[ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ]

ՌԱՖԻԿ ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Օպտիմիզացիայի մեթոդներ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ռ. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՕՊՏԻՄԻԶԱՑԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2014

ՀՏԴ 519.8(07)
ԳՄԴ 22.18 ց7
Խ 282

Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի
ֆակուլտետի գիտական խորհուրդը

Գրախոս՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Գ. Հակոբյան
Խմբագիր՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Ս. Սահակյան

Խաչատրյան Ռ. Ա.
Խ 282 Օպտիմիզացիայի մեթոդներ: Ուսումնական ձեռնարկ/
Ռ. Խաչատրյան. -Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2014, 134 էջ:

Ձեռնարկը նախատեսված է ԵՊՀ ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ուսանողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև բնագիտական ֆակուլտետների ուսանողներին:

ՀՏԴ 519.8(07)
ԳՄԴ 22.18 ց7

ISBN 978-5-8084-1921-6

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ն Ա Խ Ա Բ Ա Ն

Այս ուսումնական ձեռնարկը գրված է Երևանի պետական համալսարանի ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետում հեղինակի կարդացած դասախոսությունների հիման վրա: Ձեռնարկի նպատակն է տալ օպտիմիզացիայի որոշ հիմնարար մեթոդների բավարար չափով համակարգված և ժամանակակից շարադրանք:

Ձեռնարկը բաղկացած է հինգ գլուխներից:

Առաջին գլխում համառոտակի շարադրվում են էքստրեմումի առաջին և երկրորդ կարգի անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները ոչ պայմանական օպտիմիզացիայի խնդիրների համար վերջավոր չափանի տարածություններում:

Երկրորդ գլուխը նվիրված է պայմանական և ոչ պայմանական օպտիմիզացիայի մոտավոր մեթոդներին: Նկարագրվում են գրադիենտային մեթոդները և նրանցում քայլի ընտրության առավել հաճախ օգտագործվող կիսման, ապրիորի և ամենաարագ վայրէջքի եղանակները:

Երրորդ գլխում ապացուցվում է Կուն- Տակկերի թեորեմը որպես մինիմումի անհրաժեշտ ու բավարար պայման ուռուցիկ ծրագրավորման խնդիրների համար: Այս գլխում տրվում են նաև որոշ հիմնարար թեորեմներ ուռուցիկ անալիզից, որոնք ունեն կիրառական լայն նշանակություն:

Չորրորդ գլխում շարադրվում է մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրների լուծման Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը, երբ սահմանափակումները տրված են հավասարություններով և անհավասարություններով:

Հինգերորդ գլխում դիտարկվում են վարիացիոն հաշվի պարզագույն և իզոպերիմետրիկ խնդիրները և արտածվում է Էյլերի հավասարումը որպես էքստրեմումի անհրաժեշտ պայման:

Յուրաքանչյուր դասախոսության վերջում բերվում են խնդիրներ և վարժություններ, որոնց լուծումները ու-սանողին կօգնեն ավելի լավ յուրացնել շարադրված նյութը: Ձեռնարկում կան նաև առաջադրանքներ, որոնք կարող են իրականացվել համակարգչի օգնությամբ:

Թեորեմի ապացույցը սկսվում է ► նշանով, իսկ ◄ նշանը ազդարարում է ապացույցի ավարտը:

Շնորհակալություն ենք հայտնում ԵՊՀ թվային անա-լիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի աշ-խատակիցներին` ձեռնարկում ներկայացված նյութի բո-վանդակության և շարադրման եղանակների հետ կապված հարցերում օգտակար առաջարկությունների և դիտողու-թյունների համար:

Ռ.Ա. Խաչատրյան

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՆՇԱՆԱԿՈՒՄՆԵՐԻ ՑԱՆԿ

- $x \in X-$ x տարրը պատկանում է X բազմությանը
- $X \cap Y-$ բազմությունների հատում
- $X \cup Y-$ բազմությունների միավորում
- $X \setminus Y-$ բազմությունների տարբերություն
- $X + Y = \{z/z = x + y,\ x \in X,\ y \in Y\}-$ բազմությունների հանրահաշվական գումար
- $\overline{X}-$ X բազմության փակում
- $intX-$ X բազմության ներքին կետերի բազմություն
- R^n- n չափանի էվկլիդյան տարածություն
- $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i-$ $x,\ y \in R^n$ վեկտորների սկալյար արտադրյալ
- $\|x\| = \sqrt{(x, x)}-$ $x \in R^n$ վեկտորի նորմ
- $B_r(a) = \{x \in R^n / \|x - a\| \leq r\}-$ a կենտրոնով r շառավղով գունդ
- $C^1[a, b]-$ $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաների տարածություն հետևյալ նորմով.

$$\|y(\cdot)\|_1 = \max\{\max_{x \in [a,b]} |y(x)|,\ \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|\}$$

- $o(\alpha)-$ թվային ֆունկցիա, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին.

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0$$

Գլուխ 1

Հիմնական գաղափարներ և թեորեմներ

Այս գլխում բերվում են որոշ սահմանումներ և թեորեմներ ուռուցիկ անալիզից: Դիտարկվում է ողորկ ֆունկցիայի մինիմիզացիայի խնդիրը R^n էվկլիդյան տարածության վրա: Շարադրվում են օպտիմալության առաջին ու երկրորդ կարգի անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները:

Ենթադրվում է, որ ընթերցողը ծանոթ է մաթեմատիկական անալիզի և գծային հանրահաշվի հիմնարար գաղափարներին:

1.1 Նախնական սահմանումներ

Դիցուք $f(x) = f(x_1, x_2, \dots \ , x_n)$ n փոփոխականի ֆունկցիա է՝ որոշված R^n էվկլիդյան տարածության վրա: Եթե f ֆունկցիան, ըստ բոլոր փոփոխականների, ունի մասնակի ածանցյալներ $x \in R^n$ կետում, ապա նրա գրադիենտը այդ կետում նշանակվում է հետևյալ կերպ.

$$f'(x) \equiv (f'_{x_1}(x), f'_{x_2}(x), ..., f'_{x_n}(x)) :$$

Սահմանում 1.1.1: *Դիցուք $f(x)$-ը երկու անգամ դիֆե-րենցելի ֆունկցիա է $x \in R^n$ կետում:*
Հետևյալ սիմետրիկ մատրիցը կոչվում է հեսիան

$$H(x) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(x) & f''_{x_1x_2}(x) & \dots & f''_{x_1x_n}(x) \\ f''_{x_2x_1}(x) & f''_{x_2x_2}(x) & \dots & f''_{x_2x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_nx_1}(x) & f''_{x_nx_2}(x) & \dots & f''_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}:$$

Դիցուք

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

կամայական մատրից է:

Սահմանում 1.1.2: **A** *մատրիցի k-րդ կարգի գլխավոր մինոր կոչվում է $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ համարներով տողերի և այդ նույն համարներով սյուների հատման տեղերում գտնվող տարրերից կազմված որոշիչը:*

Սահմանում 1.1.3: $(\mathbf{A}x, x)$ *քառակուսային ձևը կոչվում է՝*

- *դրական որոշյալ* $(\mathbf{A} > 0)$, *եթե* $(\mathbf{A}x, x) > 0 \quad \forall x \neq \neq 0, \ \ x \in R^n$,
- *դրական կիսաորոշյալ* $(\mathbf{A} \geq 0)$, *եթե* $(\mathbf{A}x, x) \geq \geq 0 \ \ \forall x \in R^n$,
- *բացասական որոշյալ* $(\mathbf{A} < 0)$, *եթե* $(\mathbf{A}x, x) < < 0 \ \ \forall x \neq 0, \ \ x \in R^n$,
- *բացասական կիսաորոշյալ* $(\mathbf{A} \leq 0)$, *եթե* $(\mathbf{A}x, x) \leq \leq 0 \ \forall x \in R^n$:

Կարևոր կիրառական նշանակություն ունի հետևյալ պնդումը (տես, օրինակ՝ [10]):

Թեորեմ 1.1.1 *(Սիլվեստրի հայտանիշը)*:
Դիցուք $A(n \times n)$ սիմետրիկ մատրից է:

1) *Որպեսզի* **A** *մատրիցը լինի դրական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա գլխավոր անկյունագծային մինորները լինեն դրական՝*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, ...,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 :$$

2) *Որպեսզի* **A** *մատրիցը լինի բացասական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ* $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > > 0, ...,\ (-1)^n \Delta_n > 0$:

3) *Որպեսզի* **A** *մատրիցը լինի դրական կիսաորոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա գլխավոր մինորները լինեն ոչ բացասական:*

4) *Որպեսզի* **A** *մատրիցը լինի բացասական կիսա որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ զույգ կարգի գլխավոր մինորները լինեն ոչ բացասական, իսկ կենտ կարգի գլխավոր մինորները լինեն ոչ դրական:*

Սահմանում 1.1.4: $M \subseteq R^n$ *բազմությունը կոչվում է* ***ուռուցիկ****, եթե ցանկացած* x^1, $x^2 \in M$ *կետերի և ցանկացած* $\alpha \in [0,1]$ *թվի համար տեղի ունի հետևյալը՝*

$$\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \in M :$$

Սա նշանակում է, որ բազմությանը պատկանող երկու կետերը միացնող հատվածը ընկած է այդ նույն բազմության մեջ:

Սահմանում 1.1.5: $f(x)$ *ֆունկցիան* $M \subseteq R^n$ *ուռուցիկ բազմության վրա կոչվում է* ***ուռուցիկ****, եթե ցանկացած* x^1, $x^2 \in M$ *կետերի և ցանկացած* $\alpha \in [0,1]$ *թվի համար տեղի ունի*

$$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \leq \alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2) \qquad (1.1.1)$$

անհավասարությունը:

Թեորեմ 1.1.2: *Դիցուք* f*-ը ուռուցիկ ֆունկցիա է* $M \subseteq$ $\subseteq R^n$ *ուռուցիկ բազմության վրա և դիֆերենցելի է* $x^* \in M$ *կետում: Այդ դեպքում*

$$f(x) - f(x^*) \geq (f'(x^*), x - x^*) \quad \forall x \in M : \qquad (1.1.2)$$

► Ըստ ուռուցիկ ֆունկցիայի (1.1.1) սահմանման՝ կամայական $x \in M$ վեկտորի և ցանկացած $\alpha \in [0,1]$ թվի համար ունենք

$$f(\alpha x + (1-\alpha)x^*) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x^*)$$

անհավասարությունը: Այստեղից, հաշվի առնելով, որ f ֆունկցիան դիֆերենցելի է x^* կետում, կստանանք

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{f(x^* + \alpha(x - x^*)) - f(x^*)}{\alpha} =$$

$$= \frac{(f'(x^*), \alpha(x - x^*)) + o(\alpha)}{\alpha} = (f'(x^*), x - x^*) + \frac{o(\alpha)}{\alpha} :$$

Անցնելով սահմանի, երբ $\alpha \to 0$, կստանանք պահանջվող անհավասարությունը: (1.1.2)-ը կոչվում է ուռուցիկ ֆունկցիայի **հիմնական անհավասարություն:**

Դա նշանակում է, որ եթե f ուռուցիկ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x^* կետում, ապա նրա գրաֆիկը գտնվում է $(x^*, f(x^*))$ կետով փարված շոշափող հարթությունից վերև: ◀

Սահմանում 1.1.6: *$f(x)$ ֆունկցիան $M \subseteq R^n$ ուռուցիկ բազմության վրա կոչվում է* ***ուժեղ ուռուցիկ*** *$\theta > 0$ հաստատունով, եթե*

$$f(x^1) - f(x^2) \geq (f'(x^2), x^1 - x^2) + \theta \|x^1 - x^2\|^2 \quad \forall x^1, x^2 \in M :$$

Եթե ֆունկցիան երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է, ապա նրա ուռուցիկությունը ամբողջ փարածության վրա կարելի է սփուգել հեսիանի նշանի միջոցով: Այդ մասին է հետևյալ պնդումը (տե՛ս, օրինակ՝ [8]):

Թեորեմ 1.1.3: *Դիցուք f-ը երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է R^n-ի վրա: Այդ դեպքում՝*

- *ա) եթե $H(x) \geq 0 \ \forall x \in R^n$, ապա f-ը ուռուցիկ ֆունկցիա է R^n-ի վրա,*
- *բ) եթե $(H(x)h, h) \geq \theta \|h\|^2 \ \forall x, h \in R^n$, ապա f-ը ուժեղ ուռուցիկ է θ հաստատունով R^n-ի վրա:*

Դիցուք տրված է $f(x)$ ֆունկցիան R^n-ի վրա և M-ը ենթաբազմություն է R^n- ից:

Սահմանում 1.1.7: $x^* \in M$ *կետը կանվանենք՝*

1) *f-ի գլոբալ մինիմումի (գլոբալ մաքսիմումի) կետ M բազմության վրա, եթե*

$$f(x) \geq f(x^*)\ (f(x) \leq f(x^*)) \quad \forall x \in M,$$

2) *f-ի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ M բազմության վրա, եթե գոյություն ունի այդ կետի այնպիսի V շրջակայք, որ*

$$f(x) \geq f(x^*)\ (f(x) \leq f(x^*)) \quad \forall x \in M \cap V:$$

Ֆունկցիայի մինիմումի և մաքսիմումի կետերը կոչվում են էքստրեմումի կետեր:

Տեսական կարևոր նշանակություն ունեն հետևյալ թեորեմները, որոնք բերում ենք առանց ապացույցի (տե՛ս, օրինակ՝ [4]):

Թեորեմ 1.1.4: *Ուռուցիկ բազմության վրա ուռուցիկ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետը հանդիսանում է նաև գլոբալ մինիմումի կետ:*

Թեորեմ 1.1.5: *Ուժեղ ուռուցիկ ֆունկցիան փակ ուռուցիկ բազմության վրա ունի միակ մինիմումի կետ այդ բազմության վրա:*

Թեորեմ 1.1.6: *Դիցուք $M \subseteq R^n$ ուռուցիկ կոմպակտ է, իսկ $f(x)$-ը ուռուցիկ ֆունկցիա է՝ որոշված R^n-ի վրա: Եթե f-ը M-ի վրա հաստատունից տարբեր է, ապա նա այդ բազմության վրա հասնում է իր մեծագույն արժեքին միայն M-ի եզրային կետերում:*

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Դիցուք M-ը ուռուցիկ բազմություն է:
   Ապացուցել, որ

$$(\alpha_1 + \alpha_2)M = \alpha_1 M + \alpha_2 M \; \forall\alpha_1 \geq 0, \;\; \forall\alpha_2 \geq 0 :$$

2. Հնարավոր է արդյոք, որ երկու ոչ ուռուցիկ բազմու– թյունների հանրահաշվական գումարը լինի ուռուցիկ:

3. Հնարավոր է արդյոք, որ ուռուցիկ և ոչ ուռուցիկ բազմությունների հանրահաշվական գումարը լինի ուռուցիկ:

4. Դիցուք M-ը ուռուցիկ բազմություն է:
   Ապացուցել, որ

ա) $\overline{intM} = \overline{M}$,

բ) $\overline{M}$-ը ուռուցիկ է,

գ) $int\overline{M} = intM$:

5. Ապացուցել, որ երբ բազմությունը փակ է, անսահ– մանափակ և ուռուցիկ, ապա նրա կամայական կետով կարելի է փանել ճառագայթ, որն ամբողջովին ընկած կլինի այդ բազմության մեջ:

6. Ուսումնասիրել հետևյալ ֆունկցիայի ուռուցիկությունը.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 :$$

7. Ուսումնասիրել հետևյալ ֆունկցիայի ուռուցիկությունը.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 - x_1^2 - x_2^2 :$$

6. Ցույց տալ, որ

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

ֆունկցիան ուռուցիկ է R^2-ի վրա:

8. Նկարագրել բազմություն, որի վրա

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2}$$

ֆունկցիան լինի ուռուցիկ:

9. a, b, c, պարամետրերի ինչպիսի արժեքների դեպքում

$$f(x_1, x_2) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$$

ֆունկցիան կլինի ուռուցիկ R^2-ի վրա:

10. $f(x)$ ֆունկցիայի վերգրաֆիկ M ուռուցիկ բազմության վրա կոչվում է հետևյալ բազմությունը.

$$epi(f) \equiv \{(\alpha, x) \in R^{n+1} / x \in M, \ \ \alpha \geq f(x)\} :$$

Ապացուցել հետևյալ պնդումը: Որպեսզի f-ը լինի ուռուցիկ M ուռուցիկ բազմության վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա վերգրաֆիկը լինի ուռուցիկ բազմություն:

11. Դիցուք $f(x)$-ը ուռուցիկ ֆունկցիա է՝ որոշված M ուռուցիկ բազմության վրա և

$$x^i \in M,\ \alpha_i \geq 0,\ i \in [1:m],\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1:$$

Ապացուցել, որ

$$f(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i) \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x^i):$$

Այս անհավասարությունը կոչվում է Յենսենի անհավասարություն:

12. Դիցուք $f(x)$ ուռուցիկ ֆունկցիան սահմանափակ է R^n-ի վրա: Ապացուցել, որ f-ը հաստատուն է:

1.2 Էքստրեմումի առաջին և երկրորդ կարգի անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները

Թեորեմ 1.2.1 *(Էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանը)*: *Դիցուք x^*-ը $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է R^n-ի վրա և f-ը դիֆերենցելի է այդ կետում:*

Այդ դեպքում f ֆունկցիայի գրադիենտը x^* կետում հավասար է զրոյի, այսինքն $f'(x^*) = 0$, կամ, որ նույնն է՝

$$f'_{x_i}(x^*) = 0,\ i \in [1:n]:$$

► Քանի որ x^*-ը լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է, ապա օգտվելով ֆունկցիայի դիֆերենցելիության պայմանից, կամայական h վեկտորի և բավականաչափ փոքր α թվերի համար կունենանք

$$0 \underset{(\geq)}{\leq} f(x^* + \alpha h) - f(x^*) = (f'(x^*), \alpha h) + o(\alpha) :$$

Բաժանելով այս անհավասարության երկու մասերը $\alpha > 0$ թվի վրա և ձգտեցնելով α-ն զրոյի՝ կստանանք

$$(f'(x^*), h) \geq 0 \ ((f'(x^*), h) \leq 0) \ \forall h \in R^n :$$

Այստեղից անմիջականորեն հետևում է, որ $f'(x^*) = 0$:
◄

Թեորեմ 1.2.2 *(Մինիմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ ու բավարար պայմանը ուռուցիկ ֆունկցիայի համար)*:

Դիցուք f-ը ուռուցիկ ֆունկցիա է որոշված R^n-ի վրա և դիֆերենցելի է x^* կետում: Որպեսզի x^*-ը լինի f-ի մինիմումի կետ R^n-ի վրա անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f'(x^*) = 0$:

► Անհրաժեշտությունը հետևում է **թեորեմ 1.2.1-ից**: Ապացուցենք բավարարությունը: Օգտվելով ուռուցիկ ֆունկցայի հիմնական անհավասարությունից՝ ստանում ենք

$$f(x) - f(x^*) \geq (f'(x^*), x - x^*) = 0, \ \forall \ x \in R^n :$$

Այստեղից հետևում է, որ x^*-ը f-ի մինիմումի կետ է R^n-ի վրա:
◄

Թեորեմ 1.2.3 *(Էքստրեմումի երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանը)*: *Դիցուք x^*-ը f ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է R^n-ի վրա և f-ը երկու անգամ դիֆերենցելի է այդ կետում:*

Այդ դեպքում $H(x^*)$-ը դրական կիսաորոշյալ է (բացասական կիսաորոշյալ է), այսինքն

$$H(x^*) \geq 0 \ \ (H(x^*) \leq 0):$$

► Քանի որ x^*-ը լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է, իսկ f-ը երկու անգամ դիֆերենցելի է այդ կետում, ապա կամայական $h \in R^n$ վեկտորի և բավականաչափ փոքր α թվերի համար ունենք

$$0 \underset{(\geq)}{\leq} f(x^* + \alpha h) - f(x^*) = 1/2(H(x^*)\alpha h, \alpha h) + o(\alpha^2):$$

Բաժանելով այս անհավասարության երկու մասերը α^2 թվի վրա և ձգտեցնելով α-ն զրոյի՝ կստանանք պահանջվող անհավասարությունը:

◄

Թեորեմ 1.2.4 *(Էքստրեմումի երկրորդ կարգի բավարար պայմանները)*: *Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան երկու անգամ դիֆերենցելի է x^* կետում և տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝*

$$f'(x^*) = 0, \ H(x^*) > 0 \ (H(x^*) < 0):$$

Այդ դեպքում x^*-ը f-ի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է R^n-ի վրա:

► Ենթադրենք հակառակը: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի $\{x^k\}$ հաջորդականություն, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

$$x^k \to x^*, \ \ f(x^k) < f(x^*) \ \ (f(x^k) > f(x^*)):$$

Նշանակելով $\alpha_k = \|x^k - x^*\|,\ \ h^k = (x^k - x^*)/\alpha_k$, կունենանք

$$x^k = x^* + \alpha_k h^k :$$

Քանի որ $\|h^k\| = 1$, ապա ընդհանրությունը չխախտելով կարող ենք ենթադրել, որ $h^k \to h^0 \neq 0$: Հաշվի առնելով թեորեմի ենթադրության $f'(x^*) = 0$ պայմանը՝ կունենանք

$$0 \underset{(\le)}{\ge} f(x^k) - f(x^*) = 1/2(H(x^*)\alpha_k h^k, \alpha_k h^k) + o(\alpha_k^2) :$$

Բաժանելով այս անհավասարություն երկու մասերը α_k^2-ի վրա և անցնելով սահմանի՝ կստանանք

$$(H(x^*)h^0, h^0) \le 0\ \ (H(x^*)h^0, h^0) \ge 0),$$

որը հակասում է թեորեմի ենթադրությանը:

◀

Պարզագույն դեպքերում էքստրեմումի առաջին և երկրորդ կարգի անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները էֆեկտիվ միջոցներ են ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը ճշգրիտ գտնելու համար:

Օրինակ: Գտնել

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3 - 3x_1 + 6x_2 + 2$$

ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը R^3-ի վրա:

Լուծում: Ըստ մինիմումի անհրաժեշտ պայմանի՝ ունենք

$$f'_{x_1} = 3x_1^2 - 3 = 0,\ f'_{x_2} = 2x_2 + x_3 + 6 = 0,\ f'_{x_3} = 2x_3 + x_2 = 0 :$$

Լուծելով այս համակարգը, կստանանք երկու ստացիոնար կետ՝

$$x^1 = (1, -4, 2) \text{ և } x^2 = (-1, -4, 2) :$$

Ունենք նաև, որ

$$f''_{x_1x_1} = 6x_1,\ f''_{x_1x_2} = 0,\ f''_{x_1x_3} = 0,$$

$$f''_{x_2x_2} = 2,\ f''_{x_2x_3} = 1,\ f''_{x_3x_3} = 2 :$$

Այժմ յուրաքանչյուր ստացիոնար կետի համար կարելի է կազմել հեսիանը և ստուգել նրա նշանը: x^1 կետի համար հեսիանը ունի հետևյալ տեսքը.

$$H(x^1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} :$$

Քանի որ

$$\Delta_1 = 6,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 > 0,\ \Delta_3 = 18 > 0,$$

ապա x^1-ը լոկալ մինիմումի կետ է: Ուսումնասիրենք x^2 կետը: Այդ կետում հեսիանը ունի հետևյալ տեսքը.

$$H(x^2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} :$$

Քանի որ $\Delta_1 = -6 < 0,\ \ \Delta_2 = -12 < 0,\ \Delta_3 = -18 < 0$, ապա էքստրեմումի բավարար պայմանները տեղի չունեն: Ստուգենք երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանները: Առաջին կարգի գլխավոր մինորներն են՝ $-6,\ 2,\ 2$ թվերը: Երկրորդ կարգի գլխավոր մինորներն են՝ $3,\ \ -12,\ \ -12$: Երրորդ կարգի գլխավոր մինորը հավասար է Δ_3-ի, որը բացասական է: Այսպիսով, x^2 կետում էքստրեմումի երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանները չեն կատարվում: Հետևաբար, x^2 կետը էքստրեմումի կետ չէ:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը.

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_1 + 2x_3 \to extr :$$

2. Ստուգել, արդյոք $(1, 1)$ կետը հետևյալ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է, թե ոչ.

$$f(x) = (x_2 - x_1)^2 + (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - 1)^2 :$$

Գլուխ 2

Գրադիենտային մեթոդը

Գրադիենտային մեթոդը դասվում է դիֆերենցելի ֆունկցիաների մինիմիզացիայի թվային հիմնական մեթոդների շարքին: Այդ մեթոդի էությունը շատ պարզ է: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա նրա հակագրադիենտը՝ $h = -f'(x)$ վեկտորը, յուրաքանչյուր x կետում ցույց է տալիս ֆունկցիայի **նվազման ուղղությունը:**

Դա հիմք է տալիս ենթադրել, որ կամայական սկզբնական x^0 կետից սկսվող և $x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x_k)$ $(\alpha_k > 0)$ ռեկուրենտ առնչությամբ կառուցված հաջորդականության անդամները մեծ k ինդեքսների դեպքում մոտ կլինեն f-ի մինիմումի կետին: Այստեղ այս ենթադրությունը հիմնավորվում է որոշ դասի ֆունկցիաների և α_k թվերի հատուկ եղանակներով ընտրությունների դեպքերում: Ֆունկցիայի մինիմիզացիայի բազմազան ալգորիթմների և նրանց պրակտիկ իրականացումների հետ կարելի է ծանոթանալ [3, 4, 6] աշխատանքներում:

2.1 Ֆունկցիայի մինիմիզացիայի գրադիենտային եղանակների ընդհանուր նկարագրությունը

Սահմանում 2.1.1: *h վեկտորը կոչվում է f ֆունկցիայի նվազման ուղղություն x կետում, եթե բավականաչափ փոքր դրական α թվերի համար տեղի ունի*

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

անհավասարությունը:

Այլ խոսքով, h-ը այն վեկտորն է, որի ուղղությամբ բավականաչափ փոքր շարժվելիս կարելի է ֆունկցիայի արժեքները փոքրացնել:

Լեմմա 2.1.1: *Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է x կետում և h-ն այնպիսի վեկտոր է, որ տեղի ունի*

$$(f'(x), h) < 0$$

անհավասարությունը: Այդ դեպքում h-ը f-ի նվազման ուղղություն է x կետում :

► Քանի որ f-ը դիֆերենցելի է, ապա

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha[(f'(x), h) + \frac{o(\alpha)}{\alpha}] :$$

Այստեղից, բավականաչափ փոքր դրական α թվերի համար միջակ փակագծերում գրած արտահայտությունը դառնում է բացասական: Այնպես որ կստանանք

$$f(x + \alpha h) < f(x) :$$

◄

Դիտողություն: Մասնավորապես, որպես նվազման ուղղու– թյուն կարելի է վերցնել $h = -f'(x)$, որը կոչվում է հակագրադիենտի ուղղություն: Կարելի է ցույց տալ, որ հակագրադիենտը տալիս է ֆունկցիայի ամենաարագ նվազման ուղղությունը:

Գրադիենտային վայրէջքի մեթոդները կառուցվում են հետևյալ կերպ: Ընտրվում է կամայական x^0 կետ R^n տարածությունից և կառուցվում է

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k,\ k = 0, 1, 2, ... \qquad (2.1.1)$$

ռեկուրենտ առնչությունը: Այստեղ $h^k = -f'(x^k)$, իսկ α_k թվերը կոչվում են քայլեր, որոնք ընտրվում են որոշակի օրինաչափությամբ: Հայտնի են քայլի ընտրության մի քանի եղանակներ, որոնք ներկայացվում են ստորև:

1. **Քայլի ընտրության ապրիորի եղանակը:** Այս դեպքում α_k քայլերը դրական թվեր են, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$\sum \alpha_k = +\infty,\ \sum \alpha_k^2 < +\infty :$$

Մասնավորապես, այս պայմաններին բավարարում են

$$\alpha_k = \frac{1}{k+1},\ \ \alpha_k = \frac{ln(k+1)}{k+1},\ k = 0, 1, 2, ...$$

թվային հաջորդականությունները:

2. **Քայլի ընտրության ամենաարագ վայրէջքի եղանակը:** Այս դեպքում $\alpha_k > 0$ քայլերը ընտրվում են հետևյալ կերպ: Կազմում են $g(\alpha) \equiv f(x^k + \alpha h^k)$ ֆունկցիան և գտնում նրա մինիմումի կետը $(0, \infty)$ միջակայքի վրա: Այն կետը, որտեղ մինիմումը հասանելի է համարվում է α_k, այսինքն՝

$$\alpha_k \equiv arg \min_{\alpha > 0} g(\alpha) :$$

Որոշ դասի ֆունկցիաների համար կարելի է ստանալ անալիտիկ բանաձևեր α_k քայլերի որոշման համար, ինչպես հետևյալ օրինակում:

Օրինակ: Դիցուք $f(x) = 1/2(\mathbf{A}x, x) + (b, x)$, որտեղ $\mathbf{A}$-ն $(n \times n)$ չափանի սիմետրիկ, դրական որոշյալ մատրից է, իսկ b-ն n չափանի վեկտոր է: Կարելի է ցույց տալ, որ f-ը ուռուցիկ է, ունի միակ մինիմումի կետ R^n-ի վրա և նրա գրադիենտը որոշվում է հետևյալ բանաձևով. $f'(x) = \mathbf{A}x + b$: Այս դեպքում ունենք

$$g(\alpha) \equiv f(x^k + \alpha h^k) = 1/2[\mathbf{A}(x^k + \alpha h^k), x^k + \alpha_k h^k)] +$$

$$+(b, x^k + \alpha_k h^k) = \alpha^2 [1/2(\mathbf{A}h^k, h^k)] +$$
$$+\alpha(\mathbf{A}x^k + b, h^k) + (1/2\mathbf{A}x^k + b, x^k) :$$

Դժվար չէ նկատել, որ ստացված քառակուսային եռանդամը հասնում է իր փոքրագույն արժեքին R^n-ի վրա հետևյալ կետում.

$$\alpha_k = -\frac{(\mathbf{A}x^k + b, h^k)}{(\mathbf{A}h^k, h^k)} = -\frac{(f'(x^k), h^k)}{(\mathbf{A}h^k, h^k)} \geq 0 \qquad (2.1.2)$$

կետում: Հետևաբար,

$$f(x^k + \alpha_k h^k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x^k + \alpha h^k) = \min_{\alpha \in R^n} f(x^k + \alpha h^k) :$$

3. **Քայլի ընտրության կիսման եղանակը:** Ֆիքսում ենք որևէ դրական ε թիվ $(0, 1)$ միջակայքից և $\alpha = 1$ թվի համար ստուգում ենք

$$f(x^k - \alpha f'(x^k)) - f(x^k) \leq -\varepsilon \alpha \|f'(x^k)\|^2 \qquad (2.1.3)$$

անհավասարությունը: Եթե այն տեղի ունի, ապա α_k-ն համարում ենք հավասար α-ի: Հակառակ դեպքում α-ն կիսում ենք և նորից ստուգում (2.1.3) անհավասարությունը և այսպես շարունակ: Եթե որևէ p-րդ քայլում բավարարվում է (2.1.3) անհավասարությունը, ապա $\alpha_k = \frac{1}{2^p}$:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

---

1. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների էքստրեմումի կետերը ամենաարագ վայրէջքի մեթոդով:
   Սկզբնական x^0 կետից սկսած կառուցել $\{x^k\}$ հաջորդականությունը (2.1.1) ռեկուրենտ առնչությամբ և քայլերի ընտրությունը կատարել (2.1.2) բանաձևով: Եթե $\|f'(x^k)\| < \varepsilon_0$, ապա պրոցեսն ավարտել և x^k-ն համարել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ:
   Այստեղ $\varepsilon_0 > 0$ թիվը նախապես տրված ճշտությունն է:

ա) $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 \to min,\ x^0 = (1,1),\ \varepsilon_0 = = 0.01;$

բ) $-3x_1^2 - 2x_2^2 + x_2 + 6x_2 - 15 \to max,\ x^0 = (0,1),\ \varepsilon_0 = = 0.1;$

գ) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2 \to min,\ x^0 = (1,0),\ \varepsilon_0 = 0.01 :$

2. Դիցուք f-ը երկու անգամ դիֆերենցելի է x կետում և

$$(f'(x), h) = 0,\ (f''(x), h) < 0 :$$

   Ապացուցել, որ h-ը f ֆունկցիայի նվազման ուղղություն է:

3. Դիցուք $H(x) = f''(x)$ հեսիանը դրական որոշյալ է և $f'(x) \neq 0$: Ապացուցել, որ

$$h = -H(x)^{-1} f'(x)$$

վեկտորը f ֆունկցիայի նվազման ուղղություն է:

Առաջադրանք 1: Գրել ծրագիր, որը մինիմիզացնում է $f(x) = 1/2(\mathbf{A}x, x) + (b, x)$ ֆունկցիան R^n-ի վրա: Այստեղ $\mathbf{A}$-ն $(n \times n)$ չափանի սիմետրիկ, դրական որոշյալ մատրից է, իսկ b-ն n չափանի վեկտոր է: Մուտքի տվյալներն են $\mathbf{A}, b, x^0, n, \varepsilon, \varepsilon_0$ պարամետրերը: Այստեղ ε_0-ն ճշտությունն է: Կառուցել $\{x^k\}$ հաջորդականությունը գրադիենտային իջեցման երեք մեթոդներով և համեմատել դրանք քայլերի քանակի տեսակետից: Եթե $\|f'(x^k)\| < \varepsilon_0$, ապա պրոցեսն ավարտել և համարել x^k-ն մինիմումի կետ: Համեմատել ստացված արդյունքները $x^* = \mathbf{A}^{-1}b$ վեկտորի հետ, որը f-ի մինիմումի կետն է :

2.2 Քայլի կիսման եղանակի զուգամիտության թեորեմը

Լեմմա 2.2.1: *Դիցուք f ֆունկցիայի համար ճիշտ են հետևյալ պայմանները.*

1) f ֆունկցիայի գրադիենտը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին, այսինքն գոյություն ունի այնպիսի $L >$ > 0 հաստատուն, որ

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in R^n :$$

2) f-ը ներքևից սահմանափակ է, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $m > 0$ թիվ, որ տեղի ունի

$$f(x) \geq m \, \forall x \in R^n$$

անհավասարությունը:

Այդ դեպքում քայլի կիսման եղանակով վերջավոր քայլերի ընթացքում ընտրվում է α_k-ն և

$$\alpha_k > (1-\varepsilon)/L > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad :$$

► Դիցուք $h^k = -f'(x^k)$: Համաձայն Լագրանժի միջին արժեքի վերաբերյալ թեորեմի՝ գոյություն ունի $\theta \in (0,1)$ հաստատուն այնպիսին, որ եթե $\alpha > (1-\varepsilon)/L$, ապա

$$f(x^k + \alpha h^k) - f(x^k) = (f'(x^k + \alpha\theta h^k), \alpha h^k) =$$

$$= (f'(x^k + \alpha\theta h^k) - f'(x^k), \alpha h^k) + \alpha(f'(x^k), h^k) \le$$

$$\le \|L\alpha\theta h^k\|\|\alpha h^k\| - \alpha\|f'(x^k)\|^2 \le L\alpha^2\|f'(x^k)\|^2 -$$

$$-\alpha\|f'(x^k)\|^2 = -\alpha\|f'(x^k)\|^2(1-\alpha L) \le -\varepsilon\alpha\|f'(x^k)\|^2 :$$

◄

Թեորեմ 2.2.1: *Դիցուք f ֆունկցիան բավարարում է **լեմմա 2.2.1-ի** բոլոր պայմաններին և $\{x^k\}$-ն կիսման մեթոդով կառուցված հաջորդականությունն է:*

Այդ դեպքում $f'(x^k) \to 0$, երբ $k \to \infty$:

► Ունենք

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \le -\varepsilon\alpha\|f'(x^k)\|^2 : \qquad (2.2.1)$$

Այսպեղից հետևում է, որ $f(x^{k+1}) \le f(x^k)$: Այսինքն, $\{f(x^k)\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն նվազող է և ներքևից սահմանափակ է: Հետևաբար, հաջորդականությունը զուգամետ է, այսինքն՝

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \to 0 :$$

(2.2.1)-ից հետևում է, որ

$$\|f'(x^k)\|^2 \leq \frac{f(x^k) - f(x^{k+1})}{\varepsilon\alpha_k} :$$

Այստեղից, քանի որ, ըստ **լեմմա 2.2.1-ի**, $\alpha_k > (1-\varepsilon)/L > > 0$, ապա $f'(x^k) \to 0$:
◀

Թեորեմ 2.2.2: *Ենթադրենք գոյություն ունեն այնպիսի դրական $D > 0, \ d > 0$ հաստատուններ, որ*

$$D\|h\|^2 \geq (f''(x)h, h) \geq d\|h\|^2 \quad \forall x, \ h \in R^n : \qquad (2.2.2)$$

Այդ դեպքում կիսման եղանակով կառուցված $\{x^k\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է f-ի միակ x^* մինիմումի կետին երկրաչափական պրոգրեսիայի արագությամբ:

Այսինքն՝ գոյություն ունեն $C > 0$ և $q \in (0,1)$, հաստատուններ այնպիսին, որ

$$\|x^k - x^*\| \leq Cq^k, \ k = 0, 1, ... \ :$$

▶ Քանի որ $f'(x^*) = 0$, ապա, ըստ Թեյլորի բանաձևի,

$$f(x) - f(x^*) = \frac{1}{2}(f''(x^* + \theta(x - x^*))(x - x^*), x - x^*),$$

որտեղ $\theta \in (0,1)$: Այստեղից, հաշվի առնելով (2.2.2) անհավասարությունը, ստանում ենք

$$\frac{d}{2}\|x - x^*\|^2 \leq f(x) - f(x^*) \leq \frac{D}{2}\|x - x^*\| : \qquad (2.2.3)$$

Հաշվի առնելով այս պայմանը և ներկայացնելով f ֆունկցիան Թեյլորի բանաձևի փեսքով x կեփում՝ կունենանք

$$f(x^*) - f(x) = (f'(x), x^* - x) +$$

$$+1/2(f''(x + \theta(x^* - x))(x^* - x), x^* - x) \geq$$
$$\geq -\|f'(x)\|\|x - x^*\| + d/2\|x - x^*\|^2 :$$

Այսփեղից կսփանանք

$$f(x) - f(x^*) \leq \|f'(x)\|\|x - x^*\| - d/2\|x - x^*\|^2 : \quad (2.2.4)$$

Հաշվի առնելով նաև (2.2.3) անհավասարության ձախ մասը՝ (2.2.4)-ից կսփանանք

$$\frac{d}{2}\|x - x^*\|^2 \leq \|f'(x)\|\|x - x^*\| - d/2\|x - x^*\|^2 :$$

Հեփևաբար,

$$\|x - x^*\| \leq \frac{\|f'(x)\|}{d} : \quad (2.2.5)$$

Օգտվելով (2.2.3)-(2.2.5) անհավասարություններից՝ սփա–նում ենք

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{\|f'(x)\|^2}{d} - d/D(f(x) - f(x^*)) :$$

Այսփեղից

$$\|f'(x)\|^2 \geq d(1 + d/D)(f(x) - f(x^*)) : \quad (2.2.6)$$

Կիրառելով (2.2.6) անհավասարությունը կիսման մեթոդի

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \leq -\varepsilon\alpha_k\|f'(x^k)\|^2$$

անհավասարությունում՝ կստանանք

$$f(x^{k+1}) - f(x^*) \leq [1 - \varepsilon\alpha_k d(1 + d/D)]((f(x^k) - f(x^*)) :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով $\alpha_k > \bar{\alpha} \equiv (1-\varepsilon)/L > 0$ անհավասարությունը, կստանանք

$$f(x^k) - f(x^*) \leq (f(x^0) - f(x^*))\bar{q}^k, \qquad (2.2.7)$$

որտեղ

$$\bar{q} = 1 - \varepsilon\overline{\alpha}d(1 + d/D) :$$

Վերջապես, օգտվելով (2.2.3) և (2.2.7) անհավասարու– թյունից, կստանանք

$$\|x^k - x^*\| \leq \sqrt{\frac{2}{d}}\sqrt{f(x^k) - f(x^*)} \leq Cq^k,$$

որտեղ

$$C = \sqrt{\frac{2}{d}}\sqrt{f(x^0) - f(x^*)},\ q = \sqrt{\bar{q}} :$$

◀

Քայլի կիսման եղանակի պրակտիկ իրականացումների ժամանակ սովորաբար օգտվում են նրա հետևյալ մոդի– ֆիկացված տարբերակից: k-րդ քայլում որպես ֆունկցիայի նվազման ուղղություն վերցնում են

$$h^k = -\frac{f'(x^k)}{\|f'(x^k)\|}$$

վեկտորը, իսկ α_k քայլի երկարությունը ընտրվում է կիսման եղանակի հետևյալ պայմանից.

$$f(x^k + \alpha h^k) - f(x^k) \leq -\alpha\varepsilon\|f'(x^k)\| : \qquad (2.2.8)$$

Հաջորդ x^{k+1} կետը կառուցվում է

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k \tag{2.2.9}$$

ռեկուրենտ առնչությամբ:
Այժմ քայլի կիսման եղանակը մեկնաբանենք հետևյալ պարզ օրինակի միջոցով:

Օրինակ: Քայլի կիսման եղանակով գտնել

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2$$

ֆունկցիայի մինիմումի կետը R^2-ի վրա: Որպես սկզբնական մոտավորություն վերցնել $x^0 = (-2, 1)$ կետը: ε պարամետրի արժեքը վերցնել հավասար 0.5-ի: Կատարել իտերացիայի մեկ քայլ:

Լուծում: Քայլի կիսման եղանակի իտերացիայի (2.2.9) բանաձևը այս խնդրի համար ունի հետևյալ տեսքը.

$$x^{k+1} = \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} + \alpha_k \begin{pmatrix} h_1^k \\ h_2^k \end{pmatrix} : \tag{2.2.10}$$

Մասնակի ածանցյալների և գրադիենտի նորմի համար ունենք հետևյալ բանաձևերը.

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2, \quad f'_{x_2}(x_1, x_2) = 8x_2 + 6x_1, \tag{2.2.11}$$

$$\|f'(x)\| = \sqrt{(8x_1 + 6x_2)^2 + (8x_2 + 6x_1)^2}, \tag{2.2.12}$$

$$h_1^k = -\frac{8x_1^k + 6x_2^k}{\|f'(x^k)\|}, \; h_2^k = -\frac{6x_1^k + 8x_2^k}{\|f'(x^k)\|} : \tag{2.2.13}$$

Առաջին իտերացիայում $k = 0$:

Օգտագործելով (2.2.10) – (2.2.13) բանաձևերը՝ կստանանք

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0) = 8x_1^0 + 6x_2^0 = 8(-2) + 6 = -10,$$

$$f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0) = 6x_1^0 + 8x_2^0 = -4,$$

$$\|f'(x^0)\| = \sqrt{(-10)^2 + (-4)^2} \approx 10.77,\ h_1^0 = \frac{10}{10.77} \approx 0.93,$$

$$h_2^0 = \frac{4}{10.77} \approx 0.37 :$$

Դիցուք $\alpha = 1$: Այդ դեպքում, հաշվի առնելով այս արդյունքները, մեկնարկային $(-2, 1)$ արժեքը և (2.2.10)-ը, կստանանք

$$x \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.93 \\ 0.37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.07 \\ 1.63 \end{pmatrix} :$$

Առաջին իտերացիայի համար α_0 քայլի ընտրության պայմանը ունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x) - f(x^0) \leq -0.5\alpha\|f'(x^0)\| :$$

Կատարելով համապատասխան հաշվարկներ՝ նկատում ենք, որ այս անհավասարության ձախ մասը մոտավորապես հավասար է -1.6-ի, իսկ աջ մասը հավասար է -5.4-ի: Հետևաբար, այն տեղի չունի: Այժմ կիսենք α թիվը և նորից ստուգենք անհավասարությունը: Այս դեպքում

$$x = (-1.58, 1.18) :$$

Քանի որ $f(x^0) = 8,\ f(x) \approx 4.16$, ապա անհավասարության ձախ մասը հավասար է $4.16 - 8 = -3.84$, իսկ աջ մասը, հեշտ է նկատել, որ հավասար է -2.69-ի:

Այսպիսով, նշված անհավասարությունը տեղի ունի և հետևաբար՝

$$\alpha_0 = 0.5,\ x^1 = (-1.54, 1.18) :$$

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Քայլի կիսման եղանակով լուծել հետևյալ էքստրեմումի խնդիրները: Վերցնել $x^0 = (1, 1),\ \varepsilon = 0.5$:
Կատարել իտերացիայի մեկ քայլ:

1. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 - 2x_1x_2 \to min$:

2. $-2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2 \to max$:

2.3 Գծայնացման մեթոդը

Դիտարկենք պայմանական օպտիմիզացիայի հետևյալ խնդիրը.

$$f(x) \to min,\ x \in M : \tag{2.3.1}$$

Այս խնդրում f-ը դիֆերենցելի ուռուցիկ ֆունկցիա է, իսկ $M \subset R^n$-ը կոմպակտ ուռուցիկ բազմություն է:

Տանք գծայնացման մեթոդի համառոտ նկարագրությունը: Ընտրում ենք կամայական x^0 կետ M բազմությունից և կառուցում ենք $\{x_k\}$ հաջորդականությունը

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k,\ k = 0,\ 1, ...$$

ռեկուրենտ առնչությամբ: Այստեղ h^k վեկտորը f-ի այնպիսի նվազման ուղղություն է $x^k \in M$ կետում, որ բավականաչափ փոքր α_k քայլերի դեպքում $x_{k+1} \in M$: h^k վեկտորի որոշման համար k-րդ քայլում լուծում ենք հետևյալ միջանկյալ խնդիրը.

$$(f'(x^k), x - x^k) \to min,\ x \in M :$$

Ենթադրենք $\bar{x}_k$-ն այդ խնդրի որևէ լուծում է: Նշանակենք

$$\eta_k = (f'(x^k), \bar{x}_k - x^k),\ h^k = \bar{x}_k - x^k :$$

h^k վեկտորը կոչվում է պայմանական հակագրադիենտ: Ակնհայտ է, որ $\eta_k \leq 0$: Իրոք,

$$\eta_k = \min_{x \in M}(f'(x^k), x - x^k) \leq (f'(x^k), x^k - x^k) \leq 0 :$$

Եթե $\eta_k < 0$, ապա ընտրում ենք α_k քայլը կիսման մեթոդով: Վերցնում ենք $\alpha = 1$ և ստուգում

$$f(x^k + \alpha h^k) - f(x^k) \leq \alpha \varepsilon \eta_k \tag{2.3.2}$$

անհավասարությունը: Եթե այն տեղի ունի, ապա համարում ենք $\alpha_k = 1$, հակառակ դեպքում α-ն կիսում ենք և նորից ստուգում նշված անհավասարությունը և այսպես շարունակ: Երբ առաջին անգամ տեղի ունենա (2.3.2) անհավասարությունը, ապա այդ α-ն համարվում է α_k-ի արժեք և ցիկլը ավարտվում է: Այնուհետև կառուցում ենք x^{k+1} կետը ռեկուրենտ առընչությամբ.

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k :$$

Թեորեմ 2.3.1: *Դիցուք*

ա) $M \subset R^n$-ը ուռուցիկ կոմպակտ է,

բ) $f(x)$-ը դիֆերենցելի է և ուռուցիկ M-ի վրա,

գ) $f'(x)$ գրադիենտը M բազմության վրա բավարարում է Լիպշիցի պայմանին:

Այդ դեպքում

1) եթե որևէ k-րդ քայլում $\eta_k = 0$, ապա x^k-ն (2.3.1) խնդրի լուծումն է և ալգորիթմն ավարտվում է, *2) եթե* $\eta_k < 0,\ k = 0, 1, 2, ...,$ *ապա*

$$f(x^k) \to \min_{x\in M} f(x) :$$

► Դիցուք $\eta_k = 0$: Ըստ ուռուցիկ ֆունկցիայի հիմնական անհավասարության՝ ունենք

$$f(x) - f(x^k) \geq (f'(x^k), x - x^k) \geq \eta_k = 0\ \forall x \in M,$$

այսինքն x^k-ն (2.3.1) խնդրի լուծումն է:

Ցույց տանք, որ h^k ուղղությամբ բավականաչափ փոքր շարժվելիս մնում ենք M բազմության մեջ: Իրոք, քանի որ M-ը ուռուցիկ է, ապա

$$x^k + \alpha h^k = x^k + \alpha(\bar{x}_k - x^k) = (1-\alpha)x^k + \alpha\bar{x}_k \in M,\ \forall\alpha \in [0, 1] :$$

Քանի որ f-ի գրադիենտը M կոմպակտի վրա բավարարում է Լիպշիցի պայմանին և $x_k \in M$, ապա կարելի է ցույց տալ, որ վերջավոր քայլերից հետո (2.3.2) անհավասարությունը տեղի ունի և հետևաբար α_k քայլը ընտրվում է: Միաժամանակ գոյություն ունի այնպիսի $\bar{\alpha} > 0$ թիվ, որ $\alpha_k > \bar{\alpha} > 0,\ k = 0, 1, ...$ (տե՛ս, օրինակ՝ [8], լեմմա 3.1, էջ 229):

Այժմ ապացուցենք, որ

$$f(x^k) \to \min_{x\in M} f(x) :$$

Համաձայն (2.3.2) անհավասարության՝ ունենք

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \varepsilon\alpha_k\eta_k : \qquad (2.3.3)$$

Գումարելով (2.3.3) անհավասարությունները $k \in [0 : m - 1]$ ինդեքսների համար՝ կստանանք

$$\min_{x\in M} f(x) - f(x^0) \leq f(x^m) - f(x^0) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k\eta_k :$$

Այսպեղից հեպևում է, որ բացասական անդամներով $\sum \alpha_k \eta_k$ շարքը զուգամետ է: Հետևաբար, նրա ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի՝

$$\alpha_k \eta_k \to 0 : \qquad (2.3.4)$$

Քանի որ $\alpha_k > \bar{\alpha} > 0$, ապա (2.3.4)-ից հետևում է, որ $\eta_k \to 0$: Այսպեղից, ընտրելով $x^{k_j} \to x^* \in M$ զուգամետ ենթահաջորդականությունը և օգտվելով ուռուցիկ ֆունկցիայի հիմնական անհավասարությունից, կստանանք՝

$$f(x) - f(x^{k_j}) \geq (f'(x^{k_j}), x - x^{k_j}) \geq \eta_{k_j} \; \forall x \in M : \qquad (2.3.5)$$

Քանի որ $\eta_{k_j} \to 0$ և $x^{k_j} \to x^*$, ապա (2.3.5) անհավասարությունում անցնելով սահմանի, կստանանք՝

$$f(x) - f(x^*) \geq 0 \;\; \forall x \in M,$$

այսինքն, x^*-ը f-ի մինիմումի կետն է M բազմության վրա: Այսպիսով, ապացուցվեց, որ $\{f(x^k)\}$ հաջորդականության $\{f(x^{k_j})\}$ ենթահաջորդականությունը զուգամիտում է $\min_{x\in M} f(x)$: Մյուս կողմից, քանի որ $\{f(x^k)\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն նվազող է, ապա այն նույնպես կզուգամիտի $\min_{x\in M} f(x)$-ին:

◀

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Ապացուցել պնդումները հետևյալ խնդրի համար.

$$(c,x) \to min,\ x \in M:$$

ա) Եթե $M = \{x \in R^n / \|x - x^0\| \le r\}$,
ապա
$$x^* = x^0 + \frac{c}{\|c\|} r$$
վեկտորը խնդրի լուծումն է:

բ) Եթե $M = \{x \in R^n / a_j \le x_j \le b_j,\ j \in [1:n]\}$,
ապա
$$x_j^* = \begin{cases} a_j, & \text{եթե } c_j \ge 0, \\ b_j, & \text{եթե } c_j < 0 \end{cases}$$
կոորդինատներով վեկտորը խնդրի լուծումն է:

2. Գտնել $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ֆունկցիայի պայմանական հակագրադիենտը $x = (2,3)$ կետում $M = \{x \in R^2 / x_1 + x_2 \le 6,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$ բազմության վրա:

Առաջադրանք 2: Կազմել ծրագիր, որը իրականացնում է $f(x) = 1/2(\mathbf{A}x, x) + (b, x)$ ֆունկցիայի մինիմիզացիան $M = \{x \in R^n / \mathbf{C}x \le d,\ x \ge 0\}$ բազմության վրա պայմանական գրադիենտի մեթոդով: Այստեղ **A**-ն $(n \times n)$ չափանի սիմետրիկ դրական որոշյալ մատրից է, իսկ **C**-ն $(m \times n)$ չափանի մատրից է: k-րդ քայլում օգտագործելով սիմպլեքս ալգորիթմը՝ ստանալ

$$\eta_k = \min_{x \in M}(f'(x^k), x - x^k)$$

խնդրի որևէ լուծում: Ալգորիթմի կանգառի համար ընդունել $|\eta_k| < \varepsilon_0$ պայմանը, որտեղ $\varepsilon_0 > 0$ նախապես տրված ճշտություն է: Եթե նշված պայմանը կատարվում է, ապա x^k վեկտորը համարել խնդրի լուծում և ավարտել ալգորիթմը: Սկզբնական $x^0 \in M$ կետի ընտրությունը նույնպես կատարել սիմպլեքս ալգորիթմով:

2.4 Ապրիորի մեթոդի զուգամիտությունը

Թեորեմ 2.4.1: *Դիցուք f-ը ուռուցիկ ֆունկցիա է՝ որոշված R^n-ի վրա և M^*-ը նրա մինիմումի կետերի բազմությունն է R^n-ի վրա: Ենթադրենք $M^* \neq \emptyset$: Դիցուք $\{x^k\}$-ն հետևյալ ռեկուրենտ առնչությամբ կառուցված հաջորդականություն է.*

$$x^0 \in R^n,\ x^{k+1} = x^k - \alpha_k \frac{f'(x^k)}{\|f'(x^k)\|},\quad k = 0, 1, 2, ..., \qquad (2.4.1)$$

որտեղ α_k-երը դրական թվեր են՝ բավարարող

$$\sum \alpha_k = +\infty,\ \sum \alpha_k^2 < +\infty : \qquad (2.4.2)$$

պայմաններին:

Այդ դեպքում

$$x^k \to \bar{x} \in M^* :$$

Այսինքն՝ $\{x^k\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է f-ի որևէ $\overline{x}$ մինիմումի կետի:

► Նշանակենք $v^k = f'(x^k)$: Վերցնենք որևէ $x^* \in M^*$ կետ և հաշվենք նրա հեռավորությունը $\{x^k\}$ հաջորդականության անդամներից:
Ունենք

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 = \|x^k - x^*\|^2 + \frac{2\alpha_k}{\|v^k\|}(v^k, x^* - x^k) + \alpha_k^2 : \quad (2.4.3)$$

Քանի որ x^*-ը f-ի մինիմումի կետ է M-ի վրա, ապա

$$(v^k, x^* - x^k) \le f(x^*) - f(x^k) \le 0 :$$

Հաշվի առնելով այս պայմանը և (2.4.3)-ը՝ կստանանք

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \le \|x^k - x^*\|^2 + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i^2 : \qquad (2.4.4)$$

Քանի որ $\sum {\alpha_k}^2$ շարքը զուգամետ է, ապա (2.4.4) անհավասարությունից հետևում է, որ $\{x^k\}$-ն սահմանափակ հաջորդականություն է: Այստեղից հետևում է, որ սահմանափակ կլինի նաև $\{v^k\}$ հաջորդականությունը: Այսինքն, գոյություն ունի $C > 0$ թիվ այնպիսին, որ

$$\|v^k\| \le C : \qquad (2.4.5)$$

Ցույց տանք, որ գոյություն ունի ինդեքսների այնպիսի $\{k_s\}$ ենթահաջորդականություն, որ

$$(v^{k_s}, x^* - x^{k_s}) \to 0, \text{ երբ } k_s \to \infty : \qquad (2.4.6)$$

Ենթադրենք հակառակը: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $N > 0$ թիվ, որ ինչ-որ K համարից սկսած տեղի ունի

$$(f'(x^k), x^* - x^k) < -N < 0, \ \forall k > K \qquad (2.4.7)$$

անհավասարությունը:

Օգտվելով (2.4.3)-(2.4.7) անհավասարություններից՝ կստանանք

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \le \|x^0 - x^*\|^2 - \frac{2N}{C} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^2 : \quad (2.4.8)$$

Այս անհավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $k \to \infty$, կստանանք, որ նրա աջ մասը ձգտում է $-\infty$, իսկ ձախ մասը ոչ բացասական թիվ է, ինչը հակասություն է: Այժմ $\{x_{k_s}\}$ ենթահաջորդականության կետերի համար, կիրառելով ուռուցիկ ֆունկցիայի հիմնական անհավասարությունը, կունենանք`

$$0 \geq f(x^*) - f(x^{k_s}) \geq (v^{k_s}, x^* - x^{k_s}) :$$

Այսպեղ անցնելով սահմանի, երբ $k_s \to \infty$ և հաշվի առնելով նաև (2.4.6)-ը, կստանանք

$$f(x^{k_s}) \to f(x^*) = \min_{x \in M} f(x) :$$

Քանի որ $\{x^{k_s}\}$-ը սահմանափակ հաջորդականություն է, ապա նրանից կարելի է անջատել զուգամետ են–թահաջորդականություն: Ընդհանրությունը չխախտելով, են-թադրենք որ $x^{k_s} \to \bar{x}$: Այսպեղից, օգտվելով f-ի անընդհատությունից, կստանանք

$$f(x^{k_s}) \to f(\bar{x}) = f(x^*) = \min_{x \in M} f(x),$$

այսինքն` $\bar{x} \in M^*$: Ցույց տանք, որ $x^k \to \bar{x}$: Քանի որ $x^{k_s} \to \bar{x}$, ապա կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի K համար, որ երբ $k_s > K$, ապա տեղի ունի

$$\|x^{k_s} - \bar{x}\|^2 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.4.9}$$

անհավասարությունը: Կարող ենք նաև համարել, որ ցան–կացած p համարի համար տեղի ունի

$$\sum_{i=k_s}^{k_s+p-1} \alpha_i^2 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.4.10}$$

անհավասարությունը: Օգտվելով (2.4.3) և (2.4.9)-(2.4.10) անհավասարություններից՝ ստանում ենք, որ երբ $k_s > K$, ապա ցանկացած p բնական թվի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\|p^{k_s+p} - \bar{x}\|^2 \leq \|x^{k_s} - \bar{x}\|^2 + \sum_{i=k_s}^{k_s+p-1} \alpha_i^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon :$$

Իսկ սա նշանակում է, որ

$$x^k \to \bar{x} :$$

◄

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ապրիորի մեթոդով լուծել հետևյալ խնդիրները:
Վերցնել $x^0 = (1,1),\ \alpha_k = 1/k+1, k = 0,1,2,... :$
Կատարել իտերացիայի երկու քայլ:

1. $3x_1^2 + x_2^2 + 11x_2 + 3x_1 \to min :$
2. $-2x_1^2 - x_2^2 + 8x_1 + 6x_2 - 25 \to max :$

2.5 Գրադիենտի պրոյեկտման մեթոդը

Դիցուք $M \subseteq R^n$-ը փակ ուռուցիկ բազմություն է: Նշանակենք $\Pi_M(a)$-ով a վեկտորի **պրոյեկցիան** M բազմության վրա: Այսինքն՝ $\Pi_M(a)$-ն M բազմության ամենամոտիկ կետն է a վեկտորից:

Ճշմարիտ է հետևյալ պնդումը (տե՛ս, օրինակ՝ [8]):

Լեմմա 2.5.1: Π_M *օպերատորը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին* $L = 1$ *հաստատունով, այսինքն՝*

$$\|\Pi_M(x) - \Pi_M(y)\| \leq \|x - y\| \;\; \forall\, x,\; y \in R^n : \qquad (2.5.1)$$

Դիտարկենք մաթեմատիկական ծրագրավորման հետևյալ խնդիրը՝

$$f(x) \to min,\; x \in M :$$

Այստեղ $f(x)$-ը դիֆերենցելի ֆունկցիա է, իսկ M-ը ուռուցիկ բազմություն է: Գրադիենտի պրոյեկման մեթոդով այս խնդրի լուծման համար կառուցվում է $\{x_k\}$ հաջորդականություն հետևյալ ռեկուրենտ առնչությամբ.

$$x^0 \in M,\;\; x^{k+1} = \Pi_M(x^k - \alpha_k f'(x^k)),\; k = 0, 1, 2, ... :$$

Ուսումնասիրենք այն պայմանները, որոնց դեպքում այս հաջորդականությունը կզուգամիտի f-ի որևէ մինիմումի կետի:

Լեմմա 2.5.2: *Դիցուք* f*-ը* θ *հաստատունով ուժեղ ուռուցիկ ֆունկցիա է* M *ուռուցիկ բազմության վրա: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.*

$$(f'(x) - f'(y), x - y) \geq 2\theta\|x - y\|^2 \;\;\; \forall\, x,\; y \in M : \quad (2.5.2)$$

► ըստ f ֆունկցիայի ուժեղ ուռուցիկության (1.1.2) սահմանման՝ կամայական x, $y \in M$ կետերի համար ունենք՝

$$f(x) - f(y) \geq (f'(x), x - y) + \theta\|x - y\|^2,$$

$$f(y) - f(x) \geq (f'(y), y - x) + \theta\|x - y\|^2 :$$

Գումարելով այս երկու անհավասարությունները՝ կստանանք (2.5.2) անհավասարությունը:
◀

Հենվելով այս արդյունքների վրա՝ ապացուցենք պրոյեկման մեթոդի զուգամիտության հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2.5.1: *Դիցուք f-ը θ հաստատունով ուժեղ ուռուցիկ ֆունկցիա է M փակ ուռուցիկ բազմության վրա: Ենթադրենք նաև, որ f' գրադիենտը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին M բազմության վրա $L > 0$ հաստատունով, այսինքն*

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq L\|x - y\| \; \forall x, \; y \in M :$$

Այդ դեպքում, եթե պրոյեկման մեթոդում որպես α_k քայլեր վերցնենք միևնույն հաստատունը $(0, \frac{4\theta}{L^2})$ միջակայքից, ապա $\{x^k\}$ հաջորդականությունը կզուգամիտի f-ի միակ մինիմումի կետին երկրաչափական պրոգրեսիայի արագությամբ:

▶ Դիտարկենք հետևյալ օպերատորը՝ $\mathbf{A}_\alpha : M \to M$,

$$\mathbf{A}_\alpha(x) \equiv \Pi_M(x - \alpha f'(x)) :$$

Ցույց տանք, որ այն սեղմող օպերատոր է: Օգտագործելով (2.5.1) – (2.5.2) անհավասարությունները՝ կունենանք.

$$\|\mathbf{A}_\alpha(x) - \mathbf{A}_\alpha(y)\|^2 = \|\Pi_M(x - \alpha f'(x)) - \Pi_M(y - \alpha f'(y))\|^2 \leq$$

$$\leq \|x - \alpha f'(x) - y + \alpha f'(y)\|^2 \leq \|x - y + \alpha(f'(y) - f'(x))\|^2 =$$

$$= \|x - y\|^2 + 2\alpha(x - y, f'(y) - f'(x)) + \alpha^2\|f'(x) - f'(y)\|^2 =$$

$$\leq \|x - y\|^2(1 - 4\theta\alpha + \alpha^2 L^2) : \qquad (2.5.3)$$

Ընտրենք α այպես, որ

$$q \equiv \sqrt{1 - 4\alpha\theta + \alpha^2 L^2}$$

թիվը փոքր լինի մեկից: Եթե $\alpha \in (0, \frac{4\theta}{L^2})$, ապա $q < 1$ և հետևաբար $\mathbf{A}_\alpha$ օպերատորը կլինի սեղմող: Դիցուք x^*-ը նրա անշարժ կետն է M բազմության վրա, այսինքն՝

$$\Pi_M(x^* - \alpha f'(x^*)) = x^* : \qquad (2.5.4)$$

Ցույց տանք, որ այդ անշարժ կետը f-ի մինիմումի կետն է: Իրոք, քանի որ պրոյեկտման օպերատորը բավարարում է

$$(\Pi_M(a) - a, x - \Pi_M(a)) \geq 0 \; \forall a \in R^n, \; \forall x \in M \qquad (2.5.5)$$

անհավասարությանը (տե՛ս, օրինակ՝ [8]), ապա այստեղ տեղադրելով $a = x^* - \alpha f'(x^*)$, $\Pi_M(a) = x^*$ և հաշվի առնելով (2.5.4)-ը, կստանանք՝

$$(x^* - x^* + \alpha f'(x^*), x - x^*) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f'(x^*), x - x^*) \geq 0 \;\; \forall \, x \in M : \qquad (2.5.6)$$

Վերջապես, հաշվի առնելով նաև ուռուցիկ ֆունկցիայի հիմնական անհավասարությունը, (2.5.6)-ից կունենանք

$$f(x) - f(x^*) \geq (f'(x^*, x - x^*) \geq 0 \; \forall x \in M,$$

այսինքն x^*-ը f-ի մինիմումի կետն է:

Բացի դրանից (2.5.3)-ից հետևում է, որ

$$\|x^{k+1} - x^*\| = \|\mathbf{A}_\alpha x^k - \mathbf{A}_\alpha x^*\| \leq q\|x^k - x^*\| \leq \ldots$$

$$\leq q^{k+1}\|x^0 - x^*\| :$$

Իսկ սա նշանակում է, որ $\{x^k\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է x^* կետին երկրաչափական պրոգրեսիայի արագությամբ:
◀

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

---

1. Դիցուք $a \in R^n$ կամայական կետ է: Ապացուցել, որ եթե

ա) $M = \{x \in R^n / \|x - x^0\| \leq r\}$,
ապա

$$\Pi_M(a) = x^0 + \frac{a - x^0}{\|a - x^0\|} r;$$

բ) եթե $M = \{x \in R^n / b_j \leq x_j \leq c_j,\ j \in [1:n]\}$,
ապա

$$(\Pi_M(a))_j = \begin{cases} b_j, & \text{եթե } a_j < b_j \\ a_j, & \text{եթե } b_j \leq a_j \leq c_j \\ c_j, & \text{եթե } a_j > c_j; \end{cases}$$

գ) եթե $M = \{x \in R^n / x_j \geq 0,\ j \in [1:n]\}$,
ապա

$$\Pi_M(a) = (max(0, a_1),\ ...,\ max(0, a_n)) :$$

Առաջադրանք 3: Կազմել ծրագիր, որը գրադիենտի պրոյեկտման մեթոդով կիրականացնի

$$f(x) = 1/2(\mathbf{A}x, x) + (b, x)$$

քառակուսային ֆունկցիայի մինիմիզացիան գնդի և զուգահեռանիստի վրա: Որպես պրոյեկտման օպերատորներ վերցնել վերևում նշված բանաձևերը: L հաստատունը վերցնել $\mathbf{A}$ մատրիցի նորմը, ուժեղ ուռուցիկության θ հաստատունը վերցնել մատրիցի մինիմալ սեփական արժեքը, իսկ

$$\alpha_k = \frac{2\theta}{L^2} :$$

Կանգառի քայլ համարել $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_0$ պայմանը, որտեղ $\varepsilon_0 > 0$ նախապես տրված ճշտություն է:

Գլուխ 3

Ուռուցիկ անալիզ

Ուռուցիկ անալիզը մաթեմատիկական անալիզի բաժին է, որն ուսումնասիրում է ուռուցիկ բազմությունների և ուռուցիկ ֆունկցիաների հատկությունները:

Ուռուցիկ անալիզի գաղափարները և փաստերը ֆունդամենտալ նշանակություն ունեն օպտիմիզացիայի թվային մեթոդների տեսությունում: Դրանք լայն կիրառություններ ու նեն նաև կիրառական մաթեմատիկայի այնպիսի բնագավառներում ինչպիսիք են՝ խաղերի տեսությունը, գործույթների հետազոտումը, մաթեմատիկական էկոնոմիկան և այլն:

Այս գլուխը կարելի է դիտարկել որպես ուռուցիկ անալիզի ներածություն: Այստեղ բերված փաստերը և պնդումները օգտագործվում են հետագայում մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրներում Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը հիմնավորելու համար: Նշենք, որ կան նաև լրացուցիչ փաստեր, որոնք ձևակերպված են խնդիրների տեսքով:

Հարկ ենք համարում նշել, որ ուռուցիկ անալիզի ժամանակակից մեթոդներին կարելի է ծանոթանալ [5, 7, 11] աշխատանքներում:

3.1 Ուռուցիկ բազմությունների անջատման թեորեմները

Սահմանում 3.1.1: *Դիցուք $p \in R^n$-ն ոչ զրոյական վեկտոր է, իսկ α-ն իրական թիվ է:*

$$H = \{x \in R^n / (p, x) = \alpha\}$$

բազմությունը կոչվում է հիպերհարթություն, իսկ

$$H_+ = \{x \in R^n / (p, x) \geq \alpha\}, \;\; H_- = \{x \in R^n / (p, x) \leq \alpha\}$$

բազմությունները՝ այդ հիպերհարթությամբ ծնված կիսատարածություններ:

Սահմանում 3.1.2: M_1, $M_2 \subseteq R^n$ *բազմությունները կոչվում են* ***անջատվող հիպերհարթությամբ****, եթե գոյություն ունի այնպիսի $p \neq 0$ վեկտոր, որ*

$$(p, x) \leq (p, y) \; \forall x \in M_1, \; \forall y \in M_2 :$$

Սա նշանակում է, որ գոյություն ունի այնպիսի H հիպերհարթություն, որ

$$M_1 \subseteq H_-, \;\; M_2 \subseteq H_+ :$$

Թեորեմ 3.1.1: *Դիցուք M_1, $M_2 \subseteq R^n$ այնպիսի ուռուցիկ բազմություններ են, որ $M_1 \cap M_2 = \emptyset$: Այդ դեպքում նրանք անջատվում են հիպերհարթությամբ:*

►

Թեորեմի ապացույցը հենվում է հետևյալ երկու պնդումների վրա:

Լեմմա 3.1.1: *Եթե M-ը փակ ուռուցիկ բազմություն է և $a \notin M$, ապա այդ կետը հիպերհարթությամբ անջատվում է M բազմությունից:*

▶

Գտնենք a կետի պրոեկցիան M բազմության վրա: Ցույց տանք, որ այն գոյություն ունի և միակն է: Վերցնենք a կենտրոնով և $r \equiv inf_{x \in M} \|a - x\| + \varepsilon$ շառավղով $B_r(a)$ գունդը, որտեղ $\varepsilon > 0$ ֆիքսած թիվ է: Քանի, որ գունդը փակ սահմանափակ բազմությունն է, ապա $M \cap B_r(a)$ հատումը կոմպակտ է: Հետևաբար, a կետի հեռավորությունը այդ հատումից հասանելի է: Դժվար չէ համոզվել, որ այդ կետը ամենամոտիկն է նաև M բազմությունից, այսինքն դա $\Pi_M(a)$ կետն է : Ցույց տանք $\Pi_M(a)$-ի միակությունը: Ենթադրենք գոյություն ունի երկու ամենամոտիկ կետ: Դիցուք դրանք b, c կետերն են: Եթե a, b, c կետերը եռանկյուն են կազմում, ապա այն հավասարասրուն է, որի սրունքը հավասար է $d \equiv \inf_{x \in M} \|x - a\|$, իսկ հիմքը $[c, b]$ հատվածն է: Քանի, որ M ուռուցիկ է, ապա $[c, b] \in M$: Հետևաբար a գագաթից տարած բարձության հիմքը $[c, b]$ հատվածի միջնակետն է: Քանի որ բարձությունը փոքր է սրունքից և սրունքը մինիմալ հեռավորությունն է, ապա ստացանք հակասություն: Նշենք նաև a, b, c կետերը միևնույն գծի վրա գտնվել չեն կարող, քանի որ $a \notin M$: Այժմ $[\Pi_M(a), a]$ հատվածի g միջնակետով տանենք հիպերհարթություն, որի նորմալը $a - \Pi_M(a)$ վեկտորն է: Ցույց տանք, որ այդ հիպերհարթությունը անջատում է a կետը M բազմությունից: Դիցուք H_+ այն կիսատարածությունն է, որը պարունակում է a կետը, իսկ H_-

կիսապարածությունը չի պարունակում a-ն: Ցույց տանք, որ

$$M \subset H_- :$$

Նախ պարզ է, որ g կետի պրոեկցիան M բազմության վրա $\Pi_M(a)$ կետն է: Ենթադրենք, որ գոյություն ունի $e \in M \cap H_-$: Այդ դեպքում $g, \; \Pi_M(a), e$ գագաթներով եռանկյան մեջ g գագաթից տարված բարձրության հիմքը կպատկանա $[\Pi_M(a), e] \subseteq M$ հատվածին և այդ բարձրությունը փոքր է $[g, \Pi_M(a)]$ հատվածի երկարությունից, որը հակասություն է, քանի որ այն g կետի մինիմալ հեռավորությունն է M բազմությունից:
◄

Լեմմա 3.1.2: *Դիցուք M ուռուցիկ բազմություն է, իսկ $a \notin M$: Այդ դեպքում a կետը հիպերհարթությամբ անջատվում է M բազմությունից:*
► Եթե $a \notin \overline{M}$, ապա հանգում ենք նախորդ դեպքին, քանի որ այս դեպքում a կետը կարելի է հիպերհարթությամբ անջատել $\overline{M}$ բազմությունից հետևաբար՝ M բազմությունից:
Այժմ ենթադրենք, որ a-ն M-ի եզրային կետ է: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $\{x^k\} \notin \overline{M}$ հաջորդականություն, որ $x^k \to a$: Համաձայն լեմմա 3.1.1-ի յուրաքանչյուր x^k կետ կարելի է անջատել M բազմությունից հիպերհարթությամբ: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի p^k միավոր վեկտորներ, որ

$$(p^k, x) \leq (p^k, x^k) \;\; \forall x \in M :$$

Չսահմանափակելով ընդհանրությունը, կարելի է ենթադրել, որ $p^k \to p^0 \neq 0$: Անցնելով սահմանի՝ կստանանք

$$(p^0, x) \leq (p^0, a) \; \forall x \in M,$$

ինչը նշանակում է a կետի և M բազմության անջատում հիպերհարթությամբ:

◀

Այժմ անցնենք թեորեմի ապացույցին: Նշանակենք $M \equiv \equiv M_1 - M_2$: M-ը ուռուցիկ է և քանի որ $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, ապա $0 \notin M$: Համաձայն լեմմա 3.1.2-ի՝ 0 կետը կարելի է անջատել M բազմությունից: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի այնպիսի $p \neq 0$ վեկտոր, որ

$$(p, x - y) \leq 0 \; \forall x \in M_1, \; \forall y \in M_2 :$$

Այսպեղից,

$$(p, x) \leq (p, y) \; \forall x \in M_1, \forall y \in M_2 :$$

◀

Հետևանք 3.1.1: *Դիցուք $M \subseteq R^n$-ը ուռուցիկ բազմություն է, իսկ a-ն նրա եզրային կետը: Այդ դեպքում a կետով կարելի է տանել այնպիսի հիպերհարթություն, որ M բազմությունը ընկած լինի այդ հիպերհարթությամբ ծնված կիսատարածություններից որևէ մեկում: Այդպիսի հիպերհարթությունը կոչվում է* ***հենման*** *հիպերհարթություն:*

Սահմանում 3.1.3: *Դիցուք M_1 և $M_2 \subseteq R^n$: Կասենք, որ այդ բազմությունները* ***խիստ*** *են անջատվում հիպերհարթությամբ, եթե գոյություն ունեն այնպիսի p վեկտոր և $\varepsilon > 0$ թիվ, որ*

$$(p, x) \leq (p, y) - \varepsilon \;\; \forall x \in M_1, \; \forall y \in M_2 :$$

Հետագա դասախոսությունների որոշ թեորեմների, մասնավորապես Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդի, հիմնավոր շարադրման համար կարևոր է հետևյալ պնդումը, որը բերում ենք առանց ապացույցի (տե՛ս, օրինակ՝ [7-8]):

Թեորեմ 3.1.2: *Դիցուք $M_1 \subset R^n$ փակ ուռուցիկ բազմություն է, իսկ $M_2 \subset R^n$ ուռուցիկ կոմպակտ է և*

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset :$$

Այդ դեպքում այս բազմությունները խիստ անջատվում են հիպերհարթությամբ:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Գրել այն հիպերհարթության հավասարումը, որն անջատում է $(-1, 2, 1, -3)$ կետը $M \subseteq R^4$ բազմությունից, որը տրվում է անհավասարությունների հետևյալ համակարգով.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 \leq 1, \\ -3x_2 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 2, \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 9 : \end{cases}$$

2. Ապացուցել հետևյալ պնդումը: Որպեսզի $M \subseteq R^n$ փակ բազմությունը լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած $b \notin M$ կետ խիստ անջատվի հիպերհարթությամբ M բազմությունից:

3. Դիցուք ուռուցիկ բազմության տրված կետով կարելի է տանել երկու հենման հիպերհարթություն: Ապացուցել, որ այդ կետով անցնում են անթիվ բազմության հենման հիպերհարթություններ:

4. Դիցուք $M_1, M_2 \subset R^n$ այնպիսի ուռուցիկ բազմություններ են, որ

$$intM_2 \neq \emptyset \text{ և } M_1 \cap intM_2 = \emptyset :$$

Ապացուցել, որ M_1 և M_2 բազմությունները անջատվում են հիպերհարթությամբ:

3.2 Կարաթեոդորի թեորեմը

Սահմանում 3.2.1: *Դիցուք M-ը R^n-ի ենթաբազմություն է: Այդ բազմության* ***ուռուցիկ թաղանթ*** *կոչվում է հետևյալ բազմությունը.*

$$convM \equiv \{y \in R^n / y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i,\ x^i \in M,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0,\ i \in [1:k],\ k = 1, 2, ...\} :$$

Լեմմա 3.2.1: *Դիցուք ոչ զրոյական $x \in R^n$ վեկտորը ներկայացվում է $X = \{x^1, x^2, \ldots\ \ , x^m\}$ համախմբի վեկտորների գծային ոչ բացասական կոմբինացիայով (գծային կոմբինացիայի գործակիցները ոչ բացասական թվեր են): Այդ դեպքում x-ը ներկայացվում է նաև այդ համակարգի գծորեն անկախ մի ենթահամակարգի վեկտորների գծային ոչ բացասական կոմբինացիայի միջոցով:*

► Դիցուք

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i,\ \alpha_i \geq 0,\ i \in [1:m] :$$

Եթե X համախմբի վեկտորները գծորեն անկախ են, ապա պնդումն ապացուցված է: Դիցուք այժմ X համախմբի վեկտորները գծորեն կախված են: Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_m$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ այնպիսին, որ

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i :$$

Կարող ենք ենթադրել, որ այդ գործակիցներից որևէ մեկը դրական է: Նշանակենք

$$\alpha_0 \equiv \min_{\lambda_i > 0} \frac{\alpha_i}{\lambda_i} = \frac{\alpha_s}{\lambda_s} :$$

Ունենք՝

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i - \alpha_0 \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - \alpha_0 \lambda_i) x^i :$$

Ակնհայտ է, որ

$$\alpha_s - \alpha_0 \lambda_s = 0 \text{ և } \alpha_i - \alpha_0 \lambda_i \geq 0 \ \forall i :$$

Այստեղից հետևում է, որ x վեկտորը ներկացվում է X-ի ինչ-որ վեկտորների ոչ բացասական կոմբինացիայով, որոնց քանակը փոքր է m-ից: Այսպես շարունակելով՝ կհանգենք գծորեն անկախ համակարգի:
◄

Թեորեմ 3.2.1: *Դիցուք $x \in R^n$ վեկտորը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով.*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i,\ \lambda_i \geq 0,\ i \in [1:m],\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ m > n : \tag{3.2.1}$$

Այդ դեպքում $X = \{x^1, ..., x^m\}$ *համախմբի մեջ գոյություն ունի այնպիսի մի* $\{x^{i_1}, x^{i_2}, ..., x^{i_{n+1}}\}$ *ենթահամախումբ և ոչ բացասական* $\alpha_{i_1} \geq 0,\ \alpha_{i_2} \geq 0, ... \alpha_{i_{n+1}} \geq 0$ *թվեր, որ* $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_{i_j} = 1$ *և*

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_{i_j} x^{i_j} :$$

► Դիտարկենք $(x, 1) \in R^{n+1}$ վեկտորը: Ըստ (3.2.1)-ի՝ ունենք

$$(x, 1) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x^i, 1) :$$

Համաձայն **լեմմա 3.2.1-ի՝** գոյություն ունեն վեկտորների գծորեն անկախ այնպիսի $\{x^{i_1}, x^{i_2}, ..., x^{i_k}\}$ համախումբ և ոչ բացասական թվեր $\alpha_{i_1}, \alpha_2, , ..., \alpha_{i_k}$, որ

$$(x, 1) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j} (x^{i_j}, 1) :$$

Այսինքն՝

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j} x^{i_j},\ \alpha_{i_1} \geq 0,\ \alpha_{i_2} \geq 0, ..., \alpha_{i_k} \geq 0,\ \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j} = 1 : \tag{3.2.2}$$

Բայց, քանի որ $n+1$ չափանի փարածությունում գծորեն անկախ համակարգի վեկտորների քանակը $n+1$-ից ավել չէ , ապա $k \leq n+1$: Եթե $k = n+1$, ապա թեորեմն ապացուցված է: Եթե $k < n+1$, ապա ավելացնելով զրոյական անդամներ (3.2.2) գումարի անդամների քանակը դարձնում ենք $n+1$: ◄

Հետևանք 3.2.1 *(Կարաթեոդորի թեորեմ): Դիցուք M-ը R^n-ի ենթաբազմություն է: Այդ դեպքում՝*

$$conv M = \{y \in R^n / y = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x^i, \ x^i \in M,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geq 0, \ i \in [1:n+1]\}:$$

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

---

1. Գտնել հետևյալ բազմությունների ուռուցիկ թաղանթ– ները:

ա) $M = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_1 x_2 = 1\}$;

բ) $M = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_2 = \exp(-x_1)\}$;

գ) $M = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_1, \ \ x_2 \in [0,1]\} \cup \{(x_1, x_2) \in \in R^2 / x_2 = x_1\}$:

2. Ապացուցել, որ բաց բազմության ուռուցիկ թաղանթը բաց բազմություն է:

3. Ապացուցել, որ կոմպակտ բազմության ուռուցիկ թա– ղանթը կոմպակտ է:

4. Անջատվում է արդյոք $(1,-1,0)$ կետը

$$M = conv\{(-1,1,2), \ (2,-1,-3),$$

$$(-2,3,-1), \ (-5,-1,3)\}$$

բազմությունից հիպերհարթությամբ:

5. Ապացուցել, որ $convM$-ը մինիմալ այն ուռուցիկ բազմությունն է, որը պարունակում է M-ը:

6. Ապացուցել հետևյալ պնդումը: Որպեսզի $M \subseteq R^n$ բազմությունը լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$convM = M :$$

7. Դիցուք $M = conv\{x^1, x^2, ..., \ x^m\}$, իսկ $f(x)$-ը ուռուցիկ ֆունկցիա է, որոշված M բազմության վրա: Ապացուցել, որ

$$\max_{x \in M} f(x) = \max_{i \in [1:m]} f(x^i) :$$

Ցուցում: Օգտվել Յենսենի անհավասարությունից:

8. Գտնել $f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը հետևյալ բազմության վրա.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \ x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \ x_1 - 3x_2 \leq 2, \\ x_1, \ x_2 \geq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad : \end{cases}$$

3.3 Հելլիի թեորեմը

Թեորեմ 3.3.1 *(Ռադոն)*: *Դիցուք տրված է վեկտորների* $X = \{x^1, x^2, ..., \ x^k\}$ $(k \ \geq \ n + 2)$ *համախումբը* R^n*-ում: Այդ դեպքում այդ բազմությունը կարելի է տրոհել երկու ենթաբազմությունների՝* Y *և* Z *այնպիսին, որ*

$$convY \cap convZ \neq \emptyset :$$

► Դիտարկենք վեկտորների

$$\{x^2 - x^1, x^3 - x^1, ..., x^k - x^1\}$$

համախումբը: Քանի որ այս բազմության վեկտորների քանակը մեծ կամ հավասար է $n+1$, ապա նրանք գծորեն կախված են: Հետևաբար, գոյություն ունեն $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_k$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի այնպիսին, որ

$$\sum_{i=2}^{k}(x^i - x^1) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^i = 0, \text{ որտեղ } \alpha_1 = -\sum_{i=2}^{k}\alpha_i :$$

Այսպիսով, գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_1, ...,$ α_k գործակիցներ, որոնցից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի այնպիսին, որ

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^i = 0, \ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 0 : \qquad (3.3.1)$$

Այն α_i գործակիցները, որոնք հավասար են զրոյի դեն գցենք և ընդհանրությունը չխախտելով ենթադրենք, որ

$$\alpha_1 > 0, ..., \ \alpha_{k'} > 0, \ \alpha_{k'+1} < 0, ..., \alpha_k < 0 :$$

Նշանակենք

$$\nu = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = -\sum_{i=k'+1}^{k}\alpha_i :$$

(3.3.1)-ից կստանանք

$$\sum_{i=1}^{k'}\frac{\alpha_i}{\nu}x^i = \sum_{i=k'+1}^{k} -\frac{\alpha_i}{\nu}x^i : \qquad (3.3.2)$$

Նշանակելով

$$Y = \{x^1, ..., x^{k'}\}, \quad Z = \{x^{k'+1}, ..., x^k\}$$

(3.3.2)-ից կստանանք

$$x \equiv \sum_{i=1}^{k'} \frac{\alpha_i}{\nu} x^i = \sum_{i=k'+1}^{k} -\frac{\alpha_i}{\nu} x^i \in convX \cap convY :$$

◀

Թեորեմ 3.3.2 *(Հելլի)*: *Եթե $\{A_\alpha\}$-ն R^n տարածության կոմպակտ ուռուցիկ ենթաբազմությունների այնպիսի ընտանիք է, որ նրա ցանկացած $n+1$ քանակով բազմությունների հատումը դատարկ չէ, ապա*

$$\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset :$$

► Քանի, որ A_α բազմությունները կոմպակտ են, ապա բավական է ցույց տալ, որ այդ ընտանիքի ցանկացած վերջավոր քանակով բազմությունների հատումը դատարկ չէ: Ապացույցը կտարենք ինդուկցիայով՝ ըստ բազմությունների քանակի: Դիցուք $A_1, A_2, ...,\ A_k\ \ (k > n+1)$ բազմություններ են ընտանիքից և այդ բազմություններից ցանկացած $k-1$-ի հատումը դատարկ չէ: Ապացուցենք, որ

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i \neq \emptyset :$$

Նշանակենք

$$D_i = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} ... \cap A_k, \ \ i \in [1:k] : \quad (3.3.3)$$

Ըստ ենթադրության՝ $D_i, \ \ i \in [1 : k]$ բազմությունները դատարկ չեն: Ընտրենք կամայական $x^i \in D_i$ էլեմենտներ և ձևավորենք $X = \{x^1, x^2, ..., \ x^k\}$ համախումբը: Ըստ **Ռադոնի թեորեմի՝** այդ համախումբը կարելի է տրոհել այնպիսի երկու մասերի, որ $X = Y \bigcup Z, \ Y \bigcap Z = \emptyset$ և

$$convY \bigcap convZ \neq \emptyset :$$

Ենթադրենք

$$Y = \{x^1, x^2, ..., x^{k'}\}, \ Z = \{x^{k'+1}, ..., x^k\} :$$

Ցույց տանք, որ եթե

$$x \in convY \bigcap convZ,$$

ապա

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} A_i :$$

Ունենք

$$x = \sum_{i=1}^{k'} \lambda_i x^i, \ \ \sum_{i=1}^{k'} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \, i \in [1 : k'] :$$

Այստեղից, քանի որ

$$x^i \in \bigcap_{j=k'+1}^{k} A_j, \ \forall i \leq k'$$

և $A_j, \ j \in [1 : k]$ բազմությունները ուռուցիկ են, ապա

$$x \in \bigcap_{j=k'+1}^{k} A_j :$$

Մյուս կողմից, քանի որ

$$x = \sum_{j=k'+1}^{k} \lambda_j x^j,$$

ապա

$$x \in \bigcap_{j=1}^{k'} A_j :$$

Այսպիսով,

$$x \in \bigcap_{j=1}^{k} A_j :$$

◀

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

---

1. Դիցուք R^2 հարթության n հատ կետեր բավարարում են հետևյալ պայմանին. նրանցից ցանկացած երեքը գտնվում են միավոր շառավղով ինչ-որ շրջանի ներսում: Ապացուցել, որ բոլոր կետերն են գտնվում միավոր շառավղով միևնույն շրջանի ներսում:
   Ցուցում: Դիցուք $a^1, a^2, ..., a^n$-ը տրված կետերն են: Դիտարկել

   $$A_i = \{x \in R^2 / \|x - a^i\| \leq 1\}, \;\; i \in [1:n]$$

   շրջանների բազմությունը և այդ ընտանիքի նկատմամբ կիրառել Հելլիի թեորեմը:

2. Դիցուք $M \subset R^n$ ուռուցիկ կոմպակտ բազմությունը ծածկված է բաց կիսապարածությունների ընտանիքով: Ապացուցել, որ այդ ընտանիքից կարելի է ընտրել $n+1$ հատ կիսապարածություններ, որոնք նույնպես ծածկում են M-ը:

3. Դիցուք $M \subset R^2$-ը d տրամագծով կոմպակտ բազմություն է: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $d/\sqrt{3}$ շառավղով շրջան, որը պարունակում է M-ը:
Ցուցում: Նախ ցույց տալ, որ այդ բազմության ցանկացած երեք կետերի համար գոյություն ունի $d/\sqrt{3}$ շառավղով շրջան, որը պարունակում է այդ կետերը: Այնուհետև այդ շրջանների նկատմամբ կիրառել Հելլիի թեորեմը:

Նշենք, որ Հելլիի թեորեմի բազմաթիվ կիրառություններին կարելի է ծանոթանալ [9]-ում:

3.4 Ուռուցիկ ֆունկցիայի սուբդիֆերենցիալը

Սահմանում 3.4.1: *Դիցուք f-ը ուռուցիկ ֆունկցիա է՝ որոշված R^n-ի վրա: v վեկտորը կոչվում է սուբգրադիենտ x^0 կետում, եթե տեղի ունի*

$$f(x) - f(x^0) \geq (v, x - x^0)\ \forall x \in R^n \tag{3.4.1}$$

անհավասարությունը:
*f-ի սուբգրադիենտների բազմությունը x^0 կետում կոչվում է **սուբդիֆերենցիալ** և նշանակվում է $\partial f(x^0)$ սիմվոլով:*

Թեորեմ 3.4.1: *$\partial f(x^0)$ բազմությունը ոչ դատարկ ուռուցիկ կոմպակտ է:*

► Նախ ցույց տանք $\partial f(x^0)$-ի ուուցիկությունը:
Եթե $v^1 \in \partial f(x^0), v^2 \in \partial f(x^0)$, ապա

$$f(x) - f(x^0) \geq (\alpha v^1 + (1-\alpha)v^2, x - x^0) \; \forall x \in R^n, \; \forall \alpha \in [0,1],$$

որտեղից հետևում է $\partial f(x^0)$-ի ուռուցիկությունը:
$\partial f(x^0)$ բազմության փակությունը ակնհայտ Է: Ապացուցենք, որ այն դատարկ չէ: Դիտարկենք f ֆունկցիայի վերգրաֆիկը՝

$$epi(f) = \{(\beta, x) \in R^{n+1} / \beta \geq f(x)\} :$$

Քանի որ այս բազմությունը փակ է և ուռուցիկ, ապա նրա եզրային $(f(x^0), x^0)$ կետից կարելի է տանել հենման հիպերհարթություն: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի այնպիսի ոչ զրոյական $(c, v) \in R^{n+1}$ վեկտոր, որ

$$c\beta + (v, x) \geq cf(x^0) + (v, x^0) \; \forall (\beta, x) \in epi(f) : \qquad (3.4.2)$$

Եթե $c = 0$, ապա (3.4.2)-ից ստանում ենք

$$(v, x - x^0) \geq 0 \; \forall x \in R^n :$$

անհավասարությունը: Այստեղից հետևում է, որ $v = 0$, որը հակասություն է, քանի որ $(c, v) \neq 0$: Ցույց տանք, որ $c > 0$:
(3.4.2) անհավասարությունը $x = x^0$ դեպքում ունի

$$c(\beta - f(x^0)) \geq 0$$

տեսքը, որտեղից անմիջականորեն հետևում է, որ $c > 0$: Այժմ (3.4.2) անհավասարության երկու մասերը բաժանենք $c > 0$ թվի վրա և այնուհետև տեղադրելով $\beta = f(x)$ կստանանք

$$f(x) - f(x^0) \geq (-\frac{v}{c}, x - x^0),$$

որտեղից հետևում է, որ

$$-\frac{v}{c} \in \partial f(x^0) :$$

Ապացուցենք, որ $\partial f(x^0)$ բազմությունը սահմանափակ է: Ենթադրենք հակառակը: Այդ դեպքում գոյություն կունենա այնպիսի $\{v^k\}$ $(v^k \in \partial f(x^0))$ հաջորդականություն, որ $\|v^k\| \to \infty$: (3.4.1) անհավասարությունում տեղադրելով $x = x^0 + v^k/\|v^k\|$, կստանանք

$$f(x) - f(x^0) \geq \|v^k\| : \tag{3.4.3}$$

Քանի որ f-ը անընդհատ է, ապա (3.4.3) անհավասարության ձախ մասը սահմանափակ է, իսկ աջ մասը ձգտում է անվերջության, երբ $k \to \infty$, ինչը հակասություն է:
◄

Ֆունկցիայի մինիմիզացիայի ալգորիթմների մշակման համար կարևոր է նկարագրել և հաշվել ֆունկցիայի նվազման ուղղությունները յուրաքանչյուր կետում: Դիֆերենցելիության դեպքում այդ հարցը մեխանիկորեն լուծվում է՝ նվազման ուղղությունը հակագրադիենտի ուղղությունն է: Սակայն երբ ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ այդ խնդիրը բարդ է: Բայց ուռուցիկ որոշ դասի ֆունկցիաների համար սուբգրադիենտի օգնությամբ հնարավոր է նկարագրել ֆունկցիաների նվազման ուղղությունները և կառուցել մինիմիզացիայի ալգորիթմներ: Ստորև բերված պնդումները նկարագրում են այդ ֆունկցիաները և նրանց նվազման ուղղությունները: Ճիշտ են հետևյալ պնդումները (տե՛ս, օրինակ՝ [4, 7]):

Թեորեմ 3.4.2: *Դիցուք* $f_1(x),\ f_2(x), ..., f_k(x)$ *դիֆերենցելի ուռուցիկ ֆունկցիաներ են: Նշանակենք*

$$f(x) \equiv \max_{i\in[1:k]} f_i(x) :$$

Այդ դեպքում

$$\partial f(x) = conv\{f_i'(x),\ i \in I(x)\},$$

$$\textit{որտեղ}\ \ I(x) = \{i \in [1:k]/f_i(x) = f(x)\} :$$

Թեորեմ 3.4.3: *Դիցուք տեղի ունեն **թեորեմ 3.4.2-ի** պայմանները և*

$$0 \notin \partial f(x) :$$

Այդ դեպքում

$$h = -\frac{\Pi_{\partial f(x)}(0)}{\|\Pi_{\partial f(x)}(0)\|}$$

վեկտորը f *ֆունկցիայի նվազման ուղղությունն է* x *կետում:*

Վերը նշված թեորեմները հնարավորություն են տալիս ամենաարագ վայրէջքի մեթոդով որոշ դեպքերում գտնելու ուռուցիկ ոչ դիֆերենցելի ֆունկցիայի մինիմումի կետերը: Մեկնաբանենք դա օրինակի միջոցով:

Օրինակ: Դիցուք

$$f(x_1, x_2) \equiv \max_{i\in[1:3]} f_i(x_1, x_2),$$

որտեղ

$$f_1(x_1, x_1) = 2x_1 + x_2,\ f_2(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2,$$

$$f_3(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 - 3 :$$

Պետք է գտնել f-ի մինիմումի կետը R^2-ի վրա: Որպես սկզբնական մոտավորություն վերցնենք $x^0 = (0,0)$ կետը: Քանի որ

$$f_1(x^0) = f_2(x^0) = 0,\ f_3(x^0) = -3,$$

ապա $I(x^0) = \{1,2\}$ և հետևաբար, ըստ **թեորեմ 3.4.2-ի**, կունենանք՝

$$\partial f(x^0) = conv\{f_1'(0,0), f_2'(0,0)\} = conv\{(2,1),\ (-1,-2)\}.$$

Պարզ է, որ

$$0 \notin \partial f(x^0),$$

ուստի ըստ **թեորեմ 3.4.3-ի**՝

$$h^0 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

վեկտորը կլինի f-ի նվազման ուղղությունը x^0 կետում: Այժմ ամենաարագ վայրէջքի մեթոդով գտնենք α_0 քայլի երկարությունը և կառուցենք x^1 կետը հետևյալ բանաձևով.

$$x^1 = x^0 + \alpha_0 h^0 :$$

Ունենք

$$g(\alpha) \equiv f(x^0 + \alpha h^0) = max\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha, -\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha, \sqrt{\alpha} - 3\} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ max\{-\alpha, 2\alpha - 3\sqrt{2}\} :$$

Այստեղից

$$\alpha_0 = arg \min_{\alpha \in (0,+\infty)} f(x^0 + \alpha h^0) = \sqrt{2} :$$

Հետևաբար, $x^1 = x^0 + \alpha_0 h^0 = (-1, 1)$:
Քանի որ
$$f_1(x^1) = f_2(x^1) = f_3(x^1) = -1,$$
ապա $I(x^1) = \{1, 2, 3\}$: Հետևաբար,
$$\partial f(x^1) = conv\{f_1'(x^1),\ f_2'(x^1), f_3'(x^1)\} =$$
$$= conv\{(2, 1)\ (-1, -2)\ (-1, -1)\} :$$
Հեշտ է նկատել, որ $0 \in \partial f(x^1)$: Այստեղից հետևում է, որ x^1 վեկտորը f ուռուցիկ ֆունկցիայի մինիմումի կետ է:

Ինչպես երևում է **թեորեմ 3.4.3-ից** ուռուցիկ ֆունկցիայի նվազման ուղղությունները գտնելու համար կարևոր խնդիր է որոշել 0 կետի պրոյեկցիան ուռուցիկ կոմպակտի վրա: Նկարագրենք մի իտերացիոն ալգորիթմ, որի միջոցով ցանկացած ճշտությամբ կարելի է գտնել 0 կետի պրոյեկցիան ուռուցիկ բազմանիստի վրա: Դիցուք տրված է n չափանի վեկտորների $X = \{x^1,\ x^2, ..., x^m\}$ համախումբը: Պետք է գտնել 0 կետի պրոյեկցիան $M = convX$ բազմության վրա, այսինքն՝ $\Pi_M(0)$-ն:

Կառուցում ենք $\{v^k\}$ հաջորդականությունը հետևյալ կերպ.

- Որպես v^0 սկզբնական մոտավորություն վերցնում ենք այն վեկտորը X համախմբից, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին.
$$(v^0, v^0) = \min_{i \in [1:m]} (x^i, x^i) :$$
- Ենթադրենք արդեն ունենք $v^k \in M$ վեկտորը: Նկարագրենք v^{k+1} կառուցման ալգորիթմը: Ընտրում

ենք X համախմբից այն $\overline{x}^k$ վեկտորը, որը բավարարում է

$$(\overline{x}^k, v^k) = \min_{i\in[1:m]} (v^k, x^i) :$$

հավասարությանը:
Այնուհետև հաշվում ենք

$$\delta(v^k) \equiv (v^k - \overline{x}^k, v^k), \quad t_k = \frac{\delta(v^k)}{\|\overline{x}^k - v^k\|}$$

մեծությունները:

- v^{k+1} վեկտորը կառուցում ենք հետևյալ ռեկուրենտ առնչությամբ.

$$v^{k+1} = v^k + t_k(\overline{x}^k - v^k) :$$

Ճշմարիտ է հետևյալ պնդումը, որը բերում ենք առանց ապացույցի (տե՛ս, օրինակ՝ [4]):

Թեորեմ 3.4.4: *Դիցուք $\{v^k\}$ հաջորդականությունը կառուցվել է վերը նշված ալգորիթմով:*
Այդ դեպքում $v^k \to \Pi_M(0)$, երբ $k \to \infty$:

Առաջադրանք 4: Կատարել վերը նշված ալգորիթմի ծրագրային իրականացումը C^{++} լեզվով:
Գտնել $\Pi_M(0)$ վեկտորը, եթե

$$M = conv\{(1,1,1),\ (2,2,2), (1,1.5,1),\ (2,3,4)\} :$$

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Դիցուք f ուռուցիկ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x^0 կետում: Ապացուցել, որ

$$\partial f(x^0) = \{f'(x^0)\} :$$

2. Դիցուք $f(x) = \|x\|$: Ցույց տալ, որ

$$\partial f(0) = B_1(0) :$$

3. Հաշվել հետևյալ ուռուցիկ ֆունկցիաների սուբդիֆերենցիալները:

ա) $f(x) = |x-1| + |x+1|$,

բ) $f(x) = max\{4x+1, x-2\}$,

գ) $f(x_1, x_2) = |x_1 - 1/2|x_2| + x_2|$,

դ) $f(x_1, x_2) = |x_1 + x_2|$,

ե) $f(x_1, x_2) = ||x_1| + x_2 - 1|$:

4. Ապացուցել հետևյալ պնդումը: Որպեսզի x^0 կետը լինի f ուռուցիկ ֆունկցիայի մինիմումի կետ R^n-ի վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$0 \in \partial f(x^0) :$$

5. c պարամետրերի բոլոր արժեքների դեպքում լուծել հետևյալ խնդիրները.

ա) $\|x\| - (c, x) \to min, \ x \geq 0, \ x \in R^n,$

բ) $\frac{1}{2}\|x\|^2 + \|x - c\| \to min, \ x \in R^n,$

6. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3|x_1 + x_2 - 2| \to min :$

Լուծում: Որպեսզի (x_1, x_2) կետը լինի f-ի մինիմումի կետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա այնպիսի $\mathbf{v} \in \partial g(x_1, x_2)$ վեկտոր, որ

$$0 \in \partial f(x_1, x_2) \Leftrightarrow (2x_1 + x_2, 2x_2 + x_1) + 3\mathbf{v} = 0, \quad (3.4.3)$$

որտեղ $g(x_1, x_2) \equiv |x_1 + x_2 - 2|$: Դժվար չէ տեսնել, որ

$$\partial g(x_1, x_2) = \begin{cases} (1,1), & \text{եթե } x_1 + x_2 > 2 \\ (-1,-1), & \text{եթե } x_1 + x_2 < 2 \\ conv\{(1,1), (-1,-1)\}, & \text{եթե } x_1 + x_2 = 2 : \end{cases}$$

Եթե $x_1 + x_2 > 2$, ապա (3.4.3) պայմանից կստանանք

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3 = 0, \\ 2x_2 + x_1 + 3 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow x_1 + x_2 = -2,$$

այսինքն համակարգը համատեղելի չէ:
Եթե $x_1 + x_2 < 2$, ապա համակարգը նույնպես լուծում չունի:
Եթե $x_1 + x_2 = 2$,
ապա

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3\alpha = 0, \\ 2x_2 + x_1 + 3\alpha = 0, \\ \alpha \in [-1, 1], \end{cases} \quad \Rightarrow \alpha = -1, x_1 = x_2 = 1 :$$

այսինքն $(1, 1)$ կետը խնդրի լուծումն է:

7. $x_1^2 + x_2^2 + 2max(x_1, x_2) \to min :$

8. $x_1^2 + x_2^2 + 2\sqrt{(x_1-1)^2 + (x_2-2)^2} \to min$:

9. $x_1^2 + x_2^2 + 4|x_1 + x_2 - 1| \to min$:

10. Ամենաարագ վայրէջքի մեթոդով գտնել

$$f(x_1, x_2) \equiv \max_{i \in [1:3]} f_i(x_1, x_2)$$

ֆունկցիայի մինիմումի կետը: Կատարել իտերացիայի երկու քայլ: Այստեղ

$$f_1(x_1, x_1) = x_1 + x_2,\ f_2(x_1, x_2) = -x_1 - x_2,$$

$$f_3(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 - 5 :$$

3.5 Կուն-Տակկերի թեորեմը

Դիցուք $f_i(x),\ i \in [0 : m]$, ֆունկցիաները ուռուցիկ են R^n-ի վրա: Դիտարկենք $f_0(x)$ ֆունկցիայի մինիմիզացիայի խնդիրը $M \equiv \{x \in R^n / f_i(x) \le 0,\ i \in [1 : m]\}$ բազմության վրա.

$$f_0(x) \to min,\ x \in M : \tag{3.5.1}$$

Հեշտ է ցույց տալ, որ M-ը ուռուցիկ բազմություն է: (3.5.1) խնդիրը կոչվում է **ուռուցիկ ծրագրավորման** խնդիր: $f_0(x)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետերը M բազմության վրա կոչվում են (3.5.1) խնդրի լուծումներ: Կազմենք **Լագրանժի** ֆունկցիան՝

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_m f_m(x),$$

որտեղ $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) \in R^{m+1}$:

Թեորեմ 3.5.1 *(Կուն-Տակկեր: Անհրաժեշտությունը)*: *Դիցուք x^* կետը հանդիսանում է (3.5.1) խնդրի լուծում: Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_m \geq 0$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ այնպիսին, որ*

1) $L(x, \lambda) \geq L(x^*, \lambda)\ \forall x \in R^n$,

2) $\lambda_i f_i(x^*) = 0,\ i \in [1 : m]$*:*

► Չսահմանափակելով ընդհանրությունը, կարելի է ենթադրել, որ $f_0(x^*) = 0$: Հակառակ դեպքում կդիտարկենք $\tilde{f}_0(x) = f_0(x) - f_0(x^*)$ ֆունկցիան, որը նույնպես ուռուցիկ է և $\tilde{f}_0(x^*) = 0$: Դիտարկենք հետևյալ բազմությունը.

$$C = \{(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m) \in R^{m+1} / \exists x \in R^n :$$

$$f_0(x) < \mu_0,\ f_i(x) \leq \mu_i,\ i \in [1 : m]\} :$$

Այս բազմությունը ուռուցիկ է: Այն անմիջապես հետևում է սահմանումից: C-ն դատարկ չէ: Իսկապես, քանի որ

$$f_0(x^*) < 1,\ f_i(x^*) \leq 1,\ i \in [1 : m],$$

ապա

$$(1, 1, ..., 1) \in C :$$

Ակնհայտ է նաև, որ $0 \notin C$, քանի որ հակառակ դեպքում գոյություն կունենար այնպիսի x կետ, որ

$$f_0(x) < 0,\ f_i(x) \leq 0,\ i \in [1 : m],$$

ինչը հակասություն է:

0 կետը անջատենք հիպերհարթությամբ C ուռուցիկ բազմությունից: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն

$\lambda_i,\ i \in [0:m]$, թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ, այնպիսին, որ

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mu_i \geq 0 \ \ \forall(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m) \in C : \tag{3.5.2}$$

Ցույց տանք, որ $\lambda_i \geq 0,\ i \in [0:m]$: Ենթադրենք, որ ինչ-որ i_0 ինդեքսի համար տեղի ունի $\lambda_{i_0} < 0$ անհավասարությունը: Ակնհայտ է, որ ցանկացած $\delta > 0$ և $\mu_{i_0} > 0$ թվի համար $\mu \equiv (\delta, 0, .., \mu_{i_0}, 0, ..0) \in C$: Տեղադրելով μ վեկտորի կոորդինատները (3.5.2) անհավասարությունում՝ կստանանք

$$\delta\lambda_0 + \mu_{i_0}\lambda_{i_0} \geq 0 : \qquad (3.5.3))$$

Այստեղ անցնելով սահմանի, երբ $\delta \to 0$ և $\mu_{i_0} \to +\infty$ կստանանք, որ (3.5.3) անհավասարության ձախ մասը ձգտում է $-\infty$, իսկ աջ մասը զրո է, որը հակասություն է:

Այժմ ապացուցենք թեորեմի երկրորդ պնդումը: (3.5.2) անհավասարությունում տեղադրելով

$$\mu_0 = \delta > 0, \mu_1 = 0, ..., \mu_i = f_i(x^*), \mu_{i+1} = 0, .., \mu_m = 0,$$

թվերը կստանանք՝

$$\delta\lambda_0 + \lambda_i f_i(x^*) \geq 0 :$$

Այստեղ անցնելով սահմանի, երբ δ ձգտի զրոյի՝ կստանանք

$$\lambda_i f_i(x^*) \geq 0 : \tag{2.5.4}$$

Բայց, քանի որ $\lambda_i \geq 0$ և $f_i(x^*) \leq 0$, ապա (2.5.4)-ից հետևում է, որ

$$\lambda_i f_i(x^*) = 0 : \tag{3.5.5}$$

Այժմ ապացուցենք թեորեմի եզրակացության առաջին կետը: Իրոք, ցանկացած $x \in R^n$-ի համար (3.5.3) անհավասարությունում տեղադրելով

$$\mu_0 = \delta + f_0(x), \mu_1 = f_1(x), ..., \mu_m = f_m(x)$$

կոորդինատներով μ վեկտորը, կստանանք

$$\lambda_0(\delta + f_0(x)) + \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_m f_m(x) \geq 0 :$$

Անցնելով սահմանի, երբ $\delta \to 0$, կստանանք՝

$$\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_m f_m(x) \geq 0 \; \forall x \in R^n \qquad (3.5.6)$$

(3.5.5)-(3.5. 6)-ից հետևում է որ

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0 =$$

$$= \lambda_0 f_0(x^*) + \lambda_1 f_1(x^*) + ... + \lambda_m f_m(x^*) = L(x^*, \lambda) \; \forall x \in R^n :$$

◀

Թեորեմ 3.5.2 *(Կուն-Տակկեր: Բավարարությունը)*: *Դիցուք* x^* *կետը բավարարում է* (3.5.1) *խնդրի բոլոր սահմանափակումներին՝*

$$f_i(x^*) \leq 0, \; i \in [1 : m],$$

և գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_0 > 0, \; \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq \geq 0, ..., \; \lambda_m \geq 0$ *թվեր, որ տեղի ունեն թեորեմ 3.5.1-ի 1)-2) պայմանները:*
Այդ դեպքում x^* *վեկտորը* (3.5.1) *խնդրի լուծում է:*

► Չսահմանափակելով ընդհանրությունը, կարող ենք ենթադրել, որ $\lambda_0 = 1$: Այդ դեպքում, հաշվի առնելով 1) և 2) պայմանները, կունենանք՝

$$f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x) \geq f_0(x^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x^*) = f_0(x^*)\ \forall x \in R^n : \tag{3.5.7}$$

Եթե x վեկտորը այնպիսին է, որ $f_i(x) \leq 0\ \forall i \in [1:m]$, ապա (3.5.7) անհավասարությունից կստանանք

$$f_0(x) \geq f_0(x^*) :$$

◄

Ռեգուլյարության պայմանը: Այս պայմանը (3.5.1) խնդրում հետևյալն է. գոյություն ունի այնպիսի $\bar{x}$ վեկտոր, որ

$$f_i(\bar{x}) < 0,\ i \in [1:m] :$$

Ցույց տանք, որ այս պայմանի դեպքում λ_0 գործակիցը կարելի է վերցնել հավասար մեկի: Իրոք, եթե $\lambda_0 = 0$, ապա թեորեմ 3.5.1-ի 1) և 2) եզրակացություններից հետևում է, որ

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(\bar{x}) \geq 0,$$

որը հակասություն է, քանի որ

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(\bar{x}) < 0 :$$

Նշենք, որ եթե $f_i(x)$, $i \in [1:m]$, ֆունկցիաները անընդհատ են, ապա ռեգուլյարության պայմանը ուռուցիկ ծրագ– րավորման խնդրում նշանակում է, որ M բազմությունը ունի ներքին կետ: ◄

Հետևանք 3.5.1: *Դիցուք*

$$M = \{x \in R^n / a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j \in [1:n]\},$$

որտեղ $-\infty \leq a_j < b_j \leq +\infty, \ \ j \in [1:n]$:
Որպեսզի $x^* \in M$ *կետը լինի ուռուցիկ և դիֆերենցելի* $f(x)$ *ֆունկցիայի մինիմումի կետ* M *բազմության վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական* $j \in [1:n]$ *համար*

$$f'_{x_j}(x^*) \begin{cases} = 0, & \textit{եթե } \ a_j < x_j^* < b_j, \\ \geq 0, & \textit{եթե } \ x_j^* = a_j \neq -\infty, \\ \leq 0, & \textit{եթե } \ x_j^* = b_j \neq +\infty : \end{cases}$$

Քանի որ Կուն-Տակկերի թեորեմը մինիմումի անհրաժեշտ և բավարար պայման է, ապա որոշ դեպքերում այն թույլ է տալիս բացահայտ տեսքով գտնել անհավասարության տիպի սահմանափակումներով մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրների լուծումները:

Օրինակ 1: Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \to min, \ \ -1 \leq x_1 \leq 1, \ \ x_2 \geq 2 :$$

Քանի որ f-ը ուժեղ ուռուցիկ ֆունկցիա է, իսկ սահմանափակումներով տրվող բազմությունը փակ է և ուռուցիկ, ապա այս խնդիրն ունի միակ լուծում և այն բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2 \begin{cases} = 0, & \text{եթե } \ -1 < x_1 < 1, \\ \geq 0, & \text{եթե } \ x_1 = -1, \\ \leq 0, & \text{եթե } \ x_1 = 1; \end{cases}$$

$$f'_{x_2}(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \begin{cases} = 0, & \text{եթե } x_2 > 2, \\ \geq 0, & \text{եթե } x_2 = 2 : \end{cases}$$

Այժմ այս պայմաններից կարելի կազմել վեց համակարգեր և լուծել դրանք: Սակայն դժվար չէ համոզվել, որ

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 0, & -1 < x_1 < 1, \\ x_1 + 2x_2 \geq 0, & x_2 = 2 \end{cases}$$

համակարգը համատեղելի է և $(-1/2, 2)$ վեկտորը նրա լուծումն է: Հետևաբար այդ վեկտորը նաև մինիմիզացիայի խնդրի միակ լուծումն է :

Օրինակ 2: Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$\begin{array}{l} x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \to min, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 : \end{array}$$

Քանի որ թույլատրելի արժեքների բազմությունը ունի ներքին կետ, ապա Լագրանժի ֆունկցիայում λ_0 գործակիցը կարելի է վերցնել հավասար մեկի: Կիրառելով Կուն-Տակկերի թեորեմը՝ կստանանք.

$$\begin{cases} L'_{x_1}(x, \lambda) = 2x_1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0, \\ L'_{x_2}(x, \lambda) = 2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 \geq 0, \ \lambda_2 \geq 0, \ \lambda_3 \geq 0, \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \ \lambda_2 x_2 = 0, \ \lambda_3 x_3 = 0 : \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 : \end{cases} \tag{3.5.8}$$

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը:

1) $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 0$: Այդ դեպքում (3.5.8) համակարգից ստանում ենք $x_1 = 0, \ x_2 = 2$, որը չի բավարարում $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$ անհավասարությանը:

2) $\lambda_1 \neq 0, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 0$: Այս դեպքում(3.5.8)

համակարգից կստանանք

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ 2x_1(1+\lambda_1) = 0, \\ 2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 = 0 : \end{cases}$$

Եթե $\lambda_1 = -1$, ապա երրորդ հավասարումը տեղի չունի: Եթե $\lambda_1 \neq -1$, ապա կստանանք

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0 :$$

Քանի որ մինիմիզացվող ֆունկցիան ուժեղ ուռուցիկ է, իսկ թույլատրելի վեկտորների բազմությունը փակ է և ուռուցիկ, ապա $(0,1)$ կետը խնդրի միակ լուծումն է:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Կուն-Տակկերի թեորեմի օգնությամբ լուծել հետևյալ խնդիրները.

ա)

$$\begin{aligned} &(x_1+1)^2 + (x_2-4)^2 + 1 \to min, \\ &2x_1 - x_2 - 2 \leq 0, \\ &x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0 : \end{aligned}$$

բ)

$$\begin{aligned} &(x_1+2)^2 + (x_2+2)^2 \to min, \\ &x_1^2 + x_2^2 \leq 0, \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 : \end{aligned}$$

զ)
$$
\begin{aligned}
&x_1^2 + x_2^2 \to min,\\
&2x_1^2 + (x_2-4)^2 \le 1 :
\end{aligned}
$$

դ) $4x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 \to min,\ 4 \le x_1 \le 8,\ -1 \le x_2 \le$ $\le 2 :$

2. Ստուգել, արդյոք $(0,4)$ վեկտորը հետևյալ խնդրի լուծումն է, թե ոչ.

$$
\begin{aligned}
&x_1^2 + (x_2-2)^2 \to min,\\
&x_1^2 + 2(x_2-2)^2 \le 8,\\
&x_1^2 + 2x_2^2 \le 32 :
\end{aligned}
$$

3. Ստուգել, արդյոք $(0,1)$ վեկտորը հետևյալ խնդրի լուծումն է, թե ոչ.

$$
\begin{aligned}
&\exp(x_1 - x_2) \to min,\\
&x_1 + x_2 \le 1,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0 :
\end{aligned}
$$

Գլուխ 4

Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը

Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը օպտիմիզացիայի այն հիմնարար սկզբունքներից է, որի միջոցով պայմանական օպտիմիզացիայի խնդիրները բերվում են ոչ պայմանական օպտիմիզացիայի խնդիրների:

Մասնավորապես, այս գլխում դիտարկվում են մաթեմատիկական ծրագրավորման այնպիսի խնդիրներ, որոնցում սահմանափակումները տրվում են հավասարություններով և անհավասարություններով: Ենթադրվում է, որ նպատակային ֆունկցիան և սահմանափակումները ներկայացնող ֆունկցիաները ողորկ են: Ցույց է տրվում, որ այդպիսի խնդիրների էքստրեմալները գտնվում են Լագրանժի ֆունկցիայի ստացիոնար կետերի բազմության մեջ:

Վերջին ժամանակներս, փորձ է արվում հիմնավորել Լագրանժի մեթոդը մաթեմատիկական ծրագրավորման ոչ ողորկ խնդիրների համար: Նման ուսումնասիրություններին կարելի է ծանոթանալ [7, 11] աշխատանքներում:

4.1 Օպտիմալության առաջին և երկրորդ կարգի պայմանները

Սահմանում 4.1.1: $h \in R^n$ *վեկտորը կոչվում է* M *բազմությանը* $x^* \in M$ *կետում* ***շոշափող***, *եթե գոյություն ունի այնպիսի*

$$\varphi : [-1, 1] \to R^n, \;\; \varphi(\alpha) = o(\alpha)$$

արտապատկերում, որ բավականաչափ փոքր $\alpha > 0$ *թվերի համար տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝*

$$x^* + \alpha h + \varphi(\alpha) \in M :$$

$K_M(x^*)$ սիմվոլով նշանակենք M բազմությանը x^* կետում տարված շոշափող վեկտորների բազմությունը:

Սահմանում 4.1.2: *Եթե* K*-ն կոն է, ապա*

$$K^* \equiv \{y \in R^n/(y, x) \geq 0 \;\; \forall x \in K\}$$

բազմությունը կոչվում է K*-ի համալուծ կոն:*

Թեորեմ 4.1.1 *(Լյուստերնիկի թեորեմը շոշափող հարթության մասին)*: *Դիցուք*

$$M = \{x \in R^n/f_i(x) = 0, \; i \in [1 : m]\},$$

որտեղ $f_i,\ i \in [1:m]$, *ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են:*
Դիցուք $x^* \in M$ *և ենթադրենք, որ* $f_i'(x^*),\ i \in [1:m]$, *գրադիենտները գծորեն անկախ են:*
Այդ դեպքում

$$K_M(x^*) = H \equiv \{h \in R^n /\ (f_i'(x^*), h) = 0,\ i \in [1:m]\} :$$

Այսինքն H *ենթատարածությունը շոշափող կոն է* M *բազմության համար* x^* *կետում:*

► Ցույց տանք, որ H հարթության կամայական վեկտորը շոշափող վեկտոր է:
Նշանակենք

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f'_{1x_1}(x^*) & f'_{1x_2}(x^*)... & f'_{1x_n}(x^*) \\ f'_{2x_1}(x^*) & f'_{2x_2}(x^*)... & f'_{2x_n}(x^*) \\ ... & ... & ... \\ f'_{mx_1}(x^*) & f'_{mx_2}(x^*)... & f'_{mx_n}(x^*) \end{pmatrix}$$

Կազմենք հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$g_i(\alpha, r) = f_i(x^* + \alpha h + \mathbf{A}^\top r) = 0,\ i \in [1:m],\ (4.1.1)$$

որտեղ r-ը m չափանի վեկտոր է: Ցույց տանք, որ այս համակարգը բավարարում է անբացահայտ ֆունկցիայի վերաբերյալ թեորեմի բոլոր պայմաններին:

Իրոք,

$$g_i(0,0) = 0,\ \ g'_{i\alpha}(0,0) = (f_i'(x^*), h) = 0,\ \ i \in [1:m] :$$

Ակնհայտ է նաև, որ $\{g'_{ir_j}\}$ կոորդինատներով ֆունկցիոնալ մատրիցը $(0,0)$ կետում հավասար է $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ մատրիցին, որն ունի հակադարձ: Հետևաբար, գոյություն ունի $r(\alpha)$ արտապատկերում, որոշված զրո կետի ինչ-որ շրջակայքում, այնպիսին, որ այն այդ շրջակայքում բավարարում է (4.1.1) համակարգին և

$$r(0) = 0,\ r'(0) = -B^{-1}g'_\alpha(0,0) = 0,$$

որտեղ

$$g'_\alpha(0,0) = (g'_{1\alpha}(0,0), ..., g'_{m\alpha}(0,0)) :$$

Հետևաբար՝

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{r(\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{r(\alpha)-r(0)}{\alpha} = r'(0) = 0 : \qquad (4.1.2)$$

Նշանակելով $\varphi(\alpha) = \mathbf{A}^\top r(\alpha)$, (4.1.1)-(4.1. 2) պայմաններից կստանանք

$$\varphi(\alpha) = o(\alpha) \text{ և } g_i(x^* + \alpha h + \varphi(\alpha)) = 0\ \forall i \in [1:m] :$$

Իսկ սա նշանակում է, որ $h \in K_M(x^*)$: Այսպիսով ապացուցվեց, որ $H \subseteq K_M(x^*)$:

Այժմ ցույց տանք, որ $K_M(x^*) \subseteq H$: Դիցուք $h \in \in K_M(x^*)$: Ըստ շոշափող վեկտորի սահմանման գոյություն ունի այնպիսի $\varphi(\alpha) = o(\alpha)$ արտապատկերում, որ բավականաչափ փոքր դրական α թվերի համար

$$f_i(x^* + \alpha h + \varphi(\alpha)) = 0,\ i \in [1:m] :$$

Այստեղից, համաձայն դիֆերենցելիության պայմանի, կամայական i-ի դեպքում կունենանք

$$0 = f_i(x^* + \alpha h + \varphi(\alpha)) - f_i(x^*) = \alpha[(f'_i(x^*), h) + \frac{o(\alpha)}{\alpha}] :$$

Ուստի

$$(f_i'(x^*), h) + \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0 \Rightarrow (f_i'(x^*), h) = 0 \Rightarrow h \in H :$$

◀

Դիտարկենք պայմանական օպտիմիզացիայի ընդ–հանուր խնդիրը.

$$f(x) \to min,\ x \in M : \qquad (4.1.3)$$

Թեորեմ 4.1.2 *(Մինիմումի ընդհանուր անհրաժեշտ պայմանը)*: *Դիցուք f ֆունկցիան դիֆերենցելի է, իսկ $x^* \in M$ կետը (4.1.3) խնդրի լուծում է:*
Այդ դեպքում

$$f'(x^*) \in K_M^*(x^*) :$$

▶ Ենթադրենք

$$f'(x^*) \notin K_M^*(x^*) :$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $h \in K_M(x^*)$ վեկտոր, որ $(f'(x^*), h) < 0$: Այստեղից քանի որ f-ը դիֆերենցելի է, ապա բավականաչափ փոքր $\alpha > 0$ թվերի համար կունենանք

$$f(x^* + \alpha h) = f(x^*) + \alpha[(f'(x^*), h) + \frac{o(\alpha)}{\alpha}] < f(x^*) :$$

Սա հակասություն է, քանի որ x^*-ն f-ի լոկալ մինիմումի կետ է M բազմության վրա:
◀

Թեորեմ 4.1.3 *(Համալուծ կոնի կառուցումը)*: *Դիցուք տեղի ունեն **թեորեմ 4.1.1-ի** պայմանները: Այդ դեպքում՝*

$$K^*_M(x^*) = H^\perp = A \equiv \{y \in R^n / y = \sum_{i=1}^m \lambda_i f'_i(x^*),$$

$$\lambda_i \in R,\ i \in [1:m]\} :$$

▶ Նախ, քանի որ H-ը ենթապարածություն է և $K_M(x^*) = H$, ապա

$$K^*_M(x^*) = H^\perp :$$

Այժմ ցույց տանք, որ

$$A \subseteq H^\perp :$$

Իրոք, դիցուք

$$\forall h \in H,\ \forall y \in A \Rightarrow y = \sum_{i=1}^m \lambda_i f'_i(x^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y,h) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (f'_i(x^*), h) = 0 \Rightarrow y \in H^\perp :$$

Այժմ ենթադրենք, որ գոյություն ունի այնպիսի $b \in$ $\in H^\perp$ վեկտոր, որ $b \notin A$: Քանի որ $f'_i(x^*)$, $i \in$ $\in [1:m]$ գրադիենտները գծորեն անկախ են, ապա A-ն m չափանի ենթապարածություն է, որը փակ ուռուցիկ բազմություն է: Անջատենք այն b կետից: Համաձայն խիստ անջատման **թեորեմ 3.1.2-ի**՝ գոյություն ունեն այնպիսի p վեկտոր և $\varepsilon > 0$ թիվ, որ

$$(p,a) \le (p,b) - \varepsilon \ \ \forall\, a \in A : \qquad (4.1.4)$$

Ցույց տանք, որ

$$(p, a) = 0 \ \forall a \in A :$$

Եթե որևէ $a \in A$-ի համար $(p, a) > 0$, ապա տեղադրելով $\alpha a \in A$ $(\alpha \geq 0)$ վեկտորները (4.1.4) անհավասարության մեջ և ձգտեցնելով α-ն անվերջության կստանանք հակասություն, քանի որ անհավասարության ձախ մասը կձգտի $+\infty$, իսկ աջ մասը վերջավոր թիվ է: Եթե $(p, a) < 0$, ապա կատարելով նույն դատողությունները, նորից կգանք հակասության: Այսպիսով, $(p, a) = 0 \ \forall a \in A$:
Այստեղից

$$(f_i'(x^*), p) = 0, \ i \in [1 : m] \Rightarrow p \in H \Rightarrow (p, b) = 0 : \tag{4.1.5}$$

Բայց (4.1.4) անհավասարությունից հետևում է, որ $(p, b) > \varepsilon > 0$, ինչը հակասում է (4.1.5)-ին : Այսպիսով, ապացուցվեց, որ

$$K_M^*(x^*) = H^{\perp} = A :$$

◄

Այժմ դիտարկենք հավասարության տիպի սահմանափակումներով պայմանական օպտիմիզացիայի հետևյալ խնդիրը՝

$$f_0(x) \to extr, \ f_i(x) = 0, \ i \in [1 : m] : \tag{4.1.6}$$

Ենթադրվում է, որ f_i, $i \in [0 : m]$, ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են R^n-ի վրա: Պահանջվում է գտնել $f_0(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը

$$M \equiv \{x \in R^n / \ f_i(x) = 0, \ i \in [1 : m]\}$$

բազմության վրա: Այդ կետերը կոչվում են (4.1.6) խըն– դրի լուծումներ: M բազմության կետերը կոչվում են (4.1.6) խնդրի թույլատրելի կետեր:

Դիցուք $\lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_m) \in R^{m+1}$: Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) :$$

Թեորեմ 4.1.4 *(Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը)*: *Դիցուք x^* կետը (4.1.6) խնդրի լուծումն է: Այդ դեպքում գոյություն ունեն λ_0, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է այնպիսին , որ*

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(x^*) = 0,$$

կամ որ նույնն է

$$L_x'(x^*, \lambda) = 0 \Leftrightarrow L_{x_i}'(x^*, \lambda) = 0, \ i \in [1:n] : \quad (4.1.7)$$

$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ թվերը կոչվում են Լագրանժի բազմապատկիչներ կամ անորոշ գործակիցներ:

► Ենթադրենք, որ x^* կետը (4.1.6) խնդրում լոկալ մինիմումի կետ է (լոկալ մաքսիմումի դեպքը քննարկվում է անալոգ ձևով):

Եթե $f_i'(x^*), f_2'(x^*), .., f_m'(x^*)$ գրադիենտները գծորեն անկախ են, ապա, ըստ մինիմումի ընդհանուր անհրաժեշտ պայմանի և **թեորեմ 4.1.3-ի**, կունենանք

$$f_0'(x^*) \in K_M^*(x^*) =$$

$$= \{y/y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x^*),\ \lambda_i \in R,\ i \in [1:m]\} :$$

Այստեղից անմիջականորեն հետևում է, որ գոյություն ունեն $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ թվեր, այնպիսին, որ

$$f_0'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x^*) :$$

Այս դեպքում թեորեմի պնդումը ապացուցված է:

Եթե $f_i'(x^*), f_2'(x^*), .., f_m'(x^*)$ գրադիենտները գծորեն կախված են, ապա գոյություն կունենան գործակիցներ $\lambda_i,\ i \in [1:m]$, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ այնպիսին, որ

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x^*) = 0 :$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$0 f_0'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x^*) = 0 :$$

◀

Այժմ ենթադրենք, որ (4.1.6) խնդրում բոլոր ֆունկցիաները երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի են: Ճիշտ է հետևյալ պնդումը (տե՛ս, օրինակ՝ [4]):

Թեորեմ 4.1.5 *(Էքստրեմումի երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանը)*: *Դիցուք x^*-ը (4.1.6) խնդրում լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է և $f_1'(x^*)$, $f_2'(x^*), ..., f_m'(x^*)$ վեկտորները գծորեն անկախ են: Այդ դեպքում գոյություն ունեն*

$\lambda_0 = 1,\ \lambda_1, ..., \lambda_m$ *թվեր այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ պայմանը.*

$$(L''_{xx}(x^*, \lambda)h, h) \geq 0 \ \ ((L''_{xx}(x^*, \lambda)h, h) \leq 0)\ \forall h \in H =$$

$$= \{h \in R^n / (f'_i(x^*), h) = 0,\ i \in [1:m]\} :$$

Թեորեմ 4.1.6 *(Երկրորդ կարգի բավարար պայմանը)*: *Դիցուք x^*-ը (4.1.6) խնդրի թույլատրելի կետ է և գոյություն ունի այնպիսի $\lambda \in R^{m+1}$ վեկտոր, որ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.*

1) $\lambda_0 = 1$,
2) $L'_{x_i}(x^*, \lambda) = 0,\ i \in [1:n]$,
3) *կամայական ոչ զրոյական $h \in H$ վեկտորի համար տեղի ունի*

$$(L''_{xx}(x^*, \lambda)h, h) > 0 \ ((L''_{xx}(x^*, \lambda)h, h) < 0) \tag{4.1.8}$$

անհավասարությունը:

Այդ դեպքում x^*-ը (4.1.6) *խնդրում լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է:*

▶
Եթե x^* կետը M բազմության առանձնացված կետ է, ապա թեորեմի եզրակացությունը փրիվիալ է: Դիցուք այժմ x^*-ը M բազմության սահմանային կետ է և այն խնդրում լոկալ մինիմումի կետ չէ: Այդ դեպքում գոյություն կունենա այնպիսի $\{x^k\}$ հաջորդականություն, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

$$x^k \in M,\ x^k \to x^*,\ f_0(x^k) < f_0(x^*) : \tag{4.1.9}$$

x^k -ն ներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$x^k = x^* + \alpha_k h^k, \text{ որտեղ } h^k = (x^k - x^*)/\alpha_k :$$

Քանի որ, $\|h^k\| = 1$, ապա ընդհանրությունը չսահմանափակելով կարող ենք ենթադրել, որ

$$h^k \to h \neq 0 :$$

Հաշվի առնելով (4.1.9) պայմանը՝ ունենք

$$0 = f_i(x^k) - f_i(x^*) = (f_i'(x^*), \alpha_k h^k) + o(\alpha_k), \ i \in [1:m] :$$

Բաժանելով այս առնչությունները α_k-ի վրա և անցնելով սահմանի՝ կստանանք

$$(f_i'(x^*), h) = 0, \ i \in [1:m] :$$

Այսինքն՝ $h \in H$: Քանի որ, ըստ ենթադրության, $\lambda_0 = 1$, ապա (4.1.9)-ից ստանում ենք

$$L(x^k, \lambda) = f_0(x^k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x^k) \leq f_0(x^k) \leq$$

$$\leq f_0(x^*) = f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x^*) = L(x^*, \lambda) : \quad (4.1.10)$$

Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ $L(x, \lambda)$ Լագրանժի ֆունկցիան երկու անգամ դիֆերենցելի է x^* կետում: Հետևաբար, ներկայացնելով այդ ֆունկցիան, ըստ Թեյլորի բանաձևի, x^* կետում, ստանում ենք

$$L(x^k, \lambda) = L(x^*, \lambda) + (L_x'(x^*, \lambda), \alpha_k h^k) +$$

$$+\frac{1}{2}(L''_{xx}(x^*,\lambda)(\alpha_k h^k),\alpha_k h^k)+o(\alpha_k^2):$$

Քանի որ, ըստ ենթադրության, $L'_x(x^*,\lambda) = 0$, ապա այստեղից և (4.1.10) անհավասարությունից հետևում է, որ

$$\frac{\alpha_k^2}{2}(L''_{xx}(x^*,\lambda)h^k,h^k))+o(\alpha_k^2)\leq 0:$$

Այս անհավասարության երկու մասերը բաժանելով α_k^2 թվի վրա և անցնելով սահմանի՝ կստանանք

$$(L''_{xx}(x^*,\lambda)h,h)\leq 0,$$

որը հակասում է թեորեմի (4.1.8) պայմանին:

◀

Պարզագույն դեպքերում Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը թույլ է տալիս բացահայտ տեսքով գտնել մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրների լուծումները հավասարությունների տիպի սահմանափակումների դեպքում: Դրա համար պետք է կատարել հետևյալ քայլերը.

- Կազմել Լագրանժի ֆունկցիան:
- Գրել էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանը Լագրանժի ֆունկցիայի համար և ստանալ հավասարումների համակարգ, որով բնութագրվում է խնդրի ստացիոնար կետերի բազմությունը:
- Գտնել ստացված համակարգի լուծումները:
- Էքստրեմումի երկրորդ կարգի բավարար պայմանների միջոցով այդ լուծումներից անջատել էքստրեմումի կետերը:

Այս ալգորիթմը մեկնաբանենք օրինակներով:

Օրինակ 1: Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 \to extr,$$

$$f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 :$$

Լուծում: Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) =$$

$$= \lambda_0(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1((x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4) :$$

Ըստ (4.1.7) անհրաժեշտ պայմանի՝ ունենք

$$\begin{cases} L'_{x_1}(x, \lambda_0, \lambda_1) = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1(x_1 - 1) = 0, \\ L'_{x_2}(x, \lambda_0, \lambda_1) = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 : \end{cases} \tag{4.1.11}$$

Եթե, $\lambda_0 = 0$, ապա (4.1.11) համակարգից ստանում ենք

$$2\lambda_1(x_1 - 1) = 0,\ 2\lambda_1 x_2 = 0,\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 : \tag{4.1.12}$$

Քանի որ λ_0, և λ_1 գործակիցները միաժամանակ զրո չեն, ապա $\lambda_1 \neq 0$:

Հետևաբար, (4.1.12) համակարգի առաջին երկու պայմաններից կստանանք

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,$$

որը չի բավարարում երրորդ հավասարմանը: Այսպիսով, $\lambda_0 \neq 0$: Ընդհանրությունը չսահմանափակելով, կարող ենք ենթադրել, որ $\lambda_0 = 1$: Այդ դեպքում (4.1.11) համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1(x_1 - 1) = 0, \\ 2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ (x_1 - 1)^2 + x_2 - 4 = 0 : \end{cases} \tag{4.1.13}$$

Դիտարկենք այս համակարգի երկրորդ հավասարումը: Եթե $x_2 = 0$, ապա երրորդից կստանանք $x_1 = 3$, $x_1 = -1$, իսկ առաջին հավասարումից՝ $\lambda_1 = -3/2$:

Եթե $x_2 \neq 0$, ապա երկրորդից կունենանք $\lambda_1 = -1$:

Այդ դեպքում առաջին հավասարումը տեղի չունի, այ– սինքն (4.1.13) համակարգը համատեղելի չէ: Այսպիսով ստանում ենք երկու ստացիոնար կետեր՝

$$x_1^* = 3,\ x_2^* = 0,\ \lambda_1 = -\tfrac{3}{2};$$
$$x_1^* = -1,\ x_2^* = 0,\ \lambda_1 = -\tfrac{1}{2}:$$

Ստուգենք երկրորդ կարգի (4.1.8) բավարար պայման- ները այդ կետերի համար: Ունենք՝

$$(L''_{xx}h, h) = 2(1 + \lambda_1)h_1^2 + 2(1 + \lambda_1)h_2^2,$$

$h \in H = \{h = (h_1, h_2) \in R^2 / 2(x_1^* - 1)h_1 + 2x_2^* h_2 = 0 :$

Այստեղից հեշտ է տեսնել, որ $A(3, 0)$ կետի համար տեղի ունի

$$(L''_{xx}h, h) < 0\ \forall h \in H,\ h \neq 0,$$

անհավասարությունը: Ուստի, A-ն լոկալ մաքսիմումի կետ է: Նման ձևով համոզվում ենք, որ $B(-1, 0)$-ն լո- կալ մինիմումի կետ է: Մյուս կողմից, քանի որ f_0

ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն ու փոքրագույն արժեքներին, ապա B կետը գլոբալ մինիմումի կետ է, իսկ A-ն գլոբալ մաքսիմումի կետ է:

Օրինակ 2: Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$\begin{array}{l} f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to min, \\ f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0, \\ f_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 : \end{array}$$

Ըստ (4.1.7) անհրաժեշտ պայմանի՝ ունենք՝

$$\begin{cases} L'_{x_1}(x, \lambda) = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0, \\ L'_{x_2}(x, \lambda) = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0, \\ L'_{x_3}(x, \lambda) = 2\lambda_0 x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0, \\ f_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 : \end{cases}$$

Եթե, $\lambda_0 = 0$, ապա կստանանք հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 : \end{cases} \tag{4.1.14}$$

Եթե $\lambda_1 = 0$, ապա (4.1.14) համակարգի երրորդ հավասարումից հետևում է, որ $\lambda_2 = 0$, որը հնարավոր չէ, որովհետև բոլոր գործակիցները միաժամանակ զրո չեն: Եթե $\lambda_1 \neq 0$, ապա (4.1.14) համակարգի առաջին երեք հավասարումներից ստանում ենք

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{2} :$$

Տեղադրելով այս արժեքները համակարգի վերջին երկու հավասարումների մեջ՝ սպանում ենք հակասություն: Այսպիսով, $\lambda_0 \neq 0$: Ընդունենք $\lambda_0 = 1$: Այդ դեպքում համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} 2x_1(1+\lambda_1)+\lambda_2=0, \\ 2x_2(1+\lambda_2)+\lambda_2=0, \\ 2x_3-\lambda_1+\lambda_2=0, \\ x_1^2+x_2^2-x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3-4=0, \end{cases} \tag{4.1.15}$$

(4.1.15) համակարգը ունի հետևյալ երկու լուծումները.

$$x_1^*=1,\ x_2^*=1,\ x_3^*=2, \lambda_1=\tfrac{2}{3},\ \lambda_2=-\tfrac{10}{3};$$
$$x_1^*=-2,\ x_2^*=-2,\ x_3^*=8,\ \lambda_1=-\tfrac{20}{3}, \lambda_2=-\tfrac{68}{3}:$$

Ստուգենք երկրորդ կարգի (4.1.8) բավարար պայմանները $A(1,1,2)$ և $B(-2,-2,8)$ կետերի համար: Ունենք

$$(L''_{xx}h,h)=2(1+\lambda_1)h_1^2+2(1+\lambda_1)h_2^2+2h_2h_3,$$

$$h\in H=\{h\in R^3/2x_1^*h_1+2x_2^*h_2-h_3=0,$$
$$h_1+h_2+h_3=0\}:$$

Այստեղից $A(1,1,2)$ կետի համար կստանանք

$$h_1=-h_2, h_3=0 \Rightarrow (L''_{xx}h,h)=\frac{10}{3}h_2^2>0\ \forall h\neq 0:$$

Այսինքն՝ A-ն լոկալ մինիմումի կետ է: Նույն ձևով ստանում ենք, որ $B(-2,-2,8)$-ն լոկալ մաքսիմումի կետ է:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 \to min, \\ & x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0 : \end{aligned}$$

2. Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 \to min, \\ & x_1^2 + 2x_2^2 - 8 = 0 : \end{aligned}$$

3. Ստուգել, արդյոք $(0, 2)$ կետը հետևյալ խնդրի լուծումն է, թե ոչ:

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 \to min, \\ & x_2 + x_1^2 - 2 = 0 : \end{aligned}$$

4. Ստուգել, արդյոք $(-2, 2)$ կետը հետևյալ խնդրի լուծումն է, թե ոչ:

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 \to min, \\ & x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0 : \end{aligned}$$

5. Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$\begin{aligned} & 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \to extr, \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 : \end{aligned}$$

6. Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$\begin{aligned} & x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \to max, \\ & x_1 + 2x_2^2 - x_3 = 4, \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 : \end{aligned}$$

4.2 Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը (խառը սահմանափակումների դեպքը)

Այժմ դիտարկենք պայմանական օպտիմիզացիայի ընդհանուր խնդիրը, որտեղ սահմանափակումները տրվում են հավասարություններով և անհավասարություններով՝

$$f_0(x) \to extr,$$

$$f_i(x) = 0, \ i \in [1:k], \ f_i(x) \leq 0, \ i \in [k+1:m] : \tag{4.2.1}$$

Այստեղ ենթադրվում է, որ $f_i(x)$, $i \in [0:m]$, ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են R^n-ի վրա:

$x \in R^n$ կետը կոչվում է թույլատրելի, եթե այն բավարարում է (4.2.1) խնդրի բոլոր սահմանափակումներին: $x^* \in R^n$ կետը կոչվում է (4.2.1) խնդրի լուծում, եթե այն $f_0(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է

$$M \equiv \{x \in R^n / \ f_i(x) = 0, i \in [1:k],$$

$$f_i(x) \leq 0, i \in [k+1:m]\}$$

բազմության վրա:

Սահմանում 4.2.1: *Դիցուք $\bar{x}$ թույլատրելի կետ է (4.2.1) խնդրում: $f_i(x) \leq 0$ ($i \in [k+1:m]$) սահմանափակումը կոչվում է ակտիվ այդ կետում, եթե $f_i(\bar{x}) = 0$: Եթե $f_i(\bar{x}) < 0$, ապա այդ սահմանափակումը կոչվում է պասիվ:*

$I_{\text{ա}}(\bar{x})$ սիմվոլով նշանակենք $\bar{x}$ կետում ակտիվ սահմանափակումների ինդեքսների բազմությունը՝

$$I_{\text{ա}}(\bar{x}) = \{i \in [k+1, m] / \ f_i(\bar{x}) = 0\} :$$

Ճիշտ են հետևյալ պնդումները (տե՛ս, օրինակ՝ [4, 6]):

Թեորեմ 4.2.1 *(Էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանը)*: *Դիցուք x^* կետը (4.2.1) խնդրում լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է: Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_0, ..., \lambda_m$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է այնպիսին, որ*

ա) $L'_{x_i}(x^*) = 0,\ i \in [1 : n]$, *որտեղ*

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x),$$

բ) $\lambda_i \geq 0\ (\lambda_i \leq 0),\ i \in [k+1 : m]$,

գ) $\lambda_i f_i(x^*) = 0,\ i \in [k+1 : m]$:

գ) պայմանը կոչվում է պասիվ-ակտիվ սահմանափակումների պայման:

Թեորեմ 4.2.2 *(Առաջին կարգի բավարար պայմանը)*: *Դիցուք x^* վեկտորը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.*

1) x^*- *ը* (4.2.1) *խնդրի թույլատրելի կետ է,*
2) *գոյություն ունի $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ վեկտոր $\lambda_0 = 1$ պայմանով այնպիսին, որ (x^*, λ) զույգը բավարարում է թեորեմ* 4.2.1*-ի ա), բ), գ) պայմաններին,*
3) *x^* կետում* (4.2.1) *խնդրի ակտիվ սահմանափակումների և հավասարությունների քանակների գումարը հավասար է n-ի:*

Այդ դեպքում, եթե $\lambda_i > 0,\ i \in I_{\text{ա}}(x^*)$, *ապա* x^**-ը* (4.2.1) *խնդրում լոկալ մինիմումի կետ է, եթե* $\lambda_i < 0,\ i \in I_{\text{ա}}(x^*)$, *ապա* x^**-ը* (4.2.1) *խնդրում լոկալ մաքսիմումի կետ է:*

Այժմ ձևակերպենք քայլերի այն հերթականությունը, որոնց միջոցով կարելի է լուծել խառը սահմանափակումներով մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրները:

- Կազմել Լագրանժի ֆունկցիան:
- Գրել էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանը Լագրանժի ֆունկցիայի համար և ստանալ հավասարումների համակարգ, որով բնութագրվում է խնդրի ստացիոնար կետերի բազմությունը:
- Գրել պասիվ-ակտիվ սահմանափակումների պայմանները և անհավասարություններին համապատասխանող Լագրանժի գործակիցների ոչ բացասական (ոչ դրական) լինելու պայմանները:
- Լուծել ստացված համակարգերը՝ հաշվի առնելով Լագրանժի գործակիցների նշանները:
- Օպտիմալության առաջին կարգի բավարար պայմանների միջոցով այդ լուծումներից անջատել էքստրեմումի կետերը:

Այս ալգորիթմը մեկնաբանենք օրինակի միջոցով:

Օրինակ: Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$x_1 - x_2^2 \to extr,$$
$$x_1 - x_2 - 1 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0 :$$

Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան

$$L(x,\lambda) = \lambda_0(x_1 - x_2^2) + \lambda_1(x_1 - x_2 - 1) + \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 5) :$$

Ըստ Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի՝ ունենք հավասարումների և անհավասարումների հետևյալ համակարգը.

(ա) $L'_{x_1}(x,\lambda) = \lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0,$

(բ) $L'_{x_2}(x,\lambda) = -2\lambda_0 x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0,$

(գ) $x_1 - x_2 - 1 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0,$

(դ) $\lambda_2 \geq 0,$

(ե) $\lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0 :$

Դիտարկենք երկու դեպք.

1) $\lambda_0 = 0,$

2) $\lambda_0 \neq 0$:

Առաջին դեպքում համակարգի (ա) և (բ) հավասարումներից կստանանք

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0, \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0 \end{cases} \tag{4.2.2}$$

համակարգը: Եթե $\lambda_2 = 0$, ապա (4.2.2) համակարգից կստանանք $\lambda_1 = 0$, այսինքն բոլոր բոլոր գործակիցները զրո են, որը հակասություն է:
Եթե $\lambda_2 \neq 0$, ապա (գ) և (ե) պայմաններից կստանանք

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 1 = 0 : \end{cases}$$

համակարգը: Այս համակարգը ունի երկու լուծում.

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1 \end{cases} \tag{4.2.3}$$

կամ

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -2 : \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Գումարելով (4.2.2) համակարգի հավասարումները՝ կստանանք

$$2\lambda_2(x_1 + x_2) \Rightarrow x_1 = -x_2,$$

որը հակասում է (4.2.3) և (4.2.4) համակարգերին: Հետևաբար, առաջին դեպքը հնարավոր չէ:

Դիտարկենք երկրորդ դեպքը. $\lambda_0 \neq 0$: Ընդունելով $\lambda_0 = 1$՝ (ա)-(բ) պայմաններից կստանանք

$$\begin{cases} 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0, \\ -2x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0 : \end{cases} \tag{4.2.5}$$

Եթե $\lambda_2 = 0$, ապա (4.2.5) համակարգից և (գ) հավասարությունից կստանանք

$$\begin{cases} 1 + \lambda_1 = 0, \\ -2x_2 - \lambda_1 = 0, \\ x_1 - x_2 - 1 = 0 : \end{cases}$$

Լուծելով այս համակարգը՝ ստանում ենք ստացիոնար հետևյալ կետը.

$$A(3/2, 1/2), \ \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 0 :$$

$\lambda_2 \neq 0$ դեպքում ունենք

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 5, \\ x_1 - x_2 - 1 = 0, \\ 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0, \\ -2x_2 - \lambda_1 + 2x_2 = 0 : \end{cases}$$

համակարգը: Լուծելով այս համակարգը՝ ստանում ենք ևս երկու ստացիոնար կետեր.

$$B(2,1),\ \lambda_1 = -5/3,\ \lambda_2 = 1/6,$$
$$C(-1,-2),\ \lambda_1 = 2/3,\ \lambda_2 = 5/6 :$$

Այս երեք կետերի համար ստուգենք էքստրեմումի առաջին կարգի բավարար պայմանները:

B կետի համար ակտիվ է $x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0$ սահմանափակումը և նրան համապատասխան Լագրանժի գործակիցը դրական է: Մյուս կողմից, ակտիվ սահմանափակումների և հավասարությունների քանակների գումարը հավասար է երկուսի, որը անհայտների թիվն է: Նշանակում է B-ն լոկալ մինիմումի կետ է: Նույն ձևով՝ C-ն լոկալ մինիմումի կետ է: Բայց քանի որ խնդրի սահմանափակումների բազմությունը կոմպակտ է, ապա նպատակային ֆունկցիան ունի գլոբալ մինիմումի և մաքսիմումի կետեր: Հաշվելով ստացված կետերում նպատակային ֆունկցիայի արժեքները՝ պարզում ենք, որ A կետը գլոբալ մաքսիմումի կետ է, C-ն գլոբալ մինիմումի կետ է, իսկ B-ն լոկալ մինիմումի կետ է:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Լուծել խառը սահմանափակումներով հետևյալ խնդիրը.
   $x_1^2 - x_2 \to min,$
   $x_1 + x_2 - 6 = 0,$
   $1 - x_1 \leq 0,$
   $x_1^2 + x_2^2 - 26 \leq 0 :$
2. Լուծել խառը սահմանափակումներով հետևյալ խնդիրը.
   $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to min,$
   $2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5,$
   $x_1 + x_2 + x_3 = 3 :$
3. Գտնել շոշափող $K_M(x)$ կոնը M բազմության համար x կետում:

ա) $M = \{(x_1, x_2) \in R^2 \backslash int(R_+^2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$
$x = (0, 1);$

բ) $M = \{(x_1, x_2) \in R^2 \backslash int(R_+^2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$
$x = (0, 0);$

գ) $M = \{(x_1, x_2) / x_1^2 \leq x_2^3\}, \ x = (0, 0);$

դ) $M = \{0, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}, \ x = 0;$

ե) $M = \{0, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2^n}, ...\}, \ x = 0 :$

4. Ապացուցել հետևյալ պնդումը: Որպեսզի $K \subseteq R^n$ կոնը լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall x, \ y \in K \Rightarrow x + y \in K :$
5. Դիցուք $K \subseteq R^n$ փակ ուռուցիկ կոն է: Ապացուցել, որ $K^{**} = K :$

6. Դիցուք $K_1,\ K_2 \subseteq R^n$-ը փակ ուռուցիկ կոներ են: Ապացուցել, որ

ա) $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$;

բ) $(K_1 \cap K_2)^* = \overline{K_1^* + K_2^*}$:

Լուծում: Ունենք

$$(K_1 \cap K_2)^* = (K_1^{**} \cap K_2^{**})^* =$$

$$= ((K_1^* + K_2^*)^*)^* = (K_1^* + K_2^*)^{**} = \overline{K_1^* + K_2^*} :$$

Գլուխ 5

Վարիացիոն հաշիվ

Վարիացիոն հաշիվը օպտիմիզացիայի բաժին է, որտեղ ուսումնասիրվում են ինտեգրալային տիպի ֆունկցիոնալների մինիմիզացիայի խնդիրները որոշ ֆունկցիոնալ տարածություններում:

Այս գլխում դիտարկվում է

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y')\, dx$$

տիպի ֆունկցիոնալի մինիմիզացիայի (մաքսիմի–զացիայի) խնդիրը $C^1[x_0, x_1]$ ֆունկցիոնալ տարածության վրա: Ցույց է տրվում, որ այդ ֆունկ–ցիոնալի էքստրեմումները բավարարում են եզրային պայմաններով երկրորդ կարգի մի դիֆերենցիալ հավասարմանը, որը կոչվում է Էյլերի հավասարում: Այդ հավասարումով կապ է ստեղծվում վարիացիոն հաշվի և դիֆերենցիալ հավասարումների տեսություն–

ների միջև: Այդ իսկ պատճառով վարիացիոն հաշվի մեթոդները օգտագործում են եզրային պայմաններով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների գոյության ապացույցներում: Այս գլխում վարիացիոն հաշվի պարզագույն խնդիրների էքստրեմալների բնորոշման համար տրվում են որոշ բավարար պայմաններ:

Վարիացիոն հաշվի տեսության ավելի խորը ուսումնասիրություններին կարելի է ծանոթանալ [1-2, 12-13] աշխատանքներում:

5.1 Էյլերի հավասարումը

Դիցուք $L(x,y,y')$ որպես երեք փոփոխականի ֆունկցիա երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է R^3-ի վրա: Պահանջվում է գտնել այնպիսի $y(x) \in C^1[x_0,x_1]$ ֆունկցիա, որը բավարարի $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$ եզրային պայմաններին և հանդիսանա $I(y) \equiv \int\limits_{x_0}^{x_1} L(x,y,y')\,dx$ ֆունկցիոնալի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ $C^1[x_0,x_1]$ տարածության նորմի իմաստով: Այս խնդիրը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

$$I(y) \equiv \int\limits_{x_0}^{x_1} L(x,y,y')\,dx \to extr, \tag{5.1.1}$$

$$y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1,$$

որը կոչվում է ամրացված եզրերով վարիացիոն խնդիր: Այն վարիացիոն հաշվի պարզագույն խնդիրն է:

Այժմ տանք I ֆունկցիոնալի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) սահմանումը $C^1[x_0, x_1]$ պարածության նորմի իմաստով:

Սահմանում 5.1.1: *Դիցուք*

$$M \equiv \{y \in C^1[x_0, x_1]/y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1\} :$$

$y^* \in M$ կոչվում է I ֆունկցիոնալի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ M բազմության վրա, եթե գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ բոլոր $y \in$ $\in M$ ֆունկցիաների համար, որոնք բավարարում են $\|y - y^*\|_1 < \delta$ պայմանին, տեղի ունի

$$I(y) \geq I(y^*)\ (I(y) \leq I(y^*) :$$

անհավասարությունը:
y^*-ը կոչվում է նաև (5.1.1) խնդրի լուծում:

Թեորեմ 5.1.1: *Եթե $y^*(x)$ ֆունկցիան (5.1.1) խնդրի լուծումն է, ապա այն բավարարում է*

$$-\frac{d}{dx}L'_{y'} + L'_y = 0, \qquad (5.1.2)$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը, որը կոչվում է ***Էյլերի հավասարում:***

► Ենթադրենք, որ y^*-ը (5.1.1) խնդրում լոկալ մինիմումի կետ է (լոկալ մաքսիմումի դեպքը քըն–նարկվում է անալոգ ձևով): Դիցուք $h(\cdot) \in C_0^1[x_0, x_1]$: Այսինքն

$$h(\cdot) \in C^1[x_0, x_1] \text{ և } h(x_0) = 0,\ h(x_1) = 0 :$$

Դիտարկենք մեկ փոփոխականի հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi(\alpha) = \int\limits_{x_0}^{x_1} L(x, y^*(x) + \alpha h(x), (y^*(x))' + \alpha h'(x))\, dx : \tag{5.1.3}$$

Քանի որ y^*-ը I ֆունկցիոնալի լոկալ մինիմումի կետ է, ապա բավականաչափ փոքր α թվերի համար տեղի ունի

$$\varphi(\alpha) \geq \varphi(0)$$

անհավասարությունը: Այսինքն՝ 0 կետը φ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետ է:
Հետևաբար՝

$$\varphi'(0) = 0 :$$

Այստեղից, ըստ պարամետրից կախված ինտեգրալի ածանցման կանոնի, կունենանք

$$\varphi'(0) = \int\limits_{x_0}^{x^1} (L'_y h + L'_{y'} h')\, dx = 0 : \tag{5.1.4}$$

Կատարենք մասերով ինտեգրում, հաշվի առնելով $h(x_0) = 0,\ h(x_1) = 0$ պայմանները, կստանանք

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} L'_{y'} h' dx = L'_{y'}(h(x_1) - h(x_0)) - \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} L'_{y'} h\, dx =$$

$$= -\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} L'_{y'} h\, dx :$$

Այսպեղից և (5.1.4)-ից կսպանանք

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}(L'_y - \frac{d}{dx}L'_{y'})h(x)\,dx = 0 \;\forall h(x) \in C^1[x_0, x_1],$$

$$h(x_0) = 0,\; h(x_1) = 0 : \qquad (5.1.5)$$

Այժմ ցույց պանք, որ (5.1.5) պայմանից հեպևում է Էյլերի հավասարումը:
Նշանակենք

$$a(x) \equiv L'_y(x, y^*, (y^*)') - \frac{d}{dx}L'_{y'}(x, y^*, (y^*)') :$$

Ցույց պանք, որ

$$a(x) = 0 \;\forall x \in [x_0, x_1] :$$

Ենթադրենք, որ ինչ-որ $\xi \in [x_0, x_1]$ կեպում $a(\xi) \neq$ $\neq 0$: Ընդհանրությունը չխախպելով, ենթադրենք, որ $a(\xi) > 0$: Քանի որ $a(x)$-ը անընդհապ ֆունկցիա է, ապա գոյություն կունենա ξ կեպի մի շրջակայք՝ $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subseteq [x_0, x_1]$, այնպիսին, որ

$$a(x) > 0 \;\forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) :$$

Դիցուք

$$p = \xi - \delta,\; q = \xi + \delta :$$

Այժմ դիպարկենք հեպևյալ $h(x)$ ֆունկցիան.

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } x \in [x_0, p] \\ (x-p)^2(x-q)^2, & \text{եթե } x \in [p, q] \\ 0, & \text{եթե } x \in [q, x_1] \end{cases}$$

Պարզ է, որ $h(\cdot) \in C^1[x_0, x_1]$ և $h(x_0) = h(x_1) = 0$ ։ Ունենք

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} a(x)h(x)dx = \int\limits_{p}^{q} a(x)h(x)\,dx > 0,$$

որը հակասում է (5.1.5)-ին:
◀

Օրինակ (Էյլերի հավասարման լուծումը հանդիսանում է լոկալ մինիմումի կետ):

$$I(y) \equiv \int\limits_{1}^{0} (y')^2\,dx \to min,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1 :$$

Կազմենք Էյլերի հավասարումը

$$\frac{d}{dx}3(y')^2 = 0 \Rightarrow 3(y')^2 = C \Rightarrow y' = const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1x + C_2 :$$

Հաշվի առնելով խնդրի եզրային պայմանները՝ կստանանք $y^*(x) = x$, որը խնդրի միակ էքստրեմալն է: Ցույց տանք, որ այն լոկալ մինիմումի կետ է: Դիցուք

$$h(\cdot) \in C_0^1[0, 1] :$$

Այդ դեպքում

$$I(y^* + h) = \int\limits_{0}^{1} (1 + h')^3\,dx = \int\limits_{0}^{1} dx + 3\int\limits_{0}^{1} h'\,dx +$$

$$+\int_0^1 (h')^2(3+h')\,dx = I(y^*) + \int_0^1 (h')^2(3+h')\,dx :$$

Այսպեղից, ակնհայտ է, որ եթե $\|h\|_1 < 3$, ապա

$$3 + h(x) > 0 \ \forall x \in [0,1] :$$

Հետևաբար՝

$$I(y^* + h) \geq I(y^*),$$

այսինքն՝ $y^*(\cdot)$-ը լոկալ մինիմումի կետ է:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Լուծել վարիացիոն հաշվի հետևյալ պարզագույն խնդիրները:

ա) $\displaystyle\int_0^1 ((y')^2 + y^2)\,dx \to min,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1 :$

բ) $\displaystyle\int_{-1}^0 (12xy - (y')^2)dx \to min,\ y(-1) = 1,\ y(0) = 0 :$

գ) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} ((y')^2 - y^2)\,dx \to min,\ y(0) = 1,\ y(\pi/2) = 0 :$

դ) $\displaystyle\int_0^1 (y^2 + (y')^2 + 2y\exp(x))\,dx \to min,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1 :$

ե) $\int\limits_0^{3/2}((y')^2+2y)\,dx \to min,\ y(0)=0,\ y(3/2)=1:$

զ) $\int\limits_0^{1}(4y\sin x - y^2-(y')^2)\,dx \to max,\ y(0)=y(1)=$
$=0:$

է) $\int\limits_0^{\pi/2}(6y\sin 2x + y^2 - (y')^2)\,dx \to max,\ y(0)=$
$=y(\pi/2)=0:$

2. **Ամենաարագ վայրէջքի խնդիրը**: Ուղղաձիգ հարթության մեջ միևնույն ուղղաձիգի վրա չգտնվող $O(0,0)$ և $B(x_1,y_1)$ կետերը միացնել այնպիսի ողորկ կորով (գտնել հավասարումը), որով ծանրության ուժի ազդեցությամբ շարժվող նյութական կետը վերևի O կետից առանց սկզբնական արագության կիասնի ներքևի B կետ ամենակարճ ժամանակում:

Լուծում: Դիցուք $y(x)$ ողորկ կոր է, որը միացնում է O և B կետերը: Դիցուք $M(x,y(x))$ կամայական կետ է կորի վրա: Ըստ էներգիայի պահպանման օրենքի՝ ունենք

$$mv^2/2=mgy(x),$$

որտեղ m-ը նյութական կետի մասսան է, իսկ v-ն՝ արագությունը M կետում, g-ն՝ ազատ անկման արագացումը: Այստեղից կստանանք

$$v=\sqrt{2gy(x)}:$$

Մյուս կողմից, ունենք

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}dy}{dt},$$

որտեղ ds-ը էլեմենտար աղեղի երկարությունն է: Հետևաբար,

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}} dx,$$

որտեղ $T(y)$-ը այն ժամանակամիջոցն է, որի ըն– թացքում կետը փրված կորով A կետից հասնում է B կետ: Քանի որ $1/\sqrt{2g} > 0$ հաստատուն է, ապա $T(y)$ ֆունկցիոնալի մինիմիզացիայի խնդրում կարելի է այն հաշվի չառնել: Վերջնականորեն կստանանք էքստրե- մումի հետևյալ խնդիրը.

$$I(y) \equiv \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{y(x)} dx \to min, \tag{5.1.6}$$

$$y(0) = 0,\ y(x_1) = y_1 :$$

Կազմենք Էյլերի հավասարումը: Քանի որ (5.1.6)-ում ենթաինտեգրալ L ֆունկցիոնալը բացահայտ կախված չէ x փոփոխականից, ապա Էյլերի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$L - y'L'_{y'} = C \text{ (տե՛ս, օրինակ՝ [2])} :$$

Այստեղից մեր օրինակի համար կունենանք

$$L - y'L'_{y'} = \frac{1+(y')^2}{\sqrt{y}} - y'\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}y} = C :$$

Պարզեցնելուց հետո կստանանք

$$y(1+(y')^2) = \frac{1}{C^2} = C_1 :$$

Նշանակենք

$$y' = ctgt \Rightarrow y = \frac{C_1}{1+(ctgt)^2} = C_1 sin^2 t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dy = 2C_1 sintcostdt :$$

Այստեղից կստանանք

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 sintcostdt}{ctgt} = 2C_1 sin^2 tdt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(t) = C_1/2(2t - sin2t) + C_2 :$$

Քանի որ $y(0) = 0$, ապա $C_2 = 0$: Նշանակելով $p = 2t$՝ կստանանք ցիկլոիդների ընտանիք

$$x = C_1/2(p - sinp),\ y = C_1/2(1 - cosp) :$$

C_1 հաստատունը որոշվում է այն պայմանից, որ ցիկլոիդը պետք է անցնի B կետով:
3. Բոլոր ողորկ կորերի մեջ, որոնք միացնում են հարթության $A(2,1)$ և $B(1,0)$ կետերը, գտել այն կորը, որով $v = x$ արագությամբ շարժվող նյութական կետը A կետից կհասնի B կետ ամենակարճ ժամանակում:

5.2 Լագրանժի մեթոդը վարիացիոն հաշվի խնդիրներում

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը.

$$I_0(y) \equiv \int_{x_0}^{x_1} f_0(x,y,y')\,dx \to extr, \qquad (5.2.1)$$

$$I_i(y) = \int_{x_0}^{x_1} f_i(x, y, y')\, dx = \alpha_i,\ i \in [1 : m], \qquad (5.2.2)$$

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 : \qquad (5.2.3)$$

Այս խնդիրը կոչվում է վարիացիոն հաշվի **իզոպե-րիմետրիկ** խնդիր: Ենթադրվում է, որ f_i, $i \in$ $\in [0 : m]$ ֆունկցիաները, որպես երեք փոփոխականի ֆունկցիաներ, երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի են R^3-ի վրա, Իսկ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ հաստատունները տրված թվեր են:
$y^{*1}[x_0, x_1]$ ֆունկցիան կոչվում է թույլատրելի, եթե այն բավարարում է (5.2. 2)-(5.2.3) պայմաններին:

Սահմանում 5.2.1: *Կասենք, որ թույլատրելի y^* ֆունկցիան (5.2.1)-(5.2.3) խնդրում լոկալ մինիմում է (լոկալ մաքսիմում է), եթե գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ բոլոր թույլատրելի y ֆունկցիաների համար, որոնք բավարարում են $\|y - y^*\|_1 < \delta$ պայմանին, տեղի ունի*

$$I_0(y) \geq I_0(y^*)\ (I_0(y) \leq I_0(y^*)$$

անհավասարությունը:
Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, y, y', \lambda) \equiv \lambda_0 f_0(x, y, y') + \lambda_1 f_1(x, y, y') + ... +$$

$$+ \lambda_m f_m(x, y, y'),$$

որտեղ $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) \in R^{m+1}$:

Թեորեմ 5.2.1: *Դիցուք $y^*(x)$ ֆունկցիան (5.2.1) խնդրի լուծում է: Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_0, ...,\ \lambda_m$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ այնպիսին, որ $y^*(x)$-ը բավարարում է*

$$-\frac{d}{dx}L'_{y'} + L'_y = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը $y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$ եզրային պայմաններով:

► Դիցուք y^* ֆունկցիան (5.2.1)-(5.2.3) խնդրում լոկալ մինիմում է (լոկալ մաքսիմումի դեպքը քննարկվում է անալոգ ձևով): Նշանակենք

$$\delta I_i(y^*, h) \equiv \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{I_i(y^* + \alpha h) - I_i(y^*)}{\alpha} :$$

Հեշտ է ցույց տալ, որ

$$\delta I_i(y^*, h) = \int\limits_{x_0}^{x_1} (-\frac{d}{dx}f'_{iy'} + f'_{iy})h(x)\,dx, \quad i \in [0 : m] :$$

Այսպեղից հետևում է, որ $\delta I_i(y^*, h)$ ֆունկցիոնալը h-ի նկատմամբ գծային է: Դիտարկենք հետևյալ գծային օպերատորը.

$$A : C_0^1 \to R^{m+1},$$

$$Ah \equiv (\delta I_0(y^*, h), \delta I_1(y^*, h), ...,\ \delta I_m(y^*, h)) :$$

ImA-ով նշանակենք A օպերատորի պատկերը: Հնարավոր է երկու դեպք.

1) $ImA \subset R^{m+1}$,

2) $ImA = R^{m+1}$:

Առաջին դեպքում ImA-ը R^{m+1}-ի սեփական ենթապարածությունն է: Հետևաբար, գոյություն ունի ոչ զրոյական այնպիսի $\lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_{m+1})$ վեկտոր, որը ուղղահայաց է այդ ենթապարածությանը, այսինքն՝

$$(\lambda, Ah) = 0 \Rightarrow \lambda_0 \delta I_0(y^*, h) + ... + \lambda_m \delta I_m(y^*, h) = 0$$

$$\forall h \in C_0^1 :$$

Այստեղից կստանանք

$$\int_{x_0}^{x_1} (-\frac{d}{dx} L'_{y'} + L'y) h(x)\, dx = 0 \; \forall h \in C_0^1 : \qquad (5.2.2)$$

Ինչպես պարզագույն խնդրում, այստեղ նույնպես կարելի է ցույց տալ, որ (5.2.2)-ից հետևում է, որ

$$-\frac{d}{dx} L'_{y'} + L'y = 0 :$$

Դիտարկենք երկրորդ դեպքը: Դիցուք $\{e_0, ..., e_m\}$ համակարգը բազիս է կազմում R^{m+1} պարածությունում: Ընտրենք $h^0, h_1, ..., h_m$ ֆունկցիաները այնպիսին, որ

$$\delta I_j(y^*, h_i) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } i = j; \\ 0, & \text{եթե } i \neq j : \end{cases}$$

Կազմենք հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} \varphi_0(\beta_0, ..., \beta_m) \equiv I_0(y^* + \sum_{j=0}^m \beta_j h_j) = I_0(y^*) - \varepsilon, \\ \\ \varphi_i(\beta_0, ..., \beta_m) \equiv I_i(y^* + \sum_{j=0}^m \beta_j h_j) = \alpha_i, \; i \in [1 : m] : \end{cases} \qquad (5.2.3)$$

Այս համակարգում ε-ը պարամետր է: Ունենք

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta_j}(0) = \delta I_i(y^*, h_j) :$$

Այսպեղից հետևում է, որ (5.2.3) համակարգը բավարարում է հակադարձ արտապատկերումների մասին թեորեմի բոլոր պայմաններին (տե՛ս, օրինակ՝ [2], էջ 31): Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի վեկտոր ֆունկցիա՝ $\beta(\varepsilon) \equiv (\beta_0(\varepsilon), ..., \ \beta_m(\varepsilon))$, որ որոշված են զրո կետի ինչ որ մի շրջակայքում, այնպիսին, որ այդ շրջկայքում նա բավարարում է (5.2.3) համակարգին և $\beta(\varepsilon) \to 0$, երբ $\beta \to 0$: Հետևաբար, եթե ε պարամետրը դրական է, ապա կստանանք հակասություն, քանի որ y^*-ը (5.2.1) խնդրի լոկալ մինիմումի կետ է:

◀

Օրինակ (Էյլերի հավասարման լուծումը իզոպերիմետրիկ խնդրում գլոբալ մինիմումի կետ է):

$$I_0(y) = \int_0^1 (y')^2 \to min,$$

$$I_1(y) = \int_0^1 y\,dx = 0, \ y(0) = 0, \ y(1) = 1 :$$

Լուծում: Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան

$$L = \lambda_0 (y')^2 + \lambda_1 y :$$

Էյլերի հավասարումը այս ֆունկցիայի համար հետևյալն է.

$$-\frac{d}{dx}L'_{y'} + L'_y = 0 \Rightarrow -2\lambda_0 y'' + \lambda_1 = 0 :$$

Եթե $\lambda_0 = 0$, ապա $\lambda_1 = 0$ և Լագրանժի բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի: Այդ դեպքում թույլատրելի էքստրեմալներ չկան: Էյլերի հավասարման մեջ փեղադրենք $\lambda_0 = 1$: Այդ դեպքում այդ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի $y(x) = C_1x^2 + C_2x + C_3$ ֆունկցիան: $C_1,\ C_2,\ C_3$ անորոշ գործակիցները որոշենք եզրային և իզոպերիմետրիայի հետևյալ պայմաններից.

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0, \\ y(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1, \\ \int\limits_0^1 y dx = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 (C_1x^2 + C_2x)\, dx = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1/3 + C_2/2 = 0 :$$

Այսփեղից կստանանք միակ թույլատրելի էքստրեմալը՝

$$y^*(x) = 3x^2 - 2x :$$

Ապացուցենք, որ այն գլոբալ մինիմումի կետ է: Դիցուք $y(\cdot)$ թույլատրելի ֆունկցիա է: Այդ դեպքում

$$y(\cdot) - y^*(\cdot) = h(\cdot) \in C_0^1[0,1] \text{ և } \int\limits_0^1 h\, dx = 0 :$$

Ունենք՝

$$I_0(y(\cdot)) - I_0(y^*(\cdot)) = \int\limits_0^1 ((y^*)' + h')^2\, dx - \int\limits_0^1 ((y^*)')^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 2(y^*)'hdx + \int\limits_0^1 (h')^2 dx \geq 2\int\limits_0^1 (y^*)'h'\, dx :$$

Կատարելով մասերով ինտեգրում՝ կստանանք

$$\int_0^1 (y^*)'h'\,dx = \int_0^1 (y^*)\,dh = y^*h\Big|_0^1 - \int_0^1 (y^*)''h\,dx =$$

$$= -6\int_0^1 h\,dx = 0:$$

Այսպիսով,

$$I_0(y^*(\cdot)) \geq I_0(y^*(\cdot))$$

ցանկացած թույլատրելի $y(\cdot)$ ֆունկցիայի համար:

Օրինակ (Դիդոնայի խնդիրը մաքսիմալ մակերեսով սեղանակերպի մասին):
Տրված է $f(x)$ ֆունկցիան $[-x_0, x_0]$ հատվածի վրա: Գրաֆիկը ներկայացնող կորի երկարությունը հաստատուն է: Գտնել գրաֆիկի տեսքը այնպես, որ կորագիծ սեղանի մակերեսը լինի մեծագույն:

Այս խնդիրը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

$$\int_{-x_0}^{x_0} y(x)\,dx \to max,$$

$$\int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = l, y(-x_0) = y(x_0) = 0:$$

Լուծում: Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան

$$L(y, y', \lambda) = \lambda_0 y + \lambda_1\sqrt{1+(y')^2}:$$

Քանի, որ Լագրանժի ֆունկցիան բացահայտ կախված չէ x փոփոխականից, ապա Էյլերի հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը.

$$L - y'L'_{y'} = C \Rightarrow \lambda_0 y - C = \frac{-\lambda_1}{\sqrt{1+(y')^2}} : \quad (5.2.4)$$

Այստեղից հետևում է, որ եթե $\lambda_0 = 0$, ապա կամ $\lambda_1 = 0$, կամ $y' = 0$:
Առաջին դեպքը հնարավոր չէ, որովհետև Լագրանժի գործակիցները միաժամանակ զրո լինել չեն կարող: Երկրորդ դեպքում, հաշվի առնելով եզրային և իզոպերիմետրայի պայմանները, կունենանք

$$y^*(x) \equiv 0, \; l = 2x_0 :$$

Եթե $\lambda_0 = 1$, ապա նշանակելով $y' = tgt$, (5.2.4)-ից կստանանք`

$$y(t) - C = -\lambda_1 \cos t : \quad (5.2.5)$$

Մյուս կողմից, ունենք

$$\frac{dy}{dx} = tgt \Rightarrow dx = \frac{dy}{tgt} \Rightarrow x(t) - C_1 = \lambda_1 \sin t : \quad (5.2.6)$$

(5.2.5)-(5.2.6) հավասարություններից հետևում է, որ

$$(x - C_1)^2 + (y - C)^2 = \lambda_1^2 :$$

Եզրային պայմաններից ստանում ենք, որ $C_1 = 0$: Այսպիսով, եթե $l < 2x_0$, ապա խնդիրը լուծում չունի: Եթե $l = 2x_0$, ապա $y^*(x) \equiv 0$: Եթե $l > 2x_0$ և խնդիրը ունի օպտիմալ լուծում, ապա նրա գրաֆիկը պետք է ունենա շրջանագծային աղեղի տեսք: Այդ շրջանագիծը անցնում է $(-x_0, 0)$ և $(x_0, 0)$ կետերով, իսկ նրա կենտրոնը գտնվում է OY առանցքի վրա: Կարելի է ցույց տալ, որ եթե $l > \pi x_0$, ապա խնդիրը օպտիմալ լուծում չունի:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Լագրանժի գործակիցների մեթոդով լուծել վարիացիոն հաշվի հետևյալ իզոպերիմետրիկ խնդիրները:

ա) $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to min,\ \int\limits_0^1 y\,dx = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1:$

բ) $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to min,\ \int\limits_0^1 xydx = 0,\ y(0) = y(1) = 0:$

գ) $\int\limits_0^\pi (y')^2\,dx \to min,\ \int\limits_0^\pi ysinx\,dx = 0,\ y(0) = y(\pi) = 1:$

դ) $\int\limits_0^\pi (y')^2\,dx \to min,\ \int\limits_0^\pi ycosxdx = \pi/2,\ y(0) = 1,\ y(\pi) = -1:$

ե) $\int\limits_0^\pi ysinx\,dx \to min,\ \int\limits_0^\pi (y^{'})^2\,dx = 3\pi/2,\ y(0) = 1,\ y(\pi) = \pi$:

5.3 Վարիացիոն հաշվի դասական իզոպերիմետրիկ խնդիրը

Խնդիր: Ապացուցել, որ l երկարության կտոր առ կտոր ողորկ, պարզ հարթ փակ կորերի մեջ ամենամեծ մակերեսը զբաղեցնում է շրջանագիծը:

Լուծում: Դիցուք

$$x = x(s),\ \ y = y(s),\ s \in [0, l]$$

կորի պարամետրական հավասարումներն են: Հաշվի առնելով փոփոխական աղեղի երկարության դիֆերենցիալի և մակերեսի հայտնի բանաձևերը՝ կարելի է տալ խնդրի հետևյալ մաթեմատիկական ձևակերպումը.

$$S(x, y) = \int\limits_0^l x(s)\frac{dy}{ds}\,ds \to max,\ \ (\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 = 1\ :$$

$x(s)$ և $y(s)$ ֆունկցիաները ներկայացնենք Ֆուրիեի շարքով՝

$$x(s) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2\pi n}{l}s + b_n \sin\frac{2\pi n}{l}s),\ \ (5.3.1)$$

$$y(s) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos\frac{2\pi n}{l}s + d_n \sin\frac{2\pi n}{l}s)\ \ (5.3.2)\ :$$

Այստեղից այս ֆունկցիաների ածանցյալների համար կունենանք հետևյալ բանաձևերը.

$$\frac{dx}{ds} = \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{2\pi n}{l}a_n \sin\frac{2\pi n}{l}s + \frac{2\pi n}{l}b_n \cos\frac{2\pi n}{l}s), \tag{5.3.3}$$

$$\frac{dy}{ds} = \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{2\pi n}{l}c_n \sin\frac{2\pi n}{l}s + \frac{2\pi n}{l}d_n \cos\frac{2\pi n}{l}s : \tag{5.3.4}$$

Հայտնի է նաև, որ եթե α_n, β_n, $n = 0, 1, 2, ...$ թվերը f ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն են, իսկ γ_n, δ_n, $n = 0, 1, 2, ...$ թվերը՝ φ-ի գործակիցներն են, ապա

$$\frac{2}{l}\int_0^l f(s)ds = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2),$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l f(s)\varphi(s)ds = \frac{1}{2}\alpha_0\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\gamma_n + \beta_n\delta_n) :$$

Այստեղից, նկատի ունենալով նաև (5.3.3)-(5.3.4) բանաձևերը, հարթ պատկերի մակերեսի համար կստանանք հետևյալ բանաձևը.

$$S = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n) : \tag{5.3.5}$$

Քանի որ

$$\int_0^l ((\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2)\, ds = l,$$

ապա, հաշվի առնելով նաև ածանցիալների (5.3.3)-(5.3.5) բանաձևերը, կստանանք, որ կորի l երկարությունը պետք է բավարարի հետևյալ հավասարմանը.

$$l = \frac{2\pi^2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) : \qquad (5.3.6)$$

Մակերեսի (5.3.5) և կորի երկարության (5.3.6) բա– նաձևերից հետևում է, որ

$$\frac{l^2}{4\pi} - S = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 +$$
$$+(n^2-1)(c_n^2 + d_n^2)) \geq 0 : \qquad (5.3.7)$$

Այսպիսով ստացանք հանրահայտ հետևյալ իզոպերի- մետրիկ անհավասարությունը.

$$S \leq \frac{l^2}{4\pi} :$$

Պարզ է, որ (5.3.7) անհավասարությունը կվերածվի հավասարության, երբ

$$a_1 = d_1,\ b_1 + c_1 = 0,\ a_n = b_n = c_n = d_n = 0,$$
$$n = 2, 3, ... :$$

Այստեղից

$$x = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos s + b_1\sin s,$$
$$y = \frac{1}{2}c_0 - b_1\cos s + a_1\sin s,$$

այսինքն՝

$$(x - \frac{1}{2}a_0)^2 + (y - \frac{1}{2}c_0)^2 = a_1^2 + b_1^2 = \frac{l^2}{4\pi} :$$

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Դիցուք ունենք երկու ուռուցիկ քառանկյուններ, որոնց կողերի երկարությունները միևնույն a, b, c, d թվերն են: Ենթադրենք նրանցից մեկին կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Ապացուցել, որ նրա մակերեսը մեծ է կամ հավասար մյուս քառանկյան մակերեսից:
2. Տրված պարագծով ուռուցիկ n- անկյուն բազմ–անկյունների մեջ գտնել այն բազմանկյունը, որի մակերեսն ամենամեծն է:
3. Տրված շրջանին ներգծել ամենամեծ մակերեսով n- անկյուն բազմանկյուն:
4. Դիտարկենք l երկարությամբ բոլոր այն հարթ ողորկ կորերը, որոնց A սկզբնակետը և B վերջնակետը գտնվում են հարթության տրված L ուղղի վրա, իսկ կորերը ընկած են L ուղղի միևնույն կիսահարթության մեջ (տարբեր կորերի համար A և B կետերը կարող են լինել տարբեր): Գտնել այն կորը, որով և $[A, B]$ հատվածով սահմանափակված պատկերի մակերեսը լինի մեծագույն:

5.4 Էքստրեմումի բավարար պայմանները վարիացիոն հաշվի խնդիրներում

Այժմ բերենք վարիացիոն հաշվի պարզագույն խնդ-րի օրինակ, ըստ որի Էյլերի հավասարումը ունի միակ լուծում, որը էքստրեմում չէ: Այսինքն՝ Էյլերի հավասարումը էքստրեմումի միայն անհրաժեշտ պայման է:

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը.

$$I(y) \equiv \int\limits_0^{3\pi/2} ((y')^2 - y^2)\, dx \to min,\ y(0) = y(3\pi/2) = 0 :$$

Էյլերի հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը.

$$y'' + y = 0 \Rightarrow y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x :$$

Հաշվի առնելով խնդրի եզրային պայմանները՝ կստանանք $y^*(x) \equiv 0$: Դիտարկենք ֆունկցիաների

$$y_n(x) = \frac{1}{n} \sin(\frac{2x}{3})$$

հաջորդականությունը: Ակնհայտ է, որ այս ֆունկցիաները թույլատրելի են և

$$y_n(\cdot) \xrightarrow{C^1} y^*(\cdot) :$$

Մյուս կողմից ունենք

$$I(y_n) = -\frac{5\pi}{n^2} < 0 = I(y^*),$$

այսինքն y^*-ը լոկալ մինիմումի կետ չէ:

Այժմ բերենք բավարար մի պայման, որով ստուգվում է, թե երբ Էյլերի հավասարման լուծումը կլինի լոկալ մինիմումի կետ: Դիցուք $y^*(x)$-ը վարիացիոն հաշվի պարզագույն խնդրի Էյլերի հավասարման լուծում է: Նշանակենք

$$P(x) \equiv L''_{y'y'}(x, y^*(x), (y^*(x))'),$$

$$Q(x) = -\frac{d}{dx} L''_{yy'}(x, y^*(x), (y^*(x))') +$$

$$+ L''_{yy}(x, y^*(x), (y^*(x))') :$$

Կազմենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը, որը կոչվում է Յակոբիի հավասարում.

$$\frac{d}{dx}(P\frac{dh}{dx}) - Qh = 0 : \qquad (5.4.1)$$

Դիցուք $y^*(x)$ էքստրեմալը բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

- $y^*(x)$-ը բավարարում է **Յակոբիի պայմանին**, եթե (5.4.1) հավասարումը սկզբնական $h(x_0) = 0$ պայմանով ունի ոչ տրիվիալ այնպիսի $h(x)$ լուծում, որ

$$h(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in (x_0, x_1] :$$

- $y^*(x)$-ը բավարարում է **Լեժանդրի պայմանին**, եթե

$$P(x) > 0 \, \forall x \in [x_0, x_1] :$$

Ճշմարիտ է հետևյալ պնդումը (տե՛ս, օրինակ՝ [1-2]):

Թեորեմ 5.4.1: *Դիցուք $y^*(x)$-ը (5.1.1) վարիացիոն հաշվի պարզագույն խնդրի Էյլերի հավասարման լուծումն է և բավարարվում են Յակոբիի և Լեժանդրի պայմանները:*

Այդ դեպքում $y^*(x)$-ը (5.1.1) խնդրում լոկալ մինիմումի կետ է:

Օրինակ (Կարճագույն ճանապարհի խնդիրը):

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx \to min,\ y(0)=0,\ y(1)=1: \tag{5.4.2}$$

Լուծում: Քանի որ այստեղ L ֆունկցիան բացահայտ կախված չէ x փոփոխականից, ապա Էյլերի հավա–սարումը ունի հետևյալ տեսքը.

$$L-y'L'_{y'}=C \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2}-\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}=C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x)=C_1x+C_2:$$

Հաշվի առնելով (5.4.2) եզրային պայմանները՝ կստանանք $y^*(x)=x$: Ստուգենք Յակոբիի պայմանը: Ունենք

$$Q(x)=L''_{yy}-\frac{d}{dx}L''_{yy'}\equiv 0,$$

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{1+((y^*)')^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}:$$

Յակոբիի հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{d^2h}{dx^2}=0:$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$h(x)=C_1x+C_2:$$

Ուստի $h(x)=C_1x,\ C_1\neq 0$ ֆունկցիան $h(0)=0$ սկզբնական պայմանով Յակոբիի հավասարման ոչ փիիվիալ լուծում է, որը զրո չի դառնում $(0,1]$ կիսաբաց միջակայքի ոչ մի կետում: Հետևաբար, Յակոբիի բավարար պայմանը տեղի ունի: Լեժանդրի պայմանը նույնպես տեղի ունի, քանի որ $P(x) \equiv 1/2\sqrt{2} > 0$: Այսպիսով, $y^*(x) = x$ ֆունկցիան կարճագույն ճանապարհի խնդրի լուծումն է:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Օգտագործելով Յակոբիի և Լեժանդրի պայմանները՝ լուծել վարիացիոն հաշվի հետևյալ խնդիրները:

ա) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}((y')^2 - y^2)\,dx \to min,\ y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1$:

բ) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}((y')^2 - y^2 + 4ycosx)\,dx \to min,\ y(0) = 0,\ y(\pi/2) = \pi/2$:

գ) $\displaystyle\int_0^{1}((y')^2 + y^2 + 4ysh(x))dx \to min,\ y(0) = -1,\ y(1) = 0$:

դ) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}((y')^2 - 4y^2)\,dx \to min,\ y(0) = 0,\ y(\pi/4) = 1$:

ե) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(y^2 - 2(y')^2 + 2y)\,dx \to min,\ y(0) = y(\pi/2) = 0$:

Գրականություն

[1] **В.М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин**, Оптимальное управление, Наука, М., 1979.

[2] **В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров**, Сборник задач по оптимизации, Наук, М., 1984.

[3] **И. Л. Акулич**, Математические программирование в примерах и задачах, Высшая школа, М., 1986.

[4] **Ф. П. Васильев**, Численные методы решения экстремальных задач, Наука, М., 1980.

[5] **Е.С. Половинкин Е.С., М. В. Балашов**, Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа, физматлит, М., 2004.

[6] **А. В. Пантелеев, Т.А. Летова,** Методы оптимизации в примерах и задачах, Высшая школа, М., 2002.

[7] **Б.Н. Пшеничный**, Выпуклый анализ и экстремальные задачи, Наука, М., 1980.

[8] **А. Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федеров**, Курс методов оптимизации, Наука, М., 1986.

[9] **К. Лейхтвейс**, Выпуклые множества, Наука, М., 1985.

[10] **В. В. Воеводин**, Линейная алгебра, Наука, М., 1987.

[11] **R.T. Rockafellar , J.B. Roger,** Variational Analisis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.

[12] **Վ. Ավետիսյան, Մ. Պողոսյան,** Վարիացիոն հաշիվ և օպտիմալ կառավարում (դասախոսություններ), ԵՊՀ հրատ., Երևան, 2008:

[13] **Վ. Ռ. Բարսեղյան**, Վարիացիոն հաշիվ, ԵՊՀ հրատ., Երևան, 2011:

ՌԱՖԻԿ ԱՂԱՍՈՒ ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՕՊՏԻՄԻԶԱՑԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

Համակարգչային ձևավորող՝ Ռ. Ա. Խաչատրյան
Կազմի ձևավորող՝ Ա. Պատվականյան
Հրատ. սրբագրող՝ Լ. Հ. Հովհաննիսյան

Չափսը՝ 60x84 1/16: 8.375 տպ. մամուլ:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն

ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1

ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2014