցիան բավարարում է նաև (3.3) եզրային պայմանին: Այսպիսով ապացուցված է, որ (3.8) բանաձևով որոշված $y(x,\lambda)$ ֆունկցիան (3.1)-(3.3) անհամասեռ եզրային խնդրի լուծում է: Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է ցույց տալ խնդրի լուծման միակությունը: Դիցուք բացի (3.8) բանաձևով որոշված $y(x,\lambda)$ լուծումից գոյություն ունի (3.1)-(3.3) խնդրի որևէ այլ՝ $y_1(x,\lambda)$ լուծում: Նշանակենք $u(x,\lambda) \equiv y(x,\lambda) - y_1(x,\lambda)$: Դեշտ է տեսնել, որ այս տարբերությունը պետք է լինի $L(q,\alpha,\beta)$ համասեռ խնդրի լուծում: Բայց (ըստ թեորեմի պայմանի) λ թիվը սեփական արժեք չէ, այսինքն այդ λ-ի համար $L(q,\alpha,\beta)$ համասեռ խնդիրն ունի միայն տրիվիալ (նույնաբար զրո) լուծում: Դետևաբար

$$u(x,\lambda) \equiv y(x,\lambda) - y_1(x,\lambda) \equiv 0:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Վարժություններ

3.1 Ապացուցել, որ

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

եզրային խնդրի Գրինի ֆունկցիան որոշվում է

$$G(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}\,x \cdot \sin\sqrt{\lambda}\,(1-\xi)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}, & 0 \le x \le \xi \le 1, \\[2ex] \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}\,\xi \cdot \sin\sqrt{\lambda}\,(1-x)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}, & 0 \le \xi \le x \le 1 \end{cases}$$

բանաձևով:

3.2 Ապացուցել, որ (3.7) բանաձևով որոշված $L(q,\alpha,\beta)$ խնդրի $G(x,\xi,\lambda)$ Գրինի ֆունկցիան ունի հետևյալ հատկությունները՝

1. $G(x,\xi,\lambda)$-ն անընդհատ ֆունկցիա է ըստ x և ξ փոփոխականների զույգի՝ որոշված $[a,b]\times[a,b]$ քառակուսում:

2. $$\frac{\partial G(\xi+0,\xi,\lambda)}{\partial x}-\frac{\partial G(\xi-0,\xi,\lambda)}{\partial x}=-1,$$

այսինքն մասնակի ածանցյալը ըստ x-ի $x=\xi$ կետում ունի թռիչք, որն հավասար է -1-ի:

3. Յուրաքանչյուր ξ-ի համար $[a,b]$-ից $G(x,\xi,\lambda)$-ն, որպես x փոփոխականի ֆունկցիա, բավարարում է (3.2), (3.3) եզրային պայմաններին և (2.9) համասեռ հավասարմանը $x\in(a,\xi)$ և $x\in(\xi,b)$ միջակայքերում:

§4. ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Դիցուք $\varphi\in C^{n-1}[a,b]$, այսինքն՝ φ ֆունկցիան և նրա՝ մինչև $n-1$-րդ կարգի ածանցյալները անընդհատ ֆունկցիաներ են, որոշված $[a,b]$ հատվածի վրա: Նկատենք, որ այստեղ $\varphi^{(k)}(a)$ և $\varphi^{(k)}(b)$ արժեքները $(k=1,2,\ldots,n-1)$ հասկացվում են համապատասխանաբար որպես աջակողմյան և ձախակողմյան ածանցյալներ:

Եզրային պայմաններ: $C^{n-1}[a,b]$ դասին պատկանող φ ֆունկցիայի համար դիտարկենք այդ ֆունկցիայի և նրա՝ մինչև $(n-1)$-րդ կարգի ածանցյալների արժեքները a և b ծայրակետերում, այսինքն՝ դիտարկենք

$$\varphi(a),\varphi'(a),\ldots,\varphi^{(n-1)}(a);\varphi(b),\varphi'(b),\ldots,\varphi^{(n-1)}(b) \tag{4.1}$$

արժեքները: Այնուհետև դիտարկենք այդ արժեքների գծային կոմբինացիան՝

$$\bigcup(\varphi)\equiv M_0\varphi(a)+M_1\varphi'(a)+\ldots+M_{n-1}\varphi^{(n-1)}(a)+N_0\varphi(b)+$$
$$+N_1\varphi'(b)+\ldots+N_{n-1}\varphi^{(n-1)}(b) \tag{4.2}$$

որտեղ M_k,N_k $(k=0,1,\ldots,n-1)$ գործակիցները տրված հաստատուններ են: Եթե γ-ն որևէ հաստատուն է, ապա

$$\text{Ս}(\varphi)=\gamma \tag{4.3}$$

պայմանը կոչվում է եզրային պայման (դրված φ ֆունկցիայի վրա):

Ուրիշ խոսքով, $C^{n-1}[a,b]$ դասին պատկանող ամեն մի ֆունկցիային համապատասխանության մեջ դնենք $\text{Ս}(\varphi)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(M_k\varphi^{(k)}(a)+N_k\varphi^{(k)}(b)\right)$ թիվը:

Այսպիսով որոշվում է մի Ս արտապատկերում, որը $C^{n-1}[a,b]$ դասի յուրաքանչյուր ֆունկցիայի համապատասխանության մեջ է դնում մի որոշակի $\text{Ս}(\varphi)$ թիվ[1]: Ասում են, որ φ ֆունկցիան բավարարում է (4.3) եզրային պայմանին, եթե $\text{Ս}(\varphi)=\gamma$, որտեղ γ-ն տրված հաստատուն է:

Հեշտ է տեսնել, որ Ս արտապատկերումը գծային է, այսինքն՝ տեղի ունեն

$$\text{Ս}(\varphi_1+\varphi_2)=\text{Ս}(\varphi_1)+\text{Ս}(\varphi_2), \tag{4.4}$$

$$\text{Ս}(\alpha\varphi)=\alpha\text{Ս}(\varphi), \quad \alpha\in\mathbb{C}, \tag{4.5}$$

առնչությունները (կամայական α կոմպլեքս թվի համար): Եթե ասում են, որ տրված են մի քանի

$$\text{Ս}_j(\varphi)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(M_{jk}\varphi^{(k)}(a)+N_{jk}\varphi^{(k)}(b)\right)=\gamma_j, \quad j=1,2,\ldots,m \tag{4.6}$$

եզրային պայմաններ, ապա ենթադրվում է, որ դրանք գծորեն անկախ են, այսինքն՝ Ս_j-երից ոչ մեկը մնացածների գծային կոմբինացիան չէ:

Օրինակ՝ $\text{Ս}_1(\varphi)\equiv\varphi(a)=3$, $\text{Ս}_2(\varphi)\equiv\varphi(b)=4$ և $\text{Ս}_3(\varphi)\equiv\varphi(a)+2\varphi'(b)=5$ եզրային պայմանները գծորեն անկախ են:

Դիցուք տրված են n հատ եզրային պայմաններ (այսինքն՝ (4.6)-ում $m=n$): Եթե նշանակենք $\vec{\text{Ս}}=\begin{pmatrix}\text{Ս}_1\\ \vdots\\ \text{Ս}_n\end{pmatrix}$, $\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}$, ապա (4.6) եզրային պայմանները կարելի է գրել

$$\vec{\text{Ս}}(\varphi)=\vec{\gamma} \tag{4.7}$$

[1] Արտապատկերումները, որոնք ֆունկցիային համապատասխանության մեջ են դնում որևէ թիվ, կոչվում են ֆունկցիոնալներ:

վեկտորական տեսքով: Եզրային պայմանները կոչվում են *համասեռ*, եթե $\vec{\gamma}=0$ $(\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_n=0)$ և *անհամասեռ*, եթե $\vec{\gamma}\neq 0$:

Եզրային խնդիր n-րդ կարգի

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)y=f(t) \tag{4.8}$$

գծային դիֆերենցիալ հավասարման համար $\left(a_i, f\in C[a,b],\ i=1,2,\ldots,n\right)$, կոչվում է հետևյալ խնդիրը՝ գտնել (4.8) հավասարման այն լուծումները, որոնք բավարարում են (4.6) եզրային պայմաններին ($m=n$ դեպքում), այսինքն՝

$$\begin{cases} y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)y=f(t) & (4.8)\\ \text{U}_j(y)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(M_{jk}y^{(k)}(a)+N_{jk}y^{(k)}(b)\right)=\gamma_j, \quad j=1,\ldots,n & (4.9)\end{cases}$$

խնդիրը:

Նշանակելով (4.8) հավասարման ձախ մասում գրված դիֆերենցիալ արտահայտությունը $l[y]$-ով և օգտվելով (4.7) վեկտորական նշանակումներից՝ (4.8)-(4.9) եզրային խնդիրը կարելի է գրել

$$l[y]=f(t), \quad \vec{\text{U}}(y)=\vec{\gamma} \tag{4.10}$$

տեսքով:

Նկատենք, որ սկզբնական պայմանները, որոնք դրվում են Կոշու խնդրում, հանդիսանում են եզրային պայմանների մասնավոր դեպքը: Օրինակ՝ $n=2$ դեպքում (4.8)-(4.9) եզրային խնդիրն ունի

$$\begin{cases} y''+a_1(t)y'+a_2(t)y=f(t),\\ \text{U}_1(y)\equiv M_{10}y(a)+M_{11}y'(a)+N_{10}y(b)+N_{11}y'(b)=\gamma_1,\\ \text{U}_2(y)\equiv M_{20}y(a)+M_{21}y'(a)+N_{20}y(b)+N_{21}y'(b)=\gamma_2\end{cases}$$

տեսքը: Եթե եզրային պայմաններում վերցնենք $M_{10}=M_{21}=1$, իսկ մնացած գործակիցները զրո, ապա կստանանք

$$\begin{cases} y''+a_1(t)y'+a_2(t)y=f(t)\\ y(a)=\gamma_1\\ y'(a)=\gamma_2\end{cases}$$

Կոշու խնդիրը:

Եզրային խնդիրը կարող է չունենալ լուծում, կարող է ունենալ միակ լուծում և կարող է ունենալ անվերջ թվով լուծումներ:

Օրինակ՝ դիտարկենք

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & (4.11) \\ y(0) = \gamma_1 & (4.12) \\ \gamma(\pi) = \gamma_2 & (4.13) \end{cases}$$

եզրային խնդիրը: (4.11) հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի $y(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ տեսքը: (4.12) եզրային պայմանից ստացվում է $y(0) = C_2 = \gamma_1$, իսկ (4.13)-ից՝ $y(\pi) = -C_2 = \gamma_2$: Այսպիսով, եթե $\gamma_2 \neq -\gamma_1$, եզրային խնդիրը լուծում չունի, իսկ եթե $\gamma_2 = -\gamma_1$, ապա եզրային խնդիրը ունի $y(t) = C_1 \sin t + \gamma_1 \cos t$ անվերջ քվով (C_1-ը կամայական է) լուծումներ:

Եթե (4.13) պայմանը փոխարինենք

$$y'(\pi) = \gamma_2 \tag{4.14}$$

եզրային պայմանով, ապա հեշտ է տեսնել, որ (4.11)-(4.12)-(4.14) եզրրային խնդիրը ունի միակ $y(t) = \gamma_1 \cos t - \gamma_2 \sin t$ լուծումը:

Եթե $f(t) \equiv 0$, $\vec{\gamma} = \vec{0}$ ապա (4.10) եզրային խնդիրը կոչվում է *համասեռ*: Հակառակ դեպքում այն կոչվում է անհամասեռ:

Համասեռ եզրային խնդիր

Դիտարկենք

$$l[y] = 0, \ \bar{U}(y) = 0, \tag{4.15}$$

համասեռ եզրային խնդիրը: Ակնհայտ է, որ $y(t) \equiv 0$ ֆունկցիան հանդիսանում է (4.15) համասեռ եզրային խնդրի լուծում: Ուսումնասիրենք այն հարցը, թե ինչ պայմանների դեպքում (4.15) խնդիրն ունի ոչ տրիվիալ (նույնաբար զրոյից տարբեր) լուծում: Պարզ է, որ Կոշու խնդրի դեպքում դա հնարավոր չէ լուծման միակության պատճառով:

Դիցուք $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ ֆունկցիաները կազմում են $l(y) = 0$ համասեռ հավասարման լուծումների հիմնարար համակարգ: Ընդհանուր լուծումը, ինչպես հայտնի է, ունի

$$y(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t)$$

տեսքը, որտեղ $C_1, C_2, \cdots, C_n$-ը կամայական հաստատուններ են: Եզրային պայմանները պահանջում են, որ տեղի ունենան

$$\bigcup_j(y)=\bigcup_j(C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+\cdots+C_n\varphi_n)=0\,,\quad j=1,\cdots,n\,,$$

առնչությունները, որոնք, համաձայն (4.4) և (4.5)-ի, կարելի է գրել

$$C_1\bigcup_j(\varphi_1)+C_2\bigcup_j(\varphi_2)+\cdots+C_n\bigcup_j(\varphi_n)=0\,,\quad j=1,\cdots,n \tag{4.16}$$

տեսքով: Ստացված (4.16) առնչությունները կազմում են գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ $C_1,C_2,\cdots,C_n$ հաստատունների (անհայտների) նկատմամբ և այդ համակարգի գլխավոր որոշիչն է

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}\bigcup_1(\varphi_1) & \cdots & \bigcup_1(\varphi_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \bigcup_n(\varphi_1) & \cdots & \bigcup_n(\varphi_n)\end{pmatrix}: \tag{4.17}$$

Հետևաբար՝ տեղի ունի հետևյալ պնդումը՝

Լեմմա 4.1: Որպեսզի (4.15) համասեռ եզրային խնդիրն ունենա ոչ տրիվիալ լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\Delta=0$:

Օրինակ՝ դիտարկենք

$$\begin{cases} y''+y=0 & (4.11)\\ U_1(y)\equiv y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0, \quad \alpha\in[0,\pi) & (4.18)\\ U_2(y)\equiv y(\pi)\cos\beta+y'(\pi)\sin\beta=0, \quad \beta\in[0,\pi) & (4.19)\end{cases}$$

համասեռ եզրային խնդիրը: Քանի որ (4.11) հավասարման հիմնարար համակարգ կազմում են $\varphi_1(t)=\sin t$, $\varphi_2(t)=\cos t$ ֆունկցիաները, ապա Δ որոշիչը այս դեպքում ունի

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}\bigcup_1(\sin t) & \bigcup_1(\cos t)\\ \bigcup_2(\sin t) & \bigcup_2(\cos t)\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\sin\beta & -\cos\beta\end{pmatrix}=\sin(\beta-\alpha)$$

տեսքը, և, հետևաբար, եզրային խնդիրն ունի ոչ տրիվիալ լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ $\beta=\alpha$: Դեշտ է համոզվել, որ այս ($\beta=\alpha$) դեպքում լուծումների թիվն անվերջ է:

Անհամասեռ եզրային խնդիր

Ընդհանրությունը չխախտելով՝ (4.10) անհամասեռ խնդրում եզրային պայմանը կարելի է համարել համասեռ, այսինքն՝ անհամասեռ եզրային խնդիրը միշտ կարելի է ուսումնասիրել

$$l[y] = f(t), \ \bar{U}(y) = 0, \tag{4.20}$$

տեսքով: Իրոք, դիցուք $C^n[a,b]$ դասին պատկանող v ֆունկցիան բավարարում է $\bar{U}(v) = \bar{\gamma}$ եզրային պայմանին[1]: Կատարելով

$$y_1(t) = y(t) - v(t)$$

անհայտ ֆունկցիայի փոխարինում՝ ստանում ենք

$$\begin{cases} l(y_1) = l(y) - l(v) = f(t) - l(v) = f_1(t) \\ U(y_1) = U(y) - U(v) = \gamma - \gamma = 0 \end{cases}$$

(4.20) տեսքի անհամասեռ եզրային խնդիր y_1 անհայտ ֆունկցիայի համար:

Սահմանում 4.1: (4.20) եզրային խնդրի Գրինի ֆունկցիա կոչվում է այն $G(t,s)$ երկու փոփոխականի ֆունկցիան, որը որոշված է $Q = \{(t,s) : a \le t \le b, \ a \le s \le b\}$ քառակուսու վրա և օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1. G ֆունկցիան և նրա մինչև $(n-2)$–րդ կարգի ածանցյալները ըստ t-ի անընդհատ են, այսինքն՝

$$G, \frac{\partial^k G}{\partial t^k} \in C(Q), \ \ k = 1,2,\ldots,n-2; \tag{4.21}$$

2. յուրաքանչյուր s-ի համար $[a,b]$-ից $G(t,s)$-ը ունի $n-1$ և n-րդ կարգի ածանցյալներ ըստ t-ի , որոնք անընդհատ են $[a,s)$-ում և $(s,b]$-ում, ընդ որում $(n-1)$-րդ կարգի ածանցյալը $t = s$ կետում ունի թռիչք, որը հավասար է 1-ի, այսինքն՝

$$\frac{\partial^{n-1} G(s+0,s)}{\partial t^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} G(s-0,s)}{\partial t^{n-1}} = 1, \tag{4.22}$$

3. յուրաքանչյուր s-ի համար $[a,b]$-ից $G(t,s)$-ը, որպես t փոփոխականի ֆունկցիա բավարարում է $U_j(G) = 0 \ \ (j = 1,2,\ldots,n)$ եզրային պայմաններին և $l[G] = 0$ հավասարմանը $t \in (a,s)$ և $t \in (s,b)$ միջակայքերում:

---

[1] Ապացուցել, որ այդպիսի v ֆունկցիա միշտ գոյություն ունի:

Թեորեմ 4.1: Եթե (4.15) համասեռ եզրային խնդիրն ունի միայն տրիվյալ (նույնաբար զրո) լուծում, ապա (4.20) խնդրի Գրինի ֆունկցիան գոյություն ունի և միակն է:

Ապացույց: Դիցուք $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)$ ֆունկցիաները $l[y]=0$ համասեռ հավասարման գծորեն անկախ լուծումներն են, այսինքն կազմում են հիմնարար համակարգ:

Քանի որ (հատկություն 3) $t\in[a,s)$ միջակայքում $G(t,s)$-ը բավարարում է $l[G]=0$ հավասարմանը, ապա

$$G(t,s)=a_1\varphi_1(t)+a_2\varphi_2(t)+\ldots+a_n\varphi_n(t)\,,\quad a\le t<s\,, \tag{4.23}$$

որտեղ $a_k=a_k(s)$ գործակիցները s փոփոխականի ֆունկցիաներ են: Նմանապես $t\in(s,b]$-ում

$$G(t,s)=b_1\varphi_1(t)+b_2\varphi_2(t)+\ldots+b_n\varphi_n(t)\,,\quad s<t\le b\,, \tag{4.24}$$

որտեղ $b_k=b_k(s)$, $k=1,2,\ldots,n$: $t=s$ կետում G ֆունկցիայի և նրա մինչև $(n-2)$-րդ կարգի ածանցյալների անընդհատությունից (տե՛ս (4.21)) a_k և b_k գործակիցների վրա ստացվում են հետևյալ պայմանները

$$\sum_{k=1}^{n}b_k(s)\varphi_k(s)-\sum_{k=1}^{n}a_k(s)\varphi_k(s)=0\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n}b_k(s)\varphi_k'(s)-\sum_{k=1}^{n}a_k(s)\varphi_k'(s)=0\,,$$

....

$$\sum_{k=1}^{n}b_k(s)\varphi_k^{(n-2)}(s)-\sum_{k=1}^{n}a_k(s)\varphi_k^{(n-2)}(s)=0:$$

Իսկ G ֆունկցիայի (4.22) հատկությունը կգրվի

$$\sum_{k=1}^{n}b_k(s)\varphi_k^{(n-1)}(s)-\sum_{k=1}^{n}a_k(s)\varphi_k^{(n-1)}(s)=1 \text{ տեսքով:}$$

Նշանակենք $c_k(s)=b_k(s)-a_k(s)$, $k=1,\ldots,n$: Այդ դեպքում վերը ստացված պայմանները կգրվեն

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} c_k(s)\varphi_k^{(m)}(s) = 0, & m = 0,1,\ldots,n-2 \\ \sum_{k=1}^{n} c_k(s)\varphi_k^{(n-1)}(s) = 1, & \end{cases} \tag{4.25}$$

հանրահաշվական հավասարումների համակարգի տեսքով, որի գլխավոր որոշիչն է $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ հիմնարար համակարգի վրոնսկյանը, վերցրած $t = s$ կետում: Քանի որ այդ վրոնսկյանը $[a,b]$-ի ոչ մի կետում զրո չի դառնում, ապա (4.25) համակարգից $c_k(s)$ գործակիցները որոշվում են միարժեք: a_k և b_k գործակիցները որոշելու համար նախ գրենք (4.8) եզրային պայմանները

$$\bigcup_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} M_{jk} y^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} N_{jk} y^{(k)}(b) \equiv \bigcup_{ja}(y) + \bigcup_{jb}(y) \tag{4.26}$$

տեսքով: Այս նշանակումներով $\bigcup_j(G) = 0$ պայմանը կգրվի

$$\bigcup_j(G) = \sum_{k=1}^{n} a_k(s)\bigcup_{ja}(\varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k(s)\bigcup_{jb}(\varphi_k) = 0,\ j = 1,2,\ldots,n ,$$

տեսքով: Տեղադրելով այստեղ $a_k = b_k - c_k$ ստանում ենք՝

$$\bigcup_j(G) = \sum_{k=1}^{n} b_k(s)\bigcup_{ja}(\varphi_k) - \sum_{k=1}^{n} c_k(s)\bigcup_{ja}(\varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k(s)\bigcup_{jb}(\varphi_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k(s)\left[\bigcup_{ja}(\varphi_k) + \bigcup_{jb}(\varphi_k)\right] - \sum_{k=1}^{n} c_k(s)\bigcup_{ja}(\varphi_k) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n:$$

Հաշվի առնելով (4.26)-ը՝ b_k անհայտների համար ստանում ենք

$$\sum_{k=1}^{n} b_k(s)\bigcup_j(\varphi_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k(s)\bigcup_{ja}(\varphi_k), \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{4.27}$$

հավասարումների համակարգը, որի գլխավոր որոշիչն է (4.17) բանաձևով որոշված Δ որոշիչը: Ըստ թեորեմի պայմանի՝ (4.15) համասեռ եզրային խնդիրն ունի միայն տրիվիալ լուծում: Համաձայն լեմմա 4.1-ի այստեղից հետևում է, որ $\Delta \neq 0$: Հետևաբար (4.27) համակարգն ունի միակ լուծում, այսինքն՝ $b_k(s)$, $k = 1,2,\ldots,n$ գործակիցները որոշվում են միարժեք (կամայական s-ի համար $[a,b]$-ից): Քանի որ c_k գործակիցները արդեն միարժեք որոշված են ((4.25) համակարգից), ապա

$a_k = b_k - c_k$ բանաձևից միարժեք որոշվում են $a_k(s)$ ֆունկցիաները և, հետևաբար, (4.23), (4.24) բանաձևերով միարժեք որոշվում է $G(t,s)$ Գրինի ֆունկցիան:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 4.2: Եթե (4.15) համասեռ խնդիրն ունի միայն տրիվյալ լուծում, ապա (3.20) խնդրի լուծումը գոյություն ունի, միակն է և տրվում է

$$y(t) = \int_a^b G(t,s) f(s) ds \tag{4.29}$$

բանաձևով:

Ապացույց: Նախ ցույց տանք, որ (4.29) բանաձևով որոշված $y(t)$ ֆունկցիան բավարարում է $l[y] = f(t)$ հավասարմանը: Քանի որ $G(t,s)$ Գրինի ֆունկցիան (համաձայն (4.21) հատկության) ըստ t ունի մինչև $(n-2)$-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ, ապա (4.29) բանաձևում կարելի է $n-2$ անգամ ածանցել ինտեգրալի նշանի տակ: Այսպիսով

$$y^{(k)}(t) = \int_a^b \frac{\partial^k G(t,s)}{\partial t^k} f(s) ds, \quad k = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{4.30}$$

ըստ որում $y(t)$ ֆունկցիան և նրա մինչև $(n-2)$-րդ կարգի ածանցյալները անընդհատ են $[a,b]$-ում: $\dfrac{\partial^{n-1} G(t,s)}{\partial t^{n-1}}$ ֆունկցիան $t = s$-ի դեպքում ունի խզում:

Այս պատճառով $y^{(n-1)}(t)$ և $y^{(n)}(t)$ ածանցյալները հաշվելու համար չի կարելի անմիջականորեն ածանցել ինտեգրալի նշանի տակ: Գրենք (4.30) բանաձևը $k = n-2$ դեպքում

$$y^{(n-2)}(t) = \int_a^t \frac{\partial^{n-2} G(t,\xi)}{\partial t^{n-2}} f(\xi) d\xi + \int_t^b \frac{\partial^{n-2} G(t,\xi)}{\partial t^{n-2}} f(\xi) d\xi \tag{4.31}$$

տեսքով: (a,t) և (t,b) միջակայքերից յուրաքանչյուրում ինտեգրալի նշանի տակ գրված ֆունկցիան և նրա ածանցյալը ըստ t-ի անընդհատ ֆունկցիաներ են: Հետևաբար, ածանցելով (4.31) բանաձևում ըստ t-ի (ինտեգրալի նշանի տակ, ըստ վերին և համապատասխանաբար, ըստ ստորին սահմանի), կստանանք

$$y^{(n-1)}(t) = \int_a^t \frac{\partial^{n-1} G(t,s)}{\partial t^{n-1}} f(s)ds + \left[\frac{\partial^{n-2} G(t,s)}{\partial t^{n-2}}\right]_{s=t} \cdot f(t) + \int_t^b \frac{\partial^{n-1} G(t,s)}{\partial t^{n-1}} f(s)ds -$$

$$-\left[\frac{\partial^{n-2} G(t,s)}{\partial t^{n-2}}\right]_{s=t} \cdot f(t): \tag{4.32}$$

Քանի որ $\frac{\partial^{n-2} G(t,s)}{\partial t^{n-2}}$ ածանցյալը անընդհատ է $t = s$-ի համար, ապա ինտեգրալներից դուրս գրված անդամները կոչնչացնեն միմյանց և կստացվի

$$y^{(n-1)}(t) = \int_a^t \frac{\partial^{n-1} G(t,s)}{\partial t^{n-1}} f(s)ds + \int_t^b \frac{\partial^{n-1} G(t,s)}{\partial t^{n-1}} f(s)ds, \tag{4.33}$$

կամ, որ նույնն է,

$$y^{(n-1)}(t) = \int_a^b \frac{\partial^{n-1} G(t,s)}{\partial t^{n-1}} f(s)ds \tag{4.34}$$

բանաձևը:

Ածանցելով (4.33) բանաձևը ևս մեկ անգամ՝ կստանանք.

$$y^{(n)}(t) = \int_a^t \frac{\partial^{n} G(t,s)}{\partial t^{n}} f(s)ds + \left[\frac{\partial^{n-1} G(t,s)}{\partial t^{n-1}}\right]_{s=t-0} \cdot f(t) + \int_t^b \frac{\partial^{n} G(t,s)}{\partial t^{n}} f(s)ds -$$

$$-\left[\frac{\partial^{n-1} G(t,s)}{\partial t^{n-1}}\right]_{s=t+0} \cdot f(t): \tag{4.36}$$

Համաձայն Գրինի ֆունկցիայի (4.22) հատկության, ինտեգրալներից դուրս գրված անդամների գումարը հավասար է $f(t)$ և հետևաբար (4.36) բանաձևը կարելի է գրել

$$y^{(n)}(t) = \int_a^b \frac{\partial^{n} G(t,s)}{\partial t^{n}} f(s)ds + f(t) \tag{4.37}$$

տեսքով:

Տեղադրելով $l[y] = y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y$ դիֆերենցիալ արտահայտության մեջ (4.29), (4.30), (4.34) և (4.37) ներկայացումները $y(t)$ ֆունկցիայի և նրա ածանցյալների համար, ստանում ենք

$$l[y] \equiv \int_a^b l[G] f(s) ds + f(t), \quad t \in (a,b)$$

նույնությունը: Բայց ինտեգրալը այս բանաձևում հավասար է զրոյի, քանի որ համաձայն Գրինի ֆունկցիայի 3-րդ հատկության $l[G] \equiv 0$, երբ $t \in (a,s)$ և $t \in (s,b)$ միջակայքերին: Այսպիսով ապացուցված է, որ (4.29) բանաձևով որոշված $y(t)$ ֆունկցիան $l[y] = f(t)$ հավասարման լուծում է:

Քանի որ $\bigcup_j(y)$ արտահայտությունները պարունակում են $y(t)$ ֆունկցիայի և նրա միայն մինչև $(n-1)$-րդ կարգի ածանցյալների արժեքները a և b կետերում, ապա (4.29), (4.30) և (4.34) բանաձևերից հետևում է, որ

$$\bigcup_j(y) = \int_a^b \bigcup_j(G) \cdot f(s) ds, \quad j = 1, \dots, n: \tag{4.38}$$

Գրինի ֆունկցիայի $\bigcup_j(G) = 0$ հատկությունից և (4.38) բանաձևերից ստանում ենք, որ $\bigcup_j(y) = 0$, $j = 1, \dots, n$, այսինքն՝ (4.29) բանաձևով որոշված ֆունկցիան բավարարում է (4.20) խնդրի եզրային պայմաններին:

Մնում է ապացուցել լուծման միակությունը:

Եթե (4.20) ունենա երկու լուծում, ապա հեշտ է տեսնել, որ այդ լուծումների տարբերությունը կհանդիսանա (4.15) համասեռ խնդրի լուծում, որը, ըստ թեորեմի պայմանի, կարող է լինել միայն նույնաբար զրո ֆունկցիան: Հետևաբար (4.20) խնդրի կամայական երկու լուծում համընկնում են: Թեորեմն ապացուցված է:

ԳԼՈՒԽ V

ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԻ ԱՊԱՑՈՒՅՑՆԵՐ

§ 1. ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԻ ԱՊԱՑՈՒՅՑԸ $y' = f(t, y)$ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ: ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ԵՂԱՆԱԿ

Այստեղ մեր նպատակն է ապացուցել առաջին գլխում ձևակերպած Կոշու խնդրի լուծման գոյության և միակության թեորեմը:

Քանի որ այս հիմնարար արդյունքը ունի բազմաբնույթ կիրառություններ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության մեջ և բնագիտության տարբեր հարցերում, վերջին երկու հարյուրամյակում այդ հարցին նվիրվել են բազմաթիվ ուսումնասիրություններ, որոնց արդյունքում մի կողմից ծնվել են Կոշու-Պիկարի-Պեանոյի դասական թեորեմների տարաբնույթ ապացույցներ, մյուս կողմից՝ այդ հիմնարար արդյունքն ունեցել է ամենատարբեր ընդհանրացումներ:

Այս գլխում կբերվեն նշված թեորեմի երկու, չնայած արտաքնապես տարբեր, բայց իրենց խորքում նույն աղբյուրից սնվող ապացույցներ (հաջորդական մոտարկումների եղանակ, սեղմող արտապատկերումների սկզբունք): Ըստ որում, այստեղ ապացուցվող Կոշու-Պիկարի թեորեմն առաջին գլխում ձևակերպած Կոշու թեորեմի ընդհանրացումն է: Այդ պնդումը ձևակերպելու համար անհրաժեշտ է ներմուծել որոշ օժանդակ գաղափարներ:

1°. Լիպշիցի դասը

Սահմանում 1.1: Կասենք որ $[a,b]$ հատվածում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի պայմանին, եթե գոյություն ունի այնպիսի $L = L(f)$ դրական հաստատուն (այսուհետ այն կանվանենք Լիպշիցի հաստատուն) այնպիսին, որ $[a,b]$ միջակայքի ցանկացած x_1, x_2 կետերի համար՝

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|: \tag{1.1}$$

Նշանակենք $Lip[a,b]$-ով $[a,b]$ միջակայքում Լիպշիցի պայմանին բավարարող ֆունկցիաների դասը: Պարզենք, թե ինչ հարաբերակցության մեջ է գտնվում $Lip[a,b]$ դասը մեզ ծանոթ $C^k[a,b]$ դասերի հետ:

Լեմմա 1.1: Կամայական $[a,b]$ սահմանափակ հատվածի համար՝

$$C^1[a,b] \subset Lip[a,b] \subset C[a,b]$$

Ապացույց. (1.1) անհավասարությունից անմիջապես բխում է, որ Լիպշիցի պայմանին բավարարող ցանկացած ֆունկցիա հավասարաչափ անընդհատ է $[a,b]$-ում, հետևաբար $Lip[a,b]\subset C[a,b]$:

Այժմ ցույց տանք, որ ցանկացած անընդհատ դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիա որոշված $[a,b]$-ում, բավարարում է Լիպշիցի պայմանին: Եթե $f\in C^1[a,b]$, ապա $f'(x)$-ը սահմանափակ է $[a,b]$-ում: Նշանակենք $\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|=M$: Ըստ Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևի՝ $[a,b]$ միջակայքի ցանկացած x_1,x_2 կետերի համար տեղի ունի

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)||x_1-x_2|\le M|x_1-x_2| \qquad \xi\in(x_1,x_2)$$

գնահատականը: Այսինքն՝ տեղի ունի (1.1) անհավասարությունը $L=M$ Լիպշիցի հաստատունով: Լեմման ապացուցված է:

Դիտողություն 1.1. Յամոզվելու համար, որ ներդրվող բազմությունները սեփական ենթաբազմություններ են, նկատենք (ստուգել), որ օրինակ

$$f_1(x)=\sqrt{x}\in C[0,1],\quad f_1\notin Lip[0,1], \text{ և որ } f_2(x)=|x|\in Lip[-1,1],$$

$$f_2\notin C^1[-1,1]:$$

Սահմանում 1.2: Կասենք, որ Ω տիրույթում որոշված $f(t,y)$ ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի պայմանին ըստ y փոփոխականի (հավասարաչափ t փոփոխականի նկատմամբ), եթե գոյություն ունի $L=L(f,\Omega)>0$ հաստատուն այնպիսին, որ ցանկացած $(t,y_1),(t,y_2)\in\Omega$ կետերի համար

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le L|y_1-y_2| \tag{1.1'}$$

Լեմմա 1.2: Եթե Ω-ում որոշված $f(t,y)$ ֆունկցիան ըստ t-ի անընդհատ է, իսկ ըստ y-ի բավարարում է Լիպշիցի պայմանին (հավասարաչափ t փոփոխականի նկատմամբ), ապա այն անընդհատ է Ω-ում:

Ապացույց: Ցույց տանք $f(t,y)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը Ω-ի կամայական (t_0,y_0) կետում: Վերցնենք ցանկացած $\varepsilon>0$ թիվ և ընտրենք

$\delta = \delta(t_0, y_0, \varepsilon) > 0$ թիվն այնպես, որ երբ $|t - t_0| < \delta$ և $|y - y_0| < \delta$ $|f(t,y) - f(t_0, y_0)| < \varepsilon$ ։ Ըստ եռանկյան անհավասարության

$$|f(t,y) - f(t_0, y_0)| \le |f(t,y) - f(t, y_0)| + |f(t, y_0) - f(t_0, y_0)|$$

Օգտվելով Լիպշիցի (1.1) պայմանից առաջին գումարելու համար կունենանք

$$|f(t,y) - f(t, y_0)| \le L|y - y_0|$$

անհավասարությունը, որի աջ մասը փոքր է $\frac{\varepsilon}{2}$-ից, երբ $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{2L}$ ։ Քանի որ $f(t,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է ըստ t-ի, ուրեմն տվյալ $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta_2 \equiv \delta_2(t_0, y_0, \varepsilon) > 0$ թիվ այնպիսին, որ երբ $|t - t_0| < \delta_2$, $|f(t_0, y_0) - f(t, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ։ Այժմ ընտրելով $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ կունենանք

$$|f(t,y) - f(t_0, y_0)| < \varepsilon, \text{ երբ } |t - t_0| < \delta \text{ և } |y - y_0| < \delta ։$$

Այսինքն $f(t,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(t_0, y_0) \in \Omega$ կետում։ Քանի որ (t_0, y_0)-ն Ω տիրույթի կամայական կետ է, ապա լեմման ապացուցված է։

2^0 Գրոնուոլի անհավասարությունը

Ինտեգրալային անհավասարությունների տեսությունը մաթեմատիկայի կարևոր բնագավառներից է։ Այս անհավասարություններն ունեն մեծաքիվ կիրառություններ։ Այստեղ մենք կապացուցենք նման մի անհավասարություն, որը պատմականորեն սկիզբ է դրել ինտեգրալային անհավասարությունների տեսությանը և մեր կողմից կկիրառվի միակության և այլ թեորեմների ապացույցներում։

Լեմմա 1.3։ **(Գրոնուոլ) Դիցուք $[a,b]$ հատվածում անընդհատ u և v ոչ բացասական ֆունկցիաները և C ոչ բացասական թիվը բավարարում են**

$$v(x) \le C + \int_a^x v(t)u(t)dt, \qquad x \in [a,b] \tag{1.2}$$

անհավասարությանը։ Այդ դեպքում

$$v(x) \le C \exp \int_a^x u(t)dt ։ \tag{1.3}$$

Մասնավորապես, եթե $C = 0$, ապա $v(x) \equiv 0$ ։

Ապացույց: Դիտարկենք երկու դեպք.

ա) $C>0$: Նշանակենք՝

$$w(x)=C+\int_a^x v(t)u(t)dt:$$

Քանի որ u-ն և v-ն անընդհատ են $[a,b]$-ում, ապա $w(x)$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է $[a,b]$-ում և

$$w'(x)=v(x)\cdot u(x): \tag{1.4}$$

Ըստ (1.2) անհավասարության $v(x)\le w(x)$ $[a,b]$-ում: Այստեղից, (1.4) առնչությունից և $u(x)$ ֆունկցիայի ոչ բացասականությունից, կունենանք՝

$$w'(x)=v(x)\cdot u(x)\le w(x)\cdot u(x),\quad x\in[a,b]$$

դիֆերենցիալ անհավասարությունը:

Քանի որ $w(x)\ge C>0$ $[a,b]$-ում, ապա բաժանելով ստացված անհավասարության երկու մասերը $w(x)$-ի վրա, կունենանք՝

$$\frac{w'(x)}{w(x)}\le u(x),\ x\in[a,b]:$$

Ինտեգրելով այս առնչությունը (a,x) միջակայքում $(a<x<b)$, կստանանք՝

$$\ln w(x)-\ln w(a)\le\int_a^x u(t)dt:$$

Հաշվի առնելով, որ $w(a)=C$, այստեղից կունենանք

$$\ln w(x)\le\ln C+\int_a^x u(t)dt$$

կամ

$$w(x)\le C\exp\int_a^x u(t)dt$$

անհավասարությունը, որն էլ ապացուցում է լեմման $C>0$ դեպքում:

բ) $C=0$: Վերցնենք որևէ ոչ բացասական զրոյի ձգտող $\{C_n\}$ թվային հաջորդականություն: Ըստ (1.2) պայմանի՝ յուրաքանչյուր n-ի համար տեղի ունի

$$v(x) \le \int_a^x v(t)u(t)dt \le C_n + \int_a^x v(t)u(t)dt\,,\, x \in [a,b]; n = 1,2\cdots$$

անհավասարությունը: Հետևաբար ըստ քննարկված դեպքի և շնորհիվ նրա, որ u-ն ոչ բացասական ֆունկցիա է $[a,b]$ հատվածում, կունենանք՝

$$0 \le v(x) \le C_n \cdot \exp\int_a^x u(t)dt \le C_n \exp\int_a^b u(t)dt \le C_n \exp(M(b-a)),$$

$$n = 1,2,\cdots$$

որտեղ $M = \max\limits_{x \in [a,b]} u(x)$:

Քանի որ $C_n \to 0$, երբ $n \to \infty$, այստեղից կստանանք, որ $v(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$: Լեմման ապացուցված է:

3° Ինտեգրալային հավասարումներ

Ինտեգրալային հավասարում կանվանենք

$$y(t) = c(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

տեսքի առնչությունը, որտեղ $f(t,y), a(t), b(t), c(t)$-ն տրված անընդհատ ֆունկցիաներ են, իսկ $y(t)$-ն որոնելի ֆունկցիա է, որը հանդես է գալիս նաև ինտեգրալի նշանի տակ: Ինտեգրալային հավասարման լուծում կանվանենք այն $y = \varphi(t)$ անընդհատ ֆունկցիան, որի տեղադրումը հավասարման մեջ դարձնում է այն նույնություն ըստ t փոփոխականի:

Այժմ դիտարկենք

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & (t,y) \in \Omega & (1.5) \\ y(t_0) = y_0, & (t_0, y_0) \in \Omega & (1.6) \end{cases}$$

Կոշու խնդիրը, որտեղ $f(t,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է Ω տիրույթում: Պարզվում է, որ կա անմիջական կապ ինտեգրալային հավասարման և Կոշու խնդրի միջև: Ստույգը տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 1.4 (Համարժեքության լեմմա): Կոշու (1.5), (1.6) խնդրի յուրաքանչյուր $y = \varphi(t)$ լուծում, որոշված (α, β) միջակայքում, լուծում է նաև

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau, \qquad t, t_0 \in (\alpha, \beta) \tag{1.7}$$

ինտեգրալային հավասարման համար և հակադարձը՝ (1.7) հավասարման յուրաքանչյուր լուծում, որոշված (α,β)-ում, լուծում է նաև (1.5), (1.6) Կոշու խնդրի համար:

Ապացույց: Դիցուք $y = \varphi(t)$ ֆունկցիան (1.5), (1.6) խնդրի լուծում է (α,β) միջակայքում, այսինքն՝

$$\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t)) \quad t \in (\alpha, \beta) \tag{1.8}$$

$$\varphi(t_0) = y_0 : \tag{1.9}$$

Ինտեգրելով (1.8) նույնությունը (t_0, t) $(\alpha < t_0 < t < \beta)$ միջակայքում և հաշվի առնելով (1.9) պայմանը՝ կունենանք.

$$\varphi(t) \equiv y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau, \qquad t \in (\alpha, \beta) \tag{1.10}$$

նույնությունը, որը նշանակում է, որ $\varphi(t)$ ֆունկցիան (1.7) հավասարման լուծում է:

Հակադարձը, եթե $\varphi(t)$-ն (1.7) ինտեգրալային հավասարման լուծում է, այսինքն տեղի ունի (1.10) նույնությունը, ապա ածանցելով այն ըստ t-ի (հաշվի առնելով $f(t, \varphi(t))$ ֆունկցիայի անընդհատությունը), կստանանք (1.8) նույնությունը: Տեղադրելով $t = t_0$ (1.10)-ի մեջ՝ կունենանք (1.9) հավասարությունը, այսինքն՝ $\varphi(t)$-ն (1.5), (1.6) խնդրի լուծում է: Լեմման ապացուցված է:

Այժմ արդեն մենք կարող ենք ձևակերպել այս դասընթացի հիմնարար արդյունքներից մեկը.

Թեորեմ 1.1. (Կոշի-Պիկար). Դիցուք $f(t, y)$ ֆունկցիան Ω տիրույթում անընդհատ է ըստ t փոփոխականի և բավարարում է Լիպշիցի պայմանին ըստ y փոփոխականի (հավասարաչափ t-ի նկատմամբ): Այդ դեպքում

ա) գոյություն ունեն $\alpha > 0$ թիվ և $\varphi(t)$ ֆունկցիա այնպիսիք, որ $y = \varphi(t)$ ֆունկցիան $[t_0 - \alpha,\ t_0 + \alpha]$ հատվածում հանդիսանում է (1.5), (1.6) Կոշու խնդրի լուծում:

բ) այդ լուծումը միակն է հետևյալ իմաստով. եթե $\varphi(t)$ ֆունկցիան (1.5), (1.6) խնդրի լուծում է (α_1, β_1) միջակայքում, իսկ $\psi(t)$-ն՝ լուծում է (α_2, β_2) միջակայքում, ապա այդ լուծումները համընկնում են իրենց որոշման տիրույթների ընդհանուր մասում:

Ապացույց: Ըստ համարժեքության լեմմայի՝ (1.5), (1.6) Կոշու խնդրի լուծման գոյությունը և միակությունը համարժեք է (1.7) ինտեգրալային հավասարման լուծման գոյությանն ու միակությանը: Այդ ինտեգրալային հավասարման լուծման գոյությունը կապացուցենք հաջորդական մոտարկումների (կամ Պեանոյի) եղանակով:

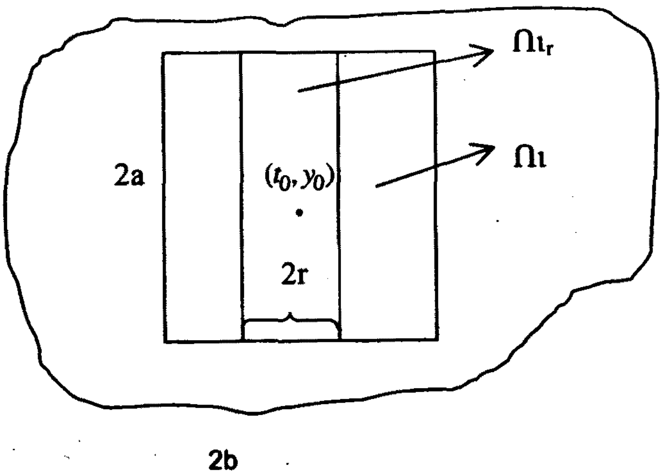
Քանի որ (t_0, y_0)-ն Ω բաց բազմության կետ է, ապա գոյություն ունի

$\text{Ու}=\{(t, y),\quad |t-t_0|\le b,\quad |y-y_0|\le a\ \}$ ուղղանկյուն, որն ընկած է Ω-ի մեջ:

Ու ուղղանկյան հետ միասին դիտարկենք r պարամետրից կախված

$\text{Ու}_r=\{(t, y),\quad |t-t_0|\le r\le b,\quad |y-y_0|\le a\ \}$ ուղղանկյունը:

Նկատենք, որ թեորեմի պայմաններից և լեմմա 1.2-ից բխում է,



որ f ֆունկցիան անընդհատ է Ω-ում, իսկ քանի որ Ու-ն փակ սահմանափակ բազմություն է, ապա f-ը սահմանափակ է Ու-ում: Նշանակենք $M=\max\limits_{(t,y)\in\text{Ու}}|f(t,y)|$

Φ_r-ով նշանակենք $[t_0-r, t_0+r]$ միջակայքում որոշված այն անընդհատ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց գրաֆիկներն ընկած են Ու$_r$ ուղղանկյան մեջ, այսինքն՝ $\varphi\in\Phi_r$, եթե φ-ն անընդհատ է $[t_0-r, t_0+r]$-ում և $|\varphi(t)-y_0|\le a$, երբ $t\in[t_0-r, t_0+r]$:

Մեր նպատակն է կառուցել Φ_r-ին պատկանող ֆունկցիաների այնպիսի հավասարաչափ զուգամետ $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \ldots$ հաջորդականություն, որի սահմանը հանդիսանա (1.7) հավասարման լուծում: Այդ հաջորդականության տարրերը կանվանենք (1.7) խնդրի լուծման հաջորդական մոտարկումներ, ըստ որում φ_0-ն՝ զրոյական մոտարկում, φ_1-ը՝ առաջին մոտարկում և այլն:

Որպես զրոյական մոտարկում վերցնենք $\varphi_0(t) \equiv y_0$ ֆունկցիան $(\varphi_0 \in \Phi_r)$:

Նախ նկատենք, որ ըստ Φ_r-ի սահմանման $(t,\varphi_0(t)) \in \Pi_r \subset \Omega$, երբ $t_0 - r \le t \le t_0 + r$, ուրեմն կարելի է (1.7) հավասարման աջ մասում y-ի փոխարեն տեղադրել φ_0: Նշանակենք՝

$$\varphi_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi_0(\tau))d\tau:$$

Փորձենք այժմ r պարամետրը ընտրել այնպես, որ φ_1-ը ևս պատկանի Φ_r-ին, այսինքն, որպեսզի այն բավարարի $|\varphi_1(t) - y_0| \le a$ պայմանին, երբ $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$:

Քանի որ $\varphi_0 \in \Phi_r$, այսինքն $(t,\varphi_0(t)) \in \Pi_r \subset \Pi$ և $|f(t,\varphi_0(t))| \le M$, ապա

$$|\varphi_1(t) - y_0| \le \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi_0(\tau))d\tau\right| \le M|t - t_0| \le M \cdot r:$$

Ընտրելով $r \le \dfrac{a}{M}$, կունենանք՝ $|\varphi_1(t) - y_0| \le a$, այսինքն՝ $\varphi_1 \in \Phi_r$:

Հետագա շարունակության համար նկատենք, որ եթե $r \le \dfrac{a}{M}$, ապա Φ_r դասին պատկանող ցանկացած φ ֆունկցիայի համար $\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau\right) \in \Phi_r$:

Առաջին մոտարկումը կառուցելուց հետո կառուցենք երկրորդ մոտարկումը հետևյալ կերպ՝

$$\varphi_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_1(\tau))d\tau :$$

Քանի որ $\varphi_1 \in \Phi_r$, ապա ըստ r-ի ընտրության և վերը ասվածի φ_2-ը ևս Φ_r-ից է: Այս կերպ կառուցենք

$$\varphi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_{n-1}(\tau))d\tau, \quad n = 1,2,\cdots \tag{1.11}$$

ֆունկցիաների հաջորդականությունը:

Այսպիսով ստացանք $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի գրաֆիկն ընկած է Ω_r-ում: Նշանակենք $\alpha = \min\left\{b, \dfrac{a}{M}\right\}$ և ցույց տանք, որ $\{\varphi_n(t)\}$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է $[t_0 - \alpha,\ t_0 + \alpha]$-ում: Քանի որ

$$\varphi_n(t) = \varphi_0(t) + (\varphi_1(t) - \varphi_0(t)) + \cdots + (\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)),$$

ապա $\{\varphi_n(t)\}$ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտությունը նշված հատվածում համարժեք է

$$\varphi_0(t) + (\varphi_1(t) - \varphi_0(t)) + \cdots + (\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)) \cdots \tag{1.12}$$

ֆունկցիոնալ շարքի հավասարաչափ զուգամիտությանը այդ հատվածում: Ստացված (1.12) շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը ցույց տալու համար գնահատենք $(\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t))$ տարբերությունը $(n = 1,2,\cdots)$:

Քանի որ $|f(t, \varphi_0(t)| \le M$, $t \in [t_0 - \alpha,\ t_0 + \alpha]$, ապա

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \le \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_0(\tau))d\tau \right| \le M|t - t_0| :$$

Օգտվելով այս անհավասարությունից և կիրառելով Լիպշիցի պայմանը՝ կունենանք՝

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| \le \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_1(\tau))d\tau - f(\tau, \varphi_0(\tau))d\tau \right| \le$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} \left| f(\tau,\varphi_1(\tau))d\tau - f(\tau,\varphi_0(\tau))\right| d\tau\right| \leq L\left|\int_{t_0}^{t} \left|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)\right| d\tau\right| \leq$$

$$\leq LM\int_{t_0}^{t} \left|\tau - t_0\right| d\tau = LM\,\frac{\left|t-t_0\right|^2}{2!}:$$

Ինդուկցիայի եղանակով ցույց տանք, որ տեղի ունեն հետևյալ գնահատականները՝

$$\left|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)\right| \leq L^{n-1}M\,\frac{\left|t-t_0\right|^n}{n!}, \quad n=1,2,\cdots \ : \qquad (1.13)$$

Քանի որ (1.13) գնահատականը ճիշտ է $n=1$ դեպքում, ցույց տանք, որ $n=k$-ի դեպքում ճիշտ լինելուց բխում է, որ այն ճիշտ է նաև $n=k+1$-ի համար:

Ունենք

$$\left|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \left| f(\tau,\varphi_k(\tau))-f(\tau,\varphi_{k-1}(\tau))\right| d\tau\right| \leq$$

$$\leq L\left|\int_{t_0}^{t} \left|\varphi_k(\tau)-\varphi_{k-1}(\tau)\right| d\tau\right| \leq \frac{L^k M}{k!}\left|\int_{t_0}^{t} \left|\tau - t_0\right|^k d\tau\right| = \frac{L^k M}{(k+1)!}\left|t-t_0\right|^{k+1}:$$

Հետևաբար, ըստ ինդուկցիոն ենթադրության (1.13) անհավասարությունը ճիշտ է բոլոր n-երի համար $n=1,2,\cdots$:

Եթե այժմ $t\in\left[t_0-\alpha,t_0+\alpha\right]$, ապա (1.13) անհավասարությունից կունենանք

$$\left|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)\right| \leq \frac{M}{L}\cdot\frac{(L\alpha)^n}{n!} \qquad (1.14)$$

գնահատականը: Քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(L\alpha)^n}{n!}$ թվային շարքը, որը հանդիսանում է (1.12) ֆունկցիոնալ շարքի մաժորանտը $\left[t_0-\alpha,t_0+\alpha\right]$-ում, զուգամետ է, $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(L\alpha)^n}{n!}=e^{L\alpha}-1\right)$, ապա ըստ շարքերի հավասարաչափ զուգամիտության մասին Վայերշտրասի թեորեմի (1.12) շարքը, հետևաբար նաև $\varphi_n(t)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում են $[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$-ում: $\{\varphi_n(t)\}$ հաջորդականության սահմանը $[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$-ում նշանակենք $\varphi(t)$-ով: Զուգամիտության հավասարաչափությունից բխում է, որ $\varphi(t)$-ն եւ անընդհատ է $[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$-ում, և քանի որ յուրաքանչյուր n-ի համար $|\varphi_n(t)-y_0|\le a$, $t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$, ապա $|\varphi(t)-y_0|\le a$, $t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$, այսինքն՝ $\varphi(t)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը եւ դուրս չի գալիս Π_α-ից: Ուրեմն $\varphi\in\Phi_\alpha$:

Ցույց տանք, որ $\varphi(t)$ սահմանային ֆունկցիան հանդիսանում է (1.7) ինտեգրալային հավասարման լուծում: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ (1.11) առնչությունում կարելի է անցնել սահմանի, երբ $n\to\infty$: Իրոք, քանի որ $\varphi_n(t)$-ն հավասարաչափ զուգամիտում է $\varphi(t)$-ին $[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$-ում, հետևաբար յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $N(\varepsilon)$ թիվ այնպիսին, որ $|\varphi_n(t)-\varphi(t)|<\dfrac{\varepsilon}{L\alpha}$, երբ $n>N(\varepsilon)$, $t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$: Օգտվելով Լիպշիցի պայմանից՝ նշված պայմանին բավարարող n-երի համար կունենանք

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi_n(\tau))d\tau-f(\tau,\varphi(\tau))d\tau\right|\le\left|\int_{t_0}^{t}\left|f(\tau,\varphi_n(\tau))d\tau-f(\tau,\varphi(\tau))\right|d\tau\right|\le$$

$$\le L\cdot\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi_n(\tau)-\varphi(\tau)|d\tau\right|<\varepsilon \text{ անհավասարությունը :}$$

Այժմ ելնելով ստացվածից և անցնելով սահմանի (1.11)-ում՝ կստանանք.

$$\varphi(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$$

նույնությունը: Այսինքն $\varphi(t)$ ֆունկցիան (1.7) հավասարման լուծումն է $[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$-ում: Այսպիսով՝ լուծման գոյությունն ապացուցված է: Այժմ ցույց տանք լուծման միակությունը:

Դիցուք $\varphi(t)$ ֆունկցիան (1.5), (1.6) Կոշու խնդրի լուծում է (α_1,β_1) միջակայքում, իսկ $\psi(t)$ ֆունկցիան՝ լուծում է (α_2,β_2) միջակայքում: Այդ դեպքում $t\in(\alpha_1,\beta_1)\bigcap(\alpha_2,\beta_2)$ կետերի համար միաժամանակ տեղի կունենան

$$\varphi(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$$

և

$$\psi(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,\psi(\tau))d\tau$$

նույնությունները: Այստեղից, ըստ Լիպշիցի պայմանի, կունենանք՝

$$|\varphi(t)-\psi(t)|=\left|\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau-f(\tau,\psi(\tau))\,d\tau\right|\le L\int_{t_0}^{t}|\varphi(t)-\psi(t)|d\tau:$$

Նշանակելով $v(t)=|\varphi(t)-\psi(t)|$, $u(t)\equiv L$, կունենանք, որ $v(t)$ և $u(t)$ ֆունցիաների համար բավարարված են Գրոնուոլի լեմմայի (լեմմա 1.3) պայմանները $C=0$ հաստատունով:

Ըստ լեմմայի՝ $v(t)\equiv|\varphi(t)-\psi(t)|\equiv 0$: Հետևաբար $\varphi(t)\equiv\psi(t)$, $(\alpha_1,\beta_1)\bigcap(\alpha_2,\beta_2)$-ում: Միակությունը, ինչպես նաև թեորեմ 1.1-ն ամբողջովին ապացուցված է:

Դիտողություն 1.2: Երբ Ω-ում անընդհատ $f(t,y)$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է ըստ y փոփոխականի, ապա համաձայն լեմմա 1.1-ի այն բավարարում է Լիպշիցի պայմանին ըստ y փոփոխականի: Ուրեմն թեորեմ 1.1-ից բխում է I գլխում ձևակերպած Կոշու թեորեմը:

Դիտողություն 1.3: Թեորեմ 1.1-ի նշված ապացույցը (հաջորդական մոտարկումների եղանակը) հնարավորություն է տալիս ցանկացած ճշտությամբ կառուցել (1.5), (1.6) Կոշու խնդրի լուծումը:

§ 2 ՍԵՂՄՈՂ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ

Այս պարագրաֆում կբերվի մաթեմատիկայի ամենատարբեր բնագավառներում մեծաքիվ կիրառություններ ունեցող *«սեղմող արտապատկերումների»* կամ *«անշարժ կետի»* սկզբունքը: Չնայած սեղմող արտապատկերումների սկզբունքը ըստ էության ապացուցվում է արդեն կիրառված հաջորդական մոտարկումների եղանակով, սակայն այն այստեղ բերվում է ելնելով նրանից, որ այդ սկզբունքը ոչ միայն թույլ է տալիս վերաապացուցել Կոշու թեորեմը, այլև նրա օգնությամբ ապացուցվում են մի շարք հանգուցային պնդումներ, որոնց թվում նաև գոյության և միակության թեորեմները:

Այս նպատակով նախ մտցնենք մետրիկական տարածության գաղափարը:

Դիցուք ունենք X բազմությունը, որի տարրերը էվկլիդյան տարածության հանգույն կանվանենք կետեր: $\rho(x, y)$ ոչ բացասական իրական ֆունկցիան, որը որոշված է X բազմության կետերի կամայական x, y զույգի համար, կանվանենք հեռավորություն (մետրիկա) X-ում, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

1) $\rho(x, y) = 0$ այն և միայն այն դեպքում երբ $x = y$,

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (սիմետրիկություն),

3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (եռանկյան անհավասարություն):

Սահմանում 2.1: (X, ρ) զույգը, որտեղ X-ը որևէ բազմություն է, իսկ ρ-ն X-ում սահմանված հեռավորություն, կանվանենք մետրիկական տարածություն:

Մետրիկական տարածության օրինակներ են

1) $X = R^1$ իրական թվերի բազմությունը $\rho(x, y) = |x - y|$ հեռավորությամբ (մետրիկայով):

2) $X = R^n$-ը n չափանի իրական, կարգավորված n-յակների բազմությունն է: $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ կետերի հեռավորությունն է՝

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 \right)^{1/2} :$$

3) X-ը $[a, b]$-ում անընդհատ ֆունկցիաների $C[a, b]$ բազմությունն է: Այստեղ f և g ֆունկցիաների հեռավորությունը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\rho(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|:$$

Ընթերցողին ենք թողնում ապացուցել, որ բերվածները մետրիկական տարածություններ են:

Սահմանում 2.2: Դիցուք (X,ρ)-ն մետրիկական տարածություն է և $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\in X$: Կասենք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է a-ին ($a\in X$) ըստ ρ մետրիկայի, եթե կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $N=N(\varepsilon)$ բնական թիվ այնպիսին, որ $\rho(x_n,a)<\varepsilon$, երբ $n\geq N$:

Սահմանում 2.3: $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ($x_n\in X$, $n=1,2,\cdots$) կոչվում է ֆունդամենտալ X-ում, եթե կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $N=N(\varepsilon)$ բնական թիվ այնպիսին, որ $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$, երբ $n,m>N$:

Պարզ է, որ յուրաքանչյուր զուգամետ հաջորդականություն ֆունդամենտալ է: Եթե ճիշտ է նաև հակառակը, այսինքն՝ X-ի ցանկացած ֆունդամենտալ հաջորդականություն զուգամիտում է X-ում, ապա (X,ρ)-ն կանվանենք լրիվ մետրիկական տարածություն:

Վերևում բերվածները հանդիսանում են լրիվ մետրիկական տարածության օրինակներ (համոզվել):

Սահմանում 2.4: Դիցուք (X,ρ)-ն մետրիկական տարածություն է: A արտապատկերումը (օպերատորը), որը գործում է X-ից X, կոչվում է սեղմող, եթե գոյություն ունի β թիվ, այնպիսին, որ $0<\beta<1$ և

$$\rho(Ax,Ay)\leq\beta\rho(x,y)\quad x,y\in X:$$

Ակնհայտ է, որ յուրաքանչյուր սեղմող արտապատկերում անընդհատ է X-ում, այսինքն՝ ցանկացած x_0-ի համար X-ից $\rho(Ax_n,Ax_0)\to 0$, երբ $\rho(x_n,x_0)\to 0$, $n\to\infty$ (համոզվել):

Սահմանում 2.5: $x\in X$ կետը կանվանենք A արտապատկերման անշարժ կետ, եթե $Ax=x$:

Անշարժ կետի գոյության կամ միակության հարցերն անմիջականորեն կապվում են տարաբնույթ հավասարումների լուծումների գոյության, միակության, ինչպես նաև այդ լուծումները գտնելու խնդիրների հետ: Ստորև ապացուցվող թեորեմն հենց հայտնի է *«սեղմող արտապատկերումների»* կամ *«անշարժ կետի»* սկզբունք անվանումով:

Թեորեմ 2.1: (X,ρ) լրիվ մետրիկական տարածությունում գործող ցանկացած A սեղմող արտապատկերում ունի անշարժ կետ և այն էլ՝ միակը:

Ապացույց: Դիցուք x_0-ն X բազմության ցանկացած կետ է: Կազմենք $x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1, \cdots, x_n = Ax_{n-1}, \cdots$ հաջորդականությունը: Ցույց տանք, որ ստացված $\{x_n\}$ հաջորդականությունը զուգամետ է: Քանի որ (X,ρ) տարածությունը լրիվ է, բավական է ցույց տալ $\{x_n\}$ հաջորդականության ֆունդամենտալությունը: Նախ օգտվելով A արտապատկերման սեղմող լինելուց՝ գնահատենք x_n և x_{n+1} անդամների հեռավորությունը:

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(Ax_{n-1}, Ax_n) \le \beta \cdot \rho(x_{n-1}, x_n) = \beta \cdot \rho(Ax_{n-2}, Ax_{n-1}) \le$$
$$\le \beta^2 \rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \le \cdots \le \beta^n \rho(x_0, x_1):$$

Ելնելով այս գնահատականից և եռանկյան անհավասարությունից՝ ցանկացած x_n և x_m $(m > n)$ անդամների համար կունենանք՝

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) +$$
$$+ \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \le \beta^n \cdot \rho(x_0, x_1) + \beta^{n+1} \rho(x_0, x_1) +$$
$$+ \cdots + \beta^{m-1} \cdot \rho(x_0, x_1) = \beta^n \cdot \rho(x_0, x_1)(1 + \beta + \cdots + \beta^{m-n-1}) \le$$
$$\le \beta^n \rho(x_0, x_1)(1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^{m-n-1} + \beta^{m-n} + \cdots) = \beta^n \cdot \frac{1}{1-\beta} \cdot \rho(x_0, x_1)$$

Վերջին առնչությունը ստացանք՝ կիրառելով նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի $(0 < \beta < 1)$ գումարի հայտնի բանաձևը:

Քանի որ $0 < \beta < 1$, ապա N-ը բավականաչափ մեծ ընտրելով կարող ենք $\beta^n \cdot \dfrac{1}{1-\beta} \cdot \rho(x_0, x_1)$ արտահայտությունը դարձնել փոքր նախապես տրված ցանկացած թվից, երբ $n > N$: Այսպիսով՝ x_n հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է և հետևաբար ըստ (X,ρ) տարածության լրիվության՝ զուգամետ: Նշանակենք $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը x-ով ($x\in X$):

Քանի որ սեղմող արտապատկերումն անընդհատ է, ուրեմն $Ax_n \to Ax$, երբ $n\to\infty$:

Այժմ $x_n = Ax_{n-1}$ առնչության երկու կողմում անցնելով սահմանի՝ երբ $n\to\infty$ կունենանք՝

$$x=\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_{n-1} = Ax:$$

Ուրեմն x_n հաջորդականության սահման հանդիսացող x կետը հանդիսանում է A օպերատորի անշարժ կետ: Ցույց տանք, որ անշարժ կետը միակն է: Ենթադրենք գոյություն ունի ևս մեկ $y\in X$ անշարժ կետ՝ $x\neq y$, $Ay=y$:

Քանի որ A-ն սեղմող է, կունենանք՝

$$\rho(x,y)=\rho(Ax,Ay)\le\beta\cdot\rho(x,y):$$

Այժմ հիշելով, որ $0<\beta<1$, կունենանք, որ ստացված անհավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $\rho(x,y)=0$, այսինքն՝ $x=y$: Այստեղից բխում է անշարժ կետի միակությունը:

Խնդիր: Կառուցել A օպերատորի օրինակ այնպիսին, որ $\rho(Ax,Ay)<\rho(x,y)$, $(\beta=1)$, որը չունենա անշարժ կետ:

Բերենք սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի մի քանի կիրառություններ:

Կիրառություն 1: Վերցնենք $X=[a,b]$, $\rho(x,y)=|x-y|$: Դիցուք $[a,b]$ միջակայքում որոշված $f(x)$ իրականարժեք ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի պայմանին, $0<L<1$ Լիպշիցի հաստատունով, այսինքն՝

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|, x_1,x_2\in[a,b]:$$

Այդ դեպքում բավարարված կլինեն թեորեմ 2.1-ի բոլոր պայմանները և $x=f(x)$ հավասարումը $[a,b]$-ում կունենա միակ լուծում:

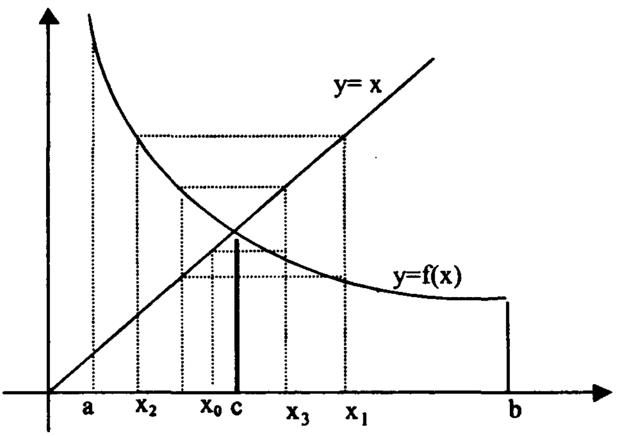
Այս փաստը կիրառվում է $\varphi(x)=0$ ոչ գծային հավասարման լուծման համար հետևյալ կերպ: Դիցուք ուսումնասիրվում է $\varphi(x)=0$ հավասարումը, որի լուծումը փնտրվում է $[a,b]$ հատվածում: Ուսումնասիրվող հավասարումը գրենք $x=f(x)$

$(f(x)=\varphi(x)+x)$ տեսքով: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a,b]$-ում բավարարում է Լիպշիցի պայմանին, $0<L<1$ Լիպշիցի հաստատունով, ապա $x=f(x)$ հավասարումը (հետևաբար՝ նաև $\varphi(x)=0$ հավասարումը) ունի միակ լուծում $[a,b]$-ում:

Այդ լուծումը կարելի է գտնել հաջորդական մոտարկումների եղանակով՝ $x_k=f(x_{k-1})$, ընդ որում որպես զրոյական մոտարկում վերցնենլով ցանկացած $x_0\in[a,b]$ կետ:

Նկատենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է նշված պայմանին, եթե $\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|<1$ (տես լեմմա 1.1):

Տանք նկարագրված պրոցեսի երկրաչափական մեկնաբանությունը:



Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան $[a,b]$-ում բավարարում է $|f'(x)|<1$ պայմանին: Վերցնենք ցանկացած x_0 կետ $[a,b]$-ից: x_0 կետով տանենք y-ների առանցքին զուգահեռ ուղիղ մինչև $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հետ հատվելը: Յատման կետով տանենք x-երի առանցքին զուգահեռ ուղիղ մինչև $y=x$ ուղղի հետ հատվելը: Ստացված կետի աբսցիսը հանդիսանում է x_1-ը: Նույն բանը կատարենք x_1-ի հետ և այսպես շարունակ, մենք կհամոզվենք, որ ստացված կետերը կմոտենան c ճշգրիտ լուծմանը:

Կիրառություն 2: Անշարժ կետի սկզբունքի կիրառմամբ ապացուցենք անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության թեորեմի տարբերակներից մեկը, որն ունի բազմապիսի կիրառություններ, այդ թվում սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության մեջ:

Թեորեմ 2.2 (Անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության մասին): Դիցուք $f(x,y)$ ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է իր $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ մասնական ածանցյալի հետ միասին $Q=\{(x,y),\quad a\le x\le b,\quad -\infty<y<\infty\}$ շերտում: Ինչպես նաև գոյություն ունեն $m,M\quad (0<m<M)$ թվեր այնպիսիք, որ $m\le\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\le M$ կամայական (x,y) զույգի համար Q-ից:

Այդ դեպքում գոյություն ունի և այն էլ միակ $y=\varphi(x)$ ֆունկցիա, որն հանդիսանում է $f(x,y)=0$ հավասարման լուծում $[a,b]$-ում, այսինքն՝ $f(x,\varphi(x))=0$, $x\in[a,b]$:

Ապացույց: Դիտարկենք $C[a,b]$ անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունը համապատասխան մետրիկայով (տես օրինակ 3) . $C[a,b]$-ում դիտարկենք

$$A(\varphi)=\varphi-\frac{1}{M}f(x,\varphi(x)),\quad \varphi\in C[a,b] \tag{2.1}$$

արտապատկերումը: Պարզ է, որ A-ն արտապատկերում է $C[a,b]$ լրիվ մետրիկական տարածությունը $C[a,b]$-ի մեջ: Ստուգենք, որ այն սեղմող է: Իրոք, դիցուք $\varphi_1,\varphi_2\in C[a,b]$: Այդ դեպքում օգտվելով Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևից՝ որևէ θ-ի համար $(0<\theta<1)$ կունենանք՝

$$|A\varphi_2(x)-A\varphi_1(x)|=\left|\left(\varphi_2(x)-\frac{1}{M}f(x,\varphi_2(x))\right)-\left(\varphi_1(x)-\frac{1}{M}f(x,\varphi_1(x))\right)\right|=$$

$$=\left|(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))-\frac{f'_y(x,\varphi_1+\theta(\varphi_2-\varphi_1))}{M}(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))\right|\le$$

$$\le |\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\left(1-\frac{m}{M}\right)\le \rho(\varphi_1,\varphi_2)\left(1-\frac{m}{M}\right), x\in[a,b]$$

Հետևաբար $\rho(A\varphi_2, A\varphi_1)\le\beta\rho(\varphi_1,\varphi_2)$, որտեղ $0<\beta=1-\frac{m}{M}<1$: Ուրեմն (2.1) արտապատկերումը սեղմող է և ըստ թեորեմ 2.1-ի գոյություն ունի միակ $\varphi_0\in C[a,b]$ ֆունկցիա, որը հանդիսանում է A արտապատկերման անշարժ կետ՝ $\varphi_0=A\varphi_0$, այսինքն՝

$$\varphi_0(x)=\varphi_0(x)-\frac{1}{M}f(x,\varphi_0(x)):$$

Կամ որ նույնն է, $y=\varphi_0(x)$ ֆունկցիայի համար

$$f(x,\varphi_0(x))\equiv 0,\quad x\in[a,b]:$$

Անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության թեորեմն ապացուցված է:

Հետագա շարադրանքում մեզ անհրաժեշտ կլինի նաև ապացուցված թեորեմի բազմաչափ տարբերակը, որը մենք բերում ենք առանց ապացուցման:

Թեորեմ 2.3 (Անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության մասին): Դիցուք տրված են m հավասարումների համակարգ $(n+m)$ փոփոխականներից՝

$$\begin{cases} F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\\ F_2(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0\end{cases}\qquad(2.2)$$

որտեղ՝

1) $F_1,\cdots,F_m$ ֆունկցիաները որոշված և անընդհատ են $(x_1^0,\cdots,x_n^0;y_1^0,\cdots,y_n^0)$ կետի որևէ Ω շրջակայքում:

2) Ω-ում գոյություն ունեն և անընդհատ են F_i ֆունկցիաների հետևյալ առաջին կարգի մասնական ածանցյալները՝ $\partial F_i/\partial y_j \quad (i,\ j=1,\dots,m)$

3) $(x_1^0,\cdots x_n^0,\ y_1^0,\cdots y_n^0)$ կետը բավարարում է (2.2) հավասարումների համակարգին

$$
4) \qquad J \equiv \frac{D(F_1 \cdots F_m)}{D(y_1 \cdots y_m)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ & \cdots & \cdots & \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}
$$

յակոբյանը տարբեր է 0-ից $(x_1^0,\cdots x_n^0,\ y_1^0,\cdots y_m^0)$ կետում:

Այդ դեպքում

ա) $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ կետի որևէ շրջակայքում (2.2) համակարգից $y_1,\cdots y_m$ փոփոխականները միարժեքորեն որոշվում են $x_1,\cdots x_n$ փոփոխականներով, այսինքն գոյություն ունեն միարժեք որոշվող $y_1 = f_1(x_1,\cdots x_n)$, $y_2 = f_2(x_1,\cdots x_n)$, ..., $y_m = f_m(x_1,\cdots x_n)$ ֆունկցիաներ, որոնք բավարարում են (2.2) առնչություններին նշված շրջակայքում:

բ) $x_1 = x_1^0,\cdots x_n = x_n^0$ կետում այդ ֆունցիաներն ընդունում են համապատասխանաբար $y_1^0 = f_1(x_1^0,\cdots x_n^0)$, $y_2^0 = f_2(x_1^0,\cdots x_n^0)$, ..., $y_m^0 = f_m(x_1^0,\cdots x_n^0)$, արժեքները:

գ) $f_1, f_2,\cdots,f_m$ ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են:

§ 3 ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԻ ԱՊԱՑՈՒՅՑԸ ՍԵՂՄՈՂ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԿԶԲՈՒՆՔՈՎ

Կիրառելով նախորդ կետում ապացուցված սեղմող արտապատկերների սկզբունքը՝ այստեղ կվերաապացուցենք Կոշու խնդրի լուծման գոյության և միակության 1.1 թեորեմը:

Ըստ համարժեքության լեմմայի (լեմմա 1.4)՝ (1.5), (1.6) Կոշու խնդիրը համարժեք է (1.7) ինտեգրալային հավասարմանը: Եվ այսպես, ցույց տանք (1.7) հավասարման լուծման գոյությունը և միակությունը: Նախ ներմուծենք Ուι և Ուι$_r$ ուղղանկյունները ինչպես §1-ում : Դիցուք $M = \max\limits_{(t,y)\in Ու} \left|f(t,y)\right|$: Որպես X մետրիկական տարածություն վերցնենք Φ_r-ը, այսինքն $\left[t_0 - r,\ t_0 + r\right]$ միջակայքում որոշված այն անընդհատ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց գրաֆիկները ընկած են Ուι$_r$ – ում այսինքն $\left|\varphi(t) - y_0\right| \le a$, երբ $t \in \left[t_0 - r,\ t_0 + r\right]$: Սահմանենք հեռավորություն

$$\rho(\varphi,\psi) = \max_{t\in[x_0 - r, x_0 + r]} \left|\varphi(t) - \psi(t)\right|, \quad \varphi,\psi \in \Phi_r :$$

Ցույց տանք, որ նման հեռավորությամբ Φ_r-ը դառնում է լրիվ մետրիկական տարածություն: Դիցուք $\{\varphi_n\}$-ը որևէ ֆունդամենտալ հաջորդականություն է, այսինքն կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $N = N(\xi)$ թիվ, որ

$$\rho(\varphi_n, \varphi_m) = \max_{t\in[x_0 - r, x_0 + r]} \left|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\right| < \varepsilon, \qquad n,m > N :$$

Սա նշանակում է, որ $\{\varphi_n(t)\}$ հաջորդականությունը բավարարում է ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների հավասարաչափ զուգամիտության Բոլցանո-Կոշու հայտանիշին: Հետևաբար $\{\varphi_n(t)\}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է ինչ-որ φ(t) ֆունկցիայի $\left[t_0 - r,\ t_0 + r\right]$-ում : Ըստ զուգամիտության հավասարաչափության $\varphi \in C\left[t_0 - r,\ t_0 + r\right]$:

Ցույց տանք, որ φ ֆունկցիայի գրաֆիկն ընկած է Ուι$_r$-ում: Յուրաքանչյուր n-ի համար $(n = 1,2,\cdots)$ ունենք $-a \le \varphi_n(t) - y_0 \le a$, $t \in \left[t_0 - r,\ t_0 + r\right]$:

Անհավասարությունների ստացված շղթայում անցնելով սահմանի, երբ $n \to \infty$, կունենանք՝ $-a \le \varphi(t) - y_0 \le a$, $t \in \left[t_0 - r,\ t_0 + r\right]$, այսինքն $\varphi \in \Phi_r$, որը նշանակում է, որ Φ_r-ը լրիվ է:

$X = \Phi_r$ լրիվ մետրիկական տարածությունում սահմանենք հետևյալ օպերատորը.

$$A\varphi = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, \varphi(\xi))d\xi : \tag{3.1}$$

(1.7) հավասարման լուծման գոյությունը և միակությունը համարժեք է $A\varphi = \varphi$ հավասարման լուծման գոյությանը և միակությանը, կամ որ նույնն է A օպերատորի համար անշարժ կետի գոյությանն ու միակությանը:

Եթե $\varphi \in \Phi_r$, ապա $(\xi, \varphi(\xi)) \in \Omega_r \subset \Omega$: Ուրեմն $f(\xi, \varphi(\xi))$-ն որպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիա անընդհատ է $[t_0 - r,\ t_0 + r]$-ում: Նկատի ունենալով նաև, որ (3.1) արտահայտության աջ մասում գրված ինտեգրալը որպես վերին սահմանի ֆունկցիա անընդհատ է, կունենանք, որ A օպերատորը արտապատկերում է Φ_r-ը $C([t_0 - r,\ t_0 + r])$-ին: Այժմ ընտրենք r թիվն այնպես, որ A օպերատորը բավարարի 2.1 թեորեմի պայմաններին, այսինքն՝

ա) $A : \Phi_r \to \Phi_r$

բ) գոյություն ունենա β թիվ, $(0 < \beta < 1)$ այնպիսին, որ կամայական φ և ψ ֆունկցիաների համար Φ_r-ից

$$\rho(A\varphi, A\psi) \le \beta \cdot \rho(\varphi, \psi):$$

Ապահովենք ա) պայմանը: Դրա համար Φ_r-ին պատկանող ցանկացած $\varphi(t)$-ի համար գնահատենք $A\varphi(t) - y_0$ տարբերությունը.

$$|A\varphi(t) - y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\xi, \varphi(\xi))d\xi\right| \le M \cdot r \le a, \quad t \in [t_0 - r,\ t_0 + r]:$$

Ընտրելով $r < \dfrac{a}{M}$՝ կունենանք.

$$|A\varphi(t) - y_0| \le a, \quad t \in [t_0 - r,\ t_0 + r],$$

և ա) պայմանն ապահովված է:

Ապահովենք բ) պայմանը: Φ_r-ին պատկանող կամայական (φ, ψ) զույգի համար, ըստ Լիպշիցի պայմանի, կունենանք՝

$$|A\varphi(t)-A\psi(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}(f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\psi(\xi)))d\xi\right|\le L\max_{t\in[t_0-r,t_0+r]}|\varphi(t)-\psi(t)|\cdot r=$$

$$=L\cdot r\cdot\rho(\varphi,\psi),\quad t\in[t_0-r,\ t_0+r]:$$

Հետևաբար $\rho(A\varphi,A\psi)=\max\limits_{t\in[t_0-r,t_0+r]}|A\varphi(t)-A\psi(t)|\le\beta\cdot\rho(\varphi,\psi)$, որտեղ $\beta=L\cdot r$:

Այժմ ընտրելով $r<\dfrac{1}{L}$, կունենանք, որ $0<\beta<1$ և հետևաբար բավարարված կլինի նաև բ) պայմանը:

Այսպիսով, եթե $r<\min\left\{b,\dfrac{a}{M},\dfrac{1}{L}\right\}$, ապա (3.1) օպերատորը, որը գործում է Φ_r լրիվ մետրիկական տարածության մեջ սեղմող է, և հետևաբար ըստ թեորեմ 2.1-ի կունենա և այն էլ միակ անշարժ φ կետ Φ_r-ից:

Անշարժ կետ հանդիսացող այս ֆունկցիան էլ հենց կլինի (1.7) ինտեգրալային հավասարման միակ լուծումը $[t_0-r,\ t_0+r]$ –ում:

Թեորեմ 1.1-ն ապացուցված է:

§ 4 ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԻ ԱՊԱՑՈՒՅՑԸ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Այս պարագրաֆում կապացուցենք գոյության և միակության թեորեմը

$$\begin{cases} x_i'=f_i(t,x_1,\cdots,x_n) & (4.1)\\ x_i(t_0)=x_i^0,\quad i=1,\cdots,n & (4.2)\end{cases}$$

հավասարումների նորմալ համակարգի Կոշու խնդրի լուծման համար:

Այդ նպատակով կհիշատակենք որոշ գաղափարներ վեկտորների տեսությունից: Դիցուք $\mathbb{C}^n$-ը n-չափանի կոմպլեքս էվկլիդյան տարածություն է, որի $\vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)$ տարրերին կանվանենք ինչպես կետեր այնպես էլ վեկտորներ: $\vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{C}^n$ վեկտորի մոդուլ կամ երկարություն կանվանենք

$|y| = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \right)^{1/2}$ թիվը:

Դիցուք $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots \varphi_n(t)$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը որոշված և անընդհատ է $[a,b]$–ում: Ամեն մի $t_0 \in [a,b]$ կետի համար $\vec{\varphi}(t_0) = (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \cdots, \varphi_n(t_0))$, թվերի n-յակը իրենից ներկայացնում է n-չափանի վեկտոր, այսինքն՝ $\vec{\varphi}(t_0) \in \mathbb{C}^n$: Այդ առումով բնական է $\vec{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots \varphi_n(t))$, ֆունկցիաների n-յակը անվանել (n-չափանի) վեկտոր-ֆունկցիա: Նման վեկտոր-ֆունկցիաների բազմությունը նշանակենք $C_n[a,b]$-ով:

Գումարումը և սկալյար թվով բազմապատկումը $C_n[a,b]$–ում սահմանվում է այնպես, ինչպես n-չափանի թվային վեկտորների համար, այսինքն՝ ցանկացած $\vec{\varphi}(t), \vec{\psi}(t) \in C_n[a,b]$ կետերի գումար՝ $\vec{\varphi}(t) + \vec{\psi}(t)$ կոչվում է այն $\vec{\chi}(t) = (\chi_1(t), \chi_2(t), \cdots, \chi_n(t))$ վեկտոր-ֆունկցիան, որի կոմպոնենտները որոշվում են $\chi_i(t) = \varphi_i(t) + \psi_i(t)$, $i = (1,2,\cdots,n)$ բանաձևերով: $\alpha \in R^1$ իրական թվի և $\vec{\varphi}(t) \in C_n[a,b]$ վեկտոր-ֆունկցիայի արտադրյալ կոչվում է այն $\vec{\psi}(t) = ((\psi_1(t), \cdots \psi_n(t))$ վեկտոր ֆունկցիան, որի կոմպոնենտները որոշվում են $\psi_i(t) = \alpha\varphi_i(t)$, $i = (1,2,\cdots,n)$ բանաձևերով:

Նշված երկու գործողությունների նկատմամբ $C_n[a,b]$-ն դառնում է գծային տարածություն (տե՛ս § 3.1):

$C_n[a,b]$-ում սահմանենք նաև ածանցյալի և ինտեգրալի գաղափարները: $\vec{\varphi}(t)$ վեկտոր ֆունկցիայի $\vec{\varphi}'(t)$ ածանցյալ կանվանենք այն վեկտոր-ֆունկցիան, որի յուրաքանչյուր կոմպոնենտ հանդիսանում է $\vec{\varphi}(t)$ վեկտոր ֆունկցիայի համապատասխան կոմպոնենտի ածանցյալը՝ $\vec{\varphi}'(t) = (\varphi_1'(t), \cdots \varphi_n'(t))$: Իսկ $\vec{\varphi}(t)$ վեկտոր ֆունկցիայի ինտեգրալ՝ $\int\limits_{[a,t]} \vec{\varphi}(t)dt$ կանվանենք $\vec{\psi}(t) = ((\psi_1(t), \cdots \psi_n(t))$ ֆունկցիան, որտեղ $\psi_i(t)=\int\limits_a^t \varphi_i(s)ds \quad i=(1,2,\cdots,n)$, $t\in[a,b]$:

Կամայական $t\in[a,b]$ կետի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը

$$\left|\int_a^t \vec{\varphi}(s)ds\right| \le \int_a^t |\vec{\varphi}(s)|ds,$$

որը հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ՝ օգտվելով սկալյար ֆունկցիաների համար համապատասխան անհավասարությունից:

$\vec{\varphi}(t)\in C_n[a,b]$ վեկտոր ֆունկցիայի նորմ կանվանենք՝

$$\|\vec{\varphi}\| = \max_{t\in[a,b]}|\vec{\varphi}(t)| = \max_{t\in[a,b]}\sqrt{\sum_{i=1}^n|\varphi_i(t)|^2} :$$

Սահմանենք նաև $C_n[a,b]$-ում հեռավորություն (մետրիկա)՝ յուրաքանչյուր $\vec{\varphi},\vec{\psi}\in C_n[a,b]$ կետերի համար հեռավորություն անվանենք $\rho(\vec{\varphi},\vec{\psi})=\|\vec{\varphi}-\vec{\psi}\|$ մեծությունը:

Բերված մետրիկայի նկատմամբ $C_n[a,b]$-ն դառնում է լրիվ մետրիկական տարածություն (ստուգել):

Վեկտորական նշանակումներով (4.1), (4.2) Կոշու խնդիրը կգրվի

$$\begin{cases}\vec{x}=\vec{f}(t,\vec{x}) & (4.3)\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}^0, & (4.4)\end{cases}$$

տեսքով, որտեղ

$$\vec{x}=(x_1,\cdots x_n),\ \vec{x}'=(x_1',\cdots x_n'),\ \vec{f}(t,\vec{x})=(f_1(t,x_1,\cdots,x_n),\cdots,$$

$$f_n(t,x_1,\cdots,x_n)),$$

$$\vec{x}^0=(\vec{x}^0{}_1,\cdots\vec{x}^0{}_n) :$$

Թեորեմ 4.1: Դիցուք $f_i(t,x_1,\cdots,x_n)$, $(i=1,\cdots,n)$ ֆունկցիաները որոշված և անընդհատ են $(n+1)$ չափանի տարածության Ω տիրույթում և բավարարում են Լիպշիցի պայմանին ըստ $x_1,\cdots,x_n$ փոփոխականների համախմբի, հավասարաչափ t փոփոխականի նկատմամբ, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $L=L(f,\Omega)$ դրական հաստատուն, որ Ω-ի ցանկացած $(t,\vec{x}')$ և $(t,\vec{x}'')$ կետերի համար

$$\left|f_i(t,\vec{x}')-f_i(t,\vec{x}'')\right|\le L\left|\vec{x}'-\vec{x}''\right|,\quad i=1,\cdots,n: \tag{4.5}$$

Այդ դեպքում Ω տիրույթի ցանկացած $(t_0,\vec{x}^0)$ կետի համար գոյություն ունեն $\alpha>0$ թիվ և $\vec{\varphi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիա, որն հանդիսանում է (4.3), (4.4) խնդրի միակ լուծումը $(t_0-\alpha,t_0+\alpha)$ միջակայքում:

Ապացույց: Սկզբում ցույց տանք, որ (4.3),(4.4) խնդիրը համարժեք է

$$\vec{y}(t)=\vec{x}^0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(\tau,\vec{y}(\tau))d\tau \tag{4.6}$$

ինտեգրալային հավասարմանը:

Դիցուք $\vec{\varphi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիան (այսուհետ ֆունկցիան) (4.3), (4.4) խնդրի որևէ լուծում է (r_1,r_2) միջակայքում $(t_0\in(r_1,r_2))$ այսինքն՝

$$\begin{cases}\vec{\varphi}'(t)\equiv\vec{f}(t,\vec{\varphi}(t)) & t\in(r_1,r_2) \qquad (4.7)\\ \vec{\varphi}(t_0)=\vec{x}_0, & \qquad (4.8)\end{cases}$$

Ինտեգրելով (4.7) նույնությունը (t_0,t) միջակայքում և հաշվի առնելով (4.8) պայմանը, կունենանք

$$\vec{\varphi}(t)=\vec{x}^0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}(\tau))d\tau \tag{4.9}$$

նույնությունը, այսինքն $\vec{\varphi}(t)$ ֆունկցիան կհանդիսանա (4.6) հավասարման լուծում:

Այժմ ցույց տանք հակադարձը: Դիցուք $\vec{\varphi}(t)$ ֆունկցիան (4.6) հավասարման լուծում է, այսինքն՝ տեղի ունի (4.9) նույնությունը: Վերցնելով (4.9)-ում $t=t_0$, կստանանք (4.8) պայմանը: Ածանցելով (4.9)–ը ըստ t-ի կունենանք (4.7) նույնությունը, հետևաբար $\vec{\varphi}(t)$-ն (4.3) (4.4) խնդրի լուծում է:

Այսպիսով խնդիրը հանգեցվեց (4.6) հավասարման լուծման գոյության և միակության խնդրին:

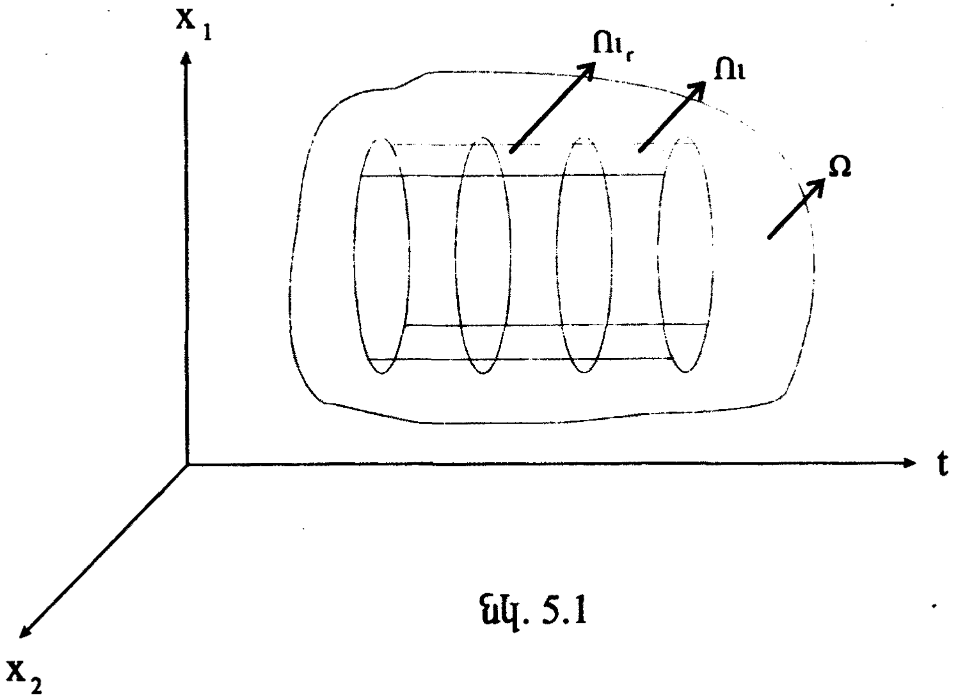
Քանի որ $(t_0,\vec{x}^0)=(t_0,x_1^0,\cdots,x_n^0)\in\Omega$ բաց բազմություն է, ապա գոյություն ունի այնպիսի Ու փակ սահմանափակ բազմություն՝

$$Ու=\left\{(t,\vec{x}),\quad |t-t_0|\le b,\quad \left|\vec{x}-\vec{x}^0\right|\le a\right\}$$

որն ընկած է Ω-ի մեջ: Ու բազմության հետ միասին դիտարկենք

Ու$_r$$=\{(t,\vec{x}),\quad |t-t_0|\le r,\ |\vec{x}-\vec{x}^0|\le a\}$ փակ սահմանափակ բազմությունը ($n=2$ դեպքում տե՛ս նկ. 5.1), որտեղ $r\le b$ պարամետրը կընտրենք ստորև:

Քանի որ $f_i(t,x_1,\cdots,x_n)$, $(i=1,\cdots,n)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են Ու փակ սահմանափակ բազմության վրա, ապա նրանք սահմանափակ են Ու –ում:



նկ. 5.1

Նշանակենք

$$M=\max_{(t,x)\in Ու}\left|\vec{f}(t,x_1,\cdots,x_n)\right|=\max_{(t,x)\in Ու}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}f_i^2(t,\vec{x})}:$$

Ω_r-ով նշանակենք $[t_0-r,t_0+r]$-ում որոշված այն անընդհատ վեկտոր-ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց գրաֆիկն ընկած է Ու$_r$ –ում, այսինքն՝ $|\vec{\varphi}(t)-\vec{x}^0|\le a$, $t\in[t_0-r,t_0+r]$:

Ω_r-ը $\rho(\vec{\varphi},\vec{\psi})=\|\vec{\varphi}-\vec{\psi}\|$ մետրիկայով դառնում է լրիվ մետրիկական տարածություն կամայական $r>0$ թվի համար (ստուգե՛լ):

Ω_r լրիվ մետրիկական տարածության վրա սահմանենք A օպերատորը (արտապատկերումը) հետևյալ կերպ

$$A\vec{\varphi}=\vec{x}^0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}(\tau))d\tau:$$

Այժմ փորձենք r պարամետրն ընտրել այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ երկու պայմանները.

ա) յուրաքանչյուր $\vec{\varphi}$-ի համար Ω_r-ից $A\vec{\varphi}$-ն դարձյալ պարունակվի Ω_r-ի մեջ $(A:\Omega_r\to\Omega_r)$,

բ) գոյություն ունենա β թիվ $(0<\beta<1)$ այնպիսին, որ յուրաքանչյուր $\vec{\varphi}$ և $\vec{\psi}$-ի համար Ω_r-ից

$$\rho(A\vec{\varphi},A\vec{\psi})\le\beta\rho(\vec{\varphi},\vec{\psi}): \tag{4.10}$$

Աշխատենք բավարարել ա) պայմանը: Դրա համար r թիվը պետք է ընտրել այնպես, որ յուրաքանչյուր $\vec{\varphi}$–ի համար Ω_r-ից տեղի ունենա

$$\left|A\vec{\varphi}(t)-\vec{x}^0\right|\le a\,,\quad t\in\left[t_0-r,t_0+r\right] \tag{4.11}$$

առնչությունը: Նախ նկատենք, որ եթե $\vec{\varphi}\in\Omega_r$, ապա ցանկացած $t\in\left[t_0-r,t_0+r\right]$ կետի համար $(t,\vec{\varphi}(t))\in\Pi_r\subset\Pi$ և հետևաբար $\left|f(t,\vec{\varphi}(t))\right|\le M$: Գնահատելով (4.11) առնչության ձախ մասը, կունենանք

$$\left|A\vec{\varphi}-\vec{x}^0\right|\le\left|\int_{t_0}^{t}\left|\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}(\tau))d\tau\right|\right|\le Mr$$

անհավասարությունը, որից հետևում է, որ (4.11) առնչությանը բավարարելու համար r թիվը պետք է ընտրել այնպես, որ $r\le\dfrac{a}{M}$:

Ապահովելու համար բ) պայմանը, օգտվենք (4.5) Լիպշիցի պայմանից, ըստ որի՝ յուրաքանչյուր $t\in\left[t_0-r,t_0+r\right]$ կետի համար կունենանք.

$$\left|A\vec{\varphi}(t)-A\vec{\psi}(t)\right|\le\left|\int_{t_0}^{t}\left(\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}(\tau))-\vec{f}(\tau,\vec{\psi}(\tau))\right)d\tau\right|\le\left|\int_{t_0}^{t}\left|\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}(\tau))-\vec{f}(\tau,\vec{\psi}(\tau))\right|d\tau\right|=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|f_i(\tau,\varphi(\tau))-f_i(\tau,\psi(\tau))\right|^2}\,d\tau\le\left|\int_{t_0}^{t}L\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\bar{\varphi}(\tau)-\bar{\psi}(\tau)\right|^2\right)^{1/2}d\tau\right|\le$$

$$\le L\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot r\cdot\left\|\bar{\varphi}-\bar{\psi}\right\|=L\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot r\cdot\rho(\bar{\varphi},\bar{\psi}):$$

Իսկ քանի որ $\rho(A\bar{\varphi},A\bar{\psi})=\max\limits_{t\in[t_0-r,t_0+r]}\left|A\bar{\varphi}(t)-A\bar{\psi}(t)\right|$ ապա արդյունքում

կունենանք՝ $\rho(A\bar{\varphi},A\bar{\psi})\le L\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot r\cdot\rho(\bar{\varphi},\bar{\psi})$:

Այսպիսով՝ (4.10) առնչությունը բավարարելու համար բավական է վերցնել $r<\dfrac{1}{L\cdot n^{\frac{1}{2}}}$:

Ընտրելով $r<\min\left\{b,\dfrac{a}{M},\dfrac{1}{L\cdot n^{\frac{1}{2}}}\right\}$ կստանանք, որ A օպերատորը բավարարում է ա) և բ) պայմաններին և հետևաբար Ω_r լրիվ մետրիկական տարածությունում սեղմող է:

Ըստ սեղմող արտապատկերումների մասին 2.1 թեորեմի A օպերատորը Ω_r-ում ունի և այն էլ միակ անշարժ կետ, որն էլ հենց կհանդիսանա (4.6) ինտեգրալային հավասարման և հետևաբար (4.3), (4.4) Կոշու խնդրի միակ լուծում: Թեորեմն *ապացուցված է*:

Այժմ ցույց տանք, որ այստեղ ապացուցված թեորեմ 4.1–ից բխում է գլուխ 1-ի II թեորեմը: Դրա համար նախ ապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 4.1: Եթե $f(t,x_1,\cdots,x_n)$ ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է $(n+1)$ չափանի Ու *ուղղանկյան* զուգահեռանիստում, ինչպես նաև գոյություն ունեն և սահմանափակ են Ու-ում $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n)$ մասնական ածանցյալները, ապա $f(t,x_1,\cdots,x_n)$ ֆունկցիան Ու-ում բավարարում է Լիպշիցի պայմանին ըստ $(x_1,\cdots,x_n)$ փոփոխականների համախմբության, հավասարաչափ t փոփոխականի նկատմամբ:

Ապացույց: Վերցնենք ցանկացած $(t,x_1',\cdots,x_n')$, $(t,x_1'',\cdots,x_n'')$ կետեր: Օգտվելով Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևից՝ կստանանք անհավասարությունների հետևյալ շղթան

$$|f(t,x_1',\cdots,x_n')-f(t,x_1'',\cdots,x_n'')|\le|f(t,x_1',\cdots,x_n')-f(t,x_1',\cdots,x_{n-1}',x_n'')|+$$

$$+|f(t,x_1',\cdots,x_{n-1}',x_n'')-f(t,x_1',\cdots,x_{n-1}'',x_n'')|+$$

$$+\cdots+|f(t,x_1',x_2''\cdots,x_n'')-f(t,x_1'',\cdots,x_n'')|\le$$

$$\le\left|\frac{\partial f(t,x_1',\cdots,x_{n-1}',\xi_n)}{\partial x_n}\right||x_n'-x_n''|+\left|\frac{\partial f(t,x_1',\cdots,x_{n-2}',\xi_{n-1},x_n'')}{\partial x_{n-1}}\right||x_{n-1}'-x_{n-1}''|+\cdots$$

$$+\left|\frac{\partial f(t,\xi_1,x_2'',\cdots,x_n'')}{\partial x_1}\right||x_1'-x_1''|,$$

որտեղ $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ -ը կետեր են, համապատասխանաբար, $(x_1',x_1''),(x_2',x_2''),\cdots(x_n',x_n'')$ միջակայքերից:

Այժմ օգտվելով մասնական ածանցյալների սահմանափակությունից՝ $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|\le K$ Ու-ում, $(i=1,\cdots,n)$ կունենանք՝

$$|f(t,x_1',\cdots,x_n')-f(t,x_1'',\cdots,x_n'')|\le K(|x_1'-x_1''|+\cdots|x_n'-x_n''|)\le$$

$$\le K(\|x'-x''\|+\cdots+\|x'-x''\|)=n\cdot K\cdot\|x'-x''\|:$$

Վերջին գնահատականներում օգտվեցինք $|x_i|\le\|x\|=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ $(i=1,\cdots,n)$ անհավասարությունից:

Այսպիսով՝ $\vec{f}$ ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի պայմանին $L=K\cdot n$ հաստատունով: Լեմմա 4.1-ն ապացուցված է:

Այժմ համոզվենք, որ 4.1 թեորեմից և 4.1.լեմմայից բխում է I գլխում ձևակերպած II թեորեմը: Դիցուք $(t_0,x_1^0,\cdots,x_n^0)$ կամայական կետ է Ω-ից: Այդ դեպքում գոյություն ունի (t_0,x^0) կենտրոնով Ու ուղղանկյուն զուգահեռանիստ, որն ընկած է Ω-ում: Կիրառելով 4.1 լեմման՝ կունենանք, որ f_i ֆունկցիայից յուրաքանչյուրը

Ու-ում կբավարարի Լիպշիցի պայմանին, և հետևաբար (4.1)-(4.2) Կոշու խնդիրն ունի մեկ և միայն մեկ լուծում:

§5. ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԻ ԱՊԱՑՈՒՅՑԸ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Այս պարագրաֆը նվիրված է առաջին գլխի III թեորեմի ապացույցին: Չնակերպենք այն մեկ անգամ ևս: Դիտարկենք Կոշու խնդիրը գծային հավասարումների նորմալ համակարգերի համար:

$$\begin{cases} x_i' = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_i(t) & (5.1) \\ x_i(t_0) = x_i^0, \quad (i = 1,2,\cdots,n) & (5.2) \end{cases}$$

Թեորեմ 5.1: Եթե $a_{ij}(t)$ և $b_i(t)$ ֆունկցիաները $(i, j = 1,2,\cdots,n)$ որոշված և անընդհատ են (r_1, r_2)-ում, ապա ցանկացած $(t_0, \vec{x}^0)$ կետի համար, որտեղ $t_0 \in (r_1, r_2)$, $\vec{x}^0 \in R^n$ (5.1), (5.2) Կոշու խնդիրն ունի և այն էլ մեկ լուծում, որոշված (r_1, r_2) միջակայքում:

Ապացույց: Նախ նշենք, որ գծային համակարգը ընդհանուր նորմալ համակարգի մասնավոր դեպքն է և որ ապացուցվող թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ

$$f_i(t,x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_i(t), \ (i = 1,2,\cdots,n)$$

ֆունկցիաները բավարարում են թեորեմ 4.1-ի պայմաններին (ավելին $f_i(t,x)$ ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են ըստ x_i փոփոխականի): Ուրեմն, համաձայն 4.1 թեորեմի, (5.1)- (5.2) խնդիրն ունի և այն էլ միակ լուծում և մնում է միայն ապացուցել, որ այդ լուծումը որոշված է (r_1, r_2) ողջ միջակայքում, այսինքն այնտեղ, որտեղ որոշված են գործակիցները: Նշվածն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ համապատասխան A օպերատորն այնպիսին է, որ նրա միջոցով կառուցված $\vec{\varphi}_{n+1} = A\vec{\varphi}_n \equiv \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_n(\tau))d\tau$ մոտարկումների հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է (r_1,r_2) միջակայքին պատկանող կամայական $[q_1,q_2]$ հատվածում:

Եվ այսպես, դիցուք $[q_1,q_2]\subset(r_1,r_2)$: Քանի որ a_{ij} և b_i ֆունկցիաները $(i,j=1,2,\cdots,n)$ անընդհատ են (r_1,r_2)-ում և մասնավորապես $[q_1,q_2]$-ում և $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=a_{ij}(t)$, $(i,j=1,2,\cdots,n)$, ապա գոյություն ունի $K>0$ հաստատուն այնպիսին, որ

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|=|a_{ij}(t)|\le K,\ \ t\in[q_1,q_2],\ (i,j=1,2,\cdots,n)\ :$$

Այդ դեպքում ըստ լեմմա 4.1 –ի կամայական $(t,\vec{x}^1)$ և $(t,\vec{x}^2)$ կետերի համար, որտեղ $t\in[q_1,q_2]$, $\vec{x}^1,\vec{x}^2\in R^n$ տեղի ունի

$$\left|\vec{f}(t,\vec{x}^1)-\vec{f}(t,\vec{x}^2)\right|=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|f_i(t,\vec{x}^1)-f_i(t,\vec{x}^2)\right|^2\right)^{1/2}\le\left(\sum_{i=1}^{n}K^2n^2\left|\vec{x}^1-\vec{x}^2\right|^2\right)^{1/2}=$$

$$=K\cdot n^{3/2}\left|\vec{x}^1-\vec{x}^2\right| \tag{5.3}$$

առնչությունը:

Նկատենք, որ հաջորդական մոտարկումներում մասնակցող $\vec{\varphi}_k(t)$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը որոշված և անընդհատ է (r_1,r_2)-ում (ինչո՞ւ):

Նշանակենք $\max\limits_{t\in[q_1,q_2]}|\vec{\varphi}_1(t)-\vec{\varphi}_0(t)|=C$, որտեղ $\vec{\varphi}_0(t)$-ն կամայական անընդհատ ֆունկցիա է (r_1,r_2)-ում, այնպիսին, որ $\vec{\varphi}_0(t_0)=\vec{x}^0$ և ցույց տանք, որ ցանկացած $l\in N$ և $t\in[q_1,q_2]$-ի համար տեղի ունի

$$|\vec{\varphi}_{l+1}(t)-\vec{\varphi}_l(t)|\le C\cdot\frac{(n^{3/2}\cdot K\cdot|t-t_0|)^l}{l!} \tag{5.4$_l$}$$

անհավասարությունը:

Ապացույցը տանենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով: $l=1$ դեպքում ըստ (5.3) անհավասարության, կունենանք՝

$$|\vec{\varphi}_2(t)-\vec{\varphi}_1(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_1(\tau))-\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_0(\tau))d\tau\right|\le\left|\int_{t_0}^{t}\left|\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_1(\tau))-\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_0(\tau))\right|d\tau\right|\le$$

$$\le K\cdot n^{3/2}\max_{t\in[q_1,q_2]}|\vec{\varphi}_1(t)-\vec{\varphi}_0(t)||t-t_0|\le K\cdot n^{3/2}\cdot C|t-t_0|$$

և (5.4_1) անհավասարությունն ապացուցված է: Ենթադրենք, որ ճիշտ են (5.4_l) անհավասարությունները $l=1,2,\cdots,m$ դեպքում, ապացուցենք (5.4_{m+1}) անհավասարությունը: Կունենանք՝

$$|\vec{\varphi}_{m+2}(t)-\vec{\varphi}_{m+1}(t)|\le\left|\int_{t_0}^{t}\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_{m+1}(\tau))-\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_m(\tau))d\tau\right|\le$$

$$\le Kn^{3/2}\left|\int_{t_0}^{t}|\vec{\varphi}_{m+1}(\tau))-\vec{\varphi}_m(\tau))|d\tau\right|\le$$

$$\le C\cdot\frac{\left(Kn^{3/2}\right)^{m+1}}{m!}\left|\int_{t_0}^{t}|\tau-t_0|^m d\tau\right|=C\cdot\frac{\left(Kn^{3/2}\right)^{m+1}|t-t_0|^{m+1}}{(m+1)!}$$

և (5.4_{m+1}) անհավասարությունն ապացուցված է, որով և ըստ մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի, ապացուցված են (5.4_l) անհավասարությունները բոլոր $l=1,2,\cdots$ թվերի համար:

Եթե այժմ $t\in[q_1,q_2]$-ին, ապա (5.4_l)–ից կունենանք՝

$$\|\varphi_{l+1}-\varphi_l\|=\max_{t\in[q_1,q_2]}|\varphi_{l+1}(t)-\varphi_l(t)|\le C\frac{(K\cdot n^{3/2}(q_2-q_1))^l}{l!}$$

անհավասարությունը: Քանի որ

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\left(K\cdot n^{3/2}(q_2-q_1)\right)^l}{l!}$$

թվային շարքը զուգամետ է կամայական K, n և (q_2-q_1) թվերի համար (ստուգե՛լ), ապա $\{\vec{\varphi}_l(t)\}$ վեկտոր-ֆունկցիաների հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է $[q_1, q_2]$–ում (ինչո՞ւ): Ենթադրենք $\{\vec{\varphi}_l(t)\}$ հաջորդականությունը $[q_1, q_2]$-ում զուգամիտում է $\vec{\varphi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիային: Ցույց տանք, որ այդ դեպքում $\{A\vec{\varphi}_l\}$ հաջորդականությունը $[q_1, q_2]$-ում կզուգամիտի $A\vec{\varphi}$-ին: Դարձյալ օգտվելով (5.3) անհավասարությունից՝ կունենանք.

$$\|A\vec{\varphi}_l - A\vec{\varphi}\| = \max_{q_1 \le t \le q_2} \left| \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_l(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) d\tau \right| \le n^{3/2} \cdot K \cdot \|\vec{\varphi}_{l-1} - \vec{\varphi}\| \cdot (q_2 - q_1):$$

Այսինքն՝ $\{A\vec{\varphi}_l\}$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է $A\vec{\varphi}$-ին:

Այժմ $\vec{\varphi}_{l+1} = A\vec{\varphi}_l$ առնչության երկու մասերում անցնելով սահմանի, երբ $l \to \infty$, կունենանք, որ $A\varphi = \varphi$, այսինքն՝ $\vec{\varphi}(t)$-ն A օպերատորի անշարժ կետն է $[q_1, q_2]$-ում:

Քանի որ $[q_1, q_2]$-ը կամայական էր (r_1, r_2) միջակայքից, ապա ստանում ենք, որ $\{\vec{\varphi}_n(t)\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է (r_1, r_2)-ում և $\vec{\varphi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիան որոշված է ամբողջ (r_1, r_2)-ում, հետևաբար հանդիսանում է A օպերատորի անշարժ կետը (r_1, r_2)-ում: Ուրեմն $\vec{\varphi}(t)$-ն (5.1), (5.2) խնդրին համարժեք ինտեգրալ հավասարման միակ լուծումն է՝ որոշված (r_1, r_2)-ում: Թեորեմն ապացուցված է:

§6. ՉՇԱՐՈՒՆԱԿՎՈՂ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Չորրորդ պարագրաֆում Կոշու խնդրի լուծման գոյությունը կամ միակությունը ուսումնասիրվում էր լոկալ, տրված t_0 կետի շրջակայքում, ուշադրության չարժանացնելով այդ լուծումների որոշման տիրույթների հնարավոր ընդլայնման հնարավորությունը: Սույն կետում մենք կշեշտադրենք հենց որոշման տիրույթների առավելագույն ընդարձակման հարցը:

Այս նպատակից ելնելով՝ ներկա պարագրաֆում միևնույն Կոշու խնդրի երկու լուծումներին, որոնք որոշված են տարբեր միջակայքերում, կանվանենք տարբեր լուծումներ: Ինչպես նաև կենթադրենք, որ

$$\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x}) \tag{6.1}$$

համակարգի համար բավարարված են գոյության և միակության 4.1 թեորեմի պայմանները:

Դիցուք $\vec{\varphi}(t)$ և $\vec{\psi}(t)$ ֆունկցիաները (6.1) համակարգի լուծումներ են որոշված համապատասխանաբար (r_1, r_2) և (q_1, q_2) միջակայքերում:

Սահմանում 6.1: Կասենք, որ $\vec{\varphi}(t)$ լուծումը հանդիսանում է $\vec{\psi}(t)$ լուծման շարունակություն, եթե $\vec{\psi}(t)$ լուծման (q_1, q_2) որոշման տիրույթն ընկած է $\vec{\varphi}(t)$ լուծման (r_1, r_2) որոշման տիրույթի մեջ՝ $(q_1, q_2) \subset (r_1, r_2)$ և $\vec{\varphi}(t)$-ն համընկնում է $\vec{\psi}(t)$-ի հետ (q_1, q_2) միջակայքում՝ $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$, $t \in (q_1, q_2)$:

Սահմանում 6.2: (6.1) համակարգի (m_1, m_2) –ում որոշված $\vec{\varphi}(t)$ լուծումը, կանվանենք չշարունակվող լուծում, եթե գոյություն չունի (6.1) համակարգի $\vec{\varphi}(t)$-ից տարբեր լուծում, որն հանդիսանում է $\vec{\varphi}(t)$ լուծման շարունակություն :

Հարց է առաջանում. արդյո՞ք (6.1) համակարգի յուրաքանչյուր լուծում կարելի է շարունակել մինչև չշարունակվող լուծում, և ինչպե՞ս կառուցել այն: Սույն պարագրաֆում ցույց կտրվի չշարունակվող լուծման գոյությունը և կապացուցվի դրա մի կարևոր հատկություն, որից մենք կօգտվենք հաջորդ գլխում:

Թեորեմ 6.1: Ω տիրույթին պատկանող ցանկացած $(t_0, \vec{x}^0)$ կետի համար գոյություն ունի (6.1) համակարգի $(t_0, \vec{x}^0)$ կետով անցնող չշարունակվող լուծում:

Չշարունակվող լուծումը միակն է հետևյալ իմաստով. եթե երկու չշարունակվող լուծումներ համընկնում են t-ի որևէ արժեքի դեպքում, ապա դրանք ունեն միևնույն որոշման տիրույթը և համընկնում են այդ որոշման տիրույթում:

Ապացույց: (6.1) համակարգի $(t_0, \vec{x}^0)$ կետով անցնող յուրաքանչյուր լուծում ունի իր (r_1, r_2) որոշման տիրույթը: Այդ լուծումների որոշման տիրույթների ձախ ծայրակետերի բազմությունը նշանակենք R_1-ով, իսկ աջ ծայրակետերի բազմությունը՝ R_2-ով: Նշանակենք նաև $m_1 = \inf R_1$, $m_2 = \sup R_2$, $(-\infty \le m_1 < m_2 \le +\infty)$:

Այժմ կառուցենք (6.1) համակարգի $(t_0, \vec{x}^0)$ կետով անցնող այնպիսի $\vec{\varphi}(t)$ լուծում, որը որոշված լինի (m_1, m_2) միջակայքում:

Դիցուք t_*-ը (m_1, m_2) միջակայքի որևէ կետ է: Ենթադրենք $t_* > t_0$: Քանի որ

$t_* < m_2$, իսկ $m_2 = \sup R_2$, հետևաբար գոյություն ունի (6.1) համակարգի $(t_0, \vec{x}^0)$ կետով անցնող այնպիսի $\vec{\psi}(t)$ լուծում, որոշված (q_1, q_2) միջակայքում, որ $t_* \in (q_1, q_2)$: Այժմ t_* կետում $\vec{\varphi}$ ֆունկցիային վերագրենք $\vec{\psi}(t_*)$ արժեքը՝ $\vec{\varphi}(t_*) = \vec{\psi}(t_*)$, և ցույց տանք, որ այսպես որոշված $\vec{\varphi}$ ֆունկցիայի արժեքը t_* կետում կախված չէ $\vec{\psi}(t)$ ֆունկցիայի ընտրությունից: Դիցուք $\vec{\chi}(t)$ ֆունկցիան ևս (6.1) համակարգի $(t_0, \vec{x}^0)$ կետով անցնող այնպիսի լուծում է, որի որոշման տիրույթը պարունակում է t_* կետը: Ըստ գոյության և միակության թեորեմի՝ $\vec{\psi}(t)$ և $\vec{\chi}(t)$ լուծումները համընկնում են իրենց որոշման տիրույթների ընդհանուր միջակայքում, որին պատկանում է նաև t_* կետը: Հետևաբար $\vec{\chi}(t_*) = \vec{\psi}(t_*) = \vec{\varphi}(t_*)$ և $\vec{\varphi}$ ֆունկցիայի արժեքը t_* կետում կախված չէ $\vec{\psi}(t)$ լուծման ընտրությունից: Քանի որ t_*-ը (m_1, m_2) միջակայքի ցանկացած կետ է, ապա այսպես կառուցված $\vec{\varphi}(t)$ ֆունկցիան որոշված կլինի (m_1, m_2) միջակայքում: Մյուս կողմից՝ յուրաքանչյուր $t_* \in (m_1, m_2)$ կետի համար գոյություն ունի t_* կետի (q_1, q_2) շրջակայք և այդ շրջակայքում որոշված (6.1) համակարգի $\vec{\psi}(t)$ լուծում այնպիսին, որ $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\psi}(t)$, ապա այս կերպ կառուցված $\vec{\varphi}(t)$ ֆունկցիան կլինի դիֆերենցելի և կհանդիսանա (6.1) համակարգի լուծում:

Ակնհայտ է, որ այսպես կառուցված $\vec{\varphi}(t)$ ֆունկցիան կհանդիսանա (6.1) համակարգի $(t_0, \vec{x}^0)$ կետով անցնող ցանկացած լուծման շարունակություն:

Ցույց տանք, որ $\vec{\varphi}(t)$-ն չշարունակվող լուծում է:

Ենթադրենք հակառակը. դիցուք (6.1) համակարգի $(t_0, \vec{x}^0)$ սկզբնական պայմանին բավարարող որևէ $\vec{\psi}(t)$ լուծում, որոշված (r_1, r_2) միջակայքում հանդիսանում է $\vec{\varphi}(t)$ լուծման շարունակություն: Այդ դեպքում պետք է տեղի ունենա $r_1 \le m_1 < m_2 \le r_2$ առնչությունը: Եթե գրված անհավասարություններից յուրաքանչյուրը վերածվում է հավասարության, ապա $\vec{\psi}(t)$-ն նույնաբար համընկնում է $\vec{\varphi}(t)$-ի հետ, իսկ եթե անհավասարություններից որևէ մեկը խիստ է, ապա քանի որ $r_1 \in R_1$ և $r_2 \in R_2$, ապա գրվածն հակասում է m_1 և m_2 թվերի սահմանմանը: Ստացված հակասությունից բխում է, որ $\vec{\varphi}(t)$-ն չշարունակվող լուծում է:

Այժմ ցույց տանք չշարունակվող լուծման միակությունը: Դիցուք (6.1) համակարգի երկու $\vec{\varphi}(t)$ և $\vec{\psi}(t)$ չշարունակվող լուծումներ, որոնք որոշված են համապատասխանաբար (m_1, m_2) և (r_1, r_2) միջակայքերում, համընկնում են որևէ $t = t_0$ արժեքի դեպքում:

Նշանակենք՝ $\vec{x}^0 = \vec{\varphi}(t_0) = \vec{\psi}(t_0)$: Կունենանք, որ $\vec{\varphi}(t)$ և $\vec{\psi}(t)$ ֆունկցիաները միևնույն $(t_0, \vec{x}^0)$ սկզբնական պայմաններին բավարարող (6.1.) համակարգի չշարունակվող լուծումներ են: Քանի որ $\vec{\varphi}(t)$-ն չշարունակվող լուծում է, հետևաբար պետք է պարունակի $(t_0, \vec{x}^0)$ սկզբնական պայմաններին բավարարող ցանկացած լուծման (այդ թվում նաև $\vec{\psi}(t)$ լուծման) որոշման տիրույթ, այսինքն $(r_1, r_2) \subset (m_1, m_2)$:

Նմանապես՝ դիտարկելով $\vec{\psi}(t)$-ն որպես չշարունակվող լուծում, կունենանք, որ $(m_1, m_2) \subset (r_1, r_2)$, այսինքն $(r_1, r_2) = (m_1, m_2)$: Այժմ, ըստ գոյության և միակության թեորեմի, քանի որ $\vec{\varphi}(t)$-ն և $\vec{\psi}(t)$-ն միևնույն սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծումներ են, հետևաբար դրանք նույնն են՝ $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\psi}(t)$, $t \in (m_1, m_2)$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 6.2: Դիցուք E-ն Ω-ի մեջ ընկած որևէ փակ սահմանափակ (կոմպակտ) բազմություն է, իսկ $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ ֆունկցիան (6.1) համակարգի որևէ չշարունակվող լուծում է, որոշված (m_1, m_2) միջակայքում: Այդ դեպքում գոյություն ունեն c_1 և c_2 թվեր, $(m_1 < c_1 < c_2 < m_2)$ այնպիսիք, որ $(t, \vec{\varphi}(t))$ կետը չի պատկանում E բազմությանը, երբ $t \in (m_1, m_2) \setminus [c_1, c_2]$, այսինքն (6.1) համակարգի ցանկացած չշարունակվող լուծում ինչ-որ պահից լքում է Ω տիրույթի մեջ ընկած ցանկացած E կոմպակտ բազմություն:

Ապացույց: Ցույց տանք c_1 քվի գոյությունը (c_2 քվի գոյությունը ապացուցվում է նույն ձևով): Եթե $m_1 = -\infty$, ապա թեորեմի պայմանին բավարարող c_1 քվի գոյությունն ապացուցված է, քանի որ երբ $t \to -\infty$, ապա $(t, \vec{\varphi}(t))$ կետը ինչ-որ պահից պետք է գտնվի E սահմանափակ բազմությունից դուրս: Հետևաբար հետաքրքիր է քննարկել այն դեպքը, երբ $m_1 > -\infty$:

Դիտարկենք R^{n+1}-ը, որպես $(n+1)$ չափանի մետրիկական տարածություն (տե՛ս §2), որտեղ մետրիկան սովորական էվկլիդյան հեռավորությունն է՝

$$\rho(y^1, y^2) = \rho((t_1, x^1), (t_2, x^2)) = ((t_2 - t_1)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_i^1)^2)^{1/2} :$$

Քանի որ Ω-ն բաց բազմություն է, հետևաբար նրա լրացումը՝ $\Omega^C \equiv R^{n+1} \setminus \Omega$-ն փակ բազմություն է: Հայտնի է, որ մետրիկական տարածության մեջ E փակ սահմանափակ բազմության և նրա հետ հատում չունեցող Ω^C փակ բազմության միջև հեռավորությունը դրական է, այսինքն՝

$$\rho_0 = \rho(\Omega^C, E) = \inf_{\substack{M \in \Omega^C \\ P \in E}} \rho(M, P) > 0:$$

Նշանակենք E^*-ով R^{n+1} տարածության այն կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունը E-ից չի գերազանցում $\frac{\rho_0}{2}$ թիվը՝

$$E^* = \left\{ y \in R^{n+1}; \rho(y, E) \le \frac{1}{2}\rho_0 \right\}:$$

Ցույց տանք, որ E^*-ը Ω-ի մեջ ընկած փակ բազմություն է՝ $E^* = \overline{E}^* \subset \Omega$: Նախ ցույց տանք փակությունը: Դիցուք $y_n \in E^*$, $(n = 1, 2, \cdots)$ և $y_n \to y_0$, երբ $n \to \infty$: Քանի որ $y_n \in E^*$, ապա $\rho(y_n, E) \le \frac{\rho_0}{2}$, $(n = 1, 2, \cdots)$:

Ստացված անհավասարություններում անցնելով սահմանի երբ $n \to \infty$ և օգտվելով $\rho(y, E)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից ըստ y փոփոխականի, կունենանք, որ $\rho(y_0, E) \le \frac{\rho_0}{2}$, այսինքն՝ $y_0 \in E^*$: Հետևաբար E^*-ը փակ է: Այժմ ցույց տանք, որ $E^* \subset \Omega$: Վերցնենք Ω –ին չպատկանող որևէ y կետ, այսինքն՝ $y \in \Omega^C$: Նկատենք, որ $\rho(y,E) \geq \rho(\Omega^C, E) = \rho_0$, ուրեմն $y \notin E^*$ և հետևաբար $E^* \subset \Omega$: Մյուս կողմից՝ քանի որ E^*-ը Ω-ի մեջ ընկած փակ սահմանափակ բազմություն է, ապա ըստ Վայերշտրասի թեորեմի՝

$$M = \max_{E^*}\left|\vec{f}(t,\vec{x})\right| < \infty, \quad L = \max_{i,j=1,\cdots,n}\left|\frac{\partial f_i(t,\vec{x})}{\partial x_j}\right| < \infty:$$

Այժմ դառնանք հավասարումների նորմալ համակարգերի համար գոյության և միակության 4.1 թեորեմի ապացույցին: Ապացույցի ընթացքում ընտրվեց Ու փակ սահմանափակ բազմությունը և թեորեմի հետագա շարադրանքը տարվեց Ու փակ սահմանափակ բազմության համար: Մեր դեպքում որպես այդպիսի փակ սահմանափակ բազմություն ընտրենք $E^* \subset \Omega$ բազմությունը: Ընտրենք նաև q և a թվերն այնպիսիք, որ $q^2 + a^2 < \dfrac{\rho_0^2}{4}$: Ցանկացած $A(t_0, x^0) \in E$ կետի հետ միասին դիտարկենք հետևյալ փակ սահմանափակ բազմությունը՝ Ու$=\{(t,\vec{x});\ |t-t_0| \leq q;\ |\vec{x}-\vec{x}^0| \leq a\}$: Քանի որ ցանկացած $B \in$ Ու կետի համար $\rho(B,E) \leq \rho(B,A) \leq \sqrt{q^2+a^2} < \dfrac{\rho_0}{2}$, հետևաբար Ու$\subset E^*$:

Այժմ E բազմության կամայական $(t_0, \vec{x}^0)$ կետի համար դիտակենք

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{f}\ (t,\vec{x}) & (6.1) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}^0, & (6.2) \end{cases}$$

Կոշու խնդիրը: Ըստ 4.1 թեորեմի, եթե $r \leq \min\left\{q; \dfrac{a}{M}; \dfrac{1}{L\cdot n^{1/2}}\right\}$, ապա (6.1)-(6.2) Կոշու խնդիրն ունի և այն էլ միակ լուծում, որոշված $(t_0 - r, t_0 + r)$ միջակայքում:

Քանի որ Ու զուգահեռանիստի չափսերը անկախ են $(t_0, \vec{x}^0) \in E$ կետի ընտրությունից, ապա վերն ասվածի համաձայն r թիվը *կարելի է ընտրել նույնը բոլոր* $(t_0, \vec{x}^0) \in E$ կետերի համար: Այժմ ցույց տանք, որ որպես c_1 կարելի է ընտրել $c_1 = m_1 + r$ թիվը: Իրոք, ենթադրենք որևէ t_1 թվի համար $(m_1 < t_1 < c_1)$,

$(t_1, \vec{\varphi}(t_1)) \in E$: Դիտարկենք (6.1) համակարգին համապատասխանող Կոշու խնդիրը $(t_1 \vec{x}^1) = (t_1, \vec{\varphi}(t_1))$ սկզբնական պայմաններով:

Ըստ 4.1 թեորեմի գոյություն կունենա նշված Կոշու խնդրի $\vec{\psi}(t)$ լուծում որոշված $(t_1 - r, t_1 + r)$ միջակայքում: Բայց նույն Կոշու խնդրի չշարունակվող լուծումն է $\vec{\varphi}(t)$ ֆունկցիան՝ որոշված (m_1, m_2) միջակայքում: Հետևաբար $\vec{\varphi}(t)$ լուծման որոշման (m_1, m_2) տիրույթը պետք է պարունակի $(t_1 - r, t_1 + r)$ միջակայքը $(m_1 \le t_1 - r < t_1 + r \le m_2)$ և $\vec{\psi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t)$, $t \in (t_1 - r, t_1 + r)$: (6.3)

Մյուս կողմից, ըստ ենթադրության $t_1 - r < m_1 + r - r = m_1$, ինչը հակասում է (6.3)-ին: Ստացված հակասությունից բխում է, որ ցանկացած $t \in (m_1, c_1)$ թվի համար $(t, \vec{\varphi}(t))$ կետը գտնվում է E կոմպակտից դուրս: Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 6.1: Ապացուցված թեորեմից բխում է, որ եթե (m_1, m_2) միջակայքում որոշված $\vec{\varphi}(t)$ ֆունկցիան (6.1) համակարգի չշարունակվող լուծումն է, և $t \to m_1 + 0$ կամ $t \to m_2 - 0$, ապա $(t, \vec{\varphi}(t))$ կետը ձգտում է Ω տիրույթի եզրագծին կամ անվերջության:

§7 ԿՈՇՈՒ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԿԱԽՎԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ՏՎՅԱԼՆԵՐԻՑ ԵՎ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԱՋ ՄԱՍԻՑ

Մինչև այժմ, երբ խոսքը գնում էր

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x}) & (7.1) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}' & (7.2) \end{cases}$$

Կոշու խնդրի լուծման մասին, ընդգծվում էր նրա այս կամ այն բնույթի կախվածությունը անկախ փոփոխականից: Սակայն ակնբախ է, որ Կոշու խնդրի լուծումը կախված է նաև սկզբնական պայմաններից և համակարգը որոշող $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_n)$ վեկտոր ֆունկցիայից, այսինքն $\vec{x} = \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0, \vec{f})$:

եվ առաջանում է բնական հարց. ինչպե՞ս են ազդում Կոշու խնդրի լուծման վրա սկզբնական պայմանների կամ հավասարումների աջ մասերի փոփոխությունները: Կարելի է սպասել, որ որոշ դեպքերում սկզբնական պայմանների «քիչ» փոփոխությունները չեն բերի լուծումների միմյանցից մեծ շեղումների:

Սույն պարագրաֆում ուսումնասիրվում է (7.1) հավասարումների նորմալ համակարգի Կոշու խնդրի $\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0,\vec{f})$ լուծման վարքը ըստ $t_0,\vec{x}_0,\vec{f}$ արգումենտների: Ցույց կտանք, որ որոշակի բնական պայմանների դեպքում այդ լուծումը անընդհատ է՝ կախված սկզբնական $(t_0,\vec{x}^0)$ կետից և համակարգի աջ մասից՝ $\vec{f}$ -ից: Այսպիսի հետազոտությունները ունեն մեծ կիրառական նշանակություն:

Իրոք, եթե բնագիտության որևէ խնդիր բերվում է Կոշու խնդրի լուծմանը, ապա սկզբնական պայմանները որոշվում են փորձից, որի արդյունքները ստացվում են ինչ–որ ճշտությամբ: Եթե լուծումը չլիներ անընդհատորեն կախված սկզբնական պայմաններից, ապա, օրինակ, $\vec{x}_0$-ն որոշելիս թույլ տրված անճշտությունը կարող էր բերել ստացված լուծման մեծ շեղմանը իրական պատկերից և կիրառական արժեք չէր կարող ունենալ: Ավելին՝ իրական երևույթի մաթեմատիկական մոդելը կառուցելիս մտածված թույլ են տրվում որոշ անճշտություններ՝ նպատակ ունենալով առանձնացնել երևույթի առավել էական կողմերը: Պետք է համոզված լինել, որ այդպիսի անճշտությունները հետագայում չեն բերի զգալի սխալների:

Ստորև $\vec{F}(t,\vec{x})=(F_1(t,\vec{x}),\cdots,F_n(t,\vec{x}))$ վեկտոր-ֆունկցիայի ($\vec{x}^0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ թվային վեկտորի) համար կօգտագործվի

$$\left|\vec{F}(t,\vec{x})\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|F_i(t,\vec{x})\right| \qquad \left(\left|\vec{x}^0\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^0\right|\right) \tag{7.3}$$

նշանակումը:

Սահմանում 7.1: Կասենք, որ (7.1) համակարգի Կոշու խնդրի լուծումը անընդհատ է կախված սկզբնական պայմաններից, եթե կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ թիվ, որ եթե

$$\left|t_1-t_2\right|<\delta, \left|\vec{x}^1-\vec{x}^2\right|<\delta,$$

ապա $\left|\vec{\varphi}(t)-\vec{\psi}(t)\right|<\varepsilon$, $t\in(\alpha,\beta)$, որտեղ $\vec{\varphi}(t)$ և $\vec{\psi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիաները

$$\vec{\varphi}(t_1) = \vec{x}^1, \quad \vec{\psi}(t_2) = \vec{x}^2$$

սկզբնական պայմաններով որոշված (7.1) համակարգի լուծումներն են համապատասխանաբար (α_1, β_1) և (α_2, β_2) միջակայքերում, իսկ $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2)$:

Սահմանում 7.2: Կասենք, որ Կոշու խնդրի լուծումը անընդհատ է կախված (7.1) համակարգի աջ մասից , եթե կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ թիվ, որ եթե

$$\|\vec{f} - \vec{g}\| \equiv \sup_{(t,x)\in\Omega} \left|\vec{f}(t,\vec{x}) - \vec{g}(t,\vec{x})\right| < \delta \ ,$$

ապա

$$\|\vec{\varphi} - \vec{\psi}\| \equiv \max_{t\in[a,b]} \left|\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)\right| < \varepsilon ,$$

որտեղ $\vec{\varphi}(t)$-ն $\vec{x}' = \vec{f}(t,\vec{x})$, իսկ $\vec{\psi}(t)$-ն $\vec{x}' = \vec{g}(t,\vec{x})$ համակարգի $[a,b]$ հատվածում որոշված և միևնույն $(t_0, \vec{x}^0)$ կետով անցնող լուծումներն են, այսինքն՝

$$\vec{\varphi}(t_0) = \vec{\psi}(t_0) = \vec{x}^0 :$$

Եթե ուսումնասիրվող Կոշու խնդիրն ունի միակ լուծում, որն անընդհատ է, կախված սկզբնական պայմաններից, ապա ընդունված է ասել, որ Կոշու խնդիրը կոռեկտ է դրված (կոռեկտություն ըստ Հադամարի)։ Ստորև ցույց կտրվի, որ որոշակի պայմանների առկայության դեպքում սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների նորմալ համակարգերի համար Կոշու խնդիրը կոռեկտ է դրված։ Սակայն բնագիտության մեջ հանդիպում են խնդիրներ, որոնք բերվում են ոչ կոռեկտ դրված խնդիրների (հիմնականում մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների համար)։ Գոյություն ունեն նման խնդիրների հետազոտման բազմաթիվ օրինակներ, սակայն մենք այստեղ նման հարցերի վրա կանգ չենք առնի։

Սույն պարագրաֆի հիմնական արդյունքը ապացուցելիս օգտակար է լինում Գրոնուոլի լեմմայի մեկ այլ տարբերակ։

Լեմմա 7.1: Դիցուք $[a,b]$ հատվածում անընդհատ դիֆերենցելի $\vec{\varphi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիան բավարարում է

$$\left|\vec{\varphi}'(t)\right| \le M\left|\vec{\varphi}(t)\right| + N, \qquad t \in [a,b] \tag{7.4}$$

անհավասարությանը, որտեղ $M > 0$, $N \ge 0$ հաստատուններ են։

Այդ դեպքում կամայական t և t_0 կետերի համար $[a,b]$-ից տեղի ունի

$$|\vec{\varphi}(t)| \le |\vec{\varphi}(t_0)| e^{M|t-t_0|} + \frac{N}{M}\left(e^{M|t-t_0|} - 1\right) \tag{7.5}$$

անհավասարությունը:

Ապացույց: Ըստ Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի՝

$$\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{\varphi}'(s)ds:$$

Նախ դիտարկենք $t \ge t_0$ դեպքը:

Օգտվելով եռանկյան անհավասարությունից՝ ստանում ենք.

$$|\vec{\varphi}(t)| - |\vec{\varphi}(t_0)| \le \left||\vec{\varphi}(t)| - |\vec{\varphi}(t_0)|\right| \le |\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(t_0)| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{t_0}^{t} \varphi_i'(s)ds\right| \le \int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i'(s)|ds = \int_{t_0}^{t}|\vec{\varphi}'(s)|ds:$$

Այսինքն՝

$$|\vec{\varphi}(t)| \le |\vec{\varphi}(t_0)| + \int_{t_0}^{t}|\vec{\varphi}'(s)|ds: \tag{7.6}$$

Այստեղից և (7.4) պայմանից կունենանք.

$$|\vec{\varphi}'(t)| \le M|\vec{\varphi}(t)| + N \le M\int_{t_0}^{t}|\vec{\varphi}'(s)|ds + M|\vec{\varphi}(t_0)| + N \ :$$

Օգտվելով 1.3 լեմմայից , որտեղ

$v(t) = |\vec{\varphi}'(t)|$, $u(t) = M$, $C = M|\vec{\varphi}(t_0)| + N$ ստանում ենք

$$|\vec{\varphi}'(t)| \le \left(M|\vec{\varphi}(t_0)| + N\right)e^{M(t-t_0)}:$$

Տեղադրելով այս գնահատականը (7.6)-ի մեջ՝ կունենանք.

$$|\vec{\varphi}(t)| \le |\vec{\varphi}(t_0)| + \int_{t_0}^{t}\left(M|\vec{\varphi}(t_0)| + N\right)e^{M(s-t_0)}ds =$$

$$= |\vec{\varphi}(t_0)| + \frac{1}{M}\left(M|\vec{\varphi}(t_0)| + N\right)\left(e^{M(t-t_0} - 1\right) =$$

$$= |\vec{\varphi}(t_0)|e^{M(t-t_0)} + \frac{N}{M}\left(e^{M(t-t_0)} - 1\right):$$

Այսինքն ստացվեց պահանջվող (7.5) առնչությունը $t \geq t_0$ կետերի համար:

Այժմ ենթադրենք, որ $a \leq t \leq t_0$: Կատարենք $\tilde{t} = 2t_0 - t$ փոփոխականի փոխարինումը: Հեշտ է տեսնել, որ $t_0 \leq \tilde{t} \leq 2t_0 - a$:

Նշանակենք $\tilde{\vec{\varphi}}(\tilde{t}) = \vec{\varphi}(2t_0 - \tilde{t})$: Համաձայն (7.4)-ի

$$\left|\tilde{\vec{\varphi}}'(\tilde{t})\right| = \left|\vec{\varphi}'(2t_0 - \tilde{t})\right| \leq M\left|\vec{\varphi}(2t_0 - \tilde{t})\right| + N = M\left|\tilde{\vec{\varphi}}(\tilde{t})\right| + N:$$

Քանի որ $\tilde{t} \geq t_0$, ապա ըստ արդեն ապացուցված դեպքի

$$\left|\tilde{\vec{\varphi}}(\tilde{t})\right| \leq \left|\tilde{\vec{\varphi}}(t_0)\right| e^{M(\tilde{t}-t_0)} + \frac{N}{M}\left(e^{M(\tilde{t}-t_0)} - 1\right):$$

Վերադառնալով t փոփոխականին և նկատի ունենալով, որ $\tilde{\vec{\varphi}}(t_0) = \vec{\varphi}(t_0)$, ստանում ենք

$$\left|\vec{\varphi}(t)\right| = \left|\vec{\varphi}(2t_0 - \tilde{t})\right| = \left|\tilde{\vec{\varphi}}(\tilde{t})\right| \leq \left|\vec{\varphi}(t_0)\right| e^{M(\tilde{t}-t_0)} + \frac{N}{M}\left(e^{M(\tilde{t}-t_0)} - 1\right) =$$

$$= \left|\vec{\varphi}(t_0)\right| e^{-M(t-t_0)} + \frac{N}{M}\left(e^{-M(t-t_0)} - 1\right) = \left|\vec{\varphi}(t_0)\right| e^{M|t-t_0|} + \frac{N}{M}\left(e^{M|t-t_0|} - 1\right):$$

անհավասարությունը: Լեմման ապացուցված է:

Այժմ ապացուցենք ևս մեկ պնդում, որից փաստորեն կբխի հավասարումների նորմալ համակարգերի լուծումների անընդհատ կախվածությունը սկզբնական պայմաններից և աջ մասից:

Թեորեմ 7.1: Դիցուք $\vec{f}(t, x_1, \cdots x_n) = \left(f_1(t, x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(t, x_1, \cdots, x_n)\right)$ վեկտոր-ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է $\Omega \subseteq R^{n+1}$ տիրույթում, բավարարում է Լիպշիցի պայմանին ըստ $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ փոփոխականների համախմբի հավասարաչափ t-ի նկատմամբ և սահմանափակ է՝ $\left|\vec{f}(t, x)\right| \leq M$, $(t, x) \in \Omega$: Ենթադրենք $\vec{\varphi}(t)$-ն և $\vec{\psi}(t)$-ն անընդհատ դիֆերենցելի վեկտոր-ֆունկցիաներ են $[a, b]$ հատվածում, որոնց գրաֆիկները ընկած են Ω-ում և ինչ–որ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ոչ բացասական թվերի համար բավարարում են

$$\left|\vec{\varphi}'(t) - \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))\right| \leq \varepsilon_1, \quad \left|\vec{\psi}'(t) - \vec{f}(t, \vec{\psi}(t))\right| \leq \varepsilon_2, \quad t \in [a, b] \qquad (7.7)$$

պայմաններին: Այդ դեպքում կամայական t, t_1, t_2 կետերի համար $[a,b]$-ից տեղի ունի

$$\left|\vec{\psi}(t)-\vec{\varphi}(t)\right| \le \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{L}\left(e^{L(t-t_1)}-1\right)+\left(\left|\vec{x}^2-\vec{x}^1\right|+\left(M+\varepsilon_2\right)\left|t_2-t_1\right|\right)e^{L(t-t_1)} \quad (7.8)$$

անհավասարությունը, որտեղ $\vec{x}^1=\vec{\varphi}(t_1)$, $\vec{x}^2=\vec{\psi}(t_2)$, իսկ L-ով նշանակված է $\vec{f}$ ֆունկցիայի Լիպշիցի հաստատունը:

Ապացույց: Նշանակենք $\vec{\chi}(t)=\vec{\psi}(t)-\vec{\varphi}(t)$: Հաշվի առնելով թեորեմի պայմանները՝ ստանում ենք:

$$\left|\vec{\chi}'(t)\right|=\left|\vec{\psi}'(t)-\vec{\varphi}'(t)\right|=\left|\vec{\psi}'(t)-\vec{f}(t,\vec{\psi}(t))+\vec{f}(t,\vec{\psi}(t))-\vec{f}(t,\vec{\varphi}(t))+\vec{f}(t,\vec{\varphi}(t)-\vec{\varphi}'(t))\right| \le$$

$$\le\left|\vec{\psi}'(t)-\vec{f}(t,\vec{\psi}(t))\right|+\left|\vec{f}(t,\vec{\psi}(t))-\vec{f}(t,\vec{\varphi}(t))\right|+\left|\vec{f}(t,\vec{\varphi}(t))-\vec{\varphi}'(t)\right| \le$$

$$\le L\left|\vec{\chi}(t)\right|+\varepsilon_1+\varepsilon_2:$$

Համաձայն լեմմա 7.1-ի՝ այստեղից բխում է

$$\left|\vec{\chi}(t)\right| \le \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{L}\left(e^{L|t-t_1|}-1\right)+\left|\vec{\chi}(t_1)\right|e^{L|t-t_1|} \quad (7.9)$$

անհավասարությունը կամայական t և t_1 կետերի համար $[a,b]$-ից:

Մյուս կողմից՝

$$\left|\vec{\psi}'(t)\right| \le \left|\vec{\psi}'(t)-\vec{f}(t,\vec{\psi}(t)\right|+\left|\vec{f}(t,\vec{\psi}(t))\right| \le \varepsilon_2+M:$$

Օգտվելով այս անհավասարությունից՝ ստանում ենք.

$$\left|\vec{\chi}(t_1)\right|=\left|\vec{\psi}(t_1)-\vec{\varphi}(t_1)\right|=\left|\vec{\psi}(t_2)-\vec{\varphi}(t_1)+\vec{\psi}(t_1)-\vec{\psi}(t_2)\right| \le$$

$$\le\left|\vec{\psi}(t_2)-\vec{\varphi}(t_1)\right|+\left|\vec{\psi}(t_2)-\vec{\psi}(t_1)\right|=\left|\vec{x}^2-\vec{x}^1\right|+\left|\int_{t_1}^{t_2}\vec{\psi}'(t)dt\right| \le$$

$$\le\left|\vec{x}^2-\vec{x}^1\right|+\left(M+\varepsilon_2\right)\left|t_2-t_1\right|:$$

Տեղադրելով ստացվածը (7.9)-ի աջ մասում՝ կստանանք պահանջվող (7.8) գնահատականը: Թեորեմն ապացուցված է:

Ապացուցված թեորեմից հետևում են հավասարումների նորմալ համակարգերի համար Կոշու խնդրի լուծման անընդհատ կախվածությունը սկզբնական պայմաններից և համակարգի աջ մասից: Սակայն այդ փաստերի կարևորությունը ընդգծելու համար ձևակերպենք դրանք թեորեմների տեսքով:

Թեորեմ 7.2: Դիցուք $\vec{f}=(f_1(t,x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_n(t,x_1,\cdots,x_n))$ վեկտոր-ֆունկցիան բավարարում է 7.1 թեորեմի պայմաններին: Այդ դեպքում (7.1) , (7.2) Կոշու խնդրի լուծումը անընդհատ է՝ կախված սկզբնական պայմաններից:

Ապացույց: Ենթադրենք $\vec{\varphi}(t)$ և $\vec{\psi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիաները $\vec{\varphi}(t_1)=\vec{x}^1$, $\vec{\psi}(t_2)=\vec{x}^2$ սկզբնական պայմաններին բավարարող (7.1) համակարգի լուծումներն են, այսինքն՝

$$\vec{\varphi}'(t)-\vec{f}(t,\vec{\varphi}(t))\equiv 0,\quad \vec{\psi}'(t)-f(t,\vec{\psi}(t))\equiv 0,\quad t\in[a,b]:$$

Այդ դեպքում, վերցնելով (7.1) թեորեմում $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$, (7.8) գնահատականը ընդունում է

$$|\vec{\varphi}(t)-\vec{\psi}(t)|\le\left(\left|x^2-x^1\right|+M|t_2-t_1|\right)e^{L|t-t_1|}$$

տեսքը: Դիցուք ε-ը կամայական դրական թիվ է և $\left|x^2-x^1\right|<\delta,\quad |t_2-t_1|<\delta:$ Ընտրելով

$$\delta=\frac{\varepsilon}{(1+M)}e^{-L(b-a)},$$

կստանանք

$$|\vec{\varphi}(t)-\vec{\psi}(t)|<\varepsilon,\quad t\in[a,b],$$

կամ, քանի որ t-ն կամայական է , ապա

$$\|\vec{\varphi}-\vec{\psi}\|=\max_{t\in[a,b]}|\vec{\varphi}(t)-\vec{\psi}(t)|<\varepsilon:$$

Վերջինս, համաձայն 7.1 սահմանման, նշանակում է, որ թեորեմի պնդումը ճիշտ է:

Թեորեմ 7.3: Ենթադրենք $\vec{f}=(f(t_1,x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_n(t,x_1,\cdots,x_n))$ վեկտոր-ֆունկցիան բավարարում է 7.1 թեորեմի պայմաններին: Այդ դեպքում (7.1), (7.2) Կոշու խնդրի լուծումը անընդհատ է՝ կախված համակարգի աջ մասից:

Ապացույց: Դիցուք $\vec{\varphi}(t)$-ն

$$\begin{cases}\vec{x}'=\vec{f}(t,\vec{x}), & (t,x)\in\Omega\\ \vec{x}(t_1)=\vec{x}^1\end{cases}$$

Կոշու խնդրի լուծումն է որոշված $[a,b]$-ում, իսկ $\vec{g}(t,\vec{x})$ վեկտոր-ֆունկցիան բավարարում է 7.1 թեորեմի պայմաններին և

$$\left\|\vec{f}-\vec{g}\right\|=\sup_{(t,x)\in\Omega}\left|\vec{f}(t,\vec{x})-\vec{g}(t,\vec{x})\right|<\delta \qquad (7.10)$$

Նշանակենք $\vec{\psi}(t)$-ով

$$\begin{cases}\vec{x}'=\vec{g}(t,\vec{x}), & (t,x)\in\Omega\\ \vec{x}(t_1)=\vec{x}^1\end{cases}$$

Կոշու խնդրի լուծումը որոշված նույն $[a,b]$-ում: Համաձայն 7.2 սահմանման թեորեմը կլինի ապացուցված, եթե ցույց տանք , որ կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար (7.10) պայմանում δ-ն կարելի է ընտրել այնպես, որ տեղի ունենա

$$\left\|\varphi-\psi\right\|<\varepsilon$$

գնահատականը: Ցույց տանք նման δ-ի ընտրության հնարավորությունը: Ունենք

$$\left|\vec{\psi}'(t)-\vec{f}(t,\vec{\psi}(t))\right|=\left|\vec{\psi}'(t)-\vec{g}(t,\vec{\psi}(t))+\vec{g}(t,\vec{\psi}(t))-\vec{f}(t,\vec{\psi}(t))\right|=$$

$$=\left|\vec{g}(t,\vec{\psi}(t))-\vec{f}(t,\vec{\psi}(t))\right|<\delta:$$

Թեորեմ 7.1-ից $t_1=t_2$, $\vec{x}^1=\vec{x}^2$, $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=\delta$ դեպքում բխում է

$$\left|\vec{\psi}(t)-\vec{\varphi}(t)\right|\le\frac{\delta}{L}\left(e^{L|t-t_1|}-1\right)<\frac{\delta}{L}e^{L(b-a)}, \qquad t\in[a,b]$$

անհավասարությունը: Ընտրելով $\delta=\varepsilon Le^{-L(b-a)}$ և օգտվելով t-ի կամայական լինելուց կստանանք $\left\|\vec{\varphi}-\vec{\psi}\right\|<\varepsilon$ առնչությունը: Թեորեմն ապացուցված է :

Այժմ ուսումնասիրենք (7.1) համակարգի լուծման ողորկության (ածանցելիության) հարցը կախված $\vec{f}(t,\vec{x})$ ֆունկցիայի ողորկությունից:

Թեորեմ 7.4: Դիցուք $\vec{f}(t,x_1,\cdots,x_n)$ վեկտոր-ֆունկցիան ունի մինչև p-րդ կարգի $(p\ge 0)$ անընդհատ մասնական ածանցյալներ $\left(f_i\in C^p(\Omega),\quad i=1,\cdots,n\right)$: Այդ դեպքում (7.1) համակարգի կամայական $\vec{\varphi}(t)$ լուծում կունենա առնվազն $(p+1)$-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ:

Ապացույց: Դիցուք $\vec{\varphi}(t)$-ն (7.1) համակարգի որևէ լուծում է՝ որոշված (a,b) միջակայքում, այսինքն՝

$$\vec{\varphi}'(t) \equiv \vec{f}(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)), \quad t \in (a,b): \tag{7.11}$$

Այստեղից բխում է, որ $\vec{\varphi}(t)$ լուծումը անընդհատ դիֆերենցելի է, որը նշանակում է թեորեմի ապացույցը $p=0$ դեպքում:

Դիցուք $p \geq 1$: Քանի որ $\vec{f}(t,x_1,\cdots,x_n)$ ֆունկցիան ունի անընդհատ ածանցյալներ ըստ $(t,x_1,\cdots,x_n)$ փոփոխականների համախմբության, ապա համաձայն բարդ ֆունկցիայի ածանցյալի վերաբերյալ թեորեմի՝ $\vec{f}(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$ մեկ փոփոխականի ֆունկցիան կունենա անընդհատ ածանցյալ ըստ t-ի: Հետևաբար (7.11) նույնության ձախ մասը նույնպես ունի անընդհատ ածանցյալ և տեղի ունի

$$\vec{\varphi}''(t) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\big(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)\big) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}\big(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)\big)\frac{d\varphi_i}{dt}(t) =$$

$$= \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\big(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)\big) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}\big(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)\big) f_i\big(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)\big) \tag{7.12}$$

նույնությունը: Հեշտ է տեսնել, որ ստացված նույնության աջ մասը ունի արդեն $(p-1)$-րդ կարգի ածանցյալ: Վերը բերված դատողությունները կիրառելով (7.12)-ի համար՝ կստանանք, որ $\vec{\varphi}(t)$ ֆունկցիան ունի երրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալ:

Շարունակելով նմանատիպ գործողությունները՝ կստանանք, որ $\vec{\varphi}(t)$-ն ունի $(p+1)$–րդ կարգի անընդհատ ածանցյալ:

§ 8. ՊԱՐԱՄԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Ֆիզիկական երևույթներ նկարագրող դիֆերենցիալ հավասարումները և համակարգերը հաճախ պարունակում են որոշ պարամետրեր (զանգված, առաձգականություն և այլն): Իրականության մեջ չափումների հետ կապված խնդիրներում այդ պարամետրերը հնարավոր չի լինում ճշգրիտ որոշել, այսինքն հավասաումները գրվում են որոշակի ճշտությամբ: Հետևաբար՝ որպեսզի հավասարումները կարողանան նկարագրել իրական երևույթներ, այսինքն՝ որպեսզի չափումների «փոքր» անճշտություններն էապես չազդեն արդյունքի վրա, անհրաժեշտ է, որ դրանց լուծումները անընդհատ կախված լինեն պարամետրերից:

Դիտարկենք $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_r$ պարամետրից կախված

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu}), \quad (t, \vec{x}, \vec{\mu}) \in G \subseteq R^{1+n+r} & (8.1) \\ \vec{x}(t_0, \vec{\mu}) = \vec{x}^0 & (8.2) \end{cases}$$

Կոշու խնդիրը $(\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_r))$: Մեր նպատակն է ուսումնասիրել այս խնդրի $\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{\mu})$ լուծման կախվածությունը $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_r$ պարամետրերից: Շարադրվող որոշ պնդումների ապացույցները կարելի է ստանալ որպես հետևանք նախորդ կետի թեորեմներից: Սակայն նկատի ունենալով այս դասի խնդիրների կարևորությունը՝ մենք գերադասում ենք սույն պարագրաֆի արդյունքները շարադրել անկախ, այլ եղանակով, մանավանդ որ այն հնարավորություն կտա ապացուցել ոչ միայն լուծման անընդհատ կախվածությունը այլ նաև ածանցելիությունը ըստ պարամետրերի:

Թեորեմ 8.1: Դիցուք $\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu})$ և $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(t, \vec{x}, \vec{\mu}), \quad (i = 1, \cdots, n)$ վեկտոր-ֆունկցիաները որոշված են $(t, \vec{x}, \vec{\mu})$ փոփոխականների $(1+n+r)$ չափանի տարածության G տիրույթում $(G \subseteq R^{1+n+r})$, անընդհատ են ըստ t, $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ փոփոխականների և $\vec{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_r)$ պարամետրերի համախմբության և $(t_0, \vec{x}^0, \vec{\mu}^0) \in G$:

Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ (8.1), (8.2) խնդրի $\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{\mu})$ լուծումը անընդհատ է Ռ=$\{(t, \vec{\mu});\ |t - t_0| < \delta,\ |\vec{\mu} - \vec{\mu}^0| < \delta\}$ տիրույթում ըստ $t, \vec{\mu}$ փոփոխականների համախմբության:

Ապացույց: Պարզության համար դիտարկենք մեկ հավասարման և մեկ μ պարամետրի դեպքը $(n = 1, \quad r = 1)$:

Կոշու խնդրի լուծումը ըստ համարժեքության 4.1 լեմմայի բերենք համարժեք

$$x(t,\mu) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau,\mu))d\tau \tag{8.3}$$

ինտեգրալ հավասարմանը, որը գրենք

$$x(t,\mu) = Ax(t,\mu) \tag{8.4}$$

օպերատորային տեսքով, որտեղ

$$Ax(t,\mu) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau,\mu))d\tau :$$

(8.3) կամ (8.4) հավասարման անընդհատ լուծման գոյությունը ապացուցելու համար կիրառենք սեղմող արտապատկերումների սկզբունքը (տե՛ս V §2):

Դիտարկենք $\Pi_0 = \{(t,x,\mu); \; |t-t_0| < a, \; |x-x^0| < b, \; |\bar{\mu}-\bar{\mu}^0| < c\}$

ուղղանկյուն զուգահեռանիստը և a,b,c թվերն ընտրենք այնպես, որ $\Pi_0 \subset G$:

Նշանակենք

$$M = \sup_{(t,x,\mu)\in\Pi_0} |f(t,x,\mu|, \quad L = \sup_{(t,x,\mu)\in\Pi_0} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,\mu)\right| :$$

Որպես (X,ρ) լրիվ մետրիկական տարածություն վերցնենք $x(t,\mu)$ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք անընդհատ են $\Pi_1 = \{(t,\mu); \; |t-t_0| < \delta, \; |\mu-\mu^0| < c\}$ տիրույթում և բավարարում են $\rho(x(t,\mu), x^0) \le b$ անհավասարությանը, որտեղ

$$\rho(x_1(t,\mu), x_2(t,\mu)) = \max_{\substack{|t-t_0|\le\delta \\ |\mu-\mu_0|\le c}} |x_1(t,\mu) - x_2(t,\mu)| .$$

Նկատենք, որ եթե $\varphi \in (X,\rho)$-ին, ապա

$$\Phi(t,\mu) \equiv A\varphi(t,\mu) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau,\mu)),\mu)d\tau$$

ֆունկցիան ունի առաջին կարգի անընդհատ ածանցյալ ըստ t փոփոխականի, և, համաձայն պարամետրից կախված ինտեգրալի անընդհատության մասին թեորեմի անընդհատ է ըստ μ փոփոխականի Π_1-ում: Հետևաբար այն բավարարում է ըստ t փոփոխականի նաև Լիպշիցի պայմանին Π_1-ի կամայական փակ ենթաբազմության վրա և, ինչպես գիտենք, (տես լեմմա 1.2) անընդհատ է ըստ t և μ փոփոխականների համախմբության: Բառացիորեն կրկնելով 1.1 թեորեմի ապացույցը՝ կստանանք, որ δ թվի համապատասխան ընտրության դեպքում A օպերատորը սեղմող է (X,ρ)-ում: Հետևաբար (8.4) հավասարումը ունի լուծում, որը A օպերատորի անշարժ կետն է և պատկանում է (X,ρ)-ին, այսինքն՝ այն անընդհատ է ըստ t,μ փոփոխականների համախմբության: Թեորեմն ապացուցված է:

Նման ձևով ապացուցվում է ընդհանուր (8.1) նորմալ համակարգի դեպքը:

(8.1), (8.2) խնդրի $\vec{x}(t,\vec{\mu})$ լուծման ածանցելիությունը ըստ պարամետրի ապացուցելու համար օգտագործվում է Հադամարի լեմման, որի հիմքում ընկած է մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար հայտնի Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևի ընդհանրացումը շատ փոփոխականի ֆունկցիաների համար:

Ինչպես գիտենք, $\Omega \subseteq R^n$ տիրույթը կոչվում է ուռուցիկ, եթե այն կամայական երկու $\vec{x}=(x_1,\cdots x_n)$ և $\vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)$ կետերի հետ մեկտեղ պարունակում է նաև այդ կետերը միացնող հատվածը:

Լեմմա 8.1: Դիցուք $g(\vec{x})$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է $\Omega \subseteq R^n$ ուռուցիկ տիրույթում: Այդ դեպքում կամայական $\vec{x},\vec{y} \in \Omega$ կետերի համար գոյություն ունի այդ կետերը միացնող հատվածին պատկանող $\vec{\xi}$ կետ այնպիսին, որ

$$g(\vec{y})-g(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}(\xi)(y_i-x_i)\ : \tag{8.5}$$

Ապացույց: $\vec{x}$ և $\vec{y}$ կետերը միացնող հատվածի կամայական կետ ունի $\vec{z}(t)=\vec{x}+t(\vec{y}-\vec{x})$ տեսք, որտեղ $t\in[0,1]$: Այդ հատվածի վրա g-ն մեկ t փոփոխականի ֆունկցիա է՝ $g(\vec{z}(t))\equiv f(t),\quad t\in[0,1]$:

Կիրառելով $f(t)$ ֆունկցիայի նկատմամբ Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը՝ ստանում ենք՝

$$f(1)-f(0)=f'(t_0),\quad 0<t_0<1\ : \tag{8.6}$$

Քանի որ $f(0)=g(\vec{z}(0))=g(\vec{x}),\quad f(1)=g(\vec{z}(1))=g(\vec{y})$ և

$$f'(t_0)=\frac{d}{dt}g(\vec{z}(t))\Big|_{t=t_0}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g(\vec{z}(t_0))}{\partial z_k}\frac{dz_k}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g(\vec{z}(t_0))}{\partial z_k}(y_k-x_k), \tag{8.7}$$

ապա (8.6)-ից անմիջական տեղադրմամբ ստացվում է (8.5) պահանջվող առնչությունը, որտեղ $\vec{\xi}=\vec{z}(t_0)$: Լեմման ապացուցված է:

Բերենք այս լեմմայի մեկ այլ ձևակերպում և ապացույց, որը կօգտագործվի հետագայում:

Լեմմա 8.2: Դիցուք բավարարված են 8.1 լեմմայի պայմանները: Այդ դեպքում կամայական $\vec{x}, \vec{y} \in \Omega$ կետերի համար տեղի ունի

$$g(\vec{y}) - g(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(\vec{x}, \vec{y})(y_k - x_k) \tag{8.8}$$

առնչությունը, որտեղ $\Phi_k \quad (k = 1, \cdots, n)$ ֆունկցիաները անընդհատ են ըստ $\vec{x}, \vec{y}$ փոփոխականների համախմբության:

Ապացույց: Նյուտոն-Լայբնիցի և բարդ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևից ունենք

$$g(\vec{y}) - g(\vec{x}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(\vec{z}(t))dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g(\vec{z}(t))}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g(\vec{z}(t))}{\partial z_k} (y_k - x_k)dt = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(\vec{x}, \vec{y})(y_k - x_k)$$

առնչությունը, որտեղ

$$\Phi_k(\vec{x}, \vec{y}) = \int_0^1 \frac{\partial g(\vec{z}(t))}{\partial z_k} dt, \quad k = 1, \cdots, n, \quad (\vec{z}(t) = \vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})): \tag{8.9}$$

Այստեղից և պարամետրից կախված ինտեգրալի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմից բխում է $\Phi_k(x, y) \ (k = 1, \cdots, n)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը:

Այժմ դիտարկենք $(n + m)$ փոփոխականի $F(\vec{x}, \vec{w})$ ֆունկցիան, որտեղ $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n), \ w = (w_1, \cdots, w_m)$:

Լեմմա (Յադամար): Ենթադրենք Ω-ն R^{n+m} տարածության տիրույթ է, որը յուրաքանչյուր հաստատագրված $\vec{w}$-ի համար ուռուցիկ է ըստ $\vec{x}$-ի:

Դիցուք $F(\vec{x}, \vec{w})$ ֆունկցիան որոշված է Ω-ում և ունի մինչև p-րդ $(p \geq 1)$ կարգի անընդհատ ածանցյալներ: Այդ դեպքում գոյություն ունեն մինչև $(p-1)$–րդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ ունեցող $\Phi_k(\vec{x},\vec{y},\vec{w})$ $(k=1,\cdots,n)$ ֆունկցիաներ ($\vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)$), այնպիսիք, որ տեղի ունի

$$F(\vec{y},\vec{w})-F(\vec{x},\vec{w})=\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(\vec{x},\vec{y},\vec{w})(y_k-x_k) \tag{8.10}$$

առնչությունը:

Ապացույց. Ապացույցը անմիջապես հետևում է (8.8), (8.9) բանաձևերից և պարամետրից կախված ինտեգրալի ածանցելիության վերաբերյալ թեորեմից: Տվյալ դեպքում

$$\Phi_k(\vec{x},\vec{y},\vec{w})=\int_0^1 F_k(\vec{x}+t(\vec{y}-\vec{x}),\ \vec{w})dt, \tag{8.11}$$

որտեղ $F_k=\left.\dfrac{\partial F}{\partial z_k}\right|_{\vec{z}=\vec{x}+t(\vec{y}-\vec{x})}$: Լեմման ապացուցված է:

Այժմ ապացուցենք սույն կետի հիմնական պնդումը:

Թեորեմ 8.2: Դիցուք $\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})$ վեկտոր-ֆունկցիան որոշված է $\Omega\subseteq R^{1+n+r}$ տիրույթում և ունի մինչև p-րդ կարգի ($p\geq 1$) անընդհատ մասնական ածանցյալներ ըստ $x_1,\cdots,x_n,\mu_1,\cdots\mu_r$ փոփոխականների:

Այդ դեպքում (8.1), (8.2) Կոշու խնդրի $\vec{x}(t,\vec{\mu})$ լուծումը կունենա մինչև p-րդ կարգի անընդհատ մասնական ածանցյալներ ըստ $\mu_1,\cdots,\mu_r$ փոփոխականների:

Ապացույց: Ապացույցը կատարենք մեկ հավասարման և մեկ μ պարամետրի համար: Ընդհանուր դեպքը ստացվում է նմանատիպ ձևով: Դիցուք $p=1$, $x=\varphi(t,\mu)$-ն

$$x'=f(t,x,\mu) \tag{8.12}$$

հավասարման և $x=\varphi(t,\mu+\Delta\mu)$-ն

$$x'=f(t,x,\mu+\Delta\mu) \tag{8.13}$$

հավասարման լուծումներն են միևնույն

$$x|_{t=t_0}=x^0$$

Կոշու տվյալներով: Պահանջվող $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ ածանցյալի գոյությունը ցույց տալու համար դիտարկենք $\Delta\varphi \equiv \Delta\varphi_\mu \equiv \varphi(t,\mu+\Delta\mu)-\varphi(t,\mu)$ տարբերությունը: Քանի որ $\varphi(t,\mu)$-ն (8.12)-ի, իսկ $\varphi(t,\mu+\Delta\mu)$-ն (8.13)-ի լուծումներն են, ապա $\Delta\varphi$-ի համար տեղի ունի

$$\frac{d}{dt}\Delta\varphi = f(t,\varphi(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,\varphi(t,\mu),\mu) \tag{8.14}$$

նույնությունը, ըստ որում՝

$$\Delta\varphi\Big|_{t=t_0}=0 \quad : \tag{8.15}$$

Այս նույնության աջ մասը, համաձայն Հադամարի լեմմայի $(w=t,\ \vec{x}=(\varphi(t,\mu),\mu),\ \ \vec{y}=(\varphi(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu))$ կարելի է ներկայացնել $\Phi_1\Delta\varphi+\Phi_2\Delta\mu$ տեսքով, որտեղ Φ_1 և Φ_2 ֆունկցիաներն անընդհատ են ըստ $t,\ \varphi(t,\mu),\ \varphi(t,\mu+\Delta\mu),\mu,\ \mu+\Delta\mu$ արգումենտների համախմբության և համաձայն (8.11) առնչության՝

$$\Phi_i(t,\varphi(t,\mu),\Delta\varphi,\mu,\ \Delta\mu)=\int_0^1 f_i(t,\varphi(t,\mu)+\tau\Delta\varphi,\mu+\tau\Delta\mu)d\tau\,,\ i=1,2\,, \tag{8.16}$$

որտեղ $\quad f_1=\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x,\nu),\quad f_2=\dfrac{\partial f}{\partial\nu}(t,x,\nu),$

երբ $\quad x=\varphi(t,\mu)+\tau\Delta\varphi,\quad \nu=\mu+\tau\Delta\mu:$

Հետևաբար (8.14), (8.15)-ից բաժանելով $\Delta\mu$-ի վրա $(\Delta\mu\neq 0)$ անմիջականորեն ստանում ենք

$$\frac{d}{dt}\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}=\Phi_1\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}+\Phi_2 \tag{8.17}$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}\Bigg|_{t=t_0}=0 \quad : \tag{8.18}$$

Հաստատագրենք μ պարամետրի արժեքը և $\varphi_1(t,\Delta\mu)$-ով նշանակենք $\Delta\mu$

պարամետրից կախված $\frac{dy}{dt} = \Phi_1 \cdot y + \Phi_2$ գծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը $y\big|_{t=t_0} = 0$ սկզբնական պայմանով: Թեորեմ 8.1-ից բխում է, որ այդ լուծումը բավականին փոքր $\Delta\mu$-երի համար անընդհատ է կախված $\Delta\mu$ պարամետրից և հետևաբար գոյություն ունի $\lim\limits_{\Delta\mu\to 0} \varphi_1(t,\Delta\mu) = \varphi_1(t,0)$:

Մյուս կողմից համաձայն (8.17), (8.18) առնչությունների և գոյության ու միակության թեորեմի $\varphi_1(t,\Delta\mu) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$, երբ $\Delta\mu \neq 0$: Հետևաբար գոյություն ունի նաև $\lim\limits_{\Delta\mu\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$, այսինքն՝ φ ֆունկցիան ունի ածանցյալ ըստ պարամետրի:

Եվ այսպես $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ ածանցյալի գոյությունը ապացուցված է : Այժմ ապացուցենք նրա անընդհատությունը ըստ արգումենտների համախմբության: Այդ նպատակով (8.17), (8.18) առնչություններում անցնենք սահմանի, երբ $\Delta\mu \to 0$ (հետևաբար $\Delta\varphi \to 0$): Կիրառելով միջին արժեքի թեորեմը (8.16)-ից ստանում ենք

$$\Phi_1 = f_1(t, \varphi(t,\mu) + \xi\Delta\varphi,\ \mu + \xi\Delta\mu),\ \xi \in (0,1)$$

Այստեղից և f_1 ֆունկցիայի անընդհատությունից բխում է, որ $\Phi_1 \to \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t,\mu), \mu)$, երբ $\Delta\mu \to 0$: Նույնապես $\Phi_2 \to \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, \varphi(t,\mu), \mu)$, երբ $\Delta\mu \to 0$: Սահմանային անցումը (8.17) և (8.18) -ում տալիս է

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t,\mu), \mu)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \frac{\partial f}{\partial\mu}(t, \varphi(t,\mu), \mu)$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right|_{t=t_0} = 0$$

Հետևաբար $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ ֆունկցիան հանդիսանում է

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t,\mu), \mu)y + \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, \varphi(t,\mu), \mu) \tag{8.19}$$

$$y\Big|_{t=t_0} = 0 \tag{8.20}$$

Կոշու խնդրի լուծում: Քանի որ, համաձայն 8.1 թեորեմի $\varphi(t,\mu)$ ֆունկցիան անընդհատ է ըստ t,μ փոփոխականների համախմբության, իսկ $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,\mu)$, $\frac{\partial f}{\partial \mu}(t,x,\mu)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են ըստ թեորեմի պայմանի, ապա $\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t,\mu),\mu)$ և $\frac{\partial f}{\partial \mu}(t,\varphi(t,\mu),\mu)$ ֆունկցիաները անընդհատ են ըստ t,μ փոփոխականների համախմբության: Համաձայն 8.1 թեորեմի (8.19), (8.20) խնդրի լուծում հանդիսացող $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(t,\mu)$ ֆունկցիան անընդհատ է ըստ t,μ փոփոխականների համախմբության: Թեորեմն ապացուցվեց $p=1$ դեպքի համար:

Եթե $f(t,x,\mu)$ ֆունկցիան ունի մինչև երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ, ապա օգտվելով նմանատիպ դատողությունից (8.19) հավասարման համար, որի լուծումը հանդիսանում է $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$-ն, կստանանք, որ գոյություն ունի $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}$-ը, որն անընդհատ է ըստ t,μ փոփոխականների համախմբության: Շարունակելով այսպես կստանանք թեորեմի ապացույցը կամայական p-ի համար: Նույն ձևով ապացուցվում է ընդհանուր նորմալ համակարգի դեպքը:

Այժմ դիտարկենք

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{f}(t,\vec{x}), \quad (t,\vec{x}) \in \Omega & (8.21) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}^0 & (8.22) \end{cases}$$

Կոշու խնդիրը: Կատարելով

$$t - t_0 = \tilde{t}, \;\; \vec{x} - \vec{x}^0 = \tilde{\vec{x}}$$

փոփոխականների փոխարինումը՝ կստանանք

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{x}}' = \tilde{\tilde{f}}(\tilde{t}, \tilde{\tilde{x}}, t_0, x^0) \\ \tilde{\tilde{x}}(0) = 0 \end{cases}$$

Կոշու խնդիրը, որտեղ $\tilde{\tilde{f}}(\tilde{t}, \tilde{\tilde{x}}, t_0, \vec{x}^0) \equiv \vec{f}(\tilde{t} + t_0, \tilde{\tilde{x}} + \vec{x}^0)$ ֆունկցիան կախված է սկզբնական $t_0, \vec{x}^0$ տվյալներից, որոնք կարելի է դիտարկել որպես պարամետրեր: Կիրառելով ապացուցված 8.2 թեորեմը՝ ստանում ենք.

Թեորեմ 8.3: Ենթադրենք $f \in C^p(\Omega)$, $p \geq 1$: Այդ դեպքում (8.21), (8.22) խնդրի $\vec{x} = \vec{x}(t, t_0, \vec{x}^0)$ լուծումը կունենա մինչև p-րդ կարգի ածանցյալներ ըստ $t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0$ փոփոխականների, որոնք կլինեն անընդհատ ըստ $t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0$ փոփոխականների համախմբության:

ԳԼՈՒԽ VI

ԻՆՔՆԱՎԱՐ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ: ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆ

§ 1. ԻՆՔՆԱՎԱՐ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԵՏԱԳԾԵՐԸ

Ինքնավար համակարգ կոչվում է

$$x_i' = f_i(x_1,...,x_n), \; i=1,...,n, \tag{1.1}$$

կամ վեկտորական տեսքով

$$\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$$

տիպի նորմալ համակարգը: Այստեղ մենք հետևում ենք ինքնավար համակարգերի տեսության մեջ ընդունված նշանակումներին և անկախ փոփոխականը, որը շատ ֆիզիկական խնդիրներում կատարում է ժամանակի դերը, նշանակել ենք t-ով, իսկ անհայտ վեկտոր-ֆունկցիան՝ $\vec{x} = (x_1,...,x_n)$-ով: Այն հանգամանքը, որ $f_i(i=1,...,n)$ ֆունկցիաները բացահայտորեն կախված չեն t անկախ փոփոխականից, պայմանավորում է (1.1) համակարգի մի շարք հատկություններ, որոնցով օժտված չեն ընդհանուր նորմալ համակարգերը: Համակարգի ինքնավար անվանումը պայմանավորված է այն հանգամանքով, որ $\vec{x}(t)$ լուծման փոփոխման արագությունը նկարագրող $\vec{x}'(t)$-ի արժեքը կամայական t-ի համար կախված է միայն $\vec{x}(t)$-ից, այսինքն՝ (1.1) համակարգի լուծումը ինքն է ղեկավարում իր փոփոխությունը: Հետագայում, որպես հիմնական կանոն, կենթադրվի, որ $f_i \, (i=1,...,n)$ ֆունկցիաները որոշված են ամբողջ R^n-ում և անընդհատ դիֆերենցելի են կամ բավարարում են Լիպշիցի պայմանին յուրաքանչյուր սահմանափակ տիրույթում: Այդ դեպքում, ինչպես գիտենք (տե՛ս թեորեմ V. 4.1), կամայական $\vec{x}^0 \in R^n$ կետի համար գոյություն ունի (1.1) համակարգի միակ $\vec{x} = \vec{x}(t)$ լուծում, որը բավարարում է $\vec{x}(0) = \vec{x}^0$ պայմանին: Այդ լուծումը նշանակենք $\vec{x}(t,\vec{x}^0)$-ով: $\vec{x} = \vec{x}(t,\vec{x}^0)$ լուծումը R^n-ում որոշում է կոր, որը կարելի է մեկնաբանել որպես $\vec{x}^0$ սկզբնական կետից դուրս եկող $\vec{x}$ կետի շարժման հետագիծ: Նկատենք, որ հետագիծը իրենից ներկայացնում է ոչ այլ ինչ, քան ինտեգրալ կորի t առանցքին զուգահեռ պրոյեկցիան R^n-ի վրա: Հետևաբար այն ավելի հեշտ է կառուցվում և չնայած պարունակում է ավելի քիչ տեղեկություն լուծման մասին, քան ինտեգրալ կորը, շատ դեպքերում լինում է բավարար և ավելի տեսանելի:

$\vec{x}=\vec{x}(t,\vec{x}^0)$ հետագծով շարժվող կետի $\vec{v}=\dfrac{d\vec{x}}{dt}$ արագությունը յուրաքանչյուր t պահին, համաձայն (1.1) համակարգի, հավասար է $\vec{f}(\vec{x}(t,\vec{x}^0))$-ի: Հետևաբար՝ կարող ենք ասել, որ (1.1) համակարգը որոշում է արագությունների դաշտ կամայական $\vec{x}\in R^n$ կետին վերագրելով $\vec{f}(\vec{x})=(f_1(\vec{x}),...,f_n(\vec{x}))$ վեկտորը, իսկ համակարգի լուծում հանդիսանում է $\vec{x}$ կետի այնպիսի $\vec{x}=\vec{x}(t)$ շարժման օրենք, որի համաձայն այդ կետի արագության վեկտորը հավասար է $\vec{f}(\vec{x})$-ի*: Ինքնավար համակարգերի առանձնահատկություններից մեկն այն է, որ դրանց արագությունների դաշտը ժամանակի ընթացքում չի փոփոխվում:

Քանի որ $f_i\,(i=1,...,n)$ ֆունկցիաները որոշված են ամբողջ R^n-ում, ապա չշարունակվող լուծման կառուցման ժամանակ հնարավոր են երկու դեպքեր (տես թեորեմ V. 6.2).

ա) $\vec{x}=\vec{x}(t,\vec{x}^0)$ լուծումը շարունակվում է ամբողջ $-\infty<t<+\infty$ առանցքի վրա,

բ) $\vec{x}=\vec{x}(t,\vec{x}^0)$ լուծումը ձգտում է անվերջության, երբ $t\to t_1$ վերջավոր կետի և այդ պատճառով լուծումը հնարավոր չէ շարունակել ամբողջ թվային առանցքի վրա:

Ցույց տանք, որ (1.1) համակարգի հետագծերը ուսումնասիրելիս, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարելի է ենթադրել, որ տեղի ունի ա) դեպքը: Հակառակ դեպքում՝ (1.1) համակարգի հետ զուգահեռ կդիտարկենք

$$x_i'=f_i(x_1,...,x_n)r(x_1,...,x_n) \tag{1.2}$$

համակարգը, որտեղ $r(x_1,...,x_n)$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է կամ բավարարում է Լիպշիցի պայմանին յուրաքանչյուր սահմանափակ տիրույթում և ոչ մի կետում չի ընդունում զրո արժեքը: Սույն համակարգում կատարենք

$$\bar{t}=tr(x_1,...,x_n),$$

*Համեմատել ուղղությունների դաշտի հետ (գլ. 1):

$$\bar{x}_i = x_i, \quad i = 1,\cdots,n$$

փոփոխականների փոխարինումը: Այս ձևափոխության Յակոբիի որոշիչը (յակոբյանը) հավասար է $r(x_1,\ldots,x_n)$-ի, որը զրոյից տարբեր է: Հեշտ է տեսնել, որ (1.2)-ը ընդունում է (1.1) տեսքը, որտեղ t անկախ փոփոխականը փոխարինված է $\bar{t}$-ով: Հետևաբար (1.1) և (1.2) համակարգերի հետագծերը համընկնում են և փոխվում է միայն այդ հետագծերով շարժվող կետերի արագությունները: Եթե $r(x_1,\ldots,x_n)$ ֆունկցիան ընտրենք այնպես, որ $f_i r$ $(i=1,\ldots,n)$ արտադրյալները լինեն սահմանափակ, ապա համաձայն (1.2) համակարգի, հետագծերով շարժվող կետերի արագությունները նույնպես կլինեն սահմանափակ և ոչ մի կետ չի կարող վերջավոր ժամանակահատվածում գնալ անվերջություն: Որպես r ֆունկցիա կարելի է վերցնել, օրինակ՝

$$r(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n} f_i^2(\bar{x})}} \quad \text{ֆունկցիան:}$$

Այսպիսով՝ հետագայում (1.1) համակարգի հետագծերը ուսումնասիրելիս կարող ենք ենթադրել, որ f_i ֆունկցիաները սահմանափակ են՝ $|f_i| \le M < \infty$, $i=1,\ldots,n$ և հետևաբար լուծումները շարունակվում են ամբողջ առանցքի վրա:

Ուսումնասիրենք (1.1) համակարգի լուծումների և հետագծերի հատկությունները, որոնք բնորոշ են ինքնավար համակարգերին և ընդհանրապես ասած տեղի չունեն ավելի ընդհանուր նորմալ համակարգերի համար: Կենտրոնական է հետևյալ հատկությունը:

Լեմմա 1.1: Դիցուք $\vec{\varphi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիան (1.1) ինքնավար համակարգի որևէ լուծում է: Այդ դեպքում կամայական c հաստատունի համար $\vec{\psi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t+c)$-ն նույնպես հանդիսանում է (1.1) համակարգի լուծում է:

Ապացույց: Քանի որ $\vec{\varphi}(t)$-ն (1.1) համակարգի լուծում է, ապա տեղի ունեն

$$\varphi_i'(t) = f_i(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)), \quad i=1,\ldots,n, \quad t \in (-\infty,+\infty)$$

նույնությունները: Փոխարինելով այստեղ t-ն $(t+c)$-ով, ստանում ենք.

$$\varphi_i'(t+c) = \frac{d\varphi_i(t+c)}{d(t+c)} = f_i(\varphi_1(t+c),\ldots,\varphi_n(t+c)), \quad i=1,\ldots,n: \qquad (1.3)$$

Բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնի համաձայն՝

$$\psi_i'(t)=\frac{d}{dt}\psi_i(t)=\frac{d}{dt}\varphi_i(t+c)=\frac{d\varphi_i(t+c)}{d(t+c)}\frac{d(t+c)}{dt}=\varphi_i'(t+c),\quad i=1,...,n:$$

Այստեղից և (1.3)-ից ստանում ենք

$$\psi_i'(t)=f_i(\psi_1(t),...,\psi_n(t)), i=1,...,n,\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

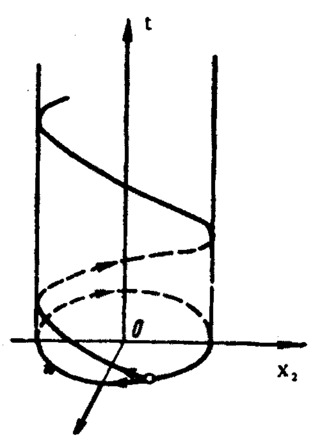
նույնությունները, որտեղից հետևում է, որ $\vec{\psi}(t)$-ն (1.1) համակարգի լուծում է, որն էլ ապացուցում է լեմմայի պնդումը:

Ապացուցված լեմմայից բխում է, որ (1.1) ինքնավար համակարգի մեկ $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ լուծումը՝ ծնում է մեկ պարամետրից կախված լուծումների ընտանիք $\vec{x}=\vec{\varphi}(t+c)$, որոնց համապատասխան ինտեգրալ կորերը ստացվում են մեկը մյուսից t առանցքին զուգահեռ տեղափոխությունների միջոցով: Հետևաբար դրանք R^{n+1} չափանի տարածությունում կազմում են գլանային մակերևույթ, իսկ դրանց համապատասխանող հետագծերը համընկնում են:

Օրինակ

$$\begin{cases} x_1'=x_2 \\ x_2'=-x_1 \end{cases}$$

համակարգի $x_1=A\sin(t+c), x_2=A\cos(t+c)$ լուծումները (կամայական A և c հաստատունների համար) (t,x_1,x_2) տարածությունում տալիս են ինտեգրալ կո-



Նկ. 1.1

ների հավասարումները, իսկ դրանց հետագիծը, այսինքն՝ (x_1, x_2) հարթության վրա t առանցքին զուգահեռ պրոյեկցիան, A շառավիղով $x_1^2 + x_2^2 = A^2$ շրջանագիծն է:

Լեմմա 1.2: Դիցուք (1.1) համակարգի $\vec{\varphi}(t)$ և $\vec{\psi}(t)$ լուծումների հետագծերը հատվում են որևէ կետում, այսինքն՝ գոյություն ունեն t փոփոխականի երկու (ընդհանուր դեպքում միմյանցից տարբեր) t_1 և t_2 արժեքներ, որոնց համար

$$\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\psi}(t_2), \qquad (\varphi_i(t_1) = \psi_i(t_2), \quad i = 1, \ldots, n): \tag{1.4}$$

Այդ դեպքում $\vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t + c)$, $c = t_1 - t_2$, այսինքն՝ հետագծերը համընկնում են:

Ապացույց: Համաձայն նախորդ լեմմայի՝ $\vec{\bar{\varphi}}(t) = \vec{\varphi}(t + c)$, $c = t_1 - t_2$ ֆունկցիան նույնպես հանդիսանում է (1.1)-ի լուծում:

Մյուս կողմից՝

$$\vec{\bar{\varphi}}(t_2) = \vec{\varphi}(t_2 + c) = \vec{\varphi}(t_1) = \vec{\psi}(t_2):$$

Հետևաբար $\vec{\bar{\varphi}}(t)$ և $\vec{\psi}(t)$ լուծումները բավարարում են միևնույն սկզբնական պայմաններին: Համաձայն գոյության և միակության թեորեմի (տե՛ս թեորեմ V. 4.1), այդ լուծումները համընկնում են իրենց որոշման տիրույթների ընդհանուր մասում, այսինքն՝ այս դեպքում

$$\vec{\psi}(t) = \vec{\bar{\varphi}}(t) = \vec{\varphi}(t + c), \; t \in (-\infty, +\infty):$$

Լեմմա 1.3: Ինքնավար (1.1) համակարգի $\vec{x}(t, \vec{x}^0)$ լուծումը օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

ա) $\vec{x}(t, \vec{x}^0)$-ն անընդհատ ֆունկցիա է ըստ $(t, \vec{x}^0)$ փոփոխականների համախմբի $(\vec{x} \in C(R^{n+1}))$,

բ) $\vec{x}(t_2, \vec{x}(t_1, \vec{x}^0)) = \vec{x}(t_1 + t_2, \vec{x}^0)$ կամայական t_1 և t_2 արժեքների համար:

Ապացույց: Քանի որ f_i ֆունկցիաները սահմանափակ են, ապա

$$\left| \frac{dx_i(t, \vec{x}^0)}{dt} \right| = \left| f_i(x_1(t, \vec{x}^0), \ldots, x_n(t, \vec{x}^0) \right| \le M < \infty,$$

որտեղ M-ը կախված չէ $\vec{x}^0$-ից: Հետևաբար (տե՛ս լեմմա V. 4.1) $\vec{x}(t,\vec{x}^0)$ ֆունկցիան ըստ t փոփոխականի բավարարում է Լիպշիցի պայմանին $L=M$ Լիպշիցի հաստատունով: Մյուս կողմից՝ $\vec{x}(t,\vec{x}^0)$-ն անընդհատ է կախված սկզբնական պայմանից, այսինքն՝ $\vec{x}^0$-ից (տե՛ս գլ. V. §7.): Այս երկու պայմանները ապահովում են $\vec{x}(t,\vec{x}^0)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը ըստ փոփոխականների համախմբության (տե՛ս լեմմա V. 1.2)

բ) կետը ապացուցելու համար դիտարկենք $\vec{x}=\vec{x}(t,\vec{x}(t_1,\vec{x}^0))$ և $\vec{x}=\vec{x}(t+t_1,\vec{x}^0)$ ֆունկցիաները: Առաջինը (1.1) համակարգի $\vec{x}(0,\vec{x}(t_1,\vec{x}^0))=$ $=\vec{x}(t_1,\vec{x}^0)$ սկզբնական պայմանին բավարարող լուծումն է: Երկրորդ ֆունկցիան, համաձայն 1.1 լեմմայի, նույնպես (1.1) համակարգի լուծում է, որը $t=0$ պահին ընդունում է նույն $\vec{x}(t_1,\vec{x}^0)$ արժեքը: Միակության թեորեմից (տե՛ս թեորեմ V. 4.1) բխում է, որ այդ լուծումները համընկնում են՝ $\vec{x}(t,\vec{x}(t_1,\vec{x}^0))\equiv\vec{x}(t+t_1,\vec{x}^0)$: Տեղադրելով այստեղ $t=t_2$ համոզվում ենք, որ բ) կետի պնդումը ճիշտ է:

Դիտողություն 1.1: Ապացուցված լեմմայի բ) կետից անմիջապես բխում է, որ կամայական t-ի համար $\vec{x}(t,\cdot):R^n\to R^n$ և $\vec{x}(-t,\cdot):R^n\to R^n$ արտապատկերումները փոխհակադարձ են: Իրոք, կամայական $\vec{y}\in R^n$ կետի համար

$$\vec{x}(-t,\vec{x}(t,\vec{y}))=\vec{x}(-t+t,\vec{y})=\vec{x}(0,\vec{y})=\vec{y}$$

և

$$\vec{x}(t,\vec{x}(-t,\vec{y}))=\vec{x}(t-t,\vec{y})=\vec{x}(0,\vec{y})=\vec{y}:$$

§ 2. ԻՆՔՆԱՎԱՐ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԵՏԱԳԾԵՐԻ ՏԵՍԱԿՆԵՐԸ

Ուսումնասիրենք (1.1) համակարգի ինքնահատվող $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ լուծումները: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն t փոփոխականի միմյանցից տարբեր t_1 և t_2 արժեքներ, որոնց համար

$$\varphi_i(t_1)=\varphi_i(t_2),\quad i=1,\ldots,n: \tag{2.1}$$

Թեորեմ 2.1: Դիցուք (1.1) համակարգի $\bar{x}=\vec{\varphi}(t)$ լուծումը բավարարում է (2.1) պայմանին, այսինքն՝ ինքնահատվող է: Այդ դեպքում հնարավոր են երկու իրար բացառող դեպքեր՝

ա) գոյություն ունի այնպիսի $\vec{a}=(a_1,...,a_n)\in R^n$ հաստատուն վեկտոր, որ կամայական t -ի համար

$$\varphi_i(t)=a_i,\quad i=1,...,n:$$

Այս դեպքում $\vec{a}$ կետը կոչվում է (1.1) համակարգի *անշարժ կետ* կամ *հավասարակշռության դիրք:*

բ) գոյություն ունի այնպիսի $T>0$ թիվ, որ կամայական t -ի համար

$\varphi_i(t+T)=\varphi_i(t),\quad i=1,...,n$ և $\varphi_j(\tau_1)\neq\varphi_j(\tau_2)$ կամայական τ_1,τ_2 արժեքների դեպքում, երբ $0<|\tau_1-\tau_2|<T$, առնվազն մեկ j-ի համար: Այս դեպքում $\vec{\varphi}(t)$-ն կոչվում է *պարբերական լուծում:*

Ապացույց: Համաձայն լեմմա 1.2-ի՝ (2.1) պայմանից բխում է, որ

$$\varphi_i(t+c_0)=\varphi_i(t),i=1,...,n,c_0=t_1-t_2,t\in(-\infty,+\infty): \tag{2.2}$$

Պ-ով նշանակենք $\vec{\varphi}(t)$ ֆունկցիայի պարբերությունների բազմությունը, այսինքն այն թվերի բազմությունը, որոնց համար տեղի ունի (2.2) առնչությունը՝

$$П=\{c\in R:\vec{\varphi}(t+c)=\vec{\varphi}(t),\quad t\in(-\infty,+\infty)\}:$$

Ապացուցենք Պ բազմության հետևյալ հատկությունները

ա) եթե $c\in П$, ապա $-c\in П$,

բ) եթե $c_1\in П$, $c_2\in П$, ապա $c_1+c_2\in П$,

գ) Պ բազմությունը փակ է:

Իրոք, եթե $c\in П$, ապա $\vec{\varphi}(t+c)=\vec{\varphi}(t)$: Փոխարինելով այս առնչությունում t-ն $(t-c)$-ով՝ կստանանք, որ $-c\in П$, որն ապացուցում է առաջին հատկությունը: Երկրորդ հատկությունը բխում է այն փաստից, որ եթե

$$c_1\in П,\quad c_2\in П\text{, ապա}$$

$$\varphi_i(t+c_1)=\varphi_i(t),\ \varphi_i(t+c_2)=\varphi_i(t),\ t\in(-\infty,+\infty)$$

և ուրեմն

$$\varphi_i(t+(c_2+c_1))=\varphi_i((t+c_2)+c_1)=\varphi_i(t+c_2)=\varphi_i(t),\quad i=1,...,n,$$

այսինքն՝ $c_1+c_2\in П$:

Ապացուցենք գ) հատկությունը: Պ բազմության փակությունը ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ եթե $\{c_n\}$-ը Պ բազմությունից որևէ զուգամետ հաջորդականություն է, ապա նրա c սահմանը պատկանում է այդ բազմությանը: Իրոք, կատարելով սահմանային անցում $\varphi_i(t+c_m)=\varphi_i(t)$, $i=1,...,n$, $m=1,2,...$, նույնություններում, երբ $m\to\infty$, և օգտվելով $\varphi_i(t)$ ֆունկցիաների անընդհատությունից, ստանում ենք $\varphi_i(t+c)=\varphi_i(t)$ $i=1,...,n$, առնչությունը, որն ապացուցում է Պ բազմության փակությունը:

Քանի որ $c=t_1-t_2\neq 0$ թիվը պարբերություն է, ուրեմն Պ-ն պարունակում է զրոյից տարբեր թիվ: Ցույց տանք, որ հնարավոր են միմյանց բացառող հետևյալ երկու դեպքերը.

1^0. Պ-ն բոլոր իրական թվերի բազմությունն է՝ Պ$=R^1$ և այդ դեպքում $\bar{\varphi}(t)$ լուծումը նույնաբար հաստատուն է, այսինքն՝ այն հավասարակշռության դիրք է

2^0. գոյություն ունի $T>0$ թիվ, այնպիսին, որ Պ$=\{c;\ c=mT,\ m\in Z\}$:

Նախ նկատենք, որ Պ բազմությունը պարունակում է դրական թվեր, քանի որ c և $-c$ պարբերություններից մեկը դրական է: Ենթադրենք, որ Պ-ում չկա ամենափոքր դրական թիվ, այսինքն կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի c դրական պարբերություն $0<c<\varepsilon$: Կամայական r իրական թվի համար կարելի է ընտրել m ամբողջ թիվ այնպես, որ $|r-cm|<\varepsilon$: Քանի որ $mc\in$ Պ, իսկ $\varepsilon>0$ կամայական է, ուրեմն r-ը Պ-ի սահմանային կետ է: Քանի որ Պ-ն փակ է, ապա $r\in$ Պ-ին, իսկ r թվի կամայական լինելուց հետևում է, որ Պ$=R$:

Եթե Պ-ն չի համընկնում բոլոր իրական թվերի բազմության հետ, ապա, համաձայն նախորդ կետի, այն պարունակում է ամենափոքր դրական թիվ, նշանակենք այն T-ով: Ցույց տանք, որ այս դեպքում Պ բազմությունը բաղկացած է միայն T թվի բազմապատիկներից: Իրոք, դիցուք c-ն որևէ պարբերություն է: Այդ դեպքում գոյություն ունի m ամբողջ թիվ այնպիսին, որ $|c-mT|<T$: Եթե $c\neq mT$, ապա $|c-mT|$-ն դրական և T-ից փոքր պարբերություն է, որը հակասում է T-ի ընտրությանը: Հետևաբար $c=mT$, այսինքն՝ տեղի ունի 2^0 դեպքը:

Պ բազմության ապացուցված հատկություններից անմիջականորեն բխում է, որ 1^0 դեպքում տեղի ունի թեորեմի ա) պնդումը, իսկ 2^0 դեպքում՝ բ) պնդումը: Թեորեմ 2.1-ը ապացուցված է:

Ինչպես արդեն ասվել է թեորեմ 2.1-ի ա) կետում, առկա $\bar{a}$ վեկտորը կոչվում է (1.1) համակարգի հավասարակշռության դիրք, կամ անշարժ կետ, իսկ բ) կետին համապատասխանող $\bar{\varphi}(t)$ լուծումը կոչվում է T պարբերություն ունեցող պարբերական լուծում, իսկ նրա հետագիծը՝ *փակ հետագիծ* կամ *ցիկլ*:

Ապացուցված թեորեմից բխում է, որ (1.1) համակարգի հետագծերը կարող են լինել երեք տեսակի՝

1) հավասարակշռության դիրք, 2) փակ հետագիծ, 3) առանց ինքնահատման:

Տանք հավասարակշռության դիրքը նկարագրելու մի հայտանիշ:

Լեմմա 2.1: Որպեսզի $\vec{a} = (a_1,...,a_n) \in R^n$ վեկտորը լինի (1.1) համակարգի հավասարակշռության դիրք, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան

$$f_i(a_1,...,a_n) = 0, \quad i = 1,...,n \tag{2.3}$$

պայմանները:

Ապացույցի երկու մասն էլ կատարվում է անմիջական տեղադրումով:

Այսպիսով հավասարակշռության դիրքը գտնելու համար հարկավոր է լուծել

$$f_i(x_1,...,x_n) = 0, \quad i = 1,...,n$$

հավասարումների համակարգը:

§ 3. ՖԱԶԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ: ՖԱԶԱՅԻՆ ՀԵՏԱԳԾԵՐ

Դիտարկենք կամայական $\vec{x}^0 = (x_1^0,...,x_n^0) \in R^n$ կետ և (1.1) համակարգի միջոցով կառուցենք $\vec{x}^0$ կետից ելնող

$$\vec{f}(x_1^0,...,x_n^0) = (f_1(x_1^0,...,x_n^0),...,f_n(x_1^0,...,x_n^0))$$

վեկտորը: Կատարելով այս գործողությունը R^n-ի բոլոր կետերում, կստանանք (1.1) համակարգին համապատասխանող վեկտորական դաշտը: Այսպիսով՝ յուրաքանչյուր ինքնավար համակարգին համապատասխանության մեջ է դրվում վեկտորական դաշտ $f_i(x_1,...,x_n)$, $i = 1,...,n$ ֆունկցիաների որոշման տիրույթում, տվյալ դեպքում R^n-ում: Հեշտ է տեսնել, որ կամայական վեկտորական դաշտ միարժեքորեն որոշում է որևէ ինքնավար համակարգ:

Դիցուք $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիան (1.1) համակարգի

$$\varphi(t_0) = \vec{x}^0 \tag{3.1}$$

սկզբնական պայմանին բավարարող լուծումն է: Դա նշանակում է, որ այդ լուծումով որոշվող հետագծով շարժվող $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ կետը t_0 պահին գտնվում է $\vec{x}^0$ կետում: Հաշվենք այդ կետի $\vec{v} = (\varphi_1'(t_0), \ldots, \varphi_n'(t_0))$ արագությունը: Քանի որ $\vec{\varphi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիան (1.1) համակարգի լուծումն է և բավարարում է (3.1) պայմանին, ապա՝

$$\varphi_i'(t_0) = f_i(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0)) = f_i(x_1^0, \ldots, x_n^0), \quad i = 1, \ldots, n:$$

Հետևաբար $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ կետի արագության վեկտորը հետագծի $\vec{x}^0$ կետում համընկնում է այդ կետում (1.1) համակարգով որոշվող վեկտորական դաշտի $\vec{f}(\vec{x}^0)$ վեկտորի հետ:

Սահմանում 3.1: n-չափանի տարածությունը, որտեղ ինքնավար համակարգը դիտարկվում է որպես վեկտորական դաշտ, իսկ նրա լուծումները՝ որպես հետագծեր, կոչվում է ֆազային տարածություն: Հետագծերը կոչվում են ֆազային հետագծեր, իսկ $\vec{f}(x_1, \ldots, x_n)$ վեկտորը՝ ֆազային արագություն:

Լեմմա 2.1-ից հետևում է, որ հավասարակշռության դիրքը մեկ կետից բաղկացած ֆազային հետագիծ է, որի ֆազային արագությունը հավասար է զրոյի: Այդ է պատճառը, որ հավասարակշռության դիրքը կոչվում է նաև անշարժ կետ:

Որպես օրինակ դիտարկենք ֆազային ուղիղը, որը

$$x' = f(x) \tag{3.2}$$

առաջին կարգի մեկ հավասարման ֆազային տարածությունն է:

Ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է ամբողջ իրական առանցքի վրա և բավարարում է Լիպշիցի պայմանին, որն ապահովում է (t_0, x^0) կետով անցնող լուծման գոյությունը և միակությունը: Այստեղ մենք ընդհանրությունը չխախտելու համար հրաժարվում ենք $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանափակության պայմանից, քանի որ այս միաչափ դեպքում հնարավոր է ավելի մանրամասն ուսումնասիրել և պատկերել ոչ միայն (3.2) հավասարման հետագծերը, այլ նաև (t, x) հարթության մեջ նրա ինտեգրալ կորերը (լուծումների գրաֆիկները): Հետևաբար չենք կարող պնդել, որ (3.2) տեսքի կամայական հավասարման չշարունակվող լուծում որոշված է ողջ իրական առանցքի վրա:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիայի զրոները, կամ որ նույնն է, (3.2) հավասարման հավասարակշռության դիրքերը չունեն կուտակման կետեր: Այդ դեպքում x առանցքը, որը (3.2) հավասարման ֆազային ուղիղն է, բաժանվում է միջակայքերի, որոնցից յուրաքանչյուրում $f(x)$ ֆունկցիան զրո չի դառնում: Կամայական այդպիսի (a,b) միջակայքում (3.2) հավասարման լուծումները որոշվում են

$$\int_{\alpha}^{x}\frac{ds}{f(s)}=t+c \tag{3.3}$$

առնչությունից (տե՛ս, օրինակ, գլ. II, §1.), որտեղ α-ն ընտրված միջակայքի կամայական կետ է: Այս բանաձևից անմիջականորեն բխում է լեմմա 1.1-ի պնդումը: Հեշտ է տեսնել, որ եթե (3.2) հավասարման մեջ x որոնելի ֆունկցիան փոխարինենք y-ով՝

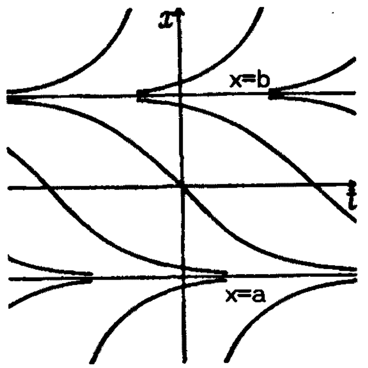
$$y=\int_{\alpha}^{x}\frac{ds}{f(s)}, \tag{3.4}$$

ապա վերջինիս նկատմամբ կստանանք

$$y'=1 \tag{3.5}$$

հավասարումը: Իրոք, եթե $x=\varphi(t)$-ն (3.2)-ի լուծումն է, ապա տեղադրելով այն (3.4)-ի մեջ՝ կստանանք $y(t)=\int_{\alpha}^{\varphi(t)}\frac{ds}{f(s)}$ (3.5)-ի լուծումը: Ճիշտ է նաև հակադարձը՝ (3.5)-ի կամայական $y=t+c$ լուծում տեղադրելով (3.4)-ի մեջ կստանանք $t+c=\int_{\alpha}^{x}\frac{ds}{f(s)}$ նույնությունը, որից ստացված $x=\varphi(t)$ ֆունկցիան համաձայն (3.3)-ի հանդիսանում է (3.2)-ի լուծում: Բայց (3.5) հավասարումը կախված չէ $f(x)$ ֆունկցիայից: Հետևաբար (3.2) տեսքի հավասարումները, որոնց աջ մասերը հավասար չեն զրոյի (a,b) միջակայքում, համարժեք են (3.5)-ին և ուրեմն (a,b)-ում համարժեք են միմյանց այն իմաստով, որ գոյություն ունի փոփոխականի փոխարինում, որը հավասարումներից մեկը բերում է մյուսին:

$f(x)$ ֆունկցիայի զրոների միջոցով (t,x) հարթությունը բաժանվում է շերտերի, որոնցից յուրաքանչյուրի կամայական (t_0,x^0) կետով անցնում է մեկ ինտեգրալ կոր և նույն շերտի երկու կամայական ինտեգրալ կորեր միմյանցից տարբերվում են t առանցքի ուղղությամբ զուգահեռ տեղափոխությամբ (տես Նկ. 3.1)



Նկ. 3.1

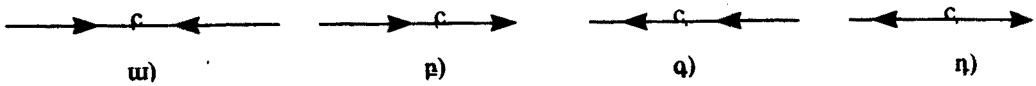
Այդպիսի կորերի ընտանիքի որակական բնութագրումը որոշվում է այդ ընտանիքին պատկանող որևէ լուծման որակական բնութագրով, որն իր հերթին կախված է $f(x)$ ֆունկցիայի հատկություններից: Եթե ուսումնասիրվող (a,b) միջակայքում $f(x)\neq 0$, ապա լուծումները կա՛մ աճում են, կա՛մ նվազում:

Եթե $f(c)=0$, ապա $x(t)\equiv c$ նույնաբար հաստատուն ֆունկցիան (3.2) հավասարման լուծում է:

Լուծումների ընտանիքի այդ հատկությունները, որոնք նկարագրում են դրանց որակական (բայց ոչ քանակական) վարքը, ավելի հարմար է պատկերել x առանցքի (ֆազային ուղղի) վրա, քան (t,x) հարթության մեջ: Եթե $f(x)\neq 0$, երբ $x\in(a,b)$, ապա այդ միջակայքում նկարում են սլաք, որը ցույց է տալիս x-ի փոփոխման ուղղությունը, այսինքն, եթե $f(x)>0$ և հետևաբար լուծումները աճում են, ապա սլաքը ուղղում են x առանցքի դրական ուղղությամբ, այսինքն՝ a-ից դեպի b, հակառակ դեպքում՝ b-ից դեպի a:

Եթե $f(c)=0$, ապա $x(t)\equiv c$ լուծումը պատկերվում է $x=c$ կետով, որը (3.2) հավասարման հավասարակշռության դիրքն է: Նշելով x առանցքի վրա (3.2) հավասարման բոլոր հավասարակշռության դիրքերը և x-ի վարքին համապատասխան ուղղությունները՝ կստանանք այդ հավասարման ֆազային պատկերը:

Ենթադրենք (3.2) հավասարումը ունի մեկ $x = c$ անշարժ կետ: Յուրաքանչյուր կիսաուղղի վրա $(x<c, x>c)$ ֆունկցիան պահպանում է իր նշանը: Հետևաբար ֆազային պատկերը կարող է լինել չորս դեպքերից մեկը (նկ. 3.2).



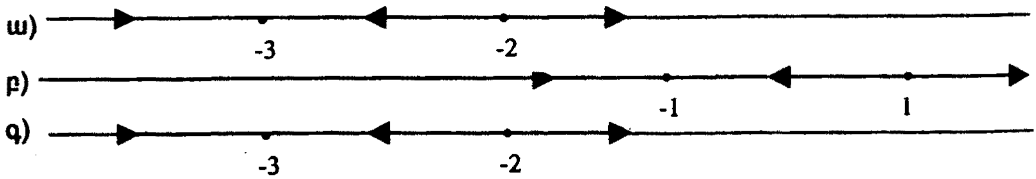
Նկ. 3.2

Առաջին դեպքում c կետը կոչվում է ատրակտոր (ձգող), երկրորդ և երրորդ դեպքերում՝ շունտ (զուգահեռալար), չորրորդում՝ ռեպելեր (վանող):

Մեկ հավասարակշռության դիրք ունեցող ինքնավար հավասարումները, որոնք ունեն միևնույն ֆազային պատկերը, համարվում են որակապես համարժեք, ավելին՝

Սահմանում 3.1: Երկու ինքնավար հավասարումներ կոչվում են ***որակապես համարժեք***, եթե դրանք ունեն նույն տիպի հավասար քանակությամբ հավասարակշռության դիրքեր, որոնք դասավորված են միևնույն կարգով:

Օրինակ $x' = (x+3)(x+2)$ հավասարումը համարժեք է $x' = (x^2-1)$ հավասարմանը, որովհետև երկուսն էլ ունեն երկուական անշարժ կետեր, որոնցից մեկը ատրակտոր է, մյուսը՝ ռեպելեր և ատրակտորին համապատասխանում է x-ի ավելի փոքր արժեք: Իսկ $x' = -(x+3)(x+2)$ հավասարումը համարժեք չէ բերված հավասարումներից ոչ մեկին, քանի որ ատրակտորը և ռեպելերը դասավորված են հակառակ կարգով (տես նկ.3.3):



Նկ. 3.3

Այժմ մեր նպատակն է ցույց տալ, որ եթե $f(x)\neq 0,\ x\in(a,b)$, ապա ամբողջ (a,b) միջակայքը հանդիսանում է (3.2) հավասարման լուծման հետագիծ:

Թեորեմ 3.1: Դիցուք a և b կետերը (3.2) հավասարման իրար հաջորդող հավասարակշռության դիրքեր են, $x^0 \in (a,b)$ և $x = \varphi(t)$ (3.2) հավասարման (r_1, r_2) միջակայքում որոշված և $(0, x^0)$ կետով անցնող չշարունակվող լուծումն է: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $f(x_0) > 0$: Այդ դեպքում

$$a < \varphi(t) < b, \quad t \in (r_1, r_2) \tag{3.6}$$

$$\lim_{t \to r_1} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t \to r_2} \varphi(t) = b, \tag{3.7}$$

ընդ որում, եթե a-ն (համապատասխանաբար b-ն) վերջավոր է, ապա r_1-ը (համապատասխանաբար r_2-ը) անվերջ է (նկ. 3.1):

Ապացույց: Քանի որ $f(x_0) > 0$, ապա $f(x)$ ֆունկցիան դրական է ամբողջ (a,b) միջակայքում: Հետևաբար (3.2) հավասարման լուծումները, որոնց գրաֆիկները ընկած են t առանցքին զուգահեռ $\{(t,x);\ t \in R^1, x \in (a,b)\}$ շերտում, աճող ֆունկցիաներ են (նկ. 3.1): $x = \varphi(t)$ լուծմանը համապատասխանող հետագծով շարժվող կետը կարող է դուրս գալ (a,b) միջակայքից միայն անցնելով a կամ b կետերով: Ենթադրենք $t = t_1$ պահին $\varphi(t_1) = b$: Բայց դա նշանակում է, որ $x = \varphi(t)$ և $x = b$ լուծումների հետագծերը հատվում են, որը հակասում է լեմմա 1.2-ի պնդմանը: Նույն ձևով ապացուցվում է, որ t-ի նվազելով $x = \varphi(t)$ կետը չի կարող հասնել a կետին:

Այսպիսով (3.6) պնդումը ապացուցվեց:

Այժմ ապացուցենք (3.7)-ի երկրորդ պնդումը (առաջինը ապացուցվում է նույն ձևով): Ենթադրենք $\lim_{t \to r_2} \varphi(t) = c < b$, իսկ $\psi(t)$-ն (3.2) հավասարման $(0,c)$ կետով անցնող լուծումն է: Քանի որ $f(x) > 0$ և հետևաբար $\psi(t)$-ն մոնոտոն աճող ֆունկցիա է, ապա գոյություն ունի $t_2 < 0$ կետ, որի համար $\psi(t_2) < c$: Դա նշանակում է, որ $\varphi(t)$ և $\psi(t)$ լուծումների հետագծերը հատվում են: Ստացվածը հակասում է լեմմա 1.2-ին և ապացուցում է, որ $c = b$:

Ապացուցվածը նշանակում է, որ կամայական $(0, x^0)$, $x^0 \in (a,b)$ կետով անցնող լուծման հետագիծը համընկնում է (a,b) միջակայքի հետ: Այսպիսով ապացուցվեց, որ (3.2) հավասարման $f(x)$ ֆունկցիայի զրոները x առանցքը բաժանում են միջակայքերի, որոնցից յուրաքանչյուրն այդ հավասարման հետագիծ է:

Այժմ ենթադրենք, որ $b<\infty$ և ցույց տանք, որ այդ դեպքում $r_2=+\infty$: ենթադրենք հակառակը՝ $r_2<+\infty$:

Դիտարկենք

$$\chi(t)=\begin{cases}\varphi(t), & r_1<t<r_2\\ b, & t\geq r_2\end{cases},$$

ֆունկցիան: Դեժվար է տեսնել, որ $\chi(t)$-ն r_2 կետում ունի ածանցյալ (ստուգել) և հանդիսանում է (3.2) հավասարման (r_2,b) կետով անցնող լուծում: Բայց այդ կետով անցնում է նաև $x=b$ լուծումը և հետևաբար (3.2) հավասարման համար խախտվում է Կոշու խնդրի լուծման միակությունը: Ստացված հակասությունից բխում է, որ $r_2=\infty$: Նույն ձևով ապացուցվում է, որ $r_1=-\infty$, եթե $a>-\infty$: Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 3.1: Ապացուցված թեորեմից անմիջականորեն բխում է, որ վերջավոր (a,b) միջակայքին համապատասխանող չշարունակվող լուծումները որոշված են ամբողջ առանցքի վրա (համեմատի՛ր գլուխ V, դիտողություն 6.1-ի հետ):

§ 4. ՖԱԶԱՅԻՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ

Դիտարկենք

$$\begin{cases}x_1'=f_1(x_1,x_2)\\ x_2'=f_2(x_1,x_2)\end{cases}\tag{4.1}$$

ինքնավար համակարգը, որտեղ f_1 և f_2 ֆունկցիաները R^2-ում բավարարում են Լիպշիցի պայմանին: Սույն պարագրաֆում ուսումնասիրվում է (4.1) համակարգի անշարժ կետերի բնույթը: Նախ դիտարկենք (4.1) համակարգը կամայական $\vec{b}=(b_1,b_2)\in R^2$ կետի շրջակայքում, որը չի հանդիսանում նրա հավասարակշռության դիրք, այսինքն $|f_1(b_1,b_2)|^2+|f_2(b_1,b_2)|^2\neq 0$: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $f_2(\vec{b})\neq 0$: Այդ դեպքում տեղի ունի

Թեորեմ 4.1: Դիցուք $\vec{b} \in R^2$ կետը չի հանդիսանում (4.1) համակարգի հավասարակշռության դիրք: Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\vec{b}$ կետի այնպիսի շրջակայք և այդ շրջակայքում որոշված այնպիսի չվերասերվող ձևափոխություն, որը (4.1) համակարգը բերում է

$$\begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

համակարգին:

Ապացույց: Ենթադրենք η-ն որևէ կետ է R-ից: Նշանակենք $\vec{x} = \vec{\varphi}(t,\eta)$-ով (4.1) համակարգի այն լուծումը, որի հետագիծը $t = 0$ պահին գտնվում է $x_2 = b_2$ ուղղի վրա, այսինքն՝ որը բավարարում է $\vec{\varphi}(0,\eta) = (\eta, b_2)$ $(\varphi_1(0,\eta) = \eta, \varphi_2(0,\eta) = b_2)$ սկզբնական պայմանին: Ցույց տանք, որ գոյություն ունի $\vec{b}$ կետի ինչ-որ շրջակայք, որտեղ

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t,\eta) \\ x_2 &= \varphi_2(t,\eta) \end{aligned} \tag{4.3}$$

բանաձևերով որոշվող $(t,\eta) \mapsto (x_1, x_2)$ արտապատկերումը հակադարձելի է:

Նախ նշենք, որ ըստ $\vec{\varphi}(t,\eta)$ լուծման սկզբնական պայմանների (4.3) ձևափոխությամբ $\vec{c} = (0, b_1)$ կետը արտապատկերվում է $\vec{b} = (b_1, b_2)$ կետին:

Նշանակենք

$$J(t,\eta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t,\eta) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}(t,\eta) \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}(t,\eta) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}(t,\eta) \end{vmatrix}$$

(4.3) արտապատկերման յակոբյանը և ցույց տանք, որ $J(\vec{c}) \neq 0$: Քանի որ $\varphi_1(0,\eta) = \eta$, ապա $\dfrac{\partial\varphi_1(\vec{c})}{\partial\eta} = 1$, իսկ քանի որ $\vec{x} = \vec{\varphi}(t,\eta)$-ն (4.1) համակարգի լուծումն է, ապա

$$\frac{\partial\varphi_1(\vec{c})}{\partial t} = f_1(\varphi_1(\vec{c}), \varphi_2(\vec{c})) = f_1(b_1, b_2):$$

Նույն կերպ, քանի որ $\varphi_2(0,\eta)=b_2$, ապա $\dfrac{\partial\varphi_2(\vec{c})}{\partial\eta}=0$, իսկ (4.1)-ից բխում է, որ $\dfrac{\partial\varphi_2(\vec{c})}{\partial t}=f_2(b_1,b_2)$: Այսպիսով՝

$$J(\vec{c})=\begin{vmatrix} f_1(\vec{b}) & 1 \\ f_2(\vec{b}) & 0 \end{vmatrix}=-f_2(\vec{b})\neq 0:$$

$J(t,\eta)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից հետևում է, որ այն զրո չէ $\vec{c}$ կետի ինչ-որ շրջակայքում, որտեղ և (4.3) արտապատկերումը հակադարձելի է, այսինքն գոյություն ունեն ψ_1 և ψ_2 դիֆերենցելի ֆունկցիաներ այնպիսիք, որ՝

$$\begin{aligned} \eta&=\psi_1(x_1,x_2) \\ t&=\psi_2(x_1,x_2): \end{aligned} \tag{4.4}$$

Կատարենք

$$\begin{aligned} \tau&=t \\ y_1&=\psi_1(x_1,x_2) \\ y_2&=\psi_2(x_1,x_2) \end{aligned} \tag{4.5}$$

փոփոխականների փոխարինումը և ցույց տանք, որ այս փոխարինմամբ (4.1) համակարգը կբերվի (4.2) համակարգին: Ենթադրենք $(x_1,x_2)=(\theta_1(t),\theta_2(t))$ վեկտոր-ֆունկցիան (4.1) համակարգի որևէ լուծում է: Ցույց տանք, որ $(y_1(\tau),y_2(\tau))=(\psi_1(\theta_1(\tau),\theta_2(\tau)),\ \psi_2(\theta_1(\tau),\theta_2(\tau)))$ վեկտոր-ֆունկցիան, որը ստացվել է (4.5) ձևափոխությամբ, հանդիսանում է (4.2) համակարգի լուծում: Իրոք, տեղադրելով (4.4)-ի մեջ $x_1=\theta_1(t),\ x_2=\theta_2(t)$ ֆունկցիաները և ածանցելով ըստ t-ի՝ ստանում ենք

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\theta_1'+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\theta_2'=0 \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\theta_1'+\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\theta_2'=1 \end{cases}$$

Նույնությունները, որոնք համաձայն (4.5)-ի համարժեք են

$$y_1'(\tau)=0$$

$$y_2'(\tau)=1$$

նույնություններից: Հետևաբար ($y_1(\tau), y_2(\tau)$)-ն (4.2)-ի լուծումն է:

Ցույց տանք հակադարձը, այսինքն՝ (4.2) համակարգի կամայական $y_1=c_1,\ y_2=\tau+c_2$ լուծում (4.5)-ի հակադարձ արտապատկերմամբ տալիս է (4.1)-ի լուծում: Իրոք, տեղադրելով այս լուծումը (4.5)-ի մեջ, կունենանք,

$$c_1=\psi_1(x_1,x_2)$$

$$\tau+c_2=\psi_2(x_1,x_2):$$

Այստեղից և (4.3), (4.4)-ից ստանում ենք (4.1) համակարգի

$$x_1=\varphi_1(t+c_2,c_1)$$

$$x_2=\varphi_2(t+c_2,c_1)$$

լուծումը, որը բավարարում է

$$\varphi_1\Big|_{t=-c_2}=c_1,\quad \varphi_2\Big|_{t=-c_2}=b_2$$

սկզբնական պայմաններին:

Այսպիսով ցույց տրվեց, որ (4.5) ձևափոխությամբ $\vec{b}$ կետի ինչ-որ շրջակայքում (4.1) համակարգը բերվում է (4.2)-ին: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 4.1-ը ձևակերպվեց և ապացուցվեց $n=2$ դեպքում, սակայն այն ճիշտ է կամայական n-ի համար: Այս փաստը ցույց է տալիս, որ ինքնավար համակարգերը հավասարակշռության դիրք չհանդիսացող կետի շրջակայքում ունեն բավականին պարզ կառուցվածք և հետևաբար դրանց լուծումների հետագծերի վարքի հետազոտման տեսակետից հետաքրքրություն են ներկայացնում միայն անշարժ կետերի շրջակայքերը:

Վարժություն 4.1: Ընդհանրացնել թեորեմ 4.1-ը կամայական n-ի համար:

§ 5. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՖԱԶԱՅԻՆ ՀԵՏԱԳԾԵՐԸ

Սույն կետում հանգամանորեն կուսումնասիրենք (4.1) ինքնավար համակարգի մասնավոր դեպք հանդիսացող

$$\begin{cases} x_1'=ax_1+bx_2 \\ x_2'=cx_1+dx_2, \end{cases} \tag{5.1}$$

կամ մատրիցական տեսքով

$$\vec{x}' = A\vec{x} \tag{5.2}$$

գծային համակարգը, որտեղ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, իսկ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ իրական թվերից կազմված մատրից է, ըստ որում, $\det A = ad - bc \neq 0$: Այս պայմանից բխում է, (տե՛ս լեմմա 2.1), որ (5.1) համակարգի միակ անշարժ կետը (հավասարակշռության դիրքը) (0,0) կոորդինատական սկզբնակետն է: Մեր նպատակն է ուսումնասիրել (5.1) համակարգի իրական հետագծերի վարքը (0,0) անշարժ կետի շրջակայքում:

Այստեղ մենք կարող ենք օգտվել երրորդ գլխում շարադրված տեսությունից, որտեղ նկարագրված են (5.1) համակարգի բոլոր լուծումները: Սակայն նշված նպատակին հասնելու համար մենք նպատակահարմար ենք համարում (5.1) համակարգի հետագծերի կառուցումը շարադրել անկախ:

Նախ տեսնենք, թե ինչպես է ձևափոխվում (5.2) համակարգը

$$\vec{x} = M\vec{y} \tag{5.3}$$

փոփոխականի գծային փոխարինման դեպքում, երբ M-ը չվերասերվող մատրից է $(\det M \neq 0)$: (5.2) համակարգում կատարելով (5.3) ձևափոխությունը, կստանանք

$$x' = My' = AMy:$$

Այստեղից
$$y' = By, \tag{5.4}$$

որտեղ $B = M^{-1}AM$: Այսպիսով ստացված (5.4) համակարգի B մատրիցը նման է (5.2) համակարգի A մատրիցին, իսկ այս համակարգերը համարժեք են (այսինքն՝ ունենալով մեկի լուծումը միարժեքորեն վերականգնվում է մյուսինը M մատրիցի կամ նրա հակադարձի միջոցով):

Օրինակ 5.1: Դիտարկենք
$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$$

համակագը: Այստեղ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: Վերցնելով (5.3)-ում $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ հեշտ է հաշվել, որ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Նոր y_1, y_2 փոփոխականների դեպքում համակարգը բաժանվում է երկու անկախ հավասարումների

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = -y_2 : \end{cases}$$

Լուծելով դրանք $(y_1 = c_1 e^t,\ y_2 = c_2 e^{-t})$, կստանանք ուսումնասիրվող համակարգի

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

կամ, որ նույնն է, $x_1 = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, $x_1 = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$ լուծումը:

Բերված օրինակից երևում է, որ M մատրիցի ընտրությամբ կարելի է պարզեցնել համակարգը: Բնականաբար, հարց է առաջանում՝ ինչպիսի՞ հնարավոր պարզ տեսքի կարելի է բերել A մատրիցը և, հետևաբար, (5.2) համակարգը գծային ձևափոխության միջոցով: Պարզվում է, որ դա կախված է A մատրիցի սեփական արժեքների բնույթից, որոնք ինչպես գիտենք հանդիսանում են

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

կամ, որ նույնն է,

$$\lambda^2 - (spA)\lambda + \det A = 0$$

քառակուսի հավասարման լուծումները: Այստեղ $spA = a + d$ A մատրիցի հետքն է: Ինչպես հայտնի է

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(spA) + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(spA) - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}, \tag{5.5}$$

որտեղ

$$\Delta = (spA)^2 - 4\det A : \tag{5.6}$$

Լեմմա 5.1: Դիցուք A մատրիցի բոլոր տարրերը իրական թվեր են: Այդ դեպքում գոյություն ունի իրական տարրերով չվերասերվող M մատրից այնպիսին, որ $B = M^{-1}AM$ մատրիցն ունի հետևյալ տեսքերից որևէ մեկը

ա) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\beta > 0$

որտեղ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0, \alpha, \beta$ -ն իրական թվեր են:

Ապացույց: Դիտարկենք հետևյալ երեք հնարավոր դեպքերը՝

1) A մատրիցի λ_1, λ_2 սեփական արժեքները իրական են և միմյանցից տարբեր, կամ որ նույնն է $\Delta > 0$:

Տրված P մատրիցի համար օգտվենք հետևյալ նշանակումներից՝ $P = [\vec{P}_1, \vec{P}_2]$, որտեղ $\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{12} \end{pmatrix}$, $\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} P_{21} \\ P_{22} \end{pmatrix}$ վեկտորները P մատրիցի սյուներն են:

Դիցուք $\vec{u}_1$-ը և $\vec{u}_2$ -ը A մատրիցի λ_1, λ_2 սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորներն են՝

$$A\vec{u}_1 = \lambda_1\vec{u}_1 \;, \; A\vec{u}_2 = \lambda_2\vec{u}_2 :$$

Դիտարկենք $M = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$ մատրիցը: Դեշտ է տեսնել, որ

$$AM = [A\vec{u}_1, A\vec{u}_2] = [\lambda_1\vec{u}_1, \lambda_2\vec{u}_2] = MB, \tag{5.7}$$

որտեղ $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$:

Քանի որ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ և, ինչպես հայտնի է, այդ դեպքում $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ սեփական վեկտորները գծորեն անկախ են, ապա M մատրիցը չվերասերվող է (այսինքն՝ գոյություն ունի նրա M^{-1} հակադարձը): Բազմապատկելով (5.7) առնչության երկու կողմը ձախից M^{-1} -ով՝ կստանանք.

$$M^{-1}AM = B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}:$$

Եվ այսպես՝ 1) դեպքը համապատասխանում է B մատրիցի ա) տեսքին:

2) A մատրիցի սեփական արժեքները համընկնում են $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda_0$, $(\Delta = 0)$:

Այստեղ իր հերթին հնարավոր է երկու ենթադեպք՝

2.1) A մատրիցը անկյունագծային է: Այս դեպքում հեշտ է տեսնել, որ կամայական չվերասերվող M մատրիցի համար

$$B=M^{-1}AM=A=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix},$$

որն համապատասխանում է B մատրիցի բ) տեսքին:

2.2) A մատրիցը անկյունագծային չէ: Այս դեպքում $(A-\lambda_0 E)$ մատրիցի ռանգը հավասար է մեկի և, հետևաբար, գոյություն չունեն երկու գծորեն անկախ սեփական վեկտորներ: Դիցուք $\vec{u}_0$-ն A մատրիցի որևէ սեփական վեկտոր է: Եթե վերցնենք $\vec{m}_1=\vec{u}_0$, իսկ $\vec{m}_2$-ը այնպես, որ $M_1=[\vec{u}_0,\vec{m}_2]$ մատրիցը լինի չվերասերվող, ապա

$$AM_1=[A\vec{u}_0,A\vec{m}_2]=[\lambda_0\vec{u}_0,A\vec{m}_2]=M_1[\lambda_0\vec{e},M_1^{-1}A\vec{m}_2],$$

որտեղ $\vec{e}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$: Քանի որ, ինչպես հայտնի է, A և $M_1^{-1}AM_1$ նման մատրիցներն ունեն միևնույն սեփական արժեքները, ապա

$$M_1^{-1}AM_1=[\lambda_0\vec{e},M_1^{-1}A\vec{m}_2]=\begin{pmatrix}\lambda_0 & c\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix},$$

որտեղ $c\neq 0$: Այժմ եթե անցնենք

$$M=M_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & c^{-1}\end{pmatrix} \tag{5.8}$$

մատրիցին, ապա անմիջական հաշվումներով կստանանք

$$B=M^{-1}AM=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$$

առնչությունը, որը համապատասխանում է B մատրիցի գ) տեսքին:

3) A մատրիցի սեփական արժեքները կոմպլեքս են և քանի որ A մատրիցի տարրերը իրական են, ապա կոմպլեքս համալուծ են միմյանց $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$ $(\Delta<0,\quad \beta>0)$: Ցույց տանք, որ այս դեպքում B մատրիցը ունի դ) տեսքը, որի համար ցույց տանք, որ գոյություն ունի այնպիսի M չվերասերվող մատրից, որ

$$AM = M\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Այստեղից M մատրիցի m_{ij} $(i, j = 1,2)$ տարրերը որոշելու համար ստանում ենք

$$\begin{cases} (a-\alpha)m_{11} + bm_{12} - \beta m_{21} = 0 \\ cm_{11} + (d-\alpha)m_{12} - \beta m_{22} = 0 \\ \beta m_{11} + (a-\alpha)m_{21} + bm_{22} = 0 \\ \beta m_{12} + cm_{21} + (d-\alpha)m_{22} = 0 \end{cases}$$

գծային համասեռ հավասարումների համակարգը, որտեղ՝

$$\alpha = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2} spA = \frac{1}{2}(a+d),$$

$$\beta = \frac{1}{2i}(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{-(a-d)^2 - 4bc}\,:$$

Անմիջական հաշվումները ցույց են տալիս, որ այս համակարգի

$$\begin{pmatrix} a-\alpha & b & -\beta & 0 \\ c & d-\alpha & 0 & -\beta \\ \beta & 0 & a-\alpha & b \\ 0 & \beta & c & d-\alpha \end{pmatrix}$$

մատրիցի ռանգը հավասար է երկուսի: Հետևաբար անհայտներից երկուսը կարելի է ընտրել կամայական, օրինակ, $m_{21} = -\beta$, $m_{22} = 0$: Այդ դեպքում համակարգի վերջին երկու հավասարումներից անմիջականորեն բխում է, որ $m_{11} = a - \alpha$, $m_{12} = c$:

Հետևաբար M մատրիցն ունի

$$M = \begin{pmatrix} a-\alpha & -\beta \\ c & 0 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

տեսքը: Նկատենք, որ $\Delta = (a-d)^2 + 4bc < 0$ պայմանից բխում է, որ $c \neq 0$: Մյուս կողմից $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta} > 0$ և $\det M = c\beta \neq 0$, այսինքն՝ M մատրիցը չվերասերվող է:

Լեմման ապացուցված է:

Օրինակ 5.2: Դիտարկենք

ա) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

մատրիցները, որոնց սեփական արժեքներն են համապատասխանաբար

ա) $\lambda_1 = 1+\sqrt{2},\ \lambda_2 = 1-\sqrt{2}$, բ) $\lambda_1 = 3+i,\ \lambda_2 = 3-i$,

գ) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$:

Համաձայն ապացուցված լեմմայի` յուրաքանչյուր դեպքում գոյություն ունի չվերասերվող M մատրից այնպիսին, որ բերված մատրիցները նման են համապատասխանաբար

ա) $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$,

բ) $\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

մատրիցներին: Առաջին դեպքում M մատրիցը կառուցվում է A մատրիցի` օրինակ $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$ սեփական վեկտորներով` $M = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$:

Երկրորդ դեպքում համաձայն (5.9) բանաձևի $M = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$:

Վերջապես, երրորդ դեպքում նախ կառուցենք M_1 մատրիցը A-ի $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ սեփական վեկտորով և կամայական, օրինակ $\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$ վեկտորով, որը ապահովում է $\det M_1 \neq 0$ պայմանը $M_1 = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$: Այստեղից`

$$M_1^{-1}AM_1 = M_1^{-1}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}M_1 = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}:$$

Համաձայն (5.8) բանաձևի՝

$$M = M_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}:$$

Այժմ կառուցենք (5.4) համակարգի հետագծերը բոլոր նկարագրված դեպքերի համար

ա) A մատրիցի λ_1, λ_2 սեփական արժեքները իրական են և տարբեր:

Այս դեպքում (5.4) համակարգն ունի

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

տեսքը, որի իրական լուծումները տրվում են $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$ բանաձևերով, որտեղ c_1-ը և c_2-ը կամայական իրական հաստատուններ են: Այս լուծումներից յուրաքանչյուրը (y_1, y_2) հարթության մեջ, որը (5.4) համակարգի ֆազային հարթությունն է, որոշում է t պարամետրից կախված ֆազային հետագիծ: Քանի որ c_1 և $-c_2$ հաստատուններով որոշվող հետագիծը ստացվում է c_1, c_2 հաստատուններով որոշվող հետագծից y_2 առանցքի նկատմամբ հայելային արտապատկերմամբ, իսկ $-c_1, c_2$ հաստատուններով որոշվող հետագիծը y_1 առանցքի նկատմամբ հայելային արտապատկերմամբ, ապա (y_1, y_2) հարթության մեջ ֆազային պատկերը ստանալու համար բավական է այն պատկերել (y_1, y_2) հարթության առաջին քառորդում:

Նկատենք, որ $c_1 = c_2 = 0$ դեպքը համապատասխանում է հավասարակշռության դիրքին: Եթե $c_2 = 0, c_1 > 0$ և $\lambda_1 > 0$, ապա հետագիծը համընկնում է y_1 դրական կիսաառանցքի հետ և $(y_1, 0)$ կետը t-ի աճման հետ հեռանում է կոորդինատական սկզբնակետից, իսկ եթե $\lambda_1 < 0$, ապա մոտենում է սկզբնակետին: $c_1 = 0, c_2 > 0$ դեպքում հետագիծը համընկնում է y_2 դրական կիսաառանցքի հետ: Եթե $c_1 > 0, c_2 > 0$, ապա հետագիծը ամբողջովին գտնվում է առաջին քառորդում:

Դիտարկենք երկու դեպք

ա1) λ_1-ն ու λ_2-ը ունեն միևնույն նշանը:

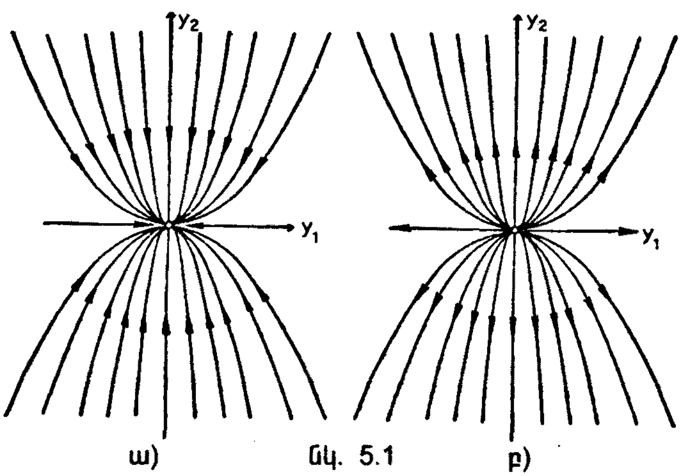
Ենթադրենք $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: Այս դեպքում (y_1, y_2) կետն ասիմպտոտորեն ձգտենում է $(0,0)$ հավասարակշռության դիրքին, երբ $t \to +\infty$: Հետագիծը առավել ակնառու պատկերելու համար, արտաքսելով t պարամետրը, y_2-ը արտահայտենք y_1-ով.

$$y_2 = c y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}: \tag{5.10}$$

Այստեղից՝

$$\left.\frac{dy_2}{dy_1}\right|_{y_1=0} = c\frac{\lambda_2}{\lambda_1} y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1}\Big|_{y_1=0} = 0:$$

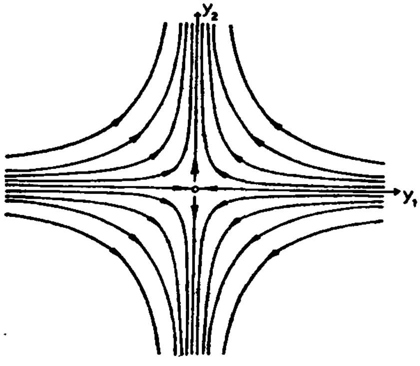
Հետևաբար հետագծերը կոորդինատական սկզբնակետում շոշափում են y_1 առանցքը: Այս դեպքում հետագծերը (y_1, y_2) ֆազային հարթության մեջ ունենում են 5.1ա) պատկերը և $(0,0)$ հավասարակշռության դիրքը կոչվում է *կայուն հանգույց:*



ա) Նկ. 5.1 բ)

Եթե $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, ապա շարժումը հետագծով կատարվում է հակառակ ուղղությամբ և հավասարակշռության դիրքը կոչվում է *անկայուն հանգույց* (Նկ. 5.1բ): $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ և $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ դեպքերը ստացվում են բերված դեպքերի նման:

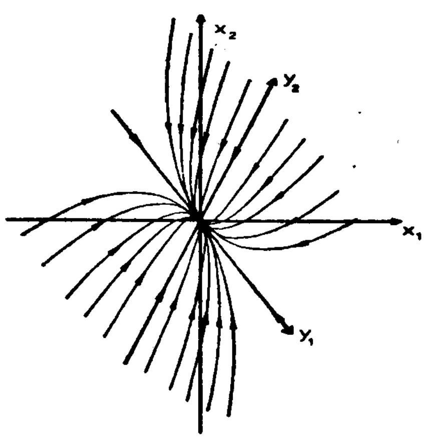
(5.2) համակարգի ֆազային պատկերը ստանալու համար հարկավոր է (y_1, y_2) հարթությունից վերադառնալ (x_1, x_2) հարթությանը (5.3) գծային ձևափոխության միջոցով: Հայտնի է, որ գծային արտապատկերման ժամանակ տեղի է ունենում



Նկ. 5.2

պատկերի պտույտ և ձգում: Հետևաբար, օրինակ, բացասական արմատների դեպքում ֆազային պատկերը կարող է ընդունել Նկ. 5.2-ում բերված տեսքը:

ա2). λ_1 և λ_2 սեփական արժեքները ունեն հակառակ նշաններ, օրինակ $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: Այս դեպքում առաջին քառորդում $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ և t-ի աճի հետ $y_1(t)$-ն նվազում է, իսկ $y_2(t)$-ն աճում: (5.10) բանաձևից երևում է, որ

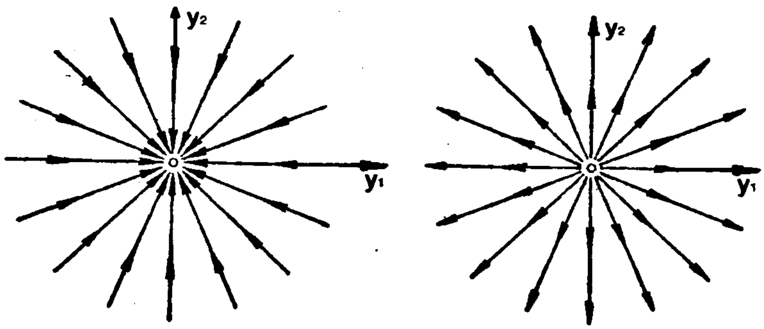


Նկ. 5.3

հետագծերը ունեն հիպերբոլ $\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}<0\right)$ հիշեցնող կորի տեսք: Այսպիսի հավասարակշռության դիրքը կոչվում է *թամբ* (նկ. 5.3):

բ) A մատրիցի սեփական արժեքները համընկնում են $\lambda_1=\lambda_2\equiv\lambda_0\neq 0$:

Եթե A մատրիցը անկյունագծային է, ապա $y_1(t)=c_1e^{\lambda_0 t}$, $y_2(t)=c_2e^{\lambda_0 t}$, այսինքն $y_1=cy_2$ $\left(c=\dfrac{c_1}{c_2}\right)$: Այս դեպքում հավասարակշռության դիրքը կոչվում է *աստղային հանգույց*, որը կայուն է, երբ $\lambda_0<0$ և անկայուն, երբ $\lambda_0>0$, իսկ հետագծերը ճառագայթներ են (տե՛ս նկ. 5.4)



Նկ. 5.4

Եթե A մատրիցն անկյունագծային չէ, ապա համաձայն լեմմա 5.1-ի (5.4) համակարգն ունի

$$\begin{cases} y_1'=\lambda_0 y_1+y_2 \\ y_2'=\lambda_0 y_2 \end{cases}$$

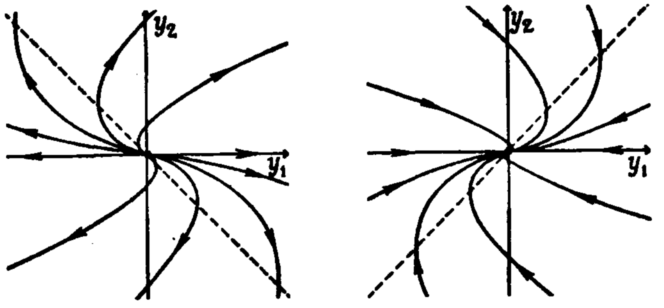
տեսքը: Սույն համակարգի ընդհանուր լուծումն է (տե՛ս գլուխ III)՝

$$y_1(t)=(tc_1+c_2)e^{\lambda_0 t},\ y_2(t)=c_2e^{\lambda_0 t}:$$

Այստեղից, արտաքսելով t-ն, ստանում ենք

$$y_1=(c+\frac{1}{\lambda_0}\ln y_2)y_2,\ \ (c=\frac{c_1}{c_2}-\frac{1}{\lambda_0}\ln c_2)$$

առնչությունը: Ֆազային պատկերը ունի նկ. 5.5-ում բերված տեսքը: Հավասարակշռության դիրքը կոչվում է *վերասերված հանգույց*, որը $\lambda_0 < 0$ դեպքում կայուն է, իսկ $\lambda_0 > 0$ դեպքում՝ անկայուն:



Նկ. 5.5

Հեշտ է տեսնել, որ y_1-ի, որպես y_2-ից ֆունկցիայի, էքստրեմումի կետերի երկրաչափական տեղը տրվում է $y_1' = 0$ կամ ինչպես երևում է համակարգի առաջին հավասարումից

$$y_2 = -\lambda_0 y_1$$

առնչությամբ:

գ) A մատրիցի սեփական արժեքները կոմպլեքս են՝

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta,\ (\beta > 0):$$

Այս դեպքում B մատրիցն ունի լեմմա 5.1-ում բերված դ) տեսքը, իսկ (5.4) համակարգը ընդունում է

$$\begin{cases} y_1' = \alpha y_1 - \beta y_2 \\ y_2' = \beta y_1 + \alpha y_2 \end{cases} \tag{5.11}$$

տեսքը: Կառուցենք սույն համակարգի լուծումները, անցնելով բևեռային կոորդինատների՝ $y_1 = r\cos\theta,\ y_2 = r\sin\theta$: Այստեղից

$$r^2 = {y_1}^2 + {y_2}^2, \quad tg\theta = \frac{y_2}{y_1}:$$

Ածանցելով այս առնչությունները ըստ t-ի, ունենում ենք.

$$r \cdot r' = y_1 y_1' + y_2 y_2', \qquad \frac{1}{\cos^2\theta}\theta' = y_1^{-2}(y_2' y_1 - y_1' y_2):$$

Տեղադրելով (5.11) համակարգից y_1'-ի և y_2'-ի արժեքները՝ ստանում ենք, որ (5.11) համակարգը բևեռային կոորդինատներով ունի

$$r' = \alpha r\ , \quad \theta' = \beta$$

տեսքը: Այստեղից

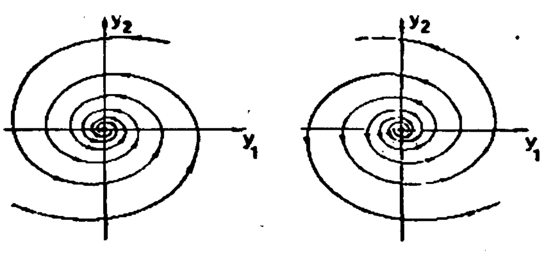
$$r(t) = r_0 e^{\alpha t},\ \theta(t) = \beta t + \theta_0,\ (\beta > 0), \tag{5.12}$$

որտեղ r_0, θ_0-ն կամայական իրական հաստատուններ են: Արտաքսելով t-ն, ստանում ենք (5.11) համակարգի հետագծերի

$$r = r_1 e^{\frac{\alpha}{\beta}\theta} \quad (r_1 = r_0 e^{-\theta_0})$$

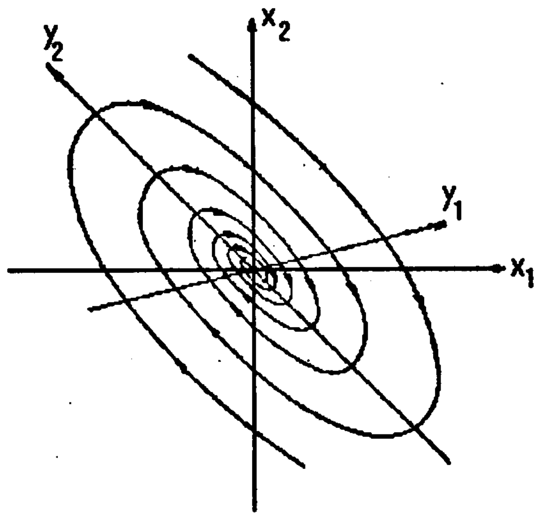
բացահայտ հավասարումը: Դիտարկենք երկու դեպք

գ.1) $\alpha \neq 0$: Այս դեպքում, եթե $r_1 \neq 0$, ապա (5.12) բանաձևով տրվող ֆունկցիայի գրաֆիկը, որը (5.11) համակարգի ֆազային հետագիծն է, իրենից ներկայացնում է *լոգարիթմական գալարագիծ (սպիրալ):* Կախված α-ի նշանից (հիշենք, որ $\beta > 0$), այդ գալարագիծը ասիմպտոտորեն ձգտում է (0,0) հավասարակշռության դիրքին θ անկյան աճման կամ նվազման հետ մեկտեղ: Եթե $\alpha < 0$, ապա հավասարակշռության դիրքը կոչվում է *կայուն ֆոկուս*, իսկ եթե $\alpha > 0$՝ *անկայուն ֆոկուս*:



Նկ. 5.6

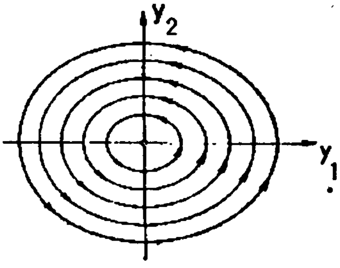
(x_1, x_2) հարթության մեջ ֆազային պատկերները կրում են գծային ձևափոխության բնորոշ վերը նշված փոփոխությունները (տե՛ս, օրինակ, նկ. 5.7):



Նկ. 5.7

գ. 2) $\alpha = 0$:

Այդ դեպքում (5.12) առնչությունն ընդունում է $r(t) = r_1$ տեսքը, որը համակենտրոն շրջանագծերի ընտանիք է (տե՛ս նկ. 5.8): $r_1 = 0$ դեպքը տալիս է հավասարակշռության դիրքը, որը կոչվում է *կենտրոն:*



Նկ. 5.8

Ուսումնասիրվող (5.1) համակարգի գործակիցների վրա դրված պայմանից ($\det A \neq 0$) բխում է, որ $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$: Ավելին ա) դեպքում մենք պահանջեցինք, որ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, գ.1) դեպքում $\Delta < 0, \alpha \neq 0, \beta > 0$: Այս պայմանները չեն խախտվում (5.1) համակարգի գործակիցների բավականին փոքր փոփոխությունների ժամանակ: Այդ իմաստով համապատասխան հավասարակշռության դիրքերը կոչվում են *չվերասերվող:* բ) դեպքում $\Delta = 0$ կամ դ) դեպքում $\alpha = 0$ պայմանները կարող են խախտվել համակարգի գործակիցների կամայական փոքր փոփոխությունների դեպքում և այդ ժամանակ, օրինակ, կենտրոնը կարող է վերածվել կայուն կամ անկայուն ֆոկուսի: Այսպիսի հավասարակշռության դիրքերը կոչվում են *վերասերվող:*

Վերասերվող հավասարակշռության դիրքերի առանձնահատկությունները ցայտուն երևում են ոչ գծային (4.1) համակարգի դեպքում: Նշենք, որ այդ համակարգը կարող է ունենալ մեկից ավելի մեկուսացված հավասարակշռության դիրքեր, որոնց յուրաքանչյուրի շրջակայքը պահանջում է առանձին ուսումնասիրություն:

Դիտարկենք (4.1) համակարգի որևէ հավասարակշռության դիրք: Ենթադրենք, որ այն (0,0) կոորդինատական սկզբնակետն է (հակառակ դեպքում այդ բանին կարելի է հասնել զուգահեռ տեղափոխության միջոցով):

Դիցուք (4.1) համակարգում f_1 և f_2 ֆունկցիաները (0,0) կետի շրջակայքում թույլ են տալիս

$$f_1(x_1,x_2) = ax_1 + bx_2 + g_1(x_1,x_2)$$

$$f_2(x_1,x_2) = cx_1 + dx_2 + g_2(x_1,x_2) \qquad (5.13)$$

վերլուծությունները, որտեղ a,b,c,d գործակիցները իրական թվեր են և

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{g_i(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = 0, \quad i = 1,2:$$

Այս պայմանին բավարարում է, օրինակ, երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ ունեցող կամայական երկու փոփոխականի ֆունկցիա:

Այս դեպքում

$$x_1' = ax_1 + bx_2$$

$$x_2' = cx_1 + dx_2 \qquad (5.14)$$

գծային համակարգը կոչվում է (4.1)-ի *գծայնացում* ((4.1)-ին համապատասխանող *գծայնացված համակարգ*):

Թեորեմ 5.1. Ենթադրենք (0,0) կետը (5.14) համակարգի չվերասերվող հավասարակշռության դիրք է: Այդ դեպքում (0,0) կետի շրջակայքում (4.1) համակարգի և նրա գծայնացված (5.14) համակարգի ֆազային պատկերները որակապես համարժեք են:

Այս թեորեմի ապացույցը կարելի է գտնել, օրինակ հետևյալ գրքում.

Л. С. Понтрягин "Обыкновенные дифференциальные уравнения".

§ 6. ԿԱՅՈՒՆ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

Դիտարկենք

$$L(p)x \equiv x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = 0 \tag{6.1}$$

գծային հաստատուն գործակիցներով համասեռ հավասարումը: Այս պարագրաֆում մեզ հետաքրքրելու է (6.1) հավասարման լուծումների վարքը t-ի մեծ արժեքների համար: Մասնավորապես կնկարագրվեն այն հավասարումները, որոնց բոլոր լուծումները ձգտում են զրոյի, երբ $t \to +\infty$: Պարզվում է, որ (6.1) հավասարման լուծումների վարքը անվերջությունում անմիջականորեն առնչվում է

$$L(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

բազմանդամի արմատների իրական մասերի նշանների հետ: Ելնելով դրանից տանք հետևյալ գաղափարը:

Սահմանում 6.1: $L(\lambda)$ բազմանդամը կոչվում է կայուն, եթե նրա բոլոր արմատների իրական մասերը բացասական են:

Այլ խոսքերով՝ կայուն բազմանդամի բոլոր արմատները գտնվում են կոմպլեքս հարթության ձախ կիսահարթությունում և անջատված են կեղծ առանցքից:

Թեորեմ 6.1: Ենթադրենք $L(\lambda)$ բազմանդամը կայուն է: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $\alpha > 0$ հաստատուն, որ (6.1) հավասարման կամայական $\varphi(t)$ լուծման համար տեղի ունի

$$|\varphi(t)| \le Me^{-\alpha t}, \quad t \ge 0 \tag{6.2}$$

անհավասարությունը որևէ $M = M(\varphi)$ հաստատունի համար:

Ապացույց. Դիցուք

$$\lambda_j = \mu_j + i\nu_j, \quad j = 1, \cdots, n$$

թվերը $L(\lambda)$ բազմանդամի արմատներն են: $L(\lambda)$-ի կայունությունը նշանակում է, որ գոյություն ունի α դրական թիվ այնպիսին, որ

$$\mu_j < -\alpha, \quad j = 1, \cdots, n: \tag{6.3}$$

(6.1) հավասարման լուծումների հիմնարար համակարգ կազմող ֆունկցիաները ընդհանուր դեպքում ունեն

$$x_s(t) = t^r e^{\lambda_j t}, \quad (r \geq 0) \quad s = 1, \cdots, n$$

տեսքը, (տե՛ս գլուխ III. §3.): Քանի որ $\left|e^{i\nu_j t}\right| = 1$, ապա այստեղից կստանանք

$$\left|\frac{x_s(t)}{e^{-\alpha t}}\right| = t^r e^{(\mu_j + \alpha)t}, \quad s = 1, \cdots, n, \quad j = 1, \cdots, n:$$

Քանի որ ըստ (6.3)-ի $(\mu_j + \alpha) < 0$, ապա $t^r e^{(\mu_j + \alpha)t}$, $(j = 1, \cdots, n)$ ֆունկցիաները ձգտում են զրոյի երբ $t \to +\infty$ և հետևաբար սահմանափակ են t-ի դրական արժեքների համար: Ուրեմն գոյություն ունեն այնպիսի M_s դրական թվեր, որ

$$\left|\frac{x_s(t)}{e^{-\alpha t}}\right| \leq M_s, \quad (t \geq 0), \quad s = 1, \cdots, n,$$

կամ, որ նույնն է,

$$|x_s(t)| \leq M_s e^{-\alpha t}, \quad (t \geq 0), \quad s = 1, \cdots, n: \tag{6.4}$$

Ինչպես գիտենք (6.1) հավասարման կամայական լուծում ունի

$$\varphi(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t)$$

տեսքը: Այստեղից և (6.4)-ից հետևում է

$$|\varphi(t)| \leq \left(|c_1||x_1(t)| + |c_2||x_2(t)| + \cdots + |c_n||x_n(t)|\right) \leq$$

$$\leq \left(|c_1| M_1 + |c_2| M_2 + \cdots + |c_n| M_n\right) e^{-\alpha t} = M e^{-\alpha t}$$

գնահատականը: Այսպիսով (6.2) անհավասարությունը, որտեղ $M = M_1|c_1| + M_2|c_2| + \cdots + M_n|c_n|$, ապացուցվեց:

Դիտողություն 6.1: (6.2) գնահատականից անմիջականորեն բխում է, որ եթե (6.1) հավասարման $L(\lambda)$ բնութագրիչ բազմանդամը կայուն է, ապա այդ հավասարման կամայական լուծում ձգտում է զրոյի, երբ $t \to +\infty$ (տե՛ս գլուխ III, վարժ. 3.3):

Սահմանում 6.1-ը տալիս է $L(\lambda)$ բազմանդամի նկարագիրը իր արմատների միջոցով: Քանի որ բարձր կարգի բազմանդամի կայունության որոշելը, այդ բազմանդամի արմատները գտնելու միջոցով ինքնըստինքյան բարդ է, ապա ծագում է բնական խնդիր՝ նկարագրել կայուն բազմանդամները անմիջականորեն իր գործակիցների միջոցով: Այս խնդիրը, չնայած գոյություն ունեցող մեծաքանակ արդյունքների, ցայսօր չի ստացել գործնականի համար հարմար ու վերջնական իր լուծումը: Այնուհանդերձ գոյություն ունեն այդ հարցի լուծման մի շարք մոտեցումներ: Դիտարկենք դրանցից մի քանիսը:

Լեմմա 6.1: Երկրորդ կարգի իրական գործակիցներով $L(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b$ բազմանդամը կայուն է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա գործակիցները դրական են:

Այս պնդումը հեշտությամբ ապացուցվում է Վիետի հայտնի թեորեմի օգնությամբ:

Լեմմա 6.2: Դիցուք $L(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$ իրական գործակիցներով բազմանդամը կայուն է: Այդ դեպքում նրա գործակիցները դրական են:

Ապացույց: Քանի որ բազմանդամի գործակիցները իրական են, ապա նրա արմատները կամ իրական են, կամ զույգ առ զույգ կոմպլեքս համալուծ: Հետևաբար այն կարելի է գրել առաջին կարգի $(\lambda+c)$ և երկրորդ կարգի $(\lambda^2+a\lambda+b)$ տեսքի իրական գործակիցներով բազմանդամների արտադրյալով: Քանի որ $L(\lambda)$ բազմանդամը կայուն է, ապա այդպիսին է նաև յուրաքանչյուր արտադրիչը: Առաջին կարգի $\lambda+c$ բազմանդամի կայունությունից բխում է, որ $c>0$, իսկ երկրորդ կարգի բազմանդամի կայունությունից, համաձայն լեմմա 6.1-ի, հետևում է, որ $a>0,\quad b>0$: Արտադրիչների գործակիցների դրական լինելուց անմիջապես բխում է արտադրյալի գործակիցների դրական լինելը: Լեմման ապացուցված է:

Բազմանդամի կայունության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ բերելու համար ներմուծենք հետևյալ նշանակումները: Դիցուք

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ . & . & . \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

կամայական քառակուսային մատրից է: Նշանակենք $\Delta_k(P)$-ով դրա գլխավոր k-րդ կարգի մինորը՝

$$\Delta_k(P)=\det\begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1k} \\ . & . & . \\ P_{k1} & \cdots & P_{kk} \end{pmatrix}:$$

Առանց ապացույցի բերենք բազմանդամների կայունության մասին հետևյալ պնդումը, որը հայտնի է որպես Ռաուս-Գուրվիցի հայտանիշ:

Թեորեմ 6.2: Դիցուք

$$L(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n,\quad a_0>0$$

կամայական իրական գործակիցներով բազմանդամ է: Այս բազմանդամի գործակիցներով կազմենք

$$Q=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

n-րդ կարգի մատրիցը: (6.3) բազմանդամը կայուն է այն և միայն այն դեպքում, երբ Q մատրիցի բոլոր $\Delta_k(Q)$, $(k=1,\cdots,n)$ գլխավոր մինորները դրական են:

Նկատենք, որ Q մատրիցը կառուցվում է հետևյալ կերպ՝ k-րդ սյունն ունի $\cdots a_{k+2}a_{k+1}a_k a_{k-1}a_{k-2}\cdots$ տեսքը, որտեղ a_k գործակիցը գտնվում է անկյունագծի վրա, իսկ a_{k+j} տարրը հավասար է զրոյի, երբ $k+j<0$, կամ $k+j>n$:

Օրինակ: Երրորդ կարգի

$$L(\lambda)=a_0\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3 \qquad a_0>0$$

բազմանդամի համար Q մատրիցն ունի

$$Q_3=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

տեսքը: Երեք գլխավոր մինորներն են

$$\Delta_1(Q)=a_1,\quad \Delta_2(Q)=a_1a_2-a_0a_3,\quad \Delta_3(Q)=a_3\cdot\Delta_2(Q),$$

որոնց դրական լինելը, նկատի ունենալով, որ $a_0>0$, համարժեք է

$$a_0>0,\quad a_1>0,\quad a_1a_2-a_0a_3>0,\quad a_3>0$$

պայմաններին: Այստեղից անմիջականորեն բխում է, որ $a_2>0$:

Այսպիսով՝ $n=3$ դեպքում թեորեմ 6.2-ը ընդունում է հետևյալ տեսքը

Թեորեմ 6.2 [1]*:* Երրորդ կարգի իրական գործակիցներով

$$L(\lambda)=a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3, \quad a_0>0$$

բազմանդամը կայուն է այն և միայն այն դեպքում, երբ a_1,a_2,a_3 գործակիցները դրական են և տեղի ունի

$$a_1a_2>a_0a_3$$

պայմանը:

§ 7. ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆ ԸՍՏ ԼՅԱՊՈՒՆՈՎԻ (ԳԾԱՅԻՆ ԴԵՊՔԸ)

Ռուս ականավոր մաթեմատիկոս Ա.Մ.Լյապունովը (1857-1918) սույն պարագրաֆում շարադրված գաղափարների հիմնադիրներից մեկն է: Կայունությանը նվիրված նրա աշխատանքները մեծ նշանակություն են ունեցել դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության, ինչպես նաև տարբեր ֆիզիկական համակարգերի տատանումների ուսումնասիրման բնագավառում: Ստորև շարադրվող կայունության տեսությունը մասն է կազմում դիֆերենցիալ հավասարումների, այսպես կոչված, որակական տեսության, որտեղ հետազոտությունները, որպես կանոն, կատարվում են առանց լուծումների կառուցման:

Դիտարկենք

$$\vec{x}'=\vec{f}(\vec{x}) \tag{7.1}$$

ինքնավար համակարգը, որտեղ $\vec{f}(\vec{x})=(f_1(\vec{x}),\cdots,f_n(\vec{x}))$ վեկտոր-ֆունկցիան որոշված է $\Omega\subset R^n$ տիրույթում և բավարարում է Կոշու խնդրի լուծման գոյության և միակության թեորեմի պայմաններին:

Մենք արդեն ապացուցել ենք (տե՛ս գլուխ V, §7), որ Կոշու խնդրի լուծումը (7.1) համակարգի համար անընդհատորեն է կախված սկզբնական պայմաններից, երբ t-ն պատկանում է $[a,b]$ վերջավոր հատվածին: Այս պարագրաֆում կուսումնասիրվի Կոշու խնդրի լուծման կախվածությունն սկզբնական պայմաններից, երբ t-ն փոփոխվում է $[0,+\infty)$ միջակայքում:

Նշանակենք $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})$-ով (7.1) համակարգի

$$\vec{\varphi}(0,\vec{\xi})=\vec{\xi},\quad \vec{\xi}\in\Omega$$

սկզբնական պայմանին բավարարող լուծումը: Դիցուք $\vec{\xi}^0\in\Omega$ կետը այնպիսին է, որ $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}^0)$ լուծումը որոշված է $[0,+\infty)$ միջակայքում:

Սահմանում 7.1: $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}^0)$ լուծումը կոչվում է կայուն ըստ Լյապունովի, եթե

ա) գոյություն ունի այնպիսի $\rho>0$ թիվ, որ $\left|\vec{\xi}-\vec{\xi}^0\right|<\rho$ անհավասարությանը բավարարող կամայական $\vec{\xi}\in\Omega$ վեկտորի համար $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})$ լուծումը որոշված է t-ի բոլոր դրական արժեքների դեպքում,

բ) կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ, $(0<\delta\le\rho)$ թիվ, որ $\left|\vec{\xi}-\vec{\xi}^0\right|<\delta$, $\vec{\xi}\in\Omega$ պայմանից բխում է $\left|\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})-\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}^0)\right|<\varepsilon$ անհավասարությունը կամայական $t\in[0,+\infty)$ արժեքի համար:

Սահմանում 7.2: Ըստ Լյապունովի կայուն $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}^0)$ լուծումը կոչվում է ասիմպտոտորեն կայուն, եթե գոյություն ունի այնպիսի σ թիվ, $0<\sigma\le\rho$, որ $\left|\vec{\xi}-\vec{\xi}^0\right|<\sigma$ անհավասարությանը բավարարող կամայական $\vec{\xi}\in\Omega$ կետի համար տեղի ունի

$$\lim_{t\to\infty}\left|\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})-\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}^0)\right|=0$$

պայմանը:

Օրինակ 7.1: Դիտարկենք

$$x'=kx$$

հաստատուն k գործակցով հավասարումը, որի $(0,\xi^0)$, $\xi^0\in R^1$ կետով անցնող լուծումն ունի

$$\varphi(t,\xi^0)=\xi^0e^{kt},\quad t\in R^1,$$

տեսքը:

Ենթադրենք $k\le 0$: Այդ դեպքում կամայական ոչ բացասական t-ի համար, երբ $\left|\xi-\xi^0\right|<\delta$ տեղի ունի

$$\left|\varphi(t,\xi)-\varphi(t,\xi^0)\right|=\left|\xi e^{kt}-\xi^0 e^{kt}\right|=e^{kt}\left|\xi-\xi^0\right|\le\left|\xi-\xi^0\right|<\delta$$

անհավասարությունը: Վերցնելով $\delta=\varepsilon$, կստանանք 7.1 սահմանման մեջ բ) կետում պահանջվող անհավասարությունը, այսինքն $\varphi(t,\xi^0)$ լուծումը կայուն է ըստ Լյապունովի: Ընդ որում, եթե $k<0$, ապա

$$\lim_{t\to\infty}\left|\varphi(t,\xi)-\varphi(t,\xi^0)\right|=\lim_{t\to\infty}e^{kt}\left|\xi-\xi^0\right|=0,$$

այսինքն՝ $\varphi(t,\xi^0)$-ն ասիմպտոտորեն կայուն է: Երբ $k=0$, ապա ըստ Լյապունովի կայուն $\varphi(t,\xi^0)$ լուծումն ասիմպտոտորեն կայուն չէ:

Դիցուք $k>0$: Այս դեպքում

$$\lim_{t\to\infty}\left|\varphi(t,\xi)-\varphi(t,\xi^0)\right|=\lim_{t\to\infty}e^{kt}\left|\xi-\xi^0\right|=+\infty$$

և $\varphi(t,\xi^0)$ լուծումը կայուն չէ, եթե $\xi\ne\xi^0$:

Օրինակ 7.2: Հինգերորդ պարագրաֆում ուսումնասիրված գծային համասեռ համակարգի համար $\vec{x}=0$ լուծումը $\lambda_1<0,\ \ \lambda_2<0$ դեպքում ասիմպտոտորեն կայուն է, իսկ թամբի դեպքում կայուն չէ: Երբ հավասարակշռության դիրքը կենտրոն է, ապա $\vec{x}=0$ լուծումը կայուն է ըստ Լյապունովի, բայց ասիմպտոտորեն կայուն չէ (համոզվել):

Ինչպես նշվեց չորրորդ պարագրաֆում ինքնավար համակարգերի համար կարևոր նշանակություն ունեն հավասարակշռության դիրք հանդիսացող $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}^0)\equiv\vec{\xi}^0$ լուծումների ուսումնասիրությունը: Այդ դեպքում (տե՛ս լեմմա 2.1) $\vec{f}(\vec{\xi}^0)=\vec{0}$: Այդ պատճառով հետագայում կդիտարկվեն (7.1) համակարգի միայն այդպիսի լուծումների կայունությունը: Ավելին՝ առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է համարել, որ $\vec{\xi}^0=\vec{0}$, հակառակ դեպքում կատարելով $\vec{y}=\vec{x}-\vec{\xi}^0$ որոնելի ֆունկցիայի փոխարինումը, կունենանք

$$\vec{y}'=\vec{x}'=\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(\vec{y}+\vec{\xi}^0)\equiv\vec{f}_1(\vec{y}):$$

Այստեղ $\vec{f}_1(\vec{0})=\vec{f}(\vec{\xi}^0)=\vec{0}$ և, հետևաբար, $\vec{y}\equiv\vec{0}$-ն, ստացված համակարգի հավասարակշռության դիրք է, որը համապատասխանում է (7.1) համակարգի

$\vec{x}=\vec{\xi}^0$ լուծմանը: Հետագայում կենթադրվի, որ այսպիսի փոխարինումը արդեն կատարված է, և (7.1) համակարգն ունի $\vec{x}\equiv\vec{0}$ լուծում, այսինքն՝ $\vec{f}(\vec{0})\equiv\vec{0}$:

Սկզբում դիտարկենք այն դեպքը, երբ (7.1)-ը հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ համակարգ է՝

$$\vec{x}\,' = A\vec{x}: \tag{7.2}$$

Այս համակարգի $0,\vec{\xi}$ սկզբնական տվյալներով լուծումը նշանակենք $\vec{\psi}(t,\vec{\xi})$:

Ակնհայտ է, որ $\vec{0}\in R^n$ վեկտորը (7.2) համակարգի հավասարակշռության դիրք է:

Լեմմա 7.1: Դիցուք A մատրիցի բոլոր սեփական արժեքների իրական մասերը բացասական են: Այդ դեպքում գոյություն ունեն այնպիսի α և r դրական թվեր, որ տեղի ունի

$$\left|\vec{\psi}(t,\vec{\xi})\right|\le r\left|\vec{\xi}\right|e^{-\alpha t},\quad (t\ge 0) \tag{7.3}$$

գնահատականը:

Դիտողություն: Վերը բերված 7.1, 7.2 սահմանումներից և (7.3) գնահատականից անմիջականորեն բխում է, որ լեմմայի պայմանների առկայության դեպքում (7.2) համակարգի $\vec{x}\equiv\vec{0}$ հավասարակշռության դիրքը ասիմպտոտորեն կայուն է:

Այժմ *ապացուցենք* լեմման: Ինչպես գիտենք, (տե՛ս գլուխ III, §10) (7.2) համակարգի կամայական $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ լուծում ունի

$$\vec{\varphi}(t)=\sum_{k=1}^{m}\vec{g}_k(t)e^{\lambda_k t}$$

տեսքը, որտեղ $\lambda_k=\mu_k+i\nu_k$ $(k=1,\cdots,m)$ թվերը A մատրիցի իրարից տարբեր սեփական արժեքներն են, իսկ $\vec{g}_k(t)$ $(k=1,\cdots,m)$ $(m\le n)$ վեկտոր-ֆունկցիայի յուրաքանչյուր կոորդինատը բազմանդամ է: Համաձայն լեմմայի պայմանի՝ գոյություն ունի α դրական թիվ այնպիսին, որ՝

$$\mu_k<-\alpha,\quad k=1,\cdots,n:$$

Հետևաբար, նկատի ունենալով, որ $\left|e^{i\nu_k t}\right|=1$, կստանանք

$$\left|\,\vec{\varphi}(t)\,\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|\,\vec{g}_k(t)\right|\cdot\left|e^{(\mu_k+i\nu_k)t}\,\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|\vec{g}_k(t)\right|e^{\mu_k t}$$

Այստեղից

$$\left|\ \vec{\varphi}(t)\ \right| e^{\alpha t} \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\vec{g}_k(t)\right| e^{(\mu_k+\alpha)t} : \qquad (7.4)$$

Քանի որ $\mu_k + \alpha < 0$, իսկ $g_k(t)$-ի յուրաքանչյուր բաղադրիչ բազմանդամ է, ապա

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left|\vec{g}_k(t)\right| e^{(\mu_k+\alpha)t} = 0 :$$

Հետևաբար $\sum_{k=1}^{n} \left|\vec{g}_k(t)\right| e^{(\mu_k+\alpha t)}$ ֆունկցիան սահմանափակ է, այսինքն գոյություն ունի R թիվ, այնպիսին, որ

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\vec{g}_k(t)\right| e^{(\mu_k+\alpha)t} \leq R, \ \ t\in[0,\infty) :$$

Այստեղից և (7.4) գնահատականից ստանում ենք

$$\left|\vec{\varphi}(t)\right| \leq \mathrm{Re}^{-\alpha t} \qquad (7.5)$$

անհավասարությունը:

Նշանակենք $\vec{\psi}^{\,i}(t) = \vec{\psi}(t,\vec{e}^{\,i}),\ \ i = 1,\cdots,n$, որտեղ $\vec{e}^{\,i}$ միավոր վեկտորի i-րդ բաղադրիչը հավասար է 1-ի: Համաձայն միակության թեորեմի՝

$$\vec{\psi}(t,\vec{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec{\psi}^{\,i}(t), \qquad (7.6)$$

քանի որ հավասարման երկու մասում գրված են (7.2) համակարգի միևնույն $0,\vec{\xi}$ սկզբնական պայմանին բավարարող լուծումներ: Յուրաքանչյուր $\vec{\psi}^{\,i}(t)$ ֆունկցիայի համար տեղի ունի (7.5) գնահատականը R_i հաստատուններով $(i = 1,\cdots,n)$: Հետևաբար

$$\left|\vec{\psi}(t,\vec{\xi})\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i\right| \left|\psi^i(t)\right| \leq e^{-\alpha t} \sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i\right| R_i \leq n\cdot R\left|\vec{\xi}\right| e^{-\alpha t},$$

որտեղ $R = \max\limits_{i=1,\cdots,n} R_i$: Նշանակելով $r = nR$ ստանում ենք պահանջվող (7.3) անհավասարությունը:

§ 8. ԼՅԱՊՈՒՆՈՎԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

Այժմ դիտարկենք (7.1) համակարգը ընդհանուր՝ ոչ գծային դեպքում:

Դիցուք $F(\vec{x}) = F(x_1, \cdots, x_n)$ որևէ դիֆերենցելի ֆունկցիա է, իսկ $\vec{\varphi}(t)$-ն (7.1) համակարգի այն լուծումն է, որը $t = t_0$ կետում ընդունում է $\vec{x}^0$ արժեքը՝ $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}^0$:

Տեղադրելով $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$-ն $F(\vec{x})$ ֆունկցիայի մեջ՝ ստանում ենք t փոփոխականից $\Phi(t) = F(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$ բարդ ֆունկցիան:

Սահմանում 8.1: $F(\vec{x})$ ֆունկցիայի ածանցյալ $\vec{x}_0$ կետում ըստ (7.1) համակարգի կոչվում է $\Phi(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալը $t = t_0$ կետում և նշանակվում է $\dot{F}_{(7.1)}(\vec{x}^0)$:

Ըստ բերված սահմանման՝

$$\dot{F}_{(7.1)}(\vec{x}^0) = \frac{d}{dt}\Phi \Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\vec{\varphi}(t))}{\partial x_i}\varphi_i'(t) \Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\vec{x}^0)}{\partial x_i} f_i(\vec{x}^0): \quad (8.1)$$

Ինչպես տեսնում ենք, $\dot{F}_{(7.1)}(\vec{x}^0)$ մեծությունը կախված չէ $\vec{\varphi}(t)$ լուծումից և կախված է միայն $\vec{x}^0$ կետից:

Դիտարկենք (7.1) համակարգը $\vec{x} \equiv \vec{0}$ հավասարակշռության դիրքի $K_r = \{\vec{x} \in \Omega, \quad |\vec{x}| < r\}$ շրջակայքում:

Լեմմա 8.1: (Լյապունով). Դիցուք գոյություն ունի ոչ բացասական $V \in C^1(K_r)$ ֆունկցիա, որը զրո է դառնում միայն $\vec{x} = \vec{0}$ կետում և որը բավարարում է

$$\dot{V}_{(7.1)}(\vec{x}) \le 0, \quad \vec{x} \in K_r \quad (8.2)$$

անհավասարությանը: Այդ դեպքում (7.1) համակարգի $\vec{x} \equiv \vec{0}$ լուծումը ($\vec{0}$ հավասարակշռության դիրքը) կայուն է ըստ Լյապունովի: Ավելին, եթե տեղի ունի

$$\dot{V}_{(7.1)}(\vec{x}) \le -W(\vec{x}), \quad \vec{x} \in K \quad (8.3)$$

անհավասարությունը որևէ $\vec{W}(x) \ge 0$ անընդհատ ֆունկցիայի համար, որը զրո է դառնում միայն $\vec{x} = \vec{0}$ կետում, ապա $\vec{x} \equiv \vec{0}$ լուծումը ասիմպտոտորեն կայուն է:

Ապացույց: Դիցուք $\varepsilon \in (0,r)$: Նշանակենք S_ε-ով $K_\varepsilon = \{\vec{x}, \quad |\vec{x}| \leq \varepsilon\}$ գնդի մակերևույթը (գնդոլորտը) և

$$V_\varepsilon = \min_{\vec{x} \in S_\varepsilon} V(\vec{x}): \tag{8.4}$$

Քանի որ $V(\vec{x})$-ը անընդհատ է K_r-ում, և $V(\vec{0}) = 0$, ապա V_ε թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ $\vec{O}$ կետի $|\vec{x}| < \delta$ շրջակայքում

$$V(\vec{x}) < V_\varepsilon: \tag{8.5}$$

Ցույց տանք, որ եթե $|\vec{\xi}| < \delta$, ապա (7.1) համակարգի կամայական $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ լուծում որոշված է բոլոր ոչ բացասական t-երի համար և տեղի ունի $|\vec{\varphi}(t, \vec{\xi}| < \varepsilon$ գնահատականը, այսինքն $\vec{x} \equiv \vec{0}$ լուծումը, համաձայն 7.1 սահմանման, կայուն է ըստ Լյապունովի: Իրոք, ենթադրենք հակառակը՝ $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ չշարունակվող լուծումը որոշված է (m_1, m_2) միջակայքում, որտեղ $m_2 < +\infty$: Այդ դեպքում համաձայն թեորեմ V. 6.2 -ի գոյություն կունենա r_2 թիվ այնպիսին, որ եթե $t \in (r_2, m_2)$, ապա $\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ կետը կգտնվի K_ε փակ սահմանափակ բազմությունից դուրս: Հետևաբար $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ հետագիծը կհատի S_ε գնդոլորտը: Ենթադրենք t_1 $(t_1 > 0)$ թիվը t-ի ամենափոքր արժեքն է, որի դեպքում հետագիծը առաջին անգամ հատում է S_ε-ին (այսինքն, երբ $t < t_1$ $\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ կետը գտնվում է K_ε գնդի ներսում):

Դիտարկենք $V(\vec{\varphi}(t, \vec{\xi}))$ ֆունկցիան: Համաձայն (8.2) անհավասարության և սահմանում 8.1-ի՝

$$\frac{d}{dt} V(\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})) = \dot{V}_{(7.1)}(\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})) \leq 0,$$

այսինքն՝ $V(\vec{\varphi}(t, \vec{\xi}))$ ֆունկցիան չի աճում: Հետևաբար՝ համաձայն (8.4) և (8.5) առնչությունների տեղի ունի

$$V_\varepsilon > V(\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})) \geq V(\vec{\varphi}(t_1, \vec{\xi})) \geq V_\varepsilon$$

անհավասարությունը: Ստացված հակասությունն ապացուցում է, որ $\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ ֆունկցիան որոշված է $[0,+\infty)$ միջակայքում և նրա հետագիծը չի կարող հատել S_ε-ին, այսինքն՝ $\left|\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})\right|<\varepsilon$: Լեմմայի առաջին պնդումը ապացուցվեց:

Ապացուցենք երկրորդ պնդումը: Դիցուք $\varepsilon>0$ կամայական թիվ է: Ընտրենք δ-ն ինչպես նախորդ դեպքում: Այդ դեպքում, երբ $\left|\vec{\xi}\right|<\delta$, կամայական $\vec{x}=\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})$ լուծման համար տեղի ունի $\left|\ \vec{\varphi}(t,\vec{\xi})\ \right|<\varepsilon$ անհավասարությունը: Ցույց տանք, որ

$$\lim_{t\to+\infty}V(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}))=0:$$

Իրոք, ենթադրելով հակառակը, կստանանք, որ ոչ բացասական չաճող $V(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}))$ ֆունկցիան ունի դրական սահման

$$\lim_{t\to+\infty}V(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}))=A>0,$$

ըստ որում $V(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}))\geq A,\ t\in[0,\infty)$: Այստեղից բխում է, որ գոյություն ունի այնպիսի $\sigma>0$ թիվ, որ

$$\left|\ \vec{\varphi}(t,\vec{\xi})\ \right|\geq\sigma,\quad t\in\left[0,+\infty\right):$$

Հակառակ դեպքում գոյություն կունենա $\left\{t_n\right\}$ հաջորդականություն՝ $t_n\geq 0$, այնպիսին, որ $\left|\ \vec{\varphi}(t_n,\vec{\xi})\ \right|\to 0$, երբ $t_n\to+\infty$: Այստեղից, V ֆունկցիայի անընդհատությունից և $V(0)=0$ պայմանից կբխի, որ $V(\vec{\varphi}(t_n,\vec{\xi}))\to 0$, երբ $t_n\to+\infty$: Ուրեմն $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})$-ն բավարարում է $\sigma\leq\left|\ \vec{\varphi}(t,\vec{\xi})\ \right|\leq\varepsilon$ գնահատականին: Համաձայն լեմմայի պայմանների, (8.3)-ում առկա $W(x)$ ֆունկցիան $O_{\sigma,\varepsilon}=\left\{x,\sigma\leq|x|\leq\varepsilon\right\}$ օղակում խիստ դրական է, այսինքն՝ գոյություն ունի $\alpha>0$ թիվ այնպիսին, որ $W(x)\geq\alpha$ և

$$\frac{d}{dt}V(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}))=\dot{V}_{(7.1)}(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}))\leq -W(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}))\leq-\alpha:$$

Ինտեգրելով ստացված անհավասարությունը 0-ից t սահմաններում, ըստ Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի, կստանանք

$$V(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}))-V(\vec{\xi})\leq-\alpha t$$

առնչությունը: Այսպիսով V ոչ բացասական ֆունկցիայի համար կունենանք $V(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})) \to -\infty$, երբ $t \to +\infty$: Ստացված հակասությունն ապացուցում է, որ

$$\lim_{t\to+\infty} V(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})) = 0 \quad (8.6)$$

Այժմ ապացուցենք, որ

$$\lim_{t\to+\infty} \vec{\varphi}(t,\vec{\xi}) = \vec{0}:$$

Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունեն $\eta > 0$ թիվ և $\{t_n\}$ հաջորդականություն ($t_n \to +\infty$) այնպիսիք, որ $|\varphi(t_n,\xi)| \geq \eta$, $n = 1,2,\ldots$: Այդ դեպքում $O_{\eta,\varepsilon}$ օղակում $V(x)$-ը խիստ դրական է: Հետևաբար, գոյություն ունի այնպիսի $\beta > 0$ թիվ, որ $V(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})) \geq \beta > 0$, որը հակասում է (8.6) առնչությանը: Ուրեմն $\lim\limits_{t\to+\infty} \vec{\varphi}(t,\vec{\xi}) = 0$, որն էլ հենց նշանակում է, որ $\vec{x} \equiv \vec{0}$ հավասարակշռության դիրքն ասիմպտոտորեն կայուն է: Լեմման ապացուցված է:

Սահմանում 8.2: Լյապունովի լեմմայում առկա $V(x)$ ֆունկցիան, որը ոչ բացասական է, զրո է դառնում միայն $\vec{x} = \vec{0}$ կետում և բավարարում է (8.2) պայմանին, կոչվում է (7.1) համակարգի Լյապունովի ֆունկցիա:

Օրինակ 8.1: Դիտարկենք

$$\begin{cases} x_1' = x_1 x_2^4 \\ x_2' = -x_1^2 x_2 \end{cases} \quad (8.7)$$

ինքնավար համակարգը, որի համար $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$ ֆունկցիաների զույգը լուծում է: Դիտարկենք $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^4$ ֆունկցիան: Այն ոչ բացասական է, և զրո է դառնում միայն $(x_1,x_2) = (0,0)$ կետում: Ցույց տանք, որ ֆունկցիան բավարարում է նաև (8.2) պայմանին և, հետևաբար, հանդիսանում է (8.7) համակարգի Լյապունովի ֆունկցիա: Իրոք՝

$$\dot{V}_{(8.1)}(x_1,x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1 x_2^4 - \frac{\partial V}{\partial x_2} x_1^2 x_2 = -2x_1^2 x_2^4 \leq 0:$$

Համաձայն Լյապունովի լեմմայի՝ (8.7) համակարգի $\vec{x} = (0,0)$ լուծումը (հավասարակշռության դիրքը) կայուն է ըստ Լյապունովի:

Ապացուցված լեմման տալիս է (7.1) համակարգի $x \equiv 0$ լուծման կայունության բավարար պայման: Այն ձևակերպվում է $V(x)$ ֆունկցիայի միջոցով, որի կառուցման կամ գոյության հարցը մնում է անորոշ: Այդ հարցի պատասխանը բավականին լայն դասի համակարգերի համար տալիս է Լյապունովի թեորեմը, որը կապացուցվի ստորև: Նախքան այդ թեորեմի ձևակերպելն ապացուցենք մի քանի օժանդակ պնդումներ:

Դիտարկենք

$$V(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} v_{ij} x_i x_j$$

քառակուսային ձևը, որտեղ $v_{ij} = v_{ji} \quad (i, j = 1, \cdots, n)$ իրական թվեր են: Այն կոչվում է դրական որոշյալ, եթե կամայական $\vec{x} \neq 0$ վեկտորի համար $V(\vec{x}) > 0$:

Լեմմա 8.2: Դիցուք $V(\vec{x})$ քառակուսային ձևը դրական որոշյալ է: Այդ դեպքում գոյություն ունեն այնպիսի μ և ν դրական թվեր, որ կամայական $\vec{x}$ վեկտորի համար տեղի ունի

$$\mu|\vec{x}|^2 \leq V(\vec{x}) \leq \nu|\vec{x}|^2 \tag{8.8}$$

գնահատականը:

Ապացույց: Դիտարկենք $S = \{\vec{x} \in R^n, \quad |\vec{x}| = 1\}$ միավոր գնդոլորտը (սֆերան): Համաձայն Վայերշտրասի թեորեմի՝ $V(\vec{x})$ անընդհատ ֆունկցիան S-ի վրա ընդունում է իր փոքրագույն μ և մեծագույն ν արժեքները: Հետևաբար՝

$$\mu \leq V(\vec{x}) \leq \nu, \quad \vec{x} \in S:$$

Քանի որ $\vec{0} \notin S$ և $V(\vec{x})$-ը դրական որոշյալ է, ապա $\mu > 0, \nu > 0$: Եթե $\vec{x} = 0$, ապա (8.8)-ը ակնհայտ է: Կամայական ոչ զրոյական $\vec{x} \in R^n$ վեկտորի համար $\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \in S$ և, հետևաբար,

$$\mu \leq V\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} v_{ij} \frac{x_i}{|\vec{x}|} \frac{x_j}{|\vec{x}|} \leq \nu:$$

Ստացված առնչության բոլոր մասերը բազմապատկելով $|\vec{x}|^2$-ով՝ ստանում ենք պահանջվող անհավասարությունը:

Լեմմա 8.3: Դիցուք (7.2) գծային համակարգի A մատրիցի բոլոր սեփական արժեքների իրական մասերը բացասական են: Այդ դեպքում գոյություն ունի դրական որոշյալ $V(\vec{x})$ քառակուսային ձև, որի ածանցյալը ըստ (7.2) համակարգի բավարարում է

$$\dot{V}_{(7.2)}(\vec{x}) \le -\beta V(\vec{x}), \quad \vec{x} \in R^n \tag{8.9}$$

անհավասարությանը, որտեղ $\beta > 0$ հաստատունը կախված չէ $\vec{x}$-ից:

Ապացույց: Կառուցենք

$$V(\xi) = \int_0^\infty \left|\vec{\psi}(\tau, \vec{\xi})\right|^2 d\tau \tag{8.10}$$

ֆունկցիան, որտեղ ըստ վերը բերված նշանակումների $\vec{\psi}(t, \vec{\xi})$-ն (7.2) համակարգի $0, \vec{\xi}$ սկզբնական տվյալներով լուծումն է: Նկատի ունենալով (7.6) առնչությունը ստանում ենք[*].

$$V(\vec{\xi}) = \int_0^\infty (\vec{\psi}(\tau, \vec{\xi}), \vec{\psi}(\tau, \vec{\xi}))d\tau = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \psi^i(\tau), \sum_{j=1}^n \xi_j \psi^j(\tau) d\tau \right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n [\int_0^\infty (\psi^i(\tau), \psi^j(\tau))d\tau] \xi_i \xi_j:$$

Քանի որ $\psi^i(t)\,(i = 1, \cdots, n)$ ֆունկցիաները բավարարում են (7.3) անհավասարությանը, ապա առկա անիսկական ինտեգրալները զուգամետ են և $V(\xi)$ ֆունկցիան քառակուսային ձև է, որտեղ $v_{ij} = \int_0^\infty (\psi^i(\tau), \psi^j(\tau))d\tau$: Այն դրական որոշյալ է, որովհետև (8.10) բանաձևում ընդինտեգրալային ֆունկցիան դրական է, երբ $\vec{\xi} \ne 0$: Հաշվենք $V(\vec{\xi})$ ֆունկցիայի ածանցյալը $\vec{\xi}$ կետում ըստ (7.2) համակարգի: Համաձայն 8.1 սահմանման՝ ունենք.

---

[*] Հիշեցնենք, որ $|\vec{a}|^2 = (\vec{a}, \vec{a})$, որտեղ $(\vec{a}, \vec{b})$-ն $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալն է:

$$\overset{\bullet}{V}_{(7.2)}(\vec{\xi}) = \frac{d}{dt} V(\vec{\psi}(t,\vec{\xi}))\Big|_{t=0} :$$

Չևափոխենք $V(\psi(t,\vec{\xi}))$ ֆունկցիան՝ նկատի ունենալով ինքնավար համակարգերի լուծումների լեմմա 1.3-ի բ) կետում արտածված հատկությունը.

$$V(\vec{\psi}(t,\vec{\xi})) = \int_0^\infty \left|\vec{\psi}(\tau,\vec{\psi}(t,\vec{\xi}))\right|^2 d\tau = \int_0^\infty \left|\vec{\psi}(t+\tau,\vec{\xi})\right|^2 d\tau = \int_t^\infty \left|\vec{\psi}(s,\vec{\xi})\right|^2 ds :$$

Հետևաբար՝

$$\overset{\bullet}{V}_{(7.2)}(\vec{\xi}) = \frac{d}{dt} V(\vec{\psi}(t,\vec{\xi}))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_t^\infty \left|\vec{\psi}(\tau,\vec{\xi})\right|^2 d\tau\Big|_{t=0} = -\left|\vec{\psi}(t,\vec{\xi})\right|^2\Big|_{t=0} = -\left|\vec{\xi}\right|^2 :$$

(8.8)

անհավասարությունից հետևում է

$$-\left|\vec{\xi}\right|^2 \le -\frac{1}{\nu} V(\vec{\xi})$$

գնահատականը: Ուրեմն

$$\overset{\bullet}{V}_{(7.2)}(\vec{\xi}) \le -\frac{1}{\nu} V(\vec{\xi}),$$

այսինքն տեղի ունի (8.9) անհավասարությունը, որտեղ $\beta = \frac{1}{\nu}$: Լեմման ապացուցված է:

Դիտողություն 8.1: Քանի որ (8.10) բանաձևով որոշվող $V(\vec{\xi})$ ֆունկցիան ոչ բացասական է, զրո է դառնում միայն $\vec{\xi} = \vec{0}$ կետում և բավարարում է (8.9) անհավասարությանը, ապա այն, համաձայն 8.2 սահմանման, հանդիսանում է (7.2) գծային համակարգի Լյապունովի ֆունկցիա: Ավելին՝ (8.9) գնահատականից և Լյապունովի լեմմայից $(W(\vec{x}) \equiv V(\vec{x}))$ բխում է, որ ապացուցված լեմմայի պայմանների առկայության դեպքում (7.2) համակարգի $\vec{x} \equiv \vec{0}$ լուծումը ասիմպտոտորեն կայուն է: Սույն փաստը ուրիշ եղանակով արդեն ապացուցվել էր լեմմա 7.1-ում և 8.3 լեմմայի նոր արդյունքը կարելի է համարել (7.2) գծային համակարգի Լյապունովի ֆունցիայի կառուցումը:

Այժմ ցույց տանք, որ (8.10) բանաձևով սահմանված (7.2) գծային համակարգի $V(\vec{\xi})$ Լյապունովի ֆունկցիան կարող է հանդիսանալ նաև բավականին լայն դասի ոչ գծային համակարգերի Լյապունովի ֆունկցիա:

Ենթադրենք (7.1) համակարգի $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \cdots, f_n(\vec{x}))$ ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ: Օգտվելով Թեյլորի բանաձևից $\vec{0}$ հավասարակշռության դիրքի շրջակայքում (7.1) համակարգը գրենք

$$\vec{x}' = \vec{f}(\vec{0}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{0}) x_j + \vec{R} \tag{8.11}$$

տեսքով, որտեղ $\vec{R}$-ը Լագրանժի տեսքով վերցված մնացորդային անդամն է.

$$\vec{R} = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_k \partial x_j}(\theta \vec{x}) x_k x_j, \quad (0 < \theta < 1):$$

Քանի որ $\vec{0}$-ն հավասարակշռության դիրք է, ապա համաձայն լեմմա 2.1-ի $\vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$: Նշանակենք A-ով $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(0), \quad (i, j = 1, \cdots, n)$ տարրեր ունեցող մատրիցը: Այդ դեպքում (8.11) համակարգը կստանա

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{R} \tag{8.12}$$

տեսքը: Ստացված ոչ գծային համակարգին համապատասխանության մեջ դնենք գծային

$$\vec{x}' = A\vec{x} \tag{8.13}$$

համակարգը, որը կոչվում է (8.12)-ի գծայնացված համակարգ: Վերջինիս Լյապունովի ֆունկցիան կառուցվել է լեմմա 8.3-ում: Ստորև ապացուցվող թեորեմում ցույց կտրվի, որ այն հանդիսանում է նաև (8.12) ոչ գծային համակարգի Լյապունովի ֆունկցիա:

Թեորեմ 8.1: (Լյապունով, 1901թ): Դիցուք (7.1) համակարգում

$f_i \in C^2(\Omega), \quad (i = 1, \cdots, n)$, իսկ $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)$ տարրերից կազմված A մատրիցի

բոլոր սեփական արժեքների իրական մասերը բացասական են: Այդ դեպքում (7.1) համակարգի $\vec{x} \equiv \vec{0}$ լուծումը ($\vec{0}$ հավասարակշռության դիրքը) ասիմպտոտորեն կայուն է: Ավելին՝ գոյություն ունեն, r, α, σ դրական թվեր, այնպիսիք, որ $|\vec{\xi}| < \sigma$ պայմանին բավարարող կամայական $\vec{\xi} \in \Omega$ վեկտորի համար տեղի ունի

$$\left|\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})\right| \leq r\left|\vec{\xi}\right|e^{-\alpha t}\ , \quad (t \geq 0) \tag{8.14}$$

անհավասարությունը:

Ապացույց: Ապացույցը հնարավորին չափ հեշտ ընկալելի դարձնելու նպատակով այն բաժանենք մի քանի քայլերի: Նկատենք, որ թեորեմի պայմանների առկայության դեպքում (7.1) համակարգը, ինչպես նշվեց վերևում, կարելի է բերել (8.12) տեսքի:

1-ին քայլ: Ենթադրենք $V(\vec{x})$-ը (8.13) գծային համասեռ համակարգի Լյապունովի ֆունկցիան է: Կամայական $b > 0$ թվի համար նշանակենք

$$է(b)=\{\vec{x};\quad \vec{x} \in R^n,\quad V(\vec{x}) \leq b\}:$$

$V(\vec{x})$ ֆունկցիայի դրական որոշյալությունից բխում է, որ է(b) բազմությունն էլիպսոիդ է:

Ցույց տանք, որ գոյություն ունեն α և c դրական թվեր այնպիսիք, որ

$$\dot{V}_{(7.1)}(\vec{x}) \leq -2\alpha V(\vec{x}), \quad \vec{x} \in է(c)\,, \tag{8.15}$$

որտեղից, համաձայն լեմմա 8.1-ի, անմիջականորեն կբխի թեորեմի հիմնական պնդումը:

Դրա համար հաշվենք $V(\vec{x})$ ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ (7.1) համակարգի, կամ, որ նույնն է, ըստ (8.12)-ի՝

$$\dot{V}_{(7.1)}(\vec{x}) = \dot{V}_{(8.12)}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x})f_i(\vec{x}) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x})a_{ij}x_j + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x})R_i = \dot{V}_{(8.13)}(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x})R_i \tag{8.16}$$

Քանի որ $V(\vec{x})$ ֆունցիան բավարարում է լեմմա 8.3-ի պայմաններին, ապա $\dot{V}_{(8.13)}(\vec{x}) \leq -\beta V(\vec{x})$ և հետևաբար

$$\dot{V}_{(7.1)}(\vec{x}) \leq -\beta V(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x})R_i \tag{8.17}$$

Համաձայն թեորեմի $f_i \in C^2(\Omega)$ պայմանի՝ $f_i(\vec{x})$ ֆունկցիաների երկրորդ կարգի ածանցյալները կլինեն սահմանափակ $Է(c)$-ում, եթե c-ն ընտրենք այնպես, որ $Է(c) \subset \Omega$: Հետևաբար օգտվելով (8.8) անհավասարությունից՝ մնացորդային անդամի համար կստանանք

$$|R_i| \le \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\theta\vec{x})\right||x_j||x_k| \le \frac{n}{2}k|\vec{x}|^2 \le \frac{nk}{2\mu}V(\vec{x}), \quad i=1,\cdots,n$$

գնահատականը, որտեղ՝

$$k = \max_{\substack{\vec{x}\in Է(c)\\ i,j,l=1,\cdots,n}}\left|\frac{\partial^2 f_i(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_l}\right|:$$

Քանի որ $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n)$ ֆունկցիան գծային է $x_1,\cdots,x_n$ փոփոխականների նկատմամբ, ապա գոյություն ունի $l>0$ հաստատուն, այնպիսին, որ

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x})\right| \le l|\vec{x}| \le \frac{l}{\sqrt{\mu}}\sqrt{V(\vec{x})}, \quad \vec{x}\in Է(c), \quad i=1,\ldots n$$

(նկատենք, որ երկրորդ անհավասարությունը բխում է (8.8)-ից):

Այսպիսով՝

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x})R_i \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x})\right||R_i| \le \sum_{i=1}^{n}\frac{l}{\sqrt{\mu}}\sqrt{V(\vec{x})}\,\frac{kn}{2\mu}V(\vec{x}) =$$

$$= \frac{kn^2 l}{2\mu^{3/2}}[V(\vec{x})]^{3/2} = q[V(\vec{x})]^{3/2}, \tag{8.18}$$

որտեղ $q = \dfrac{kn^2 l}{2\mu^{3/2}}$:

Այժմ ընտրենք $c>0$ հաստատունն այնպես, որ $Է(c)\subset\Omega$ և $q\sqrt{c} \le \dfrac{\beta}{2}$: Այդ դեպքում (8.17) և (8.18) անհավասարություններից բխում է

$$\dot{V}_{(7.1)}(\vec{x}) \le -\beta V(\vec{x}) + q[V(\vec{x})]^{3/2} \le -\beta V(\vec{x}) + q\sqrt{c}V(\vec{x}) \le$$
$$\le -\beta V(\vec{x}) + \frac{\beta}{2}V(\vec{x}) = -\frac{\beta}{2}V(\vec{x})$$

գնահատականը: Այստեղից, ընտրելով $\alpha = \frac{\beta}{4}$ ստանում ենք պահանջվող (8.15) գնահատականը, որով և ավարտվում է առաջին քայլը:

Դիցուք $\vec{\xi}$-ն Է(c) էլիպսոիդի ներքին կետ է, այսինքն՝

$$V(\vec{\xi}) < c: \qquad (8.19)$$

Նշանակենք

$$v(t) = V(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})),$$

որտեղ, ըստ մեր նշանակումների $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})$-ն (7.1) համակարգի $0,\vec{\xi}$ տվյալներով լուծումն է: Համաձայն (8.15) անհավասարության՝

$$v'(t) \le -2\alpha v(t) \qquad (8.20)$$

t-ի այն արժեքների համար, որոնք բավարարում են $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}) \in$ Է(c) պայմանին, այսինքն՝ $v(t) \le c$-ից:

2-րդ քայլ: Ցույց տանք, որ $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})$ լուծումը, որտեղ $\vec{\xi}$-ն բավարարում է (8.19) պայմանին, որոշված է բոլոր դրական t-երի համար: Ենթադրենք հակառակը գոյություն ունի m դրական թիվ այնպիսին, որ $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})$-ն չշարունակվող լուծում է որոշված $[0,m]$ վերջավոր հատվածում: Համաձայն թեորեմ V. 6.2-ի նկարագրված չշարունակվող լուծման հատկության՝ գոյություն ունի այնպիսի r $(0 < r < m)$ թիվ, որ եթե $t \in (r,m]$, ապա $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}) \notin$ Է(c): Այլ խոսքով՝ $\vec{x} = \vec{\varphi}(t,\vec{\xi})$ կետն ինչ–որ պահից սկսած դուրս է գալիս Է(c) էլիպսոիդից: Քանի որ $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա այդ կետը կհայտնվի նաև Է(c)-ի եզրի վրա: Նշանակենք t_1-ով $(t_1 > 0)$ t-ի այն արժեքը, որի համար $\vec{\varphi}(t_1,\vec{\xi})$ կետը առաջին անգամ հասնում է Է(c)-ի եզրին, այսինքն՝ $v(t_1) = c$ և $t \in [0,t_1)$ համար, $v(t) < c$: $t \in [0,t_1)$-ի այդ արժեքների համար տեղի ունի նաև (8.20) անհավասարությունը և $v'(t) \le 0$:

Ուրեմն $v(t)$ ֆունկցիան չի աճում և $c = v(t_1) \le v(0) = V(\varphi(0,\vec{\xi})) = V(\vec{\xi}) < c$ համաձայն (8.19) առնչության: Ստացված հակասությունն ապացուցում է, որ $\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})$ լուծումը, ինչպես նաև $v(t)$ ֆունկցիան, որոշված են $[0,\infty)$-ում և t-ի այդ արժեքների համար տեղի ունի (8.20) անհավասարությունը:

3-րդ քայլ: (8.14) անհավասարության ապացույցը: Եթե $\vec{\xi} \ne \vec{0}$, ապա, համաձայն V ֆունկցիայի դրական որոշվածության, $v(t) = V(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})) > 0$ և ըստ (8.20)-ի՝

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \le -2\alpha:$$

Ինտեգրելով այս նույնական անհավասարությունը $(0,t)$ միջակայքում, ստանում ենք

$$\ln v(t) - \ln v(0) \le -2\alpha t:$$

Այստեղից

$$V(\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})) \le V(\vec{\xi})e^{-2\alpha t}:$$

Ստացված և (8.8) անհավասարություններից բխում է

$$\left|\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})\right|^2 \le \frac{\nu}{\mu}\left|\vec{\xi}\right|^2 e^{-2\alpha t}, \quad t \ge 0, \quad (8.21)$$

գնահատականը այն $\vec{\xi}$-երի համար, որոնք բավարարում են (8.19) պայմանին, այսինքն ընկած են $\text{Է}(c)$ էլիպսոիդի մեջ: Մյուս կողմից հեշտ է համոզվել, որ

$$K = \left\{\vec{\xi}; \quad \left|\vec{\xi}\right| < \sigma = \sqrt{\frac{c}{\nu}}\right\} \tag{8.22}$$

գունդն ընկած է $\text{Է}(c)$-ի մեջ: Հետևաբար (8.21)-ից բխում է

$$\left|\vec{\varphi}(t,\vec{\xi})\right|^2 \le \frac{\nu}{\mu}\left|\vec{\xi}\right|^2 e^{-2\alpha t}, \quad \vec{\xi} \in K,$$

անհավասարությունը, որը համընկնում է (8.14) գնահատականի հետ, երբ $r = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 8.2: Ապացուցված (8.14) անհավասարությունից և սահմանում 7.2-ից անմիջապես բխում է, որ (7.1) համակարգի $\vec{x} \equiv \vec{0}$ լուծումն ասիմպտոտորեն կայուն է:

Այժմ դիտարկենք որոշ իմաստով հակադիր դեպքը:

Սահմանում 8.3: (7.1) համակարգի $\vec{x} \equiv \vec{0}$ լուծումը ($\vec{0}$ հավասարակշռության դիրքը) կոչվում է լիովին անկայուն, եթե գոյություն ունի $\sigma > 0$ թիվ այնպիսին, որ կամայական $\vec{\xi}$ վեկտորի համար, որը պատկանում է $\left|\vec{\xi}\right| < \sigma$ գնդին, գոյություն ունի այնպիսի $T = T(\xi)$ թիվ, որ $\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ լուծումը բավարարում է

$$\left|\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})\right| \geq \sigma$$

անհավասարությանը, երբ $t > T(\xi)$: Այլ կերպ ասած $\vec{0}$ լիովին անկայուն հավասարակշռության դիրքը բնութագրվում է նրանով, որ գոյություն ունի $\vec{0}$ կենտրոնով և $\sigma > 0$ շառավղով գունդ, այնպիսին, որ կամայական $\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ լուծում, $(\vec{\xi} \neq \vec{0})$ սկզբնական $t = 0$ պահին գտնվելով գնդի ներսում, ինչ-որ $T = T(\vec{\xi})$ պահից սկսած դուրս է գալիս գնդից և այլևս չի վերադառնում:

Թեորեմ 8.2: Դիցուք (7.1) համակարգում $f_i \in C^2(\Omega)$, $i = 1, \cdots, n$, իսկ (8.13) համակարգի A մատրիցի բոլոր սեփական արժեքների իրական մասերը դրական են: Այս դեպքում (7.1) համակարգի $\vec{x} \equiv \vec{0}$ լուծումը լիովին անկայուն է:

Ապացույց: Պահպանելով նախորդ թեորեմում ընդունված նշանակումները դիտարկենք

$$\vec{x}' = -\vec{f}(\vec{x}) \tag{8.23}$$

համակարգը, որի համար ակնհայտորեն բավարարված են 8.1 թեորեմի բոլոր պայմանները: Հետևաբար գոյություն ունի $V(\vec{x})$ Լյապունովի ֆունկցիա, որը բավարարում է

$$\overset{\bullet}{V}_{(8.23)}(\vec{x}) \leq -2\alpha V(\vec{x}), \quad \vec{x} \in Է(c)$$

անհավասարությանը: Այստեղից կունենանք

$$\overset{\bullet}{V}_{(8.23)}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x})\left(-f_i(\vec{x})\right) = -\overset{\bullet}{V}_{(7.1)}(\vec{x}) \leq -2\alpha V(\vec{x}),$$

կամ

$$\dot{V}_{(7.1)}(\vec{x}) \geq 2\alpha V(\vec{x})$$

անհավասարությունը:

Ենթադրենք $\bar{\xi}$ կետը $E(c)$ էլիպսոիդի ներքին կետ է: Այդ դեպքում $v(t) = V(\vec{\varphi}(t,\bar{\xi}))$ ֆունկցիան, ինչպես ապացուցվեց նախորդ թեորեմում, որոշված է $[0,\infty)$ միջակայքում և բավարարում է

$$v'(t) \geq 2\alpha v(t) \tag{8.24}$$

անհավասարությանը, երբ $v(t) \leq c$:

Քանի որ $\bar{\xi} \neq 0$ և հետևաբար $v(t) > 0$, ապա՝

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \geq 2\alpha:$$

Ինտեգրելով այս անհավասարությունը $(0,t)$ միջակայքում՝ ստանում ենք

$$v(t) \geq v(0)e^{2\alpha t}$$

կամ, որ նույնն է,

$$V(\vec{\varphi}(t,\bar{\xi})) \geq V(\bar{\xi})e^{2\alpha t}$$

անհավասարությունը: Այստեղից և (8.8)-ից անմիջապես ստանում ենք

$$\left|\vec{\varphi}(t,\bar{\xi})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{\nu}}\sqrt{V(\vec{\varphi}(t,\bar{\xi}))} \geq \frac{1}{\sqrt{\nu}}\sqrt{V(\bar{\xi})}e^{\alpha t} \geq \sqrt{\frac{\mu}{\nu}}\left|\bar{\xi}\right|e^{\alpha t}$$

գնահատականը: Վերջինից բխում է, որ t-ի հետ մեկտեղ աճում է $\vec{x} = \varphi(t,\bar{\xi})$ կետի հեռավորությունը $\vec{0}$ կետից: Հետևաբար՝ ինչ–որ պահի $\vec{x}$ կետը դուրս կգա էլիպսոիդից: Ցույց տանք, որ այն այլևս չի վերադառնա էլիպսոիդի մեջ: Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի $t_1 > 0$, որի համար $\vec{\varphi}(t_1,\bar{\xi})$ կետը գտնվում է $E(c)$-ի եզրի վրա, այսինքն՝ $v(t_1) = c$, իսկ t-ի ավելի մեծ $t_1 + \Delta t$ արժեքների համար $(\Delta t > 0,\ v(t_1 + \Delta t) < c$: Այդ դեպքում $v'(t_1) \leq 0$:

Քանի որ $v(t_1) = c > 0$, ապա $v'(t_1) \leq 0$ անհավասարությունը հակասում է (8.24)-ին $t = t_1$ կետում:

Այսպիսով ստացանք, որ $\bar{x}=\bar{\varphi}(t,\bar{\xi}),\ (\bar{\xi}\neq\bar{0})$ լուծման հետագիծը t-ի ինչ–որ արժեքից սկսած դուրս է գալիս $\mathrm{E}(c)$ էլիպսոիդից և այլևս չի վերադառնում այնտեղ: Վերցնելով $\mathrm{E}(c)$-ի մեջ ընկած (8.22) գունդը և որպես 8.3 սահմանման մեջ մասնակցող $\sigma>0$ թիվ այդ գնդի $\sigma=\sqrt{\dfrac{c}{v}}$ շառավիղը, կստանանք թեորեմի ապացույցը:

Դիտողություն 8.3. Միջանկյալ դեպքում, երբ A մատրիցի k $(0<k<n)$ թվով սեփական արժեքների իրական մասերը դրական են, $\bar{0}$ հավասարակշռության դիրքը չի կարող լինել կայուն ըստ Լյապունովի: Դրանում հեշտ է համոզվել հաստատուն գործակիցներով համասեռ համակարգերի օրինակի վրա:

ԳԼՈՒԽ VII

ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ՄԱՍՆԱԿԱՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Չնայած մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունը ինքնուրույն և բազմահարուստ մի բնագավառ է, որն ուսուցանվում է համալսարանական համապատասխան դասընթացում, բայց հետևելով հաստատված ավանդույթին՝ մենք այստեղ շարադրում ենք *առաջին կարգի* մասնական ածանցյալներով հավասարումների տեսության մի հատված: Նման «շեղումը» սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունից պայմանավորված է հետևյալով.

ա) շարադրվող տեսությունը ոչ միայն հիմնվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների նախորդ գլուխներում մշակված նյութի վրա, այլև ուսումնասիրվող խնդիրները ըստ էության բերվում են սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների նորմալ (որոշ դեպքերում ինքնավար) համակարգերի համապատասխան խնդիրներին: Այս փաստը հատուկ է միայն *առաջին կարգի* մասնական ածանցյալներով հավասարումներին,

բ) մասնական ածանցյալներով հավասարումների տեսությանը նվիրված դասագրքերում այս նյութը սովորաբար չի շարադրվում:

Սկսենք սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությանը վերաբերող առաջին կամ ընդհանուր ինտեգրալի գաղափարից:

§ 1. ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԱՌԱՋԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1^0. Դիտարկենք $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ որոնելի ֆունկցիաների նկատմամբ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների

$$x_i' = f_i(t,x_1,\cdots,x_n) \qquad i=\overline{1,n} \tag{1.1}$$

նորմալ համակարգը, որը $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ և $\vec{f}=(f_1,\cdots,f_n)$ վեկտորների նկատմամբ կգրվի

$$\vec{x}' = \vec{f}(t,\vec{x}) \tag{1.2}$$

վեկտորական տեսքով:

Կենթադրենք, որ $\vec{f}$ վեկտոր-ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset R^{n+1}$ տիրույթում և բավարարում է գոյության և միակության թեորեմի պայմաններին այնպես, որ Ω տիրույթի կամայական $(t_0, \vec{x}^0) = (t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$ ներքին կետի համար գոյություն ունի մեկ և միայն մեկ վեկտոր–ֆունկցիա՝

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}^0) \qquad (x_i = \varphi_i(t, t_0, \vec{x}^0) \quad i = \overline{1,n}),$$

որը $t \in (r_1, r_2)$ արժեքների համար բավարարում է (1.1) համակարգին և

$$\vec{\varphi}(t_0, t_0, \vec{x}^0) = \vec{x}^0 \qquad (\varphi_i(t_0, t_0, \vec{x}^0) = x_i^0 \quad i = \overline{1,n}): \tag{1.3}$$

Սահմանում 1.1: Ω տիրույթում որոշված հաստատունից տարբեր $z = \Phi(t, x_1, \cdots, x_n)$ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիան ($\Phi \in C^{(1)}(\Omega)$) կոչվում է (1.1) համակարգի առաջին ինտեգրալ, եթե (1.1) համակարգի յուրաքանչյուր $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ լուծման համար, որոշված (r_1, r_2) միջակայքում, գոյություն ունի $C = C(\vec{\varphi})$ հաստատուն այնպիսին, որ

$$\Phi(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) \equiv C, \quad t \in (r_1, r_2): \tag{1.4}$$

Ստորև ցույց կտրվի, որ ունենալով որոշակի թվով *անկախ* առաջին ինտեգրալներ (ստույգը՝ n հատ), կարելի է ստանալ (1.1) համակարգի ընդհանուր լուծումը: Մյուս կողմից առաջին ինտեգրալի գաղափարի ներմուծումը մեզ հնարավորություն կտա առաջին կարգի մասնական ածանցյալներով գծային հավասարումների լուծումը բերել սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծմանը:

Թեորեմ 1.1: Որպեսզի $(n+1)$-չափանի Ω տիրույթում որոշված, հաստատունից տարբեր, անընդհատ դիֆերենցելի $\Phi(t, \vec{x}) = \Phi(t, x_1, \cdots, x_n)$ ֆունկցիան հանդիսանա (1.1) համակարգի առաջին ինտեգրալ Ω-ում անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + f_1(t, \vec{x}) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \cdots + f_n(t, \vec{x}) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \equiv 0, \quad (t, \vec{x}) \in \Omega \tag{1.5}$$

նույնությունը:

Ապացույց: Դիցուք $z = \Phi(t, \vec{x})$ ֆունկցիան (1.1) համակարգի որևէ առաջին ինտեգրալ է Ω-ում: Ցույց տանք, որ այն բավարարում է (1.5) նույնությանը: Ենթադրենք $(t_0, \vec{x}^0) = (t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$-ն կամայական կետ է Ωից: Ըստ գոյության թեորեմի՝ (1.1) համակարգն ունի t_0 կետի ինչ-որ (r_1, r_2) շրջակայքում որոշված $\vec{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$ լուծում, որն անցնում է $(t_0, \vec{x}^0)$ կետով և, ըստ առաջին ինտեգրալի սահմանման:

$$\Phi(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) \equiv C, \; t \in (r_1, r_2): \tag{1.6}$$

Ածանցելով (1.6) նույնությունը, կստանանք (ըստ բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնի)

$$\frac{d\Phi}{dt} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\varphi_1'(t) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\varphi_n'(t) \equiv 0, t \in (r_1, r_2):$$

Հաշվի առնելով, որ $\vec{\varphi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիան (1.1) համակարգի լուծում է, այստեղից կունենանք

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \cdot f_1(t, \vec{\varphi}(t)) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \cdot f_n(t, \vec{\varphi}(t)) \equiv 0, \quad t \in (r_1, r_2)$$

նույնությունը:

Ստացված նույնությունում վերցնելով $t = t_0$ և հաշվի առնելով, որ $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}^0$, կստանանք (1.5) առնչությունը $(t_0, \vec{x}^0) \in \Omega$ կետում: Քանի որ $(t_0, \vec{x}^0)$-ն կամայական կետ էր Ω-ից, ապա ապացուցվեց, որ Φ ֆունկցիայի համար տեղի ունի (1.5) նույնությունը:

Այժմ ենթադրենք, որ $\Phi(t, x)$ հաստատունից տարբեր անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիան բավարարում է (1.5) առնչությանը: Ցույց տանք, որ այն (1.1) համակարգի առաջին ինտեգրալ է Ω-ում:

Դիցուք $x = \vec{\varphi}(t)$-ն (1.1) համակարգի կամայական լուծում է (r_1, r_2)-ում: Ցույց տանք, որ $\Phi(t, \vec{\varphi}(t))$-ն հաստատուն է (r_1, r_2)-ում: Ըստ բարդ ֆունցիայի ածանցման կանոնի

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\varphi_1'(t) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\varphi_n'(t)$$

Հաշվի առնելով, որ $\vec{\varphi}(t)$-ն (1.1) համակարգի լուծում է, կունենանք

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, \vec{\varphi}(t) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} f_1(t, \vec{\varphi}(t)) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} f_n(t, \vec{\varphi}(t)): \tag{1.7}$$

Քանի որ (r_1, r_2)-ին պատկանող կամայական t կետի համար $(t, \vec{\varphi}(t)) \in \Omega$, ապա (1.7)-ից և (1.5)-ից կստանանք՝

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, \vec{\varphi}(t)) \equiv 0, \ t \in (r_1, r_2),$$

որն ապացուցում է, որ $\Phi(t, \vec{\varphi}(t)) \equiv const$, $t \in (r_1, r_2)$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1.2: (1.1) համակարգի $\Phi_1(t, \vec{x}), \cdots, \Phi_k(t, \vec{x})$, $(k \le n)$ առաջին ինտեգրալները կոչվում են անկախ $(t_0, \vec{x}^0) \in \Omega$ կետում, եթե

$$\frac{D(\Phi_1, \cdots, \Phi_k)}{D(x_1, \cdots, x_n)} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

մատրիցի ռանգը այդ կետում հավասար է k-ի:

Այժմ ենթադրենք, որ մեզ հայտնի են (1.1) համակարգի Ω-ում անկախ n հատ առաջին ինտեգրալներ՝ $\Phi_1, \cdots, \Phi_n$: Ցույց տանք, որ դրանց միջոցով կարելի է ստանալ (1.1) համակարգի ընդհանուր լուծումը: Շարադրանքը մատչելի դարձնելու նպատակով, սկզբում դիտարկենք $n = 1$ դեպքը:

Եվ այսպես, դիցուք $z = \Phi(t, x)$ անընդհատ դիֆերենցելի, հաստատունից տարբեր ֆունկցիան $x' = f(t, x)$ հավասարման որևէ անկախ առաջին ինտեգրալ է $\Omega \subset R^2$ տիրույթում, այսինքն, այնպիսին, որ $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \ne 0$, երբ $(t, x) \in \Omega$: Ցույց տանք, որ Φ առաջին ինտեգրալի առկայությունը հնարավորություն է տալիս լուծելու $x' = f(t, x)$ հավասարումը:

Դիցուք (t_0, x_0)-ն կամայական կետ է Ω-ից և $c_0 = \Phi(t_0, x_0)$: Դիտարկենք

$$\Phi(t, x) = c_0: \qquad (1.8)$$

առնչությունը: Քանի որ $\dfrac{\partial\Phi(t_0,x_0)}{\partial x}\neq 0$, ապա ըստ անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության մասին թեորեմի գոյություն ունի t_0 կետի ինչ-որ (t_1,t_2) շրջակայք և այդ շրջակայքում որոշված միակ $x=\varphi(t,c_0)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝ ա) $\Phi(t,\varphi(t))=c_0$, $t\in(r_1,r_2)$, բ) $\varphi(t_0,x_0)=c_0$, գ) φ-ն անընդհատ դիֆերենցելի է (r_1,r_2)-ում և

$$\varphi'(t,c_0)=-\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}\Big/\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=\varphi(t,c_0)}: \tag{1.9}$$

Քանի որ ըստ թեորեմ 1.1-ի Φ ֆունկցիան բավարարում է (1.5) առնչությանը, ապա (1.5)-ից ($n=1$ դեպքում) և (1.9)-ից հետևում է, որ $x=\varphi(t,c_0)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (1.1) հավասարման լուծում: Փոփոխելով (t_0,x_0) կետը Ω-ում՝ կստանանք (1.1) հավասարման $\{\varphi(t,c)\}$ լուծումների ընտանիքը:

Այժմ ցույց տանք, որ եթե $x=\psi(t)$-ն ինչ-որ (r_1,r_2) միջակայքում (1.1) հավասարման որևէ լուծում է, ապա ψ-ն պատկանում է այդ ընտանիքին կամ, որ նույնն է, ստացվում է $\{\varphi(t,c)\}$ ընտանիքից c հաստատունի համապատասխան ընտրությամբ:

Իրոք, ըստ առաջին ինտեգրալի սահմանման, գոյություն ունի c_1 հաստատուն այնպիսին, որ $\Phi(t,\psi(t))\equiv c_1$, $t\in(r_1,r_2)$: Կրկին կիրառելով անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության մասին թեորեմը՝ կստանանք $\Phi(t,x)=c_1$ հավասարման $x=\varphi(t,c_1)$ լուծումը, որը մի կողմից՝ պատկանում է $\{\varphi(t,c)\}$ ընտանիքին, մյուս կողմից՝ համընկնում է $\psi(t)$ ֆունկցիայի հետ, քանի որ ըստ հիշատակված թեորեմի՝ $\Phi(t,x)=c_1$ հավասարման լուծումը միակն է:

Անցնենք ընդհանուր $(n\geq 1)$ դեպքի, երբ հայտնի են (1.1) համակարգի Ω-ում անկախ $\Phi_1(t,\vec{x}),\cdots,\Phi_n(t,\vec{x})$ առաջին ինտեգրալները: Ըստ առաջին ինտեգրալների անկախության սահմանման (երբ $k=n$) դա նշանակում է, որ՝

$$\det\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_k)}{D(x_1,\cdots,x_n)}\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_k}{\partial x_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial\Phi_k}{\partial x_n}\end{vmatrix}\neq 0,\qquad (t,\vec{x})\in\Omega:$$

Ցույց տանք, որ $\Phi_1,\cdots,\Phi_n$ անկախ առաջին ինտեգրալների առկայությունը հնարավորություն կտա լուծելու (1.1) համակարգը: Ըստ որում, շարադրանքում որպես ուղեցույց կընդունենք արդեն ուսումնասիրված $n=1$ դեպքը:

Դիցուք $(t_0,\vec{x}^0)=(t_0,x_1^0,\cdots,x_n^0)$-ն կամայական կետ է Ω-ից: Ըստ անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության մասին թեորեմի (տե՛ս թեորեմ V. 2.3) գոյություն ունի t_0 կետի (t_1,t_2) շրջակայք այնպիսին, որ հավասարումների

$$\Phi_j(t,x_1,\cdots,x_n)=c_j,(j=\overline{1,n})\tag{1.10}$$

համակարգը $c_j^0=\Phi_j(t_0,\vec{x}^0)$ հաստատունների դեպքում ունի և այն էլ միակ $\vec{x}=\vec{\varphi}(t,\vec{c}^0)$ $(x_i=\varphi_i(t,c_1^0,\cdots,c_n^0)\quad i=\overline{1,n})$ լուծումը:

Ըստ որում, լուծելով

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial t}+\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}=0\qquad(j=\overline{1,n})$$

հավասարումների համակարգը, կունենանք, որ $\varphi_1',\cdots,\varphi_n'$ անհայտների նկատմամբ

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_1}\cdot\varphi_1'+\cdots+\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_n}\cdot\varphi_n'=-\frac{\partial\Phi_j}{\partial t},(j=1,\cdots,n)\tag{1.11}$$

հանրահաշվական հավասարումների համակարգն ունի և այն էլ միակ լուծումը: Ըստ Կրամերի կանոնի՝ այդ լուծումը տրվում է

$$\varphi_j'(t)=\det{}_j\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_k)}{D(x_1,\cdots,x_n)}\Big/\det\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_k)}{D(x_1,\cdots,x_n)}\quad(j=1,\cdots,n)$$

բանաձևերով, որտեղ $\det_j\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_k)}{D(x_1,\cdots,x_n)}$-ը ստացվում է $\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_k)}{D(x_1,\cdots,x_n)}$

մատրիցի որոշչից՝ վերջինիս j-րդ սյունը փոխարինելով $\left(-\frac{\partial\Phi_1}{\partial t},\cdots,-\frac{\partial\Phi_n}{\partial t}\right)$ վեկտոր-սյունով $(j=\overline{1,n})$:

Մյուս կողմից, քանի որ $\Phi_1,\cdots,\Phi_n$ ֆունկցիաները (1.1) համակարգի առաջին ինտեգրալներ են, այսինքն $\frac{d}{dt}\Phi_j(t,\vec{\varphi}(t))\equiv 0$, $t\in(r_1,r_2)$, $(j=\overline{1,n})$ ապա ըստ (1.7) առնչությունների, գրված յուրաքանչյուր Φ_j ֆունկցիայի համար $(j=\overline{1,n})$ $f_1(t,\vec{\varphi}(t)),\cdots,f_n(t,\vec{\varphi}(t))$ ֆունկցիաները և հանդիսանում են նույն (1.11) հանրահաշվական համակարգի լուծում, երբ $t\in(r_1,r_2)$: Այդ համակարգի լուծման միակությունից բխում են

$$\frac{d\varphi_j}{dt}=f_j(t,\varphi_1(t,\vec{c}^{\,0}),\cdots,\varphi_n(t,\vec{c}^{\,0}))\ (j=\overline{1,n})$$

նույնությունները $t\in(r_1,r_2)$ արժեքների համար: Ինչպես և $n=1$ դեպքում փոփոխելով $(t_0,\vec{x}^{\,0})$ կետը Ω-ում կստանանք (1.1) համակարգի $\{\varphi(t,c)\}$ լուծումների ընտանիքը: Այժմ ցույց տանք, որ (1.1) համակարգի կամայական լուծում պատկանում է այս ընտանիքին: Ենթադրենք $\vec{\psi}(t)=(\psi_1(t),\cdots,\psi_n(t))$ վեկտոր-ֆունկցիան (1.1) համակարգի լուծում է (r_1,r_2)-ում, որն անցնում է $(t_0,\vec{x}^{\,0})$ կետով: Ըստ առաջին ինտեգրալի սահմանման՝ գոյություն ունեն $a_1,\cdots,a_n$ հաստատուններ ($\vec{a}=(a_1,\cdots,a_n)$ վեկտոր) այնպիսիք, որ՝

$$\Phi_j(t,\psi_1(t),\cdots,\psi_n(t))\equiv a_j\ t\in(r_1,r_2),\quad (j=\overline{1,n}):$$

Նույն կերպ լուծելով (1.10) համակարգը հաստատունների $c_j^0=a_j$, $(j=\overline{1,n})$ արժեքների համար՝ կստանանք $\vec{\varphi}(t,\vec{a})=(\varphi_1(t,\vec{a}),\cdots,\varphi_n(t,\vec{a}))$ վեկտոր-ֆունկցիան, որը մի կողմից՝ պատկանում է $\{\varphi(t,c)\}$ ընտանիքին, մյուս կողմից՝ (1.10) համակարգի լուծման միակության շնորհիվ համընկնում է $\vec{\psi}(t)$ վեկտոր-ֆունկցիայի հետ:

2^0. Համրագումարի բերելով այս պարագրաֆում շարադրվածը՝ կարելի է պնդել, որ (1.1) համակարգի n անկախ առաջին ինտեգրալների իմացությունը համազոր է (1.1) համակարգի ինտեգրմանը: Կարելի է պնդել ավելին, եթե հայտնի է (1.1) համակարգի որևէ առաջին ինտեգրալ, ապա n անհայտներով հավասարումների (1.1) համակարգը կարելի է բերել $n-1$ անհայտներով հավասարումների համակարգի: Իրոք, ենթադրենք $z=\Phi(t,\vec{x})=\Phi(t,x_1,\cdots,x_n)$-ը (1.1) համակարգի որևէ առաջին ինտեգրալ է: Այդ դեպքում (1.1) համակարգի կամայական $\vec{x}(t)$ լուծման համար (r_1,r_2)-ում գոյություն ունի $c=c(\vec{x})$ հաստատուն այնպիսին, որ

$$\Phi(t,\vec{x}(t))\equiv c,\quad t\in(r_1,r_2) \tag{1.12}$$

Ենթադրելով, օրինակ, որ $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_n}\neq 0$, Ω տիրույթի $(t_0,\vec{x}^0)$ կետում, որտեղ $t_0\in(r_1,r_2)$ և կիրառելով անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության մասին V. 2.2 թեորեմը, (1.12) առնչությունից կարող ենք x_n-ը արտահայտել $x_1(t),\cdots x_{n-1}(t)$ ֆունկցիաների և c հաստատունի միջոցով: Տեղադրելով $x_n=x_n(t,x_1,\cdots,x_{n-1},c)$-ն (1.1) համակարգի մեջ կստանանք $n-1$ (դիֆերենցիալ) հավասարում $n-1$ անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ:

3°. Եթե (1.1) համակարգը ինքնավար է, այսինքն ունի

$$x_i'=f_i(x_1,\cdots,x_n)\ (i=\overline{1,n})$$

տեսքը, ապա նման համակարգերի համար առաջին ինտեգրալները նույնպես կարելի է համարել t փոփոխականից բացահայտորեն չկախված, և այդ դեպքում (1.5) առնչությունը կընդունի

$$f_1(\vec{x})\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\cdots+f_n(\vec{x})\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}=0 \tag{1.5'}$$

տեսքը: Այդ դատողությունից մենք կօգտվենք հաջորդ կետերում:

§ 2. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1°. Նախորդ պարագրաֆում դիտարկելով սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների նորմալ համակարգի առաջին ինտեգրալները մենք ստացանք (1.5) առնչությունը (ինքնավար համակարգի համար (1.5')-ը), որը կարելի է դիտարկել որպես մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարում $n+1$ փոփոխականի $\Phi(t,x_1,\cdots,x_n)$ անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ, տրված $f_1,\cdots,f_n$ ֆունկցիաների դեպքում: Այդ հավասարումը մասնավոր օրինակ է (առաջին կարգի) մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների, որոնց բերվում են բնագիտության բազմապիսի խնդիրներ:

Սույն դասընթացում նպատակ չդնելով շարադրելու մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների որևէ չափով լիարժեք տեսությունը՝ մենք կուսումնասիրենք միայն առաջին կարգի մասնական ածանցյալներով գծային (մի մասնավոր դեպքում նաև քվազիգծային) հավասարումները, որոնց լուծման հարցը բերվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների նորմալ համակարգի լուծմանը:

Դիտարկենք $u(\vec{x})=u(x_1,\cdots,x_n)$ որոնելի ֆունկցիայի նկատմամբ

$$a_1(\vec{x})\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+a_n(\vec{x})\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n}=b(\vec{x},u) \qquad (2.1)$$

առաջին կարգի մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ a_j-ն $(j=\overline{1,n})$ և b-ն տրված ֆունկցիաներ են:

Նախ՝ նկատենք, որ մենք ի սկզբանե ենթադրում ենք, որ $a_1,\cdots,a_n$ ֆունկցիաները կախված չեն որոնելի ֆունկցիայից և ապա՝ որ որոնելի ֆունկցիայի ածանցյալներն ուսումնասիրվող հավասարման մեջ մտնում են գծայնորեն:

Այս կետում կդիտարկենք (2.1) հավասարմանը համապատասխանող համասեռ հավասարումը՝

$$a_1(\vec{x})\cdot\frac{\partial v}{\partial x_1}+a_2(x)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_2}+\cdots+a_n(\vec{x})\cdot\frac{\partial v}{\partial x_n}=0\ , \qquad (2.2)$$

որտեղ $a_j(\vec{x})$ $(j=\overline{1,n})$ ֆունկցիաները կենթադրվեն անընդհատ դիֆերենցելի n-չափանի Ω տիրույթում:

Սահմանում 2.1: $u=u(\vec{x})=u(x_1,\cdots,x_n)$ դիֆերենցելի ֆունկցիան կանվանենք (2.1) հավասարման լուծում $G\subset\Omega$ տիրույթում, եթե այն (2.1) առնչությանը դարձնում է նույնություն G-ին պատկանող բոլոր $\vec{x}$ կետերի համար:

Դիտարկվող (2.2) հավասարմանը համապատասխանեցնենք

$$\frac{dx_j}{dt} = a_j(x_1, \cdots x_n) \qquad (j = \overline{1,n}) \tag{2.3}$$

սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների ինքնավար համակարգը: Մենք ցույց կտանք, որ (2.2) հավասարման ուսումնասիրությունը որոշակի իմաստով բերվում է (2.3) համակարգի ուսումնասիրությանը: Այդ նպատակով ապացուցենք հետևյալ պնդումը

Թեորեմ 2.1: (2.2) հավասարման կամայական լուծում հանդիսանում է (2.3) համակարգի առաջին ինտեգրալ և (2.3) համակարգի յուրաքանչյուր առաջին ինտեգրալ հանդիսանում է (2.2) հավասարման լուծում:

Ապացույց. Դիցուք $v(\vec{x}) = v(x_1, \cdots, x_n)$-ը (2.2) հավասարման որևէ լուծում է G-ում ($G \subset \Omega$) և $\vec{x} = \vec{\varphi}(t) \equiv (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$ վեկտոր-ֆունկցիան (2.3) համակարգի որևէ լուծում է՝ որոշված (r_1, r_2)-ում, ըստ որում, $\vec{x} = \vec{\varphi}(t) \in G$, եթե $t \in (r_1, r_2)$: Ցույց տանք, որ

$$\gamma(\vec{\varphi}(t)) \equiv const \quad t \in (r_1, r_2), \tag{2.4}$$

որն, ըստ առաջին ինտեգրալի սահմանման (տե՛ս սահմանում 1.1), կնշանակի, որ v-ն (2.3)-ի առաջին ինտեգրալ է:

Ըստ բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման կանոնի՝

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)} = \left.\left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial v}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}\right]\right|_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)} =$$

$$= \frac{\partial v(\vec{\varphi})}{\partial x_1}\cdot\frac{d\varphi_1(t)}{dt} + \cdots + \frac{\partial v(\vec{\varphi})}{\partial x_n}\cdot\frac{d\varphi_n(t)}{dt} =$$

$$= a_1(\vec{\varphi})\cdot\frac{\partial v(\vec{\varphi})}{\partial x_1} + a_2(\vec{\varphi})\cdot\frac{\partial v(\vec{\varphi})}{\partial x_2} + \cdots + a_n(\vec{\varphi})\cdot\frac{\partial v(\vec{\varphi})}{\partial x_n}:$$

Քանի որ v-ն (2.2)-ի լուծում է G-ում, ապա բոլոր $t \in (r_1, r_2)$ կետերի համար

$$a_1(\vec{\varphi}(t))\cdot\frac{\partial v(\varphi_1(t))}{\partial x_1} + \cdots + a_n(\vec{\varphi}(t))\cdot\frac{\partial v(\varphi_n(t))}{\partial x_n} = 0,$$

այսինքն՝

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{x=\vec{\varphi}(t)}=0, \qquad t\in(r_1,r_2),$$

որից հետևում է (2.4) առնչությունը:

Այժմ ենթադրենք, որ $\Phi(x_1,\cdots x_n)$ ֆունկցիան (2.3) համակարգի որևէ առաջին ինտեգրալ է G-ում: Այդ դեպքում (2.3) համակարգի (r_1,r_2)-ում որոշված կամայական $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ լուծման վրա $\Phi(\vec{\varphi}(t))\equiv const$ և հետևաբար կամայական $t\in(r_1,r_2)$ կետի համար

$$0\equiv\left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)}=\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\cdot\frac{dx_j}{dt}\right]_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi(\vec{x})}{\partial x_j}\cdot a_j(\vec{\varphi})=\sum_{j=1}^{n}a_j(\varphi)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_j},$$

որը ցույց է տալիս, որ $\Phi(\vec{x})$ ֆունկցիան բավարարում է (2.2) հավասարմանը G տիրույթին պատկանող $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ լուծման հետագծերի բոլոր կետերում:

Բայց քանի որ (2.3) հավասարումների համակարգի աջ մասերը բավարարում են գոյության թեորեմի պայմաններին $(a_j\in C^{(1)}(\Omega))$, ապա G տիրույթի կամայական կետով անցնում է (2.3) համակարգի որևէ ինտեգրալային կոր և հետևաբար $\Phi(\vec{x})$ ֆունկցիան բավարարում է (2.2) հավասարմանը G-ում:

Թեորեմն ապացուցված է:

2^0. Այժմ ցույց տանք, որ ունենալով (2.3) համակարգի $n-1$ անկախ առաջին ինտեգրալներ կարելի է լուծել (2.2) հավասարումը (գտնել բոլոր լուծումները): Դրա համար նախ ցույց տանք, որ եթե $v_1(\vec{x}),\cdots,v_k(\vec{x})$ ֆունկցիաները (2.2) հավասարման լուծումներ են G-ում և $\psi(z_1,\cdots,z_k)$-ն կամայական անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է, որոշված $R=(R(v_1),\cdots,R(v_k))\equiv\{(v_1(\vec{x}),\cdots,v_k(\vec{x}));\,x\in G\}$ բազմությունում, ապա $\psi(v_1(\vec{x}),\cdots,v_k(\vec{x}))$-ը նույնպես հանդիսանում է (2.2) հավասարման լուծում G-ում: Իրոք,

$$\sum_{j=1}^{n}a_j(\vec{x})\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{n}a_j(\vec{x})\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi}{\partial z_i}\cdot\left[\sum_{j=1}^{n}a_j(\vec{x})\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right]=0, \qquad \vec{x}\in G$$

քանի որ v_i $(i=\overline{1,k})$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է (2.2) հավասարման լուծում G-ում:

Այժմ ապացուցենք, որ եթե $v_1(\vec{x}),\cdots,v_{n-1}(\vec{x})$ ֆունկցիաները (2.3) համակարգի անկախ առաջին ինտեգրալներ են G-ում, և $|a_1(\vec{x})|+\cdots+|a_n(\vec{x})|\neq 0$, ապա (2.2) հավասարման կամայական լուծում G-ում տրվում է

$$v(\vec{x})=\psi(v_1(\vec{x}),\cdots,v_{n-1}(\vec{x})) \tag{2.4}$$

առնչությամբ, որտեղ ψ-ն $R=(R(v_1),\cdots,R(v_{n-1}))$-ում անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Ուրիշ խոսքով՝ (2.4) բանաձևով տրվում է (2.2) հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Իրոք, ենթադրենք $w(\vec{x})$-ը (2.2) հավասարման որևէ լուծում է G-ում, այդ դեպքում՝

$$a_1(\vec{x})\cdot\frac{\partial w}{\partial x_1}+\cdots+a_n(\vec{x})\frac{\partial w}{\partial x_n}\equiv 0 \qquad \vec{x}\in G: \tag{2.5}$$

Մյուս կողմից, քանի որ v_j $(j=1,\cdots,n-1)$ ֆունկցիաները, համաձայն թեորեմ 2.1-ի, նույնպես (2.2)-ի լուծումներ են G-ում, ապա

$$a_1(\vec{x})\cdot\frac{\partial v_j}{\partial x_1}+\cdots+a_n(\vec{x})\frac{\partial v_j}{\partial x_n}=0,\quad \vec{x}\in G,\ (j=1,\cdots,n-1): \tag{2.6}$$

Դիտարկենք այժմ (2.5)-(2.6) առնչությունները որպես n հավասարումների համակարգ $a_1,\cdots,a_n$ գործակիցների նկատմամբ: Քանի որ $|a_1(\vec{x})|+\cdots+|a_n(\vec{x})|\neq 0$ G-ում, ապա այդ (համասեռ) համակարգն ունի ոչ զրոյական $(a_1(\vec{x}),\cdots,a_n(\vec{x}))$ լուծում կամայական $\vec{x}\in G$ կետի համար: Ուրեմն այդ համակարգի որոշիչը զրո է G-ում: Բայց այդ որոշիչը $v_1(\vec{x}),\cdots,v_{n-1}(\vec{x}),w$ ֆունկցիաների յակոբյանն է՝

$$\frac{D(v_1,\cdots v_{n-1},w)}{D(x_1,\cdots,x_n)}=0 \quad x\in G:$$

Սա նշանակում է, որ $v_1,\cdots,v_n,w$ ֆունկցիաների միջև գոյություն ունի ֆունկցիոնալ կախվածություն, այսինքն՝ գոյություն ունի n փոփոխականի

$F(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n)$ ֆունկցիա այնպիսին, որ $F(v_1(\vec{x}),\cdots,v_{n-1}(\vec{x}),w(\vec{x}))\equiv 0$, $x\in G$:

Այստեղից՝ օգտվելով G-ում $v_1,\cdots,v_{n-1}$ ֆունկցիաների անկախությունից, հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ F ֆունկցիան բավարարում է անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության մասին թեորեմի պայմաններին $\left(\dfrac{\partial F}{\partial w}\neq 0\right)$ և հետևաբար կարելի է $w(\vec{x})$-ը արտահայտել $v_1(\vec{x}),\cdots,v_{n-1}(\vec{x})$ ֆունկցիաներով G-ում, այսինքն՝ ներկայացնել (2.4) տեսքով:

Վերը շարադրվածից և թեորեմ 2.1-ից անմիջականորեն բխում են հետևյալ պնդումները.

Թեորեմ 2.2: Յուրաքանչյուր n-րդ կարգի ինքնավար նորմալ համակարգ կարող է ունենալ (ոչ ավելի, քան) $n-1$ անկախ առաջին ինտեգրալներ:

Թեորեմ 2.3: Մասնական ածանցյալներով գծային համասեռ (2.2) հավասարման կամայական լուծում տրվում է (2.4) բանաձևով, որտեղ $v_1(\vec{x}),\cdots,v_{n-1}(\vec{x})$ ֆունկցիաները (2.2) հավասարմանը համապատասխանող (2.3) ինքնավար համակարգի անկախ առաջին ինտեգրալներ են:

§ 3. ԿՈՇԻԻ ԽՆԴԻՐԸ ՄԱՍՆԱԿԱՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Դիտարկենք դարձյալ

$$a_1(\vec{x})\cdot\frac{\partial v}{\partial x_1}+a_2(x)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_2}+\cdots+a_n(\vec{x})\cdot\frac{\partial v}{\partial x_n}=0 \tag{3.1}$$

գծային համասեռ հավասարումը, որտեղ $a_j\in C^{(1)}(\Omega)$ $(j=1,\cdots,n)$ և $|a_1(\vec{x})|+\cdots+|a_n(\vec{x})|\neq 0$: Հետագա շարադրանքի պարզության համար ենթադրենք, որ ուսումնասիրվող $\vec{x}^0\in\Omega$ կետում $a_n(\vec{x}^0)\neq 0$ և հետևաբար $a_n(\vec{x})\neq 0$, $\vec{x}^0$ կետի ինչ-որ $G\subset\Omega$ շրջակայքում:

Դիցուք $f(x_1,\cdots,x_{n-1})$-ը $n-1$ փոփոխականի անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է, որոշված արգումենտների այն $(x_1,\cdots,x_{n-1})$ արժեքների համար, որ $(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\in\Omega$:

Կոշու խնդիրը (3.1) հավասարման համար կայանում է հետևյալում՝ գտնել (3.1) հավասարման այնպիսի $v=v(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)$ լուծում, որ

$$v(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=f(x_1,\cdots,x_{n-1}): \tag{3.2}$$

Ցույց տանք, որ ունենալով (3.1) հավասարմանը համապատասխանող (2.3) սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի $\Phi_1(\vec{x}),\cdots,\Phi_{n-1}(\vec{x})$ G-ում անկախ առաջին ինտեգրալները, կարող ենք գտնել (3.1)-(3.2) Կոշու խնդրի (միակ) լուծումը:

Իրոք, $x_1,\cdots,x_{n-1}$ փոփոխականներից անցնենք $z_1,\cdots,z_{n-1}$ փոփոխականներին

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=z_1 \\ \Phi_2(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=z_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=z_{n-1} \end{cases} \tag{3.3}$$

բանաձևերով:

Քանի որ $\Phi_1,\cdots,\Phi_{n-1}$ առաջին ինտեգրալներն անկախ են G-ում, ապա $a_n(\vec{x}^0)\neq 0$ պայմանից և անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության մասին թեորեմից հետևում է, որ (3.3) համակարգը միարժեքորեն լուծելի է $x_1,\cdots,x_{n-1}$ անհայտների նկատմամբ՝

$$\begin{cases} x_1=w_1(z_1,\cdots,z_{n-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}=w_{n-1}(z_1,\cdots,z_{n-1}) \end{cases} : \tag{3.4}$$

Համաձայն այդ թեորեմի՝ մի կողմից $w_1,\cdots,w_{n-1}$ ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են, մյուս կողմից, եթե նշանակենք $z_i^0=\Phi_i(\vec{x}^0)$ $(i=1,\cdots,n-1)$, ապա $w_i(z_1^0,\cdots,z_{n-1}^0)=x_i^0$, $(i=1,\cdots,n-1)$:

Նշանակենք

$$v(x_1,\cdots,x_n)=f(w_1(\Phi_1(\vec{x}),\cdots,\Phi_{n-1}(\vec{x})),\cdots,w_{n-1}(\Phi_1(\vec{x}),\cdots,\Phi_{n-1}(\vec{x}))) \quad (3.5)$$

և ցույց տանք, որ այսպիսով սահմանված v ֆունկցիան հանդիսանում է (3.1)-(3.2) խնդրի լուծում: Իրոք, նախ ըստ նախորդ կետի, (3.5) բանաձևով որոշվող v ֆունկցիան հանդիսանում է (3.1) հավասարման լուծում: Վերցնելով $x_n=x_n^0$, ըստ (3.3)-ի, կունենանք $\Phi_i(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=z_i$, իսկ ըստ (3.4)-ի՝ $w_i(z_1,\cdots,z_{n-1})=x_i$ $(i=1,\cdots,n-1)$: Արդյունքում (3.5)-ից ստանում ենք՝

$$v(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=f(x_1,\cdots,x_{n-1}),$$

այսինքն բավարարվում է (3.2) սկզբնական պայմանը ևս:

Անբացահայտ ֆունկցիայի միակությունից անմիջականորեն հետևում է, որ այն միարժեք է որոշվում (3.2) սկզբնական պայմանով:

§ 4. ԿՈՇԻԻ ԽՆԴԻՐԸ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Դիտարկենք

$$a_1(\vec{x})\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+a_n(\vec{x})\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n}=b(\vec{x},u) \quad (4.1)$$

հավասարումը, որը կանվանենք գծային, եթե $b(\vec{x},u)=b_1(\vec{x})\cdot u+b_2(\vec{x})$, և կիսագծային, եթե b-ն գծայնորեն չի կախված u-ից:

Այս պարագրաֆում մենք կդիտարկենք Կոշու խնդիրը (4.1) հավասարման համար, ենթադրելով, որ $a_1,\cdots,a_n$ ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են n-չափանի Ω տիրույթում, իսկ $b(\vec{x},u)=b(x_1,\cdots,x_n,u)$, $n+1$ փոփոխականի ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է $\Omega_M=\{(\vec{x},u);\, \vec{x}\in\Omega,\ |u(\vec{x})|\le M\}$ «գլանում», $M>0$: Ինչպես նախորդ պարագրաֆում, կենթադրենք, որ $\{a_j\}$ $(j=\overline{1,n})$ գործակիցները միաժամանակ զրո չեն դառնում Ω տիրույթի ոչ մի կետում: Այդ դեպքում, բաժանելով (4.1) հավասարման երկու մասերը

$\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$ -ու վրա, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարելի է ի սկզբանե ենթադրել, որ $|a_1(\vec{x})|^2+\cdots+|a_n(\vec{x})|^2=1$, $\vec{x}\in\Omega$: Դարձյալ առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ ուսումնասիրվող $\vec{x}^0\in\Omega$ կետում $a_n(\vec{x}^0)\neq 0$ և, հետևաբար, $a_n(\vec{x})\neq 0$, $\vec{x}^0$ կետի ինչ-որ $G\subset\Omega$ շրջակայքում:

Եվ այսպես, դիցուք $\vec{x}^0\in G\subset\Omega$, $a_n(\vec{x})\neq 0$, $x\in G$, $f(x_1,\cdots x_{n-1})$-ը $n-1$ փոփոխականի անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է $G_0=\{\vec{x},\vec{x}\in G, x_n=x_n'\}$ տիրույթում:

Կոշու խնդիրը (4.1) հավասարման համար կայանում է հետևյալում՝ գտնել այնպիսի $u=u(\vec{x})$ դիֆերենցելի ֆունկցիա, որը $G\subset\Omega$ տիրույթում բավարարի (4.1) հավասարմանը և

$$u\big|_{G_0}\equiv u(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=f(x_1,\cdots,x_{n-1}) \tag{4.2}$$

սկզբնական պայմանին:

Ուսումնասիրվող (4.1) հավասարմանը զուգահեռ դիտարկենք

$$x_i'=a_i(\vec{x}),\ (i=1,\cdots,n) \tag{4.3}$$

սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների (ինքնավար) համակարգը:

Ենթադրենք $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{n-1}$ կամայական թվեր են այնպիսիք, որ $(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{n-1},x_n^0)\in G$ և $\vec{x}=\vec{\varphi}(t,\tau_1,\cdots,\tau_{n-1})$ վեկտոր-ֆունկցիան (4.3) համակարգի այն լուծումն է, որը բավարարում է

$$x_1(0)=\tau_1,\quad x_2(0)=\tau_2,\quad \ldots,\quad x_{n-1}(0)=\tau_{n-1},\quad x_n(0)=x_n^0, \tag{4.4}$$

սկզբնական պայմաններին: Ընդունելով

$$x_i=\varphi_i(t,\tau_1,\cdots,\tau_{n-1})\quad (i=1,\cdots,n) \tag{4.5}$$

համակարգում $t,\tau_1,\cdots,\tau_{n-1}$-երը որպես նոր փոփոխականներ արտահայտենք դրանք $x_1,\cdots,x_n$ փոփոխականների միջոցով: Նախ նկատենք, որ համաձայն (4.4)-ի հավասարումների՝ (4.5) համակարգը $x_i=x_i^0$ $(i=1,\cdots,n)$ ձախ մասերի համար ակնհայտորեն ունի $(0, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)$ լուծումը: Ցույց տանք, որ (4.5) համակարգի յակոբյանը զրո չի դառնում $(0, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)$ կետում: Սրանից, $\{\varphi_j\}$ ֆունկցիաների անընդհատ դիֆերենցելիությունից և անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության մասին թեորեմից կհետևի, որ այդ կետի ինչ-որ շրջակայքում (4.5) համակարգը լուծելի է և, հետևաբար, $x_1, \cdots, x_n$ փոփոխականներից կարելի է անցնել $(t, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1})$ փոփոխականներին:

Քանի որ ըստ ենթադրության $a_n(\vec{x}^0) \neq 0$, ապա (4.5) համակարգի յակոբյանի համար կունենանք՝

$$\det \frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(t, \tau_1, \cdots \tau_n)}\bigg|_{(0, x_1^0, \cdots, x_n^0)} = \begin{vmatrix} a_1(\vec{x}^0) & a_2(\vec{x}^0) & \cdots & a_{n-1}(\vec{x}^0) & a_n(\vec{x}^0) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} a_n(\vec{x}^0) \neq 0:$$

Եվ այսպես, $(0, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)$ կետի ինչ-որ շրջակայքում (4.5) առնչություններով կարելի է (4.1), (4.2) խնդրում $x_1, \cdots, x_n$ փոփոխականներից անցնել $(t, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1})$ փոփոխականներին:

Նշանակենք՝

$$w(t, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}) \equiv u(\varphi_1(t, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}), \cdots, \varphi_n(t, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1})), \tag{4.6}$$

որտեղ u-ն (4.1)- (4.2) Կոշու խնդրի որոնելի լուծումն է: Այդ դեպքում

$$\frac{dw}{dt}\bigg|_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)} = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dt}\right]_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)} = \left[\sum_{j=1}^{n} a_j(\vec{x}) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}\right]_{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)},$$

այսինքն՝ (4.6) նշանակումով (4.1) հավասարումը կընդունի

$$\frac{dw}{dt} = b(\vec{\varphi}(t, \tau_1, \cdots \tau_{n-1}), w(t, \tau_1, \cdots \tau_{n-1})) \tag{4.7}$$

տեսքը, ըստ որում, w ֆունկցիան պետք է բավարարի

$$w(0,\tau_1,\cdots\tau_{n-1}) = u(\tau_1,\cdots\tau_{n-1},x_n^0) = f(\tau_1,\cdots\tau_{n-1}) \qquad (4.8)$$

պայմանին:

Լուծելով ($\tau_1,\cdots\tau_{n-1}$ պարամետրից կախված) (4.7) սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար (4.7)-(4.8) Կոշու խնդիրը, որի միակ լուծումը պարամետրերի կամայական *հաստատագրված* արժեքների դեպքում գոյություն ունի ըստ b,φ,w ֆունկցիաների ողորկության (դրանք անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են) և ապա (4.5) բանաձևերով անցնելով $t,\tau_1,\cdots\tau_{n-1}$ փոփոխականներից $x_1,\cdots,x_n$ փոփոխականներին՝ կստանանք (4.1)- (4.2) Կոշու խնդրի լուծումը:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1982.
2. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновнных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1984.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959.
4. Бибиков Ю. Н. Курс обыкновнных дифференциальных уравнений. М., Высш. шк., 1991.
5. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновнных дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1958.
6. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М., Наука, 1979.
7. Федорюк М. В. Обыкновнные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1984.
8. Лопатинский Я. Б. Обыкновнные дифференциальные уравнения. Киев, Вища школа, 1984.
9. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М., Наука, 1981.
10. Арнольд В. И. Обыкновнные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1975.
11. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М., ИЛ, 1962.
12. Сансоне Дж. Обыкновнные дифференциальные уравнения. М., ИЛ, 1953, т. 1; 1954, т. 2.
13. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1970.
14. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1992.
15. Յ. Ղազարյան, Ֆ. Մամիկոնյան, Ա. Յովհաննիսյան, Գ. Կարապետյան. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ, Երևանի համալսարանի հրատարակչություն:

Հ. Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ա. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ,
Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Գ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Դասագիրք բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական ֆակուլտետների համար

Հրատարակչության գլխավոր տնօրեն՝ ՍՈԿՐԱՏ ՄԿՐՏՉՅԱՆ
Տնօրեն՝ ՄԱՇԱ ՄՆԱՑԱԿԱՆՅԱՆ

Գեղարվեստական խմբագիր՝ ԱՐԱ ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ
Սրբագրիչ՝ ՆՎԱՐԴ ՓԱՐՍԱԴԱՆՅԱՆ
Համակարգչային ձևավորող՝ ԼԱԼԱ ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ
ԺԱՆՆԱ ՍՈՂՈՄՈՆՅԱՆ

Տպագրությունը՝ օֆսեթ
Թուղթը՝ օֆսեթ
Չափսը՝ 70x100/16
Ծավալը՝ 20 տպ. մամուլ
Տպաքանակը՝ 500
Գինը՝ պայմանագրային

«ԶԱՆԳԱԿ-97» հրատարակչություն
Երևան, Վարդանանց փակուղի 8, հեռ. 54-05-17
E-mail: zangak@arminco.com