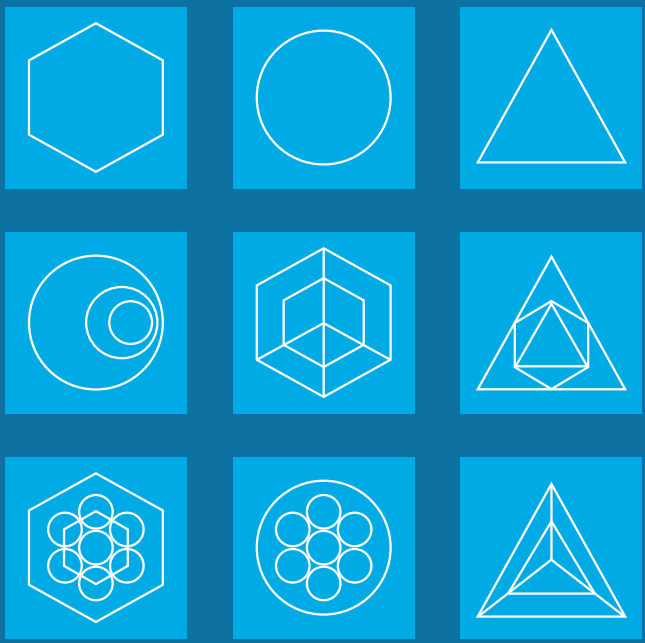
[ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ]

Սամվել Դալալյան

ԳԾԱՅԻՆ, ԵՐԿԳԾԱՅԻՆ, ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՈՐՈՇ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ՏԵՍԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹ, ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ



ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ս. Հ. ԴԱԼԱԼՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ, ԵՐԿԳԾԱՅԻՆ, ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՈՐՈՇ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

(ՏԵՍԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹ, ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ)

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2016

ՀՏԴ 512.64 (07)
ԳՄԴ 22.143g7
Դ 130

Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի
ֆակուլտետի գիտական խորհրդի կողմից

Դալալյան Ս. Հ.
Դ 130 **Գծային, երկգծային, քառակուսային ձևեր և նրանց որոշ կիրառություններ** *(տեսական նյութ, խնդիրներ և վարժություններ)*/ Դալալյան Ս. Հ.: -Եր., ԵՊՀ հրատ., 2016, 70 էջ:

Ձեռնարկը նվիրված է ֆիզիկամաթեմատիկական ուղղվածությամբ ֆակուլտետներում կարդացվող «Գծային հանրահաշիվ» դասընթացի որոշ կարևոր հարցերին:

Այն կարող է օգտակար լինել գծային հանրահաշվով բոլոր հետաքրքրվողներին:

ՀՏԴ 512.64 (07)
ԳՄԴ 22.143g7

ISBN 978-5-8084-2062-5

© ԵՊՀ հրատ., 2016
© Դալալյան Ս. Հ., 2016

ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Օտար լեզուներով գծային հանրահաշվին լրիվ կամ մասակիորեն նվիրված հսկայածավալ գրականություն կա, այդ թեմայով հայերեն գրականությունը անհամեմատ փոքրաթիվ է: Պայմանավորված իր բազմաթիվ և բազմաբնույթ կիրառություններով՝ գծային հանրահաշիվը պատկանում է լայն պահանջարկ ունեցող մաթեմատիկական գիտությունների թվին: Սույն ձեռնարկի նպատակն է դյուրացնել հանրահաշվի այդ հետաքրքիր ճյուղի որոշ բաժինների ուսումնասիրությունը:

Բարձրագույն ուսումնական հաստատությունների ֆիզիկամաթեմատիկական և որոշ տեխնիկական թեքումներով ֆակուլտետներում կարդացվող «Գծային հանրահաշվի դասընթաց» առարկայի նյութը կարելի է բաժանել երեք՝ ծավալով գրեթե հավասար մասերի: Առաջին մասը կազմում են այն բաժինները, որոնք նվիրված են գծային տարածություններին և գծային արտապատկերումներին, նրանց հիմնական հատկություններին: Երկրորդ մասն ընդգրկում է գծային, երկգծային, քառակուսային ձևերին ու նրանց կիրառություններին վերաբերող նյութը: Երրորդ մասն ամբողջովին նվիրված է գծային ձևափոխություններին: Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետում առաջին մասի նյութը ներկայիս ծրագրով ուսանողներին մատուցվում է «Հանրահաշիվ» առարկայի դասընթացի առաջին կուրսի երկրորդ կիսամյակի երկրորդ կեսում և կազմում է այդ կիսամյանկի երկրորդ ընթացիկ գրավոր քննության բովանդակությունը: Երկրորդ և երրորդ մասերը դասավանդվում են երկրորդ կուրսի առաջին կիսամյակում և կազմում են, համապատասխանաբար, առաջին և երկրորդ գրավոր ընթացիկ քննությունների նյութը:

Երևանի պետական համալսարանի հրատարակությամբ արդեն լույս են տեսել վերոհիշյալ թեմաներին նվիրված՝ մեր կողմից հեղինակված երկու ձեռնարկներ: Սկզբում 2005 թվականին լույս է տեսել «Գծային ձևափոխություններ» վերնագրով գիտամեթոդական ձեռնարկը ([6]), իսկ 2011 թվականին՝ «Գծային տարածություններ և գծային արտապատկերումներ» ուսումնամեթոդական ձեռնարկը ([5]): Սույն

ձեռնարկը եզրափակում է գծային հանրահաշվի դասընթացին նվիրված ձեռնարկների շարքը: Այն նվիրված է, ինչպես վերնագիրն է վկայում, գծային, երկգծային, քառակուսային ձևերին և նրանց որոշ կիրառություններին ֆունկցիաների տեսությունում և երկրաչափությունում: Ընդգծենք, որ այս ձեռնարկի յուրաքանչյուր գլխին կցված են խնդիրներ և վարժություններ, որոնց լուծումը կնպաստի տեսական նյութի խորը յուրացմանը: Այսպիսով՝ ձեռնարկը նախատեսված է և՛ տեսական, և՛ գործնական պարապմունքների համար:

Վերջում ուզում եմ շնորհակալություն հայտնել Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի ուսանողներ Ավագյան Միհրանին, Փարսադանյան Ամալյային և Միրաբյան Թամարին, որոնք իրենց նպաստն են բերել դասախոսությունների գրառումները տպագրության պատրաստելու գործում:

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Առաջաբանում ասվեց, որ սույն ձեռնարկը [5] ձեռնարկի շարունակությունն է, ուստի մենք՝ հարկ եղած դեպքում, կօգտվենք այդ ձեռնարկում ներմուծված բոլոր նշանակումներից և ապացուցված արդյունքներից: Այս ձեռնարկում ևս ուսումնասիրության հիմնական առարկան շարունակում է մնալ գծային տարածությունը, ինչպես նաև նրա հետ առնչված որոշակի մաթեմատիկական օբյեկտներ: Ընդհանուր դեպքում գծային տարածությունը ենթադրվում է որոշված կամայական **k** դաշտի նկատմամբ: Հիշեցնենք դաշտի սահմանումը:

Դաշտ է կոչվում կամայական k բազմություն՝ նրա վրա որոշված երկու երկտեղ(անի) գործողությունների հետ միասին, եթե այդ գործողությունները բավարարում են դաշտի 9 աքսիոմներին (պայմաններին): Դաշտի գործողությունների համար, որպես օրենք, օգտագործվում են + գումարման նշանը և կետ՝ բազմապատկման նշանը (վերջինս հիմնականում բաց է թողնվում): Դաշտի տարրերը կնշանակվեն հունական այբուբենի փոքրատառերով:

Դաշտի 9 աքսիոմներից չորսը վերաբերում են միայն գումարման գործողությանը, չորսը՝ միայն բազմապատկման գործողությանը, ընդ որում միայն գումարմանը և միայն բազմապատկմանը վերաբերող աքսիոմները զույգ առ զույգ նույն բնույթի են, մի աքսիոմն էլ շաղկապում է այդ երկու գործողությունները:

Միայն մի գործողությանը վերաբերող աքսիոմները հետևյալն են.

1) *տեղափոխական* (*կոմուտատիվության*) օրենքը՝

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \ \alpha\,\beta = \beta\,\alpha;$$

2) *զուգորդական* (*ասոցիատիվության*) օրենքը՝

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \ (\alpha\,\beta)\,\gamma = \alpha\,(\beta\,\gamma);$$

3) *չեզոք տարրի գոյության* օրենքը, ընդ որում գումարման նկատմամբ չեզոք տարրը նշանակվում է 0-ով, իսկ բազմապատկման նկատմամբ չեզոք տարրը նշանակվում է 1-ով, չեզոքության պայմանն է, որ

$$\alpha + 0 = \alpha,\ \alpha \cdot 1 = \alpha;$$

4) գումարման գործողության նկատմամբ ցանկացած α տարրի համար *հակադիր՝* -α տարրի, իսկ բազմապատկման գործողության նկատմամբ ցանկացած ոչզրոյական α տարրի համար *հակադարձ՝* α^{-1} տարրի գոյության օրենքները, որոնց հանար պահանջվում է

$$\alpha + (-\alpha) = 0,\ \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$$

առնչությունների կատարումը:

Նշված երկու գործողությունները միմյանց հետ կապվում են *բաշխական* օրենքով՝

$$(\alpha + \beta)\,\gamma = \alpha\,\gamma + \beta\,\gamma:$$

Գրության մեջ կտարբերակենք դաշտը և նրա հիմքում ընկած բազմությունը: Դաշտի հիմքում ընկած բազմությունը կնշանակվի բարակ k լատինական փոքրատառով, իսկ ինքը դաշտը՝ ստվար **k**-ով: Այսպիսով՝ **k**-ն իրենից ներկայացնում է դաշտի պայմաններին բավարարող (k, +, ·) եռյակը:

Թվային կարևորագույն համակարգերը՝

- **R** իրական թվերի համակարգը,
- **C** կոմպլեքս թվերի համակարգը,
- **Q** ռացիոնալ թվերի համակարգը

բավարարում են վերոհիշյալ պայմաններին և ուրեմն հանդիսանում են դաշտեր: Գոյություն ունեն այլ դաշտեր ևս, այդ թվում՝ վերջավոր (այսինքն՝ վերջավոր քանակով տարրերից կազմված) դաշտեր:

Այս ձեռնարկում ստացվող արդյունքները հիմնականում ճիշտ են ցանկացած **k** դաշտի նկատմամբ որոշված գծային տարածությունների համար: Այնուամենայնիվ, եթե ընդհանուր՝ վերացական **k** դաշտի ընկալումը դժվարություններ է առաջացնում, կարելի է նախ փորձել հասկանալ շարադրվող նյութը՝ ենթադրելով, որ պարզապես **k** = **R**:

Ի տարբերություն սկալարների վեկտորները մենք կնշանակենք լատինական այբուբենի փոքրատառերով: Գծային տարածության սահմանումը՝ որոշված **k** դաշտի նկատմամբ, տրված է [5] ձեռնարկի Ա.1

բաժնում: Ըստ այդ սահմանման՝ գծային տարածությունը մի L բազմություն է՝ նրա վրա որոշված երկու գործողությունների հետ միասին, որոնք բավարարում են գծային տարածության ութ պայմաններին (աքսիոմներին): Գործողություններից մեկը «ներքին» է՝ գումարվում են L բազմության կամայական երկու՝ x և y տարրերը, և նրանց x + y գումարը պատկանում է նույն L բազմությանը: Մյուս գործողությունը «արտաքին» է. L բազմության ցանկացած x տարրը ձախից բազմապատկվում է **k** դաշտի կամայական α տարրով, արդյունքում ստացվող αx տարրը պետք է պատկանի L բազմությանը: Սովորաբար L բազմության տարրերը կոչվում են *վեկտորներ*, **k** դաշտի տարրերը՝ *սկալարներ*, իսկ վերջին գործողությունը կոչվում է *վեկտորի բազմապատկում սկալարով*:

Գծային տարածության դեպքում ևս, ինչպես դաշտերի դեպքում, մենք կտարբերենք գծային տարածությանը իր հիմքում ընկած L բազմությունից՝ նշանակելով այն ստվար **L** տառով: Այն դեպքերում, երբ պարզ է, որ դաշտի նկատմամբ որոշված գծային տարածություն է դիտարկվում, չենք նշի այդ դաշտը: Բացի այդ, քանի որ մենք գծային տարածություններից զատ ուրիշ տարածություններ գրեթե չենք դիտարկում, երբեմն (եթե դա չի խանգարի բովանդակության ճիշտ ընկալմանը) բաց կթողնենք «գծային» բառ-որոշիչը:

Պայմանավորվենք նաև որոշ այլ օգտագործվող նշանակումների շուրջ: Ձեռնարկը տրոհվում է գլուխների, որոնք նշանակվում են հայկական այբուբենի մեծատառերով: Գլուխները տրոհվում են բաժինների, որոնք համարակալվում են արաբական (հնդկական) թվերով՝ հաջորդաբար ամբողջ ձեռնարկի համար, առանց հաշվի առնելու գլուխների տրոհումը: Պնդումները (այսինքն՝ թեորեմները, առաջադրությունները, հետևությունները) համարակալվում են ըստ բաժինների՝ արաբական թվերով: Օրինակ՝ Թեորեմ 8.2 հղումը նշանակում է, որ դա 8-րդ բաժնի 2-րդ պնդումն է: Պնդումների ապացույցների վերջում (կամ ձևակերպման վերջում, եթե ապացույցը բացակայում է կամ նախորդում է ձևակերպմանը) դրվում է □ նշանը:

Գլուխ Ա:
ԳԾԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐ ԵՎ ՀԱՄԱԼՈՒԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

1. ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ՝ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆԻՑ ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Դիցուք X-ը կամայական բազմություն է, **L**-ը՝ գծային տարածություն՝ որոշված **k** դաշտի նկատմամբ: Նշանակենք L^X- ով X բազմությունից L բազմություն բոլոր

$$a: X \to L$$

արտապատկերումների բազմությունը:

Այդ L^X բազմությունում կարելի է սահմանել

(i) ցանկացած երկու a, b տարրերի a + b գումարը՝

$$(a + b)(x) = a(x) + b(x)$$

բանաձևով;

(ii) կամայական α սկալարով ցանկացած a արտապատկերման αa արտադրյալը՝

$$(\alpha a)(x) = \alpha\, a(x)$$

բանաձևով;

(iii) զրոյական՝ o արտապատկերումը՝

$$o(x) = 0$$

բանաձևով, որտեղ 0-ն **k** դաշտի զրոն է;

(iv) ցանկացած a արտապատկերման -a *հակադիր* արտապատկերումը՝

$$(-a)(x) = -\, a(x)$$

բանաձևով:

Այսպիսով, համաձայն (i) և (ii) կետերի՝ L^X բազմության վրա ունենք ներքին՝ գումարման և արտաքին՝ սկալարներով բազմապատկման գործողություններ:

Թեորեմ 1.1: L^X *բազմությունը վերոհիշյալ գործողությունների հետ միասին հանդիսանում է գծային տարածություն՝ որոշված* ***k*** *դաշտի նկատմամբ:*

Այդ գծային տարածությունը նշանակվում է $\mathbf{L}^X$:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար պետք է ստուգել գծային տարածության սահմանման ութ աքսիոմները: Մենք կստուգենք միայն առաջինը՝ մնացածը թողնելով որպես վարժություն:

Որպեսզի ստուգենք գումարման տեղափոխականությունը՝

$$a + b = b + a$$

ցանկացած a, b արտապատկերումների համար L^X-ից, բավական է ստուգել, որ կամայական x տարրի համար X-ից

$$(a + b)(x) = (b + a)(x),$$

իսկ այդ հավասարությունն անմիջապես ստացվում է, եթե օգտվենք արտապատկերումների գումարման սահմանումից և L գծային տարածության վեկտորների գումարման տեղափոխականությունից: □

Հաջորդիվ այս թեորեմն օգտագործվում է այն դեպքում, երբ որպես **L** վերցվում է **k** դաշտը՝ դիտարկելով այն որպես մեկչափանի գծային տարածություն իր նկատմամբ, իսկ որպես X բազմություն՝ ցանկացած **L** գծային տարածության L բազմությունը:

2. ԳԾԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐ ԵՎ ՀԱՄԱԼՈՒԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Սահմանում: Գծային ձև՝ որոշված **L** տարածության վրա, կոչվում է այնպիսի

$$a: \mathbf{L} \to \mathbf{k}$$

արտապատկերումը, որը բավարարում է

$$a(\alpha x + \alpha' x') = \alpha a(x) + \alpha' a(x'),\ \alpha, \alpha' \in \mathbf{k},\ x, x' \in \mathbf{L}$$

(նման բանաձևերում՝ նշված բազմություններին պատկանող տարրերը համարվում են կամայական) պայմանին: Կամայական **k** դաշտ կարելի է դիտարկել որպես մեկչափանի գծային տարածություն՝ որոշված իր նկատմամբ: Ուրեմն **L**-ի վրա որոշված գծային ձևը՝ ուղղակի գծային արտապատկերում է **L**-ից $\mathbf{k} = \mathbf{k}^1$: Հիշենք, որ արտապատկերման գծայնության պայմանը համարժեք է գումարականության (ադիտիվության) և համասեռության պայմանների զույգին ([5], էջ 39-40): Ֆունկցիաների լեզվով ասած՝ գծային ձևը գծայնության պայմանին բավարարող մեկ վեկտոր-փոփոխականից կախված և k դաշտում արժեքներ ընդունող ֆունկցիա է:

Բոլոր գծային ձևերի բազմությունը՝ որոշված **L** տարածության վրա, նշանակվում է L^*-ով: Այն հանդիսանում է k^L արտապատկերումների բազմության ենթաբազմությունը:

Առաջադրություն 2.1: *Զրոյական արտապատկերումը գծային արտապատկերում է: Եթե a-ն և b-ն գծային արտապատկերումներ են, իսկ α-ն կամայական սկալար է, ապա (a + b)-ն, αa-ն, (-a)-ն նույնպես գծային արտապատկերումներ են:*

Ապացույց: Ապացուցենք միայն a + b արտապատկերման գծայնությունը, մնացած պնդումները թողնելով որպես վարժություն՝ ինքնուրույն ապացուցելու համար:

Իրոք, արտապատկերումների գումարի և արտապատկերման գծայնության սահմանումների ու դաշտի սահմանման մեջ մտնող՝ նրա գործողությունների տարրական հատկությունների համաձայն՝ ցանկացած α, α' սկալարների և x, x' վեկտորների համար

$$(a + b)(\alpha x + \alpha' x') = a(\alpha x + \alpha' x') + b(\alpha x + \alpha' x') = \alpha\, a(x) + \alpha'\, a(x') + \alpha\, b(x) + \alpha'\, b(x') = \alpha\, a(x) + \alpha\, b(x) + \alpha'\, a(x') + \alpha'\, b(x') = \alpha\, (a + b)(x) + \alpha'\, (a + b)(x'): \square$$

Հետևություն 2.2: k^L *բազմության արտապատկերումների գումարման և սկալարներով բազմապատկման գործողությունները սահմանափակելով* L^* *ենթաբազմության վրա՝ ստանում ենք գործողություններ* L^* *բազմության համար:* □

Նշանակենք L^* բազմությունը՝ վերը ստացված գործողությունների հետ միասին $\mathbf{L}^*$-ով:

Թեորեմ 2.3: **L***-*ը գծային տարածություն է՝ որոշված* **k** *դաշտի նկատմամբ:*

Ապացույց: Դա անմիջապես բխում է Առաջադրություն 1.1-ից և Հետևություն 2.2-ից: □

Սահմանում: **L*** գծային տարածությունը կոչվում է **L** գծային տարածությանը *համալուծ* (կամ *երկակի*) գծային տարածություն: Համալուծ տարածության տարրերը՝ այսինքն գծային ձևերը կոչվում են *կովեկտորներ*:

3. ԵՐԿԱԿԻ ԲԱԶԻՍ

Դիցուք **L**-ը գծային տարածություն է որոշված **k** դաշտի նկատմամբ, $\mathbf{L}^*$-ը՝ նրան համալուծ տարածությունն է: Դիտարկենք **L** տարածության կամայական $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ բազիս: Այդ դեպքում **L** տարածության ցանկացած x վեկտորի համար գոյություն ունի միարժեքորեն որոշված վերլուծություն՝

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n,$$

ընդ որում՝ x^i գործակիցը կոչվում է x վեկտորի i-րդ կոորդինատ e բազիսում, իսկ x վեկտորի բոլոր կոորդինատների հաջորդականությունը e բազիսում նշանակվում է x_e–ով՝

$$x_e = (x^1, \ldots, x^n):$$

Եթե դիտարկենք e-ն և x_e-ն որպես 1×n չափսի մատրիցներ, e մատրիցի շրջված (տրանսպոնացված) մատրիցը նշանակենք ${}^t e$-ով, ապա վերոհիշյալ վերլուծությունը կարելի է գրել հետևյալ՝ մատրիցային տեսքով՝

$$x = x_e \cdot {}^t e:$$

Դիտարկենք՝

$$e^i: L \to k,\ x \to e^i(x) = x_i$$

արտապատկերումը. այն կոչվում է e բազիսին առնչված i-րդ *կոորդինատական* արտապատկերում (i = 1, …, n): Ստուգեք, որ այն բավարարում է գծայնության պայմանին, այսինքն՝ գծային ձև է: Նկատենք, որ e^i գծային ձևը միարժեքորեն որոշվում է $e^i(e_j) = \delta^i_j$ պայմանով, որտեղ δ^i_j-ն Կրոնեկերի սիմվոլն է, այսինքն՝ $\delta^i_j = 0$, եթե $i \neq j$, իսկ $\delta^i_i = 1$: Այստեղ $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

Թեորեմ 3.1: $\mathbf{e^1, \ldots, e^n} \in L^*$ *կոորդինատական գծային ձևերը գծորեն անկախ են և կամայական* $\mathbf{a \in L^*}$ *գծային ձև արտահայտվում է որպես նրանց գծային զուգակցություն: Այսպիսով՝* $e^* = (\mathbf{e^1, \ldots, e^n})$ *համակարգը հանդիսանում է* $\mathbf{L^*}$ *համալուծ տարածության բազիսը և ուրեմն այդ տարածության չափողականությունը* $\dim L^* = n = \dim L$:

Ապացույց: Ենթադրենք $\alpha_1 e^1 + \ldots + \alpha_n e^n = 0$: Հաշվելով այս հավասարության երկու մասերի արժեքը **L** տարածության e_j (j = 1, …, n) բազիսային վեկտորում՝ ստանում ենք, որ $\alpha_j = 0$: Հետևաբար՝ e^* համակարգը գծորեն անկախ է:

Ցանկացած $a \in L^*$ կովեկտորի և կամայական $x \in L$ վեկտորի համար ունենք՝

$$(3.1)\ a(x) = a(x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n) = a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n = a_1 e^1(x) + \ldots + a_n e^n(x) = (a_1 e^1 + \ldots + a_n e^n)(x),$$

որտեղ $a_i = a(e_i)$՝ համաձայն նշանակման: Ուրեմն՝

$$(3.2)\ a = a_1 e^1 + \ldots + a_n e^n:$$

Թեորեմն ապացուցված է: □

Սահմանում: e^* բազիսը կոչվում է e բազիսի(ն) *երկակի (դուալ)* բազիս:

Առնչություն (3.2)-ը նշանակում է, որ $(a_1, \ldots, a_n)$ տողի տարրերը հանդիսանում են a կովեկտորի կոորդինատները e^* դուալ բազիսում և ուրեմն այդ տողի համար նպատակահարմար է օգտագործել a_{e^*} նշանակումը:

Հետևություն 3.2: *Դիցուք* **L**-*ը կամայական գծային տարածություն է,* e-*և նրա որևիցե բազիսն է: Այդ դեպքում ցանկացած* a *գծային ֆն* **L**-*ի վրա տրվում է*

$$a(x) = a_1x^1 + \ldots + a_n x^n = a_{e*} \cdot {}^t x_e$$

բանաձևով: □

Եզրափակենք այս բաժինը հետևյալ թեորեմով:

Թեորեմ 3.3: *Դիցուք* **L** *տարածությունում* $e = (e_1, \ldots, e_n)$ *բազիսից անցել ենք* $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ *բազիսի և* P-*ն համապատասխան անցման մատրիցն է: Այդ դեպքում կամայական* $a \in L^*$ *գծային ֆնի համար կոորդինատները համապատասխան դուալ բազիսներում կապված են*

$${}^t a_{e'*} = P \cdot {}^t a_{e*}$$

առնչությամբ:

Ապացույց: Ունենք $a(x) = a_e \cdot {}^t x_e = a_{e'} \cdot {}^t x_{e'}$: Տեղադրելով ${}^t x_{e'} = {}^t P^{-1} \cdot {}^t x_e$ (տե՛ս [5], էջ 38, բանաձև (23.5)), ակնհայտ քայլերից հետո ստանում ենք պահանջվող առնչությունը: □

4. ՀԱՄԱԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ԱՌԻՆՔՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ելնելով կամայական **L** գծային տարածությունից՝ կարելի է կառուցել նրան համալուծ L* գծային տարածությունը: Հետո՝ որպես ելակետային վերցնելով L* տարածությունը, կարելի է կառուցել նրան համալուծ (L*)* գծային տարածությունը: Այդ դեպքում $\dim \mathbf{L} = \dim \mathbf{L}^* = \dim (\mathbf{L}^*)^*$ համաձայն Թեորեմ 3.1-ի, և ուրեմն **L**, $\mathbf{L}^*$ և $(\mathbf{L}^*)^*$ տարածությունները կլինեն իզոմորֆ:

Ցանկացած երկու՝ **L** և $\mathbf{L}'$ նույն չափողականության գծային տարածությունների միջև իզոմորֆիզմ կարելի է կառուցել հետևյալ կերպ: Սևեռենք յուրաքանչյուր տարածությունում մեկական բազիս՝ $e = (e_1, \ldots, e_n)$ և $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, համապատասխանաբար, և վերցնենք ցանկացած f երկարկող (բիեկտիվ) համապատասխանություն այդ բազիսների միջև, օրինակ՝ յուրաքանչյուր e_i վեկտորին համապատասխանեցնենք e'_i վեկ-

տորը: Այդ համապատասխանությունը միարժեքորեն շարունակվում է մինչև f: $\mathbf{L} \to \mathbf{L}'$ գծային արտապատկերում հետևյալ բանաձևով՝

$$f(x^1e_1 + \ldots + x^ne_n) = x^1e'_1 + \ldots + x^ne'_n:$$

Այսպիսով, գոյություն ունեն բազմաթիվ (‘‘ոչկանոնական”) իզոմորֆիզմներ **L** և **L*** տարածությունների, հետևաբար նաև **L*** և (**L***)* տարածությունների միջև: Սակայն պարզվում է, որ L-ի և (L*)*-ի միջև գոյություն ունի մի (‘‘կանոնական”) ստանդարտ եղանակով՝ առանց բազիսների ընտրության կառուցվող իզոմորֆություն: Այդ իզոմորֆության միջոցով **L** և (**L***)* գծային տարածությունները նույնացվում են, և ստացվում է, որ գծային տարածության համալուծի համալուծը համընկնում է այդ տարածության հետ: Այս հատկությունը կոչվում է գծային տարածությունների համալուծության առինքնության (ռեֆլեքսիվության) հատկություն:

Թեորեմ 4.1: *Յանկացած գծային տարածության համալուծին համալուծ գծային տարածությունը կարելի է նույնացնել ելակետային տարածության հետ՝* (**L***)* ≡ **L** *կանոնական եղանակով:*

Ապացույց: Մեկ անգամ ևս ընդգծենք, որ այս թեորեմում խոսքը նույնացման, այլ ոչ թե հավասարության մասին է: Համալուծ տարածության սահմանումից արդեն իսկ երևում է, որ (L*)* գծային տարածությունը հավասար չի կարող լինել L գծային տարածությանը, քանի որ նրանք ունեն տարբեր բնույթի տարրեր: Այնուամենայնիվ, յուրաքանչյուր $x \in L$ վեկտոր կարելի է դիտարկել որպես գծային ձև՝ որոշված L* տարածության վրա հետևյալ մեկնաբանությամբ:

Համաձայն գծային ձևի սահմանման տեղի ունի՝

$$a(\alpha x + \alpha' x') = \alpha a(x) + \alpha' a(x')$$

առնչությանը ցանկացած $\alpha, \alpha' \in \mathbf{k}$, $a \in \mathbf{L}^*$, $x, x' \in \mathbf{L}$ տարրերի դեպքում:

Համաձայն գծային ձևերի գումարման և սկալարով բազմապատկման գործողությունների սահմանման՝

$$(\alpha a + \alpha' a')(x') = \alpha a(x) + \alpha' a'(x'),$$

կամայական $\alpha, \alpha' \in \mathbf{k}$, $a, a' \in \mathbf{L}^*$, $x \in \mathbf{L}$ տարրերի դեպքում:

Միավորելով այս երկու մոտեցումները՝ ստանում ենք

$$\mathbf{L}^* \times \mathbf{L} \to \mathbf{k}, (a, x) \to a(x)$$

արտապատկերումը, որը գծային է յուրաքանչյուր փոփոխականի նկատմամբ: Այդպիսի արտապատկերումը կոչվում է *զույգավորում*:

Կամայական զույգավորման մեջ սևեռելով առաջին փոփոխականը՝ ստանում ենք գծային ձև՝ որոշված **L** գծային տարածության վրա: Նմանապես, սևեռելով երկրորդ փոփոխականը, ստանում ենք գծային ձև՝ որոշված $\mathbf{L}^*$ տարածության վրա՝ $x(a) = (a, x)$: Նկատենք, որ այս գծային ձևերի գումարը և սկալարով արտադրյալը համընկնում են, համապատասխանաբար, **L** տարածության վեկտորների գումարի և սկալարով արտադրյալի գործողությունների հետ: Ուրեմն (համապատասխան տարրերի նույնացումից հետո) **L** գծային տարածությունը հանդիսանում է $(\mathbf{L}^*)^*$ տարածության ենթատարածությունը: Քանի որ $\dim \mathbf{L} = \dim (\mathbf{L}^*)^*$, ուրեմն $\mathbf{L} = (\mathbf{L}^*)^*$ համաձայն չափողականության մոնոտոնության հատկության ([5], բաժին 16): Ընդգծենք, որ այստեղ **L** և $(\mathbf{L}^*)^*$ գծային տարածությունների նույնացումը կատարվել է զույգավորման արտապատկերման միջոցով: □

Խնդիրներ ու վարժություններ

Ա1. Եթե a-ն գծային ձև է որոշված **L** տարածության վրա, ապա կամայական $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(m)} \in k$ սկալարների համար և $x, x', x'', \ldots, x^{(m)} \in L$ վեկտորների համար

$$a(\alpha x + \alpha' x' + \alpha'' x'' + \ldots + \alpha^{(m)} x^{(m)}) = \alpha\, a(x) + \alpha'\, a(x') + \alpha''\, a(x'') + \ldots + \alpha^{(m)} a(x^{(m)})$$

ցանկացած m բնական թվի դեպքում: (Այս առնչությունը կոչվում է *ընդհանրացված գծայնության պայման*):

Ա2. Դիցուք **L**-ը կամայական գծային տարածություն է՝ որոշված **k** դաշտի նկատմամբ, իսկ $\mathbf{L}'$-ը նրա ենթատարածությունն է: Ցանկացած a

$\in L^*$ գծային ձևի $a' = a|_{L'}$ սահմանափակումը L' ենթատարածության վրա սահմանվում է $a'(x) = a(x)$, $x \in L'$ բանաձևով: Ապացուցել, որ $a' \in (L')^*$:

Ա3. Նախորդ խնդրի պայմաններում սահմանենք $f: L^* \to (L')^*$ արտապատկերումը $f(a) = a' = a|_{L'}$ բանաձևով: Ստուգեք, որ այդ արտապատկերումը կլինի գծային և մակարկող (սյուրյեկտիվ): Արդյոք այն կլինի՞ ներարկող:

Ա4. Նկարագրե՛ք f արտապատկերման միջուկը:

Ա5. Դիցուք $L = L' \oplus L''$: Ապացուցե՛ք, որ L^*-ը իզոմորֆ է $(L')^*$ և $(L'')^*$ գծային տարածությունների ուղիղ գումարին:

Ա6. $a \in L^*$ կովեկտորի միջուկ (կամ կորիզ) է կոչվում $\ker a = \{x \in L, a(x) = 0\}$ ենթաբազմությունը: Ապացուցե՛ք, որ այն կլինի ենթատարածություն: (Այդ ենթատարածությունը նշանակվում է **ker** a:)

Ա7. Ապացուցե՛ք, որ եթե $\dim \mathbf{L} = n$ և $a \in L^*$ ոչզրոյական կովեկտոր է, ապա $\dim \mathbf{ker}\, a = n - 1$:

Ա8. Ապացուցե՛ք, որ եթե $a, a' \in L^*$ կովեկտորների միջուկները նույնն են, ապա կգտնվի ոչզրոյական այնպիսի α սկալար, որ $a' = \alpha a$:

Ա9. Ապացուցե՛ք, որ կամայական $a: \mathbf{L} \to \mathbf{k}$ գծային ձևի համար կգտնվի այնպիսի

$$s_a : \mathbf{k} \to \mathbf{L}$$

գծային արտապատկերում, որ s_a և a արտապատկերումների համադրույթը հավասար լինի 1_L նույնական արտապատկերմանը: Այդ դեպքում $\mathbf{L} = \mathbf{ker}\, a \oplus \mathbf{im}\, s_a$, որտեղ $\mathbf{im}\, s_a$ –ն s_a գծային արտապատկերման պատկերն է:

Գլուխ Բ:
ԵՐԿԳԾԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐ

5. ԵՐԿԳԾԱՅԻՆ ՁԵՎ ԵՎ ԵՐԿԳԾԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Դիցուք **L**-ը ցանկացած գծային տարածություն է՝ որոշված **k** դաշտի նկատմամբ:

Սահմանում: Երկգծային ձև՝ որոշված **L** տարածության վրա ասելով հասկանում ենք **L**-ին պատկանող երկու վեկտորներից կախված **k**-արժեքանի ֆունկցիա, որը գծային է յուրաքանչյուր փոփոխականի նկատմամբ: Այսպիսով, L-ի վրա որոշված երկգծային ձևը՝ մի արտապատկերում է

$$a: L \times L \to \mathbf{k},\ (x, y) \to a(x, y),$$

որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$a(\alpha x + \alpha' x', y) = \alpha\, a(x, y) + \alpha'\, a(x', y),\ a(x, \beta y + \beta' y') = \beta\, a(x, y) + \beta'\, a(x, y')$$

ցանկացած $x, x', y, y' \in L$ վեկտորների և $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in k$ սկալարների համար: Դա նշանակում է, որ եթե սևեռենք երկգծային ձևի մի փոփոխականը, այն վերածվում է գծային ձևի՝ ըստ մյուս փոփոխականի: Կարելի է ասել, որ երկգծային ձևերը՝ գծային ձևերի հանգունակն են (անալոգն են) երկու փոփոխականի դեպքում, և այդ օբյեկտներն ունեն որոշակի նմանություն:

Նշանակենք **L** գծային տարածության (վրա որոշված) բոլոր երկգծային ձևերի բազմությունը Bilin **L**: Այդ բազմությունը կլինի $k^{L\times L}$ արտապատկերումների բազմության ենթաբազմությունը:

Համաձայն բաժին 1-ի՝ $k^{L\times L}$ բազմությունը կազմում է գծային տարածություն, եթե այդ բազմության վրա գործողությունները սահմանենք «կետ առ կետ», այսինքն՝ ցանկացած a, b արտապատկերումների համար $k^{L\times L}$-ից և α սկալարի համար **k** դաշտից կառուցենք a + b և α a արտապատկերումները հետևյալ կերպ՝

$$(a + b)(x, y) = a(x, y) + b(x, y),\ (\alpha\, a)(x, y) = \alpha\, a(x, y)$$

կամայական x և y վեկտորների համար **L**-ից: Որպես վարժություն ստուգե՛ք, որ եթե a-ն և b-ն երկգծային ձևեր են, ապա (a + b)-ն և (α a)-ն նույնպես կլինեն երկգծային ձևեր: Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 5.1: Bilin **L** *բազմությունը «կետ առ կետ» գործողությունների հետ միասին հանդիսանում է գծային տարածություն՝ որոշված* **k** *դաշտի նկատմամբ:* □

Այդ գծային տարածությունը կնշանակվի **Bilin L**:

6. ԵՐԿԳԾԱՅԻՆ ՁԵՎԻ ՄԱՏՐԻՑ

Պարզենք՝ ինչպես է տրվում երկգծային ձևը սևեռած բազիսում: Դիցուք a-ն երկգծային ձև է՝ որոշված **L** տարածության վրա, $e = (e_1, \ldots, e_n)$-ն այդ տարածության բազիսն է: Դիտարկենք՝

$$x = x^1e_1 + \ldots + x^ne_n,\ y = y^1e_1 + \ldots + y^ne_n$$

վեկտորների վերլուծությունները և օգտագործենք նրանց կոորդինատների համար

$$x_e = (x^1, \ldots, x),\ y_e = (y^1, \ldots, y^n)$$

ստանդարտ նշանակումները: Կիրառելով գծայնության պայմանը՝ կստանանք՝

$$(6.1)\ a(x, y) = a(x^1e_1 + \ldots + x^ne_n, y^1e_1 + \ldots + y^ne_n) = \Sigma\, x^i\, y^j\, a(e_i, e_j) = \Sigma\, a_{ij}\, x^i\, y^j = x_e \cdot a_e \cdot {}^t y_e :$$

Այստեղ գումարումը կատարվում է ըստ i. j = 1, …, n, $a_{ij} = a(e_i, e_j)$, իսկ a_e-ով նշանակվում է a_{ij} տարրերից կազմված մատրիցը:

Սահմանում:

$$a_e = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n\times n}$$

մատրիցը կոչվում է a *երկգծային ձևի մատրից* e *բազիսում:* Այդ մատրիցը կատարում է a երկգծային ձևի կոորդինատների դերը e բազիսում:

Նշանակենք M_n (**k**)-ով **k** դաշտին պատկանող տարրերից կազմված բոլոր n×n չափի (քառակուսի) մատրիցների բազմությունը: Հայտնի է, որ այդ բազմությունը մատրիցների գումարման և բազմապատկման գործողությունների հետ մեկտեղ կազմում է **k**-հանրահաշիվ: Այստեղ մեզ համար կարևոր է, որ դա կլինի գծային տարածություն՝ որոշված **k** դաշտի նկատմամբ: Այն կնշանակվի $\mathbf{M}_n$ (**k**):

Եթե e-ն կամայական սեռեռած բազիս է **L** գծային տարածությունում, ապա համապատասխանեցնելով **L** տարածության վրա որոշված ցանկացած a երկգծային ձևին նրա a_e մատրիցը e բազիսում՝ ստանում ենք արտապատկերում՝

$$\varphi_e : \text{Bilin } \mathbf{L} \to M_n(\mathbf{k}),\ a \to a_e :$$

Յուրաքանչյուր a, b երկգծային ձևերի և α սկալարի համար $(a + b)_e$ և $(\alpha\ a)_e$ մատրիցների (i, j)-րդ տարրերը, համապատասխանաբար, հավասար են

$$(a + b)(e_i\ e_j) = a(e_i\ e_j) + b(e_i\ e_j) = a_{ij} + b_{ij},\ (\alpha\ a)(e_i\ e_j) = \alpha\ a(e_i\ e_j) = \alpha\ a_{ij}) :$$

Հետևաբար՝

$$(a + b)_e = a_e + b_e\ ,\ (\alpha\ a)_e = \alpha\ a_e,$$

և ուրեմն ստանում ենք գծային տարածությունների

$$\boldsymbol{\varphi}_e : \mathbf{Bilin\ L} \to \mathbf{M}_n(\mathbf{k}),\ \boldsymbol{\varphi}_e(a) = (a)_e$$

գծային արտապատկերում:

Այդ արտապատկերումը հակադարձելի է. նրան հակադարձ կլինի այն

$$\boldsymbol{\psi}_e : \mathbf{M}_n(\mathbf{k}) \to \mathbf{Bilin\ L}$$

արտապատկերումը, որը համապատասխանեցնում է կամայական $A = (a_{ij})_{n\times n}$ մատրիցին M_n (**k**)-ից

$$a(x, y) = x_e \cdot A \cdot {}^t y_e = \Sigma\, a_{ij}\, x^i\, y^j$$

երկգծային ձևը: Այս բանաձևով որոշվող արտապատկերման գծայնությունը ըստ առաջին փոփոխականի ստուգվում է այսպես՝

$$a(\kappa x + \kappa' x', y) = (\kappa x + \kappa' x')_e \cdot A \cdot {}^t y_e = (\kappa\, x_e + \kappa'\, x'_e) \cdot A \cdot {}^t y_e =$$

$$= \kappa\, x_e \cdot A \cdot {}^t y_e + \kappa'\, x'_e \cdot A \cdot {}^t y_e = \kappa\, a(x, y) + \kappa'\, a(x', y):$$

Ընդգծենք, որ այս արտածման ընթացքում օգտագործվում է մատրիցների գումարման բաշխականությունը բազմապատկման նկատմամբ: Նման ձևով ստուգվում է գծայնությունն ըստ երկրորդ փոփոխականի: Որպես վարժություն ստուգեք, որ $\boldsymbol{\varphi}_e$ և $\boldsymbol{\psi}_e$ արտապատկերումները փոխհակադարձ են: Այսպիսով՝ ապացուցված է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 6.1. *Դիցուք* **L**-*ը n-չափանի գծային տարածություն է՝ որոշված* **k** *դաշտի նկատմամբ,* **Bilin L**-*ը* **L**-*ի վրա որոշված երկգծային ձևերի գծային տարածությունն է,* $\mathbf{M}_n(\mathbf{k})$-*ն՝* **k** *դաշտի նկատմամբ որոշված n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցների գծային տարածությունն է, իսկ* $e = (e_1, \ldots, e_n)$-*ն՝* **L** *տարածության կամայական բազիսն է: Այդ դեպքում* $\boldsymbol{\varphi}_e$: **Bilin L** $\rightarrow$ $\mathbf{M}_n$ (**k**) *արտապատկերումը գծային տարածությունների իզոմորֆիզմ է:* □

7. ԵՐԿԳԾԱՅԻՆ ՁԵՎԻ ՄԱՏՐԻՑԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ՆՈՐ ԲԱԶԻՍԻ ԱՆՑՆԵԼԻՍ ՈՒ ԲԱՑԱՐՁԱԿ ԵՎ ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԻՆՎԱՐԻԱՆՏՆԵՐ

Ենթադրենք **L** տարածությունում սևեռած է երկու՝ $e = (e_1, \ldots, e_n)$ և $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ բազիս, և անցումն առաջին բազիսից երկրորդին կատարվում է P մատրիցի միջոցով, այսինքն՝ ${}^t e' = P \cdot {}^t e$: Դիցուք a-ն կամայական երկգծային ձև է՝ որոշված L տարածության վրա, և a_e-ն ու $a_{e'}$-ը նրա մատրիցներն են համապատասխան բազիսներում:

Թեորեմ 7.1: $a_{e'} = P \cdot a_e \cdot {}^t P$:

Ապացույց: Համաձայն (6.1) բանաձևի՝ ունենք

$$a(x, y) = x_e \cdot a_e \cdot {}^t y_e = x_{e'} \cdot a_{e'} \cdot {}^t y_{e'}:$$

Համաձայն [5] ձեռնարկի 23 բաժնի (23.3) բանաձևի՝

$$x_e = x_{e'} \cdot P,\ {}^t y_e = {}^t P \cdot {}^t y_{e'}:$$

Տեղադրելով այս արժեքները նախորդ առնչությունում՝ պարզ դատողություններից հետո ստանում ենք ապացուցվելիք հարաբերությունը: □

Հետևություն 7.2: $\mathrm{rk}\ a_{e'} = \mathrm{rk}\ a_e$:

Ապացույց: Օգտվենք թեորեմ 7.1-ից: Հայտնի է, որ մատրիցի ռանգը չի փոխվում, եթե այն (կարևոր չէ՝ ձախից, թե աջից) բազմապատկում ենք չվերասերված մատրիցով: Մի բազիսից մեկ ուրիշ բազիսի անցման P մատրիցը չվերասերված է: □

Սահմանում: Երկգծային ձևի ռանգ անվանենք նրա մատրիցի ռանգը որևէ բազիսում:

Սահմանում: Այնպիսի մաթեմատիկական օբյեկտը, որը սահմանվում է բազիսի ընտրության միջոցով, բայց չի փոխվում, երբ մի բազիսից անցնում ենք մեկ ուրիշ բազիսի, կոչվում է *բացարձակ ինվարիանտ:*

Ուրեմն՝ Հետևություն 7.2-ը կարող ենք վերաձևակերպել այսպես:

Հետևություն 7.3: *Երկգծային ձևի ռանգը բացարձակ ինվարիանտ է:* □

Հետևություն 7.4: $\det a_{e'} = (\det P)^2 \det a_e$:

Ապացույց: Հաշվենք թեորեմ 7.1-ի հավասարության երկու մասերի մատրիցների որոշիչները և օգտվենք այն փաստերից, որ մատրիցների արտադրյալի որոշիչը հավասար է բազմապատկվող մատրիցների որոշիչների արտադրյալին, իսկ շրջման դեպքում՝ մատրիցի որոշիչը չի փոխվում: □

Սահմանում: Երկգծային ձևի մատրից ասելով՝ հասկանում են նրա մատրիցը որևէ բազիսում:

Սահմանում: Մաթեմատիկական օբյեկտը, որը սահմանվում է բազիսի ընտրության միջոցով և մի բազիսից մյուսին անցնելիս բազմապատկվում է անցման մատրիցի որոշիչի, ասենք՝ σ աստիճանով, կոչվում է σ *կշռի հարաբերական ինվարիանտ:* Մասնավորապես, բացարձակ ինվարիանտները՝ զրո կշռի հարաբերական ինվարիանտներն են:

Այժմ Հետևություն 7.4-ը կարող ենք վերաձևակերպել այսպես.

Հետևություն 7.5: *Երկգծային ձևի որոշիչը $\sigma = 2$ կշռի հարաբերական ինվարիանտ է:* □

8. ԵՐԿԳԾԱՅԻՆ ՁԵՎԻ ՇՐՋՈՒՄ (ՏՐԱՆՍՊՈՆԱՑՈՒՄ)

Դիցուք a(x, y)-ը երկգծային ձև է L տարածության վրա: Փոխենք նրա փոփոխականների տեղերը և դիտարկենք a(y, x) ֆունկցիան: Քանի որ a(x, y) ֆունկցիան գծային է՝ ըստ երկու փոփոխականների, ուրեմն այս նոր ֆունկցիան ևս կլինի գծային՝ ըստ երկու փոփոխականների և կհանդիսանա երկգծային ձև: Այդ գործողությունը կոչվում է a երկգծային ձևի շրջում (տրանսպոնացում) և նշանակվում է ^{t}a: Այսպիսով՝ ^{t}a(x, y) = a(y, x):

Ակնհայտ է, որ երկգծային ձևերի շրջման գործողությունն *ինվոլյուցիա է,* այսինքն՝ կրկնակի շրջումը մեզ վերադարձնում է նախնական դիրքին՝ $^t(^t$a) = a:

Թեորեմ 8.1: *Դիցուք* a-*ն և* b-*ն երկգծային ձևեր են՝ որոշված* L *տարածության վրա: Այդ դեպքում հետևյալ երեք պայմանները համարժեք են.*

(i) b = ^{t}a;

(ii) $b_e = {}^t(a_e)$ **L** տարածության որևիցե e բազիսում,

(iii) $b_e = {}^t(a_e)$ **L** տարածության ցանկացած e բազիսում:

Ապացույց: Դիցուք e-ն **L** տարածության կամայական բազիսն է և b = ^{t}a: Այդ դեպքում՝ ցանկացած i, j ∈ {1, …, n} տարրերի համար $b_{ij} = (^ta)_{ij} = (^ta)(e_i, e_j) = a(e_j, e_i) = a_{ji}$: Այսպիսով՝ (i)-ից բխում է (iii)-ն: Ակընհայտ է, որ (iii)-ից բխում է (ii)-ն: Ստորև մենք ցույց կտանք, որ (ii)-ից բխում է (i)-ն: Այդ երեք բխումներից (իմպլիկացիաներից) ակնհայտորեն հետևում է, որ (i), (ii), (iii) պայմանները համարժեք են:

Այսպիսով՝ ենթադրենք, որ $b_e = {}^t(a_e)$ **L** տարածության որևիցե e բազիսի համար: Այդ դեպքում **L** տարածության ցանկացած x, y վեկտորների համար

$$b(x, y) = x_e\, b_e\, {}^ty_e = x_e\, {}^t(a_e)_e\, {}^ty_e = {}^ta(x, y): \square$$

Սահմանում: a երկգծային ձևը կոչվում է *սիմետրիկ* (*համաչափ*), եթե համընկնում է իր շրջվածին, այսինքն՝ եթե a(x, y) = a(y, x) բոլոր x, y ∈ L վեկտորների դեպքում: Այս պայմանը համարժեքորեն կարելի է գրել ^{t}a = a (ֆունկցիոնալ) տեսքով:

Հետևություն 8.2: *Հետևյալ պայմաններն իրար համարժեք են.*

(i) a երկգծային ձևը սիմետրիկ է,

(ii) որևիցե բազիսում a երկգծային ձևի մատրիցը սիմետրիկ մատրից է,

(iii) *ցանկացած բազիսում a երկգծային ձևի մատրիցը սիմետրիկ է:* □

Որոշակի իմաստով, սիմետրիկ երկգծային ձևերի հակապատկերն են անտիսիմետրիկ (հակաչափ) երկգծային ձևերը:

Սահմանում: a երկգծային ձևը կոչվում է *անտիսիմետրիկ* (*հակաչափ*), եթե հակադիր է իր շրջվածին, այսինքն a(x, y) = - a(y, x) կամայական x, y ∈ L վեկտորների համար: Այս պայմանը համարժեքորեն կարելի է գրել ^{t}a = -a ֆունկցիոնալ տեսքով:

Հետևություն 8.3: *Հետևյալ պայմաններն իրար համարժեք են.*

(i) a երկգծային ձևը անտիսիմետրիկ է,

(ii) որևիցե բազիսում a երկգծային ձևի մատրիցը հակասիմետրիկ է,

(iii) ցանկացած բազիսում a երկգծային ձևի մատրիցը հակասիմետրիկ է: □

9. ՉՎԵՐԱՍԵՐՎԱԾ ԵՐԿԳԾԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐ

Դիցուք a-ն երկգծային ձև է՝ որոշված **L** գծային տարածության վրա և

l(a) = {x ∈ L, a(x, y) = 0 բոլոր y ∈ L վեկտորների համար},

r(a) = {y ∈ L, a(x, y) = 0 բոլոր x ∈ L վեկտորների համար}:

Առաջադրություն 9.1. l(a)-*ն և* r(a)-*ն* **L**-*ի ենթատարածություններն են:*

Ապացույց: Ստուգել, որ l(a) և r(a) ենթաբազմությունները փակ են գումարման և կամայական սկալարով բազմապատկման գործողությունների նկատմամբ: □

Սահմանում: l(a)-ն կոչվում է a երկգծային ձևի *ձախ զրոյական ենթատարածություն*, իսկ r(a)-ն՝ *աջ*:

Թեորեմ 9.2: dim l(a) = dim r(a) = n – rk a :

Ապացույց: Սևեռենք **L** տարածության կամայական $e = (e_1, \ldots, e_n)$ բազիս և դիտարկենք տրված երկգծային ձևի $a(x, y) = x_e \cdot a_e \cdot {}^t y_e$ ներկայացումը: Այդ դեպքում՝

$l(a) = \{x \in L, x_e \cdot a_e \cdot {}^t y_e = 0$ բոլոր $y \in L$ վեկտորների համար$\}$,

$r(a) = \{y \in L, x_e \cdot a_e \cdot {}^t y_e = 0$ բոլոր $x \in L$ վեկտորների համար$\}$:

Ուրեմն՝

$l(a) = \{x \in L, x_e \cdot a_e = 0\}$, $r(a) = \{y \in L, a_e \cdot {}^t y_e = 0\}$,

l(a) և r(a) ենթատարածությունները հանդիսանում են, համապատասխանաբար, ${}^t a_e$ և a_e գործակիցների մատրիցներ ունեցող համասեռ գծային հավասարումների համակարգերի լուծումների բազմություններ: Վերջիններիս չափողականությունները, համապատասխանաբար, հավասար են n - rk ${}^t a_e$ և n -rk a_e, ուրեմն հավասար են իրար: Մնում է նկատել, որ շրջման դեպքում մատրիցի ռանգը չի փոխվում և երկգծային ձևի ռանգը բացարձակ ինվարիանտ է: □

Ապացուցված թեորեմից անմիջապես ստանում ենք այսպիսի արդյունք.

Հետևություն 9.3: *Հետևյալ պայմանները a երկգծային ձևի համար համարժեք են.*

*(1) l(*a) = {0};

(2) r(a) = {0};

(3) det a ≠ 0,

(4) rk a = n = dim L:

Սահմանում: Այն դեպքում, երբ տեղի ունեն (1) – (4) համարժեք պայմանները, *a* երկգծային ձևը կոչվում է *չվերասերված:*

Խնդիրներ ու վարժություններ

Բ1. Նշանակենք **Bilin L** տարածության բոլոր սիմետրիկ երկգծային ձևերի բազմությունը Bilin_+ **L**-ով, իսկ բոլոր հակասիմետրիկ երկգծային ձևերի բազմությունը՝ Bilin_- L-ով: Ապացուցե՛ք, որ այդ ենթաբազմությունները փակ են **Bilin L** տարածության գործողությունների նկատմամբ: Համապատասխան ենթատարածությունները նշանակվում են, համապատասխանաբար՝ $\mathbf{Bilin}_+$ **L** և $\mathbf{Bilin}_-$ **L**:

Բ2. Ապացուցե՛ք, որ **Bilin L** = $\mathbf{Bilin}_+$ **L** $\oplus$ $\mathbf{Bilin}_-$ **L**:

Բ3. Սահմանենք երկգծային ձևերի շրջման արտապատկերումը՝ ^{t}: **Bilin L** $\to$ **Bilin L,** a $\to$ ^{t}a:

Ապացուցել, որ այդ արտապատկերումը գծային տարածությունների իզոմորֆիզմ է, այսինքն՝ հակադարձելի գծային արտապատկերում է:

Բ4. Դիցուք **L'**-ը **L** գծային տարածության ենթատարածությունն է, Bilin_l (**L**, **L'**)-ը **L** տարածության բոլոր այն a երկգծային ձևերի բազմությունն է, որոնց համար l(a) = **L'**: Նմանապես սահմանվում է Bilin **L** բազմության Bilin_r (**L**, **L'**) ենթաբազմությունը r(a) = **L'** պայմանով: Ապացուցել, որ այդ ենթաբազմությունները դատարկ չեն, փակ են **Bilin L** գծային տարածության գործողությունների նկատմամբ և ուրեմն հանդիսանում են ենթատարածություններ:

Բ5.Ապացուցել, որ **L** գծային տարածության a և a' երկգծային ձևերի համար հետևյալ երեք պայմանները համարժեք են.

(i) l(a) = l(a'),

(ii) r(a) = r(a'),

(iii) a' = α a որևիցե ոչզրոյական α սկալարի համար:

Բ6. Ապացուցել, որ ցանկացած a երկգծային ձևի համար l(^{t}a) = r(^{t}a) և r(^{t}a) = l(^{t}a):

Գլուխ Գ:
ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐ

10. ՔԱՌԱՅՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՎ ԵՎ ՆՐԱ ԲԵՎԵՌԱՅԻՆ ՁԵՎԸ

Քառակուսային ձևերը ստացվում են երկգծային ձևերից, եթե նրանցում երկու փոփոխականները վերցնենք իրար հավասար: Ավելի ստույգ՝ **k** դաշտի նկատմամբ որոշված **L** գծային տարածության վրա տրված և **k**-ում արժեքներ ընդունող q ֆունկցիան կոչվում է *քառակուսային ձև,* եթե գոյություն ունի այնպիսի a երկգծային ձև, որի դեպքում q(x) = a(x, x) բոլոր x ∈ L վեկտորների համար: Իհարկե, տարբեր երկգծային ձևերը կարող են որոշել («ծնել», առաջացնել) միևնույն քառակուսային ձևը (օրինակ՝ a-ն և ^{t}a-ն): Սակայն, եթե քառակուսային ձևը ծնող երկգծային ձևի վրա դնենք մի պարզ պայման (սահմանափակում), այն կորոշվի միարժեքորեն:

Առաջադրություն 10.1: *Յանկացած q(x) քառակուսային ձևի համար գոյություն ունի միակ սիմետրիկ երկգծային ձև a(x, y) այնպիսի, որ q(x) = a(x, x):*

Սահմանում: Քառակուսային ձևը ծնող սիմետրիկ երկգծային ձևը կոչվում է նրա *բևեռային ձև:*

Ապացուցենք առաջադրություն 10.1: Դիցուք q(x) քառակուսային ձևը ստացվում է a(x, y) երկգծային ձևից, այսինքն՝ q(x) = a(x, x): Դիտարկենք՝

$$b(x, y) = ½ (a(x, y) + a(y, x))$$

կամ, այլ կերպ ասած, b = ½ (a + ^{t}a)՝ երկու փոփոխականի ֆունկցիան: Այդ ֆունկցիան կլինի գծային երկու փոփոխականների նկատմամբ: Սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ b(x, y)-ը կլինի սիմետրիկ երկգծային ձև և կծնի q(x) քառակուսային ձևը: Այսպիսով՝ ապացուցված է քառակուսային ձևը ծնող սիմետրիկ երկգծային ձևի գոյությունը: Այժմ ապացուցենք նրա միակությունը:

Դիցուք՝ b(x, y)-ը q(x) քառակուսային ձևը ծնող որևիցե սիմետրիկ երկծային ձև է: Այդ դեպքում համաձայն b(x, y)-ի գումարականության հատկության՝ ըստ երկու փոփոխականների և համաչափության պայմանի

$$q(x + y) = b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y) = q(x) + 2b(x, y) + q(y)$$

Այստեղից ստանում ենք

$$b(x, y) = ½ (q(x + y) – q(x) – q(y)):$$

Ուրեմն՝ քառակուսային ձևը ծնող b(x) սիմետրիկ երկգծային (այսինքն՝ բևեռային) ձևը միակն է: □

Սահմանում: Եթե

$$b(x, y) = ½ (a(x, y) + a(y, x)),$$

ասում են, որ b(x, y) սիմետրիկ երկգծային ձևը ստացվում է a(x, y) երկգծային ձևից *սիմետրիկացման* (*համաչափացման*) գործողության միջոցով:

Հետևություն 10.2: *Քառակուսային ֆորմի բևեռային ֆորմը ստացվում է այդ քառակուսային ֆորմը ծնող կամայական a(x, y) երկգծային ֆորմից՝ համաչափացման միջոցով:* □

Սահմանում: Դիցուք q(x)-ը քառակուսային ձև է L տարածության վրա, b(x, y)-ը նրա բևեռային ձևն է, e-ն L տարածության բազիս է:

(a) q(x)-ի մատրից e բազիսում կոչվում է b(x, y)-ի մատրիցն այդ բազիսում:

(b) q(x)-ի որոշիչ է կոչվում b(x, y)-ի որոշիչը:

(c) q(x)-ի ռանգ է կոչվում b(x, y)-ի ռանգը:

Ընդգծենք, որ ցանկացած բազիսում քառակուսային ձևի մատրիցը սիմետրիկ մատրից է:

Համաձայն երկգծային ձևի համապատասխան հատկությունների (տե՛ս գլուխ Բ բաժին 7)՝ ստանում ենք հետևյալ արդյունքը:

Առաջադրություն 10.3: *Քառակուսային ֆորմի ռանգը բացարձակ ինվարիանտ է, իսկ որոշիչը՝ երկու կշռի հարաբերական ինվարիանտ:* □

Եթե b-ն q քառակուսային ձևի բևեռային ձևն է, (b_{ij})-ն այդ բևեռային ձևի մատրիցն է e բազիսում, ապա այդ բազիսում q(x) քառակուսային ձևը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$q(x) = x_e \cdot (b_{ij}) \cdot {}^t x_e = \Sigma\, b_{ij}\, x_i\, x_j:$$

(Նկատենք, որ այստեղ վեկտորի կոորդինատները մենք արդեն նշում ենք ստորին նշիչների միջոցով):

Հիշենք, որ քառակուսային ձևի՝ $b = (b_{ij})$ բևեռային ձևը համաչափ է, հետևաբար, ցանկացած նշիչների դեպքում $b_{ij} = b_{ji}$ և ուրեմն վերին բանաձևում, կատարելով նման անդամների միացում, $x_i\, x_j$-ի գործակիցը կարող ենք գրել $2b_{ij}$:

Քառակուսային ձևերի հետ կապված առաջնահերթ խնդիրը հետևյալն է. գտնել այնպիսի բազիս, որում քառակուսային ձևն ընդունում է հնարավորինս պարզ տեսք:

11. ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՎԻ ԲԵՐՈՒՄԸ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ՏԵՍՔԻ ԼԱԳՐԱՆԺԻ ՄԵԹՈԴՈՎ

Թեորեմ 11.1: *Դիցուք* L-*ը գծային տարածություն է՝ որոշված* k *դաշտի նկատմամբ*, q-*ն քառակուսային ձև է* L-*ի վրա: Գոյություն ունի* L *տարածության այնպիսի* e *բազիս, որում* q *քառակուսային ձևի* q_e *մատրիցն անկյունագծային է, այսինքն՝*

$$q_e = \begin{pmatrix} c_{11}\, 0\, 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\, 0\, 0 \ldots c_{nn} \end{pmatrix}$$

Հետևաբար, այդ բազիսում քառակուսային ձևը կունենա այսպիսի տեսք՝

$$(11.1)\ q(x) = c_{11} x_1^2 + \ldots + c_{nn} x_n^2,$$

որտեղ $(x_1, \ldots, x_n)$*-ը* x *վեկտորի կոորդինատներն են* e *բազիսում:*

Սահմանում: Քառակուսային ձևի (11.1) տեսքը կոչվում է *կանոնական:* Այդ դեպքում ասում են նաև, որ քառակուսային ձևը բերված է *գլխավոր առանցքների:* Երկրաչափությունում այս թեորեմը կոչվում է «քառակուսային ձևի բերումը գլխավոր առանցքների»:

Գոյություն ունեն քառակուսային ձևի կանոնական տեսքը գտնելու տարբեր մեթոդներ: Ստորև մենք կստանանք այս թեորեմի՝ Լագրանժի կողմից առաջարկված ապացույցը: Այն կրում է ալգորիթմական բնույթ, այսինքն մատնանշում է՝ ինչ քայլերի միջոցով է կարելի ստանալ քառակուսային ձևի կանոնական տեսքը և համապատասխան բազիսը: Ուստի, կշարադրենք այդ ապացույցը որպես ալգորիթմ:

Նախ անենք մի կարևոր դիտողություն: Երբ կատարում ենք անցում e բազիսից e' բազիսի ${}^te' = P \cdot {}^te$ բանաձևով, համապատասխան կոորդինատները ձևափոխվում են ${}^tx_{e'} = {}^tP^{-1} \cdot {}^tx_e$ բանաձևով, որտեղ P և ${}^tP^{-1}$ մատրիցները չվերասերված մատրիցներ են: Սրանից անմիջապես հետևում է, որ կոորդինատների յուրաքանչյուր գծային ձևափոխությանը չվերասերված մատրիցի միջոցով համապատասխանում է անցմանը մի բազիսից մեկ ուրիշ բազիսի: Հետագայում մեր ուշադրությունը կկենտրոնացնենք կոորդինատների չվերասերված գծային ձևափոխությունների վրա:

Լագրանժի ալգորիթմ:

1) Եթե քառակուսային ձևը զրոյական է $q(x) = 0$ բոլոր $x \in L$ վեկտորների համար, ապա նրա մատրիցը կամայական բազիսում զրոյական մատրից է և ուրեմն «տրիվիալ» անկյունագծային է:

2) Ենթադրենք, որ $q(x)$ քառակուսային ձևը զրոյական չէ: Վերցնենք կամայական e բազիս և գտնենք տրված քառակուսային ձևի $q_e = (a_{ij})$ մատրիցն այդ բազիսում: Այդ մատրիցը կունենա գոնե մեկ a_{ij} ոչզրոյական տարր (հակառակ դեպքում քառակուսային ձևը կլիներ զրոյական):

3) Ենթադրենք՝ q_e մատրիցի բոլոր անկյունագծային տարրերը հավասար են զրոյի, իսկ ոչանկյունագծային a_{ij} $(i \neq j)$ տարրը զրոյական չէ: Կատարենք կոորդինատների հետևյալ չվերասերված (համոզվեք դրանում) գծային ձևափոխությունը՝

$$x_i = x'_i + x'_j,\ x_j = x'_i - x'_j,\ x_k = x'_k\ (k \neq i, j):$$

Այդ դեպքում $a_{ij}\ x_i\ x_j$ միանդամից կառաջանա $a_{ij}\ (x'_i)^2 - a_{ij}\ (x'_j)^2$ երկանդամ, այսինքն ոչզրոյական տարր q քառակուսային ձևի նոր մատրիցի անկյունագծի վրա:

4) Այժմ կարող ենք ենթադրել, որ q քառակուսային ձևի մատրիցը դիտարկվող բազիսում՝ գլխավոր անկյունագծի վրա ունի ոչզրոյական տարր, ասենք, այդպիսին է a_{ii}-ն: Այդ դեպքում կատարենք կոորդինատների այսպիսի ձևափոխություն՝

$$x'_1 = x_i,\ x'_i = x_1,\ x'_k = x_k\ (k \neq i, i),$$

որը նույնպես չվերասերված ձևափոխություն է (համոզվեք դրանում ևս): Արդյունքում կստանանք, որ q-ի նոր մատրիցում $a'_{11} = a_{ii} \neq 0$:

5) Հիմա դիտարկենք դեպքը, երբ $a_{11} \neq 0$: Հաշվի առնելով, որ q-ի մատրիցը սիմետրիկ է, մասնավորապես՝ $a_{1i}\ x_1\ xi$ և $a_{i1}\ x_i\ x_1$ միանդամների գործակիցներն իրար հավասար են, q(x)-ի բացահայտ բանաձևում x_1 փոփոխականը պարունակող անդամները կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$a_{11}\ x_1^2 + 2a_{12}\ x_1\ x_2 + \ldots + 2a_{1n}\ x_1\ x_n:$$

Արտագրենք վերևում բերված արտահայտությունն այսպես՝

$$a_{11}\ (x_1 + (a_{12} / a_{11})\ x_1\ x_2 + \ldots + (a_{1n} / a_{11})\ x_1\ x_n)^2 - f(x_2, \ldots, x_n),$$

որտեղ $f(x_2, \ldots, x_n)$-ը քառակուսային ձև է $x_2, \ldots, x_n$ փոփոխականներից:

Կատարենք կոորդինատների հետևյալ ձևափոխությունը՝

$$x'_1 = x_1 + (a_{12} / a_{11})\ x_2 + \ldots + (a_{1n} / a_{11})\ x_n,\ x'_k = x_k\ (k \neq 1):$$

Այս ձևափոխությունը ևս չվերասերված է (ստուգե՛ք սա): Արդյունքում՝ տրված քառակուսային ձևը կընդունի այսպիսի տեսք՝

$$q(x) = a_{11}(x'_1)^2 + q_2(x'_2, \ldots, x'_n),$$

որտեղ $q_2(x'_2, \ldots, x'_n)$-ը քառակուսային ձև է $x'_2, \ldots, x'_n$ փոփոխականներից:

6) Եթե $q_2(x'_2, \ldots, x'_n) \neq 0$, նույն քայլերը, սկսած 2) քայլից, կրկնենք նրա համար՝ արդյունքում ստանալով՝

$$q(x) = a''_{11}(x''_1)^2 + a''_{22}(x''_2)^2 + q_3(x''_3, \ldots, x''_n):$$

7) Շարունակենք այդպես, մինչև որ ստանանք $q_{s+1}(x_{s+1}, \ldots, x_n) = 0$:

8) Որպես վերջնական արդյունք կստանանք քառակուսային ձևի կանոնական տեսքը:

9) Վերցնելով կոորդինատների բոլոր չվերասերված գծային ձևափոխությունների համադրույթը՝ կստանանք կոորդինատների ամփոփիչ ձևափոխությունը, որի միջոցով ստանում ենք քառակուսային ձևի կանոնական (անկյունագծային) տեսքը:

Հատուկ ընդգծենք, որ ո՛չ կանոնական տեսքը, ո՛չ առավել ևս կոորդինատների գծային ձևափոխությունը, որով քառակուսային ձևը բերվում է կանոնական տեսքի, միարժեքորեն չեն որոշվում: Թեորեմ 11.1-ը ապացուցված է: □

Հետևություն 11.2: *Դիցուք քառակուսային ձևի ռանգը հավասար է* r: *Այդ դեպքում կարելի է համարել, որ* (10.1) *կանոնական տեսքում առաջին* r *գործակիցները (և ուրեմն համապատասխան անկյունագծային մատրիցում՝ առաջին r անկյունագծային տարրերը) հավասար չեն զրոյի, իսկ մնացած գործակիցներն ու, համապատասխանաբար, մատրիցի մնացած տարրերը զրոյական են: Ուստի՝*

$$(11.2)\ q(x) = c_{11}x_1^2 + \ldots + c_{rr}x_r^2,$$

որտեղ բոլոր c_{ii} *գործակիցները ոչզրոյական են:*

Ապացույց: Քառակուսային ձևի ռանգը բացարձակ ինվարիանտ է, իսկ անկյունագծային մատրիցի ռանգը հավասար է նրա գլխավոր անկյունագծի ոչզրոյական տարրերի քանակին: Ուստի՝ $c_{11}, \ldots, c_{nn}$ տարրերից ուղիղ r հատը կլինեն ոչզրոյական: □

12. ԻՐԱԿԱՆ ԵՎ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐԻ ՆՈՐՄԱԼ ՏԵՍՔԸ

Գծային տարածությունը և նրա հետ առնչված բոլոր մաթեմատիկական օբյեկտները կոչվում են *իրական* (համապատասխանաբար՝ *կոմպլեքս*), եթե որպես հիմնական k դաշտ վերցված է **R** իրական թվերի (համապատասխանաբար՝ **C** կոմպլեքս թվերի) դաշտը: Այն դեպքում, երբ L գծային տարածությունն իրական կամ կոմպլեքս տարածություն է, նրա վրա որոշված քառակուսային ձևին կարելի է տալ ավելի պարզ տեսք, քան կանոնականն է: Այդ տեսքը, որ մենք ստորև կստանանք, կոչվում է *նորմալ*:

Թեորեմ 12.1: *Կամայական* q *իրական քառակուսային ձևի համար կգտնվի այնպիսի* e *բազիս, որում այդ քառակուսային ձևը կունենա*

$$(12.1)\ q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2$$

տեսք, այստեղ r = rk q:

Սահմանում: Իրական քառակուսային ձևի (12.1) տեսքը կոչվում է *նորմալ տեսք*:

Ապացույց: Կիրառելով Լագրանժի ալգորիթմը՝ բերենք q քառակուսային ձևը (11.2) կանոնական տեսքի: Ոչզրոյական $c_{11}, \ldots, c_{rr}$ իրական թվերի մի մասը կլինի դրական, մնացածը՝ բացասական: Բազիսային վեկտորների տեղափոխությամբ կարելի է անել այնպես, որ նրանցից առաջին, ասենք, s հատը լինի դրական, իսկ մնացած r – s հատը՝ բացասական ($0 \le s \le r$): Նշանակենք d_{ii}-ով ոչբացասական քառակուսի արմատը $|c_{ii}|$-ից: Կատարելով կոորդինատների

$$x'_i = d_{ii}\, x_i\ (i = 1, \ldots, r),\ x'_i = x_i\ (i = r + 1, \ldots, n)$$

ձևափոխություն, որտեղ n =dim L, կստանանք պահանջվող (12.1) բանաձևը: □

Սահմանում: Ոչբացասական ամբողջ թվերի (s, r - s) զույգը կոչվում է q իրական քառակուսային ձևի *նշանացույց* (*սիգնատուրա*):

Իհարկե, գոյություն ունեն տարբեր բազիսներ, որոնցում տրված իրական քառակուսային ձևն ընդունում է նորմալ տեսք: Սակայն ճիշտ է հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 12.2 («իներցիայի օրենք»): *Իրական քառակուսային ձևի նորմալ տեսքը, այսինքն նրա նշանացույցը՝ բացարձակ ինվարիանտ է:*

Ապացույց: Դիցուք $e = (e_1, \ldots, e_n)$ և $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ համակարգերը $q(x)$ իրական քառակուսային ձևի երկու (նորմալ) բազիսներ են, որոնցում այն ընդունում է

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 \text{ և } q(x) = x'^2_1 + \ldots + x'^2_{s'} - x'^2_{s'+1} - \ldots - x'^2_r$$

նորմալ տեսքեր: Ենթադրենք՝ $s > s'$: Դիտարկենք L տարածության $e_1, \ldots, e_s$ վեկտորներով ծնված L_1 և $e'_{s'+1}, \ldots, e'_n$ վեկտորներով ծնված L_2 ենթատարածությունները: Այդ դեպքում $\dim L_1 = s$ և $\dim L_2 = n - s'$: Համաձայն ենթատարածությունների գումարի չափողականության մասին թեորեմի՝

$$\dim L_1 \cap L_2 = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim (L_1 + L_2):$$

Այստեղ $\dim (L_1 + L_2) \le n$, քանի որ $L_1 + L_2 < L$: Ուրեմն՝

$$\dim L_1 \cap L_2 \ge s + (n - s') - n = s - s' > 0:$$

Հետևաբար, կգտնվի $x \in L_1 \cap L_2$ ոչզրոյական վեկտոր, որը, հետևապես, կպատկանի և՛ L_1-ին, և՛ L_2-ին:

Քանի որ $x \in L_1$, ուրեմն՝

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 > 0,$$

և քանի որ $x \in L_2$, ուրեմն՝

$$q(x) = - x_{s'+1}^2 - \ldots - x_n^2 \le 0:$$

Ստացված հակասությունից հետևում է, որ $s > s'$ չի կարող լինել: Նմանապես չի կարող լինել $s < s'$: Ուրեմն $s = s'$: Թեորեմն ապացուցված է: □

Թեորեմ 12.3: *Կամայական* q *կոմպլեքս քառակուսային ձևի համար կգտնվի այնպիսի* e *բազիս, որում այն կընդունի*

$$(12.2)\ q(x) = x_1^2 + \ldots + x_r^2,\ r = \mathrm{rk}\, q$$

տեսք:

Սահմանում: Կոմպլեքս քառակուսային ձևի (12.2) տեսքը կոչվում է *նորմալ տեսք*:

Ապացույցը կրկնում է թեորեմ 12.1-ի ապացույցը՝ հետևյալ տարբերությամբ: Յուրաքանչյուր ոչզրոյական c_{ii} (i = 1, …, r) կոմպլեքս թվից գոյություն ունեն երկու՝ իրար հակադիր կոմպլեքս արմատներ: Նշանակենք d_{ii}-ով դրանցից որևէ մեկը: Մնացածը՝ ինչպես թեորեմ 12.1-ի ապացույցում: □

Խնդիրներ ու վարժություններ

Գ1. Երկգծային ձևի կանոնական տեսքը միարժեքորեն չի որոշվում: Եթե C-ն q քառակուսային ձևի կանոնական տեսքի մատրիցն է, և D-ն կամայական չվերասերված անկյունագծային մատրից է, ապա CD^2 -ն նույնպես կլինի q քառակուսային ձևի մատրից որևէ բազիսում: Ապացուցե՛ք:

Ճի՞շտ է արդյոք հակադարձ պնդումը, այսինքն՝ q-ի կամայական երկու՝ C և C' կանոնական մատրիցներ կլինեն կապված $C' = CD^2$ առընչությամբ, որտեղ D-ն վերը նշված տեսքի մատրից է:

Գ2. Ապացուցել, որ միևնույն իրական տարածության վրա որոշված f և g քառակուսային ձևերի համար հետևյալ պայմանները համարժեք են.

(a) f-ը և g-ն բերվում են միևնույն նորմալ տեսքի;

(b) f-ը և g-ն ունեն նույն նշանացույցը;

(c) գոյություն ունի կոորդինատների չվերասերված գծային ձևափոխություն, որը տանում է մի քառակուսային ձևը մյուսին:

Այդպիսի քառակուսային ձևերը կոչվում են իրար *համարժեք*:

Գ3. Քանի՞ ոչհամարժեք, իրական քառակուսային ձևերի դասեր կան $\mathbf{R}^n$-ում:

Գ4. Նման ձևով սահմանե՛լ կոմպլեքս քառակուսային ձևերի համարժեքությունը և գտնել համարժեք կոմպլեքս քառակուսային ձևերի դասերի քանակը:

Գ5. (a) Ապացուցե՛լ, որ իրական քառակուսային ձևը վերլուծվում է իրական գծային արտադրիչների այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա ռանգը $r \le 2$ և երբ $r = 2$՝ նշանացույցը (սիգնատուրան) հավասար է (1, 1):

(b) Ապացուցել, որ կոմպլեքս քառակուսային ձևը վերլուծվում է գծային արտադրիչների այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա ռանգը $r \le 2$:

Գ6. Գտնել հետևյալ իրական քառակուսային ձևերի նորմալ տեսքը.

(a) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_{23} + 2x_2x_3$:

(b) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_{23} + 2x_2x_3$:

(c) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_{23} - 6x_2x_3$:

(d) $x_1x_2 + x_1x_{23} + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$:

Գ7. Գտնե՛լ հետևյալ իրական քառակուսային ձևերի նորմալ տեսքը և այն չվերասերված ձևափոխությունը, որի միջոցով տրված ձևը բերվում է այդ տեսքին.

(a) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$:

(b) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_{23} - 3x_2x_3$:

(c) $x_1x_2 + x_1x_{23} + x_2x_3$:

(d) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_{23} - 27x_2x_3$:

Գ8. Պարզե՛ք, թե հետևյալ քառակուսային ձևերից որոնք են համարժեք.

(a) $f = x_1^2 - 2x_2x_3$, $g = - y_3^2 + y_1y_2$, $h = z_3^2 + z_1z_2$:

(b) $f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$,

$g = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$,

$h = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$:

Գ9. Ապացուցե՛լ, որ հետևյալ օրինակներում f և g քառակուսային ձևերը համարժեք են ու գտնել f քառակուսային ձևը g քառակուսային ձևին տանող չվերասերված գծային ձևափոխությունը.

(a) $f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$,
$g = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 – 4y_1y_3 + 8y_2y_3$:
(b) $f = 3x_1^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 40x_2x_3$,
$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2$:
(c). $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$,
$g = 4y_1^2 + y_2^2 + 9y_3^2 - 12y_1y_3$:

Գլուխ Դ:
ՍԿԱԼԱՐ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼԱՑՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑ

Քառակուսային ձևերի կարևորագույն կիրառությունները երկրաչափությունում են և երկրաչափության միջոցով՝ ֆիզիկայում: Վերլուծական երկրաչափությունից հայտնի է, որ ցանկացած սևեռած բազիսում կետերի միջև հեռավորության, վեկտորի երկարության, վեկտորների սկալար արտադրյալի բանաձևերը տրվում են քառակուսային ձևերի միջոցով: Այս փաստերը հիմնավորվում են ստորև շարադրվող ընդհանրացումներով:

13. ՍԿԱԼԱՐ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Դիցուք L-ը գծային տարածություն է՝ որոշված k դաշտի նկատմամբ: Ասում են, որ L տարածության վրա տրված է (որոշված է) *սկալար արտադրյալ,* եթե սևեռած է

$$f: L \times L \to k,\ f(x, y) = (x, y)$$

արտապատկերում, որը գծային է յուրաքանչյուր փոփոխականի նկատմամբ՝

$$(\alpha x + \alpha' x', y) = \alpha\,(x, y) + \alpha'\,(x', y),\ (x, \beta y + \beta' y') = \beta\,(x, y) + \beta'\,(x, y')$$

և սիմետրիկ (համաչափ) է

$$(x, y) = (y, x):$$

Այստեղ բոլոր վեկտորները տարրեր են L-ից, իսկ սկալարները՝ k-ից: Այդ դեպքում (x, y)-ը կոչվում է x և y վեկտորների սկալար արտադրյալ: Այսպիսով, սկալար արտադրյալը L գծային տարածության վրա տրվում է կամայական սևեռած սիմետրիկ a երկգծային ձևի միջոցով կամ, այլ կերպ ասած, որևիցե q քառակուսային ձևի բևեռային ձևի միջոցով: Սկալար արտադրյալի մատրից, որոշիչ և ռանգ ասելով՝ հասկա-

նում են վերջինիս՝ այսինքն վերը նշված բևեռային ձևի մատրիցը, որոշիչը և ռանգը:

Հաճախ (x, y) սկալար արտադրյալը որոշող a(x, y) քառակուսային ձևի վրա դնում են նաև չվերասերվածության պահանջը, այսինքն՝ Հետևություն 9.3-ի չորս համարժեք պայմանները:

Սկալար արտադրյալն ունի հետևյալ՝ ժառանգականության հատկությունը:

Առաջադրություն 13.1: *Դիցուք* L′ *հանդիսանում է սկալար արտադրյալով* L *գծային տարածության ենթատարածություն: Այդ դեպքում՝* L*-ի վրա որոշված* a *սկալար արտադրյալի* a' *սահմանափակումը* L′*-ի վրա որոշում է սկալար արտադրյալ* L′*-ի վրա*:

Ապացույց: Քանի որ սկալար արտադրյալը որոշող արտապատկերման գծայնության պայմանը կատարվում է փոփոխականների **L** տարածությունից վերցված բոլոր արժեքների համար, այդ պայմանը կկատարվի փոփոխականների բոլոր արժեքների համար՝ վերցված նրա L′ ենթատարածությունից: Նույնը վերաբերում է համաչափության պայմանին: □

Ընդգծենք, որ սկալար արտադրյալի չվերասերվածություն հատկությունը, ընդհանուր առմամբ, չի պահպանվում, եթե L-ի համար որոշված սկալար արտադրյալը չվերասերված է, նրա սահմանափակումը L′ ենթատարածության վրա կարող է լինել վերասերված:

Օրինակ: Դիցուք L գծային տարածության $e = (e_1, \ldots, e_n)$ բազիսում՝ սկալար արտադրյալի մատրիցի m-րդ գլխավոր մինորը զրոյական է և L′-ն առաջին m բազիսային վեկտորների գծային թաղանթն է: Այդ դեպքում՝ սկալար արտադրյալի սահմանափակումը L′-ի վրա կլինի վերասերված:

Սկալար արտադրյալով կամայական L գծային տարածությունում կարելի է սահմանել x վեկտորի նորմը (նորման, երկարությունը) հետևյալ բանաձևով՝

$$(13.1)\ \|x\| = \sqrt{(x, x)}\ :$$

Կամայական **k** դաշտի դեպքում քառակուսի արմատը a(x, x)-ից կարող է գոյություն չունենալ **k** դաշտում: Օրինակ, եթե k = **R**՝ իրական թվերի դաշտն է, իրական քառակուսի արմատ գոյություն ունի միայն ոչ-բացասական թվերից: Անգամ այն դեպքերում, երբ քառակուսի արմատը գոյություն ունի, այն որոշվում է ոչ միարժեքորեն, այլ նշանի ճշտությամբ:

Այսպիսով, կամայական k դաշտի դեպքում վեկտորի նորմը ոչ միշտ կլինի որոշված ընդհանուր **k** դաշտի դեպքում: (Նկատենք, որ արմատի գոյության հարցը կարելի է լուծել՝ անցնելով դաշտի հանրահաշվական փակմանը, բայց այդ դեպքում էլ մնում է բաց արմատի ոչմիարժեքության հարցը:)

Ակնհայտ է, որ եթե գծային տարածության սկալար արտադրյալը տրվում է վերասերված քառակուսային ձևի միջոցով, ապա այդպիսի գծային տարածությունում գոյություն կունենա ոչզրոյական վեկտոր, որի նորմը հանասար է զրոյի: Կոմպլեքս գծային տարածություններում, եթե նրանց չափողականությունը մեծ է մեկից, նույնպես գոյություն կունենան ոչզրոյական վեկտորներ, որոնց նորմը հանասար է զրոյի: Նորմալ բազիսում այդպիսի վեկտոր կլինի, օրինակ՝ (1, i, 0, …, 0) կոորդինատներով վեկտորը:

14. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼՈՒԹՅՈՒՆ

Այժմ կներմուծենք մի հասկացություն, որը որոշված է կամայական սկալար արտադրյալով **L** գծային տարածությունների համար ցանկացած **k** դաշտի դեպքում և հանդիսանում է դասական երկրաչափության ուղղահայացության հասկացության ընդհանրացումը:

Սահմանում: Սկալար արտադրյալով L գծային տարածության ոչ-զրոյական x, y ∈ L վեկտորները կոչվում են *օրթոգոնալ*, եթե նրանց (x, y) սկալար արտադրյալը հավասար է զրոյի:

Առաջադրություն 14.1: *Սկալար արտադրյալով* L *գծային տարածության* (e_1, …, e_m) *ոչզրոյական նորմով վեկտորների ցանկացած հա-*

մակարգ գծորեն անկախ է, եթե նրա կամայական երկու վեկտոր օրթոգոնալ են միմյանց:

Ապացույց: Ենթադրենք՝ $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m = 0$: Այդ դեպքում ցանկացած $i = 1, \ldots, m$ համար

$$0 = (e_i, 0) = (e_i, \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m) = \alpha_1(e_i, e_1) + \ldots + \alpha_m (e_i, e_m) = \alpha_i (e_i, e_i):$$

Ըստ ենթադրության՝ $(e_i, e_i) \neq 0$: Ուրեմն՝ $\alpha_i = 0$: □

Սահմանում: Ասում են, որ սկալար արտադրյալով L գծային տարածության e վեկտորը օրթոգոնալ է L′ ենթատարածությանը, եթե այն օրթոգոնալ է այդ ենթատարածության յուրաքանչյուր վեկտորին:

Առաջադրություն 14.2: *Որպեսզի սկալար արտադրյալով* L *գծային տարածության* e *վեկտորը լինի օրթոգոնալ* L′ *ենթատարածությանը, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի այն լինի օրթոգոնալ այդ ենթատարածության որևէ* $(e_1, \ldots, e_m)$ *բազիսի բոլոր վեկտորներին:*

Ապացույց: Ըստ սահմանման՝ եթե e վեկտորն օրթոգոնալ է L' ենթատարածությանը, ապա այն կլինի օրթոգոնալ նրա կամայական բազիսի բոլոր վեկտորներին: Մյուս կողմից, կամայական $x \in \mathbf{L}'$ վեկտորի համար ունենք $x = x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m$ վերլուծությունը **L′** ենթատարածության ցանկացած $(e_1, \ldots, e_m)$ բազիսի նկատմամբ: Եթե այդ բազիսի բոլոր վեկտորներն օրթոգոնալ են e վեկտորին, ապա

$$(e, x) = (e, x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m) = x_1 (e, e_1) + \ldots + x_m (e, e_m) = 0: \square$$

Առաջադրություն 14.3: *Դիցուք* L'*-ը չվերասերված սկալար արտադրյալով գծային տարածություն է՝ որոշված* ***k*** *դաշտի նկատմամբ,* **e** $= (e_1, \ldots, e_m)$*-ը՝ կամայական բազիս է* **L'***-ում: Այդ դեպքում գոյություն ունի* **L'***-ի միակ* $e' = (e_1, \ldots, e_{m-1}, e'_m)$ *բազիս այնպիսի, որ* e'_m *վեկտորն օրթոգոնալ է* $\langle e_1, \ldots, e_{m-1} \rangle$ *գծային թաղանթին և* $(e_m, e'_m) = 1$:

Ապացույց: Գտնենք պահանջվող վեկտորն *անհայտ գործակիցների մեթոդով*: Ենթադրենք՝

$$(14.1)\ e'_m = x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m,$$

որտեղ $x_1, \ldots, x_m$ գործակիցները անհայտներ են: Ստորև $A' = (a_{ij})$ մատրիցը **L** տարածությունում որոշված սկալար արտադրյալի մատրիցն է $e = (e_1, \ldots, e_m)$ բազիսում: Ըստ Առաջադրություն 14.3-ի e'_m պիտի լինի օրթոգոնալ $<e_1, \ldots, e_{m-1}>$ գծային թաղանթին, այսինքն այդ թաղանթը ծնող յուրաքանչյուր e_i վեկտորին: Այդ պայմանը տալիս է $n - 1$ հատ համասեռ հավասարում՝

$$(14.2)\quad (e_i, e'_m) = (e_i, x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m) = x_1 (e_i, e_1) + \ldots + x_m (e_i, e_m) = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{im} x_m = 0,$$

որտեղ $i = 1, \ldots m - 1$: Օգտագործելով Առաջադրություն 14.3-ի վերջին պայմանը՝ ստանում ենք ևս մի հավասարում՝

$$(14.3)\quad (e_m, e'_m) = (e_m, x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m) = x_1 (e_m, e_1) + \ldots + x_m (e_m, e_m) = a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mm} x_m = 1:$$

Այսպիսով, (14.2) և (14.3) առնչությունները որոշում են m գծային հավասարումների համակարգ m անհայտից: Քանի որ դիտարկվող սկալար արտադրյալը ենթադրվում է չվերսերված, ստացված համակարգի գործակիցների (a_{ij}) մատրիցը չվերասերված է: Հետևաբար, համաձայն Կրամերի թեորեմի՝ ստացված համակարգն ունի միակ լուծում, որը տրվում է հետևյալ բանաձևերով՝

$$x_i = d_i / d \quad (i = 1, \ldots, m),$$

որտեղ d-ն գործակիցների մատրիցի որոշիչն է, իսկ d_i-ն այն մատրիցի որոշիչն է, որը ստացվում է, եթե գործակիցների մատրիցում i-րդ սյունը փոխարինենք $^t(0, \ldots, 0, 1)$ սյունով: Առաջադրությունն ապացուցված է: □

15. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼԱՑՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑ (ԱԼԳՈՐԻԹՄ) ԵՎ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՉԵՎԻ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ՏԵՍՔԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ՅԱԿՈԲԻԻ ՄԵԹՈԴՈՎ

Դիցուք L-ը սկալար արտադրյալով գծային տարածություն է: Ենթադրենք, որ գոյություն ունի $e = (e_1, \ldots, e_n)$ բազիս, որում սկալար ար-

տաղդյալի (a_{ij}) մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորները ոչզրոյական են: Նշանակենք L_m-ով $e_1, \ldots, e_m$ վեկտորների գծային թաղանթը ($m = 1, \ldots, n$): Համաձայն վերը նշված ենթադրության՝ L-ի սկալար արտադրյալի սահմանափակումը յուրաքանչյուր L_m-ի վրա կտա չվերասերված սկալար արտադրյալ: Հետևաբար՝ կարող ենք կիրառել Առաջադրություն 14.3-ը՝ վերցնելով $L' = L_m$ հերթով բոլոր $m = 1, \ldots, n$ համար: Արդյունքում կստանանք նոր՝ $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ վեկտորների համակարգ, որի կամայական երկու վեկտոր, ըստ Առաջադրություններ 14.2-ի և 14.3-ի, կլինեն միմյանց օրթոգոնալ: Համաձայն Առաջադրություն 14.1-ի՝ այդ համակարգը կհանդիսանա L-ի բազիս:

Սահմանում: Սկալար արտադրյալով գծային տարածության բազիսը կոչվում է *օրթոգոնալ*, եթե նրա կամայական երկու վեկտոր օրթոգոնալ են միմյանց: Կամայական բազիսից օրթոգոնալ բազիսի անցման գործընթացը կոչվում է բազիսի *օրթոգոնալացման գործընթաց*:

Թեորեմ 15.1: *Դիցուք* **L**-*ը սկալար արտադրյալով գծային տարածություն է, ընդ որում գոյություն ունի* e *բազիս, որում սկալար արտադրյալի մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորները ոչզրոյական են: Այդ դեպքում կիրառելով վերը նկարագրված օրթոգոնալացման գործընթացը կստանանք* e' *օրթոգոնալ բազիս:* □

Նկարագրված անցումը կամայական e բազիսից օրթոգոնալ e′ բազիսի ընդունված է անվանել *Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման գործընթաց (ալգորիթմ)*: Արդարությունը պահանջում է նկատել, որ նույն եղանակը օգտագործվել է դեռ Յակոբիի կողմից, որպեսզի քառակուսային ձևը բերվի կանոնական տեսքի՝ Լագրանժի մեթոդից տարբեր մեթոդով:

Թեորեմ 15.2: (Քառակուսային ձևի բերումը կանոնական տեսքի Յակոբիի մեթոդով): *Դիցուք* **L**-*ը գծային տարածություն է՝ որոշված* **k** *դաշտի նկատմամբ,* q-*ն քառակուսային ձև է որոշված* **L**-*ի վրա և* $e = (e_1, \ldots, e_n)$ *բազիսում* q *քառակուսային ձևի մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորները՝* $\Delta_m \neq 0$): *Այդ դեպքում* **L** *տարածության համար կգտնվի* $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ *կանոնական բազիս, որում* q *քառակուսային ձևը կընդունի*

$$q(y) = (1/\Delta_1)y_1^2 + (\Delta_1/\Delta_2)y_2^2 + \ldots + \Delta_{n-1}/\Delta_n)\, y_n^2$$

տեսք: (Այստեղ $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$-ը y վեկտորի կոորդինատներն են e' բազիսում):

Հիշեցնենք, որ n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցի Δ_m (m = 1, …, n) գլխավոր մինոր է կոչվում նրա առաջին m տողերի և առաջին m սյուների հատման կետերում կանգնած տարրերից կազմված մատրիցի որոշիչը:

Ապացույց: Դիտարկենք **L** տարածության վրա սկալար արտադրյալ, որը որոշվում է տրված q քառակուսային ձևի միջոցով: Կիրառենք Առաջադրություն 14.3-ի ապացույցի մեթոդները **L' = L**$_m$՝ $e_1, \ldots, e_m$ բազիսային վեկտորների գծային թաղանթի նկատմամբ՝ հաջորդաբար վերցնելով m = 1, 2, …, n: Դա թույլատրելի է, քանի որ համաձայն թեորեմի ենթադրության՝ e բազիսում q քառակուսային ձևի բոլոր գլխավոր մինորները ոչզրոյական են: Արդյունքում կստանանք օրթոգոնալ՝ $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ բազիս: Ակնհայտ է, որ q սկալար արտադրյալով տարածության օրթոգոնալ բազիսը կլինի այդ քառակուսային ձևի համար կանոնական բազիս: Հաշվենք այդ բազիսում q քառակուսային ձևի տեսքը:

Եթե a-ն q քառակուսային ձևի բևեռային ձևն է, ապա

$$a(y, y) = a(y_1 e'_1 + \ldots + y_n e'_n, y_1 e'_1 + \ldots + y_n e'_n) = a(e'_1, e'_1)\, y_1^2 + \ldots + a(e'_n, e'_n)\, y_n^2:$$

Լեմա 15.3: $a(e'_m, e'_m) = \Delta_{m-1}/\Delta_m$ (m = 1, …, n):

Ապացույց: Օգտվելով (14.1) վերլուծությունից և (14.2) ու (14.3) առնչություններից՝ ստանում ենք.

$$a(e'_m, e'_m) = a(x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m, e'_m) = a(e_1, e'_m)\, x_1 + \ldots + a(e_m, e'_m)\, x_m = x_m:$$

Իր հերթին, (14.2) ու (14.3) առնչություններով որոշվող գծային հավասարումների համակարգից ստանում ենք $x_m = \Delta_{m-1}/\Delta_m$: Այսպիսով, Լեմա 15.3 և Թեորեմ 15.2 ապացուցված են: □

Ի տարբերություն Լագրանժի ալգորիթմի, որը կիրառելի է ցանկացած քառակուսային ձևին, Յակոբիի մեթոդը կիրառելի է միայն այն դեպքում, երբ քառակուսային ձևի համար գոյություն ունի բազիս, որում նրա մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորները ոչզրոյական են: Սակայն այն ունի մի առավելություն. նրա միջոցով անմիջապես կարողանում ենք գրել քառակուսային ձևի կանոնական տեսքը:

Խնդիրներ և վարժություններ

Դ1. Դիցուք L-ը կամայական q սկալար արտադրյալով գծային տարածություն է, $a \in L$ կամայական վեկտոր է: Ապացուցե՛լ, որ a-ին օրթոգոնալ բոլոր վեկտորների բազմությունը զրոյական վեկտորի հետ միասին կազմում է ենթատարածություն:

Դ2. Ցույց տալ, որ սկալար արտադրյալի սահմանման մեջ բավական է պահանջել սիմետրիկությունը և գծայնությունը ըստ մի փոփոխականի, գծայնությունը ըստ մյուս փոփոխականի կբխի այդ պայմաններից:

Դ3. Ապացուցե՛լ, որ սկալար արտադրյալն ունի հետևյալ հատկությունները.

(a) $(x_1 - x_2, y) = (x_1\ y) - (x_2, y)$, $(x, y_1 - y_2) = (x, y_1) - (x, y_2)$;

(b) $(x, 0) = 0 = (0, y)$;

(c) $(-x, y) = -(x, y) = (x, -y)$:

Դ4. Դիցուք L-ը սկալար արտադրյալով գծային տարածություն է, L_1-ը նրա ենթատարածությունն է, L_1'-ը՝ զրոյական վեկտորից և բոլոր այն վեկտորներից կազմված բազմությունն է, որոնք օրթոգոնալ են L_1-ի յուրաքանչյուր (ոչզրոյական) վեկտորին: (Այդ դեպքում L_1'-ը կոչվում է L_1-ի օրթոգոնալ լրացում:) Ապացուցե՛լ, որ L_1' -ը L-ի ենթատարածությունն է:

Դ5. Սկալար արտադրյալով իրական գծային տարածությունը չունի զրոյական նորմով ոչզրոյական վեկտոր այն և միայն այն դեպքում, երբ սկալար արտադրյալը որոշող քառակուսային ձևի նշանացույցը հավասար է (n, 0) կամ (0, n):

Հաջորդ չորս՝ Դ6 – Դ9 խնդիրներում դիտարկվում է $\mathbf{R}^n$ իրական կոորդինատական տարածությունը $(x, y) == x_1\ y_1 + \ldots + x_n\ y_n$ սկալար արտադրյալով:

Դ6. Ստուգե՛լ, որ վեկտորների հետևյալ զույգերն օրթոգոնալ են միմյանց, և լրացնել այդ զույգերն այնպիսի վեկտորներով, որ ստացվի օրթոգոնալ բազիս (այսինքն՝ այնպիսի բազիս, որի բոլոր վեկտորները զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են միմյանց)՝

(a) (1, -2, 2, -3) և (2, -3. 2. 4); (b) (1, 1, 1, 3) և (1, 2, 3, -3):

Դ7. Ստուգե՛լ, որ հետևյալ վեկտորների համակարգերը օրթոնորմավորված են (այսինքն՝ նրանց վեկտորների նորմը 1 է և կամայական երկու վեկտորներ օրթոգոնալ են միմյանց) և լրացնել այդ համակարգերը մինչև օրթոնորմավորված բազիս.

(a) (2/3, 1/3, 2/3) և (1/3. 2/3, -2/3); (b) (1/2, ½, ½, 1/2), և (1/2, ½, -1/2, -1/2):

Դ8. Կիրառելով Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման ալգորիթմը՝ կառուցել հետևյալ վեկտորների գծային թաղանթի օրթոգոնալ բազիսը.

(a) (1, 1, -1, -2), (5, 8, -2, -3), (3, 9, 3, 8);

(b) (2, 1, 3, -1), (7, 4, 3, -3), (1, 1, -6, 0), (5, 7, 7, 8):

Դ9. Գտնել $\mathbf{R}^4$ իրական կոորդինատական տարածության a_1, a_2, a_3 վեկտորների գծային թաղանթի օրթոգոնալ լրացման բազիսը, եթե

$a_1 = (1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, 3)$, $a_3 = (0, 1. -2, 1)$:

Գլուխ Ե:
ԴՐԱԿԱՆՈՐԵՆ ՈՐՈՇՎԱԾ ԻՐԱԿԱՆ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՈՐՈՇ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

16. ԴՐԱԿԱՆՈՐԵՆ ՈՐՈՇՎԱԾ ԻՐԱԿԱՆ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐ ԵՎ ՍԻԼՎԵՍՏՐԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ

Սահմանում: Իրական $q(x)$ քառակուսային ձևը կոչվում է *դրական-որոշված* (կամ *դրական*) որոշված, եթե բավարարում է հետևյալ 3 (մեկը մյուսին) համարժեք պայմաններին.

(i) $q(x) \geq 0$, ընդ որում $q(x) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x = 0$;

(ii) որևիցե բազիսում $q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$;

(iii) $q(x)$-ը ունի $(n, 0)$ նշանացույց:

Ապացուցենք այս երեք պայմանների համարժեքությունը: Վերջին երկու պայմանների համարժեքությունն ակներև է: Ցույց տանք, որ համարժեք են առաջին երկու պայմանները:

Դիցուք տեղի ունի (i) պայմանը և դիտարկվող քառակուսային ձևը $e = (e_1, \ldots, e_n)$ բազիսում ստանում է

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2$$

նորմալ տեսք: Եթե $r < n$, ապա ցանկացած $x = e_i$ $(i > r)$ բազիսային (հետևապես, ոչզրոյական) վեկտորի համար $q(x) = 0$, ինչը հակասում է (i) պայմանին: Ուրեմն $r = n$: Եթե $s < r = n$, ապա կամայական $x = e_i$ $(i > s)$ բազիսային վեկտորի համար $q(x) < 0$: Ստացված հակասությունից եզրակացնում ենք, որ $s = r = n$:

Հակադարձաբար, եթե տեղի ունի (ii) պայմանը, որտեղ $x_1, \ldots x_n$ կոորդինատներն ընդունում են իրական արժեքներ, ապա ակնհայտորեն $q(x) \geq 0$ և $q(x) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1 = \ldots = x_n = 0$: □

Այս բաժնում մեր նպատակը կլինի գտնել իրական քառակուսային ձևի համար դրականորեն որոշված լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայման:

Առաջադրություն 16.1: *Յանկացած* e *բազիսում* q *դրականորեն որոշված իրական քառակուսային ձևի* (a_{ij}) *մատրիցի անկյունագծային տարրերը դրական են:*

Ապացույց: Իրոք, դրականորեն որոշված q(x) քառակուսային ձևի համար ունենք

$$a_{ii} = a(e_i, e_i) = q(e_i) > 0: \square$$

Առաջադրություն 16.2: *Դրականորեն որոշված իրական քառակուսային ձևի որոշիչը դրական է:*

Ապացույց: Նորմալ բազիսում դրականորեն որոշված քառակուսային ձևն ունի միավոր մատրից և ուրեմն դրական որոշիչ: Քանի որ քառակուսային ձևի որոշիչը երկու կշռի հարաբերական ինվարիանտ է, ուրեմն ցանկացած այլ բազիսի անցնելիս, նրա՝ նորմալ բազիսում ստացված որոշիչը կբազմապատկվի անցման մատրիցի երկրորդ աստիճանով, որը դրական իրական թիվ է, քանզի անցման մատրիցը չվերասերված մատրից է: □

Կառուցելով համապատասխան օրինակներ՝ կարելի է համոզվել, որ վերոհիշյալ երկու անհրաժեշտ պայմաններից ոչ մեկն առանձին վերցրած և անգամ երկուսը միասին բավարար չեն՝ իրական քառակուսային ձևի դրական որոշված լինելու համար (կառուցե՛ք այդպիսի օրինակներ): Ստորև կբերենք մի անհրաժեշտ և բավարար պայման:

Թեորեմ 16.3 (Սիլվեստրի հայտանիշ)**:** *Իրական քառակուսային ձևը դրական է որոշված այն և միայն այն դեպքում, երբ որևիցե (ուրեմն և կամայական) բազիսում նրա մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորները դրական են:*

Անհրաժեշտության ապացույցը: Ենթադրենք, որ q-ն դրականորեն որոշված իրական քառակուսային ձև է **L** տարածության վրա և e = (e_1, …, e_n)-ն այդ տարածության որևէ բազիսն է**:** Դիտարկենք այդ բազիսում q ձևի (a_{ij}) մատրիցը: Դիցուք m բնական թիվը ≤ n և $\mathbf{L}_m$-ը առաջին m բազիսային վեկտորների գծային թաղանթն է: Ակնհայտ է, որ q դրականորեն որոշված իրական քառակուսային ձևի սահմանափակումը ցանկացած ենթատարածության, այդ թվում L_m-ի վրա, կլինի դրականորեն

որոշված իրական քառակուսային ձև: Քանի որ $e_1, \ldots, e_m$ վեկտորները գծորեն անկախ են, նրանք կհանդիսանան L_m ենթատարածության բազիսը, իսկ (a_{ij}) մատրիցի Δ_m m-րդ գլխավոր մինորը կլինի դիտարկվող սահմանափակման մատրիցի որոշիչը այդ բազիսում: Ուրեմն համաձայն Առաջադրություն 16.2-ի՝ $\Delta_m > 0$:

Բավարարության ապացույցը: Դիցուք q իրական քառակուսային ձևի համար գոյություն ունի բազիս, որում նրա բոլոր Δ_i գլխավոր մինորները դրական են: Այդ դեպքում, համաձայն Յակոբիի թեորեմի գոյություն կունենա բազիս, որում

$$q(x) = (1 / \Delta_1)\, x_1^2 + (\Delta_1 / \Delta_2)\, x_2^2 + \ldots + (\Delta_{n-1} / \Delta_n)\, x_1^2:$$

Այստեղ բոլոր գործակիցները դրական են, ուրեմն q(x) քառակուսային ձևը դրականորեն է որոշված: □

17. ԳՐԱՄԻ ԵՎ ԿՈՇԻ-ԲՈՒՆՅԱԿՈՎՍԿՈՒ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Դիցուք ունենք L իրական գծային տարածությունը և նրա վրա դրականորեն որոշված q(x) քառակուսային ձևը: Դիցուք a(x,y)-ն այդ քառակուսային ձևի բևեռային ձևն է: Դիտարկենք L տարածության կամայական $e_1, \ldots, e_m$ վեկտորների համակարգ և այդ վեկտորների համար կազմված

$$(a(e_i, e_j))\ (i, j = 1, \ldots, m)$$

մատրիցի որոշիչը, որը կնշանակենք $G(e_1, \ldots, e_m)$: Այն կոչվում է $e_1, \ldots, e_m$ վեկտորների համակարգի Գրամի որոշիչ:

Թեորեմ 17.1: (Գրամի անհավասարություն): $G(e_1, \ldots, e_m) \geq 0$, *ընդ որում հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ* $e_1, \ldots, e_m$ *համակարգը գծորեն կախյալ է*:

Ապացույց: Դիտարկենք $e_1, \ldots, e_m$ վեկտորներով ծմված **L**′ գծային թաղանթը: Եթե $e_1, \ldots, e_m$ համակարգը գծորեն անկախ է, ապա այն կհանդիսանա L′ ենթատարածության բազիսը, իսկ $G(e_1, \ldots, e_m)$-ը կլինի

$q(x)$ դրականորեն որոշված քառակուսային ձևի որոշիչն այդ բազիսում: Համաձայն Առաջադրություն 16.2-ի՝ այն կլինի դրական:

Այժմ ենթադրենք, որ $e_1, ..., e_m$ համակարգը գծորեն կախյալ է: Այդ դեպքում նրա որևիցե վեկտորը կհանդիսանա մնացած վեկտորների գծային զուգակցությունը: Որոշակիության համար՝ դիցուք դա առաջին վեկտորն է՝

$$e_1 = \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_m e_m :$$

Այդ դեպքում՝

$$a(e_i, e_1) = \alpha_2 a(e_i, e_2) + ... + \alpha_m a(e_i, e_m) \ (i = 1, ..., m):$$

Տեղադրենք այդ արժեքները $(a(e_i, e_j))$ մատրիցի առաջին սյան համապատասխան տարրերի փոխարեն: Օգտագործելով որոշիչների գումարականության հատկությունը (այս դեպքում՝ ըստ առաջին սյան), կվերլուծենք ստացված մատրիցի որոշիչը $m - 1$ որոշիչների գումարի, ընդ որում այդ որոշիչներից յուրաքանչյուրը կունենա երկու համեմատելի սյուներ: Հետևապես, բոլոր գումարելի որոշիչները (և ուրեմն՝ նրանց գումարը) կլինեն հավասար զրոյի: Թեորեմն ապացուցված է: □

Հատուկ կանգ առնենք այն դեպքի վրա, երբ $m = 2$: Վերանշանակենք $e_1 = x$, $e_2 = y$: Կստանանք՝

$$G(x, y) = a(x, x)\, a(y, y) - a(x, y)^2 \geq 0,$$

ընդ որում $a(x, x)\, a(y, y) - a(x, y)^2 = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ x և y վեկտորները գծորեն կախյալ են: Երկու վեկտորներից կազմված համակարգը գծորեն կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ վեկտորները համագիծ են (այսինքն մեկը ստացվում է մյուսից սկալարով բազմապատկման միջոցով):

Հետևություն 17.2: (Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարություն:) *Եթե* $a(x, y)$-*ը դրականորեն որոշված* $q(x)$ *քառակուսային ձևի բևեռային ձևն է, ապա*

$$(17.1)\ a(x, y)^2 \leq a(x, x)\, a(y, y),$$

ընդ որում հավասարությունը պետի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ x *և* y *վեկտորները համագիծ են:* □

Նկատենք, որ որպես քառակուսային ձևի բևեռային ձև կարող է հանդես գալ կամայական համաչափ երկգծային ձև: Ուրեմն (17.1) առընչությունը ճիշտ է ցանկացած դրական որոշված a(x, y) համաչափ երկգծային ձևի դեպքում:

Դպրոցից, թերևս, հայտնի է այս անհավասարության այն տարբերակը, որը ստացվում է, երբ q քառակուսային ձևի համար դիտարկվում է e նորմալ բազիս: Այդ դեպքում՝

$$a(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n,$$

որտեղ $n = \dim L$, $(x_1 , ..., x_n) = x_e$, $(y_1 , ...,yx_n) = y_e$ և ստանում ենք այսպիսի հետևություն:

Հետևություն 17.3: (Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարության տարրական տեսքը): *Իրական թվերի ցանկացած* $x_1, ... x_n$ *և* $y_1, ... y_n$ *համակարգերի համար՝*

$$(x_1 y_1 + ... + x_n y_n,)^2 \leq (x_1^2 + ... + x_n^2) (y_1^2 + ... + y_n^2),$$

ընդ որում հավասարությունը պետի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ n-յակները համեմատական են: □

18. ԷՎԿԼԻԴՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԿԱՉՄԱԾ ԱՆԿՅՈՒՆ

Էվկլիդյան տարածություն է կոչվում սկալար արտադրյալով իրական գծային տարածությունը, որի սկալար արտադրյալը տրվում է դրականորեն որոշված q քառակուսային ձևի միջոցով: Նորմալ (կամ, այլ կերպ ասած՝ *օրթոնորմալորված*) e բազիսում այդպիսի քառակուսային ձևը ընդունում է

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

նորմալ տեսք, որտեղ n-ը **L** գծային տարածության չափողականությունն է: Այդ դեպքում սկալար արտադրյալը, որը տրվում է այս քառակուսային ձևի բևեռային ձևով, ընդունում է այսպիսի տեսք՝

$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n:$$

Այստեղ $x_e = (x_1, \ldots, x_n)$ և $y_e = (y_1, \ldots, y_n)$ համապատասխան վեկտորների կոորդինատներն են e նորմալ բազիսում:

Էվկլիդյան տարածությունների այսպիսի անվանումը բացատրվում է պատմական հանգամանքներով: Հին հույն մաթեմատիկոս Էվկլիդեսը, ում ստեղծագործական կյանքը ընթացել է հիմնականում Եգիպտական Ալեքսանդրիա քաղաքում, ապրել է մ.թ.ա. 3-րդ դարում՝ շատ ավելի շուտ, քան ի հայտ են եկել վերոհիշյալ գծային տարածությունները (XIX – XX դդ.): Էվկլիդեսի մեզ հասած հիմնական գրական աղբյուրը կոչվել է «Սկզբունքներ» և ըստ էության հանդիսացել է իր ժամանակի մաթեմատիկական գիտելիքների հանրագիտարան: Մասնավորապես, այն պարունակել է հին հունական մաթեմատիկայի գլուխգործոցներից մեկը հանդիսացող *Երկրաչափությունը* (ինչպես *հարթաչափությունը*, այնպես էլ *տարածաչափությունը*): Այդ նյութը շարադրված է այնպիսի բարձր մակարդակով, որ քիչ փոփոխությամբ այսօր էլ օգտագործվում է դպրոցական դասագրքերում: Այս գլխում ուսումնասիրվող տարածություններում հնարավոր է լինում զարգացնել ընդհանուր՝ n-չափանի տարածություն դեպքում գրեթե լրիվ այն տեսությունը, որն առկա է Էվկլիդեսի «Հիմունքներում» հարթության (n = 2) և տարածության (ավելի ճիշտ, եռաչափ տարածության, n = 3) համար: Նման ընդհանրացման են ենթարկվում, օրինակ, երկարության, անկյան մեծության գաղափարները: Այդ իսկ պատճառով նորաստեղծ տարածությունները ստացել են Էվկլիդյան անվանումը:

Էվկլիդյան տարածությունում՝ (13.1) բանաձևով սահմանվող վեկտորի նորմը որոշված կլինի կամայական վեկտորի համար և իրենից կներկայացնի ոչբացասական իրական թիվ, ընդ որում այն հավասար կլինի 0-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ վեկտորը զրոյական է: Իրոք, ոչբացասական իրական թվից միշտ գոյություն ունի մի ոչբացասական

իրական արմատ, որն էլ այս դեպքում վերցվում է որպես քառակուսի արմատի (այսինքն նորմայի) արժեք:

Համարում են, որ գծային տարածության ոչզրոյական վեկտորների կամայական x, y զույգ կազմում է (որոշում է) մի անկյուն: Էվկլիդյան տարածությունում հնարավոր է լինում որոշել այդ անկյունների չափը (մեծությունը) մոտավորապես այնպես, ինչպես դա արվում է դպրոցական երկրաչափությունում:

Համաձայն Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարության էվկլիդյան տարածության՝ ցանկացած երկու՝ x և y վեկտորների համար տեղի ունի $(x, y)^2 \leq (x, x)\,(y, y)$ առնչությունը, ընդ որում ձախ և աջ մասերը հավասար են այն և միայն այն դեպքում, երբ x և y վեկտորները համեմատական են (այսինքն համագիծ են): Նկատենք, որ

$$(x, x) = ||x||^2,\ (y, y) = ||y||^2,$$

ընդ որում ոչզրոյական x և y վեկտորների նորմաները հավասար չեն զրոյի: Ուրեմն՝ ոչզրոյական x և y վեկտորների դեպքում վերջին անհավասարությունը համարժեքորեն կարելի է արտագրել

$$((x, y) / ||x|| \cdot ||y||)^2 \leq 1,$$

տեսքով, որտեղից էլ ստանում ենք, որ

$$-1 \leq (x, y) / ||x||\ ||y|| \leq 1:$$

Օգտագործելով եռանկյունաչափական ֆունկցիաների (ավելի ստույգ՝ կոսինուսի) հատկությունները՝ այստեղից եզրակացնում ենք, որ գոյություն կունենա միակ $\varphi \in [0, \pi]$ իրական թիվ այնպիսի, որ

$$\cos \varphi = (x, y) / ||x|| \cdot ||y||:$$

Սահմանում ենք x և y ոչզրոյական վեկտորներով կազմված անկյան մեծությունը (այլ կերպ ասած՝ չափը) հավասար φ-ի:

Օգտագործելով այս սահմանումը՝ վեկտորների սկալար արտադրյալի համար ստանում ենք վերլուծական երկրաչափությունից քաջ հայտնի բանաձևը՝

$$(x, y) = ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos \varphi,$$

որը ճիշտ է կամայական (այդ թվում՝ զրոյական) վեկտորների համար: Ընդգծենք սակայն, որ իրականում այս բանաձևն օգտագործել ենք անկյան չափը սահմանելու համար:

19. ՆՈՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Էվկլիդյան տարածության վեկտորի նորմը բավարարում է հետևյալ երեք հիմնարար հատկություններին.

Ն1. $||x|| \geq 0$, ընդ որում $||x|| = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x = 0$;

Ն2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ կամայական λ սկալարի դեպքում;

Ն3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$:

Առաջին հատկությունն անմիջապես բխում է (13.1) բանաձևից, եթե հաշվի առնենք, որ էվկլիդյան տարածությունում սկալար արտադրյալը տրվում է դրականորեն որոշված քառակուսային ձևի միջոցով: Երկրորդ հատկությունն ապացուցվում է՝ հիմնվելով նորմայի սահմանման և բևեռային ձևի համասեռության վրա՝

$$||\alpha x|| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = \sqrt{\alpha^2 \cdot \sqrt{(x, x)}} = |\alpha| \cdot ||x||:$$

Երրորդ հատկությունը կոչվում է եռանկյան անհավասարություն հետևյալ պատճառով: Պատկերացնենք, որ x և y երկրաչափական վեկտորները տեղադրված են այնպես, որ x-ի վերջնակետը համընկնում է y-ի սկզբնակետին: Այդ դեպքում x, y և x+y վեկտորները կկազմեն եռանկյուն: Վեկտորների նորմաները հավասար են եռանկյան համապատասխան կողմերի երկարություններին: Դիտարկվող անհավասարությունը արտահայտում է այն հայտնի փաստը, որ եռանկյան ցանկացած կողմի երկարությունը չի գերազանցում մյուս երկու կողմերի երկարությունների գումարին: Որպեսզի ապացուցենք եռանկյան անհավասարությունը, կստուգենք, որ այն համարժեք է Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությանը:

Բարձրացնելով երկրորդ աստիճան եռանկյան անհավասարության երկու մասերը, կստանանք նրան համարժեք անհավասարություն, քանի որ եռանկյան անհավասարության երկու կողմերը ոչբացասական են՝

$$||x + y||^2 \le ||x||^2 + 2\,||x|| \cdot ||y|| + ||y|^2:$$

Ձախ մասը կարող ենք ձևափոխել հետևյալ տեսքի՝

$$||x + y||^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2\,(x, y) + (y, y):$$

Տեղադրելով այս արժեքը վերևի անհավասարության մեջ, կրճատումներից հետո կստանանք Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունը՝

$$(x, y) \le ||x||\;||y||:$$

Այսպիսով, եռանկյան անհավասարությունը ապացուցված է:

Սահմանում: Դիցուք L-ը իրական գծային տարածություն է,

$$N: L \to \mathbf{R}$$

այնպիսի արտապատկերում է, որ բավարարվում են Ն1 – Ն3 հատկությունները: Այդ դեպքում N արտապատկերումը կոչվում է *նորմային,* իսկ (L, N) զույգը՝ *նորմավորված գծային տարածություն*:

Այսպիսով, մենք ապացուցել ենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 19.1: *Յանկացած էվկլիդյան տարածություն հանդիսանում է նորմավորված տարածություն է՝* $N(x) = ||x||$ *նորմային արտապատկերմամբ:* □

Խնդիրներ և վարժություններ

Ե1. Ապացուցել, որ քառակուսային ձևը դրականորեն է որոշված այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա մատրիցը հանդիսանում է որևիցե իրական չվերասերված մատրիցի և դրա շրջված մատրիցի արտադրյալը:

Ե2. Ապացուցել, որ A իրական սիմետրիկ մատրիցը ներկայացվում է C քառակուսի իրական մատրիցի և նրա շրջվածի արտադրյալի տեսքով այն և միայն այն դեպքում, երբ A մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորները ոչբացասական են: Եթե rk A = r, ապա և rk C = r: Այդ դեպքում որպես C մատրից կարելի է վերցնել այնպիսի մատրից, որի առաջին r տողերը գծորեն անկախ են, իսկ մնացած տողերը զրոյական են:

Ե3. Գտնել λ պարամետրի բոլոր արժեքները, որոնց դեպքում տրված քառակուսային ձևերը դրականորեն են որոշված.

(a) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_{23} - 2x_2x_3$,

(b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_{23}$,

(c) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_{23} + 4x_2x_3$,

(d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_{23} + 6x_2x_3$:

Ե4. Դիցուք C[a, b]-ն իրական թվերի առանցքի [a, b] հատվածի վրա որոշված իրական արժեքներով անընդհատ ֆունկցիաների գծային տարածությունն է ֆունկցիաների կետ առ կետ գումարման և իրական թվերով բազմապատկման գործողությունների նկատմամբ: Այդ դեպքում՝

(a) $(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ սահմանում է սկալար արտադրյալ C[a, b]-ի վրա;

(b) $(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx)^2 \le \int_a^b f(x)^2\, dx \cdot \int_a^b g(x)^2\, dx$, ընդ որում հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ f(x) և g(x) ֆունկցիաները համեմատական են:

Ե5. Դիցուք $\mathbf{R}_n[x]$-ը բոլոր ≤ n աստիճան ունեցող բազմանդամների իրական գծային տարածությունն է: Ցանկացած $f, g \in \mathbf{R}_n[x]$ բազմանդամների համար սահմանենք սկալար արտադրյալ

$$(f, g) = \int f(x)\, g(x)\, dx$$

բանաձևով (որտեղ ի նկատի ունենք որոշյալ ինտեգրալ (-1)-ից մինչև +1 սահմաններում, որի սահմանները դրված չեն զուտ տեխնիկական պատճառներով): Ապացուցել, որ (f, f)-ը դրականորեն որոշված քառակուսային ձև է, որոշված $\mathbf{R}_n[x]$-ի վրա, որի հետ միասին $\mathbf{R}_n[x]$-ը վերածվում է էվկլիդյան տարածության:

(a) $P_0(x) = 1$, $P_k(x) = (2^k\, k!)^{-1} (d^k/_{dx}{}^k)(x^2 - 1)^k$ ($k = 1, \ldots, n$) Լեժանդրի (անունը կրող) բազմանդամները կազմում են $\mathbf{R}_n[x]$-ի օրթոգոնալ բազիսը:

Ե6. Հաշվել A(2, 4, 2, 4, 2), B(6, 4, 4, 4, 6), C(5. 7, 5, 7, 2) գագաթներով եռանկյան կողմերի երկարությունները և ներքին անկյունների մեծությունները:

Ե7. Դիցուք էվկլիդյան տարածության x և y վեկտորների կազմած անկյունը հավասար է φ և $x = \alpha y$: Ապացուցե՛լ, որ

(a) $\alpha > 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\varphi = 0$;

(b) $\alpha < 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\varphi = \pi$:

Ե8. Դիցուք L′-ը՝ էվկլիդյան L տարածության ենթատարածությունն է, x՝ L′-ին ոչօրթոգոնալ կամայական վեկտոր է: Ապացուցե՛լ, որ գոյություն ունի միակ $y \in L'$ վեկտոր այնպիսի, որ $x - y$ վեկտորը օրթոգոնալ է L′ ենթատարածությանը: Այդպիսի y վեկտորը կոչվում է x վեկտորի պրոյեկցիա L′ ենթատարածության վրա (և նշանակվում է $pr_{L'}\, x$), իսկ x և y վեկտորներով կազմած φ անկյունը կոչվում է x վեկտորի և L′ ենթատարածության կազմած անկյուն (կամ, ավելի ճիշտ, այդ անկյան մեծություն):

Ե9. Դիցուք $y = pr_{L'}\, x$: Ապացուցել, որ $\cos(x, y) \geq \cos(x, z)$ ցանկացած $z \in L'$ վեկտորի համար, ընդ որում $\cos(x, y) = \cos(x, z)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ z վեկտորը համուղիղ է x վեկտորին (այսինքն՝ $z = \alpha x$, որևէ $\alpha > 0$ սկալարի դեպքում):

Ե10. Հաշվե՛լ x վեկտորի և $a_1, \ldots, a_k$ վեկտորների գծային թաղանթի կազմած անկյան մեծությունը, եթե

(a) $x = (2, 2, 1, 1)$, $a_1 = (3, 4, -4, -1)$, $a_2 = (0, 1, -1. 2)$;

(b) $x = (1, 0, 3, 0)$, $a_1 = (5, 3, 4, -3)$, $a_2 = (1, 1, 4, 5)$, $a_3 = (2, -1, 1, 3)$:

Ե11. Ապացուցե՛ք, որ $G(a_1, \ldots, a_k)$ Գրամի որոշիչը չի փոխվում $a_1, \ldots, a_k$ վեկտորների օրթոգոնալացման գործընթացի դեպքում:

Ե12. Ապացուցե՛լ, որ $G(a_1, \ldots, a_k) \leq \|a_1\|^2 \cdot \ldots \cdot \|a_k\|^2$, ընդ որում հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_1, \ldots, a_k$ զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են կամ նրանցից մեկը հավասար է զրոյի:

Ե13. Դիցուք L_1-ը L էվկլիդյան տարածության ենթատարածությունն է, L_1'-ը նրա օրթոգոնալ լրացումն է: Ապացուցել, որ L-ը հանդիսանում է L_1-ի և L_1'-ի ուղիղ գումարը:

Ե14. Ապացուցե՛լ, որ L էվկլիդյան տարածությունների դեպքում ենթատարածությանների օրթոգոնալ լրացումների համար կատարվում են հետևյալ հատկությունները.

(a) $(L_1')' = L_1$ ցանկացած L_1 ենթատարածության դեպքում;

(b) $(L_1 + L_2)' = L_1' \cap L_2'$ և $(L_1 \cap L_2)' = L_1' + L_2'$ կամայական L_1 և L_2 ենթատարածությունների դեպքում;

(c) $L' = O$, $O' = L$, որտեղ O-ն **L** գծային տարածության զրոյական ենթատարածությունն է:

Ե15. Դիցուք L-ը էվկլիդյան տարածություն է, $e \in L$ ոչզրոյական վեկտոր է: Ապացուցե՛լ, որ

(a) ցանկացած $x \in L$ վեկտորի համար գոյություն ունեն միակ $\alpha \in k$ սկալար և $z \in L$ վեկտոր այնպիսիք, որ $x = \alpha e + z$ և $(e, z) = 0$: Այդ դեպքում αe վեկտորը կոչվում է x վեկտորի *օրթոգոնալ պրոյեկցիա* e ուղղությամբ և նշանակվում է $pr_e x$;

(b) $pr_e (x + y) = pr_e x + pr_e y$;

(c) $pr_e \alpha x = \alpha\, pr_e x$:

Գլուխ 2:
ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ ԵՎ ՈՐՈՇ ԴԱՍԱԿԱՆ ԽՄԲԵՐ

20. ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ

Օրթոգոնալ մատրիցներն առաջանում են, երբ ուզում ենք Էվկլիդյան տարածության մի օրթոնորմավորված, ասենք՝ e բազիսից անցնել մեկ ուրիշ, ասենք՝ e′ օրթոնորմավորված բազիսի: Ինչպես միշտ, նշանակենք անցման մատրիցը P-ով: Դիցուք՝ a-ն էվկլիդյան տարածության սկալար արտադրյալը որոշող քառակուսային ձևի բևեռային ձևն է: Հայտնի է, որ

$$a_{e'} = P \cdot a_e \cdot {}^tP:$$

Քանի որ e և e′բազիսները օրթոնորմավորված են, ուրեմն $a_{e'} = a_e = E$ միավոր մատրիցի: Հետևապես, վերը բերված բանաձևը վերածվում է $E = P \cdot {}^tP$ առնչության: Ակնհայտ է, որ այդ առնչությունը համարժեք է երկու՝ $P^{-1} = {}^tP$ և $E = {}^tP \cdot P$ առնչություններից յուրաքանչյուրին:

Սահմանում: Այդ երեք համարժեք պայմաններին բավարարող P մատրիցը կոչվում է *օրթոգոնալ* մատրից: Նկատենք, որ այս սահմանումը կիրառելի է կամայական k (այլ ոչ թե միայն **R** իրական թվերի) դաշտի դեպքում: Այսպիսով, ճիշտ է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 20.1: *Եթե էվկլիդյան տարածությունում անցումը* e *օրթոնորմավորված բազիսից* e′ *բազիսի կատարվում է* P *մատրիցի միջոցով, ապա* e′ *բազիսը կլինի օրթոնորմավորված բազիս այն և միայն այն դեպքում, երբ* P*-ն օրթոգոնալ մատրից է:* □

Նշե՛նք օրթոգոնալ մատրիցների մի քանի պարզ հատկություններ:

Առաջադրություն 20.2: *Օրթոգոնալ մատրիցները չվերասերված մատրիցներ են:*

Ապացույց: Համաձայն վերը տրված սահմանման՝ օրթոգոնալ մատրիցներն ունեն հակադարձ, իսկ մատրիցի հակադարձելիության անհրաժեշտ (և բավարար) պայմանը նրա չվերասերվածությունն է: □

Առաջադրություն 20.3: *Օրթոգոնալ մատրիցների արտադրյալն օրթոգոնալ մատրից է:*

Ապացույց: Իրոք, եթե $A^{-1} = {}^tA$, $B^{-1} = {}^tB$, ապա $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = {}^tB \cdot {}^tA = {}^t(A \cdot B)$: □

Առաջադրություն 20.4: *Օրթոգոնալ մատրիցի հակադարձը գոյություն ունի և օրթոգոնալ մատրից է:*

Ապացույց: Օրթոգոնալ մատրիցի հակադարձը գոյություն ունի հանձայն նրա սահմանման: Եթե A-ն օրթոգոնալ մատրից է, ապա $A^{-1} = {}^tA$, հետևաբար՝

$$(A^{-1})^{-1} = A = {}^t({}^tA) = {}^t(A^{-1}):$$

Առաջադրությունն ապացուցված է: □

21. ԽՄԲԵՐ

Սահմանում: *Խումբ է* կոչվում կամայական G բազմություն նրա վրա տրված երկտեղանի գործողության հետ միասին, եթե այդ գործողությունը բավարարում է զուգորդական, չեզոք տարրի գոյության և հակադարձ տարրի գոյության պայմաններին (օրենքներին, աքսիոմներին): Ըստ սահմանման՝ *երկտեղանի գործողությունը՝ որոշված G բազմության վրա*, կամայական արտապատկերում է G ×G դեկարտյան արտադրյալից G բազմություն: Այստեղ (a, b) ∈ G ×G զույգի պատկերը կնշանակենք a · b և կանվանենք a և b տարրերի արտադրյալ:

Զուգորդական (միջազգային եզրույթով՝ *ասոցիատիվության*) օրենքը կայանում է նրանում, որ պետք է տեղի ունենա

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

նույնությունը:

Չեզոք տարրի գոյության պայմանը հետևյալն է. G խմբում պետք է գոյություն ունենա այնպիսի e տարր, որը կոչվում է *չեզոք* կամ *միավոր* տարր, և որի համար տեղի ունեն

$$(21.1)\ e \cdot x = x = x \cdot e$$

նույնությունները: Կարելի է ապացուցել, որ (21.1) պայմանով չեզոք տարրը որոշվում է միարժեքորեն:

Հակադարձ տարրի գոյության օրենքով պահանջվում է, որ ցանկացած $x \in G$ տարրի համար գոյություն ունենա այնպիսի x^{-1} տարր, որը կոչվում է x-ին *հակադարձ* տարր և բավարարում է

$$(21.2)\ x \cdot x^{-1} = e = x^{-1} \cdot x$$

առնչություններին: Այս դեպքում ևս կարելի է ստուգել, որ (21.2) պայմանով ցանկացած տարրի հակադարձը որոշվում է միարժեքորեն:

G խմբի H ենթաբազմությունը կոչվում է ենթախումբ, եթե

ԵԽ1. H-ը ցանկացած երկու $x, y \in H$ տարրերի հետ մեկտեղ պարունակում է նրանց արտադրյալը՝ $x \cdot y \in H$ (այդ դեպքում ասում են, որ H ենթաբազմությունը *փակ է բազմապատկման գործողության նկատմամբ*);

ԵԽ2. H-ը կամայական $x \in H$ տարրի հետ մեկտեղ պարունակում է նրա հակադարձ տարրը՝ $x^{-1} \in H$ (այդ դեպքում ասում են, որ H ենթաբազմությունը *փակ է խմբի տարրերի հակադարձման գործողության նկատմամբ*);

ԵԽ3. H-ը պարունակում է G խմբի e չեզոք տարրը:

Նկատենք, որ ԵԽ3 հատկությունը կարելի է արտածել ԵԽ1 և ԵԽ2 հատկություններից:

Եթե H-ը G խմբի ենթախումբն է, ապա գրում են $H < G$ կամ $G > H$:

Առաջադրություն 21.1: *Խմբի ենթախումբը խմբի երկտեղանի գործողության հետ միասին հանդիսանում է խումբ:*

Ապացույց: Բավական է նկատել, որ H-ի համար Խ1-Խ3 պայմանները տեղի կունենան, քանի որ նրանք տեղի ունեն G-ի համար: □

Առաջադրություն 21.2: *Երկու ենթախմբերի հատումը ենթախումբ է:*

(Այստեղ ենթախմբերի հատում ասելով հասկանում ենք նրանց հիմքում ընկած ենթաբազմությունների հատումը:)

Ապացույց: Դիցուք $H < G$, $H' < G$:

1. Ենթադրենք $x, y \in H \cap H'$: Այդ դեպքում $x, y \in H$ և $x, y \in H'$: Քանի որ H, H′ ենթախմբեր են, ուրեմն $x \cdot y \in H$ և $x \cdot y \in H'$: Հետևապես՝ $x \cdot y \in H \cap H'$:

2. Եթե $x \in H \cap H'$, ապա $x \in H$ և $x \in H'$: Հետևապես՝ $x^{-1} \in H$ և $x^{-1} \in H'$ և ուրեմն նաև $x^{-1} \in H \cap H'$:

3. Քանի որ $e \in H$, $e \in H'$, ուրեմն $e \in H \cap H'$:

Առաջադրությունն ապացուցված է: □

Ստորև կբերվեն խմբերի օրինակներ, որոնք պատկանում են, այսպես կոչված, դասական խմբերի շարքին:

22. ՈՐՈՇ ԴԱՍԱԿԱՆ ԽՄԲԵՐ

Դիցուք **k**-ն կամայական դաշտ է, n-ը բնական թիվ է, $M_n(\mathbf{k})$-ն՝ **k** դաշտի նկատմամբ որոշված բոլոր n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցների բազմությունն է: Հիշեցնենք, որ քառակուսի մատրիցը կոչվում է *չվերասերված*, եթե նրա որոշիչը հավասար չէ զրոյի:

Առաջադրություն 22.1: **k** *դաշտի նկատմամբ որոշված բոլոր n-րդ կարգի քառակուսի չվերասերված մատրիցները բազմապատկման գործողության հետ միասին կազմում են խումբ:*

Սահմանում: Այդ խումբը կոչվում է **k** *դաշտի նկատմամբ որոշված* n-*րդ կարգի լրիվ գծային խումբ* և նշանակվում է $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$:

Ապացույց: Կամայական երկու՝ A և B նույն կարգի քառակուսի մատրիցների A·B արտադրյալի որոշիչը հավասար է այդ մատրիցների որոշիչների արտադրյալին՝

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B:$$

Ուրեմն, եթե $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$, ապա և $\det(A \cdot B) \neq 0$: Սա ակընհայտ է, երբ k-ն իրական կամ կոմպլեքս թվերի դաշտն է, ճիշտ է նաև կամայական դաշտի դեպքում: Ուրեմն մատրիցների բազմապատկումը գործողություն է $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ բազմության վրա:

1. Այդ գործողությունը զուգորդական է, քանի որ մատրիցների բազմապատկման զուգորդական օրենքը, ինչպես հայտնի է, տեղի ունի

բոլոր դեպքերում, եթե միայն որոշված են համապատասխան արտադրյալները:

2. Միավոր E մատրիցը (այսինքն՝ այն մատրիցը, որի գլխավոր անկյունագծի տարրերը մեկեր են, իսկ մնացած տարրերը՝ զրոներ) չվերասերված է և չեզոք է մատրիցների բազմապատկման գործողության նկատմամբ:

3. Ցանկացած չվերասերված A մատրից ունի հակադարձ A^{-1} մատրից, որը նույն կարգի չվերասերված մատրից է և (ըստ հակադարձ մատրիցի սահմանման) բավարարում է $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$ պայմանին:

Առաջադրությունն ապացուցված է: □

Առաջադրություն 22.2: k *դաշտի նկատմամբ որոշված բոլոր n-րդ կարգի քառակուսի այն մատրիցները, որոնց որոշիչը հավասար է 1-ի, մատրիցների բազմապատկման գործողության հետ միասին կազմում են խումբ:*

Սահմանում: Այդ խումբը կոչվում է **k** *դաշտի նկատմամբ որոշված* n-*րդ կարգի հատուկ գծային խումբ* և նշանակվում է $\mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$:

Ապացույց: Ակնհայտ է, որ $\mathbf{SL}_n(k)$-ի հիմքում ընկած բազմությունը $\mathbf{GL}_n(k)$ խմբի հիմքում ընկած բազմության ենթաբազմությունն է: Այդ ենթաբազմությունը փակ է բազմապատկման նկատմամբ, որովհետև եթե մատրիցների որոշիչը հավասար է 1-ի, ապա նրանց արտադրյալի որոշիչը նույնպես հավասար է 1-ի: Այդ ենթաբազմությունը պարունակում է E միավոր մատրիցը (որովհետև $\det E = 1$) և փակ է հակադարձման գործողության նկատմամբ (որովհետև՝ եթե $\det A = 1$, ապա և $\det A^{-1} = 1$): Հետևաբար, Առաջադրություն 22.2-ի պնդումը բխում է Առաջադրություն 21.1-ից: □

Առաջադրություն 22.3: k *դաշտի նկատմամբ որոշված բոլոր n-րդ կարգի օրթոգոնալ մատրիցները բազմապատկման գործողության հետ միասին կազմում են խումբ:*

Սահմանում: Այդ խումբը կոչվում է **k** *դաշտի նկատմամբ որոշված* n-*րդ կարգի օրթոգոնալ խումբ* և նշանակվում է $\mathbf{O}_n(\mathbf{k})$:

Ապացույց: Համաձայն Առաջադրություն 20.2-ի՝ օրթոգոնալ մատրիցների $\mathbf{O}_n(\mathbf{k})$ բազմությունը $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ խմբի հիմքում ընկած բազմության

ենթաբազմությունն է: Համաձայն Առաջադրություն 20.3-ի՝ այդ ենթաբազմությունը փակ է մատրիցների բազմապատկման գործողության նկատմամբ: Ակնհայտ է, որ E միավոր մատրիցն օրթոգոնալ է: Համաձայն Առաջադրություն 20.4-ի՝ $\mathbf{O}_n(\mathbf{k})$ ենթաբազմությունը փակ է տարրերի (մատրիցների) հակադարձման գործողության նկատմամբ: Ուրեմն՝ ըստ Առաջադրություն 21.1-ի՝ այն խումբ է: □

Առաջադրություն 22.4: k *դաշտի նկատմամբ որոշված բոլոր n-րդ կարգի օրթոգոնալ այն մատրիցները, որոնց որոշիչը հավասար է 1-ի, մատրիցների բազմապատկման գործողության հետ միասին կազմում են խումբ:*

Սահմանում: Այդ խումբը կոչվում է **k** *դաշտի նկատմամբ որոշված* n-*րդ կարգի հատուկ օրթոգոնալ խումբ* և նշանակվում է $\mathbf{SO}_n(\mathbf{k})$:

Ապացույց: Համաձայն սահմանման՝ $\mathbf{SO}_n(k) = \mathbf{O}_n(k) \cap \mathbf{SL}_n(k)$ (այստեղ նկատի ունենք հիմնային բազմությունները): Հետևաբար, համաձայն Առաջադրություններ 22.2-ի, 22.3-ի, 21.2-ի, 21.1-ի՝ այն խումբ է: □

Խնդիրներ և վարժություններ

Զ1. Դիցուք a_i-ն՝ A մատրիցի i-րդ տողն է, a^j-ն՝ նրա j-րդ սյունն է, իսկ δ_i^j-ն Կրոնեկերի սիմվոլն է: Ստուգե՛լ, որ A-ն օրթոգոնալ մատրից է այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_i \cdot {}^t a_j = \delta_i^j = {}^t a^i \cdot a^j$:

Զ2. Ապացուցե՛լ, որ **k** դաշտի նկատմամբ որոշված n-րդ կարգի A մատրիցն օրթոգոնալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա տողերը (երկակիորեն՝ նրա սյուները) հանդիսանում են $\mathbf{k}^n$ ստանդարտ օրթոնորմավորված բազիսով էվկլիդյան կոորդինատական տարածության բազիսը:

Զ3. Ապացուցե՛լ, որ կամայական երկրորդ կարգի իրական օրթոգոնալ մատրից կարելի է ներկայացնել

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

տեսքով:

Զ4. Դիտարկենք հարթության կամայական սեռած O կետը ու մի բազմություն, որի տարրերն են հանդիսանում O կենտրոնով բոլոր

պտույտները ցանկացած φ անկյունով ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ, եթե φ-ն բացասական է, և ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, եթե φ-ն դրական է: Որպես գործողություն՝ այդ բազմության համար վերցնենք պտույտների համադրությունը (այսինքն՝ իրար հետևից կատարելը): Ապացուցե՛լ, որ ստանում ենք խումբ: Այդ խումբը կոչվում է *O կենտրոնով պտույտների խումբ*: Նկատենք, որ կարելի է բավարարվել միայն այնպիսի φ անկյունով պտույտներով, որոնց համար φ-ն ոչբացասական է և փոքր է 2π–ից: Այդ դեպքում φ և ψ անկյուններով պտույտների համադրությունը համընկնում է φ + ψ mod. 2π-ին):

Զ5. Ապացուցե՛լ, որ $\mathbf{O_2(R)}$ խումբը կարելի է նույնացնել սեռած O կենտրոնով հարթության պտույտների խմբին:

Զ6. Ապացուցե՛լ, որ դրականորեն որոշված քառակուսային ձևի մատրիցը ինչ-որ բազիսում օրթոգոնալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ ձևն այդ բազիսում ներկայացվում է քառակուսիների գումարի տեսքով: Ինչպե՞ս այս դրույթը ձևակերպել մատրիցների լեզվով:

Զ7. Ապացուցե՛լ, որ չվերասերված քառակուսային ձևը կարելի է բերել նորմալ տեսքի օրթոգոնալ մատրիցով տրվող ձևափոխությունների միջոցով, եթե նրա մատրիցը օրթոգոնալ է:

Զ8. Ապացուցե՛լ, որ ցանկացած A իրական սիմետրիկ մատրից կարելի է ներկայացնել

$$A = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$$

տեսքով, որտեղ Q-ն օրթոգոնալ մատրից է, իսկ B-ն իրական անկյունագծային մատրից է:

Զ9. Հետևյալ A մատրիցների համար գտնե՛լ օրթոգոնալ Q մատրիցը և անկյունագծային B մատրիցն այնպես, որ $A = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$, եթե

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Զ10. Նկատենք, որ 22-րդ բաժնում նկարագրված չորս դասական խմբերը գոյություն ունեն կամայական **k** դաշտի դեպքում (մասնավորապես՝ իրական **R** և կոմպլեքս **C** թվերի դաշտերի դեպքերում): Միայն **k** = **C** կոմպլեքս թվերի դաշտի դեպքում սահմանվում են ևս երկու դասական խմբեր:

Կոմպլեքս $A = (a_{ij})$ մատրիցի համալուծ մատրից է կոչվում այնպիսի $A' = (a'_{ij})$ մատրիցը, որի յուրաքանչյուր a'_{ij} տարրը հավասար է a_{ij} տարրի կոմպլեքս համալուծին: Կոմպլեքս $A = (a_{ij})$ քառակուսի մատրիցը կոչվում է *ունիտար*, եթե համընկնում է իրեն համալուծ մատրիցի շրջվածի հետ: Ապացուցե՛լ հետևյալ փաստերը.

(a) Երկու ունիտար մատրիցների արտադրյալն ունիտար մատրից է:

(b) Ունիտար մատրիցի հակադարձը գոյություն ունի և ունիտար մատրից է:

(c) Բոլոր n-րդ կարգի ունիտար մատրիցները բազմապատկման գործողության հետ միասին կազմում են խումբ: Այդ խումբը կոչվում է *n-րդ կարգի ունիտար խումբ* և նշանակվում է U_n:

(d) Բոլոր այն n-րդ կարգի ունիտար մատրիցները, որոնց որոշիչը հավասար է 1-ի, բազմապատկման գործողության հետ միասին կազմում են խումբ: Այդ խումբը կոչվում է *n-րդ կարգի հատուկ ունիտար խումբ* և նշանակվում է SU_n:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Գելֆանդ Ի. Մ., Դասախոսություններ գծային հանրահաշվից, Երևան, Լույս, 1976:
2. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, Москва, Наука, 1970.
3. Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, Москва, Наука, 1986.
4. Проскуряков И. В., Сборник задач по линейной алгебре, Москва, Наука, 1967.
5. Դալալյան Ս. Հ., Գծային տարածություններ և գծային արտապատկերումներ, Երևան, ԵՀՀ, 2011:
6. Դալալյան Ս. Հ., Գծային ձևափոխություններ, Երևան, ԵՀՀ, 2006:

Բովանդակություն

Առաջաբան 3
Ներածություն 5
Գլուխ Ա: Գծային ձևեր և համալուծ տարածություն
1. Արտապատկերումներ՝ բազմությունից գծային տարածություն 8
2. Գծային ձևեր և համալուծ տարածություն..... 9
3. Երկակի բազիս 11
4. Համալուծության առինքնության հատկությունը..... 13
Խնդիրներ և վարժություններ 15
Գլուխ Բ: Երկգծային ձևեր
5. Երկգծային ձև և երկգծային ձևերի տարածություն..... 17
6. Երկգծային ձևի մատրից 18
7. Երկգծային ձևի մատրիցի փոփոխությունը նոր բազիսի անցնելիս
ու բացարձակ և հարաբերական ինվարիանտներ..... 20
8. Երկգծային ձևի շրջում (տրանսպոնացում)..... 22
9. Չվերասերված երկգծային ձևեր..... 23
Խնդիրներ և վարժություններ 25
Գլուխ Գ: Քառակուսային ձևեր
10. Քառակուսային ձև ու նրա բևեռային ձևը..... 26
11. Քառակուսային ձևի բերումը կանոնական տեսքի Լագրանժի
մեթոդով 28
12. Իրական և կոմպլեքս քառակուսային ձևերի նորմալ տեսքը 32
Խնդիրներ և վարժություններ 34
**Գլուխ Դ: Սկալար արտադրյալով գծային տարածություններ
և օրթոգոնալացման գործընթաց**
13. Սկալար արտադրյալով գծային տարածություններ 37
14. Վեկտորների օրթոգոնալություն 39
15. Վեկտորների համակարգի օրթոգոնալացման գործընթաց
(ալգորիթմ) և քառակուսային ձևի կանոնական տեսքի կառուցումը
Յակոբիի մեթոդով 41
Խնդիրներ և վարժություններ 44

Գլուխ Ե: Դրականորեն որոշված իրական քառակուսային ձևեր և նրանց որոշ կիրառություններ
16. Դրականորեն որոշված իրական քառակուսային ձևեր և Սիլվեստրի հայտանիշը 46
17. Գրամի և Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարություններ..... 48
18. Էվկլիդյան տարածություններ և վեկտորների կազմած անկյուն 50
19. Նորմավորված տարածություններ..... 53
Խնդիրներ և վարժություններ..... 54
Գլուխ Զ: Օրթոգոնալ մատրիցներ և որոշ դասական խմբեր
20. Օրթոգոնալ մատրիցներ 58
21. Խմբեր..... 59
22. Որոշ դասական խմբեր..... 61
Խնդիրներ և վարժություններ..... 63
Գրականության ցանկ 66

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ս. Հ. ԴԱԼԱԼՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ, ԵՐԿԳԾԱՅԻՆ, ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՈՐՈՇ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

(ՏԵՍԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹ, ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ)

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Գ. Գրիգորյանի

Տպագրված է «Գևորգ-Հրայր» ՍՊԸ-ում:
ք. Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6

Չափսը՝ 60x84 $^{1}/_{16}$: Տպ. մամուլը՝ 4,375:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1

ՏՊԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2016